21. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$.

22. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0\}$.

23. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ y \le 0\}$.

24. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le ax\}$.

25. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le ay\}$.

26. $D = \{(x, y) : a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}, 0 < a < b$.

27. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge x\}$.

28. $D = \{(x, y) : a^2 \le x^2 + y^2 \le 4a^2\}, |x| - y \ge 0$.

29. D- треугольник с вершинами $O(0, 0),\ A(1, 0),\ B(0, 1)$.

30. D- треугольник с вершинами $O(0, 0),\ A(1, 1),\ B(-1, 1)$.

31. D- треугольник с вершинами $O(0, 0),\ A(1, 0),\ B(1, 1)$.

32. D- квадрат с вершинами $O(0, 0),\ A(0, 1),\ B(1, 0),\ C(1, 1)$.

В интеграле $\iint\limits_G f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$

33. $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + (y - 1)^2 \le 1\}$.

34. $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$.

35. $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \le 1,\ 1 \le x \le 2\}$.

36. $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \ge 1\}$.

37. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + (y - 1)^2 \le 1\}$.

38. $D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \le 1,\ -1 \le x \le 0\}$.

39. $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \le 1,\ y + x \ge 0\}$.

Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

40. $\iint\limits_D xy^2dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0\};$

41. $\iint\limits_D x^2ydxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0\};$

42. $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2,\ y \ge x\};$

43. $\iint\limits_D \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\};$

44. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}, \quad D = \{(x,y) : 9 \le x^2 + y^2 \le 25\};$

45. $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\};$

46. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 9, y \ge 0\};$

47. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2x\};$

48. $\iint\limits_D ydxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2x,\ x \ge y\};$

49. $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, x^2 + y^2 \le 2y\};$

50. $\iint\limits_D \left(\frac{y}{x}\right)^2dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\};$

Ввести новые переменные u и v и вычислить следующие интегралы:

51. $\iint\limits_D x^2y^2 + y^2dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1/x \le y \le 2/x,\ x \le y \le 3x\};$

52. $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x}dxdy, \quad D = \{(x,y) : 1 - x \le y \le 3 - x,\ x/2 \le y \le 2x\};$

53. $\iint\limits_D (x^3+y^3)dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 \le y \le 3x^2,\ 1/x \le 2y \le 3/x\};$

54. $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : -1 \le x - y \le 1,\ 1/x \le y \le 2/x\};$

55. $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) : x - 1 \le y \le x + 1,\ -x - 1 \le y \le -x + 1\};$

2 Тройные интегралы.

2.1 Вычисление тройного интеграла

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области

$$Q = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\big\},$$

где функции $\varphi(x, y)$ и $z \le \psi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы (такую область Q называют правильной в направлении оси Oz), то тройной интеграл по области Q существует, причем имеет место равенство

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (4)$$

Если область интегрирования Q не является правильной в направлении ни одной из координатных осей, то эту область следует разбить на части, которые являлись бы правильными.

Вычислить тройной интеграл.

70. $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{4} = 1$;

71. $\iiint\limits_V xdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$;

72. $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - \frac{z}{3} = 1$;

73. $\iiint\limits_V zdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} = 1$;

74. $\iiint\limits_V xdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $-\frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$;

75. $\iiint\limits_V zdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $-\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$;

76. $\iiint\limits_V xdxdydz$, где V - тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=1$;

2.2 Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функции

$$x=x(\xi,\eta,\zeta),\ y=y(\xi,\eta,\zeta),\ z=z(\xi,\eta,\zeta) \tag{5}$$

отображают область $\Omega^*\subset\mathbb{R}^3$ на область $Q^*\subset\mathbb{R}^3$ и удовлетворяют условиям:

1) отображение является взаимно однозначным;
2) функции непрерывно дифференцируемы и в каждой точке $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega^*$ якобиан отображения

$$J(\xi,\eta,\zeta)=\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в кубируемой замкнутой области $Q\subset Q^*$, то

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_\Omega f\big(x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta)\big)\big|J(\xi,\eta,\zeta)\big|d\xi d\eta d\zeta, \tag{6}$$

где Ω - прообраз области Q при отображении (5).

Наиболее употребительными криволинейными координатами в пространстве являются *цилиндрические координаты* и *сферические координаты.*

Цилиндрические координаты. Цилиндрические координаты r, φ, h связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h, \tag{7}$$

которые можно рассматривать как отображение замкнутой области

$$\Omega^* = \big\{(r,\varphi,h) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,+\infty),\ \varphi \in [0,2\pi],\ h \in \mathbb{R}\big\}$$

на $Q^* = \mathbb{R}^3$. Якобиан отображения (7) легко вычисляется:

$$J(r,\varphi,h) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Сферические координаты. Сферические координаты r, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x = r\cos\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\cos\theta,\ z = r\sin\theta, \tag{8}$$

которые можно рассматривать как отображение замкнутой области

$$\Omega^* = \big\{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,+\infty),\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\big\}$$

на $Q^* = \mathbb{R}^3$.

Якобиан отображения (8) равен

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta.$$

Вычислить интеграл, переходя к сферическим или цилиндрическим координатам.

77. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где $V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 8\}$;

78. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где $V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

79. $\iiint\limits_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, где $V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ z \ge 0\}$;

91. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1.$

92. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ , x + y = 1,\ z = x^2 + y^2.$

93. $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0.$

94. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0.$

95. $z = x^2 + y^2,\ x = x^2 + y^2,\ 2x = x^2 + y^2,\ z = 0.$

96. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = z.$

Найти объемы тел:

97. $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$

98. $0 \leq z \leq x^2,\ x + y \leq 5,\ x - 2y \geq 2,\ y \geq 0.$

99. $x^2 + y^2 \leq a^2,\ z \geq 0,\ x + y + z - 4a \geq 0.$

100. $x^2 + y^2 \leq a^2,\ x + y + z \leq a,\ z \geq 0.$

101. $z \geq 0,\ x + z \leq 1,\ x \geq y^2.$

3 Криволинейные интегралы.

3.1 Спрямляемые кривые.

Определение 3.1. *Пусть вектор-функция $\overline{\gamma}$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает значения в $\mathbb{R}^2$. Множество значений этой функции назовем непрерывной плоской кривой и обозначим ее символом L или подробнее $L_{\overline{\gamma}}$.*

Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})\right|$$

равна длине ломаной с вершинами в точках $M_i(\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i)),\ i = 0, 1, \ldots, n$, лежащих на кривой L. Такую ломаную называют вписанной в кривую L.

Кривую L называют спрямляемой, если длины всех ломаных, вписанных в эту кривую образуют ограниченное сверху множество.

Длиной спрямляемой кривой L называют верхнюю грань длин всех ломаных, вписанных в эту кривую, и обозначают символом $|L|$.

Теорема 3.1.1. *Если функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2')$, то кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ спрямляема.*

Доказательство. Поскольку производные γ_1', γ_2' непрерывны на отрезке $[a, b]$, то они ограничены на нем, т. е. найдется константа M такая, что при всех $t \in [a, b]$ $|\gamma_1'(t)| \le M$, $|\gamma_2'(t)| \le M$. Тогда на основании формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$|\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})| = |\gamma_1'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})| \le M|t_i - t_{i-1}|,$$

$$|\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})| = |\gamma_2'(\theta_i)(t_i - t_{i-1})| \le M|t_i - t_{i-1}|.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\overline{\gamma}(t_i) - \overline{\gamma}(t_{i-1})\right| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))^2} \le$$

$$\le M\sqrt{2} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = M\sqrt{2}(b - a).$$

Это означает, что длины всех ломаных, вписанных в кривую L образуют ограниченное сверху множество. Следовательно, кривая спрямляема. □

Следствие. *Пусть функция f определена и имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. Тогда кривая L, являющаяся графиком функции f, спрямляема.*

Доказательство. Для графика функции f мы имеем параметрическое представление $\overline{\gamma}(t) = \big(t, f(t)\big)$, $t \in [a, b]$, удовлетворяющее условиям теоремы (3.0.1). □

3.2 Криволинейные интегралы первого рода.

Пусть вектор-функция $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает значения в $\mathbb{R}^2$. Множество значений этой функции называем параметризованной непрерывной кривой и обозначаем через $L = L_{\overline{\gamma}}$.

Кривую $L = L_{\overline{\gamma}}$ назовем гладкой, если вектор-функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную и при любом $t \in [a, b] \quad (\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 \neq 0$.

Если функция $\overline{\gamma}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2')$, то кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ спрямляема и ее длина S выражается равенством

$$S = \int_a^b |\overline{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt.. \tag{10}$$

Пусть функция f определена и имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. Тогда кривая L, являющаяся графиком функции f, спрямляема и ее длина S может быть найдена по формуле

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{11}$$

Если кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ является гладкой и функция f непрерывна вдоль этой кривой, то криволинейный интеграл первого рода существует и вычисляется по формуле:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt, \tag{12}$$

Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = \varphi(x)$. $x \in [a, b]$, то в качестве параметра кривой естественно выбрать переменную x. Тогда формула (12) примет вид

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \tag{13}$$

Для кривой $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ формула (11) будет иметь вид

$$\int\limits_L f(x,y,z)ds = \int\limits_a^b f(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2+(\gamma_3'(t))^2}dt, \tag{14}$$

Класс всех эквивалентных параметризованных гладких кривых называют гладкой кривой. Криволинейный интеграл первого рода по гладкой кривой определяют как интеграл по любой из параметризованных кривых, принадлежащих этому классу.

Вычислить криволинейные интегралы первого рода по плоской кривой.

102. $\int\limits_C y^2 ds$, где C- арка циклоиды $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

103. $\int\limits_C \sqrt{y} ds$, где C- арка циклоиды $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

104. $\int\limits_C (x^2+y^2)ds$, где C- кривая $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

105. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, где C- кривая $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

106. $\int\limits_C yds$ по параболе $y^2 = x$ от точки $(0,0)$ до точки $(4,2)$.

107. $\int\limits_C xds$ по параболе $y = x^2$ от точки $(1,1)$ до точки $(2,4)$.

108. $\int\limits_C xds$ по отрезку прямой от точки $(0,0)$ до точки $(1,2)$.

109. $\int\limits_C (x+y)ds$, где C- контур треугольника с вершинами $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$.

110. $\int\limits_C (2x+y)ds$, где C- ломаная $ABOA$, где $A(1,0),\ B(0,2),\ O(0,0)$.

3.3 Криволинейные интегралы второго рода.

Если кривая $L = L_{\overline{\gamma}}$ является гладкой и функции P и Q непрерывны вдоль этой кривой, то криволинейный интеграл второго рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) \Big) dt, \tag{15}$$

Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = \varphi(x)$. $x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \Big) dx. \tag{16}$$

Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $x = \varphi(y)$. $y \in [c,d]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P(\varphi(y), y))\varphi'(y) + Q(\varphi(y), y) \Big) dy. \tag{17}$$

Для кривой $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ формула (15) будет иметь вид

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_a^b \Big(P(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\gamma_1'(t) +$$

$$+ Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\gamma_2'(t) + R(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\gamma_3'(t)) \Big) dt, \tag{18}$$

Класс всех положительно эквивалентных друг другу параметризаций называют ориентированной гладкой кривой.

Криволинейный интеграл второго рода по ориетированной кривой определяют как интеграл по одной из ее параметризаций.

У гладкой кривой воможны две ориентации, каждую из которых можно связать с понятием начала и конца кривой. А именно, если $L_{\overline{\gamma}}$, где $\overline{\gamma}$ определена на отрезке $[a, b]$, одна из параметризаций ориентированной кривой, то точку $A = \overline{\gamma}(a)$ называют началом кривой, а точку $B = \overline{\gamma}(b)$ - ее концом. У кривой, противоположной ориентированной точка B является началом, а точка A - концом кривой.

Обозначим одну из ориентаций гладкой кривой L через L^+, а другую через L^-. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{19}$$

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по плоской кривой, пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

124. $\int\limits_C xy^2dx$, где C - дуга окружности $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi/2$.

125. $\int\limits_C xdy + ydx$, где C - дуга окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le \pi/2$.

126. $\int\limits_C ydx - xdy$, где C - эллипс $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

127. $\int\limits_C y^2dx + x^2dy$, где C - верхняя половина эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

128. $\int\limits_C (2a - y)dx + (y - a)dy$, где C - дуга циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по плоской кривой, пробегаемой в направлении возрастания параметра x.

129. $\int\limits_C xydx$, где C - дуга синусоиды $y = \sin x,\ -0 \le x \le \pi$.

4 Поверхностные интегралы.

4.1 Параметрическое представление поверхности. Площадь поверхности

Пусть поверхность Φ задана следующими равенствами:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

Этот способ задания поверхности называют *параметрическим.*

Причем выполняются следующие условия:

1) множество D является замкнутым ограниченным элементарным множеством, граница γ которого представляет собой простой кусочно гладкий контур, а отображение, задаваемое равенствами

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

взаимно однозначно на множестве внутренних точек множества D (простая поверхность);

2) функции $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве D вплоть до границы γ (гладкая поверхность);

3) хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

отличен от нуля при любых значениях u и v (регулярная поверхность, невырожденная поверхность или поверхность без особых точек).

Поверхности, удовлетворяющие указанным трем условиям, будем называть кратко *гладкими поверхностями.*

Если поверхность задана в явном виде, например, уравнением $z = f(x, y)$, то ее параметрическое уравнение в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Обозначим

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$
$$\overline{r}'_u(u, v) = (x'_u(u, v), y'_u(u, v), z'_u(u, v)),$$
$$\overline{r}'_v(u, v) = (x'_v(u, v), y'_v(u, v), z'_v(u, v)),$$

Векторное произведение $\overline{r}'_u(u_0, v_0) \times \overline{r}'_v(u_0, v_0)$ является нормальным вектором к поверхности в точке $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, и касательная плоскость может быть задана уравнением в общем виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

в котором A, B, C - координаты вектора $\overline{r}'_u(u_0, v_0) \times \overline{r}'_v(u_0, v_0)$. Используя правило вычисления векторного произведения в прямоугольных координатах, получаем

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = y'_u(u_0, v_0) z'_v(u_0, v_0) - y'_v(u_0, v_0) z'_u(u_0, v_0),$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = z'_u(u_0, v_0) x'_v(u_0, v_0) - z'_v(u_0, v_0) x'_u(u_0, v_0),$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) = x'_u(u_0, v_0) y'_v(u_0, v_0) - x'_v(u_0, v_0) y'_u(u_0, v_0),,$$

Для произвольной точки $(u, v) \in D$ вектор $\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = (A, B, C)$, где

$$A = A(u, v) = \frac{D(y, z)}{D(u, v)},$$

$$B = B(u, v) = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \tag{25}$$

$$C = C(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Тогда единичный вектор нормали

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}. \tag{26}$$

Координаты вектора $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Для вычисления площади поверхности Φ имеем формулу

$$S = \iint\limits_D |\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| du dv. \tag{28}$$

Поскольку

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| = \sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{A^2+B^2+C^2} du dv. \tag{29}$$

Введем функции

$$E = (r'_u)^2 = (x'_u(u,v))^2 + (y'_u(u,v))^2 + (z'_u(u,v))^2,$$

$$F = r'_u r'_v = x'_u(u,v)x'_v(u,v) + y'_u(u,v)y'_v(u,v) + z'_u(u,v)z'_v(u,v),$$

$$G = (r'_v)^2 = (x'_v(u,v))^2 + (y'_v(u,v))^2 + (z'_v(u,v))^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|^2 = (r'_u)^2(r'_v)^2 - (r'_u r'_v)^2 = EG - F^2.$$

Поэтому равенство (29) можно переписать в виде

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{30}$$

В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, будем иметь равенство

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2} dudv. \tag{31}$$

4.2 Поверхностные интегралы первого рода.

Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках поверхности Φ :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Тогда поверхностный интеграл первого рода существует и может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_\Phi f(x, y, z) dS = \iint\limits_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv \tag{32}$$

или по формуле

$$\iint\limits_\Phi f(x, y, z) dS = \iint\limits_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{33}$$

В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, формула для вычисления интеграла принимает вид

$$\iint\limits_\Phi f(x, y, z) dS =$$

214. $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, где S - часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z\leq 1$.

215. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, где S - часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z\leq 1$.

4.3 Поверхностные интегралы второго рода.

Пусть Φ - гладкая поверхность с параметрическим представлением

$$\overline{r}=\overline{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in D,$$

и на поверхности Φ заданы функции $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$. Поверхностный интеграл второго рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy:=$$

$$=\iint\limits_{D}\big(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))A(u,v)+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))B(u,v)+$$

$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))C(u,v)\big)dudv. \qquad (35)$$

Имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{\Phi}\big(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\big)dS, \qquad (36)$$

где

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{A}{\sqrt{EG-F^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{B}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Вектор-функция $\overline{n}(\overline{r})$, определяемая формулой (**??**), является непрерывной. Если задана другая параметризация $\overline{\rho}$ поверхности Φ, то нормаль к поверхности Φ либо не меняется во всех точках Φ, либо меняет свое направление сразу во всех точках Φ. Поэтому говорят, что нормаль к поверхности, отвечающая некоторой параметризации этой поверхности, выделяет на ней ее сторону.

Выделение одной из сторон поверхности Φ с помощью параметризации называется *ориентацией поверхности* Φ.

Поверхностный интеграл второго рода меняет знак при смене ориентации поверхности.

Формула Стокса. Если функции $P,\ Q,\ R$ непрерывно дифференцируемы и L - простой кусочно гладкий контур, ограничивающий кусочно гладкую поверхность Φ, ориентированную так, что относительно ее нормали обход контура L совершается против часовой стрелки, то имеет место *формула Стокса:*

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \quad (37)$$

Формула Остроградского - Гаусса . Пусть V - простая замкнутая область, граница Φ которой положительно ориентирована, т.е. нормаль внешняя. Если функции $P(x,y,z),\ \ Q(x,y,z),\ \ R(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемы в области G, содержащей V, то справедлива *формула Остроградского - Гаусса*

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \quad (38)$$

Вычислить интегралы.

216. $\iint\limits_S (2z - x)dydz + (x + 2z)dzdx + 3zdxdy$, где S - верхняя сторона треугольника $x + 4y + z = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

217. $\iint\limits_S ydzdx$, где S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

218. $\iint\limits_S x^2dydz$, где S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

219. $\iint\limits_S (x^5+z)dydz$, где S - внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \leq 0$.

220. $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, где S - внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \leq 0$.

221. $\iint\limits_S x^2dydz+z^2dxdy$, где S - внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x \leq 0,\ y \geq 0$.

222. $\iint\limits_S yz^2dzdx$, где S - внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = r^2,\ y \leq 0,\ 0 \leq z \leq r$.

223. $\iint\limits_S yzdxdy + zxdydz + xydzdx$, где S - внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = r^2,\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq H$.

224. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S - внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0$.

225. $\iint\limits_S (z^2 - y^2)dydz + (x^2 - z^2)dzdx + (y^2 - x^2)dxdy$, где S - внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0$.

226. $\iint\limits_S x^2ydydz + xy^2dzdx + xyzdxdy$, где S - внутренняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

227. $\iint\limits_S x^2ydydz-xy^2dzdx+(x^2+y^2)dxdy$, где S - внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \leq z \leq H$.

Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить интегралы.

239. $\int\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где L - окружность $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x = y$, ориентированная положительно относительно вектора $(1, 0, 0)$.

240. $\int\limits_L (x+z)dx+(x-y)dy+xdz$, где L - эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z = c$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(0, 0, 1)$.

5 Ряды Фурье.

Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big) \tag{39}$$

называется *рядом Фурье* функции f, если его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \tag{40}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{41}$$

Коэффициенты, вычисляемые по формулам (40) и (41), называются *коэффициентами Фурье* функции f.

Ряды Фурье четных и нечетных функций.

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является четной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx, \tag{42}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad (43)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (44)$$

и ряд Фурье четной функции имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Пусть функция $f \in R([-\pi, \pi])$ является нечетной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \qquad (45)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \qquad (46)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (47)$$

и ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[a, a + 2\pi]$.

При разложении в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $[a, a+2\pi]$, для вычисления коэффициентов в качестве пределов интегрирования следует брать концы этого отрезка.

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-l, l]$. Ряд Фурье такой функции будет иметь вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

и

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x)dx, \; a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \; b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$n = 1, 2, \ldots.$$

Разложение в ряд Фурье на промежутке $[0, \pi]$.

Функцию можно разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а также по синусам кратных дуг:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Признаки поточечной сходимости рядов Фурье.

Обозначим через $R_{2\pi}$ класс функций, которые заданы на всей числовой прямой, интегрируемы на каждом конечном отрезке числовой прямой и имеют период 2π.

Обозначим частную сумму ряда Фурье функции f:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big).$$

1. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и дифференцируема в точке x. Тогда
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$
2. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют односторонние левая производная $f'_{\text{Л}}(x)$ и правая производная $f'_{\text{П}}(x)$. Тогда
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$
3. Пусть функция $f \in R_{2\pi}$ и в точке x существуют следующие четыре конечных предела
$$f(x+0) = \lim_{t\to x+0} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{t\to x-0} f(t),$$
$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = \alpha, \ \lim_{t\to+0} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t} = \beta.$$
Тогда
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Равенство Парсеваля и сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном.

Для любой функции f интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-S_n(x)\big)^2dx=0.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|,\ x \in [-2,2]$.

• В данном случае $l=2$, функция $f(x)$ - четная. Поэтому

$$b_n=0,\ \ a_0=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2 xdx=2,$$

$$a_n=\int\limits_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2=\frac{4}{\pi^2n^2}[(-1)^n-1].$$

Тогда

$$a_{2n}=0,\ \ a_{2n-1}=-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}.$$

Согласно признакам поточечной сходимости 1 и 2, будем иметь при всех $x\in[-2,2]$ равенство

$$|x|=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.\ \bullet$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ в интервале $(0,\pi)$.

• Имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\sin nxdx=\frac{1}{2n}(-\cos nx)\big|_0^{\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi n}x\cos nx\big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\ dx=\frac{1}{2n}[1+(-1)^{n+1}]+\frac{(-1)^n}{n}.$$

Находим $b_{2n-1} = 0,\ b_{2n} = \frac{1}{2n}$.

Поскольку функция дифференцируема на интервале $(0, \pi)$, то

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}, \quad x \in (0, \pi). \ \bullet$$

241. Разложить в ряд Фурье функцию:

(a) $\sin^2 x$,

(b) $\cos^3 x$,

(c) $\sin^4 x$,

(d) $\sin^6 x \cos^4 x$,

(e) $\sin^8 x + \cos^8 x$,

(f) $\sin^5 x$.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном промежутке и нарисовать график суммы ряда.

242. $f(x) = x$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

243. $f(x) = |x|$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

244. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \ \ 0 < x < 2\pi$.

245. $f(x) = \pi^2 - x^2$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

246. $f(x) = x^3$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию.

247. $f(x) = sign(\cos x)$.

248. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

249. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

250. $f(x) = |\cos x|$.

251. $f(x) = |\sin x|$.

Разложить в ряд Фурье функцию.

252.

$$f(x) = \begin{cases} ax, \ -\pi < x < 0, \\ bx, \ 0 \le x < \pi. \end{cases}$$