

Контрольная работа №1 по математическому анализу для студентов ф-та КНиИТ, 1-ый семестр

Задание 1.

Пользуясь теоремой Вейерштрасса о монотонных последовательностях, доказать сходимость следующих последовательностей:

1. $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \dots + \frac{p_n}{10^n}$, где $p_i (i = 0, 1, \dots)$ - целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1 ;
2. $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$;
3. $x_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n})$;
4. $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}, \dots$

Для последовательности (x_n) найти множество частичных пределов, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

5. $x_n = (\cos(\pi n/2))^{n+1}$;
6. $x_n = (1 + (-1)^n n)/n$;
7. $x_n = (-n)^{\sin(\pi n/2)}$;
8. $x_n = \frac{1}{n} + \sin \frac{\pi n}{3}$;
9. $x_n = \frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^{n+3}}$;

10. $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3};$
11. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2};$
12. $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}; \quad 9) \quad 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$
13. $x_n = \frac{n^2}{1+n} \cos \frac{2n\pi}{3};$
14. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4};$
15. $x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3};$
16. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}.$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

17. $x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n$, где $|a_k| < M$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $|q| < 1$;
18. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n};$
19. $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)};$
20. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$

Задание 2

Вычислить предел

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2};$ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1} \right);$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2};$ 4) $\frac{(n^2+3n+4)^3 - (n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3 - (n^2+5n-6)^3};$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right);$ 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1};$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{3}{3/n - 3/n^2 + 1/n^3} \right);$ 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right).$
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \operatorname{arctg} n}{n^2 - 2};$ 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}};$

$$\begin{aligned}
& 11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n+n}}; \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}); \\
& 13) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n); \quad 14) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n-1)}); \\
& 15) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}; \quad 16) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}; \quad 17) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}; \\
& 18) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}; \\
& 19) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}; \quad 20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n};
\end{aligned}$$

Задание 3

Вычислить предел

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x+3x^2)}{x^4+x^3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}; \\
& 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right); \\
& 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x-1} \quad (m \in \mathbb{N}); \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^k-1} \quad (m, k \in \mathbb{N}). \\
& 8) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}. \\
& 11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}. \\
& 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{(x-5)(x+2)}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x \right); \\
& 16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}; \quad 17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}; \quad 18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}. \\
& 19) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}); \quad 20) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1});
\end{aligned}$$

Задание 4

Вычислить предел

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 5x; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x};$$

$$\begin{aligned}
& 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}; \\
& 8) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - \cos \frac{3}{x} \right); \quad 9) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right); \\
& 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}; \\
& 12) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}; \quad 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}; \\
& 14) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x^2 + 1} - \sin \sqrt{x^2 - 1}). \\
& 15) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10}; \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{x^2}; \quad 17) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log_2 \frac{10 + x}{5 + x}; \\
& 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - 1 - \sin x}{\ln(1 + x)}; \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}(\pi/4 + 4x)}{x}; \quad 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 4x};
\end{aligned}$$

Задание 5

Вычислить предел

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{1 - \operatorname{ctg} \pi x}{\ln \operatorname{tg} \pi x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \cos \frac{\pi}{x}. \\
& 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{1/x} - 1); \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(4^{1/x} - 4^{1/(x+1)}); \\
& 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1 + 2x)}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}; \\
& 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x} - \sqrt[5]{1 + 2x}}{\sqrt{1 + 5x} - \sqrt[4]{1 + 2x}}. \\
& 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x} - x)^{1/x}; \quad 13) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x^4)^{1/\sin^2 x}; \\
& 14) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2}; \quad 16) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}; \quad 17) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}; \\
& 18) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e + x))^{\operatorname{ctg} x}; \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{1/x^2}; \quad 20) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \arctg^2 x)^{1/\arctg x^2}.
\end{aligned}$$

Задание 6

Функция определена в окрестности точки x_0 , кроме самой точки x_0 .
Доопределить функцию f , задав значение $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0 , если:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}, x_0 = -1; \quad 2) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, x_0 = 1;$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, x_0 = -1; \quad 4) f(x) = \frac{\sin x}{x}, x_0 = 0;$$

$$5) f(x) = x \operatorname{ctg} x, x_0 = 0; \quad 6) f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, x_0 = 0.$$

Доказать, что функция f не является непрерывной в точке x_0 , если:

7)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x > 0, \\ x^2, & \text{если } x \leq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

8)

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

9)

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

Найти точки разрыва функции и установить их род, если:

$$10) f(x) = \frac{|x + 2|}{x + 2}; \quad 11) f(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 - x^3};$$

$$12) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}; \quad 13) f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Установить, существует или не существует значение a , при котором функция f непрерывна в точке x_0 , если:

14)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

15)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{если } x \neq -1, \\ a, & \text{если } x = -1, \end{cases} \quad x_0 = -1;$$

16)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & \text{если } x > 0, \\ -x, & \text{если } x \leq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

17)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \geq 0, \\ a(x-1), & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

Установить, существуют ли значения a и b , при которых функция f непрерывна на своей области определения, если:

18)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{если } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{если } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

19)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

20)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{если } |x| \neq 1, \\ a, & \text{если } x = -1, \\ b, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Задание 7

Вычислить производную функций:

1. 1) $y = 7x^{13} + 13x^{-7}$, 2) $y = (x+1) \operatorname{tg} x$.

2. 1) $y = \frac{\cos 3}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x+3)$, 2) $y = x^{7/\ln x}$.

3. 1) $y = \frac{\ln 3}{x} + e^2$, 2) $y = x^2 \operatorname{ctg} x + 2$.

4. 1) $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{12}$, 2) $y = \ln \operatorname{tg}(x/2) - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$.
5. 1) $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^4}$, 2) $y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$.
6. 1) $y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$, 2) $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$.
7. 1) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$, 2) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$.
8. 1) $y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}}$, 2) $y = x^{x^2}$.
9. 1) $y = \frac{3}{5}x^{5/3} + x^{-2} + \frac{2}{x}$, 2) $\operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arcctg} x$.
10. 1) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4(x^2+\sqrt{1+x^2})}}$; 2) $y = \log_2(2x+3)^2$.
11. 1) $y = x^3\sqrt[3]{x^2} + x^7\sqrt[3]{x}$, 2) $y = x \arcsin x$.
12. 1) $y = \operatorname{ctg} x^2 - (1/3) \operatorname{tg}^3 2x$, 2) $y = x^{e^x}$.
13. 1) $y = x^{\sqrt{5}} - x^{-\sqrt{5}}$, 2) $y = \operatorname{arctg}^2 x$.
14. 1) $y = \frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$, 2) $y = \ln \ln \ln x^2$.
15. 1) $y = \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}$, 2) $y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$.
16. 1) $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}(x^2 + x^{-2})}$,
2) $y = e^x \arcsin \sqrt{e^x/(e^x + 1)} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^x} - \sqrt{e^x}$
17. 1) $y = \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2}}$, 2) $y = \ln x^3 - \frac{9}{x} - \frac{27}{2x^2}$.
18. 1) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$, 2) $y = x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1 + \sin x) - \ln \operatorname{tg}(x/2)$
19. 1) $y = 5x \cos x$, 2) $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$.
20. 1) $y = \ln \ln(x/2)$, 2) $y = x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-x} \operatorname{arcctg} e^x$.