З А Д А Ч И

1. Даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{EF}$. Найти вектор $\vec{u}$, если

1) $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$,
2) $\vec{u} = 4\vec{b} - \frac{3\vec{c}}{2}$.

2. Проверить на чертеже справедливость тождеств:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$,
2) $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$,
3) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{c} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$,
4) $\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$,
5) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} + \vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$,
6) $(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}) - (\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$,
7) $(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}) + (\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}) = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

3. Какой геометрической особенностью должны обладать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место равенство:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$,
2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$,
3) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$,
4) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

4. Какому геометрическому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$,
2) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$?

5. Какому геометрическому условию будут удовлетворять неколлинеарные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если представитель вектора $\vec{p} + \vec{q}$ с началом в некоторой точке делит пополам угол между представителем векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ с началом в той же точке?

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$, выразить через $\vec{c}$ и $\vec{d}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ определяемые сторонами этого параллелограмма.

7. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M есть точка пересечения диагоналей параллелограма.

8. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK} = \vec{k}$ и $\overrightarrow{AL} = \vec{l}$, выразить через $\vec{k}$ и $\vec{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

9. В четырехугольнике $ABCD$ (плоском или пространственном) положим $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{q}$. Найти вектор $\overrightarrow{EF}$, где E и F середины диагоналей AC и BD соответственно.

10. В правильном 8-угольнике $ABCDEFGH$ положим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$. Выразить каждый из векторов: $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{CA}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

11. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$, где M, P, R – середины ребер OA, OB, OC, а N, Q, S – середины противоположных ребер соответственно.

12. Показать, что: 1) из $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$, $\lambda \neq 0$ вытекает $\vec{a} = \vec{b}$; 2) из $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ вытекает $\lambda = \mu$ (сокращение равенств).

13. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти отношение векторов: $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{EF}}$, $\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{AB}}$ и $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$, если они существуют.

14. В равностороннем треугольнике ABC M – середина стороны BC, O – центр треугольника. Имеет ли смысл и в случае утвердительного ответа чему равно каждое из выражений:

$$1)\overrightarrow{AO} : \overrightarrow{AM};$$

$$2)\overrightarrow{MO} : \overrightarrow{AO};$$

$$3)\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}?$$

15. $ABCD$ – параллелограмм, M – точка пересечения его диагоналей, O – точка пространства, отличная от M. Вычислить $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) : \overrightarrow{OM}$.

16. Показать, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коллинеарны ($\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$), то

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} \cdot \frac{\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}}.$$

17. Дан собственный (то есть ненулевой и неразвернутый) угол AOB. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны сторонам угла OA и OB соответственно. Найти все векторы, параллельные биссектрисе угла AOB.

18. Точки F и E служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что

$$\overrightarrow{FE} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}.$$

Вывести отсюда теоремы: 1) о средней линии трапеции, 2) о средней линии треугольника.

19. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABML$, $BCPN$, $ACQR$. Доказать, что из векторов $\overrightarrow{RL}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ можно составить треугольник.[1]

20. Проверить, что из векторов, определяемых медианами треугольника, можно составить другой треугольник.

21. Из медиан треугольника ABC построен новый треугольник $A_1B_1C_1$, а из его медиан – треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны, и найти отношение подобия.

22. Как изменится сумма компланарных векторов, если все слагаемые векторы будут повернуты в одном и том же направлении на один тот же угол?

23. Доказать, что сумма парных произведений длины каждой стороны треугольника на единичный вектор, перпендикулярный к этой стороне, равна нулю. (Предполагается, что единичные векторы направлены от соответствующих сторон треугольника или все три во внутреннюю область треугольника, или все три – во внешнюю область).

24. Доказать, что сумма векторов, определяемых центром правильного n-угольника и его вершинами, равна нулю.

25. К точке приложены четыре различные компланарные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ одинаковой величины F. Зная, что углы между $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ равны 72°, найти величину и направление равнодействующей.

2. РАДИУС-ВЕКТОР ТОЧКИ

З А Д А Ч И

26. Отрезок AB разделен точками C_1, C_2, ..., C_{n-1} на n равных частей. Найти отношения λ_1, λ_2,..., λ_{n-1}, в которых точки C_1, C_2, ..., C_{n-1} делят отрезок AB.

27. Найти радиус-вектор точки C, симметричной с точкой $A(\vec{r}_A)$ относительно точки $B(\vec{r}_B)$.

---

[1] То есть существуют представители векторов $\overrightarrow{RL}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ образующие треугольник.

28. Даны радиусы-векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ трех последовательных вершин A, B, C параллелограмма. Найти радиусы-векторы четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей M.

29. Зная радиусы-векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.

30. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

31. Даны три последовательные вершины трапеции $A_1(\vec{r}_1)$, $B_2(\vec{r}_2)$ и $C_3(\vec{r}_3)$. Найти радиусы-векторы: $\vec{r}_4$ – четвертой вершины D, $\vec{r}^{\,'}$ – точки пересечения диагоналей и $\vec{r}^{\,''}$ – точки пересечения боковых сторон, зная, что основание AD в λ раз больше основания BC.

32. Зная радиусы-векторы $\vec{r}_{A'}$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_D$, $\vec{r}_A$ четырех вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиусы-векторы четрыех остальных его вершин.

33. На стороне AD и на диагонале AC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$. Показать, что точки M, N и B лежат на одной прямой. В каком отношении делит точка N отрезок MB? Решить задачу в более общем виде, предполагая, что

$$AM = \frac{1}{n}AD, \quad AN = \frac{1}{n+1}AC.$$

34. В точках $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, ... $M_n(\vec{r}_n)$ помещены массы m_1, m_2, ..., m_n. Найти радиус-вектор центра тяжести этой системы материальных точек. Как выразиться радиус-вектор центра тяжести для случая равных масс?

35. Показать, что сумма векторов, определяемых центром тяжести системы n материальных точек и каждой из этих точек, равна нулю, если во всех точках сосредоточены равные массы.

36. Доказать, что радиус-вектор центра правильного многоугольника есть среднее арифметическое радиусов-векторов вершин этого многоугольника.

37. Где выбрать полюс, чтобы сумма радиусов-векторов всех вершин параллелограмма равнялась нулю?

38. Доказать: для того, чтобы три точки $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$, $C(\vec{r}_3)$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно существование трех чисел α_1, α_2, α_3, не равных одновременно нулю и таких, что

$$\alpha_1\vec{r}_1 + \alpha_2\vec{r}_2 + \alpha_3\vec{r}_3 = \vec{0} \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Доказать с помощью векторной алгебры следующие теоремы элементарной геометрии:

39. Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали пересекались и делились пополам.

40. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

41. Если в четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: 1) середины двух противоположных сторон, 2) середины двух других противоположных сторон, 3) середины диагоналей, то эти отрезки пересекаются в одной точке, которая служит их общей серединой. Перенести этот результат с четырехугольника на тетраэдр.

42. Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

43. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

44. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, проходят через одну и ту же точку и делятся в ней пополам.

45. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. ПРОЕКЦИЯ И ЧИСЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

З А Д А Ч И

46. Дан треугольник ABC. Чему равна проекция вектора $\overrightarrow{BC}$ на сторону AC параллельно стороне AB?

47. Пусть в трапеции $ABCD$ AB и CD – боковые стороны. Чему равно численное значение проекции вектора $\overrightarrow{CD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ параллельно основанию трапеции?

48. При каком взаимном расположении вектора $\vec{a}$ и прямых l и h на плоскости проекция вектора $\vec{a}$ на прямую l параллельно прямой h равна: 1) нулевому вектору, 2) вектору $\vec{a}$?

49. Доказать, что два вектора будут равны, если проекции их на прямую l параллельно любой направляющей h (плоскости α) совпадают.

50. Определить фигуру, образованную концами представителей с общим началом всех векторов плоскости (пространства), имеющих одинаковые численные значения проекции на вектор $\vec{b}$ параллельно прямой h (плоскости α).

51. Зная, что длина вектора $\vec{c}$ равна 6, а численное значение его ортогональной проекции на единичный вектор $\vec{i}$ равна -3, найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{i}$.

52. Численные значения ортогональных проекций векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ на вектор $\vec{e}$ соответственно равны 6, -1, -10, 5. Найти угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, если $\vec{u} \neq \vec{0}$.

53. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Найти ортогональную проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую SC и ортогональную проекцию вектора $\overrightarrow{SC}$ на прямую AB.

54. Дана равнобочная трапеция $ABCD$. Угол между нижним основанием AD и стороной AB равен $\frac{\pi}{3}$. Разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ векторы, определяемые сторонами и диагоналями трапеции.

55. На представителях трех некомпланарных векторов $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$ и $\overrightarrow{AA'} = \vec{r}$ построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Разложить по $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ векторы, определяемые ребрами, диагоналями и диагоналями граней этого параллелепипеда.

56. Разложить вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторам $\vec{l} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

57. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, определяемые смежными сторонами параллелограмма $ABCD$, взяты в качестве базисных. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

58. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ двух сторон ABC приняты за базисные. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, определяемых медианами треугольника.

59. Векторы, определяемые двумя сторонами правильного шестиугольника, исходящими из одной вершины, приняты за базисные. Найти координаты векторов, определяемых диагоналями шестиугольника, исходящими из той вершины.

60. Найти коллинеарные между собой векторы среди векторов:

1) $\vec{a}(2, -7)$, $\vec{b}(-3, 8)$, $\vec{c}(-3, -8)$, $\vec{d}(-4, 14)$;

2) $\vec{a}(1, -1, 1)$, $\vec{b}(2, 2, 2)$, $\vec{c}(1, 2, -3)$, $\vec{d}(-3, -6, 9)$.

61. При каком α векторы $\vec{a}(-2,3)$, $\vec{b}(1,\alpha)$ будут коллинеарными?

62. Даны три вектора $\vec{a}(2,4)$, $\vec{b}(-3,1)$ и $\vec{c}(5,-2)$. Найти координаты векторов: 1) $2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$; 2) $\vec{a}+24\vec{b}+14\vec{c}$.

63. Даны векторы $\vec{a}(-1,-2)$, $\vec{b}(3,5)$, $\vec{c}(4,-3)$. Можно ли из их представителей построить треугольник?

64. Зная векторы $\overrightarrow{AB}(-1,3)$ и $\overrightarrow{BC}(4,-5)$, найти координаты вектора $\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

65. Будут ли линейно зависимыми векторы:

1) $\vec{a}(2,-7)$, $\vec{b}(4,-10)$;

2) $\vec{a}(-2,1,0$, $\vec{b}(3,2,-1)$, $\vec{c}(-1,4,-1)$.

66. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}(4,-2)$, $\vec{b}(3,5)$, $\vec{c}(1,-7)$;

2) $\vec{a}(5,4)$, $\vec{b}(-3,0)$, $\vec{c}(19,8)$;

3) $\vec{a}(-6,2)$, $\vec{b}(4,7)$, $\vec{c}(9,-3)$.

67. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}(2,3,1)$, $\vec{b}(5,7,0)$, $\vec{c}(3,-2,4)$, $\vec{d}(4,12,-3)$;

2) $\vec{a}(5,-2,0)$, $\vec{b}(0,-3,4)$, $\vec{c}(-6,0,1)$, $\vec{d}(25,-22,16)$;

3) $\vec{a}(3,5,6)$, $\vec{b}(2,-7,1)$, $\vec{c}(12,0,6)$, $\vec{d}(0,20,18)$.

68. Координаты вектора $\vec{a}$ по базису $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ равны α и β. Каковы будут координаты этого вектора, если в качестве базисных векторов взять $\vec{e}\,'_1 = -\frac{3}{4}\vec{e}_1$ и $\vec{e}\,'_2 = 2\vec{e}_2$?

69. Вектор $\vec{a}$ относительно базиса $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ имеет координаты α, β, γ. Доказать, что векторы

$$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_1, \quad \vec{e}\,'_2 = -\frac{2}{3}\vec{e}_3, \quad \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3 + 2\vec{e}_2$$

образуют базис и найти координаты вектора $\vec{a}$ относительно нового базиса.

4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

З А Д А Ч И

70. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждом из следующих случаев:

1) $|\vec a| = 7$, $|\vec b| = 4$, $\widehat{\vec a\,\vec b} = \frac{\pi}{4}$;

2) $|\vec a| = 2$, $|\vec b| = 5$, $\widehat{\vec a\,\vec b} = \frac{2\pi}{3}$;

3) $|\vec a| = 3$, $|\vec b| = 8$, $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$;

4) $|\vec a| = 1$, $|\vec b| = 1$, $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$.

71. Верны ли равенства:

1) $\vec a a = \vec a^{\,2}$;

2) $(\vec a + \vec b)^{\,2} = \vec a^{\,2} + 2\vec a\vec b + \vec b^{\,2}$;

3) $(\vec a, \vec b)^{\,2} = \vec a^{\,2}\vec b^{\,2}$;

4) $(\vec a + \vec b,\ \vec a - \vec b) = \vec a^{\,2} - \vec b^{\,2}$;

5) $(\vec a, \vec b) : (\vec a, \vec c) = \vec b : \vec c$;

6) $(\vec a, \vec b)\vec c = \vec a(\vec b, \vec c)$;

7) $(\vec a + \vec p, \vec b) = (\vec a, \vec b)$?

72. Как связаны между собой векторы $\vec a$ и $\vec b$, удовлетворяющие условию $(\vec a, \vec c) = (\vec b, \vec c)$, где $\vec c \neq \vec 0$? Можно ли утверждать, что $\vec a = \vec b$?

73. Решить уравнение $(\vec a, \vec x) = \alpha$, где $\vec x$ – неизвестный вектор ($\vec a$, α – данные).

74. Доказать, что $(\vec a - \vec b)^2 = \vec a^2 - 2(\vec a, \vec b) + \vec b^2$. Какую теорему элементарной геометрии выражает это тождество? В частности при $\vec a \perp \vec b$?

75. Доказать, что $(\vec a + \vec b)^2 + (\vec a - \vec b)^2 = 2\vec a^2 + 2\vec b^2$. Какую теорему элементарной геометрии выражает это тождество?

76. Доказать, что векторы $\vec p = \vec a(\vec b, \vec c) - \vec b(\vec a, \vec c)$ и $\vec c$ перпендикулярны друг другу.

77. В треугольнике ABC проведены медианы AL, BM, CN. Доказать, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AL}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BM}) = 0$.

78. Пусть ABC – треугольник, O – точка пространства (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OB}) = 0$.

79. Пусть ABC – треугольник, L, M и N – середины сторон BC, CA и AB соответственно, O – точка пространства (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OM}) = 0$.

80. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка пространства O (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$.

81. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка пространства O (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$.

82. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Доказать, что биссектриса угла B является высотой.

83. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

84. Доказать, что вписанный угол, опирающийся на диаметр круга, прямой.

85. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Доказать, что $AH : BH = AC^2 : BC^2$.

86. В параллелограмме $ABCD$ опущена высота BH на сторону AD. Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

87. Дана окружность и точка M внутри нее. Через точку M проведены две взаимно перпендикулярные секущие, первая секущая пересекает окружность в точках A и A_1, вторая – в точках B и B_1. Показать, что вектор $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ перпендикулярен прямой A_1B_1.

88. От одной точки отложены три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Зная, что расстояние между концами представителей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно расстоянию между концами представителей векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, показать, что векторы $\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{c}$ перпендикулярны друг другу.

89. Доказать, что если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, проведенным на плоскости, то она перпендикулярна и любой третьей прямой, проведенной на той же плоскости.

90. Доказать, что если прямая составляет равные углы с тремя различными попарно непараллельными прямыми, лежащими в некоторой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

91. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

92. Доказать, что перпендикуляры, восстановленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

93. Вычислить длину диагонали параллелепипеда, выходящей из точки O, зная длины трех его ребер, выходящих из той же точки, и углы между этими ребрами.

94. Выразить длину медианы CD треугольника ABC через длины сторон этого треугольника.

95. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Доказать, что

$$CD = \frac{2BC \cdot CA \cdot \cos\frac{C}{2}}{BC + CA}.$$

96. Выразить длину биссектрисы CD угла треугольника ABC через длины сторон этого треугольника.

97. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Доказать, что $CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$.

98. Выразить длину высоты CD треугольника ABC через длины сторон этого треугольника.

99. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении λ. Выразить длину отрезка CD через три стороны треугольника и λ.

100. В треугольнике ABC проведен отрезок $A'B'$ параллельно AB (A' лежит на AC, B' на BC). Показать, что если $AB' = BA'$, то треугольник ABC – равнобедренный.

101. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника относится к сумме квадратов его сторон как $3 : 4$.

102. В треугольнике ABC точки D, E, F делят соответственно стороны BC, CA, AB в отношении λ. Показать, что

$$\frac{AD^2 + BE^2 + CF^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} = \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2}.$$

103. Зная длины 6 ребер тетраэдра, определить длины трех отрезков, соединяющих попарно середины противоположных ребер.

104. Зная длины a и b сторон прямоугольника, найти косинус угла между диагоналями.

105. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ обозначим через M и N соответственно середины сторон CD и DE. Под каким углом пересекаются прямые AM и BN?

106. Подобрать α так, чтобы векторы $2\vec{l} - 4\vec{m}$ и $\alpha\vec{l} + \vec{m}$, где $|\vec{l}| = 2$, $|\vec{m}| = 3$, $\widehat{\vec{l}\vec{m}} = \frac{2\pi}{3}$, были взаимно перпендикулярны.

107. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

108. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

109. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α. Найти угол между медианами углов при основании.

110. Медианы AL и BM треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Показать, что $\cos C \geq \frac{4}{5}$.

111. Показать, что во всяком треугольнике ABC

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S}$$

где S – площадь треугольника ABC.

112. Векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ попарно ортогональны. Показать, что $\operatorname{ctg} A : \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C = a^2 : b^2 : c^2$ (A, B, C – углы треугольника ABC).

113. Зная длины 6 ребер тетраэдра, найти угол между двумя противоположными ребрами.

114. Доказать, что в прямоугольном треугольнике катет является средними пропорциональными между всей гипотенузой и ортогональной прекцией этого катета на гипотенузу.

115. Зная длины сторон треугольника ABC, найти численное значение ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.

116. Зная длины сторон треугольника ABC, найти численное значение ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{CM}$, определяемого медианой, на вектор $\overrightarrow{AB}$.

117. Зная длины сторон треугольника ABC, найти численное значение ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{CN}$, определяемого биссектрисой, на вектор $\overrightarrow{AB}$.

В следующих задачах, если не оговорено противное, базис предполагается ортонормированным.

118. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}(4, 3)$, $\vec{b}(1, 7)$;
2) $\vec{a}(6, -8)$, $\vec{b}(12, 9)$;
3) $\vec{a}(7, 2)$, $\vec{b}(-4, 5)$.

119. Даны три вектора: $\vec{a}(5, 2)$, $\vec{b}(7, -3)$ и $\vec{c}(0, 4)$.

1) Вычислить выражение $3(\vec{a}, \vec{b}) + 3(\vec{a}, \vec{c}) - 4\vec{c}^2$;

2) Найти координаты вектора $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c})$.

120. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на представителях векторов $\vec{a}(5, 10)$ и $\vec{b}(3, -4)$.

121. При каком x векторы $\vec{a}(x, 3)$ и $\vec{b}(-8, 5)$ являются взаимно перпендикулярными?

122. Найти орт вектора $\vec{a}(6,-8)$.

123. Из одной точки отложены векторы $\vec{a}(-12,16)$ и $\vec{b}(12,5)$. Найти координаты какого-нибудь вектора, который, будучи отложен из той точки, делил бы угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пополам.

124. Определить внутренние углы треугольника ABC, зная векторы $\overrightarrow{AB}(2,-6)$ и $\overrightarrow{BC}(1,7)$.

125. Найти численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}(10,2)$ на вектор $\vec{b}(5,-12)$.

126. Известны длины базисных векторов $|\vec{e}_1|=4$, $|\vec{e}_2|=2$ и угол между ними $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\frac{\pi}{3}$. Вычислить угол между векторами $\vec{a}(0,-3)$ и $\vec{b}(1,-2)$.

127. Вычислить косинус угла между векторами в каждом из следующих случаев:

$$1)\ \vec{a}(2,4,6),\ \vec{b}(-3,7,1);$$
$$2)\ \vec{a}(-1,0,2),\ \vec{b}(10,2,5);$$
$$3)\ \vec{a}(3,3,1),\ \vec{b}(-2,1,1);$$

128. Даны три вектора: $\vec{a}(5,-6,1)$, $\vec{b}(-4,3,0)$ и $\vec{c}(5,-8,10)$.

1) Вычислить выражение $\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\,\vec{b}+3\vec{c}^{\,2}$;

2) Найти координаты вектора $\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}+\vec{b}^{\,2}\,\vec{c}+\vec{c}^{\,2}\,\vec{a}$.

129. Даны три вектора: $\vec{a}(2,-1,3)$, $\vec{b}(4,3,1)$ и $\vec{c}(-1,1,1)$. Показать, что $\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}+\vec{b}^{\,2}\,\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

130. Из одной точки отложены векторы $\vec{a}(-3,0,4)$ и $\vec{b}(5,-2,-14)$. Найти единичный вектор, который, будучи отложен из той же точки, делил бы угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пополам.

131. Определить внутренние углы треугольника ABC, зная векторы $\overrightarrow{AB}(2,1,-2)$ и $\overrightarrow{BC}(3,2,6)$.

132. Найти численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}(8,4,1)$ на вектор $\vec{b}(2,-2,1)$.

133. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей.

134. Дан куб. Найти углы, которые образуют: 1) диагональ куба с его ребром; 2) диагонали двух граней, исходящие из одной точки.

135. Дан прямоугольный параллелелпипед с ребрами a, b, c. Найти углы, которые образуют: 1) диагональ параллелепипеда с его ребром; 2) диагонали двух граней,исходящие из одной точки.

136. Даны длины базисных векторов $|\vec{e}_1| = 4$, $|\vec{e}_2| = 5$, $|\vec{e}_3| = 3$ и углы между ними $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \frac{\pi}{2}$. Найти угол между векторами $\vec{a}(1, -2, 1)$ и $\vec{b}(3, 7, 0)$.

5. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

ЗАДАЧИ

163. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют положительный базис. Определить ориентацию базиса в каждом из следующих случаев:

1) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a})$,

2) $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}, -\vec{a} + \vec{b}, -\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c})$.

164. Будут ли базисы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ одинаково или противоположно ориентированы, если:

$\vec{a}(3, -1, 4)$, $\vec{b}(-2, 3, -3)$, $\vec{c}(-9, 1, 7)$;

$\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(-3, 0, 2)$, $\vec{w}(5, 1, -2)$.

165. Показать, что два базиса, один из которых получается из другого с помощью отражения от плоскости π, имеют противоположную ориентацию.

166. Вычислить длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $a = 10$, $b = 2$ и $\vec{a}\vec{b} = 12$.

167. Показать, что $|[\vec{a}\vec{b}]| \leq ab$. Когда $|[\vec{a}\vec{b}]| = ab$?

168. Вычислить:

1) $[(2\vec{i} + 3\vec{j})(\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j})]$;

2) $[(\vec{i} + 3\vec{j})(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})]^2$.

169. Найти синус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $AB = 1$, $AD = 2$ и $\angle A = \frac{\pi}{3}$.

170. Доказать: векторное произведение двух неколлинеарных векторов равно произведению длины первого сомножителя и повернутой проекции второго сомножителя, построенной на плоскости π, перпендикулярной к первому сомножителю:

$$[\vec{a}\vec{b}] = a(\mathit{Пр}_{\pi}\vec{b}), \quad (\pi \perp \vec{a}).$$

171. Выразить векторное произведение двух неколлинеарных векторов, лежащих в ориентированной плоскости π, через псевдоскалярное произведение и орт, ортогональный к этой плоскости.

172. Доказать тождество:$[\vec{a}\vec{b}]^2 + (\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}$.

173. Проверить справедливость равенств: $[(\vec{a} + \lambda\vec{b})\vec{b}] = [\vec{a}(\vec{b} + \beta\vec{a})] = [\vec{a}\vec{b}]$ и дать им геометрическое истолкование.

174. В каком случае равенства $[\vec{a}\vec{x}] = [\vec{b}\vec{x}]$ и $\vec{a} = \vec{b}$ эквивалентны?

175. Доказать, что если ненулевые векторы $[\vec{a}\vec{b}\,]$ и коллинеарны $[\vec{c}\vec{d}\,]$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ компланарны.

176. Доказать, что из равенств $[\vec{a}\vec{b}\,] = [\vec{c}\vec{d}\,]$ и $[\vec{a}\vec{c}\,] = [\vec{b}\vec{d}\,]$ следует коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

177. Доказать, что если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, то равенства $[\vec{a}\vec{b}\,] = [\vec{b}\vec{c}\,] = [\vec{c}\vec{a}\,]$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ эквивалентны.

178. Доказать: площадь выпуклого плоского четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей и синуса угла между ними.

179. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

180. Доказать, что момент силы относительно точки сохранится, если силу переместить по прямой, вдоль которой она действует.

181. *Парой сил* называется совокупность двух противоположных сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$. *Моментом пары* относительно некоторой точки называется сумма моментов сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ относительно этой точки. Доказать, что момент пары не зависит от точки, относительно которой он взят.

182. Доказать коллинеарность векторов $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ и $\vec{b} - \vec{c}$ при условии, что вектор $\vec{a}$ перпендикулярен разности $\vec{b} - \vec{c}$.

183. При каких условиях для ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливо равенство $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = [[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$?

184. Доказать тождества:

$$1)\ [\,\vec{a}\,[\,\vec{b}\,\vec{c}\,]] + [\,\vec{b}\,[\,\vec{c}\,\vec{a}\,]] + [\,\vec{c}\,[\vec{a}\,\vec{b}\,]] = \vec{0} \quad (\textit{тождество Якоби}),$$
$$2)\ [\,\vec{a}\,[\,\vec{b}\,[\,\vec{c}\,\vec{d}\,]\,]\,] = [\,\vec{a}\,\vec{c}\,](\vec{b}\vec{d}) + [\,\vec{a}\,\vec{d}\,](\vec{b}\vec{c}),$$
$$3)\ [\,\vec{a}\,\vec{b}\,][\,\vec{c}\,\vec{d}\,] = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d} \\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d} \end{vmatrix}.$$

185. Доказать тождества:

$$1)\ [\,[\,[\,\vec{a}\,\vec{b}\,]\,\vec{a}\,]\vec{b}\,] = -(\vec{a}\vec{b})[\vec{a}\vec{b}],$$
$$2)\ [\,[\,[\,[\,\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{a}\,]\vec{b}\,]\vec{a}\,] = (\vec{a}\vec{b}) \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ a^2 & \vec{a}\vec{b} \end{vmatrix}.$$

и обобщить их (по числу скобок) на все натуральные n:

$$\underbrace{[[...[}_{n}[[\vec{a}\vec{b}]\vec{a}]\vec{b}]...\vec{a}]\vec{b}] = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(\vec{a}\vec{b})^{\frac{n-1}{2}}[\vec{a}\vec{b}], \quad n \geq 3$$

— нечетное число,

$$[[\underbrace{...[[}_{n}\vec{a}\vec{b}]\vec{a}]...\vec{b}]\vec{a}] = (-1)^{\frac{n}{2}}(\vec{a}\vec{b})^{\frac{n}{2}-1}\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{b}\\ a^2 & \vec{a}\vec{b}\end{vmatrix}, \quad n \geq 2$$

— четное число.

186. Доказать, что если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $[\vec{a}[\vec{a}[\vec{a}[\vec{a}\vec{b}]]]] = a^4\vec{b}$ и выяснить геометрический смысл этого утверждения.

187. В треугольнике ABC проведена высота AD. Полагая $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{h}$, выразить $\vec{h}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

188. Доказать, что $|\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \leq abc$.

189. Показать, что $\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right) = \frac{1}{4}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и выяснить геометрический смысл этого равенства при условии, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны.

190. Доказать, что смешанное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить линейную комбинацию двух других.

191. Доказать, что векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$ и $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ компланарны.

192. От одной точки отложены три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы представителей векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, перпендикулярна вектору $[\vec{a}\vec{b}] + [\vec{b}\vec{c}] + [\vec{c}\vec{a}]$.

193. Доказать тождество

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]\,[\vec{b}[\vec{c}\vec{a}]]\,[\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] = \vec{0}$$

и вывести из него следствие: если через боковые ребра треугольной пирамиды провести плоскости, перпендикулярные противоположным боковым граням, то они пересекутся по одной прямой.

194. Решить уравнения:

$$1)\,\vec{x} - [\vec{a}\vec{x}] = [\vec{a}\vec{b}];$$

$$2)\,\vec{x} - [\vec{a}\vec{x}] = \vec{b},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$ — данные, а $\vec{x}$ — неизвестный вектор.

195. Найти вектор $\vec{x}$ и число α из системы уравнений:

$$\vec{a}\vec{x} = 0, \quad \alpha\vec{a} - [\vec{a}\vec{x}] = \vec{b}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}.$$

196. Доказать тождества:

1) $[[\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}]] = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d} = (\vec{a}\vec{c}\vec{d})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c}\vec{d})\vec{a}$;
2) $[\vec{a}\vec{b}][\vec{b}\vec{c}][\vec{c}\vec{a}] = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$;
3) $[\vec{a}\vec{b}]^2 = \vec{a}[\vec{b}\vec{a}]\vec{b} = \vec{b}[\vec{a}\vec{b}]\vec{a}$.

197. Показать, что из компланарности векторов $[\vec{a}\vec{b}]$, $[\vec{b}\vec{c}]$ и $[\vec{c}\vec{a}]$ следует их коллинеарность.

198. Для базиса $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ базис $(\vec{a}^*,\ \vec{b}^*\ \vec{c}^*)$ называется *взаимным*, если имеют место равенства:

$$\vec{a}\vec{a}^* = 1, \quad \vec{a}\vec{b}^* = 0, \quad \vec{a}\vec{c}^* = 0,$$

$$\vec{b}\vec{a}^* = 0, \quad \vec{b}\vec{b}^* = 1, \quad \vec{b}\vec{c}^* = 0,$$

$$\vec{c}\vec{a}^* = 0, \quad \vec{c}\vec{b}^* = 0, \quad \vec{c}\vec{c}^* = 1,$$

Доказать, что

$$\vec{a}^* = \frac{[\vec{b}\vec{c}]}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \quad \vec{b}^* = \frac{[\vec{c}\vec{a}]}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \quad \vec{c}^* = \frac{[\vec{a}\vec{b}]}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}.$$

199. Доказать, что базис совпадает с ему взаимным тогда и только тогда, когда он образован из единичных попарно взаимно перпендикулярных векторов.

200. Найти взаимный базис для базиса:

$$1)\,(\vec{i}+\vec{j},\ \vec{j}+\vec{k},\ \vec{k}+\vec{i}),$$

$$2)\,(\vec{a},\ [\vec{a}\vec{b}],\ [\vec{a}[\vec{a}\vec{b}]]), \quad (\vec{a} \nparallel \vec{b}).$$

201. Доказать, что разложение произвольного вектора $\vec{x}$ пространства по базису $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ может быть представлено в виде (*формула Гиббса*):

$$\vec{x} = (\vec{x}\vec{a}^*)\vec{a} + (\vec{x}\vec{b}^*)\vec{b} + (\vec{x}\vec{c}^*)\vec{c},$$

где $(\vec{a}^*,\ \vec{b}^*\ \vec{c}^*)$ – взаимный базис для базиса $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$.

202. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\vec{a}\vec{x} = \alpha, \quad \vec{b}\vec{x} = \beta, \quad \vec{c}\vec{x} = \gamma.$$

203. Решить систему:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{x} = \alpha, \quad \vec{b}\vec{c}\vec{x} = \beta, \quad \vec{c}\vec{a}\vec{x} = \gamma, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0,$$

где α, β, γ – действительные числа.

204. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Зная, что $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, найти вектор $\vec{x} = \overrightarrow{SC}$ при условии $\vec{a}\vec{b}\vec{x} > 0$.

205. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Зная, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AS}} = \alpha$, найти вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AS}$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{x} > 0)$.

206. Дан прямой круглый конус. Орты $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ параллельны образуюшим одного из осевых сечений конуса. Найти орты, параллельные образующим осевого сечения конуса, перпендикулярного первому.

207. Найти ненулевое решение системы:

$$\vec{x}^2 + \vec{a}\vec{x}\vec{b} = 0, \quad \vec{a}\vec{x} = 0, \quad \vec{b}\vec{x} = 0 \quad (\vec{a} \nparallel \vec{b}).$$

208. Решить систему:

$$\vec{a}\vec{x} = 0, \quad \vec{b}\vec{x} = 0, \quad \vec{x}[\vec{a}\vec{x}]\vec{b} + \vec{c}\vec{x} + [\vec{b}\vec{x}]^2 = 0 \quad ([\vec{a}\vec{b}] \neq \vec{0}).$$

209. Решить систему:

$$\vec{a}\vec{x} = \alpha, \quad [\vec{a}\vec{x}] = \vec{b}, \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \, \vec{a} \perp \vec{b}).$$

210. Решить систему:

$$[\vec{a}[\vec{x}\vec{b}]] = \vec{c}, \quad \vec{x}\vec{b}\vec{c} = 0 \quad \text{при условии} \quad \vec{a}\vec{c} = 0, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0, \quad \vec{a}\vec{b} \neq 0.$$

211. Доказать тождество:

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]][\vec{c}\,[\vec{b}\vec{a}]] = \begin{vmatrix} [\vec{a}\vec{b}] & [\vec{c}\vec{b}] & [\vec{c}\vec{a}] \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{c}\vec{b} & 0 \\ 0 & \vec{c}\vec{b} & \vec{c}\vec{a} \end{vmatrix}.$$

212. Решить уравнение:

$$[[\,\vec{a}\vec{x}\,][\,\vec{b}\vec{x}\,]] = \vec{c}, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0.$$

213. Показать, что уравнение:

$$\vec{x} = [\vec{a}\vec{x}] + [\vec{a}[\vec{b}\vec{x}]]$$

имеет только нулевое решение.

214. Показать, что система

$$[\vec{a}[\vec{x}\vec{b}]] = \vec{c}, \quad [\vec{c}[\vec{x}\vec{b}]] = \vec{b}, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$$

не имеет решений.

215. Найти векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из системы

$$[[\vec{a}\vec{x}][\vec{b}\vec{x}]] = \vec{y}, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{y} = 0, \quad [\vec{a}\vec{b}] \neq 0.$$

216. Доказать, что уравнение

$$[[\vec{i}\vec{x}][\vec{j}\vec{x}]] = [\vec{k}[\vec{k}\vec{x}]],$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – векторы ортонормированного базиса, имеет только нулевое решение.

217. Решить уравнение:

$$[\vec{x}[\vec{a}\vec{x}]] = \vec{b}, \quad \vec{a}\vec{b}] \neq 0, \quad \vec{a}\vec{b} > 0.$$

218. Решить уравнение:

$$\vec{x} - [\vec{a}\vec{x}] - [\vec{a}[\vec{b}\vec{x}]] = \vec{b}, \quad \vec{a}\vec{b}] \neq 0.$$

219. Показать, что система

$$[\vec{a}[\vec{a}\vec{x}]] = \vec{y}, \quad [\vec{b}\,[\vec{b}\vec{y}]] = \vec{z}, \quad [\vec{c}\,[\vec{c}\vec{z}]] = \vec{x}, \quad \vec{a}^{\,\circ}\vec{b}^{\,\circ}\vec{c}^{\,\circ} = 1$$

имеет только нулевое решение.

220. Истолковать геометрически тождество Лагранжа:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 & m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 \\ m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 & m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 \end{vmatrix}.$$

221. Какие свойства определителей третьего порядка выражают формальные своства смешанного произведения?

222. Найти координаты смешанного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$, если

1) $\vec{a}(3, -1, 4)$ и $\vec{b}(-2, 3, -3)$;
2) $\vec{a}(5, -2, 1)$ и $\vec{b}(4, 0, 6)$.

223. Вычислить площадь треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(-5, 2, 3)$, $\overrightarrow{AC}(2, 1, -1)$.

224. Найти какой-либо вектор, ортогональный плоскости треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(-4, -3, -1)$, $\overrightarrow{AC}(-3, 3, -1)$.

225. Найти длину высоты AD треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(-5, -8, -7)$, $\overrightarrow{AC}(-1, -5, -5)$.

226. Вектор $\vec{x}$, ортогональный к векторам $\vec{a}(4,-2,-3)$ и $\vec{b}(0,1,3)$, образует с вектором $\vec{j}$ ортонормированного базиса тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=26$, найти его координаты.

227. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}(2,-3,1)$ и $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

228. Даны векторы: $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(-3,1,2)$, $\vec{c}(1,2,3)$. Найти координаты векторов: 1. $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$; 2. $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$.

229. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в каждом из случаев:

$$\begin{array}{lll}
1)\,\vec{a}(1,2,-1), & \vec{b}(-1,1,1), & \vec{c}(2,1,0),\\
2)\,\vec{a}(-2,0,3), & \vec{b}(1,-1,0), & \vec{c}(0,3,-2),\\
3)\,\vec{a}(1,-1,3), & \vec{b}(-2,2,1), & \vec{c}(3,-2,5),
\end{array}$$

230. Доказать, что векторы $\vec{a}(-1,3,3)$, $\vec{b}(1,1,-1)$ и $\vec{c}(2,6,0)$ компланарны.

231. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если $\overrightarrow{AB}(3,0,3)$, $\overrightarrow{AC}(1,1,-2)$, $\overrightarrow{AD}(4,1,0)$.

232. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно: $\overrightarrow{AB}(-1,2,-3)$, $\overrightarrow{AC}(-3,1,-1)$, $\overrightarrow{AD}(3,9,-6)$. Найти длину высоту тетраэдра, опущенной из точки A.

233. В четырехугольнике $ABCD$ дано: $\overrightarrow{AB}(-1,3,4)$, $\overrightarrow{AC}(0,4,3)$, $\overrightarrow{AD}(3,3,-3)$. Доказать, что чытырехугольник плоский, и найти его площадь.

234. Найти объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, если $\overrightarrow{AB}(2,-3,1)$, $\overrightarrow{AD}(1,-4,-3)$, $\overrightarrow{AA'}(0,3,2)$.

235. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Основание тетраэдра – треугольник ABC. Известны векторы $\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$, $\overrightarrow{AC}(0,-2,4)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AD}$, если его орт имеет координаты $(2/7,6/7,3/7)$.

236. Для базиса $\vec{a}(2,1,-1)$, $\vec{b}(-3,0,2)$, $\vec{c}(5,1,-2)$ найти взаимный базис.