Лекция 8. 4 апреля 2025. Краевые задачи. Линейные системы дифференциальных уравнений.

Краевые задачи

Рассмотрим уравнение

(1) $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),\ \ a \le x \le b$ 1.

(2) $y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0$ — начальное условие 2.

Equation 1 – Equation 2 — задача Коши, имеют единственное решение

(3) $\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$— заданные числа 3.

Определене.

Краевая задача — задача нахождения решения Equation 1, удовлетворяющего заданным краевым условиям Equation 3

Мы что-то знаем о решении в точке a (согласно первому уравнению системы) и что-то знаем о решении в точке b (согласно второму уравнению системы).

Примеры.

1. $\begin{cases} y''=0, 0\le x\le 1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$

Тут легко найти общее решение уравнения, дважды проинтегрировав:

$y = c_1 x + c_2$

Подставляем в краевые условия:

$y(0) = c_2 = 0$

$y(1) = c_1 + \underbrace{c_2}_{=0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Следовательно, $y(x) \equiv 0$ — единственное решение.

2. $\begin{cases} y''=0 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$

$y = c_1 x + c_2$ — общее решение.
$y'(x) = c_1$

$y'(0) = c_1 = 0$

$y'(1) = c_1 = 0$

$y(x) = c_2$ — решение краевой задачи при любом c_2.

Вывод из второго примера: краевая задача может иметь бесконечно много решений.

3. $\begin{cases} y''2,\ 0\le x\le 1 \\ y'(0)=0, y'(1)=0 \end{cases}$

$$y'(x) = 2x + c$$
$$y(x) = x^2 + c_1 x + c_2$$
$$y'(0) = c_1 = 0$$
$$y'(1) = 2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2$$
4.

Определение.

Простейшая краевая задача имеет вид:

(1) $y'' + q(x)y = f(x)$ 5.

(2) $y(a) = 0, y(b) = 0$ 6.

На примере простейшей краевой задачи можно изучать все краевые задачи.

Алгоритм решения задачи Equation 5 – Equation 6 .

1. Попробуем решить уравнение Equation 5. Это не всегда возможно, но бывает такое, что можно.

Получаем

(3) $y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + y_ч(x)$ 7.

φ_1, φ_2— ф.с.р (лин. нез. решение) уравнения
$y'' + q(x)y = 0,$ 8.

$y_ч(x)$ — частные решения Equation 5 , c_1, c_2 — произвольные константы

2. Подставляем в Equation 7 в Equation 6 :

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(a) + c_2\varphi_2(a) + y_ч(a) = 0 \\ c_1\varphi_1(b) + c_2\varphi_2(b) + y_ч(b) = 0 \end{cases}\text{— линейная алгебраическая система относительно } c_1 \text{и} c_2 \quad 9.$$

3. Вычисляем определитель системы Equation 9

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) \\ \varphi_1(b) & \varphi_2(b) \end{vmatrix} \quad 10.$$

<u>1 случай</u>. $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ Equation 9 имеет единственное решение. В этом случае $y(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 y(y) + y_ч(x)$ — единственное решение Equation 5 – Equation 6.

<u>2 случай</u>. $\Delta = 0 \Rightarrow$ возникает 2 подслучая.

2.1. Система имеет бесконечно много решений. В этом случае Equation 5 – Equation 6 имеет бесконечно много решений 2.2. Система не имеет решений. В этом случае Equation 5 – Equation 6 не имеет ни одного решения.

Следствие. Рассмотрим краевые задачи Equation 5 – Equation 6. Введём в рассмотрение соответствующую однородную краевую задачу.

(5) $y''q(x)y = 0,\ y(a) = 0,\ y(b) = 0$ 11.

$(y(x) \equiv 0)$— решение Equation 11 12.

Если Equation 11 имеет только тривиальные решение $y(x) \equiv 0$, то Equation 5 – Equation 6 имеют единственное решение $\forall f(x)$

Доказательство:

Применим наш алгоритм к решению задачи Equation 11.

Решаем Equation 11. Получаем общее решение в виде

$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$— ф. с. р. уравнения Equation 11 13.

.

Подставляем эту формулу в краевые условия

(6) $\begin{cases} c_1\varphi_1(a)+c_2\varphi_2(a)=0 \\ c_1\varphi_1(b)+c_2\varphi_2(b)=0 \end{cases}$— линейная алгебраическая система относительно c_1иc_2 14.

$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) \\ \varphi_1(b) & \varphi_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$, так как в противном случае и тогда задача Equation 11 будет иметь бесконечно много решений.

Теперь, согласно алгоритму, исходная задача имеет единственное решение: $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система Equation 9 имеет единственное решнеие.

Линейные системы дифференциальных уравнений

Определение

Нормальная система дифференциальных уравнений I порядка

(1) $\begin{cases} y_1' = q_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = q_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ .... \\ y_n' = q_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$ 15.

где x— нез переменная $a \leq x \leq b$, $y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n$ — неизв функция

$a_{ij}(x)$— заданные непрерывные функции (коэффициенты) 16.

$f_1(x), ..., f_n(x)$— заданные непрерывные функции 17.

Определение.

Частное решение системы Equation 15 — набор функций $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$, т. ч.

$(*)\varphi_j' \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\varphi(k) + f_j(x), j = \overline{1,n}$ 18.

Определение.

Линейная система Equation 15 называется однородной если $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$.

Векторная запись линейной системы.

Условимся, что вектор-функции будут обозначаться заглавными буквами.

Обозначим вектор-функцией

$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ ... \\ y_n(x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x) \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & ... & a_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$

$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)y_1(x) + & a_{12}(x)y_2(x) + & ... & +a_{1n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(x)y_1(x) + & a_{n2}(x)y_2(x) + & ... & +a_{nn}(x) \end{pmatrix}$ 19.

$A(x)Y(x) + F(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)y_1(x) + & a_{12}(x)y_2(x) + & ... & +a_{1n}(x) + f_1(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(x)y_1(x) + & a_{n2}(x)y_2(x) + & ... & +a_{nn}(x) + f_{n(x)} \end{pmatrix}$ 20.

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \quad 21.$$

$$(1) \text{ Equation 15} \Leftrightarrow Y' = A(x)Y + F(x) \quad 22.$$

Однородная система

$$Y' = A(x)Y \quad 23.$$

Пусть $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$.

Тождества Equation 18 $\Leftrightarrow \Phi(x) = A(x)\Phi(x) + F(x)$

Это означает, что наша вектор-функция Φ даёт решение системы.

Теорема 1. Пусть $\Phi_1(x), ..., \Phi_m(x)$ — решения однородной системы

$$(1)\ Y' = A(x)Y, \quad 24.$$

$$\alpha_1, ..., \alpha_m \text{— произвольные числа.} \quad 25.$$

Тогда функция $\Phi(x) = \alpha_1\Phi_1(x) + ... + \alpha_m\Phi_m(x)$ — тоже решения Equation 24.

Доказательство:

По условию $\Phi_j'(x) \equiv A(x)\Phi_j(x), j = \overline{1, m}$.

Расмотрим $\Phi'(x) = \alpha_1\Phi_1'(x) + ... + \alpha_m\Phi_m'(x) = \alpha_1 A(x)\Phi_1(x) + ... + \alpha_m A(x)\Phi_m(x) = A(x)(\alpha_1\Phi_1(x) + ... + \alpha_m\Phi_m(x)) = A(x)\Phi(x)$.

Таким образом, $\Phi'(x) \equiv A(x)\Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)$ — решение Equation 24.

$$\begin{cases} y_1' = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1n}(x)y_k + f_1(x),\ y_1(x) = y_1^0 \\ \dots \\ y_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nn}(x)y_k + f_n(x),\ y_n(x) = y_n^0 \end{cases} \quad 26.$$

где $x_0, y_1^0, ..., y_n^0$ — заданные числа

Обозначим

$$Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \quad 27.$$

$$\text{Equation 18} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = A(x)Y + F(x) \\ Y(x_0) = Y^0 \text{— начальное условие} \end{cases} \quad 28.$$