КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел (a, b). Множество комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

Два комплексных числа (a, b) и (c, d) называются равными, если $a = c$, $b = d$.

Суммой комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется комплексное число $(a + c, b + d)$.

Произведением комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется комплексное число $(ac - bd, ad + bc)$.

Задача. Докажите, что:

1) сложение коммутативно; 2) сложение ассоциативно;

3) $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$; 4) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$;

5) умножение коммутативно; 6) умножение ассоциативно;

7) $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$;

8) если $(a, b) \neq (0, 0)$, то

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0);$$

9) сложение и умножение связаны законом дистрибутивности.

Из рассмотренных свойств следует, что множество комплексных чисел, снабженное операциями сложения и умножения, является полем. Это поле называется *полем комплексных чисел.*

Аксиоматическое определение поля комплексных чисел.

Полем комплексных чисел называется всякое поле $\mathbb{C}$, обладающее следующими свойствами:

1) оно содержит в качестве подполя поле $\mathbb{R}$ вещественых чисел;

2) оно содержит такой элемент i, что $i^2 = -1$;

3) оно минимально среди полей с этими свойствами, т.е. если $K \subset C$ какое-либо подполе, содержащее $\mathbb{R}$ и i, то $K = \mathbb{C}$.

Представление комплексного числа $z = (a, b)$ в виде $z = a + bi$ называется его *алгебраической формой.* Элемент i, для которого $i^2 = -1$, называется мнимой единицей. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $\mathrm{Re}\, z$. Число b называется *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $\mathrm{Im}\, z$.

Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

1. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
2. $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;
3. $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i$;
4. $z_2 \neq 0$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Комплексные числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ называются *комплексно сопряжёнными.*

Сумма и произведение двух комплексно сопряженных чисел есть действительные числа:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbb{R}; \quad z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Свойства комплексно сопряженных чисел

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;
4. если $z = a \in \mathbb{R}$, то $\overline{z} = z$.

Модулем или абсолютной величиной комплексного числа $z = a + bi$ называется действительное число $\sqrt{a^2 + b^2}$, обозначаемое через $|z|$.

Свойства модуля комплексного числа

1. $|z| \geq 0; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. если $z = a \in \mathbb{R}$, то $|z| = |a|$.
3. $|\overline{z}| = |z|$.
4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
6. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.
7. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$, $z_2 \neq 0$.

1. Решить уравнение

$$(2 - i)x + (5 + 6i)y = 1 - 3i,$$

считая неизвестные x и y действительными числами.

Решение. Приводя левую часть уравнения к виду $a+bi$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, получим уравнение, равносильное данному:

$$(2x+5y)+(-x+6y)i = 1-3i.$$

Так как равенство комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$ означает $a=a'$ и $b=b'$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+5y=1, \\ -x+6y=-3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x=\frac{21}{17}$, $y=-\frac{5}{17}$.

2. Вычислить: i^{36}, i^{125}, i^{239}.

Решение.

$$i^0=1, \quad i^1=i, \quad i^2=-1, \quad i^3=-i, \quad i^4=1.$$

Таким образом, имеем:

$$i^{4n}=1, \quad i^{4n+1}=i, \quad i^{4n+2}=-1, \quad i^{4n+3}=-i.$$

Получим

$$i^{36}=i^{4\cdot 9}=1, \quad i^{125}=i^{4\cdot 31+1}=i, \quad i^{239}=i^{4\cdot 59+3}=-i.$$

3. Решить в поле $\mathbb{C}$ систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2iy=1-i, \\ (1-i)x+y=2. \end{cases}$$

Решение. Используем формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2i \\ 1-i & 1 \end{vmatrix} = 1-2i \neq 0.$$

Решение системы:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1-i & 2i \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1-2i}=\frac{1-5i}{1-2i}=\frac{(1-5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1-5i+2i-10i^2}{1+4}=\frac{11}{5}-\frac{3}{5}i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-i \\ 1-i & 2 \end{vmatrix}}{1-2i} = \frac{6+2i}{1-2i} = \frac{(6+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{6+2i+12i+4i^2}{1+4} = \frac{2}{5}+\frac{14}{5}i.$$

Ответ. $x = \frac{11}{5} - \frac{3}{5}i$, $y = \frac{2}{5} + \frac{14}{5}i$.

4. Найдите все значения корня квадратного из комплексного числа $a+bi$, не равного нулю.

Решение. Пусть

$$\sqrt{a+bi} = x + yi,$$

где x и y - неизвестные действительные числа. Возведя обе части этого уравенния в квадрат, получим:

$$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим полученные уравнения:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = a^2 + b^2, \\ x^2 - y^2 = a, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}, \\ x^2 - y^2 = a, \end{cases}$$

Так как $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, то $x^2 + y^2 \geq 0$. Получим:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}, \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Так как $\sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$, то оба полученных числа неотрицательны. Извлекая из них квадратные корни, получим действительные значения для x и y:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Из соотношения $2xy = b$ следует, что при $b > 0$ числа x и y имеют одинаковые знаки, а при $b < 0$ - противоположные. Отсюда получим формулу:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right),$$

где внутри скобок перед i берется знак „$+$“, если $b > 0$, и знак „-“, если $b < 0$.

5. Решить уравнение

$$(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0.$$

Решение. По формуле для корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{5 - i \pm \sqrt{(5-i)^2 - 4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)} = \frac{5 - i \pm \sqrt{-2i}}{4+2i}.$$

Извлекая корень квадратный из числа $-2i$, получим:

$$\sqrt{-2i} = \pm(1-i) \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 - i \pm (1-i)}{4+2i}.$$

$$x_1 = \frac{5-i+1-i}{4+2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5-5i}{5} = 1-i,$$

$$x_2 = \frac{5-i-(1-i)}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{(2)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Ответ. $1-i$, $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Упражнения для самостоятельной работы

1.1. Вычислите:

1) $(5+4i) + (3-7i) - (2+5i)$; 2) $(1+i)(2+i) + \frac{5}{1+2i}$;
3) $\frac{(2-3i)(4-i)}{5-i}$; 4) $\frac{5+i}{(1-2i)(5-i)}$; 5) $\frac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)}$;
6) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^2$; 7) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3} - (2+i)^2$;
8) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 9) $(2+i)^3 + (2-i)^3$;
10) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

Указание. 10) Представьте $(1+i)^n$ как $(1+i)^{n-2}(1+i)^2$ и вычислите отдельно $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-2}$.

1.2. Найдите $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ из уравнения:

1) $x - 8i + (y-3)i = 1$;
2) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$;
3) $\frac{6x-iy}{5+2i} = \frac{15}{8x+3yi}$;
4) $\frac{yi}{x-i} = i + x - 2$;

5) $2 + 5ix = 14i + 3x - 5y$;
6) $\frac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i} = 2$;
7) $(3 + i)x - 2(1 + 4i)y = -2 - 4i$;
8) $\frac{ix-4i-y+1}{1+i} = 5 + 2i$.

1.4. Докажите равенства:

1) $(1 + i)^{8n} = 2^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(1 + i)^{4n} = (-1)2^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
3) $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

1.5. Найдите значения многочленов:

1) $x^{17} - 5x^{14} + 10x^7 + 9x^5 - 4$ при $x = i$
2) $x^4 + \frac{2+i}{x} - (-3 + 2i)$ при $x = 1 - 2i$,
3) $3x^3 - 9x^2y + 9xy^2 - 3y^3$ при $x = 1 + 2i$, $y = 2 + i$.

1.6. Решите уравнения:

1) $\bar{z} = -z$; 2) $\bar{z} = z$; 3) $z^2 = \bar{z}$; 4) $z^3 = \bar{z}$;
5) $\bar{z} = -4z$; 6) $\bar{z} = 2 - z$; 7) $z^2 + \bar{z} = 0$.

1.7. Решите уравнения:

1) $|z| + z = 1 + 2i$; 2) $|z| + z = 2 - i$;
3) $|z| + \sqrt{2}\left(z - \frac{11+3i}{2}\right) = 0$; 4) $|(3 - i)z| - 2(1 - 2i)z = -5i$.

1.8. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = 1 + i, \\ 3x + iy = 2 - 3i. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (1 + i)x + (1 - i)y = 1 + i, \\ (1 - i)x + i(1 + i) = 1 + 3i. \end{cases}$

3) $\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x - (2 - 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + y(3 - 2i) = 8. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30. \end{cases}$

1.9. Вычислите:

1) $\sqrt{8 + 6i}$; 2) $\sqrt{3 - 4i}$; 3) $\sqrt{-15 + 3i\sqrt{11}}$;
4) $\sqrt{2 - 3i}$; 5) $\sqrt{-15 + 8i}$; 6) $\sqrt{5 - 12i}$; 7) $\sqrt{-5 + 12i}$;
8) $\sqrt{24 + 10i}$; 9)$\sqrt{24 - 10i}$; 10) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}}$.

1.10. Решите квадратные уравнения:

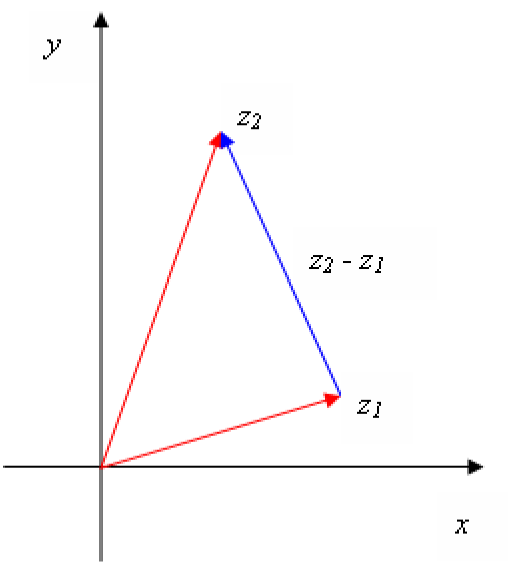
1) $x^2 + (5 - 2i)x + 5(1 - i) = 0$;
2) $x^2 + (1 - 2i)x - 2i = 0$;
3) $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$;
4) $x^2 - (3 - 2i)x + 5(1 - i) = 0$;
5) $x^2 + 3x - 10i = 0$;
6) $x^2 - (5 - 3i)x + (4 - 7i) = 0$;
7) $x^2 + (6 + i)x - 5 + 5i = 0$;
8) $x^2 - (5 + 5i)x + 2 + 11i = 0$;
9) $(2 + 4i)x^2 + 2x + 6 - 6i = 0$;
10) $(3 - i)x^2 - 2(2 - 3i)x - 4i = 0$.

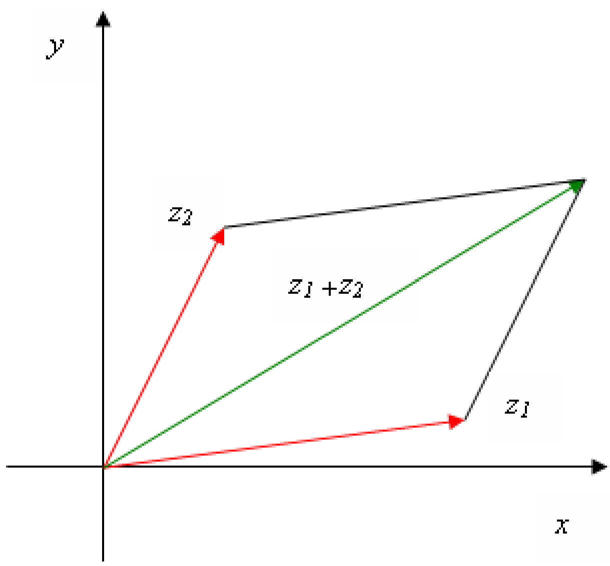
1.11. Найдите все комплексные числа z такие, что $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ и $\left|\frac{z-8}{z-4}\right| = 1$.
Указание. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

2. Тригонометрическая форма комплексного числа

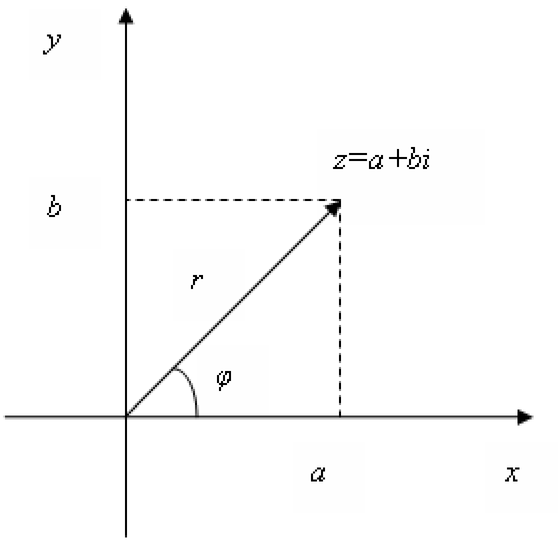
Комплексные числа можно изображать точками или векторами на плоскости. Число $z = a + bi$ изображается точкой или вектором с декартовыми координатами (a, b).

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ есть длина вектора, изображающего это число.





Аргументом комплексного числа называется угол, образуемый соответствующим вектором с положительным направлением оси абсцисс. Аргумент определен с точностью до прибавления целого кратного 2π. Аргумент числа 0 не определен. Аргумент числа z обозначается через $\arg z$.



Пусть r и φ — модуль и аргумент числа z. Получим:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi \Rightarrow$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такое представление комплексного числа называется его *тригонометрической формой.* Так как тригонометрическая форма данного комплексного числа определена однозначно с точностью до прибавления к φ целого кратного 2π, то при $r_1, r_2 > 0$

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow \{r_1 = r_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

Отсюда следуют следующие формулы для деления и возведения в степень:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (\textit{формула Муавра}).$$

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ есть решение уравнения $z^n = c$. Пусть $|z| = s$, $\arg z = \psi$. Тогда $s^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$s = \sqrt[n]{r}(\text{арифметическое значение корня}), \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Получим

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \quad k = 0, ..., n-1.$$

6. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + i\sqrt{3}$. Записать это число в тригонометрической форме.

Решение. $a = \mathrm{Re} z = 1$, $b = \mathrm{Im} z = \sqrt{3} \Rightarrow$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Аргумент числа z находится из соотношений

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}, \\ \sin\varphi &= \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Запишем число z в тригонометрической форме:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

7. Вычислите:

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^{12} - (1 + i\sqrt{3})^6}{(i-1)^{12}}.$$

Решение. Представим числа $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i\sqrt{3}$, $i - 1$ в тригонометрической форме и возведем в степень по формуле Муавра.

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}),$$

так как $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{1 + (\sqrt{3}^2)} = 2$,

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}, \\ \sin\varphi &= \frac{b}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \varphi = \tfrac{5\pi}{3}$$

$$(1 - i\sqrt{3})^{12} = \left(2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})\right)^{12} = 2^{12}\left(\cos\frac{60\pi}{3} + i\sin\frac{60\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{12}\left(\cos 20\pi + i\sin 20\pi\right) = 2^{12}(1 + 0\cdot i) = 2^{12}.$$

$$(1 + i\sqrt{3})^{6} = \left(2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right)^{6} = 2^{6}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^{6}.$$

$$(i-1)^{12} = (-1+i)^{12} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})\right)^{12} =$$

$$= (\sqrt{2})^{12}(\cos 9\pi + i\sin 9\pi) = 2^{6}(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^{6}(-1 + 0\cdot i) = -2^{6}.$$

Итак,

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^{12} - (1 + i\sqrt{3})^{6}}{(i-1)^{12}} = \frac{2^{12} - 2^{6}}{-2^{6}} = \frac{2^{6}(2^{6} - 1)}{-2^{6}} = -(2^{6} - 1) = -63.$$

8. Выразить $\cos 3x$ и $\sin 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. Положим

$$\alpha = \cos x + i\sin x$$

и возведем α в 3-ю степень, пользуясь двумя способами: формулой Муавра и формулой бинома Ньютона:

$$\alpha^3 = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x.$$

$$\alpha^3 = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x =$$

$$= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).$$

Так как комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при i, то можем записать:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x,$$

$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x.$$

9. Вычислите:

$$\sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}.$$

Решение. Представим числа $1-i$, $\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\frac{19\pi}{12}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{19\pi}{12}+2\pi k}{4}\right),\quad k=0,1,2,3.$$

$$c_0=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{48}+i\sin\frac{19\pi}{48}\right);$$

$$c_1=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{43\pi}{48}+i\sin\frac{43\pi}{48}\right);$$

$$c_2=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{67\pi}{48}+i\sin\frac{67\pi}{48}\right);$$

$$c_3=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{91\pi}{48}+i\sin\frac{91\pi}{48}\right).$$

Упражнения для самостоятельной работы

2.1. Представьте в тригонометрической форме числа:

1) -5; 2) $3i$; 3) $1-i$; 4) $1+i$;
5) $-1-i$; 6) $-1+i$; 7) $-1-i\sqrt{3}$;
8) $\sqrt{3}-i$; 9) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 10) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;
11) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 13) $2+\sqrt{3}+i$;
14) $2-\sqrt{3}-i$; 15) $1-(2+\sqrt{3})i$.

2.2. Вычислите:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100}$; 2) $\left(\frac{4}{(\sqrt{3}+i)}\right)^{12}$; 3) $(1+i)^{25}$;
4) $(\sqrt{3}+i)^{30}$; 5) $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$;
6) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 7) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(-1+i)^{20}}$; 8) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{10}}{(-1+i)^{16}}$;
9) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; 10) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$;
11) $(1+i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$; 12) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.3. Выразить через $\sin x$ и $\cos x$:

1) $\sin 4x$, 2) $\cos 4x$, 3) $\sin 5x$, 4) $\cos 5x$.

2.4. Найдите все значения корня из комплексного числа:

1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt[3]{2-2i}$; 3) $\sqrt[4]{-4}$; 4) $\sqrt[6]{1}$;
5) $\sqrt[3]{-2i}$; 6) $\sqrt[3]{-1+i}$; 7) $\sqrt[4]{-1-i}$; 8) $\sqrt[6]{1-i\sqrt{3}}$;
9) $\sqrt[6]{-\sqrt{3}+i}$; 10) $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$; 11) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$;
12) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 13) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; 14) $\sqrt[6]{\frac{-\sqrt{3}+i}{-2-2i}}$;
15) $\sqrt[8]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}}$; 16) $\sqrt[6]{\frac{-128}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$; 17) $\sqrt[5]{\frac{(-\sqrt{12}+2i)^2}{16i^{117}}}$;
18) $\sqrt[4]{(2+2i)(-1+i\sqrt{3})}$; 19) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$;
20) $\sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)}$; 21) $\sqrt[3]{\frac{1-5i}{1+i} - 5\frac{1+2i}{2-i} + 2}$.

2.5. Решите уравнения:

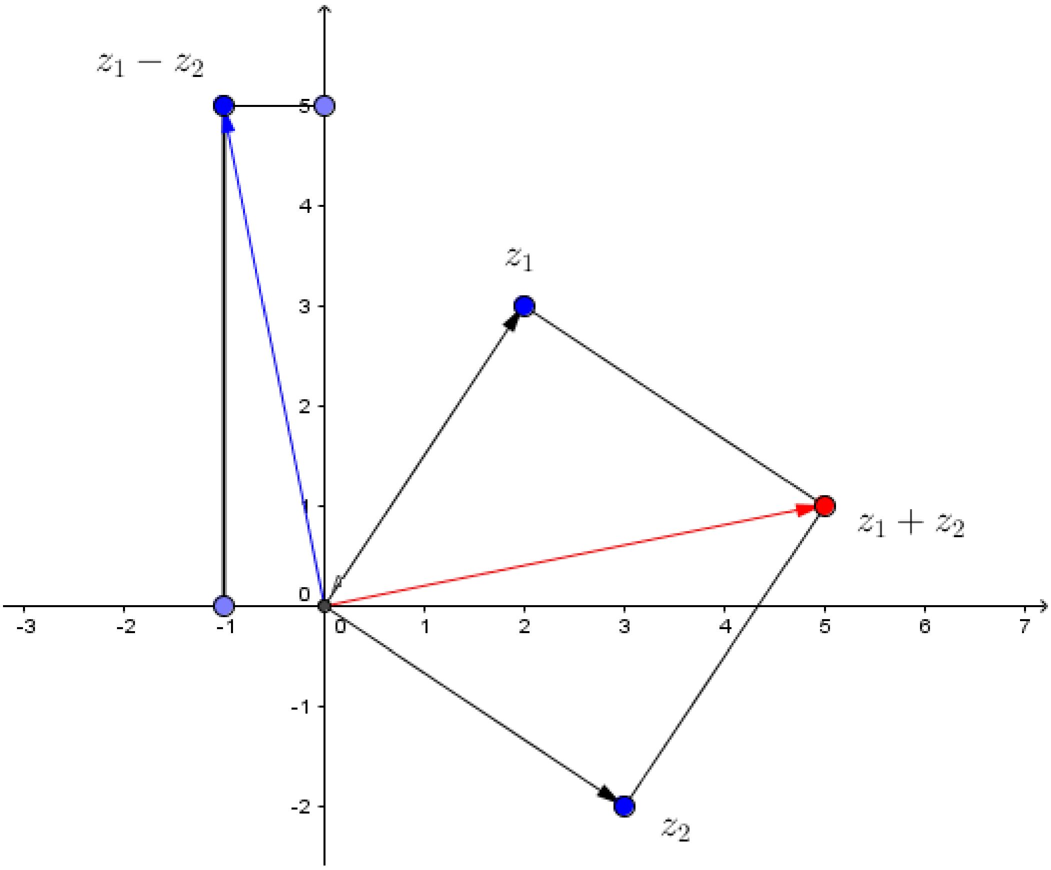
1) $x^8 - 16 = 0$; 2) $x^8 + 16 = 0$; 3) $x^7 - 1 = 0$.

3. Геометрическая интерпретация комплексного числа

10. Найти геометрически сумму и разность комплексных чисел:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 3 - 2i.$$

Решение. Геометрически изображением комплексного числа $a+bi$ на координатной плоскости является точка с координатами (a, b). Также геометрическим образом числа $a+bi$ является вектор, идущий из начала координат в точку (a, b).

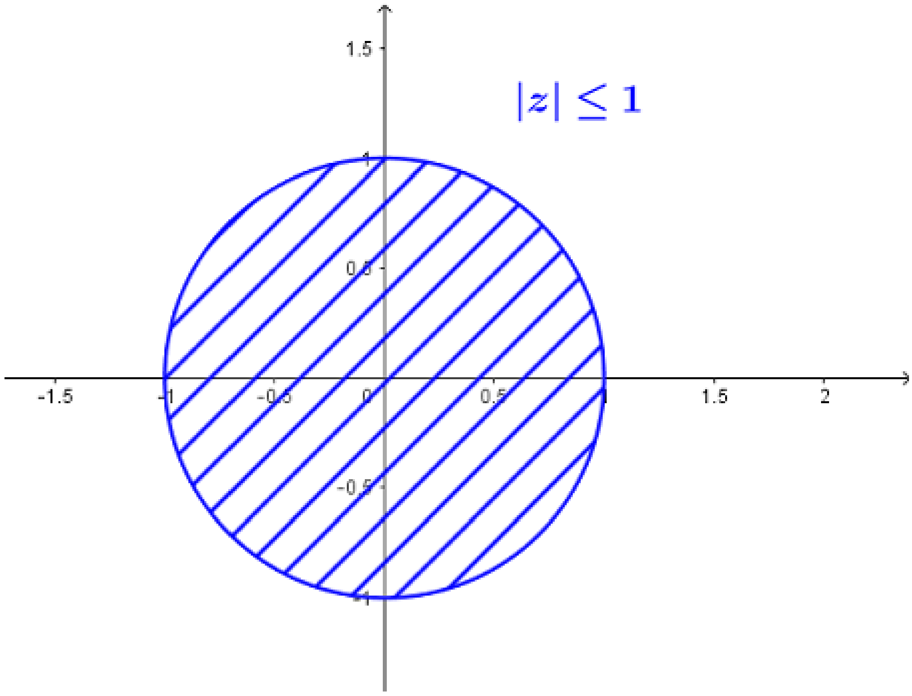


11. Изобразите на координатной плоскости множества точек z, задаваемые условиями:

1) $|z| \leq 1$;

$z = x + iy \quad \Rightarrow |x + iy| \leq 1 \quad \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$

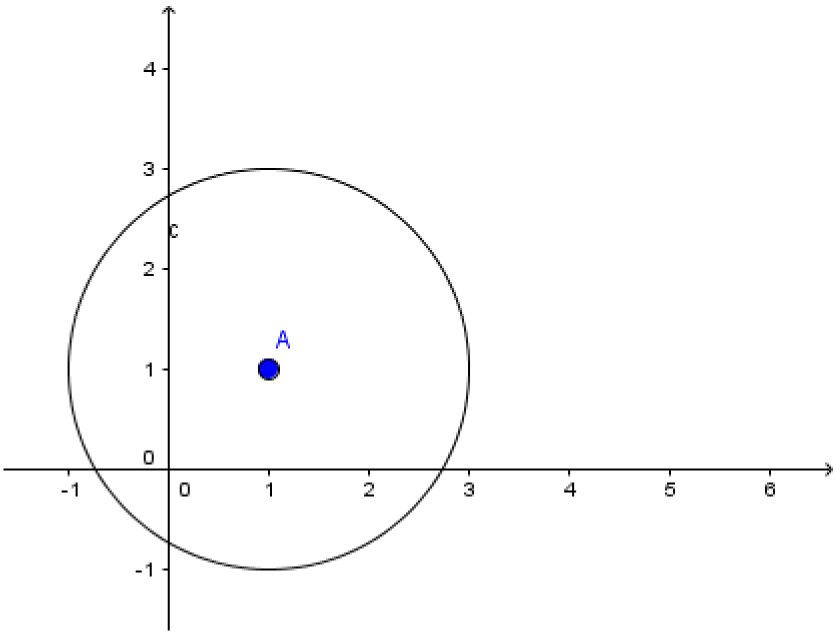
Искомым множеством является круг радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$:



2) $|z-1-i|=2$;

$z=x+iy \quad \Rightarrow |x+yi-1-i| = \quad \Rightarrow |(x-1)+i(y-1)| = 2 \quad \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 2 \quad \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=4.$

Искомым множеством является окружность радиуса 2 с центром в точке $(1,1)$:



Упражнения для самостоятельной работы

3.1. Изобразите на координатной плоскости множества точек z, задаваемые условиями:

1) $|z|=1$; 2) $\arg z=\frac{\pi}{3}$; 3) $\arg z=\pi$;
4) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\pi$; 5) $\arg(z-2+i)=\frac{\pi}{4}$;
6) $\frac{\pi}{4}\le\arg(z-2+i)\le\pi$; 7) $|z|\le 3$; 8) $|z|>3$;
9) $|z-3i|<1$; 10) $2<|z|<3$
11) $|z+3-2i|>2$; 12) $|z-1|<3$; 13) $|z+2i|=3$;
14) $|\mathrm{Re}z|\le 1$; 15) $|\mathrm{Im}z|=1$; 16) $|\mathrm{Re}z+\mathrm{Im}z|<1$;
17) $\begin{cases}|z-i|\le 1;\\|z+i|\le 1.\end{cases}$ 18) $\begin{cases}|z-i|\le 2;\\|z-2-i|=1.\end{cases}$
19) $1<|2i-z|<3$; 20) $1\le|2-z|\le 3$;
21) $\begin{cases}|z-2-i|\le 3;\\|z-1+i|\ge 2.\end{cases}$ 22) $\begin{cases}|z+1+2i|<1;\\|z-2-2i|=2.\end{cases}$

23) $\begin{cases} |z-1| > 3; \\ \arg z = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ 24) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi; \\ |1-2i-z| = 2. \end{cases}$

25) $|z-1| = |z+2i|$; 26) $|z-i| = |z+i| = |z-2|$;

27) $|z-4| = |z-i| - |z+5| = 0$; 28) $|z+i| + |z-i| < 3$;

29) $|z-3| + |z-2i| = 7$; 30) $|z+2i| + |z-4+i| = 15$;

31) $|z-1-i| \geq |z-2+i|$; 32) $||z-4| - |z-2i|| = 4$.

3.2. При каких действительных значениях x и y:

1) числа x^2+y^2-xyi и $2xy+25+4i$ изображаются точками, симметричными относительно действительной оси;

2) числа xy^4-16i и $-2-x^4yi$ изображаются точками, симметричными относительно мнимой оси.

4. Показательная форма комплексного числа

Пусть $|z| = 1$, тогда $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = f(\varphi)$. Стоящее в правой части этого равенства выражение, как функция переменной φ, обладает следующими свойствами.

$f(\varphi_1+\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 = f(\varphi_1)f(\varphi_2)$;

$f(\varphi_1-\varphi_2) = \cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)} = \frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)} = \frac{f(\varphi_1)}{f(\varphi_2)}$;

$\frac{d}{d\varphi}f(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = if(\varphi)$.

Как видно, два первых свойства полностью совпадают со свойствами показательной функции, а последнее показывает, что показатель экспоненты есть $i\varphi$.

По определению полагают

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) называется *формулой Эйлера.*

$$\left.\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi, \\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow e^{i\varphi} \pm e^{-i\varphi} =$$

$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi) \pm (\cos\varphi - i\sin\varphi) = \begin{cases} 2\cos\varphi, \\ 2i\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{4.2}$$

Формулы (4.2) также называют *формулами Эйлера.*

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{R}.$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},\ \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0.$$

Такое представление комплексного числа называется его *показательной формой.*

Можно написать ещё

$$z = |z|e^{i\arg z},\ \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0.$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0.$$

$z = re^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi} \Rightarrow \ln z = \ln r + i\varphi$. Натуральный логарифм определен с точностью до целого кратного $2\pi i$.

12. $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

13. Найти $z \cdot z_1$, $\frac{z}{z_1}$, $\sqrt[5]{z}$, z^{12}, если $z = 1 - i$, $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$.
Решение. Запишем z и z_1 в показательной форме.
Так как $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$, то $z = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
Так как $|z_1| = 2$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, то $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$.
Тогда получим:
$z \cdot z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$,
$\frac{z}{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i7\pi}{12}}$,
$z_k = \sqrt[5]{z} = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{20}\right)},\ k = 0, 1, 2, 3, 4,$
$z^{12} = (\sqrt{2})^{12}e^{-3\pi i}$.) Используя формулу Эйлера, получим:

$$e^{-3\pi i} = \cos 3\pi - i\sin 3\pi = -1.$$

Поэтому $z^{12} = -(\sqrt{2})^{12} = -64$.

Упражнения для самостоятельной работы

4.1. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n.$$

Указание. Записать $u_n = 1 + \frac{a+bi}{n}$ в тригонометрической форме и искать отдельно предел модуля и предел аргумента числа u_n^n.

4.2. Вычислить: a) $e^{\pi i}$; b) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

4.3. Вычислить: a) $\ln(-1)$; b) $\ln(1+i)$.

4.4. Найти $\ln(x+i\sqrt{1-x^2})$, $-1 \le x \le 1$.

4.5. Выразить $\operatorname{arctg} x$ через логарифмическую функцию.

Список литературы

1. Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина: Учебник для вузов. Изд. 3-е, испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 464 с.

2. Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре : учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. - Москва : Наука.

3. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: учеб. пособие / Л.Б. Шнеперман. - Минск : Выш. шк., 1982. - 223 с.

Ответы

4.1. $r_n^n = |u_n^n| = \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{n/2} \to e^a$; $\arg u_n^n = n\varphi_n$, где $\sin\varphi_n = \frac{b}{nr_n} \to 0$. Считая, $\varphi_n \to 0$, получим $n\varphi_n = \frac{b}{r_n} \cdot \frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n} \to b$. Итак, $\lim_{n\to\infty} u_n^n = e^a(\cos b + i\sin b)$.

4.2. a) -1; b) $-i$.

4.3. a) $\pi i + 2k\pi i$; b) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4} + 2k\pi i$.

4.4. $i\arccos x + 2k\pi i$.

4.5. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}$. Пусть $\operatorname{tg}\varphi = x$. Тогда $e^{2i\varphi} = \frac{1+ix}{1-ix}$, $\varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix} + k\pi$.