Семинар 5

Monday, 20 February 2023 16:55

Sequential Probability ratio test (SPRT)

Пусть есть 2 вендора деталей

$\mu_1 = 15$ - время до поломки

$\mu_2 = 20$

Поступает коробка с деталями. Нужно определить, от какого они вендора.

Требование:

1) $\alpha_1 = 0.01$, т.е. если вендор A, то р-ть того, что мы скажем $B \le 0.01$
2) $\alpha_2 = 0.05$, т.е. если это вендор B, то р-ть того, что мы скажем $A \le 0.05$

Тогда нам нужно 2 теста (т.к. знаем, что $\mu_2 > \mu_1$, то односторонние)

1) Для вендора A

$H_0: \mu = \mu_1$ при $\alpha = 0.01$

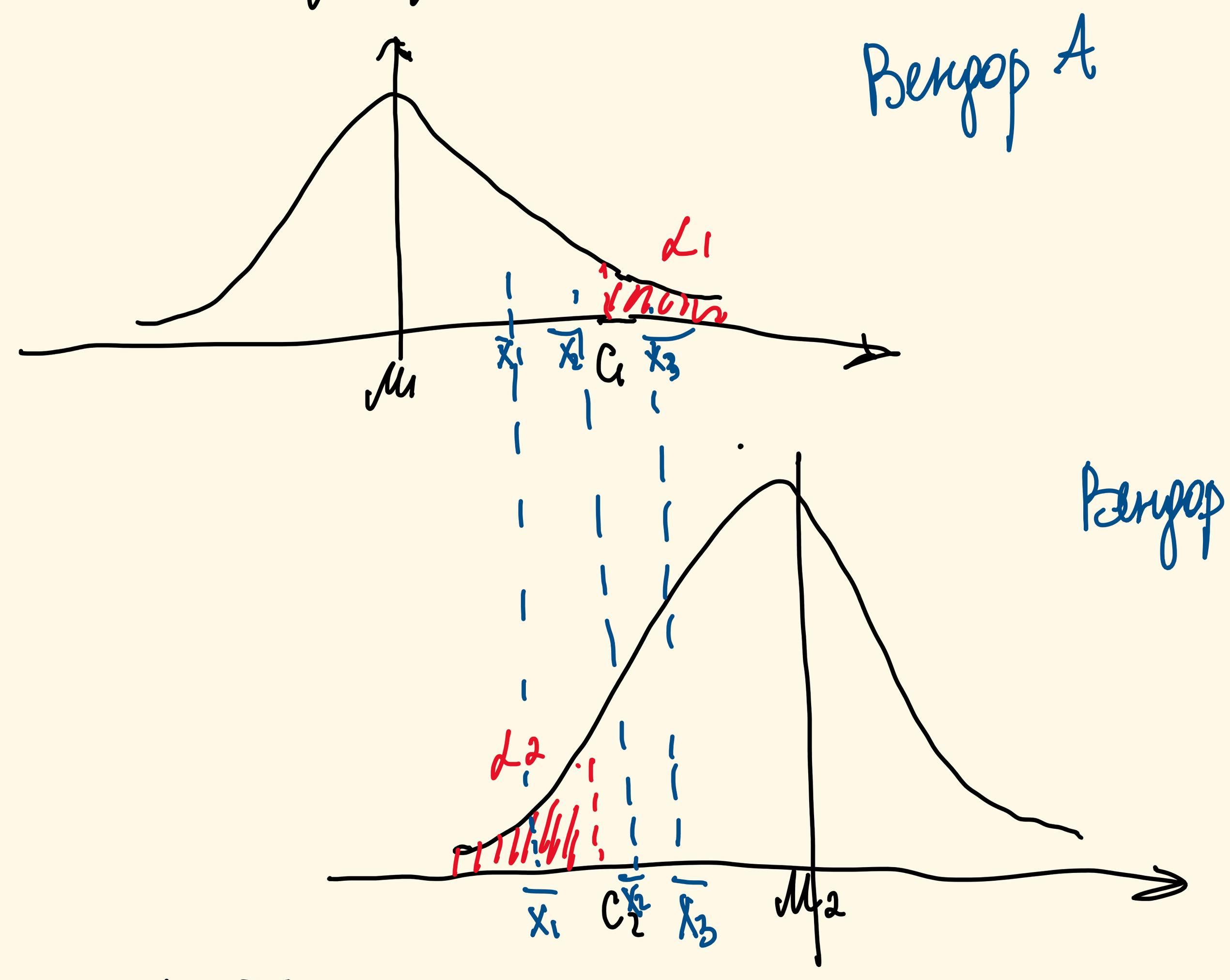
$H_1: \mu > \mu_1$

2) Для вендора B

$H_0: \mu = \mu_2$ с $\alpha_2 = 0.05$

$H_1: \mu < \mu_2$

Вендор A



Вендор B

1) $\bar{x}_1$

Для вендора A верна $H_0 \Rightarrow \mu = \mu_1$

Для вендора B $\bar{x}_1 < C_2 \Rightarrow$ верна H_1; $\mu < \mu_2$

Итог: вендор A

2) $\bar{x}_3$

A: H_0 отвергаем

B: H_0 принимаем $\Rightarrow$ вендор B

3) A: H_0 принимаем

B: H_0 принимаем $\Rightarrow$ не можем сделать вывод. Далее добавляем семплов

Идея: с ростом $n\uparrow$ $\bar{x}$ будет сходиться к $E(x) \Rightarrow$ получим решение однозначно: вендор A или B

Weibull Distribution

$$f(t) = \frac{b}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^b}$$

- η - описывает scale (растягивает плотность)
- b - описывает форму распред.

$H_0: \eta = \eta_1$

$H_1: \eta = \eta_2$

$$L(t_1 \dots t_n | \eta_1) = \prod_{i=1}^{n} f_{\eta_1}(t_i) = \left(\frac{b}{\eta_1^b}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left[(t_i)^{b-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\eta_1}\right)^b}\right]$$

$$L(t_1 \dots t_n | \eta_2) = \prod_{i=1}^{n} f_{\eta_2}(t_i) = \left(\frac{b}{\eta_2^{b}}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left[(t_i)^{b-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\eta_2}\right)^b}\right]$$

$$R = \ln\left(\frac{L(t_1 \dots t_n | \eta_2)}{L(t_1 \dots t_n | \eta_1)}\right) = \ln\left(\frac{\prod f_{\eta_2}(t_i)}{\prod f_{\eta_1}(t_i)}\right)$$

$$R = -nb\ln\frac{\eta_2}{\eta_1} + \frac{(\eta_2^b - \eta_1^b)}{(\eta_2\eta_1)^b}\sum_{i=1}^{n} t_i^b \qquad (*)$$

$$\underbrace{L}_{\text{хотим найти}} < R < \underbrace{U}$$

Если $R < L \Rightarrow$ верна H_0 $\eta = \eta_1$. $L(t_1 \dots t_n | \eta_1) > L(t_1 \dots t_n | \eta_2) \Rightarrow \frac{L_{\eta_2}}{L_{\eta_1}}$ маленькое

Если $R > U \Rightarrow$ верна H_1 $(\eta = \eta_2)$

Если $L < R < U$, то добавляем еще семплов

$$L = \ln\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}\right) \qquad U = \ln\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

Подставим в $(*)$ и выразим $\sum t_i^b$

$$\frac{(\eta_2\eta_1)^b}{(\eta_2^b - \eta_1^b)}\left[\ln\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}\right) + nb\ln\frac{\eta_2}{\eta_1}\right] < \sum_{i=1}^{n} t_i^b < \frac{(\eta_2\eta_1)^b}{(\eta_2^b - \eta_1^b)}\left[\ln\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_1}\right) + nb\ln\frac{\eta_2}{\eta_1}\right]$$

$n = 1$. Подставим, посчитаем

$n = 2$ ...