

Построение грамматики для результата операции над языками

для выполнения домашнего задания №5

Содержание

Введение	2
Прежде чем строить новую грамматику	2
1 Для грамматик типа 3	2
1.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$	2
1.2 Конкатенация $L(G)L(G')$	2
1.3 Итерация $L(G')^*$	3
1.4 Положительная итерация $L(G')^+$	3
2 Для грамматик типа 2	3
2.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$	3
2.2 Конкатенация $L(G)L(G')$	3
2.3 Итерация $L(G')^*$	4
2.4 Положительная итерация $L(G')^+$	4
3 Для неукорачивающих грамматик и грамматик типа 1	4
3.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$	4
3.2 Конкатенация $L(G)L(G')$	4
3.3 Итерация $L(G')^*$	5
3.4 Положительная итерация $L(G')^+$	5
4 Для грамматик типа 0	5
4.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$	5
4.2 Конкатенация $L(G)L(G')$	5
4.3 Итерация $L(G')^*$	6
4.4 Положительная итерация $L(G')^+$	6
5 Для праволинейных грамматик	6
5.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$	6
5.2 Конкатенация $L(G)L(G')$	7
5.3 Итерация $L(G')^*$	7
5.4 Положительная итерация $L(G')^+$	7
6 Для леволинейных автоматных грамматик	7
6.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$	7
6.2 Конкатенация $L(G)L(G')$	8
6.3 Итерация $L(G')^*$	8
6.4 Положительная итерация $L(G')^+$	9

7	Для праволинейных автоматных грамматик	9
7.1	Объединение $L(G) \cup L(G')$	9
7.2	Конкатенация $L(G)L(G')$	9
7.3	Итерация $L(G')^*$	10
7.4	Положительная итерация $L(G')^+$	10

Введение

В дальнейшем предполагаем, что заданы две грамматики

$$\begin{aligned} G &= (N, \Sigma, P, S) \\ G' &= (N', \Sigma', P', S') \end{aligned}$$

для построения результата бинарной операции, или одна грамматика

$$G' = (N', \Sigma', P', S')$$

для построения результата унарной операции.

Прежде чем строить новую грамматику

1. При построении результата бинарной операции удостоверьтесь, что $N \cap N' = \emptyset$. Если это не так, то совпадающие нетерминальные символы одной из грамматик следует переименовать.
2. При построении результатов операций конкатенации или итерации (положительной итерации) убедитесь, что в левых частях правил отсутствуют терминальные символы. Если это не так, то необходимо исключить появление таких терминальных символов в левых частях правил (см. Теорема 2 теоретического материала на портале).

1 Для грамматик типа 3

1.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P'' = P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S'\}$;
3. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

1.2 Конкатенация $L(G)L(G')$

1. $N'' = N \cup N'$;
2. Превратим множество правил P' в P'_1 : каждое правило в P' вида

$$A \rightarrow \alpha, \quad A \in N', \quad \alpha \in \Sigma'^*$$

заменим на

$$A \rightarrow S\alpha;$$

3. $P'' = P \cup P'_1$;
4. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
5. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S')$.

1.3 Итерация $L(G')^*$

1. $N'' = N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin N'$;
2. Создадим множество правил P'_1 : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \alpha, \quad A \in N', \quad \alpha \in \Sigma'^*$$

добавим в P'_1

$$A \rightarrow S'\alpha;$$

3. $P'' = P' \cup P'_1 \cup \{S'' \rightarrow \varepsilon, S'' \rightarrow S'\}$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S'')$.

1.4 Положительная итерация $L(G')^+$

1. Создадим множество правил P'_1 : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \alpha, \quad A \in N', \quad \alpha \in \Sigma'^*$$

добавим в P'_1

$$A \rightarrow S'\alpha;$$

2. $P'' = P' \cup P'_1$;
3. Результат — грамматика $G'' = (N', \Sigma', P'', S')$.

2 Для грамматик типа 2

2.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P'' = P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S'\}$;
3. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

2.2 Конкатенация $L(G)L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P'' = P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow SS'\}$;
3. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

2.3 Итерация $L(G')^*$

1. $N'' = N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin N'$;
2. $P'' = P' \cup \{S'' \rightarrow \varepsilon, S'' \rightarrow S''S'\}$;
3. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S'')$.

2.4 Положительная итерация $L(G')^+$

1. $N'' = N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin N'$;
2. $P'' = P' \cup \{S'' \rightarrow S', S'' \rightarrow S''S'\}$;
3. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S'')$.

3 Для неукорачивающих грамматик и грамматик типа 1

3.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. Построим множество $P_1'' = (P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S'\}) \setminus \{S \rightarrow \varepsilon, S' \rightarrow \varepsilon\}$;
3. Если $S \rightarrow \varepsilon \in P$ или $S' \rightarrow \varepsilon \in P'$, то $P_2'' = \{S'' \rightarrow \varepsilon\}$. Иначе $P_2'' = \emptyset$;
4. $P'' = P_1'' \cup P_2''$;
5. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
6. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

3.2 Конкатенация $L(G)L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. Построим множество $P_1'' = (P \cup P') \setminus \{S \rightarrow \varepsilon, S' \rightarrow \varepsilon\}$;
3. Если $S \rightarrow \varepsilon \in P$ и $S' \rightarrow \varepsilon \in P'$, то $P_2'' = \{S'' \rightarrow SS', S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S', S'' \rightarrow \varepsilon\}$;
4. Если $S \rightarrow \varepsilon \in P$ и $S' \rightarrow \varepsilon \notin P'$, то $P_2'' = \{S'' \rightarrow SS', S'' \rightarrow S'\}$;
5. Если $S \rightarrow \varepsilon \notin P$ и $S' \rightarrow \varepsilon \in P'$, то $P_2'' = \{S'' \rightarrow SS', S'' \rightarrow S\}$;
6. Если $S \rightarrow \varepsilon \notin P$ и $S' \rightarrow \varepsilon \notin P'$, то $P_2'' = \{S'' \rightarrow SS'\}$;
7. $P'' = P_1'' \cup P_2''$;
8. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
9. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

3.3 Итерация $L(G')^*$

1. $N'' = N' \cup \{S_0'', S_1''\}$, где $S_0'', S_1'' \notin N'$;
2. Построим множество $P_1'' = P' \setminus \{S' \rightarrow \varepsilon\}$;
3. $P_2'' = \{S_0'' \rightarrow \varepsilon, S_0'' \rightarrow S', S_0'' \rightarrow S_1'' S'\}$;
4. $P_3'' = \{S_1'' a \rightarrow S_1'' S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
5. $P_4'' = \{S_1'' a \rightarrow S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
6. $P'' = P_1'' \cup P_2'' \cup P_3'' \cup P_4''$;
7. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S_0'')$.

3.4 Положительная итерация $L(G')^+$

1. $N'' = N' \cup \{S_0'', S_1''\}$, где $S_0'', S_1'' \notin N'$;
2. Построим множество $P_1'' = P' \setminus \{S' \rightarrow \varepsilon\}$;
3. $P_2'' = \{S_0'' \rightarrow S', S_0'' \rightarrow S_1'' S'\}$;
4. $P_3'' = \{S_1'' a \rightarrow S_1'' S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
5. $P_4'' = \{S_1'' a \rightarrow S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
6. Если $S' \rightarrow \varepsilon \in P'$, то $P_5'' = \{S_0'' \rightarrow \varepsilon\}$. Иначе $P_5'' = \emptyset$;
7. $P'' = P_1'' \cup P_2'' \cup P_3'' \cup P_4'' \cup P_5''$;
8. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S_0'')$.

4 Для грамматик типа 0

4.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P'' = P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S'\}$;
3. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

4.2 Конкатенация $L(G)L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P'' = P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow SS'\}$;
3. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

4.3 Итерация $L(G')^*$

1. $N'' = N' \cup \{S_0'', S_1''\}$, где $S_0'', S_1'' \notin N'$;
2. Превратим множество правил P'' в множество P_1'' : каждое правило вида

$$\alpha \rightarrow \varepsilon, \quad \alpha \in N^+$$

заменим на набор правил

$$\{\alpha X \rightarrow X \mid X \in N\} \cup \{X\alpha \rightarrow X \mid X \in N\}.$$

3. $P_2'' = \{S_0'' \rightarrow \varepsilon, S_0'' \rightarrow S', S_0'' \rightarrow S_1'' S'\}$;
4. $P_3'' = \{S_1'' a \rightarrow S_1'' S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
5. $P_4'' = \{S_1'' a \rightarrow S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
6. $P'' = P_1'' \cup P_2'' \cup P_3'' \cup P_4''$;
7. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S_0'')$.

4.4 Положительная итерация $L(G')^+$

1. $N'' = N' \cup \{S_0'', S_1''\}$, где $S_0'', S_1'' \notin N'$;
2. Превратим множество правил P'' в множество P_1'' : каждое правило вида

$$\alpha \rightarrow \varepsilon, \quad \alpha \in N^+$$

заменим на набор правил

$$\{\alpha X \rightarrow X \mid X \in N\} \cup \{X\alpha \rightarrow X \mid X \in N\}.$$

3. $P_2'' = \{S_0'' \rightarrow S', S_0'' \rightarrow S_1'' S'\}$;
4. $P_3'' = \{S_1'' a \rightarrow S_1'' S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
5. $P_4'' = \{S_1'' a \rightarrow S' a \mid a \in \Sigma'\}$;
6. Если $\varepsilon \in L(G')$, то $P_5'' = \{S_0'' \rightarrow \varepsilon\}$. Иначе $P_5'' = \emptyset$;
7. $P'' = P_1'' \cup P_2'' \cup P_3'' \cup P_4'' \cup P_5''$;
8. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S_0'')$.

5 Для праволинейных грамматик

5.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P'' = P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S'\}$;
3. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

5.2 Конкатенация $L(G)L(G')$

1. $N'' = N \cup N'$;
2. Превратим множество правил P в P_1 : каждое правило в P вида

$$A \rightarrow \alpha, \quad A \in N, \alpha \in \Sigma^*$$

заменим на

$$A \rightarrow \alpha S';$$

3. $P'' = P_1 \cup P'$;
4. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
5. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S)$.

5.3 Итерация $L(G')^*$

1. $N'' = N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin N'$;
2. Создадим множество правил P'_1 : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \alpha, \quad A \in N', \alpha \in \Sigma'^*$$

добавим в P'_1

$$A \rightarrow \alpha S';$$

3. $P'' = P' \cup P'_1 \cup \{S'' \rightarrow \varepsilon, S'' \rightarrow S'\}$;
4. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S'')$.

5.4 Положительная итерация $L(G')^+$

1. Создадим множество правил P'_1 : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \alpha, \quad A \in N', \alpha \in \Sigma'^*$$

добавим в P'_1

$$A \rightarrow \alpha S';$$

2. $P'' = P' \cup P'_1$;
3. Результат — грамматика $G'' = (N', \Sigma', P'', S')$.

6 Для левوليнейных автоматных грамматик

6.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P''_1 = P \cup P'$;

3. Составим множество P_2'' : для каждого правила в P вида

$$S \rightarrow \alpha, \quad \alpha \in (N \cup \Sigma)^*,$$

добавим в P_2''

$$S'' \rightarrow \alpha$$

и для каждого правила в P' вида

$$S' \rightarrow \alpha, \quad \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*,$$

добавим в P_2''

$$S'' \rightarrow \alpha;$$

$$4. P'' = P_1'' \cup P_2'';$$

$$5. \Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma';$$

6. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

6.2 Конкатенация $L(G)L(G')$

$$1. N'' = N \cup N';$$

2. Превратим множество правил P' в P_1' : заменим каждое правило в P' вида

$$A \rightarrow \varepsilon, \quad A \in N'$$

на набор правил

$$\{A \rightarrow \alpha \mid S \rightarrow \alpha \in P, \alpha \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

$$3. P'' = P \cup P_1';$$

$$4. \Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma';$$

5. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S')$.

6.3 Итерация $L(G')^*$

$$1. N'' = N' \cup \{S''\}, \text{ где } S'' \notin N';$$

2. Создадим множество правил P_1' : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \varepsilon, \quad A \in N'$$

добавим в P_1' набор правил

$$\{A \rightarrow \alpha \mid S' \rightarrow \alpha \in P', \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*\}$$

3. Составим множество P_2' : для каждого правила в P' вида

$$S' \rightarrow \alpha, \quad \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*,$$

добавим в P_2'

$$S'' \rightarrow \alpha;$$

$$4. P'' = P' \cup P_1' \cup P_2' \cup \{S'' \rightarrow \varepsilon\};$$

5. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S'')$.

6.4 Положительная итерация $L(G')^+$

1. Создадим множество правил P'_1 : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \varepsilon, \quad A \in N'$$

добавим в P'_1 набор правил

$$\{A \rightarrow \alpha \mid S' \rightarrow \alpha \in P', \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*\}$$

2. $P'' = P' \cup P'_1$;
3. Результат — грамматика $G'' = (N', \Sigma', P'', S')$.

7 Для праволинейных автоматных грамматик

7.1 Объединение $L(G) \cup L(G')$

1. $N'' = N \cup N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin (N \cup N')$;
2. $P'_1 = P \cup P'$;
3. Составим множество P''_2 : для каждого правила в P вида

$$S \rightarrow \alpha, \quad \alpha \in (N \cup \Sigma)^*,$$

добавим в P''_2

$$S'' \rightarrow \alpha$$

и для каждого правила в P' вида

$$S' \rightarrow \alpha, \quad \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*,$$

добавим в P''_2

$$S'' \rightarrow \alpha;$$

4. $P'' = P'_1 \cup P''_2$;
5. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
6. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S'')$.

7.2 Конкатенация $L(G)L(G')$

1. $N'' = N \cup N'$;
2. Превратим множество правил P в P_1 : заменим каждое правило в P вида

$$A \rightarrow \varepsilon, \quad A \in N$$

на набор правил

$$\{A \rightarrow \alpha \mid S' \rightarrow \alpha \in P', \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*\}$$

3. $P'' = P_1 \cup P'$;
4. $\Sigma'' = \Sigma \cup \Sigma'$;
5. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma'', P'', S)$.

7.3 Итерация $L(G')^*$

1. $N'' = N' \cup \{S''\}$, где $S'' \notin N'$;
2. Создадим множество правил P'_1 : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \varepsilon, \quad A \in N'$$

добавим в P'_1 набор правил

$$\{A \rightarrow \alpha \mid S' \rightarrow \alpha \in P', \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*\}$$

3. Составим множество P'_2 : для каждого правила в P' вида

$$S' \rightarrow \alpha, \quad \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*,$$

добавим в P'_2

$$S'' \rightarrow \alpha;$$

4. $P'' = P' \cup P'_1 \cup P'_2 \cup \{S'' \rightarrow \varepsilon\}$;
5. Результат — грамматика $G'' = (N'', \Sigma', P'', S'')$.

7.4 Положительная итерация $L(G')^+$

1. Создадим множество правил P'_1 : для каждого правила в P' вида

$$A \rightarrow \varepsilon, \quad A \in N'$$

добавим в P'_1 набор правил

$$\{A \rightarrow \alpha \mid S' \rightarrow \alpha \in P', \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*\}$$

2. $P'' = P' \cup P'_1$;
3. Результат — грамматика $G'' = (N', \Sigma', P'', S')$.