ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В ориентированном пространстве *векторным произведением* $[\vec{a}\vec{b}]$ двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор, который удовлетворяет трем условиям:

а) длина его равна произведению длин перемножаемых векторов и синуса угла между ними:

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\vec{b}},$$

б) векторное произведение перпендикулярно обоим сомножителям:

$$[\vec{a}\vec{b}]\perp\vec{a} \quad \text{и}[\vec{a}\vec{b}]\perp\vec{b},$$

в) базис $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}\vec{b}])$ положительный.

Свойства векторного произведения

1. Векторное произведение обращается в нуль только тогда, когда сомножители коллинеарны.

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}.$$

2. (Геометрический смысл длины). Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на представителях сомножителей с общим началом, как на сторонах:

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = S_{\text{парал-ма}}.$$

3. Векторное произведение антикоммутативно

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}].$$

4. $\lambda[\vec{a}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a})\vec{b}] = [\vec{a}(\lambda\vec{b})]$.

5. Векторное произведение дистрибутивно

$$[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}],$$

$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}].$$

6. Двойные векторные произведения $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ и $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$ выражаются равенствами: $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\, \vec{b})$ и $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a},\, \vec{c}\,) - \vec{a}(\vec{b},\, \vec{c}\,)$.

Площадь треугольника в пространстве, построенного на представителях векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом, равна

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|[\vec{a}\vec{b}]|.$$

Синус угла между двумя неколлинеарными векторами в пространстве равняется отношению абсолютной величины векторного произведения данных векторов к произведению их длин:

$$\sin\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{|[\vec{a}\vec{b}]|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

В ориентированном пространстве *смешанным произведением* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению двух векторов: векторного произведения первых двух сомножителей $[\vec{a}\vec{b}]$ и третьего вектора $\vec{c}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.

2. (Геометрический смысл знака смеш. произвед.) Смешанное произведение положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда сомножители образуют положительный (отрицательный) базис, то есть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ равносильно тому, что базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – положительный и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ равносильно тому, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – отрицательный.

3. (Геометрический смысл модуля смеш. произвед.) Абсолютная величина смешанного произведения некомпланарных векторов равна объему параллелепипеда, построенного на представителях сомножителей с общим началом, как на ребрах:

$$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\text{парал-да}}.$$

Объем тетраэдра, ребрами которого, выходящими из его общей вершины, служат представители векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен:

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

4. Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}.$$

Смешанное произведение меняет знак при перестановке двух сомножителей:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}.$$

5. $\lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c})$.

6. Смешанное произведение дистрибутивно:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c};$$

$$\vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}_1\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_2\vec{c}$$

и

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1 + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_2.$$

Теорема 1.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *В положительном ортонормированном базисе* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. *Смешанное произведение базисных векторов положительного базиса равняется арифметическому квадратному корню из дискриминанта метрических параметров базиса:*

$$\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = \sqrt{g},$$

где

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

`Доказательство`. Для смешанных произведений выполняется тождество:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{u} & \vec{a}\vec{v} & \vec{a}\vec{w} \\ \vec{b}\vec{u} & \vec{b}\vec{v} & \vec{b}\vec{w} \\ \vec{c}\vec{u} & \vec{c}\vec{v} & \vec{c}\vec{w} \end{vmatrix}.$$

Заменим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ соответственно векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

$$(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)^2 = \begin{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{vmatrix}.$$

Скалярные произведения базисных векторов попарно $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ есть метрические параметры g_{ij}, получаем: $(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)^2 = g$.

Теорема 4. (Выражение векторного произведения в координатах) Если векторы $\vec{a}(a^1, a^2, a^3)$ и $\vec{b}(b^1, b^2, b^3)$ заданы координатами относительно положительного ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то

$$[\vec{a}\vec{b}] \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^3 & a^1 \\ b^3 & b^1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \right)$$

и

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$