Лекция 2. 21 февраля 2025

Основные правила комбинаторики

1. **Правило произведения**: после выбора A-m можно выбрать B-n $\Rightarrow (A, B) - mn$
2. **Правило суммы**: вместе можно выбрать A-m и B-n $\Rightarrow (A, B) - m + n$

Размещения с повторениями из n типов по k элем называются все таки комбинации из k элем, котор отлич друг от друга порядком следования или составом элементов

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Примечание: n и k в любом соотношении.

Размещения без повторений из n различных элементов по k элементов назыв все различные комбинации из k элемемнтов, выбранных из n исходных элементов, которые отличаются друг от друга порядком следования элементов

$$\overline{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

Доказывается элементарно с использованием правила произведения. Выше формула расписана.

Перестановками из n элементов называются все возможные последовательности из этих n элементов. Другими словами, когда мы говорим о перестановках, мы выкладываем в ряд n элементов и получаем перестановку. Меняем порядок — получаем новую перестановку.

$$P_n = n!$$

Перестановки без повторений Если среди n элементов нет повторяющихся, то перестановки наз перестановками без повторений

$$\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_k),\ n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

Количество перестановок с повторениями $\overline{P}(n_1, ..., n_k) = \frac{(n_1+n_2+...+n_k)!}{n_{1!}n_{2!}...n_{k!}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$

$$\underbrace{aa...a}_{\substack{n_1! \\ \longleftrightarrow}},\ \underbrace{b...b}_{\substack{n_2! \\ \longleftrightarrow}}, ..., \underbrace{x...x}_{\substack{n_k! \\ \longleftrightarrow}} \cdot n!$$

$$n_1!n_2!...n_k$$

Сочетание без повторений комбинации из k различных элементов, которые отличаются друг от друга только составом элементов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

В каждом сочетании делаем перестановки из k различных элементов. Сколько у нас таких комбинаций получится? Очевидно $k!C_n^k$ и мы получим размещение, то есть $A_n^k = k!C_n^k \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Сочетания часто называют биноминальными коэффеициентами, связывая их с биномом Ньютона. Вспомним:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Свойства сочетаний:

1. $C_n^k = \overline{P}(k, n-k)$
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ — основное свойство, понадобится для док-ва теоремы на рекурентные соотношения

Доказательство: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k(n-1)!}{k!(n-1)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}$

4. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$
5. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n = 0$

Сочетание с повторениями из n типов по k элементов в любом соотношении называются все такие комбинации из k элементов исходных n типов, которые отличаются друг от друга составом элементов.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \overline{P}(k, n-1)$$

Для каждого сочетания запишем сначала количество единиц, равное количеству элементов первого типа

$\underbrace{1\ 1...1}_{\substack{\text{кол-во} \\ \text{э-в} \\ \text{1 типа}}} \mid \underbrace{1\ 1...1}_{\text{2 типа}} \mid ... \mid \underbrace{1\ 1...1}_{n\text{-й тип}}$

В качестве примера возьмём из двух типов три элемента:

$$\overline{C}_2^3$$

Тип 1	Тип 2	
0	1	bbb
1	2	abb
2	1	aab
3	0	aaa

$\overline{P}(k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1\ \text{не уверен}}^{\text{что-то}}$

Многие комбинаторные задачи сводятся к разложению предметов по ящикам. Их разнообразие не такое уж и больше, поэтому такие комбинаторные схемы обычно объединяются в небольшой раздел под названием **комбинаторика разложений**.

$$A \neq \emptyset,\ A_1, A_2, ..., A_n \subseteq A$$

Мощность

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = |A| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 \le n \\ C_k^2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n \\ C_k^3}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + ...$$

$$+(-1)^k \sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < i_k \le n \\ 1}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A - i_k + ... + \underset{0}{(1)}^n A_1 \cap ... \cap A_n$$

Доказательство:

Доказательств этой формулы много, можно и математической индукцией, Сагаева рекомендует вариант из книжки Евлонского.

Возьмём произвольный элемент A и посчитаем, сколько раз он принимает участие в подсчёте мощностей в вышеприведённой формуле. Возникает два случая:

$$a \in A$$

1. $$a \in \bigcup A_i$$

$a \in k$ подмножеств

2. $$a \notin \bigcup A_i$$

Пример:

$$X = \{a_i\}_{i=1}^{n}$$

$$Y = \{b_i\}_{i=1}^{n}$$

Воспользуемся формулой включение/исключения

$$A = \{f : X \to Y\}$$

$$A_i = \left\{f : X \to Y \mid b_i \notin E_f\right\}$$

$$A_1,\ A_2, ...,\ A_n$$

$$|A| = n^m$$

$$|A_i| = (n-i)^m$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$$

$$|A \setminus \bigcup_i^n A_i\ | = n^m - n \cdot (n-1)^m + C_n^2 \cdot (n-2)^m - ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1$$