N 548

$$x^3+4y^3-3x^2y=2$$

$$x^3+4y^3-3x^2y-2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-6xy=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=12y^2-3x^2=0$$

$$y'=\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}=\frac{3x^2-6xy}{12y^2-3x^2}=\frac{\cancel{3}x\cancel{(x-2y)}}{\cancel{3(2y-x)}(2y+x)}$$

$$=\frac{+x}{2y+x}$$

$$y''=\frac{d}{dx}=\frac{2y+x-x(2y'+1)}{(2y+x)^2}=$$

$$=\frac{(2y+x)-\frac{3x^2+2xy}{2y+x}}{(2y+x)^2}=\frac{4y^2+4xy+x^2-3x^2-2xy}{(2y+x)^2}$$

$$=\frac{4y^2+2xy-2x^2}{(2y+x)^3}=2\,\frac{2y^2+xy-x^2}{(2y+x^3)}=$$

$$2(y+x)\left(y-\frac{1}{2}\right)=(y+x)(2y-x)$$

$$\Rightarrow \frac{(y+x)(2y-x)}{(2y+x)^3}$$

N 555.

$z^3 + xy + y^2 = 0, \quad (-2;1;1)$ $\qquad z = z(x, y)$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y}{3z^2}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y+x}{3z^2}$$

$$z'_x(-2, 1) = -\frac{1}{3\cdot 1^2} = -\frac{1}{3}$$

$$z'_y(-2, 1) = -\frac{2-2}{3\cdot 1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{3(z(x,y))^2}\right) = -\frac{y}{3}\left(\frac{-2z'_x}{z^3}\right) =$$

$$= \frac{2yz'_x}{3z^3} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,1) = \frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y+x}{3(z(x,y))^2}\right) = -\frac{1}{3}\,\frac{2\cdot z^2 - (2y+x)}{z^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,1) = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{3x^2}\right) = \frac{-1}{3}\cdot\frac{1\cdot z^2 - y\cdot 2z\cdot z'_y}{z^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2,1) = -\frac{1}{3}$$

Задачи на экстремум

Необходимое условие локального экстремума. Если точка (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции f, и функция имеет в этой точке частные производные первого порядка, то

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

стационарные точки

Достаточное условие локального экстремума. Пусть функция f 2-непрерыво дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0),

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

$$D = AC - B^2$$

Тогда:

1) если $D > 0$, то функция имеет экстремум в точке (x_0, y_0), а именно, максимум, если $A < 0$ (или $C < 0$), и минимум, если $A > 0$ (или $C > 0$);

2)если $D < 0$, то экстремума в точке (x_0, y_0) нет;

3) если $D = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \underset{h_1}{dx} \cdot \underset{h_2}{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \underset{h_2^2}{dy^2}$$

$$\bar{h} = (h_1, h_2)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$D = AC - B^2$$

1) $A > 0$, $D < 0$ т. (x_0, y_0) т. min лок.

$$\left\{ \partial f \right.$$

2) $A < 0$, $D > 0 \Rightarrow$ т. (x_0, y_0) т. max

3) $D = 0 \Rightarrow ?$

4) $D < 0 \Rightarrow$ экстремума нет

№ 566

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = -3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - y = 0, \\ x = -y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x = 0 \end{cases} P_1 \\ \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases} P_2 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} P_1(0,0) \\ P_2(-1,1) \end{array}$$

$P_1(0,0)$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6x\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3\Big|_{(0,0)} = -3$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Big|_{(0,0)}$$

$$D = 0$$

$P_2(-1, 1)$

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 6x\Big|_{(-1,1)} = -6$

$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3\Big|_{(-1,1)} = -3$

$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\Big|_{(-1,1)} = -6$

$D = AC - B^2 = 36 - 9 = 27$

$\left.\begin{matrix} A < 0 \\ D > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_2$ — т. лок. макс.

N 577

577. $\cancel{f} = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$

$F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4y - 4\lambda y + y - 4\lambda y - 4\lambda^2 y = 0 & (1) \\ x = -2y - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$(1): -3y - 8\lambda y - 4\lambda^2 y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(4\lambda^2 + 8\lambda + 3) = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = -\dfrac{4+2}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ x = -2y + y = -y \\ y^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = \dfrac{-4-2}{4} = \dfrac{-3}{2} \\ x = -2y + 3y = y \\ 2y^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda = \frac{-1}{2}$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^2 + xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y + 2\lambda x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda \Big|_{\lambda = -\frac{1}{2}} = 1$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 + 2\lambda \Big|_{\lambda = -\frac{1}{2}} = 1$

$$\begin{cases} d^2F = 1dx^2 + 2dx\,dy + 1dy^2 \\ x\,dx + y\,dy = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2F = 4dx^2 > 0 \Rightarrow \\ dy = \frac{-x\,dx}{y} = dx \end{cases}$$

ЧАСТЬ 3

Двойные интегралы

1.1 Вычисление двойных интегралов.

Пусть функция f непрерывна в прямоугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$ Тогда двойной интеграл существует и справедливо равенство

$$\iint\limits_P f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy. \tag{1}$$

Множество D назовем трапецией первого рода, если

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\Big\},$$

где функции φ_1, φ_2 - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$.

Если функция f непрерывна на D, то двойной интеграл существует и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \tag{2}$$

1. Вычислить двойные интегралы по указанным прямоугольникам D:

5) $\iint\limits_G (x + y^2)dxdy,\ 2 \le x \le 3, 1 \le y \le 2;$ $=$

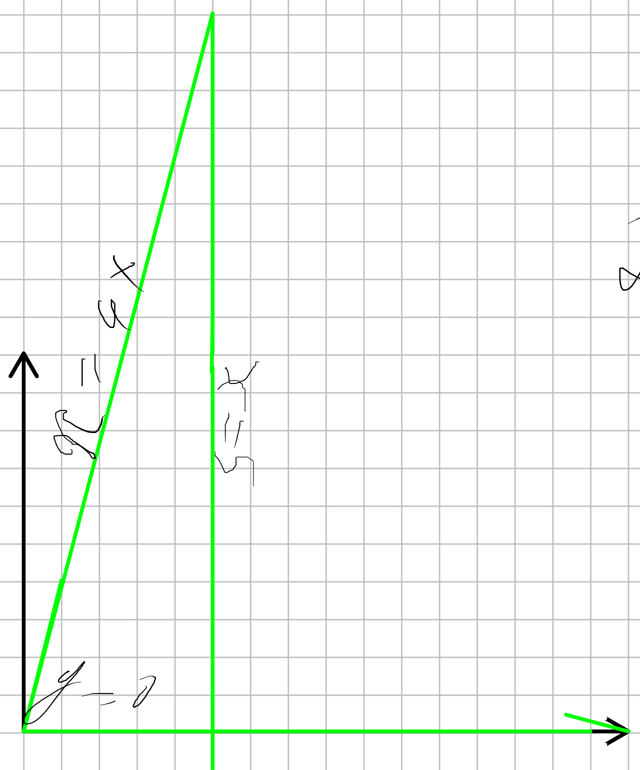
$$= \int_2^3 dx \int_1^2 (x+y^2)\,dy =$$

$$= \int_2^3 \left(xy + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=1}^{y=2} dx = \int_2^3 \left(2x + \frac{8}{3} - x - \frac{1}{3}\right) dx = \int_2^3 \left(x + \frac{7}{3}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{7x}{3}\right)\Big|_{x=2}^{x=3} =$$

$$= \frac{9}{2} + 7 - 2 - \frac{14}{3} = 2$$

2. G- треугольник, ограниченный прямыми:

2) $y = 0, y = 4x, x = 5$;



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^5 dx \int_0^{4x} f(x,y)\,dy$$

$$\int_0^{2\,5}$$