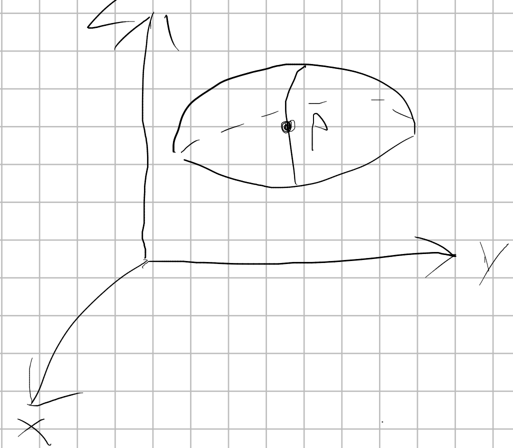


$(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$

$(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$

$(u, v) \in D, \quad (u_0, v_0) \in D$

$t \in [a, b]$

$\bar{f}(t) \qquad \bar{f}(t_0) = (u_0, v_0)$

$P(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$

$\bar{F}(t) = (x(\rho_1(t), \rho_2(t)), y(\rho_1(t), \rho_2(t)),$
$z(\rho_1(t), \rho_2(t)))$

Касательная к P - касательная плоскость ко всем кривым, проходящим через эту точку и лежащим на этой поверхности.

$\bar{F}'(t_0) = (x'_u(u_0, v_0)\rho_1'(t_0) + x'_v(u_0, v_0)\rho_2'(t_0),$
$y'_u(u_0, v_0)\cdot\rho_1'(t_0) + y'_v(u_0, v_0)\rho_2'(t_0), \ldots)$

Получается линейная комбинация

$\rho_1'(t_0)\cdot\bar{r}'_u(u_0, v_0) + \rho_2'(t_0)\cdot\bar{r}'_v(u_0, v_0)$

$\bar{r}'_u(u_0, v_0) \times \bar{r}'_v(u_0, v_0) =$

векторное произведение

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u_0, v_0)}_{A}\,\bar{i} + \underbrace{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}(u_0, v_0)}_{B}\,\bar{j} + \underbrace{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0, v_0)}_{C}\,\bar{k}$$

Пока мы не поделим на длину, это не единичная нормаль.

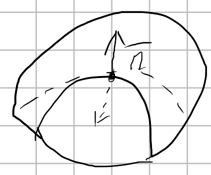
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Мы получим уравнение плоскости

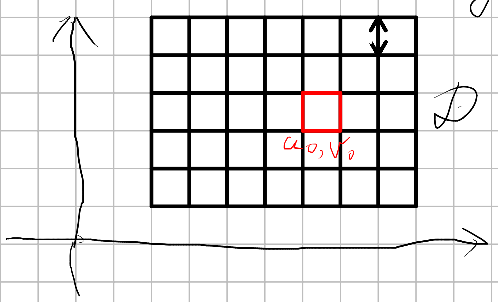
$$A=\frac{D(y,z)}{(u,v)},\quad B=\frac{D(x,z)}{(u,v)},\quad C=\frac{D(y,z)}{(u,v)}$$

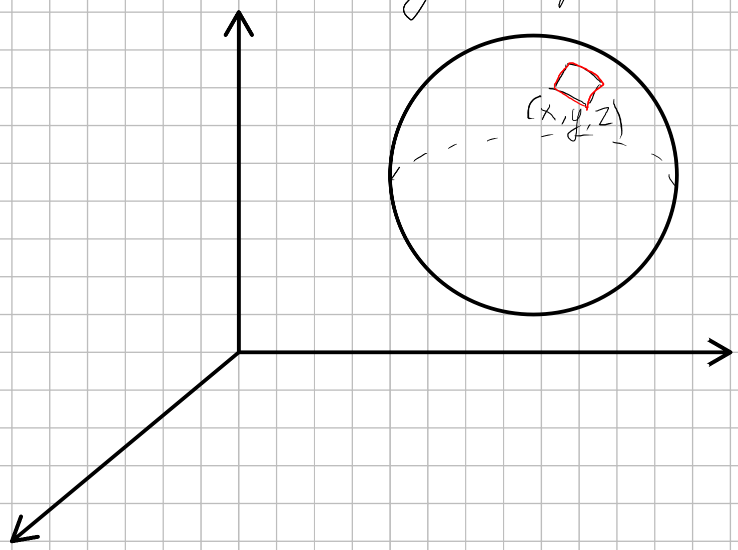
$$\bar{n}=\frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{B}{\sqrt{\dots}},\ \frac{C}{\sqrt{\dots}}\right)$$

С гладкими поверхностями можно связать понятие стороны поверхности.



Лента Мёбиуса является односторонней.





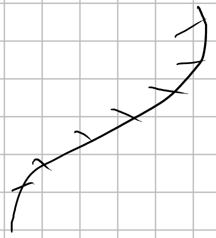
$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

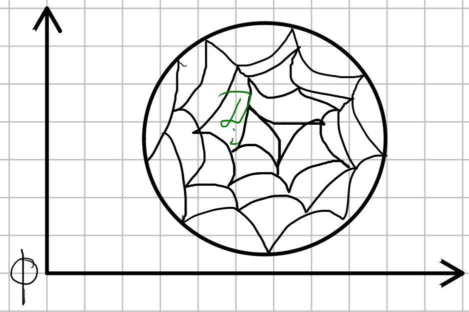
S „черепицы" – модуль векторного произведения

$$\sigma(T)=\sum |r'_u(u_i,v_j)\times r'_v(u_i,v_j)|\cdot \underbrace{\mu D_{ij}}_{\text{= площадь „черепицы"}}$$

Мы получим интегральную сумму двойного интеграла

$$S(\Phi)=\iint_D |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|(u,v)\,du\,dv$$





$f(x,y,z)$ определена в точках плоскости Φ

$\Delta S = S(\Phi_i)$

$\tau = \{D_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение

$$\lim_{d(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(u_0,v_0),\, y(u_0,v_0),\, z(u_0,v_0))\,\Delta S_i' = \iint_{\Phi} f(x,y,z)\,dS$$

Теорема. В случае гладкой поверхности Φ, непр. f $\exists$ поверхностный интеграл =

$$= \iint_{D} f(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

Поверхностный интеграл второго рода

Первый род: интеграл распределения плотности массы --- это масса

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$

$$\iint_{\Phi} f(x,y,z)\,dy\,dz := \iint_{D} P(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

$$\iint_{\Phi} Q(x,y,z)\,dz\,dx = \iint_{D} Q(\dots)\cdot\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

$$\iint_{\Phi} R(x,y,z)\,dx\,dy := \iint_{D} R(\dots)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

Вспомним замену параметра, определение ориентированной кривой $\quad t = \varphi(u)$

$\bar\gamma(t),\ t\in[a,b]$

$\bar\gamma^*(u),\ u\in[a_1,b_1]$

$\varphi(u): [a_1,b_1]\to[a,b]$ вз. однозн.

$\bar\gamma^*(u) = \bar\gamma(\varphi(u))$

$\varphi'(u) > 0$