1 Интегральное исчисление функций одной переменной.

1.1 Общие методы интегрирования

Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ на промежутке (a,b) называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная константа.

Основные свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

3) $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$;

4) $\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx, \quad a, b = const.$

Последнее свойство называется **свойством линейности интеграла**.

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C(x \neq 0))$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C(a \neq 0)$
10. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C(a \neq 0)$
11. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C(a \neq 0)$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$

15. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

16. $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$

17. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

18. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

20. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = \operatorname{th} x + C$

Формула замены переменной

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и функция $\varphi(x)$ дифференцируема, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

Пример 1. Найти

$$1)\ \int(x-2e^x)dx,\quad 2)\ \int\frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}dx,\quad 3)\ \int\frac{dx}{x^2(x^2+4)},$$

$$4)\ \int\sin^2\frac{x}{2}dx,\quad 5)\ \int\operatorname{tg}^2 x dx.$$

•

$$1)\quad \int(x-2e^x)dx = \int xdx - 2\int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C;$$

$$2)\ \int\frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}dx = \int dx - 4\int x^{-1/6}dx + 4\int x^{-1/3}dx =$$

$$= x - \frac{24}{5}x^{5/6} + 6x^{2/3} + C;$$

$$3)\ \int\frac{dx}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{4}\int\frac{x^2+4-x^2}{x^2(x^2+4)}dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C;$$

$$4)\ \int\sin^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C;$$

$$5)\ \int\operatorname{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C.\quad \bullet$$

Пример 2. Найти

$$1)\ \int(3x-5)^{10}dx,\quad 2)\ \int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}dx,\quad 3)\ \int\operatorname{tg} x dx,$$

$$4)\ \int \frac{dx}{2+\cos^2 x}dx, \quad 5)\ \int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^{16}}}.$$

•

$$1)\ \int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}(3x-5)'dx = \Big| t = 3x-5 \Big| = \frac{1}{3}\int t^{10}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{33}(3x-5)^{11} + C;$$

$$2)\ \int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}dx = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{5x^3+1}(5x^3+1)'dx = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{5x^3+1}d(5x^3+1) =$$

$$= \Big| t = 5x^3+1 \Big| = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{t}dt = \frac{1}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = \frac{1}{18}(5x^3+1)\sqrt[5]{5x^3+1} + C;$$

$$3)\ \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$$

$$4)\ \int \frac{dx}{2+\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \int \frac{1}{3+2\operatorname{tg}^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} == \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{3+2\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\frac{3}{2}+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right) + C;$$

$$5)\ \int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^{16}}} = \frac{1}{8}\int \frac{d(x^8)}{\sqrt{1-x^{16}}} = \frac{1}{8}\arcsin x^8 + C. \quad \bullet$$

Пример 3. Вычислить

$$1)\ \int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx, \quad 2)\ \int \frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx, \quad 3)\ \int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}dx,$$

• 1) В квадратном трехчлене выделим полный квадрат $x^2+4x+7 = (x+2)^2+3$ и сделаем в интеграле замену $t = x+2:$

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx = \int \frac{2(x+2)+1}{\sqrt{(x+2)^2+3}}d(x+2) = \int \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+3}}dt =$$

$$= \int \frac{d(t^2+3)}{\sqrt{t^2+3}}dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = 2\sqrt{t^2+3} + \ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+7} + \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right| + C.$$

2) Так как $1-x-x^2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$, то, полагая $t=x+\frac{1}{2}$, имеем

$$\int\frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\int\frac{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)=\int\frac{-3t+\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}dt$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(\frac{5}{4}-t^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}+\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}=3\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=3\sqrt{1-x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

3) Так как $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, то

$$\int(2x+7)\sqrt{x^2+x+1}dx=\int\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+6\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\int(2t+6)\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}dt==\int\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+6\int\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}dt=$$

$$=\frac{2}{3}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}+6\left(\frac{t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}{2}+\frac{3}{8}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|\right)+C=$$

$$=\frac{2}{3}\left(x^2+x+1\right)^{3/2}+3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.\bullet$$

Найти интегралы:

1. $\int x(x+1)(x-2)dx$
2. $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$
3. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$
4. $\int\frac{dx}{7+x^2}$
5. $\int\frac{dx}{2x^2+3}$
6. $\int\frac{dx}{3x^2-7}$
7. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$
8. $\int\frac{dx}{x^4-1}$
9. $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$
11. $\int(5^x-2^x)^2dx$
12. $\int\frac{2^x3^{2x}4^{3x}}{5^x6^{2x}}dx$
13. $\int\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx$
14. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$

56. $\int x \sin x dx$

57. $\int x \cos^2 x dx$

58. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

59. $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

60. $\int \ln^2 x dx$

61. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

62. $\int x^2 \ln(1+x) dx$

63. $\int \operatorname{arctg} x dx$

64. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

65. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$

66. $\int x \operatorname{arctg} x^2 dx$

67. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx$

68. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

69. $\int x\sqrt{1-x^2} \arcsin x dx$

70. $\int e^{-x} \operatorname{arctg} e^x dx$

71. $\int \arccos x dx$

72. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx$

73. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

74. $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$

75. $\int x \arcsin x dx$

76. $\int \arcsin^2 x dx$

77. $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$

78. $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$

79. $\int \sin \ln x dx$

80. $\int \cos \ln x dx$

81. $\int \cos^2(\ln x) dx$

82. $\int x e^x \sin x dx$

83. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx$

1.2 Интегрирование рациональных дробей

Функцию вида $\frac{Q(x)}{P(x)}$, где $Q(X)$ и $P(x)$ -многочлены, называют рациональной дробью или рациональной функцией. Если степень многочлена $Q(x)$ больше или равна степени многочлена $P(x)$, то выделяем целую часть дроби, т. е.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = R(x) + \frac{T(x)}{P(x)},$$

где $R(x), T(x)$ - многочлены и степень многочлена $T(x)$ меньше степени многочлена $P(x)$. Интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{T(x)}{P(x)}$ основано на теореме о представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей. Вид этого разложения определяется разложением мноочлена $P(x)$ на простые множители. Каждый сомножитель вида $(x-a)^k$ (a- действительный корень кратности k) порождает сумму k простейших дробей:

$$\frac{A_m}{(x-a)^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, k,$$

где A_m-вещественные числа.

Соножитель вида $(x^2+px+q)^l$ (трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней) порождает сумму l простейших дробей:

$$\frac{B_i x + D_i}{(x^2+px+q)^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

где B_i, D_i-вещественные числа.

Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию дробей вида

$$I.\ \frac{A}{x-a}; \quad II.\ \frac{A}{(x-a)^k},\ k \geq 2; \quad III. \frac{Bx+C}{x^2+px+q};$$

$$IV.\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},\ n \geq 2$$

(трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней).

Для первых трех видов дробей имеем

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C;$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p) + C - \frac{Bp}{2}}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

(так как x^2+px+q не имеет действительных корней, то $q-\frac{p^2}{4}>0$).

При вычислении интеграла IV поступим следующим образом:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+C-\frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{B}{2}\frac{1}{1-n}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n},\ n \geq 2$$

Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \quad \left(q-\frac{p^2}{4}>0\right).$$

Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене и делая замену $z = x+\frac{p}{2}$, получим

$$I_n = \int \frac{dz}{(z^2+b^2)^n}, \quad b^2 = q-\frac{p^2}{4},$$

для вычисления которого воспользуемся рекуррентной формулой (2).

Для нахождения неизвестных коэффициентов в разложении правильной рациональной дроби $\frac{T(x)}{P(x)}$правую часть искомого разложения приводят к общему знаменателю (им будет многочлен $P(x)$) и у получившегося в числителе многочлена и у многочлена $P(x)$ приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. Таким образом. получается система линейных уравнений, решая которую, находят неизвестные коэффициенты (в алгебре доказывается существование единственного решения системы).

Пример 1. Найти

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx$$

• Разложим знаменательна множители

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2(x+1)(x^2-1) = x^2(x+1)^2(x-1).$$

Тогда

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{x^4}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов:

$$x^4+1 = Ax(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2+$$
$$+Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1). \qquad (3)$$

Положив в равенстве (17) поочередно $x=0,\ x=1,\ x=-1$, получим $B=-1,\ C=1/2,\ E=-1$. Далее имеем равенство

$$x^4+1 = Ax(x-1)(x+1)^2-(x-1)(x+1)^2+\frac{1}{2}x^2(x+1)^2+Dx^2(x^2-1)-x^2(x-1)$$

Осталось найти два коэффициента A и D. Приравнивая коэффициенты про одинаковых степенях x, получаем равенства

$$x^4: \quad 1 = A + \frac{1}{2} + D$$

$$x^3: \quad 0 = A - 1 + 1 - 1,$$

из которых находим $A=1,\ D=-1/2$. Следовательно,

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C. \bullet$$

Вычислить интегралы:

84. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$

85. $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$

86. $\int \frac{(5x-3)dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$

87. $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$

88. $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx$

89. $\int \frac{x^5dx}{x^4-2x^3+2x-1}$

90. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

91. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

92. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$

93. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

94. $\int \frac{3x^3-x^2+11x-5}{(x+1)^2(x^2-4x+5)}dx$

95. $\int \frac{dx}{x^4(x-2)^3}$

96. $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$

97. $\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}$

98. $\int \frac{dx}{x(1+x^3)^2}$

99. $\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$

100. $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$

101. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

102. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

103. $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$

104. $\int \frac{x(x-2)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$

105. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

1.3 Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

Вычисление интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, где n, m -неотрицательные целые числа.

(a) Если n и m - четные числа, то применяют формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

(b) Если n - нечетное число, то делают замену $t = \cos x$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$. Если m - нечетное, то то делают замену $t = \sin x$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$.

При вычислении рассматриваемых интегралов часто исполь-

112. $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

113. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

114. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$

115. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$

116. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$

117. $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^3 x} dx$

118. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

119. $\int \mathrm{tg}^4 x dx$

120. $\int \mathrm{ctg}^5 x dx$

121. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 6}$

122. $\int \frac{\cos x dx}{2 - \cos x}$

123. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x}$

124. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

125. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}$

126. $\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 6}$

127. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

128. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x + 3\cos x} dx$

129. $\int \frac{dx}{1 + \mathrm{tg}\, x}$

130. $\int \frac{dx}{1 + \mathrm{ctg}\, x}$

1.4 Интегрирование дифференциальных биномов

Интеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где m, n, p - рациональные числа, может быть приведен к интегрированию рациональных функций лишь в трех случаях.

1) Пусть p -целое. Полагаем $x = t^N$, где N - общий знаменатель дробей m и n.
2) Пусть $\frac{m+1}{n}$ - целое. Полагаем $a + bx^n = t^N$, где N - знаменатель дроби p.
3) Пусть $\frac{m+1}{n} + p$ - целое. Полагаем $ax^{-n} + b = t^N$, где N - знаменатель дроби p.

Если $n = 1$, то эти случаи означаю следующее: 1)p - целое; 2) m - целое; 3) $m + p$ - целое.

Пример 1. Найти

$$1)\ \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx, \quad 2)\ \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}, \quad 3)\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$$

• 1) Поскольку $p=-2$ - целое, то положим $x=t^6$. Тогда

$$\sqrt{x}=t^3,\quad \sqrt[3]{x}=t^2,\quad dx=6t^5dt$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=6\int\frac{t^8dt}{(1+t^2)^2}=6\int\big(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\big)dt=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-6\int\frac{3(1+t^2)+t^2}{(1+t^2)^2}dt=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\operatorname{arctg}t-$$

$$-6\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=-\frac{1}{2}\int td\frac{1}{1+t^2}=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Следовательно,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21\operatorname{arctg}t+C,\ t=\sqrt[6]{x}.$$

2) Так как $\frac{m+1}{n}=3$ - целое, то положим $1+x^{2/3}=t^2$. Тогда

$$x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}},\quad dx=\frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}2tdt=3t(t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt.$$

Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(t^2-1)^2dt=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C,\ t=\sqrt{1+x^{2/3}}.$$

3) Так как $\frac{m+1}{n}+p=0$ - целое, то положим $t^4=1+x^{-4}$. Тогда

$$x=(t^4-1)^{-1/4},\ \ dx=-t^3(t^4-1)^{-5/4}dt,\ \ \sqrt[4]{1+x^4}=t(t^4-1)^{-1/4}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C,\quad t=(1+x^{-4})^{1/4}.\ \bullet$$

Вычислить интегралы:

131. $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$

132. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$

133. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

135. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

136. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

137. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$

138. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$

139. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

140. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

1.5 Интегрирование алгебраических иррациональностей

1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}\right)dx,$$

где $\lambda, \ldots, \mu$ -рациональные числа, R - рациональная функция от нескольких переменных и $ad-bc \neq 0$.

Пусть m - общий знаменатель чисел $\lambda, \ldots, \mu$. Рассматриваемый интеграл рационализируется с помощью подстановки

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Пример 1. Найти

$$1)\ \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx; \quad 2)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$$

• 1) Сделаем подстановку $x=t^6$. Получаем

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = 6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}t^5dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int t^3dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + C.$$

2) Сделаем преобразования

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}} = \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2}.$$

Далее положим

$$\frac{2-x}{2+x} = t^3,$$

откуда находим

$$x = 2\frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = -12\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3}.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2} = -12 \int \frac{(t^3+1)^2 t^3 dt}{16t^6(t^3+1)^2} = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. \quad \bullet$$

2. Подстановки Эйлера.

Интегралы вида

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)dx$$

рационализируется с помощью подстановок Элера.

1) Пусть квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней. Тогда его знак совпадает со знаком a, следовательно, $a>0$. В этом случае сделаем подстановку

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a},$$

которую называют *первой подстановкой Эйлера.*

Возводя в квадрат обе части равенства $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$, получим $bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$. Тогда

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\big)dx =$$

$$= \int R\bigg(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}\bigg) 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}dt.$$

Правая часть равенства представляет собой интеграл от рациональной дроби.

2) Пусть квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет различные вещественные корни λ и μ. Тогда имеет место разложение $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu)$. Сделаем подстановку

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - \lambda},$$

которую называют *второй подстановкой Эйлера.*

Тогда после возведения в квадрат обеих часте равенства $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$ получим

$$a(x - \mu) = t^2(x - \lambda),$$

так что

$$x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}, \ dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\big)dx =$$

$$= \int R\bigg(\frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}\bigg)\frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2}dt.$$

Правая часть равенства представляет собой интеграл от рациональной дроби.

Пример 2. Найти

$$\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x\sqrt{1 + x + x^2}}dx.$$

• Воспользуемся одной из подстановок Эйлера. Положим

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1;$$

тогда $1 + x + x^2 = t^2x^2 + 2tx + 1$, откуда

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = 2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt.$$

Далее, находим

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}, \quad t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{-2tdt}{1-t^2} = \ln|1-t^2| + C =$$

$$= \ln\left|1 - \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C. \quad \bullet$$

3. Некоторые другие интегралы.

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx, \ \int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$$

превращаются в интегралы от рациональных выражений от $\sin t$ и $\cos t$ при помощи подстановок $x = a\sin t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = \frac{a}{\cos t}$ соответственно.

Пример 3. Вычислить

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$

• Положим $x = a\operatorname{tg} t$, тогда $dx = \frac{adt}{\cos^2}$ и

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \int \frac{a^3\operatorname{tg}^2 t\cos^3 tdt}{a^3\cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t = \int \frac{d(t+\frac{\pi}{2})}{\sin(t+\frac{\pi}{2})} - \sin t = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin t + C,$$

где $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. •

Вычислить интегралы:

176. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+4}dx$

177. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2}dx$

178. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{x}+2\sqrt[6]{x})^2}$

179. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-4)}$

180. $\int x^4\sqrt{1+x^2}dx$

181. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

182. $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$

183. $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{ctg} x}$

184. $\int \frac{dx}{\cos x+\operatorname{tg} x}$

185. $\int \frac{dx}{\cos x+\operatorname{ctg} x}$

186. $\int \frac{x-1}{x^3+1}dx$

187. $\int \frac{x^4+1}{x^6-5x^4-5x^2+1}dx$

188. $\int (e^x-\sin x)^2dx$

189. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx$

190. $\int x^2\sqrt{x^2+4x}dx$

191. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx$

192. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

193. $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

1.7 Вычисление определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла основной является *формула Ньютона-Лейбница*: если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и F - первообразная для f на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Заметим, что формула Ньютона-Лейбница применима и тогда, когда функция f совпадает с непрерывной функцией во всех точках отрезка $[a,b]$, кроме, быть может, конечного числа точек.

Из формулы Ньютона-Лейбница выводятся следующие формулы.

1) *Формула интегрирования по частям.* Если функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то

$$\int_a^b udv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

2) *Формула замены переменной.* Если функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, отрезок $[a, b]$ является образом отрезка $[\alpha, \beta]$ при отображении φ и функция f непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Вычислить интегралы:

194. $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx$

195. $\int\limits_{1}^{2} (x^2 - 2x + 3)dx$

196. $\int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})dx$

197. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx$

198. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

199. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

200. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$

201. $\int\limits_{1}^{2} e^x dx$

202. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$

203. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$

204. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

205. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

206. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-8}$

207. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

208. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

209. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx$

210. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x} dx$

211. $\int\limits_{1}^{3} \ln x dx$

212. $\int\limits_{1}^{2} x \ln x dx$

213. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx$

214. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

215. $\int\limits_0^{\text{ß}} x \sin x dx$

216. $\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx$

217. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x}$

1.8 Вычисление площадей плоских фигур.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми.

218. $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi.$

219. $y = e^{-x},\ x = 0,\ y = 0,\ x = a.$

220. $y = x^2/2,\ y = 2 - 3x/2.$

221. $y = 2x - x^2,\ y = x.$

222. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi/4.$

223. $y = x^2/2,\ y = 1/(1 + x^2).$

224. $y = \sqrt{x},\ y = x - 2.$

225. $x^2 + y^2 = 2,\ y^2 = 2x - 1,\ x \ge 1/2.$

2 Несобственный интеграл Римана.

Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция f определена на промежутке $[a, +\infty)$ и при любом $b \in [a, +\infty)$ функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом первого рода и обозначают символом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл сходится. В противном случае символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ употребляют, но говорят, что несобственный интеграл расходится.

Пример 1. Вычислить интеграл или установить его расходимость:

$$1)\ \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1};\quad 2)\ \int\limits_0^{+\infty} \cos 2x\ dx.$$

•

$$1)\ \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\right)\Bigg|_2^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\ln\frac{b-1}{b+1} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 3}{2}.$$

$$2)\ \int 0^{+\infty} \cos 2x\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \cos 2x\ dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{\sin 2b}{2},$$

и, так как предел не существует, интеграл расходится. •

Пример 2. Исследовать

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p},\quad p\in\mathbb{R},$$

на сходимость.

• Пусть $p\neq 1$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{-p+1}-1}{1-p} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{при } p > 1, \\ +\infty & \text{при } p < 1. \end{cases}$$

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_0^b = +\infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$. •

Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция f определена на промежутке $[a, B)$, неограничена в окрестности точки B и при любом $b \in [a, B)$ функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Предел

$$\lim_{b\to B-0} \int\limits_a^b f(x)\, dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом второго рода и обозначают символом

$$\int\limits_a^B f(x)\, dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл сходится. В противном случае говорят, что несобственный интеграл расходится.

Пример 3. Вычислить интеграл или установить его расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 2)\ \int\limits_0^1 \ln x\, dx.$$

• 1) Подинтегральная функция неограниченна в левой окрестности точки $x = 1$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1-0} \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1-0} \arcsin b = \frac{\pi}{2}.$$

2) Подинтегральная функция неограниченна в правой окрестности точки $x = 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \ln x \, dx = \lim_{b\to +0} \int\limits_b^1 \ln x \, dx = \lim_{b\to +0} (x\ln x - x)\Big|_b^1 = \lim_{b\to +0} (-1 - b\ln b + b) = -1.$$

Пример 4. Исследовать

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R},$$

на сходимость.

• Пусть $p \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to +0} \int\limits_b^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to +0} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_b^1 = \lim_{b\to +0} \frac{1-b^{-p+1}}{1-p} = \frac{1 - \lim\limits_{b\to +0} b^{-p+1}}{1-p}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{при } p < 1, \\ +\infty & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b\to +0} \int\limits_b^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b\to +0} \ln x\Bigg|_b^1 = -\lim_{b\to +0} \ln b = +\infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$. $\bullet$

Пример 5. Несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

$\bullet$ Доказательство аналогично примеру 4.$\bullet$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

226. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$

227. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

228. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

229. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

230. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$

231. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} dx$

232. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

233. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} d$

234. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x \ln x} d$

235. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$

Признаки сходимости несобственных интегралов

Поскольку вопрос о сходимости несобственных интегралов двух типов решается одинаково, будем в дальнейшем рассматривать оба случая вместе, введя следующее определение.

Пусть $[a, \omega)$ - конечный или бесконечный промежуток, а функция f определена на нем и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$. Тогда по определению

$$\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{b \to \omega} \int_a^b f(x)dx, \tag{4}$$