Семинар 6

вторник, 28 февраля 2023 г. 22:24

А-А тесты

Утверждение

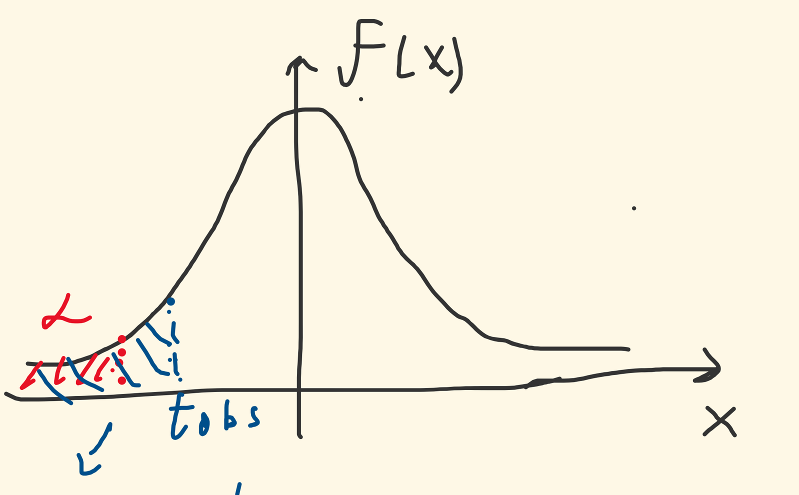
Если нулевая гипотеза верна, то распределение p-value равномерное на отрезке [0, 1]

$p \sim U[0;1]$

1) Рассмотрим левостороннюю гипотезу

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta < \theta_0$



2) Рассмотрим P-value как с.в. (ф-цию от тест статистики)

с.в. $P = F_T(T)$ — статистика с.в.

ф-ция распределения при H_0

$p = F_T(t_{obs})$

взяли F_T^{-1} от обеих частей

ф-ция распред. p-value

$$F_P(p) = Pr(P < p) = Pr(F_T(T) < p) = Pr(T < F_T^{-1}(p)) =$$
$$= F_T(F_T^{-1}(p)) = p$$

равномерное распредел.

$X \sim U[a, b]$

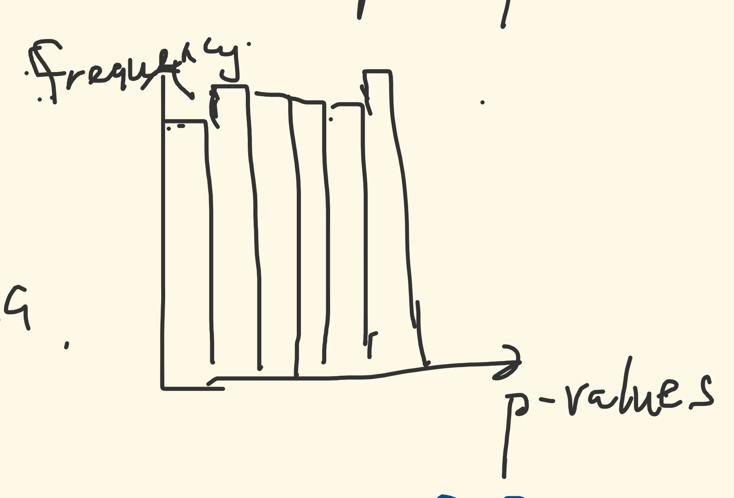
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & [a;b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$X \sim U[0;1]$

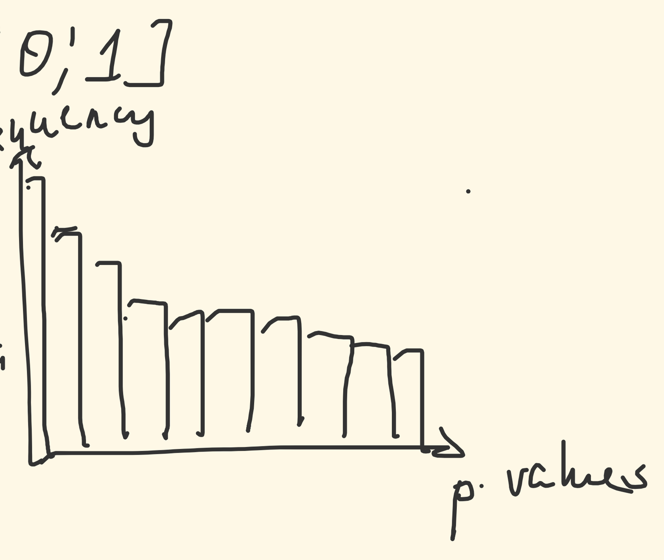
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0;1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

То есть $F_T(p) = p \Rightarrow U \sim [0;1]$

H_0 верна



H_0 не верна



MDE и размер выборки

Как посчитать длительность эксперимента?

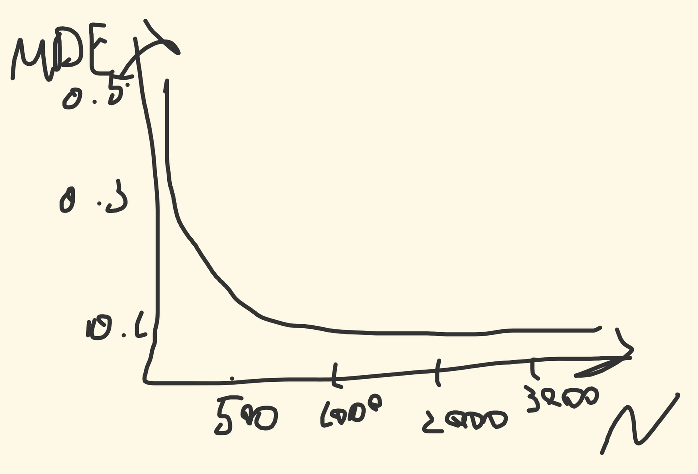
Что нужно знать?

1) E или MDE — минимальная величина эффекта
Все, что меньше MDE не стат. значимо, так как рандом

2) P(OIP) и P(O2P)
α и β

Если p-value > α, это не значит, что нет эффекта. Эффект может быть, но он не больше, чем MDE для α, β, σ^2

Чем меньший MDE мы хотим, тем больше наблюдений нам нужно. То есть чем больше наблюдений, тем выше точность



Как посчитать необходимое количество наблюдений?

Будем рассматривать двусторонний t-test

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Что нам нужно задать:

1) P(OIP) α
2) Мощность $= (1-\beta)$ P(O2P)
3) Оценить σ по данным / истории
4) Задать минимальный размер эффекта, который мы считаем значимым

$MDE = \mu_1 - \mu_2$

$$n_g = \frac{(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{MDE^2} = \frac{(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$$

При равных дисперсиях (обычно предполагаем, что так):

$$n_g = 2(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2 \cdot \left(\frac{\sigma}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2$$ для 1 группы

$\boxed{N = 2 \cdot n_g}$ — обе группы

Обычно

$\alpha = 0.05$; $Z_{\alpha/2} = 1.96$

$\beta = 0.2$; $Z_\beta = 0.8416$

$$n_g = 2 \cdot (1.96 + 0.8416)^2 \left(\frac{\sigma}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 = 2 \cdot 7.849 \left(\frac{\sigma}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 \approx$$
$$\approx 16 \cdot \left(\frac{\sigma}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2$$

Пример

Хотим узнать, как влияют фрукты на уровень холестерина

μ_1 — средний уровень холестерина, кто ел много фруктов

μ_2 — средний уровень, кто не ел фрукты

$H_0: \mu_0 - \mu_1 = 0$

$H_1 = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$\alpha = 0.05$

$\beta = 0.2$

$\sigma = 1$ (посчитали по прошлым исследованиям)

$MDE = \mu_1 - \mu_2 = 0.7$ считаем стат. значимым

$$n_g = 2(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2 \cdot \left(\frac{\sigma}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 = 2 \cdot (1.96 + 0.8416)^2 \cdot \left(\frac{1}{0.7}\right)^2 =$$
$$= 32.036 \approx 33$$ на группу $\Rightarrow N = 33 \cdot 2 = 66$

Если не знаем σ

1. Взять из похожих исследований
2. Запустить пилот и рассчитать по нему (дорого)
3. Обозначить $MDE = \mu_1 - \mu_2$ как процент от σ

$$n_g = 2(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2 \left(\frac{\sigma}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2$$

Пусть $\sigma' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$

Тогда $n_g = 2 \cdot (Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2 \left(\frac{1}{\sigma'}\right)^2$

Если $\sigma = 1$, то $\mu_1 - \mu_2$ будет в единицах стандартного отклонения

Например, $\sigma = 1$ и $\mu_1 - \mu_2 = 0.7$ значит, что мы ожидаем увидеть разницу в средних размером в 70% от стандартного отклонения