Бинарные отношения

$A, B \neq \emptyset$

Декартово произведение есть $A \vee B = \{(a, b \mid a \in A \wedge b \in B)\}$

$S \subseteq A \vee B$

$]A, B \neq \emptyset$, тогда **бинарное отношение** — подмножество их декартова произведения.

$\emptyset$ — пустое бинарное отношение

Декартово произведение Универсальное бинарное отношение между A и B

$\mathrm{P}(A \times B)$

$|A| = n, |B| = m \Rightarrow |\mathrm{P}(A \times B)| = 2^{nm}$

$(a, b) \in \rho$ — пара принадлежит бинарному отношению ρ.
$a\rho b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho$

$\rho \subseteq A \times A$ — бинарное отношение на множестве A.

$\mathrm{P}(A \times A)$ — множество всех бинарных отношений, причём $|\mathrm{P}(A \times A)| = 2^{n^2}$, где $n = |A|$.

Рассмотрим $\mathbb{N}$

$(a, b) \in = \Leftrightarrow a = b$

$(a, b) \in \leq \Leftrightarrow a \leq b$

$(a, b) \in \mid \Leftrightarrow a \mid b$ (a является делителем b)

$(a, b) \in \underset{\alpha}{\equiv} \Leftrightarrow a \underset{\alpha}{\equiv} b$

Операции над бинарными отношениями

$A, B \neq \emptyset$

$\rho, \sigma \subseteq A \vee B$
1. $\overline{\rho} = \{\{a, b\} \in A \times B \mid (a, b) \notin \rho\}$
2. $\rho \cup \sigma = \{(a, b) \in a \times B \mid (a, b \vee \rho \wedge (a, b) \in \sigma)\}$
3. $\rho \cap \sigma = \{(a, b) \in a \times B \mid (a, b \in \rho \vee (a, b) \in \sigma)\}$
4. $\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\}$
5. $\rho \subseteq A \times B, \sigma \subseteq B \times C$
   $\rho \circ b = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists_{b \in B} (a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \sigma\}$

$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}, C = \{+, -, !, ?\}$

$s = \{(a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1)\}$
$\sigma = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$
$\tau = \{(1, +), (1, !), (2, ?)\}$

$\overline{\rho} = \{(a, 1), (c, 2)\}$
$\sigma = A \times B$

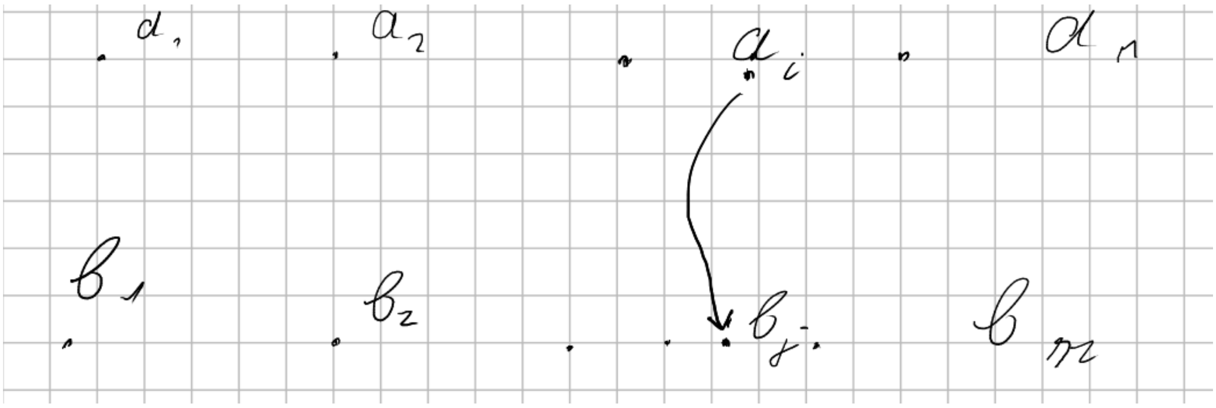
Ассоциативность операции умножения

$\rho \circ (\sigma \circ \tau) = \ldots$

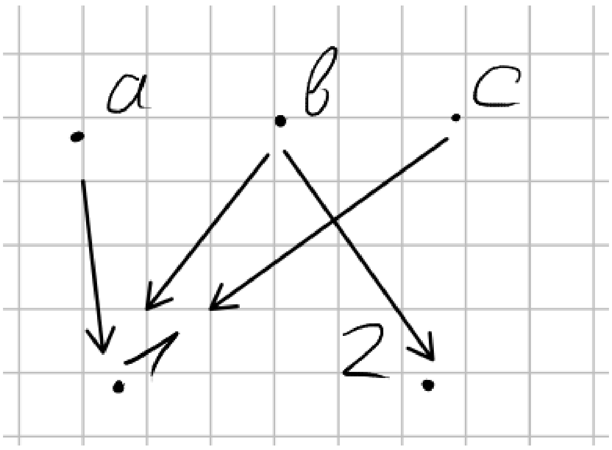
Способы задания бинарных отношений между конечными множествами

$]A \neq \emptyset, \rho \subseteq A \times B, A = \{a_1, ..., a_n\}, B = \{b_1, ..., b_n\}$ L со стрелочкой наверцу (разобраться) — ориентированный граф.

$A \cup B$ — вершины ориентированного графа. Рёбра ведут из вершин множества A в вершины множества B.



$\rho = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 1)\}$



$M, N \in M_{...}$

$M(\rho)$ — матрица

$(M(\rho))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_i, b_j) \in \rho \\ 0, \text{ если } (a_i, b_j) \notin \rho \end{cases}$