Практические занятия

1 Теория информации и форматы данных

1.1 Информационный объёма текстового сообщения

Расчёт информационного объёма текстового сообщения (количества информации, содержащейся в информационном сообщении) основан на подсчёте количества символов в этом сообщении, включая пробелы, и на определении информационного веса одного символа, который зависит от кодировки, используемой при передаче и хранении данного сообщения.

В традиционной кодировке (КОИ8-Р, Windows, MS DOS, ISO) для кодирования одного символа используется 1 байт (8 бит). Эта величина и является информационным весом одного символа. Такой 8-ми разрядный код позволяет закодировать 256 различных символов, т.к. $2^8 = 256$.

В настоящее время широкое распространение получил новый международный стандарт Unicode, который отводит на каждый символ два байта (16 бит). С его помощью можно закодировать $2^{16} = 65536$ различных символов.

Для расчёта информационного объёма текстового сообщения используется формула $V = K * i$, где V — это информационный объём текстового сообщения, измеряющийся в байтах, килобайтах, мегабайтах; K — количество символов в сообщении, i — информационный вес одного символа, который измеряется в битах на один символ.

Пример 1. Текстовое сообщение, содержащее 1048576 символов общепринятой кодировки, необходимо разместить на дискете ёмкостью 1,44Мб. Какая часть дискеты будет занята?

Решение:

$K = 1048576$ символов $= 2^{20}$ символов.

$V = K * i = 2^{20} * 8$ бит$= 2^{20}$ байт$= 2^{10}$ Кб=1 Мб, что составляет $\frac{1Mb*100\%}{1{,}44Mb} = 69\%$ объёма дискеты.

Ответ: 69% объёма дискеты будет занято переданным сообщением.

Пример 2. Информация в кодировке Unicode передается со скоростью 128 знаков в секунду в течение 32 минут. Какую часть дискеты ёмкостью 1,44Мб займёт переданная информация?

Решение:

$K = v * t = 128 * 32 * 60 = 2^7 * 2^5 * 2^2 * 15 = 2^{14} * 15$ символов.

$V = K * i = 2^{14} * 15 * 16$ бит $= 2^{18} * 15$ бит$= 2^{15} * 15$ байт$=$
$= 2^5 * 15$ Кб $= 0,469$ Мб, что составляет $\frac{0{,}469Mb*100\%}{1{,}44Mb} = 33\%$ объёма дискеты.

Ответ: 33% объёма дискеты будет занято переданным сообщением.

1.2 Информационный объём графического изображения

Расчёт информационного объёма растрового графического изображения (количества информации, содержащейся в графическом изображении) основан на подсчёте количества пикселей в этом изображении и на определении глубины цвета (информационного веса одного пикселя).

Глубина цвета задаётся количеством битов, используемым для кодирования цвета точки. Глубина цвета связана с количеством отображаемых цветов формулой $N = 2^i$, где N — это количество цветов в палитре, i — глубина цвета в битах на один пиксель.

Для расчёта информационного объёма растрового графического изображения используется формула $V = K * i$, где V — это информационный объём растрового графического изображения, измеряющийся в байтах, килобайтах, мегабайтах; K — количество пикселей (точек) в изображении, определяющееся разрешающей способностью носителя информации (экрана монитора, сканера, принтера); i — глубина цвета, которая измеряется в битах на один пиксель.

Пример 3. Видеопамять компьютера имеет объем 512 Кб, размер графической сетки 640×200, в палитре 16 цветов. Какое количество страниц экрана может одновременно разместиться в видеопамяти компьютера?

Решение:

Используем формулы

$V = K * i$; $N = 2^i$; $m = V/Ve$, где m – это количество страниц экрана.

$N = 2^i,\ 16 = 2^4 \rightarrow i = 4$ бита/пиксель.

$K = 640 \times 200 = 2^{10} * 125$ пикселей.

$V = K * i = 2^{10} * 125 * 4 = 2^{12} * 125$ бит$= 2^9 * 125$ байт$= 62,5$ Кб на один экран.

$m = \frac{V}{Ve} = \frac{512}{62{,}5} = 8$ страниц.

Ответ: В видеопамяти компьютера может одновременно разместиться 8 страниц экрана.

Пример 4. В результате преобразования растрового графического изображения количество цветов уменьшилось с 256 до 16. Как при этом изменится объем видеопамяти, занимаемой изображением?

Решение:

$N_1 = 256$ цветов;

$N_2 = 16$ цветов.

Используем формулы

$V_1 = K * i_1$; $N_1 = 2^{i_1}$; $V_2 = K * i_2$; $N_2 = 2^{i_2}$;

$N_1 = 256 = 2^8 \rightarrow i_1 = 8$ бит/пиксель.

$N_2 = 16 = 2^4 \rightarrow i_2 = 4$ бит/пиксель.

$V_1 = K * 8$; $V_2 = K * 4$;

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Ответ: Объем видеопамяти уменьшится в 2 раза.

1.3 Разные задачи

Пример 5. Сканируется цветное изображение стандартного размера A4 (21*29,7 см). Разрешающая способность сканера 1200dpi и глубина цвета 24 бита. Какой информационный объём будет иметь полученный графический файл?

Решение:

$i = 24$ бита на пиксель.

$S = 21$ см$*29,7$ см.

$D = 1200$ dpi (точек на один дюйм).

Используем формулы

$V = K * i$.

1 дюйм=2,54 см.

$S = (21/2,54)$ дюймов $*(29,7/2,54) = 8,3$ дюймов.

$K = 1200 * (21/2,54) * 1200 * (29,7/2,54) = 139210118$ пикселей.

$V = 139210118 * 24 = 3341042832$ бита$= 417630354$ байт$= 407842$ Кб$= 398$ Мб.

Ответ: Полученный графический файл будет иметь информационный объём 398 Мб.

Пример 6. Информация передается по каналу связи с пропускной способностью 1024 Кбит/с в течении 12 минут. Какое количество информации будет передано?

Решение:

12 минут = 720 секунд.

$V = 1024 * 2^{10}$бит/с*720 с $= 2^{23} * 90$ бит $= 2^{20} * 90$байт $= 90$ Мб.

Ответ: Будет передано 90 Мб.

2 Количество информации

2.1 Формула Хартли

Американский инженер Р. Хартли в 1928 г. предложил рассматривать процесс получения информации как выбор одного сообщения из конечного наперёд заданного множества из N равновероятных сообщений, а количество информации i, содержащееся в выбранном сообщении, определял как двоичный логарифм N, т.е. $i = log_2 N$.

Часто формулу Хартли записывают в виде $i = log_2 \frac{1}{p}$, где p — вероятность рассматриваемого события. Вероятность p обычно вычисляется как $\frac{K}{N}$, где K — количество интересующих нас событий, а N — количество всех событий.

Пример 7. Шарик находится в одном из 64 ящичков. Сколько единиц информации будет содержать сообщение о том, где находится шарик?

Решение:

$i = log_2 64 = 6$.

Ответ: Сообщение будет содержать 6 бит информации.

Пример 8. Предположим, вероятность того, что вы получите за контрольную работу оценку «5», равна 0,6; вероятность получения «4» равна 0,3; вероятность получения «3» — 0,1. Определите, сколько бит информации будет нести сообщение о результатах контрольной работы в каждом из возможных случаев.

Решение:

«5»: $i = log_2 \frac{1}{0{,}6} = 0,737$ (бит)

«4»: $i = log_2 \frac{1}{0{,}3} = 1,737$ (бит)

«3»: $i = log_2 \frac{1}{0{,}1} = 3,322$ (бит)

Ответ: Сообщение о результатах контрольной работы будет нести 0,737, 1,737 и 3,322 бит информации соответственно.

Пример 9. В пруду живут 8000 карасей, 2000 щук и 40 000 пескарей.

Определите количество информации, полученной рыбаком при улове каждого вида рыб по отдельности.

Решение:

Общее количество рыб = 8000 + 2000 + 40000 = 50000.

Вероятность поймать карася равна:

$$p_{\text{к}} = \frac{8000}{50000} = 0.16.$$

Вероятность поймать щуку равна:

$$p_{\text{щ}} = \frac{2000}{50000} = 0.6 = 04.$$

Вероятность поймать пескаря равна:

$$p_{\text{п}} = \frac{40000}{50000} = 0.8.$$

Количество информации в сообщении о том, что рыбак поймал в этом пруду карася вычисляется по формуле

$$i_{\text{к}} = log_2 \frac{1}{p_{\text{к}}} = log_2 \frac{1}{0.16} = 2.643856190 \text{ бит.}$$

Количество информации в сообщении о том, что рыбак поймал в этом пруду щуку вычисляется по формуле

$$i_{\text{щ}} = log_2 \frac{1}{p_{\text{щ}}} = log_2 \frac{1}{0.04} = 4.643856190 \text{ бит.}$$

Количество информации в сообщении о том, что рыбак поймал в этом пруду пескаря вычисляется по формуле

$$i_{\text{п}} = log_2 \frac{1}{p_{\text{п}}} = log_2 \frac{1}{0.8} = 0.3219280949 \text{ бит.}$$

Ответ: Количество информации, полученной рыбаком при улове карася, щуки и пескаря равно, соответственно, 2.64, 4.64 и 0.32 бита.

Пример 10. В корзине лежат белые и черные шары. Среди них 18 черных шаров. Сообщение о том, что из корзины достали белый шар, несет 2 бита информации. Сколько всего в корзине шаров?

Решение:

Обозначим $K_ч$, $K_б$ — количество черных и белых шаров соответственно, K — общее количество шаров, $i_б$ — количество информации в сообщении, что из корзины достали белый шар, $p_б$ — вероятность выбора белого шара.

Дано: $K_ч$=18 шт. $i_б$=2 бита.

$$p_б = \frac{K_б}{K} = \frac{K_б}{K_б + K_ч} = \frac{K_б}{K_б + K_{18}}.$$

$$i_б = log_2 \frac{1}{p_б} \Rightarrow p_б = \frac{1}{2^{i_б}} = \frac{1}{4}.$$

Т.о. имеются две формулы для подсчета $p_б$.

Приравняем их.

$$\frac{1}{4} = \frac{K_б}{K_б + K_{18}} \Rightarrow K_б = 6 \Rightarrow K = 18 + 6 = 24.$$

Ответ: Всего в корзине 24 шара.

Пример 11. Каждый аспирант кафедры изучает только один из трех языков: английский, немецкий или французский. Причем 30 аспирантов не изучают английский язык. Информационный объем сообщения «Аспирант X изучает английский язык» равен $1 + log_2 3$ бит. Количество информации, содержащееся в сообщении «Аспирант Y изучает французский язык», равно двум битам. Иностранный студент, приехавший в университет, знает только немецкий язык. Чему равно количество аспирантов кафедры, с которыми сможет общаться иностранный студент?

Решение:

Из условия видно, что количество аспирантов, изучающих английский, немецкий и французский языки различное и вопрос задачи указывает на конкретное изучения языка, поэтому воспользуемся формулой Хартли для неравновероятных событий.

Обозначим $K_\text{н}, K_\text{ф}, K_\text{а}$ — количество абитуриентов, изучающих немецкий, французский и английский языки соответственно, $i_\text{а}$ — количество информации в сообщении «Аспирант X изучает английский язык», $i_\text{ф}$ — количество информации в сообщении «Аспирант Y изучает французский язык».

$K_\text{н} + K_\text{ф} = 30$.

$i_\text{а} = 1 + log2_3$ бита.

$i_\text{ф} = 2$ бита.

Всего студентов

$$K_\text{н} + K_\text{ф} + K_\text{а} = 30 + K_\text{а}.$$

С одной стороны

$$p_\text{а} = \frac{K_\text{а}}{K_\text{н} + K_\text{ф} + K_\text{а}} = \frac{K_\text{а}}{30 + K_\text{а}}.$$

С другой стороны

$$p_\text{а} = \frac{1}{2^{i_\text{а}}} = \frac{1}{2^{1+log2_3}} = \frac{1}{6}.$$

Приравниваем эти два уравнения. Получаем:

$$\frac{K_\text{а}}{K_\text{н} + K_\text{ф} + K_\text{а}} = \frac{K_\text{а}}{30 + K_\text{а}} = \frac{1}{6} \to K_\text{а} = 6.$$

Аналогично для $K_\text{ф}$ имеем

$$\frac{K_\text{ф}}{30 + K_\text{а}} = \frac{1}{2^{i_\text{ф}}} \to \frac{K_\text{ф}}{30 + K_\text{а}} = \frac{1}{4} \to K_\text{ф} = 9$$

Таким образом получаем

$$K_\text{н} + K_\text{ф} = 30 \to K_\text{н} = 30 - K_\text{ф} = 30 - 9 = 21$$

Ответ: Иностранный студент сможет общаться с 21 аспирантом кафедры.

2.2 Формула Шеннона

Пример 12. Мама попросила дочку сходить в магазин и купить фрукты. В магазине в наличии было 4 кг. яблок, 5 кг. груш и 10 кг. апельсинов. Определить количество информации, полученной мамой в зрительном сообщении о покупке, сделанной дочкой.

Решение:

В этом примере не конкретизировано, какие фрукты купила дочка. Информацией для мамы будет именно вид фруктов.

В 1948 году К. Шеннон предложил формулу для вычисления количества информации для неравновероятных событий в общем случае

$$I = -\sum_{i=1}^{N} P_i log_2\ P_i,$$

где I — количество информации, которое мы получим после реализации одного из возможных событий; N — количество видов возможных событий; P_i — вероятность i-го события.

Количество видов событий: N показывает сколько будет слагаемых. Речь идет о яблоках, грушах и апельсинах, поэтому $N = 3$.

Определим вероятности покупки каждого вида фруктов: $p_{\text{яб}} = \frac{4}{19}$, $p_{\text{гр}} = \frac{5}{19}$,$p_{\text{ап}} = \frac{10}{19}$.

Тогда количество информации, которое получит мама после прихода дочки домой, можно рассчитать по формуле Шеннона:

$$I = -(\frac{4}{19} * log_2\frac{4}{19} + \frac{5}{19} * log_2\frac{5}{19} + \frac{5}{19} * log_2\frac{10}{19}) = 1.47.$$

Ответ:количество информации, полученной мамой в зрительном сообщении о покупке, сделанной дочкой равно 1.47 бит.

Пример 13. Вероятность первого события составляет 0,5, а второго и третьего — 0,25. Какое количество информации мы получим после реализации одного из них?

Решение: $P_1 = \frac{1}{2}$, $P_2 = P_3 = \frac{1}{4}$.
$i = -(\frac{1}{2} * log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} * log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{4} * log_2\frac{1}{4}) =$
$= -(\frac{1}{2} * (-1) + \frac{1}{4} * (-2) + \frac{1}{4} * (-2)) = 1.5.$

Ответ: получим 1.5 бита информации.

Пример 14. За контрольную работу по информатике получено 8 пятерок, 13 четверок, 6 троек и 2 двойки. Какое количество информации получил Васечкин при получении тетради с оценкой?

Решение:

$$P_1 = \frac{8}{29},$$
$$P_2 = \frac{13}{29},$$
$$P_3 = \frac{6}{29},$$
$$P_4 = \frac{2}{29}.$$

$$i = -(\frac{8}{29} * log_2\frac{8}{29} + \frac{13}{29} * log_2\frac{13}{29} + \frac{6}{29} * log_2\frac{6}{29} + \frac{2}{29} * log_2\frac{2}{29}) = 1.77.$$

Ответ: Васечкин получил 1.77 бита информации.

3 Рекурсивные функции

Пример 15. Дана функция: $f(x) = \lambda(\lambda(\psi_{1,1}(x)))$. Подсчитать значение функции для $x = 0..5$.

Решение:

$f(0) = \lambda(\lambda(\psi_{1,1}(0))) = \lambda(\lambda(0)) = \lambda(1) = 2.$

$f(1) = \lambda(\lambda(\psi_{1,1}(1))) = \lambda(\lambda(1)) = \lambda(2) = 3.$

$f(2) = \lambda(\lambda(\psi_{1,1}(2))) = \lambda(\lambda(2)) = \lambda(3) = 4.$

$f(3) = \lambda(\lambda(\psi_{1,1}(3))) = \lambda(\lambda(3)) = \lambda(4) = 5.$

$f(4) = \lambda(\lambda(\psi_{1,1}(4))) = \lambda(\lambda(4)) = \lambda(5) = 6.$

$f(5) = \lambda(\lambda(\psi_{1,1}(5))) = \lambda(\lambda(5)) = \lambda(6) = 7.$

Ответ:2, 3, 4, 5, 6, 7.

Пример 16. Функция строится с помощью оператора рекурсии:

$f(x) ::= R[\phi_0, \psi_{2,1}(\lambda(\phi_1(x)), y), x(y)]$.

Подсчитать значение функции для $x = 0..5$.

Решение:

$f(0) = f_1 = \phi_0 = 0$

$f(1) = f_2(0, f(0)) = f_2(0,0) = \psi_{2,1}(\lambda(\phi_1(0)), 0) = \psi_{2,1}(\lambda(0), 0) = \psi_{2,1}(1,0) = 1$

$f(2) = f_2(1, f(1)) = f_2(1,1) = \psi_{2,1}(\lambda(\phi_1(1)), 1) = \psi_{2,1}(\lambda(0), 1) = \psi_{2,1}(1,0) = 1$

$f(3) = f_2(2, f(2)) = f_2(2,1) = \psi_{2,1}(\lambda(\phi_1(2)), 1) = \psi_{2,1}(\lambda(0), 1) = \psi_{2,1}(1,0) = 1$

$f(4) = f_2(3, f(3)) = f_2(3,1) = \psi_{2,1}(\lambda(\phi_1(3)), 1) = \psi_{2,1}(\lambda(0), 1) = \psi_{2,1}(1,0) = 1$

$f(5) = f_2(4, f(4)) = f_2(4,1) = \psi_{2,1}(\lambda(\phi_1(4)), 1) = \psi_{2,1}(\lambda(0), 1) = \psi_{2,1}(1,0) = 1$

Но можно решить задачу проще, если сразу проинтерпретировать значение функции f_2 обычными арифметическими операциями.

$\psi_{2,1}(\lambda(\phi_1(x)), y) = \lambda(\phi_1(x)) = \lambda(0) = 1.$

Таким образом видно, что функция f_2 возвращает 1 при любых значениях x и y.

Ответ:0, 1, 1, 1, 1, 1.

Пример 17. Функция строится с помощью оператора рекурсии:

$$f(y) ::= R[\phi_0, \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(\psi_{1,1}(x))), y), y(x)].$$

Подсчитать значение функции для $y = 0..5$.

Решение:

Заметим, что $f(i') = f_2(f(i), i)$, т.к. переменная y является главным дополнительным аргументом.

$f(0) = f_1 = \phi_0 = 0$

$f(1) = f_2(f(0), 0) = f_2(0, 0) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(\psi_{1,1}(0))), 0) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(0), 0)) = \psi_{2,1}(\lambda(1), 0) = \psi_{2,1}(2, 0) = 2$

$f(2) = f_2(f(1), 1) = f_2(2, 1) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(\psi_{1,1}(2))), 1) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(2), 1)) = \psi_{2,1}(\lambda(3), 1) = \psi_{2,1}(4, 1) = 4$

$f(3) = f_2(f(2), 2) = f_2(4, 2) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(\psi_{1,1}(4))), 2) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(4), 2)) = \psi_{2,1}(\lambda(5), 2) = \psi_{2,1}(6, 2) = 6$

$f(4) = f_2(f(3), 3) = f_2(6, 3) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(\psi_{1,1}(6))), 3) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(6), 3)) = \psi_{2,1}(\lambda(7), 3) = \psi_{2,1}(8, 3) = 8$

$f(5) = f_2(f(4), 4) = f_2(8, 4) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(\psi_{1,1}(8))), 4) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(8), 4)) = \psi_{2,1}(\lambda(9), 4) = \psi_{2,1}(10, 4) = 10$

Опять же можно упростить задачу, если сразу проинтерпретировать значение функции f_2 обычными арифметическими операциями.

$\psi_{2,1}(\lambda(\lambda(\psi_{1,1}(x))), y) = \psi_{2,1}(\lambda(\lambda(x)), y) = \psi_{2,1}(\lambda(x+1), y) =$
$= \psi_{2,1}(x+2, y) = x+2.$

Тогда получим:

$f(1) = f_2(f(0), 0) = f_2(0, 0) = 0 + 2 = 2$
$f(2) = f_2(f(1), 1) = f_2(2, 1) = 2 + 2 = 4$
$f(3) = f_2(f(2), 2) = f_2(4, 2) = 4 + 2 = 6$
$f(4) = f_2(f(3), 3) = f_2(6, 3) = 6 + 2 = 8$
$f(5) = f_2(f(4), 4) = f_2(8, 4) = 8 + 2 = 10$

Ответ:0, 2, 4, 6, 8, 10.

Пример 18. В одной из лекций была построена функция

$$S(x) = \begin{cases} x-1, x > 1, \\ 0, x \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим оператор рекурсии

$$G(x,y) ::= R[\psi_{1,1}(S(x)), \psi_{3,3}(x,y,S(S(z))), y(z)].$$

Теперь определим значение искомой функции для $x = 0..3$.

$G(x,0) = \psi_{1,1}(S(x)) = S(x) = x - 1$

$G(x,1) = \psi_{3,3}(x,0,S(S(G(x,0)))) = S(S(G(x,0))) =$
$= S(S(x-1)) = S(x-1) - 1 = x - 1 - 1 - 1 = x - 2 * 1 - 1$

$G(x,2) = \psi_{3,3}(x,1,S(S(G(x,1)))) = S(S(G(x,1))) =$
$= S(S(x-2*1-1)) = S(x-2*1-1)-1 = x-2*1-1-1-1 = x-2*2-1$

$G(x,3) = \psi_{3,3}(x,2,S(S(G(x,2)))) = S(S(G(x,2))) =$
$= S(S(x-2*2-1)) = S(x-2*2-1)-1 = x-2*2-1-1-1 = x-2*3-1$

Таким образом получилась функция $G(x,y) = x - 2 * y - 1$.

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} x - 2 * y - 1, x > 2 * y + 1, \\ 0, x \leq 2 * y + 1. \end{cases}$

Пример 19. Пусть имеется функция $G(x,y)$ из предыдущего примера.

Функция $H(x)$ строится с помощью оператора минимизации:

$H(x) ::= \mu[G(x,y), y]$.

Подсчитать значение функции для $x = 0..7$ и определить действие, выполняемое искомой функцией.

Решение:

Чтобы определить значение $H(0)$ нужно определить первое, начинаная с 0, значение y при котором $G(0,y) = 0 - 2 * y - 1$ равно 0. Очевидно, что это верно при любом y. Поэтому $H(0) = 0$.

Чтобы определить значение $H(1)$ нужно определить первое, начинаная с 0, значение y при котором $G(1,y) = 1 - 2 * y - 1 = 2 * y$ равно 0. Очевидно, что это верно при любом y. Поэтому $H(1) = 0$.

Чтобы определить значение $H(2)$ нужно определить первое, начинаная с 0, значение y при котором $G(2,y) = 2 - 2 * y - 1 = 1 - 2 * y$ равно 0. При $y = 0$ это выражение равно 1, и только при $y = 1$ — 0. Поэтому $H(2) = 1$.

$G(3,y) = 3 - 2 * y - 1 = 2 - 2 * y$, $G(3,0) = 2$, $G(3,1) = 0 \Rightarrow H(3) = 1$.

$G(4,y) = 4 - 2*y - 1 = 3 - 2*y$, $G(4,0) = 3$, $G(4,1) = 1$, $G(4,2) = 0 \Rightarrow H(4) = 2$.

$G(5,y) = 5 - 2*y - 1 = 4 - 2*y$, $G(5,0) = 4$, $G(5,1) = 2$, $G(5,2) = 0 \Rightarrow H(5) = 2$.

$G(6,y) = 6 - 2*y - 1 = 5 - 2*y$, $G(6,0) = 5$, $G(6,1) = 3$, $G(6,2) = 1$, $G(6,3) = 0 \Rightarrow H(6) = 3$.

$G(7,y) = 7 - 2*y - 1 = 6 - 2*y$, $G(7,0) = 6$, $G(7,1) = 4$, $G(7,2) = 2$, $G(7,3) = 0 \Rightarrow H(7) = 3$.

Ответ:$H(x) = \frac{x}{2}$.

4 Методы контроля информации

Пример 20. Дано 4 сообщения. Закодировать из с дистанцией Хэмминга 4, используя коды произвольной и минимальной длины.

Решение для произвольной длины: Рассмотрим простой способ закодировать N собщений с дистанцией Хэмминга 4. Возьмем длину сообщений $2*N$. Для i-го сообщения в позиции $2*i-1$ и $2*i$ поместим 1, а в остальные —0. Тогда любая пара сообщений i и j будет различаться в позициях $2*i-1$, $2*i$, $2*j-1$ и $2*j$. Таким образом дистанция Хэмминга между любой парой сообщений будет всегда 4.

Ответ для произвольной длины:

11000000
00110000
00001100
00000011

Решение для минимальной длины:

Очевидно, что можно закодировать только 2 сообщения длиной 4. Покажем, что нельзя закодировать и сообщениями длиной 5. Закодируем первое сообщение одними нулями. Тогда существует только 6 сообщений длины 5, отличающиеся от исходного на 4 или 5 символов. Это 01111, 10111, 11011, 11101, 11110 и 11111. Однако все эти сообщения между собой имеют дистанцию Хэмминга 2 или 1.

Аналогичные рассуждения легко приводят к простому решению для сообщений длины 6.

Ответ для минимальной длины:
000000
111100
001111
110011

Пример 21. Закодировать самовосстанавливающимся кодом Хэмминга сообщение: 11000101010010

Решение:

Определим количество контрольных бит по формуле $2^k > m + k$. В исходном сообщении 14 бит. $2^4 < 4 + 14$, а $2^5 > 5 + 14$. Значит нужно 5 контрольных бит.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
		1		1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

Первый контрольный бит отвечает за биты с нечетными номерами.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
		1		1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

В этой группе 2 единицы (четное число), поэтому значение первого контрольного бита — 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0		1		1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

Во вторую группу входят биты с номерами 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0		1		1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

В этой группе 4 единицы (четное число), поэтому значение и второго контрольного бита — 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0	0	1		1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

В третью группу входят биты с номерами 4-7, 12-15.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0	0	1		1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

В этой группе 3 единицы (нечетное число), поэтому значение третьего контрольного бита — 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0	0	1	1	1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

В четвертую группу входят биты с номерами 8-15.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0	0	1	1	1	0	0		0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

В этой группе 3 единицы (нечетное число), поэтому значение и четвертого контрольного бита — 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

Наконец, в пятую группу входят биты с номерами 16-19.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

В этой группе только 1 единица (нечетное число), поэтому значение и пятого контрольного бита — 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	k_5	m_{12}	m_{13}	m_{14}
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Ответ:0011100101010101010.

Пример 22. Исправить возможную ошибку и раскодировать сообщения, закодированное самовосстанавливающимся кодом Хэмминга: 110001010100101

Решение:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

Первый контрольный бит отвечает за биты с нечетными номерами.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

В этой группе 3 единицы (нечетное число), поэтому значение первого контрольного бита — 1.

Во вторую группу входят биты с номерами 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

В этой группе 4 единицы (четное число), поэтому значение второго контрольного бита — 0.

В третью группу входят биты с номерами 4-7, 12-15.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

В этой группе 3 единицы (нечетное число), поэтому значение третьего контрольного бита — 1.

В четвертую группу входят биты с номерами 8-15.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

В этой группе 4 единицы (четное число), поэтому значение четвертого контрольного бита — 0.

k_4	k_3	k_2	k_1
0	1	0	1

Значит ошибка в пятом бите. Исправим ее.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_1	k_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

Теперь осталось убрать контрольные биты. Оставшиеся информационные биты составят исходное сообщение.

Ответ:01100100101

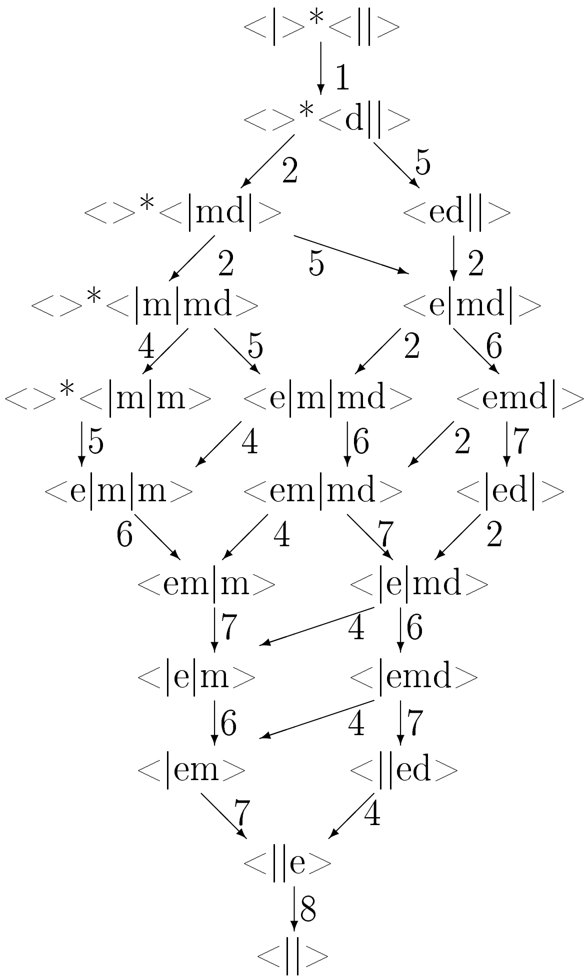
5 Системы текстовых замен

Пример 23. Для строки $<|>*<||>$ построить все возможные вычисления.

Дана система текстовых замен:

1. $| > * < \to > * < d$
2. $d| \to |md$
3. $dm \to md$
4. $d > \to >$
5. $<> * < \to < e$
6. $e| \to e$
7. $em \to |e$
8. $e > \to >$

Решение:



Ответ:

1224567678	1252676748	1522674678
1225467678	1256247678	1522676478
1225647678	1256274678	1522676748
1225674678	1256276478	1526247678
1225676478	1256276748	1526274678
1225676748	1256724678	1526276478
1252467678	1256726478	1526276748
1252647678	1256726748	1526724678
1252674678	1522467678	1526726478
1252676478	1522647678	1526726748

Пример 24. Для строки $<|>*<||>$ построить вычисление по марковской стратегии при приоритете 12345678.

Решение:

Для решения воспользуемся деревом из предыдущего примера.

Для строки $<|>*<||>$ можно применить только правило 1.

Для полученной строки $<>*<\mathrm{d}||>$ уже можно применить два правила: 2 и 5. В списке приоритетов правило 2 стоит выше. Его и применяем.

Приведем всё вычисление. Указав номер применяемого правила, в скобках приведем альтернативы.

$$< | > * < || > \xrightarrow{\quad 1 \quad} <> * < d|| > \xrightarrow{\quad 2[5] \quad} <> * < |md| > \xrightarrow{\quad 2[5] \quad}$$

$$<> * < |m|md > \xrightarrow{\quad 4 \quad} <> * < |m|m > \xrightarrow{\quad 5 \quad} < e|m|m > \xrightarrow{\quad 6 \quad}$$

$$< em|m > \xrightarrow{\quad 7 \quad} < |e|m > \xrightarrow{\quad 6 \quad} < |em > \xrightarrow{\quad 7 \quad}$$

$$< ||e > \xrightarrow{\quad 8 \quad} < || > .$$

Ответ:1224567678.

Пример 25. Для строки $<|>*<||>$ построить вычисление по марковской стратегии при приоритете 87654321.

Решение:

Для решения воспользуемся деревом из предыдущего примера.

Для строки $<|>*<||>$ можно применить только правило 1.

Для полученной строки <>*<d||> уже можно применить два правила: 2 и 5. В списке приоритетов правило 5 стоит выше. Его и применяем.

Приведем всё вычисление. Указав номер применяемого правила, в скобках приведем альтернативы.

$$< | > * < || > \xrightarrow{\quad 1 \quad} <> * < d|| > \xrightarrow{5[2]} < ed|| > \xrightarrow{\quad 2 \quad}$$
$$< e|md| > \xrightarrow{6[2]} < emd| > \xrightarrow{7[2]} < |ed| > \xrightarrow{\quad 2 \quad} < |e|md >$$
$$\xrightarrow{6[4]} < ||emd > \xrightarrow{7[4]} < ||ed > \xrightarrow{\quad 4 \quad} < ||e > \xrightarrow{\quad 8 \quad} < || > .$$

Ответ:1526726748.

Пример 26. Задана система текстовых замен: $O \to \varepsilon$, $OO \to \varepsilon$. Построить все вычисления для строки $OOOL$.

Решение:

Казалось бы все очень просто. Имеется всего три решения: $OOOL \to OOL \to OL \to L$, $OOOL \to OOL \to L$ и $OOOL \to OL \to L$. Однако следует заметить, что первое правило можно применить сразу в трех местах $OOOL \to \varepsilon OOL$, $OOOL \to O\varepsilon OL$ и $OOOL \to OO\varepsilon L$. Поскольку символ ε обозначает пустую строку и не отображается, внешне эти три применения первого правила выглядят абсолютно одинаково. Однако это три различных применения правил текстовых замен и они порождают различные вычисления. Поскольку к полученной строке можно сразу применить второе правило, после чего получится терминальное слово, то имеется три различных вычислений $OOOL \to OOL \to L$. А вот снова применить первое правило можно уже в двух местах: $OOL \to \varepsilon OL$ и $OOL \to O\varepsilon L$, после чего остается применить еще один раз первое правило, то получаем шесть вычислений $OOOL \to OOL \to OL \to L$.

Аналогично и вычисление $OOOL \to OO\varepsilon L$ получается двумя способами. Таким образом имеется 11 различных решений.

Ответ:

111	111	111	12	12	21
111	111	111	12	21	

6 Система подстановки термов

Пример 27. Система подстановки термов состоит из следующих правил:

1. $succ(pred(x)) \to x$,
2. $add(zero,\ x) \to x$,
3. $add(succ(x),\ y) \to succ(add(x,\ y))$,
4. $mult(zero,\ x) \to zero$,
5. $mult(succ(x),\ y) \to add(y,\ mult(x,\ y))$.

Построить все вычисления для исходного терма

$$mult(succ(zero), succ(succ(zero))).$$

Решение:

$$\begin{tikzcd}
\text{mult(succ(zero),succ(succ(zero)))} \arrow[d, "5"] & \\
\text{add(succ(succ(zero)), mult(zero,succ(succ(zero))))} \arrow[d, "3"'] \arrow[dr, "4"] & \\
\text{succ(add(succ(zero), mult(zero,succ(succ(zero)))))} \arrow[d, "3"] & \text{add(succ(succ(zero)),zero)} \arrow[dl, "4"'] \arrow[d, "3"] \\
\text{succ(succ(add(zero, mult(zero,succ(succ(zero))))))} \arrow[d, "2"] & \text{succ(add(succ(zero),zero))} \arrow[dl, "4"'] \arrow[d, "3"] \\
\text{succ(succ(mult(zero,succ(succ(zero)))))} \arrow[d, "4"] & \text{succ(succ(add(zero,zero))} \arrow[dl, "2"] \\
\text{succ(succ(zero))} &
\end{tikzcd}$$

Ответ:
53324
53342
53432
54332

7 Основы машинной арифметики

Пример 28. Используя оба универсальных алгоритма перевода перевести 10110010.101 из двоичной системы счисления в системы счисления с основаниями 5, 10 и 12.

Решение:

Начнем с пятеричной системы счисления. Первый алгоритм переводит целую часть числа делением на основание новой системы счисления, записанное в старой системе счисления. Число 5 в двоичной системе счисления имеет вид 101.

10110010:101=100011 (в остатке 11).

100011:101=111 (в остатке 0).

111:101=1 (в остатке 10).

Итак полученное число, цифры которого записаны в исходной двоичной системе, имеет вид 1 10 0 11. Записав каждую цифру в новой системе счисления получим 1203.

Теперь займемся дробной частью.

0.101*101=11.001 (11 или 3 — первая цифра дробной части ответа).

0.001*101=0.101 (0 — вторая цифра дробной части ответа).

Поскольку эти два умножения в дальнейшем будут непрерывно повторяться, имеем период.

В результате перевода получаем 1203.(30).

Теперь переведем в десятеричную систему счисления. Число 10 в двоичной системе счисления имеет вид 1010.

10110010:1010=10001 (в остатке 1000).

10001:1010=1 (в остатке 111).

Итак полученное число, цифры которого записаны в исходной двоичной системе, имеет вид 1 111 1000. Записав каждую цифру в новой системе счисления получим 178.

Теперь займемся дробной частью.

0.101*1010=110.01 (110 или 6 — первая цифра дробной части ответа).

0.01*1010=10.1 (10 или 2 — вторая цифра дробной части ответа).

0.1*1010=101 (101 или 5 — последняя цифра)

В результате перевода получаем 178.625.

Теперь переведем в двенадцатиричную систему счисления. Число 12 в двоичной системе счисления имеет вид 1100.

10110010:1100=1110 (в остатке 1010).

1110:1010=1 (в остатке 10).

Итак полученное число, цифры которого записаны в исходной двоичной системе, имеет вид 1 10 1010. Записав каждую цифру в новой системе счисления получим 12A.

Теперь займемся дробной частью.

0.101*1100=111.1 (111 или 7 — первая цифра дробной части ответа).

0.1*1100=110 (110 или 6 — вторая цифра дробной части ответа).

В результате перевода получаем 12A.76.

Теперь применим второй алгоритм.

Для удобства начнем с десятичной системы счисления.

$10110010.101_2 = 1 * 2^7 + 1 * 2^5 + 1.2^4 + 1 * 2 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-3} = 256 + 32 + 16 + 2 + 0.5 + 0.125 = 178.625_{10}$.

Для двенадцатиричной системы действия будут выглядеть уже так:

$10110010.101_2 = 1 * 2^7 + 1 * 2^5 + 1.2^4 + 1 * 2 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-3} = 194 + 28 + 14 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 12A + \frac{5}{8} = 12A.76_{12}$.

А вот как это выглядит для пятеричной системы счисления:

$10110010.101_2 = 1 * 2^{12} + 1 * 2^5 + 1.2^4 + 1 * 2 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-3} = 1003 + 112 + 31 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} = 1203 + \frac{20}{31} = 1203.(30)_5$.

Ответ:

$10110010.101_2 = 1203.(30)_5 = 178.625_{10} = 12A.76_{12}$

Пример 29. Для выражений 61-34 и 34-61 провести вычисление с использованием обратного и дополнительного кодов.

Решение: Сначала переведем оба числа в двоичную систему счисления.

$61_{10} = 111101_2$, $34_{10} = 100010_2$.

Поскольку оба числа имеют по 6 бит нам потребуется как минимум 7 бит. Выберем $n = 7$.

Теперь построим обратные коды отрицательных чисел. Для этого инвертируем все значащие биты, а в знаковый разряд поставим 1.

$[-61]_{\text{обр}} = 1000010$, $[-34]_{\text{обр}} = 1011101$.

Чтобы получить дополнительный код, достаточно к обратному коду прибавить 1.

$[-61]_{\text{доп}} = 1000011$, $[-34]_{\text{доп}} = 1011110$.

Теперь построим 34+[-61].

Для обратного кода: 0100010+1000010=1100100.

Для дополнительного кода: 0100010+1000011=1100101.

Поскольку первый бит результата 1, результат — отрицательное число в том коде, в котором находилось вычитаемое.

Чтобы понять, каков результат в десятичной системе нужно проделать обратные действия. В дополнительном коде нужно сначала вычесть единицу, после чего получится то же число, что и в обратном коде. После чего нужно инвертировать все разряды. Получим $-0011011_2 = -27_{10}$.

Теперь построим 61+[-34].

Для обратного кода: 0111101+1011101=10011010.

Для дополнительного кода: 0111101+1011110=10011011.

В результате получилось 8 бит. В обратном коде первый (лишний) бит нужно прибавить к остальной части (1+0011010=0011011), а в дополнительном коде просто отбросить (10011011=0011011).

Получим $-011011_2 = 27_{10}$.

Ответ:

0100010+1000010=1100100

0100010+1000011=1100101

0111101+1011101=10011010=1+0011010=0011011

0111101+1011110=10011011=0011011