Теория игр

Рассматриваемые игры удовлетворяют условиям:
1) Игра с полной информацией. Оба игрока знают правила и всю информацию о состоянии игры. Нет информации, которая скрыта от игрока или от обоих игроков

2) Игра без вероятностей. В игре нет элемента случайности и исход любого хода можно предугадать

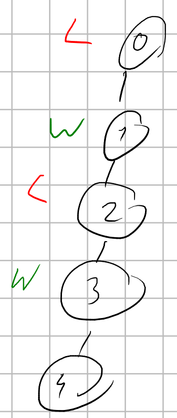
3) Игра пошаговая и конечная.

4) Правило оптимальной стратегии: у каждого игрока есть понимание, как построить оптимальную стратегию, и он играет в соответствии с ней.

Один из методов --- построение графа состояний. Он описывает состояния игры на разных её этапах.

Пример. Есть n камней. Каждый игрок должен вытащить некоторое количество камней (1, 3 или 4). Игрок, который не может вытащить камень, проигрывает. Состояние игры мы можем описать как размер пирамиды из камней.

Win Loose



Обрабатывая этот граф с помощью динамики, мы находим оптимальную стратегию и прогнозируем результат игры.

$\neg\exists$ переход в W $\Rightarrow$ состояние проигрышное

$\neg\exists$ переход в L $\Rightarrow$ состояние выигрышное

$\exists W \wedge \exists L \Rightarrow$ состояние неопределённое

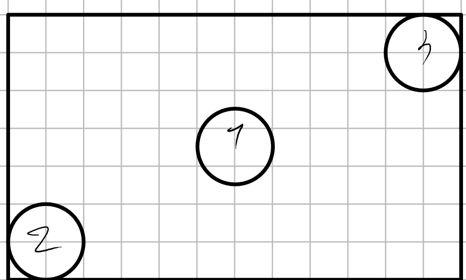
Если граф игры слишком большой, бесконечный или сложный, то можно попробовать методом симметричных стратегий. Он работает тогда и только тогда, когда при одинаковых действиях игроков есть редкие случаи ....

Метод требует построения соответствия "ход соперника --- ход игрока".

Пример задачи: https://codeforces.com/problemset/problem/197/A

Обычно симметричную стратегию находят для второго игрока, но здесь мы найдём её для первого.

В начале первый игрок ставит тарелку в центр. После любого хода противника мы симметрично отражаем позицию тарелки относительно центра.



Метод хорошо применяется в играх, где наблюдается чётность ходов.

Игра ним

Идея следующая: если есть ацикличный граф с полной информацией, в которой у обоих игроков есть одинаковые возможности хода, то мы всегда сможем свести эту игру к этому графу.

Состояние любой такой игры можно свести к состоянию игры в ним.

Суть игры ним. Есть n кучек из камней, каждый игрок может выбрать кучку и взять любое положительное число камней из неё. В течение хода мы можем взять любое количество камней от одного до размера этой кучи.

У всех игроков полная информация, элемента случайности нет, игра равноправная. В игре ним можно вывести критерий, по которому мы будем определять, какое состояние является выигрышным, а какое --- проигрышным.

Анализировать такую игру через граф затруднительно, так как возможных состояний чрезвычайно много. Несмотря на то, что их можно нормализовать и уменьшить, такой граф вряд ли возможно построить в принципе.

Критерий. Пусть размеры куч камней --- $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$S = a_1 \text{ xor } a_2 \text{ xor } \ldots \text{ xor } a_n$ – условие победы первого игрока.

$S = 0 \Rightarrow$ выигрывает второй игрок

$S \neq 0 \Rightarrow$ выигрывает первый игрок

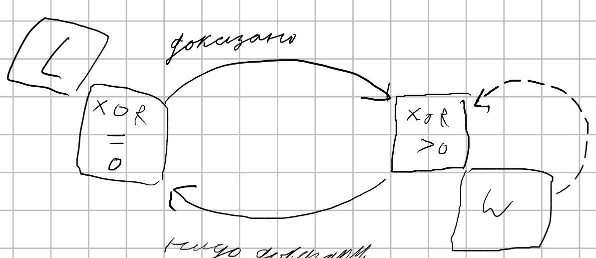
Состояния игры можно разделить на два класса

Что значит "сделать переход"? Давайте посчитаем xor

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \ldots a_n)$$

$$S = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge a_5 \wedge \ldots \wedge a_n = 0$$

$S = 0 \Rightarrow$ любой ход ведет к состоянию, где $\text{xor} \neq 0$ по определению операции.



$$
\begin{array}{r}
1\,1\,0 \\
\wedge\ 1\,0\,0 \\
\wedge\ 0\,1\,1 \\
\hline
0\,0\,1
\end{array}
$$

Пусть размеры кучек — 15 и 10

$$
\begin{array}{rl}
1111 & = 15 \\
\wedge\ 1010 & = 10 \\
\hline
0101 & > 0 \Rightarrow 5
\end{array}
\longrightarrow a_i - (a_i \text{ XOR } S) = T
$$

столько камней мы должны взять

Всегда можно найти ход, который приведёт в $S = 0$

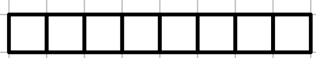
Рассмотрим классы задач про ним.

Ним с конечными увеличениями.
Есть набор куч камней с размерами. У первого игрока есть x камней, а у второго --- y. Ход совершается следующим образом:
1) Из одной из этих куч берётся некоторое количество камней и убирается
2) Можно перекинуть часть своих камней противнику

Анализировать эту игру надо как обычный ним. Её ответ снова зависит от xor. Поскольку стратегия симметричная, произошедшая модификация ни на что не влияет: на любое наше перекидывание куч противник может ответить тем же. Если бы мы могли увеличивать несколько куч камней, это уже было бы гораздо сложнее и интереснее.

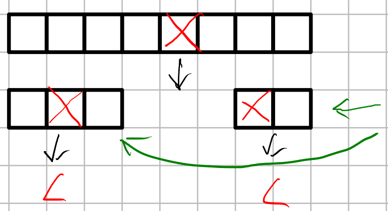
Теория Шпраго-Ганди (?). Любую игру можно свести к игре в ним.

Рассмотрим задачу: есть полоска, разделённая на n клеток. Игрок за ход может закрасить одну клетку. Соседние клетки закрашивать нельзя. Проигрывает тот, кому нечего закрашивать.



Предложенная игра с полной информацией, без элемента случайности, равноправная, ациклична и (проигрывает тот, кто не может сделать ход)*.

Шестое условие (*) не является формально необходимым, но без него мало смысла применять теорию Шпраго-Гранди.



мы получим несколько независимых игр, для каждой из которых можем применить Шпраго-Гранди.

Переходы могут вести как в атомарные состояния, так и

Превратим любое состояние в игру в ним с помощью функции Гранди.

gr(x) --- какому размеру кучи в ниме соответствует игра X?
Для данной задачи gr(4) = 0. Функция Гранди почти никогда не соответствует размеру исходной игры

gr(1) = gr(2) = gr(3)

Функция Гранди ещё менее интуитивная как xor

$gr = MEX(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min_{y \notin A} y \geq 0$, где $A = \bigcup_{i=1}^{n} a_i$

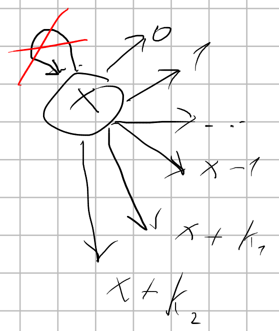
$gr(V) = MEX(gr(V_1), gr(V_2), \dots, gr(V_n))$

$gr(V_1 \vee V_2) = gr(V_1) \vee gr(V_2)$

Почему здесь MEX?

$\exists\, MEX(S) = x \iff 0 \in S,\ 1 \in S, \dots,\ x \notin S, \dots\ x+i \in S, \dots\ x+j \notin S, \dots$

Докажем, что игра размером x соответствует игре gr(x).



Никогда в состоянии нима не существует перехода „сам в себя"

a_1 xor a_2 xor ... xor $a_n = S$, $S' < S \Rightarrow \exists$ переход $S \to S'$

Функция gr(x) = xoR кучек - для самого нима

По индукции доказывается, что ∀ игры размера x ∃ gr(игры размера x) = gr(игра в ниме размера x).

Функция Гранди от нескольких атомарных игр — xor их gr.

$gr(0) = 0$ ∅

$gr(1) = 1$

$gr(2) = 1$

$gr(3) = 2$

$gr(4) = 0$

$gr(5) = 3$