

Д.В. БЕКЛЕМИШЕВ

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ИЗ КУРСА  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ  
И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ



Д.В. Беклемишев

---

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ИЗ КУРСА  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ  
И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2014

УДК 514  
ББК 22.151  
Б 42

Беклемишев Д. В. **Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 192 с. — ISBN 978-5-9221-1480-6.

В пособии представлены решения задач из «Курса аналитической геометрии и линейной алгебры» Д. В. Беклемишева. Расположение задач соответствует главам и параграфам учебника, в решениях используются только сведения, изложенные в соответствующих разделах учебника.

Для студентов высших учебных заведений.

---

Учебное издание

*БЕКЛЕМИШЕВ Дмитрий Владимирович*

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ  
ИЗ КУРСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ  
АЛГЕБРЫ**

Редактор *Н. Б. Бартошевич-Жагель*  
Оригинал-макет: *Д. В. Горбачев*  
Оформление переплета: *Д. Б. Белуха*

Подписано в печать 14.10.2013. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 13,2. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmale@maik.ru](mailto:fmale@maik.ru);  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей  
в ГУП Чувашской Республики «ИПК «Чувашия»,  
Мининформполитики Чувашии,  
428019 г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1480-6



9 785922 114806

ISBN 978-5-9221-1480-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2014

© Д. В. Беклемишев, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	4
Глава I § 1 . . . . .	5
Глава I § 2 . . . . .	8
Глава I § 3 . . . . .	9
Глава I § 4 . . . . .	11
Глава I § 5 . . . . .	14
Глава II § 1 . . . . .	18
Глава II § 2 . . . . .	21
Глава II § 3 . . . . .	26
Глава III § 1 . . . . .	34
Глава III § 2 . . . . .	39
Глава III § 3 . . . . .	46
Глава III § 4 . . . . .	51
Глава IV § 1 . . . . .	57
Глава IV § 2 . . . . .	58
Глава IV § 3 . . . . .	65
Глава V § 1 . . . . .	72
Глава V § 2 . . . . .	75
Глава V § 3 . . . . .	80
Глава V § 4 . . . . .	85
Глава V § 5 . . . . .	90
Глава V § 6 . . . . .	91
Глава VI § 1 . . . . .	97
Глава VI § 2 . . . . .	101
Глава VI § 3 . . . . .	106
Глава VI § 4 . . . . .	111
Глава VI § 5 . . . . .	119
Глава VI § 6 . . . . .	121
Глава VI § 7 . . . . .	128
Глава VII § 1 . . . . .	135
Глава VII § 2 . . . . .	144
Глава VII § 3 . . . . .	161
Глава VII § 4 . . . . .	169
Глава VIII § 1 . . . . .	174
Глава VIII § 2 . . . . .	176
Глава IX § 1 . . . . .	182
Глава IX § 2 . . . . .	186
Глава IX § 3 . . . . .	187

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом пособии представлены решения задач из моего учебника «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры», а также немногих других задач, которые мне показались полезными. Эти задачи отмечены звездочками.

Расположение задач соответствует главам и параграфам учебника, и в решениях используются только те сведения, которые изложены в соответствующих разделах. Поэтому читатель в ряде случаев сможет заметить, что, используя более продвинутые методы, можно существенно улучшить решение.

Все необходимые факты используются в том виде, в котором они приведены в учебнике. Кроме того, выражение «как известно» или любое эквивалентное можно рассматривать как неявную ссылку на учебник. Ссылки на теоремы или формулы, которые отсылают к учебнику, начинаются с буквы «К».

Людмила Анатольевна Беклемишева и Тамара Харитоновна Яковлева прочитали рукопись. Я очень благодарен им за сделанные замечания.

## Глава I § 1

**1.** Укажите на плоскости три таких вектора, по которым любой вектор этой плоскости может быть разложен с положительными коэффициентами.

**Решение.** Выберем векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  одинаковыми по длине и такими, чтобы каждый из них составлял с остальными углы, равные  $2\pi/3$ .

Нетрудно проверить, что  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Тогда, если  $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$  — какое-либо разложение вектора  $\mathbf{x}$ , то верно и равенство  $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$  при любом  $\lambda$ . Ясно, что при  $\lambda > \max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$  коэффициенты последнего разложения будут положительными. Таким образом, каждый вектор (в том числе и нулевой) может быть разложен с положительными коэффициентами.

Здесь видно также и условие, при котором по какой-либо тройке векторов можно разложить любой вектор с положительными коэффициентами. Именно, необходимо и достаточно, чтобы она была линейно зависимой и коэффициенты нулевой линейной комбинации были положительными.

**2.** Докажите, что точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$  тогда и только тогда, когда существует число  $\lambda \in [0, 1]$ , такое что для любой точки  $O$  выполнено  $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA}$ . Если  $\lambda$  дано, то в каком отношении точка  $C$  делит отрезок?

**Решение.** Точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$  тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ , где  $\lambda \in [0, 1]$ . Выберем какую-нибудь точку  $O$ . Тогда  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$ , а  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ . Поэтому  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ . Это равносильно доказываемому равенству.

Ясно, что  $\overrightarrow{CB} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB}$ . Значение  $\lambda = 1$  соответствует  $C = B$ . При  $\lambda \neq 1$

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\lambda|\overrightarrow{AB}|}{(1 - \lambda)|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

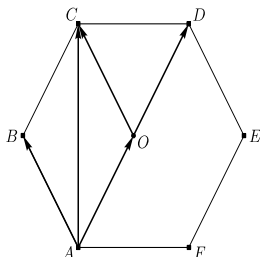


Рис. 1

**3.** Дан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ ,  $|AB| = 2$ . Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AC}$  в базисе  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ .

**Решение.** Пусть точка  $O$  — центр шестиугольника. Как видно из рис. 1,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ . Следовательно, искомые координаты  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

Обратим внимание на то, что результат не зависит от длины стороны шестиугольника. Координаты никогда не зависят от выбора единицы измерения длин.

**4.** В некотором базисе на плоскости заданы координаты векторов  $\mathbf{a}(1, 2)$ ,  $\mathbf{b}(2, 3)$  и  $\mathbf{c}(-1, 1)$ . Проверьте, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  линейно независимы. Найдите координаты  $\mathbf{c}$  в базисе  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ .

**Решение.** Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , равную нулевому вектору:  $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Это векторное равенство равносильно двум равенствам, связывающим их координаты:  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 = 0$  и  $\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 3 = 0$ . Умножим первое равенство на 2 и вычтем из второго. Так мы найдем, что  $\beta = 0$ . Подставляя это в первое равенство, видим, что и  $\alpha = 0$ . Таким образом, из обращения в нуль линейной комбинации следует, что ее коэффициенты равны нулю. Векторы линейно независимы.

Пусть  $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ . Это равенство равносильно системе линейных уравнений с неизвестными  $x$  и  $y$ :

$$x + 2y = -1,$$

$$2x + 3y = 1.$$

Подставим  $x = -1 - 2y$  из первого уравнения во второе и найдем, что  $y = -3$ . Следовательно, решение системы  $x = 5$ ;  $y = -3$ , и  $c = 5a - 3b$ .

**5.** Даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Найдите такую точку  $O$ , что  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \mathbf{0}$ . Решив аналогичную задачу для четырех точек, докажите, что в треугольной пирамиде отрезки, соединяющие вершины с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

**Решение.** Пусть такая точка  $O$  существует. Тогда для произвольной точки  $P$  выполнено равенство

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 3\vec{PO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{PO}. \quad (1)$$

Положив  $P = A$ , мы получим

$$\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}), \quad (2)$$

откуда следует, что такой точкой  $O$  может быть только точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ .

С другой стороны, если  $O$  — центр тяжести  $\triangle ABC$ , то  $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OD}$ , где  $D$  — середина стороны  $BC$ . Но и  $\vec{AO} = 2\vec{OD}$ . Отсюда  $\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA} = \mathbf{0}$ . Таким образом, точка  $O$  пересечения медиан  $\triangle ABC$  — единственная точка, удовлетворяющая условию задачи.

Теперь пусть даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Если  $Q$  — центр тяжести  $\triangle ABC$ , то, полагая в равенстве (1)  $P = D$  (и  $O = Q$ ), мы получим

$$\vec{DQ} = \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}).$$

Допустим, что существует точка  $O$ , для которой

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Тогда аналогично формуле (2) находим, что

$$\vec{DO} = \frac{1}{4}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}). \quad (4)$$

Поэтому  $\vec{DO} = (3/4)\vec{DQ}$ , и такой точкой  $O$  может быть только точка на отрезке  $DQ$ , делящая его в отношении 3 : 1.

С другой стороны, пусть  $O$  — это точка на отрезке  $DQ$ , делящая его в отношении 3 : 1, т.е.  $\vec{DO} = (3/4)\vec{DQ}$ . Тогда  $O$



удовлетворяет равенству (4). Подставим в него  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ . Мы получим

$$4\overrightarrow{DO} = 3\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Это равносильно доказываемому равенству (3).

В равенство (3), однозначно определяющее точку  $O$ , все четыре исходные точки входят симметрично. Это означает, что  $O$  лежит на всех отрезках, соединяющих вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположащих граней и делит каждый из них в отношении 3 : 1.

## Глава I § 2

**1.** Дан параллелограмм  $OABC$ . В нем  $|\overrightarrow{OA}| = 2$ ,  $|\overrightarrow{OC}| = 3$ , угол  $AOC$  равен  $\pi/3$ . Найдите координаты точки  $B$  в системе координат  $O$ ,  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OA}$ .

**Решение.**  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ . Поэтому точка  $B$  имеет координаты  $(1, 1)$  независимо от длин векторов и угла между ними.

**2.** Даны три точки  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Найдите координаты вершины  $D$  параллелограмма  $ABCD$ .

**Решение.** Для того чтобы из точки  $A$  попасть в точку  $D$ , нужно от  $A$  отложить вектор  $\overrightarrow{BC}$ . Координаты вектора равны разностям координат конца и начала вектора, а значит,  $\overrightarrow{BC}$  имеет координаты  $(x_3 - x_2, y_3 - y_2)$ . Таким образом, координаты точки  $D$  равны  $x_1 + x_3 - x_2$  и  $y_1 + y_3 - y_2$ .

**3.** Нарисуйте на плоскости множества точек, полярные координаты которых связаны соотношениями а)  $r = 2/\cos \varphi$ , б)  $r = 2 \cos \varphi$ .

**Решение.** а) Если  $\cos \varphi \leq 0$ , то радиус не определен и кривая не имеет точек при  $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ . Согласно уравнению  $r \cos \varphi = 2$  длина радиуса такова, что его проекция на полярную ось постоянна и равна 2. Таким образом, множество точек — прямая линия, перпендикулярная полярной оси и пересекающая ее в точке 2.

б) Если  $\cos \varphi < 0$ , то радиус не определен и кривая не имеет точек при  $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ . При  $\varphi$ , равном  $\pi/2$  или  $3\pi/2$ , кривая входит в полюс  $O$ . При  $\varphi = 0$  точка кривой  $A$  расположена на полярной оси на расстоянии 2 от полюса (рис. 2). Величина

$r = 2 \cos \varphi$  — длина катета прямоугольного треугольника с гипотенузой длины 2 и углом  $\varphi$ . Поэтому в общем случае точка кривой  $M$  — вершина прямого угла, составленного радиусом  $OM$  и отрезком  $AM$ . Отсюда следует, что кривая — окружность с диаметром  $OA$ .

4. Пусть  $O, l, \mathbf{n}$  — сферическая система координат. Введем декартову прямоугольную систему координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{e}_1$  направлен вдоль  $l$ , а угол  $\pi/2$  от  $\mathbf{e}_1$  к  $\mathbf{e}_2$  отсчитывается в сторону возрастания полярного угла. Напишите формулы, выражающие декартовы координаты через сферические.

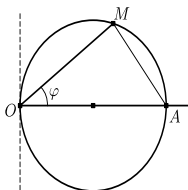


Рис. 2

Решение. Пусть  $M$  — точка со сферическими координатами  $r, \varphi$  и  $\theta$ , а ее декартовы координаты  $(x, y, z)$ . Тогда проекция  $M'$  точки  $M$  на плоскость  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  имеет сферические координаты  $(r \cos \theta, \varphi, 0)$ . Первые две из них — полярные координаты  $M'$  в полярной системе координат  $O, l$  в плоскости  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ . Следовательно,  $x = (r \cos \theta) \cos \varphi$  и  $y = (r \cos \theta) \sin \varphi$ . Координата  $z$  равна проекции  $\overrightarrow{OM}$  на ось с направляющим вектором  $\mathbf{n}$ , т. е.  $z = r \cos(\pi/2 - \theta) = r \sin \theta$ . Итак,

$$x = r \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \sin \theta.$$

## Глава I § 3

1. Выведите формулы замены базиса и замены системы координат на прямой линии. Как меняются координаты точек прямой, если при неизменном начале координат длина базисного вектора увеличивается вдвое?

**Решение.** Пусть  $O, \mathbf{e}$  и  $O', \mathbf{e}'$  — две системы координат на прямой линии и  $\mathbf{e}' = \alpha \mathbf{e}$ , а точка  $O'$  имеет координату  $\beta$  в системе координат  $O, \mathbf{e}$ . Последнее означает, что  $\overrightarrow{OO'} = \beta \mathbf{e}$ .

Произвольный вектор  $\mathbf{a}$  на прямой раскладывается по базисам  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$  соответственно как  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$  и  $\mathbf{a} = a'\mathbf{e}'$ . Значит,  $a\mathbf{e} = a'\mathbf{e}' = a'\alpha\mathbf{e}$ . Отсюда следует связь координат вектора в двух базисах:  $a = \alpha a'$ .

Рассмотрим произвольную точку  $M$ , имеющую координаты  $x$  и  $x'$  в этих системах координат. Мы имеем  $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}$ , а с другой стороны

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \beta\mathbf{e} + x'\mathbf{e}' = \beta\mathbf{e} + x'\alpha\mathbf{e}.$$

Отсюда получается ответ:

$$x = \alpha x' + \beta.$$

Если при неизменном начале координат длина базисного вектора увеличивается вдвое, то  $\beta = 0$ , а  $\alpha = 2$  и, как мы видели,  $x = 2x'$ . Это означает, что координаты всех точек уменьшились вдвое:  $x' = (1/2)x$ .

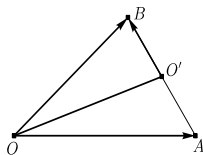


Рис. 3

**2.** Пусть  $O'$  — середина стороны  $AB$  треугольника  $OAB$ . Напишите формулы перехода от системы координат  $O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$  к системе координат  $O', \overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'B}$ .

**Решение.** Координаты точки  $O'$  в исходной системе координат — это компоненты  $\overrightarrow{OO'}$  в базисе  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ . Они равны  $(1/2, 1/2)$  (рис. 3). В соответствии с этим, координаты  $\overrightarrow{O'O}$  равны  $(-1/2, -1/2)$ . Далее,  $\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB}$ . Отсюда мы получаем  $\overrightarrow{O'B}(1/2, -1/2)$ .

Теперь можно выписать формулы перехода:

$$x = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2},$$

$$y = -\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}.$$

**3.** Дана декартова система координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Как расположена относительно нее система координат  $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ , если формулы перехода имеют вид  $x = 1 - y' - z'$ ,  $y = 1 - x' - z'$ ,  $z = 1 - x' - y'$ .

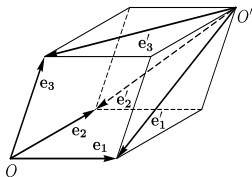


Рис. 4

**Решение.** Свободные члены в правых частях равенств  $(1, 1, 1)$ . Следовательно, начало новой системы координат — та вершина параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , которая не лежит ни на одной координатной плоскости. Координаты новых базисных векторов:  $\mathbf{e}'_1(0, -1, -1)$ ,  $\mathbf{e}'_2(-1, 0, -1)$  и  $\mathbf{e}'_3(-1, -1, 0)$ . Это означает, что векторы  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  направлены из  $O'$  по диагоналям граней параллелепипеда, сходящимся в вершине  $O'$  таким образом, что совпадают концы векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}'_2$ , а также  $\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{e}'_3$  (рис. 4).

## Глава I § 4

**1.** Пусть в некотором базисе скалярное произведение вычисляется по формуле  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ . Докажите, что базис ортонормированный.

**Решение.** Вычислим по этой формуле скалярный квадрат вектора  $\mathbf{e}_1$ . Его координаты  $(1, 0, 0)$ , и  $|\mathbf{e}_1|^2 = 1$ . Аналогично проверяется, что длины  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  равны 1. Скалярное произведение векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , вычисленное по той же формуле, равно  $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ . Эти векторы ортогональны. Точно также проверяется ортогональность остальных пар векторов.

**2.** Используя свойства скалярного умножения, докажите, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

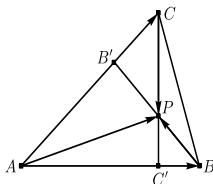


Рис. 5

**Решение.** Пусть  $BB'$  и  $CC'$  — высоты  $\triangle ABC$ , а  $P$  — точка их пересечения (рис. 5). Вектор  $\overrightarrow{AP}$  можно представить как  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$  и как  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$ . Умножим скалярно первое из равенств на  $\overrightarrow{AC}$ , а второе на  $\overrightarrow{AB}$ . Так как  $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AC}) = 0$  и  $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AB}) = 0$ , мы получим  $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  и  $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Вычтем одно из этих равенств из другого:

$$(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0.$$

Это означает, что  $\overrightarrow{AP}$  перпендикулярен стороне  $BC$ , т. е. прямая, проходящая через вершину  $A$  и точку пересечения высот  $BB'$  и  $CC'$ , также является высотой. Это и требовалось доказать.

**3.** Нарисуйте правильный треугольник  $ABC$  и примите длину его стороны за 1. Нарисуйте на том же чертеже базис, биортогональный базису  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**Решение.** Вектор  $\mathbf{e}_1^*$  ортогонален вектору  $\mathbf{e}_2$ . Так как  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1^*) = 1 > 0$ , вектор  $\mathbf{e}_1^*$  направлен так, что угол между  $\mathbf{e}_1^*$  и  $\mathbf{e}_1$  острый. Легко видеть, что этот угол равен  $\pi/6$  (рис. 6). Итак,  $|\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}_1^*| \cos(\pi/6) = 1$ . Поэтому  $|\mathbf{e}_1^*| = 2/\sqrt{3}$ , примерно 1,15. Аналогично строится и  $\mathbf{e}_2^*$ .

**4.** Найдите сумму векторных проекций вектора  $\mathbf{a}$  на стороны заданного правильного треугольника.

**Решение.** Направим базисные векторы по двум сторонам треугольника:  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ , и пусть  $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$ . Проекция суммы векторов равна сумме их проекций, и проекция

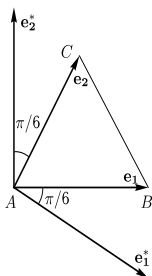


Рис. 6

произведения вектора на число равна произведению проекции этого вектора на то же число. Поэтому мы можем написать

$$\text{Пр}_{e_1} \mathbf{a} = \alpha_1 \text{Пр}_{e_1} e_1 + \alpha_2 \text{Пр}_{e_1} e_2,$$

$$\text{Пр}_{e_2} \mathbf{a} = \alpha_1 \text{Пр}_{e_2} e_1 + \alpha_2 \text{Пр}_{e_2} e_2.$$

Вектор  $\mathbf{e} = e_2 - e_1$  направлен вдоль третьей стороны треугольника. Для него  $\text{Пр}_{\mathbf{e}} \mathbf{a} = \alpha_1 \text{Пр}_{\mathbf{e}} e_1 + \alpha_2 \text{Пр}_{\mathbf{e}} e_2$ . Складывая все три равенства, мы увидим, что искомая сумма проекций  $\vec{s}(\mathbf{a})$  равна

$$\vec{s}(\mathbf{a}) = \alpha_1 \vec{s}(e_1) + \alpha_2 \vec{s}(e_2), \quad (5)$$

и задача сводится к нахождению суммы проекций на все стороны треугольника для векторов  $e_1$  и  $e_2$ .

Легко видеть, что  $\text{Пр}_{e_1} e_1 = e_1$ . Векторные проекции вектора на две параллельные прямые — равные векторы. Поэтому, сдвинув одну из сторон треугольника, мы можем считать, что длина стороны равна 1. Тогда  $\text{Пр}_{e_2} e_1 = (e_2, e_1) e_2 = \frac{1}{2} e_2$ , и  $\text{Пр}_{\mathbf{e}} e_1 = (e_1, e_2 - e_1) e = -\frac{1}{2} e = \frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2$ . Складывая полученные проекции, мы видим, что  $\vec{s}(e_1) = \frac{3}{2} e_1$ . Аналогично,  $\vec{s}(e_2) = \frac{3}{2} e_2$ .

Подставляя этот результат в равенство (5), мы приходим к результату

$$\vec{s}(\mathbf{a}) = \frac{3}{2} \mathbf{a}.$$

## Глава I § 5

**1.** Построены векторы, перпендикулярные граням произвольного тетраэдра, равные по длине площадям этих граней и направленные в сторону вершин, противоположных граням. Докажите, что сумма этих векторов равна 0.

**Решение.** Примем за базисные векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , направленные по ребрам тетраэдра, исходящим из одной вершины. Тогда три из интересующих нас векторов можно выразить следующим образом:  $\mathbf{p} = \frac{1}{2} [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ ,  $\mathbf{q} = \frac{1}{2} [\mathbf{c}, \mathbf{b}]$  и  $\mathbf{r} = \frac{1}{2} [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ . Четвертая грань построена на ребрах  $\mathbf{c} - \mathbf{a}$  и  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ , и соответствующий вектор равен

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} [\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}] = \frac{1}{2} ([\mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{a}]).$$

Складывая полученные векторы, мы приходим к требуемому результату.

**2.** Дан трехгранный угол. Используя свойства векторного произведения, найдите выражение какого-либо из его двугранных углов через плоские углы.

**Решение.** Обозначим через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  направляющие векторы ребер трехгранного угла. Длины этих векторов будем считать равными 1. Через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  обозначим плоские углы в гранях, противолежащих соответственно  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Найдем двугранный угол  $\varphi$  с ребром  $\mathbf{a}$ . Он равен углу между нормальными к граням, причем если одна из нормалей направлена внутрь трехгранного угла, то вторая должна быть направлена во внешнюю область. Поэтому направляющими векторами нормалей будут  $\mathbf{p} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $\mathbf{q} = [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ . Очевидно, что  $|\mathbf{p}| = \sin \gamma$ ,  $|\mathbf{q}| = \sin \beta$ .

Найдем скалярное произведение  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Речь идет о преобразовании скалярного произведения двух векторных произведений. Ввиду того что это преобразование полезно и в других задачах, выполним его для четырех произвольных векторов. Произведение  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}])$  можно рассматривать как смешанное произведение  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$  и потому как скалярное произведение  $(\mathbf{c}, [\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]])$ . Здесь двойное векторное произведение можно преобразовать по соответствующей формуле

$$[\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{d}).$$

После умножения на  $\mathbf{c}$  мы получаем

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}.$$

Применяя полученный результат к нашей задаче, нужно положить во втором сомножителе  $\mathbf{c} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{d} = \mathbf{c}$ . Мы получим

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{a}|^2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma,$$

и окончательный результат

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma \sin \beta}.$$

**3.** Пусть на ориентированной плоскости дан положительный базис, такой что  $|\mathbf{e}_1| = 2$ ,  $|\mathbf{e}_2| = 3$  и  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 2$ . Найдите площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}(1, 2)$  и  $\mathbf{b}(2, 1)$ .

**Решение.** По формуле для площади ориентированного параллелограмма имеем

$$S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} S_{\pm}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

Так как базис положительный,

$$S_{\pm}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \sqrt{|\mathbf{e}_1|^2 |\mathbf{e}_2|^2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}.$$

Таким образом,  $S_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -12\sqrt{2}$ .

**4.** При каком условии на матрицу перехода от одного базиса к другому оба базиса ориентированы одинаково? Вопрос поставлен как для плоскости, так и для пространства.

**Решение.** Матрица перехода — это матрица, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов в старом базисе. Пусть  $\mathbf{e}'_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}'_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2$ . Тогда матрицей перехода будет матрица

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Напишем формулу для площади ориентированного параллелограмма, построенного на  $\mathbf{e}'_1$  и  $\mathbf{e}'_2$ :

$$S_{\pm}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} S_{\pm}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$



Из нее следует, что обе пары векторов ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда детерминант матрицы перехода положителен.

Тот же результат мы получим и для пространства, если напишем выражение для смешанного произведения  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  по координатам этих векторов в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ :

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

**5.** Какова размерность векторов взаимного базиса  $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ , если векторы базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  измеряются в сантиметрах?

**Решение.** При этом условии  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  измеряется в  $\text{см}^3$ , а векторные произведения  $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ ,  $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$  и  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  — в  $\text{см}^2$ . Поэтому ответ:  $\text{см}^{-1}$ .

**6.** Пусть стороны треугольника  $P_1P_2P_3$  равны медианам треугольника  $A_1A_2A_3$ . Нужно найти отношение площадей этих треугольников.

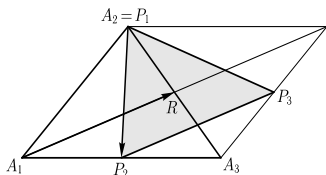


Рис. 7

**Решение.** Ответ  $3/4$ . Его можно непосредственно получить из рисунка, но нас сейчас интересует не ответ, а способы аналитического решения задачи. Пусть  $R$  — основание медианы, исходящей из вершины  $A_1$ , а основание медианы, исходящей из  $A_2 = P_1$ , есть  $P_2$ . Выберем в качестве базисных векторы  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$  и  $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{A_1A_3}$ .

Тогда векторы  $\mathbf{p} = \overrightarrow{A_1R}$  и  $\mathbf{q} = \overrightarrow{A_2P_2}$  имеют координаты соответственно

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(-1, \frac{1}{2}\right).$$

Доказывалась формула для площади ориентированного параллелограмма на плоскости

$$S_{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} S_{\pm}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2),$$

в которой детерминант составлен из координат векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Согласно этой формуле, отношение площадей параллелограммов, а с ним и площадей данных треугольников, равно абсолютной величине детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix},$$

т. е.  $3/4$ .

Это решение не длиннее геометрического, так как для объяснения последнего тоже потребовалось бы несколько строчек. Однако аналитическое решение имеет то преимущество, что не требует воображения, необходимого для того, чтобы сделать подходящий рисунок.

Собственно, именно к этому стремился Декарт, создавая аналитический метод.

## Глава II § 1

**1.** В декартовой прямоугольной системе координат даны точки  $A(1, 0)$  и  $B(4, 0)$ . Напишите уравнение множества точек, отстоящих от  $B$  вдвое дальше, чем от  $A$ .

**Решение.** Пусть  $(x, y)$  — координаты произвольной точки  $M$ . Точка принадлежит множеству тогда и только тогда, когда  $|MB| = 2|AM|$ . В координатах это условие выражается равенством  $(x - 4)^2 + y^2 = 4[(x - 1)^2 + y^2]$ . Раскроем скобки:  $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4x^2 + 8x - 4 - 4y^2 = 0$  и приведем подобные члены:  $-3x^2 - 3y^2 + 12 = 0$ . Уравнение принимает вид  $x^2 + y^2 = 4$ .

Исследуемое множество — окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Она пересекает ось  $Ox$  в точках с координатами  $(2, 0)$  и  $(-2, 0)$ , которые делят отрезок  $AB$  в отношении 1 : 2.

**2.** Каждое из двух уравнений системы  $(x - 2)^2 + y^2 = r^2$ ,  $(x + 2)^2 + y^2 = r^2$  в декартовой прямоугольной системе координат определяет окружность. Вычитая одно уравнение из другого, мы получим следствие этой системы:  $x = 0$ . Как геометрически истолковать этот результат? Рассмотрите случаи  $r = 3$  и  $r = 1$ .

**Решение.** Заданная система уравнений — уравнение множества точек пересечения двух окружностей: пары точек при  $r = 3$  и пустого множества при  $r = 1$ . Разность уравнений — следствие системы. Оно определяет множество, содержащее точки пересечения окружностей. При  $r = 3$  точки лежат на оси  $Oy$  и прямая, их содержащая, является этой осью.

При  $r = 1$  придется вспомнить, что пустое множество является подмножеством любого множества, оси ординат в частности.

**3.** Составьте уравнение цилиндра с направляющей, заданной системой уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1, \quad (1)$$

и образующей, параллельной вектору  $e_3$ .