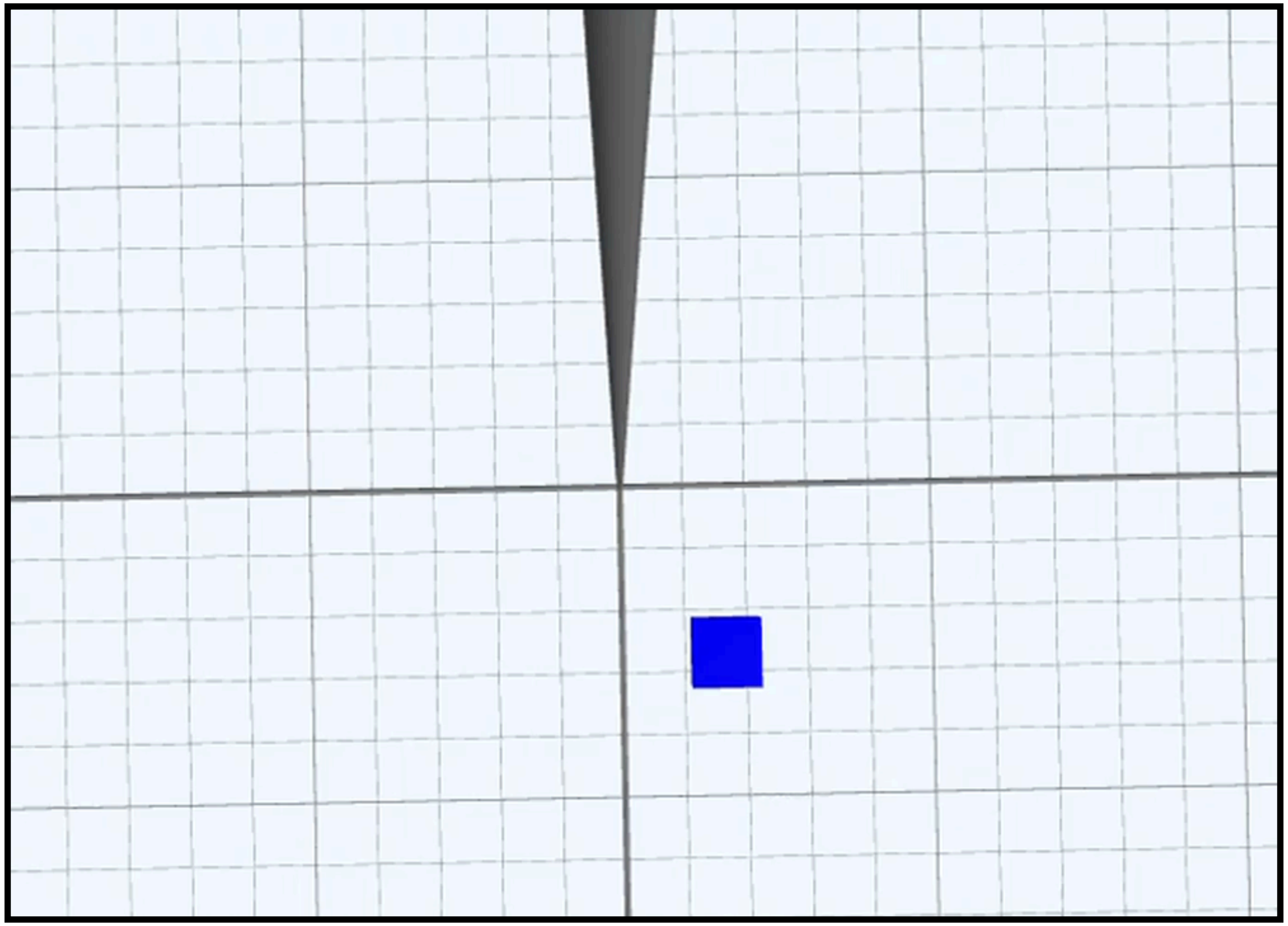
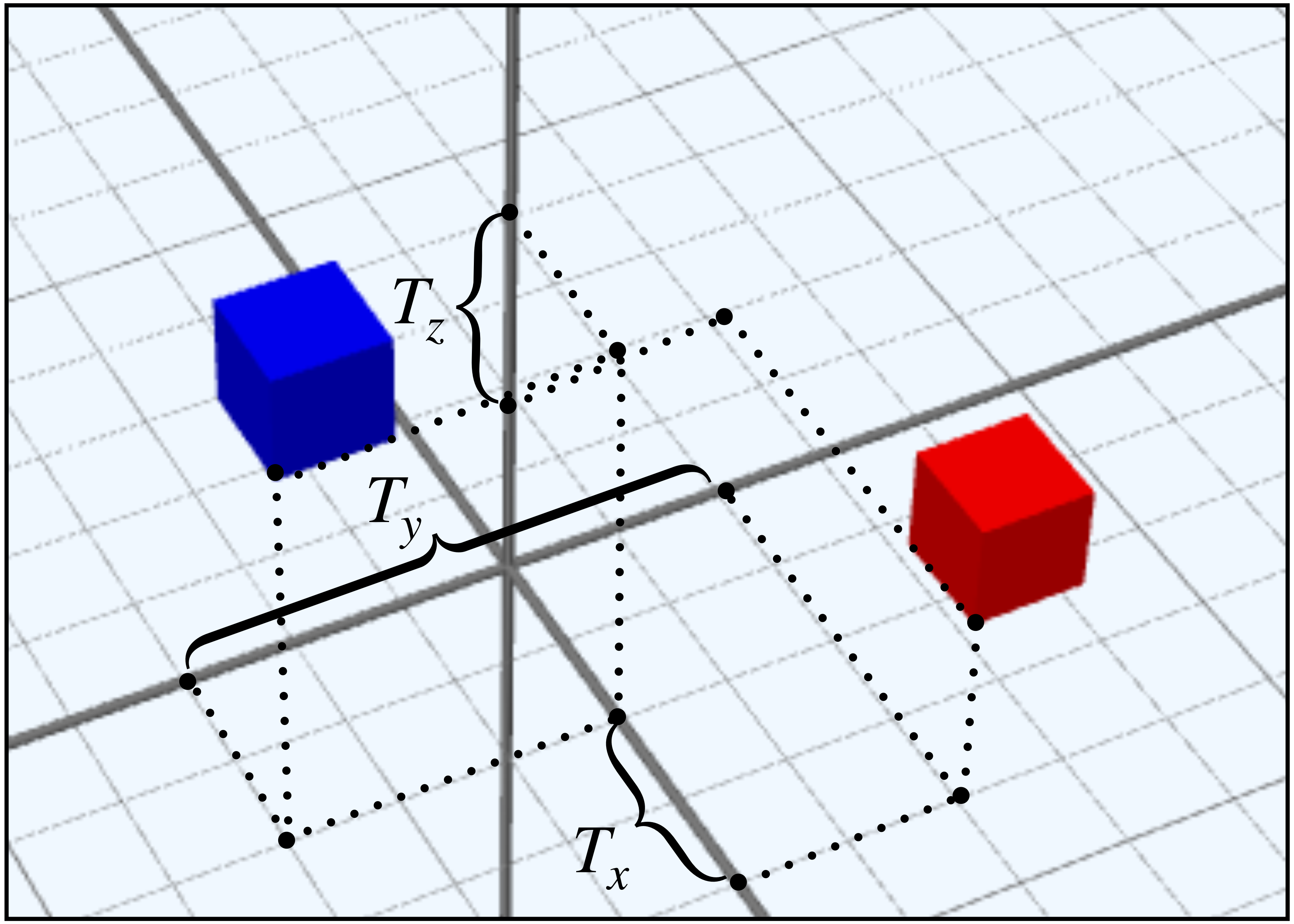
3D-преобразования

Перенос

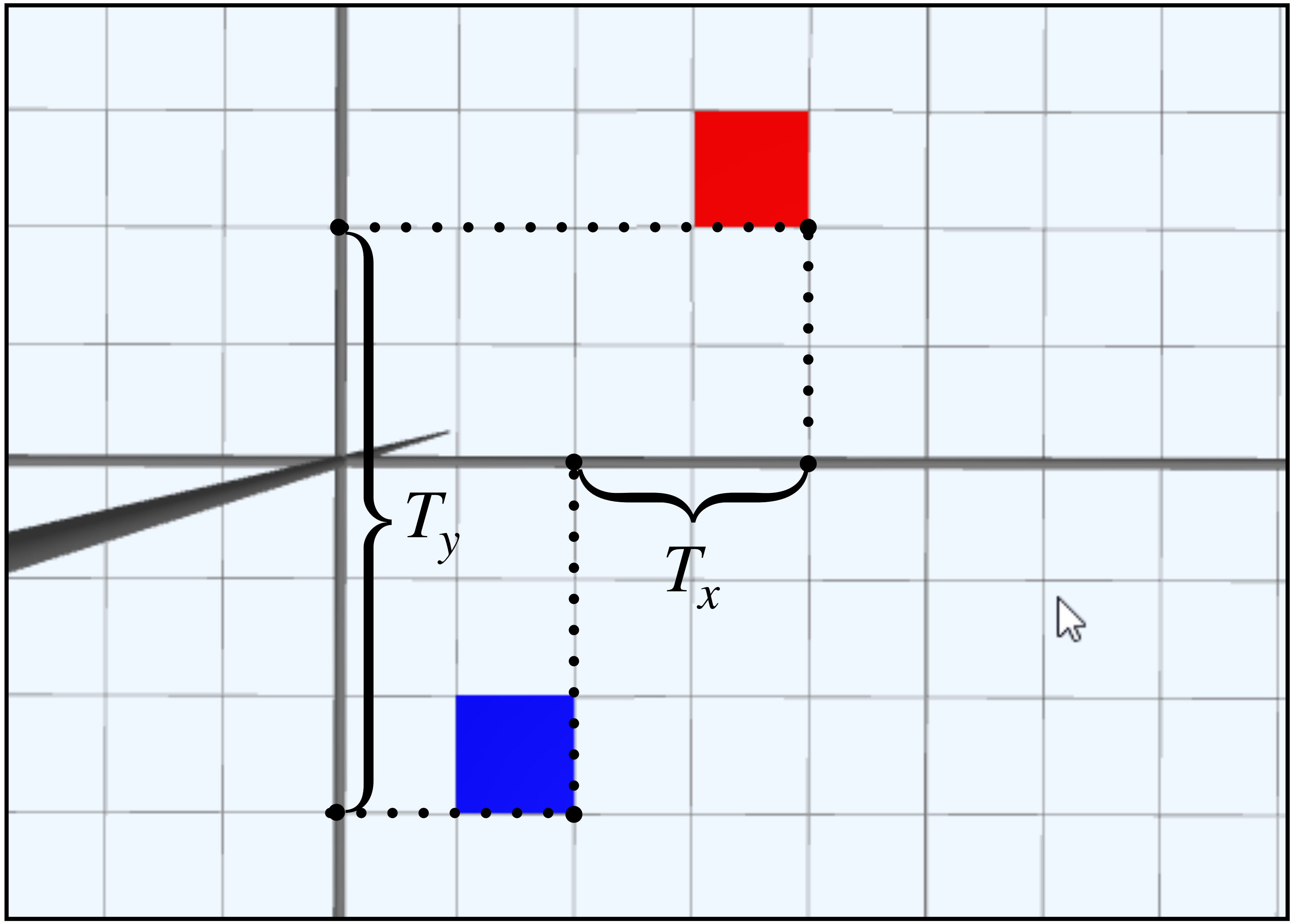


Видео демонстрирует работу программы 3D Transformation (Translation, Scaling, Rotation, Shearing) with Helix-Toolkit
https://github.com/aabbiknru-zz/3D-Transformation

Перенос

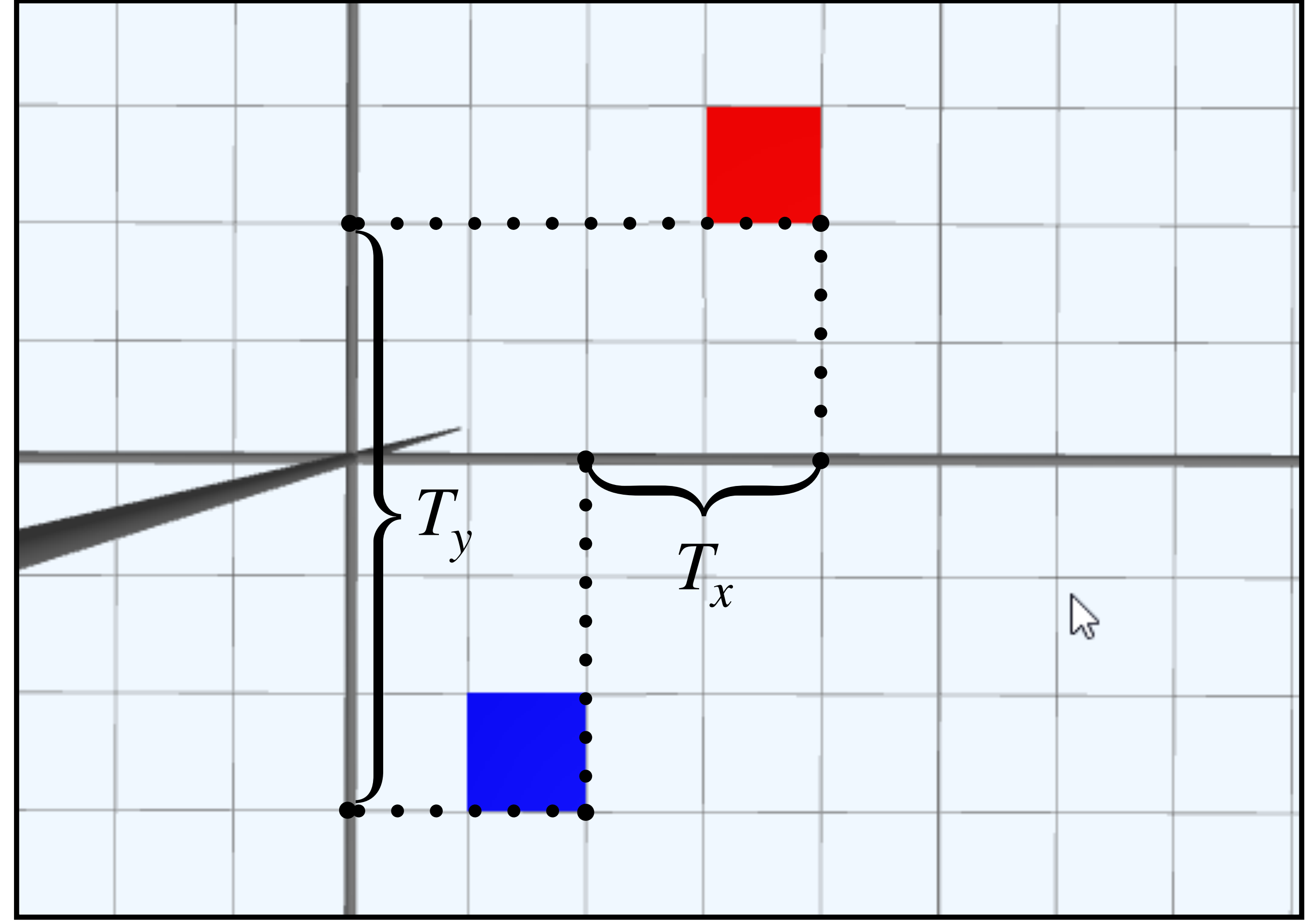


Перенос



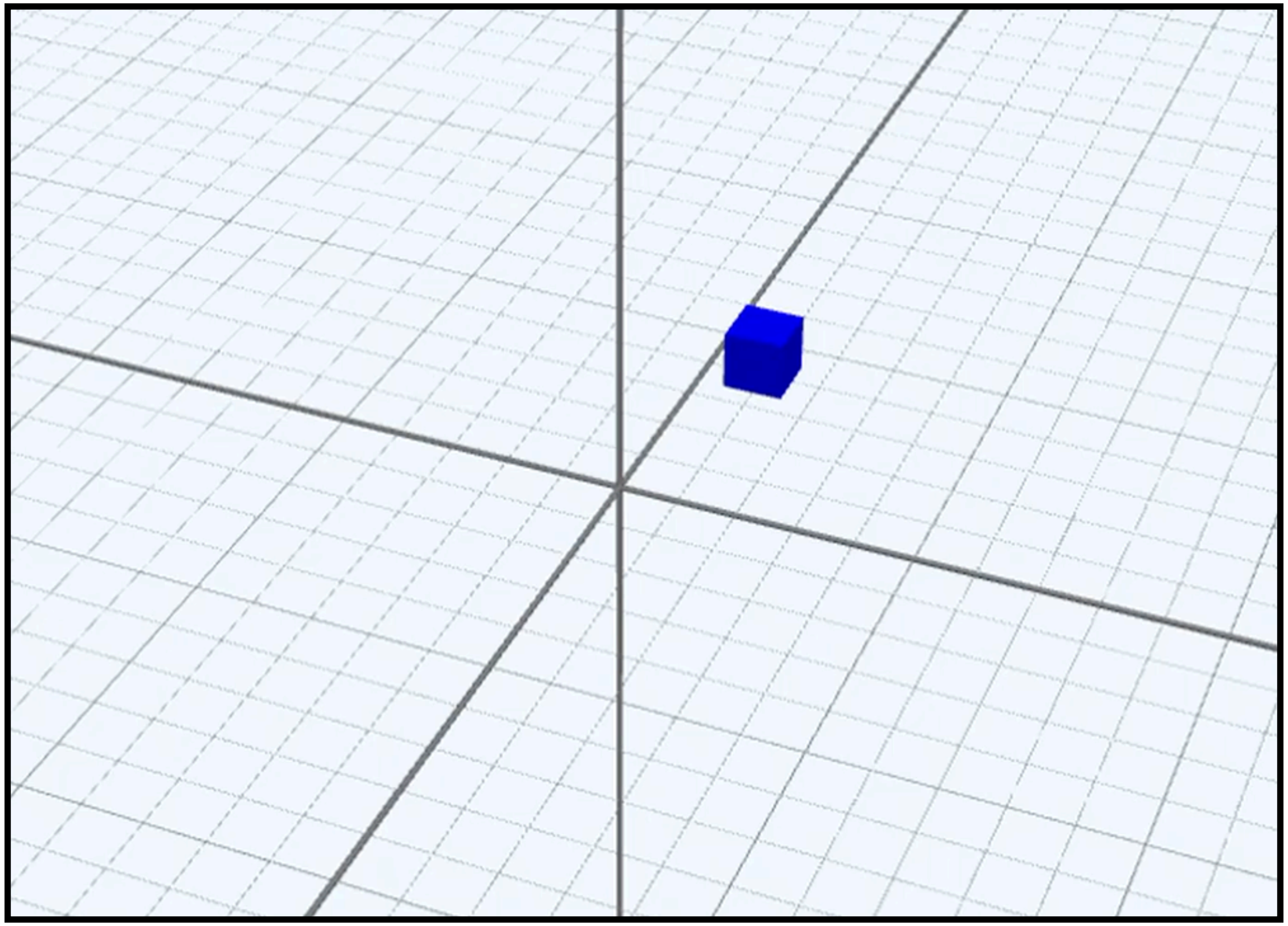
Перенос

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \\ z' = z + T_z \end{cases}$$



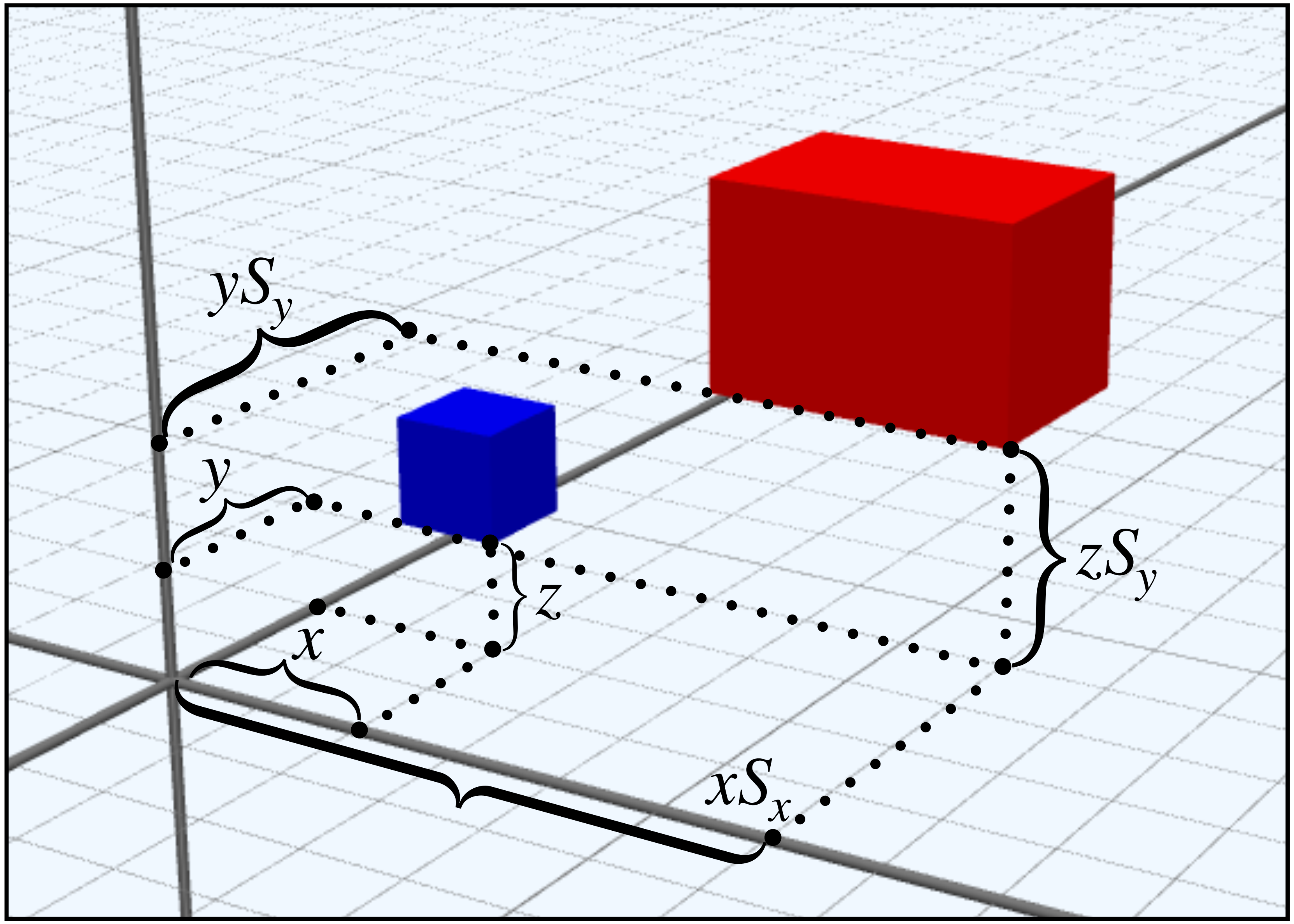
$$Translate(T_x, T_y, T_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Масштабирование

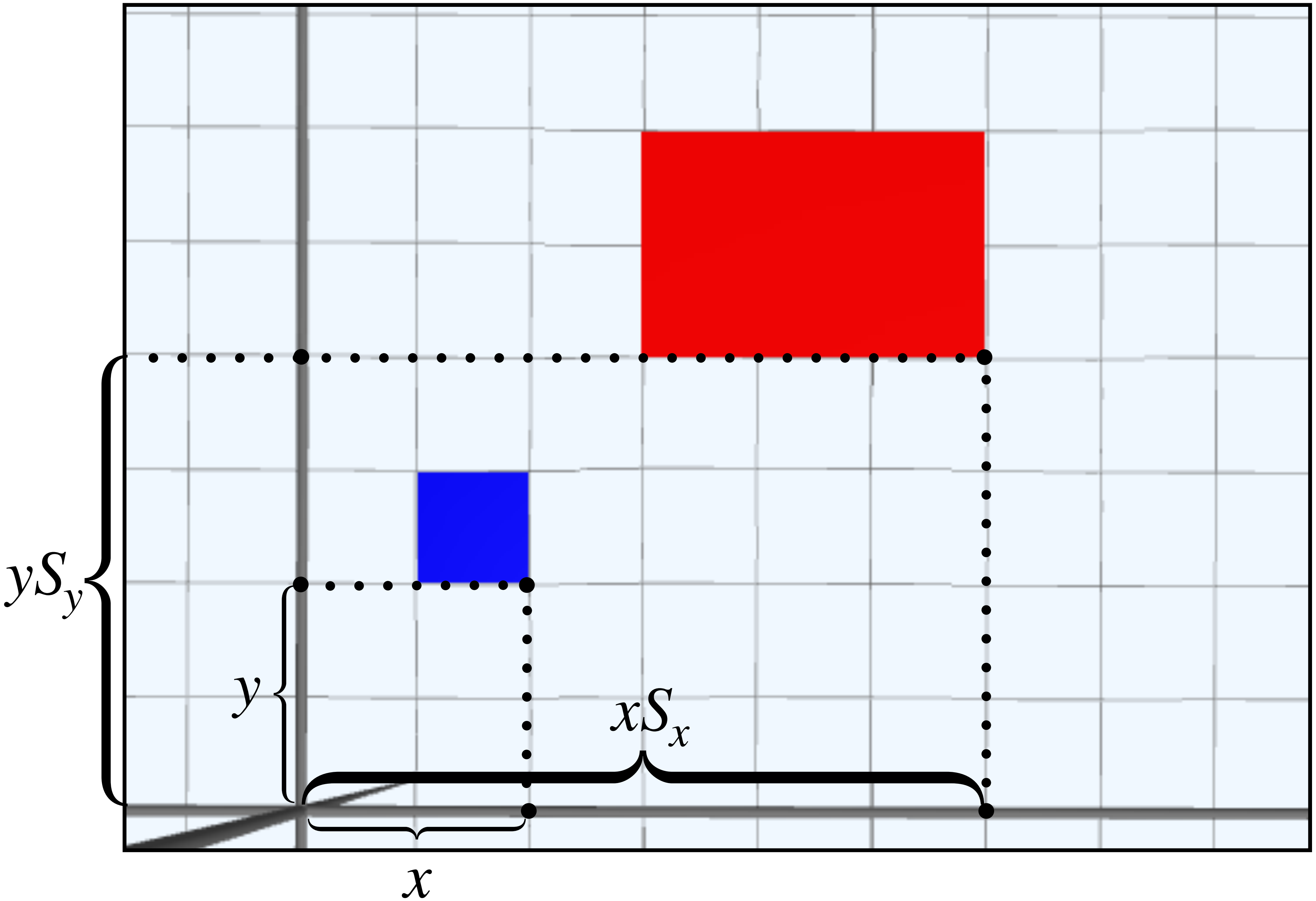


Видео демонстрирует работу программы 3D Transformation (Translation, Scaling, Rotation, Shearing) with Helix-Toolkit
https://github.com/aabbiknru-zz/3D-Transformation

Масштабирование

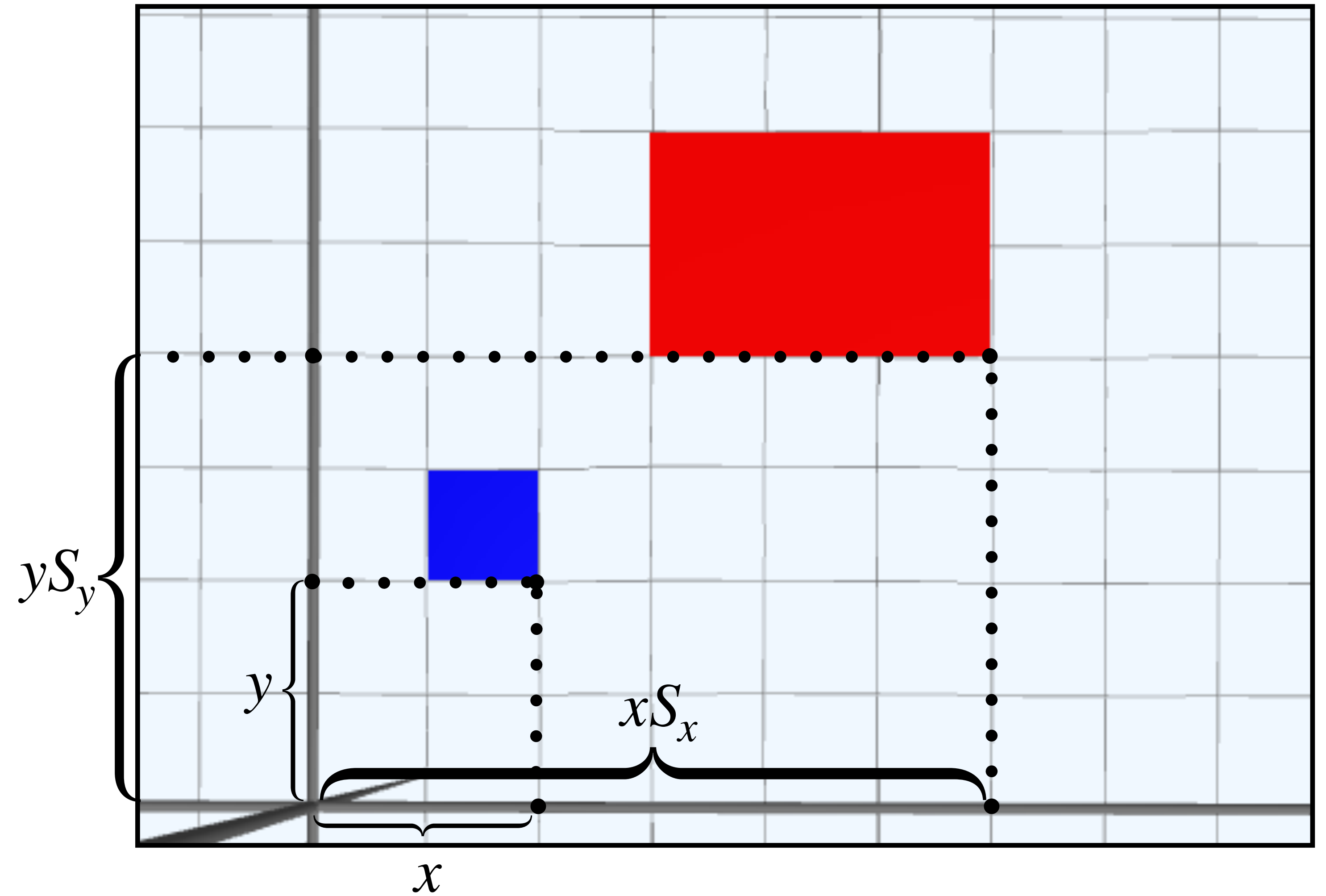


Масштабирование



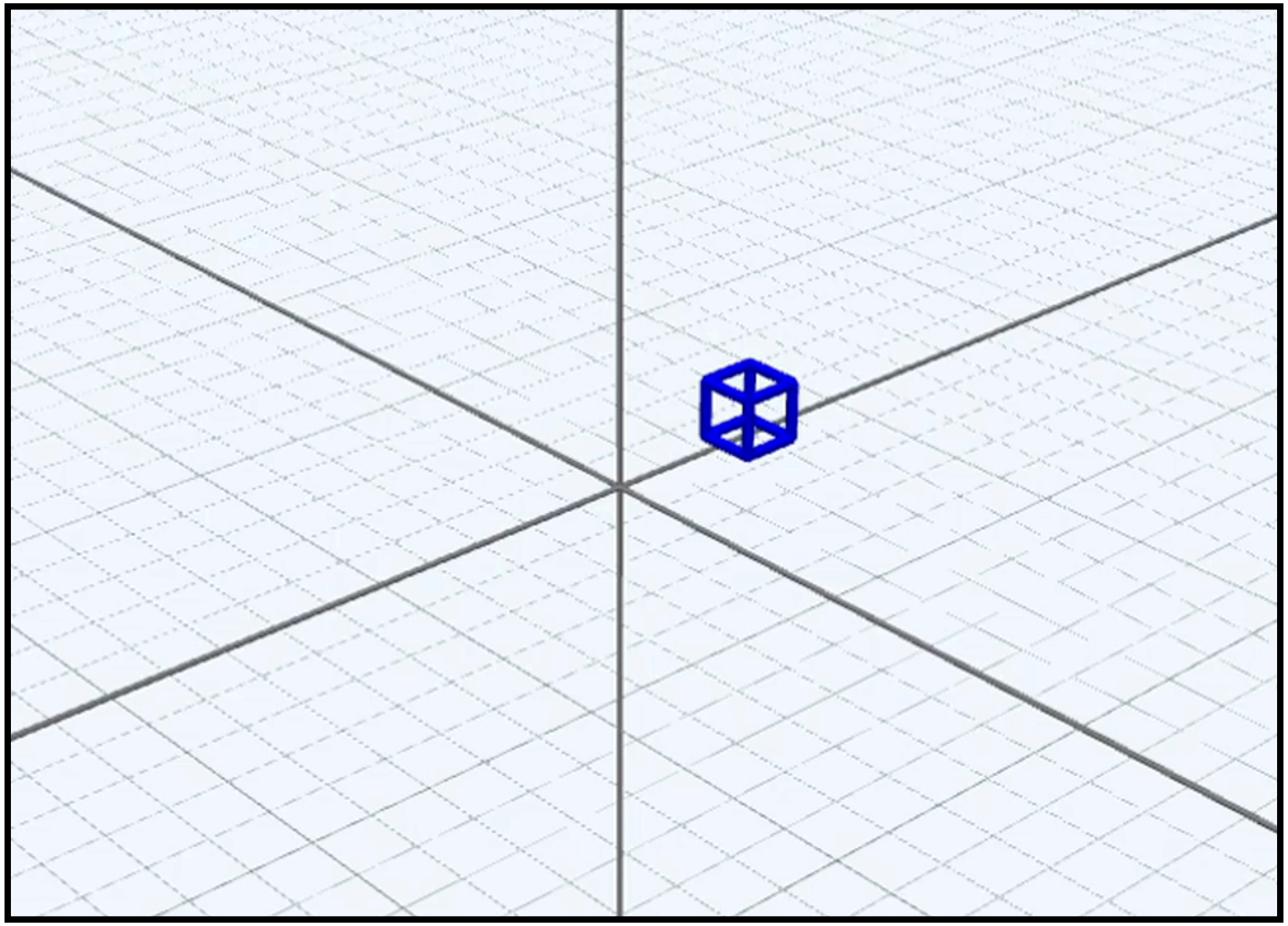
Масштабирование

$$\begin{cases} x' = S_x x \\ y' = S_y y \\ z' = S_z z \end{cases}$$



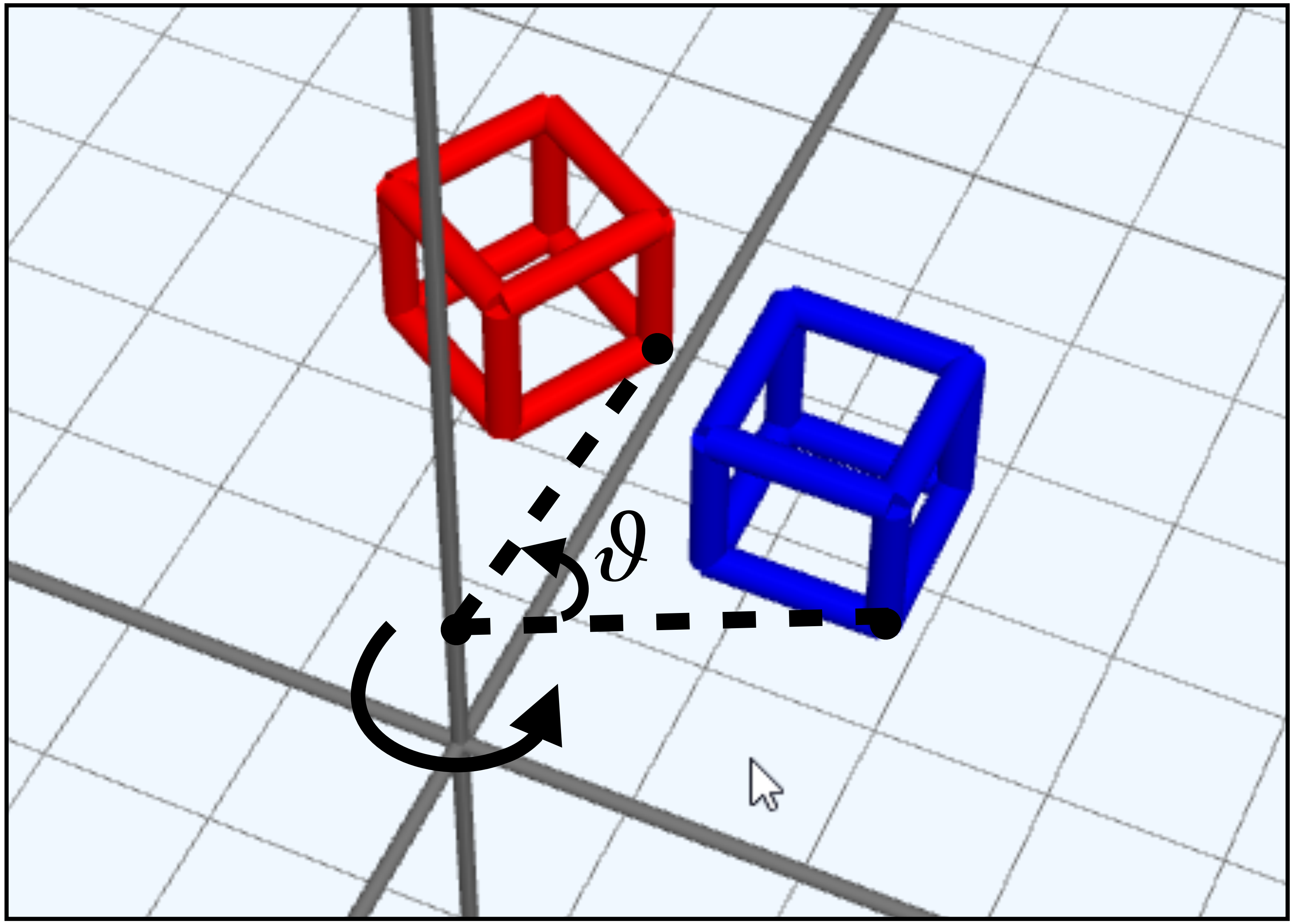
$$Scale(S_x, S_y, S_z) = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно оси

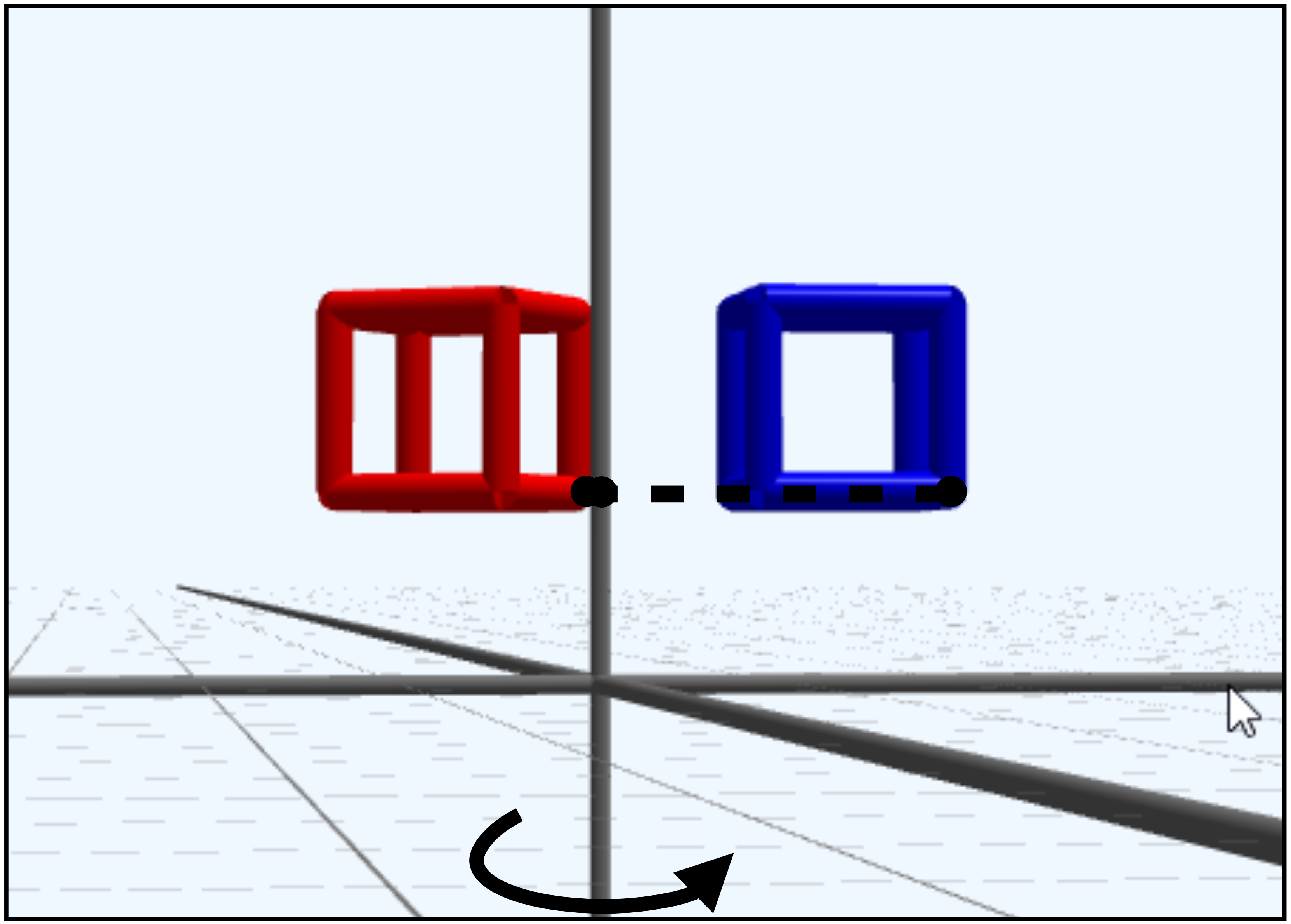


Видео демонстрирует работу программы 3D Transformation (Translation, Scaling, Rotation, Shearing) with Helix-Toolkit
https://github.com/aabbiknru-zz/3D-Transformation

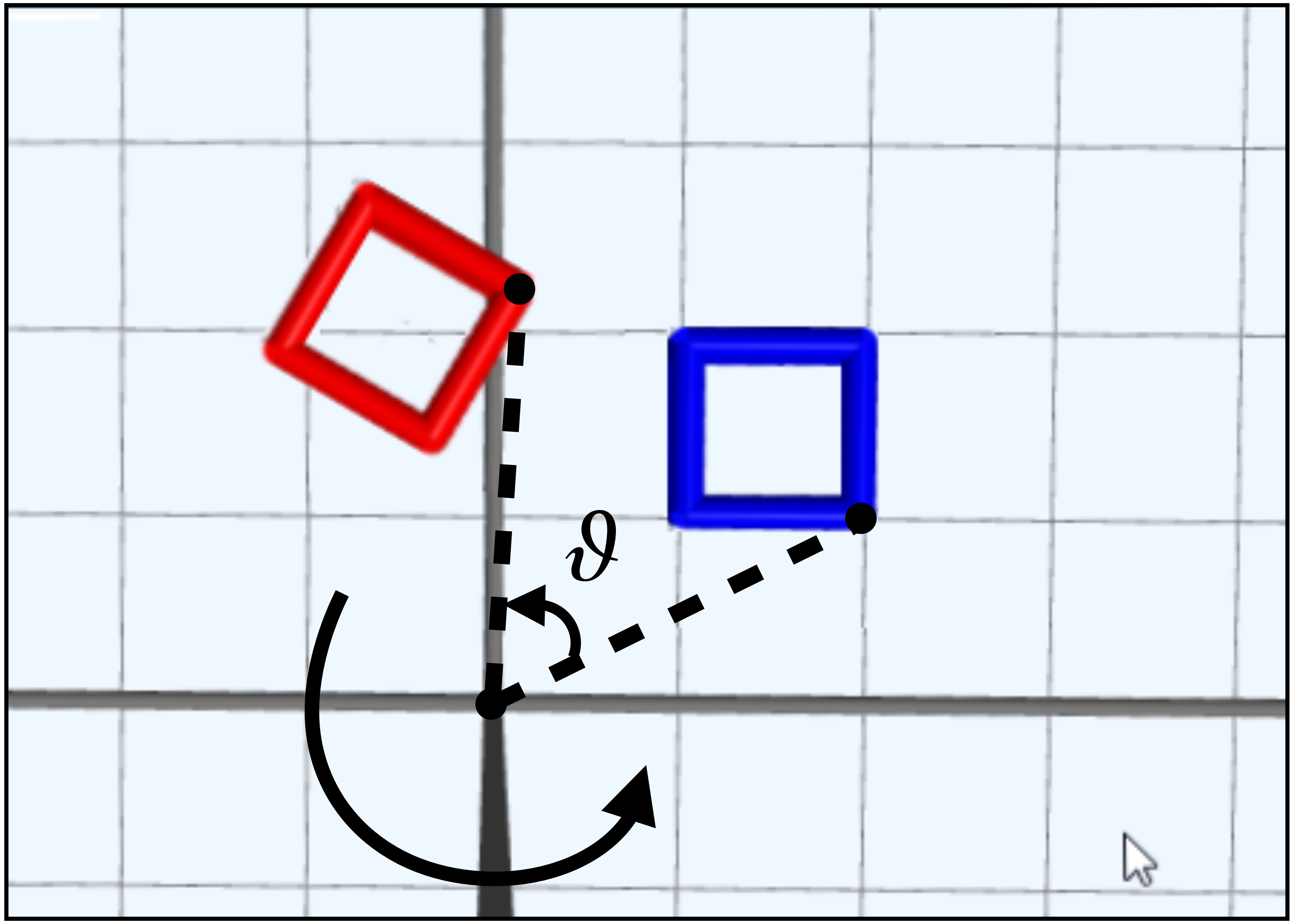
Поворот на угол ϑ относительно оси



Поворот на угол ϑ относительно оси



Поворот на угол ϑ относительно оси

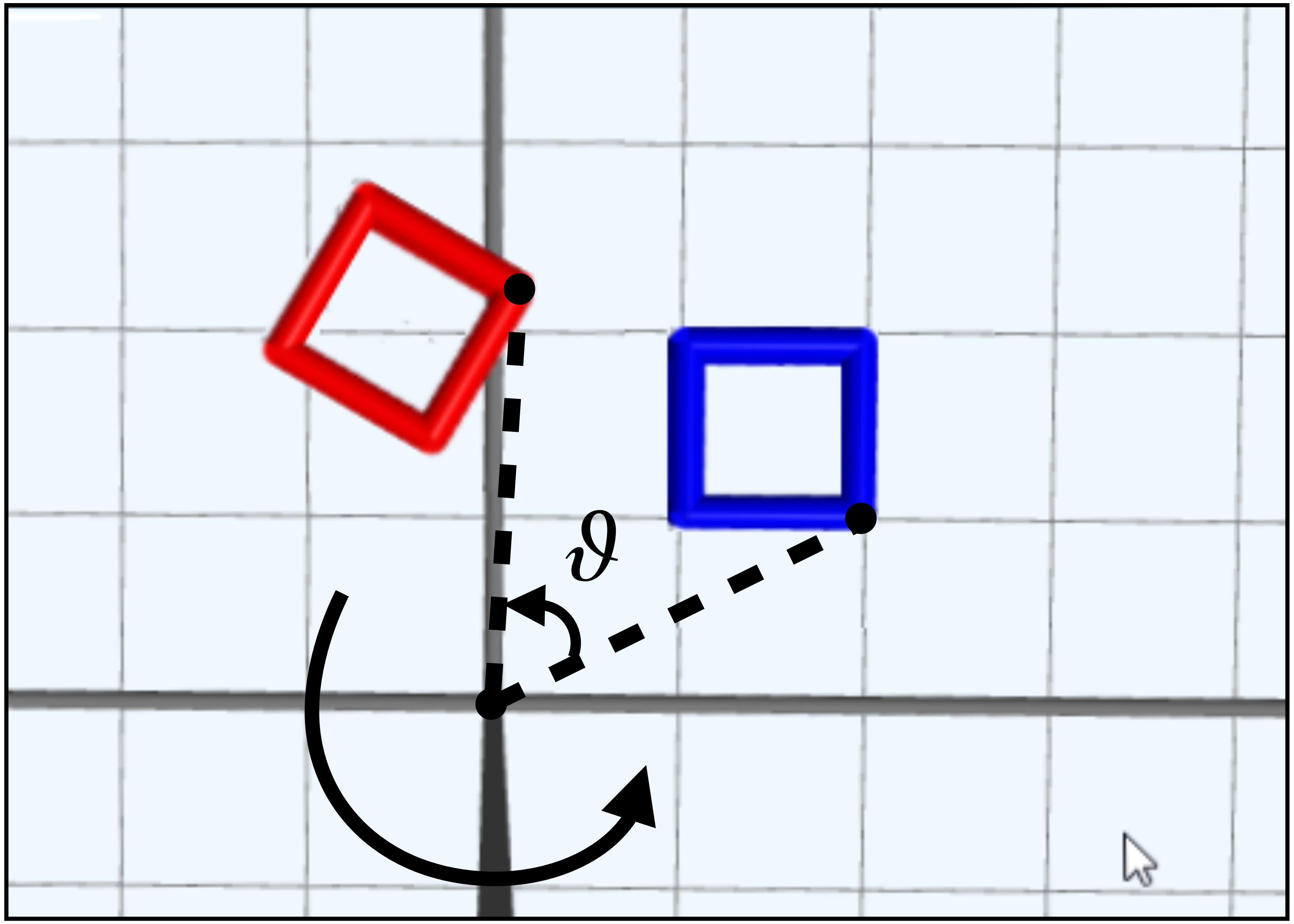


Поворот на угол ϑ относительно оси Oz против часовой стрелки

$$\begin{cases} x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \\ z' = z \end{cases}$$

$$Rotate_z(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно оси



Поворот на угол ϑ относительно оси Ox против часовой стрелки

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\vartheta - z\sin\vartheta \\ z' = y\sin\vartheta + z\cos\vartheta \end{cases}$$

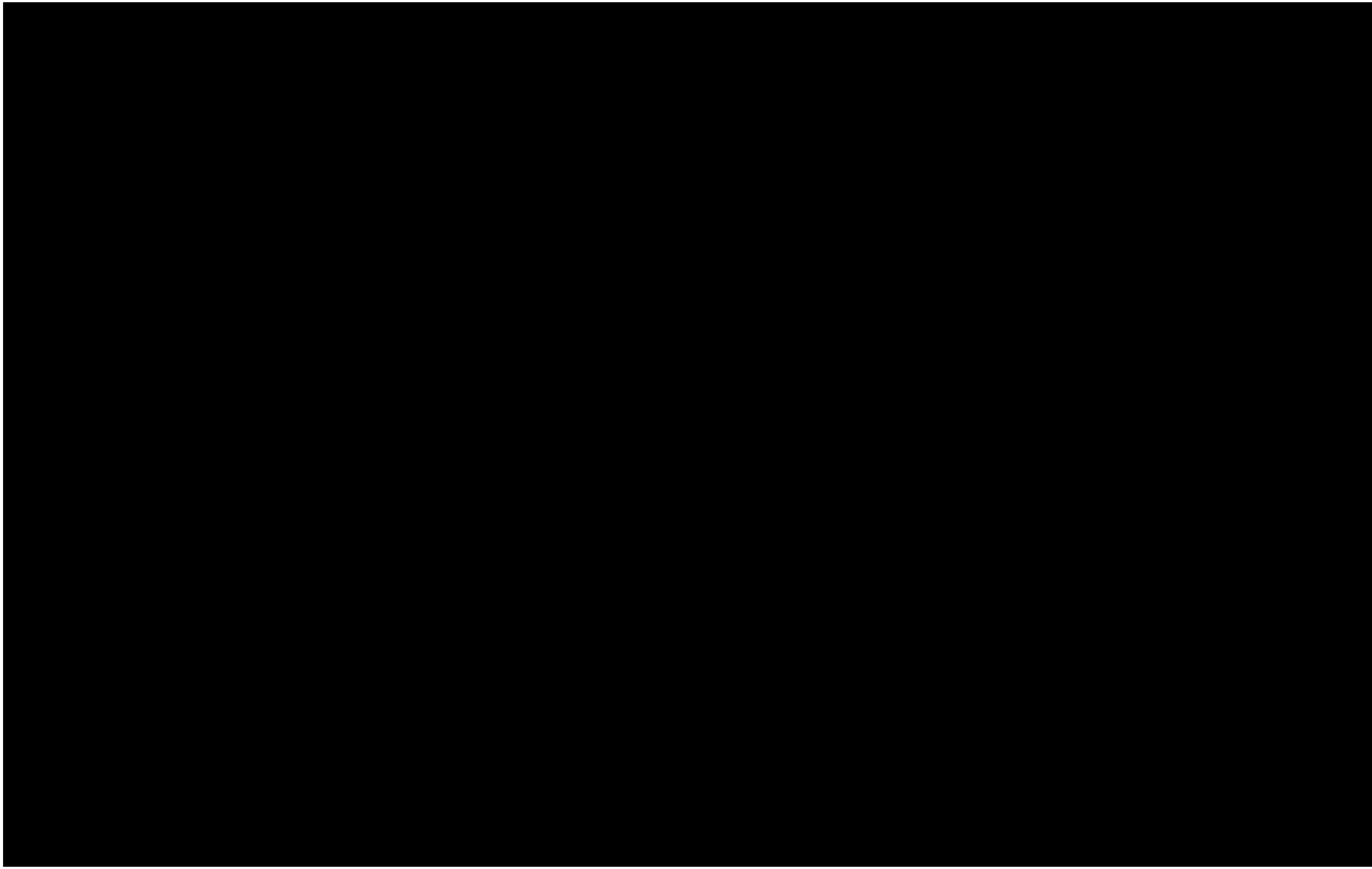
$$Rotate_x(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно оси Oy против часовой стрелки

$$\begin{cases} x' = z\sin\vartheta + x\cos\vartheta \\ y' = y \\ z' = z\cos\vartheta - x\sin\vartheta \end{cases}$$

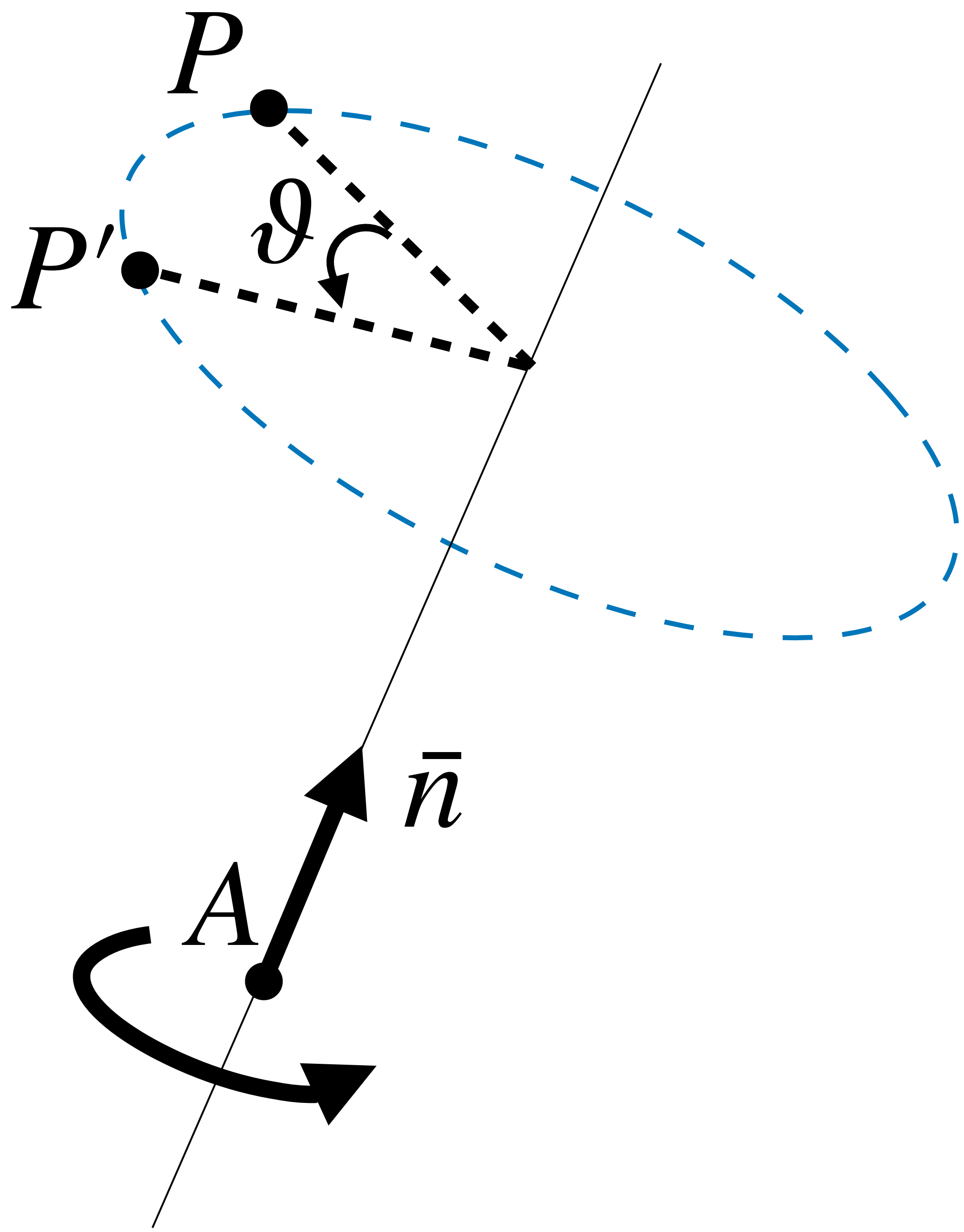
$$Rotate_z(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

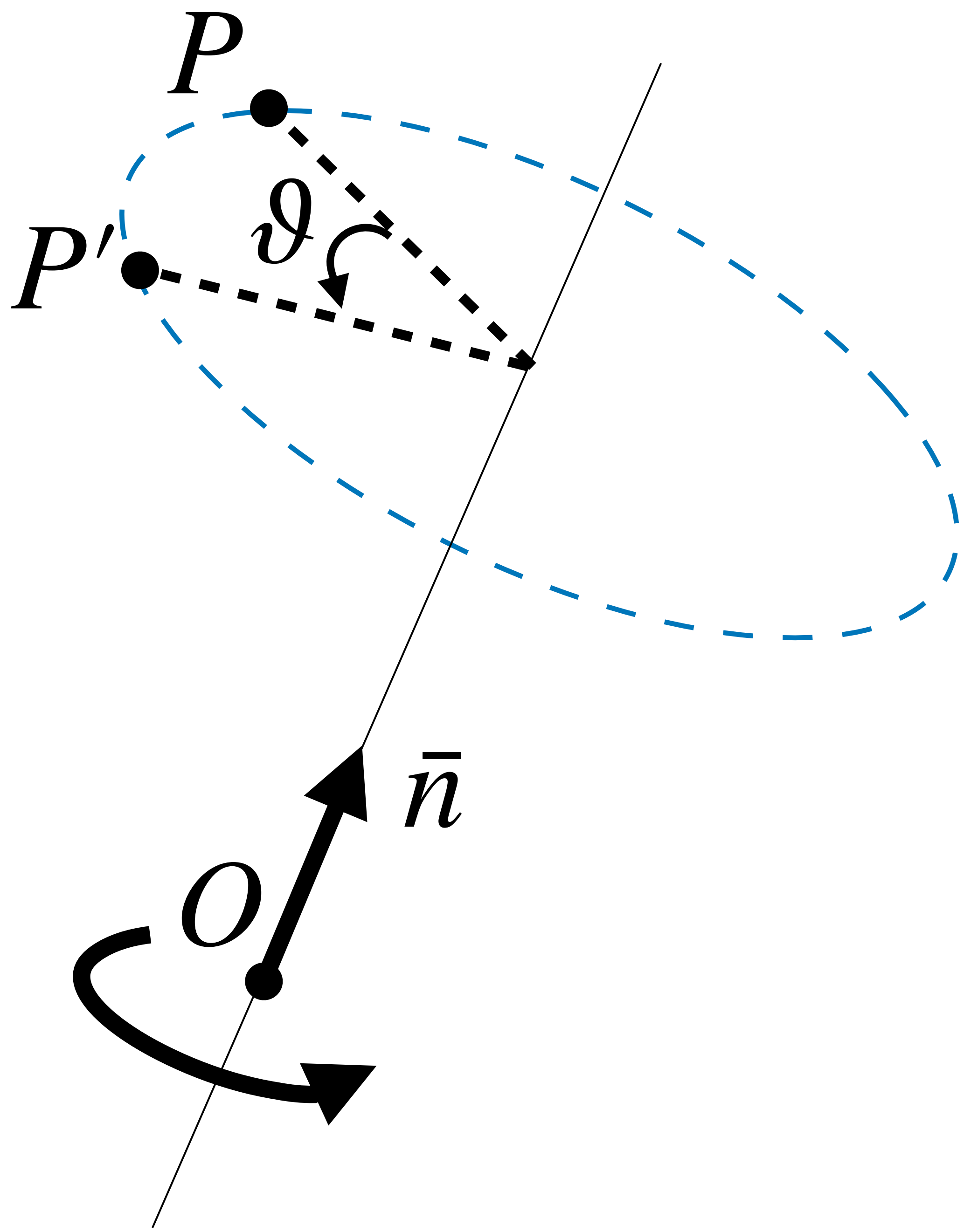


Видео демонстрирует работу программы скрипта примера из книги David J. Eck “Introduction to Computer Graphics”
http://math.hws.edu/graphicsbook/index.html

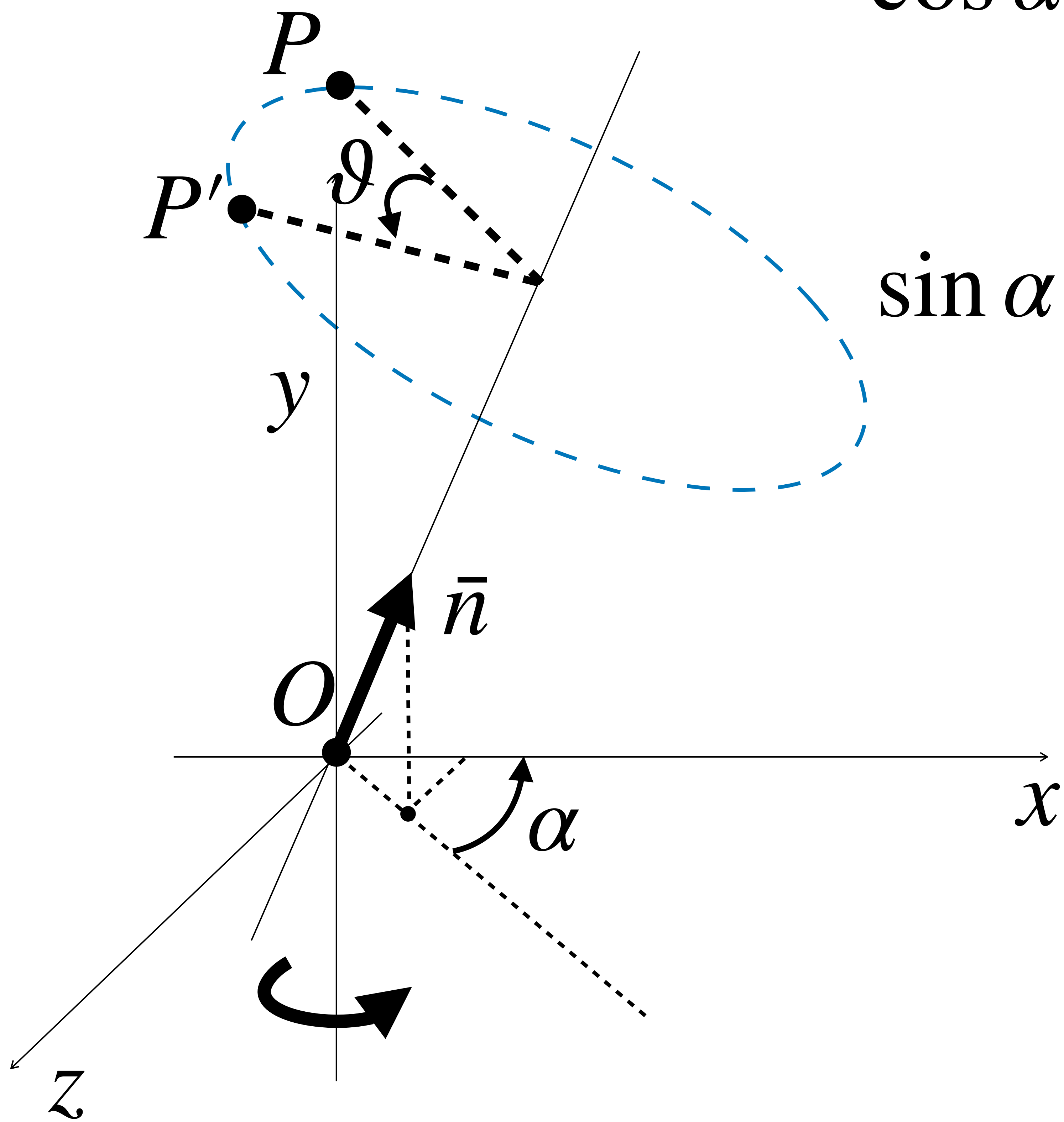
Совмещение преобразований



Совмещение преобразований



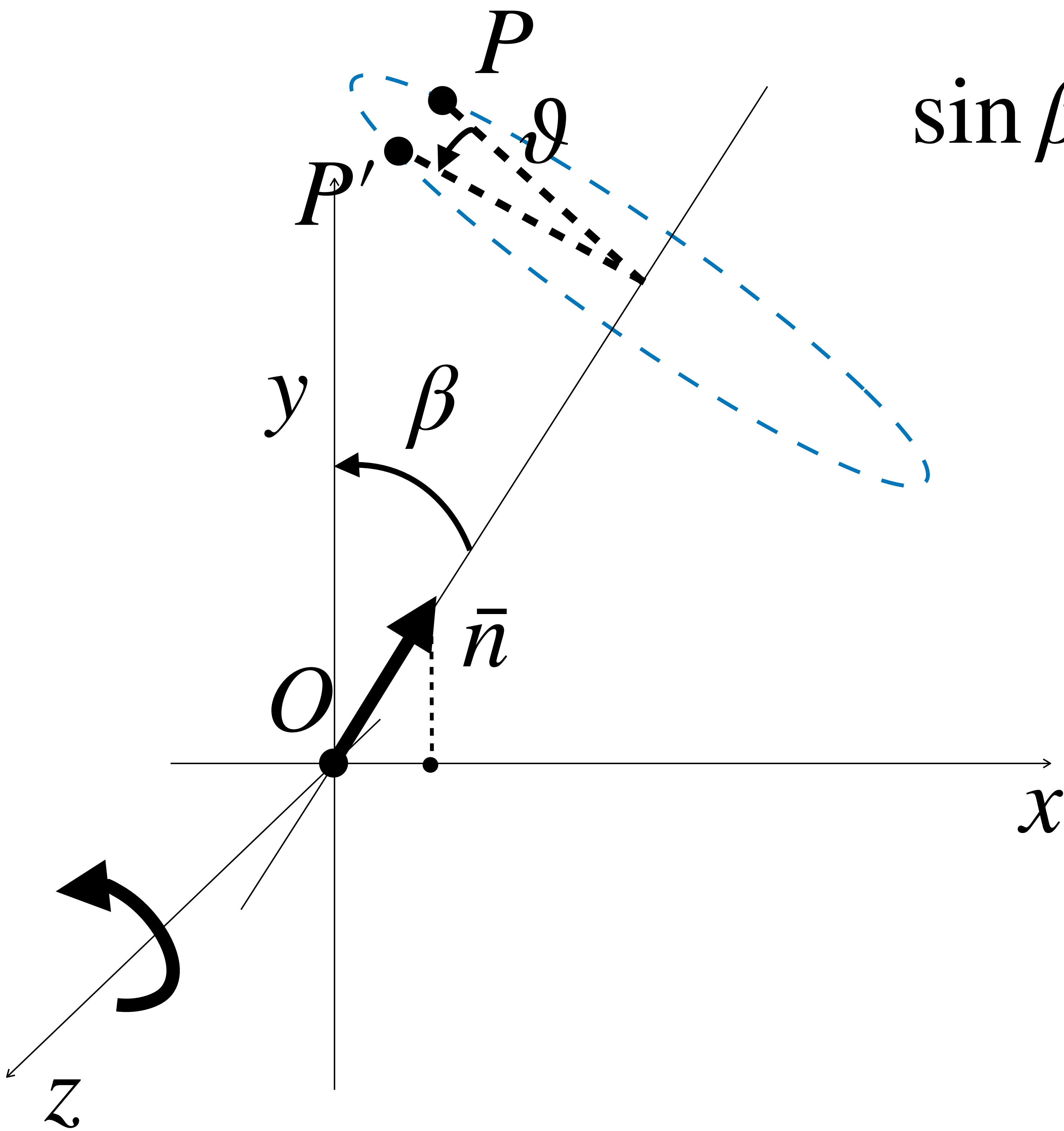
Совмещение преобразований



$$\cos\alpha = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_3^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_3^2}}$$

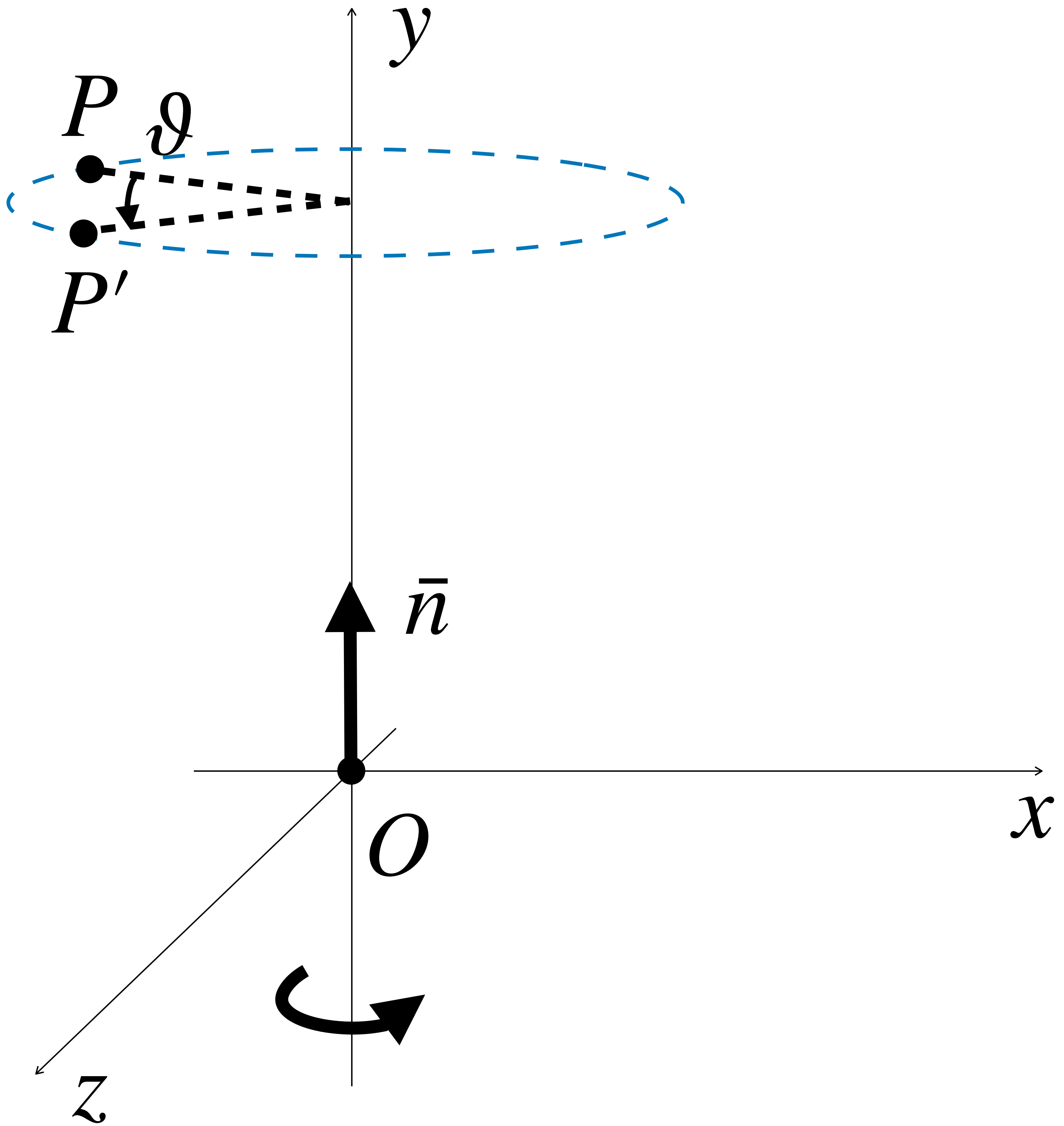
Совмещение преобразований



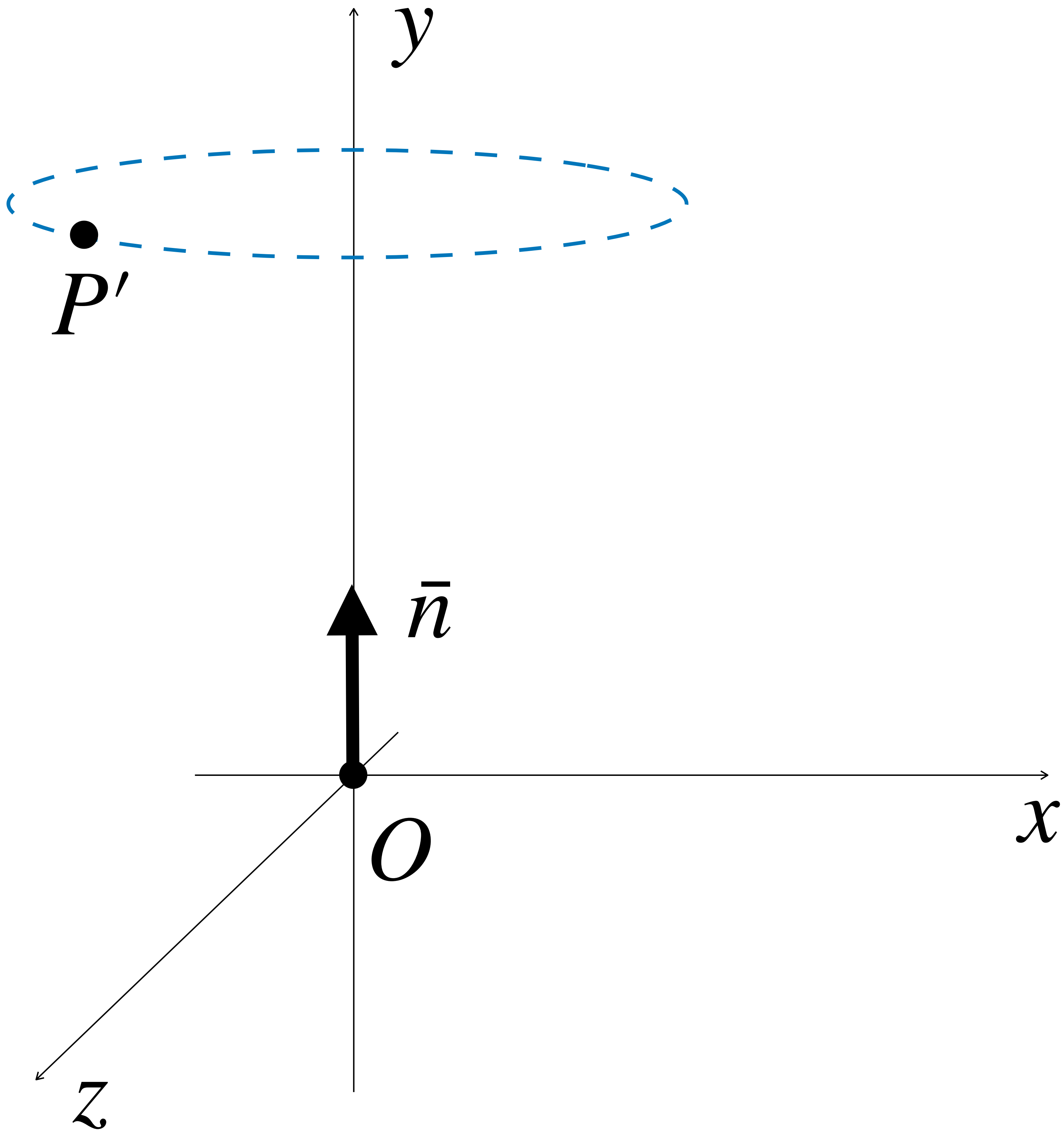
$$\cos\beta = n_2$$

$$\sin\beta = \sqrt{n_1^2 + n_3^2}$$

Совмещение преобразований



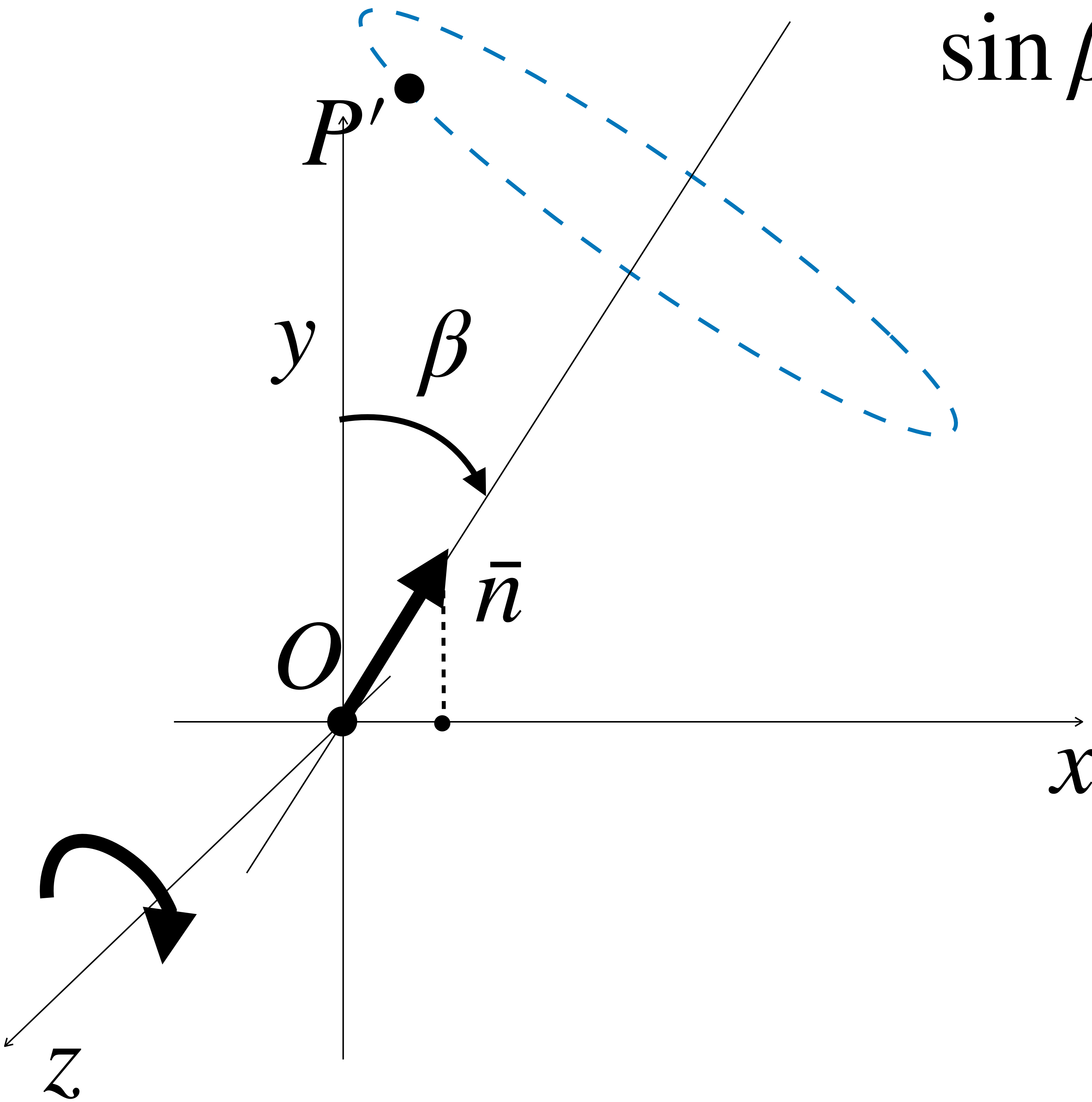
Совмещение преобразований



Совмещение преобразований

$$\cos\beta = n_2$$

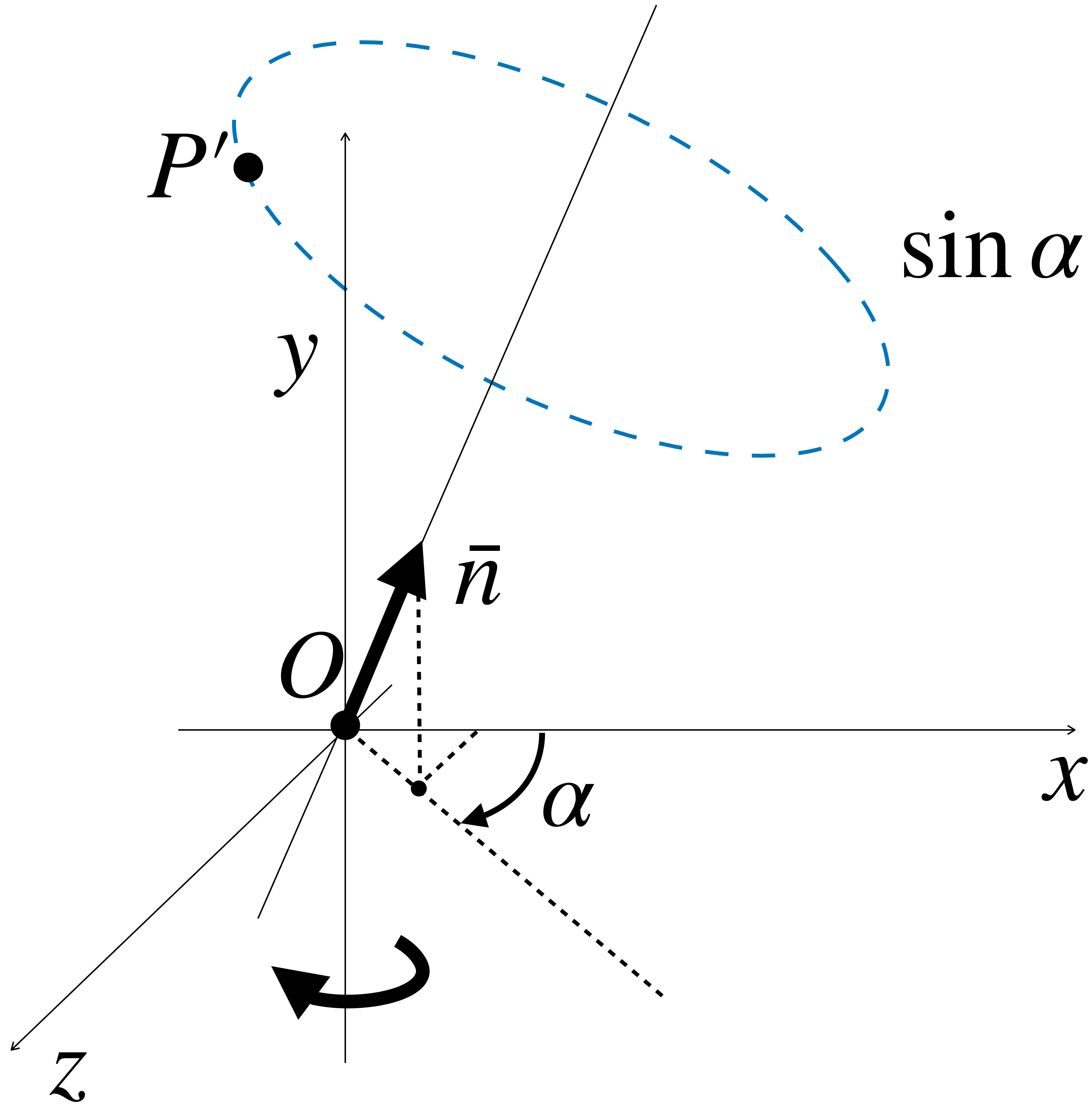
$$\sin\beta = \sqrt{n_1^2 + n_3^2}$$



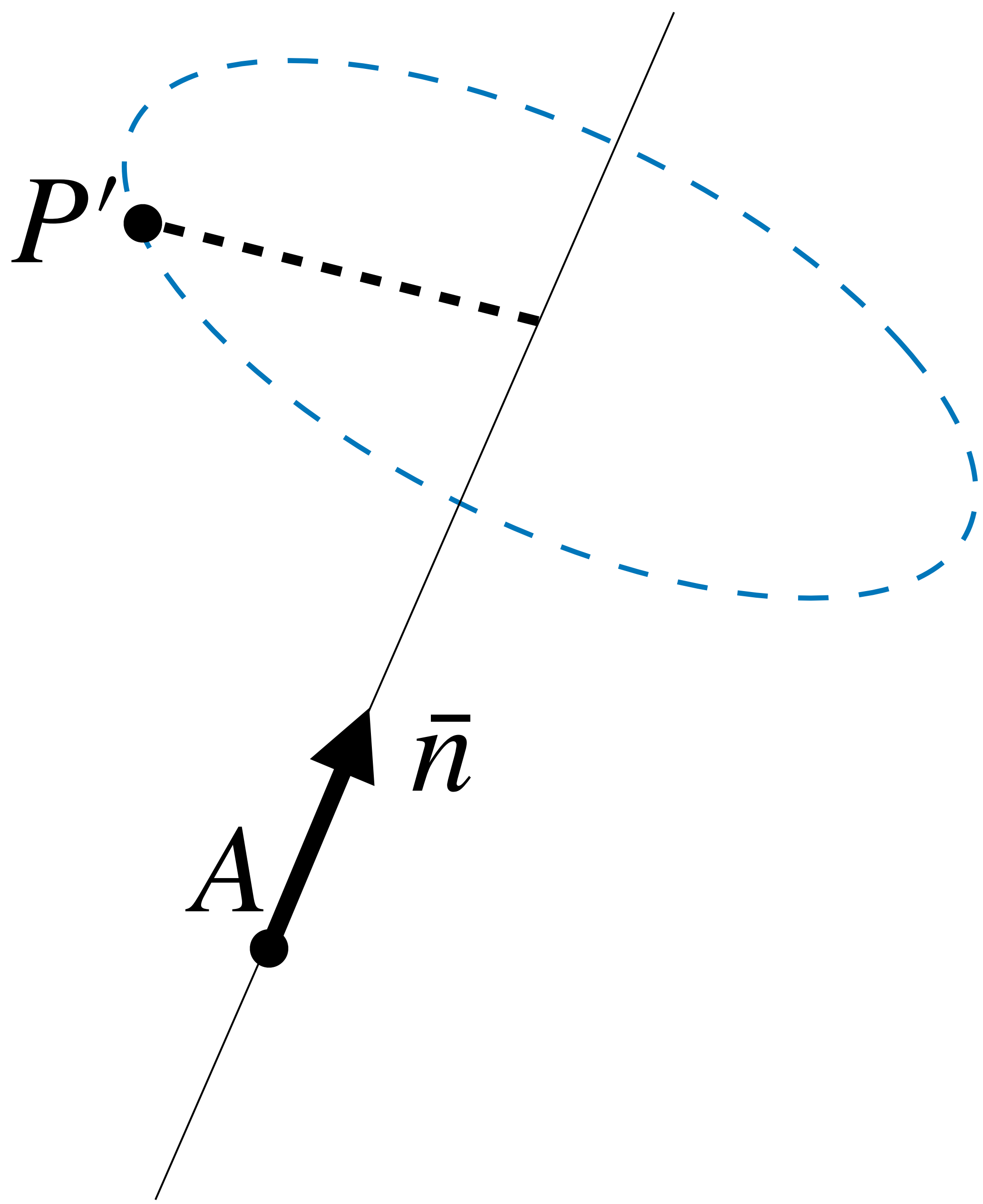
Совмещение преобразований

$$\cos\alpha = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_3^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_3^2}}$$



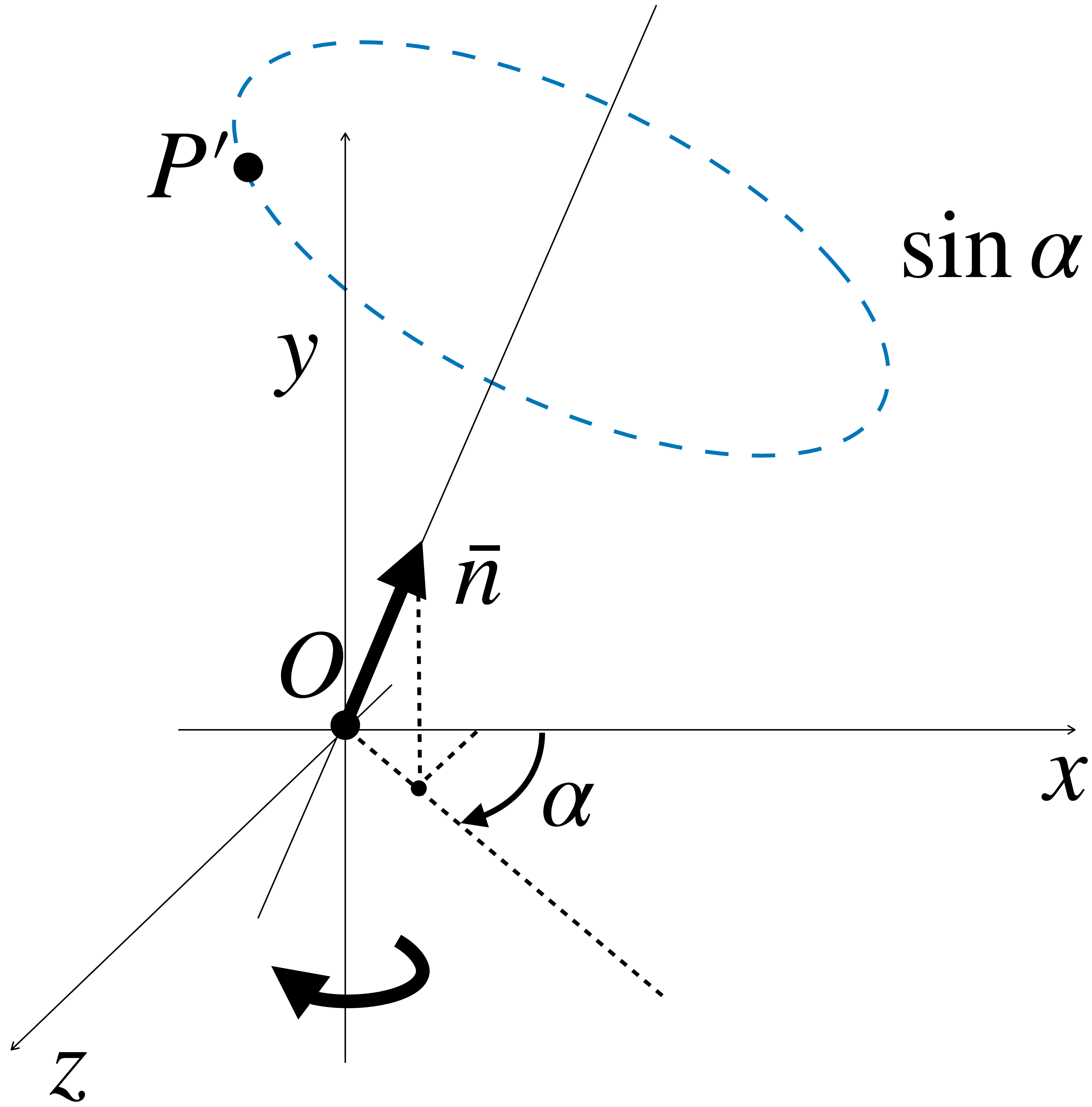
Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



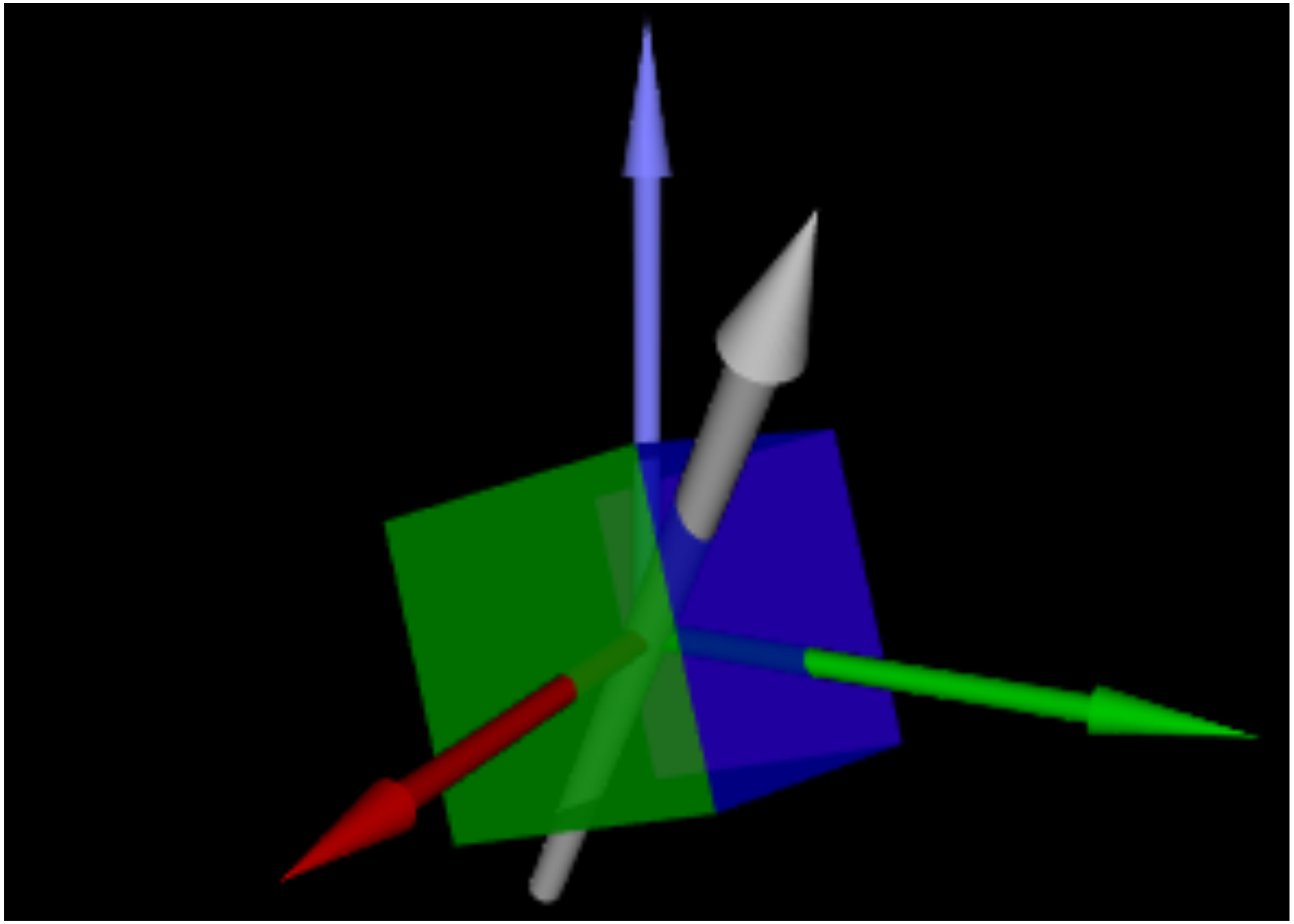
Совмещение преобразований

$$\cos\alpha = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_3^2}}$$

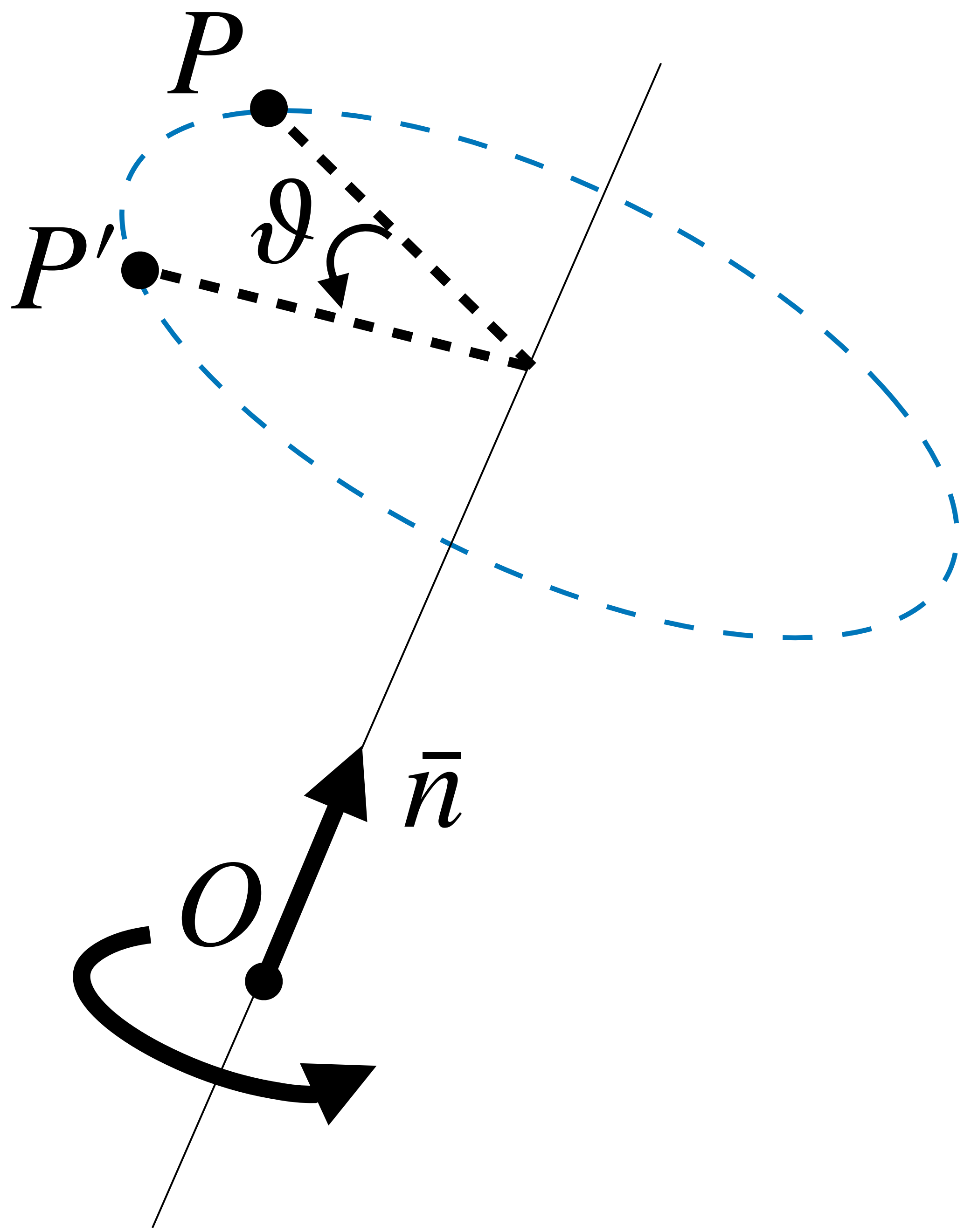
$$\sin\alpha = \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_3^2}}$$



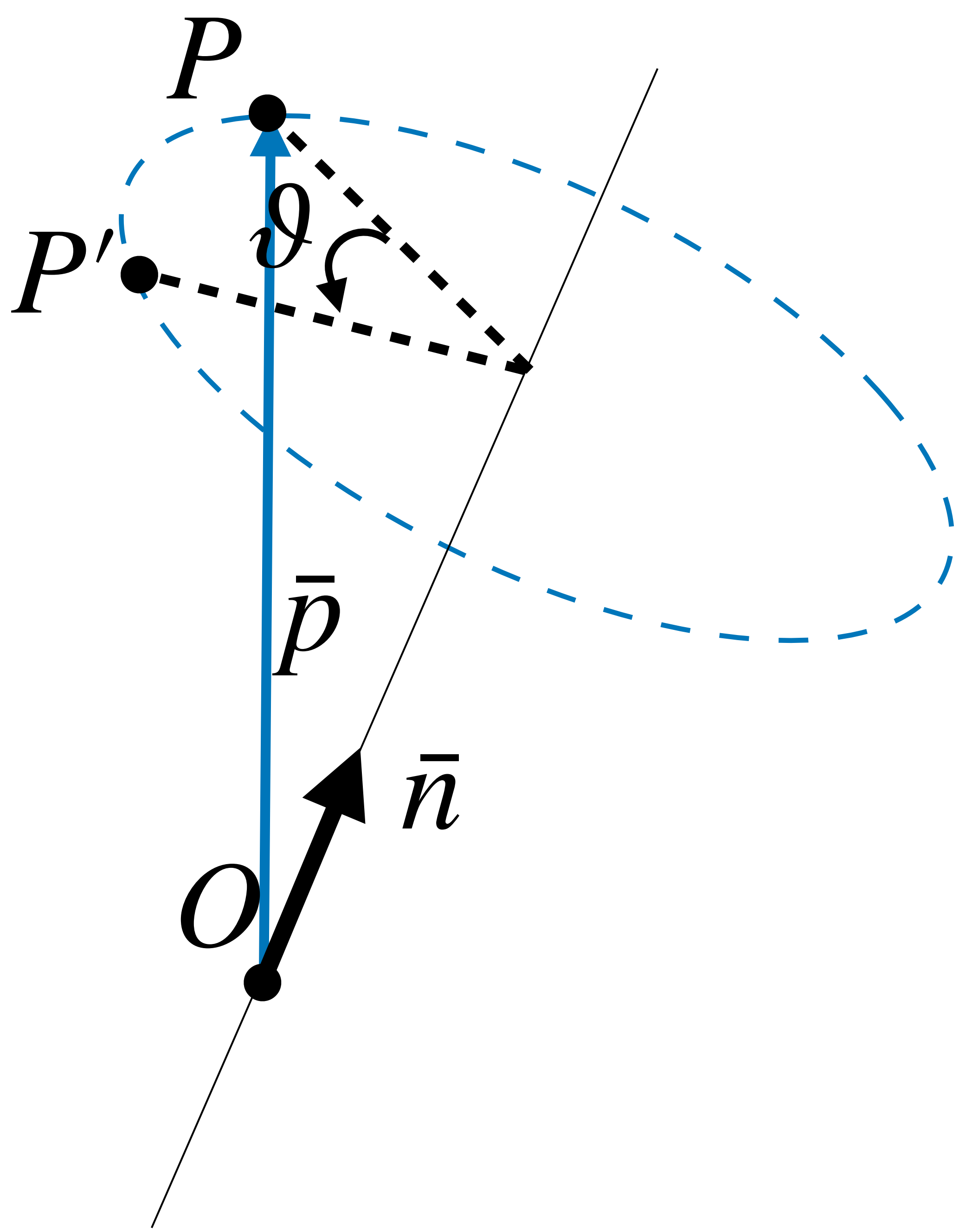
Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



Совмещение преобразований

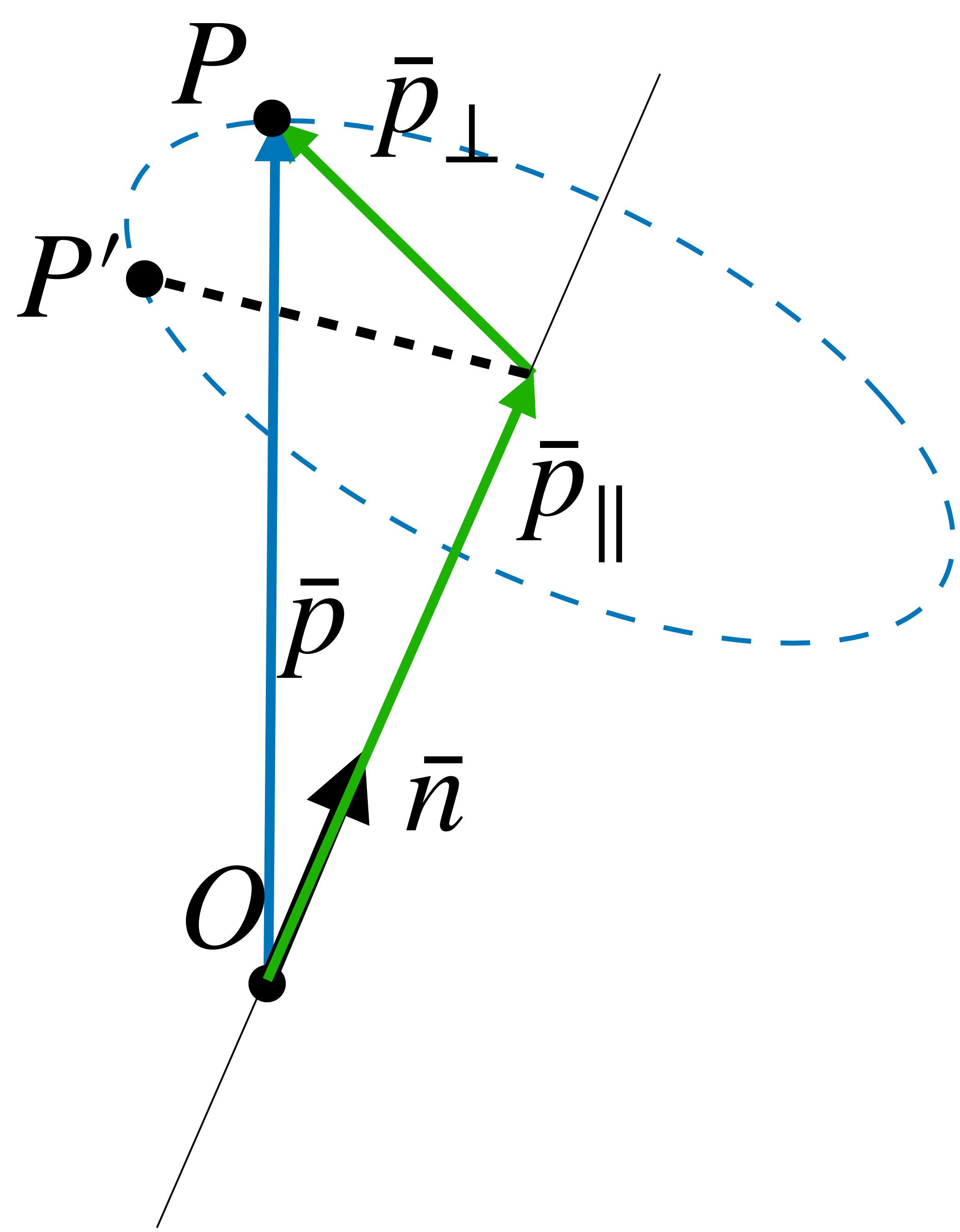


Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



$$|\bar{n}| = 1$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



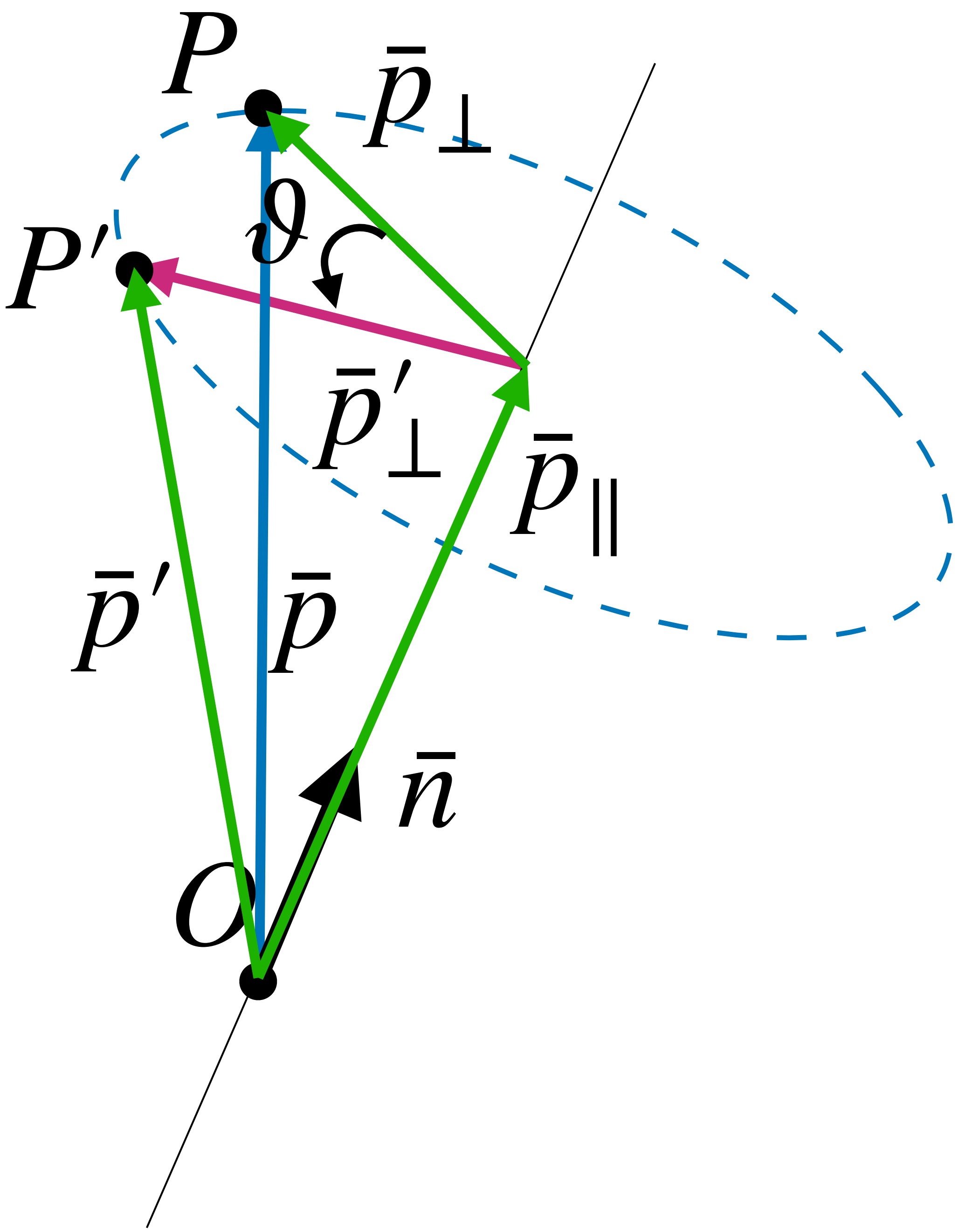
$$|\bar{n}| = 1$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\parallel + \bar{p}_\perp$$

$$\bar{p}_\parallel = (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n}$$

$$\bar{p}_\perp = \bar{p} - \bar{p}_\parallel$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



$$|\bar{n}| = 1$$

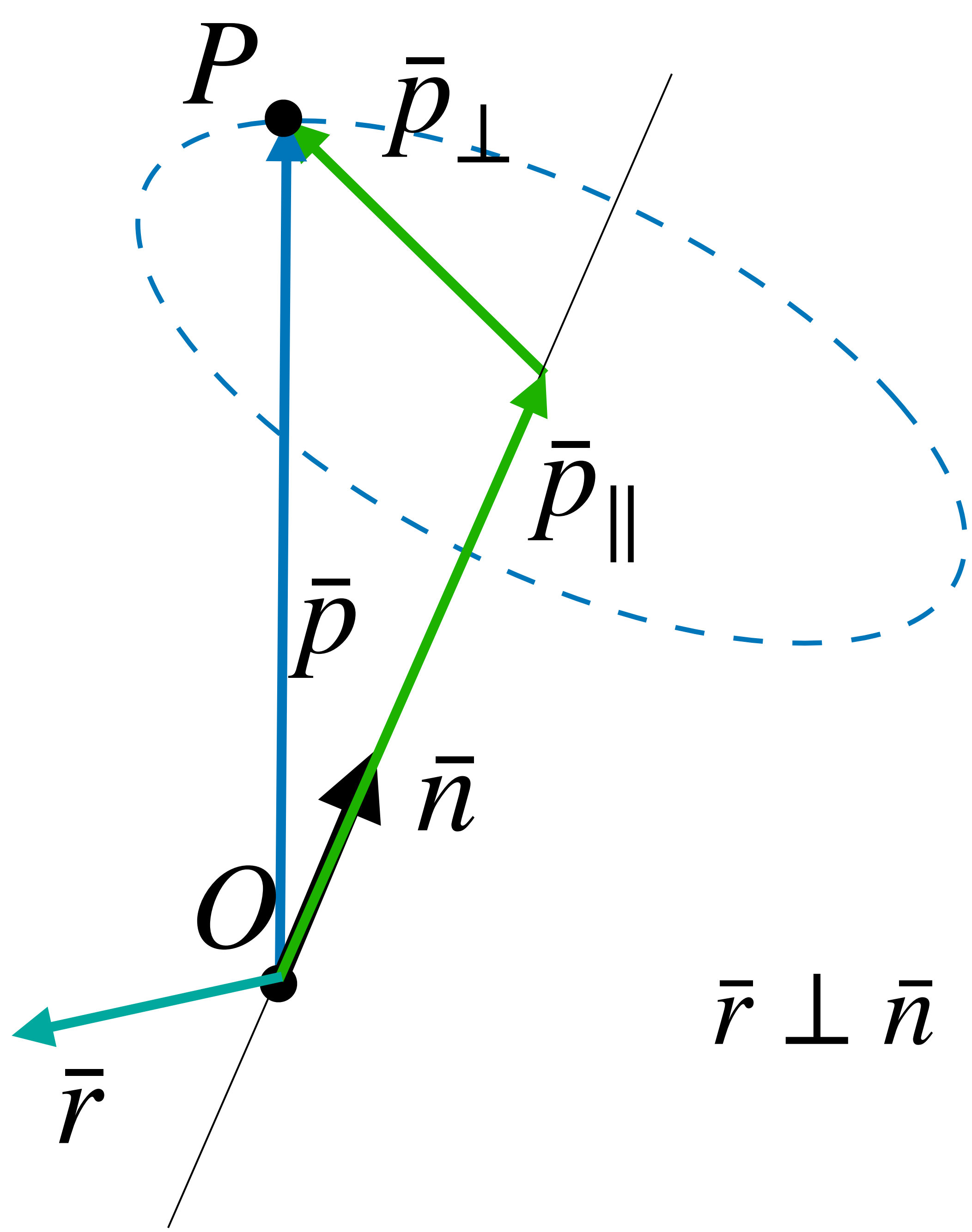
$$\bar{p} = \bar{p}_\parallel + \bar{p}_\perp$$

$$\bar{p}_\parallel = (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n}$$

$$\bar{p}_\perp = \bar{p} - \bar{p}_\parallel$$

$$\bar{p}' = \bar{p}_\parallel + \bar{p}'_\perp$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



$$|\bar{n}| = 1$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\parallel + \bar{p}_\perp$$

$$\bar{p}_\parallel = (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n}$$

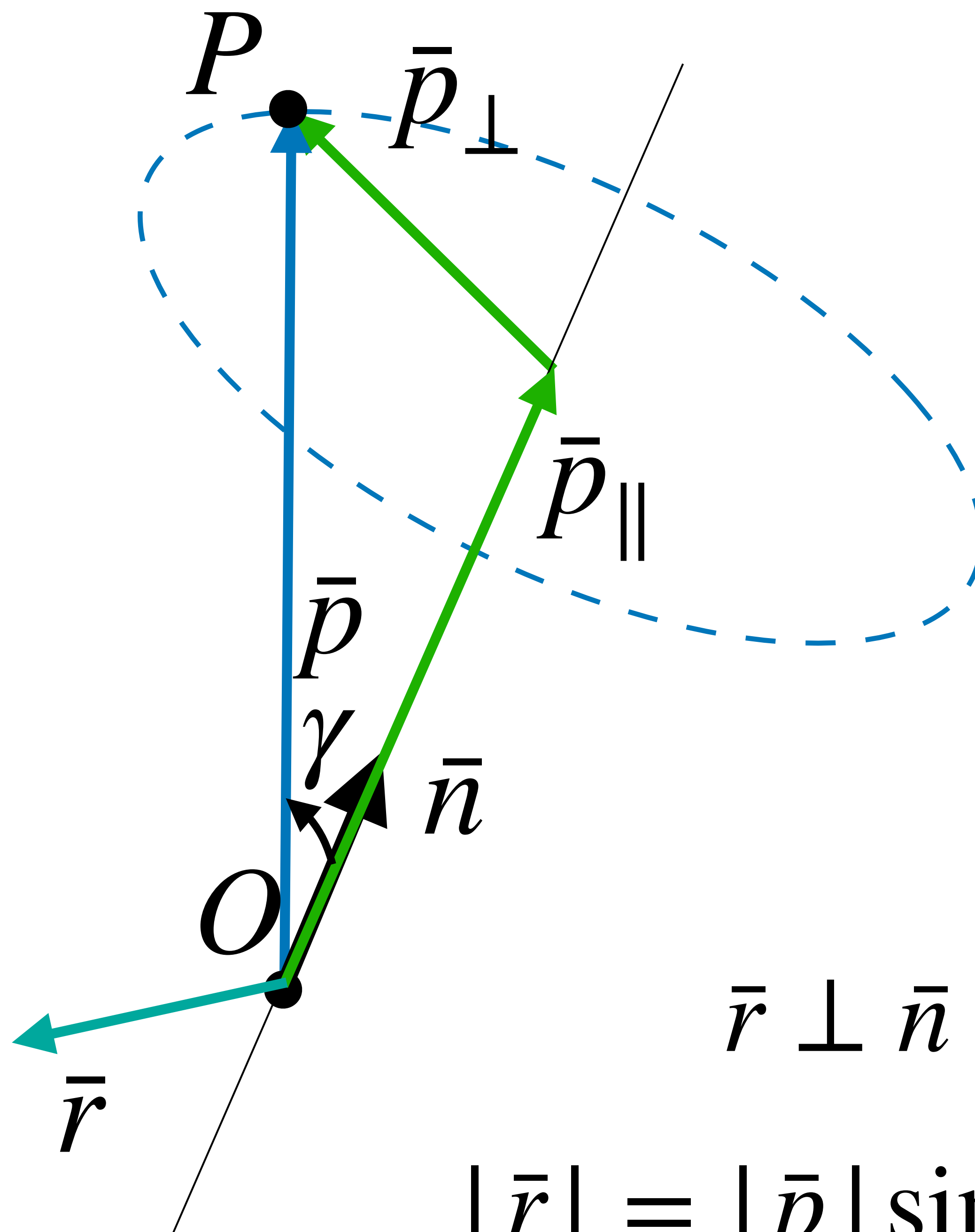
$$\bar{p}_\perp = \bar{p} - \bar{p}_\parallel$$

$$\bar{p}' = \bar{p}_\parallel + \bar{p}'_\perp$$

$$\bar{r} = \bar{n} \times \bar{p}$$

$$\bar{r} \perp \bar{n} \quad \bar{r} \perp \bar{p} \quad \bar{r} \perp \bar{p}_\perp$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



$$|\bar{n}| = 1$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\parallel + \bar{p}_\perp$$

$$\bar{p}_\parallel = (\bar{p}\cdot\bar{n})\bar{n}$$

$$\bar{p}_\perp = \bar{p} - \bar{p}_\parallel$$

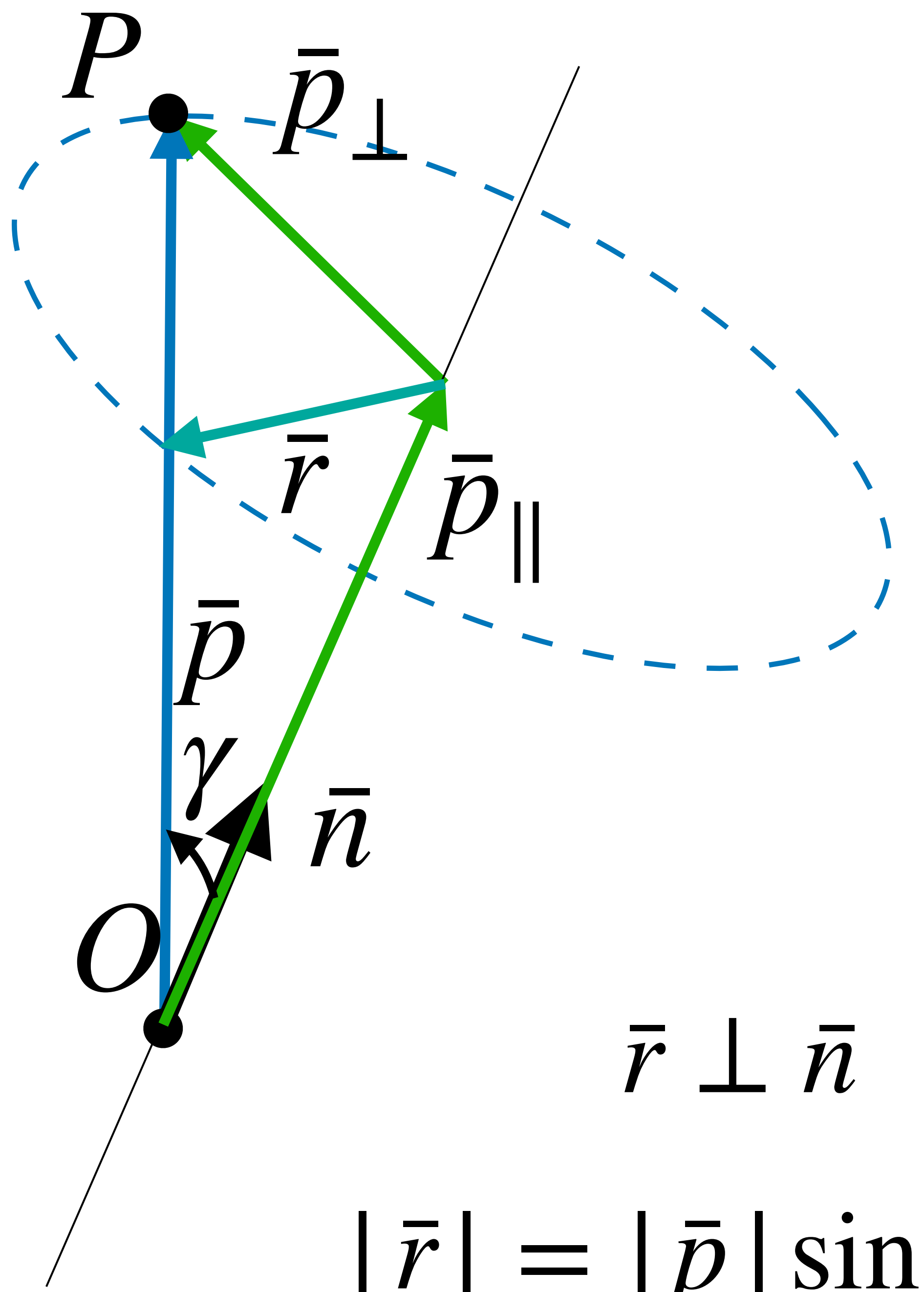
$$\bar{p}' = \bar{p}_\parallel + \bar{p}'_\perp$$

$$\bar{r} = \bar{n}\times\bar{p}$$

$$\bar{r}\perp\bar{n} \qquad \bar{r}\perp\bar{p} \qquad \bar{r}\perp\bar{p}_\perp$$

$$|\bar{r}| = |\bar{p}|\sin\gamma \qquad |\bar{p}_\perp| = |\bar{p}|\sin\gamma$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



$$|\bar{n}| = 1$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\parallel + \bar{p}_\perp$$

$$\bar{p}_\parallel = (\bar{p}\cdot\bar{n})\bar{n}$$

$$\bar{p}_\perp = \bar{p} - \bar{p}_\parallel$$

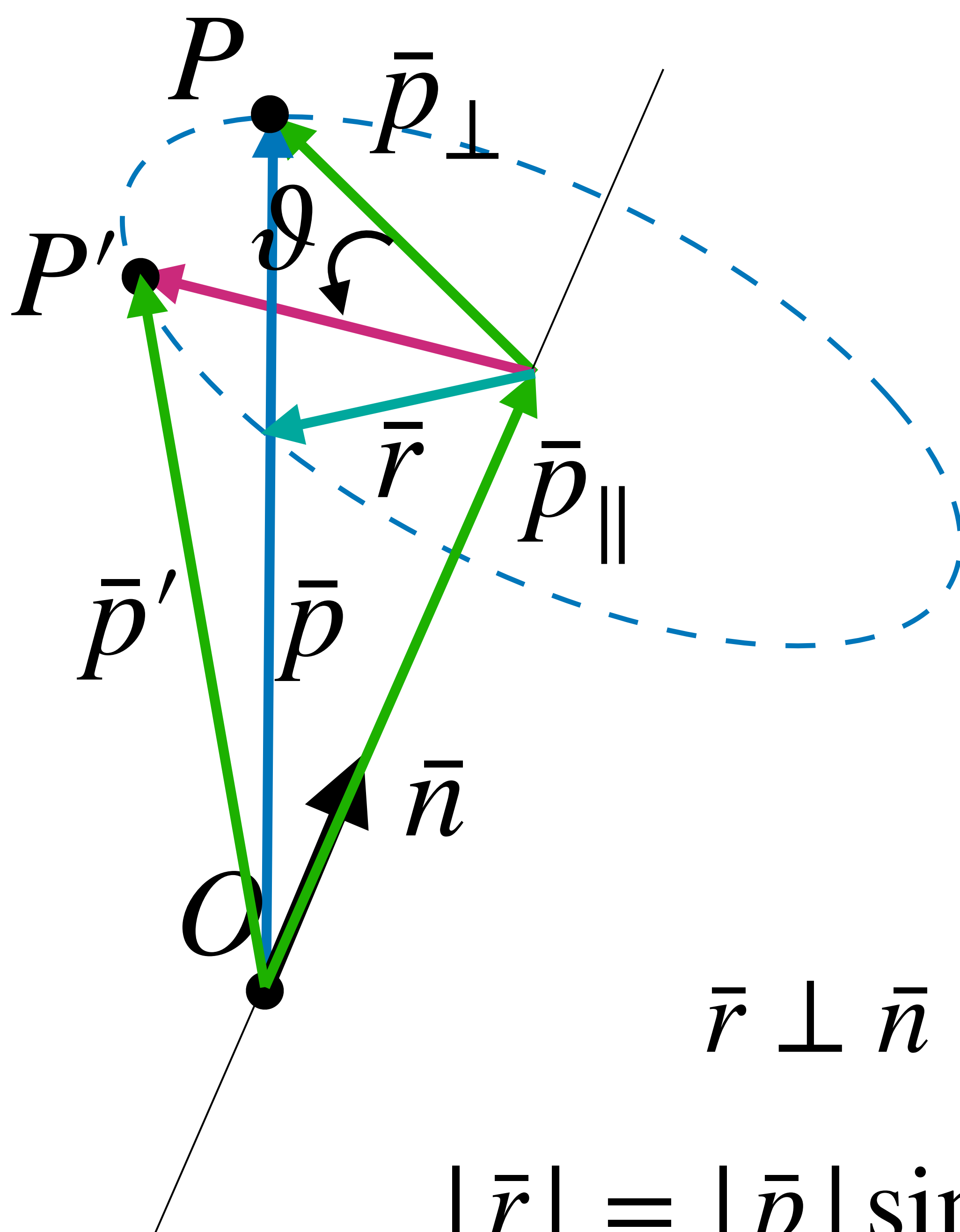
$$\bar{p}' = \bar{p}_\parallel + \bar{p}'_\perp$$

$$\bar{r} = \bar{n}\times\bar{p}$$

$$\bar{r}\perp\bar{n} \qquad \bar{r}\perp\bar{p} \qquad \bar{r}\perp\bar{p}_\perp$$

$$|\bar{r}| = |\bar{p}|\sin\gamma \qquad |\bar{p}_\perp| = |\bar{p}|\sin\gamma$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



$$|\bar{n}| = 1$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\parallel + \bar{p}_\perp$$

$$\bar{p}_\parallel = (\bar{p}\cdot\bar{n})\bar{n}$$

$$\bar{p}_\perp = \bar{p} - \bar{p}_\parallel$$

$$\bar{p}' = \bar{p}_\parallel + \bar{p}'_\perp$$

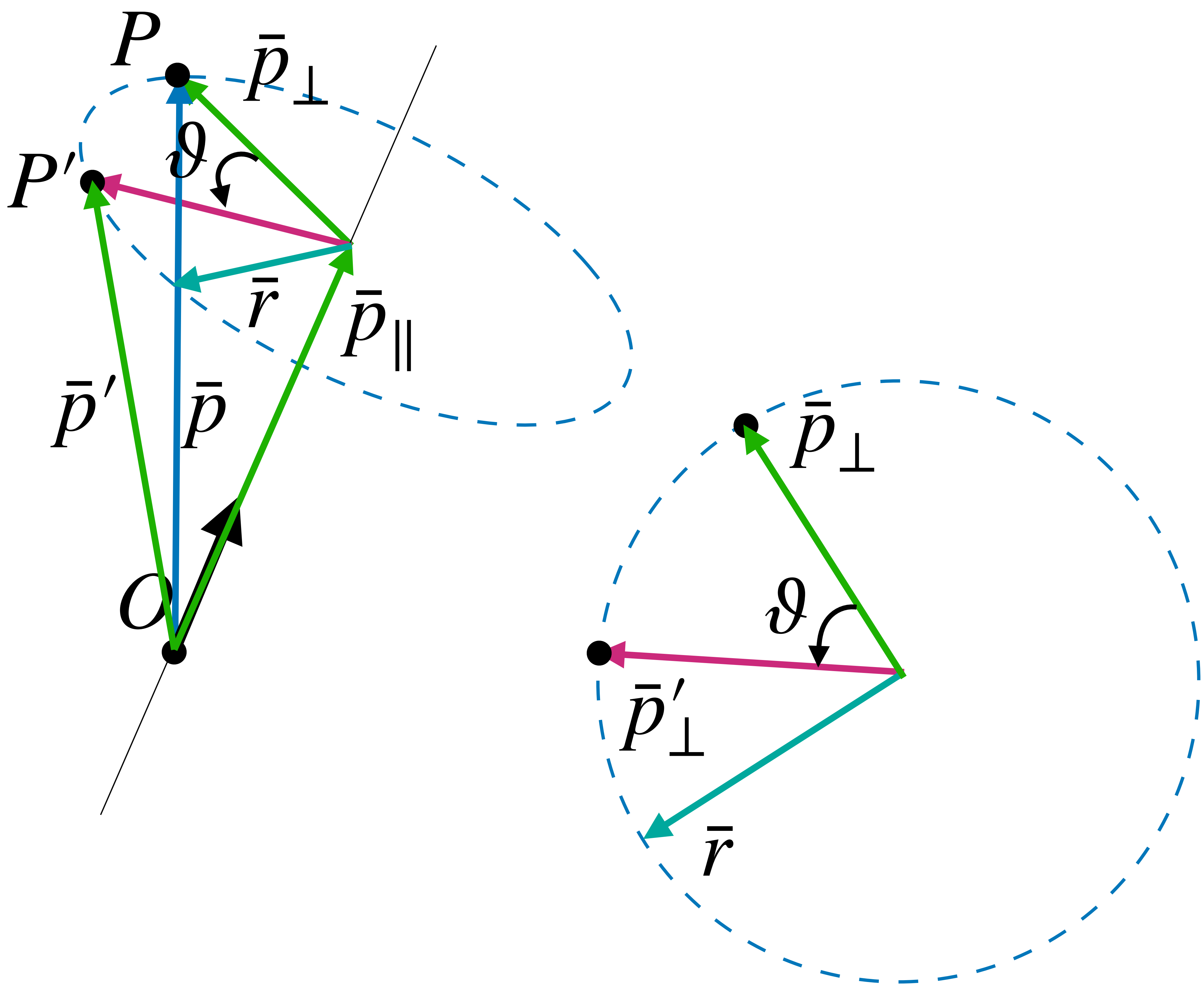
$$\bar{r} = \bar{n}\times\bar{p}$$

$$\bar{r}\perp\bar{n} \qquad \bar{r}\perp\bar{p} \qquad \bar{r}\perp\bar{p}_\perp$$

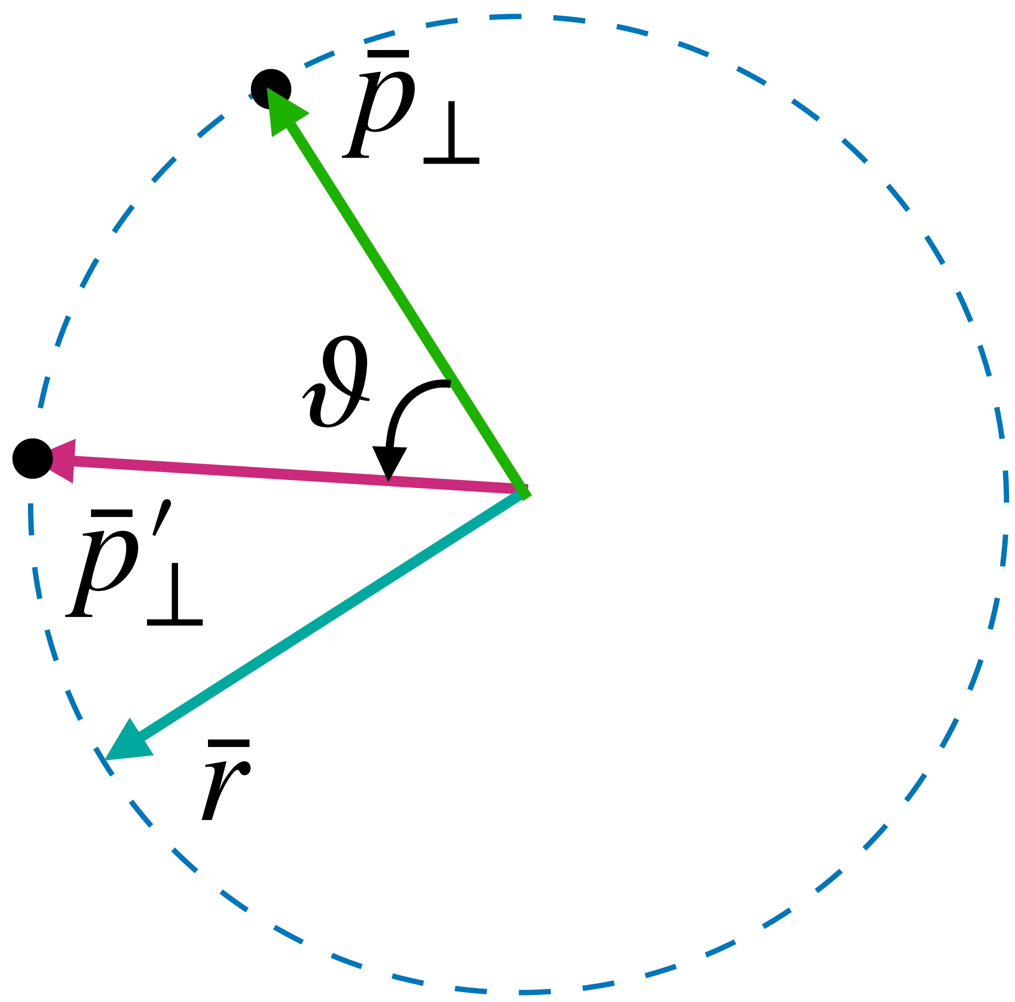
$$|\bar{r}| = |\bar{p}|\sin\gamma \qquad |\bar{p}_\perp| = |\bar{p}|\sin\gamma$$

$$|\bar{p}_\perp| = |\bar{p}'_\perp|$$

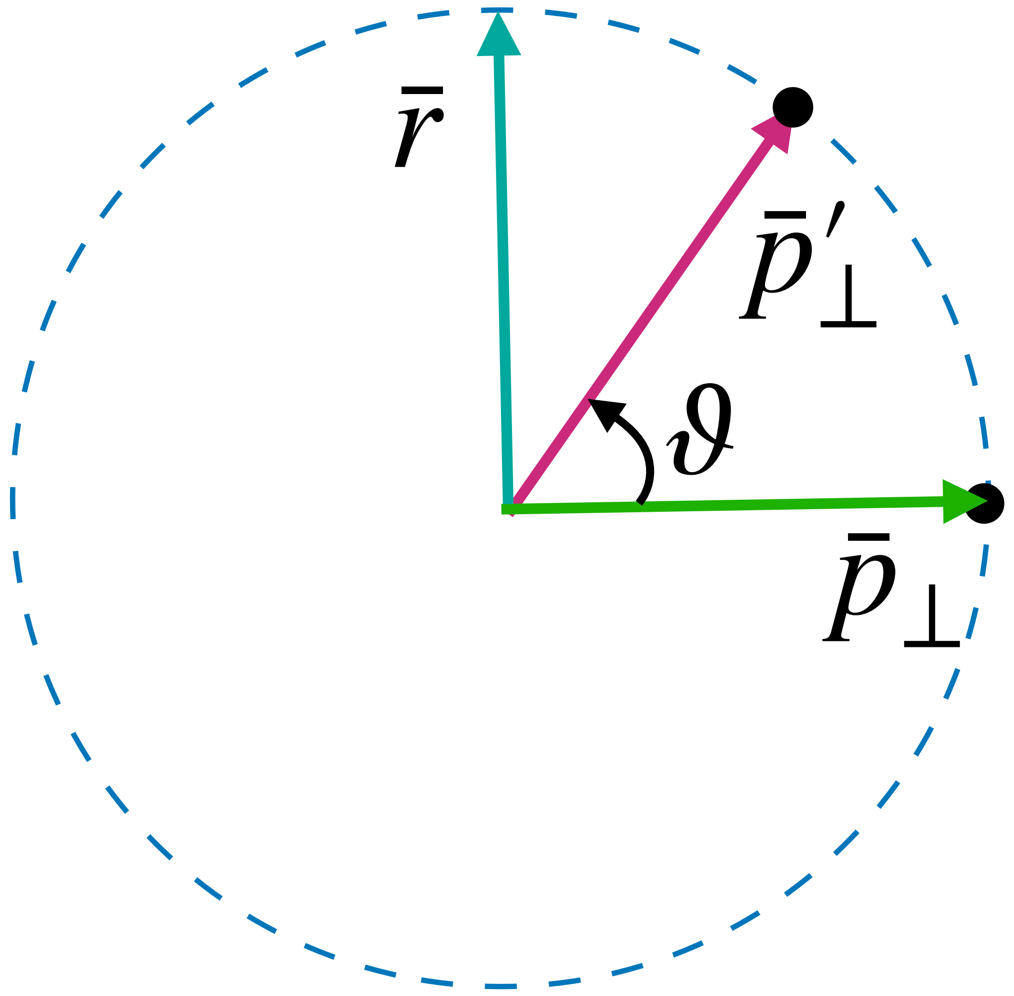
Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



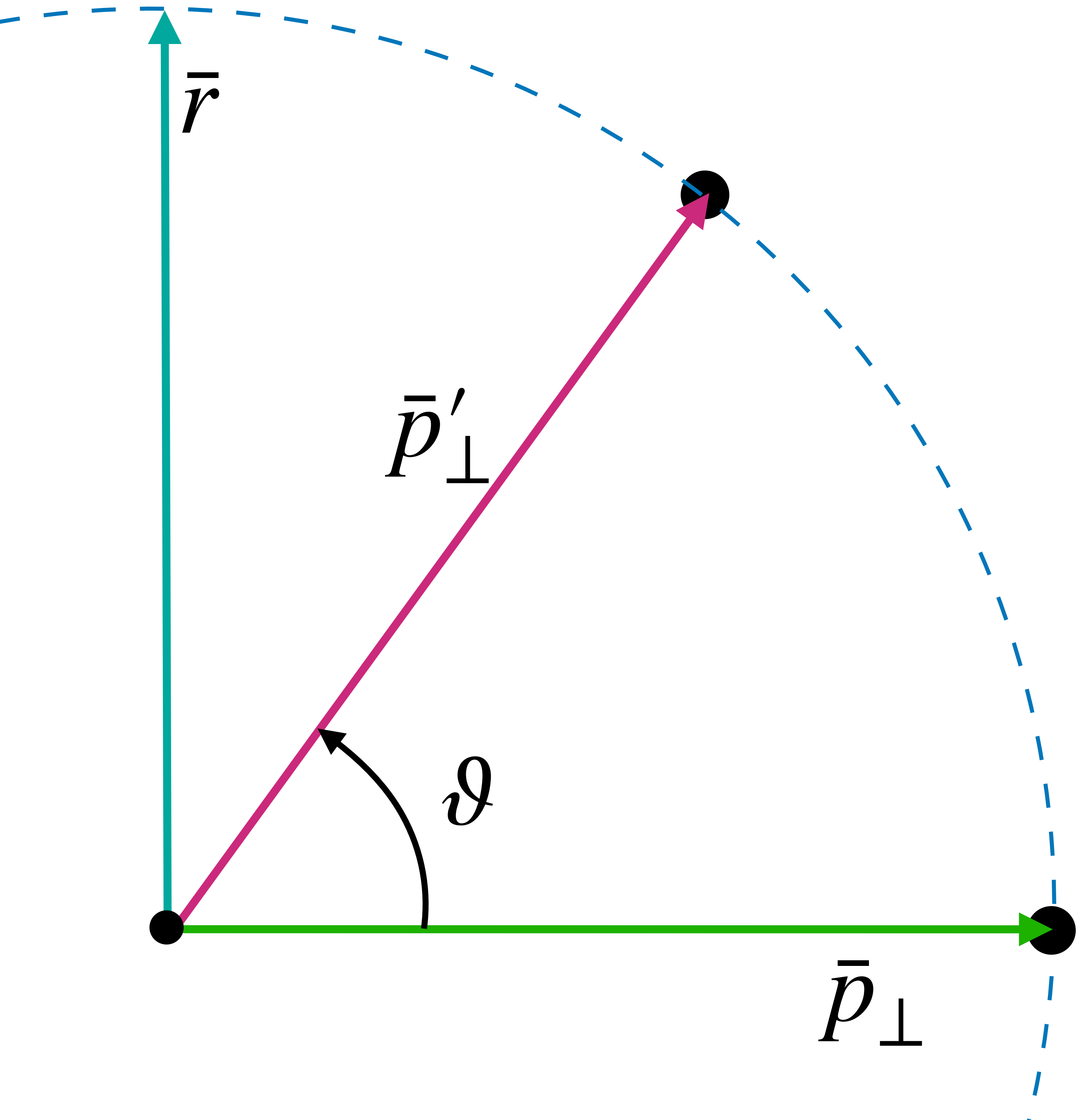
Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



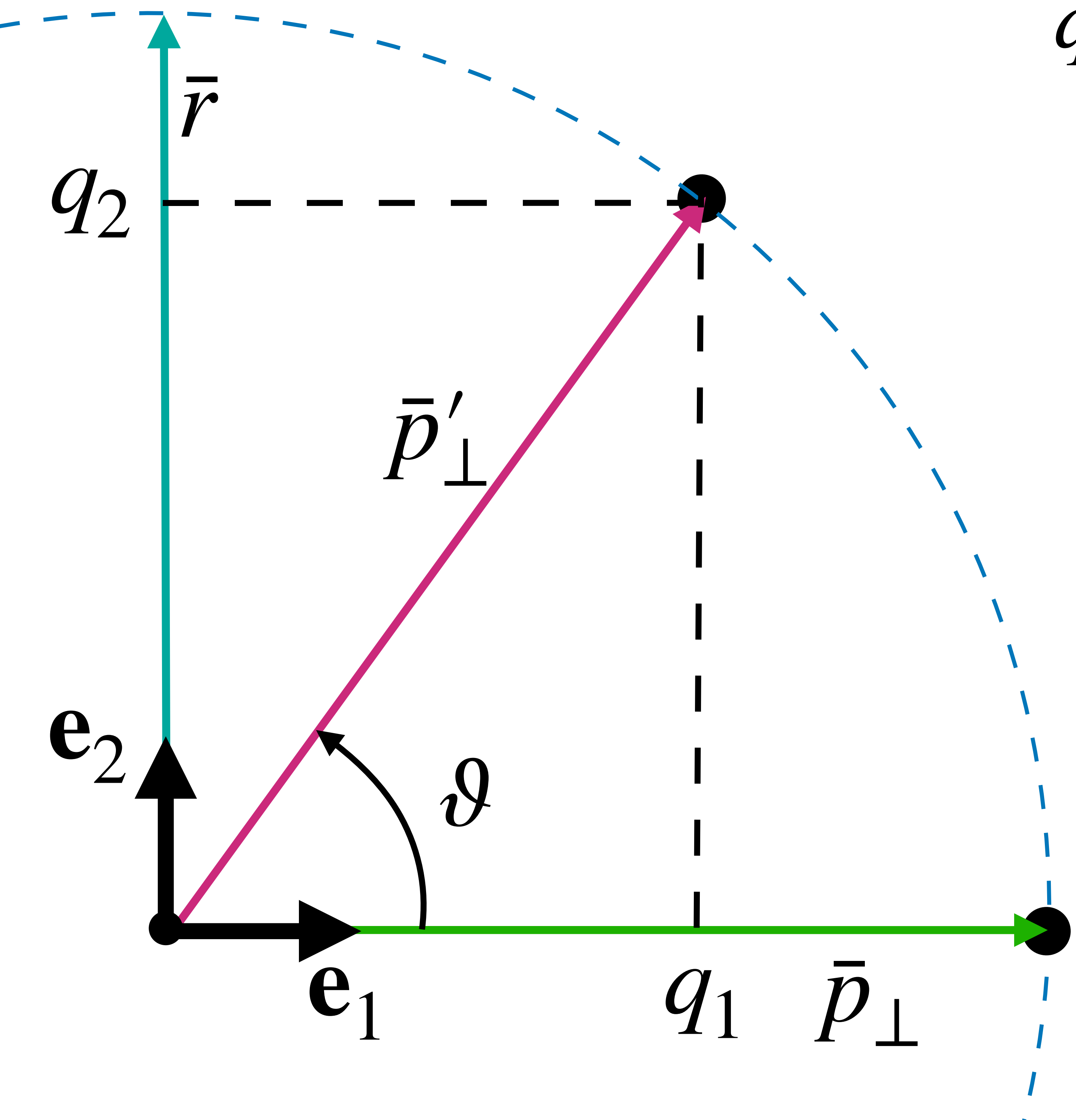
Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$q_1 = \bar{p}'_{\perp} \cdot \mathbf{e}_1 = |\bar{p}'_{\perp}| \cos\vartheta$$

$$q_2 = \bar{p}'_{\perp} \cdot \mathbf{e}_2 = |\bar{p}'_{\perp}| \sin\vartheta$$

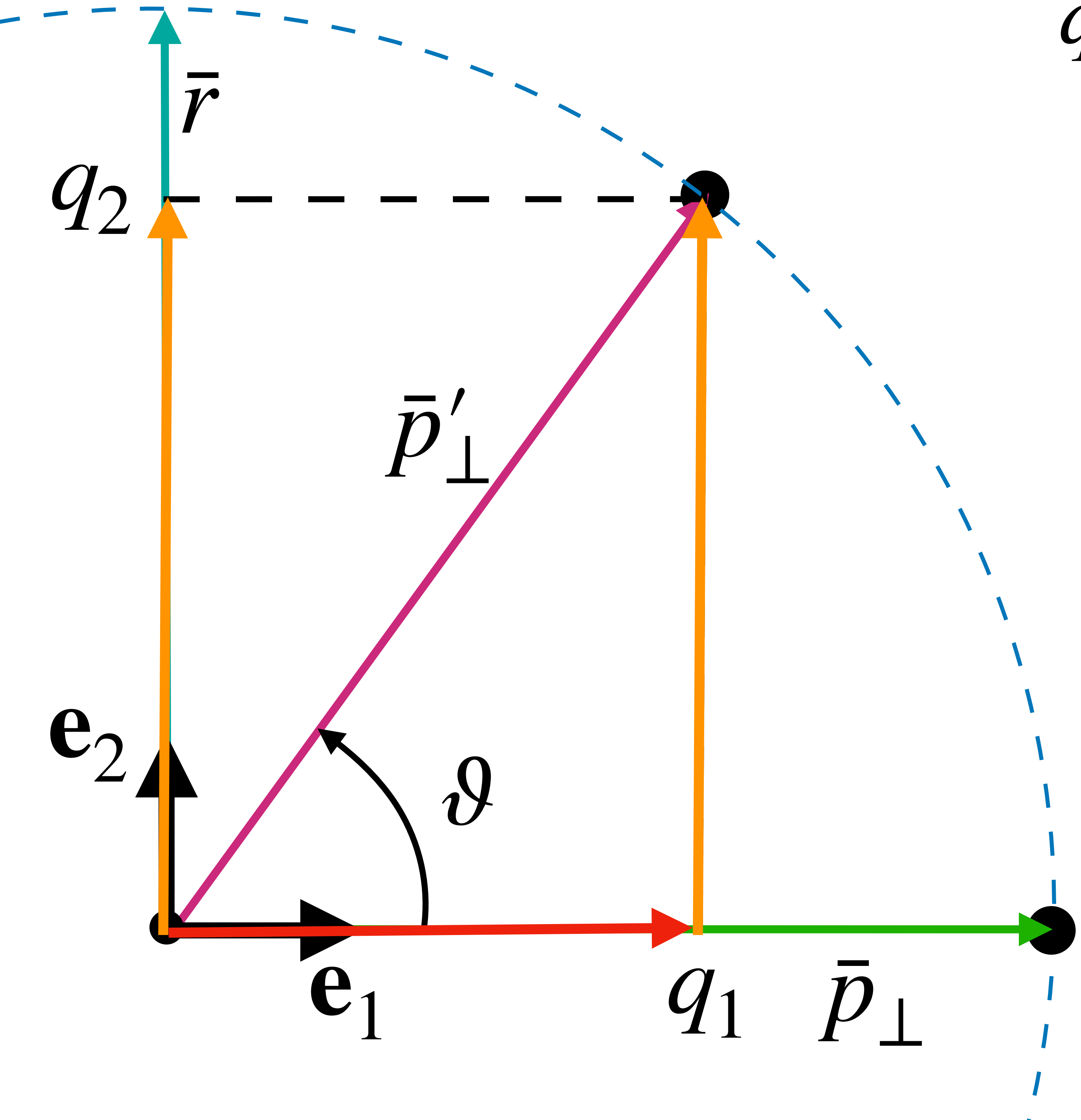


Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$q_1 = \bar{p}'_\perp \cdot \mathbf{e}_1 = |\bar{p}'_\perp| \cos\vartheta$$

$$q_2 = \bar{p}'_\perp \cdot \mathbf{e}_2 = |\bar{p}'_\perp| \sin\vartheta$$

$$\bar{p}'_\perp = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2$$



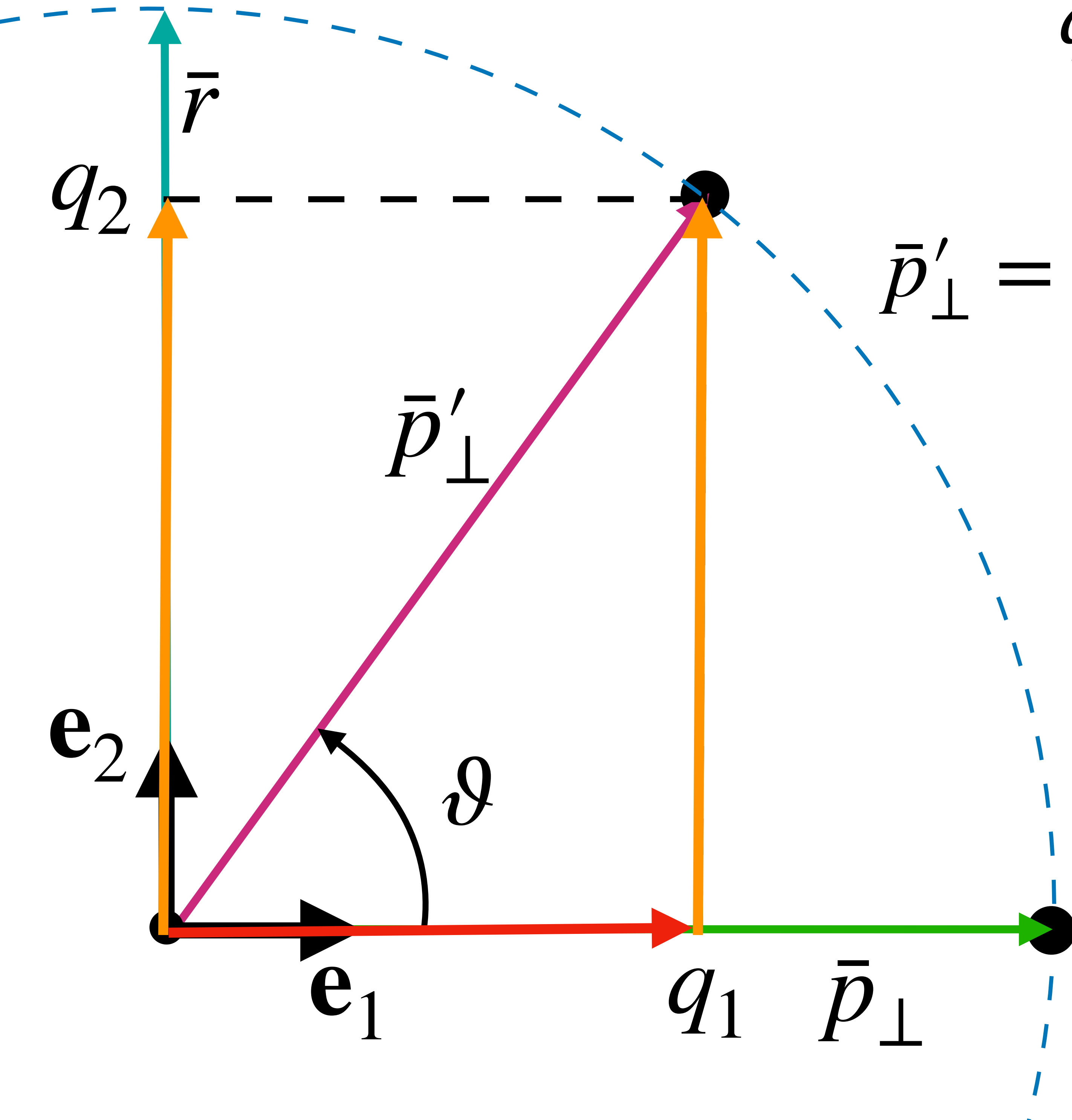
Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$q_1 = \bar{p}'_\perp \cdot \mathbf{e}_1 = |\bar{p}'_\perp| \cos\vartheta$$

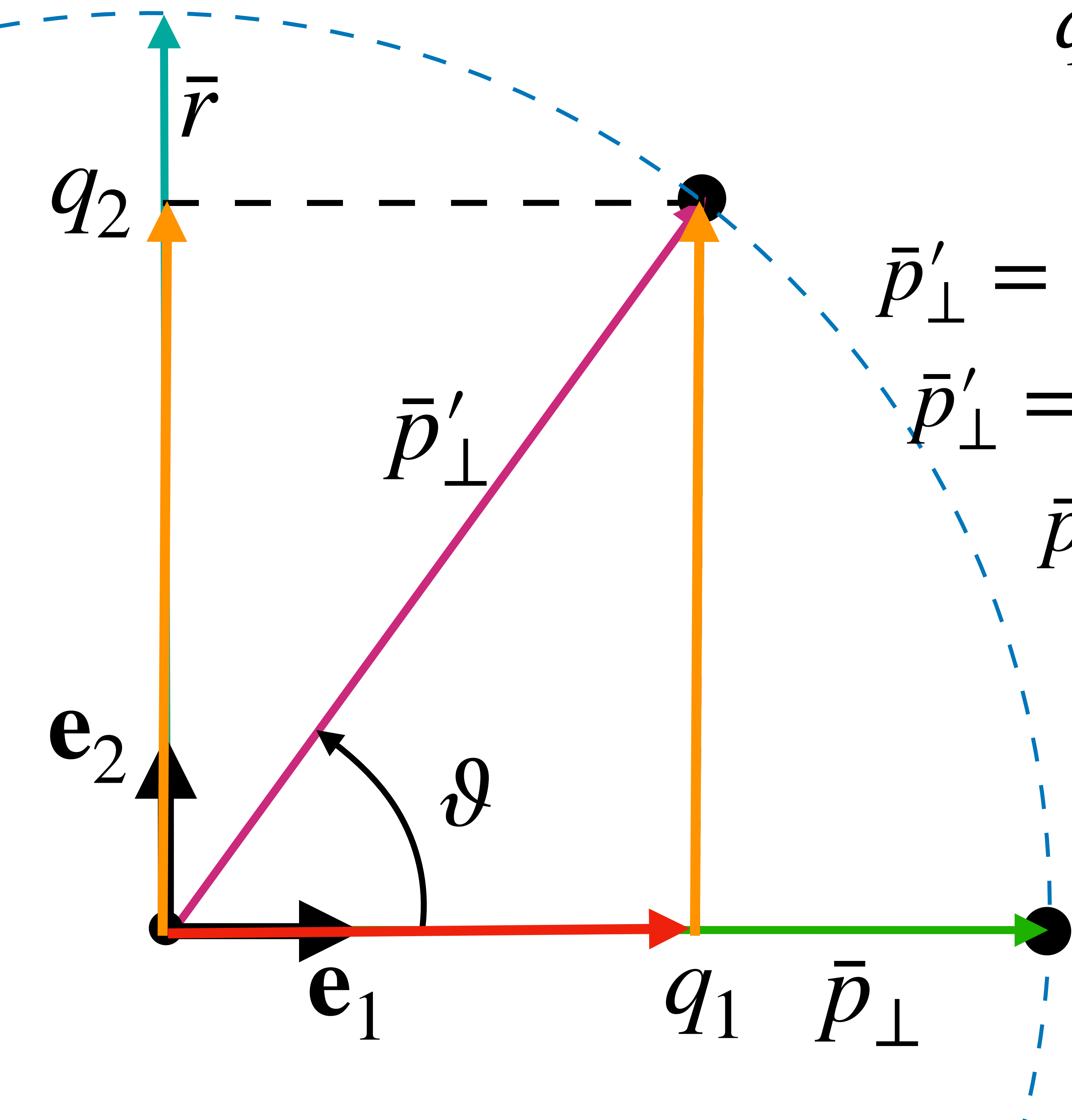
$$q_2 = \bar{p}'_\perp \cdot \mathbf{e}_2 = |\bar{p}'_\perp| \sin\vartheta$$

$$\bar{p}'_\perp = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2$$

$$\bar{p}'_\perp = \mathbf{e}_1 |\bar{p}'_\perp| \cos\vartheta + \mathbf{e}_2 |\bar{p}'_\perp| \sin\vartheta$$



Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси



$$q_1 = \bar{p}'_\perp \cdot \mathbf{e}_1 = |\bar{p}'_\perp| \cos\vartheta$$

$$q_2 = \bar{p}'_\perp \cdot \mathbf{e}_2 = |\bar{p}'_\perp| \sin\vartheta$$

$$\bar{p}'_\perp = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2$$

$$\bar{p}'_\perp = \mathbf{e}_1 |\bar{p}'_\perp| \cos\vartheta + \mathbf{e}_2 |\bar{p}'_\perp| \sin\vartheta$$

$$\bar{p}'_\perp = \mathbf{e}_1 |\bar{p}_\perp| \cos\vartheta + \mathbf{e}_2 |\bar{r}| \sin\vartheta$$

$$\bar{p}'_\perp = \bar{p}_\perp \cos\vartheta + \bar{r} \sin\vartheta$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$\bar{p}' = \bar{p}_{\|} + \bar{p}'_{\perp} = (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + \bar{p}_{\perp} \cos\vartheta + \bar{r} \sin\vartheta$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$\begin{aligned}\bar{p}' = \bar{p}_{\parallel} + \bar{p}'_{\perp} &= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + \bar{p}_{\perp} \cos\vartheta + \bar{r} \sin\vartheta \\ &= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - \bar{p}_{\parallel})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta\end{aligned}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$
\begin{aligned}
\bar{p}' = \bar{p}_{\parallel} + \bar{p}'_{\perp} &= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + \bar{p}_{\perp} \cos\vartheta + \bar{r} \sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - \bar{p}_{\parallel})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$
\begin{aligned}
\bar{p}' &= \bar{p}_{\parallel} + \bar{p}'_{\perp} = (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + \bar{p}_{\perp}\cos\vartheta + \bar{r}\sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - \bar{p}_{\parallel})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= \bar{n}(\bar{n}^T\bar{p}) + \bar{p}\cos\vartheta - \bar{n}(\bar{n}^T\bar{p})\cos\vartheta + [\bar{n}]_{\times}\bar{p}\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$\begin{aligned}
\bar{p}' = \bar{p}_{\|} + \bar{p}'_{\perp} &= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + \bar{p}_{\perp} \cos\vartheta + \bar{r} \sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - \bar{p}_{\|})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= \bar{n}(\bar{n}^T\bar{p}) + \bar{p}\cos\vartheta - \bar{n}(\bar{n}^T\bar{p})\cos\vartheta + [\bar{n}]_\times\bar{p}\sin\vartheta \\
&= (\cos\vartheta)E\bar{p} + (1 - \cos\vartheta)(\bar{n}\bar{n}^T)\bar{p} + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times\bar{p}
\end{aligned}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$
\begin{aligned}
\bar{p}' = \bar{p}_{\parallel} + \bar{p}'_{\perp} &= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + \bar{p}_{\perp} \cos\vartheta + \bar{r} \sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - \bar{p}_{\parallel})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= \bar{n}(\bar{n}^T\bar{p}) + \bar{p}\cos\vartheta - \bar{n}(\bar{n}^T\bar{p})\cos\vartheta + [\bar{n}]_{\times}\bar{p}\sin\vartheta \\
&= (\cos\vartheta)E\bar{p} + (1 - \cos\vartheta)(\bar{n}\bar{n}^T)\bar{p} + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_{\times}\bar{p} \\
&= \left((\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_{\times}\right)\bar{p}
\end{aligned}
$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$
\begin{aligned}
\bar{p}' = \bar{p}_{\parallel} + \bar{p}'_{\perp} &= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + \bar{p}_{\perp} \cos\vartheta + \bar{r} \sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - \bar{p}_{\parallel})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n} + (\bar{p} - (\bar{p} \cdot \bar{n})\bar{n})\cos\vartheta + (\bar{n} \times \bar{p})\sin\vartheta \\
&= \bar{n}(\bar{n}^T \bar{p}) + \bar{p}\cos\vartheta - \bar{n}(\bar{n}^T\bar{p})\cos\vartheta + [\bar{n}]_{\times}\bar{p}\sin\vartheta \\
&= (\cos\vartheta)E\bar{p} + (1 - \cos\vartheta)(\bar{n}\bar{n}^T)\bar{p} + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_{\times}\bar{p} \\
&= \left((\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_{\times}\right)\bar{p}
\end{aligned}
$$

$$
Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_{\times}
$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$\bar{n}\bar{n}^T = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$\bar{n}\bar{n}^T = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{n}]_\times^2 = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$\bar{n}\bar{n}^T = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{n}]_\times^2 = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{n}]_\times^2 = \begin{bmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$\bar{n}\bar{n}^T = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} \quad [\bar{n}]_\times^2 = \begin{bmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$\bar{n}\bar{n}^T = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} \qquad [\bar{n}]_\times^2 = \begin{bmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|\,\bar{n}\,| = 1 \qquad\qquad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$\bar{n}\bar{n}^T = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} \qquad [\bar{n}]_\times^2 = \begin{bmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{n}| = 1 \qquad\qquad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$\bar{n}\bar{n}^T = \begin{bmatrix} 1 - n_2^2 - n_3^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & 1 - n_1^2 - n_3^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & 1 - n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} = E + [\bar{n}]_\times^2$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)(E + [\bar{n}]_\times^2) + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)(E + [\bar{n}]_\times^2) + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)[\bar{n}]_\times^2 + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)\bar{n}\bar{n}^T + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E + (1 - \cos\vartheta)(E + [\bar{n}]_\times^2) + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times$$

$$\begin{aligned} Rot(\bar{n}, \vartheta) = (\cos\vartheta)E &+ (1 - \cos\vartheta)E \\ &+ (1 - \cos\vartheta)[\bar{n}]_\times^2 + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times \end{aligned}$$

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = E + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times + (1 - \cos\vartheta)[\bar{n}]_\times^2$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = E + (\sin\vartheta)[\bar{n}]_\times + (1 - \cos\vartheta)[\bar{n}]_\times^2$$

$$Rot(\bar{n}, \vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \sin\vartheta + \begin{bmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} (1 - \cos\vartheta)$$

$$Rotate(\bar{n}, \vartheta) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ Rot(\bar{n}, \vartheta) \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот на угол ϑ относительно произвольной оси

$$Rot(\bar{n},\vartheta) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&-n_3&n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{bmatrix}\sin\vartheta + \begin{bmatrix}-n_3^2-n_2^2&n_1n_2&n_1n_3\\n_2n_1&-n_1^2-n_3^2&n_2n_3\\n_3n_1&n_3n_2&-n_1^2-n_2^2\end{bmatrix}(1-\cos\vartheta)$$

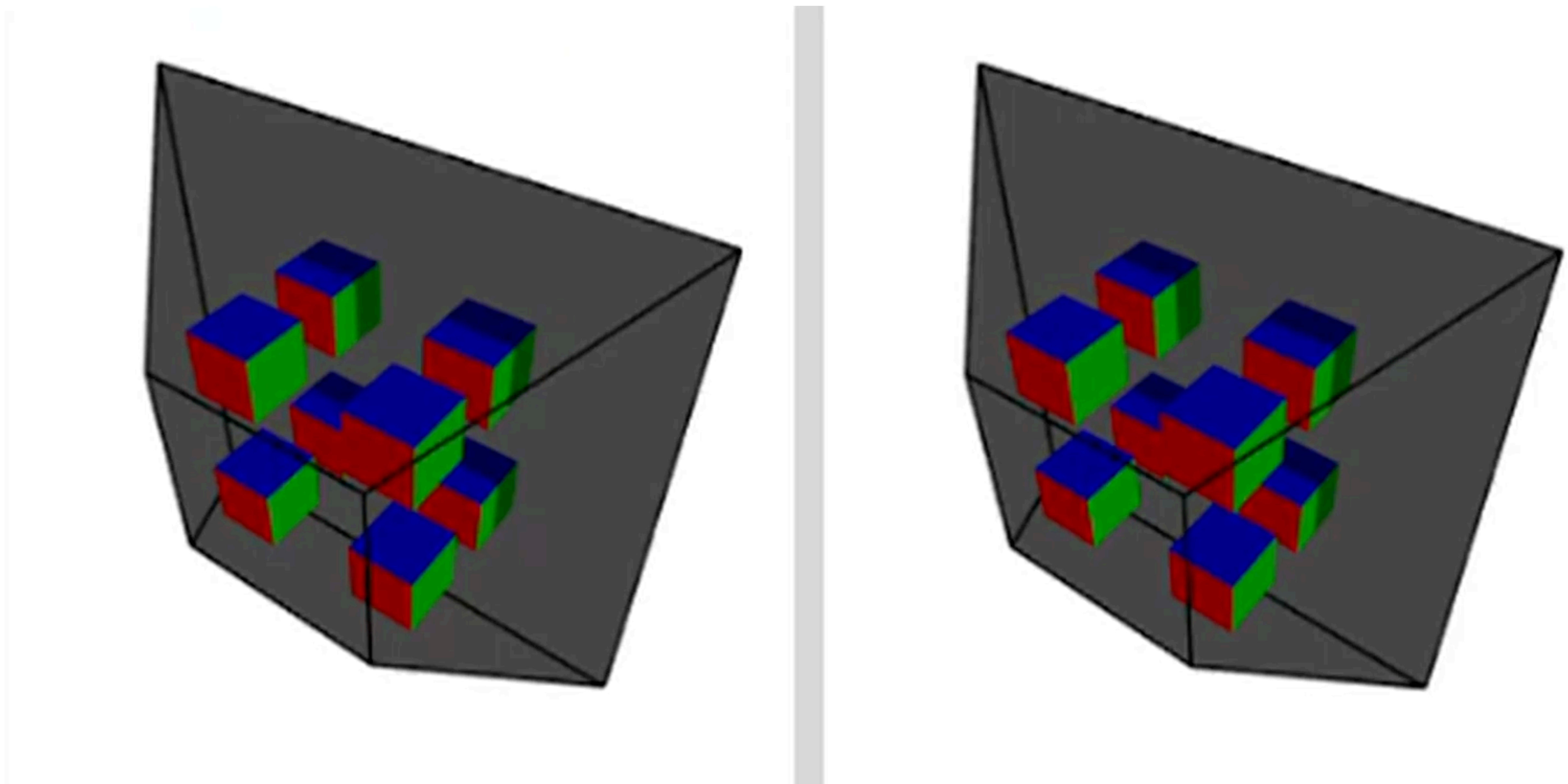
$$\bar{n} = (0,1,0)$$

$$Rot(\bar{n},\vartheta) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&-0&1\\0&0&-0\\-1&0&0\end{bmatrix}\sin\vartheta + \begin{bmatrix}-0^2-1^2&0&0\\0&-0^2-0^2&0\\0&0&-0^2-1^2\end{bmatrix}(1-\cos\vartheta)$$

$$Rot(\bar{n},\vartheta) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&\sin\vartheta\\0&0&0\\-\sin\vartheta&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1+\cos\vartheta&0&0\\0&0&0\\0&0&-1+\cos\vartheta\end{bmatrix}$$

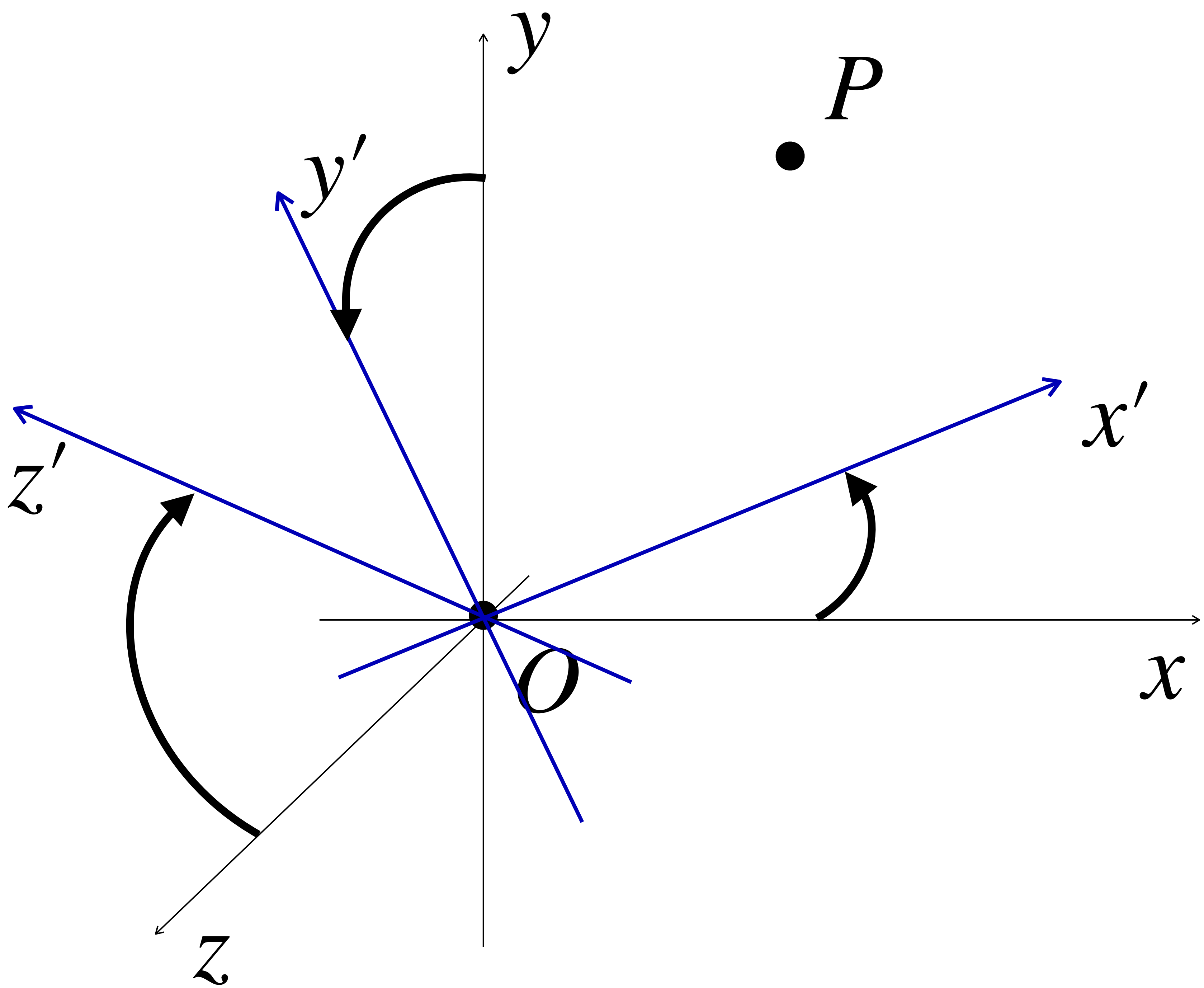
$$Rot(\bar{n},\vartheta) = \begin{bmatrix}\cos\vartheta&0&\sin\vartheta\\0&1&0\\-\sin\vartheta&0&\cos\vartheta\end{bmatrix}$$

Двойственность вращения



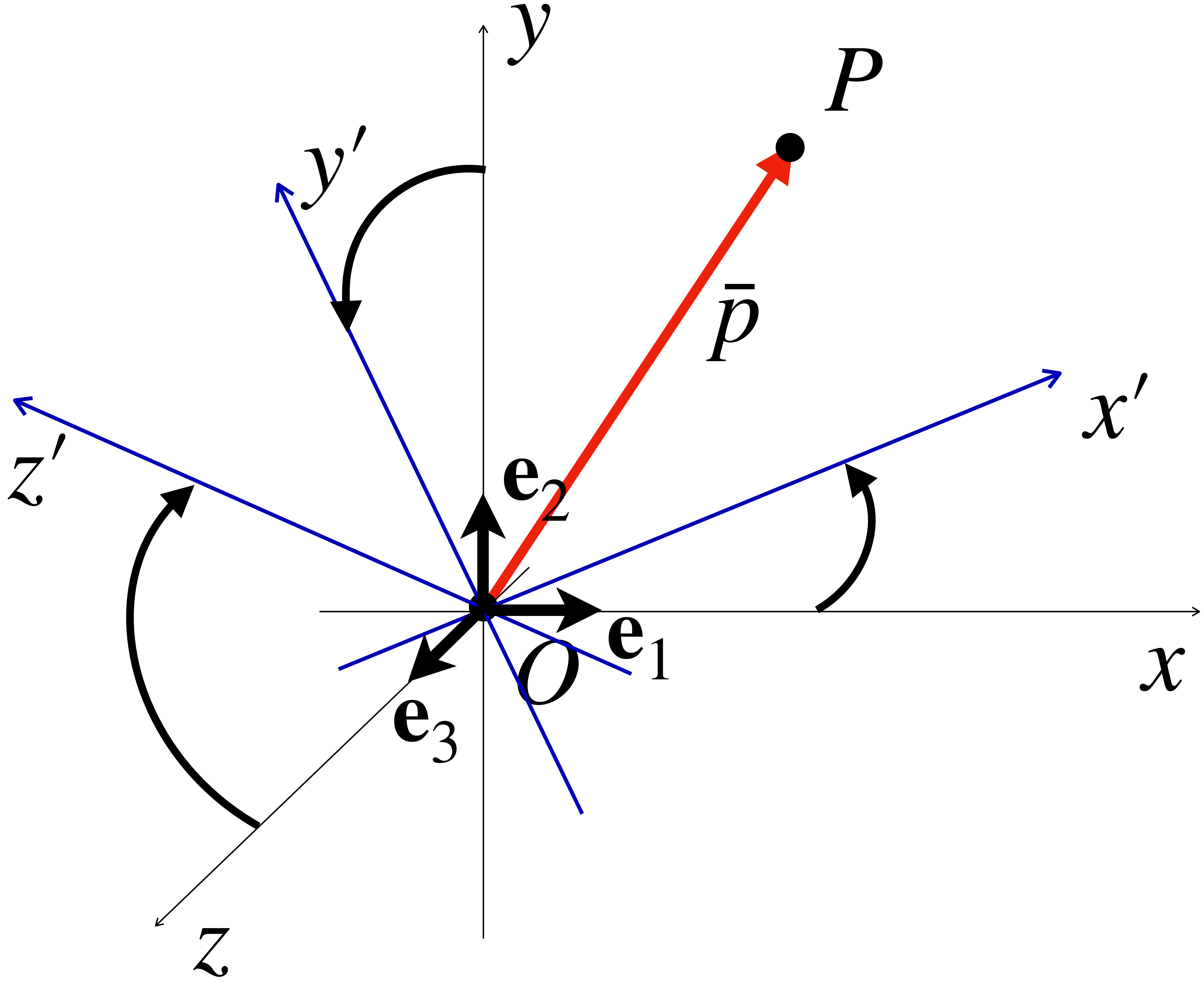
Видео демонстрирует работу программы скрипта примера из книги David J. Eck “Introduction to Computer Graphics”
http://math.hws.edu/graphicsbook/index.html

Двойственность вращения



Двойственность вращения

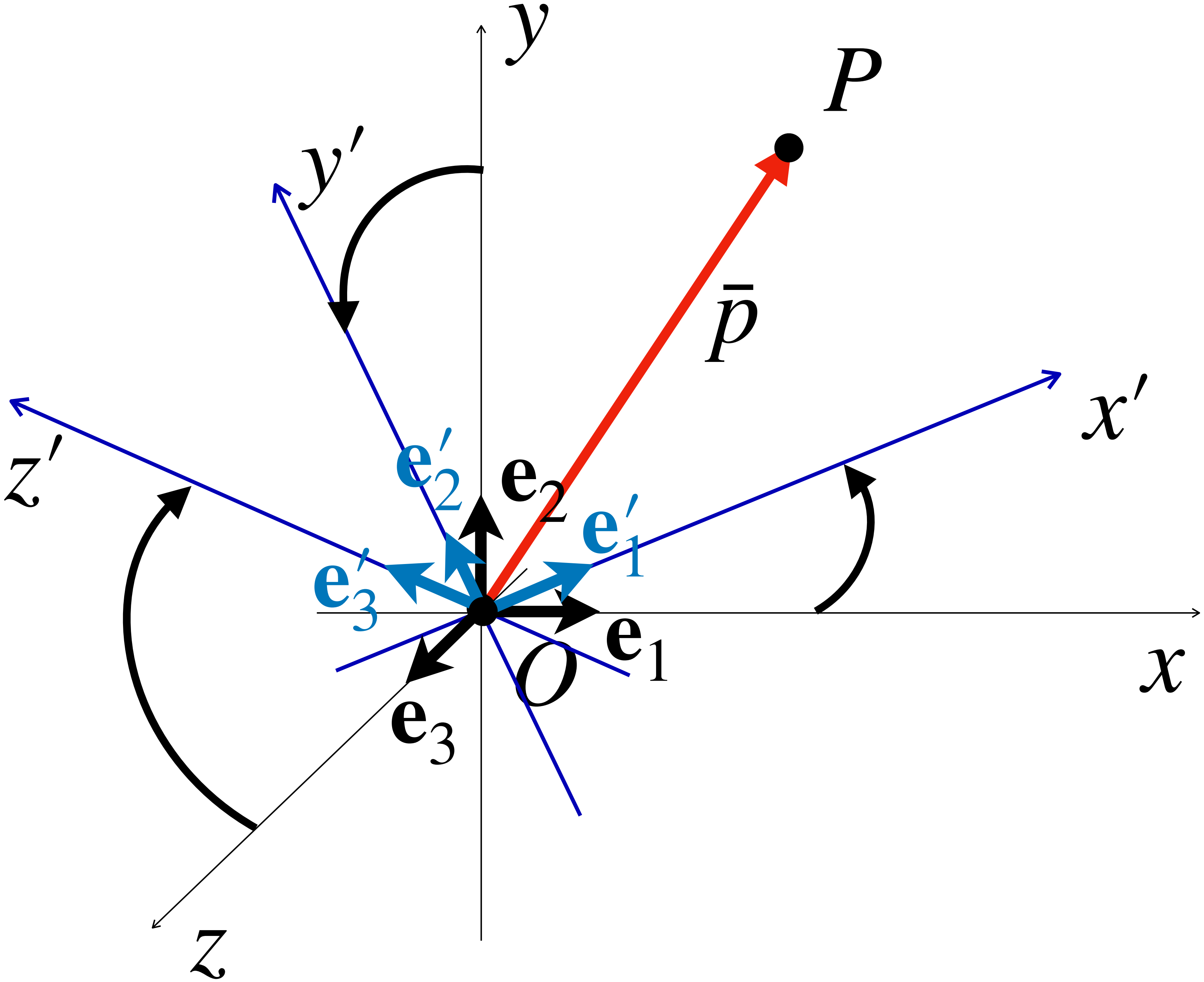
$$x = \bar{p} \cdot \mathbf{e}_1$$
$$y = \bar{p} \cdot \mathbf{e}_2$$
$$z = \bar{p} \cdot \mathbf{e}_3$$



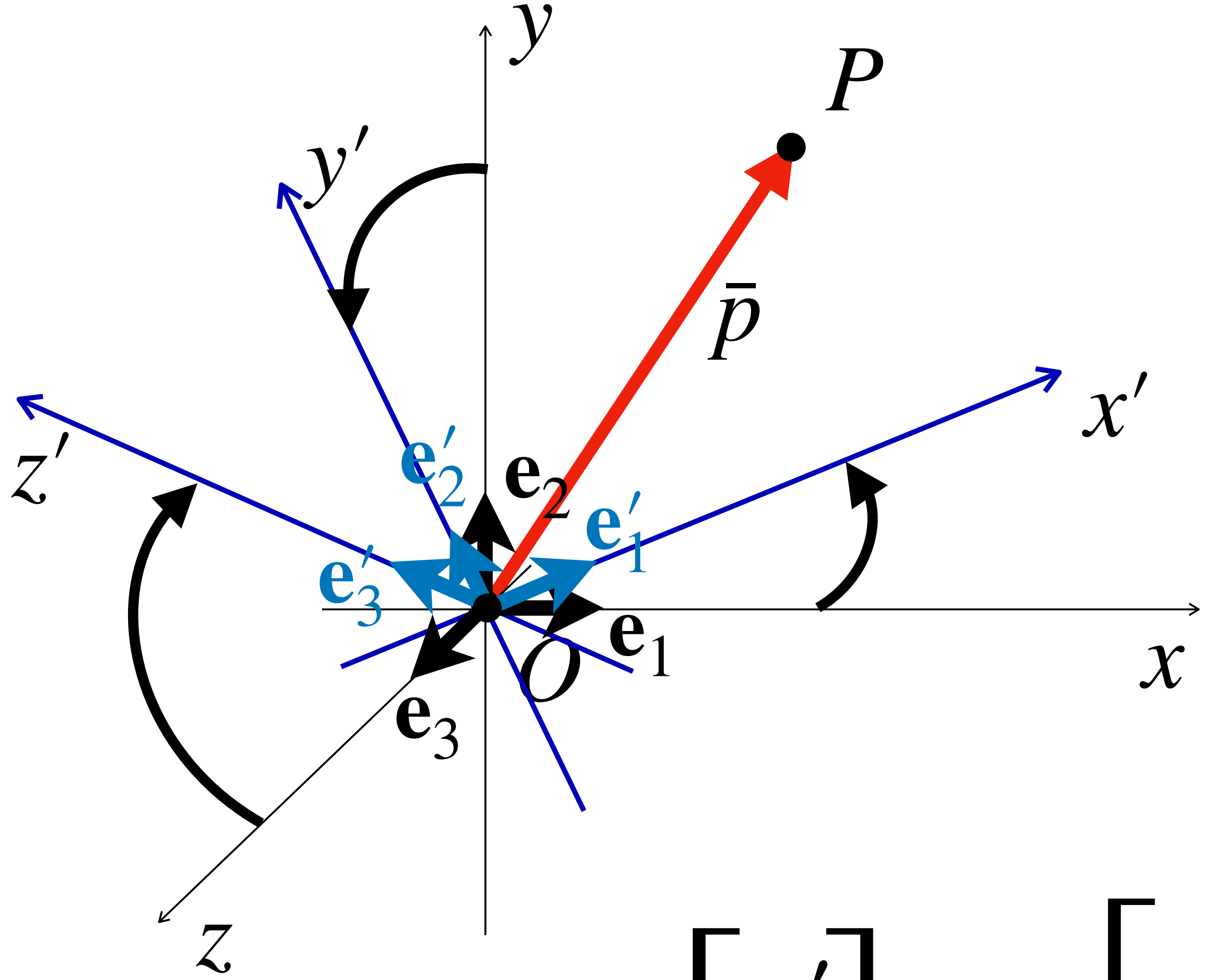
Двойственность вращения

$$x = \mathbf{e}_1 \cdot \bar{p}$$
$$y = \mathbf{e}_2 \cdot \bar{p}$$
$$z = \mathbf{e}_3 \cdot \bar{p}$$

$$x' = \mathbf{e}'_1 \cdot \bar{p}$$
$$y' = \mathbf{e}'_2 \cdot \bar{p}$$
$$z' = \mathbf{e}'_3 \cdot \bar{p}$$



Двойственность вращения

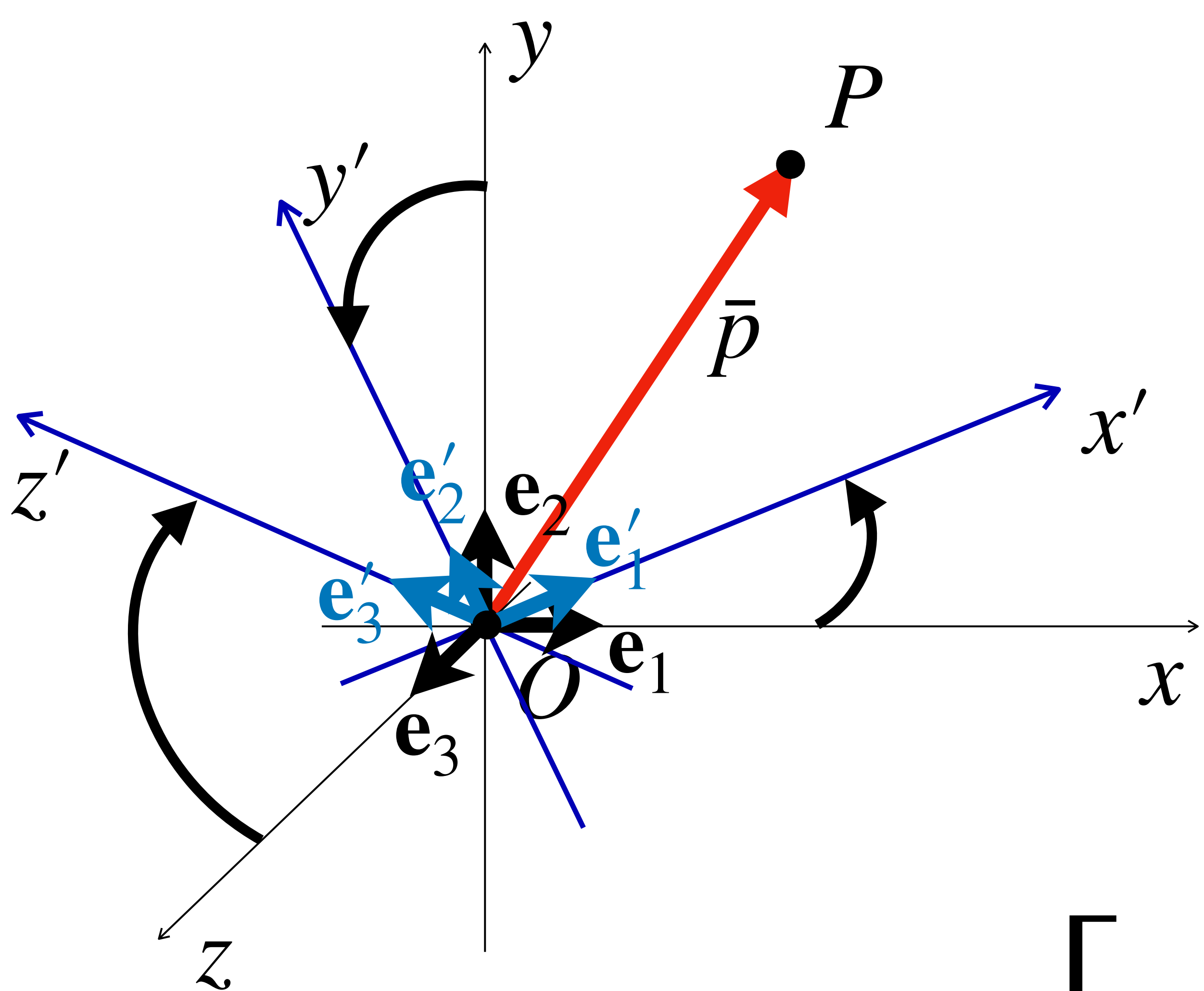


$$x = \mathbf{e}_1 \cdot \bar{p}$$
$$y = \mathbf{e}_2 \cdot \bar{p}$$
$$z = \mathbf{e}_3 \cdot \bar{p}$$

$$x' = \mathbf{e}_1' \cdot \bar{p}$$
$$y' = \mathbf{e}_2' \cdot \bar{p}$$
$$z' = \mathbf{e}_3' \cdot \bar{p}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1' \quad \\ \quad \mathbf{e}_2' \quad \\ \quad \mathbf{e}_3' \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Двойственность вращения

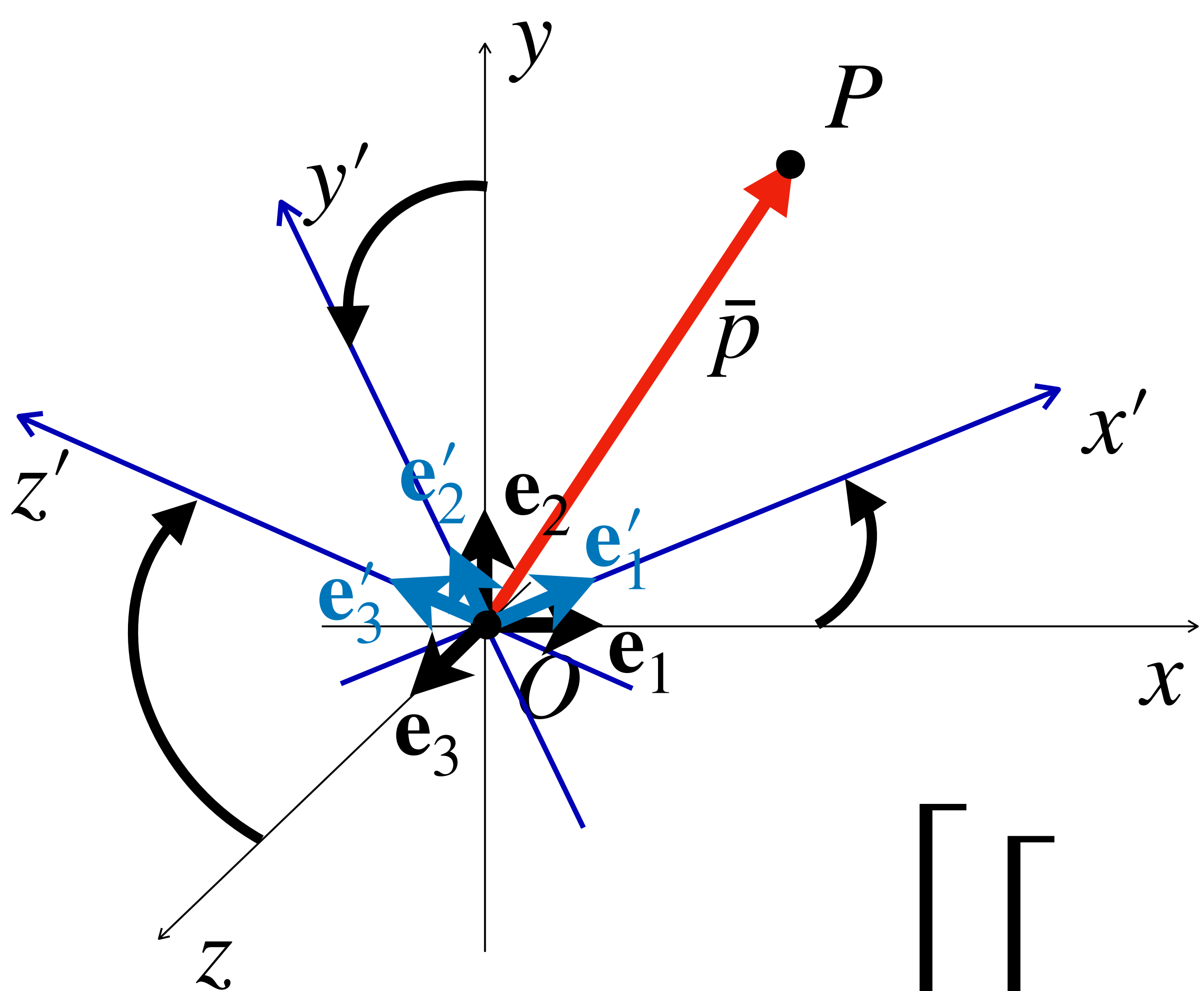


$$x = \mathbf{e}_1 \cdot \bar{p}$$
$$y = \mathbf{e}_2 \cdot \bar{p}$$
$$z = \mathbf{e}_3 \cdot \bar{p}$$

$$x' = \mathbf{e}_1' \cdot \bar{p}$$
$$y' = \mathbf{e}_2' \cdot \bar{p}$$
$$z' = \mathbf{e}_3' \cdot \bar{p}$$

$$Rot = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \end{bmatrix}$$

Двойственность вращения



$$x = \mathbf{e}_1 \cdot \bar{p}$$
$$y = \mathbf{e}_2 \cdot \bar{p}$$
$$z = \mathbf{e}_3 \cdot \bar{p}$$

$$x' = \mathbf{e}_1' \cdot \bar{p}$$
$$y' = \mathbf{e}_2' \cdot \bar{p}$$
$$z' = \mathbf{e}_3' \cdot \bar{p}$$

$$Rotate = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & \mathbf{e}_1' & \\ & \mathbf{e}_2' & \\ & \mathbf{e}_3' & \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$

Двойственность вращения

$$Rotate_x(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1' = (1,0,0)$$
$$\mathbf{e}_2' = (0, \cos\vartheta, -\sin\vartheta)$$
$$\mathbf{e}_3' = (0, \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

$$|\mathbf{e}_1'| = 1 \qquad |\mathbf{e}_2'| = 1 \qquad |\mathbf{e}_3'| = 1$$

$$\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = 0 \qquad \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_3' = 0 \qquad \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3' = 0$$

$$\mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3' \qquad \mathbf{e}_2' \times \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1' \qquad \mathbf{e}_3' \times \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2'$$