АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аффинной системой координат (или *аффинным репером*) на плоскости называется тройка $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, состоящая из точки O и базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Точка O называется *началом системы кооординат* или *полюсом*, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — *базисными* или *координатными. Координатами точки* M в системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ называются координаты ее радиуса-вектора $\vec{r}_M$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

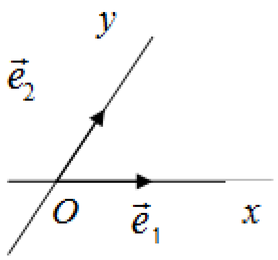
$$M(x, y) \Leftrightarrow \vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

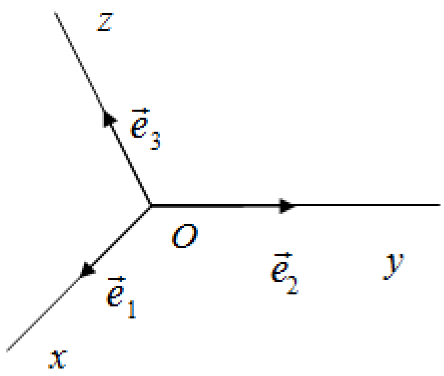
Координаты точки в аффинной системе координат называются аффинными, первая из них называется *абсциссой*, вторая - *ординатой.*

Аффинной системой координат (или *аффинным репером*) в пространстве называется четверка $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, состоящая их точки O и базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. *Координатами точки* M в системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называются координаты ее радиуса-вектора $\vec{r}_M$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$M(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Координаты точки в аффинной системе координат называются аффинными, первая из них называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*, третья — *аппликатой.*





Декартовой или *прямоугольной системой координат* на плоскости и в пространстве называется аффинная система координат с ортонормированным базисом. Такая система координат с началом в точке O на плоскости обозначается $(O, \vec{i}, \vec{j})$, в пространстве $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Координаты точки в декартовой системе координат называются *декартовыми.*

Координатными прямыми или *осями* аффинной системы координат на плоскости или в пространстве называются прямые, проходящие через полюс параллельно базисным векторам. Координатная прямая, параллельная базисному вектору $\vec{e}_1$ называется *прямой абсцисс* и обозначается Ox. Координатная прямая, параллельная базисному вектору $\vec{e}_2$ называется *прямой ординат* и обозначается Oy. Координатная прямая, параллельная базисному вектору $\vec{e}_3$ называется *прямой аппликат* и обозначается Oz.

Координатными плоскостями аффинной системы координат в пространстве называются плоскости, проходящие через координатные прямые попарно. Координатные плоскости, проходящие через координатные прямые Ox и Oy, Oy и Oz, Ox и Oz, называются соответственно плоскостями Oxy, Oyz и Oxz.

Основные формулы аналитической геометрии

Вектор, определяемый двумя точками. Пусть на плоскости или в пространстве даны две точки A и B. В аффинной системе координат координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности соответствующих координат второй и первой точек:

$$\text{на плоскости: } \overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A),$$
$$\text{в пространстве: } \overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Расстояние между двумя точками. Пусть на плоскости или в пространстве даны две точки A и B. Расстояние между двумя точками A и B:

– в аффинной системе координат равно арифметическому корню квадратному из суммы произведений всех метрических параметров базиса системы координат на разности соответствующих координат данных точек:

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x_B^i - x_A^i)(x_B^j - x_A^j)}.$$

— в декартовой системе координат равно арифметическому корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат данных точек:

$$\text{на плоскости: } \rho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$
$$\text{в пространстве: } \rho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть на плоскости или в пространстве дан отрезок с началом A и концом B, C - точка прямой AB, отличная от B. Говорят, что точка C делит отрезок в отношении λ, если выполняется равенство:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}.$$

Число λ может быть любым действительным числом, отличным от -1. Если число $\lambda > 0$, то точка C лежит между точками A и B. Если $\lambda < 0$, то C лежит на прямой AB, но вне отрезка. Если точка C совпадает с точкой A, то $\lambda = 0$.

Точка C делит отрезок AB на плоскости или в пространстве в отношении λ тогда и только тогда, когда в какой-либо аффинной системе координат имеют место равенства

$$x^i_C = \frac{x^i_A + \lambda x^i_B}{1+\lambda}.$$

Площадь треугольника. Пусть на плоскости или в пространстве дан треугольник ABC. Площадь треугольника ABC на плоскости в аффинной и декартовой системах координат определяется соответственно формулами:

$$\text{а) } S_\Delta = \tfrac{\sqrt{g}}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right|,$$

где g — дискриминант метрических параметров базиса системы координат;

$$\text{б) } S_\Delta = \tfrac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Площадь треугольника ABC в пространстве в декартовой системе координат определяется равенством

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_B - y_A & z_B - z_A \\ y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_B - z_A & x_B - x_A \\ z_C - z_A & x_C - x_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}^2}$$

Объем тетраэдра. Пусть в пространстве дан тетраэдр $SABC$. Объем тетраэдра $SABC$ в пространстве в аффинной и декартовой системах координат определяется соответственно равенствами:

$$\text{а) } V_T = \frac{\sqrt{g}}{6} \left| \begin{vmatrix} x_A - x_S & y_A - y_S & z_A - z_S \\ x_B - x_S & y_B - y_S & z_B - z_S \\ x_C - x_S & y_C - y_S & z_C - z_S \end{vmatrix} \right|,$$

где g — дискриминант метрических параметров базиса системы координат;

$$\text{б) } V_T = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_A - x_S & y_A - y_S & z_A - z_S \\ x_B - x_S & y_B - y_S & z_B - z_S \\ x_C - x_S & y_C - y_S & z_C - z_S \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_S & y_S & z_S & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

`Пример 1.` Начало координат O находится в середине отрезка AB. Принимая за базис аффинной системы векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найти в этой системе координаты вершин квадрата $ABCD$.

`Решение.` Запишем разложение радиусов-векторов вершин квадрата по базису $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$:

$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = 1 \cdot \overrightarrow{OA} + 0 \cdot \overrightarrow{OB}, \quad \vec{r}_B = \overrightarrow{OB} = 0 \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB},$

$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = -1 \cdot \overrightarrow{OA} + 0 \cdot \overrightarrow{OB}, \quad \vec{r}_D = \overrightarrow{OD} = 0 \cdot \overrightarrow{OA} - 1 \cdot \overrightarrow{OB}.$

Координаты вершин квадрата в аффинной системем координат $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.

`Пример 2.` Проверить, что точки $A(-3,8)$, $B(1,5)$ и $C(4,1)$ могут служить тремя вершинами ромба, вычислить площадь этого ромба.

`Решение.` Вычислим длины отрезков: $AB = \sqrt{(1+3)^2 + (5-8)^2} = 5$, $AC = \sqrt{(4+3)^2 + (1-8)^2} = 7\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = 5$. Так как $AB = BC$, значит, точки A, B и C могут служить тремя вершинами ромба.

Площадь ромба в два раза больше площади треугольника ABC:

$$S_{\text{ромба}} = 2\, S_{ABC} = \left| \begin{vmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = 7 \text{ (кв.ед.)}.$$

`Пример 3.` Найти центр тяжести тетраэдра с вершинами в точках $A(-7,3,-2)$, $B(0,2,1)$, $C(4,-1,0)$, $D(-1,0,3)$.

`Решение.` Центр тяжести тетраэдра лежит на прямой, соединяющей любую из вершин тетраэдра (например A, рис. 16) с центром тяжести противолежащей грани (в данном случае BCD), и делит отрезок между этими точками в отношении 3:1, считая от вершины. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

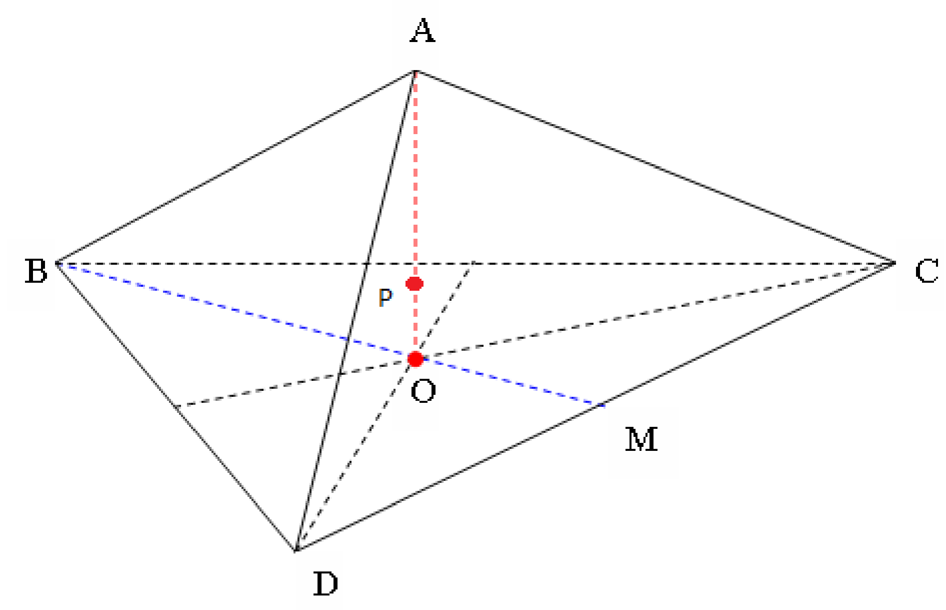


Рис. 16

Находим координаты точки M середины отрезка CD:

$$x_M = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_M = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad z_M = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Находим координаты точки O пересечения медиан треугольника BCD, делящей медиану BM в отношении $BO : OM = 2 : 1$ ($\lambda = 2$):

$$x_O = \frac{0+2\cdot\frac{3}{2}}{1+2} = 1, \quad y_O = \frac{2+2\cdot(-\frac{1}{2})}{1+2} = \frac{1}{3}, \quad z_O = \frac{0+2\cdot\frac{3}{2}}{1+2} = \frac{4}{3}.$$

Находим координаты точки P, делящей отрезок AO в отношении $AP : PO = 3 : 1$ ($\lambda = 3$):

$$x_P = \frac{-7+3\cdot 1}{1+3} = -1, \quad y_P = \frac{3+3\cdot\frac{1}{3}}{1+3} = 1, \quad z_P = \frac{-2+3\cdot\frac{4}{3}}{1+3} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $P(-1, 1, \frac{1}{2})$.