## Угол между прямыми на плоскости

**Теорема.** Пусть на плоскости даны две пересекающиеся прямые $l_1$ и $l_2$ общими уравнениями в декартовой системе координат $\varkappa$

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

соответственно. Тогда мера угла между ними может быть вычислена по одной из следующих трёх формул:

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},\quad \sin\theta=\frac{|A_1B_2-A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|.$$

Если данные прямые не параллельны координатной прямой $Oy$, то мера угла между ними можно вычислить также по формуле

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|,$$

где $k_1$ и $k_2$ - угловые коэффициенты прямых $l_1$ и $l_2$ относительно $\varkappa$ соответственно.

**Доказательство.** Векторы $\vec{n}_1(A_1;B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2;B_2)$ перпендикулярны $l_1$ и $l_2$ соответственно.

$$\theta=\begin{cases}\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}, & \text{если} \quad \widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}, & \text{если} \quad \widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$\cos\theta=\begin{cases}\cos\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}, & \text{если} \quad \widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}, & \text{если} \quad \widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$\cos\theta=\frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{|A_1B_2-A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|.$$

Если прямые $l_1$ и $l_2$ не параллельны координатной прямой $Oy$, то их угловые коэффициенты определяются равенствами: $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$.

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\left(\frac{A_1B_2}{B_1B_2} - \frac{A_2B_1}{B_1B_2}\right) : \left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2} + \frac{B_1B_2}{B_1B_2}\right)\right| = \left|\frac{-k_1 + k_2}{k_1k_2 + 1}\right|.$$

**Следствие.**

1. Две прямые на плоскости, заданные общими уравнениями

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

в декартовой системе координат, перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма произведений соответствующих коэффициентов при переменных равна нулю:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

2. Если прямые непараллельны координатной прямой $Oy$, то они будут перпендикулярны тогда и только и тогда, когда угловые коэффициенты их обратны по величине и по знаку:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$