Оценка качества численного решения уравнения осцилляций нейтрино в среде

$\boxed{\text{Кучеров Д.А.}}$, науч.рук. Ломов В.П.

Иркутск, ИГУ

Задачи работы

В работе поставленно несколько задач:
1. Изучить теорию нейтринных осцилляций в среде, в частности уравнение нейтринных осцилляций в веществе.
2. Попытаться воспроизвести вычисления с помощью методов разложения Магнуса и Рунге-Кутты.
3. Проанализировать полученные решения.
4. Сделать вывод об эффективности используемых методов.

Нейтрино можно классифицировать по двум критериям: по массе и по их связи с заряженными лептонами(по флейворам). В физике элементарных частиц, термин "флейвор"используется для описания различных типов, или "вкусов элементарных частиц. Этот термин часто применяется в отношении кварков и лептонов, включая нейтрино.
Нейтрино существуют в трех флейворах: электронные, мюонные и тау-нейтрино. Каждый флейвор ассоциируется с соответствующим лептоном (электроном, мюоном и тау-лептоном). Эти флейворы нейтрино уникальны тем, что они могут меняться один в другой в процессе нейтринных осцилляций. Переход нейтрино из одного флейвора в другой описывается уравнением:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i}|\nu_i\rangle \tag{1}$$

Уравнение нейтринных осцилляций

Когда активные флэйворные нейтрино распространяются в веществе, на их эволюционное уравнение влияют эффективные потенциалы из-за когерентного взаимодействия со средой посредством реакций нейтрального и заряженного токов. Таким образом, влияние среды можно описать в терминах потенциалов, в которых распространяются нейтрино, зависящим от состава среды, электрической нейтральности, намагниченности (ориентации спинов), скоростей частиц среды. Учитывая данные обстоятельства, было выведено уравнение:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} = [H_0 + \nu(\xi)W]\psi \tag{2}$$

Оно имеет несколько особенностей: уравнение матричное, состоящее из трех компонент, $H(\xi) = [H_0 + \nu(\xi)W]$ это унитарная матрица гамильтониана эволюцииб а также сохранение нормировки. Данное уравнение на сегодняшний день не имеет аналитического решения. А численное интегрирование достаточно трудоемкий процесс.

Метод разложения Магнуса

Одним из способов интегрирования уравнения (2) является метод разложения Магнуса. Этот метод относится к так называемым геометрическим интеграторам, которые заточены под решения таких дифференциальных уравнений как (2). Отличительной особенностью разложения Магнуса является то, что приближенное решение, предоставляемое процедурой, разделяет с точным решением соответствующие геометрические свойства. Более конкретно, для рассматриваемого случая соответствующее свойство соответствует унитарному характеру оператора эволюции времени и, следовательно, норме вектора решения. Но любой метод требует оценки эффективности, это можно проверить, сравнив с другим методом, коем у нас будет выступать метод Рунге-Кутты.

Сравнение

Для оценки точности мы воспользуемся одним замечательным свойством уравнения (2), а именно сохранение нормировки, то есть решение имеет смысл вероятности, а это значит, что будет справедливо выражение $\sum_i |\psi_i|^2 - 1 = 0$. Далее интегрируем уравнение (2), используя метод Рунге-Кутты реализованный в wolfram mathematica (используемая версия 13.2.1.0), в диапазоне от 0,1 до 1. Затем, записываем в файл решение в диапазоне от 0,101 до 1 с шагом 10^{-3}. С помощью python строим график функции $F(\xi) = \sum_i |\psi_i(\xi)|^2 - 1$
Проводим подобную процедуру и для метода разложения Магнуса.

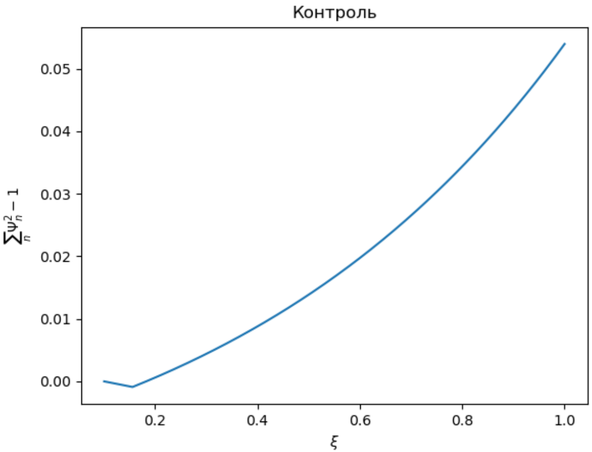

Рис.: График контроля нормировки для решения полученного с помощью wolfram mathematica

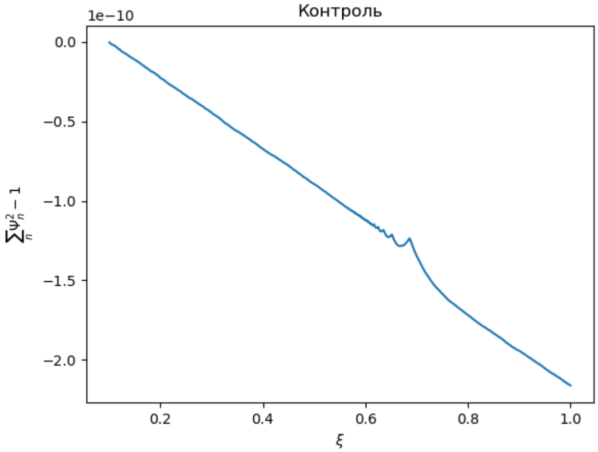

Рис.: График контроля нормировки для решения полученного с помощью метода разложения Магнуса

Вывод

Из полученных графиков, можно сделать вывод, что метод разложения Магнуса является достаточно эффективным методом интегрирования уравнения (2), в сравнении с методом Рунге-Кутты.