Лекция 4.

Линейно зависимые и линейно независимые функции $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ на $[a, b]$

Теорема 2

Определитель Вронского : $\mathbb{W}$ — вот он

$\mathbb{W}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & ... & \varphi_{m(x)} \\ \varphi_1'(x) & ... & \varphi_m'(x) \\ ... & ... & ... \\ \varphi^{(m-1)}(x) & ... & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$

Т. 2 $\varphi_1(x), ..., \varphi_m$ линейно зависимы на $[a, b] \Rightarrow \mathbb{W}(x) \equiv 0$

Док-во:

Пусть $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ — линейно зависимый на $[a, b]$ $\exists \alpha_1, ..., \alpha_m$, не все равн. 0, т.ч.

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + ... + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0 \mid \frac{\partial x}{\partial y} \qquad 1.$$

Продифференцируем ($\frac{\partial}{\partial} x$)

$$\alpha_1 \varphi_{1'}(x) + ... + \alpha_m \varphi_{m'}(x) \equiv 0 \qquad 2.$$

——

$$\alpha_1 \varphi_1^{(m-1)}(x) + ... + \alpha_m \varphi_m^{(m-1)}(x) \equiv 0 \qquad 3.$$

Фиксируем x

Рассмотрим $\mathbb{W}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & ... & \varphi_{m(x)} \\ \varphi_1'(x) & ... & \varphi_m'(x) \\ ... & ... & ... \\ \varphi^{(m-1)}(x) & ... & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$ при фиксированном x:

Умножим первый столбец на α_1, второй на α_2, и т.д.

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1(x) \\ \alpha_1 \varphi_1'(x) \\ ... \\ \alpha_1 \varphi^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \varphi_2(x) \\ \alpha_2 \varphi_2'(x) \\ ... \\ \alpha_2 \varphi_2^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_m \varphi_{m(x)} \\ \alpha_m \varphi_m'(x) \\ ... \\ \alpha_m \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \varphi_1(x) + ... + \alpha_m \varphi_m(x) \\ \alpha_1 \varphi_1'(x) + ... + \alpha_m \varphi_m'(x) \\ ... \\ \alpha_1 \varphi^{(m-1)}(x) + ... + \alpha_m \varphi^{(m-1)}(x) \end{bmatrix}$

Следовательно столбцы $\mathbb{W}(x)$ является лин зависимой $\underset{\text{Теорема из ...}}{\Rightarrow}$ $\mathbb{W}(x) = 0 \ \forall x \in [a, b] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + \alpha_{n(x)} y = 0$ или $l(y) = 0$

Теорема 3

Пусть $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ — решение уравнения Equation 3 — линейно независимое на $[a, b]$. Тогда $\forall x \in [a, b], \mathbb{W}(x) \neq 0$.

Доказательство.

Предположим противное: $\exists x_0 \in [a, b]$ $\mathbb{W}(x_0) = 0$

$$\mathbb{W}(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_{m(x_0)} \\ \varphi_1'(x_0) & \dots & \varphi_m'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi^{(m-1)}(x_0) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

Получим противоречие. По теореме из алгебры (Если определитель равено нуля, то столбцы этого определителя не линейно независимые) существуют числа $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_2(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} \varphi_n(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{k(x_0)} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k'} \varphi_{k(x_0)} \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m-1)} \varphi_{k(x_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad 4.$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{k(x_0)} \\ ----- \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Вводим функцию. Обозначим через $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x)_{\overline{\text{сл-ие}}\atop \text{к т. 1}}$ решение

По следствию из Т.1., пользуясь свойством линейности, получим, что эта сумма так же будет решением (Equation 3).

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{k'}(x) \\ \varphi^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k^{(n-1)}(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x_0) = 0 \\ \varphi'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)} = 0 \end{cases} \quad 5.$$

Отступление:

Определение

Пусть $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, $x_0 \in [a, b]$

Определение Задачей Коши для (линейного?) уравнения $l(y) = f(x)$ (Equation 3) в точке x_0 называется задача нахождениея такого решения, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad 6.$$

— начальное условие (1.2).

(Equation 3), (Equation 6) — задача Коши.

Теорема (О существовании решения задачи Коши для линейного уравнения) Задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение при $\forall x \in [a, b]$, $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$

Доказательство. Его не будет С;

Конец отступления.

Возвращаемся к доказательству. Получаем, что $\varphi(x)$ является решением не просто уравнения, а задачей Коши.

$$\begin{gathered} y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \end{gathered} \tag{7.}$$

Задача (Equation 7) имеет решение $y(x) \equiv 0$. Но задача Коши имеет единственное решение. Поэтому на основании теоремы о единственности решения задачи Коши делаем вывод, что $y(x) \equiv 0$ (Equation 7).

Если записать кратко, то

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \neq 0 \tag{8.}$$

$y(x) \equiv 0$— тоже решение Equation 7 $\Rightarrow \varphi(x) \equiv 0 \Rightarrow \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$— линейно зависимы на $[a, b] \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \forall x\ \mathbb{W}(x) \neq 0$.

Теорема доказана.

Теорема 4.
Теорема 4

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ – линейно независимые решения линейного однородного уравнения $y^{(n)}$

$$y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0,\ a \leq x \leq b \tag{9.}$$

Любое решение уравнения (Equation 9) имеет вид:

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2 + ... + C_n\varphi_n(x), \tag{10.}$$

где $C_1, ..., C_n$ – константы.

В этой формуле содержатся все решения.

Доказательтво

Отметим, что формула (Equation 10) даёт решение уравнения (Equation 9) при любых $C_1, C_2, ..., C_n$.

На основании линейности $l(y)$ покажем, что в формуле (Equation 10) содержатся все решения нашего одородного уравнения (Equation 9), и всё будет доказано.

Пусть в $z(x)$ –произвольное решение (Equation 9), $x_0 \in [a, b]$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0) + ... + c_n\varphi_n(x_0) = z(x_0) \\ c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0) + ... + c_n\varphi_n'(x_0) = z'(x_0) \\ ... \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0) + ... + c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = z(x_0) \end{cases} \tag{11.}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & ... & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) & ... & \varphi_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(x-0) \end{vmatrix} = \mathbb{W}(x_0) \neq 0 \qquad 12.$$

По теореме из алгебры имеет (Equation 11) или единственное решение

Получаем n равенств

$$\begin{cases} c_1^0\varphi_1(x_0) + c_2^0\varphi_2(x_0) + ... + c_n^0\varphi_n(x_0) = z(x_0) \\ c_1^0\varphi_1'(x_0) + c_2^0\varphi_2'(x_0) + ... + c_n^0\varphi_n'(x_0) = z'(x_0) \\ ... \\ c_1^0\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + c_2^0\varphi_2^{(n-1)}(x_0) + ... + c_n^0\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = z(x_0) \end{cases} \qquad 13.$$

Из (Equation 13) следует (Equation 13)

$\begin{cases} \varphi(x_0)=z(x_0) \\ \varphi'(x_0)=z'(x_0) \\ ... \\ \varphi^{n-1}(x_0)=z^{n-1}(x_0) \end{cases}$

$\varphi(x), z(x)$ – решения следующей задачи Коши:

$l(y) = 0, y(x_0) = z(x_0), y'(x_0) = z'(x_0), ..., y^{n-1}(x_0) = z^{n-1}(x_0).$

На основании едиственности решения задачи Коши, делаем вывод, что $z(x) \equiv \varphi(x)$

$= c_1^0\varphi_n(x) + ... + c_n^0\varphi_n(x)$

Определение