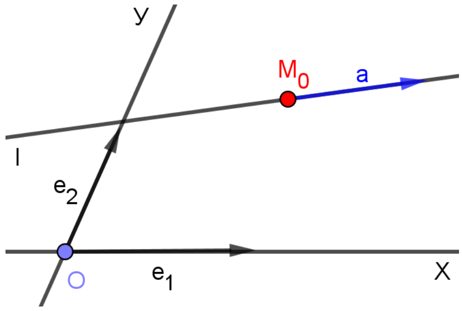
Прямая на плоскости

Теорема 1. Основная теорема о прямой на плоскости. *Каждая прямая на плоскости является фигурой первого порядка и обратно, каждая фигура первого порядка на плоскости является прямой. Другими словами, на плоскости множество всех прямых и множество всех фигур первого порядка совпадают.*

`Доказательство.` Пусть l — некоторая прямая, $\varkappa$ — аффинная система координат на плоскости.

Найдем уравнение l в $\varkappa$. Пусть M_0 — некоторая точка прямой l, $\vec{a}$ — ненулевой вектор, параллельной l. Точку M_0 будем называть *начальной,* вектор $\vec{a}$ — *направляющим* для прямой l, координаты точки M_0 и вектора $\vec{a}$ в $\varkappa$ обозначим соответственно: x_0, y_0 и a_1, a_2.



Пусть $M(x;y)$ — переменная, принимающая значения в множестве всех точек плоскости. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a} \Leftrightarrow$ точка M принадлежит прямой l.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Согласно признаку коллинеарности двух векторов в координатах получим:

$$\overrightarrow{M_0M} || \vec{a} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Это и есть искомое уравнение прямой l в $\varkappa$. Записав уравнение (1) в виде $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_)) = 0$, находим, что это есть алгебраическое уравнение. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то, по крайней мере, одна из его координат a_1 или a_2 отлична от нуля. Следовательно, степень уравнения (1) равна 1. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть на плоскости дана фигура первого порядка Φ уравнением в аффинной системе координат $\varkappa$

$$Ax + By + D = 0 \quad (B \neq 0). \tag{2}$$

Уравнение (2) равносильно уравнению $Ax + B(y + \frac{C}{B}) = 0$, которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$\begin{vmatrix} x & y + \frac{C}{B} \\ -B & A \end{vmatrix} = 0. \tag{2'}$$

Возьмем на плоскости прямую l_1 с начальной точкой $M_1(0; -\frac{C}{B})$ и направляющим вектором $\vec{a}(-B; A)$. По первой части теоремы уравнением l_1 в $\varkappa$ будет уравнение $(2')$. Следовательно, фигура Φ совпадает с прямой l_1. Второе утверждение доказано.

Теорема 2 (условие параллельности вектора и прямой на плоскости). *Пусть на плоскости заданы вектор $\vec{u}$ своими координатами и прямая l общим уравнением в аффинной системе координат $Ax + By + C = 0$. Тогда $\vec{u}$ параллелен l тогда и только тогда, когда сумма произведений координат вектора $\vec{u}$ на соответствующие коэффициенты при переменных уравнения равна нулю:*

$$\vec{u} || l \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 = 0.$$

Доказательство. Согласно доказательству второй части основной теоремы о прямой на плоскости, вектор $\vec{a}(-B; A)$ является направляющим для l. Учитывая это и условие коллинеарности векторов в координатах, получим:

$$\vec{u} || l \Leftrightarrow \vec{u} || \vec{a} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 = 0.$$

Теорема 3. *Прямая на плоскости l, заданная общим уравнением $Ax + By + C = 0$ в аффинной системе координат,*

1. Проходит через начало системы координат O тогда и только тогда, когда свободный член уравнения l равен нулю: $O \in l \Leftrightarrow C = 0$.

2. Параллельна координатной прямой OX тогда и только тогда, когда коэффициент при переменной x уравнения l равен нулю, а свободный член уравнения не равен нулю: $l || OX \Leftrightarrow (A = 0 \wedge C \neq 0)$.

3. Совпадает с координатной прямой OX тогда и только тогда, когда коэффициент при переменном x и свободный член уравнения l равны нулю: $l = OX \Leftrightarrow (A = 0 \wedge C = 0)$.

Доказательство.

1. Действительно, прямая l будет проходит через начало системы координат тогда и только тогда, когда координаты полюса $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ удовлетворяют уравнению l, что возможно в том и только том случае, когда $C = 0$.

2. Прямая l будет параллельна OX тогда и только тогда, когда она параллельна первому базисному вектору $\vec{e}_1$ и не проходит через начало координат. Учитывая, что координаты вектора $\vec{e}_1$ равны 1 и 0, теорему 2 и первое утверждение теоремы, получим:

$$l || OX \Leftrightarrow (l || \vec{e}_1(1;0) \wedge O \notin l) \Leftrightarrow (A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \wedge C \neq 0) \Leftrightarrow (A = 0 \wedge C \neq 0).$$

3. Прямая l будет совпадать с OX тогда и только тогда, когда она параллельна вектору $\vec{e}_1$ и проходит через начало координат: $A = 0 \wedge C = 0$.