1. Определение множества и операции над ним
2. Свойства множеств
3. Операции над множествами
4. Характеристические векторы
4'. Теорема о числе подмножеств n-элементного множества
5. Декартово произведение
6. Бинарное отношение
7. Операции над бинарными отношениями
8. Способы задания бинарных отношений
9. Теорема о матрицах бинарных отношений
10. Первая и вторая проекция бинарных отношений
11. 1- и 2-полнота бинарных отношений
12. Характеристики бинарных отношений
13. Типы бинарных отношений
14. Отношение эквивалентности
15. Разбиение множества
16. Фактор-множество
17. Основная теорема об эквивалентностях
18. Отношение порядка
19. Упорядоченное множество
20. Линейное упорядоченное множество
21. Убывающая цепь
22. Длина цепи
23. Высота элемента
24. Диаграмма упорядоченного множества
25. Наибольший и наименьший элементы

1. Определение множества и операции над ним.

Множество - это неупорядоченная совокупность элементов.

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

2. Свойства множеств.

Рефлексивность $A \subseteq A$

Антисимметричность $A \subset B \Rightarrow B \not\subset A$

Транзитивность $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Пустое мн-во $\varnothing \subseteq A$ - всегда.

3. Операции над множествами

Ω - универсальное мн-во, $\forall x \in \Omega$

1) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
2) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
3) $A \Delta B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
4) $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
5) $\overline{A} = \{x : x \notin A\}$

4. Характеристические векторы

Характеристический вектор - это булевый вектор размерностью $|\Omega|$, каждая координата которого определяет принадлежность конкретного элемента $x \in \Omega$ множеству, для которого строится этом вектор.

Т. о характеристических векторах.

$A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$

-. Т. о числе подмножеств n-элементного мн-ва

$\forall A$ - мн-во $\exists\, 2^n$ подмножеств, где $n = |A|$

5. Декартово произведение

$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

6.

$\rho \subseteq A \times B$ - бинарное отношение

7. Операции над бинарными отношениями

1) $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid \exists a, b : (a, b) \in \rho\}$

2) $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \sigma\}$

• 8. Способы задания бинарных отношений

1. Множество
2. Матрица
3. Граф

• 9. Теорема о матрицах бинарных отношений.

Пусть $A, B, C \subseteq \Omega$, $\rho \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$.

1) $\rho^{-1} \Leftrightarrow M(\rho)^T$
2) $\rho = \sigma \Leftrightarrow M(\rho) = M(\sigma)$
3) $M(\rho \cap \sigma) = M(\rho) \wedge M(\sigma)$
4) $M(\rho \cup \sigma) = M(\rho) + M(\sigma)$
5) $M(\rho \circ \sigma) = M(\rho) \cdot M(\sigma)$
6) $M(\overline{\rho}) = (M(\rho))'$
7) $M(\varnothing) = 0$
8) $M(A \times B) = 1$
9) $M(\Delta_A) = E$

• 10, 11. Первая и вторая проекция бинарных отношений

$pr_1 \rho = \{ a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in \rho \}$

$pr_2 \rho = \{ b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in \rho \}$

$pr_1 \rho = A \Leftrightarrow \rho$ 1-полное

$pr_2 \rho = B \Leftrightarrow \rho$ 2-полное

• 12. Типы бинарных отношений

- однозначное
- обратно-однозначное
- взаимно-однозначное
- инъекция
- 1-полное
- 2-полное
- отображение
- сюръекция
- биекция

· 13. Характеристики бинарных отношений

· рефлексивность

· антирефлексивность

· симметричность

· антисимметричность

· транзитивность

· полнота

Т. ρ транзитивно $\Leftrightarrow$ $\rho \circ \rho \subseteq \rho$

· 14. Отношение эквивалентности

$\mathcal{E}$ - о. э. $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{E}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно

· 15. Разбиение множества

$\Pi(a) = \{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $|\Pi(a)| = n$, где $\forall i, j = \overline{1,n}$ $i \neq j$

$A_i \cap A_j = \varnothing$, $\bigcup\limits_{i=\overline{1,n}} A_i = A$

Т. - Любое о. э. задаёт разбиение и наоборот

· 16. Фактор - множество - это мн-во

$A / \mathcal{E} = \{\mathcal{E}(a) \mid a \in A\}$, где $\mathcal{E}(a) \subseteq A^2$

· 17. Основная теорема об эквивалентностях

Т. - Л-ое о. э. задаёт [разби]ение и наоборот,

$\mathcal{E}(\Pi(\mathcal{E}(a)) = \mathcal{E}$, $\Pi(\mathcal{E}(\Pi(a))) = \Pi$

· 18. Отношение порядка - рефлексивное, транзитивное и антисимметричное мн-во

$\exists$ отношение порядка $\Rightarrow$ мн-во упорядочено

о. п. - полное $\Rightarrow$ мн-во линейно упорядочено

· 19. Убывающая цепь

$\exists (A, >)$ - уп. мн-во, $a \in A$. Тогда $a > a_1 > a_2 > \ldots$ - убывающая цепь.

· 20. Линейно уп. мн-во - см. выше

· 21. Высота элемента - макс. длина уб. цепи

· 22. Диаграмма уп. мн-ва - ... ~~бев~~

7. Конечный детерминированный автомат задаётся как $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где

S – мн-во состояний

X – алфавит входящий (состоит из входящих сигналов)

Y – алфавит выходящий (состоит из выходящих сигналов)

δ – функция переходов $\delta: S \times X \to S$

$\lambda: S \times X \to Y$ – функция выходов

Автомат можно задать таблицей переходов и выходов или диаграммой переходов.

Автомат работает в дискретном времени.

1. $\forall s \in S \quad \delta(s, e) = s, \quad \lambda(s, e) = e$
2. $\forall s \in S \quad \forall x \in X \quad \forall p \in S^* \quad \delta(s, px) = \delta(\delta(s, p), x)$ – расширенные функции работают со словами

$\lambda(s, px) = \lambda(\delta(s, p), x)$

A и B сравнимые, если у них одинаковые X, Y

$A = (S_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ и $B = (S_2, X_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2)$ изоморфные $\cong$, если $\exists \varphi, \psi, k$: $\varphi: S_1 \to S_2$, $\psi: X_1 \to X_2$, $k: Y_1 \to Y_2$, причём

1. $\forall s \in S_1, \forall x \in X, \quad \varphi(\delta_1(s, x)) = \delta_2(\psi(s), \varphi(x))$
2. $k(\lambda_1(s, x)) = \lambda_2(\psi(s), \varphi(x))$

Т1. об изоморфизме автоматов

Отношение изоморфизма является отношением эквивалентности