Математический анализ
Учебное пособие для практических занятий
для студентов дневного отделения
Часть 3

Л.В. Сахно

Содержание

1 Двойные интегралы

1.1 Вычисление двойных интегралов.

Пусть функция f непрерывна в прямоугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$ Тогда двойной интеграл существует и справедливо равенство

$$\iint\limits_{P} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy. \tag{1}$$

Множество D назовем трапецией первого рода, если

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\Big\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$.

Если функция f непрерывна на D, то двойной интеграл существует и справедливо равенство

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{2}$$

Поменяв ролями x и y, можно определить трапеции второго рода, для которых справедливо аналогичное равенство.

В случае, если область D не является трапецией первого или второго рода, часто удается разбить ее на конечное число трапеций, не имеющим общих внутренних точек. Остается воспользоваться свойством аддитивности интеграла.

1. Вычислить двойные интегралы по указанным прямоугольникам D:

   1) $\iint\limits_G xydxdy,\ 3 \le x \le 5, 0 \le y \le 1;$
   2) $\iint\limits_G xy^2dxdy,\ 2 \le x \le 4, 0 \le y \le 1;$
   3) $\iint\limits_G \frac{y}{x}dxdy,\ 1 \le e \le 5, 4 \le y \le 6;$
   4) $\iint\limits_G (x-y)dxdy,\ 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 3;$
   5) $\iint\limits_G (x+y^2)dxdy,\ 2 \le x \le 3, 1 \le y \le 2;$
   6) $\iint\limits_G \frac{3y^2}{1+x^2}dxdy,\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1;$
   7) $\iint\limits_G \sin(x+y)dxdy,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2};$
   8) $\iint\limits_G (3yx^2-2x^3)dxdy,\ 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2;$
   9) $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x-y)^2},\ 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 4;$
   10) $\iint\limits_G xe^{xy}dxdy,\ 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0.$

   Для заданного множества G записать интеграл $\iint_G f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования.

2. G- треугольник, ограниченный прямыми:

   1) $x=0, y=0, 2x+3y=6;$
   2) $y=0, y=4x, x=5;$
   3) $x=6, y=6, x+y=3;$
   4) $x=a, y-kx=0, y+lx=0, a>0, k>0, l>0.$

3. G- четырехугольник, ограниченный прямыми $(a>0)$:

   1) $x=0, y=0, y=a, x+y=2a;$
   2) $x=0, x=a, y=x, x+y=3a;$

3) $y = 0, y = a, x + y = 0, x + y = 2a;$

4) $2y = x, 2y = x + 6, y = 2x, y = 2x - 3;$

5) $x = 0, y = 0, x - y = a, x + y = 2a.$

4. G ограничено линиями:

1) $y = x^2, x + y = 2;$

2) $x = 0, x = -\sqrt{y}, x = -\sqrt{2 - y};$

3) $y = 0, x = \sqrt{y}, , x + y = 6;$

4) $x = \sqrt{4 - y^2}, x = \sqrt{4y - y^2}, y = 2;$

5) $x = 0, x = 1, x = y^2, y = e^x;$

6) $x = 0, x = \pi/2, y = \sin x, y = 2 + \cos x.$

5. G задано неравенствами $(a > 0, R > 0)$:

1) $x^2 + y^2 \leq 2ax;$

2) $x^2 + y^2 \leq 2Ry, x \geq 0;$

3) $x^2 + y^2 \leq 4y, y \geq x;$

4) $x^2 + y^2 \leq R^2, x + y \geq R;$

5) $x^2 + y^2 \geq R^2, x^2 + y^2 \leq 2Ry;$

6) $x^2 + y^2 \geq 2x + 2y - 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$

7) $x^2 + y^2 \geq 2x + 2y - 1, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1;$

8) $y \geq x^2, y \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2};$

9) $(x + 1)^2 + y^2 \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1;$

10) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 1, x + y - 1 \leq 0, y \geq 0;$

11) $x^2 + y^2 \leq 1, x + y - 1 \leq 0, y \geq 0;$

12) $x^2 + y^2 \leq 1, x + y - 1 \leq 0, x + y + 1 \geq 0;$

6. Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и нарисовать множество интегрирования:

1)
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)dx;$$

3)
$$\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{e^x} f(x,y)dy;$$

2)
$$\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{x-a}^{3a-x} f(x,y)dy;$$

4)
$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx;$$

5)
$$\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{-2}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{2x-4}^{x} f(x,y)dy;$$

6)
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx;$$

7)
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx;$$

8)
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx;$$

9)
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy;$$

7. Изменить порядок интегрирования:

1)

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy, a > 0;$$

2)

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2+y} f(x,y)dx;$$

3)

$$\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{2x}^{(7x+10)/6} f(x,y)dy;$$

4)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)dy;$$

5)

$$\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)dy;$$

6)

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)dy;$$

7)

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\ln x}^{3x} f(x,y)dy;$$

8)

$$\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2-1}^{3+2x-x^2} f(x,y)dy;$$

9)

$$\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;$$

10)

$$\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2x^2-1} f(x,y)dy;$$

8. Выразить сумму повторных интегралов через один повторный интеграл, переменив порядок интегрирования:

1)

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx;$$

2)

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{x/2} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_{\sqrt{x^2-3}}^{x/2} f(x,y)dy;$$

3)
$$\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3 y} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)dx;$$

4)
$$\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} dx \int\limits_{-1}^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} dx \int\limits_{\sin x}^{1} f(x,y)dy.$$

Вычислить двойные интегралы по областям G, ограниченным указанными линиями:

9. $\iint\limits_G (x-y)dxdy,\ x=0, y=0, x+y=2;$

10. $\iint\limits_G xydxdy,\ y=0, y=x, x=1;$

11. $\iint\limits_G xydxdy,\ y=x^2, y^2=x;$

12. $\iint\limits_G xdxdy,\ y=x^3, x+y=2, x=0;$

13. $\iint\limits_G xydxdy,\ xy=6, x+y-7=0;$

14. $\iint\limits_G xy^2dxdy,\ x^2+y^2=4, x+y-2=0;$

15. $\iint\limits_G \sin(x+y)dxdy,\ y=x, x+y=\frac{\pi}{2}, y=0;$

Вычислить двойной интеграл:

16. $\iint\limits_D \sin(x-y)dxdy$, где D - треугольник с вершинами $A(1,1),\ B(3,5),\ C(7,3);$

17. $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, где D - треугольник с вершинами $A(3,1),\ B(1,5),\ C(7,3);$

18. $\iint\limits_D \cos(x-y)dxdy$, где D - треугольник с вершинами $A(1,1),\ B(3,-3),\ C(7,3);$

19. $\iint\limits_D \sin(x+2y)dxdy$, где D - треугольник с вершинами $A(-1,1),\ B(-3,5),\ C(-7,3);$

20. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2}dxdy, \quad D=\{0<x,\ x^3\le y\le x^2\};$

1.2 Замена переменных в двойных интегралах.

Пусть отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in G^*,$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область G^* на область D^*, причем якобиан

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

этого отображения в G^* отличен от нуля.

Если $D \subset D^*$ - квадрируемое замкнутое множество и $f(x, y)$ - функция, непрерывная на D или же ограниченная в D и непрерывная в D всюду, кроме некоторого множества меры нуль, то верна формула

$$\iint\limits_D f(x, y) dx dy = \iint\limits_G f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv, \qquad (3)$$

где G является прообразом множества D.

Наиболее часто при вычислении двойных интегралов используют переход к **полярным координатам** r, φ, которые связаны с декартовыми координатами равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

которые можно рассматривать как отображение замкнутой области

$$G^* = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0, +\infty), \ \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

на $D^* = \mathbb{R}^2$. Якобиан этого отображения равен

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

В интеграле $\iint\limits_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов, расставив пределы интегрирования в разных порядках (все параметры положительны):

21. $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq a^2\}$.

22. $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq a^2,\ y\geq 0\}$.

23. $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq a^2,\ y\leq 0\}$.

24. $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq ax\}$.

25. $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq ay\}$.

26. $D=\{(x,y): a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}, 0<a<b$.

27. $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq a^2,\ y\geq x\}$.

28. $D=\{(x,y): a^2\leq x^2+y^2\leq 4a^2\}, |x|-y\geq 0$.

29. D- треугольник с вершинами $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$.

30. D- треугольник с вершинами $O(0,0),\ A(1,1),\ B(-1,1)$.

31. D- треугольник с вершинами $O(0,0),\ A(1,0),\ B(1,1)$.

32. D- квадрат с вершинами $O(0,0),\ A(0,1),\ B(1,0),\ C(1,1)$.

В интеграле $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$

33. $D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leq 1,\ x^2+(y-1)^2\leq 1\}$.

34. $D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leq 1,\ 0\leq x\leq 1\}$.

35. $D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leq 1,\ 1\leq x\leq 2\}$.

36. $D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2\geq 1\}$.

37. $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1,\ x^2+(y-1)^2\leq 1\}$.

38. $D=\{(x,y): x^2+(y-1)^2\leq 1,\ -1\leq x\leq 0\}$.

39. $D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leq 1,\ y+x\geq 0\}$.

Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

40. $\iint\limits_D xy^2dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0\};$

41. $\iint\limits_D x^2ydxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0\};$

42. $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2,\ y \ge x\};$

43. $\iint\limits_D \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\};$

44. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}, \quad D = \{(x,y) : 9 \le x^2 + y^2 \le 25\};$

45. $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\};$

46. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 9, y \ge 0\};$

47. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2x\};$

48. $\iint\limits_D ydxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2x,\ x \ge y\};$

49. $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, x^2 + y^2 \le 2y\};$

50. $\iint\limits_D \left(\frac{y}{x}\right)^2dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\};$

Ввести новые переменные u и v и вычислить следующие интегралы:

51. $\iint\limits_D x^2y^2 + y^2dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1/x \le y \le 2/x,\ x \le y \le 3x\};$

52. $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x}dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1 - x \le y \le 3 - x,\ x/2 \le y \le 2x\};$

53. $\iint\limits_D (x^3+y^3)dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 \le y \le 3x^2,\ 1/x \le 2y \le 3/x\};$

54. $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : -1 \le x - y \le 1,\ 1/x \le y \le 2/x\};$

55. $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : x - 1 \le y \le x + 1,\ -x - 1 \le y \le -x + 1\};$

1.3 Вычисление площадей с помощью двойных интегралов.

Площадь (мера) квадрируемого множества D вычисляется по формуле

$$\mu(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

Вычислить площади областей, ограниченных линиями:

56. $y^2 = x + 1, x + y = 1.$

57. $xy = 4, x = 1, y = 2.$

58. $xy = 4, y = x, x = 4.$

59. $y = x^2 . 4y = x^2, y = 4.$

60. $y^2 = 4 + x, x + 3y = 0.$

61. $y = x^2 - 2x, y = x.$

62. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0.$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ либо обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi, y = br\sin^\alpha\varphi$, вычислить площадь области, ограниченной следующими кривыми:

63. $x^2 + y^2 = R^2.$

64. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

65. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3.$

66. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4).$

67. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2.$

68. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}.$

69. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}.$

2 Тройные интегралы.

2.1 Вычисление тройного интеграла

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

где функции $\varphi(x, y)$ и $z \leq \psi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы (такую область Q называют правильной в направлении оси Oz), то тройной интеграл по области Q существует, причем имеет место равенство

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (4)$$

Если область интегрирования Q не является правильной в направлении ни одной из координатных осей, то эту область следует разбить на части, которые являлись бы правильными.

Вычислить тройной интеграл.

70. $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{4} = 1$;

71. $\iiint\limits_V xdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$;

72. $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - \frac{z}{3} = 1$;

73. $\iiint\limits_V zdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} = 1$;

74. $\iiint\limits_V xdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $-\frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$;

75. $\iiint\limits_V zdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $-\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$;

76. $\iiint\limits_V xdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=1$;

2.2 Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функции

$$x=x(\xi,\eta,\zeta),\ y=y(\xi,\eta,\zeta),\ z=z(\xi,\eta,\zeta) \tag{5}$$

отображают область $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ на область $Q^* \subset \mathbb{R}^3$ и удовлетворяют условиям:

1) отображение является взаимно однозначным;
2) функции непрерывно дифференцируемы и в каждой точке $(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega^*$ якобиан отображения

$$J(\xi,\eta,\zeta)=\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в кубируемой замкнутой области $Q \subset Q^*$, то

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_\Omega f\big(x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta)\big)\big|J(\xi,\eta,\zeta)\big|d\xi d\eta d\zeta, \tag{6}$$

где Ω - прообраз области Q при отображении (5).

Наиболее употребительными криволинейными координатами в пространстве являются *цилиндрические координаты* и *сферические координаты.*

Цилиндрические координаты. Цилиндрические координаты r, φ, h связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h, \tag{7}$$

которые можно рассматривать как отображение замкнутой области

$$\Omega^* = \big\{(r,\varphi,h) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,+\infty),\ \varphi \in [0,2\pi],\ h \in \mathbb{R}\big\}$$

на $Q^* = \mathbb{R}^3$. Якобиан отбражения (7) легко вычисляется:

$$J(r,\varphi,h) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Сферические координаты. Сферические координаты r, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x = r\cos\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\cos\theta,\ z = r\sin\theta, \tag{8}$$

которые можно рассматривать как отображение замкнутой области

$$\Omega^* = \big\{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,+\infty),\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\big\}$$

на $Q^* = \mathbb{R}^3$.

Якобиан отбражения (8) равен

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta.$$

Вычислить интеграл, переходя к сферическим или цилиндрическим координатам.

77. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где $V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 8\}$;

78. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где $V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

79. $\iiint\limits_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, где $V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ z \ge 0\}$;

80. $\iiint\limits_V \frac{x}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где $V=\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ z\le 0\}$;

81. $\iiint\limits_V \frac{y}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где $V=\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\le 0\}$;

82. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где $V=\{1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ 0\le z\le 5\}$;

83. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где $V=\{(x^2+y^2)/2\le z\le 4\}$;

84. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)^2dxdydz$, где $V=\{(x^2+y^2)/2\le z\le 4\},\ x\ge 0\}$;

85. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)^2dxdydz$, где $V=\{x^2+y^2\le z\le 6,\ y\ge 0\}$;

86. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где $V=\{0\le z\le x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 6\}$;

87. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где $V=\{x^2+y^2\le z\le 4\},\ y\le\sqrt{3}x\}$;

Вычислить

88. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где $V=\{x^2+y^2+z^2\le a\sqrt{3}x,\ x^2+y^2+z^2\le ay,$ $z\ge 0\}$.

89. $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, где $V=\{x^2+y^2+z^2\ge R^2,\ x^2+y^2+z^2\le 2Rz\}$.

90. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2.3 Вычисление объемов с помощью тройных интегралов.

Объем (мера) кубируемого множества D вычисляется по формуле

$$\mu(D)=\iiint\limits_D dxdydz. \tag{9}$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

91. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$

92. $x=0,\ y=0,\ z=0\ , x+y=1,\ z=x^2+y^2.$

93. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

94. $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=a^2,\ z=0.$

95. $z=x^2+y^2,\ x=x^2+y^2,\ 2x=x^2+y^2,\ z=0.$

96. $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z.$

Найти объемы тел:

97. $x^2+y^2+z^2 \leq R^2.$

98. $0 \leq z \leq x^2,\ x+y \leq 5,\ x-2y \geq 2,\ y \geq 0.$

99. $x^2+y^2 \leq a^2,\ z \geq 0,\ x+y+z-4a \geq 0.$

100. $x^2+y^2 \leq a^2,\ x+y+z \leq a,\ z \geq 0.$

101. $z \geq 0,\ x+z \leq 1,\ x \geq y^2.$

3 Криволинейные интегралы.

3.1 Спрямляемые кривые.

Определение 3.1. *Пусть вектор-функция $\overline{\gamma}$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает значения в $\mathbb{R}^2$. Множество значений этой функции назовем непрерывной плоской кривой и обозначим ее символом L или подробнее $L_{\overline{\gamma}}$.*

Пусть $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$. Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\overline{\gamma}(t_i)-\overline{\gamma}(t_{i-1})\right|$$

равна длине ломаной с вершинами в точках $M_i(\gamma_1(t_i),\gamma_2(t_i)),\ i=0,1,\ldots,n$, лежащих на кривой L. Такую ломаную называют вписанной в кривую L.

Кривую L называют спрямляемой, если длины всех ломаных, вписанных в эту кривую образуют ограниченное сверху множество.

Длиной спрямляемой кривой L называют верхнюю грань длин всех ломаных, вписанных в эту кривую, и обозначают символом $|L|$.

Теорема 3.1.1. *Если функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2')$, то кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ спрямляема.*

Доказательство. Поскольку производные γ_1', γ_2' непрерывны на отрезке $[a,b]$, то они ограничены на нем, т. е. найдется константа M такая, что при всех $t \in [a,b]$ $|\gamma_1'(t)| \le M$, $|\gamma_2'(t)| \le M$. Тогда на основании формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$|\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})| = |\gamma_1'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})| \le M|t_i - t_{i-1}|,$$

$$|\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})| = |\gamma_2'(\theta_i)(t_i - t_{i-1})| \le M|t_i - t_{i-1}|.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})\right| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))^2} \le$$

$$\le M\sqrt{2} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = M\sqrt{2}(b-a).$$

Это означает, что длины всех ломаных, вписанных в кривую L образуют ограниченное сверху множество. Следовательно, кривая спрямляема. □

Следствие. *Пусть функция f определена и имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$. Тогда кривая L, являющаяся графиком функции f, спрямляема.*

Доказательство. Для графика функции f мы имеем параметрическое представление $\overline{\gamma}(t) = \big(t, f(t)\big)$, $t \in [a,b]$, удовлетворяющее условиям теоремы (3.0.1). □

3.2 Криволинейные интегралы первого рода.

Пусть вектор-функция $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает значения в $\mathbb{R}^2$. Множество значений этой функции называем параметризованной непрерывной кривой и обозначаем через $L = L_{\overline{\gamma}}$.

Кривую $L = L_{\overline{\gamma}}$ назовем гладкой, если вектор-функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную и при любом $t \in [a, b] \quad (\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 \neq 0$.

Если функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2')$, то кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ спрямляема и ее длина S выражается равенством

$$S = \int\limits_a^b |\overline{\gamma}'(t)| dt = \int\limits_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt.. \qquad (10)$$

Пусть функция f определена и имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. Тогда кривая L, являющаяся графиком функции f, спрямляема и ее длина S может быть найдена по формуле

$$S = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \qquad (11)$$

Если кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ является гладкой и функция f непрерывна вдоль этой кривой, то криволинейный интеграл первого рода существует и вычисляется по формуле:

$$\int\limits_L f(x, y) ds = \int\limits_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt, \qquad (12)$$

Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = \varphi(x)$. $x \in [a, b]$, то в качестве параметра кривой естественно выбрать переменную x. Тогда формула (12) примет вид

$$\int\limits_L f(x, y) ds = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \qquad (13)$$

Для кривой $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ формула (11) будет иметь вид

$$\int\limits_L f(x,y,z)ds = \int\limits_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2}dt, \tag{14}$$

Класс всех эквивалентных параметризованных гладких кривых называют гладкой кривой. Криволинейный интеграл первого рода по гладкой кривой определяют как интеграл по любой из параметризованных кривых, принадлежащих этому классу.

Вычислить криволинейные интегралы первого рода по плоской кривой.

102. $\int\limits_C y^2 ds$, где C- арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

103. $\int\limits_C \sqrt{y} ds$, где C- арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

104. $\int\limits_C (x^2 + y^2) ds$, где C- кривая $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

105. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где C- кривая $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

106. $\int\limits_C yds$ по параболе $y^2 = x$ от точки $(0,0)$ до точки $(4,2)$.

107. $\int\limits_C xds$ по параболе $y = x^2$ от точки $(1,1)$ до точки $(2,4)$.

108. $\int\limits_C xds$ по отрезку прямой от точки $(0,0)$ до точки $(1,2)$.

109. $\int\limits_C (x+y)ds$, где C- контур треугольника с вершинами $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$.

110. $\int\limits_C (2x + y)ds$, где C- ломаная $ABOA$, где $A(1,0),\ B(0,2),\ O(0,0)$.

111. $\int\limits_C xyds$, где C- граница квадрата с вершинами $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$.

112. $\int\limits_C x^2ds$, где C- дуга окружности $x^2+y^2=a^2,\ y\geq 0$.

113. $\int\limits_C (x-y)ds$, где C- окружность $x^2+y^2=ax$.

114. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, где C- окружность $x^2+y^2=ax$.

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой.

115. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)ds$, где C - виток винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt, 0\leq t\leq 2\pi$.

116. $\int\limits_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$, где C - виток винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt, 0\leq t\leq 2\pi$.

117. $\int\limits_C \frac{z^2}{x^2+y^2}ds$, где C - виток винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt, 0\leq t\leq 2\pi$.

118. $\int\limits_C zds$, где C - дуга конической винтовой линии $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t, 0\leq t\leq 2\pi$.

119. $\int\limits_C (\sqrt{x^2+y^2}+z)ds$, где C - дуга конической винтовой линии $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t, 0\leq t\leq 2\pi$.

120. $\int\limits_C \sqrt{2y^2+z^2}ds$, где C - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x=y$.

121. $\int\limits_C x^2ds$, где C - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$.

122. $\int\limits_C xyzds$, где C - четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x=y$, расположенная в первом октанте.

123. $\int\limits_C (x+y)ds$, где C - четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x=y$, расположенная в первом октанте.

3.3 Криволинейные интегралы второго рода.

Если кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ является гладкой и функции P и Q непрерывны вдоль этой кривой, то криволинейный интеграл второго рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t) \Big) dt, \qquad (15)$$

Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = \varphi(x)$. $x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \Big) dx. \qquad (16)$$

Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $x = \varphi(y)$. $y \in [c,d]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P(\varphi(y),y))\varphi'(y) + Q(\varphi(y),y) \Big) dy. \qquad (17)$$

Для кривой $\overline{\gamma} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ формула (15) будет иметь вид

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_a^b \Big(P(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))\gamma_1'(t) +$$

$$+ Q(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))\gamma_2'(t) + R(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))\gamma_3'(t)) \Big) dt, \qquad (18)$$

Класс всех положительно эквивалентных друг другу параметризаций называют ориентированной гладкой кривой.

Криволинейный интеграл второго рода по ориетированной кривой определяют как интеграл по одной из ее параметризаций.

У гладкой кривой воможны две ориентации, каждую из которых можно связать с понятием начала и конца кривой. А именно, если $L_{\overline{\gamma}}$, где $\overline{\gamma}$ определена на отрезке $[a,b]$, одна из параметризаций ориентированной кривой, то точку $A=\overline{\gamma}(a)$ называют началом кривой, а точку $B=\overline{\gamma}(b)$ - ее концом. У кривой, противоположной ориентированной точка B является началом, а точка A - концом кривой.

Обозначим одну из ориентаций гладкой кривой L через L^+, а другую через L^-. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int\limits_{L^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \tag{19}$$

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по плоской кривой, пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

124. $\int\limits_C xy^2dx$, где C - дуга окружности $x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le \pi/2$.

125. $\int\limits_C xdy+ydx$, где C - дуга окружности $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ 0\le t\le \pi/2$.

126. $\int\limits_C ydx-xdy$, где C - эллипс $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$.

127. $\int\limits_C y^2dx+x^2dy$, где C - верхняя половина эллипса $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

128. $\int\limits_C (2a-y)dx+(y-a)dy$, где C - дуга циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по плоской кривой, пробегаемой в направлении возрастания параметра x.

129. $\int\limits_C xydx$, где C - дуга синусоиды $y=\sin x,\ -0\le x\le \pi$.

130. $\int\limits_C (x - \frac{1}{y})dy$, где C - дуга параболы $y = x^2,\ 1 \le x \le 2$.

131. $\int\limits_C xdy - ydx$, где C - кривая $y = x^3,\ 0 \le x \le 2$.

132. $\int\limits_C 2xydx + x^2dy$, где C - дуга параболы $y = \frac{x^2}{4},\ 0 \le x \le 2$.

133. $\int\limits_C (xy - y^2)dx + xdy$, где C - кривая $y = 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$.

134. $\int\limits_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где C - парабола $y = x^2,\ -1 \le x \le 1$.

135. $\int\limits_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, где C - кривая $y = 1 - |1 - x|,\ 0 \le x \le 2$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по плоской кривой, пробегаемой от точки A до точки B.

136. $\int\limits_C xydx - y^2dy$, где C - дуга параболы $y^2 = 2x,\ A(0,0),\ B(2,2)$.

137. $\int\limits_C \frac{3x}{y}dx - \frac{2y^3}{x}dy$, где C - дуга параболы $x = y^2,\ A(4,2),\ B(1,1)$.

138. $\int\limits_C \frac{x}{y}dx - \frac{y-x}{x}dy$, где C - дуга параболы $y = x^2,\ A(2,4),\ B(1,1)$.

139. $\int\limits_C xdy$, где C - полуокружность $x^2 + y^2 = a^2,\ x \ge 0,\ A(0,-a),\ B(0,a),\ a > 0$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по отрезку AB, ориентированному от точки A до точки B.

140. $\int\limits_C x^3dy - xydx,\ A(0,-2),\ B(1,3)$.

141. $\int\limits_C -3x^2dx + y^3dy,\ A(0,0),\ B(2,4)$.

142. $\int\limits_C (2x - y)dx + (4x + 5y)dy,\ A(3,-4),\ B(1,2)$.

143. $\int\limits_C (4x + 5y)dx + (2x - y)dy,\ A(1,-9),\ B(4,-3)$.

144. $\int\limits_C (x+y)dx + (x-y)dy,\ A(0,1),\ B(2,3).$

145. $\int\limits_C \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)dy,\ A(1,0),\ B(3,4).$

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по замкнутой плоской кривой, ориентированной потив хода часовой стрелки.

146. $\int\limits_C (x^2+y^2)dx$, где C - граница прямоугольника, образованного прямыми $x=1, x=3, y=1, y=5$.

147. $\int\limits_C (x^2-2xy)dx+(x-2y)^2dy$, где C - граница прямоугольника, образованного прямыми $x=0, x=2, y=0, y=1$.

148. $\int\limits_C (3x^2-y)dx+(1-2x)^2dy$, где C - граница треугольника с вершинами $(0,0),\ (1,0),\ (1,1)$.

149. $\int\limits_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, где C - граница треугольника с вершинами $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$.

150. $\int\limits_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, где C - граница квадрата с вершинами $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$.

151. $\int\limits_C \frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}$, где C - окружность $x^2+y^2=R^2$.

152. $\int\limits_C (x+y)dx+(x-y)dy$, где C - эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой, пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

153. $\int\limits_C ydx+zdy+ydz$, где C - виток винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi$.

154. $\int\limits_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, где C - кривая $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ 0\le t\le 1$.

155. $\int\limits_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, где C - кривая $x=a\sin^2 t,\ y=2a\sin t\cos t,\ z=a\cos^2 t,\ 0\le t\le\pi$.

156. $\int\limits_C xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, где C - кривая $x = a\sin t,\ y = a\cos t,\ z = a(\sin t + \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

157. $\int\limits_C ydx+zdy+ydz$, где C - окружность $x = a\cos\alpha\cos t,\ y = a\cos\alpha\sin t,\ z = a\sin\alpha$ $(\alpha = const)$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой.

158. $\int\limits_C xdx + ydy + (x+y-1)dz$, где C - отрезок AB, пробегаемый от точки $A(1,1,1)$ к точке $B(2,3,4)$.

159. $\int\limits_C \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, где C - отрезок AB, пробегаемый от точки $A(1,1,1)$ к точке $B(4,4,4)$.

160. $\int\limits_C x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz$, где C - ломаная $ABCA$, где $A(a,0,0),\ B(0,a,0),\ C(0,0,a)$.

3.4 Формула Грина.

Пусть замкнутое множество D является трапецией первого рода, L - положительно ориентированная граница D, а функция P и ее частная производная $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_L P(x,y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy. \qquad (20)$$

Пусть замкнутое множество D является трапецией второго рода, L - положительно ориентированная граница D, а функция Q и ее частная производная $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_L Q(x,y)dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy. \qquad (21)$$

Плоское множество D назовем элементарным, если прямыми, параллельными координатным осям, его можно разбить на конечное число трапеций первого рода, а также на конечное число трапеций второго рода.

Кривая L называется простой, если $\overline{\gamma}(t_1) \neq \overline{\gamma}(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, т. е. у кривой нет точек самопересечения.

Точки $A = \overline{\gamma}(a)$ и $B = \overline{\gamma}(b)$ будем называть граничными точками кривой L.

Пусть гладкая кривая L замкнута, т. е. $A = B$, и других точек самопересечения у кривой нет. Такую кривую называют простым контуром.

Формула Грина. Пусть замкнутое множество D является элементарным замкнутым множеством и L - положительно ориентированная граница D, которая является простым контуром. Пусть функции P, Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D. Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{22}$$

Формула (22) справедлива также и для конечной области D, ограниченной несколькими простыми контурами, если под границей L понимать сумму всех граничных контуров, направление обхода которых выбирается так, что область D остается слева (**формула Грина для многосвязной области**).

Отметим одно из применений формулы Грина - вычисление площади плоской фигуры D, ограниченной простым кусочно-гладким контуром L. Подобрав функции P и G так, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, мы с помощью формулы Грина вычислим площадь через криволинейный интеграл. Укажем наиболее простые случаи:

а) $P = -y,\ Q = 0;$

б) $P = 0,\ Q = x;$

в) $P = -y/2,\ Q = x/2.$

Для этих вариантов имеем

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = -\oint\limits_{L} ydx = \oint\limits_{L} xdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy - ydx. \tag{23}$$

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой, ориентированной против хода часовой стрелки.

161. $\int\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, где C - окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

162. $\int\limits_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, где C - окружность $x^2 + y^2 = ax$.

163. $\int\limits_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, где C - эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

164. $\int\limits_C (2xy - y)dx + x^2dy$, где C - эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

165. $\int\limits_C \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, где C - окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

166. $\int\limits_C (x+y)^2dx - (x^2+y^2)dy$, где C - треугольник с вершинами $(1,1),\ (3,2),\ (2,5)$.

167. $\int\limits_C e^{y^2-x^2}\big(\cos 2xydx + \sin 2xydy\big)$, где C - окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

168. $\int\limits_C (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - 1)dy$, где C - граница области $x^2 + y^2 < ax,\ y > 0$.

169. $\int\limits_C \frac{dx-dy}{x+y}$, где C - граница квадрата с вершинами $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$.

170. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))dy$, где C - окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми.

171. $y^2 = 4 - x,\ x = 4,\ y = 1$.

172. $y = 2x^2,\ x - y + 1 = 0$.

173. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

174. $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

3.5 Криволинейные интегралы от полных дифференциалов.

Пусть функции P и Q непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1) выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является в области D дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$;
2) всюду в области D верно равенство
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x};$$
3) для любого кусочно гладкого контура L, лежащего в области D, верно равенство
$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0;$$
4) криволинейный интеграл второго рода от функций P и Q в области D не зависит от пути интегрирования.

Если выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является в области D дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, то для любой пары точек $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ в D имеем равество

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1). \qquad (24)$$

По аналогии с определенным интегралом эту формулу называют *формулой Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла.*

Функцию F можно найти по формуле

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy,$$

или
$$F(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx.$$

В качестве фиксированной точки (x_0, y_0) можно выбрать любую точку области D.

Убедившись в том, что подинтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой C с началом в точке A и концом в точке B.

175. $\int\limits_C xdy+ydx,\ A(-1,3),\ B(2,2).$

176. $\int\limits_C xdx+ydy,\ A(-1,0),\ B(-3,4).$

177. $\int\limits_C (x+y)dx+(x-y)dy,\ A(2,-1),\ B(1,0).$

178. $\int\limits_C 2xydx+x^2dy,\ A(0,0),\ B(-2,-1).$

179. $\int\limits_C (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy,\ A(-2,-1),\ B(0,3).$

180. $\int\limits_C (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy,\ A(3,0),\ B(0,-3).$

181. $\int\limits_C (3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy,\ A(-1,2),\ B(1,-2).$

182. $\int\limits_C xdx+y^2dy-z^3dz,\ A(-1,0,2),\ B(0,1,-2).$

183. $\int\limits_C yzdx+xzdy-xydz,\ A(2,-1,0),\ B(1,2,3).$

184. $\int\limits_C \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ A\in S_1,\ B\in S_2$, где S_1 - сфера $x^2+y^2+z^2=R_1^2,\ S_2$ - сфера $x^2+y^2+z^2=R_2^2$ $(R_1>0, R_2>0$.

3.6 Длина кривой. Масса кривой

Найти длину плоской кривой.

185. $ay^2 = x^3,\ 0 \le x \le 5a.$

186. $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/4.$

187. $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

188. $x = t + \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ |t| \le \pi.$

189. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \ge b.$

Найти длину пространственной кривой.

190. $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3,\ 0 \le t \le 1.$

191. $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le \sqrt{2}.$

192. $x = a(1 + \cos t),\ y = a(t - \sin t),\ z = 4a\sin(t/2),\ 0 \le t \le 2\pi.$

193. $x = t\cos t^2,\ y = t\sin t^2,\ z = t^2,\ 0 \le t \le \sqrt{2\pi}.$

194. $2px = z^2,\ 6p^2y = z^3,\ 0 \le z \le p.$

Найти массу дуги AB кривой C, если функция $\rho(x,y)$ является плотностью распределения массы.

195. C- отрезок $AB,\ A(1,1),\ B(2,3),\ \rho(x,y) = 2x + y.$

196. C- отрезок $AB,\ A(1,0),\ B(4,6),\ \rho(x,y) = \sqrt{y+2}/x.$

197. $C: y = x^2/2,\ A(1,\frac{1}{2}),\ B(2,2),\ \rho(x,y) = y/x.$

198. $C: y^2 = x,\ A(1,1),\ B(4,2),\ \rho(x,y) = y.$

Найти массу кривой C, если функция $\rho(x,y)$ является плотностью распределения массы.

199. $C: x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ \rho(x,y) = y^{3/2}.$

200. $C: x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le \pi/2,\ \rho(x,y) = \sqrt[3]{y}.$

201. $C: x = \ln(1 + t^2),\ y = 2\,\mathrm{arctg}\, t - t,\ 0 \le t \le 1,\ \rho(x,y) = ye^{-x}.$

202. $C: x^2 + y^2,\ \rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$

4 Поверхностные интегралы.

4.1 Параметрическое представление поверхности. Площадь поверхности

Пусть поверхность Φ задана следующими равенствами:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

Этот способ задания поверхности называют *параметрическим.*

Причем выполняются следующие условия:

1) множество D является замкнутым ограниченным элементарным множеством, граница γ которого представляет собой простой кусочно гладкий контур, а отображение, задаваемое равенствами

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

взаимно однозначно на множестве внутренних точек множества D (простая поверхность);

2) функции $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве D вплоть до границы γ (гладкая поверхность);

3) хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

отличен от нуля при любых значениях u и v (регулярная поверхность, невырожденная поверхность или поверхность без особых точек).

Поверхности, удовлетворяющие указанным трем условиям, будем называть кратко *гладкими поверхностями.*

Если поверхность задана в явном виде, например, уравнением $z = f(x, y)$, то ее параметрическое уравнение в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \overline{r} &= \overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ \overline{r}'_u(u, v) &= (x'_u(u, v), y'_u(u, v), z'_u(u, v)), \\ \overline{r}'_v(u, v) &= (x'_v(u, v), y'_v(u, v), z'_v(u, v)), \end{aligned}$$

Векторное произведение $\overline{r}'_u(u_0, v_0) \times \overline{r}'_v(u_0, v_0)$ является нормальным вектором к поверхности в точке $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, и касательная плоскость может быть задана уравнением в общем виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

в котором A, B, C - координаты вектора $\overline{r}'_u(u_0, v_0) \times \overline{r}'_v(u_0, v_0)$. Используя правило вычисления векторного произведения в прямоугольных координатах, получаем

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = y'_u(u_0, v_0)z'_v(u_0, v_0) - y'_v(u_0, v_0)z'_u(u_0, v_0),$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = z'_u(u_0, v_0)x'_v(u_0, v_0) - z'_v(u_0, v_0)x'_u(u_0, v_0),$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = x'_u(u_0, v_0)y'_v(u_0, v_0) - x'_v(u_0, v_0)y'_u(u_0, v_0), ,$$

Для произвольной точки $(u, v) \in D$ вектор $\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = (A, B, C)$, где

$$A = A(u, v) = \frac{D(y, z)}{D(u, v)},$$

$$B = B(u, v) = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \tag{25}$$

$$C = C(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Тогда единичный вектор нормали

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}. \tag{26}$$

Координаты вектора $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Для вычисления площади поверхности Φ имеем формулу

$$S = \iint\limits_D |\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| du dv. \tag{28}$$

Поскольку

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| = \sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{A^2+B^2+C^2} du dv. \tag{29}$$

Введем функции

$$E = (r'_u)^2 = (x'_u(u,v))^2 + (y'_u(u,v))^2 + (z'_u(u,v))^2,$$

$$F = r'_u r'_v = x'_u(u,v)x'_v(u,v) + y'_u(u,v)y'_v(u,v) + z'_u(u,v)z'_v(u,v),$$
$$G = (r'_v)^2 = (x'_v(u,v))^2 + (y'_v(u,v))^2 + (z'_v(u,v))^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|^2 = (r'_u)^2(r'_v)^2 - (r'_u r'_v)^2 = EG - F^2.$$

Поэтому равенство (29) можно переписать в виде

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{30}$$

В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, будем иметь равенство

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2} dudv. \tag{31}$$

4.2 Поверхностные интегралы первого рода.

Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках поверхности Φ :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Тогда поверхностный интеграл первого рода существует и может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_\Phi f(x, y, z) dS = \iint\limits_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv \tag{32}$$

или по формуле

$$\iint\limits_\Phi f(x, y, z) dS = \iint\limits_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{33}$$

В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, формула для вычисления интеграла принимает вид

$$\iint\limits_\Phi f(x, y, z) dS =$$

$$= \iint\limits_D f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}dxdy, \qquad (34)$$

где D - проекция поверхности Φ на плоскость xOy.

Вычислить интегралы.

203. $\iint\limits_S z^2 dS$, где S - часть конической поверхности

$$x = u\cos v \sin\alpha,\ y = u\sin v\sin\alpha,\ z = u\cos\alpha,$$

$\alpha = const,\ \alpha \in (0; \pi/2),\ u \in [0; 1],\ v \in [0; 2\pi]$.

204. $\iint\limits_S zdS$, где S - поверхность

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v,\ u \in [0; 1],\ v \in [0; 2\pi].$$

205. $\iint\limits_S (x + y + z)dS$, где S - часть плоскости $x + 2y + 4z = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

206. $\iint\limits_S (x + y + z)dS$, где S - часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

207. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z)dS$, где S - часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0$.

208. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, где S - сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

209. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, где S - поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

210. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$, где S - сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

211. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$, где S - полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq H$.

212. $\iint\limits_S xyzdS$, где S - часть параболоида $z = x^2 + y^2,\ z \leq 1$.

213. $\iint\limits_S |xy|zdS$, где S - часть параболоида $z = x^2 + y^2,\ z \leq 1$.

214. $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, где S - часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq 1$.

215. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, где S - часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq 1$.

4.3 Поверхностные интегралы второго рода.

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\quad (u,v) \in D,$$

и на поверхности Φ заданы функции $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$. Поверхностный интеграл второго рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy :=$$

$$= \iint\limits_{D} \big(P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))A(u,v) + Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))B(u,v) +$$

$$+ R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))C(u,v)\big)dudv. \qquad (35)$$

Имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)dS, \qquad (36)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Вектор-функция $\overline{n}(\overline{r})$, определяемая формулой (**??**), является непрерывной. Если задана другая параметризация $\overline{\rho}$ поверхности Φ, то нормаль к поверхности Φ либо не меняется во всех точках Φ, либо меняет свое направление сразу во всех точках Φ. Поэтому говорят, что нормаль к поверхности, отвечающая некоторой параметризации этой поверхности, выделяет на ней ее сторону.

Выделение одной из сторон поверхности Φ с помощью параметризации называется *ориентацией поверхности* Φ.

Поверхностный интеграл второго рода меняет знак при смене ориентации поверхности.

Формула Стокса. Если функции $P,\ Q,\ R$ непрерывно дифференцируемы и L - простой кусочно гладкий контур, ограничивающий кусочно гладкую поверхность Φ, ориентированную так, что относительно ее нормали обход контура L совершается против часовой стрелки, то имеет место *формула Стокса:*

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_\Phi \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \quad (37)$$

Формула Остроградского - Гаусса . Пусть V - простая замкнутая область, граница Φ которой положительно ориентирована, т.е. нормаль внешняя. Если функции $P(x,y,z),\ \ Q(x,y,z),\ \ R(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемы в области G, содержащей V, то справедлива *формула Остроградского - Гаусса*

$$\iint\limits_\Phi P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \quad (38)$$

Вычислить интегралы.

216. $\iint\limits_S (2z-x)dydz + (x+2z)dzdx + 3zdxdy$, где S - верхняя сторона треугольника $x+4y+z=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

217. $\iint\limits_S ydzdx$, где S - внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

218. $\iint\limits_S x^2dydz$, где S - внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

219. $\iint\limits_S (x^5+z)dydz$, где S - внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\leq 0$.

220. $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, где S - внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\leq 0$.

221. $\iint\limits_S x^2dydz+z^2dxdy$, где S - внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\leq 0,\ y\geq 0$.

222. $\iint\limits_S yz^2dzdx$, где S - внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=r^2,\ y\leq 0,\ 0\leq z\leq r$.

223. $\iint\limits_S yzdxdy+zxdydz+xydzdx$, где S - внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=r^2,\ x\leq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq H$.

224. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S - внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0$.

225. $\iint\limits_S (z^2-y^2)dydz+(x^2-z^2)dzdx+(y^2-x^2)dxdy$, где S - внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0$.

226. $\iint\limits_S x^2ydydz+xy^2dzdx+xyzdxdy$, где S - внутренняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

227. $\iint\limits_S x^2ydydz-xy^2dzdx+(x^2+y^2)dxdy$, где S - внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2,\ 0\leq z\leq H$.

Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить интегралы.

228. $\iint\limits_S (1+2x)dydz + (2x+3y)dzdx + (3y+4z)dxdy$, где S - внешняя сторона пирамиды $x/a + y/b + z/c \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

229. $\iint\limits_S (1+2x)dydz + (2x+3y)dzdx + (3y+4z)dxdy$, где S - внутренняя сторона поверхности $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = a$.

230. $\iint\limits_S zdxdy + (5x+y)dydz$, где S - внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 4$.

231. $\iint\limits_S zdxdy + (5x+y)dydz$, где S - внутренняя сторона эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$.

232. $\iint\limits_S zdxdy + (5x+y)dydz$, где S - внешняя сторона границы области $1 < x^2+y^2+z^2 < 4$.

233. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S - внутренняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$.

234. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, где S - внешняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z \le a,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

235. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, где S - внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+x^2 = R^2$.

Используя формулу Стокса, вычислить интегралы.

236. $\int\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, где L - граница треугольникв с вершинами в точках $(a,0,0),\ (0,a,0),\ (0,0,a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0,1,0)$.

237. $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$, где L - окружность $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x+y+z = 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0,0,1)$.

238. $\int\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + zdz$, где L - окружность $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x+y+z = 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0,0,1)$.

239. $\int\limits_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, где L - окружность $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x = y$, ориентированная положительно относительно вектора $(1, 0, 0)$.

240. $\int\limits_L (x+z)dx + (x-y)dy + xdz$, где L - эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z = c$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(0, 0, 1)$.

5 Ряды Фурье.

Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx\bigr) \tag{39}$$

называется *рядом Фурье* функции f, если его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \tag{40}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{41}$$

Коэффициенты, вычисляемые по формулам (40) и (41), называются *коэффициентами Фурье* функции f.

Ряды Фурье четных и нечетных функций.

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является четной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx, \tag{42}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \tag{43}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

и ряд Фурье четной функции имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является нечетной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \tag{45}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \tag{46}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{47}$$

и ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[a, a + 2\pi]$.

При разложении в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $[a, a+2\pi]$, для вычисления коэффициентов в качестве пределов интегрирования следует брать концы этого отрезка.

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-l, l]$. Ряд Фурье такой функции будет иметь вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

и

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) dx, \; a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \; b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$n = 1, 2, \ldots .$$

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[0, \pi]$.

Функцию можно разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а также по синусам кратных дуг:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Признаки поточечной сходимости рядов Фурье.

Обозначим через $R_{2\pi}$ класс функций, которые заданы на всей числовой прямой, интегрируемы на каждом конечном отрезке числовой прямой и имеют период 2π.

Обозначим частную сумму ряда Фурье функции f:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big).$$

1. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и дифференцируема в точке x. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

2. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют односторонние левая производная $f'_{\text{Л}}(x)$ и правая производная $f'_{\text{П}}(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

3. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют следующие четыре конечных предела

$$f(x+0) = \lim_{t\to x+0} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{t\to x-0} f(t),$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = \alpha, \ \lim_{t\to+0} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} = \beta.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Равенство Парсеваля и сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном.

Для любой функции f интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k^2 + b_k^2\big)$$

и
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-S_n(x)\big)^2dx=0.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|,\ \ x\in[-2,2]$.

• В данном случае $l=2$, функция $f(x)$ - четная. Поэтому
$$b_n=0,\ \ a_0=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2 xdx=2,$$
$$a_n=\int\limits_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$
$$=\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{4}{\pi^2n^2}[(-1)^n-1].$$
Тогда
$$a_{2n}=0,\ \ a_{2n-1}=-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}.$$
Согласно признакам поточечной сходимости 1 и 2, будем иметь при всех $x\in[-2,2]$ равенство
$$|x|=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.\ \ \bullet$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ в интервале $(0,\pi)$.

• Имеем
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\sin nxdx=\frac{1}{2n}(-\cos nx)\big|_0^{\pi}+$$
$$+\frac{1}{\pi n}x\cos nx\big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\ dx=\frac{1}{2n}[1+(-1)^{n+1}]+\frac{(-1)^n}{n}.$$

Находим $b_{2n-1} = 0,\ b_{2n} = \frac{1}{2n}$.

Поскольку функция дифференцируема на интервале $(0, \pi)$, то

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}, \quad x \in (0, \pi). \ \bullet$$

241. Разложить в ряд Фурье функцию:

(a) $\sin^2 x$,

(b) $\cos^3 x$,

(c) $\sin^4 x$,

(d) $\sin^6 x \cos^4 x$,

(e) $\sin^8 x + \cos^8 x$,

(f) $\sin^5 x$.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном промежутке и нарисовать график суммы ряда.

242. $f(x) = x$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

243. $f(x) = |x|$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

244. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \ \ 0 < x < 2\pi$.

245. $f(x) = \pi^2 - x^2$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

246. $f(x) = x^3$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию.

247. $f(x) = sign(\cos x)$.

248. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

249. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

250. $f(x) = |\cos x|$.

251. $f(x) = |\sin x|$.

Разложить в ряд Фурье функцию.

252.

$$f(x) = \begin{cases} ax, \ -\pi < x < 0, \\ bx, \ 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

253.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ -\pi < x < 0, \\ \sin x, \ 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

254. $f(x) = x$ на интервале $(-1, 1)$.

255. $f(x) = x$ на интервале $(2, 4)$.

256. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = sign\ x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Пользуясь разложением, найти сумму *ряда Лейбица*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

257. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье

   (a) на интервале $(-\pi, \pi)$;
   (b) на интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг;
   (c) на интервале $(0, 2\pi.)$

   Нарисовать графики функций и графики сумм рядов Фурье.

   Пользйясь этими разложениями, найти суммы числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

258. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \pi - 2x, \ 0 < x < \pi$, продолжив ее на промежуток $(-\pi, 0)$ четным образом, и нарисовать график суммы ряда.

259. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, \ 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi/2, \ \pi/2 \le x < \pi, \end{cases}$$

продолжив ее на промежуток $(-\pi, 0)$ четным образом, и нарисовать график суммы ряда.

260. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x,\ 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi/2,\ \pi/2 \le x < \pi, \end{cases}$$

продолжив ее на промежуток $(-\pi, 0)$ нечетным образом, и нарисовать график суммы ряда.

261. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \pi - 2x,\ 0 < x < \pi$, продолжив ее на промежуток $(-\pi, 0)$ четным образом, и нарисовать график суммы ряда.

262. Разложить функцию $f(x) = x,\ 0 \le x \le \pi$, в ряд Фурье по косинусам.

263. Разложить функцию $f(x) = \cos 2x,\ 0 \le x \le \pi$, в ряд Фурье по синусам.

264. Разложить в ряд Фурье на $(0, \pi)$ по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 - x,\ 0 \le x \le \pi/2, \\ 0,\ \pi/2 \le x < \pi, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

265. Разложить в ряд Фурье на $(0, \pi)$ по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x,\ 0 \le x \le \pi/2, \\ 0,\ \pi/2 \le x < \pi, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

266. Разложить в ряд Фурье на $(0, 2)$ по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x,\ 0 < x \le 1, \\ 2 - x,\ 1 < x < 2, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

267. Разложить в ряд Фурье на $(0, 2)$ по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, \ 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, \ 1 < x < 2, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

268. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ 0 < x < \pi, \\ 0, \ \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

269. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ 0 < x < \pi, \\ 0, \ \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

и нарисовать график суммы ряда.

270. Записать равенство Парсеваля для функций:

(a) $f(x) = x + 1, \quad x \in [-1; 1];$

(b) $f(x) = 1 - x, \quad x \in [-1; 1];$

(c) $f(x) = 2 + 3x, \quad x \in [-2; 2];$

(d) $f(x) = 3 + 2x, \quad x \in [-2; 2];$

6 Основы теории функций комплексного переменного

6.1 Комплексные числа.

Алгебраическая форма комплексного числа.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_1 + iy_2$ называют равными, если $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

Суммой комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называют комплексное число

$$z_1 + z_2 = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (48)$$

а произведением $z_1 z_2$ этих чисел - комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (49)$$

Для комплексного числа $z = x + iy$ число x называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $Re\ z$, а y - *мнимой частью* и обозначают $Im\ z$.

Числа $z = x+iy$ и $\overline{z} = x-iy$ называют комплексно *сопряженными*. Отметим, что

$$z + \overline{z} = 2x = 2Rez,\ z\overline{z} = x^2 + y^2,\ z - \overline{z} = 2iy = 2iImz.$$

Для сложения и умножения существуют обратные операции вычитания и деления (кроме деления на нуль) , которые записываются следующим образом

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \quad (50)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0. \quad (51)$$

Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой $M(x, y)$.

Полярный радиус r и полярный угол φ точки M называют соответственно *модулем* и *аргументом комплексного числа* и обозначают $|z|$ и $Argz$. Отметим, что модуль комплексного числа определен однозначно, а аргумент - с точностью до слагаемого, кратного 2π.

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{52}$$

$$Argz = argz + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{53}$$

где $argz$ есть главное значение аргумента, удовлетворяющее условию

$$-\pi < argz \leq \pi.$$

При этом

$$argz = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}),\ x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}),\ x < 0,\ y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}),\ x < 0,\ y < 0; \\ \frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y > 0; \\ -\frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Представление комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)), \tag{54}$$

где $\varphi = argz$, $k \in \mathbb{Z}$, называется *тригонометрической формой.*

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Используя тригонометрические формулы, имеем

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{55}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{56}$$

Применяя метод математической индукции, можно доказать *формулу Муавра*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \tag{57}$$

Число w называют корнем степени n из числа z и обозначается символом $\sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$. Обозначим $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k,$$

и, следовательно,

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, среди возможных значений $\sqrt[n]{z}$ различными будут n значений, соответствующих значениям $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Заметим, что все значения $\sqrt[n]{z}$ расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. При этом радиус-вектор одной из вершин образует с осью Ox угол $arg z/n$.

Показательная форма записи комплексного числа

Следуя Эйлеру, обозначим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{58}$$

Тогда число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ запишем в виде $z = re^{i\varphi}$. Такая форма записи числа называется *показательной*.

Из равенств $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ следуют формулы

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \tag{59}$$

которые называют *формулами Эйлера*.

Равенства (55),(56) и (57) можно переписать в показательной форме

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{60}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \tag{61}$$

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{62}$$

Пример 1. Записать в алгебраической форме число $z = \frac{2+3i}{1+4i}$.

•

$$z = \frac{2+3i}{1+4i} = \frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{14-5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i. \ \bullet$$

Пример 2. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -9 + 3\sqrt{3}i$.

•

$$|z| = \sqrt{81+27} = 6\sqrt{3}.$$

Так как $Re\ z < 0, \ \ Im\ z > 0$, то

$$arg\ z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{-9} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тогда

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \ \bullet$$

Пример 3. Найти все корни уравнения $z^4 = -16$.

• Так как $|-16| = 16$, а $Arg\ (-16) = \pi + 2\pi k$, то

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2})}, \ \ k = 0, 1, 2, 3.$$

Если их записать в алгебраической форме, то

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,$$

$$z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i. \ \bullet$$

271. Выполнить указанные действия:

1) $\frac{1-i}{1+i}$

2) $\frac{2}{1-3i}$;

3) $(1+i\sqrt{3})^3$;

4) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$;

5) $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

6) $(\frac{i^5+2}{i^{19}+1})^2$;

7) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;

8) $\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$;

272. Найти модули, аргументы комплексных чисел и записать в тригонометрической и показательной формах:

1) i;

2) -3;

3) $1+i^{123}$;

4) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\frac{1-i}{1+i}$;

6) $-1-i$;

7) $(1-i\sqrt{3})^3$;

8) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$;

273. Найти все значения корней и построить их:

1) $\sqrt[3]{1}$;

2) $\sqrt[3]{i}$;

3) $\sqrt[4]{-1}$;

4) $\sqrt[6]{-8}$;

5) $\sqrt[6]{1}$;

6) $\sqrt[6]{1-i}$;

7) $\sqrt[3]{-2+2i}$;

8) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

274. Дать геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $Re\ z>0$;

2) $Im\ z\le 1$;

3) $|Re\ z|<1$;

4) $0<Im\ z<1$;

5) $|z|<1$;

6) $|z-i|>2$;

7) $1<|z+i|<2$;

8) $0<arg\ z<\frac{\pi}{4}$;

9) $|\pi-arg\ z|<\frac{\pi}{4}$;

10) $|z-i|+|z+i|<4$;

11) $|1+z|<|1-z|$;

12) $Re\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$;

13) $0<arg(z+i)<\frac{\pi}{2}$;

14) $|z-2|-|z+2|<2$.

15) $|z|=Re\ z+1$;

16) $Re\ z+Im\ z<1$;

17) $2Re\ z>|z|-1$;

18) $|2z|>|z^2+1|$.

6.2 Функции комплексного переменного. Степенные ряды. Ряды Тейлора

Дифференцируемость функции .

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сопоставляющее каждой точке $z = x + iy$ точку

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функция f, определенная в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, называется $\mathbb{R}^2$-дифференцируемой в точке z_0, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных.

Пусть функция f определена и конечна в некоторой окрестности точки z_0. Функция f называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, если найдется комплексное число a такое, что выполняется равенство

$$f(z) - f(z_0) = a \cdot (z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0), \tag{63}$$

где $\alpha(z) \to 0$ при $z \to z_0$.

Число

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \tag{64}$$

называют производной функции f в точке z_0.

Условия Коши-Римана.

Функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда она $\mathbb{R}^2$-дифференцируема в точке z_0 и выполняются условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

275. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

1) $Re\ z$;
2) x^2y^2 $(z = x + iy)$;
3) $|z|^2$;
4) $x^2 + iy^2$;
5) $zRe\ z$;
6) $2xy - i(x^2 - y^2)$;

Голоморфные функции.

Функцию f называют голоморфной в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Функцию называют голоморфной в области D если она голоморфна в каждой точке этой области.

Степенные ряды

Ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \qquad (65)$$

называют степенным рядом. Комплексные числа $c_0, c_1, \ldots$ называют коэффициентами этого ряда.

Теорема Коши-Адамара

Пусть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = l.$$

Тогда

1) *при $l = 0$ ряд (65) абсолютно сходится во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$;*
2) *при $l = \infty$ ряд сходится толко в точке $z = z_0$ и расходится при $z \neq z_0$;*
3) *при $0 < l < \infty$ ряд абсолютно сходится в круге $\{|z - z_0| < 1/l\}$ и расходится во внешности этого круга.*

Пусть $0 < l < \infty$. Круг с центром в точке z_0 и радиуса $1/l$, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится, а во внешности котого расходится, называют *кругом сходимости* степенного ряда, а число $R = 1/l$ - *радиусом сходимости.*

Эти определения распространяются и на крайние случаи: $l = 0$ ($R = \infty$) и $l = \infty$ ($R = 0$). В первом случае кругом сходимости является вся плоскость $\mathbb{C}$ и внешность его - пустое множество; во втором случае круг вырождается в точку z_0 и внешность его представляет всю плоскость, за исключением точки z_0. В случае $R > 0$ круг сходимости будем обозначать символом K_R.

Таким образом, во всех трех случаях, мы запишем формулу

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{66}$$

которую называют *формулой Коши-Адамара.*

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислять по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \tag{67}$$

если предел существует.

Пример . Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

• Воспользуемся формулой (**??**):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty. \bullet$$

Сумма степенного ряда (65) с радиусом сходимости $R > 0$ голоморфна в круге сходимости $K_R = \{|z - z_0| < R\}$ сходимости и выполняется равенство

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \tag{68}$$

причем радиус сходимости ряда (68) также равен R.

Для коэффициентов ряда (65) справедлива формула

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ при } n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{69}$$

Ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$
называют рядом Тейлора функции f с центром в точке z_0.

Таким образом,

(a) Каждый степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

(b) Если функция f в некоторой окрестности точки z_0 разлагается в степенной ряд, то это разложение единственно.

(c) Если функция f в некоторой окрестности точки z_0 разлагается в степенной ряд, то в этой окрестности функция f бесконечно дифференцируема..

Функцию f называют аналитической в точке z_0, если в некоторой окрестности этой точки она разлагается в степенной ряд.

276. Найти радиус сходимости степенного ряда:

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2};$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n2^n}z^n;$$

3)
$$\sum_{n=0}^{\infty}5^n z^{3n};$$

4)
$$\sum_{n=0}^{\infty}n^n z^n;$$

5)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n;$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{z}{n}\right)^n;$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n z^{4n}}{n^2};$$

8)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n;$$

Элементарные функции в комплексной плоскости

Положим по определению для любого $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{70}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{71}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{72}$$

Определим функции тангенс и котангенс равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{73}$$

Определим гиперболические функции

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{74}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{75}$$

Справедливы формулы Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{76}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{77}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{78}$$

Отметим ряд тождеств, связанных с гиперболическими функциями

$$\begin{aligned} \sin iz = i \operatorname{sh} z, &\quad \operatorname{sh} iz = i \sin z, \\ \cos iz = \operatorname{ch} z, &\quad \operatorname{ch} iz = \cos z, \\ \operatorname{tg} iz = iz \operatorname{th} z, &\quad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z, \\ \operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z, &\quad \operatorname{cth} iz = -i \operatorname{ctg} z, \end{aligned}$$

а также

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Логарифмическая функция

$$Ln\ z = \ln|z| + i\ Arg\ z = \ln|z| + i(arg\ z + 2k\pi), \quad z \neq 0. \tag{79}$$

Значение $Ln\ z$, отвечающее в (78) значению $k = 0$, называют *главным значением логарифма* и обозначают $ln\ z$, т. е.

$$ln\ z = \ln\ |z| + i\ arg\ z.$$

Общая показательная и общая степенная функции

Пусть $a \neq 0$.

$$a^z = e^{z\ Ln\ a}. \tag{80}$$

Как и в случае логарифма, выделяют *главное значение показательной функции* a^z, равное $e^{z\ ln\ a}$.

Соотношение

$$z^a = e^{a\ Ln\ z} \tag{81}$$

при фиксированном a определяет многозначную функцию в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, называемую *общей степенной функцией.*

Обратные тригонометрические функции

Функции $Arcsin\ z$, $Arccos\ z$, $Arctg\ z$, $Arcctg\ z$ определяют как обратые к синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу соответственно и называют обратными тригонометрическими функциями комплексного переменного.

Так, если $z = \cos w$, то w называют арккосинусом числа z и обозначают $Arccos\ z$. Для вычисления w воспользуемся представлением

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{t + t^{-1}}{2}$$

(мы сделали замену $e^{iw} = t$). Тогда $t^2 - 2zt + 1 = 0$. У этого уравнения два корня $\xi_1, \xi_2 = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (в этой формуле квадратный корень имеет два значения в рамках комплексных чисел). А так как $t = e^{iw}$, то $iw = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$. Итак,

$$Arccos\ z = -iLn\big(z + \sqrt{z^2 - 1}\big). \tag{82}$$

Поскольку $\xi_1 \xi_2 = 1$, то $|\xi_1||\xi_2| = 1$ и $arg\xi_1 + arg\xi_2 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Главное значение аргумента комплексного числа есть число из промежутка $(-\pi, \pi]$. Поэтому либо $arg\xi_1 + arg\xi_2 = 0$, либо $arg\xi_1 + arg\xi_2 = 2\pi$. Значит, либо два аргумента отличаются лишь знаком, либо обо равны π.

Это рассуждение показывает, что из двух значений ξ_1 и ξ_2 одно имеет главное значение аргумента, принадлежащее отрезку $[0, \pi]$. Обозначим его через ξ. Ему соответствует значение многозначной функции $Arccos\ z$, равное $-i \ln \xi = -i \ln |\xi| + arg\ \xi$, которое называют **главным значением арккосинуса** и обозначают $\arccos z$.

Итак, по определению

$$\arccos z = arg\ \xi - i \ln |\xi|, \tag{83}$$

где $\xi = z + \sqrt{z^2 - 1}$ является числом, аргумент которого принадлежит отрезку $[0, \pi]$. Другие значения $Arccos\ z$ либо отличаются от главного значения арккосинуса слагамым $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, либо формируются вторым значением выражения $z + \sqrt{z^2 - 1}$, равным $1/\xi$:

$$Arccos\ z = -iLn\big(\frac{1}{\xi}\big) = -i\big(-\ln|\xi| - i\ arg\ \xi + 2k\pi i\big) =$$

$$= -i\ arg\ \xi + i \ln |\xi| - 2k\pi = \arccos z - 2k\pi.$$

Таким образом, все значения $Arccos\ z$ описываются формулой

$$Arccos z = \pm \arccos z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{84}$$

Аналогично с помощью логарифмической функции можно выразить и другие обратные тригонометрические функции:

$$Arcsin\ z = -iLn\ i\big(z + \sqrt{z^2 - 1}\big), \tag{85}$$

$$Arctg\ z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{86}$$

$$Arcctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{z+i}{z-i}. \tag{87}$$

Пример Вычислить $\cos(\frac{\pi}{2} + i\ln 2)$.

• $$\cos(\frac{\pi}{2} + i\ln 2) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(i\ln 2) - \sin\frac{\pi}{2}\sin(i\ln 2) = -i\,\mathrm{sh}\ln 2 =$$

$$= -i\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = -i\frac{2 - 1/2}{2} = -\frac{3i}{4}$$ •

277. Запишите в алгебраической форме указанные комплексные числа:

1) $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln 2)$
2) $\cos(\pi - i\ln 2)$
3) $\mathrm{sh}\,\frac{i\pi}{2}$
4) $\mathrm{ctg}\, i\pi$
5) $\cos(2+i)$
6) $\sin 2i$
7) $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4} - i\ln 2)$
8) $\mathrm{tg}(2-i)$

278. Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел:

1) e^{2+i}
2) e^{2-3i}
3) e^{3+4i}
4) e^{-3-4i}
5) $\sin(\pi + i\ln 2)$
6) $i\pi e^{i\pi}$

279. Вычислить значения $Ln\, z$ и $ln\, z$ в точках:

1) $z = -i$
2) $z = -1 - i$
3) $z = i$
4) $z = 4 + 3i$
5) $z = 1 - i$
6) $z = 4$
7) $z = 2 - 3i$
8) $z = -2 + 3i$

280. Найти все значения следующих степеней:

1) $1^{\sqrt{2}}$

2) $(-2)^{\sqrt{2}}$

3) 2^i

4) 1^{-i}

5) i^i

6) $(3-4i)^{1+i}$

7) $(-3+4i)^{1+i}$

8) 1^i

281. Найти все значения следующих выражений:

1) $Arcsin\frac{1}{2}$

2) $Arccos 2$

3) $Arcsin\ i$

4) $Arctg(1+2i)$

5) i^i

6) $(3-4i)^{1+i}$

7) $(-3+4i)^{1+i}$

8) 1^i

282. Решите следующие уравнения:

1) $e^{2z}+5e^z-6=0$

2) $e^z+i=0$

3) $\ln(z+i)=0$

4) $\operatorname{ch} z+1=0$

5) $\sin z=i\pi$

Интегральная формула Коши

Пусть функция f голоморфна в области G и Γ - замкнутая кусочно гладкая кривая Жордана, принадлежащая G вместе со своей внутренностью D. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{88}$$

283. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{|z+i|=3}\sin z\frac{dz}{z+i};$

2) $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1};$

3) $\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz;$

4) $\int\limits_{|z|=4}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz;$

5) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)}$;

Разложение функции в ряд Тейлора

Если функция f голоморфна в круге $K = \{|z - z_0| < R\}$, то в этом круге функция f разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{89}$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \tag{90}$$

$$\gamma_r = \{|\zeta - z_0| = r\}, \;\; 0 < r < R, \;\; (n = 0, 1, \ldots),$$

и не зависят от r.

Приведем основные разложения, справедливые во всей комплексной плоскости:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{91}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{92}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{93}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{94}$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{95}$$

Рассмотрим однозначную ветвь $\ln z = \ln \ |z| + i \ arg \ z$ в области $G = \{|arg \ z| < \pi\}$. Так как $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, то $(\ln z)^{(k)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{z^k}$, то

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k}$$

Круг $\{|z-1| < 1\} \subset G$, поэтому полученное разложение верно в нем. Заменяя $z-1$ на z, получим разложение

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}, \quad |z| < 1. \tag{96}$$

У многозначной функции $z^a = e^{a \, Ln \, z}$ выделим в той же области $G = \{|arg \ z| < \pi\}$ однозначную ветвь условием $\varphi(1) = 1$. Эту ветвь можно представить в виде

$$\varphi(z) = e^{a \ln z}.$$

Тогда

$$\varphi'(z) = ae^{a \ln z} \cdot \frac{1}{z} = ae^{a \ln z}e^{-\ln z} = ae^{(a-1)\ln z}$$

и, далее,

$$\varphi^{(k)}(z) = a(a-1)\ldots(a-k+1)e^{(a-k)\ln z}$$

Поскольку $\varphi^{(k)}(1) = a(a-1)\ldots(a-k+1)$, то верно разложение

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}(z-1)^k$$

В круге $\{|z| < 1\}$ заменив $z-1$ на z, получим

$$\varphi(z+1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}z^k$$

Итак,

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}z^k, \quad |z| < 1. \tag{97}$$

Это - *биномиальная формула*, установленная для общего случая, когда показатель степени есть произвольное комплексное число.

В частности, из формулы (97) имеем

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \tag{98}$$

Следующие условия эквивалентны:

(1) функция f голоморфна в точке z_0, т. е. $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности U точки z_0;

(2) функция f аналитична в точке z_0, т. е. разлагается в степенной ряд по степеням $z - z_0$ в некоторой окрестности U точки z_0.

Пример Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+16)}.$$

• Представим эту функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{17}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+16}\right) = \frac{1}{17}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1/16}{1+z^2/16}\right)$$

Применяя разложение (98) и складывая почленно степенные ряды, получаем

$$\frac{1}{(1-z^2)(z^2+16)} = \frac{1}{17}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{16^{n+1}}\right) =$$

$$-\frac{1}{17}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{16^{n+1}}\right) z^{2n}.$$

Так как разложение в степенной ряд первой дроби имеет место в точках $|z^2| < 1$, а второй дроби - в точках $|z^2/16| < 1$, то сумма рядов сходится на множестве $|z| < 1$. •

284. Опираясь на разложение

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

справедливое при $|z| < 1$, доказать равенства:

1)

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (|z| < 1)$$

2)

$$\frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n \quad (|z| < 1)$$

3)

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2n-2}z^{2n} \quad (|z| < |a|,\ a \neq 0)$$

Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ следующие функции:

285. $\frac{1}{(1-z^2)^2}$

286. $\frac{z}{(1-z^6)^2}$

287. $\frac{1}{(1+z^3)^2}$

288. $\frac{z}{(1+z)^3}$

289. $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$

290. $\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$

291. $\frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$

292. $\frac{1}{1+z+z^2}$

293. $\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$

294. $\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$

295. $\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$

296. $\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$

297. $\frac{1}{1+z+z^2}$

298. $\frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$

Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = z_0$ следующие функции:

299. $\frac{z}{(z+1)(z^2+4z+5)}$, $z_0 = -2$

300. $\frac{z+5}{(z+1)(z^2-2z+5)}$, $z_0 = 1$

301. $\frac{2-z}{z^3+2z^2+5z}$, $z_0 = -1$

302. $\frac{z+3}{(z+2)(z^2-2z+5)}$, $z_0 = 1$

303. $\frac{z^2+1}{z^2-4z+5}$, $z_0 = 2$

304. $\frac{z^2+5}{z^2+7z+12}$, $z_0 = 1$

Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ следующие функции:

305. $\sin^2 z$

306. $\cos^3 z$

307. $\sin^4 z + \cos^4 z$

308. $e^z \sin z$

309. $\cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$

310. $\operatorname{ch} z \cdot \cos z$

Опираясь на разложение (97), доказать формулы

311.
$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}, \quad |z| < 1$$

312.
$$\sqrt{1+z^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} z^{2n}, \quad |z| < 1$$

313.
$$\arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

314.
$$\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

Доказать равенства

315.
$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

316.
$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

317.
$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \frac{1}{4} \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{4n+1}, \quad |z| < 1$$

318.

$$\frac{1-z}{z}\ln(1-z) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}, \quad |z| < 1$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов найти первые три отличные от нуля члена разложения следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$:

319. $\operatorname{tg} z$
320. $e^{z\cos z}$
321. $\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$
322. $e^{z\sin z}$
323. e^{e^z}
324. $e^{z/1-z}$
325. $\frac{z}{\ln(1+z)}$
326. $\frac{z}{\arcsin z}$

6.3 Ряды Лорана. Особые точки. Вычеты и их применение

Ряды Лорана

Рядом Лорана называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{99}$$

понимаемый как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{100}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}. \tag{101}$$

Ряд (100) является обычным степенным рядом. Тогда число

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

является его радиусом сходимости.

Ряд (101) сходится в области $\{|z-z_0|>r\}$, где

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

Если $r<R$, то ряд (99) сходится в кольце $\{r<|z-z_0|<R\}$.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце $V=\{r<|z-z_0|<R\}$, где $0\le r<R\le+\infty$. Тогда в этом кольце справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{102}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n\in\mathbb{Z}, \tag{103}$$

где γ_ρ - окружность $\{|\zeta-z_0|=\rho\},\ \ r<\rho<R$, и не зависят от ρ.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$$

называют правильной частью ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-z_0)^n$$

называют главной частью ряда Лорана.

Найти множества точек, в которых сходятся следующие ряды Лорана

327. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}2^{-|n|}z^n$

328. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$

329. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}2^{-n^2}(z+1)^n$

330. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2+1}$

331. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n z^n$

332. Опираясь на разложение

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

справедливое при $|z| < 1$, доказать равенства:

1)
$$\frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n \quad (|z| > |b|)$$

2)
$$\frac{1}{z^2-b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n+1)} z^{2n} \quad (|z| > |b|)$$

3)
$$\frac{z^2}{z^2+b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n b^{-2n} z^{2n} \quad (|z| > |b|)$$

4)
$$\frac{1}{(z-b)^2} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) b^{-n-2} z^n \quad (|z| > |b|)$$

5)
$$\frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (b-a)^{-n-1} (z-a)^n \quad (a \neq b,\ |z-a| > |b-a|)$$

Разложить данную функцию в ряд Лорана либо в указанном кольце, либо в окрестности указанной точки. В последнем случае надлежит определить область, в которой разложение имеет место.

333. $\frac{1}{z-2}$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.

334. $\frac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек $z = 0,\ z = 1,\ z = \infty$.

335. $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки $z = 2$ и в кольце $1 < |z| < 2$.

336. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ в окрестности точек $z = i$ и $z = \infty$.

337. $\frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$ в кольце $1 < |z| < 2$.

338. $z^2 e^{1/z}$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.

339. $e^{1/(z-1)}$ в окрестности точек $z = 1$ и $z = \infty$.

340. $\cos \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в окрестности точки $z = 2$.

341. $z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ в окрестности точки $z = 1$.

342. $\sin z \sin \frac{1}{z}$ в области $0 < |z| < +\infty$.

Изолированные особые точки

Точка $a \in \mathbb{C}$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если f голоморфна в некоторой проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, точки a.

Изолированная особая точка a называется:

1) **устранимой**, если существует конечный предел
$$\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C};$$

2) **полюсом**, если существует предел
$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

3) **существенно особой точкой** во всех остальных случаях, т. е. когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции f в точке a.

Точка $a \in \mathbb{C}$ является устранимой особой точкой функции f тогда и только тогда, когда коэффициенты c_n ряда Лорана функции f в проколотой окрестности V при $n = -1, -2, \dots$ равны нулю, т. е. у ряда Лорана функции f отсутствует главная часть.

Точка a является полюсом функции f, голоморфной в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \epsilon\}$ этой точки, тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения f в окрестности V содержит лишь конечное число отличных от нуля членов, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{104}$$

при некотором $N \in \mathbb{N}$, причем $c_{-N} \neq 0$. Число N из равенства (104) называется порядком полюса функции f в точке a.

Отметим, что функция $f(z)$ имеет полюс в точке a тогда и только тогда, когда функция $1/f(z)$ голоморфна и равна нулю в этой точке, при этом порядок полюса $f(z)$ в точке a совпадает с порядком нуля функции $1/f(z)$ в точке a.

Функция

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

голоморфная в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \epsilon\}$ точки a, имеет существенную особенность в этой точке тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много номеров $n \geq 1$ таких, что

$$c_{-n} \neq 0,$$

т. е. в главной части ряда Лорана бесконечно членов, отличных от нуля.

Бесконечно удаленная точка как особая.

Точка $a = \infty$ называется изолированной особой точкой для функции $f(z)$, если в некоторой окрестности $\{|z| > R\}$, $R > 0$, этой точки функция f голоморфна.

Определение типа особой точки $a = \infty$ аналогично случаю конечной точки плоскости.

Лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $a = \infty$ называют ряд Лорана по степеням z,

в который эта функция разложена на множестве
$\{|z| > R\},\ R > 0,$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| > R.$$

Точка $a = \infty$ является:

(1) устранимой особой точкой функции $f \iff c_n = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots;$

(2) полюсом функции $f \iff$ существует $N \geq 1$ такое, что $c_N \neq 0$, но $c_n = 0$ при всех $n \geq N + 1$

(число N называют порядком полюса в ∞);

(3) существенно особой точкой функции $f \iff c_n \neq 0$ для бесконечного множества натуральных $n \geq 1$.

В силу этих результатов *главной частью* (т. е. частью, определяющей тип особой точки) ряда Лорана функции f в проколотой окрестности ∞ является ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

а *правильной частью* - ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n.$$

Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности.

343. $\frac{1}{z-z^3}$

344. $\frac{z^4}{1+z^4}$

345. $\frac{z^5}{(1-z)^2}$

346. $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$

347. $\frac{e^z}{1+z^2}$

348. $\frac{z^2+1}{e^z}$

349. ze^{-z}

350. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$

351. $ze^{1/z}$

352. $e^{z/(1-z)}$

353. $e^{z-1/z}$

354. $\frac{1}{\sin z}$

355. $\frac{\cos z}{z^2}$

356. $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$

357. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}-\frac{1}{z}$

Вычеты и их применение

Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $V=\{0<|z-a|<\epsilon\}$ точки $a\in\mathbb{C}$.

Вычетом функции f в точке a называют число

$$res_a f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r} f(z)dz, \tag{105}$$

где $0<r<\epsilon$ и окружность ориентирована против часовой стрелки.

Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z=a$ равен коэффициенту c_{-1} лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a.

Приведем основные формулы для отыскания вычетов. Рассмотрим сначала случай простого полюса (полюса первого порядка) функции $f(z)$ в точке a. Тогда лорановское разложение функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки a имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

Отсюда имеем $c_{-1}=\lim\limits_{z\to a}f(z)(z-a)$, то есть

$$res_a f(z)=\lim_{z\to a}f(z)(z-a). \tag{106}$$

При вычислениях особенно удобна следующая модификация формулы (106). Пусть функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{107}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - функции, голоморфные в окрестности точки a и удовлетворяющие условиям

$$\varphi(a) \neq 0, \quad \psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \neq 0. \tag{108}$$

Тогда

$$res_a f(z) = \lim_{z \to a} f(z)(z-a) = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)(z-a)}{\psi(z)} =$$

$$= \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Итак, если функция $f(z)$ имеет представление (107), удовлетворяющее условиям (108), то

$$res_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{109}$$

Пусть теперь точка a является полюсом функции $f(z)$ порядка m. Тогда в проколотой окрестности точки a

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем $c_{-m} \neq 0$. Умножив это равенство на $(z-a)^m$, получим

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m}.$$

Тогда

$$res_a f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big(f(z)(z-a)^m \big). \tag{110}$$

Для вычисления вычета в существенно особой точке аналогичных формул нет. В этом случае нужно непосредственно найти коэффициент c_{-1} лорановского разложения функции в окрестности этой точки.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $\{|z| > R\}$ и имеет точку $z = \infty$ своей изолированной особой точкой.

Вычетом функции f в бесконечности называется число

$$res_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_r^-} f(z) dz, \tag{111}$$

где окружность $L = \{|z| = r\}$ радиуса $r > R$ проходится по часовой стрелке.

Следовательно,

$$res_{\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Если точка ∞ является устранимой особой точкой, то нетрудно доказать формулу

$$res_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big). \tag{112}$$

Теорема о полной сумме вычетов. *Пусть функция f голоморфна во все плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда справедливо равенство*

$$res_{\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z) = 0. \tag{113}$$

Теорема Коши о вычетах. *Пусть простой контур L вместе со своей внутренностью D лежит в области G и функция f голоморфна в области G всюду, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$. Тогда*

$$\int\limits_{L} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z). \tag{114}$$

Пример. Вычислим вычет функции $f(z) = \frac{z^5-2z^3+1}{z^4}$ в точке $z = 0$.

• Поскольку

$$f(z) = z - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^4},$$

то это равенство можно рассматривать как лорановское разложение функции в окрестности точки $z = 0$. Поэтому

$$res_0 f(z) = c_{-1} = -2. \quad \bullet$$

Пример. Вычислим вычет функции $f(z) = \frac{e^z}{z^3+1}$ в точке $z = -1$.

• Многочлен $z^3 + 1$ имеет три простых нуля, один из которых - точка $z = -1$, и числитель дроби в этой точке отличен от нуля. Для вычисления вычета воспользуемся формулой (109)

$$res_{z=-1}\frac{e^z}{z^3+1} = \frac{e^z}{(z^3+1)'}\bigg|_{z=-1} = \frac{e^z}{3z^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{3e}. \quad \bullet$$

Пример. Вычислим вычет функции $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$ в точке $z = 0$.

• Функции $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$ в точке $z = 0$ имеет полюс второго порядка. Воспользуемся формулой (110)

$$res_{z=0}f(z) = \frac{z+1}{(z-1)'}\bigg|_{z=0} = \frac{z-1-(z+1)}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0} = -2. \quad \bullet$$

Пример. Вычислим вычет функции $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$ в точке $z = 0$.

• Точка $z = 0$ является существенно особой точкой. Используя известные разложения для синуса и дроби $\frac{1}{z-1}$, в области $0 < |z| < 1$ получим

$$\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots).$$

Отсюда находим коэффициент

$$c_1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots = \sin 1.$$

Таким образом,

$$res_{z=0}f(z) = \sin 1. \quad \bullet$$

Пример. Вычислим вычет функции $f(z) = \frac{\cos\frac{1}{z}}{z-1}$ в точке $z = \infty$.

• Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой:

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{z}}{z-1} = 0.$$

По формуле (112)

$$res_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big) = \lim_{z\to\infty}\left(-\frac{z\cos\frac{1}{z}}{z-1}\right) = -1. \quad \bullet$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^{1/z}}{z^4+1}dz$$

по границе области $D = \{|z| < 2\}$.

$\bullet$ В области D функция $f(z) = \big(e^{1/z}-1\big)/\big(z^4+1\big)$ имеет существенно особую точку $z=0$ и четыре простых полюса, являющихся корнями многочлена z^4+1. В силу теоремы Коши о вычетах и теоремы о сумме вычетов

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^{1/z}}{z^4+1}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} res_{a_k} f(z) = -2\pi i\ res_\infty f(z).$$

Поскольку точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой и

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{e^{1/z}}{z^4+1} = 0,$$

то согластно формуле (112)

$$res_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big) = \lim_{z\to\infty}\left(-\frac{ze^{1/z}}{z^4+1}\right) = 0$$

Таким образом искомый интеграл равен нулю. $\bullet$

Найти вычеты указанных функций во всех изолированных особых точках и в бесконечности (если она не является предельной для особых точек).

358. $\frac{1}{z^3-z^5}$

359. $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$

360. $\frac{1}{z(1-z^2)}$

361. $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$

362. $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

363. $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$

364. $\frac{1}{\sin z}$

367. $\sin z \sin \frac{1}{z}$

370. $\frac{1}{e^z+1}$

365. $z^3 \cos \frac{1}{z-2}$

368. $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$

371. $\frac{1+z^8}{z^6(z+2)}$

366. $\sin \frac{z}{z+1}$

369. $\frac{1}{\sin z^2}$

372. $\frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$

Вычислить интегралы

373. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}, \quad D: \ |z-1| < 1.$

374. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad D: \ |z-1-i| < 2.$

375. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}, \quad D: \ |z| < 2.$

376. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 dz}{2z^4+1}, \quad D: \ |z| < 1.$

377. $\int\limits_{\partial D} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \quad D: \ |z| < 1.$

378. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz, \quad D: \ |z| < 2.$

379. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz, \quad D: \ |z| > 3.$

380. $\int\limits_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz, \quad D: \ |z| < 2.$

381. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1} dz, \quad D: \ |z-1| > 1.$

382. $\int\limits_{\partial D} \frac{z\,dz}{e^{z^2}-1} dz, \quad D: \ |z| > 4.$

6.4 Конформные отображения

Пример. Найти образ полуплоскости $Re\ z < 1$ при отображении $w = \frac{z}{z-2}$.

• Данное дробно-линейное отображение точку $z = 2$ отображает в точку $w = \infty$. Точка $z = 2$ не принадлежит границе области прямой $Re\ z = 1$. Поэтому ее образом будет окружность.

Центром этой окружности будет образ точки, симметричной точке $z = 2$ относительно прямой $Re\ z = 1$. Точкой, симметричной точке $z = 2$ относительно прямой $Re\ z = 1$, является точка $z = 0$, а ее образ - точка $w_0 = 0$.

Найдем теперь образ какой-нибудь точки, принадлежащей прямой $Re\ z = 1$, например, точко $z = 1$. Ее образ - точка $w = -1$. Итак, искомая окружность с центром $w_0 = 0$ проходит через точку $w = -1$, следовательно, это окружность $|w| = 1$.

Поскольку точка $z = 2$ не принадлежит заданной полуплоскости и отображается в точку $w = \infty$, то образом полуплоскости будет круг $|w| < 1$. •

383. Найти образы множеств E при отображении указываемыми функциями:

1) $E : Im\ z = 1, \ \ w = \frac{z-1}{z+1}$
2) $E : |z + 1| = 1, \ \ w = \frac{1}{z}$
3) $E : |z| = 2, \ \ w = \frac{z}{z+1}$
4) $E : Re\ z = 1, \ \ w = \frac{z}{z+1}$
5) $E : |z| = 1, \ \ w = \frac{i+z}{i-z}$
6) $E : \left\{|z| = 1,\ 0 \le arg\ z \le \frac{\pi}{4}\right\}, \ \ w = z^2$
7) $E : \ Re\ z = 1, \ \ w = z^2$
8) $E : \ Im\ z = 1, \ \ w = z^2$
9) $E : |z| = 2, \ \ w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$
10) $E : |z| = \frac{1}{2}, \ \ w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$
11) $E : arg\ z = \frac{\pi}{4}, \ \ w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

384. Найти образ круга $|z - 1| < 2$ при следующих отображениях:

1) $w = 1 - 2iz$

2) $w = \frac{2iz}{z+3}$

3) $w = \frac{z+1}{z-2}$

4) $w = \frac{z-1}{2z-6}$

385. Найти образ полуплоскости $Re\ z < 1$ при следующих отображениях:

1) $w = (1+i)z + 1$

2) $w = \frac{z}{z-1+i}$

3) $w = \frac{z}{z-2}$

4) $w = \frac{4z}{z+1}$

386. Найти образы при отображении $w = z^2$ следующих областей:

1) $Im\ z > 0$

2) $\pi < arg\ z < \frac{3\pi}{2}$

3) $Im\ z < -1$

4) $|z| < 2,\ 0 < arg\ z < \frac{\pi}{2}$

5) $Re\ z > 0$

6) $|z| < 1,\ \frac{5\pi}{4} < arg\ z < \frac{3\pi}{2}$

7) $|z| > \frac{1}{2},\ Re\ z > 0$

8) $Re\ z > 1$

387. Найти образы следующих областей D при отображении регулярной ветвью функции $w = \sqrt{z}$, выделяемой ее значением в указанной точке:

1) $D : \{Im\ z > 0\}, \quad \sqrt{z}\big|_{z=i} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$

2) $D : \{Re\ z > 0\}, \quad \sqrt{z}\big|_{z=1} = 1.$

3) $D : \{|z| < 1,\ \ Im\ z > 0\}, \quad \sqrt{z}\big|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{1+i}{2}.$

4) $D : \left\{|z| > 1,\ \ \frac{3\pi}{4} < arg\ z < \frac{5\pi}{4}\right\} \quad \sqrt{z}\big|_{z=-1} = i.$

388. Найти образы указываемых множеств E при указываемых отображениях:

1) $E : \left\{arg\ z = \frac{\pi}{4}\right\}, \quad w = z^3.$

2) $D : \{|z| < 1,\ \ Im\ z > 0\}, \quad w = z^{3/2}, \quad w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1-i}{4}.$

3) $D : \left\{|z| = 1,\ \ \frac{\pi}{8} < arg\ z < \frac{\pi}{4}\right\} \quad w = z^4.$

4) $D : \left\{|arg\ z| < \frac{\pi}{8},\ z \notin [0,1]\right\}, \quad w = z^8.$

389. Найти образы при отображении $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ следующих областей:

1) $|z| > 2$
2) $|z| < \frac{1}{2}$
3) $\frac{\pi}{4} < arg\ z < \frac{3\pi}{4}$
4) $\frac{\pi}{4} < arg\ z < \frac{3\pi}{4},\ z \notin [0, i]$
5) $|z| < 1,\ z \notin [0, 1]$
6) $|z| > 1,\ z \notin [-2, -1],\ z \notin [1, +\infty]$
7) $|z| < 1,\ 0 < arg\ z < \frac{\pi}{2}$
8) $|z| < 1,\ -\frac{3\pi}{4} < arg\ z < -\frac{\pi}{4}$

390. Найти образы следующих областей D при отображении указываемыми функциями:

1) $D : \{-\pi < Im\ z < 0\},\ \ w = e^z$
2) $D : \{|Im\ z| < \pi\},\ \ w = e^z$
3) $D : \{|Im\ z| < \frac{\pi}{2}\},\ \ w = e^z$
4) $D : \{0 < Im\ z < 2\pi,\ Re\ z > 0\},\ \ w = e^z$
5) $D : \{0 < Im\ z < \frac{\pi}{2},\ Re\ z > 0\},\ \ w = e^{2z}$
6) $D : \{0 < Re\ z < \pi,\ Im\ z > 0\},\ \ w = e^{iz}$
7) $D : \{|Im\ z| < \frac{\pi}{4}\},\ \ w = \operatorname{th} z$
8) $D : \{0 < Re\ z < \pi\},\ \ w = \operatorname{tg} z$
9) $D : \{0 < Re\ z < \pi,\ Im\ z > 0\},\ \ w = \cos z$
10) $D : \{0 < Re\ z < \frac{\pi}{2}\},\ \ w = \cos z$
11) $D : \{0 < Re\ z < 2\pi,\ Im\ z > 0\},\ \ w = \sin z$
12) $D : \{|Im\ z| < \pi,\ Re\ z > 0\},\ \ w = \operatorname{sh} z$