Лекция 3. 24 февраля 2024

Для каждой точки с координатами (x, y) применяем операцию кадрирования и получаем (x', y'), так же и с атрибутами

$$x' = \frac{x - V_{cx}}{V_x} \cdot W_x + W_{cx}$$

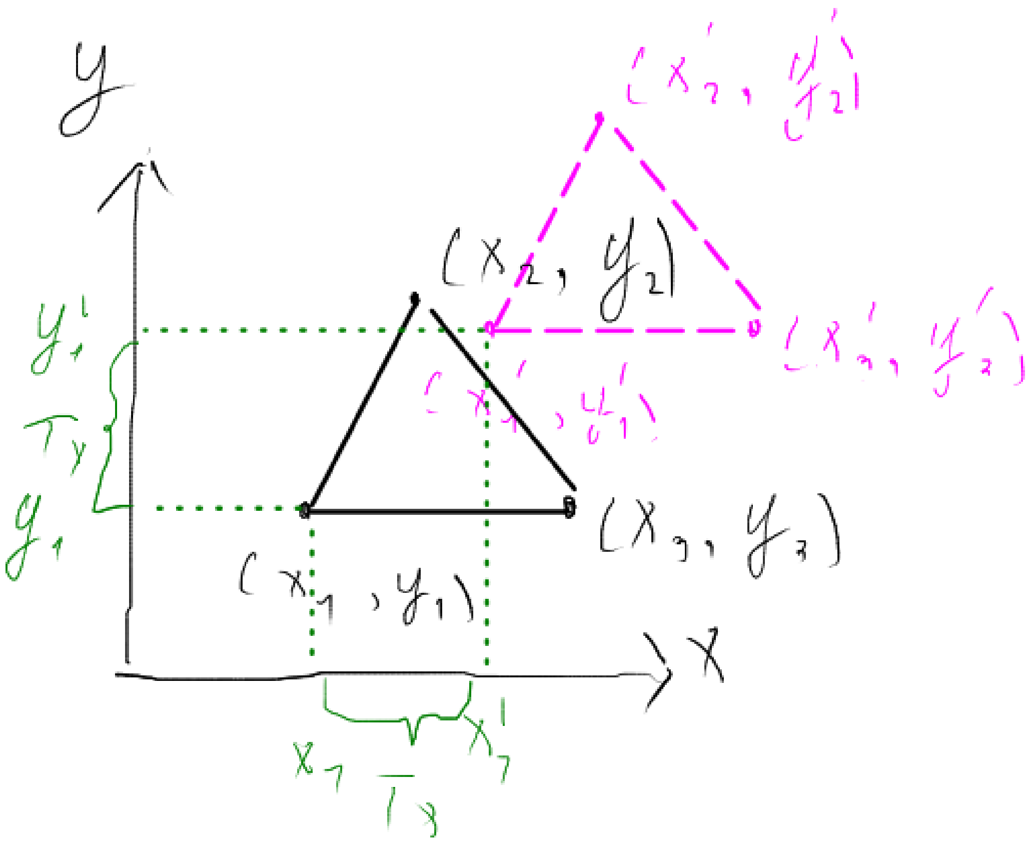
Так мы будем поступать всегда

Если мы хотим поиграться с нашим изображением

Афинные преобразования —

Афинные преобразования

Перенос был объект в одной системе координат, а мы хотим перейти к другому изображению, где этот объект будет перенесён, Будем сдивигать объект



Были вершины (x_1, y_1) стали (x'_1, y'_1)

Были вершины (x_2, y_2) стали (x'_2, y'_2)

Были вершины (x_3, y_3) стали (x'_3, y'_3)

Сдвинули по x на величину T_x

Сдвинули по y на величину T_y

Точка $P(x, y)$ — изначальная

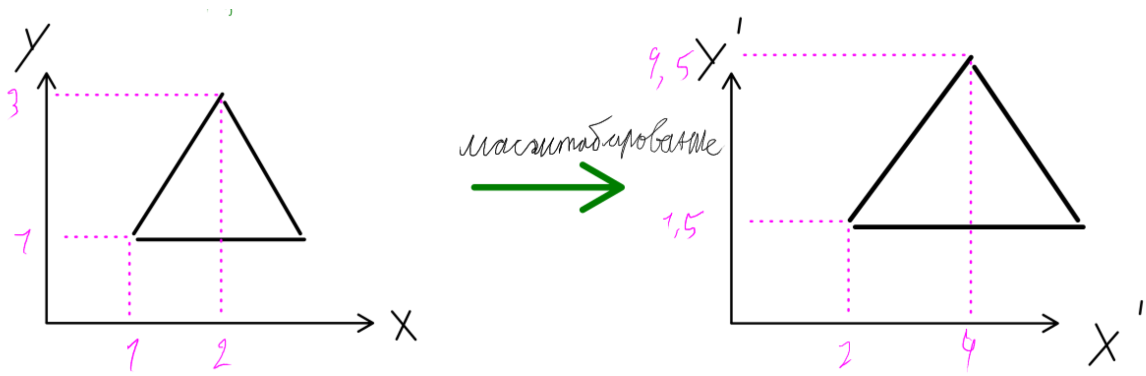
Точка $P'(x', y')$ — перенесенная

Перенос(параллельный перенос/сдвиг):

$$x' = x + T_x$$
$$y' = y + T_y$$

Масштабирование относительно начала координат

Относительно — та точка относительньо которой мы делаем преобразования остается на месте (относительно оси x тянем все по y, а ось x оставляем на месте)



Пусть растягиваем в 2 раза по x:

- то что было в 1 станет в 2
- 2 превратится в 4
- 3 превратится в 6

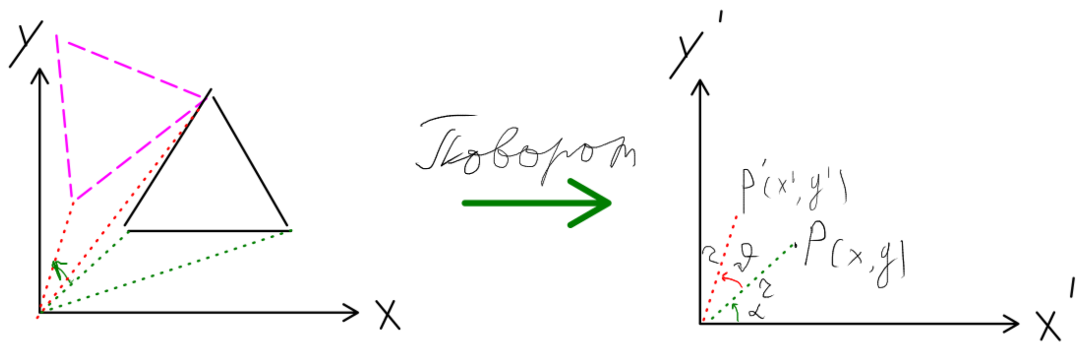
Пусть растягиваем в 1.5 раза по x:

- то что было в 1 станет в 1.5
- 2 превратится в 3
- 3 превратится в 4.5

Масштабирование относительно начала координат:

$$x' = x \cdot S_x$$
$$y' = y \cdot S_y$$

Поворот относительно начала координат против часовой стрелки на угол θ



Перобразование заключается в:

Есть исходная система координат, исходный объект (можно представить что переходим в новую систему координат, при преобразовании)

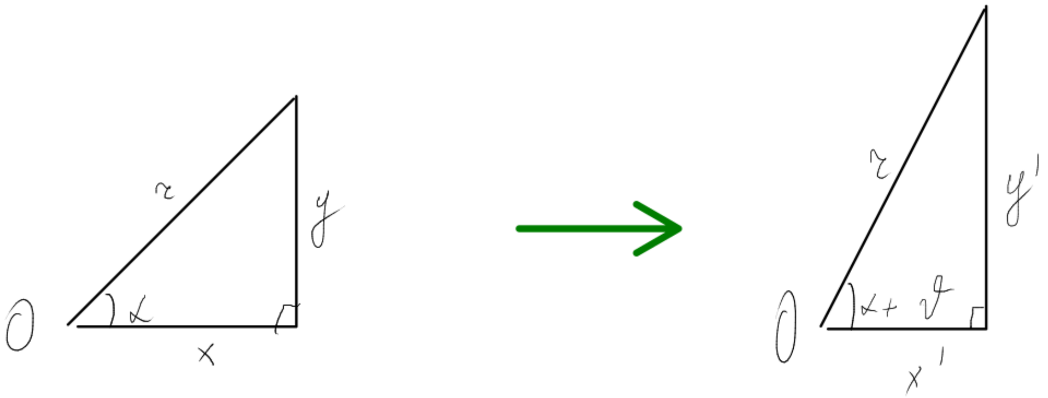
Если соеденить лучем точку с началом координат

Повернуть — Повернуть этот отрезок относительно начала координат

Из $P \longrightarrow P'$ на угол θ против часовой стрелки

Берем другую точку поворачиваем ее на угол θ и тп.

Таким образом поворачиваем фигуру (треугольник в данном случае) против часовой стрелки



Вывод преобразования (поворота):

- Пусть длина отрезка r
- Пусть начальный угол α
- После преобразования угол $\alpha + \theta$
- Было:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

- Стало:

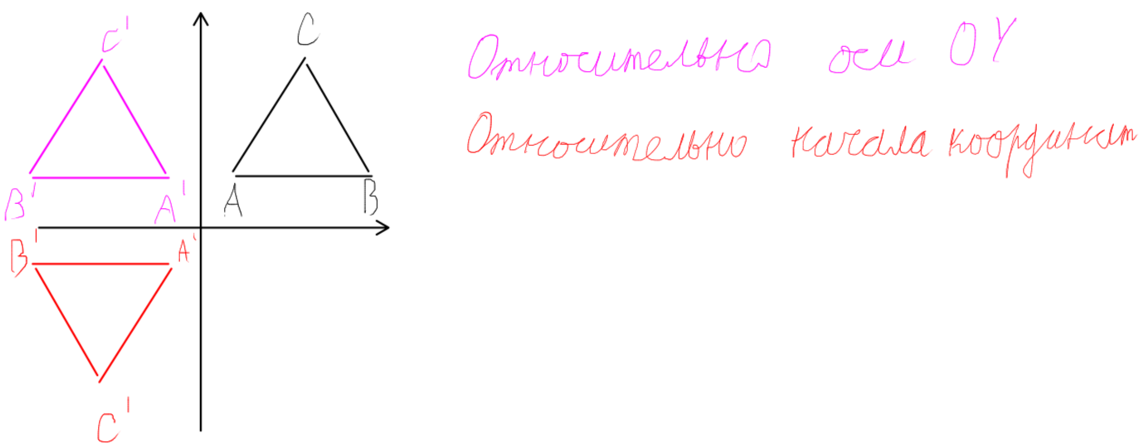
$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\sin\theta\cos\alpha = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

Поворот относительно начала координат против часовой стрелки на угол θ:

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Зеркальное отражение отрожаем относительно чего-то:

- Относительно начала координат
- Относительно оси O_x
- Относительно оси O_y



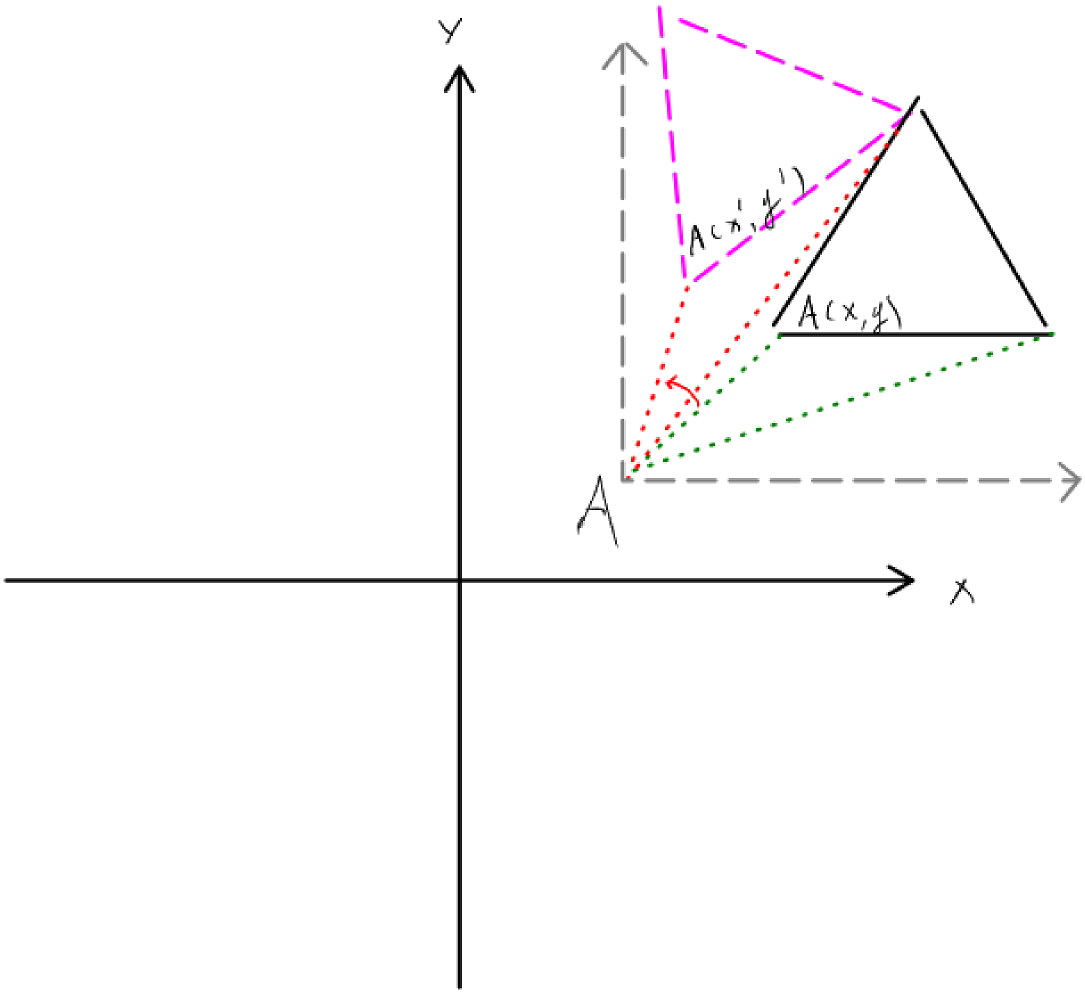
По факту масштабирование с коэффициентами -1 и 1

Либо оба коэф = -1

Либо один коэф = -1, один коэф = 1

Совмещенные преобразования

Например, поворот на угол θ против часовой стрелки относительно точки $A(x_a, y_a)$



Мы перейдем в новую систему координат с x y на $x^{(1)}$ $y^{(1)}$

Нужно из каждой точки изображения вычесть координаты точки $A(x_a, y_a)$

$$\begin{cases} x^{(1)} = x - x_a \\ y^{(1)} = y - y_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(2)} = x^{(1)} \cos\theta - y^{(1)} \sin\theta \\ y^{(2)} = x^{(1)} \sin\theta + y^{(1)} \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x^{(2)} + x_a = (x - x_a)\cos\theta - (y - y_0)\cos\theta + x_a \\ y' = y^{(2)} + y_a = (x - x_a)\sin\theta + (y - y_a)\cos\theta + y_a \end{cases}$$

Компьютер — тупая железка, поэтому обычно она формулами не занимается. Можно просто привести все преобразования к унифицированному виду. В этом нам помогут **матричные преобразования**.

Матричные преобразования

Точку с координатами (x, y) можно воспринимать как вектор из начала координат в эту точку

Вектор — сущность, которая имеет длину и направление

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Если у нас есть некоторая точка, мы можем принимать её как вектор-столбец, элементами которой являются координаты этой точки:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

$$x' = S_x \cdot x$$

$$y' = S_y \cdot y$$

Примечание: для Миронова круглые и квадратные скобки эквивалентны.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

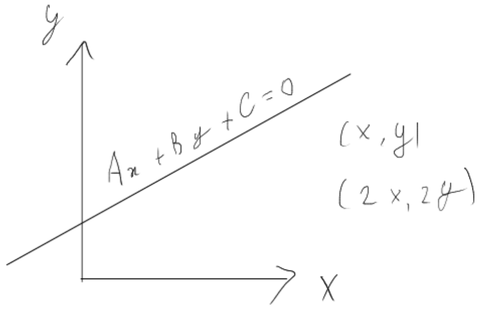
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

В случае операции переноса всё значительно усложняется из-за наличия свободного члена в лице T_x и T_y $\Rightarrow$ данная система матричных преобразований нас не удовлетворяет. Для решения возникших проблем мы введём понятие **однородных координат**.

Евклидовы координаты привычные нам конкретные координаты точек.

Однородные координаты касаются не только точек. Если мы говорим о произвольной сущности и её однородных координатах, то это набор чисел, заданный с точностью до общего множителя.

Переход от двухмерно евклидова пространства к трёхмерному однородному.



$$(A, B, C)$$
$$(2A, 2B, 2C)$$
$$(-3.5A, -3.5B, -3.5C)$$

однородные координаты прямой

Как быть с точкой?

$$(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \rightarrow (x_1 \cdot x_{n+1}, x_2 x_{n+1}, \dots, x_n x_{n+1}, x_{n+1})$$

x_{n+1} – общий множитель.

Задали прямую:

$$Ax + By + C = 0$$

$$(A, B, C) == (2A, 2B, 2C)$$

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

вводим x_{n+1} ...

$$(x_1 \cdot x_{n+1}, x_2 \cdot x_{n+1}, x_3 \cdot x_{n+1}, ..., x_{n+1}), x_{n+1} \neq 0$$

$$(x, y) \overset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} (\alpha x, \alpha y, \alpha)$$

$$(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, \chi_{n+1}) \Rightarrow \left(\frac{\chi_1}{\chi_{n+1}}, \frac{\chi_2}{\chi_{n+1}}, ..., \frac{\chi_n}{\chi_{n+1}} \right)$$

$$(\chi, \gamma, \alpha) \Rightarrow \frac{\chi}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \chi_{n+1}) \Rightarrow \quad (\chi, \gamma, \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\chi_1}{\chi_{n+1}}, \frac{\chi_2}{\chi_{n+1}}, \dots, \frac{\chi_n}{\chi_{n+1}}\right) \quad \Rightarrow \left(\frac{\chi}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

$$\chi' = \alpha x' = S_x \cdot x\alpha = S_x \cdot \chi$$
$$\gamma' = \alpha y' = S_y \cdot y\alpha = S_y \cdot \gamma$$

$$(x, y) \overset{\alpha'=\alpha}{\Rightarrow} (x\alpha, y\alpha, \alpha)$$

$$\chi' = x' \cdot \alpha$$
$$\gamma' = y' \cdot \alpha$$
$$\alpha'' = \alpha$$

$$\begin{cases} \chi' = \chi S_x = \underline{a_{11}\chi} + a_{12}\gamma + a_{13}\alpha \\ \gamma' = \gamma S_y = a_{21}\chi + \underline{a_{22}\gamma} + a_{23}\alpha \\ \alpha' = \alpha = a_{31}\chi + a(32)\gamma + \underline{a_{33}\alpha} \end{cases}$$

Отсюда вытекает матрица масштабирования:

$$\begin{pmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\chi \ \ \gamma \ \ \alpha)$$

$$ax' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$ay' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Матрица поворота:

$$\begin{pmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\chi \ \ \gamma \ \ \alpha)$$

Линейный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \end{cases} = \begin{cases} \chi' = \alpha x' = \alpha x + T_x \alpha \\ \gamma' = \alpha y' = \alpha y + T_y \alpha \\ \alpha' = \alpha \end{cases}$$

Отсюда матрица линейного переноса:

$$\begin{pmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_a \\ 0 & 1 & y_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_a \\ 0 & 1 & -y_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

В силу ассоциативности мтриц мы можем совместить первую-третью матрицы в правой части равенства по правилу умножения матриц.