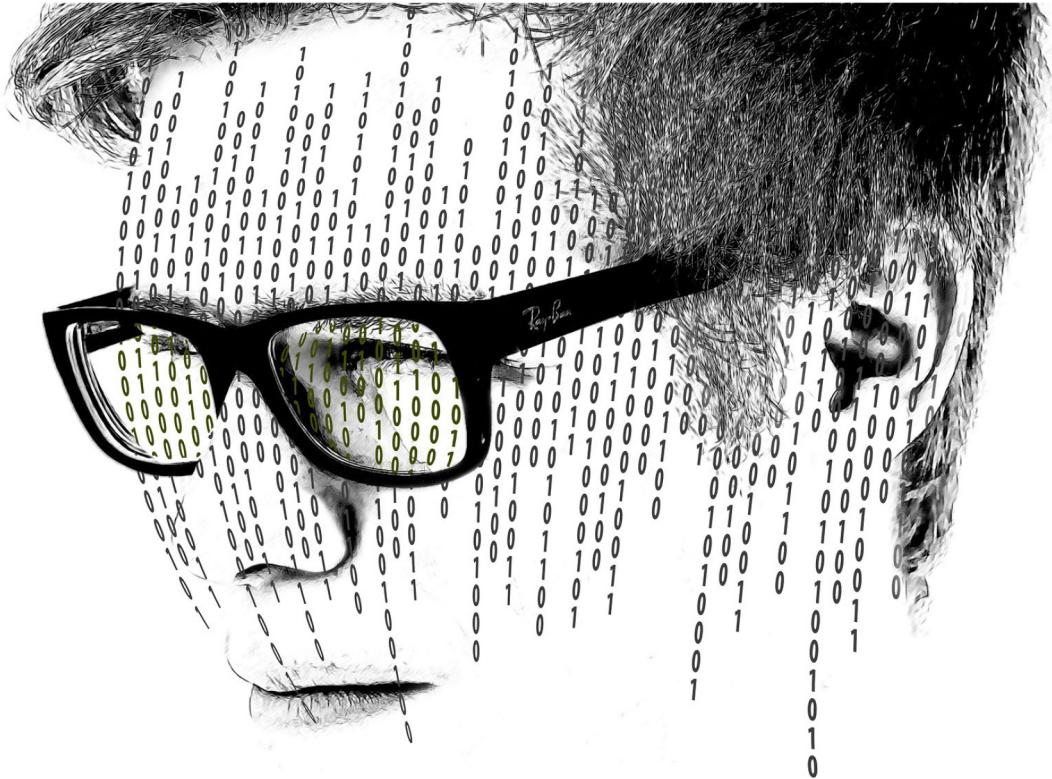


К. Фислер, Ш. Кришнамурти, Б. С. Лернер, Дж. Г. Политц



# Введение в программирование и структуры данных

Кати Фислер, Шрирам Кришнамурти,  
Бенджамин С. Лернер, Джо Гиббс Политц

# **Введение в программирование и структуры данных**

Kathi Fisler,  
Shriram Krishnamurthi,  
Benjamin S. Lerner,  
Joe Gibbs Politz

# A Data-Centric Introduction to Computing

Кати Фислер,  
Шрирам Кришнамурти,  
Бенджамин С. Лернер,  
Джо Гиббс Политц

# Введение в программирование и структуры данных



Москва, 2022

**УДК 004.6  
ББК 32.972  
Ф63**

**Фислер К., Кришнамурти Ш., Лернер Б. С., Политц Дж. Г.**  
**Ф63 Введение в программирование и структуры данных / пер. с англ. А. В. Снастиной. – М.: ДМК Пресс, 2022. – 440 с.: ил.**

**ISBN 978-5-93700-137-5**

В этой книге представлены полезные методики программирования, имеющие практическую ценность. Опираясь на свой многолетний опыт, авторы показывают, как написать надежный код, который смогут читать другие разработчики. Основной принцип обучения – составление плана решения: от определения структур данных по условиям поставленной задачи через примеры и тесты к написанию программного кода. Обсуждаются типичные ошибки программистов. Многочисленные примеры и упражнения позволяют читателям самостоятельно закрепить изученный материал на практике.

Издание будет полезно студентам вузов, где преподается информатика, а также всем, кто хочет изучить современное программирование.

**УДК 004.6  
ББК 32.972**

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-93700-137-5 (рус.)

© Kathi Fisler, Shriram Krishnamurthi,  
Benjamin S. Lerner, Joe Gibbs Politz, 2022  
© Перевод, оформление, издание,  
ДМК Пресс, 2022

# Содержание

<b>От издательства .....</b>	13
<b>Об авторах .....</b>	14
<b>Часть I. ВВЕДЕНИЕ .....</b>	17
<b>Глава 1. Предисловие .....</b>	18
1.1. О чем эта книга .....	18
1.2. Основополагающие принципы, определяющие содержание этой книги .....	18
1.3. Наш взгляд на данные .....	19
1.4. Что делает эту книгу особенной.....	20
1.5. Для кого предназначена эта книга .....	21
1.6. Структура книги .....	21
1.7. Организация материала книги.....	22
1.8. Наш выбор языка программирования .....	24
1.9. Обратная связь, сообщения об ошибках и комментарии .....	25
<b>Глава 2. Благодарности.....</b>	26
<b>Часть II. ОСНОВЫ .....</b>	28
<b>Глава 3. Начинаем работу.....</b>	29
3.1. Поясняющий пример: флаги.....	29
3.2. Числа .....	30
3.3. Выражения.....	32
3.4. Терминология.....	33
3.5. Строки.....	33
3.6. Изображения .....	34
3.6.1. Объединение изображений.....	35
3.6.2. Создание флага .....	36
3.7. Небольшое отступление: типы, ошибки и документация.....	37
3.7.1. Типы и контракты .....	37
3.7.2. Ошибки формата и нотации.....	39
3.7.3. Поиск других функций: документация .....	40
<b>Глава 4. Именование значений.....</b>	42
4.1. Панель определений .....	42
4.2. Именование значений .....	42
4.2.1. Сравнение имен и строк.....	43
4.2.2. Сравнение выражений с инструкциями .....	44
4.3. Каталог программы .....	45
4.3.1. Объяснение смысла кнопки Run.....	46
4.4. Использование имен для оптимизации создания изображений .....	48

<b>Глава 5. От повторяющихся выражений к функциям.....</b>	50
5.1. Учебный пример: похожие флаги .....	50
5.2. Определение функций.....	51
5.2.1. Как вычисляются функции.....	52
5.2.2. Аннотации типов .....	53
5.2.3. Документация .....	55
5.3. Практическая методика разработки функций: расчет веса на Луне.....	56
5.4. Документирование функций с примерами .....	57
5.5. Практическая методика разработки функций: стоимость авторучек .....	58
5.6. Резюме: определение функций.....	61
<b>Глава 6. Условные и логические выражения .....</b>	63
6.1. Учебный пример: вычисление стоимости доставки .....	63
6.2. Условные выражения: вычисления с принятием решений .....	64
6.3. Логические выражения.....	65
6.3.1. Другие логические операции .....	66
6.3.2. Объединение логических выражений .....	68
6.4. Как задать сразу несколько вопросов .....	68
6.5. Вычисление методом упрощения выражений.....	72
6.6. Совместное использование функций .....	73
6.6.1. Как вычисляются совместно используемые функции .....	74
6.6.2. Совместное использование функций и внутренний каталог .....	75
6.7. Вложенные условные выражения .....	76
6.8. Резюме: логические и условные выражения .....	80
<b>Глава 7. Введение в табличные данные .....</b>	82
7.1. Создание табличных данных.....	84
7.2. Извлечение значений строк и ячеек .....	86
7.3. Функции для работы со строками .....	88
7.4. Обработка строк таблицы .....	89
7.4.1. Поиск строк.....	90
7.4.2. Упорядочение строк .....	91
7.4.3. Добавление новых столбцов.....	93
7.4.4. Вычисление новых значений столбца .....	95
7.5. Примеры функций для создания таблиц.....	96
<b>Глава 8. Обработка таблиц .....</b>	98
8.1. Очистка таблиц данных .....	99
8.1.1. Загрузка таблиц данных .....	99
8.1.2. Обработка отсутствующих элементов.....	100
8.1.3. Нормализация данных .....	102
8.1.4. Нормализация, систематическое применение.....	106
8.1.4.1. Использование программ для обнаружения ошибок в данных .....	107
8.2. Планирование задач .....	108
8.3. Подготовка таблиц данных .....	111
8.3.1. Создание групп по категориям.....	112
8.3.2. Разделение столбцов .....	112
8.4. Управление и именование таблиц данных .....	114
8.5. Визуальные представления и графики.....	115
8.6. Резюме: управление анализом данных.....	117

---

<b>Глава 9. От таблиц к спискам</b>	119
9.1. Основные статистические вопросы	119
9.2. Извлечение столбца из таблицы	120
9.3. Объяснение смысла списков	121
9.3.1. Списки как анонимные данные	121
9.3.2. Создание литеральных списков	122
9.4. Операции со списками	123
9.4.1. Встроенные операции со списками чисел	123
9.4.2. Встроенные операции для любых списков	123
9.4.3. Небольшое отступление о соглашениях об именовании	124
9.4.4. Получение элементов по позиции	125
9.4.5. Преобразование списков	126
9.4.6. Резюме: краткий обзор операций для работы со списками	127
9.5. Лямбда: анонимные функции	129
9.6. Совместное использование списков и таблиц	130
<b>Глава 10. Обработка списков</b>	133
10.1. Создание списков и разделение их на части	133
10.2. Несколько упражнений с примерами	136
10.3. Структурированные задачи со скалярными ответами	136
10.3.1. <code>my-len</code> : примеры	136
10.3.2. <code>my-sum</code> : примеры	138
10.3.3. От примеров к исходному коду	139
10.4. Структурированные задачи, в которых выполняется преобразование списков	141
10.4.1. <code>my-doubles</code> : примеры и код	142
10.4.2. <code>my-str-len</code> : примеры и код	144
10.5. Структурированные задачи, которые выбирают элементы из списков	145
10.5.1. <code>my-pos-nums</code> : примеры и код	145
10.5.2. <code>my-alternating</code> : примеры и код	147
10.6. Структурированные задачи на нестрогих областях определения	150
10.6.1. <code>my-max</code> : примеры	150
10.6.2. <code>my-max</code> : от примеров к коду	152
10.7. Более структурированные задачи со скалярными ответами	154
10.7.1. <code>my-avg</code> : примеры	154
10.8. Структурированные задачи с аккумуляторами	156
10.8.1. <code>my-running-sum</code> : первая попытка	156
10.8.2. <code>my-running-sum</code> : примеры и код	156
10.8.3. <code>my-alternating</code> : примеры и код	158
10.9. Работа с несколькими ответами	159
10.9.1. <code>uniq</code> : постановка задачи	159
10.9.2. <code>uniq</code> : примеры	159
10.9.3. <code>uniq</code> : код	160
10.9.4. <code>uniq</code> : сокращенное вычисление	162
10.9.5. <code>uniq</code> : пример и варианты кода	163
10.9.6. <code>uniq</code> : почему создается список?	164
10.10. Мономорфные списки и полиморфные типы	164
<b>Глава 11. Введение в структурированные данные</b>	166
11.1. Объяснение типов сложных составных данных	166

11.1.1. Первый взгляд на структурированные данные .....	166
11.1.2. Первый взгляд на условные данные .....	167
11.2. Определение и создание структурированных и условных данных.....	168
11.2.1. Определение и создание структурированных данных .....	168
11.2.2. Аннотации для структурированных данных .....	169
11.2.3. Определение и создание условных данных .....	170
11.3. Программирование со структурированными и условными данными.....	171
11.3.1. Извлечение полей из структурированных данных .....	171
11.3.2. Различие вариантов условных данных .....	172
11.3.3. Обработка полей вариантов .....	173
<b>Глава 12. Наборы структурированных данных .....</b>	<b>175</b>
12.1. Списки как наборы данных .....	176
12.2. Множества как наборы данных.....	178
12.2.1. Выбор элементов из множеств .....	179
12.2.2. Вычисления с использованием множеств.....	180
12.3. Сочетание структурированных и объединенных в набор данных .....	181
12.4. Задача проектирования данных: представление опросов.....	182
<b>Глава 13. Рекурсивные данные .....</b>	<b>185</b>
13.1. Функции для обработки рекурсивных данных .....	187
13.2. Шаблон для обработки рекурсивных данных .....	192
<b>Глава 14. Деревья .....</b>	<b>195</b>
14.1. Задача проектирования данных – данные родословной .....	195
14.1.1. Вычисление генетических родителей по таблице родословной .....	196
14.1.2. Вычисление прародителей по таблице родословной.....	198
14.1.3. Создание типа данных для деревьев родословной .....	199
14.2. Программы для обработки деревьев родословной.....	201
14.3. Резюме: методика решения задач о деревьях .....	203
14.4. Учебные вопросы .....	203
<b>Глава 15. Функции как данные .....</b>	<b>205</b>
15.1. Немного математического анализа .....	205
15.2. Удобная сокращенная форма записи для анонимных функций .....	208
15.3. Потоки из функций .....	208
15.4. Объединение сил: потоки производных .....	214
<b>Глава 16. Интерактивные игры как системы с обратной связью .....</b>	<b>216</b>
16.1. Немного об анимации с обратной связью .....	217
16.2. Предварительные условия.....	218
16.3. Версия: самолет пересекает экран .....	218
16.3.1. Обновление состояния окружающей среды .....	219
16.3.2. Вывод представления состояния окружающей среды .....	220
16.3.3. Наблюдение за временем (и совмещение всех элементов) .....	221
16.4. Версия: непрерывное циклическое движение.....	222
16.5. Версия: снижение .....	223
16.5.1. Движение самолета.....	224
16.5.2. Визуализация сцены .....	225
16.5.3. Завершающие штрихи .....	226

---

16.6. Версия: ответная реакция на нажатия клавиш.....	226
16.7. Версия: посадка .....	228
16.8. Версия: закрепленный воздушный шар.....	230
16.9. Версия: следите за топливным баком .....	232
16.10. Версия: воздушный шар тоже двигается .....	234
16.11. Версия: один, два,... девяносто девять летающих воздушных шаров .....	235
<b>Глава 17. Примеры, тестирование и проверка программ .....</b>	<b>236</b>
17.1. От примеров к тестам .....	236
17.2. Улучшенные сравнения.....	238
17.3. Когда тесты не проходят .....	241
17.4. Прогнозирование тестирования .....	242
<b>Часть III. АЛГОРИТМЫ.....</b>	<b>244</b>
<b>Глава 18. Прогнозирование роста .....</b>	<b>245</b>
18.1. Маленькая (правдивая) история .....	245
18.2. Основной аналитический принцип.....	249
18.3. Модель стоимости для времени выполнения Pyret.....	250
18.4. Размер входных данных .....	251
18.5. Табличный метод для отдельных структурированных рекурсивных функций .....	252
18.6. Создание рекуррентных последовательностей .....	254
18.7. Форма записи для функций.....	256
18.8. Сравнение функций .....	256
18.9. Объединение О-больших без проблем .....	258
18.10. Решение рекуррентных последовательностей .....	259
<b>Глава 19. Обратимся к множествам.....</b>	<b>263</b>
19.1. Представление множеств с помощью списков .....	264
19.1.1. Варианты выбора представления .....	264
19.1.2. Временнаá сложность .....	265
19.1.3. Выбор одного из представлений .....	266
19.1.4. Другие операции .....	268
19.2. Как заставить множества расти на деревьях.....	269
19.2.1. Преобразование значений в упорядоченные значения .....	270
19.2.2. Использование двоичных деревьев.....	272
19.2.3. Точный баланс: обрезка деревьев.....	276
19.2.3.1. Вариант левое–левое .....	279
19.2.3.2. Вариант левое–правое.....	280
19.2.3.3. Существуют ли какие-либо другие варианты? .....	281
<b>Глава 20. Хэллоуин-анализ .....</b>	<b>283</b>
20.1. Первый пример .....	283
20.2. Новая форма анализа.....	283
20.3. Пример: очереди из списков .....	284
20.3.1. Представления в виде списка .....	284
20.3.2. Первоначальный анализ .....	285
20.3.3. Более разнообразные последовательности операций .....	285
20.3.4. Второй этап анализа .....	287

20.3.5. Сравнение амортизации с отдельными операциями .....	287
20.4. Материал для дополнительного чтения.....	287
<b>Глава 21. Совместное использование значений и равенство.....</b>	<b>288</b>
21.1. Новый взгляд на равенство .....	288
21.2. Стоимость вычисления ссылок .....	292
21.3. Формы записи равенства.....	294
21.4. В интернете никто не знает, что вы НАГ .....	294
21.5. НАГ был всегда .....	296
21.6. От ацикличности к циклам .....	297
<b>Глава 22. Графы .....</b>	<b>299</b>
22.1. Объяснение сущности графов .....	299
22.2. Представления.....	303
22.2.1. Связи по имени .....	303
22.2.2. Связи по индексам.....	305
22.2.3. Список ребер .....	307
22.2.4. Абстрагирующие представления .....	308
22.3. Измерение сложности для графов .....	308
22.4. Достижимость.....	309
22.4.1. Простая рекурсия .....	309
22.4.2. Приведение в порядок цикла.....	310
22.4.3. Проход с использованием памяти.....	311
22.4.4. Улучшенный интерфейс .....	312
22.5. Обход в глубину и в ширину.....	313
22.6. Графы со взвешенными ребрами.....	314
22.7. Наикратчайшие (или наилегчайшие) пути .....	315
22.8. Моравские оставные деревья.....	317
22.8.1. Глобальная задача .....	318
22.8.2. Жадное решение .....	318
22.8.3. Другое жадное решение .....	319
22.8.4. Третье решение .....	320
22.8.5. Проверка связности компонентов.....	321
<b>Часть IV. ОТ PYRET К PYTHON .....</b>	<b>326</b>
<b>Глава 23. От Pyret к Python .....</b>	<b>327</b>
23.1. Выражения, функции и типы .....	327
23.2. Возврат значений из функций .....	329
23.3. Примеры и варианты тестов .....	330
23.4. Небольшое отступление по поводу чисел .....	331
23.5. Условные выражения .....	333
23.6. Создание и обработка списков.....	333
23.6.1. Фильтры, отображения и друзья .....	334
23.7. Данные с компонентами.....	335
23.7.1. Доступ к полям внутри классов данных .....	336
23.8. Обход списков .....	336
23.8.1. Представляем циклы <code>for</code> .....	336
23.8.1.1. Небольшое отступление о порядке обработки элементов списка .....	338

---

23.8.2. Использование циклов <code>for</code> в функциях, создающих списки .....	339
23.8.3. Резюме: шаблон обработки списков для Python .....	340
<b>Часть V. ПРОГРАММИРОВАНИЕ С СОХРАНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ.....</b>	<b>341</b>
<b>Глава 24. Изменение структурированных данных.....</b>	<b>342</b>
24.1. Изменение полей структурированных данных .....	343
24.2. Изменение совместно используемых данных .....	344
24.3. Объяснение функционирования памяти .....	346
24.4. Переменные и равенство.....	347
24.5. Хранение простых данных в памяти .....	348
<b>Глава 25. Изменение переменных.....</b>	<b>350</b>
25.1. Изменение переменных в памяти .....	350
25.2. Изменение переменных, связанных со списками.....	354
25.3. Создание функций, изменяющих переменные .....	355
25.3.1. Аннотация <code>global</code> .....	356
25.4. Тестирование функций, изменяющих глобальные переменные .....	357
25.4.1. Внутренняя структура функции тестирования.....	361
25.4.2. Общие выводы о тестировании изменений .....	361
<b>Глава 26. Возврат к спискам и переменным.....</b>	<b>363</b>
26.1. Обновление совместно используемого списка.....	363
26.1.1. Операции, изменяющие списки .....	364
26.2. Списки в памяти .....	365
26.3. Практический пример: данные для совместно используемых банковских счетов .....	367
26.4. Циклические ссылки .....	371
26.4.1. Тестирование циклических данных .....	373
26.4.2. Снова переменные: функция для создания счетов для новых клиентов.....	373
26.5. Многочисленные роли переменных .....	374
26.6. Управление всеми счетами .....	375
<b>Глава 27. Хеш-таблицы и словари .....</b>	<b>377</b>
27.1. Поиск по условиям, отличающимся от ключей.....	378
27.2. Словари с более сложными значениями .....	379
27.3. Использование структурированных данных в качестве ключей .....	380
<b>Часть VI. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕМЫ .....</b>	<b>382</b>
<b>Глава 28. Алгоритмы, использующие состояние .....</b>	<b>383</b>
28.1. И снова о непересекающихся множествах .....	383
28.1.1. Оптимизации .....	384
28.1.2. Анализ.....	385
28.2. Установка членства методом обратного хеширования .....	386
28.2.1. Улучшение времени доступа.....	387
28.2.2. Улучшенное хеширование.....	389
28.2.3. Фильтры Блума.....	389

28.3. Устранение повторных вычислений с помощью запоминания ответов .....	391
28.3.1. Интересная числовая последовательность .....	391
28.3.1.1. Использование состояния для запоминания предыдущих ответов .....	393
28.3.1.2. От дерева вычислений к НАГ .....	394
28.3.1.3. Сложность чисел .....	395
28.3.1.4. Абстрагирование мемоизации .....	395
28.3.2. Редакторское расстояние для исправления орфографических ошибок .....	397
28.3.3. Природа как машинистка с неловкими пальцами .....	402
28.3.4. Динамическое программирование .....	403
28.3.4.1. Числа Каталана и динамическое программирование .....	404
28.3.4.2. Расстояние Левенштейна и динамическое программирование .....	405
28.3.5. Сравнение мемоизации и динамического программирования.....	408
<b>Часть VII. ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>411</b>
<b>Глава 29. Pyret для пользователей Racket и Scheme .....</b>	<b>412</b>
29.1. Числа, строки и логические значения .....	412
29.2. Инфиксные выражения .....	413
29.3. Определение и применение функций.....	413
29.4. Тесты .....	414
29.5. Имена переменных .....	415
29.6. Определения данных .....	415
29.7. Условные выражения .....	417
29.8. Списки.....	419
29.9. Функции первого класса.....	420
29.10. Аннотации .....	420
29.11. Что еще? .....	420
<b>Глава 30. Сравнение Pyret с Python .....</b>	<b>421</b>
<b>Глава 31. Сравнение этой книги с книгой «Как проектировать программы» (HtDP) .....</b>	<b>424</b>
<b>Глава 32. Примечания к текущей редакции книги .....</b>	<b>427</b>
<b>Глава 33. Словарь терминов .....</b>	<b>428</b>
<b>Предметный указатель.....</b>	<b>431</b>

# От издательства

## *Отзывы и пожелания*

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте [www.dmkpress.com](http://www.dmkpress.com), зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com); при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу [http://dmkpress.com/authors/publish\\_book/](http://dmkpress.com/authors/publish_book/) или напишите в издательство по адресу [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com).

## *Список опечаток*

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com). Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

## *Нарушение авторских прав*

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com).

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

# Об авторах

## **Кати Фислер (Kathi Fisler)**

*научный сотрудник-исследователь в области информационных технологий в университете Брауна (Провиденс, Род-Айленд, США)*

Заместитель директора программы бакалавриата по информационным технологиям (ИТ).

Содиректор программы Bootstrap.

Кати интересуют различные аспекты того, как люди изучают и используют формальные системы. В настоящее время она занимается компьютерным образованием, где рассматриваются модели и представления для объяснения поведения программы (воображаемых машин) и способы использования противоположностей между конкретными примерами для обучения концепциям ИТ. Кати разрабатывает курс (и учебник) по обучению ИТ, ориентированному на данные (наука о данных + структуры данных). Кати также является одним из преподавателей, занимающихся разработкой и оценкой усилий нашей кафедры по интеграции социально ответственного применения ИТ на протяжении всех четырех лет нашей учебной программы по ИТ. Ранее Кати участвовала в разработке схематической логики для проектирования оборудования (конец 1990-х гг.), модульной верификацией функционально ориентированных программ (начало 2000-х гг.) и анализом политики управления доступом и конфиденциальности (середина-конец 2000-х гг.). В этих проектах упор делался на формальные системы, а не на человеческое мышление.



## **Шрирам Кришнамурти (Shriram Krishnamurthi)**

*профессор информатики в университете Брауна (Провиденс, Род-Айленд, США)*

Основные области исследования (сам Шрирам называет их «скорее исследовательскими взглядами/представлениями»):

- абстракции необходимы для прогресса в информационных технологиях;
- но абстракции могут быть трудными для понимания и изучения;
- тем не менее абстракции еще и прекрасны;
- **как мы можем помочь людям эффективно изучать абстракции?**



Главная цель состоит в том, чтобы добиться прогресса в максимально возможном количестве аспектов этих представлений.

Сначала Шрирам обучался языкам программирования, но в дальнейшем изучал различные аспекты разработки программного обеспечения, формальные методы, взаимодействие человек–компьютер, безопасность и сети. На протяжении многих лет участвовал в нескольких проектах разработки инновационных и полезных программных систем: инструменты JavaScript, Flowlog, Racket (ранее DrScheme), WeScheme, Margrave, Flapjax, FrTime, Continue, FASTLINK, (Per)Mission и др. В настоящее время в основном работает с языком Pyret.

С 2016 г. Шрирам посвятил значительную часть своего времени и энергии самой сложной проблеме – компьютерным исследованиям в области образования, поскольку она требует серьезной работы как с технической точки зрения, так и с учетом человеческого фактора: если вы допустите оплошность, то можете нанести реальный ущерб не только отдельным людям, но и всей отрасли и обществу.

Шрирам занимается информационными технологиями с 1995 г. Возможно, он знаком читателям по таким книгам (написанным в соавторстве), как HtDP, PLAI, PAPL или (в настоящее время) DCIC. Участник социально ориентированной программы Bootstrap, которая используется во всем мире для внедрения информационных технологий в математику, физику, социальные науки и другие дисциплины.

Шрирам являлся заместителем директора программы Brown's Executive Master in Cybersecurity, где отвечал за курс по человеческому фактору. Новая версия программы объединена с информационными технологиями.

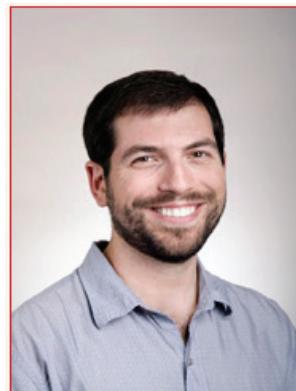
Шрирам является лауреатом премии SIGPLAN для молодых исследователей Робина Милнера (Robin Milner Young Researcher Award), премии SIGSOFT для авторитетных преподавателей, премии SIGPLAN в области программного обеспечения (совместно), а также Wriston Fellowship университета Брауна.

## **Бенджамин С. Лернер (Benjamin S. Lerner)**

адъюнкт-профессор (доцент-преподаватель) ИТ Khoury Colledge в Северо-Восточном университете (Northeastern University, Бостон, Массачусетс, США)

Области научных интересов Бенджамина:

- Pyret: язык, разработанный для начального обучения программированию, с акцентом на тестирование, ясность и иногда с ужасными каламбурами из пиратского («пиретского») лексикона;
- семантика веб-программирования: современные веб-программы сочетают в себе богатые структуры данных, хитроумное выполнение на основе событий, данные, получаемые от третьих сторон, и мощные, но мелкомасштабные API. Понимание и анализ этих про-



грамм требуют сначала создания тестируемой и исполняемой семантики для каждого из данных компонентов, а затем использования соответствующей семантики для проведения анализа программы;

- обеспечение совместимости расширений веб-браузера (проект Conflicts of Interest: Interactions among Browser Extensions): рост популярности Firefox можно в значительной степени объяснить его широко разрекламированными расширениями, которые предлагают универсальность, удобство и относительно низкие кривые обучения как для любителей, так и для опытных программистов. Но вместе с такой возможностью гибкой настройки возникают проблемы: многие расширения не работают должным образом при одновременной установке. Этот проект направлен на предоставление улучшенной модели программирования для расширений, которые могут обнаруживать и, возможно, исправлять подобные конфликты до их возникновения.

### **Джо Гиббс Политц (Joe Gibbs Politz)**

*адъюнкт-профессор (доцент-преподаватель) ИТ Калифорнийского университета Сан-Диего (UC San Diego), США*

Преподаватель многочисленных курсов по информационным технологиям (ИТ), разработанных с использованием повторно используемых материалов, включая видео, заметки и первоначальный исходный код для контрольных заданий:

- Advanced Compiler Design (UCSD CSE 231);
- Software Engineering (UCSD CSE 110);
- Advanced Data Structures (UCSD CSE 100);
- Basic Data Structures and Object-Oriented Design (UCSD CSE 12);
- Data Structures and Algorithms (Swarthmore CS 35);
- Programming Languages (Brown University CS173; совместно с Шрирамом Кришнамурти)

и многих других.



## **Часть**

---

# **ВВЕДЕНИЕ**

# Глава 1

---

## Предисловие

### 1.1. О ЧЕМ ЭТА КНИГА

Эта книга представляет собой введение в информатику. Она научит вас программировать такими способами, которые имеют практическую ценность и важность. Но этот процесс обучения будет к тому же выходить за рамки программирования в более широкую область информатики, богатой, глубокой, увлекательной и прекрасной многогранной дисциплины. Вы узнаете много полезных вещей, которые сможете сразу же применить на практике, но мы также продемонстрируем вам кое-что из того, что скрывается за ними.

Прежде всего мы хотим предоставить вам способы мышления для решения задач с помощью вычислений. Некоторые из этих способов являются техническими методиками, такими как обработка данных и примеры для разработки решений задач. Другие представляют собой научные методы, такие как способы, позволяющие убедиться в том, что программы надежны и делают именно то, для чего они предназначены. Наконец, некоторые из таких способов имеют социальную составляющую, они заставляют задуматься о влиянии программ на людей.

### 1.2. ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ ПРИНЦИПЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СОДЕРЖАНИЕ ЭТОЙ КНИГИ

Наша точка зрения основана на многолетнем опыте работы в качестве разработчиков программного обеспечения, исследователей и преподавателей. Эти виды деятельности позволили нам выработать следующие твердые убеждения:

- программное обеспечение пишется не только для того, чтобы его выполнять. Программы следует писать так, чтобы их могли читать и сопровождать другие люди. Часто этим «другим» человеком являетесь вы сами, через шесть месяцев забывшие, что было сделано и почему именно так;

- программисты несут ответственность за то, чтобы созданное ими программное обеспечение соответствовало поставленным целям и являлось надежным. Это требование отражено в различных дисциплинах информатики, таких как тестирование и проверка (верификация) программ;
- программы должны быть предсказуемыми. Мы должны знать, насколько это возможно, как будет вести себя программа, до ее запуска. Это поведение включает в себя не только технические характеристики, такие как время работы, использование пространства памяти, мощность и т. п., но и социальные воздействия и последствия, выгоды и вред. Программисты, как известно, далеко не всегда задумываются о последнем.

## 1.3. НАШ ВЗГЛЯД НА ДАННЫЕ

Высказанные выше опасения пересекаются с нашими представлениями о развитии информатики как отдельной дисциплины. Все прекрасно понимают, что мы живем в мире, переполненном данными, но к каким последствиям это приводит?

На вычислительном уровне влияние данных стало огромным. Обычно единственным способом сделать программу лучше было непосредственное ее усовершенствование, что часто означало усложнение и воздействие на факторы, которые мы обсуждали выше. Но есть категории программ, для которых существует другой метод: просто передать в ту же программу больше данных или данные лучшего качества, и программа, возможно, улучшится. Эти управляемые данными программы лежат в основе многих инноваций, которые мы наблюдаем в окружающем мире.

В дополнение к этому техническому влиянию данные могут иметь еще и глубокое педагогическое воздействие. В большинстве случаев процессу начального обучения программированию наносят ущерб придуманные данные, которые не имеют реального смысла, не вызывают никакого интереса и не дают никаких практических результатов (а также часто сопровождаются искусственно созданными проблемами). Имея в своем распоряжении реальные данные, обучающиеся могут самостоятельно регулировать процесс обучения, сосредоточившись на задачах, которые они считают практически целесообразными, более информативными или просто интересными, задавая вопросы и отвечая на те из них, которые они считают наиболее полезными. Разумеется, с этой точки зрения программы запрашивают данные: т. е. программы являются инструментами для ответов на вопросы. В свою очередь, особое внимание, уделяемое реальным данным и ответам на практические вопросы, позволяет нам обсуждать социальное воздействие информатики и вычислительной техники.

Эти явления породили совершенно новые области исследований, обычно называемые наукой о данных. Но типовые учебные программы по науке о данных также имеют много ограничений. Они уделяют слишком мало

внимания тому, что нам известно о трудностях обучения программированию, а также надежности программного обеспечения. И такие учебные программы абсолютно не учитывают того, что их данные часто весьма ограничены по своей структуре. На этих ограничениях обычно заканчивается наука о данных и начинается информатика. В частности, структура данных служит отправным пунктом для размышлений и реализации некоторых из вышеперечисленных основополагающих принципов – производительности, надежности и предсказуемости – с использованием многочисленных инструментальных средств информатики.

## 1.4. ЧТО ДЕЛАЕТ ЭТУ КНИГУ ОСОБЕННОЙ

Во-первых, мы предлагаем новую точку зрения на структурирование учебных программ по информатике, которую мы называем ориентацией на данные. Мы рассматриваем учебную программу, ориентированную на данные, как

Более подробно об этом подходе читайте в нашем эссе (<https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/kf-data-centric/>).

ориентация на данные = наука о данных + структуры данных

именно в этом порядке: начинаем с основных принципов науки о данных, затем переходим к классическим принципам для структур данных и прочих разделов информатики. Эта книга излагает такую точку зрения конкретно и подробно.

Во-вторых, в компьютерном образовании много говорится о гипотетических машинах – абстракциях поведения программ, предназначенных для того, чтобы помочь учащимся понять, как эти программы работают, – но в действительности они используются лишь в немногих учебных программах. Мы серьезно относимся к гипотетическим машинам, разрабатывая последовательный ряд таких машин и вводя их в учебную программу. Это связано с нашим убеждением о том, что программы – это не только объекты, которые выполняются, но и объекты, которые мы подробно рассматриваем.

В-третьих, мы включаем в текст книги контент о социальной ответственности информатики. В отличие от других усилий, направленных на ознакомление обучающихся с этикой или со скрытыми потенциальными опасностями технологии в целом, мы стремимся показать обучающимся, как конструкции и концепции, которые они прямо сейчас превращают в код, могут привести к неблагоприятным последствиям, если использовать их, пренебрегая осторожностью. Сохраняя сосредоточенность на тестировании и конкретных примерах, мы вводим несколько тем, заставляющих обучающихся принимать во внимание предположения на уровне конкретных данных. Этот материал приводится в явной форме на протяжении всей книги.

Наконец, эта книга основана на результатах недавних, постоянно продолжающихся научных исследований. Выбор учебного материала, порядок его представления, методы программирования и многое другое основаны на том, что мы знаем из научно-исследовательской литературы. Во многих слу-

чаях мы сами проводим исследования, поэтому учебная программа и научные исследования образуют своеобразный симбиоз. Вы можете найти наши материалы (некоторые написаны совместно, некоторые – в сотрудничестве с другими авторами) на соответствующих страницах (<https://www.ccs.neu.edu/home/blerner/papers.html>).

## 1.5. Для кого предназначена эта книга

Эта книга написана в основном для студентов начальных курсов, изучающих информатику в высшем учебном заведении (колледж или университет). Однако многие – особенно начальные – части этой книги также подходят для среднего образования (например, в США приблизительно для 6–12 классов, или для возраста 12–18 лет). В действительности мы видим естественную преемственность между средним и высшим образованием и считаем, что эта книга может послужить полезным связующим звеном между ними.

## 1.6. Структура книги

В отличие от некоторых других учебных пособий, эта книга не придерживается строго иерархического порядка изложения материала. Скорее, это непрерывно продолжающееся обсуждение с возвратами к предыдущим темам. Чаще всего мы будем создавать программы постепенно, как это могла бы делать пара сотрудничающих программистов. Мы будем совершать ошибки, но не потому, что не знаем, как сделать все правильно, а потому, что для вас это самый лучший способ обучения. Наличие ошибок делает невозможным пассивное чтение: вы непременно должны глубоко осваивать материал, потому что нет никакой уверенности в достоверности предлагаемого для чтения текста.

В итоге вы всегда будете получать правильный ответ. Однако такой нелинейный путь в краткосрочной перспективе вызывает больше разочарований (у вас часто будет возникать соблазн сказать: «Просто сразу скажите мне правильный ответ!») и делает книгу плохим справочным пособием (невозможно открыть случайную страницу с уверенностью в том, что все написанное на ней правильно). Но такое чувство разочарования является правильным восприятием обучения. Другого пути мы не знаем.

Мы используем визуальное форматирование, чтобы выделить некоторые из этих моментов. Таким образом, время от времени вы будете встречать следующие выделенные фрагменты:

---

### Упражнение

Это упражнение. Попробуйте выполнить его.

---

Это обычное упражнение в учебной литературе. Его нужно выполнить самостоятельно. Если вы используете эту книгу как часть учебного курса, то такое упражнение вполне можно предложить в качестве домашнего задания. Но кроме обычных упражнений вам также будут встречаться похожие на них вопросы, которые выглядят следующим образом:

**Выполните прямо сейчас**

Здесь выполняется некоторое действие. Вы его видите?

Когда встречается один из таких выделенных фрагментов, остановитесь. Прочтите выделенный текст, подумайте и сформулируйте ответ, прежде чем продолжить чтение. Вы обязательно должны сделать именно так, потому что в действительности это упражнение, но ответ уже есть в книге – чаще всего в тексте, непосредственно следующем за ним (т. е. в той части, которую вы читаете прямо сейчас), – или вы можете найти ответ самостоятельно, выполнив программу. Если вы просто продолжите читать дальше, то получите ответ, не думая самостоятельно (или не увидите его вообще, если инструкции предназначены для запуска программы), но в результате (а) не сможете проверить свои знания и (б) не улучшите свою интуицию. Другими словами, в выделенных фрагментах представлены очевидные дополнительные попытки поощрения активного обучения. Но в конечном счете мы можем только поощрять стремление к активному обучению, однако его практическое применение зависит только от вас.

Специальные стратегии проектирования и разработки программ приводятся в блоках текста, выделенных следующим образом:

**Стратегия: как это сделать...**

Здесь располагается краткое описание способа сделать что-либо.

Наконец, подобным образом выделяется материал по социальному ответственному применению информатики – в виде показанного ниже блока текста:

**Ответственное применение информатики: вы учитывали, что...**

Здесь размещается описание социальных опасностей, возникающих из-за необдуманного использования материала.

## 1.7. ОРГАНИЗАЦИЯ МАТЕРИАЛА КНИГИ

Книга содержит четыре части:

- 1) часть II – введение в программирование для начинающих, которые обучаются программированию и элементарному анализу данных.

В ней представлены основные концепции программирования по-средством создания изображений и обработки таблиц, затем рассматриваются списки, деревья и написание программ, реагирующих на действия пользователя, и все это с учетом ориентации на данные. Условная гипотетическая машина в этом разделе основана на подстановке;

- 2) часть III – здесь рассматривается асимптотическая сложность, рекуррентные выражения и основные графовые алгоритмы;
- 3) часть V – рассматривается работа с изменяемыми переменными и изменяемыми структурированными данными, формируется понимание изменяемых списков и хеш-таблиц (и их обработки). В этом разделе мы переходим на язык Python. Он позволяет расширить возможности тестирования, чтобы подробно рассмотреть нюансы программ с динамическими изменениями. Условная гипотетическая машина в этой части отделяет среду именования (называемую здесь каталогом (directory)) от динамически распределяемой памяти (кучи) значений структурированных данных;
- 4) часть VI – здесь мы возвращаемся к темам алгоритмов, основанных на оценке состояния и на структурах данных с отслеживанием их состояния.

Эти части были тщательно разработаны, чтобы обеспечить отсутствие зависимостей между частями III и V. Это позволяет гибко планировать предложения нескольких различных типов учебных курсов. Например, реорганизовав материал этих частей, мы уже сейчас предлагаем два совершенно различных курса, которые могли бы использовать другие читатели:

- вводный курс может использовать части II и V (без части III) для представления ориентированной на данные точки зрения информатики и обучения студентов основным навыкам программирования на языке Python;
- более продвинутый курс, предполагающий, что обучающиеся уже знакомы с основами функционального программирования (например, по первым частям книги «How to Design Programs» (<https://htdp.org/>) («Как проектировать программы»), можно было бы начать непосредственно с части III или, возможно, с отдельных разделов части II для включения недостающего материала (например, работы с таблицами). Этот курс может быть продолжен в части V, за которой следует часть VI.

Описанные выше курсы аналогичны соответственно учебным курсам CSCI 0111 (<https://cs.brown.edu/courses/csci0111/>) и CSCI 0190 (<https://cs.brown.edu/courses/csci0190/>) в университете Брауна (Провиденс, Род-Айленд, США). На указанных здесь страницах хранятся все предыдущие экземпляры курсов, включая все задания и сопутствующие материалы. Читатели могут использовать их в своих учебных курсах.

Многие из этих курсов будут изучать студенты, которые ранее занимались программированием с сохранением состояния (на Python, Java, Scratch или других языках). По нашему опыту, большинство таких студентов получали либо весьма неполные, либо откровенно вводящие в заблуждение

объяснения и метафоры состояния (например, «переменная – это (черный) ящик»). Из-за этого они плохо понимают излагаемый здесь материал, за исключением самых элементарных основ, особенно когда они начинают изучать такие важные темы, как алиасинг (альтернативные имена переменных). В результате многие из этих студентов сочли одновременно новым и весьма познавательным надлежащее объяснение того, как на самом деле работать с состоянием, с помощью нашей искусственной гипотетической машины. По этой причине мы рекомендуем проходить этот материал медленно и внимательно.

Разумеется, мы предлагаем читателям создавать собственные комбинации из глав, входящих в вышеперечисленные части книги. Мы очень хотели бы узнать о других проектах.

## 1.8. НАШ ВЫБОР ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если бы мы хотели разбогатеть, то написали бы эту книгу полностью на Python. На момент написания книги Python переживает свой расцвет как язык для учебных целей (точно так же, как Java до него, C++ до этого, ранее C, а еще раньше Pascal и так далее). Вне всякого сомнения, у Python есть много привлекательных свойств, и не в последнюю очередь его присутствие в верхних позициях списков вакансий. Но Python неоднократно разочаровывал нас как отправной пункт для изучения программирования (см. главу 30).

В итоге в нашей книге используются два языка программирования. Сначала применяется язык под названием Pyret (<https://www.pyret.org/>), который мы специально спроектировали и создали для собственных потребностей, как следствие наших разочарований. Он был специально разработан для стиля программирования, описанного в этой книге, поэтому оба языка могут гармонично сосуществовать. Pyret основан на Python, а также на многих других превосходных языках программирования. Таким образом, начинающие программисты получат именно те знания, которые им необходимы, в то время как программистам, уже хорошо знакомым с языковым зверинцем, от змей до верблюдов, Pyret должен показаться знакомым и удобным.

Далее, учитывая значимость Python как стандартного языка обмена информацией и наличие расширяющих его возможности библиотек, в части V книги Python рассматривается весьма подробно. Вместо того чтобы начинать с нуля в Python, мы предлагаем систематический и постепенный переход к этому языку на основе ранее изученного материала. Мы считаем, что это поможет вам изучить программирование в целом лучше, чем если бы вы были знакомы только с одним языком программирования. Но в то же время мы считаем, что такой подход поможет вам лучше понять Python: подобно тому, как вы начинаете больше ценить свой язык, страну и культуру, когда покидаете ее пределы и знакомитесь с другими странами и культурами.

## **1.9. ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ, СООБЩЕНИЯ ОБ ОШИБКАХ И КОММЕНТАРИИ**

Работая с этой книгой, вы, возможно, обнаружите опечатки, найдете фрагменты, которые могли бы быть изложены более понятным языком, или у вас могут возникнуть предложения по качеству следующего издания. Всю эту информацию вы можете передать нам, заполнив опросную форму на общедоступном сайте GitHub (<https://github.com/data-centric-computing/dcic-public>). Заранее благодарим за сотрудничество.

# Глава 2

---

## Благодарности

Все преимущества этой книги достигнуты благодаря вниманию многих людей.

Особая благодарность студентам университета Брауна (Провиденс, Род-Айленд, США), которые были привлечены как критически настроенные испытатели для каждой промежуточной версии этой книги. Они поддержали этот проект с неимоверным энтузиазмом, создав доброжелательную и конструктивную среду для педагогической деятельности. Также благодарим наши академические центры – университет Брауна, Северо-Восточный и Калифорнийский университет в Сан-Диего – за предоставление удобных условий работы и поддержку.

Перечисленные ниже люди любезно предоставили информацию об опечатках и прочих недостатках:

Абабонгсе Джантонг (Abhabongse Janthong), Алекс Клейман (Alex Kleiman), Атьюттам Элети (Athyuttam Eleti), Беньямин С. Шапиро (Benjamin S. Shapiro), Чэн Се (Cheng Xie), Дэнил Браун (Danil Braun), Дэйв Ли (Dave Lee), Дуг Кернс (Doug Kearns), Эбубе Чаба (Ebube Chuba), Харрисон Пинкет (Harrison Pincket), Игор Морено Сантос (Igor Moreno Santos), Иулиу Балибану (Iuliu Balibanu), Джейсон Беннетт (Jason Bennett), Джон (Спайк) Хьюз (John (Spike) Hughes), Йон Сэйлор (Jon Sailor), Джош Пэли (Josh Paley), Келечи Укадике (Kelechi Ukadike), Кендрик Коул (Kendrick Cole), Марк Смит (Marc Smith), Майкл Морхаз (Michael Morehouse), Рафал Гвождиньски (Rafał Gwoździński), Рэймонд Плант (Raymond Plante), Сэмюэл Айнсуорт (Samuel Ainsworth), Самуэль Кортчмар (Samuel Kortchmar), Ноа Тайе (Noah Tye), frodokomodo (в репозитории [github](#)).

Следующие люди сделали то же самое, но в гораздо большем объеме или более глубоко:

Дорай Ситарам (Dorai Sitaram), Джон Палмер (John Palmer), Картик Сингал (Kartik Singhal), Кеничи Асай (Kenichi Asai), Лев Литичевский (Lev Litichevskiy).

Даже среди тех, кто помогал решать проблемы, необходимо особо отметить одного человека:

Сорави Порнчароенвазе (Sorawee Porncharoenwase).

Эта книга полностью зависит от Pyret, следовательно, и от многих людей, которые создали и сопровождали этот язык (<https://www.pyret.org/crew/>).

Мы благодарим Мэтью Баттерика (Matthew Butterick) (<https://practicaltypography.com/>) за его помощь в создании стиля этой книги (хотя окончательный стиль создали мы сами, так что не обвиняйте его в чем-либо).

Очень много лет назад Александро Шеффер (Alejandro Schäffer) познакомил Шрирама Кришнамурти с основными принципами работы наборщика текстов с толстыми пальцами. Отпечатки пальцев Александра сохранились на многих страницах этой книги, даже если он не всегда одобряет то, что получилось благодаря его терпеливым наставлениям.

Мощной мотивацией послужили работы и идеи Матиаса Феллейзена (Matthias Felleisen), Мэтью Флэтта (Matthew Flatt) и Робби Финдлера (Robby Findler). В частности, Матиас воодушевил нас идеями по проектированию и разработке программ. Даже когда возникают разногласия, он продолжает интересоваться нашими идеями и критиковать их таким образом, что это заставляет нас расти и совершенствоваться. Благодаря влиянию Матиаса наша работа стала лучше, чем могла бы быть.

Глава 16 с некоторыми изменениями позаимствована из книги How to Design Worlds (<https://world.cs.brown.edu/>), поэтому мы выражаем благодарность всем людям, упомянутым в ней.

Эта книга написана в Scribble (<https://docs.racket-lang.org/scribble/>), инструментальном средстве разработки, которое предпочитают программисты, отлично разбирающиеся в подобных вещах.

Мы благодарим веб-сайт CloudConvert (<https://cloudconvert.com/>) за бесплатно предоставляемые инструменты преобразования файлов различных форматов.

**Часть**

**|||**

**ОСНОВЫ**

# Глава 3

## Начинаем работу

### 3.1. Поясняющий пример: флаги

Предположим, что вы создаете компанию, занимающуюся графическим дизайном, и хотите иметь возможность создания изображений флагов разных размеров и конфигураций для своих клиентов. На рис. 3.1 показаны образцы изображений, которые необходимо создать с помощью используемого вами программного обеспечения.

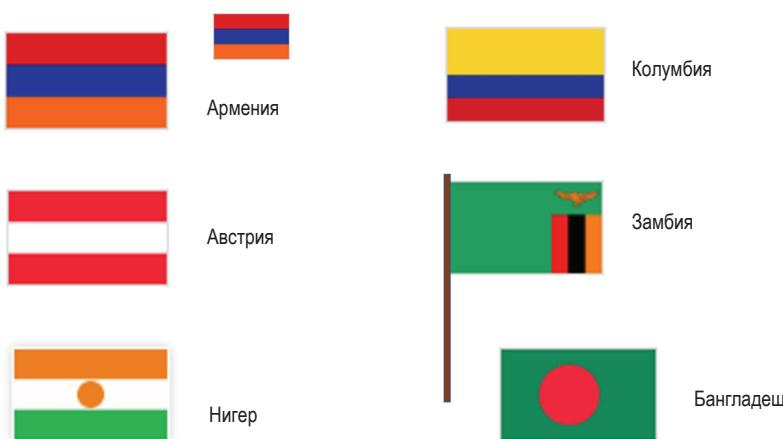


Рис. 3.1 ♦ Образцы флагов

Прежде чем пытаться написать исходный код для создания этих разнообразных изображений, вы должны вернуться на шаг назад, внимательно рассмотреть этот набор изображений и попробовать определить их свойства, которые, возможно, помогут нам принять решение о том, что именно нужно сделать. Чтобы действительно получить такую помощь, ответим на пару конкретных вопросов, способствующих лучшему пониманию смысла предлагаемых изображений:

- на что вы обращаете особое внимание в изображениях флагов?

- какие вопросы возникают у вас по изображениям этих флагов или по программе, которая может создавать эти изображения?

### ***Выполните прямо сейчас***

Настоятельно рекомендуем действительно записать свои ответы на приведенные выше вопросы. Внимательное отношение к свойствам данных и информации – чрезвычайно важный навык в информатике.

Возможно, вы обратили внимание на следующие особенности:

- некоторые флаги имеют одинаковую структуру и отличаются только цветами;
  - некоторые флаги имеют различные размеры;
  - у некоторых флагов есть флагшток;
  - большинство изображений выглядят относительно простыми, но некоторые реальные флаги содержат более сложные изображения
- ...и т. д.

Возможно, у вас возникли следующие вопросы:

- требуется ли возможность рисования этих изображений вручную?
  - существует ли возможность формировать изображения флагов различных размеров с помощью единого исходного кода?
  - что, если предлагается изобразить флаг, форма которого отличается от прямоугольной?
- ...и т. д.

Свойства, на которые мы обратили внимание, предполагают те же условия, которые необходимо выполнить для написания программы генерации изображений флагов:

- возможно, потребуется вычисление высоты полос по общим размерам флага (т. е. мы будем писать программы с использованием чисел (*numbers*));
- необходим способ описания цветов в нашей программе (мы будем изучать (символьные) строки (*strings*));
- необходим способ создания изображений на основе простых фигур разнообразных цветов (мы будем создавать и объединять выражения (*expressions*)).

Давайте начнем работать.

## **3.2. Числа**

Начнем с простого примера: вычисление суммы чисел 3 и 5.

Чтобы выполнить это вычисление с помощью компьютера, необходимо каким-то образом записать это вычисление и предложить компьютеру выполнить (*run* или *evaluate*) его так, чтобы мы получили результат в виде числа. Программное обеспечение или веб-приложение, в котором вы пишете и запускаете программы, называется средой программирования (средой

разработки программ – programming environment). В первой части нашего учебного курса мы будем использовать язык программирования под названием Pyret.

Перейдите в онлайновый редактор (<https://code.pyret.org/editor>) (который здесь и далее мы будем называть СРО). Пока что мы будем работать только в правой части этого редактора (в интерактивной панели (interactions pane)).

Группа символов `>>>` называется промптом (prompt), или приглашением, – здесь мы сообщаем СРО о необходимости выполнить программу. Предложим выполнить сложение чисел 3 и 5. Вот что мы должны ввести после промпта:

```
>>> 3 + 5
```

Нажмите клавишу **Ввод** (Return или Enter), и результат вычисления появится в строке под промптом, как показано ниже:

8

Результат вполне ожидаем, и мы можем выполнять другие арифметические вычисления:

```
>>> 2 * 6
12
```

(Обратите внимание: с помощью символа `*` мы записываем знак умножения.) А если попробовать вычислить  $3 + 4 * 5$ ?

### **Выполните прямо сейчас**

Попробуйте вычислить приведенное выше выражение. Посмотрите, что на это скажет Pyret.

Pyret выдает сообщение об ошибке (error message). Это говорит о том, что Pyret не уверен в том, что именно мы имели в виду:

$(3 + 4) * 5$

или

$3 + (4 * 5)$ ,

поэтому предлагает добавить круглые скобки, чтобы смысл выражения стал очевидным. В каждом языке программирования существует набор правил, определяющий способ записи программ. Правила Pyret требуют использования круглых скобок для устранения неоднозначности.

```
>>> (3 + 4) * 5
35
>>> 3 + (4 * 5)
23
```

Другое правило Pyret требует наличия пробелов, окружающих арифметические операторы. Давайте посмотрим, что произойдет, если забыть об этих пробелах:

```
>>> 3+4
```

Pyret выведет другое сообщение об ошибке, в котором выделена (подсвечена) та часть исходного кода, которая отформатирована неправильно, а также описание проблемы, которую обнаружил Pyret. Для исправления этой ошибки можно нажать клавишу со стрелкой вверх, находясь в правой панели редактора, и исправить показанное выше выражение, добавив требуемые пробелы.

### Выполните прямо сейчас

Попробуйте выполнить описанные выше действия прямо сейчас и убедитесь в том, что все происходит именно так, как описано.

А что, если необходимо применить что-то, отличающееся от основных арифметических операторов? Скажем, нужно выбрать минимальное из двух чисел. Тогда мы должны записать это следующим образом:

```
>>> num-min(2, 8)
```

## 3.3. ВЫРАЖЕНИЯ

Обратите внимание: когда мы выполняем `num-min`, то получаем в ответ число (так же, как при использовании `+`, `*`, ...). Это означает потенциальную возможность использования результата вычисления `num-min` в других вычислениях, где ожидается числовое значение:

```
>>> 5 * num-min(2, 8)
10
>>> (1 + 5) * num-min(2, 8)
12
```

Почему `num-`? Потому что «определение минимума» – это концепция, которая имеет смысл и для данных, отличающихся от чисел. Pyret называет этот оператор вычисления минимума `num-min`, чтобы устранить неоднозначность.

Надеемся, здесь вы начинаете видеть закономерность. Мы можем формировать более сложные вычисления из меньших, элементарных, используя операторы для объединения результатов элементарных вычислений. Мы будем использовать термин «выражение» (*expression*) для обозначения вычислений, записанных в формате, который Pyret может понять и вычислить правильный результат.

### Упражнение 3.1

В редакторе СРО попробуйте ввести выражения для каждого из приведенных ниже вычислений:

- вычесть 3 из 7, затем умножить результат на 4;
  - вычесть 3 из произведения 7 и 4;
  - сложить 3 и 5, сумму разделить на 2;
  - определить максимальное значение из пары 5 – 10 и -20;
  - 2 разделить на сумму 3 и 5.
- 

### Выполните прямо сейчас

А если в результате вы получаете дробь?

Если вы не вполне уверены в том, как получить дробь, то подскажем: для этого существуют два способа: можно ввести выражение, результатом которого является дробь, или просто напрямую ввести дробь (например,  $1/3$ ).

В любом случае вы можете щелкнуть левой кнопкой мыши по результату в интерактивной панели, чтобы изменить представление числа. Попробуйте прямо сейчас.

## 3.4. ТЕРМИНОЛОГИЯ

В интерактивном режиме рассмотрим вычисление следующего выражения:

```
>>> (3 + 4) * (5 + 1)
42
```

В действительности в этом интерактивном взаимодействии содержится несколько типов информации, и мы должны дать имя каждому элементу:

- выражение (expression) – вычисление, записанное в формальной нотации какого-либо языка программирования.  
Примеры выражений: 4,  $5 + 1$  и  $(3 + 4) * (5 + 1)$ ;
- значение (value) – выражение, для которого уже невозможно продолжить вычисления (т. е. оно само по себе является результатом).  
До сих пор единственными значениями, которые мы наблюдали, являлись числа;
- программа (program) – последовательность выражений, которые необходимо выполнить (вычислить).

## 3.5. СТРОКИ

А если необходимо написать программу, в которой используется информация, отличающаяся от чисел, например чье-то имя? Для имен и прочих текстовых данных используется то, что называется строками (strings). Ниже приведено несколько примеров:

```
"Kathi"
"Go Bears!"
```

```
"CSCI0111"  
"Carberry, Josiah"
```

Что здесь можно заметить? Строки могут содержать пробелы, знаки пунктуации и цифры. Мы используем строки для представления текстовых данных. Для примера с созданием флагов мы будем использовать строки для обозначения цветов: "red", "blue" и т. д.

Следует отметить, что в строках учитываются различия в регистрах букв (case-sensitive), т. е. прописные (заглавные) буквы отличаются от строчных (скоро мы увидим, что это означает на практике).

## 3.6. Изображения

Мы уже познакомились с двумя типами данных: числами и строками. Для флагов также потребуются графические изображения. Изображения отличаются от чисел и строк (невозможно описать все изображение в целом с помощью одного числа – ну, если только после более глубокого освоения информатики, но давайте не будем забегать вперед).

В Pyret встроена поддержка графических изображений. После запуска Pyret вы увидите окрашенную в светло-серый цвет строку "use context essentials2021" (или что-то подобное). Эта строка обеспечивает конфигурирование Pyret с некоторой базовой функциональностью, дополняющей поддержку чисел и строк.

### **Выполните прямо сейчас**

Нажмите кнопку **Run** (для активизации функциональных возможностей контекста essentials), затем введите каждое из приведенных ниже выражений Pyret после интерактивного промпта, чтобы увидеть результат их выполнения:

- `circle(30, "solid", "red")`
- `circle(30, "outline", "blue")`
- `rectangle(20, 10, "solid", "purple")`

Каждое из этих выражений начинается с имени изображаемой фигуры, затем в круглых скобках определяется ее конфигурация. Информация о конфигурации состоит из размеров (радиуса для окружностей, ширины и высоты для прямоугольников – все размеры заданы в экранных пикселях), строки, определяющей, выводится ли сплошная (закрашенная) фигура или только ее контур, а далее следует строка с названием цвета, используемого для отображения фигуры.

Какие фигуры и цвета известны Pyret? Отложим ответ на этот вопрос на некоторое время. Скоро мы продемонстрируем, как находить такую информацию в документации.

## 3.6.1. Объединение изображений

Ранее мы уже узнали о возможности использования таких операций, как `+` и `*`, для объединения чисел в выражения. Каждый раз, когда встречается новый тип данных в программировании, вы должны поинтересоваться, какие операции языка предоставляются для работы с этим типом. Для изображений в Pyret набор операций предоставляет следующие возможности:

- вращение;
- масштабирование;
- транспонирование;
- размещение двух изображений рядом;
- размещение одного изображения поверх другого
- и другие.

Рассмотрим подробнее, как используются некоторые из этих операций.

### Упражнение 3.2

Введите приведенные ниже выражения в онлайновом редакторе Pyret:

```
rotate(45, rectangle(20, 30, "solid", "red"))
```

Что означает число 45? Попробуйте вводить другие числа вместо 45, чтобы подтвердить или опровергнуть свое предположение.

```
overlay(circle(25, "solid", "yellow"), rectangle(50, 50, "solid", "blue"))
```

Вы можете описать обычным языком, что делает `overlay`?

```
above(circle(25, "solid", "red"), rectangle(30, 50, "solid", "blue"))
```

Какой тип значения вы получаете при использовании операций `rotate` и `above`? (Подсказка: ответом должен быть один из вариантов: число, строка или изображение.)

Эти примеры позволяют нам немного более глубоко задуматься о выражениях. В нашем распоряжении находятся простые значения, такие как числа и строки. У нас есть операции или функции, которые объединяют значения, например `+` или `rotate` («функции» – это термин, гораздо чаще используемый в информатике, тогда как на уроках математики предпочитают термин «операции»). Каждая функция генерирует значение, которое можно использовать как ввод (входные данные) для другой функции. Мы формируем выражения, используя значения и выходные данные функций как входные данные для других функций.

Например, мы используем `above` для создания изображения из двух изображений меньшего размера. Можно было бы взять полученное изображение и повернуть его, воспользовавшись приведенным ниже выражением:

```
rotate(45,  
  above(circle(25, "solid", "red"),  
    rectangle(30, 50, "solid", "blue")))
```

Принцип использования вывода одной функции как ввода для другой функции известен под названием «композиция» (composition). Самые интересные программы получаются в результате композиции разнообразных вычислений. Уверенное владение навыком составления выражений – важнейший первый шаг в обучении программированию.

---

### Упражнение 3.3

Попробуйте создать следующие изображения:

- синий треугольник (размер выберите сами). Наряду с `circle` существует функция `triangle`, которая принимает длину стороны, стиль заполнения (закраски) и ее цвет и создает изображение равностороннего треугольника;
- синий треугольник внутри желтого прямоугольника;
- треугольник с поворотом на некоторый угол;
- мишень с тремя вложенными окружностями, выровненными по их центрам (например, как на логотипе Target (<https://ru.wikipedia.org/wiki/Target>));
- любое изображение по вашему выбору – поэкспериментируйте в свое удовольствие.

Создание изображения мишени может оказаться немного более сложным. Функция `overlap` принимает только два изображения, поэтому вам придется поразмыслять о том, как использовать композицию для правильного размещения трех концентрических окружностей.

---

## 3.6.2. Создание флага

Мы полностью готовы к созданию первого флага. Начнем с флага Армении, который содержит три горизонтальные полосы: красная сверху, синяя в середине и оранжевая внизу.

---

### Упражнение 3.4

Используйте ранее изученные функции для создания изображения флага Армении. Выберите размеры самостоятельно (мы рекомендуем ширину от 100 до 300 пикселов).

Запишите список вопросов и идей, которые возникают во время выполнения этого упражнения.

---

## 3.7. Небольшое отступление: типы, ошибки и документация

Теперь, когда вы получили полное представление о том, как создается изображение флага, вернемся немного назад и чуть более подробно рассмотрим две концепции, с которыми вы уже встречались: типы и сообщения об ошибках.

### 3.7.1. Типы и контракты

Теперь, когда мы научились объединять функции для построения более сложных выражений из простых, нам придется тщательно следить за тем, чтобы составляемые комбинации имели смысл. Рассмотрим следующий пример кода Pyret:

```
8 * circle(25, "solid", "red")
```

Как вы думаете, какой результат будет получен при вычислении этого выражения? Умножение имеет смысл при работе с числами, но этот код предлагает Pyret умножить число на изображение. Имеет ли это действие какой-либо смысл?

Этот код не имеет никакого смысла, поэтому Pyret, разумеется, выведет сообщение об ошибке, если вы попытаетесь выполнить его.

#### **Выполните прямо сейчас**

Попробуйте выполнить приведенный выше код, затем рассмотрите выведенное сообщение об ошибке. Запишите информацию, которую это сообщение предоставляет, о том, что пошло не так (скоро мы вернемся к этой записи).

В последней части сообщения об ошибке сообщается:

The \* operator expects to be given two Numbers  
(Оператор \* предполагает использование двух чисел)

Обратите особое внимание на слово «Numbers» («числа»). Pyret сообщает вам, какой тип информации работает в операции \*. В программировании все значения организованы по типам (types) (например, число, строка, изображение). Эти типы, в свою очередь, применяются для описания типов входных данных и результатов (т. е. выходных данных), с которыми работает любая функция. Например, для операции умножения \* ожидается предоставление двух чисел, в результате чего возвращается число. В последнем выражении, приведенном выше, мы попытались нарушить это правило, поэтому Pyret вывел сообщение об ошибке.

Фраза о «нарушении правила» звучит почти как юридическая формулировка, не так ли? Это действительно так, и термин «контракт» (*contract*) означает требуемые типы входных данных и предполагаемые типы выходных данных при использовании конкретной функции. Ниже приведено несколько примеров контрактов Racket (записанных в той нотации, которую вы увидите в документации):

```
* :: (x1 :: Number, x2 :: Number) -> Number

circle :: (radius :: Number,
           mode :: String,
           color :: String) -> Image

rotate :: (degrees :: Number,
           img :: Image) -> Image

overlay :: (upper-img :: Image,
            lower-img :: Image) -> Image
```

### **Выполните прямо сейчас**

Внимательно рассмотрите примеры форм записи этих контрактов. Можете ли вы выделить различные части? Какую информацию они предоставляют вам?

Рассмотрим подробнее контракт *overlay*, чтобы убедиться в том, что вы понимаете, как правильно прочитать его. Этот контракт предоставляет несколько элементов информации:

- эта функция называется *overlay*;
- она принимает два элемента входных данных (части в круглых скобках) – оба имеют тип *Image* (изображение);
- первый элемент входных данных – изображение, которое будет расположено сверху;
- второй элемент входных данных – изображение, которое будет расположено снизу;
- вывод результата вызова этой функции (который следует за *->*) будет иметь тип *Image* (изображение).

В общем случае мы читаем два символа двоеточия (::) как «имеет тип», а составную стрелку (->) – как «возвращает».

Когда вы объединяете небольшие выражения в более сложные, типы результатов исходных выражений должны соответствовать типам, требуемым функцией, которая используется для их объединения. В приведенном выше ошибочном выражении с операцией умножения по контракту для \* ожидаются два числа как входные данные, но мы передали изображение как второй элемент ввода. Поэтому при попытке выполнения этого выражения получили сообщение об ошибке.

Контракт также позволяет узнать, сколько элементов входных данных ожидает функция. Рассмотрим контракт для функции *circle*. Она ожидает три элемента входных данных: число (радиус), строку (стиль) и еще одну строку

(цвет). А если мы забыли строку стиля и передали только радиус и цвет, как показано ниже:

```
circle(100, "purple")
```

В этом случае ошибка не связана с типом входных данных, она относится к некорректному числу элементов переданных входных данных.

### Упражнение 3.5

Выполните несколько выражений в Pyret, в которых используется некорректный тип некоторых входных данных для функции. В других выражениях передавайте неправильное количество входных данных в функцию.

Какой текст является общим для сообщений об ошибках, относящихся к некорректным типам данных? Какой текст является общим для сообщений об ошибках, относящихся к неправильному количеству входных данных?

Запишите этот общий текст, чтобы вы могли распознать аналогичные ошибки, если они возникнут во время программирования.

## 3.7.2. Ошибки формата и нотации

Мы только что наблюдали два различных типа ошибок, которые мы можем сделать при программировании: указание неверного типа входных данных и передача неправильного количества входных данных в функцию. Вероятно, вы также встречали еще один дополнительный тип ошибки – при некорректной расстановке знаков пунктуации при программировании. Для наглядности можно ввести в онлайновом редакторе следующие ошибочные примеры:

- 3+7
- circle(50 "solid" "red")
- circle(50, "solid, "red")
- circle(50, "solid," "red")
- circle 50, "solid," "red")

#### Выполните прямо сейчас

Убедитесь в том, что вы можете точно определить ошибку в каждом из приведенных выше примеров. Если необходимо, выполните их в Pyret.

Вам уже известны различные правила пунктуации при записи обычного текста. Для исходного кода также существуют свои правила пунктуации, и инструментальные средства программирования строго относятся к их соблюдению. В эссе произвольной формы вы можете пропустить запятую

без каких-либо проблем, но любая среда программирования не сможет выполнить выражения, если в них есть пунктуационные ошибки.

### ***Выполните прямо сейчас***

Составьте список правил пунктуации для кода Pyret, которые, по вашему мнению, уже встречались вам.

Ниже приведена наша версия такого списка:

- арифметические операторы обязательно должны быть выделены пробелами с обеих сторон;
- для определения порядка выполнения операций требуются круглые скобки;
- при использовании функции пара круглых скобок окружает входные данные, элементы которых должны разделяться запятыми;
- если в начале строки используется двойная кавычка, то для завершения этой строки необходима еще одна двойная кавычка.

В программировании мы используем термин «синтаксис» (syntax) для обозначения правил записи корректных выражений (мы не сказали напрямую «правила пунктуации», потому что эти правила выходят за рамки того, что вы считаете пунктуацией, но это подходящий момент для ввода нового термина). Для начинающих ошибки в синтаксисе – вполне обычное дело. Со временем вы усвоите все эти правила. А сейчас не расстраивайтесь, если получаете сообщения о синтаксических ошибках от Pyret. Это одна из неотъемлемых частей процесса обучения.

### **3.7.3. Поиск других функций: документация**

В настоящий момент у вас, возможно, возник вопрос: что еще можно сделать с изображениями? Ранее упоминалось масштабирование изображений. Какие еще фигуры можно создать? Существует ли где-то список всех возможных действий, которые можно выполнять с изображениями?

К каждому языку программирования прилагается документация (documentation), в которой вы можете найти разнообразные доступные операции и функции, а также варианты конфигурирования их параметров. Документация может показаться ошеломляюще огромной для начинающих программистов, потому что содержит множество подробностей, о необходимости использования которых вы даже не знали раньше. Рассмотрим, как может воспользоваться документацией начинающий программист.

Откройте раздел документации Pyret о работе с изображениями Pyret Image Documentation (<https://www.pyret.org/docs/latest/image.html>). Обратите особое внимание на боковую панель слева. В ее верхней части можно видеть список всех тем, описанных в этом разделе документации. Выполняйте прокрутку до тех пор, пока не увидите в боковой панели термин «rectangle»: его окружают имена других функций, которые можно использовать для создания

разнообразных фигур. Выполните прокрутку еще немного ниже и увидите список функций для объединения и обработки изображений.

Если щелкнуть левой кнопкой мыши по имени фигуры или функции, то в большой правой панели выводится подробная информация об использовании этой конкретной функции. В затененной панели вы увидите ее контракт, ниже – описание того, что делает эта функция, затем конкретный пример или даже два, демонстрирующий ввод входных данных для практического применения этой функции (с результатом ее выполнения). Можно скопировать любой из этих примеров и вставить его в интерактивный редактор Pyret, чтобы посмотреть, как он работает (например, можно изменять входные данные).

В данный момент вся необходимая вам документация находится в разделе о работе с изображениями. В дальнейшем мы будем более глубоко изучать Pyret и его документацию.

# Глава 4

---

## Именование значений

### 4.1. ПАНЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

До настоящего момента мы использовали только интерактивную панель в правой половине экрана СРО. Как мы видели, эта панель работает подобно калькулятору: вы вводите выражение после промпта, и СРО выводит результат вычисления этого выражения.

Левая панель СРО называется панелью определений (definitions pane). Здесь можно размещать исходный код, который вы намерены сохранить в файле. Но существует и другой вариант использования этой панели: она может помочь в более удобной организации исходного кода, когда выражения становятся слишком большими.

### 4.2. ИМЕНОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ

Для выражений, создающих изображения, требуется небольшой ручной ввод. Было бы неплохо иметь сокращенные обозначения для «именования» изображений, чтобы ссылаться на них по именам. Именно для этого и предназначена панель определений: вы можете размещать выражения и программы в панели определений, а затем воспользоваться кнопкой **Run** в СРО, чтобы сделать эти определения доступными в интерактивной панели.

#### **Выполните прямо сейчас**

Введите следующее выражение в панели определений:

```
red-circ = circle(30, "solid", "red")
```

Щелкните по кнопке **Run**, затем введите `red-circ` в интерактивной панели. Вы должны увидеть красный круг.

В более общем смысле, если вы пишете исходный код в следующей форме:

```
NAME = EXPRESSION
```

то Pyret связывает значение EXPRESSION с именем NAME. После этого каждый раз, когда вы пишете (сокращенное обозначение) NAME, Pyret будет автоматически (незаметно для пользователя) заменять его значением EXPRESSION. Например, если после промпта вы ввели `x = 5 + 4`, а затем вводите `x`, то СРО выдаст вам значение 9 (а не исходное выражение `5 + 4`).

А если после промпта вы вводите имя, которое не связано с каким-либо значением?

### **Выполните прямо сейчас**

Попробуйте ввести `puppy` после промпта (`>>>`) в интерактивной панели. Присутствуют ли в сообщении об ошибке какие-либо элементы, неизвестные вам?

СРО (разумеется, и многие другие инструментальные средства программирования) используют словосочетание «*unbound identifier*» (несвязанный идентификатор), если выражение содержит имя, которое не было связано (associated или bound) с каким-либо значением.

## **4.2.1. Сравнение имен и строк**

К настоящему моменту мы увидели, что слова используются в программировании двумя способами: (1) как данные в строках и (2) как имена для значений (также называемые идентификаторами (identifiers)). Это два абсолютно различных варианта использования, поэтому необходимо рассмотреть их подробнее.

- Синтаксически (другой способ сказать «с точки зрения того, как мы записываем это») мы различаем строки и имена по наличию двойных кавычек. Обратите внимание на различие между `puppy` и "puppy".
- Строки могут содержать пробелы, а имена не могут. Например, "hot pink" – это корректный элемент данных, но `hot pink` не является одним именем. Если необходимо объединить несколько слов в одно имя (как это мы делали ранее с именем `red-circ`), то используется дефис для разделения слов с сохранением неразрывности имени (как непрерывной последовательности символов). В различных языках программирования допускается применение разнообразных разделителей, в Pyret мы будем пользоваться дефисами.
- Ввод слова как имени, а не строки в интерактивной панели изменяет способ вычисления, предлагаемого для выполнения Pyret. Если вы вводите `puppy` (имя без двойных кавычек), то предлагаете Pyret найти значение, которое вы предварительно сохранили под этим именем. Если вы вводите "puppy" (строку в двойных кавычках), то просто записываете элемент данных (аналогично вводу числа, например 3): Pyret возвращает введенное значение как результат вычисления.
- Если вы вводите имя, которое не было предварительно связано с каким-либо значением, то Pyret выводит сообщение об ошибке «*unbound identifier*» (несвязанный идентификатор). Напротив, поскольку стро-

ки – это просто данные, при вводе строки, которая до этого не использовалась, вы не получите сообщение об ошибке (существуют некоторые особые варианты строк, например когда необходимо включить в них кавычки, но мы пока не будем рассматривать такие случаи).

Начинающие программисты поначалу часто путают имена и строки. Сейчас просто запомните, что имена, которые связываются со значением с помощью знака равенства (=), не могут содержать символы кавычек, тогда как данные, состоящие из слов или фрагментов текста, обязательно должны быть заключены в двойные кавычки.

## 4.2.2. Сравнение выражений с инструкциями

Определения и выражения являются двумя полезными элементами программ, и каждый элемент играет собственную роль. Определения сообщают Pyret о связывании имен со значениями. Выражения предписывают Pyret выполнять вычисления и возвращать результаты.

---

### Упражнение 4.1

Ведите приведенные ниже фрагменты исходного кода после промпта в интерактивной панели:

- `5 + 8`
- `x = 14 + 16`
- `triangle(20, "solid", "purple")`
- `blue-circ = circle(x, "solid", "blue")`

Первый и третий фрагменты – это выражения, а второй и четвертый – определения. Что можно сказать, наблюдая результаты введенных выражений по сравнению с результатами введенных определений?

---

Надеемся, вы заметили, что Pyret не показывает визуальный результат после ввода определений, но выводит вычисленное значение выражений. В программировании мы различаем выражения (expressions), которые выдают значения, и инструкции (statements), которые не генерируют значения, а вместо этого передают некоторый другой тип инструкций (указаний) для конкретного используемого языка. До сих пор определения – единственный тип инструкций, который мы видели.

---

### Упражнение 4.2

Предположим, что определение `blue-circ` из примера 4.1 сохранилось в интерактивной панели. Тогда в интерактивной панели после промпта введите `blue-circ` (если это определение не сохранилось, то введите его еще раз).

На основе ответной реакции Pyret определите, является ли `blue-circ` выражением или определением.

---

Поскольку `blue-circ` выдает результат, мы делаем вывод о том, что само по себе имя также является выражением. Это упражнение подчеркивает различие между вводом определения и использованием определяемого имени. Имя выводит значение, но определение – нет. Тем не менее при вводе определения что-то несомненно должно происходить где-то внутри. Иначе как бы мы смогли воспользоваться этим именем в дальнейшем?

## 4.3. Каталог программы

При выполнении программ инструментальные средства программирования работают в скрытом (от пользователя) режиме. Например, при передаче в программу `2 + 3` выполняется вычисление с результатом `5`, который, в свою очередь, выводится в интерактивной панели.

При вводе определения Pyret делает запись во внутреннем каталоге (`directory`), где он связывает имена со значениями. Вы не можете увидеть этот каталог, но Pyret использует его для управления значениями, которые вы связали с именами. Если вы вводите:

```
width = 30
```

то Pyret создает новую запись в своем каталоге для имени `width` и фиксирует для него значение `30`. Если вы после этого вводите

```
height = width * 3
```

то Pyret вычисляет выражение в правой части (`width * 3`), затем записывает полученное значение (в данном случае `90`) рядом с именем `height` в каталоге.

Как Pyret вычисляет (`width * 3`)? Поскольку `width` – слово (а не строка), Pyret ищет его значение в своем каталоге. Потом Pyret подставляет это значение вместо соответствующего имени в данном выражении, получая `30 * 3`, что дает результат `90`. После завершения выполнения приведенных выше двух выражений каталог выглядит следующим образом:

Каталог:

```
width → 30
height → 90
```

Обратите внимание: запись для `height` в каталоге содержит результат вычисления `width * 3`, а не само это выражение. Это становится важным, когда мы используем именованные значения, позволяющие избежать многократного повторения одного и того же вычисления.

Каталог программы является важнейшей частью процесса ее выполнения. Если вы пытаетесь наблюдать, как работает ваша программа, то иногда помогает отслеживание содержимого ее внутреннего каталога на листе бумаги (поскольку нет возможности прямого просмотра каталога Pyret).

---

### Упражнение 4.3

Предположим, что в панели определений содержится следующий код, когда вы нажимаете кнопку Run:

```
name = "Matthias"  
"name"
```

Что происходит в интерактивной панели? Каким образом каждая из приведенных выше строк взаимодействует с каталогом программы?

---

---

---

### Упражнение 4.4

Что происходит, если вы вводите следующее определение с тем же именем, как, например, `width = 50`? Как отвечает на это Pyret? А если вы запросите визуальный вывод значения, связанного с этим же именем, после промпта? Что этот вывод сообщает вам о каталоге программы?

---

Когда вы пытаетесь присвоить новое значение имени, уже существующему в каталоге, Pyret ответит, что новое определение «заслоняет» (экранирует) предыдущее объявление для этого имени. Таким способом Pyret предупреждает вас, что введенное имя уже находится в каталоге. Если вы снова запросят значение, связанное с тем же именем, то увидите, что оно сохранило исходное значение. Pyret не позволяет вам изменять значение, связанное с существующим именем, с помощью нотации `name = value`. Несмотря на то что нотация, позволяющая повторно присваивать значения, существует, мы не будем работать с этой концепцией до главы 25.

### 4.3.1. Объяснение смысла кнопки Run

Теперь, когда мы узнали о каталоге программы, рассмотрим, что происходит, когда вы нажимаете кнопку **Run**. Предположим, что в панели определений находится следующее содержимое:

```
width = 30  
height = width * 3  
blue-rect = rectangle(width, height, "solid", "blue")
```

Когда вы нажимаете кнопку Run, Pyret в первую очередь полностью очищает каталог программы. Затем он обрабатывает ваш файл построчно, начиная с верхней строки. Если присутствует инструкция `include`, то Pyret добавляет все определения из включаемой библиотеки в каталог. После обработки всех строк для текущей программы ее каталог будет выглядеть следующим образом:

Каталог:

`circle` → <операция построения окружности>

```
rectangle → <операция построения прямоугольника>
...
width → 30
height → 90
blue-rect → <действительное изображение прямоугольника>
```

Теперь, если после промпта в интерактивной панели ввести любой вариант используемого идентификатора (последовательность символов, не заключенную в кавычки), то Pyret будет сверяться с каталогом.

Если вы теперь вводите

```
beside(blue-rect, rectangle(20, 20, "solid", "purple"))
```

то Pyret будет искать изображение, связанное с именем `blue-rect`.

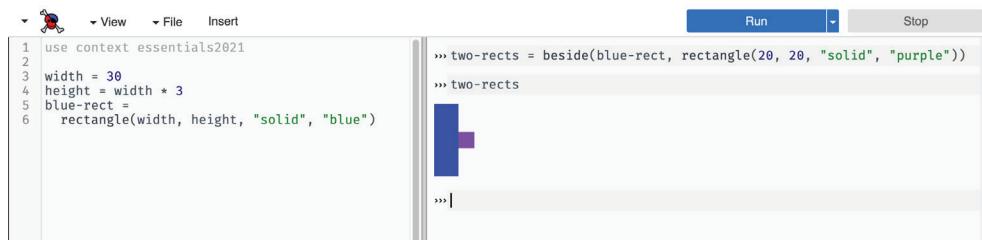
### **Выполните прямо сейчас**

Находится ли изображение лилового прямоугольника в каталоге? Что можно сказать об изображении, состоящем из этих двух прямоугольников?

Ни одна из этих фигур не находится в каталоге. Почему? Мы не попросили Pyret сохранить их под каким-либо именем. Какие различия должны возникнуть, если вместо этого ввести следующий код (после промпта в интерактивной панели)?

```
two-rects = beside(blue-rect, rectangle(20, 20, "solid", "purple"))
```

Теперь изображение из двух фигур должно находиться в каталоге, и оно связано с именем `two-rects`. Но сам лиловый прямоугольник остается не сохраненным в каталоге. Тем не менее можно ссылаться на изображение из двух фигур по имени, как показано на рис. 4.1.



**Рис. 4.1** ♦ Вывод изображения из двух фигур по имени

### **Выполните прямо сейчас**

Предположим, что теперь вы еще раз щелкнули по кнопке **Run**, потом после интерактивного промпта ввели `two-rects`. Что должен ответить Pyret и почему?

## 4.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИМЕН ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СОЗДАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Возможность именования значений может упростить формирование сложных составных выражений. Разместим лиловый треугольник с поворотом на заданный угол внутри зеленого квадрата:

```
overlay(rotate(45, triangle(30, "solid", "purple")), rectangle(60, 60, "solid", "green"))
```

Но, возможно, это выражение достаточно сложно для чтения и понимания. Вместо такой формы записи мы можем присвоить имена отдельным фигурам перед созданием итогового изображения:

```
purple-tri = triangle(30, "solid", "purple")
green-sqr = rectangle(60, 60, "solid", "green")
overlay(rotate(45, purple-tri), green-sqr)
```

В этой версии выражение `overlay` читается быстрее, потому что мы присвоили описательные имена исходным фигурам.

Сделаем следующий шаг: добавим еще один лиловый треугольник поверх существующего изображения:

```
purple-tri = triangle(30, "solid", "purple")
green-sqr = rectangle(60, 60, "solid", "green")

above(purple-tri,
      overlay(rotate(45, purple-tri),
              green-sqr))
```

Здесь мы видим новое преимущество применения имен: можно дважды использовать имя `purple-tri` в одном и том же выражении без необходимости повторного ввода длинного выражения `triangle`.

---

### Упражнение 4.5

Предположим, что в панели определений содержится только самый последний пример приведенного выше исходного кода (включающий определения `purple-tri` и `green-sqr`). Сколько отдельных изображений должно появиться в интерактивной панели, если вы нажмете кнопку **Run?** Видите ли вы лиловый треугольник и зеленый квадрат по отдельности или только в объединенном виде? Объясните почему (для любого варианта ответа).

---

---

### Упражнение 4.6

Перепишите ранее сформированное выражение для создания флага Армении (из раздела 3.6.2). В этой версии присваивайте промежуточные имена каждой составляющей полосе.

---

На практике программисты не присваивают имена каждому отдельному изображению или результату выражения при создании более сложных выражений. Именуются только те выражения, которые будут использоваться многократно, или выражения, имеющие особенно важное значение для понимания программы. Мы будем более подробно обсуждать присваивание имен по мере увеличения сложности наших программ.

# Глава 5

---

## От повторяющихся выражений к функциям

### 5.1. УЧЕБНЫЙ ПРИМЕР: ПОХОЖИЕ ФЛАГИ

Рассмотрим два приведенных ниже выражения для изображения флагов Армении и Австрии (соответственно). У обеих стран флаги одинаковы по форме, но с различными цветами. Оператор `frame` рисует небольшую черную рамку вокруг изображения.

```
# Строки, начинающиеся с символа #, - это комментарии для чтения людьми.  
# Ругет игнорирует всю оставшуюся часть строки после #.
```

```
# Армения.  
frame(  
    above(rectangle(120, 30, "solid", "red"),  
        above(rectangle(120, 30, "solid", "blue"),  
            rectangle(120, 30, "solid", "orange"))))  
  
# Австрия.  
frame(  
    above(rectangle(120, 30, "solid", "red"),  
        above(rectangle(120, 30, "solid", "white"),  
            rectangle(120, 30, "solid", "red"))))
```

Чтобы не вводить эту программу дважды, было бы неплохо записать выражение в общей форме только один раз, а затем просто изменять цвета для генерации каждого флага. Более конкретно: хотелось бы иметь гибко настраиваемый оператор, такой как `three-stripe-flag`, который можно было бы использовать, как показано ниже:

```
# Армения.  
three-stripe-flag("red", "blue", "orange")  
  
# Австрия.  
three-stripe-flag("red", "white", "red")
```

В этой программе мы передаем в `three-stripe-flag` только информацию, которая позволяет настроить процедуру создания изображения конкретного флага. Сама по себе эта операция должна отвечать за создание и выравнивание прямоугольников. В результате необходимо получить те же изображения флагов Армении и Австрии, которые были созданы в исходной программе. Такого оператора нет в Pyret: он является специализированным только в нашем приложении создания изображений флагов. Чтобы приведенная выше программа работала, необходима возможность добавления собственных операторов (в дальнейшем мы будем называть их функциями (functions)) в Pyret.

## 5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

В программировании функция (function) принимает один или несколько (конфигурационных) параметров и использует их для генерации (вычисления) результата.

### Стратегия: создание функций из выражений

Если имеется несколько почти одинаковых выражений, отличающихся друг от друга только несколькими конкретными значениями данных, то мы создаем функцию с общим исходным кодом, как показано ниже:

- записываем, как минимум, два выражения, выполняющих требуемое вычисление (в нашем примере это выражения, создающие флаги Армении и Австрии);
- определяем постоянные части этих выражений (например, создание прямоугольников с размерами 120 и 30, использование `above` для размещения прямоугольников друг над другом) и части, которые изменяются (например, цвета полос);
- каждой изменяющейся части присваивается имя (например, `top`, `middle` и `bottom`), которое будет представлять параметр для соответствующей части;
- перепишем примеры с использованием этих параметров. Например:

```
frame(
    above(rectangle(120, 30, "solid", top),
          above(rectangle(120, 30, "solid", middle),
                rectangle(120, 30, "solid", bottom))))
```

- присваиваем этой функции информативное имя, например `three-stripe-flag`;
- записать для создаваемой функции синтаксис с охватом требуемого выражения:

```
fun <имя_функции>(<параметры>):
    <здесь записывается требуемое выражение>
end
```

где записанное внутри выражение называется телом (body) функции. (Программисты часто используют угловые скобки (<>), чтобы сказать: «заменить на что-либо подходящее», но сами скобки не являются частью нотации.)

Получаем следующий конечный результат:

```
fun three-stripe-flag(top, middle, bot):
    frame(
```

```
above(rectangle(120, 30, "solid", top),
      above(rectangle(120, 30, "solid", middle),
            rectangle(120, 30, "solid", bot)))
end
```

Здесь может показаться, что такой подход требует слишком большого объема работы, но после того, как эта методика станет привычной, это первое (ошибочное) впечатление исчезнет. Мы будем проходить перечисленные выше шаги снова и снова, и в конце концов их выполнение будет доведено до автоматизма, так что даже не потребуется начинать с определения нескольких одинаковых выражений.

### **Выполните прямо сейчас**

Почему тело функции содержит только одно выражение, хотя прежде мы использовали отдельные выражения для каждого флага?

В теле функции содержится только одно выражение, потому что основной смысл заключался в том, чтобы избавиться от всех изменяющихся частей и заменить их параметрами.

Имея в своем распоряжении эту функцию, мы можем записать следующие два выражения для генерации все тех же изображений флагов:

```
three-stripe-flag("red", "blue", "orange")
three-stripe-flag("red", "white", "red")
```

Когда мы передаем значения параметров в функцию для получения результата, то говорим, что вызываем функцию. Для выражений в такой форме мы используем термин «вызов» (call).

Если необходимо присвоить имена полученным в результате изображениям, то можно сделать это следующим образом:

```
armenia = three-stripe-flag("red", "blue", "orange")
austria = three-stripe-flag("red", "white", "red")
```

(Небольшое замечание: Pyret разрешает присвоить только одно значение каждому имени в своем каталоге. Если в вашем файле уже имеются определения для имен `арmenia` и `austria`, то Pyret в этом месте выведет сообщение об ошибке. Можно воспользоваться другим именем (например, `austria2`) или закомментировать первоначальное определение с помощью символа `#`).

## **5.2.1. Как вычисляются функции**

К настоящему моменту мы узнали о трех правилах, определяющих, как Pyret обрабатывает вашу программу:

- если вы вводите выражение, то Pyret вычисляет его для получения значения;

- если вы вводите инструкцию, определяющую имя, то Pyret вычисляет выражение (справа от знака равенства =), затем создает запись в каталоге для связывания имени с вычисленным значением;
- если вы вводите выражение, в котором используется имя из каталога, то Pyret заменяет это имя на соответствующее значение (и вычисляет выражение).

Теперь, когда мы получили возможность определять собственные функции, необходимо рассмотреть еще два варианта: что делает Pyret, когда вы определяете (define) функцию (используя ключевое слово `fun`), и что делает Pyret, когда вы вызываете (call) функцию (с конкретными значениями параметров).

- Когда Pyret обнаруживает определение функции в вашем файле, то создает запись в каталоге для связывания имени этой функции с ее исходным кодом. В это время тело функции не вычисляется.
- Когда Pyret встречает вызов функции при вычислении выражения, то заменяет его на тело функции, но при этом вместо имен параметров подставляет их конкретные значения в теле. Затем Pyret продолжает вычисление тела функции с подставленными значениями.

В качестве примера применения правила вызова функции: если вычисляется выражение

```
three-stripe-flag("red", "blue", "orange")
```

то Pyret начинает с тела функции:

```
frame(
  above(rectangle(120, 30, "solid", top),
    above(rectangle(120, 30, "solid", middle),
      rectangle(120, 30, "solid", bot))))
```

подставляет значения параметров

```
frame(
  above(rectangle(120, 30, "solid", "red"),
    above(rectangle(120, 30, "solid", "blue"),
      rectangle(120, 30, "solid", "orange"))))
```

затем вычисляет полученное выражение, создавая изображение флага.

Обратите внимание: второе выражение (с подставленными значениями) полностью совпадает с тем, с которого мы начинали создавать изображение флага Армении. Подстановка воспроизводит исходное выражение, но при этом сохраняет для программиста возможность писать выражения в сокращенной форме `three-stripe-flag`.

## 5.2.2. Аннотации типов

А если мы совершили ошибку и попытались вызвать функцию следующим образом:

```
three-stripe-flag(50, "blue", "red")
```

**Выполните прямо сейчас**

Как вы думаете, какой результат вычислит Pyret для этого выражения?

Предполагается, что первым параметром функции `three-stripe-flag` должен быть цвет верхней полосы. Значение `50` не является строкой (не говоря уже о строке, обозначающей цвет). Pyret подставит `50` вместо параметра `top` в первом вызове `rectangle`, и в результате получается следующее выражение:

```
frame(
  above(rectangle(120, 30, "solid", 50),
    above(rectangle(120, 30, "solid", "blue"),
      rectangle(120, 30, "solid", "red"))))
```

Когда Pyret пытается выполнить выражение `rectangle` для создания верхней полосы, то выводит сообщение об ошибке, относящееся к этому вызову `rectangle`.

Если бы кто-либо другой использовал эту функцию, это сообщение об ошибке, возможно, вообще не имело бы смысла: пользователи не писали выражение создания прямоугольников. Не лучше ли, чтобы Pyret сообщил, что возникла проблема с использованием самой функции `three-stripe-flag`?

Как автор функции `three-stripe-flag` вы можете обеспечить такую возможность с помощью аннотации (annotating) параметров, дополнив их информацией об ожидаемом типе значения для каждого параметра. Ниже приведено новое определение функции, в этот раз с требованием, чтобы три параметра представляли собой строки:

```
fun three-stripe-flag(top :: String,
                      mid :: String,
                      bot :: String):
  frame(
    above(rectangle(120, 30, "solid", top),
      above(rectangle(120, 30, "solid", mid),
        rectangle(120, 30, "solid", bot))))
```

end

Следует отметить, что здесь нотация похожа на ту, что мы видели в контрактах в документации: после имени параметра следует двойное двоеточие (::) и имя типа (на текущий момент одно из `Number`, `String` или `Image`).

Размещение каждого параметра на отдельной строке не обязательно, но иногда такая форма записи более удобна для чтения.

Выполните свой файл с приведенным выше новым определением и еще раз попробуйте вызвать функцию с ошибочным параметром. Вы должны получить другое сообщение об ошибке, которое теперь относится к функции `three-stripe-flag`.

Общепринятой практической методикой также является добавление аннотации типа для вывода функции. Эта аннотация записывается после списка параметров:

---

```
fun three-stripe-flag(top :: String,
    mid :: String,
    bot :: String) -> Image:
  frame(
    above(rectangle(120, 30, "solid", top),
      above(rectangle(120, 30, "solid", mid),
        rectangle(120, 30, "solid", bot))))
end
```

Следует отметить, что все эти аннотации типов не являются обязательными. Pyret будет выполнять программу вне зависимости от того, включены в нее аннотации типов или их нет. Вы можете записать аннотации типов для некоторых параметров, а другие оставить без аннотаций. Также можно включить аннотацию типа вывода, а для параметров аннотации не указывать. В разных языках программирования существуют различные правила, относящиеся к определению типов.

Мы будем считать, что типы играют две роли: передают Pyret информацию, которую можно использовать для уточнения содержимого сообщений об ошибках, а также помогают людям, читающим программу, правильно применять функции, определенные пользователем.

## 5.2.3. Документация

Предположим, что вы открыли файл своей программы, рассматриваемой в этой главе, через пару месяцев. Помните ли вы, что вычисляет функция `three-stripe-flag`? Разумеется, имя дает некоторую информацию, но без подробностей, например о том, что полосы размещаются по вертикали (а не по горизонтали) и что полосы имеют одинаковую высоту. Имена функций не предназначены для передачи такого большого объема информации.

Программисты также дополняют аннотацию функции специальной строкой `docstring` – коротким описанием на естественном языке того, что делает данная функция. Ниже показано, как может выглядеть `docstring` Pyret для функции `three-stripe-flag`:

```
fun three-stripe-flag(top :: String,
    mid :: String,
    bot :: String) -> Image:
  doc: "produce image of flag with three equal-height horizontal stripes"
    # "создает изображение флага с тремя горизонтальными полосами равной высоты"
  frame(
    above(rectangle(120, 30, "solid", top),
      above(rectangle(120, 30, "solid", mid),
        rectangle(120, 30, "solid", bot))))
end
```

Такие строки документации `docstrings` также не являются обязательными с точки зрения Pyret, но при написании функций настоятельно рекомендуется их добавлять. Они чрезвычайно полезны для всех, кто должен читать вашу программу, – коллега, инспектор по качеству... или вы сами через пару недель.

## 5.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ ФУНКЦИЙ: РАСЧЕТ ВЕСА НА ЛУНЕ

Предположим, что мы отвечаем за экипировку группы космонавтов, осваивающих Луну. Мы должны определить, сколько будет весить каждый из космонавтов на поверхности Луны. На Луне вес любого объекта составляет всего лишь одну шестую его веса на Земле. Ниже приведены выражения для нескольких космонавтов (их вес приводится в фунтах):

```
100 * 1/6  
150 * 1/6  
90 * 1/6
```

Как и в примерах создания изображений флагов Армении и Австрии, мы записываем одно и то же выражение несколько раз. Это другая ситуация, в которой мы должны создать функцию, принимающую изменяющиеся данные как параметр, но выполняющую строго определенное вычисление только один раз.

В примере с флагами мы заметили, что приходилось записывать фактически одно и то же выражение более одного раза. Здесь мы имеем вычисление, которое предположительно должно выполняться несколько раз (по одному для каждого космонавта). Раз за разом вводить одно и то же выражение – слишком скучное и утомительное занятие. Кроме того, если многократно копировать и вставлять выражение, то рано или поздно мы получим ошибку при записи данных (*transcription error*).

Вспомним последовательность шагов при создании функции:

- записать несколько примеров требуемого вычисления. Мы сделали это выше;
- определить, какие части являются постоянными (в приведенных выше примерах это `* 1/6`), а какие изменяются (в примерах выше 100, 150, 90...);
- каждой изменяющейся части присвоить имя (например, `earth-weight`), которое будет обозначать соответствующий параметр;
- переписать примеры с использованием принятого параметра:

```
earth-weight * 1/6
```

Это наглядный пример проявления принципа (разработки программ) DRY ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Don't\\_repeat\\_yourself](https://ru.wikipedia.org/wiki/Don't_repeat_yourself)), где DRY означает «Don't repeat yourself» (Не повторяйся).

- Это выражение будет телом (*body*), т. е. выражением внутри функции;
- подобрать информативное имя для этой функции, например `moon-weight`;
  - записать синтаксис создания функции, окружающий выражение в теле:

```
fun moon-weight(earth-weight):  
    earth-weight * 1/6  
end
```

- вспомнить о возможности включения типов параметра и результата, а также строки документации. Получаем окончательную версию функции:

```
fun moon-weight(earth-weight :: Number) -> Number:
    doc: "Compute weight on moon from weight on earth"
        # "Вычисление веса на Луне по весу на Земле"
    earth-weight * 1/6
end
```

## 5.4. ДОКУМЕНТИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕРАМИ

В каждой из приведенных выше функций мы начинали с нескольких примеров, демонстрирующих требуемые вычисления, затем обобщали их в универсальную формулу, превращали ее в функцию, потом использовали полученную функцию вместо исходных выражений.

А как использовать начальные примеры после завершения работы по созданию функции? Кажется, что можно их просто выбросить. Но существует важное правило, относящееся к программному обеспечению, которое вы должны знать: программное обеспечение постоянно развивается (Software Evolves). Проходит время, и каждая программа, которая используется кем-либо, изменяется и увеличивается, а в конце концов, возможно, выдает значения, отличающиеся от первоначальных результатов. Иногда это делается преднамеренно, но в некоторых случаях это становится следствием ошибок (в том числе таких глупых, но неизбежных ошибок, как случайное добавление или удаление текста при наборе). Таким образом, всегда полезно сохранять исходные примеры под рукой для обращений к ним в будущем, чтобы сохранить возможность внесения изменений, если функция отклоняется от примеров, изначально предложенных для обобщения.

Pyret позволяет с легкостью выполнить эту работу. В каждую функцию можно включить директиву `where`, в которой записываются примеры. Например, нашу функцию `moon-weight` можно изменить, сделав ее более удобной для чтения:

```
fun moon-weight(earth-weight :: Number) -> Number:
    doc: "Compute weight on moon from weight on earth"
        # "Вычисление веса на Луне по весу на Земле"
    earth-weight * 1/6
where:
    moon-weight(100) is 100 * 1/6
    moon-weight(150) is 150 * 1/6
    moon-weight(90) is 90 * 1/6
end
```

При таком способе записи Pyret будет действительно проверять ответы при каждом запуске этой программы и сообщать вам, если внесенные изменения в функцию становятся несогласованными с записанными здесь примерами.

***Выполните прямо сейчас***

Проверьте это утверждение. Измените формулу, например замените тело функции на следующее выражение:

```
earth-weight * 1/3
```

и посмотрите, что происходит. Обратите особое внимание на вывод из СРО: вы должны научиться без труда распознавать этот тип вывода.

***Выполните прямо сейчас***

Теперь верните первоначальное тело функции, а вместо этого измените один из ответов, например запишите

```
moon-weight(90) is 90 * 1/3
```

и посмотрите, что происходит. Сравните вывод в этом случае с выводом, полученным в предыдущем случае.

Разумеется, вы вряд ли сделаете ошибку в такой простой функции (за исключением разве что опечатки). К тому же эти примеры очень похожи на само тело функции. Но в дальнейшем мы увидим, что примеры могут быть намного более простыми, чем тело, поэтому существует реальная возможность возникновения несогласованности. В этом случае примеры становятся бесполезными для подтверждения отсутствия ошибок в программе. Но в действительности эта методика настолько полезна в процессе профессиональной разработки программного обеспечения, что опытные программисты всегда сохраняют большой набор примеров, называемых тестами (*tests*), позволяющих подтвердить, что поведение программы соответствует ожидаемому.

Для наших целей мы пишем примеры как часть процесса подтверждения полного понимания задачи. Всегда полезно убедиться в том, что вы понимаете вопрос, прежде чем начнете писать код для решения задачи. Примеры представляют собой превосходный промежуточный этап: сначала вы можете сделать черновой набросок соответствующего вычисления с конкретными значениями, а затем позаботиться о преобразовании его в функцию. Если невозможно написать примеры, то, вероятнее всего, вы не сможете написать и функцию. Примеры разделяют процесс программирования на более мелкие, управляемые этапы.

## 5.5. ПРАКТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ ФУНКЦИЙ: СТОИМОСТЬ АВТОРУЧЕК

Создадим еще одну функцию, на этот раз для более сложного примера. Предположим, что вы пытаетесь вычислить общую стоимость заказа авторучек с надписями (или сообщениями), отпечатанными на них. Цена каждой авто-

ручки 25 центов плюс дополнительные 2 цента за каждый символ в сообщении (будем считать символами и пробелы между словами).

Выполним снова все шаги по созданию функции, а начнем с записи двух конкретных выражений, выполняющих требуемое вычисление.

```
# Заказ 3 авторучек с надписью "wow".
3 * (0.25 + (string-length("wow") * 0.02))

# Заказ 10 авторучек с надписью "smile".
10 * (0.25 + (string-length("smile") * 0.02))
```

В этих примерах представлена новая встроенная функция `string-length`. Она принимает строку как входные данные и возвращает число символов (включая пробелы и знаки пунктуации) в ней. Здесь также демонстрируется работа с числами, отличающимися от целых.

Второй шаг создания функции – определение информации, различающейся в приведенных выше примерах. В этом случае мы находим два различия: число авторучек и надпись (сообщение), нанесенная на них. Это означает, что функция будет принимать два параметра, а не один.

```
fun pen-cost(num-pens :: Number, message :: String) -> Number:
    num-pens * (0.25 + (string-length(message) * 0.02))
end
```

Разумеется, если записи становятся слишком длинными, то, возможно, удобнее разместить их на нескольких строках:

```
fun pen-cost(num-pens :: Number, message :: String)
    -> Number:
    num-pens * (0.25 + (string-length(message) * 0.02))
end
```

Если необходимо написать многострочную docstring (строку документирования), то потребуется использование ''' (трех одиночных кавычек) вместо двойной кавычки ("") для обозначения ее начала и конца, как показано ниже:

```
fun pen-cost(num-pens :: Number, message :: String)
    -> Number:
    doc: '''total cost for pens, each 25 cents
        plus 2 cents per message character'''
        # '''Общая стоимость авторучек по цене 25 центов каждая,
        #     плюс 2 цента за каждый символ надписи'''
    num-pens * (0.25 + (string-length(message) * 0.02))
end
```

Также необходимо документировать примеры, которые использовались при создании функции:

Pyret требует обязательной записи числа перед десятичной точкой, поэтому если целой частью числа является ноль, то необходимо записать 0 перед точкой. Кроме того, обратите внимание: Pyret использует десятичную точку (decimal point) и не поддерживает прочие соглашения типа «0,02» ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Десятичный\\_разделитель](https://ru.wikipedia.org/wiki/Десятичный_разделитель)).

```
fun pen-cost(num-pens :: Number, message :: String)
    -> Number:
doc: '''total cost for pens, each 25 cents
    plus 2 cents per message character'''
# '''Общая стоимость авторучек по цене 25 центов каждая,
#     плюс 2 цента за каждый символ надписи'''
num-pens * (0.25 + (string-length(message) * 0.02))
where:
    pen-cost(3, "wow")
        is 3 * (0.25 + (string-length("wow") * 0.02))
    pen-cost(10, "smile")
        is 10 * (0.25 + (string-length("smile") * 0.02))
end
```

При записи примеров в разделе `where` также необходимо включать особые, но корректные случаи, которые может обработать функция, например пустая надпись.

```
pen-cost(5, "") is 5 * 0.25
```

Обратите внимание: в этом примере с пустой надписью содержится более простое выражение справа от `is`. Выражение для вычисления результата, возвращаемого функцией, может и не совпадать с выражением в теле функции – нужно просто вычислить значение, которое ожидается в соответствии с этим конкретным примером. Иногда мы будем обнаруживать, что проще напрямую записать ожидаемое значение. Для особого случая (когда авторучки не заказываются вообще, например) можно было бы включить следующий вариант:

```
pen-cost(0, "bears") is 0
```

Цель этих примеров – документирование поведения функции при различных вариантах ввода. Часть справа от `is` должна обобщать способ вычислений или содержать ответ в некоторой осмысленной форме. Что здесь самое важное? Не пишите функцию, запустите ее, чтобы определить ответ, затем поместите этот ответ справа от `is`. Почему не писать функцию? Потому что примеры вносят некоторую избыточность в процесс проектирования, и выявляются ошибки, которые, возможно, вы совершили. Если тело функции некорректно и вы используете эту функцию для генерации примера, то не получите никаких преимуществ от использования такого примера для поиска ошибок.

В будущем мы вернемся к этой методике написания правильных примеров. Если сейчас у вас остаются какие-либо вопросы, не волнуйтесь. Кроме того, пока мы не будем беспокоиться о бессмысленных ситуациях, таких как отрицательное число авторучек. Мы вернемся к ним после того, как изучим дополнительные методики кодирования, которые помогут нам корректно обрабатывать подобные ситуации.

**Выполните прямо сейчас**

Два приведенных выше особых случая можно было бы объединить в одном примере, как показано ниже:

```
pen-cost(0, "") is 0
```

Это действительно выглядит как удачная идея? Объясните, почему (для любого варианта ответа).

## 5.6. РЕЗЮМЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

В этой главе было введено понятие функции. Функции играют ключевую роль в программировании: они позволяют изменять конфигурацию вычислений с различными конкретными значениями в разное время. Когда мы в первый раз вычисляем стоимость авторучек, то можем заказать 10 авторучек с надписью «Welcome». В следующий раз мы могли бы заказать 100 ручек с надписью «Go Bears!». Основное вычисление одинаково в обоих случаях, поэтому необходимо записать его один раз, изменяя конфигурацию с различными конкретными значениями при каждом варианте использования.

В этой главе было описано несколько конкретных характеристик функций:

- мы продемонстрировали форму нотации `fun` для записи функций. Вы узнали, что у функции есть имя (которое мы можем использовать для обращения к ней), один или несколько параметров (имена для значений, которые необходимо сконфигурировать), а также тело, представляющее собой вычисление, которое необходимо выполнить один раз с предоставленными конкретными значениями параметров;
- мы показали, что необходимо включать примеры использования создаваемых функций, чтобы продемонстрировать, что именно функция вычисляет с различными конкретными значениями. Примеры размещаются в блоке `where` внутри функции;
- мы показали, что можно использовать функцию, предоставляя конкретные значения для конфигурирования ее параметров. Для этого мы записываем имя функции, которую необходимо использовать, а далее заключаем в круглые скобки значения параметров, разделенные запятыми. Например, запись приведенного ниже выражения (после промпта в интерактивной панели) позволит вычислить стоимость конкретного заказа авторучек:

```
pen-cost(10, "Welcome")
```

- мы выяснили: если определить функцию в панели определений, а затем нажать кнопку **Run**, то Pyret сделает запись в каталоге с именем этой функции. Если в дальнейшем мы воспользуемся той же функ-

цией, то Pyret найдет код, соответствующий этому имени, подставит конкретные значения, переданные для параметров, и вернет результат вычисления выражения тела функции. Pyret ничего не создает в интерактивной панели при определении функции (кроме сообщения о том, корректны ли примеры).

О функциях можно узнать гораздо больше, в том числе о различных причинах их создания. Изучая данный учебный курс, мы будем постепенно получать эту информацию.

# Глава 6

---

## Условные и логические выражения

### 6.1. УЧЕБНЫЙ ПРИМЕР: ВЫЧИСЛЕНИЕ СТОИМОСТИ ДОСТАВКИ

В разделе 5.5 мы написали программу `pen-cost` для вычисления стоимости заказа авторучек. Продолжим дополнять этот пример – теперь необходимо рассчитать стоимость доставки. Оплату доставки будем определять на основе стоимости заказа.

Более определенно: напишем функцию `add-shipping` для вычисления общей стоимости заказа, включая оплату доставки. Предположим, что заказ стоимостью 10 долл. и менее доставляется за 4 долл., а если сумма заказа превышает 10 долл., то плата за доставку составляет 8 долл. Как обычно, начнем с записи примеров вычисления `add-shipping`.

#### **Выполните прямо сейчас**

Используйте форму записи `is` из блоков `where` для записи нескольких примеров вычисления `add-shipping`. Как вы выбираете входные данные для этих примеров? Выбираете ли вы случайные входные данные? Не придерживаетесь ли вы какой-либо стратегии? Если придерживаетесь, то какова ваша стратегия?

Ниже приведен предлагаемый набор примеров для вычисления `add-shipping`.

```
add-shipping(10) is 10 + 4  
add-shipping(3.95) is 3.95 + 4  
add-shipping(20) is 20 + 8  
add-shipping(10.01) is 10.01 + 8
```

**Выполните прямо сейчас**

На что вы обратили внимание в приведенных выше примерах? Какую стратегию вы обнаружили в выбранных нами вариантах?

Предлагаемые нами примеры включают несколько стратегических решений:

- включение значения 10, находящегося на границе сумм оплат, определенной по приведенному выше тексту;
- включение значения 10.01, которое чуть больше граничного значения;
- включение натуральных и действительных (десятичных дробных) чисел;
- включение примеров, результатом которых является оплата доставки, указанная в тексте задачи (4 и 8).

До настоящего момента мы использовали простое правило для создания тела функции по примерам: определяли изменяющиеся части, заменяли их именами, затем применяли эти имена как параметры функции.

**Выполните прямо сейчас**

Что изменяется во всех примерах вычисления add-shipping? Заметили ли вы что-либо, отличающее эти изменения от примеров для наших предыдущих функций?

В предложенном выше наборе примеров новыми являются два свойства:

- значения 4 и 8 не содержатся одновременно ни в одном примере, но встречаются в нескольких примерах;
- значения 4 и 8 появляются только в вычисленных ответах – и никогда как входные данные. Которое из них мы используем, кажется, зависит от входного значения.

Эти два наблюдения позволяют прийти к выводу о том, что в вычислениях add-shipping присутствует что-то новое. В частности, у нас есть группы примеров, в которых совместно используется фиксированное значение (оплата доставки), но в других группах (а) используются различные значения и (б) содержится шаблон (критерий выбора – pattern) для входных данных (проверяется, меньше или равно 10 входное значение). Для этого требуется возможность задавать вопросы о входных данных в наших программах.

## 6.2. УСЛОВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ: ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПРИНЯТИЕМ РЕШЕНИЙ

Чтобы задать вопрос о входных данных, мы используем новый тип выражения под названием if-выражение (if – если). Ниже приведено полное определение функции вычисления add-shipping:

```

fun add-shipping(order-amt :: Number) -> Number:
  doc: "add shipping costs to order total"
    # "Добавление стоимости доставки в сумму заказа"
  if order-amt <= 10:
    order-amt + 4
  else:
    order-amt + 8
  end
where:
  add-shipping(10) is 10 + 4
  add-shipping(3.95) is 3.95 + 4
  add-shipping(20) is 20 + 8
  add-shipping(10.01) is 10.01 + 8
end

```

В выражении `if` мы задаем вопрос, ответом на который может быть истина (`true`) или ложь (`false`) (здесь это вопрос `order-amt <= 10`, смысл которого мы объясним ниже в разделе 6.3), а после этого представлено одно выражение для ответа «истина» (`order-amt + 4`) и второе выражение для ответа «ложь» (`order-amt + 8`). В рассматриваемой здесь программе слово `else` (иначе) определяет ответ в случае «ложь» – мы называем этот вариант спецификатором, или ветвью `else` (else clause). Также необходимо слово `end`, чтобы сообщить Pyret о завершении блока вопросов и ответов.

## 6.3. ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Каждое выражение в Pyret вычисляет значение. До сих пор нам встречались три типа значений: `Number`, `String` и `Image`. Значение какого типа генерирует вопрос, подобный `order-amt <= 10?` Можно воспользоваться промптом в интерактивной панели, чтобы поэкспериментировать и найти ответ.

### **Выполните прямо сейчас**

Введите каждое из приведенных ниже выражений после интерактивного промпта. Значение какого типа вы получили? Соответствуют ли полученные здесь значения типам, которые мы видели до настоящего момента?

`3.95 <= 10`  
`20 <= 10`

Значения `true` и `false` относятся к новому типу в Pyret – `Boolean` (логический). Существует бесконечно много значений типа `Number`, но для типа `Boolean` определены только два значения: `true` и `false`.

Тип `Boolean` назван в честь Джорджа Буля (George Boole) ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Буль,\\_Джордж](https://ru.wikipedia.org/wiki/Буль,_Джордж)).

### Упражнение 6.1

Что должно произойти, если мы вводим `order-amt <= 10` после интерактивного промпта для изучения логических выражений? Почему это происходит?

---

## 6.3.1. Другие логические операции

Существует много других встроенных операций, которые возвращают значения типа Boolean. Наиболее часто используется сравнение значений на равенство:

```
>>> 1 == 1
true
>>> 1 == 2
false
>>> "cat" == "dog"
false
>>> "cat" == "CAT"
false
```

Мы можем и должны сказать намного больше о сравнении на равенство, но сделаем это позже в разделе 21.1.

В общем случае операция `==` проверяет, равны ли два значения. Следует особо отметить, что эта операция отличается от одиночного знака равенства `=`, используемого для связывания имен со значениями в каталоге программы.

Последний пример наиболее интересен: он показывает, что в строках учитывается регистр букв (case sensitive), т. е. для отдельных букв обязательно должен совпадать их регистр, чтобы строки считались равными.

Кроме того, иногда необходимо сравнивать строки, чтобы определить их алфавитный порядок. Ниже приведено несколько примеров:

```
>>> "a" < "b"
true
>>> "a" >= "c"
false
>>> "that" < "this"
true
>>> "alpha" < "beta"
true
```

Это условие станет особенно важным, когда мы будем рассматривать таблицы в следующих главах.

Это алфавитный порядок, которым мы привыкли пользоваться. Но другие случаи требуют дополнительных пояснений:

```
>>> "a" >= "C"
true
>>> "a" >= "A"
true
```

Здесь используется соглашение, принятое много лет тому назад в системе под названием ASCII (<https://ru.wikipedia.org/wiki/ASCII>).

### **Выполните прямо сейчас**

Можно ли сравнить значения `true` и `false`? Попробуйте сравнить их на равенство (`==`), затем на неравенство (например, `<`).

Все становится гораздо более сложным при использовании букв, не входящих в набор символов ASCII, например Pyret считает, что буква Ł «больше, чем» Ž, но в польском языке это должно быть ложью (`false`). Еще хуже то, что упорядочение букв зависит от географической локации ([https://en.wikipedia.org/wiki/Alphabetical\\_order](https://en.wikipedia.org/wiki/Alphabetical_order)) (например, сравните алфавитный порядок в Дании/Норвегии и Финляндии/Швеции).

Вообще говоря, вы можете сравнивать на равенство любые два значения (ну, почти любые; мы вернемся к этому уточнению позже), например:

```
>>> "a" == 1
false
```

Если необходимо сравнивать значения одного конкретного типа, то можно воспользоваться более специализированными операторами:

```
>>> num-equal(1, 1)
true
>>> num-equal(1, 2)
false
>>> string-equal("a", "a")
true
>>> string-equal("a", "b")
false
```

Но почему эти операторы используются вместо более общего `==`?

### **Выполните прямо сейчас**

Попробуйте выполнить:

```
num-equal("a", 1)
string-equal("a", 1)
```

Таким образом, разумнее использовать операторы, специально предназначенные для конкретного типа, если ожидаются два аргумента этого типа. В этом случае Pyret сообщит об ошибке, если вы сделаете что-то не так, вместе с возвратом ничего не говорящего ответа (`false`), который позволит программе продолжить вычисление с бессмысленным значением.

Существует гораздо больше операторов, возвращающих логические значения, например:

```
>>> wm = "will.i.am"
>>> string-contains(wm, "will")
true
>>> string-contains(wm, "Will")
false
```

В приведенном ниже примере при сравнении обратите внимание на заглавную (прописную) букву W.

В действительности почти для каждого типа данных имеется несколько логических операторов для обеспечения возможности сравнения значений.

## 6.3.2. Объединение логических выражений

Часто требуется обоснование принимаемых решений по нескольким логическим значениям. Например, вам разрешается участвовать в голосовании, если вы гражданин страны и вы старше определенного возраста. Вам разрешается сесть в автобус, если у вас есть билет или сегодня день бесплатного проезда. Можно даже объединять несколько условий: вы можете водить автомобиль, если вы старше определенного возраста и обладаете хорошим зрением, а также или прошли тест на вождение, или имеете временную лицензию. Кроме того, управление автомобилем разрешается, если вы не находитесь в состоянии опьянения.

В соответствии с описанными выше формами объединения Pyret предоставляет три основные операции: `and`, `or` и `not`. Ниже приведено несколько примеров их использования:

```
>>> (1 < 2) and (2 < 3)
true
>>> (1 < 2) and (3 < 2)
false
>>> (1 < 2) or (2 < 3)
true
>>> (3 < 2) or (1 < 2)
true
>>> not(1 < 2)
false
```

---

### Упражнение 6.2

Объясните, почему числа и строки не являются правильными способами представления ответа на вопрос типа `true/false`.

---

---

## 6.4. КАК ЗАДАТЬ СРАЗУ НЕСКОЛЬКО ВОПРОСОВ

Стоимость доставки растет, поэтому мы вынуждены изменить программу `add-shipping`, чтобы включить в нее третий уровень оплаты доставки: заказы от 10 до 30 долл. доставляются за 8 долл., но доставка заказов свыше 30 долл. будет стоить 12 долл. Это требует внесения двух изменений в программу:

- нам нужна возможность задать еще один вопрос, чтобы отличать случаи, в которых оплата доставки равна 8, от случаев, когда доставка стоит 12;
- вопрос о стоимости доставки 8 потребует проверки: находится ли входное значение между двумя граничными.

Рассмотрим эти изменения по порядку.

Сейчас в теле `add-shipping` задан один вопрос: `order-amt <= 10`. Необходимо добавить еще один: `order-amt <= 30`, используя оплату доставки 12, если ответом на этот вопрос является «ложь» (`false`). Где мы разместим этот дополнительный вопрос?

Расширенная версия if-выражения, в которой используется часть `else if`, позволяет задавать несколько вопросов:

```
fun add-shipping(order-amt :: Number) -> Number:
    doc: "add shipping costs to order total"
        # "Добавление стоимости доставки в сумму заказа"
    if order-amt <= 10:
        order-amt + 4
    else if order-amt <= 30:
        order-amt + 8
    else:
        order-amt + 12
    end
where:
...
end
```

Здесь вы должны добавить в блок `where` примеры, использующие оплату доставки 12.

Как Pyret определяет, какой ответ нужно вернуть? Он вычисляет каждое выражение вопроса по порядку, начиная с варианта, следующего непосредственно за `if`. Затем он продолжает проход по вопросам и выбирает самый первый вопрос, который возвращает значение `true`. Ниже приведена общая форма синтаксиса if-выражения и порядка его вычисления.

```
if QUESTION1:
    <результат, если ответ на первый вопрос true>
else if QUESTION2:
    <результат, если ответ на QUESTION1 false и на QUESTION2 true>
else:
    <результат, если ответы на оба вопроса QUESTION false>
end
```

Программа может содержать несколько вариантов `else if`, следовательно, есть возможность задавать произвольное количество вопросов в любой программе.

### **Выполните прямо сейчас**

В описании задачи `add-shipping` сказано, что для сумм заказов между 10 и 30 должна назначаться оплата 8. Как в приведенном выше коде передана сущность слова «между»?

В настоящий момент это представлено в абсолютно неявной форме и зависит от понимания способа вычисления `if`. Первый вопрос `order-amt <= 10`, и если мы переходим ко второму вопросу, это значит, что `order-amt > 10`.

В этом контексте второй вопрос выясняет, истинно ли `order-amt <= 30`. Именно так мы передаем сущность слова «между».

### **Выполните прямо сейчас**

Как можно изменить приведенный выше код для формулирования требования «между 10 и 30» в явной форме в вопросе для варианта 8?

Помните оператор `and` в логических выражениях? Его можно использовать для выражения сущности отношений «между», как показано ниже:

`(order-amt > 10) and (order-amt <= 30)`

### **Выполните прямо сейчас**

Зачем нужны скобки, окружающие эти две операции сравнения? Если вы замените имя `order-amt` на конкретное значение (например, 20) и уберете скобки, что произойдет при выполнении этого выражения в интерактивной панели?

После включения оператора `and` программа `add-shipping` должна выглядеть следующим образом:

```
fun add-shipping(order-amt :: Number) -> Number:
  doc: "add shipping costs to order total"
    # "Добавление стоимости доставки в сумму заказа"
  if order-amt <= 10:
    order-amt + 4
  else if (order-amt > 10) and (order-amt <= 30):
    order-amt + 8
  else:
    order-amt + 12
  end
where:
  add-shipping(10) is 10 + 4
  add-shipping(3.95) is 3.95 + 4
  add-shipping(20) is 20 + 8
  add-shipping(10.01) is 10.01 + 8
  add-shipping(30) is 30 + 12
end
```

Обе версии программы `add-shipping` поддерживают одинаковые примеры. Обе версии корректны? Да. И хотя первая часть второго вопроса (`order-amt > 10`) является избыточной, включение подобных условий может оказаться полезным по трем причинам:

- 1) они оповещают будущих читателей (в том числе и нас самих) об условии, покрывающем один из вариантов;
- 2) они гарантируют, что если мы сделаем ошибку в записи более раннего вопроса, то не получим неожиданный вывод без каких-либо объяснений;

- 3) они обеспечивают защиту при будущих изменениях, когда кто-либо может изменить более ранний вопрос без оценки его воздействия на последующий.

---

### Упражнение 6.3

Фирма, занимающаяся онлайн-рекламой, должна решить, показывать ли рекламу парка для скейтбординга пользователям веб-сайта. Напишите функцию `show-ad`, которая принимает данные о возрасте и цвете волос каждого пользователя и возвращает `true`, если пользователю от 9 до 18 лет и у него розовый или фиолетовый цвет волос.

Попробуйте записать эти условия двумя способами: с помощью `if`-выражений и с использованием только логических операций.

---

### Ответственное применение информатики: вредные последствия от предоставления людям упрощенных данных

Предположения о пользователях кодируются даже в самых простых функциях. В приведенном выше упражнении 6.3 показан пример рекламы, в котором решение принимается на основе двух элементов информации о человеке: возраста и цвета волос. Хотя некоторые люди могут по стереотипу считать, что скейтбордисты молоды и красят волосы в экзотические цвета, многие скейтбордисты не соответствуют этому стереотипу, а многие люди, соответствующие названным выше критериям, не катаются на скейтборде.

Хотя реальные программы для поиска связи рекламы с пользователями более сложны, чем приведенная выше простая функция, даже самые изощренные рекламные программы сводятся к отслеживанию характеристик или информации об отдельных людях и сопоставлению ее с информацией о содержании рекламы. Настоящая рекламная система будет отличаться тем, что отслеживает десятки (или более) характеристик и использует более продвинутые принципы программирования, чем простые условные операторы, для определения эффективности рекламного объявления (некоторые из этих принципов мы рассмотрим немного позже в нашей книге). Этот пример также распространяется на ситуации гораздо более серьезные, чем реклама: найм на работу, получение банковского кредита, определение срока тюремного заключения или процедура освобождения из тюрьмы (<https://www.propublica.org/article/machine-bias-risk-assessments-in-criminal-sentencing>) – это другие примеры реальных систем, которые зависят от сравнения данных об отдельных людях с критериями, определяемыми программой.

С точки зрения социальной ответственности вопросы здесь заключаются в том, какие данные об отдельных людях должны быть предоставлены для обработки программами и какие стереотипы могут кодироваться с помощью таких данных. В некоторых случаях физические лица могут быть представлены данными без какого-либо ущерба для них (например, в университете

офисе жилых помещений хранятся номера студенческих билетов и информация о том, в какой комнате проживает студент). Но в других случаях данные об отдельных людях интерпретируются определенным образом, чтобы сформировать какие-то прогнозируемые характеристики. Решения, основанные на таких прогнозах, могут быть неточными и, следовательно, вредоносными.

## 6.5. Вычисление методом упрощения выражений

В разделе 5.2.1 мы говорили о том, как Rurret упрощает выражения и вызовы функций, сводя их к значениям. Рассмотрим этот процесс еще раз, но теперь с учетом if-выражений. Предположим, что необходимо вычислить заработную плату рабочего, который получает 10 долл. за каждый час, отработанный в течение первых 40 часов, и по 15 долл. за каждый сверхурочный час. Пусть переменная `hours` содержит количество отработанных часов, предположим 45:

```
hours = 45
```

Также предположим, что формула вычисления заработной платы имеет следующий вид:

```
if hours <= 40:  
    hours * 10  
else if hours > 40:  
    (40 * 10) + ((hours - 40) * 15)  
end
```

Теперь рассмотрим, как вычисляется итоговый ответ, используя для этого пошаговый процесс, который должен соответствовать тому, что вы изучали на уроках алгебры (шаги описаны в последовательно расположенных примечаниях).

```
if 45 <= 40:  
    45 * 10  
else if 45 > 40:  
    (40 * 10) + ((45 - 40) * 15)  
end  
  
=> if false:  
    45 * 10  
else if 45 > 40:  
    (40 * 10) + ((45 - 40) * 15)  
end  
  
=> if 45 > 40:  
    (40 * 10) + ((45 - 40) * 15)  
end
```

Первый шаг – подстановка значения 45 вместо `hours`.

Далее вычисляется условная часть выражения `if`, которая в рассматриваемом здесь случае дает результат `false`.

Поскольку первое проверяемое условие ложно (`false`), проверяется следующая ветвь.

```
=> if true:  
    (40 * 10) + ((45 - 40) * 15)  
end  
  
=> (40 * 10) + ((45 - 40) * 15)  
  
=> 400 + (5 * 15)  
=> 475
```

Ругет вычисляет вопрос в этом условном выражении, которое в данном случае дает результат true.

Поскольку это условие истинно (true), выражение сводится (упрощается) к телу соответствующей ему ветви. После этого выполняются простые арифметические действия.

Этот стиль упрощения – самый лучший способ восприятия процесса вычисления выражений Ругет. Полное выражение выполняется по шагам, которые его упрощают с применением простых правил. Вы можете использовать этот стиль самостоятельно, если хотите попробовать поработать с пошаговым выполнением любой программы на языке Ругет вручную (или мысленно).

## 6.6. Совместное использование функций

Эту главу мы начали с задачи о вычислении стоимости доставки заказа авторучек. К настоящему моменту мы написали две функции:

- `pen-cost` для вычисления стоимости авторучек;
- `add-shipping` для добавления стоимости доставки в общую сумму заказа.

А если теперь требуется вычисление стоимости заказа авторучек, включая доставку? Мы должны использовать обе функции вместе, передавая вывод `pen-cost` на вход `add-shipping`.

### **Выполните прямо сейчас**

Напишите выражение, вычисляющее общую стоимость с учетом доставки заказа 10 авторучек с надписью "bravo".

Существуют два способа структурирования этого вычисления. Можно передать результат функции `pen-cost` напрямую в `add-shipping`:

```
add-shipping(pen-cost(10, "bravo"))
```

Другой вариант: в качестве промежуточного шага можно присвоить имя результату функции `pen-cost`:

```
pens = pen-cost(10, "bravo")
add-shipping(pens)
```

Оба метода должны выдать одинаковый ответ.

## 6.6.1. Как вычисляются совместно используемые функции

Рассмотрим подробнее, как вычисляются приведенные выше программы с учетом подстановки и внутреннего каталога. Начнем со второй версии, в которой явно присваивается имя результату вызываемой функции `pen-cost`.

Вычисление второй версии – на высоком уровне Pyret выполняет следующие шаги:

- подстановка 10 вместо `pum-pens` и "bgavo" вместо `message` в теле `pen-cost`, затем вычисление тела с подстановками;
- запись в каталог имени `pens`, связанного со значением 3.5;
- первый шаг вычисления `add-shipping(pens)` – поиск значения `pens` в каталоге;
- подстановка 3.5 вместо `order-amt` в теле `add-shipping`, затем вычисление полученного выражения, результатом которого становится 7.5.

Вычисление первой версии – напомним, что первая версия состоит из одного выражения:

```
add-shipping(pen-cost(10, "bgavo"))
```

- Поскольку аргументы вычисляются до вызова функций, начинаем с вычисления выражения `pen-cost(10, "bgavo")` (здесь опять используется подстановка), которое упрощается до 3.5.
- Подстановка 3.5 вместо `order-amt` в теле `add-shipping`, затем вычисление полученного выражения, результатом которого становится 7.5.

### **Выполните прямо сейчас**

Сравните два приведенных выше пошаговых описания. В чем они отличаются? Что можно сказать о коде, из-за которого возникли эти различия?

Различие заключается в использовании внутреннего каталога: версия, явно присваивающая имя `pens`, использует каталог. Другая версия вообще не использует каталог. И все же оба метода приводят к одному результату, потому что одно и то же значение (результат вызова функции `pen-cost`) подставляется в тело функции `add-shipping`.

В ходе этого анализа может показаться, что версия, использующая каталог, чуть более неэффективна: казалось бы, что здесь требуется больше шагов для получения того же результата. Но кто-то может возразить, что версию с использованием каталога легче читать (у разных читателей могут быть различные мнения по этому поводу, и это очень хорошо). Так какую же версию мы должны использовать?

Используйте тот вариант, который наилучшим образом подходит к конкретной задаче. Со временем мы встретим случаи, в которых можно выбрать любой из этих стилей. Кроме того, выяснится (когда мы узнаем больше о тонкостях процесса вычисления программ), что эти две версии не настолько отличаются, как кажется прямо сейчас.

## 6.6.2. Совместное использование функций и внутренний каталог

Рассмотрим еще один вариант той же задачи. Возможно, увидев, как мы назвали промежуточный результат `pen-cost`, вы подумали о том, что не-плохо было бы использовать промежуточные имена, чтобы сделать тело `pen-cost` более удобным для чтения. Например, можно было бы написать следующий код:

```
fun pen-cost(num-pens :: Number, message :: String)
  -> Number:
  doc: '''total cost for pens, each 25 cents
        plus 2 cents per message character'''
    # '''Общая стоимость авторучек, цена каждой 25 центов
    #   плюс 2 цента за каждый символ надписи'''
    message-cost = (string-length(message) * 0.02)
    num-pens * (0.25 + message-cost)
  where:
  ...
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Запишите шаги высокого уровня при выполнении Pyret приведенной ниже программы, использующей новую версию `pen-cost`:

```
pens = pen-cost(10, "bravo")
add-shipping(pens)
```

Надеемся, что вы создали две записи в каталоге – одну для `message-cost` в теле `pen-cost`, вторую – для `pens`, как это делалось ранее.

### **Выполните прямо сейчас**

Рассмотрите приведенную ниже программу. Как вы думаете, какой результат должен вывести Pyret?

```
pens = pen-cost(10, "bravo")
cheap-message = (message-cost > 0.5)
add-shipping(pens)
```

Если использовать каталог, представленный при выполнении предыдущего задания, то какой ответ вы получите?

Здесь происходит нечто странное. Новая программа пытается использовать `message-cost` для определения `cheap-message`. Но имени `message-cost` нет в этой программе, если только мы не заглядываем в тела функций. Однако разрешать коду заглядывать в тела функций не имеет смысла: вероятнее всего, у вас не будет возможности посмотреть внутреннее содержимое функций

(например, если они определены в библиотеках), поэтому программа должна сообщить об ошибке – имя `message-cost` не определено.

Теперь понятно, что должно произойти. Но в нашем обсуждении каталога предполагается, что оба имени, `pens` и `message-cost`, должны находиться в каталоге, а это означает, что для Pyret должна существовать возможность использования `message-cost`. Так что же происходит на самом деле?

Приведенный выше пример заставляет нас объяснить еще одно свойство каталога. Как раз для того, чтобы избежать проблем, подобных показанной здесь (которая должна привести к возникновению ошибки), записи в каталоге, сделанные внутри функции, являются локальными (`local`) (закрытыми – `private`) относительно тела функции. При вызове функции Pyret создает локальный каталог, который не могут видеть другие функции. Тело функции может добавлять или использовать (ссылаться) имена в своем локальном закрытом каталоге (как в случае с `message-cost`) или имена из общего (глобального) каталога (такие как `pens`). Но ни при каких обстоятельствах вызов любой функции не позволяет заглянуть в локальный каталог, созданный при вызове другой функции. После завершения вызова функции ее локальный каталог исчезает (потому что не должна оставаться возможность его использования каким бы то ни было способом).

## 6.7. ВЛОЖЕННЫЕ УСЛОВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Мы показали, что результаты внутри `if`-выражений сами являются выражениями (как, например, `order-amt + 4` в приведенной ниже функции):

```
fun add-shipping(order-amt :: Number) -> Number:  
  doc: "add shipping costs to order total"  
    # "Добавление стоимости доставки в общую сумму заказа"  
  if order-amt <= 10:  
    order-amt + 4  
  else:  
    order-amt + 8  
  end  
end
```

Выражения результата могут быть более сложными. В действительности они могут быть полноценными `if`-выражениями. Для рассмотрения примера такого выражения разработаем еще одну функцию. На этот раз нам нужна функция, вычисляющая стоимость билетов в кино. Начнем с простой версии, в которой каждый билет стоит 10 долл.

```
fun buy-tickets1(count :: Number) -> Number:  
  doc: "Compute the price of tickets at $10 each"  
    # "Вычисление стоимости билетов по цене за каждый 10 долл."  
  count * 10  
where:  
  buy-tickets1(0) is 0  
  buy-tickets1(2) is 2 * 10
```

```
buy-tickets1(6) is 6 * 10
end
```

Теперь расширим эту функцию, добавив дополнительный параметр, определяющий, является ли покупатель представителем старшего поколения, которому полагается скидка. В таких случаях мы снижаем общую стоимость билета на 15 %.

```
fun buy-tickets2(count :: Number, is-senior :: Boolean)
    -> Number:
    doc: '''Compute the price of tickets at $10 each with
        senior discount of 15'''
    # '''Вычисление стоимости билетов по цене за каждый 10 долл.
        со скидкой 15 % представителям старшего поколения'''
    if is-senior == true:
        count * 10 * 0.85
    else:
        count * 10
    end
where:
buy-tickets2(0, false) is 0
buy-tickets2(0, true) is 0
buy-tickets2(2, false) is 2 * 10
buy-tickets2(2, true) is 2 * 10 * 0.85
buy-tickets2(6, false) is 6 * 10
buy-tickets2(6, true) is 6 * 10 * 0.85
end
```

Здесь необходимо обратить внимание на несколько особенностей:

- теперь функция имеет дополнительный параметр типа Boolean для определения, является ли покупатель представителем старшего поколения;
- мы добавили выражение `if` для проверки необходимости применения скидки;
- появилось больше примеров, потому что теперь необходимо изменять как количество билетов, так и необходимость применения скидки.

Теперь расширим программу еще больше, на этот раз предложив еще и скидку, если покупатель не является представителем старшего поколения, но приобрел более 5 билетов. В каком месте мы должны изменить код, чтобы сделать это? Один из вариантов: сначала проверка применимости скидки для людей старшего поколения. Если эта проверка не прошла, то проверяем, подходит ли количество билетов для скидки:

```
fun buy-tickets3(count :: Number, is-senior :: Boolean)
    -> Number:
    doc: '''Compute the price of tickets at $10 each with
        discount of 15% for more than 5 tickets
        or being a senior'''
    # '''Вычисление стоимости билетов по цене за каждый 10 долл.
        со скидкой 15 % за покупку более 5 билетов
        или представителям старшего поколения'''
```

```
if is-senior == true:  
    count * 10 * 0.85  
else:  
    if count > 5:  
        count * 10 * 0.85  
    else:  
        count * 10  
    end  
end  
where:  
buy-tickets3(0, false) is 0  
buy-tickets3(0, true) is 0  
buy-tickets3(2, false) is 2 * 10  
buy-tickets3(2, true) is 2 * 10 * 0.85  
buy-tickets3(6, false) is 6 * 10 * 0.85  
buy-tickets3(6, true) is 6 * 10 * 0.85  
end
```

Обратите внимание: здесь мы поместили второе выражение `if` внутри ветви `else`. Это допустимый корректный код. (Можно было бы также применить здесь `else if`, но мы отказались от этого варианта, чтобы показать, что вложенные условные выражения также являются корректными.)

---

#### Упражнение 6.4

Покажите шаги, по которым приведенная выше функция должна выполнять вычисления в случае без применения скидки, например `buy-tickets3(2, false)`.

---

#### **Выполните прямо сейчас**

Внимательно посмотрите на текущий исходный код: видите ли вы повторяющееся вычисление, которое можно устраниТЬ при дальнейшем изменении кода?

Элементом хорошего стиля кодирования является обеспечение простого сопровождения программ в будущем. Например, если кинотеатр изменяет свою схему скидок, то в текущей версии кода потребуется изменение коэффициента скидки (0.85) в двух местах. Было бы гораздо лучше записать вычисление с этим коэффициентом только один раз. Это можно сделать, если задать вопрос: какие условия приводят к применению скидки, и записать их как проверочные выражения всего лишь в одном выражении `if`.

#### **Выполните прямо сейчас**

При каких условиях должна применяться скидка?

Здесь мы видим, что скидка применяется, если покупатель принадлежит к старшему поколению или покупает более пяти билетов. Следовательно, можно упростить код, применяя оператор `or`, как показано ниже (примеры те же, потому что они не изменились по сравнению с предыдущими версиями):

```
fun buy-tickets4(count :: Number, is-senior :: Boolean)
    -> Number:
    doc: '''Compute the price of tickets at $10 each with
        discount of 15% for more than 5 tickets
        or being a senior'''
    # '''Вычисление стоимости билетов по цене за каждый 10 долл.
        со скидкой 15 % за покупку более 5 билетов
        или представителям старшего поколения'''
    if (is-senior == true) or (count > 5):
        count * 10 * 0.85
    else:
        count * 10
    end
end
```

Этот код более компактный, и все случаи применения скидки описаны в одном месте. Но остаются еще два небольших изменения, которые необходимо внести, чтобы действительно сделать код абсолютно ясным.

### **Выполните прямо сейчас**

Взгляните на выражение `is-senior == true`. Что будет вычислено, когда значением `is-senior` является `true`? Что будет вычислено, когда значением `is-senior` является `false`?

Следует отметить, что часть `== true` является избыточной. Поскольку переменная `is-senior` сама по себе уже логическая, можно проверять ее значение без использования оператора `==`. Ниже приведен измененный код:

```
fun buy-tickets5(count :: Number, is-senior :: Boolean)
    -> Number:
    doc: '''Compute the price of tickets at $10 each with
        discount of 15% for more than 5 tickets
        or being a senior'''
    # '''Вычисление стоимости билетов по цене за каждый 10 долл.
        со скидкой 15 % за покупку более 5 билетов
        или представителям старшего поколения'''
    if is-senior or (count > 5):
        count * 10 * 0.85
    else:
        count * 10
    end
end
```

Обратите внимание на измененный вопрос в выражении `if`. Общее правило: ваш код никогда не должен содержать `== true`. Вы во всех случаях можете

исключить эту часть и просто использовать выражение, сравниваемое с логическим значением `true`.

### **Выполните прямо сейчас**

Что вы должны написать, чтобы исключить часть `== false`? Например, что можно было бы написать вместо `is-senior == false`?

В завершение отметим, что в программе осталось одно повторяющееся вычисление: начальная стоимость билетов (`count * 10`) – если цена одного билета изменяется, то было бы лучше обновить ее в одном месте. Это можно сделать, если сначала вычислить основную стоимость при покупке билетов, а затем, если потребуется, применить скидку:

```
fun buy-tickets6(count :: Number, is-senior :: Boolean)
    -> Number:
doc: '''Compute the price of tickets at $10 each with
      discount of 15% for more than 5 tickets
      or being a senior'''
# '''Вычисление стоимости билетов по цене за каждый 10 долл.
    со скидкой 15 % за покупку более 5 билетов
    или представителям старшего поколения'''
base = count * 10
if is-senior or (count > 5):
    base * 0.85
else:
    base
end
end
```

## **6.8. Резюме: логические и условные выражения**

После изучения этой главы у нас появилась возможность при вычислениях получать различные результаты в разнообразных ситуациях. Мы задаем вопросы, применяя `if`-выражения, в которых каждый вопрос или проверка использует оператор, результатом которого является логическое (boolean) значение.

- Существуют два логических значения: `true` и `false`.
- Простой тип проверки (результатом которого является логическое значение) сравнивает значения на равенство (`==`) или неравенство (`<>`). Другие операторы, известные вам из курса математики, такие как `<` и `>=`, также дают в результате логические значения.
- Можно создавать более сложные выражения, выдающие логические значения, из небольших простых выражений, используя операторы `and`, `or`, `not`.

- Выражения `if` можно использовать, чтобы задавать вопросы, ответами на которые являются значения `true/false`, прямо в коде вычисления, чтобы получать различные результаты в каждом варианте.
- При необходимости можно вкладывать условные выражения друг в друга.
- Нет никакой необходимости использовать оператор `==` для сравнения значения с `true` или `false`: можно просто записать само значение или выражение (возможно, с оператором `not`, чтобы получить требуемый вариант вычисления).

# Глава 7

---

## Введение в табличные данные

Многие интересные данные в информатике являются табличными (tabular), т. е. по форме похожи на таблицу. Сначала рассмотрим несколько примеров таких данных, потом попытаемся определить, какими общими свойствами они обладают. Ниже приведены конкретные примеры:

- папка входящих писем электронной почты представляет собой список сообщений. Для каждого сообщения сохраняется набор элементов информации: отправитель, строка темы, признак цепочки сообщений, частью которого является данное письмо, тело (содержимое) и многое другое;



Рис. 7.1 ♦ Пример элемента списка сообщений электронной почты

- список воспроизведения музыки. Для каждого произведения аудиоплеер хранит следующую информацию: название, исполнитель, время воспроизведения, жанр и т. д.;

Name	Time	Artist	Album	Genre	Rating	Plays
You Never Can Tell	3:31	Emmylou Harris	Luxury Liner	Country	14	
Imagine	2:54	Chet Atkins & Mar...	The Secret Police...	Rock	12	
The Wheel	4:21	Rosanne Cash	The Wheel	Country	8	

Рис. 7.2 ♦ Список музыкальных произведений

- каталог или папка файловой системы. Для каждого файла система записывает имя, дату изменения, размер и прочую информацию.

Name	Date Modified	Size	Kind
Alloy4.2	Sep 25, 2012, 3:55 PM	4.6 MB	Application
Android File Transfer	Oct 15, 2012, 12:25 PM	6 MB	Application
App Store	Mar 24, 2016, 11:28 AM	2.8 MB	Application
Aquamacs	Nov 7, 2014, 10:36 AM	160 MB	Application
Automator	Mar 24, 2016, 11:28 AM	14.6 MB	Application

Рис. 7.3 ♦ Записи файлов в каталоге файловой системы

**Выполните прямо сейчас**

Вы можете привести еще несколько примеров?

Еще можно добавить:

- ответы на приглашение на вечеринку;
- журнал успеваемости;
- органайзер (календарный план; распорядок дня).

Можно придумать множество примеров из повседневной жизни.

Что объединяет все приведенные выше примеры? Характеристики табличных данных описаны ниже:

- они содержат информацию о нуле или более элементах (т. е. о конкретных людях или каких-либо объектах, обладающих общими свойствами (характеристиками)). Каждый элемент записан в отдельной строке (row). Каждый столбец (column) позволяет отслеживать один из общих атрибутов по строкам. Например, каждое музыкальное произведение, или сообщение электронной почты, или файл – это строка. Каждая из их характеристик – название песни, тема сообщения, имя файла – это столбец;
- каждая строка содержит те же столбцы, что и все другие строки, в том же порядке;
- каждый конкретный столбец имеет один тип, но разные столбцы могут иметь различные типы. Например, для сообщения электронной почты имеется имя отправителя, представленное строкой, заголовок (тема) – тоже строка, дата отправки принадлежит к типу date (дата), признак того, что письмо было прочитано, является логическим (Boolean) значением и т. д.;
- строки могут располагаться в некотором определенном порядке. Например, сообщения электронной почты упорядочены по дате отправки (от самых последних к более ранним).

Несмотря на то что некоторые электронные таблицы могут менять ролями строки и столбцы, мы будем придерживаться описываемой здесь организации, поскольку она соответствует проектному решению программных библиотек для обработки научных данных. Это пример того, что Хэдли Уикхэм (Hadley Alexander Wickham) называет «чистыми данными» (*tidy data* – <https://vita.had.co.nz/papers/tidy-data.pdf>).

**Упражнение 7.1**

Определите характеристики табличных данных в других примерах, приведенных выше, а также в примерах, которые вы сами придумали и описали.

Мы не будем изучать программирование с использованием таблиц и декомпозицию задач, их включающих. Все программы, приведенные ниже в этой главе, используют для обработки таблиц нотацию функции, которая позволяет получить доступ к ним следующим образом:

```
include shared-gdrive(  
  "dcic-2021",  
  "1wyQZj_L0qqV9Ekgr9au6RX2iqt2Ga8Ep")
```

Документация по операциям с таблицами на основе нотации функций доступна на странице, отдельной от основной документации Pyret: <https://www.pyret.org/docs/latest/tables.html>.

Вы также можете найти полную документацию Pyret по операциям с таблицами здесь: <https://www.pyret.org/docs/latest/tables.html>.

## 7.1. Создание табличных данных

Pyret предоставляет многочисленные простые способы табличных данных. Самый простой – определение данных в программе, как показано ниже:

```
table: name, age  
row: "Alicia", 30  
row: "Meihui", 40  
row: "Jamal", 25  
end
```

То есть за `table` следуют имена столбцов в требуемом порядке, а после них – последовательность строк (`row`). Каждая строка обязательно должна содержать столько элементов данных, сколько объявлено столбцов, и в том же порядке.

---

### Упражнение 7.2

Изменяйте различные части приведенного выше примера, например удалите необходимое значение из строки, добавьте лишнее, уберите запятую, добавьте дополнительную запятую, вставьте дополнительную запятую в конце строки – и посмотрите, какие сообщения об ошибках вы получите.

---

Обратите внимание: в таблице порядок столбцов имеет значение – две таблицы, одинаковые во всем, кроме различного порядка столбцов, не считаются идентичными (равными).

```
check:  
table: name, age
```

```

row: "Alicia", 30
row: "Meihui", 40
row: "Jamal", 25
end
is-not
table: age, name
row: 30, "Alicia"
row: 40, "Meihui"
row: 25, "Jamal"
end
end

```

Обратите внимание: в приведенном выше примере используется оператор `is-not`, т. е. тест проходит, значит, эти таблицы не равны.

Здесь объявление `check`: является способом записи предположений `is` о выражениях за пределами контекста функции (и соответствующего ей блока `where`). О `check` мы узнаем больше в разделе 17.1.

Табличные выражения создают значения типа `table` (таблица). Их можно сохранять в переменных точно так же, как числа, строки и изображения:

```

people = table: name, age
row: "Alicia", 30
row: "Meihui", 40
row: "Jamal", 25
end

```

Мы называем эти значения **литеральными таблицами** (*literal tables*), когда создаем их с помощью `table`. Pyret предоставляет и другие способы создания табличных данных. В частности, имеется возможность импортировать табличные данные из электронной таблицы (<https://www.pyret.org/docs/latest/gdrive-sheets.html>), поэтому любой механизм, позволяющий создать такую электронную таблицу, также можно применить. Вы можете:

- создать собственную электронную таблицу;
- создать электронную таблицу вместе с друзьями;
- найти в веб-среде данные, которые можно импортировать в электронную таблицу;
- создать форму опроса Google Form, позволить другим пользователям заполнить ее и получить таблицу по результатам их ответов и т. д.

Дайте волю своему воображению. После того как данные окажутся в Pyret, уже не имеет значения, откуда они получены.

С помощью таблиц мы начинаем исследовать данные, которые содержат другие элементы (меньшего размера) данных. Такие данные мы называем **структурированными** (*structured data*). Структурированные данные позволяют организовать собственные внутренние данные упорядоченным способом (здесь: по строкам и столбцам). Как и в случае с изображениями, когда мы напишем код, отражающий структуру конечного изображения, то увидим, что код, который работает с таблицами, также согласуется со структурой данных.

## 7.2. ИЗВЛЕЧЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СТРОК И ЯЧЕЕК

При работе с таблицей иногда необходимо получить значение конкретной ячейки. Мы будем работать с приведенной ниже таблицей, в которой показано количество единиц транспорта, проезжающих по участку дороги с малярниковым движением за несколько месяцев:

```
shuttle = table: month, riders
  row: "Jan", 1123
  row: "Feb", 1045
  row: "Mar", 1087
  row: "Apr", 999
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Если поместить эту таблицу в панель определений и нажать кнопку **Run**, то что будет находиться в каталоге Pyret после появления промпта в интерактивной панели? Должны ли имена столбцов перечисляться в каталоге?

Напомним, что каталог содержит только те имена, которым присваиваются значения с использованием формы `name =`. В рассматриваемом здесь случае каталог должен содержать имя `shuttle`, которое связано с таблицей (да, целая таблица может находиться в каталоге). Для имен столбцов в каталоге не должны создаваться отдельные записи. Если бы мы попытались поместить имя столбца в каталог, то какое значение следовало бы связать с ним? В каждой строке содержатся разные значения этого столбца. Имена в каталоге связаны только с одним значением.

Рассмотрим подробнее, как извлечь значение из конкретной ячейки (пересечение строки и столбца) в таблице. Более определенно: предположим, что необходимо извлечь число единиц транспорта в марте (1087), чтобы можно было использовать это значение в другом вычислении. Как это сделать?

Pyret (и большинство других языков программирования, предназначенных для анализа данных) позволяет организовывать таблицы как наборы строк с совместно используемыми столбцами. С учетом такой организации мы получаем конкретную ячейку, сначала выделяя интересующую нас строку, затем извлекая содержимое требуемой ячейки.

Pyret нумерует строки таблицы сверху вниз, начиная с 0 (большинство языков программирования используют 0 как самую первую позицию в фрагменте данных по причинам, которые мы объясним позже). Поэтому если требуется найти данные по марта, то необходимо выделить строку 2. Мы пишем:

```
shuttle.row-n(2)
```

Мы используем нотацию с точкой, чтобы добраться до некоторого элемента структурированных данных. В рассматриваемом здесь примере мы

говорим: «углубиться в таблицу `shuttle` и извлечь строку номер 2» (которая в действительности является третьей строкой, поскольку Pyret нумерует позиции, начиная с 0).

Если выполнить приведенное выше выражение после интерактивного промпта, то получим:

"month"	"Mar"	"riders"	1087
---------	-------	----------	------

**Рис. 7.4** ♦ Стока, извлеченная из таблицы

Это новый тип данных, который называется `Row` (строка). Когда Pyret выводит значение типа `Row`, то показывает имена столбцов и соответствующие значения в строке.

Для извлечения значения из конкретного столбца в строке мы записываем строку, за которой следует имя требуемого столбца (в виде строки) в квадратных скобках. Существуют два равнозначных способа получения значения столбца `riders` из строки, соответствующей марта:

```
shuttle.row-n(2)["riders"]
```

```
march-row = shuttle.row-n(2)
march-row["riders"]
```

### **Выполните прямо сейчас**

Какие имена должны быть вписаны в каталог Pyret при использовании каждого из показанных выше способов?

После получения значения ячейки (здесь: `Number`) мы можем использовать его в любом другом вычислении, например:

```
shuttle.row-n(2)["riders"] >= 1000
```

(здесь проверяется, зафиксировано ли в марте не менее 1000 проезжающих единиц транспорта).

### **Выполните прямо сейчас**

Что, по вашему мнению, должно произойти, если вы забудете о кавычках и введете следующее выражение:

```
shuttle.row-n(2)[riders]
```

Что должен сделать Pyret и почему?

## 7.3. ФУНКЦИИ ДЛЯ РАБОТЫ СО СТРОКАМИ

Теперь появилась возможность выделять строки из таблиц, и мы можем писать функции, которые отвечают на вопросы об отдельных строках. Мы только что видели пример выполнения вычисления с данными строки, когда проверяли, записано ли в строке для марта не менее 1000 единиц транспорта. А если потребуется выполнить такое же сравнение для произвольной строки этой таблицы? Напишем функцию и назовем ее `cleared-1K`.

Начнем с заголовка функции и нескольких примеров:

```
fun cleared-1K(r :: Row) -> Boolean:
    doc: "determine whether given row has at least 1000 riders"
    # "Определить, содержится ли в данной строке не менее 1000 единиц транспорта"
    ...
where:
    cleared-1K(shuttle.row-n(2)) is true
    cleared-1K(shuttle.row-n(3)) is false
end
```

Здесь показано, как выглядят примеры для функций, работающих со строками (тип `Row`), и как мы используем `Row` в качестве типа входных данных.

Для заполнения тела функции мы извлекаем содержимое ячейки "`riders`" и сравниваем его с числом 1000:

```
fun cleared-1K(r :: Row) -> Boolean:
    doc: "determine whether given row has at least 1000 riders"
    # "Определить, содержится ли в данной строке не менее 1000 единиц транспорта"
    r["riders"] >= 1000
where:
    cleared-1K(shuttle.row-n(2)) is true
    cleared-1K(shuttle.row-n(3)) is false
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Рассматривая приведенные выше примеры, видим, что оба совместно используют фрагмент `shuttle.row-n`. Не лучше ли вместо этого написать функцию `cleared-1K` так, чтобы она принимала только позицию строки как входные данные, как показано ниже:

```
fun cleared-1K(row-pos :: Number) -> Boolean:
    ...
where:
    cleared-1K(2) is true
    cleared-1K(3) is false
end
```

Какие преимущества и ограничения существуют при решении этой задачи?

В общем случае версия, принимающая входные данные типа `Row`, более универсальная, потому что может работать со строкой из любой таблицы, которая содержит столбец с именем "`riders`". Мы могли бы взять любую другую таблицу с большим числом информационных столбцов или другие таблицы

данных за различные годы. Если изменить функцию `cleared-1K` так, чтобы она принимала только позицию (номер) строки как входные данные, то придется постоянно исправлять имя таблицы, с которой нужно работать. Напротив, первоначальная версия оставляет имя конкретной таблицы (`shuttle`) за пределами функции, и это обеспечивает ее универсальность.

---

### Упражнение 7.3

Напишите функцию `is-winter`, принимающую строку `Row` со столбцом `"month"` как входные данные и возвращающую логическое значение (Boolean), сообщающее, соответствует ли месяц в этой строке одному из значений `"Jan"`, `"Feb"` или `"Mar"`.

---



---

### Упражнение 7.4

Напишите функцию `low-winter`, принимающую строку `Row` с двумя столбцами `"month"` и `"riders"` и возвращающую логическое значение (Boolean), сообщающее, содержит ли эта строка зимний месяц с количеством единиц транспорта менее 1050.

---



---

### Упражнение 7.5

Поэкспериментируйте с каталогом программы. Воспользуйтесь функцией, принимающей строку `Row`, и одним из примеров из ее раздела `where` и покажите, как изменяется каталог программы при выполнении этого примера.

---

## 7.4. ОБРАБОТКА СТРОК ТАБЛИЦЫ

К настоящему моменту мы рассмотрели методику извлечения отдельных строк по их позиции в таблице и вычисления с ними. Извлечение строк по позиции не всегда удобно: при вполне вероятном наличии сотен или даже тысяч строк, возможно, нам будет неизвестно, в каком месте таблицы находятся нужные данные. Вместо этого потребуется написать небольшую программу, которая определяет строки, соответствующие заданному конкретному условию.

Везде ниже в этом разделе предполагается, что вы уже загрузили нотацию функций для работы с таблицами с помощью приведенной ниже строки, размещенной в вашем файле `Pyret`:

```
include shared-gdrive(
  "dcic-2021",
  "1wyQZj_L0qqV9Ekgr9au6RX2iqt2Ga8Ep")
```

Руководство предлагает три различные формы записи (нотации) для обработки таблиц: первая использует функции, вторая – методы, третья – нотацию, похожую на SQL. В этой главе используется нотация на основе функций. Нотации в стиле SQL и на основе методов описаны в официальной документации Руководства. Для использования нотации, основанной на функциях, вам потребуется включение файла, определенного в основной описательной части.

## 7.4.1. Поиск строк

Предположим, что необходимо написать программу для поиска строки, содержащей менее 1000 единиц транспорта, в таблице `shuttle`. Сможем ли мы попытаться написать такую программу, располагая изученным до сих пор материалом? Попробуем представить ее с использованием условных выражений, как показано ниже:

```
if shuttle.row-n(0)["riders"] < 1000:  
    shuttle.row-n(0)  
else if shuttle.row-n(1)["riders"] < 1000:  
    shuttle.row-n(1)  
else if shuttle.row-n(2)["riders"] < 1000:  
    shuttle.row-n(2)  
else if shuttle.row-n(3)["riders"] < 1000:  
    shuttle.row-n(3)  
else: ... # Здесь не ясно, что нужно сделать.  
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Какие преимущества и ограничения вы видите в этом методе решения?

Существует несколько причин, по которым мы, вероятнее всего, откажемся от этого решения. Во-первых, если в таблице несколько тысяч строк, то объем ручного ввода становится ужасающе огромным. Во-вторых, здесь сплошные повторения (различаются только позиции строки). В-третьих, не ясно, что делать, если вообще не найдено строк, соответствующих условию. Кроме того, что произойдет, если найдено несколько строк, соответствующих условию? В некоторых случаях, возможно, требуется возможность определения всех строк, соответствующих условию, и использование их в последующих вычислениях (например, для определения месяцев, в которых больше дней с небольшим количеством проезжающих транспортных средств, по сравнению с другими).

Но это условное выражение тем не менее представляет собой основную сущность того, что мы должны сделать: поочередно пройти по всем строкам таблицы, определяя те, которые соответствуют некоторому условию. Мы просто не хотим выполнять проверку каждой строки вручную. К счастью, Rpyret знает, как это сделать. Rpyret известна каждая строка в любой конкретной таблице. Rpyret может поочередно извлекать эти строки по одной и проверять заданное условие для каждой текущей извлеченной строки.

Мы должны просто сообщить Rpyret, какое условие необходимо использовать.

Как и ранее, можно выразить требуемое условие в виде функции, принимающей строку типа `Row` и возвращающей значение типа `Boolean` (типа `Boolean`, потому что это условие использовалось как часть вопроса в выражении `if` в предварительном варианте кода). В рассматриваемом здесь случае необходима следующая функция:

```
fun below-1K(r :: Row) -> Boolean:
    doc: "determine whether row has fewer than 1000 riders"
        # "Определить, содержит ли строка менее 1000 единиц транспорта"
    r["riders"] < 1000
where:
    below-1K(shuttle.row-n(2)) is false
    below-1K(shuttle.row-n(3)) is true
end
```

Теперь нужно просто сообщить Pyret об использовании этого условия при поиске по строкам таблицы. Это делается при помощи функции `filter-with`, принимающей два элемента входных данных: имя обрабатываемой таблицы и условие, проверяемое для каждой ее строки:

```
filter-with(shuttle, below-1K)
```

Внутри функция `filter-with` работает приблизительно так же, как инструкция `if`, которую мы написали в начале раздела: поочередно берет строки по одной и вызывает для нее заданную функцию проверки условия. Но что эта функция делает с полученными результатами?

Если выполнить приведенное выше выражение, то вы увидите, что `filter-with` выводит таблицу, содержащую строку (или несколько строк), соответствующую условию, но не саму строку отдельно. Такое поведение более удобно, если условию соответствует несколько строк. Например, попробуйте выполнить:

```
filter-with(shuttle, is-winter)
```

(с использованием функции `is-winter` из примера, приведенного ранее в этой главе). Теперь мы получим таблицу с двумя строками, соответствующими зимним месяцам. Если необходимо присвоить этой таблице имя для использования в последующих вычислениях, то можно сделать это, применив обычную нотацию именования значений:

```
winter = filter-with(shuttle, is-winter)
```

## 7.4.2. Упорядочение строк

Зададим новый вопрос: какие зимние месяцы содержат наименьшее количество единиц транспорта? Этот вопрос требует определения конкретной строки, а именно строки зимнего месяца с минимальным значением в столбце `"riders"`.

### Выполните прямо сейчас

Можно ли сделать это с помощью функции `filter-with`? Объясните почему – при любом варианте ответа.

Снова вернемся к выражению `if`, которое стало причиной обращения к функции `filter-with`: каждая строка обрабатывается независимо от других.

Но в нашем текущем вопросе требуется сравнение строк. Это другая операция, поэтому нам нужно нечто большее, чем `filter-with`.

Инструментальные средства анализа данных (в языках программирования или в электронных таблицах) предоставляют пользователям способы сортировки (`sort`) строк таблицы по значениям в одном отдельном столбце. Это должно помочь нам справиться с текущей задачей: можно было бы отсортировать строки зимних месяцев от наименьшего к наибольшему значению в столбце "`riders`", затем извлечь значение этого столбца из первой строки. Сначала отсортируем строки:

```
order-by(winter, "riders", true)
```

Функция `order-by` принимает три элемента входных данных: таблицу для сортировки (`winter`), столбец, по которому выполняется сортировка ("`riders`"), и логическое (Boolean) значение, определяющее, требуется ли сортировка в возрастающем порядке. (Если бы третьим аргументом было значение `false`, то строки были бы отсортированы в убывающем порядке значений заданного столбца.)

В этой отсортированной таблице строка с наименьшим числом единиц транспорта находится в первой позиции. Исходный вопрос предлагал найти месяц с минимальным количеством единиц транспорта. Мы только что сделали это.

month	riders
"Feb"	1045
"Jan"	1123

Рис. 7.5 ♦ Таблица `winter` после сортировки

### Выполните прямо сейчас

Напишите код для извлечения названия зимнего месяца с наименьшим количеством единиц транспорта.

Существует два способа записи этого вычисления:

```
order-by(winter, "riders", true).row-n(0)["month"]

sorted = order-by(winter, "riders", true)
least-row = sorted.row-n(0)
least-row["month"]
```

### Выполните прямо сейчас

Какой из показанных выше способов вы предпочитаете? Почему?

### Выполните прямо сейчас

Как каждая из приведенных выше программ воздействует на внутренний каталог программы?

Обратите внимание: в этой задаче предлагалось объединить несколько действий со строками, которые мы уже видели ранее: мы определяем нужные строки в таблице (`filter-with`), упорядочиваем (сортируем) выбранные строки (`order-by`), извлекаем конкретную строку (`row-n`), затем извлекаем из нее ячейку (с помощью квадратных скобок и имени столбца). Это обычная методика, по которой мы будем работать с таблицами, объединяя несколько операций для вычисления результата (это во многом похоже на программы, с помощью которых мы работали с изображениями).

## 7.4.3. Добавление новых столбцов

Иногда необходимо создать новый столбец, значение в котором основано на содержимом существующих столбцов. Например, таблица может отображать записи о сотрудниках и содержать столбцы с именами `hourly-wage` и `hours-worked`, представляющие соответствующие числовые данные. Теперь мы должны добавить в эту таблицу новый столбец для отображения общей суммы выплаты каждому сотруднику. Предположим, что начинаем мы со следующей таблицы:

```
employees =
  table: name, hourly-wage, hours-worked
  row: "Harley", 15, 40
  row: "Obi", 20, 45
  row: "Anjali", 18, 39
  row: "Miyako", 18, 40
end
```

Необходимо, чтобы в итоге таблица выглядела следующим образом:

```
employees =
  table: name, hourly-wage, hours-worked, total-wage
  row: "Harley", 15, 40, 15 * 40
  row: "Obi", 20, 45, 20 * 45
  row: "Anjali", 18, 39, 18 * 39
  row: "Miyako", 18, 40, 18 * 40
end
```

(с выражениями в столбце `total-wage`, вычисленными до соответствующих конечных числовых значений: здесь мы использовали выражения, чтобы показать, что именно мы пытаемся сделать).

Ранее, когда необходимо было выполнить однотипное вычисление несколько раз, мы создавали для этого вспомогательную функцию.

### Выполните прямо сейчас

Предложите вспомогательную функцию для вычисления общих сумм оплаты при известной почасовой оплате и количестве отработанных часов.

Вероятно, ваше предложение будет похоже на приведенную ниже функцию:

```
fun compute-wages(wage :: Number, hours :: Number) -> Number:  
    wage * hours  
end
```

которую можно использовать следующим образом:

```
employees =  
table: name, hourly-wage, hours-worked, total-wage  
row: "Harley", 15, 40, compute-wages(15, 40)  
row: "Obi", 20, 45, compute-wages(20, 45)  
row: "Anjali", 18, 39, compute-wages(18, 39)  
row: "Miyako", 18, 40, compute-wages(18, 40)  
end
```

Это правильный подход, но в действительности мы можем сделать так, чтобы эта функция выполняла за нас еще немного работы. Значения `wage` и `hours` находятся в ячейках той же строки. И при возможности передать вместо имен ячеек текущую строку мы могли бы написать:

```
fun compute-wages(r :: Row) -> Number:  
    r["hourly-wage"] * r["hours-worked"]  
end  
  
employees =  
table: name, hourly-wage, hours-worked, total-wage  
row: "Harley", 15, 40, compute-wages(<row0>)  
row: "Obi", 20, 45, compute-wages(<row1>)  
row: "Anjali", 18, 39, compute-wages(<row2>)  
row: "Miyako", 18, 40, compute-wages(<row3>)  
end
```

Но сейчас мы пишем вызовы `compute-wages` снова и снова. Добавление вычисляемых столбцов является достаточно часто выполняемой операцией, для которой Pyret предоставляет табличную функцию `build-column`. Мы воспользуемся этой операцией, передавая в нее как элемент входных данных функцию, заполняющую значения в новом столбце:

```
fun compute-wages(r :: Row) -> Number:  
    doc: "compute total wages based on wage and hours worked"  
        # "Вычисление итоговых выплат на основе часовой ставки и отработанных часов"  
    r["hourly-wage"] * r["hours-worked"]  
end  
  
build-column(employees, "total-wage", compute-wages)
```

Этот код создает новый столбец `total-wage`, значение которого в каждой строке является произведением двух именованных столбцов в той же строке. Pyret размещает новый столбец около правой границы таблицы.

## 7.4.4. Вычисление новых значений столбца

Иногда необходимо просто вычислить новые значения для существующего столбца, а не создавать абсолютно новый столбец. Повышение зарплаты сотрудникам – один из таких примеров. Предположим, что требуется предоставить надбавку в 10 % всем сотрудникам, почасовая ставка которых меньше 20. Можно было бы написать:

```
fun new-rate(rate :: Number) -> Number:
    doc: "Raise rates under 20 by 10%"
        # "Повышение почасовых ставок, не превышающих 20, на 10%"
    if rate < 20:
        rate * 1.1
    else:
        rate
    end
where:
new-rate(20) is 20
new-rate(10) is 11
new-rate(0) is 0
end

fun give-raises(t :: Table) -> Table:
    doc: "Give a 10 % raise to anyone making under 20"
        # "Повышение на 10 % по каждой почасовой ставке менее 20"
    transform-column(t, "hourly-wage", new-rate)
end
```

Здесь функция `transform-column` принимает таблицу, имя существующего в ней столбца и функцию, обновляющую значение этого столбца. Обновляющая функция принимает текущее значение в столбце как входные данные и вычисляет новое значение для него как выводимый результат.

### **Выполните прямо сейчас**

Выполните функцию `give-raises` для таблицы `employees`. Какое значение оплаты будет показано для "Miyako" в таблице `employees` после завершения выполнения `give-raises`? Почему?

Как и все другие табличные (`Table`) операции Pyret, `transform-column` создает новую таблицу, оставляя неизменной исходную. Изменение исходной таблицы могло бы привести к возникновению проблем – что, если вы сделали ошибку? Как восстановить исходную таблицу в этом случае? В общем случае создание новых таблиц с любыми изменениями, затем присваивание нового имени обновленной таблице, после того как вы получили именно то, что требовалось, – это способ работы с наборами данных, при котором вероятность возникновения ошибок сведена к минимуму.

## 7.5. ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ТАБЛИЦ

Как написать примеры для функций, которые создают таблицы? Теоретический ответ на этот вопрос прост: «Убедитесь в том, что на выходе получили именно ту таблицу, которую ожидали». С технической точки зрения написание примеров для табличных функций выглядит более затруднительным, потому что запись ожидаемых итоговых таблиц требует большего объема ручной работы, чем простая запись вывода функции, выводящей числа или строки. Что можно сделать, чтобы справиться с этой сложностью?

### **Выполните прямо сейчас**

Как можно было бы записать блок `where` для функции `give-raises?`

Ниже описано несколько практических методик для записи примеров:

- упрощение входной таблицы. Вместо обработки большой таблицы со всеми имеющимися в ней столбцами создайте маленькую таблицу только с теми действительно изменяющимися столбцами, которые использует функция. Для рассматриваемого здесь примера можно записать:

```
wages-test =
  table: hourly-wage
    row: 15
    row: 20
    row: 18
    row: 18
  end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Подойдет ли здесь любая таблица со столбцом чисел? Или есть какие-то ограничения на строки или столбцы таблицы?

Единственным ограничением является то, что ваша входная таблица обязательно должна содержать имена столбцов, используемых в функции;

- помните, что можно записать вычисления в виде кода для создания таблиц. Это избавляет вас от выполнения вычислений вручную:

```
where:
  give-raises(wages-test) is
    table: hourly-wage
      row: 15 * 1.1
      row: 20
      row: 18 * 1.1
      row: 18 * 1.1
    end
```

Этот пример показывает, что можно записать итоговую таблицу прямо в блоке `where`: – для таблицы вне функции имя не требуется;

- создание новой таблицы с помощью переноса строк из существующей. Если бы вы писали примеры для функции, которая выполняет фильтрацию (отбор) строк таблицы, то полезно было бы знать, как создать новую таблицу, используя строки существующей. Например, если бы мы писали функцию поиска всех строк, в которых указано, что сотрудники отработали ровно 40 часов, то потребовалось бы убедиться в том, что итоговая таблица содержит первую и четвертую строки таблицы `employees`. Чтобы не писать новое выражение `table` для создания такой таблицы, можно было бы записать следующий код:

```
emps-at-40 =  
    add-row(  
        add-row(employees.empty(),  
                employees.row-n(0)),  
        employees.row-n(3))
```

Здесь `employees.empty()` создает новую пустую таблицу с теми же заголовками столбцов, что и в `employees`. Ранее мы уже видели, как `row-n` извлекает строку из таблицы. Функция `add-row` помещает заданную строку в конец этой новой таблицы.

Еще один совет, о котором следует помнить всегда: если единственное, что делает ваша функция, – вызов встроенной функции, такой как `transform-column`, то, как правило, достаточно записать примеры для функции, выполняющей вычисления значений нового столбца. Только если в вашем коде объединено несколько табличных операций или выполняется более сложная обработка, чем единственный вызов встроенной табличной операции, тогда действительно необходимо представить собственные примеры для того, кто будет читать этот код.

# Глава 8

---

## Обработка таблиц

При анализе данных часто приходится работать с большими наборами данных, некоторые из которых были собраны кем-то другим. Наборы данных не всегда приходят в форме, с которой можно работать. Могут потребоваться «сырые» (необработанные) данные, отделенные или уплотненные для начальной (черновой) детализации. Некоторые данные могут быть пропущены или введены некорректно. Кроме того, мы должны планировать долговременное сопровождение наборов данных или аналитических программ. Наконец, обычно требуется применение методов визуализации для передачи данных кому-либо или для выявления проблем в имеющемся наборе данных.

В качестве конкретного примера предположим, что мы выполняем анализ данных и поддержку для некоторой компании, занимающейся распространением билетов на различные мероприятия. Люди приобретают билеты, заполняя определенную форму в режиме онлайн. Программное обеспечение этой формы создает электронную таблицу со всеми введенными данными, с которыми мы должны работать. На рис. 8.1 показан снимок экрана с примером такой электронной таблицы (<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1DKngiBfI2cGTVEazFEyXf7H4mhl8IU5yv2TfZWv6Rc8/edit#gid=1693057262>).

	A	B	C	D	E
1	Name	Email	Num Tickets	Discount Code	Delivery
2	Josie Zhao	jo@mail.com	2	BIRTHDAY	email
3	Sam Ochibe	s@sweb.com	1		pickup
4	Bart Simple	bart@simpson.org	5	STUDENT	yes
5	Ernie O'Malley	ernie.mail.com	0	none	email
6	Alvina Velasquez	alvie@schooledu	3	student	email
7	Zander	zandaman	10		email
8	Shweta Chowpatti	snc@this.org	three		pickup

Рис. 8.1 ♦ Фрагмент электронной таблицы с данными для обработки

### Выполните прямо сейчас

Внимательно посмотрите на таблицу на рис. 8.1. Вы обратили внимание на те детали, которые могут повлиять на использование этих данных для анализа? Или на операции управления событием (мероприятием)?

Некоторые проблемы обнаруживаются сразу: слово `three` в столбце "Num Tickets", различия в регистре букв в столбце "Discount Code", а также использование и слова "none", и пустых ячеек одновременно в том же столбце "Discount Code" (возможно, вы заметили и другие проблемы). Прежде чем начать какой-либо анализ этого набора данных, необходимо очистить его, чтобы анализ получился надежным и не вызывающим сомнений. Кроме того, иногда исходный набор данных чист, но требует корректировки или подготовки, чтобы полностью соответствовать вопросам, которые мы собираемся задать. В этой главе рассматриваются оба этапа, а также методики программирования, которые помогут их выполнить.

## 8.1. ОЧИСТКА ТАБЛИЦ ДАННЫХ

### 8.1.1. Загрузка таблиц данных

Первый этап работы с внешним источником данных – загрузка набора данных в вашу среду программирования и анализа. В Pyret это делается с помощью команды `load-table`, позволяющей загружать таблицы из Google Sheets.

```
include gdrive-sheets

ssid = "1DKngiBfI2cGTVeazFEyXf7H4mhl8IU5yv2TfZWv6Rc8"
event-data =
  load-table: name, email, tickcount, discount, delivery
  source: load-spreadsheet(ssid).sheet-by-name("Orig Data", true)
end
```

Если необходимо загрузить файл в формате csv (comma-separated values – данные, разделенные запятыми), то сначала импортируйте его в электронную таблицу Google Sheet, затем из Google Sheet загрузите данные в Pyret.

В этом примере:

- `ssid` – идентификатор таблицы Google Sheet, которую необходимо загрузить (здесь идентификатор – это длинная последовательность букв и цифр в URL Google Sheet);
- `load-table` – команда создания таблицы Pyret через операцию загрузки. Последовательность имен после команды используется для заголовков столбцов в версии Pyret этой таблицы. Не требуется совпадение с именами, использованными в версии Google Sheet;
- `source` – сообщает Pyret, какая таблица загружается. Операция `load-spreadsheet` принимает идентификатор Google Sheet (здесь `ssid`), а также имя отдельного листа электронной таблицы (или вкладки – `tab`) в том виде, как оно записано в Google Sheet (здесь "Orig Data"). Заключительное логическое значение определяет, существует ли строка заголовка в этой таблице (здесь `true` означает, что строка заголовка существует).

При попытке выполнения этого кода Pyret сообщает о слове `three` в столбце Num Tickets (Количество билетов): он ожидал число, а обнаружил строку.

Rurret предполагает, что все столбцы должны содержать значения одного типа. При загрузке таблицы из файла основанием, на котором Rurret определяет тип каждого столбца, является соответствующее значение в первой строке таблицы.

Это пример ошибки в данных, которую мы должны исправить в исходном файле, прежде чем использовать программы в среде Rurret. В источнике данных Google Sheet для этой главы существует отдельный лист/вкладка с именем "Data", в котором слово `three` заменено на числовое значение. Если использовать "Data" вместо "Original Data" в приведенной выше команде `load-spreadsheet`, то таблица нормально загружается в Rurret.

### Упражнение 8.1

Почему предоставляется возможность создания отдельного листа таблицы с исправленными данными, вместо того чтобы просто исправить исходный лист?

Не все языки будут отказывать в выполнении программ при загрузке. Языки воплощают различные теоретические концепции того, что программисты должны от них ожидать. Некоторые языки будут пытаться заставить работать то, что предоставил программист, тогда как другие будут требовать, чтобы программист устранил проблемы заранее. Rurret в большей степени склонен к последней теоретической концепции, но в некоторых местах ослабляет ее (например, необязательное соответствие типов).

## 8.1.2. Обработка отсутствующих элементов

При создании таблиц вручную в Rurret мы обязаны предоставить значение для каждой ячейки – нет способа «пропустить» какую-либо ячейку. При создании таблиц в программе, работающей с электронными таблицами (такой как Excel, Google Sheets и т. п.), можно оставлять ячейки абсолютно пустыми. Что происходит, когда в Rurret загружается таблица с пустыми ячейками?

```
event-data =
  load-table: name, email, tickcount, discount, delivery
  source: load-spreadsheet(ssid).sheet-by-name("Data", true)
end
```

Исходный файл данных содержит пустые ячейки в столбце `discount`. Если загрузить эту таблицу и посмотреть, как Rurret ее считывает, то мы обнаружим в этом столбце нечто новое (см. рис. 8.2).

Обратите внимание: ячейки, в которых были записаны коды скидок, теперь содержат записи странного вида, например `some("student")`, а в ячейках, которые были пустыми, находится слово `none`, но это не строка. Что происходит?

Rurret поддерживает особый тип данных под названием `option` (вариант; один из возможных вариантов). По названию можно предположить, что тип `option` предназначен для данных, которые могут присутствовать или отсутствовать. Значение `none` равнозначно фразе «данные отсутствуют». Если элемент данных присутствует, то он записывается в так называемой обертке `some`.

name	email	tickcount	discount	delivery
"Josie Zhao"	"jo@mail.com"	2	some("BIRTHDAY")	"email"
"Sam Ochibe"	"s@sweb.com"	1	none	"pickup"
"Bart Simple"	"bart@simpson.org"	5	some("STUDENT")	"yes"
"Ernie O'Malley"	"ernie.mail.com"	0	some("none")	"email"
"Alvina Velasquez"	"alvie@schooledu"	3	some("student")	"email"
"Zander"	"zandaman"	10	none	"email"
"Shweta Chowpatti"	"snc@this.org"	3	some(" ")	"pickup"

Рис. 8.2 ♦ Таблица с пустыми ячейками после считывания в Pyret

### Выполните прямо сейчас

Посмотрите на значение столбца `discount` в строке "Ernie O'Malley": здесь записано `some("none")`. Что это означает? В чем отличие от значения `none` (которое записано в строке "Sam Ochibe")?

В Pyret правильный способ решить проблему отсутствующих значений – указать, как необходимо их обработать для каждого столбца, чтобы данные после считывания были такими, как ожидалось. Мы делаем это с помощью дополнительной функциональной возможности команды `load-table`, называемой `sanitizer` (санитайзер). Ниже показано, как изменяется код:

```
include data-source # С использованием санитайзеров.
event-data =
  load-table: name, email, tickcount, discount, delivery
    source: load-spreadsheet(ssid).sheet-by-name("Data", true)
    sanitize name using string-sanitizer
    sanitize email using string-sanitizer
    sanitize tickcount using num-sanitizer
    sanitize discount using string-sanitizer
    sanitize delivery using string-sanitizer
end
```

Каждая строка `sanitize` сообщает Pyret, что делать в случае отсутствия данных в соответствующем столбце. Элемент `string-sanitizer` информирует о загрузке отсутствующих данных как пустой строки (""). Элемент `num-sanitizer` предписывает загружать отсутствующие данные как ноль (0). Санитайзеры также выполняют простые преобразования данных. Если `string-sanitizer`

применяется к столбцу с числом (например, 3), то санитайзер должен преобразовать это число в строку (в данном случае "3"). При использовании санитайзеров таблица event-data выглядит, как показано на рис. 8.3.

<code>name</code>	<code>email</code>	<code>tickcount</code>	<code>discount</code>	<code>delivery</code>
"Josie Zhao"	"jo@mail.com"	2	"BIRTHDAY"	"email"
"Sam Ochibe"	"s@sw.com"	1	" "	"pickup"
"Bart Simple"	"bart@simpson.org"	5	"STUDENT"	"yes"
"Ernie O'Malley"	"ernie.mail.com"	0	"none"	"email"
"Alvina Velasquez"	"alvie@schooledu"	3	"student"	"email"
"Zander"	"zandaman"	10	" "	"email"
"Shweta Chowpatti"	"snc@this.org"	3	" "	"pickup"

Рис. 8.3 ❖ Таблица event-data после применения санитайзеров

Но постойте, разве явное указание типов в столбцах (например, `discount` :: `String`) в команде `load-table` не устранит эту проблему? Нет, потому что указания типа недостаточно для того, чтобы знать, какое значение должно быть записано по умолчанию. В некоторых случаях, возможно, потребуется значение по умолчанию, отличающееся от пустой строки или 0. Санитайзеры позволяют вам реально регулировать ситуацию по своему усмотрению (санитайзер – это обычная функция Pyret; подробности о входных данных санитайзера см. в документации).

Практическое правило: при загрузке таблицы используйте санитайзер для защиты от ошибок, возникающих в тех случаях, когда в некоторых ячейках исходной таблицы отсутствуют данные.

### 8.1.3. Нормализация данных

А теперь рассмотрим подробнее столбец "Discount Code". Наша цель – как можно точнее ответить на вопрос: «Сколько заказов было размещено с каждым кодом скидки?» Желательно получить ответ в виде итоговой таблицы, в которой один столбец содержит коды скидок, а другой – количество строк, в которых использовался каждый конкретный код.

#### Выполните прямо сейчас

Сначала примеры. Какую таблицу мы хотим получить по результатам этого вычисления по фрагменту ранее предоставленной вам таблицы?

Вы не сможете ответить на этот вопрос без принятия определенного решения о том, как стандартизировать имена (коды скидок) и как обрабатывать отсутствующие значения. Термин «нормализация» (normalization) означает обеспечение уверенности в том, что некоторый набор данных (например, столбец) использует единую структуру и форматирование. Наш способ решения будет ориентирован на получение таблицы, показанной на рис. 8.4, но вы могли бы выбрать другие варианты, отличающиеся от предложенного здесь.

discount-code	num-orders
"BIRTHDAY"	1
"STUDENT"	2
"none"	4

**Рис. 8.4** ♦ Таблица с итогами подсчета частоты использования кодов скидок

Как получить такую таблицу? Как определить данные, в которых мы не уверены?

Начинайте с изучения документации по работе с таблицами для любых библиотечных функций, которые, возможно, помогут решить поставленную задачу. В случае использования Pyret находим:

```
# count(tab :: Table, colname :: String) -> Table
# Produces a table that summarizes how many rows have
# each value in the named column.
#
# Создает таблицу, в которой объединены суммарные значения количества строк,
# содержащих каждое значение в заданном по имени столбце.
```

Функция выглядит полезной в том случае, если в каждой ячейке столбца "Discount code" имеется значение, и все эти значения – именно те, что необходимы нам в итоговой таблице. Что нужно сделать для выполнения перечисленных условий?

- Поместить значение `none` в каждую ячейку, в которой в текущий момент нет значения.
- Преобразовать все коды, не являющиеся `none`, в верхний регистр.

К счастью, эти задачи выполняются с помощью функций, о практическом применении которых мы уже знаем: первая представляет собой пример преобразования столбца, для второй привлекаются функции преобразования строк в верхний регистр из библиотеки `String`.

Все это можно объединить в функции, которая принимает и возвращает строку:

```
fun cell-to-discount-code(str :: String) -> String:
  doc: '''uppercase all strings other than none,
```

```

convert blank cells to contain none"""
# '''Перевод в верхний регистр всех строк, кроме none,
 преобразование пустых ячеек в содержащие none.'''
if (str == "") or (str == "none"):
    "none"
else:
    string-to-upper(str)
end
where:
cell-to-discount-code("") is "none"
cell-to-discount-code("none") is "none"
cell-to-discount-code("birthday") is "BIRTHDAY"
cell-to-discount-code("Birthday") is "BIRTHDAY"
end

```

***Выполните прямо сейчас***

Оцените примеры, включенные в функцию `cell-to-discount-code`. Это правильный набор примеров или какие-то важные варианты отсутствуют?

Предложенные здесь примеры рассматривают различные варианты перевода в верхний регистр для кода "birthday", но не для "none". Если вы не вполне уверены в том, что в процессе сбора данных отсутствует возможность появления версий "none" в разных регистрах, то рекомендуется включить следующий пример:

```
cell-to-discount-code("NoNe") is "none"
```

Вот незадача! Если включить этот пример в блок `where` и выполнить код, то Pyret сообщает о том, что именно этот пример некорректен.

***Выполните прямо сейчас***

Почему вариант "NoNe" оказался некорректным?

Поскольку мы проверяем соответствие строке "none" в выражении `if`, необходимо нормализовать ввод для соответствия ожидаемому значению. Ниже приведен измененный код, в котором все примеры проходят проверку.

```

fun cell-to-discount-code(str :: String) -> String:
doc: '''uppercase all strings other than none,
 convert blank cells to contain none'''
# '''Перевод в верхний регистр всех строк, кроме none,
 преобразование пустых ячеек в содержащие none.'''
if (str == "") or (string-to-lower(str) == "none"):
    "none"
else:
    string-to-upper(str)
end
where:

```

```

cell-to-discount-code("") is "none"
cell-to-discount-code("none") is "none"
cell-to-discount-code("NoNe") is "none"
cell-to-discount-code("birthday") is "BIRTHDAY"
cell-to-discount-code("Birthday") is "BIRTHDAY"
end

```

Использование этой функции в команде `transform-column` позволяет получить таблицу со стандартизованным форматированием для кодов скидок (напомним, что необходимо работать с функциями-операторами для таблиц (<https://hackmd.io/@cs111/table>), чтобы решить задачу полностью):

```

include shared-gdrive(
  "dcic-2021",
  "1wyQZj_L0qqV9Ekgr9au6RX2iqt2Ga8Ep")

discount-fixed =
  transform-column(event-data, "discount", cell-to-discount-code)

```

## Упражнение 8.2

Попробуйте выполнить самостоятельно: нормализовать столбец "delivery" так, чтобы все значения "yes" были преобразованы в "email".

После того как мы очистили коды скидок, можно вернуться к использованию функции `count` для создания итоговой таблицы:

```
count(discount-fixed, "discount")
```

При выполнении создается таблица, показанная на рис. 8.5.

value	count
" "	1
"STUDENT"	2
"none"	3
"BIRTHDAY"	1

**Рис. 8.5** ♦ Таблица подсчета строк с различными кодами скидок

### Выполните прямо сейчас

Что случилось с первой строкой с кодом скидки " "? Откуда это взялось?

Возможно, вы не замечали этого раньше (или не заметили бы в более крупной таблице), но должна была существовать ячейка исходных данных со строкой пробелов, а не отсутствующим содержимым. Как применить нормализацию, чтобы избежать подобных случаев?

## 8.1.4. Нормализация, систематическое применение

Как было показано в предыдущем примере, необходим способ, позволяющий предварительно продумать систематическое применение нормализации. Наше первоначальное обсуждение записи примеров дает представление о том, как это сделать. Одно из правил говорит, что нужно подумать о домене входных данных и способах их изменения. Если мы применим это правило в контексте загружаемых наборов данных, то должны подумать о том, как были собраны исходные данные.

### ***Выполните прямо сейчас***

На основе своих знаний о веб-сайтах сделайте предположение о том, откуда могло бы появиться содержимое кодов событий. Как эти коды могли быть введены? Что они говорят вам о различных вероятных ошибках в данных?

В рассматриваемом здесь случае для данных, взятых из веб-форм (как мы выяснили в начале), вероятно, ввод был организован одним из двух способов:

- выбор из спускающегося меню;
- в панели ввода текста.

Спускающееся меню автоматически нормализует данные, поэтому не подходит в качестве вероятного источника (именно поэтому вы должны использовать в формах спускающиеся меню, если необходимо, чтобы пользователи выбирали один из фиксированного набора вариантов). Поэтому предположим, что данные поступали из панели ввода текста.

Панель ввода текста означает, что в данных может появиться любая типичная ошибка ввода вручную: переставленные и пропущенные буквы, начальные пробелы, все заглавные буквы и т. д. Также вы можете получить данные в том случае, когда кто-то ввел некорректный текст (или какой-то произвольный текст, просто чтобы посмотреть, как будет реагировать на него предложенная форма).

### ***Выполните прямо сейчас***

Как вы думаете, какие из ошибок, возникающих из-за переставленных и пропущенных букв и при вводе произвольного случайного текста, программа может исправить автоматически?

Переставленные и пропущенные буквы – это тот тип ошибок, которые программа проверки грамматики способна исправить (особенно если программе известны все допустимые коды скидок). Произвольный набор символов по определению является случайным (и бессмысленным). Здесь вы должны обсудить этот вопрос с компанией, продающей билеты, чтобы решить, как они предпочитают обрабатывать подобные случаи (выполнять преобразование в "none", уточнить у заказчика и т. д. – однако это вопросы правил поведения, а не программирования).

Но в действительности мораль здесь заключается в том, чтобы просто использовать спускающиеся меню или другие средства, чтобы по возможности предотвратить появление некорректных данных в самом источнике.

По мере приобретения опыта в программировании вы также научитесь предвидеть определенные виды ошибок. Такие проблемы, как ячейки, которые выглядят пустыми, станут привычным делом, например после того, как вы обработаете достаточное количество таблиц с таким ячейками. Необходимость предвидеть ошибки в данных – одна из причин, по которой опытные специалисты по обработке данных должны разбираться в предметной области, где они работают.

Отсюда вывод: мы говорили о том, чего следует ожидать. Мы подумали, откуда были взяты данные и какие ошибки были бы вероятны в подобной ситуации. Ясное представление о модели ошибок поможет разрабатывать более надежные программы. В действительности такое мышление «от противного» – ключевой навык работы в сфере обеспечения безопасности, но сейчас мы слегка забегаем вперед.

---

### Упражнение 8.3

В электронных таблицах ячейки, выглядящие пустыми, иногда имеют реальное содержимое в форме строк, состоящих из пробелов: при взгляде на электронную таблицу строки "" и " " выглядят одинаково, но в действительности представляют различные значения с точки зрения вычислений.

Как можно было бы изменить функцию `cell-to-discount-code`, чтобы строки, содержащие только пробелы, также преобразовывались в значение `none`? (Подсказка: обратите внимание на функцию `string-replace` из библиотеки `Strings`.)

---

#### **8.1.4.1. Использование программ для обнаружения ошибок в данных**

Иногда мы также ищем ошибки с помощью собственных функций, проверяющих, содержит ли таблица неожидаемые значения. Рассмотрим столбец "email": здесь мы должны иметь возможность написать программу, помечющую все строки с некорректными адресами электронной почты. Что делает корректным адрес электронной почты? Рассмотрим два правила:

- корректный адрес электронной почты должен содержать символ @;
- корректный адрес электронной почты должен завершаться одним из вариантов: ".com", ".edu" или ".org".

### Упражнение 8.4

Напишите функцию `is_email`, которая принимает строку и возвращает логическое значение, определяющее, соответствует ли введенная строка двум приведенным выше правилам для корректных адресов электронной почты. Чтобы немного усложнить задачу, также добавьте правило, утверждающее, что между символом @ и завершающей частью, начинающейся с точки (.), обязательно должен находиться какой-либо символ.

По общему признанию, это устаревшее, ограниченное и ориентированное на США определение адресов электронной почты, но расширение форматов не изменяет принципиально смысла этого раздела.

Предположив, что у нас имеется функция, описанная в упражнении 8.4, мы могли бы сказать, что теперь программа `filter-with` способна создать таблицу, определяющую, в каких строках необходимо исправить адреса электронной почты. Здесь самым важным является тот факт, что программы часто оказываются полезными при поиске данных, требующих корректировки, даже если изначально не были написаны для выполнения каких-либо исправлений.

## 8.2. ПЛАНИРОВАНИЕ ЗАДАЧ

Прежде чем продолжить, вернемся на шаг назад, чтобы вспомнить процесс создания таблицы, содержащей данные о подсчете строк с кодами скидок. Мы начали с конкретного примера, заглянули в документацию в поисках встроенных функций, которые могли оказаться полезными, затем занялись обработкой имеющихся данных, чтобы сделать их пригодными для работы с выбранной функцией. Все это часть более общего процесса, применяемого к данным и задачам, связанным с таблицами. Мы будем называть этот процесс планированием (решения) задачи (*task planning*).

Если говорить конкретнее, план (решения) крупной задачи (*task plan*) – это последовательность шагов (задач), которая разделяет общую вычислительную задачу на более мелкие шаги (подзадачи). Полезный план задачи содержит подзадачи, способ реализации которых вам известен или которые можно решить с помощью встроенных либо написанных пользователем функций. Для планов задач не существует какого-либо единого способа записи (нотации) или формата. Для некоторых задач вполне достаточно простого маркированного списка шагов. Для других более полезной будет схема, показывающая, как данные перемещаются в ходе решения задачи (передаются

между этапами решения). Для решения каждой конкретной задачи требуется индивидуально подобранный подход. Целью является декомпозиция общей задачи, чтобы получить своего рода список «текущих дел» (to-do), четко определяющий этапы программирования, который поможет управлять процессом.

### Стратегия: создание плана задачи

1. Разработка конкретного примера, показывающего требуемый вывод при заданных входных данных (вы сами выбираете входные данные: правильная выборка достаточно велика для того, чтобы продемонстрировать различные характеристики входных данных, но в то же время достаточно компактна, чтобы работать с ней вручную при планировании). Для задач обработки таблиц на практике обычно удобнее всего работать приблизительно с 4–6 строками).
2. Мысленное определение функций, которые вам уже известны (или которые вы нашли в документации) и могут оказаться полезными для преобразования входных данных в выходные.
3. Разработка последовательности шагов – это могут быть рисунки, текстовые описания вычислений или сочетание этих двух представлений, – которые могут быть использованы для решения поставленной задачи. Если вы используете рисунки, изображайте промежуточные значения данных из своего конкретного примера и ведите письменные заметки о том, какие операции могут быть полезными для перехода от одного промежуточного значения к следующему. Здесь должны быть показаны функции, определенные на предыдущем шаге.
4. Повторение предыдущего шага с разделением на подзадачи до тех пор, пока вы не будете полностью уверены в том, что можете записать выражения или функции для выполнения каждого шага или операции преобразования данных.

На рис. 8.6 показан план решения задачи на основе схемы для программы *discount-summary*, которую мы только что разработали. Мы нарисовали эту схему на бумаге, чтобы особо выделить тот факт, что планы задач не пишутся в среде программирования.

После того как план составлен, вы превращаете его в программу, записывая выражения и функции для промежуточных шагов и передавая вывод одного шага как входные данные для следующего. Иногда при первом же взгляде на задачу сразу становится понятно, как написать код для нее (если это тип задач, которые вы многократно решали ранее). Но когда вы не видите решения сразу, используйте описанный выше процесс и разделяйте общую задачу, работая с конкретными примерами данных.

---

### Упражнение 8.5

Вам предложили разработать программу, которая определяет студента с наибольшим прогрессом от экзамена в середине семестра до итогового экзамена по курсу. Исходная таблица будет содержать столбцы для каждого экзамена, а также для имен студентов. Напишите план решения этой задачи.

---

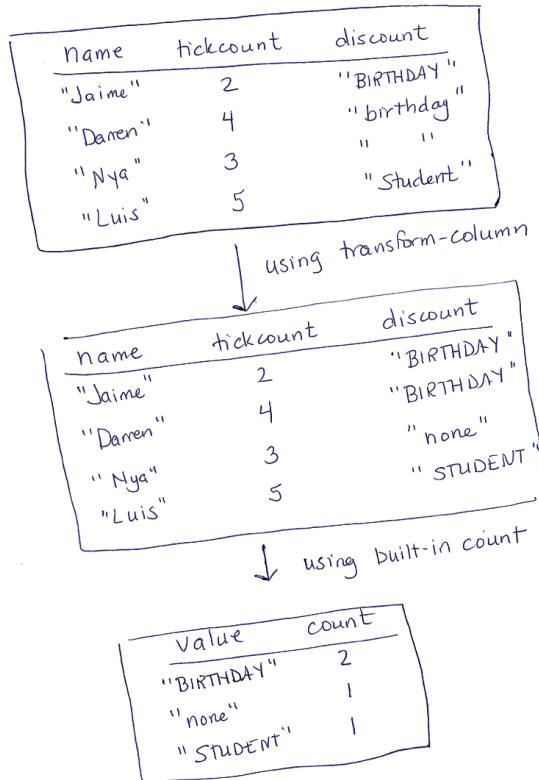
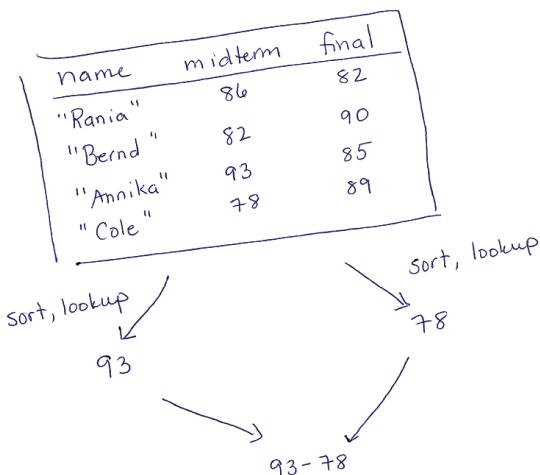


Рис. 8.6 ♦ План решения задачи, составленный вручную

В некоторые планы решения задач включено нечто большее, чем просто последовательность табличных значений. Иногда мы выполняем несколько преобразований одной и той же таблицы для извлечения разных элементов данных, а затем производим вычисления с этими данными. В этом случае мы изображаем план с ответвлениями, которые показывают различные вычисления, объединяемые в итоговом результате. Например, если продолжить рассмотрение задачи с журналом оценок, то может потребоваться программа для вычисления разности между самыми высокими и самыми низкими баллами за экзамен в середине семестра. План решения этой задачи может выглядеть так, как показано на рис. 8.7.

### Упражнение 8.5

Вам предоставили таблицу данных о погоде, в которой содержатся столбцы с датой, количеством осадков и самой высокой температурой за сутки. Вам предложили вычислить, было ли в январе больше снежных дней, чем в феврале. День считается снежным, если самая высокая температура за сутки ниже точки замерзания, а количество осадков больше нуля.



**Рис. 8.7** ♦ План решения задачи вычисления разности между самыми высокими и самыми низкими баллами

Основной принцип этой стратегии легко сформулировать:

**Если вы не знаете, как приступить к решению задачи, не начинайте с попытки написать код. Занимайтесь планированием, пока не поймете задачу полностью.**

Начинающие программисты часто игнорируют этот совет, полагая, что быстрее всего можно получить работающий код для решаемой с помощью программирования задачи, если немедленно начать его писать (особенно если их окружают однокурсники, способные сразу приступить к написанию кода). Опытные программисты знают, что попытка написания всего кода до того, как пришло полное понимание задачи, займет гораздо больше времени по сравнению с неторопливым подходом и предварительным полным пониманием задачи. По мере того как вы будете улучшать свои навыки программирования, конкретный формат ваших планов решения задач также будет развиваться (и действительно, мы увидим некоторые примеры такого развития далее в этой книге). Но основная идея та же: используйте конкретные примеры, которые помогут определить промежуточные вычисления, которые потребуются, а затем выполняйте их преобразование в код после или в процессе их определения.

## 8.3. Подготовка таблиц данных

Иногда имеющиеся в нашем распоряжении данные являются чистыми (в том смысле, что мы нормализовали данные и обработали ошибки), но они пока еще не приведены к тому формату, который мы можем использовать для выполнения требуемого анализа. Например, что, если требуется рассмотреть распределение малых, средних и крупных заказов на билеты? В таблице, которую мы получили на текущий момент, есть количество билетов в заказе, но

нет явной пометки о масштабе этого заказа. Если мы намереваемся создать схему какого-либо типа, отображающую величины заказов, то потребуется сделать эти пометки явными.

### 8.3.1. Создание групп по категориям

Операция сокращения некоторого набора значений (таких как значения `ticket-counts` в рассматриваемом здесь примере) до меньшего набора категорий (таких как малый/средний/большой для заказов или утро/день/и т. д. для меток времени) называется статистическим группированием (`binning`; иногда просто биннингом). Группы (`bins`) представляют категории. Для распределения строк по группам мы создаем функцию вычисления (определения) группы для исходного значения строки, затем создаем столбец для новых меток групп.

Ниже приведен пример создания статистических групп для шкалы заказов билетов:

```
fun order-scale-label(r :: Row) -> String:  
  doc: "categorize the number of tickets as small, medium, large"  
    # "Категоризация числа заказанных билетов по группам: малое, среднее, большое."  
  numtickets = r["ticketcount"]  
  if numtickets >= 10: "large"  
  else if numtickets >= 5: "medium"  
  else: "small"  
  end  
end  
  
order-bin-data =  
  build-column(cleaned-event-data, "order-scale", order-scale-label)
```

### 8.3.2. Разделение столбцов

Таблица событий в настоящий момент использует одну строку для представления полного имени человека. Но такая «общая» строка неудобна, если потребуется сортировка данных по фамилиям. Разделение одного столбца на несколько может оказаться полезным шагом при подготовке набора данных для анализа или дальнейшего использования. Языки программирования обычно предоставляют разнообразные операции для разделения строк: в Pyret имеются операции `string-split` и `string-split-all`, разделяющие одну строку на несколько по заданному символу (например, по пробелу). Например, можно написать `string-split("Josie Zhao", " ")`, чтобы извлечь "Josie" и "Zhao" как отдельные строки.

---

#### Упражнение 8.7

Напишите план решения задачи (не код, а только план) для создания функции, которая должна заменить существующий столбец `name` в таблице `event-data` на два столбца `last-name` и `first-name`.

---

**Выполните прямо сейчас**

Запишите набор конкретных строк имен, с которыми вы должны будете протестировать функцию разделения строк имен.

Надеемся, что вы хотя бы бегло взглянули на таблицу и заметили одного человека "Zander", чье полное имя является одной строкой, а не состоит из имени и фамилии. А как мы должны обрабатывать средние имена? Или имена, которые в соответствии с культурными традициями включают фамилии обоих родителей в полное имя? Или имена, при записи которых не используются буквы латинского алфавита? Это определенно становится более сложным делом.

**Ответственное применение информатики:  
представление имен**

Представление имен как данных в высшей степени зависит от контекста и культурных традиций. Следует внимательно относиться к именам людей, которые должны быть включены в набор данных и проектировать структуру таблицы соответствующим образом. Вполне正常но, если получена структура таблицы, которая исключает имена, выходящие за пределы совокупности, которую вы пытаетесь представить. Проблема возникает, когда несколько позже вы понимаете, что ваш набор данных или программа исключает данные, которые необходимо поддерживать. Короче говоря, изучите структуру своей таблицы с учетом предположений о ваших данных и выберите структуру таблицы, тщательно продумав, какие наблюдения или характеристики отдельных лиц она должна представлять.

Чтобы глубже взглянуть на сложность представления реальных имен и дат в программах, выполните поиск по фразе «falsehoods programmers believe about...» («ложь, в которую программисты верят, о...»), который приведет вас к таким статьям, как «Falsehoods Programmers Believe About Names» («Ложь, в которую программисты верят, в отношении имен») (<https://www.kalzumeus.com/2010/06/17/falsehoods-programmers-believe-about-names/>) и «Falsehoods Programmers Believe About Time» («Ложь, в которую программисты верят, относительно времени») (<https://infiniteundo.com/post/25509354022/more-falsehoods-programmers-believe-about-time>).

---

**Упражнение 8.8**

Напишите программу, которая фильтрует таблицу так, чтобы она содержала только те строки, в которых имя не состоит из двух строк, разделенных пробелом.

---

### Упражнение 8.9

Напишите программу, которая принимает таблицу со столбцом `name` в формате `"first-name last-name"` и заменяет столбец `name` двумя столбцами `last-name` и `first-name`. Для извлечения имен и фамилий из строки полного имени используйте:

```
string-split(name-string, " ").get(0)      # Получение имени.  
string-split(name-string, " ").get(1)      # Получение фамилии.
```

---

## 8.4. УПРАВЛЕНИЕ И ИМЕНОВАНИЕ ТАБЛИЦ ДАННЫХ

К настоящему моменту мы поработали с несколькими версиями таблицы `event-data`:

- с исходным набором данных, который мы пытались загрузить;
- с новым листом набора данных, в который вносились исправления вручную;
- с версией, в которой были нормализованы коды скидок;
- с другой версией, в которой был нормализован режим доставки;
- с расширенной версией, в которую был добавлен столбец группирования заказов по размеру.

Какие из этих версий должны получить явные имена в нашем файле исходного кода?

Обычно мы сохраняем исходную необработанную электронную таблицу из источника, а также ее копию с внесенными вручную изменениями. Зачем? На тот случай, если нам когда-нибудь придется снова взглянуть на исходные данные, чтобы определить типы ошибок, сделанных людьми, или внести другие изменения.

По тем же причинам необходимо сохранять очищенные (нормализованные) данные отдельно от версии, которую мы изначально загрузили. К счастью, в этом помогает Pyret, поскольку он создает новые таблицы, а не изменяет исходные. Но если нам нужно нормализовать всего лишь несколько столбцов, то действительно ли требуется новое имя для каждой промежуточной таблицы?

Общее правило: обычно мы поддерживаем особые имена для первоначально загруженной таблицы, очищенной таблицы и при внесении существенных изменений в целях анализа. В нашем коде это может означать наличие следующих имен:

```
event-data = ...      # Загруженная таблица.
```

```
cleaned-event-data =  
  transform-column(  
    transform-column(event-data, "discount", cell-to-discount-code),  
    "delivery", yes-to-email)
```

```
order-bin-data =
  build-column(
    cleaned-event-data, "order-scale", order-scale-label)
```

Здесь `yes-to-email` – функция, которую мы не написали, но предполагаем, что она выполнила нормализацию значения "yes" в столбце "delivery". Обратите внимание: мы последовательно применили каждую операцию нормализации, а имя присвоили только итоговой таблице, содержащей конечный результат нормализации. Наличие лишь небольшого набора имен таблиц позволит вам не запутаться при работе с файлами. При работе с многочисленными наборами анализируемых данных разработка стратегии логически согласованного именования таблиц, вероятнее всего, поможет лучше управлять исходным кодом при переключении между проектами.

В профессиональной практической деятельности при работе с весьма большим набором данных вы можете просто записать очищенный набор данных в файл, чтобы для анализа загружать только чистую версию данных. Операцию записи в файл мы рассмотрим немного позже.

## 8.5. ВИЗУАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГРАФИКИ

Теперь наши данные очищены и подготовлены, и мы готовы к их анализу. Что еще мы должны знать? Вероятно, требуется определить, какой код скидки использовался наиболее часто. Возможно, мы должны узнать, связано ли время совершения покупки с количеством приобретаемых билетов. Существует множество различных типов визуализации и графиков, которые используются для обобщения данных.

Выбор типа используемого графика зависит от заданного вопроса и от имеющихся в наличии данных. Внутренняя сущность переменных в наборе данных помогает определить наиболее подходящие типы графиков или статистических операций. Атрибут или переменная в наборе данных (т. е. отдельный столбец в таблице) можно классифицировать как один из нескольких различных типов, включая следующие:

- количественный (quantitative) – переменная, значения которой являются числовыми и могут быть упорядочены в логически согласованном интервале между значениями. Имеет смысл использовать их в вычислениях;
- категориальный (categorical) – переменная с фиксированным набором значений. Значения могут иметь некоторый порядок, но не существует осмысленных вычислительных операций с такими значениями, за исключением операции упорядочения. Такие переменные обычно соответствуют характеристикам конкретных выборок.

### **Выполните прямо сейчас**

К какому типу переменных относятся фамилии? Оценки в учебных курсах? Zip-коды (почтовые индексы)?

Общие графики и требуемые для них типы переменных включают:

- диаграммы рассеяния (scatterplots) показывают отношения между двумя количественными переменными с отображением значений по каждой оси двумерного графика;
- графики частотных диапазонов (frequency bar charts) показывают частоту появления каждого категориального значения в столбце набора данных;
- гистограммы (histograms) сегментируют количественные данные по интервалам равного размера и показывают распределение значений по каждому интервалу;
- круговые (секторные) диаграммы (pie charts) показывают пропорцию ячеек в столбце по категориальным значениям в наборе данных.

### ***Выполните прямо сейчас***

Найдите для каждого приведенного ниже вопроса соответствующий тип графика на основе типа переменных, упоминаемых в этих вопросах:

- какой код скидки используется чаще всего?
- существует ли отношение между числом билетов, приобретаемых в одном заказе, и временем приобретения?
- сколько заказов было сделано по каждому варианту доставки?

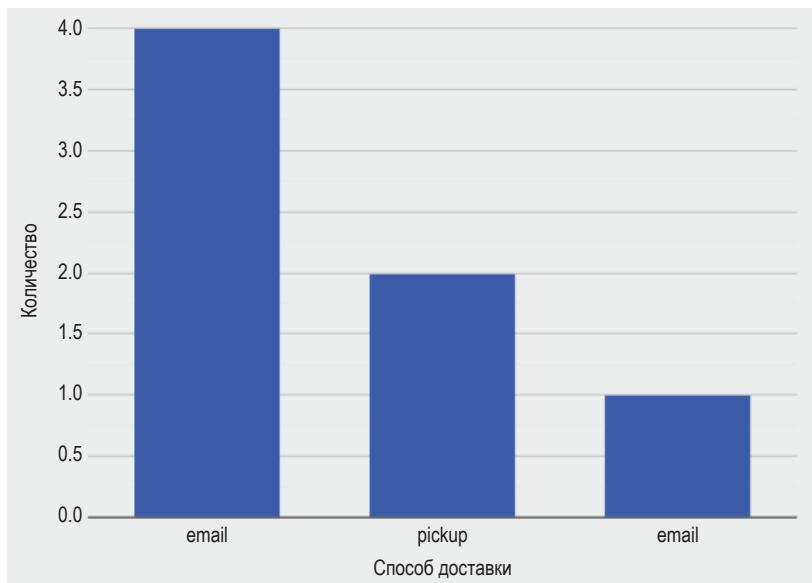
Например, можно воспользоваться графиком частотных диапазонов (frequency-bar-chart) для ответа на третий вопрос. На основании документации Table можно было бы генерировать такой график, используя следующий код (форма записи которого похожа на другие типы графиков):

```
freq-bar-chart(cleaned-event-data, "delivery")
```

Результатом выполнения этого кода становится график, показанный на рис. 8.8 (предполагая, что в действительности мы не нормализовали содержимое столбца "delivery").

Стоп, а откуда взялся дополнительный столбец "email"? Если вы посмотрите очень внимательно, то обнаружите ошибку: в строке "Alvina" – опечатка ("emall" с буквой l вместо i) в столбце кода скидки (кто-нибудь вспомнил про спускающиеся меню?).

Урок здесь заключается в том, что графики и визуализации полезны не только на этапе анализа, но также на более ранних этапах, когда мы пытаемся проверить, что наши данные очищены и готовы к использованию. Опытные специалисты по обработке данных никогда не доверяют набору данных, не убедившись сначала, что значения имеют смысл. В больших наборах данных ручная проверка всех данных часто невозможна. Но создание некоторых графиков или других сводок данных также полезно для выявления ошибок.



**Рис. 8.8** ♦ График распределения количества заказов по каждому варианту доставки

## 8.6. РЕЗЮМЕ: УПРАВЛЕНИЕ АНАЛИЗОМ ДАННЫХ

В этой главе вы получили общее представление о том, как использовать написание исходного кода для управления данными и их обработки. При выполнении любого анализа данных опытный практикующий специалист по обработке данных проходит несколько этапов, описанных ниже:

- 1) подумайте о данных в каждом столбце: каковы вероятные значения в нем и какие ошибки могут быть обнаружены в этом столбце, исходя из того, что вы знаете о методах сбора данных?
- 2) проверьте данные на наличие ошибок, используя сочетание проверки вручную таблицы, графиков и выражений `filter-with`, которые проверяют неожидаемые значения. Нормализуйте или исправьте данные либо в источнике (если есть возможность управлять им), либо с помощью небольших программ;
- 3) сохраните нормализованную/очищенную таблицу, связав ее с именем в программе или сохранив в новом файле. Необработанные данные оставьте неизмененными (на тот случай, если в дальнейшем потребуется обращение к первоисточнику);
- 4) подготовьте данные на основе вопросов, которые необходимо выяснить: вычисление новых столбцов, статистическое группирование существующих столбцов или объединение данных из нескольких таблиц. Можно завершить все этапы подготовки и присвоить имя итоговой таб-

лице или выполнить отдельные подготовительные операции по каждому вопросу, присваивая различные имена таблицам, отвечающим на каждый конкретный вопрос;

- 5) в последнюю очередь выполните собственный анализ, используя статистические методы, визуализацию и интерпретации, которые имеют смысл для каждого конкретного вопроса и типов используемых переменных. При составлении отчета о данных всегда сохраняйте заметки о файле, содержащем код анализа, а также о том, какие части файла использовались для создания каждого графика или интерпретации в отчете.

Управление данными и выполнение анализа – это гораздо более обширная тема, чем может охватить наша книга. Отдельные книги, диссертации для получения ученых степеней и целые карьеры посвящены управлению данных и их анализу. Например, одной из областей, которую мы здесь не обсуждали, является машинное обучение, при котором программы (написанные другими) используются для прогнозирования на основе наборов данных (в этой главе, наоборот, все внимание сосредоточено на проектах, в которых вы будете использовать сводную статистику и визуализации для выполнения анализа). Все навыки, описанные в этой главе, являются необходимыми условиями для эффективного и ответственного использования машинного обучения. Но нам еще многое предстоит изучить и понять о самих данных, чем мы и займемся в следующих главах. Продолжим!

### **Ответственное применение информатики: предвзятость в статистическом прогнозе**

В книге, в которой обсуждаются данные и социальная ответственность, было бы упущением не упомянуть хотя бы некоторые из многих проблем, возникающих при использовании данных для прогнозирования (с помощью таких методов, как машинное обучение). Некоторые проблемы возникают из-за проблем с самими данными (например, являются ли выборки репрезентативными или приводят ли корреляции между переменными к дискриминации, как при формализованном («алгоритмическом») отборе кандидатов на рабочую вакансию). Другие возникают из-за того, что данные, собранные для одной цели, используются не по назначению для прогнозирования другой. Еще больше проблем возникает при интерпретации результатов.

Все перечисленное выше – это весьма обширные темы. Существует огромное множество статей, которые вы могли бы прочитать на этом этапе, чтобы научиться лучше понимать опасности (и преимущества) алгоритмического принятия решений. Вместо этого наша книга ориентирована на проблемы, возникающие в программах, которые мы учим вас писать, оставляя в стороне другие учебные курсы или области интересов других преподавателей, дополняющие материал в соответствии с особенностями сферы деятельности читателей.

# Глава 9

---

## От таблиц к спискам

Ранее в главе 7 мы начали обрабатывать объединенные в набор данные в виде таблиц. Мы рассмотрели несколько мощных операций, которые позволяли быстро и легко задавать сложные вопросы про обрабатываемые данные, но все они имели две общие черты. Во-первых, все операции выполнялись над строками таблиц (rows). Ни одна из операций не задавала вопросы о содержимом столбца в целом, рассматриваемом одновременно. Во-вторых, все операции не только потребляли, но и создавали таблицы. Но мы уже знаем из главы 3, что существует много других типов данных, и иногда необходимо вычислить один из них. Теперь мы узнаем, как достичь обеих описанных выше целей, вводя в процесс обработки новый важный тип данных.

### 9.1. ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Существует множество дополнительных вопросов, которые, возможно, необходимо задать касательно данных из рассматриваемого примера о событиях и билетах. Например:

- код скидки, который используется чаще всего;
- среднее количество билетов по заказам;
- заказ с максимальным количеством билетов;
- количество билетов, которое чаще всего встречается в заказах;
- набор неповторяющихся кодов скидок, которые использовались в заказах (возможно, доступными были многие коды);
- набор различных адресов электронной почты, связанных с заказами, чтобы можно было связаться с заказчиками (некоторые заказчики, возможно, сделали несколько заказов);
- какое учебное заведение сделало наибольшее количество заказов с кодом скидки "STUDENT".

Обратите внимание на типы операций, которые упоминались в этом перечне вопросов: вычисление максимума, минимума, среднего значения, медианы и прочих основных статистических характеристик.

В Pyret имеется несколько встроенных статистических функций в математическом (<https://www.pyret.org/docs/latest/math.html>) и статистическом (<https://www.pyret.org/docs/latest/statistics.html>) пакетах.

**Выполните прямо сейчас**

Подумайте над тем, как можно было бы выразить перечисленные выше вопросы с помощью операций, которые вы уже видели ранее.

В каждом из перечисленных выше случаев необходимо выполнить вычисление по отдельному столбцу данных (даже в последнем вопросе о коде скидки "STUDENT", поскольку мы должны отфильтровать таблицу по таким строкам, а затем выполнить вычисление по столбцу email). Чтобы сделать это в коде, необходимо извлечь столбец из таблицы.

На протяжении оставшейся части этой главы мы будем работать с очищенной копией таблицы event-data из предыдущей главы. Очищенные данные, к которым применены преобразования, описанные в конце предыдущей главы, находятся на другой вкладке той же электронной таблицы Google Sheet, содержащей другие версии event-data.

```
ssid = "1DKngiBfI2cGTVeazFEyXf7H4mhl8IU5yv2TfZWv6Rc8"
cleaned-data =
  load-table: name, email, tickcount, discount, delivery
  source: load-spreadsheet(ssid).sheet-by-name("Cleaned", true)
  sanitize name using string-sanitizer
  sanitize email using string-sanitizer
  sanitize tickcount using num-sanitizer
  sanitize discount using string-sanitizer
  sanitize delivery using string-sanitizer
end
```

## 9.2. ИЗВЛЕЧЕНИЕ СТОЛБЦА ИЗ ТАБЛИЦЫ

В доступном нам наборе табличных функций есть одна, которую мы до настоящего момента не использовали, – `select-columns`. По имени можно предположить, что эта функция создает новую таблицу, содержащую только определенные столбцы из существующей таблицы. Выполним извлечение столбца `tickcount`, чтобы получить возможность выполнения некоторых статистических вычислений по нему. Для этого воспользуемся приведенным ниже выражением:

```
select-columns(cleaned-data, [list: "tickcount"])
```

Это позволяет сосредоточить внимание на числовых характеристиках продаж билетов, но мы остаемся привязанными к столбцу в таблице, и ни одна из табличных функций не позволяет выполнить те виды вычислений, которые, возможно, потребуются

tickcount
2
1
5
0
3
10
3

Рис. 9.1 ♦ Столбец `tickcount`, извлеченный из таблицы `cleaned-data`

для этих чисел. В идеальном случае необходим независимый набор чисел без какой-либо обертки в дополнительный слой ячеек таблицы.

Теоретически мы могли бы иметь в своем распоряжении набор операций над отдельным столбцом. В некоторых языках, сосредоточенных исключительно на работе с таблицами, например SQL (<https://ru.wikipedia.org/wiki/SQL>), вы обнаружите такие операции. Но в Pyret мы работаем со многими другими типами данных, а не только с теми, которые организованы по столбцам (как мы скоро увидим (глава 11), можно даже создать собственный тип данных), имеет смысл рано или поздно покинуть уютный кокон таблиц. Любой извлеченный столбец – это более простой тип данных, который называется списком (list), и его можно использовать для представления последовательности данных вне пределов таблицы.

Ранее мы пользовались нотацией `.get-column` для извлечения одной строки из таблицы, и точно так же применяется похожая форма записи с точкой для извлечения одного столбца. Ниже показано, как извлекается столбец `tickcount`:

```
cleaned-data.get-column("tickcount")
```

В ответ Pyret выдает следующее значение:

```
[list: 2, 1, 5, 0, 3, 10, 3]
```

Похоже, что теперь у нас имеются только значения, которые располагались в ячейках заданного столбца, отдельно от включающей их таблицы. Но числа остаются связанными, на этот раз посредством нотации `[list: ...]`. Что это такое?

## 9.3. Объяснение смысла списков

Список имеет много общего с таблицей, состоящей из одного столбца:

- элементы расположены в определенном порядке, поэтому имеет смысл говорить о «первом», «втором», «последнем» и т. д. элементе в списке;
- предполагается, что все элементы списка принадлежат к одному типу данных.

Самое важное отличие заключается в том, что список не имеет «имени столбца», он безымянный (анонимный – anonymous). То есть сам по себе список не объясняет, что именно он представляет, его интерпретация осуществляется программой.

### 9.3.1. Списки как анонимные данные

Это может показаться достаточно абстрактным понятием – на самом деле так и есть, – но в действительности это вовсе не новая идея в нашей практике программирования. Рассмотрим произвольное значение, скажем 3 или -1: что это такое? Да то же самое понятие: анонимное значение, которое не описывает, что именно оно представляет, интерпретация осуществляется про-

граммой. В одном случае число 3 может означать возраст, в другом – количество игр; в одном случае -1 может быть температурой, в другом – средним значением нескольких измерений температуры. Здесь можно обнаружить сходство со строкой: является ли слово "роject" существительным (т. е. обозначает деятельность, выполняемую одним человеком или несколькими людьми) или глаголом (например, когда мы отображаем что-либо на экране)? Такая же ситуация с изображениями и т. п. В действительности таблицы до настоящего момента были исключением, поскольку описание было встроено в данные, а не предоставлялось программой.

Такая универсальность является одновременно преимуществом и проблемой. Поскольку, как и другие анонимные данные, список не предоставляет никакой интерпретации его использования, то при небрежном обращении мы можем случайно интерпретировать значения неправильно. С другой стороны, это означает, что мы получаем возможность использовать одни и те же данные в нескольких различных контекстах, и одну операцию можно применять во многих вариантах.

Действительно, если взглянуть на список вопросов, которые были заданы ранее, то мы увидим, что есть несколько общих операций – вычисление максимума, минимума, среднего значения и т. д., – которые могут быть определены для списка значений независимо от того, что этот список представляет (рост, возраст, количество игр). В действительности некоторые операции предназначены для чисел (например, вычисление среднего значения), тогда как некоторые (например, определение максимума) могут быть определены для любого типа, по которому возможно выполнение сравнения (например, для строк).

### 9.3.2. Создание литеральных списков

Выше мы уже видели, как можно создать списки из таблицы, применяя функцию `get-column`. Но, как вы, вероятно, уже догадались, есть возможность непосредственного создания списков:

```
[list: 1, 2, 3]
[list: -1, 5, 2.3, 10]
[list: "a", "b", "c"]
[list: "This", "is", "a", "list", "of", "words"]
```

Разумеется, списки – это значения, поэтому им можно присваивать имена, используя переменные:

```
shopping-list = [list: "muesli", "fiddleheads"]
```

передавать их в функции (скоро мы это увидим) и т. д.

#### **Выполните прямо сейчас**

С учетом приведенных выше примеров можете ли вы объяснить, как создать пустой список?

Как можно догадаться, это [list:] (пробел не обязателен, но это полезное визуальное напоминание о том, что список пустой).

## 9.4. ОПЕРАЦИИ СО СПИСКАМИ

### 9.4.1. Встроенные операции со списками чисел

Pyret предоставляет легкий доступ к полезному набору операций, которые можно сразу же выполнять со списками. Легко догадаться, что имеется возможность немедленно вычислить большинство ответов на вопросы, заданные в начале этой главы. Но сначала необходимо включить в код некоторые библиотеки, содержащие эти полезные функции:

```
import math as M
import statistics as S
```

После этого мы получаем доступ к некоторым полезным функциям:

```
tickcounts = cleaned-data.get-column("tickcount")

M.max(tickcounts)      # Наибольшее число в списке.
M.sum(tickcounts)       # Сумма чисел в списке.
S.mean(tickcounts)      # Среднее значение для чисел в списке.
S.median(tickcounts)    # Медиана (срединное значение) для чисел в списке.
```

Нотация M. означает «функция в библиотеке M». Инструкция import в приведенном выше коде присваивает имя M библиотеке math.

### 9.4.2. Встроенные операции для любых списков

Некоторые из полезных вычислений в списке, приведенном в начале главы, включают столбец discount, который содержит строки, а не числа. В частности, рассмотрим следующий вопрос:

- набор неповторяющихся кодов скидок, которые использовались в заказах (возможно, доступными были многие коды).

Ни одна из табличных функций не способна дать ответ на подобный вопрос. Но это весьма часто встречающийся тип вопроса, задаваемого о любом наборе значений (сколько неповторяющихся исполнителей в вашем музыкальном плейлисте? сколько различных преподавателей читают учебные курсы?) Поэтому Pyret (как и большинство языков) предоставляет способ определения неповторяющихся элементов в списке. Ниже показано, как мы получаем список всех кодов скидок, которые использовались в рассматриваемой таблице:

```
import lists as L
codes = cleaned-data.get-column("discount")
L.distinct(codes)
```

В документации по спискам (<https://www.pyret.org/docs/latest/lists.html>) подробно описаны все эти операции.

Функция `distinct` создает список неповторяющихся значений из исходного списка: каждое значение в исходном списке появляется ровно один раз в итоговом. При выполнении приведенного выше кода Pyret выводит:

```
[list: "BIRTHDAY", "STUDENT", "none"]
```

А если необходимо исключить элемент "none" из этого списка? Все-таки "none" не является настоящим кодом скидки, а специальным значением, введенным при очистке таблицы. Существует ли простой способ удаления "none" из списка?

Есть два возможных способа сделать это. В документации по спискам Pyret мы находим функцию `remove`, которая удаляет заданный элемент из списка:

```
>>> L.remove(L.distinct(codes), "none")
```

```
[list: "BIRTHDAY", "STUDENT"]
```

Но эта операция также должна выглядеть знакомой: для таблиц мы использовали `filter-with`, чтобы сохранить только те элементы, которые соответствуют заданному условию. Принцип фильтрации является настолько общим, что Pyret (и большинство других языков) предоставляет аналогичную операцию для списков. В примере с кодами скидок также можно было бы написать:

```
fun real-code(c :: String) -> Boolean:  
    not(c == "none")  
end  
L.filter(real-code, L.distinct(codes))
```

Различие между этими двумя способами заключается в том, что `filter` – более гибкая функция: можно проверять любую характеристику элементов списка с помощью `filter`, но функция `remove` всего лишь проверяет конкретный элемент на равенство заданному значению. Если вместо удаления конкретной строки "none" потребовалось бы удалить все строки, содержащие все символы в нижнем регистре, то необходимо применить `filter`.

---

### Упражнение 9.1

Напишите функцию, принимающую список слов и удаляющую слова, в которых все буквы записаны в нижнем регистре. (Подсказка: используйте функцию `string-to-lower` в сочетании с оператором `==`.)

---

## 9.4.3. Небольшое отступление о соглашениях об именовании

Мы намеренно используем форму множественного числа `codes` для списка значений в столбце с именем `discount` (единственное число). Список содержит несколько значений, поэтому подходит множественное число. В таблице

наоборот – мы думаем о заголовке столбца как об имени одного значения, которое появляется в конкретной строке. Часто мы говорим о поиске значения в определенной строке и столбце: имя столбца в единственном числе поддерживает мысль о поиске в отдельной строке.

## 9.4.4. Получение элементов по позиции

Рассмотрим новый аналитический вопрос: компания по обслуживанию мероприятий недавно начала рекламную кампанию на сайте `web.com`, и теперь руководство интересует окупаемость рекламы. Для этого необходимо определить, сколько покупок было сделано людьми с использованием адресов электронной почты `web.com`.

### ***Выполните прямо сейчас***

Предложите план решения задачи (см. раздел 8.2) для этого вычисления.

Ниже приведен предлагаемый план с дополнительными указаниями о том, как можно реализовать каждый пункт:

- 1) получить список адресов электронной почты (использовать `get-column`);
- 2) извлечь записи, полученные с сайта `web.com` (использовать `L.filter`);
- 3) подсчитать, сколько адресов электронной почты осталось (использовать `L.length` – эту функцию мы пока еще не рассматривали, но в документации есть ее описание).

(Напоминание: если вы сразу не видите, как решить задачу, напишите план ее решения с дополнительными указаниями по известному вам способу выполнения каждого пункта. Это поможет разделить программируемую задачу на более управляемые части (этапы).)

Рассмотрим подробнее вторую задачу: идентификация сообщений с `web.com`. Нам известно, что адреса электронной почты являются строками, поэтому, если бы можно было определить, заканчивается ли адрес подстрокой `@web.com`, то задача была бы решена. Это можно сделать, просматривая последние 7 символов в строке адреса электронной почты. Другой вариант – применение строковой операции, которой мы пока еще не пользовались, – `string-split-all`. Она разделяет строку на список подстрок по заданному символу. Например:

```
>>> string-split-all("this-has-hyphens", "-")
[list: "this", "has", "hyphens"]
>>> string-split("bonnie@pyret.org", "@")
[list: "bonnie", "pyret.org"]
```

Кажется, это весьма полезная операция. Если разделить каждую строку адреса по символу `@`, то далее мы сможем проверить, совпадает ли вторая строка в списке с `web.com` (так как адреса электронной почты должны со-

держать только один символ @). Но как получить второй элемент из списка, созданного функцией `string-split-all`? Здесь мы углубляемся в список, как делали это для извлечения строк из таблиц, но на этот раз с помощью операции `get`.

```
>>> string-split("bonnie@pyret.org", "@").get(1)
"pyret.org"
```

### **Выполните прямо сейчас**

Почему используется 1 как входное значение для функции `get`, если необходимо получить второй элемент списка?

Ниже приведен полный код программы для выполнения этой проверки:

```
fun web-com-address(email :: String) -> Boolean:
    doc: "determine whether email is from web.com"
    # "Определение: отправлено ли сообщение с сайта web.com."
    string-split(email, "@").get(1) == "web.com"
where:
    web-com-address("bonnie@pyret.org") is false
    web-com-address("parrot@web.com") is true
end

emails = cleaned-data.get-column("email")
L.length(L.filter(web-com-address, emails))
```

### **Упражнение 9.2**

Что произойдет, если существует некорректная строка адреса электронной почты, которая не содержит символ @? Что должно произойти? Как можно устранить эту проблему?

## **9.4.5. Преобразование списков**

Теперь предположим, что у нас есть список адресов электронной почты, но вместо него необходим только список имен пользователей. Он ничего не значит при обработке данных о мероприятиях, но имеет смысл в других контекстах (таких как связывание сообщений с каталогами (папками), организованных по пользовательским именам студентов).

В частности, необходимо начать со списка адресов, например:

```
[list: "parrot@web.com", "bonnie@pyret.org"]
```

и преобразовать его в следующий список:

```
[list: "parrot", "bonnie"]
```

### **Выполните прямо сейчас**

Рассмотрите функции, работающие со списками, которые мы видели до сих пор (`distinct`, `filter`, `length`) – может ли какая-либо из них оказаться полезной для решения этой задачи? Вы можете объяснить, почему?

Один из способов сформулировать точный ответ на этот вопрос – подумать о входных и выходных данных существующих функций. И `filter`, и `distinct` возвращают список элементов из входного списка, а не преобразованные элементы. Функция `length` возвращает число, а не список. Поэтому ни одна из них не подходит.

Описанный выше принцип преобразования элементов похож на операцию `transform-column`, которую мы ранее видели в таблицах. Соответствующая операция для списков называется отображением `map`. Ниже приведен пример:

```
fun extract-username(email :: String) -> String:
    doc: "extract the portion of an email address before the @ sign"
    # "Извлечение части адреса email перед символом @."
    string-split(email, "@").get(0)
where:
    extract-username("bonnie@pyret.org") is "bonnie"
    extract-username("parrot@web.com") is "parrot"
end

L.map(extract-username,
      [list: "parrot@web.com", "bonnie@pyret.org"])
```

## **9.4.6. Резюме: краткий обзор операций для работы со списками**

На данный момент мы рассмотрели несколько полезных встроенных функций для работы со списками:

- `filter :: (A -> Boolean), List<A> -> List<A>` – создает список элементов из входного списка, для которых заданная функция возвращает значение `true`;
- `map :: (A -> B), List<A> -> List<B>` – создает список результатов вызова заданной функции для каждого элемента входного списка;
- `distinct :: List<A> -> List<A>` – создает список неповторяющихся элементов, содержащихся во входном списке;
- `length :: List<A> -> Number` – возвращает число элементов во входном списке.

Здесь тип, такой как `List<A>`, сообщает о том, что имеется список, элементы которого принадлежат к одному (неопределенному) типу, обозначенному как `A`. Такой переменный тип полезен, когда необходимо показать отношения между двумя типами в контракте функции. Здесь переменная типа `A` фиксирует тот факт, что тип элементов одинаков на входе и выходе для

функции `filter`. Но для функции отображения `map` тип элемента в выходном списке может отличаться от типа элемента во входном списке.

Существует дополнительная встроенная функция, весьма полезная в практической деятельности:

- `member :: (A -> Boolean)`, `Any -> Boolean` – определяет, находится ли заданный элемент во входном списке. Здесь используется тип `Any`, когда не существует ограничений по типу значения, передаваемого в функцию.

При объединении перечисленных выше операций можно выполнить множество полезных вычислений.

---

### Упражнение 9.3

Предположим, что вы используете список строк, представляющих ингредиенты в кулинарном рецепте. Ниже показаны три примера:

```
stir-fry = [list: "peppers", "pork", "onions", "rice"]
dosa = [list: "rice", "lentils", "potato"]
misir-wot = [list: "lentils", "berbere", "tomato"]
```

Напишите следующие функции для работы со списками ингредиентов:

- `recipes-uses`, которая принимает список ингредиентов и название ингредиента и определяет, используется ли заданный ингредиент в этом списке;
  - `make-vegetarian`, которая принимает список ингредиентов и заменяет все мясные ингредиенты на `"tofu"`. Мясные ингредиенты: `"pork"`, `"chicken"` и `"beef"`;
  - `protein-veg-count`, которая принимает список ингредиентов и определяет, сколько ингредиентов находится в списке, который не содержит `"rice"` или `"noodles"`.
- 

### Упражнение 9.4

Более трудное. Напишите функцию, которая принимает два списка ингредиентов и возвращает все ингредиенты, являющиеся общими в этих списках.

---

---

### Упражнение 9.5

Еще более трудное. Напишите функцию, которая принимает название ингредиента и список списков ингредиентов и создает список всех списков, содержащих заданный ингредиент.

*Подсказка:* сначала напишите примеры, чтобы полностью понять смысл этой задачи.

---

## 9.5. ЛЯМБДА: АНОНИМНЫЕ ФУНКЦИИ

Вернемся к написанной ранее в этой главе программе поиска всех кодов скидок, которые использовались в таблице мероприятий:

```
fun real-code(c :: String) -> Boolean:
    not(c == "none")
end
L.filter(real-code, codes)
```

Эта программа может показаться слегка многословной: действительно ли необходимо писать вспомогательную функцию только лишь для выполнения такой простой операции, как `filter`? Не проще ли написать что-то подобное:

```
L.filter(not(c == "none"), codes)
```

### **Выполните прямо сейчас**

Что выведет Руget, если выполнить приведенное выше выражение?

Руget выведет сообщение об ошибке `unbound identifier` (несвязанный идентификатор) при использовании `c` в этом выражении. Что такое `c`? Мы подразумеваем, что `c` представляет поочередно элементы из списка `codes`. Теоретически это именно то, что делает `filter`, но здесь мы не имеем правильного механизма выполнения. При вызове функции аргументы вычисляются до выполнения тела функции. Поэтому возникает ошибка из-за того, что `c` не является связанным именем. Весь смысл вспомогательной функции `real-code` заключается в том, чтобы сделать с параметром функции, в теле которой вычисляются только доступные значения `c`.

Таким образом, для более компактной формы записи, как показано в односторочном выражении `filter`, необходимо найти способ оповещения Руget о создании временной функции, которая будет принимать входные данные при выполнении `filter`. Это обеспечивает следующая форма записи:

```
L.filter(lam(c): not(c == "none") end, codes)
```

Мы добавили элементы `lam(c)` и `end`, окружающие выражение, которое должно использоваться в `filter`. Элемент `lam(c)` сообщает: «создать временную функцию, которая принимает `c` как входные данные». Элемент `end` предназначен для завершения определения этой функции, так же как при использовании `fun`. Элемент `lam` – это сокращение от `lambda`, некоторой формы определения функции, которая существует во многих, но не во всех языках программирования.

Основное различие между исходным выражением (использующим вспомогательную функцию `real-code`) и новым (с применением `lam`) можно увидеть в каталоге программы. Чтобы объяснить это различие, немного подробнее рассмотрим, как `filter` определяется внутри программной среды. В общем виде это выглядит приблизительно так:

```
fun filter(keep :: (A -> Boolean), lst :: List<A>) -> List<A>:  
    if keep(<elt-from-list>):  
        ...  
    else:  
        ...  
    end  
end
```

Вне зависимости от того, передаем ли мы версию `real-code` или `lam` в `filter`, параметр `keep` в итоге ссылается на функцию с одним и тем же параметром и телом. Поскольку эта функция в действительности вызывается только через имя `keep`, не имеет значения, связано ли с ней какое-либо имя или нет во время ее начального определения.

На практике мы используем `lam`, когда необходимо передавать простые (однострочные) функции в операции, подобные `filter` (или `map`). Можно было бы использовать лямбда-функции с такой же легкостью, когда мы работали с таблицами (`build-column`, `filter-with` и т. д.). Разумеется, вы можете продолжать записывать имена вспомогательных функций, как это сделано для `real-code`, если находите больше смысла в такой форме записи.

---

### Упражнение 9.6

Напишите программу для извлечения списка имен пользователей из списка адресов электронной почты, используя лямбда-функцию `lam` вместо именованной вспомогательной функции.

---

## 9.6. Совместное использование списков и таблиц

Рассмотренные ранее табличные функции были предназначены главным образом для обработки строк таблицы (`rows`). Функции для работы со списками, которые мы изучили в этой главе, в основном предназначены для обработки столбцов (но в следующих главах будет описано гораздо больше способов их применения). Если для анализа требуется работа только лишь с несколькими строками и столбцами, то в своей программе мы будем использовать сочетание функций для работы с таблицами и списками.

---

### Упражнение 9.7

Используя таблицу мероприятий, создайте список имен всех людей, которые самостоятельно заберут купленные билеты.

---

## Упражнение 9.8

Используя таблицу мероприятий, вычислите среднее количество билетов, которые были заказаны людьми, адреса электронной почты которых заканчиваются на ".org".

Иногда существует более одного способа выполнения какого-либо вычисления.

### **Выполните прямо сейчас**

Например, рассмотрите вопрос типа «сколько людей с адресами email, заканчивающиеся на ".org", приобрели не более 8 билетов». Предложите несколько планов решения этой задачи, включающих указания, какие функции для работы с таблицами и списками должны выполнять каждую подзадачу.

Существует несколько вариантов решения:

- 1) взять из таблицы event-data строки, в которых записано не более 8 билетов (использовать `filter-with`), взять строки, содержащие адреса ".org" (еще одна операция `filter-with`), затем вычислить, сколько строк содержится в таблице (использовать `<table>.length()`);
- 2) взять из таблицы event-data строки, в которых записано не более 8 билетов и содержатся адреса ".org" (использовать `filter-with` с функцией, которая одновременно проверяет оба этих условия), затем вычислить, сколько строк содержится в таблице (использовать `<table>.length()`);
- 3) взять из таблицы event-data строки, в которых записано не более 8 билетов (использовать `filter-with`), извлечь адреса электронной почты (использовать `get-column`), ввести ограничение по ".org" (использовать `L.filter`), затем вычислить длину полученного итогового списка (использовать `L.length`).

Существуют и другие способы решения, но основной принцип понятен.

### **Выполните прямо сейчас**

Какой способ решения вы считаете самым лучшим? Почему?

Несмотря на то что единственного правильного ответа на этот вопрос не существует, можно руководствоваться следующими соображениями:

- полезны ли какие-либо промежуточные результаты для выполнения других вычислений? Второй вариант может показаться самым лучшим, поскольку фильтрует таблицу только один раз, а не два, но, возможно, в компании управления мероприятиями требуется множество вычислений для обслуживания более крупных заказов билетов. Или компания может запросить список адресов электронной почты с крупными заказами для других целей (третий вариант);

- вы обязаны соблюдать дисциплину выполнения операций над отдельными лицами в таблице, извлекая списки только тогда, когда это необходимо для выполнения агрегирующих вычислений, недоступных для таблиц?
- выглядит ли один способ решения требующим меньшего объема ресурсов по сравнению с другим? В действительности это важная деталь: может показаться, что фильтрация по таблице требует больше ресурсов, чем фильтрация по списку значений из одного столбца, но на самом деле это не так. Мы вернемся к обсуждению данного вопроса позже.

Компания или группа разработки иногда устанавливает стандарты проектирования, чтобы помочь вам принять подобные решения. При отсутствии таких условий и особенно в процессе обучения программированию рассмотрите несколько вариантов, когда перед вами поставлены такие задачи, а затем выберите вариант для реализации. Сохранение способности гибко мыслить о различных вариантах решения – полезный навык при любой форме проектирования.

До сих пор мы рассматривали только лишь использование встроенных функций для работы со списками. В следующей главе 10 мы узнаем, как создавать собственные функции, обрабатывающие списки. После этого мощь функций обработки списков останется при них, но они уже не будут казаться такими загадочными, потому что мы сможем создавать подобные функции сами.

# Глава 10

---

## Обработка списков

Мы уже видели в главе 9 несколько примеров функций обработки списков. Они были особенно полезны для расширенной обработки таблиц. Но списки часто возникают в программах, и это происходит естественным образом, потому что многие вещи в нашей жизни – от списков покупок до списков дел и контрольных списков – по своей природе являются списками. Размышляя о функциях, которые нам могут потребоваться при обработке списков, мы можем заметить, что есть несколько интересных категорий, касающихся типов данных в списке:

- некоторые функции списка являются общими и работают со списками любого типа, например длина списка одинакова независимо от того, какие значения он содержит;
- другие функции являются специализированными, по крайней мере по типу данных, например суммирование предполагает, что все значения являются числами (хотя они могут быть возрастом, ценами или другой информацией, представленной числами);
- есть функции, которые находятся где-то посередине, например максимальная функция применяется к любому списку сопоставимых значений, таких как числа или строки.

Это выглядит весьма большим разнообразием, и мы, возможно, озабочены тем, как можно справиться с таким множеством разнообразных видов функций. К счастью и, возможно, к удивлению, существует один стандартный способ написания всех подобных функций. Понимание и практическое освоение этого процесса является целью данной главы.

### 10.1. Создание списков и разделение их на части

До сих пор мы видели единственный способ создания списка: запись `[list: ...]`. Это полезный прием, но составление списков таким способом в действительности скрывает их истинную природу. Фактически каждый список состоит из двух частей: первого (`first`) элемента и остальной части (`rest`) списка. Остальная часть списка сама по себе также является списком, поэтому и она состоит из двух частей... и т. д.

Рассмотрим список `[list: 1, 2, 3]`. Его первым элементом является 1, а остальной частью – `[list: 2, 3]`. Во втором списке первый элемент 2, а остальная часть – `[list: 3]`.

### **Выполните прямо сейчас**

Рассмотрите подробнее этот третий список.

В третьем списке первым элементом является 3, а остальной частью – `[list: ]`, т. е. пустой список. В Pyret существует другой способ записи пустого списка: `empty`.

Списки представляют собой экземпляр структурированных данных (structured data): данных с составными частями и четко определенным форматом для формы этих частей. Списки форматируются по первому элементу и остальным элементам (как отдельной части). Таблицы также структурированы определенным образом: они форматируются по строкам и столбцам, но имена столбцов не согласованы по всем таблицам. Структурированные данные весьма важны в программировании, потому что предсказуемый формат (структура) позволяет писать программы на основе такой структуры. Что мы подразумеваем под этим?

Языки программирования могут предоставлять (и действительно предоставляют) встроенные операторы для анализа и разбора на составные части структурированных данных. Эти операторы называются аксессорами (accessors; методами-получателями). Аксессоры определяются исключительно по структуре типа данных в зависимости от содержимого конкретных данных. Для списков существуют два аксессора: `first` и `rest`. Мы используем аксессор, записывая выражение, за которым следует точка `(.)`, потом имя аксессора. Работая с таблицами, мы видели, что точка означает «углубиться внутрь». Таким образом:

```

l1 = [list: 1, 2, 3]
e1 = l1.first
l2 = l1.rest
e2 = l2.first
l3 = l2.rest
e3 = l3.first
l4 = l3.rest

check:
  e1 is 1
  e2 is 2
  e3 is 3
  l2 is [list: 2, 3]
  l3 is [list: 3]
  l4 is empty
end

```

### **Выполните прямо сейчас**

Какие аксессоры существуют для таблиц?

Аксессоры предоставляют способ разделения данных на составные части на основе их структуры (существует и другой способ, о котором мы узнаем немного позже). А есть ли способ создания данных на основе их структуры? До сих пор мы создавали списки, применяя форму `[list: ...]`, но такой способ не позволял выделить структурное ограничение, согласно которому сам по себе `rest` является списком. Структурированный оператор для создания списков должен явно показывать первый элемент `first` и остальную часть `rest`, которая сама является списком. Операторы для создания структурированных данных называются конструкторами (*constructors*).

Конструктор для списков называется `link`. Он принимает два аргумента: первый элемент `first` и список для формирования (остальную часть `rest`). Ниже приведен пример применения конструктора `link` для создания списка из трех элементов.

```
link(1, link(2, link(3, empty)))
```

Форма `link` создает тот же внутренний список данных, что и ранее рассмотренная операция `[list: ...]`, что подтверждает следующая проверка:

```
check:
  [list: 1, 2, 3] is link(1, link(2, link(3, empty)))
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Внимательно рассмотрите эти две формы записи списков: какие различия вы замечаете?

### **Выполните прямо сейчас**

Используйте форму `link` для записи списка из четырех элементов – названий фруктов, содержащего "lychee", "dates", "mango" и "durian".

После выполнения этого задания вы, возможно, удивились – зачем нужно использовать форму `link`: она более многословна, и в ней труднее различать отдельные элементы. Для людей эта форма не очень удобна. Но оказывается, что она чрезвычайно полезна для программ.

В частности, форма `link` подчеркивает тот факт, что мы действительно имеем две различные структуры списков. Некоторые списки являются пустыми. Все прочие списки не пустые – это означает, что они содержат, как минимум, одну форму `link`. Могут существовать и более интересные структуры некоторых списков (в дальнейшем мы убедимся в этом), но все списки имеют много общего. Как правило, список может быть:

- пустым (запись `empty` или `[list ]`);
- не пустым (запись `link(..., ...)` или `[list: ...]` хотя бы с одним значением в квадратных скобках), где остальная часть (`rest`) также является списком (следовательно, в свою очередь, может быть пустым или не пустым и т. д.).

Это означает, что мы действительно имеем две структурные характеристики списков, и обе они важны при написании программ для обработки списков:

- 1) списки могут быть пустыми или не пустыми;
- 2) не пустые списки содержат первый элемент и остальную часть списка.

Применим на практике эти две структурные характеристики для написания нескольких программ обработки списков.

## 10.2. Несколько упражнений с примерами

Чтобы наглядно проиллюстрировать наши рассуждения, поработаем с некоторыми конкретными примерами функций, выполняющих обработку списков. Во всех примерах будут использоваться списки, а некоторые будут даже создавать их. Иногда будет выполняться преобразование входных данных (например, `map`), иногда – выбор отдельных элементов входных данных (например, `filter`), а в некоторых случаях – их агрегирование (объединение). Поскольку некоторые рассматриваемые здесь функции уже существуют в Pyret, их имена будут начинаться с префикса `my-`, чтобы избежать ошибок. Как мы убедимся, существует стандартная стратегия, которую можно применять для написания всех этих функций: глубокое изучение этой стратегии является главной целью данной главы.

Обязательно используйте префикс имени `my-` постоянно, в том числе и внутри тела функции.

## 10.3. Структурированные задачи со скалярными ответами

Напишем примеры для нескольких функций, описанных выше. Мы подходим к написанию примеров весьма особенным, упрощенным способом. Прежде всего мы всегда должны создавать по крайней мере два примера: один с пустым списком `empty`, другой хотя бы с одной операцией `link`, чтобы охватить две весьма широкие категории списков. Следовательно, мы должны написать больше примеров, характерных для того типа списка, который указан в задаче. Наконец, у нас должно быть даже еще больше примеров, чтобы показать ход рассуждений о решении задачи.

### 10.3.1. `my-len`: примеры

Мы пока еще точно не определили, что означает «длина» списка. С этим мы сталкиваемся сразу же, когда пытаемся написать пример. Какова длина пустого списка `empty`?

**Выполните прямо сейчас**

А как вы думаете?

Два общих примера – 0 и 1. Последний вариант 1 определенно выглядит более правдоподобным. Но если записать список в виде [list], то теперь этот ответ не выглядит абсолютно правильным: очевидно, что это пустой список (к тому же имя empty указывает на это), а пустой список содержит ноль элементов. Поэтому общепринято объявлять, что

```
my-len(empty) is 0
```

Что можно сказать о таком списке, как, например, [list: 7]? В нем точно есть один элемент (7), поэтому

```
my-len([list: 7]) is 1
```

Аналогично для списка [list: 7, 8, 9] мы можем заявить, что

```
my-len([list: 7, 8, 9]) is 3
```

А теперь взглянем на самый последний пример с другой точки зрения. Рассмотрим аргумент [list: 7, 8, 9]. Его первый элемент 7, а остальная часть [list: 8, 9]. Понятно, что 7 – число, но [list: 8, 9] определенно является списком, поэтому мы можем задать вопрос о его длине. Что означает my-len([list: 8, 9])? Этот список содержит два элемента, так что

```
my-len([list: 8, 9]) is 2
```

Первым элементом этого списка является число 8, а остальной частью – [list: 9]. Какова его длина? Обратите внимание: почти такой же вопрос мы задали выше о длине списка [list: 7]. Но [list: 7] не является подсписком (sub-list) списка [list: 7, 8, 9], с которого мы начали рассмотрение, тогда как [list: 9] является. Используя обоснование, аналогичное приведенному выше, мы можем сказать, что

```
my-len([list: 9]) is 1
```

Разумеется, остальной частью этого последнего списка является пустой список, длину которого мы уже решили считать равной 0.

Объединяя все приведенные выше примеры и записав пустой список empty в другой его форме, получаем:

```
my-len([list: 7, 8, 9]) is 3
my-len([list:    8, 9]) is 2
my-len([list:      9]) is 1
my-len([list:        ]) is 0
```

Это можно записать другим способом (обратите особое внимание на выражение справа от is):

```
my-len([list: 7, 8, 9]) is 1 + 2
my-len([list:    8, 9]) is 1 + 1
my-len([list:      9]) is 1 + 0
my-len([list:        ]) is 0
```

Откуда взялись числа 2, 1 и 0 в правых частях каждой операции `+`? Это длины компонента `rest` во входном списке. В предыдущем примере блока кода мы записали эти длины как явные примеры. Заменим числа 2, 1 и 0 на выражения `my-len`, которые их вычисляют:

```
my-len([list: 7, 8, 9]) is 1 + my-len([list: 8, 9])
my-len([list:    8, 9]) is 1 + my-len([list:    9])
my-len([list:      9]) is 1 + my-len([list:      ])
my-len([list:          ]) is 0
```

На основе этих записей здесь, возможно, начинает прослеживаться закономерность (некоторый шаблон). Для пустого списка длина равна 0. Для не пустого списка это сумма 1 («вклад» первого элемента в длину списка) и длины остальной его части. Другими словами, мы можем использовать результат вычисления `my-len` для остальной части списка, чтобы вычислить ответ для всего списка в целом.

### **Выполните прямо сейчас**

В каждом из примеров этого раздела записан отдельный блок проверки вычисления выражения `my-len([list: 7, 8, 9])`. Здесь эти примеры представлены все вместе, а в самом последнем явно используется операция `rest`:

```
my-len([list: 7, 8, 9]) is 3
my-len([list: 7, 8, 9]) is 1 + 2
my-len([list: 7, 8, 9]) is 1 + my-len([list: 8, 9])
my-len([list: 7, 8, 9]) is 1 + my-len([list: 7, 8, 9].rest)
```

Проверьте себя и убедитесь в том, что вы согласны с каждым из этих утверждений. Также проверьте, понимаете ли вы, как правая часть каждого выражения `is` выводится из правой части предыдущего выражения. Цель этого упражнения – убедиться в том, что вы в полной мере понимаете, что самая последняя проверка (которую мы превратим в код) равнозначна первой (которую мы записали при объяснении смысла задачи).

## 10.3.2. `my-sum`: примеры

Повторим описанный выше процесс разработки примеров для второй функции, которая вычисляет сумму элементов в списке чисел. Что является суммой списка `[list: 7, 8, 9]`? Просто сложите эти числа вручную – должен получиться результат 24. Рассмотрим, как это работает на примерах.

На некоторое время оставим в стороне пустой список и рассмотрим приведенные ниже примеры, показывающие операции вычисления суммы:

```
my-sum([list: 7, 8, 9]) is 7 + 8 + 9
my-sum([list:    8, 9]) is      8 + 9
my-sum([list:      9]) is        9
```

которые (после соответствующей замены) представляют собой равнозначные выражения:

```
my-sum([list: 7, 8, 9]) is 7 + my-sum([list: 8, 9])
my-sum([list: 8, 9]) is 8 + my-sum([list: 9])
my-sum([list: 9]) is 9 + my-sum([list: ])
```

Исходя из этого, можно заметить, что сумма пустого списка должна быть равна 0:

```
my-sum(empty) is 0
```

Еще раз обратите внимание на то, как можно использовать результат вычисления `my-sum` для остальной части списка, чтобы вычислить результат для всего списка в целом.

Ноль называется нулевым (нейтральным) элементом по операции сложения (additive identity): это оригинальный способ сказать, что прибавление нуля к любому числу  $N$  дает результат  $N$ . Таким образом, имеет смысл утверждение о том, что ноль должен быть длиной пустого списка, потому что пустой список не содержит элементов, вносящих вклад в общую сумму. Вы можете объяснить, что такое единичный (нейтральный) элемент по операции умножения (multiplicative identity)?

### 10.3.3. От примеров к исходному коду

После разработки приведенных выше примеров теперь необходимо использовать их для создания программы, которая может вычислять длину или сумму любого списка, а не только конкретных, использованных в этих примерах. Как и в предыдущих главах, мы будем применять шаблоны в примерах, чтобы выяснить, как определить функцию общего назначения.

Ниже показана последняя версия примеров для `my-len`, но на этот раз явно включающая операцию `rest` в правой части выражения `is`:

```
my-len([list: 7, 8, 9]) is 1 + my-len([list: 7, 8, 9].rest)
my-len([list: 8, 9]) is 1 + my-len([list: 8, 9].rest)
my-len([list: 9]) is 1 + my-len([list: 9].rest)
my-len([list: ]) is 0
```

Как и при разработке функций для обработки изображений, попытаемся определить общие части приведенных выше примеров. Сначала обратим внимание на то, что большинство примеров имеют весьма много общего, за исключением случая `[list: ]` (`empty`). Поэтому разделим примеры на два набора:

```
my-len([list: 7, 8, 9]) is 1 + my-len([list: 7, 8, 9].rest)
my-len([list: 8, 9]) is 1 + my-len([list: 8, 9].rest)
my-len([list: 9]) is 1 + my-len([list: 9].rest)

my-len([list: ]) is 0
```

После этого разделения (которое соответствует одной из структурных характеристик списков, упоминаемых выше) проявляется более явная закономерность (шаблон): для не пустого списка (названного `someList`) мы вычисляем его длину с помощью выражения:

```
1 + my-len(someList.rest)
```

В общем случае программа `my-len` должна определить, является ли ее входной список пустым или не пустым, используя приведенное выражение с операцией `.rest` в случае не пустого списка. Но как указать на другую ветвь кода в зависимости от структуры списка?

В Pyret имеется конструкция `cases`, применяемая для обособления различных форм в структурированном типе данных. При работе со списками обобщенная форма выражения `cases` выглядит следующим образом:

```
cases (List) e:  
| empty      => ...  
| link(f, r) => ... f ... r ...  
end
```

Здесь большинство частей выражения являются фиксированными (обязательными), но некоторые части можно свободно изменять:

- `e` – выражение, значение которого должно быть списком. Это может быть переменная, связанная со списком, или сложное выражение, вычисление которого в результате дает список;
- `f` и `r` – имена, присваиваемые первому элементу и остальной части списка. Можно выбирать любые имена по вашему усмотрению, хотя в Pyret существует соглашение об использовании имен `f` и `r`.

Справа от каждой комбинации символов `=>` должно находиться выражение.

Вот как работает `cases` в рассматриваемом здесь примере. Pyret сначала вычисляет `e`. Затем проверяет, действительно ли полученное значение является списком. В противном случае выполнение останавливается и выводится сообщение об ошибке. Если получен список, то Pyret определяет его вид. Если это пустой список, то выполняется выражение после `=>` в ветви `empty`. Если список не пуст, т. е. содержит первый элемент и остальную часть, то Pyret связывает `f` и `r` с этими двумя частями соответственно, а затем вычисляет выражение после `=>` в ветви `link`.

Иногда использование других имен может помочь обучающимся вспомнить, что они могут выбирать обозначения для компонентов `first` и `rest`. Это может быть особенно удобно для компонента `first`, имеющего для конкретной задачи особое значение (например, `price` в списке цен и т. д.).

---

### Упражнение 10.1

Попробуйте использовать что-то, отличающееся от списка, например число, в позиции `e` и понаблюдайте, что происходит.

---

Теперь воспользуемся конструкцией `cases` для определения функции `my-len`:

```
fun my-len(l):  
cases (List) l:  
| empty => 0  
| link(f, r) => 1 + my-len(r)  
end  
end
```

Это следует из приведенных выше примеров: если список пуст, то `my-len` вычисляет результат 0, а если список не пустой, то прибавляется единица к длине остальной части списка (здесь к `g`).

Обратите внимание: хотя в нашем последнем наборе примеров для `my-len` явно указана операция `.rest`, при использовании `cases` вместо нее мы используем просто имя `g`, которое Pyret уже (незаметно для нас) определил как `l.rest`.

По аналогии определим функцию `my-sum`:

```
fun my-sum(l):
  cases (List) l:
    | empty => 0
    | link(f, g) => f + my-sum(g)
  end
end
```

Обратите внимание, насколько похож код этих функций и с какой легкостью структура данных подсказывает структуру программы. Это шаблон, который вы очень скоро привыкнете применять на практике.

### Стратегия: разработка функций для работы со списками

Воспользуйтесь структурой списков и мощью конкретных примеров для разработки функций обработки списков.

- Выберите конкретный список (как минимум) с тремя элементами. Запишите последовательность примеров для каждого из элементов этого списка и для каждого суффикса (остальной части) (включая пустой список).
- Перепишите каждый пример, чтобы выразить ожидаемые ответы через данные `first` и `rest` конкретного входного списка. В новых ответах не обязательно использовать операторы `first` и `rest`, но вы должны видеть значения `first` и `rest`, явно представленные в каждом ответе.
- Найдите закономерность (шаблон) в ответах на примеры. Используйте найденный шаблон для разработки кода: напишите выражение `cases`, заполняя часть справа от `=>` на основе разработанных примеров.

Эта стратегия применима к структурированным данным в целом с использованием компонентов каждого элемента данных, а не конкретных компонентов `first` и `rest`, представленных выше.

## 10.4. СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ВЫПОЛНЯЕТСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПИСКОВ

Теперь мы имеем систематическую методику разработки функций, принимающих списки как входные данные, и применим ту же стратегию для создания функций, формирующих список как ответ.

## 10.4.1. my-doubles: примеры и код

Как обычно, начнем с нескольких примеров. Пусть задан список чисел и нам необходим список, удваивающий каждое число (в порядке, определенном исходным списком). Ниже приведен подходящий пример с тремя числами:

```
my-doubles([list: 3, 5, 2]) is [list: 6, 10, 4]
```

Как и ранее, запишем ответы для каждого суффикса списка из этого примера, а также добавим вариант для пустого списка `empty`:

```
my-doubles([list: 5, 2]) is [list: 10, 4]
my-doubles([list: 2]) is [list: 4]
my-doubles([list: ]) is [list: ]
```

Теперь перепишем выражения ответов, чтобы включить в них конкретные данные `first` и `rest` для каждого примера. Начнем с включения данных только для `first` и только в первом примере:

```
my-doubles([list: 3, 5, 2]) is [list: 3 * 2, 10, 4]
my-doubles([list: 5, 2]) is [list: 10, 4]
my-doubles([list: 2]) is [list: 4]
my-doubles([list: ]) is [list: ]
```

Далее добавим данные `rest` (`[list: 5, 2]`) в первый пример. Текущий ответ в первом примере:

```
[list: 3 * 2, 10, 4]
```

и `[list: 10, 4]` – результат применения функции к списку `[list: 5, 2]`. Возможно, после этого возникает искушение заменить правую часть в первом примере на следующее выражение:

```
[list: 3 * 2, my-doubles([list: 5, 2])]
```

### **Выполните прямо сейчас**

Какое значение должно вычислить это выражение? Вероятно, вы захотите попробовать выполнить этот пример, в котором напрямую не используется `my-doubles`:

```
[list: 3 * 2, [list: 10, 4]]
```

Вот незадача! Нам нужен один (плоский) список, а не список внутри другого списка. Есть ощущение, что мы на правильном пути с точки зрения продолжения работы с ответом, чтобы использовать значения `first` и `rest`, но мы явно еще не достигли конечной цели.

### **Выполните прямо сейчас**

Какое значение вычисляет следующее выражение?

```
link(3 * 2, [list: 10, 4])
```

Обратите внимание на различие между выражениями в двух последних упражнениях: в самом последнем использована операция `link` для передачи значения, охватываемого `first`, в преобразование `rest`, тогда как предыдущее выражение пытается сделать это с помощью `list:`.

### **Выполните прямо сейчас**

Сколько элементов содержится в списках, которые получаются в результате выполнения каждого из следующих выражений?

```
[list: 25, 16, 32]
[list: 25, [list: 16, 32]]
link(25, [list: 16, 32])
```

### **Выполните прямо сейчас**

Кратко сформулируйте различие между тем, как `link` и `list:` объединяют элемент и список. Попробуйте выполнить дополнительные примеры в интерактивной панели, если потребуется обоснование этих принципов.

Здесь главная итоговая мысль заключается в том, что мы используем `link` для вставки элемента в существующий список, тогда как `list:` применяется для создания нового списка, который состоит из старого списка и некоторого элемента. Тогда если вернуться к ранее рассмотренным примерам, то мы включаем `rest` в первый пример, записывая его в следующем виде:

```
my-doubles([list: 3, 5, 2]) is link(3 * 2, [list: 10, 4])
my-doubles([list: 5, 2]) is [list: 10, 4]
my-doubles([list: 2]) is [list: 4]
my-doubles([list: ]) is [list: ]
```

который затем преобразуется в

```
my-doubles([list: 3, 5, 2]) is link(3 * 2, my-doubles([list: 5, 2]))
my-doubles([list: 5, 2]) is [list: 10, 4]
my-doubles([list: 2]) is [list: 4]
my-doubles([list: ]) is [list: ]
```

Применяя этот принцип ко всем примерам, получим:

```
my-doubles([list: 3, 5, 2]) is link(3 * 2, my-doubles([list: 5, 2]))
my-doubles([list: 5, 2]) is link(5 * 2, my-doubles([list: 2]))
my-doubles([list: 2]) is link(2 * 2, my-doubles([list: ]))
my-doubles([list: ]) is [list: ]
```

Теперь у нас есть примеры, которые явно используют элементы `first` и `rest`, и мы можем приступить к написанию функции `my-double`:

```
fun my-doubles(l):
  cases (List) l:
```

```
| empty => empty
| link(f, r) =>
  link(f * 2, my-doubles(r))
end
end
```

## 10.4.2. my-str-len: примеры и код

В функции `my-doubles` входной и выходной списки содержат элементы одинакового типа. Функции также могут создавать списки, содержимое которых имеет тип, отличающийся от типа входного списка. Рассмотрим это на примере. Пусть задан список строк и необходимо вычислить длину каждой строки (в том же порядке, как во входном списке). Таким образом, подходящий пример выглядит так:

```
my-str-len([list: "hi", "there", "mateys"]) is [list: 2, 5, 6]
```

Как и ранее, мы должны рассмотреть ответы на каждую подзадачу приведенного выше примера:

```
my-str-len([list:      "there", "mateys"]) is [list:      5, 6]
my-str-len([list:      "there", "mateys"]) is [list:      6]
```

Или, другими словами:

```
my-str-len([list: "hi", "there", "mateys"]) is link(2, [list: 5, 6])
my-str-len([list:      "there", "mateys"]) is link(5, [list: 6])
my-str-len([list:      "mateys"]) is link(6, [list: ])
```

Это сообщает нам, что ответом на пустой список должен быть `empty`:

```
my-str-len(empty) is empty
```

Следующий шаг – изменение ответов в примерах для того, чтобы получить явные части `first` и `rest`. Надеемся, что уже сейчас вы увидели закономерность (шаблон): результат в остальной части списка явно выглядит как другой пример. Следовательно, мы начнем с передачи значения `rest` входного списка каждого примера в ответ:

```
my-str-len([list: "hi", "there", "mateys"]) is link(2, my-str-len([list: "there", "mateys"]))
my-str-len([list:      "there", "mateys"]) is link(5, my-str-len([list:      "mateys"]))
my-str-len([list:      "mateys"]) is link(6, my-str-len([list: ]))
my-str-len(list: ) is [list: ]
```

Осталось только объяснить, как работают значения `first` в выходных данных. В контексте рассматриваемой здесь задачи это означает, что необходимо преобразовать "hi" в 2, "there" в 5 и т. д. Из условия задачи нам известно, что 2 и 5 означают длины (счетчики символов) соответствующих строк. Операция, определяющая длину строки, называется `string-length`. Таким образом, примеры выглядят так:

```

my-str-len([list: "hi", "there", "mateys"]) is
    link(string-length("hi"), my-str-len([list: "there", "mateys"]))
my-str-len([list:
    "there", "mateys"]) is
    link(string-length("there"), my-str-len([list:
        "mateys"])) is
        link(string-length("mateys"), my-str-len([list: ]))
my-str-len(list: ) is [list: ]

```

На основании этого пишем функцию, которая использует шаблон, разработанный в приведенных выше примерах:

```

fun my-str-len(l):
    cases (List) l:
        | empty => empty
        | link(f, r) =>
            link(string-length(f), my-str-len(r))
    end
end

```

## 10.5. СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ ВЫБИРАЮТ ЭЛЕМЕНТЫ ИЗ СПИСКОВ

В предыдущем разделе мы рассматривали функции, которые выполняли преобразование элементов списков (удваивая числа или подсчитывая символы в строках). Тип выходного списка может совпадать или не совпадать с типом входного списка. Но есть и другие функции, которые создают списки, выбирая (select) некоторые элементы: каждый элемент выходного списка содержался во входном списке, но некоторые элементы входного списка отсутствуют в выводе. В этом разделе уже известный нам метод вывода функций из примеров адаптируется для применения процедуры выбора элементов.

### 10.5.1. my-pos-nums: примеры и код

Как и в первом примере, мы будем выбирать только положительные числа из списка, содержащего положительные и неположительные числа.

#### *Выполните прямо сейчас*

Создайте последовательность примеров, получаемых из входного списка [list: 1, -2, 3, -4].

Начинаем:

```

my-pos-nums([list: 1, -2, 3, -4]) is [list: 1, 3]
my-pos-nums([list: -2, 3, -4]) is [list: 3]

```

```
my-pos-nums([list:      3, -4]) is [list:      3]
my-pos-nums([list:      -4]) is [list:      ]
my-pos-nums([list:      ]) is [list:      ]
```

Эти примеры можно записать в следующей форме:

```
my-pos-nums([list: 1, -2, 3, -4]) is link(1, [list: 3])
my-pos-nums([list: -2, 3, -4]) is      [list: 3]
my-pos-nums([list:      3, -4]) is link(3, [list: ])
my-pos-nums([list:      -4]) is      [list: ]
my-pos-nums([list:      ]) is      [list: ]
```

Или в более явном виде:

```
my-pos-nums([list: 1, -2, 3, -4]) is link(1, my-pos-nums([list: -2, 3, -4]))
my-pos-nums([list: -2, 3, -4]) is      my-pos-nums([list:      3, -4])
my-pos-nums([list:      3, -4]) is link(3, my-pos-nums([list:      -4]))
my-pos-nums([list:      -4]) is      my-pos-nums([list:      ])
my-pos-nums([list:      ]) is      [list: ]
```

В отличие от последовательностей примеров для функций преобразования списков, здесь мы видим, что ответы имеют другие формы: некоторые включают `link`, тогда как другие просто обрабатывают остальную часть `rest` списка. Когда необходимы другие формы выходных данных во всем наборе примеров, в коде потребуется выражение `if` для различения условий, порождающих каждую форму.

Что определяет каждую форму вывода, которую мы получаем? Изменим примеры (в которых вводом является не пустой список) и получим следующую форму вывода:

```
my-pos-nums([list: 1, -2, 3, -4]) is link(1, my-pos-nums([list: -2, 3, -4]))
my-pos-nums([list:      3, -4]) is link(3, my-pos-nums([list:      -4]))
my-pos-nums([list:      -2, 3, -4]) is      my-pos-nums([list:      3, -4])
my-pos-nums([list:      -4]) is      my-pos-nums([list:      ])
```

После этой реорганизации можно видеть, что примеры, использующие `link`, содержат положительное число в первой позиции `first` и просто не обрабатывают остальную часть `rest` списка. Это говорит о том, что выражение `if` должно проверять, является ли положительным числом первый элемент `first` в данном списке. Таким образом, получаем следующую программу:

```
fun my-pos-nums(l):
  cases (List) l:
    | empty => empty
    | link(f, r) =>
      if f > 0:
        link(f, my-pos-nums(r))
      else:
        my-pos-nums(r)
      end
    end
  end
```

***Выполните прямо сейчас***

Является ли исчерпывающим приведенный выше набор примеров?

В действительности не является. Существует множество примеров, которые мы не рассмотрели, например списки, завершающиеся положительными числами, и списки с нулями.

**Упражнение 10.2**

Разработайте такие примеры и понаблюдайте, как они влияют на программу.

## 10.5.2. my-alternating: примеры и код

Теперь рассмотрим задачу, в которой элементы выбираются не по значению, а по позиции. Необходимо написать функцию, которая выбирает элементы списка через одну позицию. И снова мы начинаем работу с примеров.

***Выполните прямо сейчас***

Поработайте с результатами для функции my-alternating, начиная со списка [list: 1, 2, 3, 4, 5, 6].

Ниже показано, как обрабатываются такие примеры:

```
<alternating-egs-1> ::=  
check:  
    my-alternating([list: 1, 2, 3, 4, 5, 6]) is [list: 1, 3, 5]  
    my-alternating([list: 2, 3, 4, 5, 6]) is [list: 2, 4, 6]  
    my-alternating([list: 3, 4, 5, 6]) is [list: 3, 5]  
    my-alternating([list: 4, 5, 6]) is [list: 4, 6]  
end
```

Но что это? Два первых из приведенных выше ответов правильны, но второй никак не помогает сформировать первый ответ. Это означает, что ранее применяемый способ решения задач недостаточен для нового типа задачи. Но все же он остается полезным: обратите внимание на связь между первым и третьим примерами, а также между вторым и четвертым. Это наблюдение согласуется с нашей целью выбора элементов через одну позицию.

Как будет выглядеть в коде нечто подобное? Прежде чем пытаться написать функцию, попробуем переписать первый пример с учетом третьего:

```
my-alternating([list: 1, 2, 3, 4, 5, 6]) is [list: 1, 3, 5]  
my-alternating([list: 3, 4, 5, 6]) is [list: 3, 5]  
  
my-alternating([list: 1, 2, 3, 4, 5, 6]) is link(1, my-alternating([list: 3, 4, 5, 6]))
```

Обратите внимание: в этой переписанной версии мы отбрасываем не один, а два элемента списка перед повторным использованием `my-alternating`. Необходимо объяснить, как этот случай обработать в коде.

Начнем с обычного шаблона функции с выражением `cases`:

```
fun my-alternating(l):
  cases (List) l:
    | empty => [list:]
    | link(f, r) => link(f, ... r ...)
  end
end
```

Следует отметить, что мы не можем просто вызвать `my-alternating` с параметром `r`, потому что `r` исключает только один элемент из списка, а не два, как требует данная задача. Необходимо разделить еще и `r`, чтобы получить остальную часть от остальной части (`rest` от `rest`) исходного списка. Для этого воспользуемся еще одним выражением `cases`, вложенным в первое выражение:

```
fun my-alternating(l):
  cases (List) l:
    | empty => [list:]
    | link(f, r) =>
      cases (List) r: # Обратите внимание: разделение r, а не l.
        | empty => ??? # Обратите внимание на ???.
        | link(fr, rr) =>
          # fr = first от rest, rr = rest от rest.
          link(f, my-alternating(rr))
      end
  end
end
```

Этот код соответствует примеру, с которым мы только что работали. Но следует отметить, что небольшая часть работы осталась незавершенной: необходимо решить, что делать в случае `empty` во вложенном выражении `cases` (в коде этот случай помечен тремя знаками вопроса `???`).

В этот момент почти все склоняются к варианту замены `???` на `[list:]`. В конце концов, разве мы не возвращаем `[list:]` во всех случаях `empty`?

### Выполните прямо сейчас

Замените `???` на `[list:]` и протестируйте программу на сформированных выше примерах:

```
my-alternating([list: 1, 2, 3, 4, 5, 6]) is [list: 1, 3, 5]
my-alternating([list: 2, 3, 4, 5, 6]) is [list: 2, 4, 6]
my-alternating([list: 3, 4, 5, 6]) is [list: 3, 5]
my-alternating([list: 4, 5, 6]) is [list: 4, 6]
```

Что вы наблюдаете?

Не получилось! Мы написали программу, которая кажется работающей для списков с четным числом элементов, но не для нечетного числа элементов. Как такое могло случиться? В приведенном выше коде единственным фрагментом, который мы написали по предположению, был вариант заполнения случая `empty` во вложенном выражении `cases`, поэтому проблема непременно должна была возникнуть именно там. Но сосредоточим внимание не на коде, а на примерах. Требуется простой пример, который указывал бы на проблемный фрагмент кода. Мы попадаем в это место, когда список `l` не пуст, но `g` (остальная часть списка `l`) пуста. Другими словами, нам нужен пример только с одним элементом.

### **Выполните прямо сейчас**

Завершите показанный ниже пример:

```
my-alternating([list: 5]) is ???
```

Если задан список с единственным элементом, то он должен быть включен в список выбираемых через одну позицию элементов. Таким образом, этот пример должен завершаться так:

```
my-alternating([list: 5]) is [list: 5]
```

### **Выполните прямо сейчас**

Используйте этот пример для обновления результата выполнения `my-alterning`, когда остальная часть `g` пуста в приведенном выше коде.

После применения этого нового примера окончательная версия функции `my-alterning` принимает следующий вид:

```
fun my-alternating(l):
    cases (List) l:
        | empty => empty
        | link(f, g) =>
            cases (List) g:      # Обратите внимание: разделение g, а не l.
                | empty =>      # Список содержит нечетное число элементов.
                    [list: f]
                | link(fr, rr) =>
                    # fr = first от rest, rr = rest от rest.
                    link(f, my-alternating(rr))
            end
    end
end
```

К какому выводу мы приходим после решения этой задачи? Таких выводов два:

- не пренебрегайте маленькими примерами: результатом функции обработки списков в случае `empty` не всегда является пустой список;

- если в задаче требуется обработка нескольких элементов из начала списка, то можно воспользоваться вложенными выражениями `cases` для доступа к последующим элементам.

Эти выводы будут иметь значение и в следующих примерах: будьте внимательны!

## 10.6. СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ НА НЕСТРОГИХ ОБЛАСТИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 10.6.1. my-max: примеры

Теперь найдем максимальное значение в списке. Для упрощения предположим, что имеем дело только со списками чисел. Какие виды списков мы должны формировать? Очевидно, необходимы пустые и не пустые списки, ...но какие еще? Является ли список вида `[list: 1, 2, 3]` удачным примером? Ну, в этом примере нет ничего плохого, но мы также должны рассматривать списки, в которых максимальное значение находится в начале, а не только в конце. Максимальное значение может располагаться в середине списка, или повторяться несколько раз, или может быть отрицательным числом и т. д. Ниже приведен интересный, хотя и не полный набор примеров:

```
my-max([list: 1, 2, 3]) is 3
my-max([list: 3, 2, 1]) is 3
my-max([list: 2, 3, 1]) is 3
my-max([list: 2, 3, 1, 3, 2]) is 3
my-max([list: 2, 1, 4, 3, 2]) is 4
my-max([list: -2, -1, -3]) is -1
```

А что можно сказать о `my-max(empty)`?

#### **Выполните прямо сейчас**

Можно ли определить результат `my-max(empty)` равным 0? Возврат 0 для пустого списка до этого уже дважды срабатывал правильно.

Вернемся к этому вопросу через некоторое время.

Прежде чем продолжить, полезно узнать, что существует функция `num-max`, уже определенная в Pyret, которая сравнивает два числа:

```
num-max(1, 2) is 2
num-max(-1, -2) is -1
```

---

### Упражнение 10.3

Предположим, что функция `num-max` пока еще не встроена в Pyret. Можете ли вы определить ее? Вы обнаружите, что материал, изученный в разделе 6.3, окажется полезным. Не забудьте написать несколько тестов.

---

Теперь мы можем рассмотреть, как работает функция `my-max`:

```
my-max([list: 1, 2, 3]) is 3
my-max([list: 2, 3]) is 3
my-max([list: 3]) is 3
```

Хм, в действительности это не позволило нам узнать ничего нового, не так ли? Вероятнее всего, мы ни в чем не можем быть уверены. И мы все еще не знаем, что делать с пустым списком.

Попробуем рассмотреть второй пример входных данных:

```
my-max([list: 3, 2, 1]) is 3
my-max([list: 2, 1]) is 2
my-max([list: 1]) is 1
```

Здесь действительно сообщается кое-что полезное, но, возможно, пока еще мы не можем это увидеть. Попробуем рассмотреть что-то посложнее:

```
my-max([list: 2, 1, 4, 3, 2]) is 4
my-max([list: 1, 4, 3, 2]) is 4
my-max([list: 4, 3, 2]) is 4
my-max([list: 3, 2]) is 3
my-max([list: 2]) is 2
```

Замечаем, что максимальное значение в остальной части списка дает нам потенциальный вариант ответа, но результат его сравнения с первым элементом определенно в пользу первого:

```
my-max([list: 2, 1, 4, 3, 2]) is num-max(2, 4)
my-max([list: 1, 4, 3, 2]) is num-max(1, 4)
my-max([list: 4, 3, 2]) is num-max(4, 3)
my-max([list: 3, 2]) is num-max(3, 2)
my-max([list: 2]) is ...
```

Последний случай приводит к небольшому затруднению: кажется, следовало бы записать

```
my-max([list: 2]) is num-max(2, ...)
```

но в действительности мы не знаем, что является максимумом (или минимумом, или любым другим элементом) пустого списка, – мы только лишь можем передавать числа в функцию `num-max`. Таким образом, за исключением этого сомнительного случая, у нас остаются следующие примеры:

```
my-max([list: 2, 1, 4, 3, 2]) is num-max(2, my-max([list: 1, 4, 3, 2]))
my-max([list: 1, 4, 3, 2]) is num-max(1, my-max([list: 4, 3, 2]))
my-max([list: 4, 3, 2]) is num-max(4, my-max([list: 3, 2]))
my-max([list: 3, 2]) is num-max(3, my-max([list: 2]))
```

Эти примеры опять помогли нам: они позволили выяснить, как можно использовать ответ для каждой остальной части (`rest`) списка при вычислении ответа для всего списка в целом, который, в свою очередь, является остальной частью (`rest`) некоторого другого списка и т. д. Если вернуться назад и рассмотреть записанные ранее примеры, то вы увидите, что этот шаблон их также охватывает.

Но теперь пришло время разобраться со случаем пустого списка `empty`. Реальная проблема заключается в том, что у нас нет какого-либо определенного максимального значения для пустого списка: для любого передаваемого числа всегда существует число, которое больше него (предполагается, что разрядность нашего вычислительного механизма достаточно велика), т. е. может стать ответом вместо переданного. Короче говоря, бессмысленно спрашивать о максимуме (или минимуме) пустого списка: концепция «максимум» определена только для не пустых списков. То есть при вопросе о максимуме пустого списка мы должны подать сигнал об ошибке:

```
my-max(empty) raises ""
```

(именно так в Pyret мы говорим, что выражение генерирует ошибку; нас не интересуют подробности об этой ошибке, поэтому строка пустая).

## 10.6.2. my-max: от примеров к коду

И снова мы можем закодировать приведенные выше примеры, т. е. превратить их в универсальную программу, которая работает со всеми экземплярами примеров. Но здесь есть одна хитрость. Если слепо следовать использованному ранее шаблону, то в итоге получим следующий код:

```
fun my-max(l):
  cases (List) l:
    | empty => raise("not defined for empty lists")
      # "Значение не определено для пустых списков"
    | link(f, r) => num-max(f, my-max(r))
  end
end
```

**Выполните прямо сейчас**

Что неправильно в этом коде?

Рассмотрим список `[list: 2]`. Он превращается в выражение

```
num-max(2, my-max([list: ]))
```

в котором, разумеется, возникает ошибка. Следовательно, эта функция никогда не будет работать с любым списком, содержащим один или более элементов.

Причина в следующем: необходима полная уверенность в том, что мы не пытаемся вычислить максимум пустого списка. Возвращаясь к примерам, мы видим, что перед вызовом `my-max` необходимо проверить, не является ли пустой остальная часть (`rest`) текущего списка. Если она пуста, то вызывать `my-max` вообще не нужно. Таким образом:

```
fun my-max(l):
  cases (List) l:
    | empty => raise("not defined for empty lists")
      # "Значение не определено для пустых списков"
    | link(f, r) =>
      cases (List) r:
        | empty => ...
        | ...
  end
end
```

Возвращаемся к тому, что нужно сделать, если в текущий момент остальная часть списка не пуста.

Если остальная часть `rest` списка `l` пуста, то приведенные выше примеры сообщают, что максимальным является первый элемент в этом списке. Следовательно, можно заполнить эту часть кода:

```
fun my-max(l):
  cases (List) l:
    | empty => raise("not defined for empty lists")
      # "Значение не определено для пустых списков"
    | link(f, r) =>
      cases (List) r:
        | empty => f
        | ...
  end
end
```

Обратите особое внимание на отсутствие вызова `my-max`. Но если список не пуст, то приведенные выше примеры сообщают, что функция `my-max` вернет максимальное значение в остальной части списка, и необходимо просто сравнить этот ответ с первым элементом (`f`):

```
fun my-max(l):
  cases (List) l:
    | empty => raise("not defined for empty lists")
      # "Значение не определено для пустых списков"
    | link(f, r) =>
      cases (List) r:
        | empty => f
        | else => num-max(f, my-max(r))
  end
end
```

И действительно, это определение решает поставленную задачу полностью.

## 10.7. БОЛЕЕ СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ СО СКАЛЯРНЫМИ ОТВЕТАМИ

### 10.7.1. my-avg: примеры

Теперь попробуем вычислить среднее значение списка чисел. Начнем с примера списка `[list: 1, 2, 3, 4]` и разработаем несколько примеров на его основе. Очевидно, что среднее значение чисел в этом списке равно  $(1 + 2 + 3 + 4)/4$ , или  $10/4$ .

На основе структуры этого списка мы видим, что остальной его частью является `[list: 2, 3, 4]`, а остальной ее частью – `[list: 3, 4]` и т. д. Получаемые в результате средние значения:

```
my-avg([list: 1, 2, 3, 4]) is 10/4
my-avg([list:    2, 3, 4]) is 9/3
my-avg([list:      3, 4]) is 7/2
my-avg([list:        4]) is 4/1
```

Здесь проблема заключается в том, что абсолютно не понятно, как получить из ответа для подсписка ответ для всего списка в целом. То есть мы получаем следующие два элемента информации:

- среднее значение остальной части списка равно  $9/3$ , т. е. 3;
- первое число в списке равно 1.

Как определить, что среднее значение всего списка в целом должно быть равно  $10/4$ ? Если это вам не понятно, не беспокойтесь: имея в распоряжении только указанные выше два элемента информации, сделать это невозможно.

Приведем более простой пример, который объясняет, почему это невозможно. Предположим, что первое значение в списке равно 1, а среднее значение остальной части списка равно 2. Ниже показаны два весьма различных списка, которые соответствуют этому описанию:

```
[list: 1, 2]      # Остальная часть содержит один элемент с суммой 2.
[list: 1, 4, 0]  # Остальная часть содержит два элемента с суммой 4.
```

Среднее значение всего первого списка равно  $3/2$ , в то время как среднее значение всего второго списка равно  $5/3$ , и эти значения не равны.

Таким образом, для вычисления среднего значения всего списка в целом никакой пользы не приносит знание среднего значения остальной его части. Вместо этого необходимо знать сумму и длину остальной части списка. Зная

эти две характеристики, мы можем прибавить первый элемент к сумме и 1 к длине, после чего вычислить новое среднее значение.

Теоретически можно было бы попробовать написать функцию `avegage`, которая возвращает всю эту информацию. Но вместо этого гораздо легче просто разделить задачу на две небольшие подзадачи. Ведь мы уже видели, как вычисляется длина и сумма списка. Таким образом, среднее значение можно вычислить, просто используя эти существующие функции:

```
fun my-avg(l):
    my-sum(l) / my-len(l)
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Каким должно быть среднее значение пустого списка? Позволяет ли приведенный выше код получить то, что вы ожидаете?

Как и при обсуждении максимального значения выше в разделе 10.6, среднее значение пустого списка не является строго определенной концепцией. Следовательно, вполне уместным должно быть сообщение об ошибке. Приведенная выше реализация обеспечивает это, но весьма неудачно: в ней сообщается об ошибке деления. Следует применять более правильный практический прием программирования: перехват возникшей ситуации и немедленный вывод соответствующего сообщения, а не надежда на то, что некоторая другая функция оповестит пользователя об ошибке.

---

### **Упражнение 10.4**

Измените приведенный выше код функции `my-avg`, чтобы обеспечить вывод сообщения об ошибке при передаче в нее пустого списка.

---

Таким образом, мы видим, что использованный здесь процесс – логический вывод кода из примеров – не всегда достаточен, и требуются более совершенные методики решения некоторых задач. Но при этом следует отметить, что работа с примерами помогает быстро определять ситуации, в которых данный подход работает или не работает. Кроме того, если вы рассмотрите этот процесс более внимательно, то заметите, что приведенные выше примеры действительно подсказывают, как решать задачу: в самых первых примерах этого раздела мы записали ответы  $10/4$ ,  $9/3$  и  $7/2$ , которые соответствуют сумме чисел каждого списка, разделенной на его длину. Следовательно, запись ответов в такой форме (в отличие, например, от записи только второй характеристики как 3) уже позволяет увидеть структуру решения.

## 10.8. СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ С АККУМУЛЯТОРАМИ

### 10.8.1. my-running-sum: первая попытка

И еще раз начнем с примера.

#### **Выполните прямо сейчас**

Вычислите результаты для функции `my-running-sum`, начав со списка `[list: 1, 2, 3, 4, 5]`.

Ниже показано, как должны выглядеть несколько первых примеров:

```
<running-sum-egs-1> ::=

check:
  my-running-sum([list: 1, 2, 3, 4, 5]) is [list: 1, 3, 6, 10, 15]
  my-running-sum([list: 2, 3, 4, 5]) is [list: 2, 5, 9, 14]
  my-running-sum([list: 3, 4, 5]) is [list: 3, 7, 12]
end
```

Здесь опять не видно никакой явной связи между результатом для остальной части списка и результатом для всего списка в целом.

(Это не является строгим правилом: можно продолжать выравнивать ответы, как показано ниже:

```
my-running-sum([list: 1, 2, 3, 4, 5]) is [list: 1, 3, 6, 10, 15]
my-running-sum([list: 2, 3, 4, 5]) is [list: 2, 5, 9, 14]
my-running-sum([list: 3, 4, 5]) is [list: 3, 7, 12]
```

и заметить, что мы вычисляем ответ для остальной части списка, затем прибавляем первый элемент к каждому значению в ответе и привязываем (`link`) первый элемент к началу списка. Теоретически можно вычислить это решение напрямую, но сейчас, возможно, для этого потребуется больший объем работы, нежели при поиске более простого способа ответа на этот вопрос.)

### 10.8.2. my-running-sum: примеры и код

Вспомните, с чего мы начинали в разделе 10.8.1. На примерах `<running-sum-egs-1>` показана следующая задача. При обработке остальной части (`rest`) списка мы забывали обо всем, что ей предшествует. То есть при обработке списка, начиная с 2, мы забываем, что раньше видели 1, когда начинаем с 3, то забываем о ранее наблюдаемых 1 и 2 и т. д. Другими словами, мы постоянно забываем о прошлом. Необходим какой-то способ избежать этого.

Самое легкое, что можно сделать, – просто изменить функцию так, чтобы она сохраняла эту «память» или то, что мы будем называть аккумулятором

(accumulator). То есть предположим, что мы определили новую функцию `my-rs`. Она принимает и создает список чисел, но в дополнение к этому также подсчитывает сумму чисел, предшествующих текущему списку.

### **Выполните прямо сейчас**

Какой должна быть первоначальная сумма?

В самом начале «предшествующего списка» нет, поэтому будем использовать нулевой (нейтральный) элемент по операции сложения (additive identity): 0. Тип функции `my-rs` показан ниже:

```
my-rs :: Number, List<Number> -> List<Number>
```

Теперь изменим примеры из `<running-sum-egs-1>` как примеры для `my-rs`. В измененных примерах используется оператор `+` для соединения двух списков в один (за элементами первого списка следуют элементы второго):

```
my-rs( 0, [list: 1, 2, 3, 4, 5]) is [list: 0 + 1] + my-rs( 0 + 1, [list: 2, 3, 4, 5])
my-rs( 1, [list: 2, 3, 4, 5]) is [list: 1 + 2] + my-rs( 1 + 2, [list: 3, 4, 5])
my-rs( 3, [list: 3, 4, 5]) is [list: 3 + 3] + my-rs( 3 + 3, [list: 4, 5])
my-rs( 6, [list: 4, 5]) is [list: 6 + 4] + my-rs( 6 + 4, [list: 5])
my-rs(10, [list: 5]) is [list: 10 + 5] + my-rs(10 + 5, [list: ])
my-rs(15, [list: ]) is empty
```

Таким образом, примеры для `my-rs` можно преобразовать в следующий код:

```
fun my-rs(acc, l):
    cases (List) l:
        | empty => empty
        | link(f, r) =>
            new-sum = acc + f
            link(new-sum, my-rs(new-sum, r))
    end
end
```

Осталось только лишь вызвать эту функцию из тела `my-running-sum`:

```
fun my-running-sum(l):
    my-rs(0, l)
end
```

Обратите внимание: мы не изменяем саму функцию `my-running-sum` так, чтобы она принимала дополнительные аргументы. Корректность этого кода зависит от начального значения переменной `acc`, которая должна быть равной 0. Если бы мы добавили параметр для `acc`, то любой код, вызывающий `my-running-sum`, мог бы передать неожидаемое значение, искажающее результат. Кроме того, поскольку это фиксированное значение, добавление такого параметра означало бы перекладывание дополнительной (и ненужной) работы на других людей, использующих наш код.

## 10.8.3. my-alternating: примеры и код

Вспомните примеры из раздела 10.5.2. Там мы заметили, что код создавался по примерам, чередующимся через один. Можно было бы выбрать примеры другим способом, чтобы при переходе от одного примера к следующему пропускались два элемента, а не один. Здесь мы рассмотрим другой подход к решению той же задачи.

Вернемся к примерам, которые уже рассматривались ранее: *<alternating-egs-1>*. Мы написали функцию `my-alternating` для прохода по списку с одновременным посещением, по существу, двух элементов. Другим вариантом является проход с одновременным посещением одного элемента, но с постоянным отслеживанием четности или нечетности позиции текущего элемента, т. е. с добавлением «памяти» в программу. Поскольку необходимо отслеживать только одну информационную характеристику, можно использовать для нее логическое (Boolean) значение. С этой целью определим новую функцию:

```
my-alt :: List<Any>, Boolean -> List<Any>
```

Дополнительный аргумент предназначен для сбора следующей информации: находимся ли мы в позиции элемента, который нужно сохранить, или же в позиции игнорируемого элемента.

Можно воспользоваться уже существующим шаблоном для функций, работающих со списками. При получении элемента мы должны обратиться за советом к аккумулятору – сохранить этот элемент или нет. Если значением аккумулятора является `true`, то элемент связывается (`link`) с ответом, иначе он игнорируется. Но при обработке остальной части (`rest`) списка мы должны всегда помнить о необходимости обновления аккумулятора: если элемент сохранен, то следующий сохранять не нужно, и наоборот.

```
fun my-alt(l, keep):
    cases (List) l:
        | empty => empty
        | link(f, r) =>
            if keep:
                link(f, my-alt(r, false))
            else:
                my-alt(r, true)
            end
        end
    end
```

И последнее: необходимо определить начальное значение аккумулятора. В данном случае, поскольку требуется сохранение чередующихся через один элементов, начиная с первого, начальным значением должно быть `true`:

```
fun my-alternating(l):
    my-alt(l, true)
end
```

---

### Упражнение 10.5

Определите функцию `mu-max`, используя аккумулятор. Что именно представляет этот аккумулятор? Вы столкнулись с какими-либо затруднениями при решении этой задачи?

---

## 10.9. РАБОТА С НЕСКОЛЬКИМИ ОТВЕТАМИ

Во всех предыдущих обсуждениях предполагалось, что существует только один ответ для заданных входных данных. Достаточно часто так и происходит, но ситуация также зависит от того, как формулируется задача и какой способ мы выбираем для создания примеров. Прямо сейчас мы рассмотрим это более подробно.

### 10.9.1. `uniq`: постановка задачи

Рассмотрим задачу написания функции `uniq`: задан список значений, функция формирует список тех же значений, но без повторяющихся элементов (потому что `uniq` – сокращение от «unique» – неповторяющийся, единственный в своем роде).

`uniq` – это имя утилиты из операционной системы Unix, обладающей аналогичным поведением, поэтому имя записано именно так.

Рассмотрим следующие входные данные: `[list: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4, 1]`.

#### **Выполните прямо сейчас**

Какую последовательность примеров генерируют эти входные данные? Чрезвычайно важно, чтобы здесь вы остановились и попробовали записать ответ на этот вопрос вручную. Вы увидите, что существует несколько решений этой задачи, поэтому весьма полезно рассмотреть во всех подробностях, что же вы «сгенерировали». Даже если вы не сможете сформировать последовательность, попытка сделать это лучше подготовит вас к изучению следующего материала.

Как вы получили свой пример? Если вы просто «подумали об этом немного и кое-что записали», то, возможно, получили (а может быть и не получили) некоторый пример, который можно превратить в программу. Но программы могут выполняться только систематически, т. е. в строго определенном порядке, заданном программистом, они не умеют «думать». Поэтому надеемся, что вы выбрали четко определенный путь к вычислению ответа.

### 10.9.2. `uniq`: примеры

Оказывается, что существует несколько возможных ответов, потому что мы (преднамеренно) привели не вполне определенную формулировку задачи.

Предположим, что существуют два экземпляра значения в списке – какой из них нужно сохранить, первый или второй? С одной стороны, поскольку оба экземпляра непременно должны быть равными, это не важно, но это имеет значение для записи конкретных примеров и для вывода решения.

Например, можно было бы сгенерировать такую последовательность:

**examples:**

```
uniq([list: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4, 1]) is [list: 3, 2, 4, 1]
uniq([list: 2, 1, 3, 1, 2, 4, 1]) is [list: 3, 2, 4, 1]
uniq([list: 1, 3, 1, 2, 4, 1]) is [list: 3, 2, 4, 1]
uniq([list: 3, 1, 2, 4, 1]) is [list: 3, 2, 4, 1]
uniq([list: 1, 2, 4, 1]) is [list: 2, 4, 1]
uniq([list: 2, 4, 1]) is [list: 2, 4, 1]
uniq([list: 4, 1]) is [list: 4, 1]
uniq([list: 1]) is [list: 1]
uniq([list: ]) is [list: ]
```

end

Но точно так же вы могли бы сгенерировать последовательности, начинающиеся с

```
uniq([list: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4, 1]) is [list: 1, 2, 3, 4]
```

или

```
uniq([list: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4, 1]) is [list: 4, 3, 2, 1]
```

и т. д. Мы будем работать с вариантом примеров, который был создан первым.

### 10.9.3. `uniq`: код

Какой систематический метод привел нас к этому ответу? Если задан не пустой список, то мы разделяем его на первый элемент и остальную часть. Предположим, что у нас есть ответ для функции `uniq`, примененной к остальной части списка. Теперь можно спросить: находится ли первый элемент в остальной части списка? Если находится, то можно игнорировать его, так как он определенно содержится в рассматриваемой `uniq` остальной части списка. Но если первого элемента нет в остальной части списка, то весьма важно связать (`link`) его с ответом.

Это описание легко преобразовать в приведенную ниже программу. Для пустого списка возвращается пустой список. Если список не пустой, то мы проверяем, находится ли первый элемент в остальной части списка. Если не находится, то мы включаем его в ответ, иначе пока что можно его игнорировать.

В результате получается следующая программа:

```
fun uniq-rec(l :: List<Any>) -> List<Any>:
  cases (List) l:
    | empty => empty
    | link(f, r) =>
```

```

if r.member(f):
    uniq-rec(r)
else:
    link(f, uniq-rec(r))
end
end

```

Мы назвали эту программу `uniq-rec`, а не `uniq`, чтобы отличать ее от других версий `uniq`.

### Упражнение 10.6

Обратите внимание: мы используем `.member`, чтобы проверить, является ли элемент членом заданного списка. Напишите функцию `member`, которая принимает элемент и список и сообщает, является ли элемент членом заданного списка.

### Упражнение 10.7

Проверка неповторяемости элементов в списке имеет множество практических приложений. Например, может существовать список людей, зарегистрированных для участия в голосовании. Для сохранения справедливого голосования, при котором один человек может подать один голос, необходимо удалить из списка все повторяющиеся имена.

- Предложите набор примеров для функции `rem-duplicate-votes`, которая принимает список имен голосующих и возвращает список, в котором повторяющиеся регистрации имен удалены. При разработке примеров рассматривайте ситуации из реальной жизни, которые можно представить при идентификации повторяющихся имен. Вы можете определить случаи, в которых два имени могли бы показаться принадлежащими одному человеку, но на самом деле это не так? А случаи, когда два имени могут показаться различными, но указывают на одного и того же человека?
- Что может потребоваться для изменения приведенной выше версии функции `uniq-rec`, чтобы она обрабатывала ситуацию, подобную удалению повторяющихся имен голосующих?

### Ответственное применение информатики: при сравнении значений важен контекст

Контекст устранения повторяющихся данных в приведенном выше упражнении 10.7 напоминает нам, что различные контексты могут требовать разных представлений в тех случаях, когда два значения данных совпадают. Иногда требуется точное совпадение, чтобы определить, что две строки рав-

ны. Иногда необходимы методы, которые нормализуют данные, либо простыми способами, такими как перевод всех букв в верхний регистр, либо более тонкими методами, основанными на инициалах (средних имен или отчеств). Иногда требуется дополнительная информация (например, адреса проживания в дополнение к именам), чтобы определить, следует ли считать два элемента в списке «одинаковыми».

Легко писать программы, кодирующие предположения об имеющихся в нашем распоряжении данных, которые, возможно, на практике не применяются. Это опять-таки ситуация, вполне разрешимая, если хорошо продумать конкретные примеры, на которых ваш код должен работать в определенном контексте.

---

## 10.9.4. `uniq`: сокращенное вычисление

Обратите внимание: в этой функции содержится повторяющееся выражение. Чтобы не писать его дважды, можно было бы вызывать его только один раз и использовать результат в обоих местах:

```
fun uniq-rec2(l :: List<Any>) -> List<Any>:
    cases (List) l:
        | empty => empty
        | link(f, r) =>
            ur = uniq-rec2(r)
            if r.member(f):
                ur
            else:
                link(f, ur)
            end
        end
    end
```

Может показаться, что мы всего лишь исключили повторение выражения, поместив вычисление `uniq-rec2(r)` перед условным выражением, но в действительности мы изменили поведение программы весьма малозаметным образом (создав то, что называется хвостовыми вызовами (tail calls), о которых можно узнать из курса по языкам программирования).

Возможно, вы думаете: поскольку мы заменили два вызова функции на один, то сократили объем вычислений, выполняемых программой. Но это совсем не так. Эти два вызова функции находятся в различных ветвях одного и того же условного выражения, следовательно, для любого рассматриваемого элемента списка выполняется только один вызов `uniq`. В действительности в обоих случаях – и раньше, и теперь – выполняется только один вызов `uniq`. Так что мы сократили количество вызовов в исходном коде программы, но не во время ее выполнения. В этом смысле название текущего подраздела было преднамеренно неверным.

Тем не менее существует одно полезное сокращение, которое можно применить. Оно определяется самой структурой функции `uniq-rec2`. В настоящий момент мы проверяем, является ли `f` членом `r`, который представляет собой список всех остальных элементов. В созданном нами примере это означает,

что уже на втором шаге мы проверяем, является ли 2 членом списка [list: 1, 3, 1, 2, 4, 1]. Это список из шести элементов, содержащий три копии 1. Мы сравниваем 2 с двумя копиями 1. Но не извлекаем ничего полезного из второго сравнения. Иными словами, можно воспринимать `uniq(g)` как «краткое описание» остальной части списка, которое в точности так же хорошо подходит для проверки членства элемента, как и сама часть `g`, но обладает преимуществом – `uniq(g)` может быть значительно короче. Разумеется, это именно то, что представляет переменная `ug`. Следовательно, можно отобразить в коде это соображение следующим образом:

```
fun uniq-rec3(l :: List<Any>) -> List<Any>:
    cases (List) l:
        | empty => empty
        | link(f, r) =>
            ug = uniq-rec3(r)
            if ug.member(f):
                ug
            else:
                link(f, ug)
            end
        end
    end
```

Обратите внимание: изменилось только то, что мы проверяем, содержится ли первый элемент в `ug`, а не в `g`.

### Упражнение 10.8

Позже в главе 18 мы узнаем, как формально оценивается время выполнения программы. Учитывая критерий измерения, введенный в этом подразделе, создает ли какое-либо различие изменение, только что внесенное в код программы? Будьте чрезвычайно внимательны: ответ зависит от того, как мы считаем «длину» списка.

Следует отметить, что если список вообще не содержит повторяющихся элементов в исходном виде, то не имеет значения, какой список проверяется на содержание в нем первого элемента, но если бы мы знали заранее, что в списке нет повторяющихся элементов, то незачем было бы вообще использовать `uniq`. Мы вернемся к этому вопросу о списках и повторяющихся элементах в главе 19.

## 10.9.5. `uniq`: пример и варианты кода

Как уже было отмечено выше, существуют и другие последовательности примеров, которые можно было бы записать. Ниже описан совершенно иной процесс:

- начать со всего заданного списка в целом с ответом в виде пустого (пока) списка;

- для каждого элемента списка проверить, не находится ли он уже в ответе, сформированном на текущий момент. Если находится, игнорировать его, иначе расширить ответ, включив в него этот элемент;
- когда в списке не останется элементов, текущий итоговый список является ответом для всего исходного списка в целом.

Обратите внимание: это решение предполагает, что ответ будет формироваться в процессе прохода по исходному списку. Следовательно, мы не имеем возможности написать пример даже с одним параметром, как делали это ранее. Можно было бы возразить, что при естественном решении спрашивается, можем ли мы решить эту задачу только на основе структуры данных, используя предварительно определенные вычисления, как мы сделали выше. Если это невозможно, то мы должны применить аккумулятор. Но поскольку такая возможность есть, аккумулятор здесь не нужен и сильно усложняет даже запись примеров (попробуйте сами и убедитесь в этом).

## 10.9.6. `upiq`: почему создается список?

Если вернуться к исходной формулировке задачи `upiq` (подраздел 10.9.1), то вы заметите, что там ничего не сказано о том, в каком порядке должен выводиться результат. В действительности там даже ничего не говорится о том, что вывод должен быть списком (следовательно, иметь некоторый порядок). В таком случае мы должны поразмышлять о том, есть ли вообще смысл формировать список для решения этой задачи. И в самом деле, если мы не заботимся о порядке и нам не нужны повторяющиеся элементы (условие по умолчанию для `upiq`), то существует гораздо более простое решение, которое создает множество (`set`). Множества уже встроены в Pyret, а кроме того, Ругет автоматически выполняет преобразование списка в множество с исключением повторяющихся элементов. Разумеется, это нечестный подход с точки зрения изучения способов создания функции `upiq`, тем не менее следует помнить, что иногда правильная структура данных, которую требуется создать, не обязательно совпадает с заданной в начальном условии. Кроме того, позже в главе 19 мы увидим, как создавать множества для собственного (внутреннего) использования (в этот момент `upiq` покажется вам знакомым, поскольку его функциональность заложена в основе концепции множеств).

## 10.10. МОНОМОРФНЫЕ СПИСКИ И ПОЛИМОРФНЫЕ ТИПЫ

Ранее мы записывали такие контракты:

```
my-len :: List<Any> -> Number  
my-max :: List<Any> -> Any
```

Они неудовлетворительны по некоторым причинам. Рассмотрим функцию `my-max`. Контракт утверждает, что во входном списке могут содержать-

ся элементы любого типа, но в действительности это ложное утверждение: входной список `[list: 1, "two", 3]` не является допустимым, потому что невозможно сравнить 1 с "two" или "two" с 3.

### Упражнение 10.9

Что произойдет, если выполнить выражение `1 > "two"` или `"two" > 3`?

Точнее говоря, мы подразумеваем список, в котором все элементы принадлежат к одному типу (с технической точки зрения – элементы, которые также являются сравнимыми), но в контракте это не зафиксировано. Кроме того, мы не имеем в виду, что `my-max` может возвращать любой существующий тип: если в функцию передан список чисел, то мы не получим в результате строку как максимальный элемент. Напротив, функция будет возвращать элемент только того типа, который указан в переданном списке.

Короче говоря, мы подразумеваем, что все элементы списка имеют один и тот же тип, но этот тип может быть любым. Такой список называется мономорфным (*monomorphic*): «моно» означает «один», «морфный» – «имеющий форму», т. е. все значения имеют одинаковый тип. Но сама по себе функция `my-max` может работать со многими другими типами списков, поэтому мы называем ее полиморфной (*polymorphic*; «поли» означает «много»).

Таким образом, необходим более точный способ записи подобных контрактов. По существу, мы должны сообщить, что существует переменная типа (*type variable*; в противоположность обычной переменной в программе), которая представляет тип элементов в списке. С учетом этого указания `my-max` будет возвращать элемент именно такого типа. Синтаксически мы записываем это следующим образом:

```
fun my-max<T>(l :: List<T>) -> T: ... end
```

Форма записи `<T>` говорит о том, что `T` является параметром переменной типа, который будет использоваться в остальной части функции (как в заголовке, так и в теле).

Используя эту нотацию, мы также можем вернуться к определению функции `my-len`. Теперь ее заголовок выглядит так:

```
fun my-len<T>(l :: List<T>) -> Number: ... end
```

Обратите внимание: в действительности `my-len` «не заботится» о том, имеют все переданные значения одинаковый тип или нет: она никогда не рассматривает отдельные элементы, не говоря уже о парах элементов. Но по соглашению (*convention*) мы требуем, чтобы списки всегда были мономорфными. Это важное требование, потому что оно позволяет обрабатывать элементы списка единообразно: если нам известно, как обработать элементы типа `T`, то мы будем точно знать, как обработать список `List<T>`. Если элементы списка могут принадлежать к действительно любому существующему типу, то мы не можем узнать, как их обрабатывать.

# Глава 11

---

## Введение в структурированные данные

Ранее мы лишь кратко рассмотрели типы данных. До настоящего момента мы наблюдали только типы, предоставляемые Pyret, которые являются интересным, но все же достаточно ограниченным набором. Большинство программ, которые мы пишем, будут содержать гораздо больше типов данных.

### 11.1. Объяснение типов сложных составных данных

#### 11.1.1. Первый взгляд на структурированные данные

Во многих случаях данные имеют много атрибутов (attributes) или частей. Мы должны рассматривать эти части все вместе, но иногда требуется их разделение, например:

- запись iTunes содержит набор элементов информации об одной музыкальной композиции: не только ее название, но также исполнитель, продолжительность, жанр и т. д.;



Рис. 11.1 ♦ Пример записи в iTunes

- почтовое приложение GMail содержит набор элементов информации об одном сообщении: отправитель, строка темы (заголовка), признак части цепочки, тело (текст содержимого) и кое-что еще.



**Рис. 11.2 ♦ Пример записи сообщения электронной почты**

В подобных примерах мы наблюдаем необходимость структурированных данных (structured data): отдельный элемент данных имеет структуру (structure), т. е. в действительности состоит из множества частей. Количество частей является строго определенным (фиксированным), но части могут иметь различные типы (некоторые могут быть числами, некоторые – строками, другие – изображениями, и в одном элементе данных могут быть смешаны значения различных типов). Некоторые значения могут быть даже другими структуризованными данными, например дата обычно содержит, как минимум, три части: число, месяц, год. Части структурированного элемента данных называются его полями (fields).

## 11.1.2. Первый взгляд на условные данные

Кроме того, в некоторых случаях необходимо представить разные типы данных в одной общей группе. Ниже приведено несколько примеров:

- светофор может находиться в различных состояниях: красный, желтый или зеленый. Вместе они представляют одну сущность: новый тип, называемый состоянием светофора;
- зоопарк состоит из множества видов животных. Вместе они представляют одну сущность: новый тип под названием «животное». Некоторое условие определяет, с каким конкретным типом животного может быть связан работник зоопарка;
- социальная сеть состоит из различных типов страниц. Некоторые страницы представляют отдельных людей, некоторые – какие-то места, другие – организации, могут существовать страницы о каких-либо видах деятельности и т. д. Вместе они представляют новый тип: страницу социальной сети;
- приложение, поддерживающее оповещения, может сообщать о событиях многих видов. Некоторые оповещения имеют вид сообщений электронной почты (содержащие множество полей, как мы уже отмечали ранее), некоторые передаются в форме напоминаний (которые могут содержать метку времени и текст оповещения), другие – в форме мгновенных (сверхсрочных) сообщений (похожих на сообщения электронной почты, но без темы), возможна даже передача пакета с бумажным письмом (с меткой времени, указанием отправителя, почтовым идентификатором для отслеживания и извещением о доставке). Все вместе они представляют новый тип: оповещение.

Да, мы знаем, что в некоторых странах для светофоров используются другие цвета или большее количество цветов и цветовых комбинаций.

Мы называем такие данные «условными» (conditional), потому что они представляют варианты с использованием слова «или» (or): светофор может быть красным, или зеленым, или желтым, страница социальной сети может

представлять человека, или место (локацию), или организацию и т. д. Иногда нас интересует только одно – какой тип сущности мы рассматриваем: водитель по-разному реагирует на различные цвета светофора, а работник зоопарка дает разную пищу каждому животному. В других случаях нас могут не интересовать такие подробности: если мы просто подсчитываем общее количество животных в зоопарке, или число страниц в соцсети, или количество непрочитанных оповещений, то подробности не имеют значения. Таким образом, можно выделить случаи, в которых мы не принимаем во внимание условный характер данных и рассматриваем их конкретный элемент как член общей группы, и другие случаи, в которых нас интересуют условные характеристики и выполнение различных действий в зависимости от выбора отдельного элемента данных. Все это длинное описание станет более конкретным и понятным, когда мы начнем писать программы.

## 11.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СОЗДАНИЕ СТРУКТУРИРОВАННЫХ И УСЛОВНЫХ ДАННЫХ

В предыдущем разделе мы использовали слово «данные», но в действительности это было не совсем правильно. Как уже было отмечено ранее, данные – это то, как представляем информацию в компьютере. Все обсуждаемое в предыдущем разделе в действительности являлось разнообразными видами информации, но при этом абсолютно ничего не было сказано о том, как представлены эти виды информации. А для того, чтобы написать программу, мы обязательно должны перейти к конкретным представлениям. Именно этим мы будем заниматься прямо сейчас, т. е. действительно демонстрировать методы представления данных для всех упомянутых здесь видов информации.

### 11.2.1. Определение и создание структурированных данных

Начнем с определения структурированных данных, таких как записи о музыкальных композициях в iTunes. Ниже показана упрощенная версия информации, которая может храниться в некотором приложении:

- название композиции, тип `String`;
- исполнитель композиции, также тип `String`;
- год создания композиции, тип `Number`.

Теперь представим синтаксис, которому мы можем обучить Pyret:

```
data ITunesSong: song(name, singer, year) end
```

Это выражение сообщает Pyret о введении нового типа данных, в данном случае называемого `ITunesSong`. Реальный способ создания

Мы соблюдаем соглашение, согласно которому имена типов всегда начинаются с заглавной буквы.

одного из элементов этих данных заключается в вызове `song` с тремя параметрами, например:

```
<structured-examples> ::=  
song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)  
song("Stressed Out", "twenty one pilots", 2015)  
song("Waqt Ne Kiya Kya Haseen Sitam", "Geeta Dutt", 1959)
```

Всегда сопровождайте определение данных их несколькими конкретными экземплярами (примерами). Это дает уверенность в том, что вы действительно знаете, как создавать данные в этой форме. Разумеется, это не самая важная, но полезная привычка – давать имена только что определенным данным, чтобы можно было бы воспользоваться ими в дальнейшем:

```
lver = song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)  
so = song("Stressed Out", "twenty one pilots", 2015)  
wnkhs = song("Waqt Ne Kiya Kya Haseen Sitam", "Geeta Dutt", 1959)
```

С точки зрения внутреннего каталога структурированные данные ничем не отличаются от простых данных. Каждое из приведенных выше определений создает запись в каталоге, как показано ниже:

Каталог

```
lver → song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)  
so → song("Stressed Out", "twenty one pilots", 2015)  
wnkhs → song("Waqt Ne Kiya Kya Haseen Sitam", "Geeta Dutt", 1959)
```

Следует отметить, что музыкальные менеджеры, способные различать, скажем, жанры Dance, Electronica и Electronic/Dance, классифицируют две из этих трех песен по одному жанру: «World».

## 11.2.2. Аннотации для структурированных данных

Напомним, что в подразделе 5.2.2 мы обсуждали аннотации для создаваемых функций. Но мы можем снабжать аннотациями и свои данные. В частности, можно записать аннотацию и для определения данных, и для примеров их создания. Для первого случая рассмотрим определение данных из предыдущего раздела, которое создает аннотационную информацию, неформально записанную в тексте формальной части программы:

```
data ITunesSong: song(name :: String, singer :: String, year :: Number) end
```

Аналогичным образом можно записать аннотации для переменных, связанных с примерами этих данных. Но что мы должны записать здесь вместо символов подчеркивания?

```
lver :: __ = song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)
```

Вспомним, что аннотации содержат имена типов, а новый только что созданный тип называется `ITunesSong`. Следовательно, мы должны написать:

```
lver :: ITunesSong = song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)
```

**Выполните прямо сейчас**

Что произойдет, если написать вместо вышеприведенного следующее выражение?

```
lver :: String = song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)
```

Какая ошибка возникает? А если написать следующие выражения?

```
lver :: song = song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)
```

```
lver :: 1 = song("La Vie en Rose", "Édith Piaf", 1945)
```

Убедитесь в том, что вам знакомы сообщения об ошибках, которые вы получили.

### 11.2.3. Определение и создание условных данных

Конструкция `data` в Pyret также позволяет создавать условные данные с немного другим синтаксисом. Например, необходимо определить цвета светофора:

```
data TLColor:
| Red
| Yellow
| Green
end
```

Каждый символ `|` (произносится как «stick»; «стик», более формально «вертикальная черта») представляет очередной вариант. Можно было бы записать экземпляры цветов светофора как

```
Red
Green
Yellow
```

Более интересный и общий пример получается, если каждый условный элемент имеет собственную структуру, например:

```
data Animal:
| boa(name :: String, length :: Number)
| armadillo(name :: String, liveness :: Boolean)
end
```

Можно создать конкретные примеры животных, соответствующие вашим предположениям:

```
b1 = boa("Ayisha", 10)
b2 = boa("Bonito", 8)
a1 = armadillo("Glypto", true)
```

По соглашению имена элементов условных данных начинаются с буквы нижнего регистра (строчной), но если не имеют дополнительной структуры, то мы часто записываем первую букву в верхнем регистре, чтобы они отличались от обычных переменных, т. е. `Red` (вариант условных данных), а не `red` (имя обычной переменной).

«В Техасе посреди дороги нет ничего, кроме желтых полос и мертвого броненосца», – Джим Хайтауэр (Jim Hightower).

Мы называем различные элементы условных данных вариантами (*variants*).

### **Выполните прямо сейчас**

Как бы вы записали аннотации для приведенных выше трех связываемых переменных?

Обратите внимание: в аннотации исчезает различие между боа и броненосцами.

```
b1 :: Animal = boa("Ayisha", 10)
b2 :: Animal = boa("Bonito", 8)
a1 :: Animal = armadillo("Glypto", true)
```

При определении элемента условных данных первый стик (вертикальная черта) в действительности не является обязательным, но его добавление позволяет выровнять строки вариантов для удобства чтения. Это помогает понять, что первый приведенный в этой главе пример

```
data ITunesSong: song(name, singer, year) end
```

в действительности абсолютно равнозначен нотации:

```
data ITunesSong:
  | song(name, singer, year)
end
```

т. е. это условный тип только с одним условным элементом, в котором единственное условие является структурированным.

## **11.3. ПРОГРАММИРОВАНИЕ СО СТРУКТУРИРОВАННЫМИ И УСЛОВНЫМИ ДАННЫМИ**

К настоящему моменту мы узнали, как создавать структурированные и условные данные, но пока еще не рассматривали, как разделять такие данные или записывать содержащие их выражения. Как можно предположить, требуются следующие объяснения:

- как выделить поля элемента структурированных данных;
- как различать варианты условных данных.

Скоро мы увидим, что Pyret предоставляет удобный способ выполнения обеих операций.

### **11.3.1. Извлечение полей из структурированных данных**

Напишем функцию, которая сообщает, сколько лет назад была написана музыкальная композиция. Сначала подумаем о том, что эта функция принимает

(тип `ITunesSong`) и создает (тип `Number`). Это дает нам первое приближение общей схемы для функции:

```
<song-age> ::=
```

```
fun song-age(s :: ITunesSong) -> Number:  
  <song-age-body>  
end
```

Мы знаем, что форма тела функции должна быть приблизительно следующей:

```
<song-age-body> ::=  
2016 - <get the song year>
```

Можно получить год создания музыкальной композиции, используя предоставляемый Pyret способ доступа к полю (field access): точку `(.)`, за которой следует имя поля, – в рассматриваемом здесь примере `yeаг` (год), – после переменной, содержащей элемент структурированных данных. Таким образом, мы получаем поле `yeаг` переменной `s` (это параметр, передаваемый в `song-age`) с помощью выражения:

```
s.yeаг
```

Тогда тело функции выглядит следующим образом:

```
fun song-age(s :: ITunesSong) -> Number:  
  2016 - s.yeаг  
end
```

Полезно было бы также записать несколько примеров (`<structured-examples>`), обеспечивающих полноценное определение функции:

```
fun song-age(s :: ITunesSong) -> Number:  
  2016 - s.yeаг  
where:  
  song-age(lver) is 71  
  song-age(so) is 1  
  song-age(wnkkhs) is 57  
end
```

## 11.3.2. Различие вариантов условных данных

Теперь рассмотрим, как мы различаем варианты. Для этого снова воспользуемся конструкцией `cases`, как это делалось для списков. Создадим по одной ветви для каждого варианта. Таким образом, если требуется вычислить подсказку для водителя на основе состояния светофора, то можно написать:

```
fun advice(c :: TLCColor) -> String:  
  cases (TLCColor) c:  
    | Red => "wait!"
```

```

| Yellow => "get ready..."
| Green => "go!"
end
end

```

**Выполните прямо сейчас**

Что произойдет, если пропустить =>?

**Выполните прямо сейчас**

А если вы пропустили вариант? Удалите вариант Red, затем попробуйте выполнить сначала advice(Yellow), потом advice(Red).

### 11.3.3. Обработка полей вариантов

В приведенном выше примере варианты не имеют полей. Но если варианты содержат поля, то Pyret ожидает от вас предоставления списка имен переменных для этих полей, а затем автоматически связывает эти переменные, поэтому уже не требуется применение нотации с точкой (.) для получения значений полей.

Чтобы наглядно продемонстрировать это, предположим, что необходимо получить имя любого животного в зоопарке:

```

<animal-name> ::=

fun animal-name(a :: Animal) -> String:
  <animal-name-body>
end

```

Поскольку тип Animal определен как условный, мы понимаем, что, вероятнее всего, потребуется конструкция cases для разделения вариантов. Кроме того, мы должны присвоить имя каждому полю:

```

<animal-name-body> ::=

cases (Animal) a:
  | boa(n, l) => ...
  | armadillo(n, l) => ...
end

```

В обоих случаях требуется возврат поля n, следовательно, получаем полную функцию:

```

fun animal-name(a :: Animal) -> String:
  cases (Animal) a:
    | boa(n, l) => n
    | armadillo(n, l) => n
end

```

Следует отметить, что для имен переменных не требуетсѧ обязательное совпадение с именами полей. По соглашению мы присваиваем более длинные описательные имена определениям полей и короткие имена соответствующим переменным.

where:

```
animal-name(b1) is "Ayisha"  
animal-name(b2) is "Bonito"  
animal-name(a1) is "Glypto"  
end
```

Теперь посмотрим, как Pyret должен выполнить вызов этой функции, например:

```
animal-name(boa("Bonito", 8))
```

Аргумент `boa("Bonito", 8)` – это значение. Точно так же, как мы подставляем данные простых типов, таких как строки и числа, вместо параметров при вычислении функции, здесь мы подставляем элемент данных составного типа. После подстановки получаем следующее выражение для вычисления:

```
cases (Animal) boa("Bonito", 8):  
| boa(n, l) => n  
| armadillo(n, l) => n  
end
```

Далее Pyret определяет, какой вариант соответствует введенным данным (в рассматриваемом здесь случае это первый вариант `boa`). Затем он заменяет имена полей на соответствующие компоненты элемента данных и получает выражение для найденного варианта. В рассматриваемом здесь примере имя `n` заменяется на `"Bonito"`, а имя `l` на `8`. В этой программе окончательное выражение использует переменную `n`, поэтому результатом выполнения в данном случае является `"Bonito"`.

# Глава 12

---

## Наборы структурированных данных

При изучении структурированных данных в главе 11 мы встречались с несколькими ситуациями, в которых приходилось иметь дело не с одним элементом, а со многими данными: не с одной музыкальной композицией, а целым плейлистом, не с одним животным, а с зоопарком, заполненным ими, не с одним оповещением, а с несколькими, не с одним лишь сообщением (как нам хотелось бы), а со многими во входящем почтовом ящике, и т. д. В общем случае только один отдельный элемент структурированных данных встречается редко: если известно, что у нас есть только один такой элемент, то можно просто получить несколько отдельных переменных, представляющих части, не прилагаая особых усилий для создания и разделения структуры. Именно поэтому мы хотим обсудить наборы (collections) структурированных данных. Ниже приведены дополнительные примеры:

- множество сообщений, соответствующих некоторому тегу;
- список сообщений в диалоге (цепочке сообщений);
- множество друзей некоторого пользователя.

Одно важное исключение: рассмотрим информацию о конфигурации или параметрах предварительной установки системы. Эта информация может быть сохранена в файле и обновлена через пользовательский интерфейс. Несмотря на то что (обычно) одновременно существует только одна конфигурация, в ней может быть так много частей, что нам не захочется загромождать программу большим количеством переменных; вместо этого мы могли бы создать структуру, представляющую конфигурацию, и загружать только один ее экземпляр. По существу, то, что раньше было несвязанными переменными, теперь становится набором связанных полей.

### **Выполните прямо сейчас**

Как данные, объединенные в набор, отличаются от структурированных данных?

В структурированных данных имеется фиксированное (строго определенное) количество значений, возможно, имеющих различные типы. В данных,

объединенных в набор, содержится переменное количество значений одного типа. Например, мы не можем сказать заранее, сколько музыкальных композиций должно быть в плейлисте или сколько страниц может иметь некоторый пользователь, но каждый элемент такого набора обязательно должен быть музыкальной композицией или страницей. (Разумеется, любая страница может быть условно определенной, но в итоге все элементы этого набора остаются страницами.)

Обратите внимание: выше мы упоминали множества (sets) и списки (lists). Различие между множеством и списком заключается в том, что список имеет порядок, а множество не имеет. Сейчас это различие не столь важно, но мы вернемся к нему позже в разделе 12.2.

Разумеется, множества и списки не являются единственными видами данных, объединенных в наборы, с которыми мы можем встретиться. Приведем еще несколько примеров:

- семейное (генеалогическое) древо;
- файловая система на компьютере;
- схема рассаживания гостей на вечеринке;
- социальная сеть, состоящая из страниц, и т. д.

В большинстве случаев эти наборы данных так же легко программировать и обрабатывать, как и описанные выше, если мы обладаем некоторым практическим опытом, хотя некоторые из них (см. раздел 21.1) могут оказаться более трудными для понимания.

## 12.1. СПИСКИ КАК НАБОРЫ ДАННЫХ

Мы уже подробно рассматривали один пример набора данных: списки. Содержимое списков не ограничивается числами или строками – они могут содержать значения любых типов, в том числе и структурированных. Например, используя примеры из предыдущей главы (подраздел 11.2.1), можно создать список музыкальных композиций:

```
song-list = [list: lver, so, wnkhs]
```

Это список с тремя (под)элементами, в котором каждый элемент является музыкальной композицией:

```
check:  
  song-list.length() is 3  
  song-list.first is lver  
end
```

Таким образом, тот материал о создании функций для работы со списками, который мы рассматривали ранее (глава 10), можно применить и здесь. Для наглядной демонстрации предположим, что нужно написать функцию `oldest-song-age`, принимающую список музыкальных композиций и возвращающую самую старую композицию в этом списке. (Может существовать

несколько композиций, написанных в одном и том же году; «возраст» всех таких композиций по нашей системе измерения будет считаться одинаковым. В этом случае мы просто выбираем одну из таких песен из списка. Но из-за этого придется применять более верное выражение «одна из самых старых» вместо «самая старая» композиция.)

Разработаем решение с помощью примеров. Чтобы сохранить простой вид примеров, откажемся от записи полных данных для композиций, а вместо этого будем обозначать их просто соответствующими именами переменных. Очевидно, что самая старая композиция в данном списке связана с переменной `lvar`.

```
oldest-song([list: lver, so, wnkhs]) is lvar
oldest-song([list:      so, wnkhs]) is wnkhs
oldest-song([list:      wnkhs]) is wnkhs
oldest-song([list:          ]) is ???
```

Что мы должны записать в самом последнем случае? Напомним, что мы рассматривали эту задачу ранее (в подразделе 10.6.1): в случае пустого списка ответа нет. В действительности приведенное здесь вычисление весьма похоже на `му-max`, потому что, по существу, это то же самое вычисление, просто вопрос задан о минимальном значении года (который характеризует композицию как самую старую).

В приведенных выше примерах можно видеть структуру решения, повторяющую решение `му-max`. При пустом списке выводится сообщение об ошибке. Иначе вычисляется самая старая композиция в остальной части списка, и год ее создания сравнивается с годом в первом элементе. Композиция, для которой указан самый ранний год, является итоговым ответом.

```
fun oldest-song(sl :: List<iTunesSong>) -> iTunesSong:
  cases (List) sl:
    | empty => raise("not defined for empty song lists")
      # "не определено для пустых списков композиций"
    | link(f, r) =>
      cases (List) r:
        | empty => f
        | else =>
          osr = oldest-song(r)
          if osr.year < f.year:
            osr
          else:
            f
          end
        end
      end
    end
  end
```

Следует отметить, что здесь нет никакой уверенности в том, что будет найдена только одна самая старая композиция. Это отражено в вероятности того, что `osr.year` может быть равен `f.year`. Но формулировка задачи разрешает выбрать только одну такую композицию, что мы и сделали.

**Выполните прямо сейчас**

Измените приведенное выше решение на `oldest-song-age`, которое вычисляет «возраст» самой старой композиции (или нескольких композиций).

Ха-ха, мы просто пошутили! Нет никакой необходимости в каком-либо изменении приведенного выше решения. Лучше оставить его как есть, – возможно, оно пригодится для других целей в будущем, – а вместо этого написать новую функцию, использующую показанное выше решение:

```
fun oldest-song-age(sl :: List<iTunesSong>) -> Number:
    os = oldest-song(sl)
    song-age(os)
where:
    oldest-song-age(song-list) is 71
end
```

## 12.2. МНОЖЕСТВА КАК НАБОРЫ ДАННЫХ

Как мы уже убедились, в некоторых задачах можно не заботиться ни о порядке входных данных, ни о повторяющихся элементах в них. Ниже приведены дополнительные примеры, в которых порядок или наличие повторяющихся элементов не имеет никакого значения:

- веб-браузер записывает посещенные вами веб-страницы, а некоторые веб-сайты используют эту информацию, чтобы выделять другим цветом уже посещенные ссылки, отличая их от непосещенных. Обычно выбор цвета не зависит от того, сколько раз вы посетили конкретную страницу;
- во время выборов сотрудник комиссии может зафиксировать факт вашего голосования, но нет необходимости в записи количества ваших голосований, и порядок, в котором голосуют избиратели, не имеет никакого значения.

Для подобных задач список подходит гораздо хуже, чем множество. Ниже мы увидим, как работают встроенные в Pyret множества. Позже, в главе 19, мы рассмотрим, как можно создавать собственные множества.

Во-первых, можно определять множества так же просто, как и списки:

```
import sets as S
song-set = [S.set: lver, so, wnkhs]
```

Разумеется, в соответствии с синтаксисом языка мы должны перечислять элементы в некотором порядке. Но имеет ли порядок какое-либо значение?

**Выполните прямо сейчас**

Можете ли вы определенно сказать, заботится ли Pyret о порядке?

Ниже показан простейший способ проверить это:

```
check:
  song-set2 = [S.set: so, wnkhs, lver]
  song-set is song-set2
end
```

Если требуется особая осторожность, то можно записать и все остальные варианты порядка элементов и убедиться, что Pyret не обращает на это никакого внимания.

### Упражнение 12.1

Сколько различных вариантов порядка элементов существует для этой задачи?

То же самое можно сказать и о повторяющихся элементах:

```
check:
  song-set3 = [S.set: lver, so, wnkhs, so, so, lver, so]
  song-set is song-set3
  song-set3.size() is 3
end
```

Можно также попробовать несколько различных вариантов с повторением элементов и окончательно убедиться в том, что множества игнорируют повторения.

## 12.2.1. Выбор элементов из множеств

Но такое отсутствие упорядоченности порождает проблему. Для списков имело смысл говорить о первом элементе `first` и соответствующей остальной части `rest`. По определению в множествах нет первого элемента. В действительности Pyret даже не предлагает поля, аналогичные `first` и `rest`. Вместо них существует нечто чуть более точное, но сложное.

Метод `.pick` возвращает случайно выбранный элемент множества. Он создает значение типа `Pick` (к которому мы получаем доступ с помощью инструкции `include pick`). При таком выборе элемента существуют два возможных варианта. Первый вариант: множество пустое (аналогично пустому списку), что дает нам значение `pick-none`. Другой вариант называется `pick-some` и возвращает действительный член множества.

Вариант `pick-some` типа `Pick` содержит два поля, а не одно. Чтобы понять причину этого, потребуется буквально минутный рабочий эксперимент, который мы проведем, выбрав произвольный элемент множества:

```
fun an-elt(s :: S.Set):
  cases (Pick) s.pick():
    | pick-none => raise("empty set")
```

```
| pick-some(e, r) => e
end
end
```

(Обратите внимание: мы не используем поле `r` в варианте `pick-some`.)

### **Выполните прямо сейчас**

Вы можете предположить, почему мы не записали примеры для функции `an-elt`?

### **Выполните прямо сейчас**

Выполните `an-elt(song-set)`. Какой элемент вы получили?

Выполните это выражение еще раз. Потом еще пять раз.

Вы получаете при каждом выполнении один и тот же элемент?

Нет, не получаете. Pyret спроектирован так, чтобы не всегда возвращать один и тот же элемент при выборе из множества. Это сделано умышленно: чтобы подчеркнуть случайный характер выбора из множества и защитить программу от случайной зависимости от определенного порядка, который может использовать Pyret.

Ну, в действительности невозможно быть уверенным, что вы не увидите один элемент несколько раз. Вероятность того, что вы получите один и тот же элемент при каждом из шести запусков, очень и очень мала. Если это произойдет, выполните данное выражение еще несколько раз.

### **Выполните прямо сейчас**

Если известно, что `an-elt` не возвращает прогнозируемый элемент, то какие тесты можно написать для этой функции (если это вообще возможно)?

Следует отметить, что хотя невозможно предсказать, какой именно элемент вернет `an-elt`, мы точно знаем, что эта функция возвращает элемент множества. Следовательно, мы можем написать тесты, гарантирующие, что полученный в результате элемент является членом исходного множества, хотя в данном случае это не вызвало бы особого удивления.

## **12.2.2. Вычисления с использованием множеств**

После выбора некоторого элемента из множества часто оказывается полезным получение множества, состоящего из оставшихся элементов. Выше мы уже видели, что выбор первого поля `pick-some` похож на извлечение «первого» элемента множества. Следовательно, необходим способ получения «остальной части» множества. Но при этом требуется остальная часть, полученная после исключения этого конкретного «первого» элемента. Такая часть содержится во втором поле `pick-some`: то, что осталось в множестве.

С учетом этого можно написать функцию для множеств, которая в общих чертах выглядит аналогичной функциям для списков. Например, предположим, что необходимо вычислить размер множества. Эта функция похожа на `my-len` (из раздела 10.2):

```
fun my-set-size(shadow s :: S.Set) -> Number:
  cases (Pick) s.pick():
    | pick-none => 0
    | pick-some(e, r) =>
      1 + my-set-size(r)
  end
end
```

Несмотря на то что процесс логического вывода кода похож на примененный ранее для `my-len`, механизм случайного выбора элементов затрудняет написание примеров, которые будут по-настоящему соответствовать реальному поведению этой функции.

## 12.3. СОЧЕТАНИЕ СТРУКТУРИРОВАННЫХ И ОБЪЕДИНЕНИЙ В НАБОР ДАННЫХ

Как показывают приведенные выше примеры, организация данных в программе часто подразумевает наличие нескольких типов составных данных, весьма тесно связанных между собой. Сначала рассмотрим их попарно.

---

### Упражнение 12.2

Начнем с примеров, описывающих следующие сочетания:

- структурированные и условные данные;
- структурированные данные и наборы данных;
- условные данные и наборы данных.

Вы действительно видели ранее примеры каждого из перечисленных выше сочетаний. Назовите их.

---

Наконец, возможно сочетание всех трех типов. Например, файловая система обычно представляет собой список (набор) файлов и каталогов (условные данные), в котором каждый файл имеет несколько атрибутов (структурные данные). Аналогично социальная сеть содержит множество страниц (набор), в котором каждая страница соответствует некоторому лицу, организации или какому-либо другому объекту (условные данные) и каждая страница характеризуется несколькими атрибутами (структурные данные). Таким образом, как можно видеть, сочетания этих типов данных естественным способом формируются во всех видах приложений, с которым мы имеем дело повседневно.

---

### Упражнение 12.3

Рассмотрите во всех подробностях три веб-сайта или приложения, которыми вы предпочитаете пользоваться чаще всего. Определите типы данных, которые они представляют. Классифицируйте их как структурированные, условные или наборы данных. Как организовано сочетание этих данных?

---

## 12.4. ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДАННЫХ: ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПРОСОВ

Теперь у вас появилась возможность создавать наборы структурированных данных, и можно приступить к проектированию данных и программ для довольно-таки сложных приложений. Попробуем решить задачу проектирования данных, в которой все внимание сосредоточено только на создании определения данных, а не на написании реальных функций.

Формулировка задачи: вас приняли на некоторую должность для содействия в создании программного обеспечения для опроса (тестирования) студентов. Программное обеспечение предъявляет студенту вопрос, считывает его ответ, сравнивает ответ студента с ожидаемым (это похоже на один из примеров Pyret) и вычисляет процент ответов, на которые студент ответил правильно.

Ваша задача – создать определение данных для задаваемых вопросов и ожидаемых правильных ответов. Не беспокойтесь о представлении ответов студентов.

---

#### **Выполните прямо сейчас**

Предложите первоначальную версию структуры данных для вопросов теста. Начните с определения элементов, которые могут потребоваться, и попробуйте записать несколько примеров вопросов.

Можно было бы предположить, что вопрос теста задается приблизительно в следующей форме: «чему равно  $3 + 4?$ » Следует ожидать, что студент ответит 7. Как можно формально записать этот диалог? В виде элемента структурированных данных с двумя полями, как показано ниже:

```
data Question:  
  basic-ques(text :: String, expect :: ???)  
end
```

Какой тип является правильным для ожидаемого ответа? Для приведенного выше конкретного вопроса имеется числовой ответ, но для других вопросов типы ответов могут быть различными. Следовательно, подходящим типом для ответа является Апу.

Также потребуется список вопросов `Question` для формирования всего теста в целом.

Иногда программное обеспечение теста позволяет студентам запрашивать подсказки.

### **Выполните прямо сейчас**

Предположим, что необходимо дополнить некоторые (но не все) вопросы подсказками, которые должны быть представлены как текст, запрашиваемый студентом для помощи в решении конкретной задачи. Измените текущую версию определения данных для создания тестов, в которых некоторые вопросы имеют подсказки, а некоторые не имеют.

Тест должен оставаться списком вопросов, но для определения данных `Question` требуется другой вариант обработки вопросов с подсказками. Должна сработать следующая версия:

```
data Question:
    | basic-ques(text :: String, expect :: Any)
    | hint-ques(text :: String, expect :: Any, hint :: String)
end
```

A quiz **is** a List<Question>

Можно было бы еще расширить этот пример для представления зависимостей между вопросами (например, формулировка некоторой задачи основана на характеристиках, полученных в процессе решения другой), вопросов с несколькими вариантами ответов, вопросов с чекбоксами и т. д.

## **Ответственное применение информатики: искаженный взгляд на процесс обучения**

Многие компании пытались улучшить процесс обучения с помощью программных систем, автоматизирующих задачи, которые в противном случае выполнялись бы преподавателями. Существуют системы, которые показывают обучающимся видео, а затем предлагают им тесты (похожие на те, которые вы только что разработали), чтобы проверить, чему они научились. Более экстремальная версия чередует видео и тестовые опросы, таким образом преподавая целые учебные курсы в полном объеме, без необходимости участия преподавателя.

Массовые онлайн-курсы (МОК) – это стиль учебного курса, в котором широко используется компьютерная автоматизация, позволяющая охватить гораздо больше студентов без необходимости в дополнительных преподавателях. Сторонники МОК и связанных с ними инструментальных средств образовательных технологий провозглашают принципиально новое воздействие таких инструментов и обещают предоставить качественное образование обучающимся по всему миру, которые в противном случае могли бы не получить доступа к качественным преподавателям. Технологические инвес-

торы (и даже некоторые университеты) серьезно углубились в разработку таких технологий, надеясь на образовательную революцию во всемирном масштабе.

К сожалению, исследования и оценочные испытания показали, что замена обучения автоматизированными системами, даже со сложными функциональными возможностями, основанными на анализе данных и прогнозах, с функциями выявления навыков, которыми учащиеся не вполне овладели, не приводит к обещанным результатам в обучении. Почему? Оказывается, что преподавание – это нечто большее, чем подбор вопросов, сбор студенческих работ и выставление оценок. Учителя поощряют успехи, придают уверенность в своих силах и оценивают ситуацию каждого отдельного обучающегося. Современные вычислительные системы этого не делают. Общепринятое мнение об этих инструментах (подтвержденное тремя предыдущими десятилетиями исследований) заключается в том, что лучше всего использовать их как дополнение непосредственного обучения преподавателем-человеком. В таких условиях некоторые инструментальные средства привели к значительному повышению эффективности обучения.

С точки зрения социальной ответственности вывод здесь заключается в том, что необходимо учитывать все особенности системы, которую вы, возможно, пытаетесь заменить «компьютерной методикой». Алгоритмические инструменты проведения тестовых опросов имеют реальную ценность в определенном контексте, но они не заменяют весь процесс обучения в целом. Правильное понимание многих аспектов обучения, а также того, какие методики делают обучение студентов эффективным, а какие нет, помогло бы избежать огромного объема неоправданной шумихи вокруг перспектив алгоритмического обучения.

---

# Глава 13

---

## Рекурсивные данные

В подразделе 11.3.2 мы использовали конструкцию `cases` для определения различий между разнообразными формами условных данных. Мы применяли `cases` и ранее, в частности чтобы отличать друг от друга пустые и не пустые списки в главе 10. Это позволяет предположить, что списки также являются просто одной из форм условных данных, встроенных в Pyret. И это действительно так.

Чтобы лучше понять сущность списков как условных данных, создадим определение данных для нового типа `NumList`, который содержит список чисел (этот тип списка отличается от встроенных списков, которые работают с элементами любого типа). Чтобы избежать конфликтов с встроенным в Pyret значением `empty` и оператором `link`, для `NumList` будем использовать `nl-empty` как пустое значение и `nl-link` как оператор создания нового списка. Ниже приведено незавершенное определение:

```
data NumList:  
  | nl-empty  
  | nl-link( _____ )  
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Заполните пустое место (обозначенное символами подчеркивания) в условии `nl-link` соответствующим полем (или полями) и соответствующими типами. Это пустое место могло бы содержать от 0 до нескольких полей.

Учитывая предшествующий опыт работы со списками, надеемся, что вы вспомнили о том, что конструкторы списков принимают два элемента входных данных: первый элемент и список для создания (остальная часть списка). Это позволяет предположить, что в нашем случае необходимы два поля:

```
data NumList:  
  | nl-empty  
  | nl-link(first :: _____, rest :: _____ )  
end
```

**Выполните прямо сейчас**

Заполните типы для полей `first` и `rest`, если вы пока еще не сделали этого.

Поскольку мы создаем список чисел, поле `first` должно содержать тип `Number`. А что можно сказать о поле `rest`? Оно должно иметь тип списка чисел, поэтому его типом должен быть `NumList`.

```
data NumList:
| nl-empty
| nl-link(first :: Number, rest :: NumList)
end
```

Здесь следует отметить кое-что интересное (и новое): тип поля `rest` тот же самый (`NumList`), что и тип условных данных, которые мы определяем. Мы можем в буквальном смысле нарисовать стрелки, показывающие часть определения, ссылающуюся на саму себя, как изображено на рис. 13.1.

```
data NumList:
| nl-empty
| nl-link(first :: Number, rest :: NumList)
end
```

**Рис. 13.1** ♦ Поле в определении данных, ссылающееся на тип самого определения

Будет ли это действительно работать? Да. Подумайте над тем, как можно сформировать список из чисел 2, 7 и 3 (в указанном порядке). Начинаем с `nl-empty`, которое является допустимым значением для `NumList`. Затем используем `nl-link` для добавления заданных чисел в этот список, как показано ниже:

```
nl-empty
nl-link(3, nl-empty)
nl-link(7, nl-link(3, nl-empty))
nl-link(2, nl-link(7, nl-link(3, nl-empty)))
```

В каждом случае аргумент `rest` сам по себе является корректным списком типа `NumList`. Хотя такое определение данных через самих себя может показаться проблематичным, оно работает превосходно, потому что для создания реальных данных мы начали с условия `nl-empty`, которое не ссылается на тип `NumList`.

Определения данных, которые создаются на основе полей того же (исходного) типа, называются рекурсивными данными (recursive data). Мощные возможности определений рекурсивных данных позволяют создавать несвяз-

занные (unbounded) данные или данные произвольного размера (arbitrary-sized). Если взять за основу NumList, то существует простой способ создания нового списка большего размера: нужно просто использовать nl-link. Поэтому необходимо рассмотреть более длинные списки:

```
nl-link(1,
  nl-link(2,
    nl-link(3,
      nl-link(4,
        nl-link(5,
          nl-link(6,
            nl-link(7,
              nl-link(8,
                nl-empty))))))
```

## 13.1. ФУНКЦИИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕКУРСИВНЫХ ДАННЫХ

Попробуем написать функцию contains-3, которая возвращает true, если список NumList содержит значение 3, и false в противном случае.

Сначала заголовок этой функции:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
  doc: "Produces true if the list contains 3, false otherwise"
  # "Возвращает true, если список содержит 3, иначе false."
end
```

Потом несколько тестов:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
  doc: "Produces true if the list contains 3, false otherwise"
  # "Возвращает true, если список содержит 3, иначе false."
where:
  contains-3(nl-empty) is false
  contains-3(nl-link(3, nl-empty)) is true
  contains-3(nl-link(1, nl-link(3, nl-empty))) is true
  contains-3(nl-link(1, nl-link(2, nl-link(3, nl-link(4, nl-empty))))) is true
  contains-3(nl-link(1, nl-link(2, nl-link(5, nl-link(4, nl-empty))))) is false
end
```

Как и в подразделе 11.3.3, воспользуемся конструкцией cases, чтобы различать варианты. Кроме того, поскольку мы намереваемся использовать поля nl-link для вычисления результата в данном случае, перечислим их в приведенной ниже пробной версии кода:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
  doc: "Produces true if the list contains 3, false otherwise"
  # "Возвращает true, если список содержит 3, иначе false."
  cases (NumList) nl:
```

```
| nl-empty => ...
| nl-link(first, rest) =>
... first ...
... rest ...
end
end
```

Из записанных выше примеров следует, что ответом должно быть логическое значение `false` в случае `nl-empty`. В случае `nl-link`, если первый элемент `first` равен 3, то мы успешно ответили на заданный вопрос. Остается еще один случай, в котором аргументом является `nl-link`, но первый элемент не равен 3:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
cases (NumList) nl:
| nl-empty => false
| nl-link(first, rest) =>
  if first == 3:
    true
  else:
    # Здесь обрабатывается остальная часть списка rest.
  end
end
end
```

Поскольку известно, что остальная часть списка имеет тип `NumList` (на основе определения данных), для ее обработки можно воспользоваться выражением `cases`. Это в определенной степени похоже на повторное заполнение части шаблона:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
cases (NumList) nl:
| nl-empty => false
| nl-link(first, rest) =>
  if first == 3:
    true
  else:
    cases (NumList) rest:
      | nl-empty => ...
      | nl-link(first-of-rest, rest-of-rest) =>
        ... first-of-rest ...
        ... rest-of-rest ...
    end
  end
end
end
```

Если остальная часть `rest` оказалась пустой, то мы не нашли 3 (точно так же, когда мы проверяли исходный аргумент `nl`). Если остальная часть `rest` представлена `nl-link`, то необходимо проверить, равен ли первый элемент остальной части списка 3 или нет:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
    cases (NumList) nl:
        | nl-empty => false
        | nl-link(first, rest) =>
            if first == 3:
                true
            else:
                cases (NumList) rest:
                    | nl-empty => ...
                    | nl-link(first-of-rest, rest-of-rest) =>
                        if first-of-rest == 3:
                            true
                        else:
                            # Здесь дальнейшее заполнение ...
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
```

Поскольку `rest-of-rest` – это `NumList`, можно снова заполнить эту ветвь вариантами `cases`:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
    cases (NumList) nl:
        | nl-empty => false
        | nl-link(first, rest) =>
            if first == 3:
                true
            else:
                cases (NumList) rest:
                    | nl-empty => ...
                    | nl-link(first-of-rest, rest-of-rest) =>
                        if first-of-rest == 3:
                            true
                        else:
                            cases (NumList) rest-of-rest:
                                | nl-empty => ...
                                | nl-link(first-of-rest-of-rest, rest-of-rest-of-rest) =>
                                    ... first-of-rest-of-rest ...
                                    ... rest-of-rest-of-rest ...
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
```

Вы видите, к чему это ведет? Ни к чему хорошему. Можно копировать это выражение `cases` столько раз, сколько захотите, но вы никогда не сможете получить ответ на вопрос для списка, который всего лишь на один элемент

длиннее, чем количество операций копирования соответствующего фрагмента кода.

Так что же делать? Мы попробовали применить метод использования очередной копии выражения `cases` на основе наблюдения, согласно которому `rest` представляет собой `NumList`, а `cases` обеспечивает осмыслинный способ разделения `NumList` на части, в действительности это именно то, к чему описанный порядок действий ведет естественным образом.

Вернемся на один шаг к самому началу решения задачи, т. е. к моменту после заполнения шаблона операцией первой проверки на равенство 3:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
  cases (NumList) nl:
    | nl-empty => false
    | nl-link(first, rest) =>
      if first == 3:
        true
      else:
        # Что делать с остальной частью списка rest?
      end
    end
end
```

Необходим способ для определения, содержится или нет значение 3 в остальной части списка `rest`. Вернувшись к определению данных, мы видим, что `rest` – это абсолютно корректный список `NumList` просто по определению `nl-link`. И у нас есть функция (или большая ее часть), задача которой – определить, содержит `NumList` число 3 или нет: `contains-3`. Поэтому непременно должно существовать то, что мы можем вызвать с частью `rest` как аргументом и получить в ответ требуемое значение:

```
fun contains-3(nl :: NumList) -> Boolean:
  cases (NumList) nl:
    | nl-empty => false
    | nl-link(first, rest) =>
      if first == 3:
        true
      else:
        contains-3(rest)
      end
    end
end
```

И вдруг, неожиданно, все тесты, определенные выше, проходят успешно. Полезно по шагам пройти все, что произошло при вызове этой функции. Рассмотрим это на примере:

```
contains-3(nl-link(1, nl-link(3, nl-empty)))
```

Во-первых, мы подставили значение аргумента вместо всех вхождений `nl` – это вполне обычное правило для вызовов функций.

```
=> cases (NumList) nl-link(1, nl-link(3, nl-empty)):
| nl-empty => false
| nl-link(first, rest) =>
  if first == 3:
    true
  else:
    contains-3(rest)
  end
end
```

Далее мы нашли случай, соответствующий конструктору `nl-link`, и подставили соответствующие элементы значения `nl-link` вместо идентификаторов `first` и `rest`.

```
=> if 1 == 3:
  true
else:
  contains-3(nl-link(3, nl-empty))
end
```

Поскольку 1 не равно 3, результатом сравнения является значение `false`, и все это выражение вычисляется как содержимое ветви `else`.

```
=> if false:
  true
else:
  contains-3(nl-link(3, nl-empty))
end

=> contains-3(nl-link(3, nl-empty))
```

Это еще один вызов функции, так что в этот раз подставляем значение `nl-link(3, nl-empty)`, которое было полем `rest` в начальных входных данных, в теле функции `contains-3`.

```
=> cases (NumList) nl-link(3, nl-empty):
| nl-empty => false
| nl-link(first, rest) =>
  if first == 3:
    true
  else:
    contains-3(rest)
  end
end
```

И снова переходим в ветвь `nl-link`.

```
=> if 3 == 3:
  true
else:
  contains-3(nl-empty)
end
```

Теперь, поскольку 3 равно 3, переходим в первую ветвь выражения `if`, и весь исходный вызов функции в целом при вычислении дает результат `true`.

```
=> if true:  
    true  
else:  
    contains-3(nl-empty)  
end  
  
=> true
```

Интересным свойством этой трассировки вычисления является то, что мы дошли до выражения `contains-3(nl-link(3, nl-empty))`, которое представляет собой обычный вызов функции `contains-3` и могло бы само по себе стать тестовым вариантом. Показанная здесь реализация работает, выполняя некоторые действия (проверку на равенство 3) с нерекурсивными элементами данных и объединяя полученный результат с результатом той же операции (`contains-3`) для рекурсивного элемента данных. Эта идея выполнения рекурсии с той же функцией для элементов типа данных, являющихся рекурсивными сами по себе, позволяет расширить наш шаблон для обработки рекурсивных полей.

## 13.2. ШАБЛОН ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕКУРСИВНЫХ ДАННЫХ

В предыдущем разделе мы фактически получили новую методику написания функций для работы с рекурсивными данными. Еще в главе 10 мы предлагали вам создавать функции обработки списков, записывая последовательность взаимосвязанных примеров и используя подстановку по всем примерам для получения программы, которая вызывала функцию для остальной части списка. Здесь мы получаем структуру программы из самой формы данных.

В сущности, мы можем разработать функцию для работы с рекурсивными данными, разделяя элемент данных на его варианты (используя конструкцию `cases`), получая поля для каждого варианта (перечисляя имена полей), затем вызывая эту же функцию для каждого рекурсивного поля (поля одинакового типа). Для списка `NumList` эти шаги позволяют получить следующую предварительную версию кода:

```
#|  
fun num-list-fun(nl :: NumList) -> ???:  
  cases (NumList) nl:  
  | nl-empty => ...  
  | nl-link(first, rest) =>  
    ... first ...  
    ... num-list-fun(rest) ...  
  end  
end  
|#
```

Здесь мы используем обобщенное имя функции `num-list-fun`, чтобы показать, что это схематичная версия кода для любой функции, которая обрабатывает список `NumList`.

Мы называем такую схематичную версию кода шаблоном (template). Для каждого определения данных существует соответствующий шаблон, который полностью определяет, как разделить значение этого определения на варианты, извлечь поля и использовать эту же функцию для обработки всех рекурсивных полей.

### Стратегия: создание шаблона для рекурсивных данных

Для заданного определения рекурсивных данных используйте описанные ниже шаги для создания (многократно применяемого) шаблона для этого определения.

1. Создать заголовок функции (используя имя-заполнитель общего назначения, если конкретная функция пока еще не написана).
2. Использовать конструкцию `cases` для разделения входных рекурсивных данных на соответствующие варианты.
3. Для каждого варианта перечислить все его поля в части ответа для конкретного варианта.
4. Вызвать ту же функцию для каждого рекурсивного поля.

Мощь этого шаблона заключается в его универсальности. Если вам предложили написать конкретную функцию (такую как `contains-3`) для рекурсивных данных (`NumList`), то вы можете воспроизвести или скопировать (если вы уже записали код) этот шаблон, заменить в нем обобщенное имя функции на более конкретное, затем заполнить строки с многоточиями, чтобы завершить создание функции. Это приводит к пересмотренному описанию процесса проектирования.

Для обработки рекурсивных данных достаточно изменить описание процесса проектирования так, чтобы он содержал этот расширенный шаблон. Когда вы видите определение рекурсивных данных (которых будет много при программировании в Pyret), вы естественным образом должны начать думать о том, что будут возвращать рекурсивные вызовы и как объединить их результаты с другими, нерекурсивными элементами типа данных.

Теперь вы познакомились с двумя методиками написания функций для обработки рекурсивных данных: разработка последовательности взаимосвязанных примеров и изменение шаблона. Обе методики приводят вас к одной и той же итоговой функции. Но мощь шаблона заключается в том, что он масштабируется до более сложных определений данных (когда запись примеров вручную может оказаться слишком утомительным делом). Мы будем наблюдать примеры этого по мере того, как наши данные будут становиться все более сложными в следующих главах.

---

### Упражнение 13.1

Используйте приведенное выше описание процесса проектирования для написания функции `contains-n`, которая принимает список `Num-`

List и число Number и возвращает ответ: содержится ли заданное число в списке NumList.

---

---

### Упражнение 13.2

Используйте приведенное выше описание процесса проектирования для написания функции sum, которая принимает список NumList и возвращает сумму всех чисел в этом списке. Сумма пустого списка равна 0.

---

---

### Упражнение 13.3

Используйте приведенное выше описание процесса проектирования для написания функции remove-3, которая принимает список NumList и возвращает новый список NumList, в котором удалены все значения 3. Оставшиеся в итоговом списке элементы должны располагаться в том же порядке, что и в исходном списке.

---

---

### Упражнение 13.4

Напишите определение данных NumListList, которое представляет список списков NumList, и используйте приведенное выше описание процесса проектирования для написания функции sum-of-lists, которая принимает список NumListList и создает список NumList, содержащий суммы всех подсписков.

---

---

### Упражнение 13.5

Напишите определение данных и соответствующий шаблон для списка StrList, который обрабатывает списки строк.

---

---

# Глава 14

---

## Деревья

### 14.1. ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДАННЫХ – ДАННЫЕ РОДОСЛОВНОЙ

Предположим, что мы должны управлять информацией о родословной (генеалогии) некоторой семьи с целью проведения медицинских исследований. В частности, необходимо зафиксировать год рождения члена семьи, цвет глаз и имена генетических родителей. Ниже приведен пример таблицы таких данных, в которой каждая строка описывает одного члена семьи:

```
ancestors = table: name, birthyear, eyecolor, female-parent, male-parent
  row: "Anna", 1997, "blue", "Susan", "Charlie"
  row: "Susan", 1971, "blue", "Ellen", "Bill"
  row: "Charlie", 1972, "green", "", ""
  row: "Ellen", 1945, "brown", "Laura", "John"
  row: "John", 1922, "brown", "", "Robert"
  row: "Laura", 1922, "brown", "", ""
  row: "Robert", 1895, "blue", "", ""
end
```

Для проводимого исследования необходима возможность отвечать на перечисленные ниже вопросы:

- кто является генетическими прародителями конкретного члена семьи?
- как часто встречается каждый вариант цвета глаз?
- является ли одно конкретное лицо предком другого конкретного лица?
- информация о скольких поколениях имеется в нашем распоряжении?
- есть ли связь цвета глаз конкретного члена семьи с возрастом его генетических родителей в момент его рождения?

Начнем с первого вопроса.

### **Выполните прямо сейчас**

Как бы вы создавали список известных прародителей для заданного конкретного члена семьи? С учетом целей этой главы можно было бы предположить, что каждый член семьи имеет единственное в своем роде (неповторяющееся) имя (хотя в реальной жизни такое практически невозможно, это упростит наши вычисления на текущий момент; в этой главе мы еще вернемся к обсуждению данного вопроса).

(Подсказка: создайте план решения задачи. В нем предлагаются какие-либо конкретные вспомогательные функции?)

План решения этой задачи содержит два главных шага: поиск имен генетических родителей лица с заданным именем, затем поиск имен родителей каждого родителя. Для выполнения обоих шагов требуется вычисление известных родителей по имени, поэтому мы должны создать вспомогательную функцию для такого вычисления (назовем ее `parents-of`). Поскольку она выглядит как подпрограмма в программе обработки таблицы, можно использовать ее для небольшого обзора в следующем подразделе.

## **14.1.1. Вычисление генетических родителей по таблице родословной**

Как мы должны вычислять список генетических родителей некоторого лица? Попробуем сделать предварительный набросок плана решения этой задачи:

- фильтрация таблицы для поиска требуемого лица;
- извлечение имени матери;
- извлечение имени отца;
- создание списка из этих имен.

Это задачи, которые мы рассматривали ранее, поэтому можно сразу преобразовать приведенный выше план прямо в код:

```
fun parents-of(t :: Table, who :: String) -> List<String>:
    doc: "Return list of names of known parents of given name"
    # "Возвращает список имен известных родителей лица с заданным именем."
    matches = filter-with(t, lam(r): r["name"] == who end)
    if matches.length() > 0:
        person-row = matches.row-n(0)
        [list:
            person-row["female-parent"],
            person-row["male-parent"]]
    else:
        empty
    end
where:
    parents-of(ancestors, "Anna") is [list: "Susan", "Charlie"]
    parents-of(ancestors, "Kathi") is empty
end
```

**Выполните прямо сейчас**

Вас удовлетворяет эта программа? И примеры, включенные в блок `where?`? Запишите все имеющиеся у вас критические замечания.

Возможно, здесь есть некоторые проблемы. Сколько проблем вам удалось обнаружить?

- Примеры слабые: ни один из примеров не рассматривает лицо, для которого отсутствует информация, как минимум, об одном родителе.
- Список имен, возвращаемый в случае, когда родитель неизвестен, включает пустую строку, которая в действительности именем не является. Из-за этого могут возникать проблемы, если мы используем этот список имен в последующем вычислении (например, в вычислении имен прародителей заданного лица).
- Если пустые строки не являются частью полученного в результате списка, то в ответ на вопрос о родителях "Robert" (имя, которое содержится в таблице) получили бы точно такой же результат, как для имени "Kathi" (которого нет в таблице). Это абсолютно разные случаи, которые, вероятнее всего, требуют различных вариантов вывода, чтобы можно было отделить их друг от друга.

Для устранения перечисленных выше проблем необходимо исключить пустые строки из создаваемого списка родителей и возвращать что-то другое вместо пустого списка `empty`, если имя не содержится в таблице. Поскольку выводом этой функции является список строк, трудно понять, что именно следует возвращать, чтобы исключить возможность путаницы в корректном списке имен. В настоящий момент принимаем следующее решение: пусть Pyret генерирует ошибку (подобную тем, когда Pyret не способен корректно завершить выполнение программы). Ниже приведено решение, в котором обрабатываются обе проблемы:

```
fun parents-of(t :: Table, who :: String) -> List<String>:
  doc: "Return list of names of known parents of given name"
  # "Возвращает список имен известных родителей лица с заданным именем."
  matches = filter-with(t, lam(r): r["name"] == who end)
  if matches.length() > 0:
    person-row = matches.row-n(0)
    names =
      [list: person-row["female-parent"],
       person-row["male-parent"]]
    L.filter(lam(n): not(n == "") end, names)
  else:
    raise("No such person " + who)
  end
where:
  parents-of(ancestors, "Anna") is [list: "Susan", "Charlie"]
  parents-of(ancestors, "John") is [list: "Robert"]
  parents-of(ancestors, "Robert") is empty
  parents-of(ancestors, "Kathi") raises "No such person"
end
```

Конструкция `raise` сообщает Рурет о необходимости немедленной остановки выполнения программы и вывода сообщения об ошибке, которое не обязательно должно соответствовать ожидаемому типу вывода программы. Если вы запускаете эту функцию с именем, которого нет в таблице, то увидите сообщение об ошибке в интерактивной панели, а результат не возвращается.

Внутри блока `where` мы видим, как можно проверить, станет ли некоторое выражение причиной ошибки: вместо использования `is` для проверки равенства значений мы применяем `raise`, чтобы проверить, является ли предоставленная строка подстрокой реального сообщения об ошибке, сгенерированного программой.

## 14.1.2. Вычисление прародителей по таблице родословной

После создания функции `parents-of` мы должны получить возможность вычисления прародителей, определяя родителей вычисленных ранее родителей, как показано ниже:

```
fun grandparents-of(anc-table: Table, person: String) -> List[String]:
    doc: "compute list of known grandparents in the table"
    # "Вычисление списка известных прародителей по таблице."
    # Объединение списков родителей матери и отца.
    plist = parents-of(anc-table, person) # Создается список из двух имен.
    parents-of(anc-table, plist.first) + parents-of(anc-table, plist.rest.first)
where:
    grandparents("Anna") is [list: "Laura", "John"]
    grandparents("Laura") is [list:]
    grandparents("Kathi") is [list:]
end
```

### Выполните прямо сейчас

Вернитесь к примеру дерева родословной: для каких людей эта функция правильно вычислит список прародителей?

Приведенный выше код функции `grandparents-of` превосходно работает для тех лиц, у которых в таблице записаны оба родителя. Но если у кого-то не указаны оба родителя, то в списке `plist` будет содержаться меньше двух имен, поэтому попытка вычисления выражения `plist.rest.first` (при отсутствии `plist.first`) приведет к ошибке.

Ниже приводится версия, которая проверяет число родителей перед вычислением множества прародителей:

```
fun grandparents-of(anc-table :: Table, name :: String) -> List<String>:
    doc: "compute list of known grandparents in the table"
    # "Вычисление списка известных прародителей по таблице."
    # Объединение списков родителей матери и отца.
```

```

plist = parents-of(anc-table, name)    # Создается список из двух имен.
if plist.length == 2:
    parents-of(anc-table, plist.first) + parents-of(anc-table, plist.rest.first)
else if plist.length == 1:
    parents-of(anc-table, plist.first)
else: empty
end
end

```

А если теперь необходимо собрать вместе всех предков некоторого лица? Поскольку неизвестно, сколько поколений существует в данном случае, потребуется использование рекурсии. Такой подход также будет связан с большими затратами, поскольку в итоге мы должны фильтровать таблицу снова и снова, проверяя каждую ее строку при каждом проходе `filter`.

Рассмотрим внимательнее первоначальную картину дерева родословной. Здесь не нужно выполнять какую-либо сложную фильтрацию – мы просто следуем по линии на изображении от какого-либо члена семьи до его матери или отца. Можно ли как-то использовать эту идею в коде? Да, с помощью типов данных.

### 14.1.3. Создание типа данных для деревьев родословной

При таком подходе необходимо создать тип данных для деревьев родословной, который содержит вариант (конструктор) для начальной настройки характеристик любого лица. Снова обратимся к исходной картине – какая информация формирует характеристики члена семьи? Имя, мать и отец (а также год рождения и цвет глаз, которые не показаны на изображении дерева родословной). Это предполагает следующий тип данных, который с легкостью превращает строку в значение `person`:

```

data AncTree:
| person(
  name :: String,
  birthyear :: Number,
  eye :: String,
  mother :: _____,
  father :: _____
)
end

```

Например, строка с характеристиками Анны могла бы выглядеть следующим образом:

```
anna-row = person("Anna", 1997, "blue", ???, ???)
```

Какой тип нужно поместить в незаполненных местах? Экстренный мозговой штурм предлагает несколько идей:

- `person`;

- List<person>;
- некоторый новый тип данных;
- AncTree;
- String.

Так какой же тип выбрать?

Если использовать `String`, то мы возвращаемся к строке таблицы, и в итоге не получим способ простого перехода от одного лица к другому. Следовательно, мы должны выбрать тип `AncTree`.

```
data AncTree:  
| person(  
  name :: String,  
  birthyear :: Number,  
  eye :: String,  
  mother :: AncTree,  
  father :: AncTree  
)  
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Запишите дерево `AncTree`, начиная с имени Anna, с использованием приведенного выше определения.

Вы застряли на каком-то этапе? Что делать, если отсутствуют известные члены семьи? Для обработки этого случая обязательно необходимо добавить в определении `AncTree` вариант для описания лица, о котором ничего не известно.

```
data AncTree:  
| noInfo  
| person(  
  name :: String,  
  birthyear :: Number,  
  eye :: String,  
  mother :: AncTree,  
  father :: AncTree  
)  
end
```

Ниже показано, как записывается дерево для Анны с использованием этого типа данных:

```
anna-tree =  
person("Anna", 1997, "blue",  
  person("Susan", 1971, "blue",  
    person("Ellen", 1945, "brown",  
      person("Laura", 1920, "blue", noInfo, noInfo),  
      person("John", 1920, "green",  
        noInfo,
```

```
person("Robert", 1893, "brown", noInfo, noInfo)),
person("Bill", 1946, "blue", noInfo, noInfo)),
person("Charlie", 1972, "green", noInfo, noInfo))
```

Также можно присвоить отдельные имена данным о каждом члене семьи.

```
robert-tree = person("Robert", 1893, "brown", noInfo, noInfo)
laura-tree = person("Laura", 1920, "blue", noInfo, noInfo)
john-tree = person("John", 1920, "green", noInfo, robert-tree)
ellen-tree = person("Ellen", 1945, "brown", laura-tree, john-tree)
bill-tree = person("Bill", 1946, "blue", noInfo, noInfo)
susan-tree = person("Susan", 1971, "blue", ellen-tree, bill-tree)
charlie-tree = person("Charlie", 1972, "green", noInfo, noInfo)
anna-tree2 = person("Anna", 1997, "blue", susan-tree, charlie-tree)
```

Последняя группа записей представляет части дерева для использования в качестве других примеров, но при этом теряется структура, хорошо наблюдаемая при сдвигах строк вправо в первой версии. Можно было бы получить части первой версии, углубляясь в данные, например если записать `anna-tree.mother.mother`, чтобы получить дерево, начинающееся с "Ellen".

Ниже приведен код функции `parents-of`, написанный с использованием типа данных `AncTree`:

```
fun parents-of-tree(tr :: AncTree) -> List<String>:
    cases (AncTree) tr:
        | noInfo => empty
        | person(n, y, e, m, f) => [list: m.name, f.name]
            # Элемент person становится чуть более сложным, если родитель отсутствует.
    end
end
```

## 14.2. ПРОГРАММЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДЕРЕВЬЕВ РОДОСЛОВНОЙ

Как можно было бы написать функцию, определяющую, имеет ли некоторое конкретное имя какое-либо лицо в дереве родословной? Точнее говоря, мы пытаемся заполнить пробел в следующем коде:

```
fun in-tree(at :: AncTree, name :: String) -> Boolean:
    doc: "determine whether name is in the tree"
        # "Определяет, содержится ли заданное имя в дереве."
    ...
```

С чего начать? Добавим несколько примеров, вспомним о необходимости проверки обоих вариантов определения `AncTree`:

```
fun in-tree(at :: AncTree, name :: String) -> Boolean:
    doc: "determine whether name is in the tree"
        # "Определяет, содержит ли заданное имя в дереве."
```

```
...
where:
in-tree(anna-tree, "Anna") is true
in-tree(anna-tree, "Ellen") is true
in-tree(ellen-tree, "Anna") is false
in-tree(noInfo, "Ellen") is false
end
```

Что дальше? Когда мы работали со списками, то говорили о шаблоне (template), некоторой общей схеме кода, и нам было известно, что такой шаблон можно написать на основе структуры данных. В шаблоне присваивались имена фрагментам каждого типа данных и выполнялись рекурсивные вызовы для фрагментов того же типа. Ниже показан шаблон с заполнением на основе типа `AncTree`:

```
fun in-tree(at :: AncTree, name :: String) -> Boolean:
    doc: "determine whether name is in the tree"
    # "Определяет, содержится ли заданное имя в дереве."
    cases (AncTree) at:  # Выводится из типа AncTree, представляющего данные с вариантами.
        | noInfo => ...
        | person(n, y, e, m, f) => ... in-tree(m, name) ... in-tree(f, name)
    end
where:
in-tree(anna-tree, "Anna") is true
in-tree(anna-tree, "Ellen") is true
in-tree(ellen-tree, "Anna") is false
in-tree(noInfo, "Ellen") is false
end
```

Чтобы завершить этот код, необходимо подумать о том, как заполнить места, обозначенные многоточиями.

- Если дерево соответствует варианту `noInfo`, то в нем больше нет имен лиц, поэтому ответом должно быть значение `false` (как свидетельствуют примеры).
- Если дерево соответствует варианту `person`, то существуют три возможных продолжения: мы можем находиться в локации лица с именем, которое мы ищем, или искомое имя может находиться в дереве матери, или в дереве отца.

Мы знаем, как проверить, совпадает ли имя текущего лица с искомым именем. Рекурсивные вызовы уже задают вопрос об имени, находящемся в дереве матери или отца. Необходимо только лишь объединить эти элементы в один общий ответ логического (`Boolean`) типа. Так как существуют три возможных варианта, мы должны объединить их с помощью оператора `or`.

Ниже показана окончательная версия кода:

```
fun in-tree(at :: AncTree, name :: String) -> Boolean:
    doc: "determine whether name is in the tree"
    # "Определяет, содержит ли заданное имя в дереве."
    cases (AncTree) at:  # Выводится из типа AncTree, представляющего данные с вариантами.
        | noInfo => false
```

```

| person(n, y, e, m, f) => (name == n) or in-tree(m, name) or in-tree(f, name)
# n то же самое, что at.name.
# m то же самое, что at.mother.

end
where:
in-tree(anna-tree, "Anna") is true
in-tree(anna-tree, "Ellen") is true
in-tree(ellen-tree, "Anna") is false
in-tree(noInfo, "Ellen") is false
end

```

## 14.3. РЕЗЮМЕ: МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДЕРЕВЬЯХ

Мы проектируем программы обработки деревьев, используя тот же процесс проектирования, который ранее был описан для списков.

### Стратегия: создание программ для обработки деревьев

- Записать тип данных для конкретного дерева, включая вариант основа (корень)/лист.
- Записать примеры такого типа деревьев для использования при тестировании.
- Записать имя функции, параметры и типы (т. е. строку `fun`).
- Записать блок `where`, проверяющий код функции.
- Записать шаблон, включающий варианты и рекурсивные вызовы. Ниже еще раз показан шаблон для дерева родословной с произвольно выбранным именем функции `treeF`:

```

fun treeF(name :: String, t :: AncTree) -> Boolean:
  cases (AncTree) anct:
    | unknown => ...
    | person(n, y, e, m, f) =>
      ... treeF(name, m) ... treeF(name, f)
  end
end

```

- Места, обозначенные многоточиями в шаблоне, заполнить подробностями, характерными для конкретной задачи.
- Протестируировать полученный завершенный код с использованием примеров.

## 14.4. УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

- Подумайте о возможности записи древовидной структуры в таблице (используя фильтрацию `filter-by`) по сравнению с записью в дереве. Сколько раз при каждом проходе может сравниваться искомое имя с именем в таблице/дереве?

- Почему необходимо использовать рекурсивную функцию для обработки дерева?
- В каком порядке будут проверяться имена в версии с использованием дерева?

Для развития практических навыков попробуйте решить следующие задачи:

- сколько людей с голубыми глазами находится в рассматриваемом в этой главе дереве родословной?
- сколько имен людей содержится в этом дереве?
- сколько поколений содержится в этом дереве?
- сколько людей с заданным именем содержится в этом дереве?
- сколько людей имеют имена, начинающиеся на "А"?
- ... и т. д.

# Глава 15

---

## Функции как данные

Любопытно поразмышлять, насколько выразительным может быть та небольшая часть программирования, которую мы уже изучили. Чтобы проиллюстрировать такой процесс размышлений, рассмотрим подробно несколько упражнений с интересными концепциями, которые мы можем выразить, используя только функции в качестве значений. Мы напишем два совершенно различных примера, а затем покажем, как они превосходно совмещаются.

### 15.1. НЕМНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Если вы изучали математический анализ и дифференцирование, то встречали выражения со своеобразным синтаксисом, похожие на приведенное ниже:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x.$$

Давайте разберемся, что означают эти символы:  $d/dx$ ,  $x^2$  и  $2x$ .

Сначала рассмотрим подробнее два выражения – обсудим одно из них, а в ходе обсуждения затронем и второе. Правильным ответом на вопрос «Что означает  $x^2$ ?» будет, разумеется, ошибка: ничего не означает, потому что  $x$  – это несвязанный идентификатор.

Так что же это должно означать? Очевидно, что намерением является представление функции, которая возводит в квадрат входные данные, и точно так же  $2x$  означает, что эта функция удваивает входные данные. У нас есть более удобные способы записи таких действий:

```
fun sq(x :: Number) -> Number: x * x end  
fun dbl(x :: Number) -> Number: 2 * x end
```

и в действительности мы пытаемся сказать, что  $d/dx$  (что бы это не означало) от `sq` равно `dbl`.

Теперь разберемся с выражением  $d/dx$ , начиная с его типа. Как показано в приведенном выше примере,  $d/dx$  в действительности является функцией от функций для получения других функций. То есть можно записать ее тип, как показано ниже:

Здесь предполагается рассмотрение функций с числом аргументов, равным единице, от изменяющейся переменной.

```
d-dx :: ((Number -> Number) -> (Number -> Number))
```

(Этот тип может объяснить, почему в изученном вами курсе математического анализа такая операция никогда не описывалась подобным способом, – хотя не ясно, улучшит ли сокрытие ее истинного смысла ваше понимание.)

Теперь попробуем реализовать операцию `d-dx`. Мы займемся реализацией численного дифференцирования, хотя теоретически можно было бы реализовать и символьное дифференцирование, используя известные вам правила, например если задан многочлен, то необходимо умножить (каждый его член) на показатель степени и уменьшить показатель степени на единицу – с представлением выражений (это задача, которую мы рассмотрим более подробно в следующей версии).

В общем случае численное дифференцирование функции в некоторой точке позволяет получить значение ее производной в этой точке. Для этого существует удобная формула: производная функции  $f$  в точке  $x$  равна

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

при  $\varepsilon$ , стремящемся к нулю в пределе. Пока придадим бесконечно малой величине небольшое, но фиксированное значение, а позже в разделе 15.4 рассмотрим, как можно улучшить его.

```
epsilon = 0.00001
```

Теперь можно преобразовать приведенную выше формулу в функцию:

```
d-dx-at :: (Number -> Number), Number -> Number
```

```
fun d-dx-at(f, x):
  (f(x + epsilon) - f(x)) / epsilon
end
```

И для полной уверенности можно проверить эту функцию и убедиться, что она работает, как ожидается:

```
check:
  d-dx-at(sq, 10) is-roughly dbl(10)
end
```

Но кое-что в этом коде нельзя признать удовлетворительным. Очевидно, что созданная функция не принадлежит к типу, который мы описали выше. Нам нужна была операция, которая принимает только функцию и представляет теоретическую (воображаемую) форму записи дифференцирования, но пришлось в соответствии с сущностью численного дифференцирования описать производную в некоторой точке. Вместо этого можно было бы написать нечто подобное:

Чистосердечное признание:  
мы выбрали значение `epsilon` так, чтобы принятое по умолчанию допустимое отклонение `is-roughly` корректно работало в этом примере.

```
fun d-dx(f):
  (f(x + epsilon) - f(x)) / epsilon
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Какая проблема существует в приведенном выше определении?

Если вы не заметили проблему, то скоро Pyret сообщит:  $x$  – несвязанный идентификатор. Разумеется, ведь что такое  $x$ ? Это точка, в которой мы пытаемся вычислить числовое значение производной. То есть функция  $d\text{-}dx$  должна возвращать не число, а функцию (как указывает ее тип), которая примет этот  $x$ :

```
fun d-dx(f):
  lam(x):
    (f(x + epsilon) - f(x)) / epsilon
  end
end
```

«Лямбда-функции остаются в относительной безвестности до тех пор, пока Java не сделает их широко известными, фактически не имея их». – Джеймс Айри (James Iry), «A Brief, Incomplete, and Mostly Wrong History of Programming Languages» (<https://james-iry.blogspot.com/2009/05/brief-incomplete-and-mostly-wrong.html>).

Если требуется немного более понятный код, то можно добавить аннотацию внутренней функции:

```
fun d-dx(f):
  lam(x :: Number) -> Number:
    (f(x + epsilon) - f(x)) / epsilon
  end
end
```

И действительно, теперь это определение работает правильно. Например, можно протестировать его, как показано ниже (обратите внимание на использование встроенной функции `num-floor` для того, чтобы избежать проблем с точностью вычислений, из-за которых может показаться, что тесты не проходят):

```
d-dx-sq = d-dx(sq)

check:
  ins = [list: 0, 1, 10, 100]
  for map(n from ins):
    num-floor(d-dx-sq(n))
  end
  is
  for map(n from ins):
    num-floor(dbL(n))
  end
end
```

Теперь можно вернуться к исходному примеру, с которого началось это исследование: т. е. к тому, что в действительности пытается нам сообщить неоднозначное и загадочное математическое выражение:

```
d-dx(lam(x): x * x end) = lam(x): 2 * x end
```

или в форме записи, определенной в разделе 18.7:

$$\frac{d}{dx}[x \rightarrow x^2] = [x \rightarrow 2x].$$

Жаль, что учебники математики не желают говорить нам правду.

## 15.2. УДОБНАЯ СОКРАЩЕННАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ДЛЯ АНОНИМНЫХ ФУНКЦИЙ

Puret предлагает более короткую синтаксическую форму записи анонимных функций. Но из соображений стилистики мы в общем случае избегаем ее применения, чтобы наши программы не превращались в беспорядочную смесь специальных символов, хотя иногда сокращенная форма достаточно удобна, как мы убедимся чуть позже. Вот эта форма:

```
{(a): b}
```

Здесь `a` – ноль и более аргументов, `b` – тело функции. Например, `lam(x): x * x` можно записать в следующем виде:

```
{(x): x * x}
```

Здесь можно заметить преимущество краткой формы записи. В частности, обратите внимание на то, что здесь нет необходимости в `end`, потому что фигурные скобки четко обозначают начало и конец выражения. Аналогичным образом можно было бы записать и функцию `d-dx` в следующем виде:

```
fun d-dx-short(f):
  {(x): (f(x + epsilon) - f(x)) / epsilon}
end
```

Но многие читатели, возможно, скажут, что такую функцию труднее читать, потому что хорошо заметное ключевое слово `lam` обеспечивает полное понимание того, что `d-dx` возвращает некоторую (анонимную) функцию, тогда как приведенный выше синтаксис скрывает этот факт. Таким образом, обычно мы будем использовать эту сокращенную синтаксическую форму записи только для так называемых «однострочников» (т. е. функций, записываемых в одной строке).

## 15.3. ПОТОКИ ИЗ ФУНКЦИЙ

Люди обычно склонны считать, что функции предназначены для единственной цели: для параметризации выражений. Мысль верная, к тому же именно так чаще всего используется функция, но это не оправдывает наличия функ-

ции без аргументов, потому что она очевидно вообще ничего не параметризует. Тем не менее функции без аргументов также применяются, потому что в действительности функции служат двум целям: для параметризации и для приостановки вычисления тела до тех пор, пока функция не будет применена. Фактически эти два способа применения независимы в том смысле, что можно использовать одно свойство без другого. Немного позже мы сосредоточим особое внимание на задержке выполнения без абстракции (которая проявляется в других аспектах информатики).

Рассмотрим простейший список. Список может иметь только конечную длину. Но в природе существует множество списков (или последовательностей), у которых нет естественной верхней границы: от абстрактных математических объектов (последовательность натуральных чисел) до объектов из реальной жизни (последовательность входов на веб-сайт). Вместо того чтобы пытаться превратить эти неограниченные списки в ограниченные, рассмотрим, как можно представить и запрограммировать такие неограниченные списки.

Сначала напишем программу для вычисления последовательности натуральных чисел:

```
fun nats-from(n):
    link(n, nats-from(n + 1))
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

В этой программе есть проблемы?

Программа представляет наше намерение, но она не работает: при ее запуске, например `nats-from(0)`, создается бесконечный цикл, вычисляющий `nats-from` для каждого последующего натурального числа. Скажем так, необходимо написать что-то, очень похожее на приведенный выше код, но выполнение не должно повторяться рекурсивно до того момента, пока мы этого не потребуем, т. е. это должно быть выполнение по запросу (on demand). Другими словами, необходимо, чтобы остальная часть списка (`rest`) была ленивой (`lazy`).

Вот тут-то и начинается наше более глубокое понимание функций. Функция, как мы только что отметили, откладывает вычисление своего тела до тех пор, пока не будет применена. Следовательно, теоретически функция откладывает вызов `nats-from(n + 1)` до тех пор, пока он не потребуется.

Но при этом возникает проблема с типом: второй аргумент для `link` должен быть списком и не может быть функцией. Действительно, поскольку непременно должен передаваться список, а каждое сформированное значение обязательно должно быть конечным, каждый список конечен и в итоге заканчивается `empty`. Следовательно, необходима новая структура данных для представления ссылок в таких ленивых списках (также известных как потоки (`streams`)):

```
<stream-type-def> ::=

data Stream<T>:
    | lz-link(h :: T, t :: ( -> Stream<T>))
end
```

Здесь аннотация (`-> Stream<T>`) означает функцию без аргументов (поэтому перед `->` ничего не записано), также известную под названием «переходник» (thunk). Обратите внимание: при таком методе определения потоков они должны быть бесконечными, поскольку мы не предусмотрели способа их завершения.

Создадим самый простой пример, который только возможен, – поток постоянных значений:

```
ones = lz-link(1, lam(): ones end)
```

Но в действительности Pyret пожалуется на это определение. Обратите внимание: этот список равнозначен списку, который также не будет работать:

```
ones = link(1, ones)
```

потому что переменная `ones` не определена в момент определения списка, поэтому когда Pyret вычисляет `link(1, ones)`, выводится сообщение о том, что переменная `ones` не определена. Но наше первое определение строго ограничено: `ones` используется «только в пределах `lam`», следовательно, не потребуется до тех пор, пока не будет выполнено определение `ones`, после чего переменная `ones` становится определенной. Мы можем сообщить об этом Pyret, используя ключевое слово `rec`:

```
rec ones = lz-link(1, lam(): ones end)
```

Следует отметить, что в Pyret внутри каждого определения `fun` неявно содержится `rec`, и поэтому мы с полной уверенностью можем создавать рекурсивные функции.

---

### Упражнение 15.1

Ранее мы объявили, что невозможно написать

```
ones = link(1, ones)
```

А если вместо этого попробовать написать

```
rec ones = link(1, ones)
```

Будет ли это работать, и если будет, то с каким значением связывается `ones`? Если это не работает, то причина отказа та же самая, что и при определении без ключевого слова `rec`?

---

С этого момента и далее мы будем использовать сокращенную форму записи (см. раздел 15.2) вместо лямбда-функций. Таким образом, можно переписать приведенное выше определение, как показано ниже:

```
rec ones = lz-link(1, {(): ones})
```

Обратите внимание: `{(): ...}` определяет анонимную функцию без аргументов. Нельзя отбрасывать пустые круглые скобки `()`. Без них Pyret не поймет, что имеется в виду в вашей программе.

Поскольку функции являются автоматически рекурсивными, при написании функции для создания потока нет необходимости в использовании ключевого слова `гес`. Рассмотрим следующий пример:

```
fun nats-from(n :: Number):
    lz-link(n, {(): nats-from(n + 1)})
end
```

С помощью этой функции можно определить последовательность натуральных чисел:

```
nats = nats-from(0)
```

Следует отметить, что определение `nats` само по себе не является рекурсивным – рекурсия заключена внутри `nats-from`, поэтому при определении `nats` нет необходимости в использовании ключевого слова `гес`.

### **Выполните прямо сейчас**

Ранее мы заявили, что каждый список является конечным, следовательно, в конце концов завершается. Как применить это заявление к потокам, таким как приведенное выше определение `ones` или `nats`?

Описание `ones` остается конечным списком, он просто представляет потенциальную возможность для создания бесконечного числа значений. Отметим следующие факты:

- 1) аналогичное рассуждение неприменимо к спискам, потому что остальная часть списка уже сформирована; напротив, размещение функции в остальной части списка создает возможность для потенциально неограниченного объема вычислений, которые остаются ожидаемыми;
- 2) тем не менее даже при использовании потоков в любом заданном вычислении мы будем создавать только конечный префикс потока. Но при этом не требуется заранее определять конкретный его размер; каждый клиент при любом варианте использования может извлекать меньше или больше данных по мере необходимости.

Теперь мы создали несколько потоков, но пока еще не располагаем простым способом для того, чтобы «увидеть» один из них. Сначала определим обычные селекторы, похожие на списки. Извлечение первого элемента работает точно так же, как в списках:

```
fun lz-first<T>(s :: Stream<T>) -> T: s.h end
```

Напротив, при попытке доступа к остальной части потока все, что мы получаем из этой структуры данных, – переходник (`thunk`). Чтобы получить

доступ к настоящей остальной части, необходимо явно использовать переходник, что, разумеется, означает его применение без аргументов:

```
fun lz-rest<T>(s :: Stream<T>) -> Stream<T>: s.t() end
```

Это полезно для исследования отдельных значений потока. Это также удобно для извлечения конечного префикса потока (заданного размера) в виде (обычного) списка, который может оказаться особенно подходящим для тестирования. Напишем такую функцию:

```
fun take<T>(n :: Number, s :: Stream<T>) -> List<T>:
  if n == 0:
    empty
  else:
    link(lz-first(s), take(n - 1, lz-rest(s)))
  end
end
```

Если очень внимательно рассматривать этот код, то обнаружится, что тело функции определяется не вариантами структуры входных данных (потока), а вариантами определения натурального числа (ноль или некоторое следующее за ним число). Мы вернемся к этому немного позже в определении *<lz-map2-def>*.

Мы написали требуемую функцию, и теперь можно использовать ее для тестирования. Обратите внимание: обычно мы используем данные для тестирования функций, но здесь созданная функция применяется для тестирования имеющихся данных:

```
check:
  take(10, ones) is map(lam(_): 1 end, range(0, 10))
  take(10, nats) is range(0, 10)
  take(10, nats-from(1)) is map(_ + 1, range(0, 10))
end
```

Определим еще одну функцию: аналог `map` для работы с потоками. По причинам, которые вскоре станут понятными, определим версию, которая принимает два списка и применяет первый аргумент поэлементно к этим спискам:

```
<lz-map2-def> ::=
fun lz-map2<A, B, C>(
  f :: (A, B -> C),
  s1 :: Stream<A>,
  s2 :: Stream<B>) -> Stream<C>:
  lz-link(
    f(lz-first(s1), lz-first(s2)),
    {(): lz-map2(f, lz-rest(s1), lz-rest(s2)))})
end
```

Теперь мы можем особенно ясно увидеть и понять наше предыдущее замечание о структуре функции. В то время как обычное отображение `map` для

Форма записи  $(_ + 1)$  определяет специальную функцию `Ruget` с одним аргументом, который прибавляет 1 к заданному (переданному) аргументу.

списков содержало бы два варианта, здесь мы имеем только один вариант, потому что определение данных (*<stream-type-def>*) содержит только один вариант. К каким последствиям это приводит? В обычном отображении `map` один вариант выглядит так, как показано выше, но другой вариант соответствует вводу пустого списка `empty`, для которого создается тот же вывод. Здесь же, поскольку поток никогда не завершается, отображение на него также не прекращается, и структура приведенной выше функции отображает это.

Почему мы определяем `lz-map2` вместо `lz-map`? Потому что второе определение позволяет написать следующее выражение:

```
rec fibs =
  lz-link(0,
    {(): lz-link(1,
      {(): lz-map2({(a :: Number, b :: Number): a + b},
        fibs,
        lz-rest(fibs))}))})
```

Это порождает более сложную задачу: если в теле функции не содержится исходный (базовый) и выводимый по индукции вариант, то как мы сможем выполнить доказательство методом индукции для этого случая? Короткий ответ: это невозможно – вместо индукции необходимо использовать метод коиндукции (*coinduction*) (см. главу 33 «Словарь терминов»).

Разумеется, из этого выражения мы можем извлечь столько чисел Фибоначчи, сколько потребуется.

```
check:
  take(10, fibs) is [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]
end
```

## Упражнение 15.2

Определите для потоков операции, равнозначные `map` и `filter`.

Потоки и в более общем смысле любые бесконечные структуры данных, которые наращиваются по запросу, весьма важны в программировании. Например, рассмотрим все возможные ходы в некоторой игре. В некоторых играх число ходов может быть бесконечным, но даже если оно конечно, то для действительно интересных игр комбинаторика означает, что дерево ходов слишком велико для практически выполнимого хранения в памяти. Следовательно, программист компьютерного интеллекта непременно должен наращивать дерево игры по запросу. Такое программирование с использованием кодирования, которое мы описали выше, означает, что программа «лениво» описывает все дерево в целом, а дерево разворачивается (наращивается) автоматически по требованию, освобождая программиста от бремени реализации такой стратегии.

В некоторые языки, например в Haskell, ленивые вычисления встроены по умолчанию. В таком языке нет никакой необходимости пользоваться переходниками (*thunks*). Но ленивые вычисления создают другие типы нагрузок в языке, которые вы, возможно, изучали в курсе по языкам программирования.

## 15.4. Объединение сил: потоки производных

При определении функции `d-dx` мы установили для `epsilon` произвольное, достаточно большое значение. Вместо этого можно было бы интерпретировать саму переменную `epsilon` как поток, генерирующий последовательно уточняющиеся значения, а затем, например когда разность между вычисляемыми значениями производной становится достаточно малой, можно принять решение о том, что получено достаточно точное приближение производной.

Следовательно, первый шаг – сделать `epsilon` некоторой разновидностью параметра, а не глобальной константой. Это оставляет открытым вопрос, каким именно видом параметра должен быть `epsilon` (числом или потоком?), а также когда он должен быть передан.

Наибольший смысл имеет передача этого параметра после принятия решения о том, какую функцию необходимо продифференцировать и при каком значении нужно вычислить ее производную, – в конце концов, поток значений `epsilon` может зависеть от обоих факторов. Таким образом, получаем:

```
fun d-dx(f :: (Number -> Number)) ->
    (Number -> (Number -> Number)):
  lam(x :: Number) -> (Number -> Number):
    lam(epsilon :: Number) -> Number:
      (f(x + epsilon) - f(x)) / epsilon
  end
end
end
```

Здесь мы можем вернуться к приведенному выше примеру `square`:

```
d-dx-square = d-dx(square)
```

Обратите внимание: здесь мы просто переопределили `d-dx` без какой-либо ссылки на потоки, т. е. явно превратили константу в параметр.

Теперь определим поток отрицательных степеней числа десять:

```
tenths = block:
  fun by-ten(d):
    new-denom = d / 10
    lz-link(new-denom, lam(): by-ten(new-denom) end)
  end
  by-ten(1)
end
```

с соответствующей проверкой:

```
check:
  take(3, tenths) is [list: 1/10, 1/100, 1/1000]
end
```

Для корректности выберем абсциссу, в которой необходимо вычислить численную производную функции `square`, например 10:

```
d-dx-square-at-10 = d-dx-square(10)
```

Напомним о типах – теперь это функция типа (`Number -> Number`): при заданном значении `epsilon` она вычисляет производную, используя это значение. По аналитическим вычислениям нам известно, что значение этой производной должно быть равно 20. Теперь мы можем (лениво) отображать значение `tenth`, чтобы обеспечить все более точное приближение для `epsilon`, и понаблюдать, что происходит:

```
lz-map(d-dx-square-at-10, tenths)
```

Как и следовало ожидать, мы получаем значения `20.1`, `20.01`, `20.001` и т. д.: постоянно улучшающееся числовое значение, приближающееся к 20.

---

### Упражнение 15.3

Улучшите приведенную выше программу, установив допустимую погрешность, и извлекайте столько значений из потока `epsilon`, сколько необходимо, до тех пор, пока разность между последовательными приближениями производной не окажется в пределах этой допустимой погрешности.

---

# Глава 16

---

## Интерактивные игры как системы с обратной связью

В этой главе мы напишем небольшую интерактивную игру. Это совсем не сложная игра, но она будет содержать все элементы, необходимые для самостоятельного создания более содержательных игр в дальнейшем.



Рис. 16.1 ♦ Фестиваль воздушных шаров в Альбукерке (Albuquerque)

Предположим, что у нас имеется самолет, заходящий на посадку. К сожалению, он пытается сделать это во время фестиваля воздушных шаров, поэтому, разумеется, необходимо избежать столкновения с любыми (движущимися) воздушными шарами. Кроме того, существует земная и водная поверхность, но самолет должен сесть на землю. Также можно снабдить его ограниченным запасом топлива для выполнения этой задачи. Ниже приведено несколько ссылок на анимационные фрагменты для игры:

- <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v9-success.swf> – самолет успешно садится на землю;
- <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v9-collide.swf> – самолет сталкивается с воздушным шаром;
- <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v9-sink.swf> – самолет садится на воду.

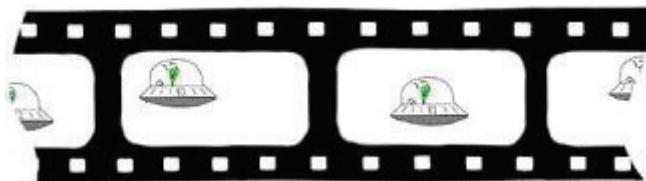
К концу главы вы напишете все необходимые части этой программы. Программа будет выполнять следующие операции: анимацию самолета для обеспечения его независимого движения; отслеживание нажатий клавиш и соответствующая корректировка движения самолета; создание нескольких движущихся воздушных шаров; обнаружение столкновений самолета с воздушными шарами; проверка посадки на воду и землю; учет использования топлива. Ну и ну, как же много событий происходит! Поэтому мы не будем писать всю программу сразу, вместо этого будем собирать ее небольшими фрагментами. Но до конца мы непременно доберемся.

## 16.1. НЕМНОГО ОБ АНИМАЦИИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Мы пишем программу с двумя важными интерактивными элементами: анимация, которая создает эффект движения, а кроме того, обеспечивает обратную связь, т. е. реагирует на действия пользователя. Оба этих элемента могут оказаться весьма сложными для программирования, но Pyret предоставляет простой механизм, который сочетает в себе и то, и другое и успешно интегрируется с другими принципами программирования, такими как тестирование. Мы узнаем об этом по ходу дела.

Ключом к созданию анимации является основной принцип кино (*movie principle*). Даже в самом сложном кинофильме, который можно увидеть, нет настоящего движения (в действительности сам термин «*movie*» («кино»), представляющий собой сокращение от фразы «*moving picture*» («движущееся изображение»), является хитроумным обманчивым рекламным лозунгом). Скорее, это просто последовательность неподвижных изображений, показанных в быстром темпе, заставляющем человеческий мозг создавать иллюзию движения, как показано на рис. 16.2.

Мы воспользуемся тем же принципом: наша анимация будет состоять из последовательности отдельных изображений, и мы попросим Pyret показывать их смену в быстром темпе. Затем мы увидим, как в тот же процесс включается обратная связь (реакция на действия пользователя).



**Рис. 16.2** ♦ Иллюзия движения, создаваемая при быстрой смене кадров

## 16.2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Чтобы начать работу, необходимо сообщить Pyret о нашем намерении использовать изображения и анимацию. Соответствующие библиотеки загружаются, как показано ниже:

```
import image as I
import reactors as R
```

Эти инструкции оповещают Pyret о необходимости загрузки двух указанных библиотек и связывании их с соответствующими именами I и R. После этого все операции с изображениями берутся из I, а анимационные операции – из R.

## 16.3. ВЕРСИЯ: САМОЛЕТ ПЕРЕСЕКАЕТ ЭКРАН

Начнем с самой простой версии: самолет летит горизонтально и пересекает экран. Посмотрите видеофрагмент здесь: <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v1.swf>.

А здесь находится изображение самолета: <http://world.cs.brown.edu/1/clipart/airplane-small.png>.

Теперь можно сообщить Pyret о необходимости загрузки этого изображения и присваивания ему имени, как показано ниже:

```
AIRPLANE-URL = "http://world.cs.brown.edu/1/clipart/airplane-small.png"
AIRPLANE = I.image-url(AIRPLANE-URL)
```

Здесь и далее при использовании имени AIRPLANE мы всегда будем ссылаться на это изображение. (Проверьте это в интерактивной панели.)

Теперь еще раз посмотрим видеофрагмент. Внимательно наблюдайте за тем, что происходит в различные моменты времени. Что остается неизменным, а что меняется? Вода и земля не изменяются. Изменяется положение самолета (по горизонтали).

Вы можете найти изображение самолета, которое вам больше нравится. Но не тратьте на поиски слишком много времени, потому что нам еще предстоит проделать огромный объем работы.

- ✓ Состояние окружающей среды (world state) состоит из всего, что изменяется. Вещи, которые не изменяются, не должны фиксироваться в состоянии окружающей среды.

Теперь мы можем определить первое состояние окружающей среды:

### **Определение окружающей среды**

Состояние окружающей среды – это число, представляющее координату  $x$  положения самолета.

Обратите внимание на кое-что важное в приведенном выше определении:

- ✓ При записи состояния окружающей среды мы фиксируем не только тип значений, но и их предполагаемый смысл.

Теперь у нас есть представление основных данных, но для создания продемонстрированной выше анимации необходимо сначала решить следующие проблемы:

- 1) требуется оповещение о прошедшем времени;
- 2) с течением времени требуется соответствующее обновление состояния окружающей среды;
- 3) после получения обновленного состояния окружающей среды необходимо сформировать соответствующее визуальное представление для вывода изображения.

Похоже, для этого потребуется огромный объем работы. К счастью, Pyret позволяет выполнить эту работу намного проще, чем кажется на первый взгляд. Мы сделаем это в порядке, который немного отличается от описанного выше.

## **16.3.1. Обновление состояния окружающей среды**

Как уже отмечалось ранее, в действительности самолет не «двигается». Вместо этого можно попросить Pyret оповещать нас о каждом изменении определенной единицы времени (*clock tick*). Если при каждом «тике» мы помещаем самолет в выбранную соответствующим образом следующую позицию, а «тики» происходят достаточно часто, то создается эффект движения.

Поскольку состояние окружающей среды состоит только из координаты  $x$  самолета, при перемещении его вправо мы просто увеличиваем значение этой координаты. Сначала присвоим этому постоянному расстоянию (перемещению) имя:

```
AIRPLANE-X-MOVE = 10
```

Потребуется написать функцию, которая отображает это перемещение. Но сначала запишем несколько тестовых вариантов:

**check:**

```
move-airplane-x-on-tick(50) is 50 + AIRPLANE-X-MOVE
move-airplane-x-on-tick(0) is 0 + AIRPLANE-X-MOVE
move-airplane-x-on-tick(100) is 100 + AIRPLANE-X-MOVE
end
```

Теперь определение функции становится понятным:

```
fun move-airplane-x-on-tick(w):
    w + AIRPLANE-X-MOVE
end
```

Как и следовало ожидать, Pyret подтверждает, что эта функция успешно проходит все предложенные тесты.

 Если вы уже обладаете некоторым опытом создания программ с анимацией и интерактивной обратной связью, то сразу же обратите внимание на важное отличие: насколько легко и просто в Pyret тестируются части создаваемой программы.

## 16.3.2. Вывод представления состояния окружающей среды

Теперь мы готовы к созданию визуального представления игры для вывода на экран. Мы формируем изображение, состоящее из всех необходимых компонентов. Сначала полезно определить некоторые константы, представляющие визуальные характеристики вывода:

```
WIDTH = 800
HEIGHT = 500

BASE-HEIGHT = 50
WATER-WIDTH = 500
```

Используя эти константы, можно создать пустой (фоновый) холст (canvas) и разместить на нем прямоугольники, представляющие воду и землю:

```
BLANK-SCENE = I.empty-scene(WIDTH, HEIGHT)

WATER = I.rectangle(WATER-WIDTH, BASE-HEIGHT, "solid", "blue")
LAND = I.rectangle(WIDTH - WATER-WIDTH, BASE-HEIGHT, "solid", "brown")

BASE = I.beside(WATER, LAND)

BACKGROUND =
I.place-image(BASE,
WIDTH / 2, HEIGHT - (BASE-HEIGHT / 2),
BLANK-SCENE)
```

Проверьте значение BACKGROUND в интерактивной панели, чтобы полностью убедиться в том, что общий фон выглядит правильно.

### Выполните прямо сейчас

Причина применения операции деления на два при размещении BASE заключается в том, что Pyret помещает в заданную локацию середину изображения. Удалите операцию деления и посмотрите, что произошло в итоговом изображении.

Теперь мы знаем, как создать требуемое фоновое изображение, и мы готовы поместить на него изображение самолета. Выражение для этого выглядит приблизительно так:

```
I.place-image(AIRPLANE,
  # Некоторая координата x положения самолета,
  50,
  BACKGROUND)
```

Но какую координату *x* мы должны использовать? В действительности это именно то значение, которое представляет состояние окружающей среды. Поэтому из приведенного выше выражения можно создать следующую функцию:

```
fun place-airplane-x(w):
  I.place-image(AIRPLANE,
    w,
    50,
    BACKGROUND)
end
```

### 16.3.3. Наблюдение за временем (и совмещение всех элементов)

Наконец, мы готовы объединить все фрагменты программы вместе.

Мы создаем особый тип значения Pyret, называемый реактором (reactor), который обеспечивает выполнение анимаций. Начнем с создания относительно простого типа реактора, который будет постепенно усовершенствоваться вместе с увеличением сложности программы.

Приведенный ниже код создает реактор с именем *anim*:

```
anim = reactor:
  init: 0,
  on-tick: move-airplane-x-on-tick,
  to-draw: place-airplane-x
end
```

В реакторе должно быть задано начальное состояние окружающей среды, а также обработчики (handlers), которые определяют реакцию (обратную связь) программы. Определение *on-tick* сообщает Pyret о необходимости запуска часов, и при каждом их «тике» (приблизительно 30 раз в секунду) должен вызываться соответствующий обработчик. Обработчик *to-draw* используется Pyret для обновления выводимого изображения.

После определения реактора можно запускать его несколькими способами, что удобно для поиска ошибок, выполнения научных экспериментов и т. д. В данном случае наши потребности просты: мы предлагаем Pyret всего лишь выполнить программу с выводом на экран в интерактивном режиме:

```
R.interact(anim)
```

Это создает выполняющуюся программу, в которой самолет пролетает по фоновому изображению.

Вот и все. Мы только что создали свою первую анимацию. Теперь, когда выполнены все предварительные условия, можно приступать к расширению функциональных возможностей программы.

---

### Упражнение 16.1

Что можно изменить, если необходимо, чтобы самолет летел быстрее?

---

## 16.4. ВЕРСИЯ: НЕПРЕРЫВНОЕ ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

При выполнении программы из предыдущего раздела вы заметите, что через некоторое время самолет просто исчезает. Причина в том, что он пересекает правую границу экрана и продолжает «отрисовываться», но уже в той локации, которую вы не можете видеть. Это не очень удобно. Когда самолет начинает пересекать правую границу экрана, вместо его исчезновения лучше сделать так, чтобы его соответствующая часть снова появлялась слева, обеспечивая «непрерывное циклическое движение» (wrapping around), если можно так выразиться.

Видеоролик для этой версии находится здесь:  
<http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v2.swf>.

Кроме того, через некоторое время вы можете получить сообщение об ошибке, потому что компьютеру предлагается нарисовать самолет в месте, недоступном для графической подсистемы.

Давайте подумаем о том, что нужно изменить. Очевидно, что требуется изменить функцию, которая обновляет положение самолета, поскольку она теперь должна отображать наше решение о непрерывном циклическом движении. Но задача вывода самого самолета на экран вообще не требует никаких изменений. Нет необходимости и в каком-либо изменении определения состояния окружающей среды.

Таким образом, мы должны изменить только функцию `move-airplane-x-on-tick`. Функция `num-modulo` делает именно то, что нам нужно. То есть необходимо, чтобы координата самолета `x` всегда была остатком от целочисленного деления на полную ширину сцены:

```
fun move-airplane-wrapping-x-on-tick(x):
    num-modulo(x + AIRPLANE-X-MOVE, WIDTH)
end
```

Обратите внимание: вместо копирования содержимого предыдущего определения можно просто повторно использовать его:

```
fun move-airplane-wrapping-x-on-tick(x):
    num-modulo(move-airplane-x-on-tick(x), WIDTH)
end
```

Это делает наше намерение более понятным: вычисление любого положения, которое было бы получено ранее, но с таким преобразованием координаты  $x$ , чтобы она оставалась в пределах ширины сцены.

Итак, это предлагаемое новое определение. Обязательно протестируйте эту функцию тщательнейшим образом: она сложнее, чем вам кажется. Вы продумали все варианты? Например, что произойдет, если самолет окажется на полпути от правого края экрана?

### Упражнение 16.2

Определите тесты качества для функции `move-airplane-wrapping-x-on-tick`.



Можно было бы оставить неизменной функцию `move-airplane-x-on-tick`, а вместо этого выполнять арифметические действия взятия остатка от деления в `place-airplane-x`. Мы решили не делать так по следующей причине. В этой версии мы действительно считаем, что самолет летит по замкнутой окружности и снова начинает движение с левой границы (представьте, что мир – это цилиндр...). Таким образом, координата  $x$  самолета в действительности постоянно возвращается к меньшему значению. Если вместо этого мы позволим состоянию окружающей среды монотонно возрастать, то оно действительно будет представлять общее пройденное расстояние, что противоречит изначальному определению состояния окружающей среды.

#### **Выполните прямо сейчас**

После добавления функции `move-airplane-wrapping-x-on-tick` еще раз выполните программу. Вы заметили какие-либо изменения в ее поведении?

Если не заметили... а вы не забыли обновить реактор, чтобы он использовал новую функцию, описывающую движение самолета?

## 16.5. ВЕРСИЯ: СНИЖЕНИЕ

Разумеется, необходимо, чтобы самолет перемещался не только в одном измерении: для получения окончательного варианта игры он должен также набирать высоту и снижаться. Сейчас мы сосредоточимся на самом простом варианте перемещения: самолет непрерывно снижается. Соответствующий видеоролик находится здесь: <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v3.swf>.

И снова рассмотрим отдельные кадры этого видеоролика. Что остается неизменным? И на этот раз – вода и земля. Что изменяется? Положение самолета. Но если раньше самолет перемещался только в направлении (оси)  $x$ , то теперь он двигается в обоих направлениях (осей)  $x$  и  $y$ . Увидев это, мы сразу же понимаем, что первоначальное определение состояния окружающей среды не соответствует действительности, поэтому должно быть изменено.

Следовательно, определяем новую структуру, содержащую пару элементов данных:

```
data Posn:  
    | posn(x, y)  
end
```

С учетом этой структуры можно пересмотреть первоначальное определение состояния окружающей среды:

### **Определение состояния окружающей среды**

Состояние окружающей среды – значение posn, представляющее координаты x и y положения самолета на экране.

## **16.5.1. Движение самолета**

Сначала рассмотрим функцию move-airplane-wrapping-x-on-tick. Ранее самолет перемещался только в направлении (оси) x, теперь необходимо, чтобы он еще и снижался, а это означает, что мы обязательно должны прибавлять некоторое значение к текущей координате y:

```
AIRPLANE-Y-MOVE = 3
```

Запишем несколько вариантов тестов для этой новой функции. Вот один из них:

```
check:  
    move-airplane-xy-on-tick(posn(10, 10)) is posn(20, 13)  
end
```

Можно было бы записать тест другим способом:

```
check:  
    p = posn(10, 10)  
    move-airplane-xy-on-tick(p) is  
        posn(move-airplane-wrapping-x-on-tick(p.x),  
              move-airplane-y-on-tick(p.y))  
end
```

- Какой способ записи тестов лучше? Оба. У каждого способа есть свои преимущества:
- преимуществом первого метода является его чрезвычайная конкретность: он не задает вопросов о том, чего вы ожидаете, и показывает, что вы действительно можете вычислить требуемый ответ, исходя из предварительно заданных условий (правил);
  - преимущество второго метода: если вы изменяете константы в программе (например, скорость снижения), то выглядящие корректными тесты не становятся внезапно ошибочными. То есть эта форма тестирования в большей степени относится к отношениям между объектами, чем к точности их значений.

Существует еще один доступный вариант, в котором часто объединяются наилучшие свойства обоих описанных выше методов: запись ответа настоль-

ко конкретно, насколько это возможно (стиль первого метода), но с использованием констант для вычисления ответа (это преимущество стиля второго метода). Например:

```
check:
  p = posn(10, 10)
  move-airplane-xy-on-tick(p) is
    posn(num-modulo(p.x + AIRPLANE-X-MOVE, WIDTH),
         p.y + AIRPLANE-Y-MOVE)
end
```

### Упражнение 16.3

Прежде чем продолжить, можете ли вы написать достаточное количество вариантов тестов? Вы уверены в этом? Например, вы проверили, что должно происходить, когда самолет находится у края экрана в одном или обоих измерениях? Предполагаем, что не проверили, поэтому вернитесь и напишите больше тестов, прежде чем продолжить работу.

По общему плану процесса проектирования теперь определим функцию `move-airplane-xy-on-tick`. В итоге должно получиться нечто подобное:

```
fun move-airplane-xy-on-tick(w):
  posn(move-airplane-wrapping-x-on-tick(w.x),
        move-airplane-y-on-tick(w.y))
end
```

Обратите внимание: мы повторно использовали существующую функцию для вычисления координаты *x* и соответственно создали вспомогательную функцию для вычисления координаты *y*:

```
fun move-airplane-y-on-tick(y):
  y + AIRPLANE-Y-MOVE
end
```

Сейчас это может показаться излишним, но такой подход приводит к более четкому разделению задач и позволяет независимо развивать сложность движения в каждом измерении, сохраняя при этом относительное удобство чтения кода.

## 16.5.2. Визуализация сцены

Также необходимо проверить и обновить функцию `place-airplane-x`. Первое определение помещало самолет в произвольно выбранную координату *y*. Теперь мы должны взять координату *y* из состояния окружающей среды:

```
fun place-airplane-xy(w):
```

```
I.place-image(AIRPLANE,
  w.x,
  w.y,
  BACKGROUND)
end
```

Следует отметить, что в действительности мы не можем повторно использовать предыдущее определение, потому что в нем жестко закодирована координата *y*, которую теперь необходимо обязательно сделать параметром.

### 16.5.3. Завершающие штрихи

Мы завершили работу? Вроде бы завершили; мы рассмотрели все процедуры, потребляющие и производящие состояние окружающей среды, и обновили их соответствующим образом. Но в действительности мы забываем об одной маленькой вещи: об изначальном состоянии окружающей среды, определяемом Большшим взрывом (*big-bang*). Если мы изменили определение окружающей среды, то необходимо пересмотреть и этот параметр. (Кроме того, необходимо передавать новые обработчики вместо старых.)

```
INIT-POS = posn(0, 0)

anim = reactor:
  init: INIT-POS,
  on-tick: move-airplane-xy-on-tick,
  to-draw: place-airplane-xy
end

R.interact(anim)
```

---

#### Упражнение 16.4

Небольшой дефект: изображение самолета обрезано по краю экрана. Вы можете использовать *I.image-width* и *I.image-height* для получения размеров изображения, например самолета. Воспользуйтесь этими функциями, чтобы убедиться в том, что изображение самолета полностью вписывается в экран для начальной сцены, и сделайте то же самое в функции *move-airplane-xy-on-tick*.

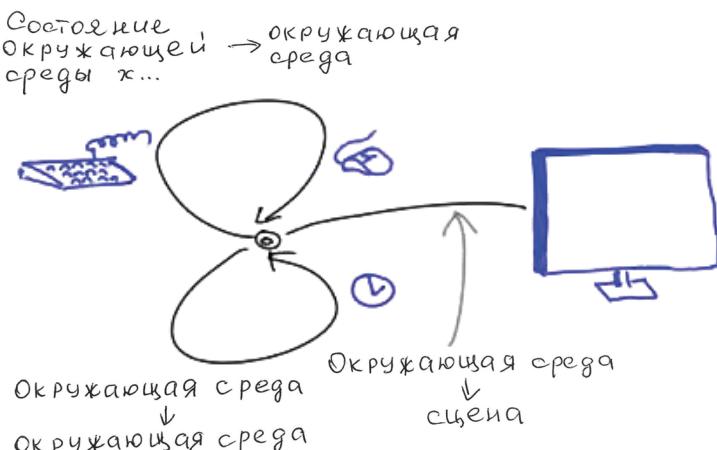
---

## 16.6. ВЕРСИЯ: ОТВЕТНАЯ РЕАКЦИЯ НА НАЖАТИЯ КЛАВИШ

После того как самолет получил возможность снижаться, нет никаких причин, по которым он также не мог бы набирать высоту. Соответствующий видеоролик находится здесь: <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v4.swf>.

Мы будем использовать клавиатуру для управления движением самолета: в частности, клавиша со стрелкой вверх будет заставлять его перемещаться вверх, клавиша со стрелкой вниз заставит его снижаться еще быстрее. Поддержку этих действий легко обеспечить, используя то, что нам уже известно: просто необходимо предоставить еще один обработчик с применением оп-`key`. Этот обработчик принимает два аргумента: первый – текущее значение состояния окружающей среды, второй – представление нажатой клавиши. В рассматриваемой здесь программе мы будем обрабатывать только значения для клавиш "up" (стрелка вверх) и "down" (стрелка вниз).

Это дает нам достаточно полное представление об основных возможностях реакторов, которое схематически показано на рис. 16.3.



**Рис. 16.3** ♦ Схема функциональных возможностей реакторов

Мы просто определяем группу функций для выполнения всех требуемых действий, а реактор связывает все эти действия. Некоторые функции обновляют значения состояния окружающей среды (иногда предоставляя дополнительную информацию о стимулирующих входных сигналах, таких как нажатие клавиши), другие выполняют преобразование этих значений в выходные данные (например, в изображение, которое мы видим на экране).

Вернемся к нашей программе и определим константу, представляющую расстояние смещения при нажатии клавиши:

KEY-DISTANCE = 10

Теперь можно определить функцию, которая смещает положение самолета на определенное выше расстояние в зависимости от того, какая клавиша была нажата:

```
fun alter-airplane-y-on-key(w, key):
  ask:
    | key == "up"   then: posn(w.x, w.y - KEY-DISTANCE)
    | key == "down" then: posn(w.x, w.y + KEY-DISTANCE)
```

```
| otherwise: w
end
end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Почему определение этой функции содержит

```
| otherwise: w
```

как самое последнее условие?

Обратите внимание: если принято нажатие клавиши, отличающейся от двух ожидаемых, то состояние окружающей среды остается неизменным. С точки зрения пользователя нажатие такой клавиши просто игнорируется. Удалите это последнее условие, запустите программу, нажмите любую другую клавишу и посмотрите, что происходит.

Вне зависимости от того, какой вариант вы выбрали, обязательно протестируйте полученную версию программы. Может ли самолет уйти за верхнюю границу экрана? А что можно сказать о поведении на нижней границе экрана? Может ли самолет наложитьться на изображение земли или воды?

После того как мы написали и тщательно протестировали эту функцию, необходимо просто попросить Pyret использовать ее для обработки нажатий клавиш:

```
anim = reactor:
  init: INIT-POS,
  on-tick: move-airplane-xy-on-tick,
  on-key: alter-airplane-y-on-key,
  to-draw: place-airplane-xy
end
```

Теперь самолет перемещается не только с течением времени, но также в соответствии с нажатиями двух заданных клавиш. Его полет можно поддерживать вечно.

## **16.7. ВЕРСИЯ: ПОСАДКА**

Напомним, что главной целью игры является посадка самолета, а не бесконечное неопределенное блуждание в воздушном пространстве. Это значит, что необходимо определить, когда самолет достигает уровня земли или воды, и, если это произошло, завершить анимацию. Соответствующий видеоролик находится здесь: <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v5.swf>.

Сначала попробуем точнее определить, когда анимация должна завершиться. Это означает создание функции, которая принимает текущее состояние окружающей среды и возвращает логическое значение: `true`, если

анимация должна быть остановлена, иначе – `false`. Для этого требуется выполнение нескольких арифметических действий, основанных на размерах изображения самолета:

```
fun is-on-land-or-water(w):
    w.y >= (HEIGHT - BASE-HEIGHT)
end
```

Необходимо только лишь проинформировать Pyret о необходимости использования этого предварительного условия для автоматического останова работы реактора:

```
anim = reactor:
  init: INIT-POS,
  on-tick: move-airplane-xy-on-tick,
  on-key: alter-airplane-y-on-key,
  to-draw: place-airplane-xy
  stop-when: is-on-land-or-water
end
```

### Упражнение 16.5

При тестировании этого реактора вы увидите, что он не вполне корректен, потому что не учитывает размер изображения самолета. В результате самолет останавливается только после того, как его половина погружается в землю или воду, а не при первом касании поверхности. Исправьте формулу вычисления, чтобы самолет останавливался при первом контакте.

### Упражнение 16.6

Дополните программу для того, чтобы самолет после касания земли продолжал двигаться горизонтально в течение некоторого времени, постепенно замедляясь в соответствии с законами физики.

### Упражнение 16.7

Предположим, что самолет в действительности приземляется на секретную подземную авиабазу. На самом деле взлетно-посадочная полоса находится ниже уровня земли и открывается только тогда, когда самолет заходит на посадку. Это означает, что после посадки должны быть видны только те части самолета, которые находятся выше уровня земли. Реализуйте такую версию программы. Подсказка: рассмотрите изменение функции `place-airplane-xy`.

## 16.8. ВЕРСИЯ: ЗАКРЕПЛЕННЫЙ ВОЗДУШНЫЙ ШАР

Теперь добавим в созданную сцену воздушный шар. Этот вариант видеоролика находится здесь: <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v6.swf>.

Следует отметить, что при движении самолета все остальное, включая воздушный шар, остается неподвижным. Следовательно, не требуется изменять состояние окружающей среды для фиксации положения воздушного шара. Необходимо лишь изменить условия, при которых программа останавливается: по существу, добавляется еще один случай, в котором программа завершается, – столкновение с воздушным шаром.

Когда программа прекращает выполняться? Теперь при двух условиях: контакт с землей или водой и контакт с воздушным шаром. Первое условие остается неизменным, с тех пор как мы его определили, поэтому можно сосредоточиться на втором.

Где находится воздушный шар, и как представлено его местоположение? На второй вопрос легко ответить: для этого вполне подходит пара координат `posn`. А ответ на первый вопрос мы можем выбрать сами:

```
BALLOON-LOC = posn(600, 300)
```

или позволить Pyret выбрать случайное положение:

```
BALLOON-LOC = posn(random(WIDTH), random(HEIGHT))
```

### Упражнение 16.8

Улучшите процедуру выбора случайного положения воздушного шара так, чтобы он находился в правдоподобных позициях (т. е. не был бы погружен в воду или в землю).

После выбора места расположения воздушного шара необходимо определить условие столкновения с ним. Один из простых способов: расстояние между самолетом и воздушным шаром должно быть меньше некоторого порогового значения (`threshold`):

```
fun are-overlapping(airplane-posn, balloon-posn):
    distance(airplane-posn, balloon-posn) < COLLISION-THRESHOLD
end
```

Здесь `COLLISION-THRESHOLD` – некоторая правильно подобранный константа, вычисляемая на основе размеров изображений самолета и воздушного шара. (Для используемых в этой программе изображений вполне подходит значение 75.)

Что такое `distance`? Эта функция принимает две пары координат `posn` и определяет евклидово расстояние между соответствующими точками:

```
fun distance(p1, p2):
    fun square(n): n * n end
```

```
num = sqrt(square(p1.x - p2.x) + square(p1.y - p2.y))
end
```

Наконец, мы должны объединить два условия завершения:

```
fun game-ends(w):
    ask:
        | is-on-land-or-water(w)      then: true
        | are-overlapping(w, BALLOON-LOC) then: true
        | otherwise: false
    end
end
```

и использовать их в реакторе, заменив старое условие:

```
anim = reactor:
    init: INIT-POS,
    on-tick: move-airplane-xy-on-tick,
    on-key: alter-airplane-y-on-key,
    to-draw: place-airplane-xy,
    stop-when: game-ends
end
```

### ***Выполните прямо сейчас***

Вас что-нибудь удивило? Игра соответствовала вашим ожиданиям?

Странно, что вы не увидели на экране воздушный шар. Причина в том, что мы не обновили графический образ, выводимый на экран.

Необходимо добавить определение изображения воздушного шара:

```
BALLOON-URL = "http://world.cs.brown.edu/1/clipart/balloon-small.png"
BALLOON = I.image-url(BALLOON-URL)
```

Также потребуется обновить функцию формирования изображения:

```
BACKGROUND =
I.place-image(BASE,
WIDTH / 2, HEIGHT - (BASE-HEIGHT / 2),
I.place-image(BALLOON,
BALLOON-LOC.x, BALLOON-LOC.y,
BLANK-SCENE))
```

### ***Выполните прямо сейчас***

Вы видите способ записи функции game-ends в более компактном виде?

Ниже показана другая версия этой функции:

```
fun game-ends(w):
    is-on-land-or-water(w) or are-overlapping(w, BALLOON-LOC)
end
```

## 16.9. ВЕРСИЯ: СЛЕДИТЕ ЗА ТОПЛИВНЫМ БАКОМ

Теперь введем концепцию расхода топлива. В нашем упрощенном мире топливо не требуется для снижения – гравитация автоматически обеспечивает это, но оно необходимо для набора высоты. Будем считать, что топливо измеряется в целочисленных единицах, и каждое действие по набору высоты потребляет одну единицу топлива. После того как топливо заканчивается, программа перестает реагировать на нажатие клавиши со стрелкой вверх, поэтому вы уже не сможете избежать контакта с воздушным шаром или водой.

Ранее мы рассматривали стоп-кадры из видеоролика игры, чтобы определить, что изменяется, а что остается неизменным. Для этой версии можно было бы поместить на экран небольшой индикатор уровня, показывающий количество оставшегося топлива. Но не с каким-то умыслом, а для демонстрации принципа.

 Вы не всегда можете определить, что фиксировано, а что меняется, просто взглянув на изображение. Вы также должны внимательно прочитать формулировку задачи и тщательно ее обдумать.

Из предыдущего описания понятно, что изменяются два объекта: положение самолета и количество оставшегося топлива. Следовательно, состояние окружающей среды обязательно должно содержать текущие значения для обоих этих объектов. Количество топлива лучше всего представить одним числом. Но мы должны создать новую структуру для представления этих значений.

### ***Определение окружающей среды***

Состояние окружающей среды – это структура, представляющая текущее положение самолета и количество оставшегося топлива.

В рассматриваемом здесь примере мы будем использовать такую структуру:

```
data World:  
    | world(p, f)  
end
```

### ***Упражнение 16.9***

Можно было бы определить состояние окружающей среды как структуру, состоящую из трех компонентов: координат *x* и *y* положения самолета и количества оставшегося топлива. Почему было выбрано представление, показанное выше?

И снова рассмотрим каждую часть программы, чтобы определить, что можно оставить неизменным, а что нужно изменить. Точнее говоря, мы должны сосредоточиться на функциях, которые принимают и возвращают значения состояния окружающей среды *World*.

На каждом «тике» мы принимаем состояние окружающей среды и вычисляем новое. С течением времени топливо не расходуется, так что этот код можно оставить без изменений, за исключением необходимости создания структуры, содержащей текущее количество топлива, а именно:

```
fun move-airplane-xy-on-tick(w :: World):
    world(
        posn(
            move-airplane-wrapping-x-on-tick(w.p.x),
            move-airplane-y-on-tick(w.p.y)), w.f)
end
```

Вполне очевидно, что функция, реагирующая на нажатия клавиш, должна учитывать количество оставшегося топлива:

```
fun alter-airplane-y-on-key(w, key):
    ask:
        | key == "up" then:
            if w.f > 0:
                world(posn(w.p.x, w.p.y - KEY-DISTANCE), w.f - 1)
            else:
                w # Топлива не осталось, поэтому нажатие клавиши игнорируется.
        end
        | key == "down" then:
            world(posn(w.p.x, w.p.y + KEY-DISTANCE), w.f)
        | otherwise: w
    end
end
```

### Упражнение 16.10

Обновите функцию, которая формирует и выводит на экран всю сцену. Напомним, что состояние окружающей среды содержит два поля: одно соответствует тому, что использовалось для вывода изображения ранее, другое не отображается в выводе.

#### **Выполните прямо сейчас**

Что еще необходимо изменить, чтобы получить работающую программу?

Вы должны были заметить, что начальное значение состояния окружающей среды также некорректно, потому что не учитывает количество топлива. Какие интересные значения количества топлива можно попробовать?

### Упражнение 16.11

Дополните программу изображением индикатора количества топлива.

## 16.10. ВЕРСИЯ: ВОЗДУШНЫЙ ШАР ТОЖЕ ДВИГАЕТСЯ

До сих пор воздушный шар оставался неподвижным. Теперь сделаем игру более интересной, позволив шару двигаться, как показано в видеоролике: <http://world.cs.brown.edu/1/projects/flight-lander/v8.swf>.

Очевидно, что положение воздушного шара также должно стать частью состояния окружающей среды.

### *Определение окружающей среды*

Состояние окружающей среды – это структура, представляющая текущее положение самолета, текущее положение воздушного шара и количество оставшегося топлива.

Ниже приведено представление состояния окружающей среды. Поскольку версии состояния становятся все более сложными, важно добавить аннотации, чтобы всегда знать, что есть что.

```
data World:  
    | world(p :: Posn, b :: Posn, f :: Number)  
end
```

С учетом этого определения становится понятно, что необходимо переписать все предыдущие определения функций. По большей части это довольно-таки рутинная процедура по сравнению с тем, что мы видели раньше. Единственная подробность, так и оставшаяся неопределенной, – каким предполагается движение воздушного шара: в каком направлении, с какой скоростью, и что делать при достижении границ. Для определения этих характеристик предлагаем воспользоваться своим воображением. (Напомним, что чем ближе воздушный шар к земле, тем труднее безопасно посадить самолет.)

Таким образом, необходимо изменить:

- фоновое изображение (чтобы удалить неподвижный воздушный шар);
- обработчик формирования и вывода изображения (чтобы отображать воздушный шар в его текущем положении);
- обработчик-таймер (чтобы перемещать воздушный шар так же, как самолет);
- обработчик нажатий клавиш (для создания данных состояния окружающей среды, которые оставляют воздушный шар неизмененным);
- условие завершения программы (для учета динамически изменяющегося положения воздушного шара).

---

### Упражнение 16.13

Измените каждую из перечисленных выше функций и напишите для них соответствующие варианты тестов.

---

## 16.11. ВЕРСИЯ: ОДИН, ДВА, ... ДЕВЯНОСТО ДЕВЯТЬ ЛЕТАЮЩИХ ВОЗДУШНЫХ ШАРОВ

В конце концов, мы не обязаны ограничиваться всего лишь одним воздушным шаром. А сколько нужно? Два? Три? Десять? ... Но зачем же выбирать пределом какое-то конкретное число? Пусть это будет фестиваль воздушных шаров.

Подобно тому, как во многих играх имеются уровни, которые постепенно усложняются, мы могли бы сделать то же самое, позволив числу воздушных шаров стать частью того, что изменяется от уровня к уровню. Но теоретически нет большого различия между наличием двух или пяти воздушных шаров, так как код для управления каждым шаром абсолютно одинаков.

Необходимо представление набора воздушных шаров. Для этого можно использовать список. Таким образом:

### ***Определение окружающей среды***

Состояние окружающей среды – это структура, представляющая текущее положение самолета, список текущих положений воздушных шаров и количество оставшегося топлива.

Теперь мы должны воспользоваться общим планом проектирования для списков структур, чтобы переписать все функции. Следует отметить, что функция для перемещения одного воздушного шара уже написана. Что осталось сделать?

1. Применить эту же функцию к каждому воздушному шару в списке.
2. Определить, что нужно сделать, если два воздушных шара сталкиваются.

В настоящий момент вы можете временно отложить решение второй задачи, разместив каждый воздушный шар на достаточном расстоянии друг от друга по оси *x* и позволив им двигаться только вверх и вниз.

### **Упражнение 16.13**

Ведите понятие (фактор) ветра, который действует на воздушные шары, но не на самолет. Через случайные промежутки времени ветер дует со случайно выбранной скоростью и направлением, заставляя воздушные шары перемещаться в боковом (горизонтальном) направлении.

# Глава 17

---

## Примеры, тестирование и проверка программ

Еще в разделе 5.4 мы начали вырабатывать у вас привычку писать конкретные примеры функций. В разделе 8.2 мы показали, как разрабатывать примеры вычисления промежуточных значений, чтобы помочь вам планировать код, который требуется написать. Это подтверждает, что существует много способов записи примеров. Мы могли бы написать их на доске, на бумаге или даже в виде комментариев в компьютерном документе. Все это вполне разумно и действительно часто является лучшим способом начать работу над решением задачи. Но если мы сможем записать наши примеры в точной форме, понятной компьютеру, то достигнем двух целей:

- когда мы закончим запись предполагаемого решения, то сразу же можем предложить компьютеру проверить, правильно ли мы его поняли;
- в процессе записи предполагаемого решения чаще всего нам трудно выразить его с той точностью, которую ожидает компьютер. Иногда это происходит потому, что мы все еще продолжаем формулировать подробности и пока не определили их в полной мере, но иногда это происходит потому, что мы все еще не понимаем задачу. В таких ситуациях повышение точности действительно идет нам на пользу, потому что помогает понять недостаточность нашего понимания.

### 17.1. От примеров к тестам

До сих пор мы писали примеры в блоках `where`: для двух целей: чтобы помочь понять, что именно должна делать функция, и чтобы дать рекомендации тем, кто читает наш код, относительно того, какое поведение можно ожидать при использовании этой функции. Для небольших программ, которые мы написали до сих пор, было вполне достаточно примеров на основе блока `where`. Но по мере усложнения программ небольшого набора взаимосвязанных наглядных примеров будет недостаточно. Нам нужно подумать о гораздо более аккуратном подборе исходных данных, которые мы рассматриваем.

Например, рассмотрим функцию `count-uses`, которая подсчитывает, сколько раз конкретная строка появляется в списке (ее можно использовать для

подсчета голосов, для вычисления частоты использования кода скидки и т. д.). Какие входные сценарии можно было бы проверить, прежде чем использовать эту функцию для проведения реальной процедуры голосования или в деловой сфере?

- Результат для строки, которая встречается в списке один раз.
- Результат для строки, которая встречается в списке несколько раз.
- Результат для строки, которая находится в конце длинного списка (чтобы убедиться в том, что мы проверили все элементы).
- Результат для строки, которой нет в списке.
- Результат для строки, которая находится в списке, но содержит отличающиеся буквы верхнего регистра.
- Результат для строки, которая из-за опечатки отличается от слова в списке.

Обратите внимание: здесь мы рассматриваем гораздо больше ситуаций, в том числе достаточно конкретизированных, которые влияют на степень надежности нашего кода в реальных ситуациях. Как только начинается рассмотрение подобных ситуаций, мы переходим от примеров, иллюстрирующих наш код, к тестам для тщательной проверки этого кода.

В Rurret мы используем блоки `where` внутри определений функций для записи примеров. Блок `check`, расположенный вне определения функции, используется для тестов. Например:

```
fun count-uses(of-string :: String, in-list :: List<String>) -> Number:
    ...
where:
    count-uses("pepper", [list:]) is 0
    count-uses("pepper", [list: "onion"]) is 0
    count-uses("pepper", [list: "pepper", "onion"]) is 1
    count-uses("pepper", [list: "pepper", "pepper", "onion"]) is 2
end

check:
    count-uses("ppper", [list: "pepper"]) is 0
    count-uses("ONION", [list: "pepper", "onion"]) is 1
    count-uses("tomato",
               [list: "pepper", "onion", "onion", "pepper", "tomato", "tomato", "onion",
               "tomato"])
        is 3
    ...
end
```

В качестве основного правила мы помещаем наглядные демонстрационные варианты, которые могли бы помочь кому-то другому читать наш код, в блок `where`, а в блоке `check` записываем специализированные подробнейшие проверки, подтверждающие, что код обрабатывает более широкий спектр сценариев использования (включая случаи возникновения ошибок). Иногда грань между этими двумя подходами неясна: например, можно с легкостью доказать, что второй тест (функция обрабатывает отличающиеся заглавные буквы) относится к блоку `where`. Но третий тест при использовании действи-

тельно длинного списка должен оставаться в блоке `check`, поскольку более длинные входные данные, как правило, не предоставляют дополнительную информацию для того, кто читает ваш код.

Помещение тестов в блок, который находится вне функции, имеет еще одно преимущество на уровне профессионального программирования: это позволяет разместить тесты в отдельном файле. Такая методика обладает двумя весьма важными преимуществами. Во-первых, другому пользователю будет легче читать основные части вашего кода (если он берет за основу вашу работу). Во-вторых, упрощается управление выполнением тестов. Когда блоки `check` находятся в том же файле, что и код, все тесты будут выполняться при запуске этого кода. Когда блоки `check` находятся в другом файле, организация может выбирать время выполнения тестов. В процессе разработки тесты часто выполняются, чтобы убедиться в отсутствии ошибок. После того как код протестирован и готов к развертыванию или использованию, тесты уже не запускаются вместе с программой (если не были внесены изменения или кто-либо не обнаружил ошибку в коде). Это стандартная практика в программных проектах.

Также следует отметить, что набор тестов увеличивается в процессе разработки быстрее, чем набор примеров. При разработке кода в каждом случае, когда вы находите ошибку, добавляйте тест для соответствующей проверки в блок `check`, чтобы случайно не повторить ту же ошибку позже. Когда мы заранее разрабатываем примеры, то выясняем, что именно должна делать наша программа, а когда мы расширяем набор тестов, то выясняем, что наша программа делает в действительности (и, возможно, чего она делать не должна). На практике разработчики пишут первоначальный набор проверок по сценариям, продуманным до и во время написания кода, а затем расширяют этот набор тестов, когда пробуют новые сценарии и получают отзывы от пользователей, сообщающих о сценариях, в которых код не работает.

Почти во все языки программирования включены некоторые конструкции или пакеты, с помощью которых вы можете записывать тесты в отдельные файлы. Рулет в особенности выделяется тем, что поддерживает различие между примерами и тестами (как для обучения, так и для удобочитаемости кода другими пользователями). Многие инструментальные средства программирования, предназначенные для профессионалов, предполагают, что вы должны поместить все тесты в отдельные каталоги и файлы (не предлагая при этом поддержку примеров). В этой книге мы особо подчеркиваем различие между такими двумя вариантами использования пар ввода-вывода в программировании, потому что считаем их чрезвычайно полезными как с профессиональной, так и с педагогической точки зрения.

## 17.2. УЛУЧШЕННЫЕ СРАВНЕНИЯ

Иногда непосредственного сравнения с помощью ключевого слова `is` недостаточно для тестирования. Мы уже убедились в этом в случае использования тестов `raises` (см. подраздел 14.1.1). Другой пример: при выполнении вы-

числений, особенно с использованием математических действий с приближением, точное сравнение с помощью `is` вообще неприменимо. Например, рассмотрим такие проверки для функции `distance-to-origin`:

```
check:
  distance-to-origin(point(1, 1)) is ???
end
```

Что здесь можно проверить? При вводе в интерактивной панели REPL<sup>1</sup> можно видеть, что выводится ответ 1.4142135623730951. Это приближенное значение истинного ответа, который Рулет не может представить точно. Но трудно понять, что этот ответ точен до определенного десятичного знака и не более того, – об этом мы должны знать заранее и в первую очередь тщательно продумать смысл ответов.

Поскольку нам известно, что получено приблизительное значение, в действительности мы можем проверить только тот факт, что ответ приблизительно, но не в точности правilen. Если есть возможность проверить, что ответ функции `distance-to-origin(point(1, 1))` приблизительно равен, скажем, 1.41, и то же самое можно утверждать в некоторых аналогичных случаях, то, вероятно, это достаточно неплохой результат для многих приложений, ну и, разумеется, для наших целей здесь и сейчас. Если бы мы занимались расчетами в области орбитальной динамики, то, вероятнее всего, потребовалась бы большая точность, но обратите внимание – даже в этом случае остается необходимость выбора отсекаемой дробной части числа при округлении. Тестирование на не-предсказуемые результаты представляет собой необходимую задачу.

Сначала определим, что подразумевается под термином «приблизительно» с помощью одного из самых точных способов, которыми мы можем воспользоваться, т. е. следующей функции:

```
fun aaround(actual :: Number, expected :: Number) -> Boolean:
  doc: "Return whether actual is within 0.01 of expected"
  # "Возвращает признак того, что результат находится в пределах 0.01 от ожидаемого."
  num-abs(actual - expected) < 0.01
where:
  aaround(5, 5.01) is true
  aaround(5.01, 5) is true
  aaround(5.02, 5) is false
  aaround(num-sqrt(2), 1.41) is true
end
```

Здесь форма `is` приходит на помощь. Но существует специальный синтаксис для поддержки использования функции, определенной пользователем, для сравнения двух значений вместо простой проверки их равенства:

```
check:
  5 is% aaround 5.01
```

---

<sup>1</sup> REPL – read-eval-print loop – цикл «чтение–вычисление–вывод» в интерактивной среде программирования (авторы почему-то вводят этот термин без объяснения его смысла). – Прим. перев.

```
num-sqrt(2) is%(around) 1.41
distance-to-origin(point(1, 1)) is%(around) 1.41
end
```

Добавление `%(%something)` после `is` изменяет поведение этой формы. Обычно она должна проверять левое и правое значения на равенство. Но если что-либо представлено с использованием символа `%`, то вместо проверки левое и правое значения передаются в заданную функцию (в рассматриваемом здесь примере `around`). Если заданная функция возвращает `true`, то проверка выполнена успешно, если `false`, то тест не прошел. Это предоставляет нам средство управления, необходимое для тестирования функций с предсказуемыми приблизительными результатами.

---

---

### Упражнение 17.1

Дополните определение функции `distance-to-origin`, включив в него точки с полярными координатами `polar`.

---

---

### Упражнение 17.2

(Следующая ссылка может помочь при поиске в Google: «polar conversions» ([https://en.wikipedia.org/wiki/Polar\\_coordinate\\_system#converting\\_between\\_polar\\_and\\_cartesian\\_coordinates](https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system#converting_between_polar_and_cartesian_coordinates); [https://ru.wikipedia.org/wiki/Полярная\\_система\\_координат#Связь\\_между\\_декартовыми\\_и\\_полярными\\_координатами](https://ru.wikipedia.org/wiki/Полярная_система_координат#Связь_между_декартовыми_и_полярными_координатами).) Используйте общий план проектирования, чтобы написать функции `x-component` и `y-component`, которые возвращают декартовы координаты `x` и `y` точки (это необходимо, например, если вы должны изобразить ее на графике). Об использовании `num-sin` и других функций, которые потребуются для решения, см. в соответствующем разделе документации Pyret (<https://www.pyret.org/docs/latest/numbers.html>).

---

---

### Упражнение 17.3

Напишите определение типа данных, описывающего варианты оплаты, с именем `Pay` для работников с почасовой оплатой, у которых задана почасовая ставка, и работников на зарплате, у которых задана суммарная зарплата за год. Используйте общий план проектирования, чтобы написать функцию `expected-weekly-wages`, которая принимает `Pay`, а возвращает предполагаемую зарплату за неделю: при вычислении предполагаемой зарплаты за неделю для работников с почасовой оплатой считать, что они работают 40 часов, а для работников с фиксированной оплатой предполагаемая зарплата за неделю равна  $1/52$  от суммарной годовой.

---

## 17.3. Когда тесты не проходят

Предположим, что мы написали функцию `sqrt`, вычисляющую квадратный корень из заданного числа. Также написано несколько тестов для этой функции. Мы запускаем программу и обнаруживаем, что тесты не проходят. Существуют две очевидные причины, из-за которых это может произойти.

### **Выполните прямо сейчас**

Можете ли вы назвать эти две очевидные причины?

Разумеется, этими двумя причинами являются две «стороны» тестирования: проблема может возникать из-за значений, которые мы записали, или из-за функции, которую мы написали. Например, если записано

```
sqrt(4) is 1.75
```

то ошибка явно в значениях (потому что  $1.75^2$  определенно не равно 4). С другой стороны, если не проходит тест

```
sqrt(4) is 2
```

то, вероятнее всего, ошибку мы допустили в определении `sqrt`, и именно ее необходимо исправить.

Следует отметить, что не существует способа, которым компьютер мог бы сообщить, что пошло не так. В сообщении о провале теста говорится только лишь о несоответствии между программой и тестами. Компьютер не выдает утверждение о «корректности» программы или тестов, потому что не может этого сделать. Решение остается за человеком.

Но не следует торопиться. Существует еще одна возможность, которую мы не рассмотрели: третья, не столь очевидная причина, по которой тест может провалиться. Вернемся к приведенному выше тесту:

```
sqrt(4) is 2
```

Очевидно, что входные и выходные данные верны, но возможно, что определение `sqrt` также является корректным, и все же тест не проходит.

По этой причине мы проводим исследования по коллегиальной (групповой) оценке тестов (<http://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/pkf-ifpr-tests-tf-prog/>), чтобы студенты могли помочь друг другу проверять свои тесты, прежде чем они начнут писать программы.

### **Выполните прямо сейчас**

Вы понимаете, почему не проходит тест?

В зависимости от того, как мы запрограммировали функцию `sqrt`, она может возвращать корень -2 вместо 2. В данном случае -2 также является аб-

сolutno правильным ответом. То есть ни функция, ни определенный нами конкретный набор тестов сами по себе не являются неправильными. Проблема возникает из-за того, что функция просто оказывается отношением (relation), т. е. отображает один элемент входных данных в несколько элементов выходных данных (т. е.  $\sqrt{4} = \pm 2$ ). Теперь возникает вопрос: как правильно написать тест?

## 17.4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕСТИРОВАНИЯ

Другими словами, иногда необходимо выразить не конкретную пару ввод-вывод, а скорее проверить, что вывод связан правильным отношением (relationship) с вводом. Более конкретно: каким может быть это отношение в случае с `sqrt`? Мы намекали на это выше, когда говорили, что 1.75 явно не может быть правильным результатом, потому что при возведении его в квадрат не получается 4. Это дает нам общее понимание: число является одним из верных корней (обратите внимание на использование выражения «одним из» (в оригинальном тексте: использование неопределенного артикля «a» вместо определенного артикля «the»)), если возведение в квадрат дает исходное число. То есть можно было бы написать такую функцию:

```
fun is-sqrt(n):
    n-root = sqrt(n)
    n == (n-root * n-root)
end
```

После этого тест выглядит следующим образом:

```
check:
  is-sqrt(4) is true
end
```

К сожалению, для этого варианта теста существует затруднительный случай отказа. Если `sqrt` не возвращает число, которое на самом деле является корнем, то нам не сообщают полученное в действительности значение – вместо этого `is-sqrt` просто возвращает `false`, а провал теста всего лишь говорит о том, что значение `false` (которое возвращает `is-sqrt`) не является значением `true` (которое ожидает тест), что абсолютно верно и совершенно бесполезно.

К счастью, в Rurret существует более удобный способ выражения подобной проверки. Вместо ключевого слова `is` можно записать `satisfies`, и тогда значение слева обязательно должно соответствовать предикату (predicate) справа. В конкретном примере это выглядит так:

```
fun check-sqrt(n):
  lam(n-root):
    n == (n-root * n-root)
  end
end
```

Это позволяет написать следующий тест:

```
check:  
    sqrt(4) satisfies check-sqrt(4)  
end
```

Теперь при провале теста у нас есть возможность исследовать значение, действительно полученное при вычислении `sqrt(4)`, которое не соответствует заданному предикату.

**Часть**

**III**

---

# **АЛГОРИТМЫ**

# Глава 18

---

## Прогнозирование роста

Теперь мы приступаем к изучению методики, позволяющей определить, сколько времени занимает вычисление. Начнем с маленькой (правдивой) истории.

### 18.1. МАЛЕНЬКАЯ (ПРАВДИВАЯ) ИСТОРИЯ

Моя студентка Дебби недавно написала комплект инструментальных средств для анализа данных для некоторого стартапа. Эта компания собирает информацию о сканах продуктов, сделанных с помощью мобильных телефонов, и аналитические инструменты Дебби классифицируют их по типам продуктов, по регионам, по времени и т. д. Как хороший программист Дебби сначала написала специализированные тестовые примеры, потом разработала соответствующие программы и протестировала их. Затем она получила от компании несколько реальных тестовых данных, разделила их на небольшие фрагменты, вычислила ожидаемые ответы вручную и снова протестировала свои программы на этих реальных (но небольших) наборах данных. После завершения этого процесса Дебби намеревалась объявить программы готовыми к реальной эксплуатации.

Но в тот момент Дебби проверила программы только лишь на функциональную корректность. Оставался нерешенным вопрос: насколько быстро ее аналитические инструменты будут давать ответы. При этом возникали две проблемы:

- компания совершенно обоснованно не желала делиться полным набором данных с посторонними лицами, а мы, в свою очередь, не хотели брать на себя ответственность за обеспечение тщательной защиты всех данных компании;
- даже если бы мы получали образцы полных наборов данных компании, то при постоянном увеличении числа пользователей, использующих ее продукт, объем накапливаемых компанией данных непременно возрастал бы.

Таким образом, мы получили только выборку из полных данных компаний, и на ее основе нужно было сделать некоторый прогноз: сколько времени потребуется для выполнения аналитических вычислений на подмножествах (например, соответствующих только одному региону) или на полном наборе данных на текущий день и при его росте со временем.

Дебби получила в свое распоряжение 100 000 точек данных. Она разделила их на входные наборы из 10, 100, 1000, 10 000 и 100 000 точек данных, выполнила свои инструментальные программы для каждого варианта размера входных данных и представила результаты в графическом виде.

С помощью этого графика мы получаем неплохой шанс предсказать, сколько времени потребуется инструментальной программе для обработки набора данных из 50 000 точек. Но труднее будет сказать, какое время займет обработка наборов данных размером 1.5 миллиона, или 3 миллиона, или 10 миллионов точек. Выше мы уже объяснили, почему невозможно получить от компании больше данных. Так что же можно сделать в такой ситуации?

Упомянутые здесь процессы называются интерполяцией (interpolation) и экстраполяцией (extrapolation) соответственно.

Другая проблема: предположим, что нам доступно несколько реализаций. Мы графически отображаем время их выполнения, например красная, зеленая и синяя линии представляют различные реализации. Тогда при малых объемах входных данных предположим, что значения времени выполнения программы выглядят так, как показано на рис. 18.1.

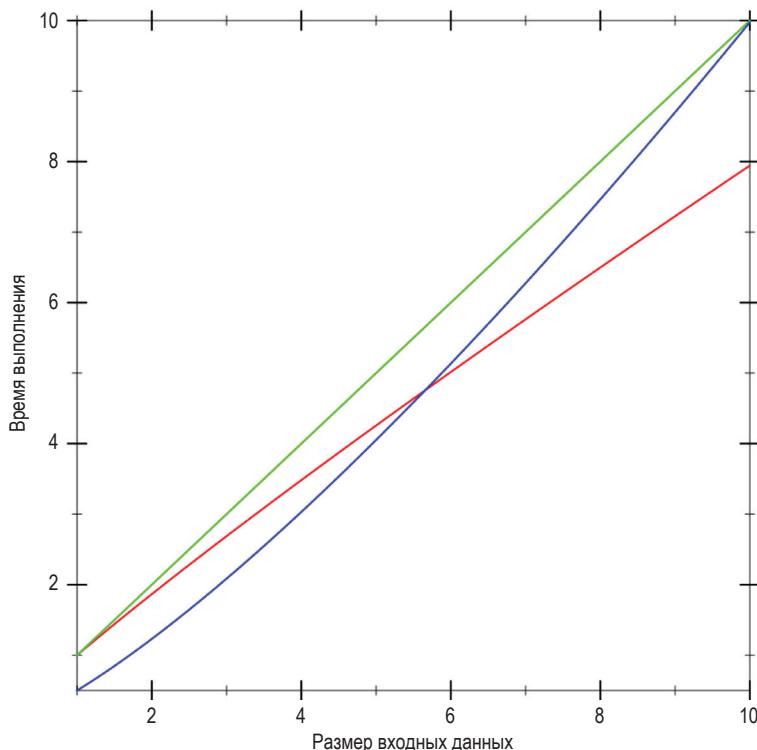
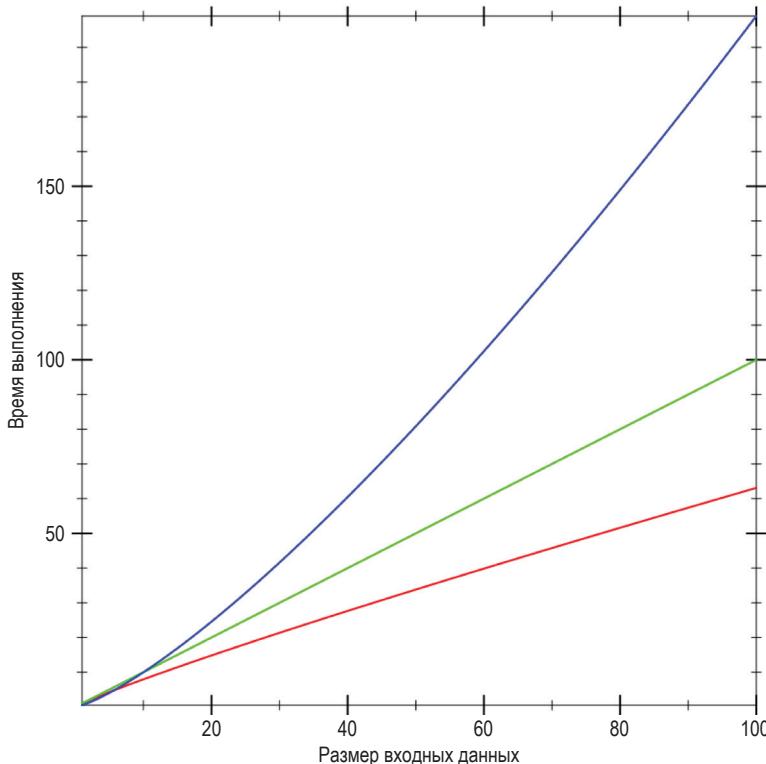


Рис. 18.1 ♦ Графики времени выполнения различных реализаций для малых объемов входных данных

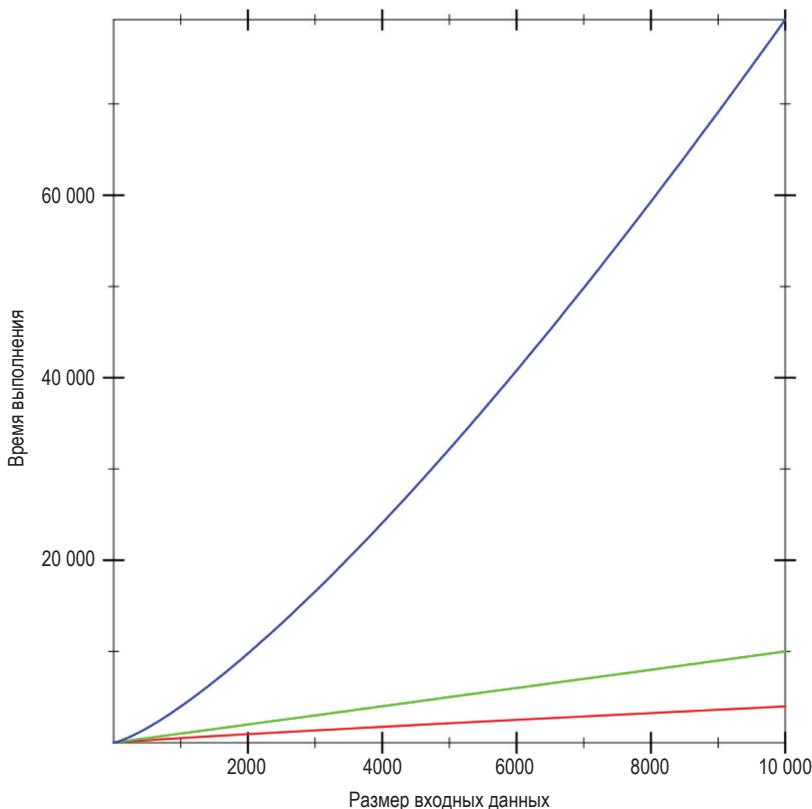
Вряд ли эти графики помогут обнаружить существенные различия между реализациями. Теперь предположим, что те же варианты алгоритмов выполняются на более крупных наборах входных данных, и мы получаем графики, показанные на рис. 18.2.



**Рис. 18.2** ♦ Графики времени выполнения различных реализаций для более крупных объемов входных данных

Теперь можно увидеть явного победителя (красная линия), хотя не вполне понятно, отличаются ли друг от друга две другие реализации (синяя и зеленая линии). Но если выполнить вычисления с еще большими размерами входных данных, то начинают обнаруживаться существенные различия, как показано на рис. 18.3.

В действительности функции, результатом выполнения которых стало построение этих линий, были одинаковыми на всех трех рисунках. Эти графики говорят нам о том, что опасно выполнять слишком «длинную» экстраполяцию по производительности для небольших наборов входных данных. Если бы можно было получить представленные в аналитическом виде описания производительности вычислений, то сравнение стало бы более точным. Именно этим мы и займемся в следующем разделе.



**Рис. 18.3** ♦ Графики времени выполнения различных реализаций для больших объемов входных данных

### Ответственное применение информатики: разумно выбирайте объекты (артефакты) анализа

Поскольку все больше и больше решений принимается на основе статистического анализа данных (выполняемого людьми), очень важно понять, что данные могут быть неудачной связующей характеристикой действительно го явления, которое мы пытаемся понять. В рассматриваемом здесь случае у Дебби были данные о поведении программы, которые привели к неправильному обоснованию того, какая версия программы лучше. Но в распоряжении Дебби находились и сами версии программ, с помощью которых генерировались выходные данные. Анализ программ, а не данных, является более верным методом оценки эффективности программы.

Несмотря на то что остальная часть этой главы посвящена анализу программ, записанных в форме исходного кода, эта методика также распространяется и на действия, формально не являющиеся программами. Например, может потребоваться понимание эффективности процесса распределения пациентов по отделениям больницы. В этом случае у вас есть документы

стратегии выполнения процесса (правила, которые можно, но не обязательно превратить в программу для поддержки управления пациентами), а также данные об эффективности применения этого процесса. Ответственное применение информатики определяет для нас методику анализа как самого процесса, так и данных о его поведении, в совокупности со знаниями о наилучших практических методах ухода за пациентами, чтобы оценивать эффективность систем в целом.

## 18.2. ОСНОВНОЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Лучшее, что мы можем сделать при исследовании многих физических процессов, – это получить как можно больше точек данных, выполнить экстраполяцию и применить статистические методы, чтобы обосновать наиболее вероятный результат. Иногда можно сделать это и в информатике, но, к счастью, мы, специалисты по информатике, имеем огромное преимущество перед представителями большинства других наук: вместо внешнего исследования процесса типа «черный ящик» мы имеем полный доступ к его внутреннему содержимому, а именно к исходному коду. Это позволяет применять аналитические методы. Ответ, который мы вычисляем таким способом, дополняет то, что мы получаем из описанного выше экспериментального анализа, и на практике обычно необходимо использовать сочетание этих двух методик, чтобы получить четкое представление о поведении программы.

Основной аналитический принцип удивительно прост. Мы рассматриваем исходный код программы и составляем список операторов, которые она выполняет. Для каждой операции определяется ее стоимость. Мы суммируем эти стоимости для всех операций. Это позволяет определить общую стоимость всей программы в целом.

Вполне естественно, что для большинства программ ответ на вопрос о стоимости не будет представлен каким-либо постоянным числом. Напротив, он зависит от нескольких факторов, например от размера входных данных. Таким образом, ответ, вероятнее всего, должен быть выражением с параметрами (например, таким как размер входных данных). Другими словами, ответом должна быть функция.

Здесь «аналитический» (метод) означает применение алгебраических и других математических методов для формулирования предварительных утверждений о процессе без его реального выполнения.

Мы сосредоточим все внимание только на одном типе стоимости – времени выполнения (*running time*). Существует много других типов стоимости, которые можно вычислить. Вполне естественно, что нас мог бы заинтересовать размер потребляемой памяти, который подсказывает нам, насколько велик должен быть объем памяти в компьютере, который необходимо купить. Возможно, также придется беспокоиться о потребляемой мощности, от которой зависит сумма в счетах на оплату электроэнергии, или о пропускной способности, определяющей тип требуемого соединения с интернетом. Таким образом, в общем и целом нас интересует потребление ресурсов (*resource consumption*). Короче говоря, не следует совершать ошибку, приравнивая «производительность» к «скорости»: самая значимая стоимость зависит от контекста, в котором выполняется приложение.

Существует много функций, которые могут описать время выполнения исследуемой функции. Часто требуется верхняя граница (upper bound) времени выполнения, т. е. реальное число операций никогда не превысит их количество, предсказанное такой функцией. Таким способом мы получаем информацию о максимальном объеме ресурса, который необходимо обеспечить. Другая функция может представлять нижнюю границу (lower bound), определяющую минимальный необходимый объем ресурса. Иногда требуется анализ среднего варианта (average-case analysis) и т. д. В этой книге все внимание будет сосредоточено на верхних границах, но следует помнить о том, что все прочие виды анализа также чрезвычайно полезны.

---

### Упражнение 18.1

Говорить о некоторой конкретной функции верхней границы (в оригинале: «the» upper-bound function) неправильно, потому что такая функция не является единственной. Если задана одна функция верхней границы, то сможете ли вы создать еще одну?

---

## 18.3. Модель стоимости для времени выполнения Pyret

Начнем с представления модели стоимости для времени выполнения программ на языке Pyret. Нас интересует стоимость выполнения программы, что практически равнозначно исследованию выражений программы. Простое определение ничего не стоит, стоимость начисляется только при использовании такого определения.

Мы будем использовать весьма простую (но достаточно точную) модель стоимости: стоимостью каждой операции является одна единица времени в дополнение ко времени, необходимому для вычисления соответствующих подвыражений. Таким образом, требуется одна единица времени для поиска переменной или размещения константы. Применение простейших функций также стоит одну единицу времени. Все прочее представляет собой составное выражение с подвыражениями. Стоимость составного выражения равна единице плюс единицы для каждого подвыражения. Например, стоимость времени выполнения выражения  $e1 + e2$  (для некоторых подвыражений  $e1$  и  $e2$ ) равна времени выполнения  $e1$  + время выполнения  $e2 + 1$ . То есть выражение  $17 + 29$  имеет стоимость 3 (по единице для каждого подвыражения и единице для операции сложения), стоимость выражения  $1 + (7 * (2 / 9))$  равна 7.

Как вы могли заметить, здесь существуют два значительных приближения:

- во-первых, мы используем абстрактное, а не конкретное понятие времени. Это бесполезно с точки зрения оценки так называемого «физического» времени работы программы, но опять же, это числовое значение зависит от множества факторов – не только от типа процессора и от

объема оперативной памяти, но даже от того, какие другие задачи одновременно выполняются на вашем компьютере. Напротив, абстрактные единицы времени более универсальны и независимы;

- во-вторых, не каждая операция требует одинакового количества машинных циклов, тогда как мы присвоили всем операциям одинаковое число абстрактных единиц времени. Пока фактическое количество циклов, требуемое для каждой операции, ограничено постоянным коэффициентом, связанным с числом циклов, необходимых для другой операции, не возникает никаких математических проблем по причинам, которые мы скоро поймем (см. раздел 18.8).

Разумеется, полезно в учебных целях – после тщательной настройки условий эксперимента – сделать аналитический прогноз поведения программы, а затем проверить его в сравнении с тем, что в действительности делает реализация. Если аналитический прогноз точен, то можно восстановить постоянные коэффициенты, скрытые в наших расчетах, и, таким образом, получить весьма точные границы физического времени выполнения для конкретной программы.

Есть один особенно хитроумный вид выражения: `if` (и его еще более причудливые родственники, например `cases` и `ask`). Что мы можем сказать о стоимости `if`? Это выражение всегда вычисляет условие. После этого выполняется только одна из его ветвей. Но нас интересует время в наихудшем случае (*worst case*), т. е. какое наибольшее время может потребоваться для выполнения этого выражения? Для условия это его стоимость, прибавляемая к стоимости одной из двух ветвей, которая является максимальной.

## 18.4. РАЗМЕР ВХОДНЫХ ДАННЫХ

Определение размера аргумента может оказаться непростым делом. Предположим, что функция принимает список чисел, тогда естественно считать, что размером аргумента должна быть длина этого списка, т. е. число `link` в этом списке. Также можно было бы определить удвоенный размер, учитывая все `link` и отдельные числа (однако, как мы увидим в разделе 18.8, константы обычно значения не имеют). Но если предположить, что функция принимает список названий музыкальных альбомов, а каждый альбом, в свою очередь, состоит из списка композиций, для каждой из которых представлена информация об исполнителях и т. д. Тогда определение размера зависит от того, с какой частью входных данных в действительности работает анализируемая функция. Например, если функция возвращает только длину списка альбомов, то ей безразлично, что содержит каждый элемент списка (см. раздел 10.10), и имеет значение только длина списка альбомов. Но если функция возвращает список

Мы ничего не говорим о размере числа, считая его константой. Обратите внимание: значение числа существенно больше, чем его размер:  $l$  цифр по основанию  $b$  могут представлять  $b^l$  чисел. Хотя здесь это не имеет значения, но когда числа играют самую важную роль, например при проверке на простое число, различие становится критическим. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже (см. подраздел 28.3.1.3).

всех исполнителей из каждого альбома, то она проходит весь путь до отдельных композиций, и мы должны учитывать все эти данные. Короче говоря, нас интересует размер данных, потенциально доступных для функции.

## 18.5. ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Учитывая размеры аргументов, мы просто проверяем тело функции и суммируем стоимость отдельных операций. Но наиболее интересные функции определены условно и могут даже являться рекурсивными. Здесь мы предполагаем, что имеется только один структурный рекурсивный вызов. Немного позже мы перейдем к более общим случаям (см. раздел 18.6).

Если в нашем распоряжении имеется функция только с одним рекурсивным вызовом и она структурирована, то существует удобная методика, которую мы можем использовать для обработки условий. Создадим таблицу. Не удивительно, что в этой таблице будет столько строк, сколько отдельных элементов существует в условии (`cond`). Но вместо двух столбцов таблица содержит семь. Выглядит слегка обескураживающе, но скоро вы узнаете, откуда берутся эти столбцы и для чего они предназначены.

Автором этой идеи является  
Прабхакар Радж (Prabhakar Ragde).

В каждой строке столбцы заполняются следующим образом:

- 1)  $|Q|$  – число операций в вопросе;
- 2)  $\#Q$  – сколько раз будет выполняться (обрабатываться) этот вопрос;
- 3)  $\text{Tot}_Q$  – общая стоимость вопроса (произведение предыдущих двух столбцов);
- 4)  $|A|$  – число операций в ответе;
- 5)  $\#A$  – сколько раз будет выполняться (обрабатываться) этот ответ;
- 6)  $\text{Tot}_A$  – общая стоимость ответа (произведение предыдущих двух столбцов);
- 7)  $\text{Total}$  – сумма двух столбцов 3 и 6 для получения общего ответа для текущего элемента условия.

Наконец, общая стоимость всего условного выражения `cond` определяется суммированием столбца `Total` по всем строкам таблицы.

В процессе вычисления этих стоимостей мы можем встретить рекурсивные вызовы в выражении ответа. Пока во всем ответе существует только один рекурсивный вызов, игнорируйте его.

---

### Упражнение 18.2

После прочтения материала в разделе 18.6 вернитесь к этому упражнению и обоснуйте, почему правильным решением является пропуск единственного рекурсивного вызова. Объясните это в общем контексте табличного вывода в целом.

---

### Упражнение 18.3

Исключив рассмотрение рекурсии, обоснуйте: (а) что перечисленные выше столбцы по отдельности точны (например, использование операций сложения и умножения вполне уместно) и (б) достаточны (т. е. в совокупности они учитывают все операции, которые будут выполнены каждым элементом условного выражения `cond`).

Проще всего понять эту методику на нескольких практических примерах. Сначала рассмотрим функцию `len`, но прежде, чем продолжить, отметим, что она соответствует критерию наличия единственного рекурсивного вызова, где аргумент является структурированным:

```
fun len(l):
  cases (List) l:
    | empty => 0
    | link(f, r) => 1 + len(r)
  end
end
```

Вычислим стоимость выполнения функции `len` для списка длиной  $k$  (где мы считаем только число элементов `link` в списке и игнорируем содержимое каждого первого элемента (`f`), поскольку `len` также игнорирует эти элементы).

Поскольку все тело функции `len` задано условным выражением, можно сразу же перейти непосредственно к созданию таблицы.

Рассмотрим первую строку. Стоимость вопроса равна трем единицам (по одной для вычисления неявного предиката `empty`, `l` и для применения первого ко второму). Это вычисление выполняется по одному разу для каждого элемента в списке и еще один раз, когда список пуст, т. е.  $k + 1$  раз. Таким образом, общая стоимость вопроса равна  $3(k + 1)$ . Для вычисления ответа требуется одна единица времени, и он вычисляется только один раз (когда список пуст). Следовательно, в итоге получается одна единица, а общая сумма стоимостей равна  $3k + 4$  единицы.

Переходим ко второй строке. Здесь вопрос также стоит три единицы и вычисляется  $k$  раз. Ответ требует двух единиц для вычисления остальной части списка `l.rest`, которое неявно скрыто за именем `r`, еще двух единиц для вычисления и применения `1 +`, одну для вычисления `len...` и на этом закончим, потому что время, затраченное на сам рекурсивный вызов, игнорируется. Короче говоря, здесь требуется пять единиц времени (не считая рекурсию, которую мы решили игнорировать).

Запишем все приведенные выше рассуждения в табл. 18.1.

**Таблица 18.1. Расчет времени выполнения операций в теле функции `len`**

Q	#Q	TotQ	A	#A	TotA	Total
3	$k + 1$	$3(k + 1)$	1	1	1	$3k + 4$
3	$k$	$3k$	5	$k$	$5k$	$8k$

Просуммировав последний столбец, получаем  $11k + 4$ . Таким образом, для выполнения функции `len` для списка из  $k$  элементов требуется  $11k + 4$  единиц времени.

---

### Упражнение 18.4

Насколько точна эта оценка? Если вы попробуете применять функцию `len` к спискам различных размеров, то получите ли оценку для  $k$ , согласованную с теоретической?

---

## 18.6. Создание рекуррентных последовательностей

Теперь рассмотрим систематизированный способ аналитического вычисления времени выполнения программы. Предположим, что имеется только одна функция  $f$ . Определим функцию  $T$  для вычисления верхней границы времени выполнения  $f$ . Функция  $T$  принимает такое же число параметров, как и  $f$ . Параметры для  $T$  представляют размеры соответствующих аргументов функции  $f$ . В итоге мы должны прийти к конечной аналитической форме решения для  $T$ , т. е. к форме, которая не ссылается на саму функцию  $T$ . Но существует самый простой способ перехода к аналитической форме – запись решения, в которой разрешена ссылка на функцию  $T$ , называемая рекуррентным отношением (recurrence relation), а затем поиск способа исключения этой ссылки на себя (см. раздел 18.10).

В общем случае мы будем создавать по одной такой функции стоимости для каждой функции в программе. В подобных случаях было бы полезно присваивать разные имена каждой функции, чтобы проще отличать их друг от друга. Поскольку сейчас мы рассматриваем только одну функцию, то существенно сократим накладные расходы, используя только одну функцию  $T$ .

Мы поочередно повторяем эту процедуру для каждой функции в программе. Если функций слишком много, то сначала находим решение для функции, которая не зависит от других функций, затем используем это решение, чтобы найти следующее для функции, зависимой только от первоначально выбранной, и продолжаем действовать подобным образом по всей цепочке зависимостей. При таком подходе, когда мы доходим до функции, которая обращается к другим функциям, у нас уже есть конечная аналитическая форма решения для определения времени выполнения вызываемых функций, поэтому можно просто подключить текущие параметры для получения решения.

---

### Упражнение 18.5

Описанная выше стратегия не работает, если существуют функции, зависящие друг от друга. Как можно обобщить эту стратегию для обработки такого случая?

---

Процесс построения рекуррентных отношений прост. Мы определяем правую часть  $T$  для суммирования операций, выполняемых в теле функции  $f$ . Это вполне очевидная процедура почти для всех выражений, исключая условные и рекурсивные. Мы рассмотрим решение для условных выражений немного позже. Если встречается рекурсивный вызов функции  $f$  с аргументом  $a$ , то в рекуррентном отношении мы превращаем его в ссылку на (саму себя) функцию  $T$  с передачей в нее размера аргумента  $a$ .

Для условных выражений мы используем только столбцы  $|Q|$  и  $|A|$  соответствующей таблицы. Вместо умножения значений размера входных данных мы суммируем операции, выполняемые в одном вызове функции  $f$ , отличающегося от рекурсивного вызова, а затем прибавляем стоимость рекурсивного вызова с учетом ссылки на  $T$ . Таким образом, если бы мы сделали это для приведенной выше функции  $\text{len}$ , то смогли бы определить  $T(k)$  – время, необходимое для обработки входных данных длиной  $k$ , – в двух частях: значение  $T(0)$  (если список пуст) и результат для ненулевых значений  $k$ . Нам известно, что  $T(0) = 4$  (стоимость первого условного выражения и соответствующий ему ответ). Если список не пуст, то стоимость равна  $T(k) = 3 + 3 + 5 + T(k-1)$  (суммируются стоимости соответственно первого вопроса, второго вопроса, остальных операций во втором ответе и рекурсивного вызова для списка, уменьшенного на один элемент). В итоге получаем следующую рекуррентную формулу:

$$T(k) = \begin{cases} 4 & \text{при } k = 0 \\ 11 + T(k - 1) & \text{при } k > 0 \end{cases}$$

Для заданного списка длиной  $p$  элементов (отметим, что  $p \geq 0$ ) предположительно потребуется 11 шагов для первого элемента, еще 11 шагов для второго, еще 11 шагов для третьего и т. д. до тех пор, пока элементы в списке не закончатся, после чего потребуется еще 4 шага: в сумме  $11p + 4$  шага. Обратите внимание: это в точности тот же ответ, который был получен табличным методом.

### Упражнение 18.6

Почему мы можем предположить, что для списка длиной  $p$  элементов  $p \geq 0$ ? И почему мы решили явно объявить об этом выше?

Немного поразмыслив, вы можете обнаружить, что идея создания рекуррентного выражения работает, даже если существует более одного рекурсивного вызова и если аргумент этого вызова структурно меньше на один элемент. Но мы не обнаружили способа решения таких отношений в общем случае. Именно этим мы и займемся в дальнейшем (см. раздел 18.10).

## 18.7. ФОРМА ЗАПИСИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ

В предыдущем разделе мы видели, что можно описать время выполнения `len` с помощью некоторой функции. Но у нас нет особенно удачной формы записи для таких (анонимных) функций. Постойте, ведь можно написать `λam(k): (11 * k) + 4 end`, но мои коллеги пришли бы в ужас, если бы вы написали такое на экзамене. Поэтому мы вводим следующую форму записи, которая означает в точности то же самое:

$$[k \rightarrow 11k + 4].$$

Квадратные скобки обозначают анонимные функции с параметрами перед стрелкой и телом после нее.

## 18.8. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Возвращаемся к определению времени выполнения функции `len`. Мы записали функцию с огромной точностью:  $11! 4!$  Но оправдан ли такой подход?

На мелкомодульном уровне это уже не так. Мы объединили множество операций с различным фактическим временем выполнения в стоимости одной операции. Поэтому, возможно, нам не следует слишком беспокоиться о различиях, например, между  $[k \rightarrow 11k + 4]$  и  $[k \rightarrow 4k + 10]$ . Если бы нам представили две реализации с такими временами выполнения соответственно, то вполне вероятно, что мы должны были бы обратиться к другим характеристикам для выбора одной из них.

Все это сводится к возможности сравнить две функции (представляющие производительность реализаций) на предмет того, является ли одна из них каким-либо образом количественно лучше в некотором значимом смысле, чем другая: т. е. настолько ли велика количественная разность, что она может привести к качественному различию. Приведенный выше пример предполагает, что небольшие различия в константах, вероятнее всего, не имеют значения. Отсюда следует определение этой формы записи:

$$\exists c. \forall n \in \mathbb{N}, f_1(n) \leq c \cdot f_2(n) \Rightarrow f_1 \leq f_2.$$

Очевидно, что «большая» функция, вероятнее всего, будет определять менее полезную границу, чем «более узкая». Тем не менее по общизвестному соглашению принято писать «минимальную» границу для функций, что означает отказ от ненужных констант, членов суммы и т. д. Обоснование этого соглашения приведено ниже (см. раздел 18.9).

Обратите внимание на порядок идентификаторов. Должна существовать возможность выбора константы с заранее, чтобы это соотношение сохранилось.

**Выполните прямо сейчас**

Почему задан именно этот порядок, а не противоположный? А если бы мы поменяли местами эти два квантора?

Если бы мы поменяли порядок кванторов, это означало бы, что для каждой точки на числовой оси обязательно должна существовать постоянная величина, и она почти всегда действительно существует. Таким образом, измененное определение было бы бесполезным. Важно то, что мы можем определить такую постоянную величину независимо от того, насколько большим становится параметр. Именно поэтому эта величина является настоящей константой.

Это определение обладает большей универсальностью, чем могло показаться на первый взгляд. Например, рассмотрим текущий пример в сравнении с  $[k \rightarrow k^2]$ . Очевидно, что вторая функция в итоге превосходит первую, т. е.

$$[k \rightarrow 11k + 4] \leq [k \rightarrow k^2].$$

Просто необходимо выбрать достаточно большую константу, и мы убедимся в том, что это истинно.

**Упражнение 18.7**

Какая наименьшая константа окажется достаточным значением?

В литературе вы найдете более сложные определения, которые обладают собственными достоинствами, потому что позволяют обнаруживать более тонкие различия по сравнению с нашим определением. Но в этой книге приведенное выше определение является вполне достаточным.

Обратите внимание: для заданной функции  $f$  существует много функций, которые меньше ее. Мы используем форму записи  $O(\cdot)$  для описания этого семейства функций. Следовательно, если  $g \leq f$ , то можно написать  $g \in O(f)$ , что читается как « $f$  является верхней границей для  $g$ ». Из этого следует, например, что

$$\begin{aligned}[k \rightarrow 3k] &\in O([k \rightarrow 4k + 12]), \\ [k \rightarrow 4k + 12] &\in O([k \rightarrow k^2])\end{aligned}$$

и т. д.

Этой форме записи необходимо уделить особое внимание и рассмотреть ее более скрупулезно. Мы пишем  $\in$ , а не  $=$  или какой-либо другой символ, потому что  $O(f)$  описывает семейство, членом которого является функция  $g$ . Мы также пишем  $f$ , а не  $f(x)$ , потому что сравниваем функции  $-f$ , – а не их зна-

В информатике эта форма записи обычно произносится как «О-большое» («big-Oh»), хотя некоторые предпочитают называть ее нотацией Бахмана–Ландау (Bachmann–Landau notation) по фамилиям авторов.

чения в конкретных точках –  $f(x)$ , – которые могут быть обычными числами. Большой части форм записи во многих книгах и на большинстве веб-сайтов присущ один или оба недостатка. Но нам известно, что функции являются значениями и что функции могут быть анонимными. Мы действительно использовали оба факта, чтобы написать

$$[k \rightarrow 3k] \in O([k \rightarrow 4k + 12]).$$

Это не единственная форма записи для сравнения функций, которую мы можем использовать. Например, с учетом приведенного выше определения  $\leq$  можно определить естественное отношение  $<$ . Тогда это позволит нам задать вопрос относительно заданной функции  $f$ : что представляют собой все функции  $g$ , такие, что  $g \leq f$ , но не  $g < f$ , т. е. функции, которые «равны»  $f$ . Это семейство функций, отличающихся друг от друга не более чем константой, и когда такие функции определяют порядок роста сложности программ, то «равные» функции обозначают программы, сложность которых растет с одинаковой скоростью (с точностью до констант). Мы используем форму записи  $\Theta(\cdot)$  для обозначения такого семейства функций, поэтому если  $g$  равнозначна  $f$  по этой нотации, то можно написать  $g \in \Theta(f)$  (истинной также будет запись  $f \in \Theta(g)$ ).

**Внимание!** Мы используем кавычки, потому что эта характеристика не равнозначна обычному равенству функций, которое определяется как две функции, дающие одинаковый ответ для всех вариантов входных данных. В нашем случае две «равные» функции могут не давать одинаковый ответ для любых входных данных.

### Упражнение 18.8

Убедитесь в том, что описанное выше понятие равенства функций является отношением эквивалентности, следовательно, заслуживает названия «равно». Оно должно быть (а) рефлексивным (т. е. каждая функция эквивалентна самой себе); (б) обратно симметричным (если  $f \leq g$  и  $g \leq f$ , то  $f$  и  $g$  равны); (в) транзитивным (из  $f \leq g$  и  $g \leq h$  следует, что  $f \leq h$ ).

## 18.9. ОБЪЕДИНЕНИЕ О-БОЛЬШИХ БЕЗ ПРОБЛЕМ

После ввода обозначения «О-большое» необходимо решить вопрос о его свойствах замыкания: а именно как объединяются эти семейства функций? Чтобы стимулировать вашу интуицию, предположим, что во всех случаях мы обсуждаем время выполнения функций. Рассмотрим три случая:

- предположим, что имеется функция  $f$ , время выполнения которой входит в семейство  $O(F)$ . Допустим, что выполнили эту функцию  $p$  раз при некоторой заданной константе. Тогда время выполнения итогового кода равно  $p \times O(F)$ . Но при этом очевидно, что в действительности это не отличается от  $O(F)$ : мы можем просто использовать большее постоянное значение для  $c$  в определении  $O(\cdot)$  – в частности, можно просто использовать  $pc$ . Тогда верно и обратное утверждение:  $O(pF)$  равно-

значно  $O(F)$ . Именно в этом и заключается сущность интуитивного предположения: «постоянные множители не имеют значения»;

- предположим, что имеются две функции:  $f$  в семействе  $O(F)$  и  $g$  в семействе  $O(G)$ . Если выполнить  $f$ , а затем сразу же  $g$ , то можно ожидать, что время выполнения такой комбинации должно быть суммой времен выполнения каждой функции, т. е.  $O(F) + O(G)$ . Вы должны убедиться в том, что это просто  $O(F + G)$ ;
- предположим, что имеются две функции:  $f$  в семействе  $O(F)$  и  $g$  в семействе  $O(G)$ . Если  $f$  вызывает  $g$  на одном из своих шагов выполнения, то можно ожидать, что время выполнения такой комбинации должно быть произведением времен выполнения каждой функции, т. е.  $O(F) \times O(G)$ . Вы должны убедиться в том, что это просто  $O(F \times G)$ .

Эти три операции – сложение, умножение на константу и умножение на функцию – охватывают почти все возможные варианты. Например, можно использовать их для альтернативной интерпретации табличных операций, описанных выше в разделе 18.5 (полагая, что все исследуемые элементы являются функцией от  $k$ ), как показано в табл. 18.2.

Чтобы обеспечить разумный размер таблицы по ширине, мы несколько отклоняемся от принятой выше правильной формы записи.

**Таблица 18.2. Интерпретация табличных операций с использованием  $O$ -большого**

$ Q $	$\#Q$	$TotQ$	$ A $	$\#A$	$TotA$	Total
$O(1)$	$O(k)$	$O(k)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(k)$
$O(1)$	$O(k)$	$O(k)$	$O(1)$	$O(k)$	$O(k)$	$O(k)$

Поскольку умножение на константы не имеет значения, можно заменить 3 на 1. Сложение с константой также не имеет значения (выполните правило сложения в обратном порядке), поэтому  $k + 1$  может стать  $k$ . С учетом этого получаем  $O(k) + O(k) = 2 \times O(k) \in O(k)$ . Это обосновывает утверждение о том, что для выполнения функции `len` для списка из  $k$  элементов требуется время  $O([k \rightarrow k])$ , – это гораздо более простой способ описания ее границы по сравнению с  $O([k \rightarrow 11k + 4])$ . В частности, он предоставляет нам важную информацию и ничего больше: при увеличении размера входных данных (списка) время выполнения возрастает пропорционально ему, т. е. если мы добавим к входным данным еще один элемент, то должны ожидать добавления еще одной константы к значению времени работы.

## 18.10. РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Литература по решению рекуррентных уравнений весьма обширна. В этом разделе мы не будем углубляться в общие методики и даже не будем обсуждать множество разнообразных рекуррентных последовательностей. Вместо этого мы сосредоточим внимание лишь на нескольких из них, которые долж-

ны быть в арсенале каждого специалиста-исследователя в области информатики. Вы будете встречаться с ними многократно, поэтому должны инстинктивно распознавать эти рекуррентные шаблоны и знать, какую сложность они описывают (или знать, как быстро вывести выражение, описывающее сложность).

Ранее мы уже видели рекуррентное выражение с двумя вариантами: один для пустых входных данных, другой для всех остальных. В общем случае следует ожидать обнаружение одного варианта для каждого нерекурсивного вызова и по одному варианту для каждого рекурсивного вызова, т. е. приблизительно по одному варианту для каждого элемента `cases`. В дальнейшем мы будем игнорировать простейшие случаи, когда размер входных данных остается постоянным (например, ноль или единица), потому что в таких случаях объем выполненной работы также будет постоянным, и его, как правило, можно не принимать во внимание (см. раздел 18.8).

$$\begin{aligned} \circ T(k) &= T(k - 1) + c \\ &= T(k - 2) + c + c \\ &= T(k - 3) + c + c + c \\ &= \dots \\ &= T(0) + c \times k \\ &= c_0 + c \times k. \end{aligned}$$

Следовательно,  $T \in O([k \rightarrow k])$ . На интуитивном уровне определяем, что выполняется постоянный объем работы ( $c$ ) каждый раз, когда отбрасывается один элемент ( $k - 1$ ), поэтому в целом выполняется линейный объем работы.

$$\begin{aligned} \circ T(k) &= T(k - 1) + k \\ &= T(k - 2) + (k - 1) + k \\ &= T(k - 3) + (k - 2) + (k - 1) + k \\ &= \dots \\ &= T(0) + (k - (k - 1)) + (k - (k - 2)) + \dots + (k - 2) + (k - 1) + k \\ &= c_0 + 1 + 2 + \dots + (k - 2) + (k - 1) + k \\ &= c_0 + (k \cdot (k + 1))/2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $T \in O([k \rightarrow k^2])$ . Это следует из решения для суммирования первых  $k$  чисел.

Также можно представить эту рекуррентную последовательность геометрически. Предположим, что каждый показанный ниже символ `x` обозначает единицу работы, и мы начинаем с  $k$  таких единиц. Тогда первая строка содержит  $k$  единиц работы:

xxxxxxxx

за которой следует рекуррентная последовательность из  $k - 1$  единиц:

xxxxxxxx

Далее располагается еще одна рекуррентная последовательность, уменьшенная на единицу, и т. д. до тех пор, пока в итоге мы не завершим этот процесс:

```
xxxxxxx
xxxxxx
xxxxx
xxxx
xxx
xx
x
```

Тогда суммарная работа, по существу, равна площади этого треугольника с основанием и высотой  $k$ , или, если вы предпочитаете другую формулировку, половине площади прямоугольника  $k \times k$ :

```
xxxxxxxx
xxxxxx.
xxxxx..
xxxx...
xxxx...
xxx....
xx.....
x.....
```

Подобные геометрические обоснования можно провести для всех приведенных здесь рекуррентных последовательностей.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{O} \quad T(k) &= T(k/2) + c \\
 &= T(k/4) + c + c \\
 &= T(k/8) + c + c + c \\
 &= \dots \\
 &= T(k/2^{\log_2 k}) + c \cdot \log_2 k \\
 &= c_1 + c \cdot \log_2 k.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $T \in O([k \rightarrow \log k])$ . На интуитивном уровне определяем, что можно выполнить только постоянную работу ( $c$ ) на каждом уровне, а затем отбросить половину входных данных. За логарифмическое число шагов мы исчерпываем все входные данные при необходимости выполнения только постоянной работы каждый раз. Таким образом, общая сложность является логарифмической.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{O} \quad T(k) &= T(k/2) + k \\
 &= T(k/4) + k/2 + k \\
 &= \dots \\
 &= T(1) + k/2^{\log_2 k} + \dots + k/4 + k/2 + k \\
 &= c_1 + k(1/2^{\log_2 k} + \dots + 1/4 + 1/2 + 1) \\
 &= c_1 + 2k.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $T \in O([k \rightarrow k])$ . На интуитивном уровне определяем, что в первый раз этот процесс рассматривает все элементы, во второй раз – только половину, в третий раз – четверть и т. д. Этот тип последовательного уменьшения на половину равнозначен сканированию всех элементов входных данных во второй раз. Таким образом, результатом является линейный процесс.

$$\begin{aligned} \circ T(k) &= 2T(k/2) + k \\ &= 2(2T(k/4) + k/2) + k \\ &= 4T(k/4) + k + k \\ &= 4(2T(k/8) + k/4) + k + k \\ &= 8T(k/8) + k + k + k \\ &= \dots \\ &= 2^{\log_2 k} T(1) + k \cdot \log_2 k \\ &= k \cdot c_1 + k \cdot \log_2 k. \end{aligned}$$

Следовательно,  $T \in O([k \rightarrow k \cdot \log k])$ . На интуитивном уровне определяем, что каждый раз мы обрабатываем все элементы в каждом рекурсивном вызове ( $k$ ), а также выполняем декомпозицию на две равные подзадачи. Такая декомпозиция дает дерево рекурсии логарифмической высоты, на каждом уровне которого выполняется линейная работа.

$$\begin{aligned} \circ T(k) &= 2T(k - 1) + c \\ &= 2T(k - 1) + (2 - 1)c \\ &= 2(2T(k - 2) + c) + (2 - 1)c \\ &= 4T(k - 2) + 3c \\ &= 4T(k - 2) + (4 - 1)c \\ &= 4(2T(k - 3) + c) + (4 - 1)c \\ &= 8T(k - 3) + 7c \\ &= 8T(k - 3) + (8 - 1)c \\ &= \dots \\ &= 2^k T(0) + (2^k - 1)c. \end{aligned}$$

Следовательно,  $T \in O([k \rightarrow 2^k])$ . Обработка каждого элемента требует постоянного объема работы, поэтому в остальной части объем работы удваивается. Такое последовательное удвоение приводит к экспоненциальной сложности.

---

### Упражнение 18.9

Используя индукцию, докажите правильность каждого из приведенных выше выводов.

---

# Глава 19

---

## Обратимся к множествам

Ранее в разделе 12.2 мы представили множества (sets). Напомним, что элементы множества не располагаются в каком-либо определенном порядке, а повторяющиеся значения игнорируются. До настоящего времени мы полагались на встроенное в Pyret представление множеств. Но теперь мы рассмотрим, как самостоятельно создавать множества. В дальнейшем мы сосредоточимся только на множествах чисел.

Если принципы использования множеств вам незнакомы, то обязательно прочтите раздел 12.2, так как они будут весьма важны при обсуждении представления множеств.

Начнем с рассмотрения представления множеств с помощью списков. На интуитивном уровне использование списков для представления множеств элементов данных выглядит проблематичным, потому что в списках учитывается и порядок, и повторяющиеся элементы. Например:

```
check:  
  [list: 1, 2, 3] is [list: 3, 2, 1, 1]  
end
```

проверку не проходит.

Теоретически нам необходимы множества, обладающие следующим интерфейсом:

```
<set-operations> ::=  
  mt-set :: Set  
  is-in :: (T, Set<T> -> Bool)  
  insert :: (T, Set<T> -> Set<T>)  
  union :: (Set<T>, Set<T> -> Set<T>)  
  size :: (Set<T> -> Number)  
  to-list :: (Set<T> -> List<T>)
```

Следует отметить, что тип с именем `Set` уже встроен в Pyret, поэтому ниже мы не будем использовать это имя.

Также может оказаться полезным наличие функций, подобных приведенной ниже:

```
insert-many :: (List<T>, Set<T> -> Set<T>)
```

которая при объединении с `mt-set` с легкостью позволяет получить функцию `to-set`.

Множества могут содержать многие типы значений, но не обязательно любые: нам необходима возможность проверять, равны ли два значения (что является непременным требованием для множества, но не для списка), а это невозможно сделать для всех значений (например, для функций). Иногда может даже потребоваться упорядочение элементов (см. раздел 19.2.1). Числа удовлетворяют обеим этим характеристикам.

## 19.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ С ПОМОЩЬЮ СПИСКОВ

В дальнейшем мы увидим несколько различных представлений множеств, поэтому нам потребуются разные имена, чтобы отличать их друг от друга. Мы будем использовать `LSet` для обозначения «множеств, представленных в виде списков».

В качестве отправного пункта рассмотрим реализацию множеств с использованием списков, как базовое представление. В сущности, множество выглядит обычным списком, в котором мы игнорируем порядок элементов.

### 19.1.1. Варианты выбора представления

Пустой список можно применить для представления пустого множества:

```
type LSet = List
mt-set = empty
```

и мы можем предварительно определить функцию `size` следующим образом:

```
fun size<T>(s :: LSet<T>) -> Number:
  s.length()
end
```

Но эта свертка (`reduction`; см. объяснение термина в главе 33 «Словарь терминов») (множеств в списки) может оказаться опасной:

- 1) между множествами и списками существует тонкое различие. Список

```
[list: 1, 1]
```

это не список

```
[list: 1]
```

потому что первый список имеет длину два, тогда как длина второго равна единице. Но если интерпретировать эти списки как множества, то они одинаковы: размер обеих равен единице. Таким образом, приведенная выше реализация функции `size` некорректна, если не учитывать повторяющиеся элементы (или во время вставки, или при вычислении размера);

- 2) мы можем сделать ложные предположения о порядке, в котором элементы извлекаются из множества, из-за упорядоченности, обеспеченной внутренним представлением списка. Это может скрыть ошибки, которые мы не обнаружим, пока не изменим представление;
- 3) возможно, мы выбрали такое представление множества, потому что не нужно было заботиться о порядке и ожидалось большое количество повторяющихся элементов. Но представление в виде списка может хранить все повторяющиеся элементы, что приводит к значительно большему объему используемой памяти (и более медленной работе программ), чем ожидалось.

Чтобы избежать всех перечисленных выше опасностей, мы должны абсолютно точно определить, как мы намерены использовать списки для представления множеств. Один из самых важных вопросов (но не единственный, как мы скоро увидим в подразделе 19.1.3) – что делать с повторяющимися элементами. Один из возможных вариантов ответа – функция `insert` должна проверять, не находится ли вставляемый элемент уже в списке, и если находится, то представление не изменяется. Это увеличивает стоимость операции вставки, но позволяет избежать нежелательного дублирования элементов и использовать функцию `length` для реализации `size`. Другой вариант – определение `insert` напрямую как `link`:

```
insert = link
```

и передача некоторой другой процедуре обязанности по выполнению фильтрации повторяющихся элементов.

## 19.1.2. Временная сложность

Что представляет собой сложность этого представления множеств? Рассмотрим только операции `insert`, `check` и `size`. Предположим, что множество имеет размер  $k$  (чтобы устранить неоднозначность, пусть  $k$  представляет число различных элементов). Сложность этих операций зависит от того, сохраняем ли мы или исключаем повторяющиеся элементы:

- если мы не сохраняем повторяющиеся элементы, то `size` – это просто `length` с линейным относительно  $k$  временем выполнения. Аналогично `check` требует только одного прохода по списку для определения присутствия или отсутствия элемента, который также выполняется за линейное относительно  $k$  время. Но операция `insert` должна проверять, не содержится ли заданный элемент в списке, для чего требуется время, линейное относительно  $k$ , а за ней следует операция с постоянным временем выполнения (`link`);
- если мы сохраняем повторяющиеся элементы, то для `insert` требуется постоянное время: просто выполняется `link` для нового элемента без учета наличия его в этом представлении множества. Операция `check` проходит по списку один раз, но число посещаемых элементов может оказаться существенно большим, чем  $k$ , – это зависит от количества добавленных повторяющихся элементов. Наконец, операция `size` обязана

проверять, является ли каждый элемент повторяющимся, прежде чем учесть его при вычислении размера.

### **Выполните прямо сейчас**

Какова временная сложность операции `size`, если список содержит повторяющиеся элементы?

Одна из реализаций `size` приведена ниже:

```
fun size<T>(s :: LSet<T>) -> Number:
    cases (List) s:
        | empty => 0
        | link(f, r) =>
            if r.member(f):
                size(r)
            else:
                1 + size(r)
            end
        end
    end
```

Теперь вычислим сложность тела этой функции, предположив, что число различных элементов в списке `s` равно  $k$ , но действительное число элементов в `s` равно  $d$ , при этом  $d \geq k$ . Для вычисления времени выполнения `size` для  $d$  элементов  $T(d)$  мы должны определить число операций в каждом вопросе и ответе. Первый вопрос содержит постоянное количество операций, и первый ответ также является константой. Во втором вопросе количество операций также постоянное. Ответ на него зависит от условия, в котором первый вопрос (`r.member(f)`) требует прохода по всему списку, следовательно, содержит  $O([k \rightarrow d])$  операций. Если это удается, мы рекурсивно возвращаемся к некоторой сущности размером  $T(d-1)$ , иначе делаем то же самое, но выполняем больше (на постоянную величину) операций. Таким образом,  $T(0)$  – константа, тогда как рекуррентная последовательность (в терминах  $O$ -большого) выглядит так:

$$T(d) = d + T(d-1).$$

Следовательно,  $T \in O([d \rightarrow d^2])$ . Обратите внимание: это квадратичная зависимость от числа элементов в списке, которая может оказаться намного большей, чем размер множества.

### **19.1.3. Выбор одного из представлений**

Теперь у нас есть два представления с различными сложностями, поэтому необходимо задуматься о том, как выбрать одно из них. Для этого создадим табл. 19.1, в которой описаны различия между интерфейсом (множество) и реализацией (список), возникающие потому, что эти две сущности могут

оказаться неравнозначными друг другу из-за повторяющихся элементов в реализации. В табл. 19.1 мы рассматриваем только две наиболее часто выполняемые операции – вставку и проверку на присутствие элемента в списке.

**Таблица 19.1. Различия между интерфейсом (множество) и реализацией (список)**

	С повторяющимися элементами		Без повторяющихся элементов	
	<code>insert</code>	<code>is-in</code>	<code>insert</code>	<code>is-in</code>
Размер множества	постоянный	линейный	линейный	линейный
Размер списка	постоянный	линейный	линейный	линейный

В самом простом смысле здесь предполагается, что представление с повторяющимися элементами лучше, потому что оно иногда постоянное, а иногда линейное, тогда как версия без повторяющихся элементов всегда линейна. Но за этим скрывается весьма важное различие: что именно означает линейность. При отсутствии повторяющихся элементов размер списка совпадает с размером множества. Однако с повторяющимися элементами размер списка может оказаться сколь угодно большим по сравнению с размером множества.

На основании вышесказанного можно сделать следующие выводы:

- 1) выбор представления зависит от того, сколько ожидается повторяющихся элементов. Если их окажется не слишком много, то версия с хранением повторяющихся элементов платит небольшую дополнительную цену в обмен на некоторые более быстрые операции;
- 2) выбор представления также зависит от того, как часто предполагается выполнение каждой операции. Представление без повторяющихся элементов является «усредненным вариантом»: все операции имеют приблизительно равную стоимость (в наихудшем случае). Версия с повторяющимися элементами обладает «пределными характеристиками»: чрезвычайно дешевая операция вставки, но потенциально весьма затратная операция проверки нахождения элемента в списке. Но если мы будем в основном только вставлять элементы без проверки их содержания в списке, и особенно если мы знаем, что такая проверка будет выполняться только в ситуациях, когда мы готовы подождать, то разрешение повторяющихся элементов может оказаться действительно разумным выбором (Когда может возникнуть такая ситуация? Предположим, что конкретное множество представляет структуру данных для резервного копирования, тогда мы весьма редко будем добавлять в нее большой объем данных – разве что только в случае какой-то крупномасштабной катастрофы, – даже если нужно что-либо найти в этих данных.);
- 3) другой способ выразить эти предположения заключается в том, что наша форма анализа слишком слаба. В ситуациях, когда сложность так сильно зависит от конкретной последовательности операций, метод О-большого слишком неточен, и вместо этого мы должны исследовать сложность конкретных последовательностей операций. Именно к этому вопросу мы обратимся позже (в главе 20).

Кроме того, нет причин, по которым программа должна использовать только одно представление. Вполне можно начать с одного представления, а затем переключиться на другое, когда придет лучшее понимание его рабочей нагрузки. Единственное, что нужно сделать для такого переключения, – преобразовать все существующие данные для перехода между представлениями.

Как это можно применить для рассматриваемого выше примера? Обратите внимание: преобразование данных в одном направлении имеет очень малую стоимость – поскольку каждый список без повторяющихся элементов по умолчанию является также списком с (потенциальными) повторяющимися элементами, преобразование в этом направлении тривиально (представление остается неизменным, изменяется только его интерпретация). Преобразование в другом направлении сложнее: необходимо отфильтровать повторяющиеся (что требует времени, квадратичного относительно количества элементов в списке). Таким образом, программа может сделать первоначальное предположение о своей рабочей нагрузке и выбрать соответствующее представление, но при этом вести статистический учет во время выполнения, и если обнаруживается, что предположение было сделано неверно, то переключиться на другое представление – это можно делать столько раз, сколько необходимо.

## 19.1.4. Другие операции

---

### Упражнение 19.1

Выполните реализацию остальных операций из приведенного выше списка *<set-operations>* для каждой версии представления множества списком.

---

---

### Упражнение 19.2

Выполните реализацию операции

```
remove :: (Set<T>, T -> Set<T>)
```

для каждой версии представления множества списком. (Переименуйте *Set* соответствующим образом.) Какие различия вы видите?

---

### Выполните прямо сейчас

Предположим, что вам предложили расширить функциональные возможности множеств показанными ниже операциями, являющимися аналогами операций *first* и *rest* для множеств:

```
one :: (Set<T> -> T)
others :: (Set<T> -> T)
```

Вы должны отказаться от такого расширения. Понимаете, почему?

В списках «первый» элемент определен точно, тогда как в множествах порядок вовсе не определен. Разумеется, просто для полной уверенности в том, что пользователи ваших множеств не делают никаких случайных предположений об их внутренней реализации (например, если вы реализуете `one`, используя `first`, то пользователи могут заметить, что всегда возвращается элемент, добавленный последним в список), вам действительно следует возвращать случайный элемент множества при каждом вызове.

К сожалению, возврат случайного элемента означает, что описанный выше интерфейс неприменим. Предположим, что переменная `s` связана с множеством, содержащим 1, 2 и 3. Допустим, что при первом вызове `one(s)` возвращает 2, а при втором 1. (Это уже означает, что `one` не является функцией.) При третьем вызове снова возможен возврат 2. Таким образом, операция `others` должна запоминать, какой элемент был возвращен при последнем вызове `one`, и возвращать множество без этого элемента. Предположим, что теперь мы вызываем `one` с результатом вызова `others`. Это означает возможность возникновения ситуации, в которой `one(s)` возвращает тот же результат, что и `one(others(s))`.

---

### Упражнение 19.3

Почему для `one(s)` возврат того же результата, что и `one(others(s))`, является неприемлемым?

---

---

### Упражнение 19.4

Предположим, что необходимо расширить функциональные возможности множеств с помощью операции `subset`, которая выделяет часть множества в соответствии с некоторым условием. Какой тип должна иметь эта операция?

---

---

### Упражнение 19.5

Типы, записанные выше, не настолько ясно выражены, как могли бы быть. Определите предварительное условие (предикат) `has-no-duplicate`, улучшите с его помощью соответствующие типы и проверьте ранее созданные функции на действительное соответствие этому условию.

---

## 19.2. КАК ЗАСТАВИТЬ МНОЖЕСТВА РАСТИ НА ДЕРЕВЬЯХ

Начнем с замечания о том, что было бы лучше, если это вообще возможно, избежать хранения повторяющихся элементов. Повторяющиеся элементы

создают проблемы только во время вставки из-за необходимости проверки присутствия их в списке. Но если бы можно было сделать операцию проверки на присутствие дешевой, то лучше было бы использовать ее для проверки повторяющихся элементов и хранить только один экземпляр каждого значения (что также позволило бы сэкономить пространство). Поэтому попробуем улучшить временную сложность операции проверки на присутствие элемента в списке (и, будем надеяться, других операций тоже).

Кажется очевидным, что в представлении множества с помощью списка (без повторяющихся элементов) невозможно превзойти линейное время для проверки на присутствие элемента в списке. Причина в том, что на каждом шаге в действительности можно исключить только один элемент из содержимого, что в наихудшем случае требует линейного объема работы для проверки всего множества в целом. Вместо этого необходимо исключать намного больше элементов при каждом сравнении – больше, чем простая константа.

В выведенном для удобства наборе решений рекуррентных последовательностей (см. раздел 18.10) есть такое:  $T(k) = T(k/2) + c$ . Это решение утверждает, что если при постоянном объеме работы можно исключить половину входных данных, то мы можем выполнить проверку на присутствие элемента в списке за логарифмическое время. Это и должно стать нашей целью.

Прежде чем продолжить, следует рассмотреть логарифмический рост в перспективе. Очевидно, что асимптотическое поведение логарифмической функции не так хорошо, как поведение константы. Но логарифмическая кривая весьма благоприятна, так как возрастание очень медленное. Например, если размер входных данных удваивается с  $k$  до  $2k$ , то его логарифм, следовательно, и потребление ресурсов, возрастает только лишь на  $\log 2k - \log k = \log 2$ , а это постоянное значение. В действительности практически для всех задач логарифм размера входных данных ограничен константой (и даже не очень большой). Таким образом, на практике для многих программ, если есть возможность сократить потребление ресурсов до логарифмического роста, вероятнее всего, пришло время двигаться дальше и сосредоточиться на улучшении какой-либо другой части системы.

## 19.2.1. Преобразование значений в упорядоченные значения

В действительности мы только что сделали чрезвычайно тонкое предположение. Когда мы проверяем некоторый элемент на присутствие в списке и удаляем его, мы удаляем только один элемент. Чтобы исключить более одного элемента, необходимо, чтобы один элемент «говорил за несколько». То есть удаление этого значения должно безопасно исключать несколько других, не обращаясь к ним. В частности, теперь мы уже не можем выполнять сравнение на явное равенство, при котором один элемент множества сравнивается с другим элементом; необходима операция, которая сравнивает один элемент с набором элементов.

Для этого мы должны преобразовать произвольный элемент данных в такой тип, который допускает подобную операцию сравнения. Эта операция

известна под названием «хеширование» (hashing). Хеш-функция (hash function) принимает произвольное значение и возвращает его сравнимое представление (хеш-значение (hash)), в большинстве случаев являющееся числом (но это не обязательно). Хеш-функция, естественно, обязательно должна быть детерминированной (deterministic): из фиксированного значения всегда должно получаться одно и то же хеш-значение (иначе мы можем прийти к выводу о том, что некоторый элемент множества на самом деле в нем не содержится и т. д.). Конкретные варианты использования могут потребовать дополнительных свойств: например, ниже мы предположим, что вывод является частично упорядоченным (partially ordered).

Теперь рассмотрим, как можно вычислять хеш-значения. Если типом входных данных является число, то оно может служить собственным хеш-значением. Операция сравнения просто использует операторы сравнения чисел (например,  $<$ ). Далее транзитивность оператора  $<$  гарантирует, что если элемент A меньше другого элемента B, то A также меньше всех прочих элементов, которые больше B. Тот же принцип применяется, если типом данных является строка, – используется сравнение строк на неравенство. Но как быть, если требуется обработка более сложных типов данных?

Прежде чем ответить на этот вопрос, будем считать, что на практике числа более эффективны для сравнения, чем строки (поскольку для сравнения двух чисел требуется время, весьма близкое к постоянному). Таким образом, хотя можно было бы непосредственно использовать сами строки, возможно, удобнее найти числовое представление строк. В обоих случаях мы будем выполнять преобразование каждого символа строки в число, например, с учетом кодировки ASCII. На этой основе предлагаются две хеш-функции:

- 1) рассмотрим список простых чисел такой же длины, как исходная строка. Возведем каждое простое число в степень, соответствующую числу из исходной строки, и перемножим результаты. Например, если строка представлена кодами символов [6, 4, 5] (первый символ имеет код 6, второй – 4, третий – 5), то получим хеш-значение:

```
num-expt(2, 6) * num-expt(3, 4) * num-expt(5, 5)
```

или 16200000;

- 2) просто сложим все числовые коды символов. Для описанного выше примера это должно соответствовать хеш-значению

6 + 4 + 5

или 15.

Первое представление является обратимым (invertible), т. е., используя основную теорему арифметики ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Основная\\_теорема\\_арифметики](https://ru.wikipedia.org/wiki/Основная_теорема_арифметики)), при наличии полученного в результате хеширования числа можно восстановить исходные данные единственным образом (т. е. хеш-значение 16200000 можно отобразить только в приведенные выше входные данные и никакие другие). Второй способ кодирования, разумеется, не является обратимым (например, если просто поменять местами символы, то по закону коммутативности сумма останется той же самой).

Теперь рассмотрим более общие типы данных. Принцип хеширования остается тем же самым. Если имеется тип данных с несколькими вариантами, то можно использовать числовую тег для представления вариантов: например, простые числа дают нам обратимые теги. Для каждого поля записи необходимо упорядочение полей (например, в лексикографическом (lexicographic) или «алфавитном» порядке) и обязательное рекурсивное хеширование их содержимого. Благодаря этому требованию мы получаем в результате строку из чисел, способ обработки которой уже был продемонстрирован выше.

Теперь мы полностью понимаем, как можно детерминированно преобразовать любой произвольный элемент данных в число, поэтому в дальнейшем предположим, что деревья (trees), представляющие множества, являются деревьями чисел. Но при этом требуется особое внимание к тому, что мы в действительности хотим получить от хеширования. В разделе 28.2 нам не потребуется частичное упорядочение. Обратимость – это более сложное и неоднозначное свойство. Далее мы предположили, что поиск хеша равнозначен поиску самого элемента множества, что неверно, если несколько значений могут иметь один и тот же хеш. В этом случае самое простое, что можно сделать, – это сохранить хеш-значения вместе с хешируемыми исходными значениями, тогда мы непременно должны выполнять поиск по всем этим значениям, чтобы найти требуемый элемент. К сожалению, это означает, что в совершенно противоположной ситуации требуемая логарифмическая сложность в действительности вообще становится линейной сложностью.

В реальных системах хеш-значения обычно вычисляются с помощью реализаций на конкретном языке программирования. Преимущество при этом заключается в том, что часто их можно сделать единственными в своем роде. Каким образом системы достигают такого результата? Очень просто: по существу, они используют адрес памяти хранимого значения как его хеш. (Но не спешите с выводами. Иногда система управления памятью имеет возможность перемещать значения и действительно делает это при вызове механизма сборки мусора (garbage collection). В таких случаях вычисление хеш-значения становится более сложным.)

## 19.2.2. Использование двоичных деревьев

Очевидно, что представление в виде списка не позволяет удалить половину элементов при постоянном объеме работы, поэтому необходимо заменить список деревом (tree). Таким образом, мы определяем двоичное дерево (binary tree) из чисел (для упрощения):

```
data BT:  
| leaf  
| node(v :: Number, l :: BT, r :: BT)  
end
```

Потому что логарифмы ведут свое происхождение от деревьев. (В оригинале – игра слов: «Because logs come from trees» – дословно: «Потому что бревна делаются из деревьев». – Прим. перев.)

С учетом этого определения создадим функцию проверки существования элемента в дереве:

```
fun is-in-bt(e :: Number, s :: BT) -> Boolean:
  cases (BT) s:
    | leaf => false
    | node(v, l, r) =>
      if e == v:
        true
      else:
        is-in-bt(e, l) or is-in-bt(e, r)
      end
    end
  end
```

Но постойте. Если искомый элемент не находится в корне, то что мы должны сделать? Он может находиться в ветви левого или правого потомка, и мы не можем точно узнать об этом, пока не проверим оба варианта. Следовательно, нельзя отбросить половину элементов, только один мы можем исключить – значение в корне. Кроме того, это свойство сохраняется на каждом уровне дерева. Таким образом, проверка существования элемента требует исследования всего дерева, поэтому сложность остается линейной относительно размера множества.

Как можно улучшить этот процесс? Сравнение необходимо для того, чтобы удалить не только корень, но и целое поддерево (subtree). Это можно сделать только в том случае, если операция сравнения «отвечает за» все поддерево в целом. Такое возможно, если все элементы в одном поддереве меньше или равны значению в корне, а все элементы в другом поддереве больше или равны ему. Разумеется, мы должны быть полностью уверены в том, в какой части находится то или иное подмножество. Существует соглашение, по которому меньшие элементы размещаются слева, а большие – справа. Этот способ уточняет определение двоичного дерева и позволяет получить двоичное дерево поиска (binary search tree – BST).

### **Выполните прямо сейчас**

Ниже приведен исходный код предлагаемого предварительного условия (предиката) для определения тех случаев, когда двоичное дерево в действительности является двоичным деревом поиска:

```
fun is-a-bst-buggy(b :: BT) -> Boolean:
  cases (BT) b:
    | leaf => true
    | node(v, l, r) =>
      (is-leaf(l) or (l.v <= v)) and
      (is-leaf(r) or (v <= r.v)) and
      is-a-bst-buggy(l) and
      is-a-bst-buggy(r)
    end
  end
```

Является ли корректным это определение?

Не является. Чтобы действительно отбросить половину дерева, необходима полная уверенность в том, что все элементы в левом поддереве меньше значения в корне и одновременно что все элементы в правом поддереве больше значения в корне. Но приведенное выше определение выполняет лишь «поверхностное» сравнение. Таким образом, мы могли бы получить корень  $a$  с правым потомком  $b$ , таким, что  $b > a$ , а узел  $b$  мог бы иметь левого потомка  $c$ , такого, что  $c < b$ , но это вовсе не гарантирует того, что  $c > a$ . В действительности можно с легкостью создать контрпример, который проходит следующую проверку:

```
check:
  node(5, node(3, leaf, node(6, leaf, leaf)), leaf)
    satisfies is-a-bst-buggy      # Ложь.
end
```

В приведенном выше определении мы использовали оператор  $\leq$  вместо  $<$ , потому что даже если в представлениях множеств не требуется разрешение наличия повторяющихся элементов, то в других случаях, возможно, такое строгое ограничение не будет необходимым. Таким образом, эту реализацию можно будет многократно использовать для других целей.

### Упражнение 19.6

Исправьте исходный код функции проверки корректности двоичного дерева поиска (BST).

После корректного определения можно создать улучшенную версию двоичных деревьев, которые являются двоичными деревьями поиска:

```
type BST = BT%(is-a-bst)
```

Также можно напомнить себе, что основной целью этого упражнения являлось определение множеств, и тогда определение TSet становится множеством деревьев:

```
type TSet = BST
mt-set = leaf
```

Теперь займемся реализацией необходимых операций в представлении BST. Сначала напишем шаблон:

```
fun is-in(e :: Number, s :: BST) -> Bool:
  cases (BST) s:
    | leaf => ...
    | node(v, l :: BST, r :: BST) => ...
      ... is-in(l) ...
      ... is-in(r) ...
  end
end
```

Очевидно, что определение данных типа BST дает подробную информацию о двух потомках: оба имеют тип BST, поэтому мы точно знаем, что все их

элементы должны быть правильно упорядочены. Это знание можно использовать для определения реальных операций:

```
fun is-in(e :: Number, s :: BST) -> Boolean:
    cases (BST) s:
        | leaf => false
        | node(v, l, r) =>
            if e == v:
                true
            else if e < v:
                is-in(e, l)
            else if e > v:
                is-in(e, r)
            end
    end
end

fun insert(e :: Number, s :: BST) -> BST:
    cases (BST) s:
        | leaf => node(e, leaf, leaf)
        | node(v, l, r) =>
            if e == v:
                s
            else if e < v:
                node(v, insert(e, l), r)
            else if e > v:
                node(v, l, insert(e, r))
            end
    end
end
```

В обеих функциях мы строго предполагаем инвариант `BST`, а в последнем случае еще и обеспечиваем его. Убедитесь в том, что вы определили, где, почему и как.

Теперь у вас должна появиться возможность определения остальных операций. Из них `size` явно требует линейного времени (поскольку эта операция должна подсчитывать все элементы), но поскольку `is-in` и `insert` отбрасывают один из двух элементов-потомков при каждом рекурсивном вызове, для их выполнения требуется логарифмическое время.

### Упражнение 19.7

Предположим, что нам часто приходится вычислять размер множества. Поэтому необходима возможность уменьшить временную сложность функции `size`, при условии что каждое дерево кеширует (см. объяснение термина «кеш» (cache) в главе 33 «Словарь терминов») свой размер, чтобы `size` могла выполняться за постоянное время (отметим, что размер дерева явно соответствует условию кеширования, поскольку его всегда можно восстановить). Обновите определение данных и все зависимости от него функции для правильного отслеживания этой информации.

Но задержитесь на минуту. Разве мы действительно сделали это? Наша рекурсивная последовательность принимает форму  $T(k) = T(k/2) + c$ , но что именно в новом определении данных гарантирует, что потомок, который обходит функция `is-in`, будет иметь половинный размер?

### **Выполните прямо сейчас**

Создайте пример, – состоящий из последовательности операций вставки `insert` в пустое дерево, – такой, что полученное в результате дерево не является сбалансированным. Покажите, что поиск конкретных элементов в таком дереве потребует линейного, а не логарифмического времени относительно его размера.

Предположим, что мы начинаем с пустого дерева и вставляем значения 1, 2, 3 и 4 по порядку. Полученное в результате дерево должно выглядеть следующим образом:

```
check:
  insert(4, insert(3, insert(2, insert(1, mt-set)))) is
    node(1, leaf,
      node(2, leaf,
        node(3, leaf,
          node(4, leaf, leaf))))
end
```

При поиске значения 4 в этом дереве придется проверить в нем все множество элементов. Другими словами, такое двоичное дерево поиска является вырожденным (*degenerate*) – фактически это список, и мы опять возвращаемся к той сложности, которая существовала ранее.

Таким образом, использование двоичного дерева и даже двоичного дерева поиска (BST) не обеспечивает требуемой сложности: ее можно достичь, только если входные данные абсолютно правильно упорядочены. Но мы не можем заранее предполагать какую-либо упорядоченность входных данных, вместо этого хотелось бы получить реализацию, работающую корректно во всех случаях. Следовательно, мы непременно должны найти способ, всегда обеспечивающий сбалансированность дерева, чтобы каждый рекурсивный вызов `is-in` действительно отбрасывал половину элементов.

## **19.2.3. Точный баланс: обрезка деревьев**

Определим сбалансированное двоичное дерево поиска (balanced binary search tree – BBST). Очевидно, что это обязательно должно быть дерево поиска, поэтому сосредоточимся на части «сбалансированное». Следует уделить особое внимание точности определения смысла этого термина: мы не можем просто ожидать, что обе стороны будут иметь равный размер, потому что при этом требуется, чтобы дерево (следовательно, и множество) содержало четное число элементов и соответствовало даже еще более строгому условию: его размер должен быть степенью числа два.

---

### Упражнение 19.8

Определите предикат для сбалансированного двоичного дерева поиска (BBST), который принимает данные типа BT и возвращает логическое значение, сообщающее, является ли заданное дерево сбалансированным деревом поиска.

---

Таким образом, мы ослабляем понятие баланса так, чтобы сделать его одновременно приемлемым и достаточным. Мы используем термин «коэффициент сбалансированности» (balance factor) для узла, чтобы обозначить высоту его левого элемента-потомка минус высота его правого элемента-потомка (где высота – это глубина, вычисляемая в количестве ребер, до самого глубокого узла). Мы позволяем каждому узлу сбалансированного двоичного дерева поиска иметь коэффициент баланса  $-1, 0$  или  $1$  (но не больше): т. е. либо оба имеют одинаковую высоту, либо левый или правый узел может быть на единицу выше. Обратите внимание: это рекурсивное свойство, но оно применяется на всех уровнях, поэтому разбалансирование не может накапливаться, делая все дерево произвольно несбалансированным.

---

### Упражнение 19.9

Взяв за основу это определение сбалансированного двоичного дерева поиска (BBST), покажите, что число узлов экспоненциально зависит от высоты дерева. Таким образом, рекуррентная последовательность в одной ветви всегда завершается через логарифмическое (по числу узлов) количество шагов.

---

Очевидное, но полезное наблюдение: каждое сбалансированное двоичное дерево поиска (BBST) также является двоичным деревом поиска (BST) (это истинно по самому определению BBST). Почему это важно? Это означает, что функцию, работающую с двоичным деревом поиска, можно применить к сбалансированному двоичному дереву поиска без потери корректности.

Пока все просто. Остается только найти средство создания сбалансированного двоичного дерева поиска (BBST), потому что оно отвечает за обеспечение баланса. Легко заметить, что константа `empty-set` является значением сбалансированного двоичного дерева поиска (BBST). Остается только написать функцию `insert`.

Ситуация с `insert` такова. Предполагая, что мы начинаем со сбалансированного двоичного дерева поиска (BBST), можно за логарифмическое время определить, находится ли элемент уже в дереве, и если находится, то игнорировать его. При вставке элемента с учетом сбалансированных деревьев операция `insert` для

Для реализации мешка (`bag`) мы подсчитываем, сколько в нем экземпляров каждого элемента, но это не влияет на высоту дерева.

двоичного дерева поиска занимает только логарифмическое количество времени для выполнения вставки. Таким образом, если выполнение операции вставки не влияет на сбалансированность дерева, то мы выполнили задачу. Следовательно, необходимо рассматривать только те случаи, в которых выполнение операции вставки нарушает баланс.

Обратите внимание: поскольку операции сравнения `<` и `>` симметричны (то же самое относится и к операциям сравнения `<=` и `=`), мы можем рассматривать операции вставки в одну половину дерева, а симметричный аргумент обрабатывает вставки в другую половину. Тогда предположим, что у нас есть сбалансированное в текущий момент дерево, в которое мы вставляем элемент `e`. Допустим, `e` направляется в левое поддерево, и эта операция приведет к тому, что все дерево становится несбалансированным.

Существуют два способа продолжения работы. Один из них заключается в том, чтобы рассмотреть все места, где можно было бы вставить `e` так, чтобы возникла несбалансированность, и определить, что делать в каждом подобном случае.

### Упражнение 19.10

Перечислите все случаи, в которых операция вставки может стать проблематичной, и объясните, что нужно делать в каждом таком случае.

В действительности количество подобных случаев довольно-таки ошеломляющее (если вы так не считали, то просто не обратили внимания на некоторые из них...). Поэтому вместо универсального способа мы приступаем к устранению проблемы после ее возникновения: позволяем существующей функции `insert` двоичного дерева поиска вставить элемент, предполагаем, что получаем несбалансированное дерево, и показываем, как восстановить его баланс.

Поэтому в дальнейшем мы начнем со сбалансированного дерева, где выполнение `insert` приводит к тому, что дерево становится несбалансированным, и мы предположили, что вставка произошла в левом поддереве. В частности, предположим, что (под)дерево имеет коэффициент сбалансированности, равный 2 (положительный, потому что мы предполагаем, что левое дерево не сбалансировано после вставки). Процедура восстановления баланса в высшей степени зависит от следующего свойства.

Некоторые деревья, например генеалогические (см. раздел 14.1), представляют реальные данные. Нет никакого смысла «балансировать» генеалогическое дерево: оно должно точно моделировать характеристики и объекты представляемого реального мира. Напротив, деревья, представляющие здесь абстрактные множества, выбираются нами, а не определены какой-либо внешней реальностью, поэтому мы свободно можем изменять их структуру.

Мысль о том, что дерево можно сделать «самобалансирующимся», имеет весьма важное значение, и в настоящее время существует множество решений этой задачи. Авторами одного из самых старых методов решения являются Г. М. Адельсон-Вельский и Е. М. Ландис. По начальным буквам их фамилий метод называется AVL-деревом (AVL tree), и хотя само дерево совершенно очевидно, гениальность их решения заключается в определении повторной балансировки.

---

### Упражнение 19.11

Покажите, что если в текущий момент дерево является сбалансированным, т. е. коэффициент сбалансированности равен  $-1, 0$  или  $1$ , то операция вставки `insert` в наихудшем случае может сделать коэффициент сбалансированности равным  $\pm 2$ .

---

Приведенный ниже алгоритм применяется, когда `insert` возвращается из рекурсии, т. е. на пути от вставленного значения обратно к корню. Поскольку этот путь имеет логарифмическую длину относительно размера множества (из-за свойства сбалансированности) и (как мы увидим в дальнейшем) выполняет только постоянный объем работы на каждом шаге, можно с уверенностью считать, что вставка также требует только логарифмического времени, следовательно, решение этой сложной задачи завершено.

Чтобы визуально представить этот алгоритм, воспользуемся следующей схемой дерева:



Здесь  $p$  – значение элемента в корне (хотя мы также будем несколько исказять смысл терминов и использовать значение в корне для обозначения всего дерева в целом),  $q$  – значение в корне левого поддерева (поэтому  $q < p$ ),  $A$ ,  $B$  и  $C$  – имена соответствующих поддеревьев. Мы предположили, что  $e$  должно вставляться в левое поддерево, это значит, что  $e < p$ .

Допустим, что высота поддерева  $C$  равна  $k$ . Перед вставкой дерево с корнем  $q$  непременно должно иметь высоту  $k + 1$  (иначе одна операция вставки не сможет создать несбалансированность). В свою очередь, это означает, что  $A$  обязательно должно иметь высоту  $k$  или  $k - 1$ , то же самое относится и к  $B$ .

Предположим, что после вставки дерево с корнем  $q$  имеет высоту  $k + 2$ . Следовательно,  $A$  или  $B$  имеет высоту  $k + 1$ , а другое поддерево обязательно должно иметь меньшую высоту (либо  $k$ , либо  $k - 1$ ).

---

### Упражнение 19.12

Почему оба поддерева не могут иметь высоту  $k + 1$  после вставки?

---

Это дает нам два варианта для подробного рассмотрения.

#### **19.2.3.1. Вариант левое–левое**

Пусть несбалансированным является поддерево  $A$ , т. е. оно имеет высоту  $k + 1$ . Расширим схему этого дерева:



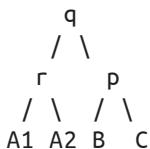
Нам известны приведенные ниже характеристики данных в этих поддеревьях. Мы будем использовать форму записи  $T < a$ , где  $T$  – дерево,  $a$  – одиночное значение, означающее, что каждое значение в  $T$  меньше  $a$ .

- $A_1 < r$ .
- $r < A_2 < q$ .
- $q < B < p$ .
- $p < C$ .

Также напомним размеры этих поддеревьев:

- высота  $A_1$  или  $A_2$  равна  $k$  (вариант несбалансированности);
- высота другого поддерева  $A_i$  равна  $k - 1$  (см. упражнение 19.12, приведенное выше);
- высота  $C$  равна  $k$  (начальное предположение;  $k$  выбирается произвольно);
- высота  $B$  обязательно должна быть равна  $k - 1$  или  $k$  (доказано выше).

Представьте, что это дерево – мобиль (мобайл – mobile – тип декоративной подвесной движущейся конструкции), который немного перекосился влево. Естественно, вы подумали бы о том, чтобы немного сдвинуть мобиль влево, чтобы вернуть ему равновесие. Именно это мы и сделаем:



Обратите внимание: при этом сохраняются все перечисленные выше свойства упорядочения. Кроме того, поддерево  $A$  было перемещено на один уровень ближе к корню, чем раньше, по отношению к  $B$  и  $C$ . Это восстанавливает баланс (в чем вы можете убедиться, вычислив значения высоты каждого из поддеревьев  $A_i$ ,  $B$  и  $C$ ). Таким образом, мы также восстановили баланс.

### 19.2.3.2. Вариант левое–правое

Но несбалансированным может оказаться и поддерево  $B$ . Развернем его:



И для этого варианта запишем все, что нам известно об упорядоченности данных:

- $A < q;$
- $q < B_1 < r;$
- $r < B_2 < p;$
- $p < C,$  –

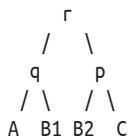
и размеры деревьев:

- предположим, что высота  $C$  равна  $k;$
- высота  $A$  обязательно должна быть равна  $k - 1$  или  $k;$
- высота  $B_1$  или  $B_2$ , но не обоих деревьев одновременно, обязательно должна быть равна  $k$  (см. упражнение 19.12, приведенное выше). Тогда высота другого поддерева обязательно должна быть равна  $k - 1.$

Следовательно, мы должны каким-то образом передвинуть  $B_1$  и  $B_2$  на один уровень ближе к корню дерева. Используя приведенные выше знания об упорядочении данных, мы можем сформировать такое дерево:



Разумеется, если  $B_1$  является проблематичным поддеревом, то такое дерево все еще не решает поставленную задачу. Но теперь мы возвращаемся к предыдущему варианту (левое–левое), и поворот позволяет получить следующий результат:



Теперь обратите внимание на то, что мы точно сохранили ограничения на порядок данных. Кроме того, самый нижний от корня узел  $A$  находится на высоте  $k + 1$  или  $k + 2$ ; на такой же высоте располагаются  $B_1$  и  $B_2$ , а  $C$  находится на высоте  $k + 2.$

### 19.2.3.3. Существуют ли какие-либо другие варианты?

Не слишком ли поверхностно мы рассуждали выше? В варианте левое–правое мы утверждали, что только одно из поддеревьев  $B_1$  или  $B_2$  может иметь высоту  $k$  (после вставки); другое поддерево должно было иметь высоту  $k - 1.$  В действительности мы можем сказать с полной уверенностью лишь то, что высота другого поддерева не должна превышать  $k - 2.$

---

### Упражнение 19.13

- Может ли высота другого поддерева действительно быть равной  $k - 2$ , а не  $k - 1$ ?
  - Если на предыдущий вопрос вы ответили положительно, то не требуется ли некоторая доработка приведенного выше решения? Разве в полученном итоговом дереве не осталась несбалансированность двух поддеревьев?
  - Не содержится ли в приведенном выше алгоритме явная ошибка?
-

# Глава 20

---

## Хэллоуин-анализ

В главе 18 мы представили принцип оценки сложности О-большое для измерения времени вычисления в наихудшем случае. Но, как мы видели в подразделе 19.1.3, эта методика не всегда точно определяет границу, когда существует весьма сильная зависимость сложности от строго определенной последовательности выполняемых операций. Теперь мы рассмотрим другой стиль анализа сложности, который в большей степени приспособлен для изучения последовательностей операций.

### 20.1. ПЕРВЫЙ ПРИМЕР

Например, рассмотрим множество, которое изначально является пустым, затем выполняется последовательность из  $k$  операций вставки, потом  $k$  операций проверки наличия элемента. Предположим, что мы используем представление без повторяющихся элементов. Время вставки пропорционально размеру множества (и списка), т. е. изначально оно равно 0, затем 1 и т. д. до тех пор, пока мы не дойдем до размера  $k$ . Таким образом, общая стоимость последовательности операций вставки равна  $k \cdot (k + 1)/2$ . Каждая операция проверки наличия элемента имеет стоимость  $k$  в наихудшем случае, потому что мы вставили не более  $k$  различных элементов в рассматриваемое здесь множество. Тогда общее время выполнения равно

$$k^2/2 + k/2 + k^2$$

для общего количества  $2k$  операций, из чего получаем в среднем

$$3/4k + 1/4$$

шагов на одну операцию в наихудшем случае.

### 20.2. НОВАЯ ФОРМА АНАЛИЗА

Так что же мы вычислили? Мы продолжаем вычислять стоимость в наихудшем случае, потому что взяли стоимость каждой операции в определенной последовательности в наихудшем случае. Затем вычисляется средняя стои-

мость одной операции. Таким образом, это среднее значение в наихудших случаях. Обратите внимание: поскольку это средняя стоимость операции, ничего нельзя сказать о том, насколько неудачной может быть любая отдельная операция (которая, как мы увидим в подразделе 20.3.5, вполне может оказаться чуть хуже), нам сообщается только усредненное значение.

В приведенном выше случае продемонстрированный новый метод анализа не преподнес особых сюрпризов. Мы обнаружили, что в среднем затрачено около  $k$  шагов на каждую операцию, а анализ методом О-большого должен сообщить, что выполняется  $2k$  операций стоимостью  $O([k \rightarrow k])$  с определенным количеством различных элементов в каждой, тогда в каждой операции мы выполняем приблизительно линейный объем работы в наихудшем случае количества элементов множества.

Но скоро мы увидим, что так будет не всегда: новый анализ может преподносить и приятные сюрпризы.

Прежде чем продолжить, необходимо дать имя этому методу анализа. Формально он называется амортизационным анализом (*amortized analysis*). Амортизация – это процесс распределения платежа на длительный, но фиксированный срок. Точно так же мы распределяем стоимость вычислений по фиксированной последовательности, а затем определяем величину каждого платежа.

Мы присвоили этому методу анализа такое экстравагантное название, потому что Хэллоуин (<https://ru.wikipedia.org/wiki/Хэллоуин>) – это (американский) праздник, посвященный призракам, вампирам и прочим символам смерти. Амортизация происходит от латинского корня *mort*, что означает смерть, потому что амортизационный анализ проводится «после смерти», т. е. в конце фиксированной последовательности операций.

## 20.3. ПРИМЕР: ОЧЕРЕДИ ИЗ СПИСКОВ

Мы уже рассматривали списки (глава 9) и множества (глава 19). Теперь рассмотрим еще одну основную структуру данных, используемую в информатике: очередь (queue). Очередь – это линейная упорядоченная структура данных, весьма похожая на список, но набор предоставляемых для нее операций отличается от операций списка. В списке обычные операции подчиняются принципу «последним вошел, первым вышел» (last-in, first-out, LIFO): операция `.first` возвращает элемент, который был самым последним связанным операцией `link`. В противоположность списку очередь подчиняется принципу «первым вошел, первым вышел» (first-in, first-out, FIFO). То есть список можно визуально представить как стек, а визуальным представлением очереди может стать лента конвейера.

### 20.3.1. Представления в виде списка

Очереди естественным образом можно определить с использованием списков: каждая операция вставки в очередь (`enqueue`) реализуется с помощью `link`, тогда как каждая операция исключения из очереди (`dequeue`) требует прохода по всему списку до его конца. В альтернативном варианте можно

было бы при вставке в очередь выполнить проход до конца, а операция исключения из очереди соответствовала бы `.rest`. В любом случае одна из этих операций потребует постоянного времени, тогда как другая будет линейной относительно длины списка, представляющего очередь.

Но в действительности в предыдущем абзаце содержится весьма важная идея, которая позволит нам улучшить реализацию очереди.

Обратите внимание: если очередь хранится в списке, где самый последний вставленный элемент занимает первую позицию, то операция вставки в очередь стоит дешево (постоянное время). Напротив, если мы храним очередь в обратном порядке, то операция исключения из очереди выполняется за постоянное время. Было бы прекрасно, если бы мы получили обе эти возможности, но поскольку мы вынуждены выбирать порядок хранения элементов, то придется ограничиться лишь одной из них. То есть если мы не выбираем... обе.

Первая половина нашего замысла осуществляется легко. Мы просто включаем элементы в список, при этом самый последний добавляемый элемент занимает первую позицию. Теперь наступает время для использования (первой) важной идеи: когда необходимо удалить элемент из очереди, мы реверсируем список, т. е. меняем его порядок на противоположный. После этого операция удаления также требует постоянного времени.

### 20.3.2. Первоначальный анализ

Разумеется, для полноценного анализа сложности этой структуры данных мы обязательно должны учитывать операцию изменения порядка на противоположный. В наихудшем случае мы можем доказать, что любая операция может быть реверсивной (потому что это может быть первое удаление из очереди), следовательно, в наихудшем случае временем выполнения любой операции является время, требуемое для реверсирования, которое линейно относительно длины списка (которая соответствует числу элементов в очереди).

Но такой ответ не должен быть признан удовлетворительным. Если выполняется  $k$  операций вставки, за которыми следует  $k$  операций удаления, то для каждой операции вставки требуется один шаг, каждая из последних  $k - 1$  операций удаления также требует одного шага и только при самой первой операции удаления необходимо реверсировать очередь, для чего требуется количество шагов, пропорциональное числу элементов в списке, которое в текущий момент равно  $k$ . Таким образом, общая стоимость операций в этой последовательности равна  $k \cdot 1 + k + (k - 1) \cdot 1 = 3k - 1$  для общего количества  $2k$  операций, что дает нам амортизационную сложность, фактически равную постоянному времени для каждой операции.

### 20.3.3. Более разнообразные последовательности операций

Однако в процессе рассмотрения этого метода мы ничего не сказали о том, что вы, вероятно, заметили: в нашей последовательности-кандидате все операции исключения из очереди следовали за всеми операциями вставки в оче-

редь. Что происходит при следующей операции вставки в очередь? Поскольку список теперь реверсирован, для этого потребуется линейное количество времени. Таким образом, мы лишь частично решили задачу.

Теперь можно представить вашему вниманию вторую важную идею: использование двух списков вместо одного. Один из списков будет хвостом (tail) очереди, в который будут добавляться новые элементы, второй – головой (head) очереди, где элементы будут удаляться:

```
data Queue<T>:  
    | queue(tail :: List<T>, head :: List<T>)  
end  
  
mt-q :: Queue = queue(empty, empty)
```

Представленный здесь хвост хранится так, что самый последний (добавленный) элемент занимает первую позицию, тогда для операции добавления в очередь требуется постоянное времени:

```
fun enqueue<T>(q :: Queue<T>, e :: T) -> Queue<T>:
    queue(link(e, q.tail), q.head)
end
```

Чтобы для операции удаления из очереди также требовалось постоянное время, ее голова обязательно должна храниться в обратном порядке. Но как обеспечить перемещение каждого элемента из хвоста в голову? Это просто: когда мы пытаемся удалить элемент и обнаруживаем, что в голове нет элементов, то реверсируем (весь) хвост в голову (в результате получается пустой хвост). Сначала определим тип данных для представления ответной реакции на операцию удаления:

```
data Response<T>:  
    | elt-and-q(e :: T, r :: Queue<T>)  
end
```

Теперь реализация функции `dequeue`:

```

fun dequeue<T>(q :: Queue<T>) -> Response<T>:
  cases (List) q.head:
    | empty =>
      new-head = q.tail.reverse()
      elt-and-q(new-head.first,
                 queue(empty, new-head.rest))
    | link(f, r) =>
      elt-and-q(f,
                 queue(q.tail, r))
  end
end

```

## 20.3.4. Второй этап анализа

Теперь мы можем делать выводы о последовательности операций, как и раньше, путем сложения стоимостей и вычисления средних значений. Тем не менее есть другой способ поразмышлять об этом. Дадим каждому элементу в очереди три «кредита». Каждый кредит можно использовать для одной операции с постоянным временем.

Один кредит расходуется при вставке в очередь. Пока элемент остается в хвостовом списке, у него в запасе остаются еще два кредита. Когда необходимо переместить этот элемент в головной список, он тратит еще один кредит на шаг связывания с обратным списком. Наконец, операция исключения из очереди также выполняет одну операцию.

Поскольку у элемента не заканчиваются кредиты, мы понимаем, что их непременно должно было хватить. Эти кредиты отражают стоимость операций с рассматриваемым здесь элементом. Из этого (весома неформального) анализа мы можем сделать вывод, что в худшем случае стоимость любой операции добавления и удаления в очереди останется равной только лишь постоянному количеству амортизированного времени.

## 20.3.5. Сравнение амортизации с отдельными операциями

Но обратите внимание на то, что полученная константа представляет собой среднее значение для последовательности операций. Она не устанавливает границу стоимости какой-либо одной операции. В действительности, как мы видели выше, когда операция удаления обнаруживает, что головной список пуст, она реверсирует хвост, для чего требуется линейное время, пропорциональное размеру хвоста, а вовсе не постоянное. Поэтому следует соблюдать осторожность, чтобы не предполагать, что каждый шаг в последовательности будет ограничен. Тем не менее амортизационный анализ иногда дает нам гораздо более тонкое понимание реального поведения структуры данных, чем анализ наихудшего случая сам по себе.

# 20.4. МАТЕРИАЛ ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЧТЕНИЯ

В этой главе мы лишь кратко рассмотрели тему амортизационного анализа. Весьма качественное учебное руководство Ребекки Фибринк (Rebecca Fiebrink) ([https://web.archive.org/web/20131020020356/http://www.cs.princeton.edu/~fiebrink/423/amortizedanalysisexplained\\_fiebrink.pdf](https://web.archive.org/web/20131020020356/http://www.cs.princeton.edu/~fiebrink/423/amortizedanalysisexplained_fiebrink.pdf)) содержит гораздо больше информации. Внушительная и заслуживающая доверия книга по алгоритмам «Introduction to Algorithms» Кормена (Cormen), Лейзерсона (Leiserson), Ривеста (Rivest) и Штейна (Stein) подробно описывает амортизационный анализ.

# Глава 21

---

## Совместное использование значений и равенство

### 21.1. Новый взгляд на равенство

Рассмотрим следующее определение данных и примеры значений:

```
data BinTree:  
| leaf  
| node(v, l :: BinTree, r :: BinTree)  
end  
  
a-tree =  
node(5,  
    node(4, leaf, leaf),  
    node(4, leaf, leaf))  
  
b-tree =  
block:  
    four-node = node(4, leaf, leaf)  
    node(5,  
        four-node,  
        four-node)  
end
```

Здесь может показаться, что способ записи `b-tree` по существу равнозначен способу записи `a-tree`, но мы создали полезную связь, чтобы избежать дублирования кода.

Поскольку `a-tree` и `b-tree` связаны с деревьями, в корне которых находится значение 5, а левый и правый потомки содержат значение 4, мы, разумеется, вполне обоснованно можем считать, что эти деревья равнозначны (эквивалентны). И действительно:

```
<equal-tests> ::=
```

```
check:
```

```
  a-tree  is b-tree
  a-tree.l is a-tree.l
  a-tree.l is a-tree.r
  b-tree.l is b-tree.r
```

```
end
```

Но в некотором другом смысле эти деревья не эквивалентны. Более конкретно: `a-tree` создает отдельный узел для каждого элемента-потомка, в то время как `b-tree` использует один и тот же узел для обоих элементов-потомков. Конечно, это различие должно каким-то образом проявляться, но нам пока еще неизвестен способ написания программы, которая различала бы эти деревья.

По умолчанию оператор `is` использует ту же проверку на равенство, что оператор Pyret `==`. Но в Pyret существуют и другие способы проверки на равенство. В частности, мы можем различить эти данные, используя Pyret-функцию `identical`, которая реализует эквивалентность ссылок (reference equality; равенство по ссылкам). При этом проверяется не только факт структурного равенства двух значений, но также являются ли они результатом одного и того же действия создания значения. С учетом вышеизложенного можно написать дополнительные тесты:

```
check:
```

```
  identical(a-tree, b-tree)    is false
  identical(a-tree.l, a-tree.l) is true
  identical(a-tree.l, a-tree.r) is false
  identical(b-tree.l, b-tree.r) is true
```

```
end
```

Вернемся на некоторое время назад и рассмотрим поведение, которое дает нам этот результат. Можно визуально представить различные значения, поместив каждое отличающееся от прочих значение в отдельную локацию одновременно с работающей программой. Мы можем изобразить первый шаг как создание узла `node` со значением 4:

В куче:

```
a-tree =
  node(5,
    @1001,
    node(4, leaf, leaf))

b-tree =
  block:
    four-node = node(4, leaf, leaf)
    node(5,
      four-node,
      four-node)
end
```

```
@1001: node(4, leaf, leaf)
```

На следующем шаге создается другой узел со значением 4, отличающийся от первого:

```
a-tree =  
node(5, @1001, @1002)  
  
b-tree =  
block:  
  four-node = node(4, leaf, leaf)  
  node(5,  
    four-node,  
    four-node)  
end
```

В куче:

```
@1001: node(4, leaf, leaf)  
@1002: node(4, leaf, leaf)
```

Затем создается узел для a-tree:

```
a-tree = @1003  
  
b-tree =  
block:  
  four-node = node(4, leaf, leaf)  
  node(5,  
    four-node,  
    four-node)  
end
```

В куче:

```
@1001: node(4, leaf, leaf)  
@1002: node(4, leaf, leaf)  
@1003: node(5, @1001, @1002)
```

При вычислении блока `block` для `b-tree` сначала создается один узел для связывания `four-node`:

```
a-tree = @1003  
  
b-tree =  
block:  
  four-node = @1004  
  node(5,  
    four-node,  
    four-node)  
end
```

В куче:

```
@1001: node(4, leaf, leaf)  
@1002: node(4, leaf, leaf)  
@1003: node(5, @1001, @1002)  
@1004: node(4, leaf, leaf)
```

Эти значения локаций (адресов памяти) можно подставлять точно так же, как и любые другие значения, поэтому они заменили `four-node` для продолжения вычисления блока.

Здесь мы пока пропустили замену `a-tree`, ее мы рассмотрим позже.

```
a-tree = @1003
b-tree =
  block:
    node(5, @1004, @1004)
  end
```

Наконец, создается узел для b-tree:

```
a-tree = @1003
b-tree = @1005
```

В куче:

```
@1001: node(4, leaf, leaf)
@1002: node(4, leaf, leaf)
@1003: node(5, @1001, @1002)
@1004: node(4, leaf, leaf)
```

Это визуальное представление может помочь объяснить смысл тестов, которые мы написали с использованием функции `identical`. Рассмотрим тест с заменяющими подстановками соответствующих ссылок на адреса локаций для a-tree и b-tree:

```
check:
  identical(@1003, @1005)
    is false
  identical(@1003.l, @1003.l)
    is true
  identical(@1003.l, @1003.r)
    is false
  identical(@1005.l, @1005.r)
    is true
end
```

```
check:
  identical(@1003, @1005)
    is false
  identical(@1001, @1001)
    is true
  identical(@1001, @1004)
    is false
  identical(@1004, @1004)
    is true
end
```

В куче:

```
@1001: node(4, leaf, leaf)
@1002: node(4, leaf, leaf)
@1003: node(5, @1001, @1002)
@1004: node(4, leaf, leaf)
@1005: node(5, @1004, @1004)
```

В куче:

```
@1001: node(4, leaf, leaf)
@1002: node(4, leaf, leaf)
@1003: node(5, @1001, @1002)
@1004: node(4, leaf, leaf)
@1005: node(5, @1004, @1004)
```

В действительности существует другой способ записи этих тестов в Pyret: оператор `is` также можно параметризовать с помощью предиката равенства, отличающегося от принятого по умолчанию `==`.

Можно использовать `is-not` для проверки на ожидаемое неравенство.

Показанный выше блок можно записать в следующей равнозначной форме:

**check:**

```
a-tree  is-not%(identical) b-tree  
a-tree.l is%(identical)      a-tree.l  
a-tree.l is-not%(identical)  a-tree.r  
b-tree.l is%(identical)      b-tree.r
```

**end**

В дальнейшем мы будем использовать этот стиль проверки на равенство.

Обратите внимание: это те же самые значения, которые сравнивались ранее в *<equal-tests>*, но теперь результаты другие: некоторые значения, которые ранее были истинными, теперь стали ложными. В частности:

**check:**

```
a-tree  is          b-tree  
a-tree  is-not%(identical) b-tree  
a-tree.l is          a-tree.r  
a-tree.l is-not%(identical) a-tree.r
```

**end**

Позже мы обязательно вернемся к объяснению того, что в действительностии означает `identical` (см. раздел 24.4). (В Pyret имеется полный набор операций проверки на равенство, соответствующих разнообразным ситуациям.)

---

### Упражнение 21.1

Существует гораздо больше тестов на равенство, которые мы можем и должны выполнять даже с простыми данными, показанными выше, чтобы убедиться в том, что мы действительно понимаем смысл равенства и, соответственно, способ хранения данных в памяти. Какие еще тесты мы должны выполнить? Спрогнозируйте, какие результаты должны быть получены, прежде чем выполнить их.

---

## 21.2. Стоимость вычисления ссылок

С точки зрения сложности важно понимать, как работают ссылки на значения, показанные в предыдущем разделе. Как мы уже отмечали выше, `four-node` вычисляется только один раз, и при каждом использовании это имя ссылается на одно и то же значение: напротив, если бы вычисление выполнялось при каждом обращении к `four-node`, то не существовало бы реального различия между `a-tree` и `b-tree`, и приведенные выше тесты ничем бы не отличались друг от друга.

Это особенно важно для полного понимания стоимости вычисления функции. Для наглядной демонстрации этого создадим два простых примера. Начнем со специально придуманной для данного случая структуры данных:

```
L = range(0, 100)
```

Предположим, что теперь мы определяем:

```
L1 = link(1, L)
L2 = link(-1, L)
```

Создание списка очевидно требует времени, как минимум, пропорционального его длине, следовательно, мы ожидаем, что время вычисления `L` должно быть значительно большим, чем время выполнения единственной операции `link`. Таким образом, вопрос заключается в том, сколько времени потребуется на вычисление `L1` и `L2` после того, как был вычислен список `L`: постоянное время или время, пропорциональное длине `L`?

Ответ для Racket и для большинства современных языков программирования (включая Java, C#, OCaml, Racket и т. д.): для этих дополнительных вычислений требуется постоянное время. То есть значение, связываемое с `L`, вычисляется один раз и связывается с `L`, а последующее выражение ссылается (`refer`) на это значение (отсюда термин «ссылка» – «reference»), а не создает его заново, что показывает равенство ссылок:

```
check:
  L1.rest is%(identical) L
  L2.rest is%(identical) L
  L1.rest is%(identical) L2.rest
end
```

Аналогичным образом можно определить функцию с передачей в нее `L` и проверить, является ли полученный в результате аргумент идентичным (`identical`) исходному:

```
fun check-for-no-copy(another-l):
  identical(another-l, L)
end

check:
  check-for-no-copy(L) is true
end
```

или, что равнозначно:

```
check:
  L satisfies check-for-no-copy
end
```

Следовательно, ни встроенные (такие как `.rest`), ни определяемые пользователем (такие как `check-for-no-copy`) операции не выполняют копирование своих аргументов. Здесь важно отметить, что вместо того, чтобы просто доверять какому-либо авторитетному источнику, мы

Строго говоря, мы, разумеется, не можем сделать окончательный вывод о том, что копирование не было выполнено. Racket мог создать копию, удалить ее и продолжить передавать ссылку на исходное значение. Учитывая, насколько противостоящим был бы такой подход, мы можем предположить – и поверить на слово создателям языка, – что в действительности этого не происходит. Создавая весьма большие списки, мы также можем использовать информацию об измерении затраченного времени, чтобы наблюдать, как время создания списка растет пропорционально его длине, тогда как время его передачи в качестве параметра остается постоянным.

использовали операции самого языка, чтобы понять, как ведет себя данный конкретный язык программирования.

## 21.3. ФОРМЫ ЗАПИСИ РАВЕНСТВА

До настоящего момента мы использовали `==` для сравнения на равенство. Теперь мы узнали, что это всего лишь один из нескольких операторов сравнения на равенство, и существует еще один с именем `identical`. Но эти два оператора обладают несколько различными синтаксическими свойствами. Оператор `identical` – это имя функции, следовательно, на него можно ссылаться, как на любую другую функцию (например, при необходимости использования в `is-not`). Напротив, `==` – это бинарный оператор, который можно использовать только в середине выражений.

Вполне естественно, что это должно заставить нас задуматься о двух других возможностях: о версии бинарного выражения `identical` и о равнозначном имени функции для `==`. И они действительно существуют. Операция, выполняемая с помощью `==`, называется `equal-always`. Таким образом, мы можем записать первый блок тестов аналогичным, но более явным способом, как показано ниже:

```
check:  
  a-tree  is%(equal-always) b-tree  
  a-tree.l is%(equal-always) a-tree.l  
  a-tree.l is%(equal-always) a-tree.r  
  b-tree.l is%(equal-always) b-tree.r  
end
```

А для `identical` форма записи бинарного оператора выглядит так: `<=>`. Таким образом, можно равнозначно записать функцию `check-for-no-copy` в следующем виде:

```
fun check-for-no-copy(another-l):  
  another-l <=> L  
end
```

## 21.4. В ИНТЕРНЕТЕ НИКТО НЕ ЗНАЕТ, ЧТО ВЫ НАГ

Несмотря на присвоенное нами имя, `b-tree` в действительности не является деревом. По определению в дереве не существует совместно используемых узлов, тогда как в `b-tree` узел с именем `four-node` совместно используют две части этого «дерева». Тем не менее сохраняется возможность завершения обхода `b-tree`, потому что в нем нет циклических ссылок: если вы начинаете обход с любого узла и посещаете его «дочерние» узлы, то не сможете в конце пути вернуться в тот же узел. Для значения такой формы существует особое имя: направленный ациклический граф – НАГ (directed acyclic graph – DAG).

Многие важные структуры данных в действительности имеют внутреннюю форму в виде НАГ. Например, рассмотрим веб-сайты. Общепринятым является представление любого сайта как дерева страниц: самый верхний уровень ссылается на несколько разделов, каждый из которых ссылается на подразделы и т. д. Но иногда для некоторого элемента необходимо упоминание в нескольких разделах. Например, любая кафедра учебного заведения может организовать страницы по сотрудникам, учебным курсам и направлениям научных исследований. В первом типе страниц перечисляются сотрудники кафедры, во втором – список учебных курсов, в третьем – список исследовательских групп. В свою очередь, в учебных курсах могут содержаться ссылки на преподавателей, который их ведут, а в исследовательских группах указаны те же самые сотрудники кафедры. Поскольку нам необходима только одна страница для каждого человека (как для ее сопровождения, так и для целей индексации поиска), все эти персональные ссылки опять же приводят на ту же страницу для конкретных сотрудников.

Создадим простую форму для такой организации. Сначала определим тип данных для представления содержимого сайта:

```
data Content:
| page(s :: String)
| section(title :: String, sub :: List<Content>)
end
```

Теперь определим несколько сотрудников:

```
people-pages :: Content =
section("People",
[list: page("Church"),
page("Dijkstra"),
page("Haberman") ])
```

и способ извлечения страницы конкретного сотрудника:

```
fun get-person(n): get(people-pages.sub, n) end
```

Теперь можно определить разделы «Теория» и «Системы»:

```
theory-pages :: Content =
section("Theory",
[list: get-person(0), get-person(1)])
systems-pages :: Content =
section("Systems",
[list: get-person(1), get-person(2)])
```

которые включаются в сайт как единое целое:

```
site :: Content =
section("Computing Sciences",
[list: theory-pages, systems-pages])
```

Теперь мы можем подтвердить, что каждому из этих выдающихся деятелей необходимо поддерживать только одну веб-страницу в актуальном состоянии, например:

```
check:  
theory  = get(site.sub, 0)  
systems = get(site.sub, 1)  
theory-dijkstra = get(theory.sub, 1)  
systems-dijkstra = get(systems.sub, 0)  
theory-dijkstra is           systems-dijkstra  
theory-dijkstra is%{identical} systems-dijkstra  
end
```

## 21.5. НАГ был всегда

Возможно, мы не осознаем, что в действительности мы создавали НАГ раньше, чем нам кажется сейчас. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим `a-tree`, которое вполне очевидно выглядит как дерево. Но посмотрите внимательнее не на узлы `node`, а на лист(ы) `leaf`. Сколько реальных листьев `leaf` мы создаем?

Одна из подсказок заключается в том, что мы не вызываем функцию явно при создании `leaf`: определение данных не перечисляет никаких полей, а при создании значения `BinTree` мы просто пишем `leaf`, а не `leaf()`, например. Тем не менее было бы полезно узнать, что происходит за кулисами. Для проверки мы можем просто задать Pyret следующий вопрос:

```
check:  
leaf is%{identical} leaf  
end
```

Приведенная выше проверка проходит успешно. То есть когда мы пишем вариант без каких-либо полей, Pyret автоматически создает синглтон (`singleton`): формирует только один экземпляр и использует его везде. Это приводит к более эффективному представлению памяти, поскольку нет никаких причин поддерживать множество экземпляров `leaf`, каждый из которых занимает собственный фрагмент памяти. Однако неочевидным следствием этого является то, что мы все время создавали НАГ.

Важно, что здесь мы не написали `leaf <=> leaf`, потому что результат такого выражения просто игнорируется. Мы должны писать `is`, чтобы зарегистрировать это выражение как тест, результат которого проверяется и сообщается.

Если действительно необходимо, чтобы все листы `leaf` были различными, то сделать это просто – можно написать:

```
data BinTreeDistinct:  
| leaf()  
| node(v, l :: BinTreeDistinct, r :: BinTreeDistinct)  
end
```

После этого мы были бы должны использовать функцию `leaf` везде:

```
c-tree :: BinTreeDistinct =  
node(5,  
    node(4, leaf(), leaf()),  
    node(4, leaf(), leaf()))
```

И как и следовало ожидать:

```
check:
  leaf() is-not%{identical} leaf()
end
```

## 21.6. От АЦИКЛИЧНОСТИ К ЦИКЛАМ

Ниже приведен еще один пример, источником которого является веб-среда. Предположим, что мы создаем таблицу для вывода на веб-странице. Желательно, чтобы строки таблицы поочередно выделялись белым и серым цветами. Если бы в таблице было только две строки, можно было бы отобразить функцию генерации строк на список из этих двух цветов. Но поскольку мы не знаем, сколько строк будет в таблице, то список должен быть настолько длинным, насколько это необходимо. В сущности, мы хотели бы написать:

```
web-colors = link("white", link("grey", web-colors))
```

и получить неопределенно длинный список, чтобы в итоге можно было бы написать:

```
map2(color-table-row, table-row-content, web-colors)
```

Это выражение применяет функцию `color-table-row` к двум аргументам: к текущей строке из таблицы `table-row-content` и текущий цвет из списка `web-colors`, обрабатывая параллельно эти два списка.

К сожалению, в этом пробном определении многое сделано неправильно.

### **Выполните прямо сейчас**

Вы видите, что именно неправильно в этом определении?

Ниже перечислены некоторые проблемы в порядке их возникновения:

- это выражение даже не поддается парсингу (синтаксическому анализу). Идентификатор `web-colors` не является связанным в части справа от `=`;
- ранее мы рассматривали решение подобной задачи: использование `rec` (см. раздел 15.3). Что произойдет, если вместо приведенного выше выражения написать показанное ниже?

```
rec web-colors = link("white", link("grey", web-colors))
```

---

### **Упражнение 21.2**

Почему `rec` работает в определении `ones`, но не в приведенном выше выражении?

---

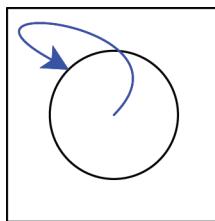
- предположим, что мы устранили описанную выше проблему, одну из двух возникших. Это зависит от того, что представляет собой начальное значение `web-colors`. Поскольку это фиктивное значение, мы получаем не произвольно длинный список цветов, а скорее список из двух цветов, за которыми следует это фиктивное значение. В действительности эта программа даже не будет выполнять проверку типов. Но предположим, что список `web-colors` написан по-другому – как определение функции, чтобы отложить ее создание:

```
fun web-colors(): link("white", link("grey", web-colors())) end
```

Само по себе это выражение просто определяет функцию. Но если мы используем ее – `web-colors()`, – то она входит в бесконечный цикл создания связей `link`:

- даже если бы все это работало, то функция `map2` либо (а) не завершила бы работу, потому что ее второй аргумент имеет неопределенную длину, либо (б) сообщила бы об ошибке, потому что два аргумента имеют различную длину.

Все перечисленные выше частные проблемы являются признаками более крупной общей проблемы. Здесь мы пытаемся создать не просто совместно используемые данные (например, НАГ), а нечто, обладающее гораздо более обширным набором свойств: циклический элемент данных, т. е. элемент, ссылающийся на самого себя, как показано на рис. 21.1.



**Рис. 21.1** ♦ Элемент данных, ссылающийся на себя

Когда вы добираетесь до циклов, даже определение элемента данных становится трудным, потому что его определение зависит от самого себя, поэтому оно (по всей видимости) уже должно быть выполнено в самом процессе определения. Мы вернемся к циклическим данным позже (см. раздел 26.4).

# Глава 22

---

## Графы

В разделе 21.6 мы представили особый вид совместного использования: когда данные становятся циклическими, т. е. существуют такие значения, что переход от них к другим достижимым значениям в итоге возвращает вас к значению, с которого вы начали. Данные, обладающие этой характеристикой, называются *графами*.

Многие весьма важные данные представлены в виде графов. Например, люди и связи в социальных сетях образуют граф: люди – это узлы (*nodes*), или *вершины* (*vertices*), а соединения (например, дружеские отношения) – это *связи* (*links*), или *ребра* (*edges*). Они образуют граф, потому что для многих людей, если вы будете следовать по связям к их друзьям, затем к друзьям их друзей, то в итоге вернетесь к человеку, с которого начали. (Проще говоря, это происходит, когда два человека являются друзьями.) Веб-среда похожа на граф: узлы – это страницы, а ребра – это ссылки между страницами. Интернет – это граф: узлы – это компьютеры, а ребра – это связи между компьютерами. Транспортная сеть – это граф: например, города – это узлы, а ребра – это транспортные связи между ними. И так далее. Поэтому важно понимать сущность графов для представления и обработки большого объема ценных данных реального мира.

Графы важны и интересны не только по практическим, но и по теоретическим причинам. Свойство, определяющее, что обход может закончиться там, где он начался, означает, что обычные методы обработки больше не будут работать: если слепо обрабатывать каждый посещаемый узел, то все может закончиться бесконечным циклом. Поэтому нам нужны улучшенные структурные наборы правил для программ. Кроме того, графы имеют весьма насыщенную структуру, что позволяет провести с ними несколько интересных вычислений. Ниже мы изучим оба этих аспекта графов.

С технической точки зрения цикл не обязательно должен быть графом, дерево или направленный ациклический граф (НАГ) также рассматриваются как (вырожденный) граф. Но в этом разделе нас интересуют графы, которые потенциально могут являться циклами.

### 22.1. Объяснение сущности графов

Рассмотрим снова двоичные деревья, которые мы видели ранее (см. раздел 21.1). Теперь попробуем деформировать определение «дерева», созда-

вая деревья с циклами, т. е. деревья с узлами, которые указывают на самих себя (в смысле `identical`). Как мы убедились ранее (в разделе 21.6), создать такую структуру не так-то просто, но то, что мы наблюдали еще раньше (раздел 15.3), может помочь нам в этом, позволяя приостановить вычисление циклической связи. То есть необходимо не только использовать `ges`, но мы также обязательно должны использовать некоторую функцию для задержки вычисления. Кроме того, необходимо обновить аннотации для полей. Поскольку они больше не будут «деревьями», мы используем имя, которое дает некоторую пищу для размышлений, но не является абсолютно неверным:

```
data BinT:
  | leaf
  | node(v, l :: ( -> BinT), r :: ( -> BinT))
end
```

Теперь попробуем создать несколько циклических значений. Ниже приведено несколько примеров:

```
rec tr = node("гес", lam(): tr end, lam(): tr end)
t0 = node(0, lam(): leaf end, lam(): leaf end)
t1 = node(1, lam(): t0 end, lam(): t0 end)
t2 = node(2, lam(): t1 end, lam(): t1 end)
```

Далее попробуем вычислить размер `BinT`. Ниже показана очевидная программа:

```
fun sizeinf(t :: BinT) -> Number:
  cases (BinT) t:
    | leaf => 0
    | node(v, l, r) =>
      ls = sizeinf(l())
      rs = sizeinf(r())
      1 + ls + rs
  end
end
```

(Сейчас мы увидим, почему мы называем эту функцию `sizeinf`.)

### **Выполните прямо сейчас**

Что происходит, когда мы вызываем `sizeinf(tr)`?

Происходит вход в бесконечный цикл, поэтому в имени имеется часть `inf`. Есть два совершенно разных смысловых значения слова «размер». Одно из них соответствует вопросу: «Сколько раз мы можем пройти через некоторое ребро?» В другом смысле это ответ на вопрос: «Сколько различных узлов было создано как часть структуры данных?» В деревьях по определению это одно и то же. В НАГ первый размер больше второго, но только лишь на конечную величину. В обобщенном графе первый размер может бесконечно превосходить второй. В случае такого элемента данных, как `tr`,

мы фактически можем проходить ребра бесконечное количество раз. Но общее количество созданных узлов равно всего лишь одному. Запишем это как тестовые варианты с точки зрения функции размера `size`, которую необходимо определить:

```
check:
  size(tr) is 1
  size(t0) is 1
  size(t1) is 2
  size(t2) is 3
end
```

Очевидно, что нужно как-то запоминать, какие узлы мы посетили ранее: т. е. необходимо вычисление с «памятью». Теоретически это легко: мы просто создаем дополнительную структуру данных, которая проверяет, был ли уже учтен пройденный узел. Пока мы корректно обновляем эту структуру данных, все должно быть в порядке. Ниже приведена реализация.

```
fun sizect(t :: BinT) -> Number:
  fun szacc(shadow t :: BinT, seen :: List<BinT>) -> Number:
    if has-id(seen, t):
      0
    else:
      cases (BinT) t:
        | leaf => 0
        | node(v, l, r) =>
          ns = link(t, seen)
          ls = szacc(l(), ns)
          rs = szacc(r(), ns)
          1 + ls + rs
    end
  end
  szacc(t, empty)
end
```

Дополнительный параметр `seen` называется аккумулятором, потому что он «накапливает» («аккумулирует») список учтенных узлов. Необходимая вспомогательная функция проверяет, был ли уже учтен данный узел:

```
fun has-id<A>(seen :: List<A>, t :: A):
  cases (List) seen:
    | empty => false
    | link(f, r) =>
      if f <= t: true
      else: has-id(r, t)
    end
  end
end
```

Обратите внимание, что такой структурой также может быть множество; использование списка не обязательно.

Как это работает? Ведь `sezect(tг)`, разумеется, равно 1, но `sizect(t1)` равно 3, а `sizect(t2)` равно 7.

### **Выполните прямо сейчас**

Объясните, почему эти ответы получились именно такими.

Главная проблема заключается в том, что мы не совсем правильно организовали операцию запоминания. Взгляните внимательно на следующую пару строк:

```
ls = szacc(l(), ns)
rs = szacc(r(), ns)
```

Узлы, наблюдаемые при обходе левой ветви, фактически забываются, потому что только те узлы, которые мы запоминаем при обходе правой ветви, находятся в `ns`: а именно текущий узел и узлы, которые посещались «на более высоком уровне». В результате любые узлы, в которых происходит «пересечение путей обхода», учитываются дважды.

Таким образом, чтобы исправить эту ситуацию, необходимо запоминать каждый посещаемый узел. Затем, если больше нет узлов для обработки, то вместо возврата только лишь одного размера мы должны вернуть все узлы, посещенные до сих пор. Такой подход гарантирует, что узлы, к которым существует несколько путей, посещаются только по одному пути, но не более одного раза. Логика этого метода заключается в том, чтобы возвращать два значения из каждого обхода – размер и все посещенные узлы, – а не только одно.

```
fun size(t :: BinT) -> Number:
  fun szacc(shadow t :: BinT, seen :: List<BinT>)
    -> {n :: Number, s :: List<BinT>}:
    if has-id(seen, t):
      {n: 0, s: seen}
    else:
      cases (BinT) t:
        | leaf => {n: 0, s: seen}
        | node(v, l, r) =>
          ns = link(t, seen)
          ls = szacc(l(), ns)
          rs = szacc(r(), ls.s)
          {n: 1 + ls.n + rs.n, s: rs.s}
    end
  end
end
szacc(t, empty).n
```

Разумеется, эта функция успешно проходит все приведенные выше тесты.

## 22.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Представление графов, которое мы рассматривали выше, безусловно, является отправным пунктом для создания циклических данных, но это не самый лучший вариант. Необходимость везде писать `lam` и постоянно помнить о применении функции `k()` для получения реальных значений является потенциальным источником ошибок, а кроме того, это весьма неудобно. Поэтому здесь мы рассмотрим другие представления графов, которые являются более привычными, а также гораздо более простыми для обработки.

Существует несколько способов представления графов, и выбор конкретного представления зависит от нескольких факторов:

- 1) структура графа и в особенности его плотность (`density`). Мы рассмотрим это свойство немного позже в разделе 22.3;
- 2) представление, в котором данные передаются из внешних источников. Иногда может оказаться, что проще адаптироваться к внешнему представлению данных, в частности в некоторых случаях, возможно, даже нет вариантов выбора;
- 3) функциональные возможности, предоставляемые конкретным языком программирования, которые могут сделать некоторые представления гораздо более трудными для использования по сравнению с другими.

Выше в главе 19 мы воспользовались идеей о существовании нескольких различных представлений для одного типа данных. В дальнейшем мы убедимся, что эта идея вполне применима и к графикам. Таким образом, наилучшим решением стала бы возможность получения общего интерфейса для обработки графов, чтобы все последующие программы можно было бы писать в терминах этого интерфейса без чрезмерной зависимости от представления более низкого уровня.

С учетом вариантов представлений существуют три необходимых способа:

- 1) способ создания графов;
- 2) способ идентификации (т. е. различия) узлов или вершин в графике;
- 3) при наличии способа идентификации узлов требуется способ определения соседей конкретного узла в графике.

Подойдет любой интерфейс, удовлетворяющий перечисленным выше свойствам. Для простоты сосредоточимся на втором и третьем способах и не будем абстрагироваться от процесса создания графа.

Нашим рабочим примером будет график, узлами которого являются города США, а ребрами – прямые авиалинии между ними, как показано на рис. 22.1.

### 22.2.1. Связи по имени

Здесь приводится первое представление. Будем предполагать, что каждый узел имеет единственное в своем роде имя (подобное имени, используемому для поиска информации в репозитории данных, иногда называемом ключом (`key`)). Тогда узел – это ключ, некоторая информация об этом узле и список ключей, указывающих на другие узлы.

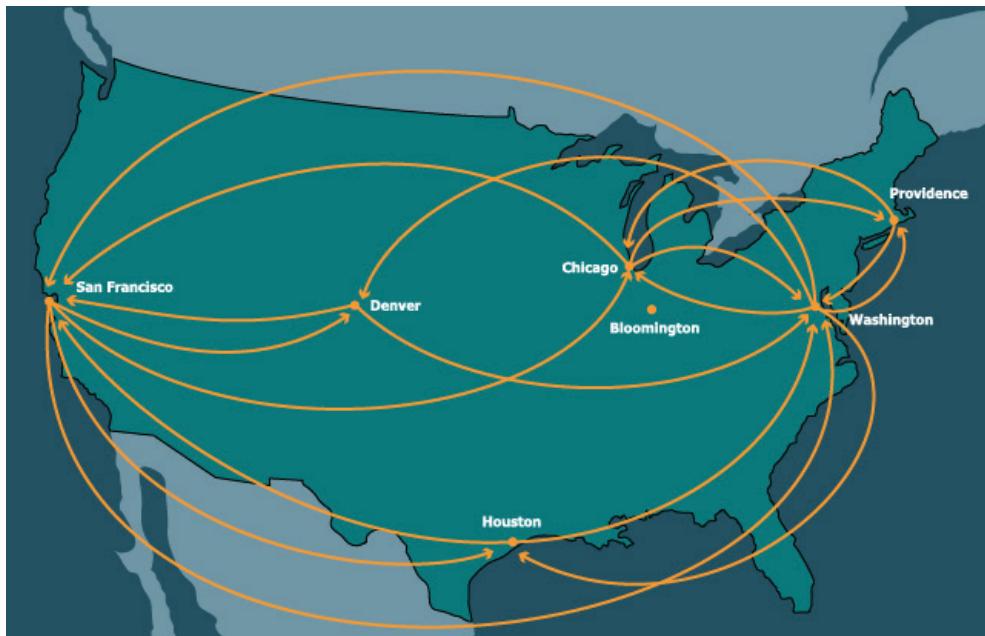


Рис. 22.1 ♦ Граф, представляющий города США и прямые авиалинии между ними

```

type Key = String

data KeyedNode:
    | keyed-node(key :: Key, content, adj :: List<String>)
end

type KNGraph = List<KeyedNode>

type Node = KeyedNode
type Graph = KNGraph
    
```

(Здесь мы предполагаем, что все ключи являются строками.)

Ниже показан конкретный экземпляр такого графа:

```

kn-cities :: Graph = block:
    knWAS = keyed-node("was", "Washington", [list: "chi", "den", "saf", "hou", "pwd"])
    knORD = keyed-node("chi", "Chicago", [list: "was", "saf", "pwd"])
    knBLM = keyed-node("bmg", "Bloomington", [list: ])
    knHOU = keyed-node("hou", "Houston", [list: "was", "saf"])
    knDEN = keyed-node("den", "Denver", [list: "was", "saf"])
    knSFO = keyed-node("saf", "San Francisco", [list: "was", "den", "chi", "hou"])
    knPVD = keyed-node("pwd", "Providence", [list: "was", "chi"])
    [list: knWAS, knORD, knBLM, knHOU, knDEN, knSFO, knPVD]
end
    
```

Если задан ключ, то ниже показано, как выполняется поиск соседей соответствующего узла:

Предфикс kn означает «keyed node» (узел с ключом).

---

```
fun find-kn(key :: Key, graph :: Graph) -> Node:
    matches = for filter(n from graph):
        n.key == key
    end
    matches.first    # Лучше, если было бы найдено ровно одно совпадение.
end
```

---

### Упражнение 22.1

Выполните преобразование комментария в функции `find-kn` в инвариант относительно элемента данных. Запишите этот инвариант как улучшение кода и добавьте его в объявление графов.

---

При такой поддержке можно с легкостью находить соседей:

```
fun kn-neighbors(city :: Key, graph :: Graph) -> List<Key>:
    city-node = find-kn(city, graph)
    city-node.adj
end
```

При переходе к тестированию некоторые тесты написать легко. Но для других может потребоваться описание узлов в целом, которое, возможно, окажется громоздким, поэтому для проверки этой реализации достаточно исследовать только часть результатов:

```
check:
    ns = kn-neighbors("hou", kn-cities)

    ns is [list: "was", "saf"]

    map(_.content, map(find-kn(_, kn-cities), ns)) is
        [list: "Washington", "San Francisco"]
end
```

## 22.2.2. Связи по индексам

В некоторых языках общепринятой практикой является использование чисел в качестве имен. Это особенно удобно, если числами можно воспользоваться для получения доступа за постоянное время (в обмен на ограничение количества элементов, к которым можно получить доступ). Здесь для демонстрации этой концепции мы используем список, который не предоставляет постоянное время доступа к произвольным элементам. Большинство рассматриваемых здесь действий будет выглядеть весьма похоже на то, что мы делали ранее, и после завершения мы прокомментируем все основные различия.

Сначала приводится определение типа данных:

```
data IndexedNode:
    | idxed-node(content, adj :: List<Number>)
end
```

Префикс `ix` означает «`indexed`» (индексированный).

```
type IXGraph = List<IndexedNode>
type Node = IndexedNode
type Graph = IXGraph
```

Сам граф выглядит следующим образом:

```
ix-cities :: Graph = block:
    inWAS = idxed-node("Washington", [list: 1, 4, 5, 3, 6])
    inORD = idxed-node("Chicago", [list: 0, 5, 6])
    inBLM = idxed-node("Bloomington", [list: ])
    inHOU = idxed-node("Houston", [list: 0, 5])
    inDEN = idxed-node("Denver", [list: 0, 5])
    inSFO = idxed-node("San Francisco", [list: 0, 4, 3])
    inPVD = idxed-node("Providence", [list: 0, 1])
    [list: inWAS, inORD, inBLM, inHOU, inDEN, inSFO, inPVD]
end
```

Здесь предполагается, что индексация начинается с 0. Для поиска узла предназначена следующая функция:

```
fun find-ix(idx :: Key, graph :: Graph) -> Node:
    lists.get(graph, idx)
end
```

Затем можно найти соседей почти так же, как и ранее:

```
fun ix-neighbors(city :: Key, graph :: Graph) -> List<Key>:
    city-node = find-ix(city, graph)
    city-node.adj
end
```

В довершение ко всему тесты также выглядят похожими:

```
check:
    ns = ix-neighbors(3, ix-cities)

    ns is [list: 0, 5]

    map(_.content, map(find-ix(_, ix-cities), ns)) is
        [list: "Washington", "San Francisco"]
end
```

Происходящее здесь имеет более глубокий смысл. Узлы с ключами содержат внутренние (intrinsic) ключи: ключ является частью самих данных. Таким образом, имея в распоряжении только узел, мы можем определить его ключ. А вот индексированные узлы представляют собой внешние (extrinsic) ключи: эти ключи определяются вне элементов данных и, в частности, по позиции в некоторой другой структуре данных. Рассматривая узел, а не весь граф в целом, мы не можем знать, каков его ключ. Даже рассматривая весь график в целом, мы можем определить ключ узла, только используя функцию `identical`, но это относительно неудовлетворительный метод восстановления основной информации. Это подчеркивает слабость методики использова-

ния представлений информации с внешними ключами. (Но представления с внешними ключами легче объединять в новые наборы данных, потому что нет опасности конфликта ключей: внутренние ключи, которые могли бы конфликтовать, отсутствуют.)

## 22.2.3. Список ребер

Представления, которые мы рассматривали до сих пор, отдавали предпочтение узлам, а ребра являлись просто частью информации в узле. Вместо этого можно было бы использовать представление, в котором ребра являются главными элементами, а узлы становятся просто объектами, лежащими на концах ребер:

Префикс `le` обозначает «list of edges» (список ребер).

```
data Edge:
    | edge(src :: String, dst :: String)
end

type LEGraph = List<Edge>

type Graph = LEGraph
```

После этого сеть авиалиний приобретает следующий вид:

```
le-cities :: Graph =
[list:
    edge("Washington", "Chicago"),
    edge("Washington", "Denver"),
    edge("Washington", "San Francisco"),
    edge("Washington", "Houston"),
    edge("Washington", "Providence"),
    edge("Chicago", "Washington"),
    edge("Chicago", "San Francisco"),
    edge("Chicago", "Providence"),
    edge("Houston", "Washington"),
    edge("Houston", "San Francisco"),
    edge("Denver", "Washington"),
    edge("Denver", "San Francisco"),
    edge("San Francisco", "Washington"),
    edge("San Francisco", "Denver"),
    edge("San Francisco", "Houston"),
    edge("Providence", "Washington"),
    edge("Providence", "Chicago") ]
```

Обратите внимание: в этом представлении узлы, не связанные с другими узлами графа, просто никогда не отображаются. Поэтому вам понадобится вспомогательная структура данных, чтобы отслеживать все узлы.

Функция получения множества соседей:

```
fun le-neighbors(city :: Key, graph :: Graph) -> List<Key>:
    neighboring-edges = for filter(e from graph):
        city == e.src
```

```
end
names = for e from neighboring-edges: e.dst end
names
end
```

И разумеется, проверка:

```
check:
le-neighbors("Houston", le-cities) is
  [list: "Washington", "San Francisco"]
end
```

Но такое представление затрудняет хранение сложной информации об узле без ее дублирования. Поскольку узлы обычно содержат подробную информацию, а информация о ребрах, как правило, более лаконичная, мы часто предпочитаем применять представления, ориентированные на узлы. Разумеется, в качестве альтернативного варианта имена узлов можно рассматривать как ключи к какой-либо другой структуре данных, из которой мы можем извлечь подробную информацию об узлах.

## 22.2.4. Абстрагирующие представления

Необходимо общее представление, позволяющее абстрагироваться от конкретных реализаций. Предположим, что в целом у нас есть понятие узла `Node`, имеющего содержимое `content`, понятие ключей `Key` (внутренних или внешних) и способ получения списка соседей – списка ключей – по ключу и графу. Этого достаточно для дальнейшей работы. Но все еще остается необходимость выбора конкретных ключей для написания примеров и тестов. Для простоты будем использовать строковые ключи (см. подраздел 22.2.1).

## 22.3. Измерение сложности для графов

Прежде чем начать определение алгоритмов для графов, мы должны рассмотреть, как измерить размер графа. Граф состоит из двух компонентов: узлов и ребер. Некоторые алгоритмы будут сосредоточены на узлах (например, на посещении каждого из них), в то время как другие – на ребрах, а некоторые будут уделять внимание и тем, и другим. Итак, что мы используем в качестве основы для подсчета операций: узлы или ребра?

Более удобной стала бы возможность свести эти два измерения в одно. Чтобы узнать, существует ли такая возможность, предположим, что граф содержит  $k$  узлов. Тогда число его ребер имеет широкий диапазон со следующими двумя экстремумами:

- никакие два узла не соединены. Тогда ребер нет вообще;
- соединены каждые два узла. Тогда существует ровно столько ребер, сколько пар узлов.

Таким образом, число узлов может оказаться значительно меньшим или даже значительно большим, чем число ребер. Если бы эта разность исчислялась константами, то можно было бы игнорировать ее, но это не так. Когда граф стремится к первому экстремуму, отношение узлов к ребрам приближается к  $k$  (или даже превышает это значение, в курьезном случае, когда ребер нет, но такой граф не очень интересен), а когда граф стремится ко второму экстремуму, отношение ребер к узлам приближается к  $k^2$ . Другими словами, ни одна мера не включает другую с постоянным отношением, не зависящим от графа.

Поэтому, когда необходимо говорить о сложности алгоритмов для графов, мы должны учитывать размерности числа узлов и ребер. Но в связном (connected) графе ребер должно быть как минимум столько же, сколько и узлов, а это означает, что количество ребер преобладает над количеством узлов. Поскольку мы обычно обрабатываем связные графы или связные части графов по отдельности, то можно ограничить количество узлов количеством ребер.

Граф является связным (connected), если из каждого узла можно пройти по ребрам, чтобы достичь любого другого узла.

## 22.4. Достижимость

Во многих случаях использования графов необходимо учитывать достижимость (reachability): можно ли, используя ребра в графе, добраться от одного узла к другому. Например, социальная сеть может предлагать в качестве контактов всех тех, кто достижим из существующих контактов. В интернете инженеры по трафику заботятся о том, могут ли пакеты попасть с одного компьютера на другой. В интернете для нас важно, доступны ли все общедоступные страницы сайта с домашней страницы. Мы будем изучать, как вычисляется достижимость, используя граф авиалиний в качестве рабочего примера.

### 22.4.1. Простая рекурсия

В самом простом случае достижимость определяется легко. Необходимо узнатъ, существует ли путь (path) между парой узлов – источником и целью. (Более сложная версия определения достижимости может вычислять фактический путь, но пока не будем отвлекаться на это.) Существуют две возможности: исходный и целевой узлы совпадают или не совпадают.

Путь (path) – это последовательность из нуля и более связанных ребер.

- Если исходный и целевой узлы совпадают, то очевидно, что это является тривиальным случаем выполнения условия достижимости.
- Если исходный и целевой узлы не совпадают, то необходимо выполнить итерационный проход по всем соседям исходного узла и задать вопрос: является ли достижимым целевой узел из каждого соседнего узла?

Это описание можно преобразовать в следующую функцию:

```
<graph-reach-1-main> ::=  
fun reach-1(src :: Key, dst :: Key, g :: Graph) -> Boolean:  
  if src == dst:  
    true  
  else:  
    <graph-reach-1-loop>  
    loop(neighbors(src, g))  
  end  
end
```

Здесь цикл прохода по соседям исходного узла `src` выглядит так:

```
<graph-reach-1-loop> ::=  
fun loop(ns):  
  cases (List) ns:  
  | empty => false  
  | link(f, r) =>  
    if reach-1(f, dst, g): true else: loop(r) end  
  end  
end
```

Этот код можно протестировать, как показано ниже:

```
<graph-reach-tests> ::=  
check:  
  reach = reach-1  
  reach("was", "was", kn-cities) is true  
  reach("was", "chi", kn-cities) is true  
  reach("was", "bmg", kn-cities) is false  
  reach("was", "hou", kn-cities) is true  
  reach("was", "den", kn-cities) is true  
  reach("was", "saf", kn-cities) is true  
end
```

К сожалению, мы не можем выяснить, как проявляют себя эти тесты, потому что некоторые из них вообще не завершаются. Причина в том, что возникает бесконечный цикл из-за циклической природы графов.

---

### Упражнение 22.2

Какие из приведенных выше примеров приводят к зацикливанию? Почему?

---

## 22.4.2. Приведение в порядок цикла

Прежде чем продолжить, попробуем улучшить выражение цикла. Несмотря на то что приведенная выше вложенная функция представляет собой пре-

восходно обоснованное определение, можно воспользоваться встроенным в Pyret циклом `for` для удобства чтения кода.

Сущность приведенного выше цикла заключается в итеративном проходе по списку логических значений: если одно из них истинно, то весь цикл вычисляется как `true`, а если все значения ложны, то нет пути к целевому узлу, поэтому цикл вычисляется как `false`. Таким образом:

```
fun огмар(fun-body, l):
  cases (List) l:
    | empty => false
    | link(f, r) =>
      if fun-body(f): true else: огмар(fun-body, r) end
  end
end
```

С учетом этого определения можно заменить определение цикла и воспользоваться им, как показано ниже:

```
for огмар(n from neighbors(src, g)):
  reach-1(n, dst, g)
end
```

## 22.4.3. Проход с использованием памяти

Поскольку мы работаем с циклическими данными, то должны запоминать, какие узлы мы уже посетили, и избегать их повторного прохождения. Затем каждый раз, когда начинается обход с нового узла, мы добавляем его в множество ранее посещенных узлов. Если мы возвращаемся в этот узел, то, поскольку вполне можно предположить, что граф за это время не изменился, нам известно, что дополнительные обходы, начинаящиеся с этого узла, не повлияют на результат.

Поэтому мы определяем вторую попытку достижимости, которая принимает дополнительный аргумент: множество узлов, которые мы уже посещали ранее (где множество представлено в виде графа). Главное отличие от `<graph-reach-1-main>` заключается в том, что до начала обхода ребер мы должны проверить, начинали ли мы обработку данного конкретного узла или нет. В результате приходим к следующему определению:

```
<graph-reach-2> ::=
fun reach-2(src :: Key, dst :: Key, g :: Graph, visited :: List<Key>) -> Boolean:
  if visited.member(src):
    false
  else if src == dst:
    true
  else:
    new-visited = link(src, visited)
    for огмар(n from neighbors(src, g)):
      reach-2(n, dst, g, new-visited)
```

Это свойство известно как идемпотентность (idempotence) (см. главу 33 «Словарь терминов»).

```
    end
  end
end
```

Обратите особое внимание на дополнительное новое условное выражение: если при проверке достижимости этот узел уже посещался ранее, то нет смысла продолжать обход из этого узла, поэтому возвращается `false`. (Возможно, остаются прочие неисследованные части графа, для которых будут выполняться другие рекурсивные вызовы.)

---

### Упражнение 22.3

Если поменять местами два первых условных выражения, то будет ли это иметь какое-либо значение? То есть если бы определение `reach-2` начиналось так:

```
if src == dst:
  true
else if visited.member(src):
  false
```

Объясните свой ответ на конкретных примерах.

---

---

### Упражнение 22.4

Мы постоянно говорим о запоминании узлов, которые посещались в начале обхода, но не об узлах, посещаемых в конце обхода. Имеет ли какое-либо значение это различие? Если имеет, то какое?

---

## 22.4.4. Улучшенный интерфейс

Как показывает процесс тестирования `reach-2`, можно получить улучшенную реализацию, но при этом мы изменили интерфейс функции: теперь у нее имеется ненужный дополнительный аргумент, который не только доставляет неудобства, но также может привести к ошибкам, если мы случайно используем его неправильно. Следовательно, мы должны привести в порядок это определение, переместив основной код во внутреннюю функцию:

```
fun reach-3(s :: Key, d :: Key, g :: Graph) -> Boolean:
  fun reacher(src :: Key, dst :: Key, visited :: List<Key>) -> Boolean:
    if visited.member(src):
      false
    else if src == dst:
      true
    else:
      new-visited = link(src, visited)
```

```

for отмар(n from neighbors(src, g)):
    reacher(n, dst, new-visited)
end
end
reacher(s, d, empty)
end

```

Теперь мы восстановили исходный интерфейс, сохранив при этом корректную реализацию вычисления достижимости.

### Упражнение 22.5

Действительно ли этот код обеспечивает корректную реализацию? В частности, решает ли это задачу, для которой предназначена функция `size`, описанная выше? Создайте тестовый пример, демонстрирующий возникающую проблему, а затем устраните ее.

## 22.5. ОБХОД В ГЛУБИНУ И В ШИРИНУ

Алгоритм определения достижимости, который мы видели выше, обладает особым свойством. Для каждого узла, который он посещает, обычно существует множество соседних узлов, в которых он может продолжить обход. Существуют, как минимум, два варианта: можно сначала посетить каждого непосредственного соседа, а затем посетить всех соседей этих соседей или можно выбрать одного соседа, применить рекурсию и посетить следующего непосредственного соседа только после того, как будет выполнено первое посещение. Первый вариант известен как обход в ширину (breadth-first traversal), а второй – как обход в глубину (depth-first traversal).

В работах по информатике общепринятыми являются названия методов: поиск в глубину (depth-first search) и поиск в ширину (breadth-first search). Но поиск – это всего лишь одна конкретная цель, а обход – это общая задача, которую можно использовать для многих целей.

Разработанный в предыдущем разделе алгоритм использует стратегию обхода в глубину: внутри `<graph-reach-1-loop>` мы рекурсивно обращаемся к первому элементу списка соседей, прежде чем посещаем второго соседа, и т. д. Альтернативой может стать структура данных, в которую мы вставляем всех соседей, затем поочередно извлекаем по одному элементу, так, чтобы сначала посетить всех соседей до посещения их соседей, и так далее. Такой подход естественным образом соответствует очереди (см. раздел 20.3).

### Упражнение 22.6

Используя очередь, реализуйте обход в ширину.

Если правильно выполняется проверка, позволяющая убедиться в том, что мы не посещаем узлы повторно, то и обход в ширину, и обход в глубину будут корректно посещать весь достижимый граф без повторений (следовательно, не войдут в бесконечный цикл). Каждый метод выходит из узла только один раз, и при выходе он рассматривает каждое отдельное ребро. Таким образом, если граф имеет  $N$  узлов и  $E$  ребер, то нижняя граница сложности обхода равна  $O([N, E \rightarrow N + E])$ . Мы также обязательно должны учитывать стоимость проверки того, посещали ли мы узел ранее (это задача определения присутствия элемента в множестве, которую мы рассматривали в разделе 19.2). Наконец, мы должны учитывать стоимость поддержки структуры данных, которая отслеживает процесс обхода. В случае обхода в глубину рекурсия, которая использует стек компьютера, делает это автоматически с постоянными накладными расходами. В случае обхода в ширину программа должна управлять очередью, а при этом могут добавляться не только постоянные накладные расходы.

Это означает, что обход в глубину всегда лучше, чем обход в ширину. Но у обхода в ширину есть одно весьма важное и ценное свойство. Если он начинает с узла  $N$ , то при посещении узла  $P$  подсчитывается число ребер, требуемых для достижения  $P$ . Обход в ширину гарантирует, что не может существовать более короткого пути в узел  $P$ : т. е. он находит наикратчайший путь (shortest path) в узел  $P$ .

И на практике стек обычно работает гораздо эффективнее очереди, потому что поддерживается аппаратурой компьютера.

---

### Упражнение 22.7

Почему в предыдущем абзаце упоминается наикратчайший путь «вообще» (в оригинале: «a»), а не конкретный (в оригинале «the») наикратчайший путь?

---

## 22.6. ГРАФЫ СО ВЗВЕШЕННЫМИ РЕБРАМИ

Рассмотрим транспортный граф: обычно нас интересует не только возможность перемещения из одной локации в другую, но также «стоимость» этого перемещения (единицы измерения стоимости могут быть различными: деньги, расстояние, время, объем углекислого газа и т. д.). В интернете, вероятнее всего, мы будем беспокоиться о времени задержки (latency, см. главу 33 «Словарь терминов») или о пропускной способности (bandwidth, ibidem) соединения. Даже в социальной сети мы с большой вероятностью определяем степень близости с тем или иным другом. Короче говоря, во многих графах нас интересует не только направление ребра, но также некоторая абстрактная числовая характеристика, которая называется весом (weight) ребра.

В дальнейшем мы будем предполагать, что ребра графа имеют веса. Это не противоречит тому, что мы изучали до сих пор: если узел является достижи-

Тем не менее всегда можно интерпретировать невзвешенный граф как взвешенный, присвоив каждому ребру одинаковый постоянный положительный вес (например, единицу).

мым в невзвешенном (unweighted) графе, то он остается достижимым и во взвешенном (weighted) графе. Но операции, которые мы будем изучать ниже, имеют смысл только во взвешенном графе.

---

### Упражнение 22.8

Если интерпретировать невзвешенный граф как взвешенный, то почему необходимо обеспечить присваивание каждому ребру положительного веса?

---

---

---

### Упражнение 22.9

Измените определения данных, представленных графиком, чтобы учитывались веса ребер.

---

---

---

### Упражнение 22.10

Веса не являются единственным типом данных, которые можно зафиксировать для ребер. Например, если узлы в графике представляют людей, то ребра могут быть помечены отношениями между ними (например, «мать», «друг» и т. п.). Какие еще типы данных можно придумать для пометки ребер?

---

---

## 22.7. НАИКРАТЧАЙШИЕ (ИЛИ НАИЛЕГЧАЙШИЕ) ПУТИ

Предположим, что вы планируете путешествие: вполне естественно, что может потребоваться прибытие в целевой пункт за минимальное время, или с наименьшим расходом денег, или с выполнением какого-либо другого условия, включающего минимизацию суммы весов ребер. Это называется задачей вычисления наикратчайшего пути.

Здесь сразу же необходимо прояснить досадную терминологическую путаницу. В действительности требуется вычислить самый легкий (lightest) путь – путь с наименьшим весом. К сожалению, в информатике укоренился термин, который мы здесь используем, а вы просто должны быть уверены в том, что не воспринимаете его буквально.

---

### Упражнение 22.11

Постройте график и выберите в нем пару узлов так, чтобы наикратчайший путь от одного к другому не являлся самым легким (не имел наименьший вес) и наоборот.

---

В разделе 22.5 мы уже убедились в том, что поиск в ширину создает наименее длинные пути в невзвешенных графах. Эти пути соответствуют путям с наименьшим весом при отсутствии весов (или равнозначно: все веса равны и положительны). Теперь мы должны обобщить эту задачу для случая, в котором ребра имеют веса.

Продолжим с использованием индукции, постепенно определяя функцию, на первый взгляд имеющую следующий тип:

```
w :: Key -> Number
```

Функция отображает вес самого легкого пути из исходного узла в текущий. Но попробуем немного поразмышлять об этой аннотации: поскольку мы создаем эту структуру, постепенно наращивая узел за узлом, изначально большинство узлов не сообщают о каком-либо весе, и даже в конце пути, не достижимый из исходного, не будет иметь веса для самого легкого (разумеется, и для любого другого) пути. Вместо того чтобы придумывать число, претендующее на отображение этой ситуации, воспользуемся вариантым (опционным) типом `Option`:

```
w :: Key -> Option<Number>
```

Если существует какое-либо значение `some`, то оно становится весом, иначе вес отсутствует – значение `none`.

Теперь подумаем об этом с точки зрения индукции. Что нам известно изначально? Ну разумеется, исходный узел находится на нулевом расстоянии от себя (это должен быть самый легкий путь, потому что более легкий мы получить не можем). Это дает нам (очевидное) множество узлов, для которых мы уже знаем наименьший вес. Наша цель состоит в том, чтобы увеличивать это множество узлов – постепенно, по одному на каждой итерации – до тех пор, пока мы либо не обнаружим целевой узел, либо у нас не останется узлов, которые можно добавить (в этом случае заданный целевой узел недоступен из исходного).

По индукции на каждом шаге у нас есть множество всех узлов, для которых известен самый легкий путь (изначально это просто исходный узел, но это означает, что такое множество никогда не будет пустым, что будет иметь значение для дальнейших рассуждений). Теперь рассмотрим все ребра, смежные с этим множеством узлов и ведущие к узлам, для которых пока еще неизвестен самый легкий путь. Выбираем узел  $q$ , который минимизирует общий вес пути к нему. Мы утверждаем, что в действительности это будет самый легкий путь к узлу  $q$ .

Если это утверждение истинно, то доказательство завершено, потому что теперь мы должны добавить  $q$  в множество узлов, наименее веса которых нам известны, и повторить процесс поиска исходящих из  $q$  ребер с наименее весами. Следовательно, этот процесс должен добавить еще один узел. В некоторый момент мы обнаружим, что не осталось ребер, исходящих из известного нам множества, и здесь мы можем завершить процесс.

Само собой разумеется, что завершение процесса в этот момент вполне безопасно: это соответствует вычислению достижимого множества. Осталось

только показать, что этот жадный (*greedy*) алгоритм позволяет получить путь с наименьшим весом (*lightest*) к каждому узлу.

Докажем это от противного. Предположим, что существует путь  $s \rightarrow d$  от исходного узла  $s$  к узлу  $d$ , найденный с помощью приведенного выше алгоритма, но также предположим, что существует и другой путь, который действительно является более легким. В каждом узле при добавлении узла в пути  $s \rightarrow d$  алгоритм должен был бы добавить более легкий путь, если бы он существовал. Этот факт не опровергает наше утверждение о существовании более легкого пути (мог бы существовать другой путь с тем же весом – это разрешено алгоритмом, но это также не противоречит и нашему утверждению). Следовательно, алгоритм действительно находит самый легкий путь.

Остается только лишь определить структуру данных, которая воспользуется этим алгоритмом. В каждом узле необходимо знать наименьший вес из множества узлов, для которых известен наименьший вес всех их соседей. Можно было бы сделать это с помощью сортировки, но такой подход избыточен: в действительности нет необходимости в упорядочивании всех весов, нужен только наименьший. Такую возможность предоставляет структура данных, именуемая кучей (*heap*) ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Куча\\_\(структур\\_данных\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Куча_(структур_данных))).

### Упражнение 22.12

Что произойдет, если позволить ребрам иметь нулевой вес? Что в этом случае необходимо изменить в приведенном выше алгоритме?

---



---

### Упражнение 22.13

Что произойдет, если позволить ребрам иметь отрицательный вес? Что в этом случае необходимо изменить в приведенном выше алгоритме?

---



---

Для справки: приведенный выше алгоритм известен как алгоритм Дейкстры (Dijkstra's algorithm).

## 22.8. МОРАВСКИЕ ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ

На рубеже тысячелетий Национальная инженерная академия США (US National Academy of Engineering) провела опрос своих членов, чтобы определить «Величайшие инженерные достижения XX века» (Greatest Engineering Achievements of the 20th Century). В списке кандидатов перечислялись обычные претенденты: электроника, компьютеры, интернет и т. д. Но возглавило список, вероятно, самое необычное достижение: электрификация (сельской местности).

Более подробно об этом можно прочитать на сайте академии (<http://www.greatachievements.org/>).

## 22.8.1. Глобальная задача

Чтобы лучше понять историю национальных электрических сетей, полезно вернуться в Моравию (исторический регион республики Чехия; см. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Моравия>) 1920-х годов. Как и во многих других регионах мира, в Моравии начали осознавать преимущества электричества и появилось намерение распространить его по всему региону. Моравский ученый-математик по имени Отакар Борувка (Otakar Borůvka; [https://en.wikipedia.org/wiki/Otakar\\_Bor%C5%99vka](https://en.wikipedia.org/wiki/Otakar_Bor%C5%99vka)) услышал о проблеме электрификации и, предприняв значительные усилия, описал задачу абстрактно, чтобы ее можно было понять без прямой связи с Моравией или с электрическими сетями. Он смоделировал это как задачу о графах.

Борувка обнаружил, что, по крайней мере, изначально любое решение задачи создания сети обязательно должно обладать следующими характеристиками:

- электрическая сеть непременно должна доходить до всех городов, охватываемых ею. В терминологии графов решение обязательно должно полностью охватывать (перекрывать) (spanning), т. е. обязательно должен быть посещен каждый узел в графе;
- избыточность является полезным свойством любой сети: благодаря этому свойству, если одно (под)множество связей перестает работать, то, возможно, найдется другой способ доставки полезной нагрузки к цели. Но на начальном этапе избыточность может оказаться слишком дорогостоящей, особенно если она достигается за счет того, что кому-то вообще не доставляется полезная нагрузка. Таким образом, первоначальное решение было бы лучше всего настроить без петель или даже избыточных путей. В терминологии графов решение должно было стать деревом (tree);
- наконец, конечной целью было решение этой задачи с минимальной возможной стоимостью. В терминологии графов это дерево (граф) должно быть взвешенным, а решением этой задачи должен был стать минимальный вес.

Вот так Борувка определил задачу моравского оствного дерева (Moravian Spanning Tree – MST).

## 22.8.2. Жадное решение

Борувка опубликовал эту задачу, а другой чешский математик Войтех Ярник (Vojtěch Jarník; [https://ru.wikipedia.org/wiki/Ярник,\\_Войтех](https://ru.wikipedia.org/wiki/Ярник,_Войтех)) случайно обнаружил эту публикацию. Ярник предложил решение, которое должно показаться знакомым:

- начать с решения, состоящего из единственного узла, выбранного произвольно. Для графа, состоящего из этого одного узла, такое решение очевидно является минимальным, оством и деревом;

- из всех ребер, связанных (инцидентных) с узлами, включенными в решение, и устанавливающих соединение с узлом, которого пока еще нет в решении, выбрать ребро с наименьшим весом;
- добавить выбранное ребро в решение. Утверждается, что новым решением будет дерево (по построению), остав (также по построению) и минимум. Минимальность следует из доказательства, аналогичного используемому для алгоритма Дейкстры.

Обратите внимание: мы рассматриваем только смежные (инцидентные) ребра, а не их вес, добавленный к весу узла, с которым они смежны (инцидентны).

Ярнику не повезло: он опубликовал свою работу в Чехии в 1930 г., и она осталась практически незамеченной. Алгоритм был заново открыт другими, в первую очередь Р. К. Примом (R. C. Prim) в 1957 г., и в настоящее время широко известен как алгоритм Прима (Prim's algorithm), хотя назвать его алгоритмом Ярника было бы более правильно.

Реализация этого алгоритма достаточно проста. В каждый момент необходимо знать самое легкое ребро, инцидентное текущему дереву решений. Нахождение самого легкого ребра требует времени, линейного относительно количества этих ребер, но самое легкое может создать цикл. Поэтому мы должны постоянно проверять, не создает ли добавление ребра цикл, – это задача, к которой мы будем возвращаться несколько раз (см. подраздел 22.8.5). Предполагая, что можно эффективно выполнять эту операцию, далее необходимо добавить самое легкое ребро и повторить процедуру. Даже при наличии эффективного решения для проверки на цикличность может показаться, что для этого требуется операция, линейная относительно количества ребер для каждого узла. С усовершенствованными представлениями можно улучшить сложность этого алгоритма, но сначала мы рассмотрим другие идеи.

### 22.8.3. Другое жадное решение

Напомним, что Ярник представил свой алгоритм в 1930 г., когда компьютеров еще не было, а Прим – в 1957 г., в эпоху младенчества компьютеров. Программирование компьютеров для управления кучей было нетривиальной задачей, и многие алгоритмы были реализованы вручную, и отслеживать сложную структуру данных без ошибок было еще труднее. Требовалось решение, которое требовало меньше ручной вычислительной работы (в буквальном смысле).

В 1956 г. Джозеф Краскал (Joseph Kruskal) представил такое решение. Его идея была изящна и проста. Алгоритм Ярника страдает от проблемы, заключающейся в том, что на каждом шаге роста дерева приходится пересматривать содержимое кучи, которая уже представляет собой беспорядочную структуру для отслеживания. Краскал обратил внимание на следующее.

Чтобы получить минимальное решение, разумеется, необходимо включить в граф одно из ребер с наименьшим весом. Потому что в противном случае мы можем взять минимальное решение, добавить это ребро и удалить другое; граф оставался бы таким же связным, но общий вес не стал бы боль-

ше, а если бы удаленное ребро было тяжелее, то уменьшился бы. По тому же принципу мы можем добавить следующее самое легкое ребро, потом следующее самое легкое и т. д. Единственный раз, когда невозможно добавить следующее самое легкое ребро, – это случай, когда добавление создает цикл (опять возникает эта проблема).

Таким образом, алгоритм Краскала предельно прост. Сначала мы сортируем все ребра, упорядоченные по возрастанию веса. Затем мы берем каждое ребро в порядке возрастания веса и добавляем его к решению, если оно не создает цикл. Когда мы таким способом обрабатываем все ребра, у нас будет решение, которое будет деревом (по построению), остовным (поскольку каждая связанная вершина должна быть конечной точкой некоторого ребра) и иметь минимальный вес (по рассуждению, приведенному выше). Сложность заключается в сортировке (т. е. определяется как  $[e \rightarrow e \log e]$ , где  $e$  – размер множества ребер). Затем мы перебираем каждый элемент в  $e$ , что требует времени, линейного относительно размера этого множества – по модулю времени для проверки на циклы. Этот алгоритм легко реализовать даже на бумаге, потому что мы сортируем все ребра один раз, затем продолжаем проверять их по порядку, вычеркивая те, которые создают циклы, – без необходимости динамического обновления списка.

Обратите внимание на осторожную формулировку: может быть много ребер с одинаковым наименьшим весом, поэтому добавление одного из них может удалить другое, следовательно, при этом не создается более легкое дерево, но основная идея здесь заключается в том, что более тяжелое дерево определенно не будет создано.

## 22.8.4. Третье решение

Оба решения, Ярника и Краскала, имеют один недостаток: для них требуется централизованная структура данных (куча с приоритетами или отсортированный список) для постепенной разработки решения. Когда стали доступными параллельные компьютеры, а сложность задач на графах возросла многократно, исследователи в области информатики стали искать решения, которые можно было бы реализовать более эффективно в параллельном режиме, а это, как правило, означало отказ от каких-либо централизованных точек синхронизации, таких как централизованные структуры данных, используемые в описанных выше алгоритмах.

В 1965 г. М. Соллин (M. Sollin) разработал алгоритм, в полной мере соответствующий этим требованиям. В этом алгоритме вместо построения одного решения мы наращиваем несколько компонентов решения (возможно, параллельно, если это желательно). Каждый узел начинает рассматриваться как компонент решения (как и на первом шаге алгоритма Ярника). Каждый узел рассматривает инцидентные ему ребра и выбирает самое легкое из них, которое соединяет его с другим компонентом (и снова та же проблема). Если такое ребро может быть найдено, оно становится частью решения, и два компонента объединяются в один. Затем весь процесс повторяется.

Поскольку каждый узел начинает рассматриваться как часть решения, этот алгоритм наращивается естественным образом. Так как он проверяет на-

личие циклов и избегает их, то естественным образом формирует дерево. Ну и минимальность следует из тех же рассуждений, ранее использованных для алгоритма Ярника, который мы, по существу, выполняем параллельно, по одному разу из каждого узла, пока параллельные компоненты решения не объединяются для получения глобального решения.

Разумеется, сопровождение данных для этого алгоритма вручную – настоящий кошмар. Поэтому неудивительно, что такой алгоритм был разработан в эпоху цифровых технологий. Но неподдельное удивление вызывает тот факт, что это не совсем верно: изначально этот алгоритм был создан самим Отакаром Борувкой.

Дело в том, что Борувка все это предвидел. Он не только глубоко понял задачу, но также:

- точно определил реальную обобщенную задачу, лежащую в основе процесса электрификации, чтобы ее можно было рассматривать независимо от контекста;
- создал описательный язык теории графов для точного определения графов и соответствующих задач
- и даже решил конкретную задачу в дополнение к ее обобщенному определению.

Борувка просто придумал решение, настолько сложное для реализации вручную, что Ярник, по существу, устранил параллельность в нем, чтобы появилась возможность последовательного выполнения. Таким образом, этот алгоритм оставался незамеченным до тех пор, пока Соллин не изобрел его заново (в действительности это происходило несколько раз ([https://en.wikipedia.org/wiki/Borůvka's\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Borůvka's_algorithm))) как раз вовремя, чтобы все, кто занимался параллельными вычислениями, заметили потребность в нем. Но теперь мы можем просто назвать это алгоритмом Борувки, что вполне уместно.

Как вы уже могли догадаться, в других учебниках эта задача действительно называется MST, но «M» означает не «Моравия», а «минимальное». Однако, учитывая забытое место Борувки в истории, мы предпочитаем более эксцентричное название.

Обратите внимание:  
устранение циклов дает НАГ  
и не гарантирует автомати-  
ческого создания дерева.  
В этом разделе мы несколько  
небрежно отнеслись к этому  
различию.

## 22.8.5. Проверка связности компонентов

Как мы видели выше, нам необходима возможность эффективно определять, находятся ли два узла в одном компоненте. Один из способов сделать это – выполнить обход в глубину (или обход в ширину), начиная с первого узла и проверяя, посещаем ли мы когда-либо его во второй раз. (Использование одной из этих стратегий обхода гарантирует, что мы остановимся при наличии циклов.) К сожалению, это требует линейного количества времени (относительно размера графа) для каждой пары узлов – и в зависимости от конкретного графа и выбора узла мы могли бы сделать это для каждого узла в графе при каждом добавлении ребра. Поэтому очевидно, что желательно сделать это как можно лучше.

Полезно свести эту задачу от определения связности графа к более общей задаче: о структуре непересекающихся множеств (*disjoint-set structure*) (известной по более просторечному названию: объединение–поиск (*union-find*) по причинам, которые скоро станут ясны). Если мы воспринимаем каждый связанный компонент как множество, то спрашиваем, принадлежат ли два узла одному и тому же множеству. Но сведение к задаче присутствия элемента в множестве делает ее применимой и в некоторых других приложениях.

Начальные условия следующие. Для произвольных значений необходима возможность интерпретировать их как элементы множества. Нас интересуют две операции. Одной из них, очевидно, является `union`, объединяющая два множества в одно. Другая может представлять собой нечто вроде `is-in-same-set`, которая принимает два элемента и определяет, находятся ли они в одном и том же множестве. Однако со временем оказалось полезным вместо этого определить оператор `find`, который с учетом заданного элемента «именует» множество (подробнее об этом чуть позже), которому принадлежит этот элемент. Чтобы проверить, находятся ли два элемента в одном и том же множестве, мы должны получить «имя множества» для каждого элемента и проверить, совпадают ли эти имена. Это, конечно, звучит более иносказательно, но означает, что у нас есть базовый элемент, который может быть полезен в других контекстах и на основе которого мы можем с легкостью реализовать `is-in-same-set`.

Теперь вопрос в том, как мы именуем множества. Реальный вопрос, который мы должны задать: какие операции необходимо выполнить с этими именами? Все внимание мы уделяем следующему аспекту: если даны два имени, то они представляют одно и то же множество именно тогда, когда эти имена совпадают. Следовательно, можно было бы создать новую строку, или число, или что-то еще, но у нас есть другой вариант: просто выбрать какой-либо элемент множества для его представления, т. е. в качестве его имени. Таким образом, мы свяжем каждый элемент множества с признаком «имя множества» для него, если такого признака нет, то имя этого элемента – это он сам (случай `None` для `parent`):

```
data Element<T>:
    | elt(val :: T, parent :: Option<Element>)
end
```

Будем предполагать, что у нас есть предикат равенства для проверки одинаковости двух элементов, которая выполняется посредством сравнения их частей, содержащих значения, при этом игнорируя родительские значения:

```
fun is-same-element(e1, e2): e1.val <=> e2.val end
```

### **Выполните прямо сейчас**

Почему мы проверяем только части, содержащие значения?

Предполагая существование такого предиката для конкретного заданного множества, мы всегда возвращаем один и тот же представительный эле-

мент. (В противном случае проверка на равенство не пройдет, даже если мы работаем с одним и тем же множеством.)

С учетом всего вышесказанного определяем:

```
fun is-in-same-set(e1 :: Element, e2 :: Element, s :: Sets)
    -> Boolean:
    s1 = fynd(e1, s)
    s2 = fynd(e2, s)
    identical(s1, s2)
end
```

Здесь `Sets` – список всех элементов:

```
type Sets = List<Element>
```

Как найти репрезентативный элемент множества? Сначала мы находим его, используя `is-same-element`. При этом мы проверяем поле `parent` элемента. Если его значением является `None`, это означает, что именно этот элемент именует свое множество. Такое может произойти либо из-за того, что элемент представляет собой множество-синглтон, т. е. множество из одного элемента (мы будем инициализировать все элементы значением `None`), либо из-за того, что это имя имеет некоторое большее множество. В любом случае, мы завершили процесс. В противном случае мы должны рекурсивно найти родителя:

```
fun fynd(e :: Element, s :: Sets) -> Element:
    cases (List) s:
        | empty => raise("fynd: shouldn't have gotten here") // Сюда мы не должны попадать.
        | link(f, r) =>
            if is-same-element(f, e):
                cases (Option) f.parent:
                    | none => f
                    | some(p) => fynd(p, s)
                end
            else:
                fynd(e, r)
            end
        end
    end
end
```

В рассматриваемом здесь примере мы использовали имя `fynd`, потому что имя `find` уже определено с некоторым другим смыслом в Рурет. Если вам не нравится такое искаженное имя, то замените его на более правильное, например `find-root`.

## Упражнение 22.14

Почему во вложенной конструкции `cases` выполняется рекурсивный вызов?

Осталось реализовать функцию `union`. Для этого выполняется поиск репрезентативных элементов из двух множеств, которые мы пытаемся объединить. Если элементы одинаковы, то эти два множества уже объединены, иначе необходимо обновить структуру данных:

```
fun union(e1 :: Element, e2 :: Element, s :: Sets) -> Sets:
    s1 = fynd(e1, s)
    s2 = fynd(e2, s)
    if identical(s1, s2):
        s
    else:
        update-set-with(s, s1, s2)
    end
end
```

Для обновления мы произвольно выбираем одно из имен множеств для именования нового объединенного множества. Затем необходимо обновить родителя элемента, который именует другое множество, как показано ниже:

```
fun update-set-with(s :: Sets, child :: Element, parent :: Element)
    -> Sets:
    cases (List) s:
        | empty => raise("update: shouldn't have gotten here") // Сюда мы не должны попадать.
        | link(f, r) =>
            if is-same-element(f, child):
                link(elt(f.val, some(parent)), r)
            else:
                link(f, update-set-with(r, child, parent))
            end
        end
    end
```

Ниже приведено несколько тестов, демонстрирующих работу этой реализации:

```
check:
s0 = map(elt(_, none), [list: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])
s1 = union(get(s0, 0), get(s0, 2), s0)
s2 = union(get(s1, 0), get(s1, 3), s1)
s3 = union(get(s2, 3), get(s2, 5), s2)
print(s3)
is-same-element(fynd(get(s0, 0), s3), fynd(get(s0, 5), s3)) is true
is-same-element(fynd(get(s0, 2), s3), fynd(get(s0, 5), s3)) is true
is-same-element(fynd(get(s0, 3), s3), fynd(get(s0, 5), s3)) is true
is-same-element(fynd(get(s0, 5), s3), fynd(get(s0, 5), s3)) is true
is-same-element(fynd(get(s0, 7), s3), fynd(get(s0, 7), s3)) is true
end
```

К сожалению, в этой реализации существуют две крупные проблемы:

- во-первых, поскольку мы выполняем функциональные обновления, значение ссылки на parent постоянно «изменяется», но эти изменения не видны более старым копиям «того же самого» значения. Элемент из разных этапов объединения имеет разные ссылки на родителя, даже если это, возможно, один и тот же элемент. Именно в этом случае проявляются недостатки функционального программирования;
- соответственно, производительность этой реализации довольно низкая. Функция fynd рекурсивно проходит по родительским элементам,

чтобы найти имя множества, но посещенные элементы не обновляются для записи этого нового имени. Разумеется, можно было бы обновлять их, перестраивая множество каждый раз заново, но это усложняет реализацию, и, как мы скоро увидим, можно получить гораздо более эффективное решение.

Но что еще хуже, возможно, эта реализация даже не является правильной.

---

### **Упражнение 22.15**

Неужели это действительно так? Рассмотрите возможность создания объединений `up!on`, которые не настолько искажены, как показано выше, и проверьте, получите ли вы ожидаемые результаты.

---

Резюме: чистое функциональное программирование не вполне подходит для решения этой задачи. Необходима улучшенная стратегия реализации: см. раздел 28.1.

**Часть IV**

---

**ОТ PYRET К PYTHON**

# Глава 23

---

## От Pyret к Python

За время нашей работы в Pyret к этому моменту мы освоили несколько основных навыков программирования: работу с таблицами, разработку правильных примеров, основы создания типов данных и работу с базовыми вычислительными структурными блоками функций, условных операторов и циклов (используя для этого `filter` и `map`, а также рекурсию). Вы получили солидный набор инструментальных средств для начала работы, и вас ждет огромный мир других программ, которые вы можете написать.

Но мы собираемся ненадолго сменить тему и показать вам, как работать в Python вместо Pyret. Почему?

Наблюдение за тем, как одни и те же концепции используются в разных языках, может помочь вам отличить основные принципы информатики от форм записи и идиоматических выражений конкретных языков. Если вы планируете написание программ как часть своей профессиональной деятельности, вам неизбежно придется работать на разнообразных языках в разное время, поэтому мы предоставляем вам возможность попрактиковаться в этом навыке в управляемых и более спокойных условиях.

Почему мы называем эти условия более спокойными? Потому что формы записи выражений в Pyret были разработаны частично с учетом именно такой смены языков. Вы найдете много общего между Pyret и Python на уровне форм записи, а также некоторые интересные отличительные черты, которые подчеркивают определенные теоретические различия, лежащие в основе языков. Набор программ, которые мы хотим написать в дальнейшем (в частности, программы с большими объемами данных, в которых данные должны обновляться и сопровождаться в течение длительного времени), в полной мере согласован с некоторыми функциональными возможностями Python, которых вы не видели в Pyret.

Мы выделяем основные различия в формах записи между Pyret и Python, переписывая некоторые из наших предыдущих примеров кода на Python.

Следующая редакция будет содержать материал, который противопоставляет сильные и слабые стороны этих двух языков.

### 23.1. ВЫРАЖЕНИЯ, ФУНКЦИИ И ТИПЫ

Еще в разделе 5.5 мы представили формы записи для функций и типов на примере вычисления стоимости заказа авторучек. Заказ состоял из коли-

чества авторучек и сообщения, которое должно быть напечатано на них. Каждая авторучка стоила 25 центов плюс 2 цента за каждый символ в сообщении. Ниже приведен исходный код на Pyret:

```
fun pen-cost(num-pens :: Number, message :: String) -> Number:
  doc: '''total cost for pens, each 25 cents
         plus 2 cents per message character'''
  num-pens * (0.25 + (string-length(message) * 0.02))
end
```

А теперь рассмотрим соответствующий код на Python:

```
def pen_cost(num_pens: int, message: str) -> float:
    """Общая стоимость авторучек, каждая по 25 центов плюс
    2 цента за каждый символ надписи."""
    return num_pens * (0.25 + (len(message) * 0.02))
```

### **Выполните прямо сейчас**

Какие различия в форме записи вы видите в приведенных выше двух версиях?

Список различий в формах записи:

- в Python используется `def` вместо `fun`;
- в именах Python используются символы подчеркивания (например, `pen_cost`) вместо дефисов, применяемых в Pyret;
- названия типов записываются по-разному: в Python используются `str` и `int` вместо `String` и `Number`. Кроме того, в Python используется один символ двоеточия перед типом, тогда как в Pyret записывается двойное двоеточие;
- в Python имеются различные типы чисел: `int` для целых, `float` для десятичных дробных. В Pyret применяется только один тип (`Number`) для всех чисел;
- в Python строка документации не имеет специальной метки (в Pyret строка документации начинается с метки `doc:`);
- в Python отсутствует метка `end`. Вместо нее в Python используется сдвиг строк вправо для определения окончания блока конструкции `if/else`, тела функции или многострочного блока любой другой конструкции;
- в Python выход из функций (и возврат значений) обозначается ключевым словом `return`.

Это небольшие различия в формах записи, к которым вы привыкнете, когда будете писать больше программ на Python.

Кроме форм записи, существуют и другие различия. Одно из них можно видеть в приведенном выше примере программы – оно связано с тем, как язык использует типы. В Pyret, если вы поместите аннотацию типа для параметра, а затем передадите в нем значение другого типа, то получите сообщение об ошибке. Python игнорирует аннотации типов (если вы не используете дополнительные инструменты для проверки типов). Типы Pyret похожи на примечания для программистов, но они не применяются при запуске программ.

### Упражнение 23.1

Перепишите на Python приведенную ниже функцию `moon-weight` из раздела 5.3.

```
fun moon-weight(earth-weight :: Number) -> Number:
    doc: "Compute weight on moon from weight on earth"
    earth-weight * 1/6
end
```

## 23.2. ВОЗВРАТ ЗНАЧЕНИЙ ИЗ ФУНКЦИЙ

В Pyret тело функции состояло из необязательных инструкций для именования промежуточных значений, за которыми следовало одно выражение. Значение этого единственного выражения является результатом вызова функции. В Pyret каждая функция возвращает результат, поэтому нет необходимости в пометке его источника.

Как мы вскоре увидим, в Python это делается иначе: не все «функции» возвращают результаты ( обратите внимание: определение функции изменено с `fun` на `def`). Кроме того, результатом не обязательно должно быть последнее выражение в определении `def`. В Python ключевое слово `return` явно помечает выражение, значение которого становится результатом вызова функции.

В математике функции имеют результаты по определению. Иногда программисты применяют различные термины – «функция» и «процедура»: оба обозначают параметризованные вычисления, но только функция возвращает результат выполненных вычислений. Тем не менее некоторые программисты и некоторые языки все же применяют термин «функция» в более свободном смысле для обозначения обоих типов параметризованных вычислений.

### *Выполните прямо сейчас*

Запишите приведенные ниже два определения в файл Python.

```
def add1v1(x: int) -> int:
    return x + 1

def add1v2(x: int) -> int:
    x + 1
```

В интерактивной среде Python после промпта выполните вызов каждой функции по очереди. Что вы заметили при наблюдении за результатами при использовании каждой функции?

Надеемся, вы обратили внимание на то, что при использовании `add1v1` выводится ответ после промпта, тогда как при использовании `add1v2` ничего не выводится. Последствия этого различия учитываются при создании функций.

**Выполните прямо сейчас**

Попробуйте вычислить два приведенных ниже выражения в интерактивной среде Python после промпта: что происходит в каждом случае?

```
3 * add1v1(4)
3 * add1v2(4)
```

Этот пример наглядно показывает, почему ключевое слово `return` так важно в Python: без него значение не возвращается, т. е. вы не можете использовать результат вызова функции в другом выражении. Тогда зачем вообще использовать `add1v2`? Подождем с ответом на этот вопрос: мы вернемся к нему в главе 25.

## 23.3. ПРИМЕРЫ И ВАРИАНТЫ ТЕСТОВ

В Pyret мы включали примеры в каждую функцию, используя для этого блоки `where`. Также предоставлялась возможность записи блоков `check`: для расширенного тестирования. Для напоминания ниже приведен код функции `pen-cost`, включающий блок `where`:

```
fun pen-cost(num-pens :: Number, message :: String) -> Number:
    doc: '''total cost for pens, each 25 cents
            plus 2 cents per message character'''
    num-pens * (0.25 + (string-length(message) * 0.02))
where:
    pen-cost(1, "hi") is 0.29
    pen-cost(10, "smile") is 3.50
end
```

В Python нет формы записи для блоков `where`: или каких-либо различий между примерами и тестами. Существует пара отдельных пакетов тестирования для Python. Здесь мы будем использовать `pytest`, стандартный упрощенный фреймворк, напоминающий форму тестирования, которую мы применяли в Pyret. Чтобы воспользоваться пакетом `pytest`, мы помещаем оба примера и тесты в отдельную функцию.

Ниже приведен пример тестирования для функции `pen_cost`:

```
import pytest

def pen_cost(num_pens: int, message: str) -> float:
    """total cost for pens, each at 25 cents plus
       2 cents per message character"""
    return num_pens * (0.25 + (len(message) * 0.02))
```

Способ установки и настройки пакета `pytest` и содержимого тестового файла будет зависеть от используемой вами интерактивной среды разработки (IDE) Python. Предполагается, что преподаватели обеспечат вас инструкциями, соответствующими выбранным инструментальным средствам.

```
def test_pens():
    assert pen_cost(1, "hi") == 0.29
    assert pen_cost(10, "smile") == 3.50
```

Замечания по приведенному выше коду:

- мы импортировали `pytest`, упрощенную библиотеку тестирования для Python;
- примеры перемещены в отдельную функцию (здесь: `test_pens`), которая не принимает никакие входные данные. Обратите внимание: имена функций, содержащих варианты тестов, обязательно должны начинаться с префикса `test_`, чтобы `pytest` мог их найти;
- в Python каждый отдельный вариант теста имеет форму

```
assert EXPRESSION == EXPECTED_ANS
```

в отличие от формы `is` в Pyret.

### ***Выполните прямо сейчас***

Добавьте в приведенный выше код Python еще один тест, соответствующий тесту Pyret:

```
pen-cost(3, "Wow") is 0.93
```

Убедитесь в том, что этот тест успешно проходит.

### ***Выполните прямо сейчас***

Вы действительно попытались выполнить этот тест?

Стоп! Произошло нечто невероятное: тест провалился. Остановитесь и задумайтесь над этим: тест, который успешно проходил в Pyret, провалился в Python. Как такое может быть?

## **23.4. НЕБОЛЬШОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ ПО ПОВОДУ ЧИСЕЛ**

Оказывается, что в различных языках программирования по-разному принимаются решения о том, как представлять и обрабатывать действительные (не целые) числа. Иногда различия в этих представлениях приводят к тонким количественным различиям в вычисляемых значениях. Простой пример: рассмотрим два выглядящих простыми действительных числа  $1/2$  и  $1/3$ . Если ввести эти два числа после промпта Pyret, то получим следующие результаты:

```
>>> 1/2
0.5
>>> 1/3
```

0.3

Если те же два числа ввести в консoli Python, то получим:

```
>>> 1/2  
0.5  
>>> 1/3  
0.3333333333333333
```

Обратите внимание: ответы различны для числа 1/3. Возможно, вы вспомните (а может быть и нет), что когда-то на уроках математики число 1/3 приводилось как пример бесконечной периодической десятичной дроби. Проще говоря, если мы попытаемся записать точное значение 1/3 в виде десятичной дроби, то потребуется бесконечная последовательность троек. Математики обозначают такую бесконечную последовательность горизонтальной чертой над 3. Именно эту форму записи мы видим в Pyret. А в Python выводится частичная последовательность троек.

За этим различием скрываются некоторые любопытные подробности представления чисел в компьютерах. У компьютеров нет бесконечного пространства (памяти) для хранения чисел (или чего-либо еще, собственно говоря): когда программе нужно работать с бесконечной десятичной дробью, в языке низкого уровня существуют два возможных варианта:

- приближенное представление числа (отсечение бесконечной последовательности цифр в некотором месте), затем продолжение работы с этим приближенным значением;
- сохранение для такого числа дополнительной информации, которая может позволить выполнить более точные вычисления с его использованием в дальнейшем (хотя всегда существуют такие числа, которые невозможно точно представить в конечном пространстве).

В Python используется первый способ. Поэтому вычисления с приближенными значениями иногда дают приблизительные результаты. Именно это и произошло в тестовом примере для новой функции `pen_cost`. С математической точки зрения это вычисление должно дать результат 0.93, но из-за использования приближенного значения получилось число 0.9299999999999999.

А как же написать тесты для такой ситуации? Необходимо сообщить Python, что ответ должен быть «близким» к 0.93 в пределах диапазона допустимой ошибки приближения. Это должно выглядеть так:

```
assert pen_cost(3, "wow") == pytest.approx(0.93)
```

Мы «запаковали» требуемый точный ответ в функцию `pytest.approx`, чтобы объявить, что приемлемым является любой ответ, который достаточно близок к заданному значению. Если необходимо, то можно управлять количеством десятичных знаков для определения требуемой точности, но чаще всего заданного по умолчанию предела точности  $\pm 2.3e-06$  вполне достаточно.

## 23.5. УСЛОВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Продолжая рассматривать исходный пример `pen_cost`, представляем Python-версию функции, которая вычисляет стоимость доставки заказа:

```
def add_shipping(order_amt: float) -> float:
    """increase order price by costs for shipping"""
    # """Увеличение суммы заказа на стоимость доставки."""
    if order_amt == 0:
        return 0
    elif order_amt <= 10:
        return order_amt + 4
    elif (order_amt > 10) and (order_amt < 30):
        return order_amt + 8
    else:
        return order_amt + 12
```

Здесь основное отличие состоит в том, что `else if` в Python записывается как одно слово `elif`. Мы используем ключевое слово `return` для обозначения возвращаемого результата функции в каждой ветви условного выражения. Во всем остальном условные конструкции почти одинаковы в обоих языках.

Возможно, вы заметили, что в Python не требуется явная аннотация `end` в выражениях `if` или в функциях. Вместо этого Python отслеживает сдвиг вправо строк кода для определения места завершения конструкции. Например, в примере кода для `pen_cost` и `test_pen` Python определяет, что функция `pen_cost` завершена, потому что обнаруживает новое определение (для функции `test_pens`) на левой границе текста программы. Точно такое же правило соблюдается и для определения завершения условных выражений.

Продолжая работу с Python, мы будем возвращаться к теме сдвига вправо строк кода и рассмотрим больше примеров.

## 23.6. СОЗДАНИЕ И ОБРАБОТКА СПИСКОВ

Чтобы рассмотреть пример списка, предположим, что мы сыграли в игру, цель которой – составление слов из набора букв. В Pyret можно было бы записать образец списка слов, как показано ниже:

```
words = [list: "banana", "bean", "falafel", "leaf"]
```

В Python это определение должно выглядеть так:

```
words = ["banana", "bean", "falafel", "leaf"]
```

Здесь единственное различие состоит в том, что в Python не используется метка `list:`, которая обязательна в Pyret.

## 23.6.1. Фильтры, отображения и друзья

Когда мы знакомились со списками в Pyret, то начали с изучения встроенных функций, таких как `filter`, `map`, `member` и `length`. Мы также рассмотрели лямбда-функции (`lambda`), помогающие использовать некоторые из функций в более компактном виде. Такие же функции, включая `lambda`, существуют и в Python. Ниже приведено несколько примеров:

```
words = ["banana", "bean", "falafel", "leaf"]

# Фильтрация и проверка наличия в списке.
words_with_b = list(filter(lambda wd: "b" in wd, words))
# Фильтрация и вычисление длины.
short_words = list(filter(lambda wd: len(wd) < 5, words))
# Отображение и вычисление длины.
word_lengths = list(map(len, words))
```

Обратите внимание: функцию `list` мы должны использовать как обертку для вызовов функции `filter` (и `map`). Во внутренней среде Python эти функции должны возвращать тип данных, который мы пока еще не рассматривали (это и не требуется). Применение `list` позволяет преобразовать возвращаемые данные в список. Если исключить `list`, то вы не сможете объединить в цепочку некоторые функции. Например, если попытаться вычислить длину результата, возвращаемого `map`, без преобразования в `list`, то выводится сообщение об ошибке:

```
>>> len(map(len,b))
TypeError: object of type 'map' has no len()
```

Не беспокойтесь, если это сообщение об ошибке сейчас выглядит для вас не имеющим смысла (мы пока еще не рассматривали, что такое «объект»). Здесь суть заключается в том, что если вы видите подобное сообщение об ошибке при попытке использования результата `filter` или `map`, то, вероятнее всего, вы забыли обернуть этот результат в `list`.

---

### Упражнение 23.2

Примените на практике знания о функциях списка Python, записывая выражения для приведенных ниже задач. Используйте только те функции списка, которые мы рассмотрели до сих пор.

- Задан список чисел, преобразовать его в список строк "pos", "neg", "zero" с учетом знака каждого числа.
  - Задан список строк. Равна ли длина каждой строки 5?
  - Задан список чисел, создать список четных чисел от 10 до 20 из этого списка.
- 

Мы намеренно сосредоточили внимание на вычислениях, использующих встроенные функции Python для обработки списков, вместо того чтобы по-

казать, как писать собственные функции (как это было сделано с рекурсией в Pyret). Вы можете писать рекурсивные функции для обработки списков в Pyret, но для этой цели больше подходит другой стиль программирования. Мы рассмотрим его в главе 25.

## 23.7. ДАННЫЕ С КОМПОНЕНТАМИ

Аналог определения данных в Pyret (без вариантов) в Python называется классом данных (`data-class`). Вот пример типа данных `todo-list` (список планируемых дел) в Pyret и соответствующий ему код Python:

```
# Элемент списка todo в Pyret.
data ToDoItemData:
    | todoItem(descr :: String,
              due :: Date,
              tags :: List[String])
end

-----
# Этот же элемент списка todo в Python.

# Обеспечение использования dataclass.
from dataclasses import dataclass
# Обеспечение использования дат как типа данных (в элементе ToDoItem).
from datetime import date
```

```
@dataclass
class ToDoItem:
    descr: str
    due: date
    tags: list

# Пример списка элементов ToDoItem.
MyTD = [ToDoItem("buy milk", date(2020, 7, 27), ["shopping", "home"]),
        ToDoItem("grade hwk", date(2020, 7, 27), ["teaching"]),
        ToDoItem("meet students", date(2020, 7, 26), ["research"])
    ]
```

Здесь необходимо отметить следующее:

- для типа и для конструктора существует единое имя, в отличие от различных имен, которые использовались в Pyret;
- между именами полей нет запятых (но каждое определение имени должно быть отдельной строкой в коде Python);
- не существует способа определения типа содержимого списка в Python (по крайней мере, без использования более продвинутых пакетов для записи типов);
- аннотация `@dataclass` должна располагаться перед определением класса `class`;

Те, кто имеет опыт работы с Python, могут задать вопрос: почему мы используем классы данных вместо словарей или обычных классов. По сравнению со словарями, классы данных позволяют использовать подсказки типов и строго определяют, что наши данные имеют фиксированный набор полей. По сравнению с обычными классами, классы данных генерируют много шаблонного кода, что делает их намного проще, чем обычные классы.

- классы данных не поддерживают создание типов данных с несколькими вариантами, как это часто делалось в Pyret. Для этого требуются более продвинутые концепции, которые мы рассмотрим в этой книге.

## 23.7.1. Доступ к полям внутри классов данных

В Pyret мы извлекали поле из структурированных данных, используя точку, чтобы добраться до требуемого элемента данных и получить доступ к конкретному полю. Та же форма записи работает и в Python:

```
>>> travel = ToDoItem("buy tickets", date(2020, 7, 30), ["vacation"])
>>> travel.descr
"buy tickets"
```

## 23.8. Обход списков

### 23.8.1. Представляем циклы for

В Pyret мы писали рекурсивные функции для вычисления суммарных значений по спискам. Напомним Pyret-функцию, которая суммирует числа в списке:

```
fun sum-list(numlist :: List[Number]) -> Number:
  cases (List) numlist:
    | empty => 0
    | link(fst, rst) => fst + sum-list(rst)
  end
end
```

В Python не принято разделять список на первый компонент и остальную часть и рекурсивно обрабатывать остальную часть. Вместо этого используется специальная конструкция `for` для поочередного посещения каждого элемента списка. Ниже показана форма `for`, использующая конкретный список (пример) нечетных чисел:

```
for num in [5, 1, 7, 3]:
  // Здесь что-то делается с каждым числом num.
```

Здесь имя `num` выбирает пользователь точно так же, как имена параметров для функции в Pyret. При выполнении цикла `for` каждый элемент в этом списке поочередно связывается с именем `num`. Таким образом, приведенный выше пример цикла `for` равнозначен следующей записи:

```
// do something with 5
// do something with 1
// do something with 7
// do something with 3
```

Такая конструкция `for` позволяет нам избежать многократной записи повторяющихся строк кода, а также подтверждает тот факт, что обрабатываемые списки могут иметь произвольную длину (так что мы не можем предсказать, сколько раз придется написать повторяющуюся строку кода).

Теперь используем `for` для вычисления суммы с накоплением для списка. Начнем с определения повторяющегося вычисления и снова воспользуемся приведенным выше примером списка. Сначала запишем выражение повторяющегося вычисления на обычном разговорном языке. В Pyret повторяющееся вычисление выражалось строками «прибавить первый элемент к сумме остальных элементов». Мы уже отметили, что нельзя так же просто получить доступ к «остальным элементам» в Python, поэтому необходимо изменить формулировку. Вот другой вариант:

```
// set a running total to 0
// add 5 to the running total
// add 1 to the running total
// add 7 to the running total
// add 3 to the running total
```

Обратите внимание: что эта постановка задачи относится не к «остальной части вычислений», а скорее к вычислениям, которые произошли до сих пор («промежуточный итог»). Если вы тщательно проработали материал подраздела 10.8.2, то, возможно, такая постановка задачи вам знакома.

Преобразуем этот предварительный набросок в исходный код, заменяя каждую его строку конкретным кодом. Сделаем это, воспользовавшись переменной `run_total`, и будем обновлять ее значение для каждого элемента.

```
run_total = 0
run_total = run_total + 5
run_total = run_total + 1
run_total = run_total + 7
run_total = run_total + 3
```

До настоящего момента мы не рассматривали возможность присваивания нового значения существующему имени переменной. В действительности, когда мы впервые наблюдали, как именуются значения (в разделе 4.3), то явно заявляли, что Pyret не позволяет это делать (по крайней мере, в конструкциях, которые мы демонстрировали). В Python присваивание нового значения разрешено. Более подробно мы рассмотрим последствия этой возможности в главе 25. А сейчас просто воспользуемся ею, чтобы изучить шаблон для обхода списков. Сначала свернем все повторяющиеся строки кода в одну, применив цикл `for`:

```
run_total = 0
for num in [5, 1, 7, 3]:
    run_total = run_total + num
```

Этот код превосходно работает с конкретным списком, но в Pyret-версии суммируемый список передавался как параметр в функцию. Чтобы сделать

так же в Python, обернем цикл `for` в функцию, как это делалось в предыдущих примерах в этой главе. Ниже приведена окончательная версия.

```
def sum_list(numlist : list) -> float:
    """Вычисление суммы списка чисел."""
    run_total = 0
    for num in numlist:
        run_total = run_total + num
    return(run_total)
```

### **Выполните прямо сейчас**

Напишите набор тестов для функции `sum_list` (Python-версии).

После завершения создания Python-версии сравним ее с исходной Pyret-версией:

```
fun sum-list(numlist :: List[Number]) -> Number:
    cases (List) numlist:
        | empty => 0
        | link(fst, rst) => fst + sum-list(rst)
    end
end
```

По этим двум фрагментам кода необходимо сделать следующие замечания:

- для Python-версии требуется переменная (здесь: `run_total`) для хранения результата вычисления, постепенно формируемого при обходе (последовательной обработке) списка;
- начальное значение этой переменной является ответом, возвращаемым в случае (варианте) `empty` в Pyret;
- вычисление в варианте `link` в функции Pyret используется для обновления этой переменной в теле цикла `for`;
- после того как в цикле `for` завершена обработка всех элементов списка, Python-версия возвращает значение этой переменной как результат выполнения функции.

### **23.8.1.1. Небольшое отступление о порядке обработки элементов списка**

Если мы подробнее рассмотрим, как выполняются обе программы, то обнаружится еще одна тонкость: Python-версия суммирует элементы слева направо, тогда как Pyret-версия вычисляет сумму справа налево. В частности, последовательность значений `run_total` вычисляется так:

```
run_total = 0
run_total = 0 + 5
run_total = 5 + 1
run_total = 6 + 7
run_total = 13 + 3
```

И напротив, в Pyret-версии суммирование развертывается следующим образом:

```
sum_list([list: 5, 1, 7, 3])
5 + sum_list([list: 1, 7, 3])
5 + 1 + sum_list([list: 7, 3])
5 + 1 + 7 + sum_list([list: 3])
5 + 1 + 7 + 3 + sum_list([list:])
5 + 1 + 7 + 3 + 0
5 + 1 + 7 + 3
5 + 1 + 10
5 + 11
16
```

Напомним, что Pyret-версия выполняла вычисления именно так, потому что операция `+` в варианте `link` может свестись к ответу только после вычисления суммы остальной части списка. Даже притом, что с точки зрения человека видна цепочка операций `+` в каждой разворачивающейся строке, сам Pyret видит только выражение `fst + sum-list(rst)`, которое требует завершения вызова функции перед выполнением операции `+`.

При суммировании списка мы не замечаем различия между этими двумя версиями, потому что получается одна и та же сумма независимо от того, вычисляется она слева направо или справа налево. В других функциях, которые мы пишем, это различие может стать значимым.

## 23.8.2. Использование циклов `for` в функциях, создающих списки

Расширим практические навыки в использовании циклов `for` в другой функции, которая выполняет обход списков, на этот раз в функции, создающей список. В частности, напишем программу, которая принимает список строк и создает список слов из этого списка, содержащих букву «z».

Как и в функции `sum_list`, потребуется переменная для хранения формируемого итогового списка. В приведенном ниже коде это переменная с именем `zlist`. В коде также показано, как использовать ключевое слово `in` для проверки присутствия символа в строке (это также работает для проверки присутствия элемента в списке) и как добавить элемент в список (операция `append`).

```
def all_z_words(wordlist : list) -> list:
    """produce list of words from the input that contain z"""
    """Создание списка слов, содержащих z, из входных данных."""
    zlist = [] // Начинаем с пустого списка.
    for wd in wordlist:
        if "z" in wd:
            zlist = [wd] + zlist
    return(zlist)
```

Этот код аналогичен структуре функции `sum_list`, и здесь мы обновляем значение переменной `zlist`, используя выражение, похожее на то, что должно было бы использоваться в Pyret.

Для тех, кто ранее уже имел опыт работы с Python и использовал бы здесь `zlist.append`, запомните эту идею. Мы вернемся к ней в разделе 26.1.

---

### Упражнение 23.3

Напишите тесты для функции `all_z_words`.

---

---

---

### Упражнение 23.4

Напишите вторую версию `all_z_words` с использованием `filter`. Не забудьте написать тесты для этой версии.

---

---

---

### Упражнение 23.5

Сравните эти две версии и соответствующие тесты. Не заметили ли вы что-либо интересное?

---

---

## 23.8.3. Резюме: шаблон обработки списков для Python

Подобно шаблону для написания функций обработки списков в Pyret, в Python существует соответствующий шаблон, основанный на циклах `for`. Напомним, что этот шаблон выглядит следующим образом:

```
def func(lst: list):
    result = ...          # Что возвращать, если входной список пуст.
    for item in lst:
        # Объединить элемент с результатом, полученным на текущий момент.
        result = ... item ... result
    return result
```

Помните об этом шаблоне, когда будете учиться писать функции для обработки списков на Python.

Часть

V

---

# ПРОГРАММИРОВАНИЕ С СОХРАНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

# Глава 24

---

## Изменение структурированных данных

Многие программы работают с данными, которые со временем обновляются: как пользователи обычных программных приложений мы отмечаем сообщения электронной почты как прочитанные, добавляем элементы в списки покупок, добавляем записи в календари и обновляем сроки выполнения дел в изменяющихся планах на день. Мы пока еще не писали программы, которые обновляют данные, но теперь вы обладаете базовыми навыками, необходимыми для того, чтобы научиться это делать.

Оказывается, есть несколько различных типов обновлений, которые можно выполнить для данных. Рассмотрим снова пример списка запланированных дел: можно добавлять элементы в список (или, что еще лучше, удалять их), но нам также необходимо обновлять подробности существующих элементов (например, их описания или сроки выполнения). Сначала мы научимся обновлять подробности существующих элементов.

Напомним: существует класс данных для элемента `ToDoItem`, а к нему прилагаются примеры данных:

```
@dataclass
class ToDoItem:
    descr : str
    due : date
    tags : list

milk_item = ToDoItem("buy milk", date(2020, 7, 27), ["shopping", "home"])
grading_item = ToDoItem("grade hwk", date(2020, 7, 28), ["teaching"])
paper_item = ToDoItem("meet students", date(2020, 7, 26), ["research"])

todo_list = [grading_item, milk_item, paper_item]
```

## 24.1. ИЗМЕНЕНИЕ ПОЛЕЙ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ

В Python мы изменяем поле класса данных, используя `=` для присваивания нового значения полю внутри структуры. Например:

```
milk_item.due = date(11, 15, 2020)
paper_item.descr = "meet Jack"
```

После этого первоначальное значение исчезает, оно заменяется новым значением. Это можно увидеть, получив доступ к полю (или заглянув в панель каталога программы, если в вашей среде программирования есть такая возможность):

```
print(milk_item.due)
```

### **Выполните прямо сейчас**

Проверьте значение в `todo_list`. Элемент `milk_item` содержит первоначальную дату или новую?

Поскольку мы изменили содержимое элемента `milk_item`, который находился в списке, `todo_list` выводит новую дату. Это очень важно. Изменения, которые мы вносим, используя одно имя в каталоге программы, могут быть видимыми через другое имя. Это происходит, когда мы установили отношения между данными (например, поместили элемент класса данных в список, и при этом существуют имена как для элемента, так и для списка). Именно из-за этой тонкости мы до настоящего момента откладывали рассмотрение операций обновления данных (в этой главе и в следующей мы будем подробно разбираться со всеми тонкостями и последствиями этих операций).

Теперь напишем функцию изменения даты в `ToDoItem`:

```
def modify_duedate(forItem : ToDoItem, new_date : date):
    """change due date on given item to the new date"""
    """Изменение даты выполнения для заданного элемента на новую дату."""
    forItem.due = new_date
```

Что возвращает эта функция? Как выясняется, ничего. Ее цель заключается не в генерации ответа, а просто в обновлении некоторого фрагмента данных. Обратите внимание: здесь нет инструкции `return`. Если выполнить эту функцию, то Python просто снова выведет промпт, не показывая никакого результата.

Но как протестировать процедуру/функцию, которая ничего не возвращает? Вся наша практика тестирования до сих пор была основана на вызове функций и проверке их ожидаемых ответов. Если функция обновляет данные, то необходимо проверить правильность выполненного обновления. Другими словами, мы проверяем ожидаемый эффект (expected effect) вызова

функции. В рассматриваемом здесь примере ожидаемый эффект заключается в том, чтобы поле `due` в заданном элементе `ToDoItem` содержало новую дату. Также ожидается, что прочие поля (`descr` и `tags`) не изменились. Ниже приведен пример тестовой функции:

```
def test_modify_duedate():
    # УСТАНОВКА НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ.
    item = ToDoItem("register", date(2020, 11, 9), ["school"])

    # ВНЕСЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ.
    modify_duedate(item, date(2020, 11, 15))

    # ПРОВЕРКА ЭФФЕКТОВ.
    assert item.due == date(2020, 11, 15)
    assert item.descr == "register"
    assert item.tags == ["school"]
```

Эта тестовая функция длиннее тех, что мы писали ранее. Строки (комментариев) в ней служат метками для трех шагов проверки обновлений: мы устанавливаем начальное условие, т. е. создаем тестовые данные, вызываем функцию для изменения данных, затем проверяем ожидаемые эффекты этого изменения. Хотя эти строки не являются строго необходимыми, мы считаем, что такие метки являются полезными указаниями и для автора, и для тех, кто будет читать код в дальнейшем.

## 24.2. Изменение совместно используемых данных

Предположим, что вам предстоит очень важный телефонный звонок, поэтому вы сделали несколько записей в to-do списке, чтобы не упустить этот звонок из виду. К тому времени, когда вы создали третий элемент, вы устали вводить текст вручную, поэтому решили повторно использовать определение второго элемента, но с новым именем:

```
call1 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call2 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call3 = call2
```

### Выполните прямо сейчас

Нарисуйте схему каталога программы для приведенного выше кода.

Каталог программы:

```
call1 → ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call2 → ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call3 → ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
```

В каталоге предполагается, что все три звонка одинаковы. Это можно подтвердить, выполнив следующие команды:

```
>>> call1 == call2
True
>>> call2 == call3
True
```

Неожиданно оказывается, что Фреда нет в офисе, поэтому теперь вы должны позвонить Тине. Вы решаете обновить напоминания о звонке, чтобы отобразить это изменение.

### **Выполните прямо сейчас**

Напишите команду для изменения описания в элементе call3 на строку "call Tina" вместо "call Fred" (очень скоро мы доберемся и до двух других элементов).

С учетом того, что мы только что узнали, требуется следующая операция:

```
call3.descr = "call Tina"
```

Проверим, отображает ли call3 новое значение:

```
>>> call3
ToDoItem("call Tina", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
```

Приведенная выше операция исправляет запись call3. Можно предположить, что call1 и call2 продолжают содержать напоминание о необходимости звонка Фреду. Проверим:

```
>>> call1
ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
>>> call2
ToDoItem("call Tina", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
```

Стоп! Запись call2 уже изменилась. Более того, ранее выполненная проверка того, что call1 и call2 ссылаются на одно и то же значение, теперь возвращает False, даже несмотря на то, что мы явно не изменяли никакие поля в обеих этих записях.

```
>>> call1 == call2
False
```

Если мы снова зададим вопрос о том, что call2 и call3 имеют одинаковые значения (которые они содержали перед обновлением), то обнаружим, что равенство сохранилось:

```
>>> call2 == call3
True
```

Возможно, результаты этой проверки не являются неожиданными. В конце концов, мы создали call3 на основе call2, когда написали call3 = call2. Но

при этом остается обескураживающий факт: выполнение строки кода (обновление `call3.descr = "call Tina"`), которая не имеет ничего общего с `call1` или `call2`, изменило отношение равенства == между `call1` и `call2`. Эти наблюдения показывают, что равенство является более тонким отношением, чем казалось на первый взгляд. Кроме того, каталог программы в настоящее время недостаточно совершенен, чтобы показать нам, что отношения между `call1` и `call2` отличаются от отношений между `call2` и `call3`. Начнем с каталога программы, затем вернемся к равенству.

## 24.3. Объяснение функционирования памяти

Каждый раз при использовании конструктора для создания данных ваша программная среда сохраняется в памяти компьютера. Память состоит из (большого) количества слотов. Вновь созданный элемент данных помещается в один из этих слотов. Каждый слот помечен адресом. Точно так же, как адрес на какой-либо улице относится к конкретному зданию, адрес памяти относится к определенному слоту, в котором хранится элемент данных. Слоты памяти являются физическими объектами, а не теоретическими. Компьютер с жестким диском на 500 Гб имеет 500 миллиардов слотов, в которых он может хранить данные. Не вся память доступна для вашей программной среды: в памяти хранится веб-браузер, приложения, операционная система и т. д. Ваша программная среда получает лишь часть памяти для хранения своих данных. Эта часть называется кучей (heap).

Когда вы пишете инструкцию, например:

```
call1 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
```

среда программирования помещает новый элемент `ToDoItem` в физический слот в куче, затем связывает адрес этого слота с именем переменной в каталоге программы. Имя в каталоге отображается не на само значение, а на адрес, который содержит это значение. Адрес служит своеобразным мостом между физической локацией памяти и отвлеченным именем, которое необходимо связать с новым элементом данных. Другими словами, в действительности каталог программы выглядит следующим образом:

Каталог программы:

```
call → @1001
```

Куча:

```
ToDoItem("call Fred" ...)
```

Эта пересмотренная версия содержит две отдельные области: каталог программы (отображающий имена в адреса) и кучу (показывающую значения, хранящиеся по конкретным адресам). Начальный адрес @1001 является произвольно выбранным: вы можете начать с любого адреса. Мы будем использовать четырехзначные числа, чтобы отличать адреса от небольших значений, используемых как данные в наших программах.

Такое усовершенствованное представление информации каталог-плюс-куча объясняет наблюдаемые выше отношения между элементами `call1`, `call2` и `call3` при обновлении `call3.descr`. Рассмотрим еще раз код, в кото-

ром эти имена были введены в каталог программы. Сначала мы создали два значения элементов данных `ToDoItem` и связали их с именами `call1` и `call2`:

```
call1 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call2 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
```

После выполнения этих двух инструкций каталог программы и куча выглядят следующим образом:

Каталог:

```
call1 → @1001
call2 → @1002
```

Куча:

```
@1001: ToDoItem("call Fred" ...)
@1002: ToDoItem("call Fred" ...)
```

Что происходит в момент, когда мы выполняем операцию `call3 = call2`? Эта инструкция выполняется точно так же, как и предыдущие: создается элемент каталога программы для `call3` и связывается с результатом выполнения правой части операции `=`. Здесь «результатом» вычисления является адрес, по которому хранится конкретное значение. Значение `call2` находится в локации с адресом `@1002`, так что этот адрес связывается с именем `call3`.

Каталог:

```
call1 → @1001
call2 → @1002
call3 → @1002
```

Куча:

```
@1001: ToDoItem("call Fred" ...)
@1002: ToDoItem("call Fred" ...)
```

Теперь, когда куча отделена от каталога, мы видим отношение между `call3` и `call2`: они ссылаются на один и тот же адрес, что, в свою очередь, означает, что они ссылаются на одно и то же значение. Но запись `call1` ссылается на другой адрес (который просто содержит значение с тем же содержимым поля).

Вы можете навести указатель мыши на маркеры локаций, чтобы увидеть соединения между каталогом программы и областями памяти.

## 24.4. ПЕРЕМЕННЫЕ И РАВЕНСТВО

Информация о существовании каталога программы и кучи позволяет нам вернуться к вопросу о том, что означает равенство. Рассматривая разработку инструкций `call1`, `call2` и `call3`, мы обратили внимание на то, что существуют (по меньшей мере) две формы равенства:

- два выражения (включающие их имена) вычисляются по одному и тому же адресу в куче;
- два выражения вычисляют значения одного и того же типа и с одинаковым содержимым полей, но могут размещаться по различным адресам в куче.

Оператор `==`, который мы рассматривали в Pyret и перенесли в Python, проверяет второе условие. Два выражения могут быть равными в смысле `==`, даже если ссылаются на различные адреса. Если нужно узнать, ссылаются ли два имени на один и тот же адрес, то используется операция `is`. В последний раз рассмотрим инструкции создания элементов `ToDoItem`:

```
call1 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call2 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call3 = call2
>>> call1 == call2
True
>>> call2 == call3
True
>>> call1 is call2
False
>>> call2 is call3
True
```

Оба понятия равенства полезны на практике, и действительно, большинство языков предоставляют два различных оператора сравнения на равенство: один для равенства адресов, другой для равенства значений (компонентов). В Python мы используем `is` для равенства адресов и `==` для равенства значений. Если вы тщательно проработали раздел 21.1, то наблюдали это различие в Pyret как `<=>` по сравнению с `==`. Pyret также предлагает понятие равенства, основанное на временном представлении. (Если вы не работали с разделом 21.1, то не встречались с этими вариантами проверки на равенство в Pyret.)

Продвигаясь вперед по курсу, вы будете постоянно улучшать свой практический навык, позволяющий точно определять, когда использовать каждый вид сравнения на равенство. Оператор `==` более удобен, поэтому обычно применяется по умолчанию. Если же действительно необходимо узнать, ссылаются ли два выражения на один и тот же адрес, то вы можете переключиться на `is`.

## 24.5. ХРАНЕНИЕ ПРОСТЫХ ДАННЫХ В ПАМЯТИ

Мы показали, как размещаются структурированные данные в новой структуре каталог-куча, но что можно сказать о простых данных? Например, если та же программа (пример, рассматриваемый в этой главе) создания записей о срочном звонке содержит еще и следующие две строки:

```
x = 4
y = 5
```

В этом случае соответствующее содержимое каталога/кучи должно выглядеть так:

Каталог:

```
call1 → @1001
call2 → @1002
call3 → @1002
x → 4
y → 5
```

Куча:

```
@1001: ToDoItem("call Fred" ...)
@1002: ToDoItem("call Fred" ...)
```

Отсюда видно, что простые данные существуют в каталоге программы, но не в куче. Весь смысл структурированных данных заключается в том, что они имеют как собственную идентичность, так и несколько компонентов. Куча дает доступ к обеим концепциям. Простые данные не могут быть разделены на компоненты (по определению). Таким образом, ничего не будет потеряно, если поместить их только в каталог программы.

А как насчет строк? До сих пор мы считали их простыми данными, но разве у них нет компонентов с точки зрения последовательности символов, составляющих строку? Да, с технической точки зрения это верно. Но мы рассматриваем строки как простые данные, поскольку не используем операции, изменяющие эту последовательность символов. Это весьма тонкий момент, который обычно проявляется на более поздних курсах информатики. В этой книге мы будем оставлять строки в каталоге, но если вы пишете программы, которые изменяют внутренние символы, то поместите строки в кучу.

# Глава 25

---

## Изменение переменных

Теперь мы видели две разные формы обновлений в программах: обновления полей структурированных данных в главе 24 и обновления значений, связанных с именами, при вычислении над списками с помощью циклов `for` в разделе 23.8. На первый взгляд эти две формы обновления выглядят одинаково:

```
call3.descr = "call Tina"  
run_total = run_total + fst
```

Обе инструкции используют оператор `=` и вычисляют новое значение в правой части. Но левые части немного различны: одна представляет собой поле внутри значения, а другая – имя в каталоге. Это различие оказывается существенным, как можно видеть в процессе работы с этими двумя формами на уровне каталога программы и кучи. Мы рассматривали такую работу для обновления `call3.descr` в предыдущей главе. Теперь рассмотрим процедуру обновления `run_total`.

### 25.1. Изменение переменных в памяти

Снова обратимся к более раннему примеру кода для суммирования чисел в списке:

```
run_total = 0  
for num in [5, 1, 7, 3]:  
    run_total = run_total + num
```

В первой строке создается запись в каталоге программы:

Каталог программы:

```
run_total → 0
```

Цикл `for` также создает запись в каталоге программы, но в этом случае для переменной `num`, используемой для ссылки на элементы списка. Следовательно, каталог выглядит так:

---

Каталог программы:

```
run_total → 0
num → 5
```

Внутри цикла `for` вычисляется новое значение `run_total`. Использование оператора `=` сообщает Python о необходимости изменения значения переменной `run_total` в каталоге.

Каталог программы:

```
run_total → 5
num → 5
```

Процесс продолжается: Python передвигает `num` к следующему элементу списка.

Каталог программы:

```
run_total → 5
num → 1
```

Затем Python изменяет значение `run_total`:

Каталог программы:

```
run_total → 6
num → 1
```

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут обработаны все элементы списка.

По итогам подробного рассмотрения процесса суммирования можно сделать два вывода:

- 1) конструкция `=` связывает имя со значением. Если этого имени пока нет в каталоге, оно добавляется. Если имя уже существует в каталоге, то новое значение заменяет старое. После этого старое значение становится недоступным;
- 2) циклы `for` также добавляют имя в каталог, в частности то имя, которое программист выбрал для ссылки на отдельные элементы списка. Python изменяет значение этого имени как часть обработки в цикле `for`.

Пока еще возможность изменения значений, связанных с именами, вероятно, не выглядит таким уж большим достижением, но в последующих программах будет показано, как такая возможность становится все более интересной.

---

## Упражнение 25.1

Изобразите последовательность изменения содержимого каталога для следующей программы:

```
score = 0
score = score + 4
score = 10
```

---

### Упражнение 25.2

Изобразите последовательность изменения содержимого каталога для следующей программы:

```
count_long = 0
for word in ["here", "are", "some", "words"]:
    if len(word) > 4:
        count_long = count_long + 1
```

В главе 24 мы наблюдали, как инструкция в форме `call3 = call2` после изменения, внесенного в содержимое `call3.descr`, также влияет на значение `call3`. Возникает ли тот же эффект, если мы обновляем значение переменной напрямую, а не через поле? Рассмотрим следующий пример:

```
y = 5
x = y
```

**Выполните прямо сейчас**

Как выглядит каталог программы и куча после выполнения приведенного выше кода?

Поскольку `x` и `y` присвоены простые значения, в куче нет никаких меток:

Каталог программы:

```
y → 5
x → 5
```

**Выполните прямо сейчас**

Если теперь выполнить присваивание `y = 3`, то изменится ли значение `x`?

Не изменится. Значение, связанное с `y` в каталоге, изменится, но между `x` и `y` нет никакой связи в каталоге программы. Команда `=` связывает значение, отображенное на `y`, с `x`, но это не то же самое, что взаимное отслеживание состояний двух переменных. При каждом обновлении значения, связанного с именем (в отличие от поля), изменяется только каталог программы. Следовательно, в итоге каталог выглядит следующим образом:

Каталог программы:

```
y → 3
x → 5
```

Причиной того, что значение `x` не изменилось, является форма обновления: `name = ...`. При этом не имеет никакого значения тот факт, что `x` и `y` были связаны с простыми данными. Например, ниже показан другой способ, которым можно было бы выполнить обновление в рассматриваемой выше программе, чтобы запись `call3` сообщала о необходимости позвонить Тине.

```
call1 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call2 = ToDoItem("call Fred", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
call3 = call2
call3 = ToDoItem("call Tina", date(2020, 11, 19), ["urgent"])
```

### **Выполните прямо сейчас**

Запишите содержимое каталога и кучи после выполнения приведенной выше программы.

У вас должен получиться следующий результат:

Каталог программы:

```
call1 → @1001
call2 → @1002
call3 → @1003
```

Куча:

```
@1001: ToDoItem("call Fred" ...)
@1002: ToDoItem("call Fred" ...)
@1003: ToDoItem("call Tina" ...)
```

В этой версии обновление элемента `ToDoItem`, связанного с `call3`, не влияет на поле `descr` элемента `call2`. Обновление через поля воздействует на обе переменные, тогда как обновление переменных напрямую не воздействует. Это одно из наиболее часто возникающих затруднений для тех, кто начинает изучать программирование. Инструкции, подобные `varg1 = var2`, не устанавливают отношение, которое постоянно существует между переменными. Кроме того, такие инструкции не являются коммутативными, т. е. `varg1 = var2` и `var2 = var1` вносят неодинаковые изменения в каталог программы. Переменной слева от `=` присваивается новое значение в каталоге, и это значение представляет собой результат вычисления правой части. Если выражение справа от `=` является простой переменной, то ее значение извлекается из каталога и присваивается переменной в левой части.

Существует ли какой-либо способ заставить переменные отслеживать значения друг друга? Нет, но, как мы видели в первой версии (на основе полей) обновления `call3`, для двух переменных существует возможность ссылаться на один и тот же элемент структурированных данных, следовательно, совместно использовать вносимые изменения. В дальнейшем мы увидим больше примеров такой связи.

В конечном счете эта книга пытается научить вас работать с разнообразными типами информации, которые могут встретиться в реальном проекте. До сих пор наше внимание было сосредоточено на структуре информации (таблицы, списки и типы/классы данных), а также на том, как писать программы для обработки таких структур.

Но теперь мы начинаем рассматривать дополнительный вопрос: нужно ли совместно использовать какие-либо данные в разных частях программы, чтобы несколько частей программы могли изменять данные и видеть эти изменения? До сих пор мы наблюдали, как работают классы данных, когда они совместно используются. Можно ли аналогичным образом совместно использовать списки? Как это будет выглядеть? Эти вопросы мы рассмотрим в дальнейшем.

### Стратегия: правила обновления каталога программы и кучи

Подводя итог всему сказанному выше, предлагаем краткие правила обновления каталога программы и памяти:

- мы добавляем память, когда используется конструктор данных;
- мы обновляем память, когда выполняется присваивание нового значения полю с существующими данными;
- мы добавляем запись в каталог программы, когда имя используется в первый раз (в том числе параметры и внутренние переменные при вызове функции);
- мы обновляем каталог, когда имени, уже существующему в каталоге, присваивается новое значение.

## 25.2. ИЗМЕНЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ, СВЯЗАННЫХ СО СПИСКАМИ

Расширим еще немного область нашего изучения методики обновлений, на этот раз будем рассматривать обновления списков. Начнем со списка простых данных: строк, представляющих голоса, поданные в ходе опроса. Нам потребуются функции, позволяющие людям голосовать, а также функции для подсчета голосов, отданных за определенные варианты, и функции для определения варианта, набравшего наибольшее количество голосов.

В качестве конкретного примера предположим, что студенты участвуют в опросе о предпочтаемых десертных блюдах. Начнем с определения исходного (пустого) списка поданных голосов:

```
theVotes = []
```

Это определение должно создать запись в каталоге программы:

Каталог программы:

```
theVotes → []
```

#### **Выполните прямо сейчас**

Напишите последовательность из двух команд: первая добавляет "fruit" в список theVotes, вторая добавляет "churros".

Код должен выглядеть так:

```
theVotes = ["fruit"] + theVotes
theVotes = ["churros"] + theVotes
```

#### **Выполните прямо сейчас**

Изобразите каталог программы после выполнения показанных выше двух изменений.

Теперь каталог программы содержит один список со всеми его элементами:

Каталог программы:

```
theVotes → ["churros", "fruit"]
```

### **Выполните прямо сейчас**

Почему эти новые элементы находятся в начале списка? Что необходимо изменить, чтобы новые элементы добавлялись не в начало, а в конец списка?

---

### **Упражнение 25.3**

Напишите функцию `count_votes_for`, которая принимает название десерта и возвращает число вхождений этого названия, обнаруженных в списке `theVotes`.

---



---



---

### **Упражнение 25.4**

Предположим, что теперь вам предложили определить, какой вариант получил наибольшее число голосов. Разработайте два различных плана решения задачи (см. раздел 8.2), которые должны выполнить это вычисление. Код писать не нужно, только планы.

---



---

## **25.3. Создание функций, изменяющих переменные**

Приведенные в предыдущем разделе две команды изменения списка одинаковы (как и следовало ожидать), за исключением подаваемого голоса (название десерта). Поскольку ожидается, что будет подано много голосов, имеет смысл превратить этот повторяющийся код в функцию. Как и в Pyret, мы создаем имя параметра для информации, которая различается в командах, а остальные команды становятся телом функции. Ниже показан предлагаемый код:

```
def cast_vote(item: str):
    """Add given item to the theVotes list"""
    """Добавление заданного элемента в список theVotes."""
    theVotes = [item] + theVotes
```

Если бы эта функция была единственным кодом в файле программы, то Python не принял бы такую версию. Появилось бы сообщение о том, что

переменная `theVotes` является несвязанной (`unbound`), т. е. с этим именем ничего не связано. Необходимо создать начальное значение `theVotes`, чтобы оно существовало в каталоге программы. В предыдущем разделе мы начали с исходного пустого списка голосов. Его следует включить в файл программы.

```
theVotes = []  
  
def cast_vote(item: str):  
    """Add given item to the theVotes list"""  
    """Добавление заданного элемента в список theVotes."""  
    theVotes = [item] + theVotes
```

Если мы попытаемся загрузить (для выполнения) этот файл, то Python опять сообщит, что переменная `theVotes` является несвязанной. Но мы же только что определили ее. Из-за чего могла возникнуть проблема?

Проблема заключается в том, где именно определяется переменная. Здесь мы пытаемся изменить переменную внутри функции, но эта переменная создана за пределами функции. Когда мы писали функцию `sum_list`, переменная с наращиваемой суммой была создана и изменялась внутри этой же функции. Здесь же переменная `theVotes` определена вне функции. Почему это может иметь значение? Ответ следует искать в каталоге.

## 25.3.1. Аннотация `global`

При вызове любой функции язык программирования создает новую область каталога программы с пространством для локальной информации. Если мы создаем пустой список голосов, а затем вызываем `cast_vote("fruit")`, то в каталоге находится следующее содержимое непосредственно перед изменением списка:

Каталог программы:

```
theVotes → []
```

По умолчанию Python устанавливает для программы ограничение – разрешено изменять переменные только в локальном каталоге. Это разумное ограничение по умолчанию, потому что оно предотвращает нежелательное воздействие функций друг на друга при вызовах. Например, в функции `sum_list` необходимо суммировать каждый список независимо, без учета результатов суммирования одного списка, влияющего на вычисление суммы другого.

Но иногда возникает необходимость в том, чтобы данные из одного вызова функции оказывали воздействие на последующие ее вызовы. По существу, именно в этом заключен весь смысл существования переменной, в которой мы храним текущий список голосов. Поэтому необходимо сообщить Python, что требуется изменить значение переменной `theVotes`, которая находится за пределами локальной области. Ключевое слово Python `global` позволяет это сделать:

```
theVotes = []

def cast_vote(item: str):
    """add given item to the theVotes list"""
    """Добавление заданного элемента в список theVotes."""
    global theVotes
    theVotes = [item] + theVotes
```

Аннотация `global` используется с именем переменной, определенной за пределами той функции, которая должна изменять значение этой переменной. Эту аннотацию нельзя использовать для изменения значений переменных, созданных в других функциях, – только для переменных, определенных на том же уровне, что и функции в файле программы (это так называемый «верхний» уровень).

## 25.4. ТЕСТИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ИЗМЕНЯЮЩИХ ГЛОБАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Мы разработали `cast_vote`, создав функцию из двух команд с совместно используемым содержимым. Но мы не написали тесты для этой функции. Сейчас мы добавим тестирующую функцию.

### ***Выполните прямо сейчас***

Попробуйте написать вариант теста для `cast_vote`. Напишите либо конкретный тест (в форме `pytest`), либо вопрос, ответ на который должен помочь вам определить, как написать такой тест.

Следуя формату тестов, разработанному в разделе 23.3, мы предполагаем написать что-то вроде:

```
def test_cast_vote():
    assert cast_vote("basbousa") == ...
```

Чем заполнить место, обозначенное `...`? Как мы заметили при тестировании функции обновления описаний в элементах `ToDoItem`, пишутся тесты, которые проверяют эффекты обновления функций, а не возвращаемые ими результаты.

### ***Выполните прямо сейчас***

Какой эффект ожидается при вызове `cast_vote("basbousa")`? Изменяется список `theVotes`, поэтому в ответе ссылайтесь на `theVotes` или "basbousa".

Единственным утверждением, вытекающим из приведенной выше формулировки задачи, должно быть «список theVotes должен содержать "basbousa"». Можно ли превратить это утверждение в код для создания варианта теста? Да, и этот код показан ниже:

```
def test_cast_vote():
    cast_vote("basbousa")
    assert "basbousa" in theVotes
```

Этот пример демонстрирует главный смысл тестирования функций, изменяющих переменные. Вызов функции не включается в инструкцию `assert`, вместо этого мы сначала вызываем функцию, а затем пишем инструкцию `assert`, которая использует саму переменную для проверки ожидаемого изменения.

### **Выполните прямо сейчас**

Существуют ли другие ожидаемые изменения, которые мы должны проверить? Можете ли вы придумать такую версию функции `cast_vote`, которая прошла бы этот тест, но не сделала бы того, чего мы ожидали?

Предположим, что некто написал другую версию функции `cast_vote`:

```
theVotes = []

def cast_vote(item: str):
    """add given item to the theVotes list"""
    """Добавление заданного элемента в список theVotes."""
    global theVotes
    theVotes = [item]
```

Эта функция изменяет список `theVotes`, включая в него заданный элемент, но ошибочно отбрасывает остальную часть списка. Текущая тестовая функция `test_cast_vote` примет эту версию как правильную, а это означает, что необходимы дополнительные тесты.

### **Выполните прямо сейчас**

Какие еще ожидаемые эффекты вы можете указать в отношении к списку `theVotes` после выполнения этой функции? Можете ли вы сформулировать их как инструкции `assert` для переменной?

Одним из возможных ожидаемых эффектов является то, что список `theVotes` должен стать на один элемент длиннее по сравнению с состоянием до вызова функции. Ниже показано, как изменить `test_cast_vote`, чтобы включить это утверждение:

```
def test_cast_vote():
    pre_length = len(theVotes)
```

```
cast_vote("basbousa")
assert "basbousa" in theVotes
assert len(theVotes) == pre_length + 1
```

Здесь стратегия заключается в использовании локальной переменной для сохранения длины списка `theVotes` перед вызовом `cast_vote` и последующем использовании этого сохраненного значения для проверки ожидаемого воздействия после вызова.

### **Выполните прямо сейчас**

Существуют ли другие воздействия, которые следует учитывать? Может ли программа успешно пройти эти текущие два теста и все еще не делать то, что мы ожидаем?

Если мы начнем придумывать наихудшие сценарии, то можем представить себе вредоносное устройство для голосования, которое удваивает влияние голоса, удаляя старый голос и заменяя его двумя копиями вновь поданного голоса. Ниже приведен код, который должен делать именно это (`list[1:]` возвращает остальную часть списка. В общем случае `list[x:y]` возвращает подсписок от индекса `x` до индекса `y`, но не включая `y`).

```
theVotes = []

def cast_vote(item: str):
    """Add given item to the theVotes list"""
    """Добавление заданного элемента в список theVotes."""
    global theVotes
    theVotes = [item] + [item] + theVotes[1:]
```

Ну хорошо, да, такое могло бы произойти, но не становится ли генерация идей подобного рода немного неумеренной? И да, и нет. Если вы пишете тестовые примеры для устройства для голосования, вы непременно должны подумать о таких ситуациях (потому что люди, старающиеся повлиять на результаты выборов, могут попытаться применить подобные методы). Способность думать о том, как злоумышленники могут злоупотреблять системой, является ценным навыком (на этом можно построить карьеру). Но эта тема кажется почти безграничной, особенно в первом курсе программирования.

К счастью, у нас есть гораздо более систематический способ повысить надежность тестов. Вспомните, что мы предлагали написать функцию `count_votes_for` в качестве упражнения. Поскольку и `cast_vote`, и `count_votes_for` работают с переменной `theVotes`, мы должны проверить тот факт, что результаты `count_votes_for` соответствуют ожидаемым после того, как `cast_vote` изменяет переменную.

### **Выполните прямо сейчас**

Измените функцию `test_cast_vote` так, чтобы она также проверяла, что результаты `count_votes_for` изменяются в соответствии с ожиданиями.

Ниже приведена измененная версия тестовой функции:

```
def test_cast_vote():
    pre_length = len(theVotes)
    pre_count = count_votes_for("basbousa")
    cast_vote("basbousa")
    assert "basbousa" in cast_vote
    assert len(theVotes) == pre_length + 1
    assert count_votes_for("basbousa") == pre_count + 1
```

Соблюдая осторожность, мы также должны проверить, что количество голосов не изменилось для десерта, отличающегося от "basbousa".

### **Выполните прямо сейчас**

Добавьте тест для десерта, отличающегося от "basbousa".

Одно из затруднений здесь заключается в том, что нам неизвестно, какие еще голоса были поданы. С точки зрения этого теста подается только один голос, поэтому тест для любого другого десерта может проверять только десерты, которых нет в списке.

Улучшенная тестовая функция должна сформировать для списка theVotes конкретное содержимое, чтобы предоставить нам больше данных для обработки.

```
def test_cast_vote():
    theVotes = ["fruit", "churros", "fruit", "basbousa"]
    pre_length = len(theVotes)
    pre_count = count_votes_for("basbousa")
    pre_fruit = count_votes_for("fruit")
    cast_vote("basbousa")
    assert "basbousa" in cast_vote
    assert len(theVotes) == pre_length + 1
    assert count_votes_for("basbousa") == pre_count + 1
    assert count_votes_for("fruit") == pre_fruit
```

### **Выполните прямо сейчас**

Приведенный выше код изменил содержимое списка theVotes. При этом предполагается, что больше нет необходимости в сохранении информации о результатах выполнения функций перед вызовом cast\_vote. Можно было бы отредактировать инструкции assert так, чтобы использовать вычисленные вручную значения (например, 3 вместо pre\_length). Является ли удачной такая идея?

Разумеется, можно было бы удалить определения pre\_ и просто использовать конкретные числа в инструкциях assert. Когда вы начинаете разработку, возможно, предпочтительнее сделать именно так. Но преимущество показанных здесь исходных условий заключается в том, что мы можем изменить начальное значение theVotes (если мы подумаем о другом важном варианте

для проверки) без последующего изменения всех инструкций `assert`. Показанные здесь исходные условия также позволяют кому-либо другому читать инструкции `assert` и ясно понимать тестируемый эффект: правая часть `==`, например, `pre_count + 1` более информативна, чем конкретное число, например `2`. Помните: примеры и код предназначены для чтения другими людьми.

## 25.4.1. Внутренняя структура функции тестирования

Рассматриваемая здесь функция тестирования, кажется, становится слишком длинной. Но если мы рассмотрим ее более внимательно, то заметим, что в ней существует некоторая структура, которую мы выделим, добавив несколько пустых строк и пометив (комментариями) строки между основными задачами тестирования. (Напомним, что Python использует строки в качестве механизма комментариев.) Это те же самые метки, которые мы добавили в наш предыдущий пример функции тестирования для обновления описаний.

```
def test_cast_vote():
    # УСТАНОВКА НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ.
    theVotes = ["fruit", "churros", "fruit", "basbousa"]

    # СОХРАНЕНИЕ ТЕКУЩИХ ЗНАЧЕНИЙ.
    pre_length = len(theVotes)
    pre_count = count_votes_for("basbousa")
    pre_fruit = count_votes_for("fruit")

    # ВНЕСЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ.
    cast_vote("basbousa")

    # ПРОВЕРКА ЭФФЕКТОВ.
    assert "basbousa" in cast_vote
    assert len(theVotes) == pre_length + 1
    assert count_votes_for("basbousa") == pre_count + 1
    assert count_votes_for("fruit") == pre_fruit
```

В первом разделе выполняется начальная настройка тестовых данных. Во втором сохраняются все текущие значения, которые необходимы для тестов. В третьем выполняются вызовы функций, которые требуется протестировать. В последнем разделе проверяются эффекты с помощью инструкций `assert`. Представленная в таком формате, длинная функция выглядит более управляемой. Метки-комментарии также напоминают нам о главных задачах, связанных с тестовыми функциями, которые изменяют переменные.

## 25.4.2. Общие выводы о тестировании изменений

Какие выводы можно сделать из всего сказанного выше?

- При тестировании функций, изменяющих переменные, мы тестируем утверждения об эффектах при выполнении этих функций.

- Систематический способ определения тестируемых эффектов заключается в применении других функций, использующих изменяемую переменную. Тестирование основных свойств, таких как длина, также может оказаться полезным.
- Существуют четыре задачи тестирования функций, которые изменяют переменные: начальная настройка исходных данных, сохранение текущих значений, вызов функций для тестирования и проверка эффектов выполнения.

Не кажется ли вам, что теперь, когда переменные изменяются, тестирование усложнилось? Так и есть. Когда в функциях нет совместно используемых и изменяемых переменных, мы можем тестировать каждую функцию по отдельности. Но как только одна функция изменяет значение переменной, которую используют и другие функции, мы должны быть полностью увереными в том, что эта изменяющая функция не нарушает ожидаемое поведение других функций. Переменные обладают большой мощью, но использование этой мощи подразумевает и увеличение ответственности.

### Стратегия: тестирование функций, которые изменяют данные

1. Запишите на обычном языке ожидаемые при изменении эффекты, воздействующие как на свойства значения переменной, так и на результаты других функций, использующих ту же переменную. Не забудьте рассмотреть ситуации, на которые это изменение не должно влиять.
2. Создайте шаблон-заготовку тестирующей функции с разделами для начальной настройки исходных данных, сохранения текущих значений, вызовов функций для тестирования и проверки эффектов выполнения.
3. В разделе настройки установите для тестируемой переменной конкретное значение.
4. В разделе вызовов функций напишите вызов функции, который необходимо протестировать.
5. Преобразуйте каждый из эффектов, которые вы хотите проверить, в инструкцию `assert`, именуя и сохраняя результаты вычисления всех значений до выполнения теста в разделе сохранения текущих значений.

# Глава 26

---

## Возврат к спискам и переменным

### 26.1. Обновление совместно используемого списка

В главе 24 мы видели, что могут существовать два имени, которые ссылаются на одно и то же значение класса данных в памяти. Таким образом, изменения, сделанные в одном элементе данных, видны в другом. Другими словами, могут существовать два имени, которые ссылаются на один и тот же элемент данных. Такая возможность может оказаться полезной и для списков. Например, у вас с соседом по комнате может быть совместно используемый список покупок, у регистратора и отдела финансовой помощи может быть общий список студентов и т. д. В обоих примерах обновление списка, сделанное одним человеком или офисом, должно быть видно другому. Как это можно реализовать в Python?

Более конкретный пример: предположим, что Шона (Shaunae) и Джонелла (Jonella) – соседки по комнате, которые по очереди покупают продукты. Обе они имеют доступ к совместно используемому списку покупок (через свои телефоны): каждый раз, когда одна из них добавляет или удаляет элемент, другая должна видеть это изменение. Как можно смоделировать это в коде?

#### **Выполните прямо сейчас**

Создайте список покупок для Шоны с несколькими элементами, затем присвойте тому же списку второе имя каталога, соответствующее Джонелле.

Возможно, вы написали код, более или менее похожий на приведенный ниже:

```
shaunae_list = ["bread", "coffee"]  
jonella_list = shaunae_list
```

Если вы загрузите этот код в интерактивную среду и посмотрите на оба списка, то заметите, что они содержат одинаковые значения.

### **Выполните прямо сейчас**

Джонелла обнаружила, что кончились яйца. В интерактивной среде после промпта выполните команду для добавления "eggs" в список Джонеллы, затем проверьте и убедитесь в том, что элемент "eggs" появился под обоими именами.

На основании материала о добавлении элементов в список, изложенного в подразделе 23.8.2, вероятно, вы написали приблизительно такой код:

```
>>> jonella_list = ["eggs"] + jonella_list
>>> jonella_list
["eggs", "bread", "coffee"]
>>> shaunae_list
["bread", "coffee"]
```

Что произошло? Изменился только список Джонеллы. При использовании операции + для объединения двух списков Python создает новый список из элементов существующего. Поскольку слева от = находится имя из каталога программы, Python изменяет каталог так, чтобы это имя ссылалось на новый список. При этом не сохраняется отношение между списками `jonella_list` и `shaunae_list`.

Разумеется, совместное использование списков является достаточно широко распространенным шаблоном программирования, и его можно реализовать. Такой способ существует, но при этом требуется работать со списками иначе, чем мы впервые увидели в главе 10.

## **26.1.1. Операции, изменяющие списки**

До настоящего момента мы использовали операцию + для объединения двух списков. Эта операция создает новый список. Python предлагает другую операцию `append` для изменения существующего списка посредством включения в него нового элемента. Ниже показан иной способ добавления элемента "eggs" в список Джонеллы.

```
>>> jonella_list.append("eggs")
>>> jonella_list
["bread", "coffee", "eggs"]
>>> shaunae_list
["bread", "coffee", "eggs"]
```

В этой версии Python находит адрес списка `jonella_list` в каталоге, с помощью оператора . переходит к указанному элементу данных в куче, затем обрабатывает существующий список, добавляя в него "eggs". В отличие от предыдущей версии, здесь не используется = для присваивания нового

значения имени `jonella_list`. Операция `append` обновляет список в куче. Поскольку `jonella_list` и `shaunae_list` ссылаются на один и тот же адрес в куче, добавление через `jonella_list` также становится видимым и при доступе к этому списку с помощью имени `shaunae_list`.

Аналогично, если Шона покупает "coffee", то она может удалить этот элемент из совместно используемого списка с помощью оператора `remove`:

```
>>> shaunae_list.remove("coffee")
>>> jonella_list
["bread", "eggs"]
>>> shaunae_list
["bread", "eggs"]
```

Здесь важен тот факт, что обе операции, `append` и `remove`, изменяют содержимое списка в куче. Если два имени ссылаются на один и тот же адрес кучи, то изменения, внесенные с использованием одного имени, видны и при доступе через другое.

Означает ли это, что всегда необходимо изменять списки с использованием `append` и `remove`? Вовсе нет. Иногда потребуется создание новых списков вместо изменения старых (скоро мы рассмотрим некоторые подобные случаи). Если необходимо изменение, которое должно быть видимым через все имена, ссылающиеся на список, используйте `append`. Если требуется добавление элемента, который должен быть видимым только через одно имя, используйте `+`.

## 26.2. СПИСКИ В ПАМЯТИ

В главе 24 мы изображали схемы каталог–куча, чтобы показать, как значения класса данных выглядят в куче. А как выглядят в куче списки? В Python списки хранятся посредством записи в память похожего на класс данных фрагмента, который содержит число элементов в списке, потом отдельные элементы, размещенные по последовательным адресам. Например, ниже показано, как выглядят списки покупок Шоны и Джонеллы после добавления элемента "eggs":

Каталог:

```
shaunae_list → @1001
jonella_list → @1002
```

Куча:

```
@1001: List(len:3)
@1002: "bread"
@1003: "coffee"
@1004: "eggs"
```

Для элементов этого списка записи в каталоге отсутствуют, но тот факт, что в элементе `List` указан размер 3, сообщает нам, что следующие три адреса являются частью этого списка.

Для преподавателей: по умолчанию список в Python реализован на основе массива, а не связного списка. Раздел о связных списках будет добавлен в одной из следующих редакций этой книги.

**Выполните прямо сейчас**

Изобразите схему памяти для следующей программы:

```
scores = [89,72,92]
colors = ["blue", "brown"]
scores.append(83)
```

Возникают ли у вас какие-либо вопросы?

После определения первых двух списков схема памяти должна выглядеть следующим образом (возможно, с другими начальными адресами):

Каталог:

```
scores → @1005
colors → @1009
```

Куча:

```
@1005: List(len:3)
@1006: 89
@1007: 72
@1008: 92
@1009: List(len:2)
@1010: "blue"
@1011: "brown"
```

Что происходит, когда мы добавляем 83 в список `scores`? Поскольку предполагается, что все элементы списка размещаются в следующих друг за другом смежных слотах памяти, значение 83 должно быть записано по адресу `@1009`, но этот адрес уже занят. Мы не должны уничтожить список `colors` только потому, что добавляем элемент в список `scores`.

На практике списки создаются с запасом некоторого дополнительного пространства, позволяющего в дальнейшем добавлять элементы. Ниже показана более точная схема.

Каталог:

```
scores → @1005
colors → @1014
```

Куча:

```
@1005: List(len:3, slots:8)
@1006: 89
@1007: 72
@1008: 92
@1009: None
@1010: None
@1011: None
@1012: None
@1013: None
@1014: List(len:2, slots:8)
@1015: "blue"
@1016: "brown"
@1017: None
@1018: None
@1019: None
@1020: None
@1021: None
@1022: None
```

Значение `None` в Python используется для сообщения «здесь ничего нет». Обратите внимание: элемент `List` тоже изменился – теперь он содержит два поля, одно для числа элементов, другое для количества слотов. Мы изменили и каталог так, чтобы он отображал новый адрес для списка `colors`.

Теперь есть место для выполнения операции `append` в списке `scores`. Значение 83 должно быть вставлено по адресу `@1009`, а поле `len` элемента `List` должно обновиться до 4.

Но может ли и в этом случае исчерпаться пространство для добавления элементов в список? Конечно, может. Когда это происходит, весь список перемещается в новую последовательность адресов с обеспечением достаточного пространства. Подробности этого процесса представляют собой отдельную, более сложную тему. В настоящий момент главный вывод заключается в том, что списки размещаются в непрерывных последовательных адресах памяти. Этот способ размещения будет особенно важен при изучении главы 27.

## 26.3. ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР: ДАННЫЕ ДЛЯ СОВМЕСТНО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ БАНКОВСКИХ СЧЕТОВ

Применим все, что мы узнали об изменении совместно используемых данных, для решения реальной практической задачи: обслуживание банковских счетов, совместно используемых несколькими людьми (например, деловыми партнерами или супругами). Банк должен разрешить некоторым клиентам управлять одним и тем же счетом (это означает, что каждый человек может вносить или снимать деньги с единого совместно используемого баланса). Наша задача – определить структуры данных для управления клиентами банка и их (совместно используемыми) счетами.

Как можно было бы организовать начальную настройку данных о клиентах и их счетах? Для упрощения ограничим информацию о клиентах их именами (без учета телефонных номеров и т. д.), а информацию о счетах – их балансами (без учета процентных ставок и т. д.).

В полноценной банковской системе, возможно, потребовалось бы позволить клиентам использовать еще и несколько счетов. Для этого необходимо предложить следующую структуру данных:

```
@dataclass
class Account:
    id : int
    balance : int
    owners : lst    # Список счетов типа Account.

@dataclass
class Customer:
    name : str
    accts : lst    # Список счетов типа Account.
```

Могут существовать такие циклические связи, при которых клиенты связываются со счетами, которые, в свою очередь, связываются с клиентами. Но, чтобы можно было сосредоточиться на обеспечении простого совместного использования и организации памяти, упростим эти данные следующим образом: банковские счета не отслеживают своих клиентов, и у каждого клиента есть только один счет:

```
@dataclass
class Account:
    id : int
    balance : int

@dataclass
class Customer:
    name : str
    acct : Account
```

### **Выполните прямо сейчас**

Можно ли рассмотреть вариант с созданием поля acct, содержащего идентификационный номер клиента вместо элемента данных Account? Не следует ли поступить именно так? При любом варианте ответа объясните почему.

Этот вопрос возвращает нас к задаче объединения людей в генеалогические дрэва вместо простого сохранения предков по именам: прямые ссылки на другие значения вместо переходов по именам или идентификационным номерам ускоряют доступ к требуемым данным.

### **Выполните прямо сейчас**

Напишите выражение, которое создает нового клиента Customer с именем Тина (Tina) с новым счетом Account. Определите для нового клиента идентификационный номер 1 и начальный баланс 100.

### **Выполните прямо сейчас**

Предположим, что мы присвоили имя t\_cust элементу данных типа Customer, созданному в предыдущем упражнении. Изобразите схему памяти, содержащей элемент t\_cust и новые значения данных.

Вы должны были написать следующий код:

```
t_cust = Customer("Tina", Account(1, 100))
```

Соответствующая схема каталог–память должна иметь следующий вид:

Каталог:

t\_cust → @01015

Куча:

@01015: Customer("Tina", Account(1, 100))

**Выполните прямо сейчас**

Тина хочет внести 50 долл. на свой счет. Напишите инструкцию, использующую `t_cust`, для выполнения этого вклада. Также изобразите соответствующие изменения на схеме каталог–память.

Приведенный ниже код выполняет обновление баланса счета:

```
t_cust.acct.balance = t_cust.acct.balance + 50
```

Поскольку это обновление выполняется в поле структуры `t_cust` (а не изменяет саму переменную `t_cust`), мы отображаем это обновление в памяти (конкретно: в поле `balance`).

Каталог:

`t_cust → @1015`

Куча:

`@1015: Customer("Tina", Account(1, 150))`

Теперь попробуем рассмотреть более сложную ситуацию. Мария (Maria) и Хорхе (Jorge) – новые клиенты, которые хотят совместно использовать счет. Совместное использование означает, что оба они могут вкладывать и снимать деньги и оба будут видеть все изменения в совместно используемом балансе.

**Выполните прямо сейчас**

Изобразите схему памяти для данных типа `Customer` для Марии и Хорхе, а также для совместно используемого счета `Account` с балансом 250. Не пишите код, изобразите только схему, которую должен создать соответствующий код.

В итоге у вас должно получиться нечто похожее на приведенную ниже схему (возможно, с именем для `Account`, возможно, без имени – работают оба варианта).

Каталог:

`m_cust1 → @1016`

`j_cust1 → @1017`

Куча:

`@1015: Account(id;2, balance:250)`

`@1016: Customer("Maria", @1015)`

`@1017: Customer("Jorge", @1015)`

Теперь необходимо определить, какой код требуется для создания такой схемы.

**Выполните прямо сейчас**

Ниже предлагаются четыре возможные версии кода для создания совместно используемого счета. Какой из этих вариантов (или какие) создает требуемую схему памяти? Возможно, полезным окажется изображение схем памяти для каждой версии и сравнение их с требуемой.

⇒

**Версия 1**

```
m_cust1 = Customer("Maria", Account(2, 250))
j_cust1 = Customer("Jorge", Account(2, 250))
```

**Версия 2**

```
m_cust2 = Customer("Maria", Account(2, 250))
j_cust2 = Customer("Jorge", m_cust2.acct)
```

**Версия 3**

```
new_acct = Account(2, 250)
m_cust3 = Customer("Maria", new_acct)
j_cust3 = Customer("Jorge", new_acct)
```

**Версия 4**

```
init_bal = 250
m_cust4 = Customer("Maria", Account(2, init_bal))
j_cust4 = Customer("Jorge", Account(2, init_bal))
```

В итоге необходимо получить единственный счет в куче. Версии 1 и 4 создают два отдельных экземпляра данных `Account`, поэтому их исключаем. Различия между версиями 2 и 3 обнаруживаются в каталоге: в версии 3 имеется совместно используемый `Account` в каталоге, в версии 2 счет остается без имени. В любом случае `Account` доступен из каталога через переменные `m_cust` and `j_cust`.

***Выполните прямо сейчас***

Предположим, что мы приняли начальные условия для счетов по версии 3. Хорхе хочет добавить на счет 100. Какая из приведенных ниже строк кода является правильной, если Мария должна иметь возможность доступа к вложенным денежным средствам?

1. `new_acct = Account(2, new_acct.balance + 100)`
2. `new_acct.balance = new_acct.balance + 100`
3. `j_cust3.acct = Account(2, new_acct.balance + 100)`
4. `j_cust3.acct.balance = new_acct.balance + 100`
5. `j_cust3.acct.balance = j_cust3.acct.balance + 100`

Чтобы вклад стал видимым для Марии, необходимо изменить счет, который она совместно использует с Хорхе. Мы не можем создать новый счет, поэтому строки 1 и 3 не подходят.

Правильность работы строк 2 и 4 зависит от того, продолжает ли ссылаться `new_acct` на ячейку памяти счета Хорхе (и Марии). Если такая ссылка существует, то обе строки работают (хотя в строке 2 нет полной ясности – нет признаков того, что целью является обновление баланса Хорхе). Но если `new_acct` теперь ссылается на какую-либо другую ячейку памяти, то ни одна из строк не работает корректно: строка 2 помещает измененный баланс в неправильный счет, а строка 4 может вычислить новый баланс на основе неправильного существующего баланса.

Только строка 5 работает верно.

## 26.4. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

В начале этой главы мы отметили: желательно, чтобы каждый счет `Account` также содержал ссылку на владельца (или нескольких владельцев) `Customer`. Мы отложили на некоторое время рассмотрение процедуры создания и начальной настройки такой ссылки, но теперь возвращаемся к этой теме. Ниже приведены требуемые классы данных (чтобы не усложнять задачу, клиенту `Customer` разрешено иметь только один счет `Account`).

```
@dataclass
class Account:
    id: int
    balance: int
    owners: list    # Список клиентов Customer.

@dataclass
class Customer:
    name: str
    acct: Account
```

Создадим нового клиента `Customer` с новым счетом `Account`, используя определенные выше классы данных:

```
new_acct = Account(5, 150, Customer("Elena", _____))
```

Как вы думаете, чем нужно заполнить пустое место (обозначенное символами подчеркивания) в конструкторе `Customer`? Хотелось бы сказать `new_acct`, но Python (и большинство других языков) выдаст сообщение об ошибке: переменная `new_acct` не определена. Почему так происходит?

При рассмотрении этой инструкции присваивания Python сначала вычисляет правую часть, чтобы получить значение или адрес памяти, который должен быть сохранен в каталоге программы под именем `new_acct`. Если бы мы вставили вместо символов подчеркивания `new_acct`, то Python должен был бы начать с выполнения следующего выражения:

```
Account(5, 150, Customer("Elena", new_acct))
```

Для этого необходимо найти `new_acct` в каталоге, но такого имени пока еще нет в каталоге (оно будет записано после того, как мы вычислим значение, которое будет храниться под этим именем). Поэтому и возникает ошибка.

Чтобы устраниТЬ возникшее затруднение, применим возможность обновления содержимого ячеек памяти после того, как имена для данных займут свои места (в каталоге). Создадим счет `Account` частично, без заполнения пустоты в `Customer`. Затем создадим клиента `Customer` для ссылки на новый счет `Account`. После этого обновим владельцев `Account` с использованием только что созданного клиента `Customer`:

```
new_acct = Account(5, 150, [])      # Обратите внимание: список Customer пуст.
new_cust = Customer("Elena", new_acct)
new_acct.owners = [new_cust]
```

Обратите внимание: здесь каждая часть занимает фрагмент в памяти и соответствует записи в каталоге программы, но этот элемент данных пока еще не завершен. Однако после размещения этого элемента данных в памяти мы можем обновить поле `owners` корректным значением.

Ниже показано, как на этом уровне должны выглядеть память и каталог после выполнения первых двух строк:

Каталог:

```
new_acct → @1016
new_cust → @1017
```

Куча:

```
@1015: []
@1016: Account(5, 150, @1015)
@1017: Customer("Elena", @1016)
```

После выполнения третьей строки мы создаем новый список, содержащий `new_cust`, и обновляем список владельцев в `new_acct`:

Каталог:

```
new_acct → @1016
new_cust → @1017
```

Куча:

```
@1015: []
@1016: Account(5, 150, @1018)
@1017: Customer("Elena", @1016)
@1018: [@1017]
```

Обратите внимание: каждый из двух списков владельцев размещен в памяти, но не связан с именами в каталоге. Они достижимы только через `new_acct`, а после обновления пустой список становится абсолютно недостижимым.

### **Выполните прямо сейчас**

Почему был создан новый список (по адресу @1018) вместо добавления нового клиента `new_cust` в список по адресу @1015?

Мы использовали `new_acct.owners = [new_cust]` для завершения начальной настройки поля `owners`, а правая часть присваивания = создает новый список. Если бы мы вместо этого написали `new_acct.owners.append(new_cust)`, то ячейка @1017 должна была бы войти в список, хранящийся по адресу @1015, как показано ниже:

Каталог:

```
new_acct → @1016
new_cust → @1017
```

Куча:

```
@1015: [@1017]
@1016: Account(5, 150, @1017)
@1017: Customer("Elena", @1016)
```

Оба варианта работают. Но не все языки предоставляют операцию, подобную `append`, которая изменяет содержимое существующего списка (в Python нет такой операции, во всяком случае в изученной нами части языка). Именно поэтому здесь мы решили продемонстрировать более общий подход.

## 26.4.1. Тестирование циклических данных

При необходимости создания теста для циклических данных невозможно вручную записать такие данные. Например, предположим, что требуется записать новый счет из предыдущих примеров:

```
test("data test", new_acct,
    Account(5, 150, [Customer("Elena", Account(5, 150, ...))])
```

Из-за циклическости невозможно завершить запись этих данных. Есть два варианта: написать тесты с использованием имен данных или тестиировать компоненты данных.

Ниже приведен пример, иллюстрирующий оба подхода. После начальной настройки счета может потребоваться проверка того факта, что владельцем нового счета является новый клиент:

```
test("new owner", new_acct.owner, new_cust)
```

Здесь вместо явной записи `Customer` мы используем имя существующего элемента из каталога. При этом не нужны многоточия. Кроме того, мы сосредоточили внимание только на компоненте `owner` как части значения `Account`, в которой ожидается изменение.

## 26.4.2. Снова переменные: функция для создания счетов для новых клиентов

А если преобразовать последовательность для создания зависимостей между клиентами и их счетами в функцию? Это можно попытаться сделать, как показано ниже:

```
def create_acct(new_id: int, init_bal: int, cust_name: str) -> Account:
    new_acct = Account(new_id, init_bal, [])      # Обратите внимание: список Customer пуст.
    new_cust = Customer(cust_name, new_acct)
    new_acct.owners.append(new_cust)
    return new_acct
```

Это кажется удачным вариантом, но имеет один недостаток: существует вероятность непреднамеренного создания двух счетов с одинаковым идентификационным номером. Лучше было бы обеспечить сопровождение переменной, содержащей очередной неиспользованный идентификационный номер счета, и это гарантировало бы, что заданный идентификационный номер используется только один раз.

### **Выполните прямо сейчас**

Как можно изменить приведенный выше код для реализации этой идеи? Какие концепции кажутся наиболее значимыми?

Следующий доступный идентификационный номер постоянно изменяется при выполнении программы. Это наводит на мысль, что необходима переменная в каталоге, которая будет изменяться после каждой операции создания нового счета. Ниже показана начальная настройка такой переменной:

```
next_id = 1      # Хранит следующий доступный идентификационный номер.  
  
def create_acct(init_bal: int, cust_name: str) -> Account:  
    global next_id  
    new_acct = Account(next_id, init_bal, [])  
    next_id = next_id + 1  
    new_cust = Customer(cust_name, new_acct)  
    new_acct.owners.append(new_cust)  
    return new_acct
```

Здесь мы создаем переменную `next_id` для хранения очередного идентификационного номера, доступного для использования. После создания счета `Account` мы обновляем `next_id` до следующего неиспользованного номера. Обратите внимание: мы также убрали идентификационный номер нового счета из списка параметров для этой функции. Задача решена.

## 26.5. МНОГОЧИСЛЕННЫЕ РОЛИ ПЕРЕМЕННЫХ

На данный момент мы использовали единую конструкцию кодирования переменной в каталоге для нескольких целей. Сейчас необходимо немного отступить назад и явно назвать эти цели. В общем смысле переменные служат одной из следующих целей:

- 1) отслеживание продолжающегося процесса вычисления (например, наращиваемое значение результата в цикле `for`);
- 2) совместное использование данных несколькими функциями (например, подача и подсчет голосов);
- 3) сохранение и сопровождение информации между несколькими вызовами одной функции (например, переменная `next_id`);
- 4) именование локального или промежуточного значения при вычислении.

Для каждого из этих способов применения подразумеваются различные шаблоны программирования. Первый создает переменную локально внутри функции. Второй и третий создают переменные верхнего уровня и требуют использования ключевого слова `global` в функциях, которые изменяют содержимое. Но третий вариант отличается от второго тем, что он предназначен для использования только одной функцией. В идеальном случае в третьем варианте должен существовать способ изоляции переменной от воздействия всех прочих функций. И действительно, многие языки программирования (включая Pyret) позволяют с легкостью сделать это. Но такой способ изоляции сложнее реализовать с помощью концепций начального уровня в Python. Четвертый вариант больше связан с локальными именами, чем с переменными, поскольку наш код никогда не обновляет значение после создания переменной.

Мы выделяем эти роли именно потому, что они подразумевают различные шаблоны кода, несмотря на то что используют одну и ту же подробно опреде-

ленную концепцию (присваивание нового значения переменной). Когда вы рассматриваете новую задачу программирования, то можете спросить себя, связана ли поставленная задача с одной из этих целей, и использовать ответ на этот вопрос, чтобы определить свой выбор шаблона для использования.

## 26.6. УПРАВЛЕНИЕ ВСЕМИ СЧЕТАМИ

На данный момент мы создали отдельных клиентов и счета и присвоили им имена в каталоге. Это нормально работает при небольшом количестве счетов, но настоящий банк управляет десятками тысяч (если не миллионами) счетов. Именование отдельных счетов невозможно масштабировать при таком огромном количестве счетов. Вместо этого банк должен обеспечить со-провождение списка или таблицы всех счетов с функциями для поиска конкретных счетов (скажем, по их идентификационным номерам). Например:

```
all_accts = [Account(8, 100, []),
              Account(2, 300, []),
              Account(10, 225, []),
              Account(3, 200, []),
              Account(1, 120, []),
              ...
          ]
```

### **Выполните прямо сейчас**

Измените функцию `create_acct` для добавления созданного нового счета в список `all_accts`.

```
next_id = 1      # Хранит следующий доступный идентификационный номер.
all_accts = []  # Список хранит все счета.

def create_acct(init_bal: int, cust_name: str) -> Account:
    global next_id
    new_acct = Account(next_id, init_bal, [])
    all_accts.append(new_acct)           # <- Эта новая строка.
    next_id = next_id + 1
    new_cust = Customer(cust_name, new_acct)
    new_acct.owners.append(new_cust)
    return new_acct
```

---

### **Упражнение 26.1**

Изобразите схему памяти, соответствующую результату выполнения приведенного ниже кода:

```
create_acct(100, "Tina")
create_acct(250, "Elena")
```

---

Когда кто-либо запрашивает свой баланс, обычно требуется указать соответствующий номер счета. Это предполагает необходимость функции, принимающей идентификационный номер счета и возвращающей значение `Account` с этим номером. Получив значение `Account`, мы можем заглянуть внутрь счета, чтобы извлечь баланс.

---

### Упражнение 26.2

Напишите функцию `find_acct`, которая принимает идентификационный номер и возвращает `Account` (из списка `all_accts`) с этим номером.

---

Ниже приведен один из вариантов решения:

```
def find_acct(which_id : int) -> Account:  
    """Returns the account with the given id number"""  
    """Возвращает счет с заданным идентификационным номером."""  
    for acct in all_accts:  
        if acct.id == which_id:  
            return acct  
    raise ValueError("no account has id " + str(which_id))  
  
def test_find():  
    test("match num", find_acct(3).id, 3)  
    test("match exactly", find_acct(1).id, 1)  
    testValueError("no account", lambda: find_acct(22))
```

В этом примере показано, как выводятся сообщения об ошибках в Python. Как и в Pyret, для сообщений об ошибках существует конструкция `raise`. Но в Python выводится не только строка сообщения, но также специализированный тип данных `ValueError`, содержащий соответствующую строку. (Существуют и другие типы ошибок, но в этой книге вполне достаточно использования `ValueError`.)

---

### Упражнение 26.3

Используйте `find_acct` для написания следующих двух функций:

```
def deposit(which_id: int, amount: double) {}  
def close(which_id: int) {}
```

---

Как показывает упражнение 26.3, функция `find_acct` становится ценным вспомогательным средством для многих других функций. При этом возникает вопрос: насколько быстрой является функция `find_acct`? Здесь мы должны организовать поиск по всем счетам, чтобы найти счет с заданным номером, прежде чем выполнить требуемую операцию. Если существуют миллионы счетов, то такой поиск может стоить чрезвычайно дорого. Мы рассмотрим эту проблему более подробно в следующей главе.

# Глава 27

---

## Хеш-таблицы и словари

В конце раздела 26.6 мы создали список значений `Account` и написали функцию для поиска по этому списку, чтобы найти счет с заданным идентификационным номером. Мы отметили, что поиск конкретного счета может потребовать проверки каждого счета в списке (поскольку счета проверяются поочередно в цикле `for`). Такой способ проверки может стать чрезвычайно дорогостоящим, если число клиентов банка постоянно увеличивается.

Здесь мы отступим немного назад и сделаем два замечания об этой задаче:

- 1) каждый счет имеет единственный в своем роде идентификационный номер;
- 2) у нас есть функция, которая должна извлекать счет по этому идентификационному номеру.

При таких условиях мы можем воспользоваться другой структурой данных, которая называется хеш-таблицей (`hashtable`) или словарем (`dictionary`) (в различных языках применяются разные термины для одной и той же концепции, Python использует термин «словарь» (`dictionary`)). Словари создаются по строго определенному сценарию: имеется множество значений (например, банковских счетов), к которым необходимо получать доступ, используя некоторый фрагмент информации (например, идентификационный номер), который является единственным в своем роде (неповторяющимся) для каждого значения. Этот фрагмент информации, используемый для доступа, называется ключом (`key`). Ключ не обязательно должен быть полем в значении элемента данных, но может быть представлен таким полем (как в примере с банковскими счетами).

Для начальной настройки словаря записывается последовательность элементов в форме:

ключ: значение

Ниже показано, как может выглядеть в словаре отображение идентификационных номеров в соответствующие счета:

```
accts_dict = {5: Account(5, 225, []),
              3: Account(3, 200, []),
              2: Account(2, 300, []),
              4: Account(4, 75, []),
              1: Account(1, 100, [])}
```

С учетом этой формы записи можно создать словарь, разместив в фигурных скобках набор пар **ключ: значение**, разделяемых запятыми. Показанный здесь словарь содержит пять идентификационных номеров, которые отображаются в счета с теми же номерами. Словарь не упорядочен, поэтому не имеет значения порядок записи пар в последовательности.

После этого, если необходимо извлечь из словаря счет с идентификационным номером 1, то можно просто написать:

```
accts_dict[1]
```

Это означает: «В словаре `accts_dict` получить значение, связанное с ключом 1». При вычислении этого выражения будет получен результат `Account(1, 100, [])`. Если запрашиваемого ключа нет в словаре, то Python выведет сообщение об ошибке. Но перед попыткой использования ключа можно проверить, существует ли он в словаре, как показано ниже:

```
if 6 in accts_dict:  
    accts_dict(6)
```

Если необходимо изменить значение, связанное с некоторым ключом, то используется инструкция присваивания в следующей форме:

```
dictionary[key] = new_value
```

Для добавления нового ключа (и соответствующего ему значения) в словарь применяется та же форма записи, что и для обновления значения, но с ключом, который до этого не использовался:

```
accts_dict[6] = Account(6, 150, [])
```

Удаление ключа (и соответствующего ему значения) из словаря выполняется следующим образом:

```
del dictionary[key]
```

## 27.1. Поиск по условиям, отличающимся от ключей

А если требуется найти все счета, баланс которых ниже 100? Для этого необходимо пройти по всем парам **ключ-значение** и проверить их балансы. Снова похоже на то, что придется использовать цикл `for`. И как это должно выглядеть для словаря?

Оказывается, что это очень похоже на применение цикла `for` для списка (по крайней мере, в Python). Ниже приведена программа, которая создает список счетов с балансами меньше 100:

```
below_100 = []  
  
# Переменная ID принимает значение каждого ключа в словаре.  
for ID in accts_dict:
```

```
if accts_dict[ID].balance < 100:
    below_100.append(accts_dict[ID])
```

Здесь цикл `for` выполняет итеративный проход по ключам. Внутри цикла каждый ключ используется для извлечения соответствующего счета `Account`, затем выполняется проверка баланса текущего счета, и если баланс соответствует условию, то счет добавляется в нарашиваемый итоговый список.

### Упражнение 27.1

Создайте словарь, который отображает названия аудиторий или конференц-залов в количество посадочных мест в них. Запишите следующие выражения:

- 1) для определения количества посадочных мест в заданном помещении;
- 2) для изменения вместимости заданного помещения с расширением на 10 посадочных мест по сравнению с исходной вместимостью;
- 3) для поиска всех помещений, в которых можно разместить как минимум 50 студентов.

## 27.2. СЛОВАРИ С БОЛЕЕ СЛОЖНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

### Выполните прямо сейчас

В соревнованиях по легкой атлетике необходимо управлять именами игроков в отдельных командах. Например, в команде «Team Red» есть «Shaoming» и «Lijin», в «Team Green» есть «Obi» и «Chinara», а в «Team Blue» есть «Mateo» и «Sophia». Разработайте способ организации данных, который позволит руководителям соревнований с легкостью получать доступ к именам игроков в каждой команде, помня о том, что в соревнованиях может участвовать гораздо больше трех команд, перечисленных здесь.

В этой ситуации кажется оправданным применение словаря, в котором имеется осмысленный ключ (название команды), необходимый для доступа к значениям (именам участников). Но выше уже отмечалось, что в словарях допускается только одно значение для каждого ключа. Рассмотрим следующий код:

```
players = []
players["Team Red"] = "Shaoming"
players["Team Red"] = "Lijin"
```

### Выполните прямо сейчас

Что должно произойти в словаре после выполнения приведенного выше кода? Если вы не уверены в ответе, то попробуйте выполнить этот код.

Как сохранить несколько имен участников команды с одним и тем же ключом? Суть в том, что необходимо связать с названием команды не одного человека, а группу участников этой команды. Следовательно, мы должны связать с каждым ключом список участников, как показано ниже:

```
players = []
players["Team Red"] = ["Shaoming", "Lijin"]
players["Team Green"] = ["Obi", "Chinara"]
players["Team Blue"] = ["Mateo", "Sophia"]
```

Значения в словаре не ограничены только лишь простыми типами данных. Они могут быть структурами любой сложности, в том числе списками, таблицами или даже другими словарями (содержащими другие словари и т. д.). Главное здесь – выполнение требования к словарям: только одно значение для одного ключа.

## 27.3. Использование структурированных данных в качестве ключей

Использование структурированных данных в качестве ключей также возможно, но это несколько сложнее, чем использование структурированных данных как значений. Это связано с тем, как работают словари. Словари зависят от ключей, представленных значениями, которые не могут быть изменены внутри структуры словаря. Что это означает? Например, весь элемент данных `Account` в целом не может использоваться как ключ, потому что нам необходима возможность изменения его баланса, т. е. поля внутри счета.

Значение класса данных можно использовать в качестве ключа, только если его поля никогда не будут изменяться. Например, вернемся к более раннему примеру отображения названий помещений на число посадочных мест в них. Предположим, что для отдела обслуживания помещений необходима возможность классификации по диапазонам посадочных мест (например, 0–29, 30–49 и 50–100). В этом случае, возможно, потребуется класс данных для диапазона, который будет использоваться в качестве ключа.

```
@dataclass
class Range:
    low: int
    high: str

{ Range(0,29): ["West Wing 200", "North Wing 110"],
  Range(30,49): ["North Wing 150", "South Wing 320"],
  ...
}
```

Поскольку поля такого диапазона не будут изменяться, он представляет собой вполне подходящий элемент данных для использования в качестве ключа. Но чтобы Python принял этот словарь как корректный, необходимо

сообщить, что мы не будем изменять значения полей `Range`. Это делается с помощью дополнительного элемента аннотации `dataclass`:

```
@dataclass(frozen=True)
class Range:
    low: int
    high: str
```

Такая «замороженная» аннотация сообщает: «компоненты этого класса нельзя изменять». Если вы попытаетесь выполнить присваивание компоненту `frozen`-класса, как, например, `Flight`, то Python выведет сообщение об ошибке.

В действительности существуют способы использования значений с изменяющимися компонентами в качестве ключей, но эта тема выходит за рамки данной книги. Если вы хотите самостоятельно узнать подробности, то посмотрите описание методов `__hash__` в Python.

**Часть VI**

---

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ  
ТЕМЫ**

# Глава 28

---

## Алгоритмы, использующие состояние

### 28.1. И СНОВА О НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВАХ

Здесь рассматривается, как можно использовать непересекающиеся множества для новой реализации алгоритма union-find (объединение–поиск). Мы постараемся сохранить все как можно более похожим на предыдущую версию (см. подраздел 22.8.5) для более подробного сравнения.

Сначала необходимо обновить определение, сделав поле `parent` изменяемым (`mutable`):

```
data Element:  
    | elt(val, ref parent :: Option<Element>)  
end
```

Чтобы определить, находятся ли два элемента в одном множестве, мы продолжаем полагаться на функцию `fynd`. Но, как мы скоро увидим, `fynd` уже не требует передачи всего множества элементов. Поскольку единственное объяснение этого: функция `is-in-same-set`, принимающая это множество, передавала его в `fynd`, поэтому можно удалить его. Больше ничего не изменяется:

```
fun is-in-same-set(e1 :: Element, e2 :: Element) -> Boolean:  
    s1 = fynd(e1)  
    s2 = fynd(e2)  
    identical(s1, s2)  
end
```

Теперь операция обновления совершенно другая: мы используем свойство изменяемости, чтобы изменить значение родителя:

```
fun update-set-with(child :: Element, parent :: Element):
    child!{parent: some(parent)}
end
```

В выражении `parent: some(parent)` первый `parent` – это имя поля, а второй – имя параметра. Кроме того, мы обязательно должны использовать `some` для обеспечения соответствия варианту типа. Естественно, это не плюс, потому что весь смысл этого свойства изменяемости состоит в том, чтобы заменить родителя на другой элемент, независимо от того, чем он был раньше.

С учетом этого определения `union` также остается практически неизменным, если не считать изменения возвращаемого типа. Раньше требовалось возвращать обновленное множество элементов, теперь, поскольку обновление выполняется посредством изменения, больше не нужно ничего возвращать:

```
fun union(e1 :: Element, e2 :: Element):
    s1 = fynd(e1)
    s2 = fynd(e2)
    if identical(s1, s2):
        s1
    else:
        update-set-with(s1, s2)
    end
end
```

И наконец, `fynd`. Теперь реализация этой функции становится заметно проще. Нет необходимости выполнять поиск по всему множеству. Ранее мы вынуждены были проводить такой поиск, потому что после завершения операций объединения ссылка на родителя могла стать некорректной. Теперь любые подобные изменения автоматически отображаются благодаря свойству изменяемости. Таким образом:

```
fun fynd(e :: Element) -> Element:
    cases (Option) e!parent:
        | none => e
        | some(p) => fynd(p)
    end
end
```

## 28.1.1. Оптимизации

Снова рассмотрим функцию `fynd`. В варианте `some` элемент, связанный с `e`, не является именем множества, так как получается в результате рекурсивного обхода ссылок `parent`. Но когда такое значение возвращается, мы не делаем ничего для отображения полученного нового знания. Вместо этого в следующий раз мы пытаемся найти родителя этого элемента, т. е. один и тот же рекурсивный обход будет выполняться снова и снова.

Использование свойства изменяемости (mutation) помогает устраниć эту проблему. Идея предельно проста: вычислять значение родителя и обновлять его.

```
fun fynd(e :: Element) -> Element:
    cases (Option) e!parent block:
        | none => e
        | some(p) =>
            new-parent = fynd(p)
            e!{parent: some(new-parent)}
            new-parent
    end
end
```

Следует отметить, что это обновление будет применяться к каждому элементу в рассматриваемой рекурсивной цепочке поиска имени множества. Следовательно, применение `fynd` к любому из этих элементов в следующий раз будет использовать преимущество такого обновления. Эта методика называется сжатием пути (path compression).

Есть еще одна интересная идея, которую можно применить. Она предназначена для поддержания ранга каждого элемента, который приблизительно равен глубине дерева элементов, для которых данный элемент является именем их множества. Когда мы объединяем два элемента, то делаем элемент с большим рангом родителем элемента с меньшим рангом. Это позволяет избежать наращивания слишком высоких (длинных) путей для установки имен элементов, а вместо этого стремиться к «густым» деревьям. Это также уменьшает количество родителей, которые необходимо обойти, чтобы найти репрезентативный элемент.

## 28.1.2. Анализ

Для этой оптимизированной структуры данных union-find существует замечательный метод анализа. Разумеется, в худшем случае мы должны пройти всю цепочку родителей, чтобы найти элемент, определяющий имя, что требует времени, пропорционального количеству элементов в множестве. Но как только мы применим описанные выше оптимизации, нам больше никогда не потребуется проходить ту же самую цепочку. В частности, если мы проведем амортизационный анализ последовательности проверок на равенство множеств после набора операций объединения, то обнаружим, что стоимость последующих проверок очень мала – в действительности настолько мала, насколько малой может быть функция, не являющаяся постоянной. Реальный анализ ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Система\\_непересекающихся\\_множеств](https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_непересекающихся_множеств)) довольно сложен, кроме того, это один из самых замечательных алгоритмов анализа во всей информатике.

## 28.2. УСТАНОВКА ЧЛЕНСТВА МЕТОДОМ ОБРАТНОГО ХЕШИРОВАНИЯ

Ранее мы уже рассматривали решения для установки членства. Сначала мы узнали, как представлять множества в виде списков (раздел 19.1), а затем в виде (сбалансированных) двоичных деревьев (подраздел 19.2.3). Благодаря этому удалось сократить время вставки и определения членства до логарифмического времени от количества элементов. Попутно мы также узнали, что суть использования этих представлений заключается в том, чтобы свести любой тип данных к сравнимому упорядоченному элементу – из соображений эффективности обычно к числу (подраздел 19.2.1) – и назвали это хешированием (hashing).

Не путайте эту методику с алгоритмом union-find – это другой тип задачи на множествах (см. раздел 28.1).

Зададимся вопросом, можем ли мы использовать эти числа каким-либо другим образом. Предположим, что множество содержит только пять элементов, которые плотно отображаются на значения от 0 до 4. Тогда можно получить пятиэлементный список логических значений, где логическое значение в каждом индексе списка указывает, содержится ли элемент, соответствующий этой позиции, в множестве или нет. Но и определение членства, и вставка потенциально требуют обхода всего списка, что дает нам решения, линейные относительно количества элементов.

Но это еще не все. Если мы не можем быть полностью уверены в том, что элементов будет только пять, то не можем быть уверены и в ограничении размера представления. Кроме того, мы еще не показали, как в действительности выполнить хеширование, чтобы представление было плотным; из-за этого использование пространства существенно ухудшается, что, в свою очередь, влияет на время.

В действительности существует относительно простое решение задачи плотного сведения чисел к некоторому диапазону: к заданному хешу применяется арифметика по модулю. То есть если необходимо использовать список из пяти элементов для представления множества, то мы просто вычисляем хеш по модулю пять. Это дает нам простое решение такой задачи.

Разумеется, это не совсем полное решение: два разных хеша вполне могут иметь одинаковый модуль. То есть предположим, что необходимо записать, что множество содержит (хеш) значение 5, тогда итоговый список будет иметь следующий вид:

```
[list: true, false, false, false, false]
```

Теперь предположим, что необходимо узнать, содержится ли в множестве значение 15. По приведенному выше представлению невозможно сказать, находится ли это число в множестве или нет, потому что мы не можем утверждать, представляет ли значение `false` число 5, 15, 25 или любое другое значение, остаток от деления которого на 5 равен 0. Следовательно, необходимо записать реальные элементы в множество, а для согласованности типов мы должны использовать `Option`:

```
[list: some(5), none, none, none, none]
```

Теперь мы можем сказать, что 5 есть в наборе, а 4 нет. Но при этом становится невозможным наличие в наборе и 5, и 10, следовательно, наше реальное представление должно быть списком в каждой позиции:

```
[list: [list: 5], empty, empty, empty, empty]
```

Если добавить еще и 10 в это множество, то получим:

```
[list: [list: 5, 10], empty, empty, empty, empty]
```

Теперь мы можем сказать, что 5 и 10 есть в рассматриваемом здесь множестве, а 15 нет. Такие подсписки известны как корзины (buckets).

Хорошо, теперь у нас есть другой способ представления множеств, и мы можем проверять существование элемента. Но в худшем случае один из этих списков будет содержать все элементы множества, и нам, возможно, придется выполнить обход всего списка, чтобы найти в нем элемент, а это означает, что проверка членства требует времени, линейного относительно количества элементов. Вставка, в свою очередь, требует времени, пропорционального величине модуля, потому что нам, вероятно, придется выполнить обход всего внешнего списка, чтобы добраться до нужного подсписка.

Можем ли мы улучшить этот способ?

## 28.2.1. Улучшение времени доступа

С учетом того, что в настоящее время у нас нет способа, гарантирующего, что мы не получим хеш-коллизии, приходится признать, что сейчас мы вынуждены остановиться на списке элементов в каждой позиции с размером, возможно, соответствующим размеру множества, которое мы пытаемся представить. Таким образом, избежать этого (пока) невозможно. Но в текущий момент мы тратим время на размер внешнего списка только для того, чтобы вставить элемент, и, разумеется, можем сделать это лучше.

Можно улучшить решение, но для этого потребуется другая структура данных – массив (array). Описание массивов можно посмотреть в документации Pyret. Главные характеристики массивов:

- доступ к  $n$ -му элементу массива занимает постоянное, а не линейное время относительно  $n$ . Иногда это называют произвольным доступом (random-access), потому что для доступа к любому случайному элементу, а не только к известному, требуется одинаковое время;
- массивы обновляются с использованием свойства изменяемости (mutation). Таким образом, изменение массива видно по всем ссылкам на массив.

Есть и другие структуры данных, которые также будут работать лучше, но та, которую мы сейчас рассмотрим, важна и широко используется.

Первое свойство требует некоторого обсуждения: как массив может обеспечить произвольный доступ, тогда как список требует времени, линейного относительно индекса элемента, к которому мы получаем доступ? Это обес-

печивает следующий компромисс: список может бесконечно расширяться по мере развития программы, а массив – нет. Массив должен объявлять свой размер заранее и не может увеличиваться без копирования всех элементов в массив большего размера. Следовательно, мы должны использовать массивы только тогда, когда у нас есть четко определенная верхняя граница их размера (и эта граница не слишком велика, иначе мы даже не сможем найти такой объем непрерывного пространства памяти в системе). Но задача, над которой мы работаем, обладает именно такой характеристикой.

Поэтому попробуем определить множества заново. Начнем с массива фиксированного размера, в котором каждый элемент является пустым списком:

```
SIZE = 19
v = array-of(empty, SIZE)
```

Необходимо использовать арифметику взятия модуля, чтобы найти правильную корзину:

```
fun find-bucket(n): num-modulo(n, SIZE) end
```

После этого можно определить, содержится ли элемент в данном множестве:

```
fun get-bucket(n): array-get-now(v, find-bucket(n)) end
fun is-in(n): get-bucket(n).member(n) end
```

Чтобы действительно добавить элемент в множество, мы помещаем его в список, связанный с соответствующей корзиной:

```
fun set-bucket(n, anew): array-set-now(v, find-bucket(n), anew) end
fun put(n):
    when not(is-in(n)):
        set-bucket(n, link(n, get-bucket(n)))
    end
end
```

Проверка того, находится ли элемент уже в корзине, является важной частью нашего доказательства сложности, потому что мы неявно предполагали, что в корзинах не будет повторяющихся элементов.

---

### Упражнение 28.1

Какое воздействие оказывают повторяющиеся элементы на сложность операций?

---

Определенная выше структура данных известна под названием «хеш-таблица» (hash table) (это название слегка сбивает с толку, потому что в действительности эта структура не является таблицей хеш-значений, тем не менее именно такое название обычно используется в информатике).

## 28.2.2. Улучшенное хеширование

Таким образом, использование массивов решает одну проблему: операцию вставки. Поиск соответствующей корзины требует постоянного времени, связывание нового элемента также выполняется за постоянное время, поэтому для всей операции необходимо постоянное время... за исключением того, что мы должны также проверить, находится ли элемент уже в корзине, чтобы избежать хранения дубликатов. Мы избавились от обхода внешнего списка, представляющего множество, но операция `member` во внутреннем списке остается неизменной. Теоретически других вариантов не предвидится, но на практике можно существенно улучшить эту процедуру.

Следует отметить, что коллизии практически неизбежны. Если мы работаем с равномерно распределенными данными, то коллизии обнаруживаются раньше, чем можно было бы ожидать. Поэтому разумно подготовиться заранее к возможности возникновения коллизий.

Ключ к решению заключается в некоторых знаниях о распределении хеш-значений. Например, если бы мы знали, что все наши хеш-значения кратны 10, то использовать размер таблицы 10 было бы ужасной идеей (потому что все элементы хешировались бы в одну и ту же корзину, превращая хеш-таблицу в список). На практике в качестве размера таблицы принято использовать нетривиальные простые числа, поскольку для случайного значения такое число вряд ли будет являться делителем. Это не обеспечивает теоретическое улучшение (если невозможно сделать конкретные предположения о входных данных или более интенсивно применить математику), но на практике работает успешно. В частности, поскольку обычная хеш-функция использует адреса памяти для объектов в куче, а в большинстве систем эти адреса кратны 4, использование простого числа, такого как 31, часто является довольно неплохим выбором.

Это следует из рассуждений, служащих основой так называемой задачи дня рождения ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс\\_дней\\_рождения](https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_дней_рождения)), обычно представленной в следующем виде: сколько людей должно находиться в комнате, прежде чем вероятность того, что двое из них имеют общий день рождения, превысит некоторый процент? Чтобы вероятность была больше половины, необходимо присутствие всего 23 человек.

## 28.2.3. Фильтры Блума

Еще один способ улучшить пространственную и временную сложность – ослабить свойства, предполагаемые для операций. Прямо сейчас операция определения присутствия элемента в множестве дает превосходные ответы, поскольку позволяет получить точный ответ `true`, когда проверяемый элемент был ранее вставлен в набор. Но предположим, что мы находимся в условиях, когда можно принять более слабое понятие корректности, при котором критерии проверки принадлежности могут слегка «лгать» в одном или другом направлении (но не в обоих, потому что это делает представление почти бесполезным). В частности, давайте определим, что «нет означает нет» (т. е. если представление множества говорит, что элемент отсутствует,

его действительно нет), но «да иногда означает нет» (т. е. если представление множества говорит, что элемент присутствует, то иногда его может и не быть). Короче говоря, если множество сообщает, что элемента в нем нет, то его отсутствие должно быть обеспечено, но если множество сообщает, что элемент присутствует, то его может и не быть. В последнем случае необходима какая-либо другая, более дорогостоящая методика определения истины или нас просто не интересует этот факт.

Где используется такая структура данных? Предположим, что мы создаем веб-сайт, использующий аутентификацию на основе пароля. Поскольку многие пароли были похищены через широко известные бреши, можно с уверенностью предположить, что список похищенных паролей имеется у хакеров и они будут их перебирать. Поэтому необходимо запретить пользователям выбирать какой-либо пароль из такого списка. Мы могли бы использовать хеш-таблицу, чтобы запретить конкретные известные похищенные пароли. Но для эффективности можно было бы воспользоваться описанной выше несовершенной хеш-таблицей. Если она сообщает «нет», то мы разрешаем пользователю использовать такой пароль. Но если хеш-таблица отвечает «да», то либо используется пароль, который был похищен, либо это совершенно другой пароль, который чисто случайно имеет точно такое же значение хеш-функции, но это уже не имеет значения, и мы также можем просто запретить использование данного пароля.

Другой пример – обновление баз данных или запоминающих устройств. Предположим, что имеется база данных записей, которую мы часто обновляем. Часто более эффективным решением оказывается ведение журнала изменений, т. е. списка, в котором последовательно фиксируются все внесенные изменения. По истечении некоторого интервала времени (например, ночи) журнал «сбрасывает данные», т. е. все зафиксированные изменения применяются непосредственно к базе данных. Но это означает, что каждая операция чтения становится весьма неэффективной, поскольку она должна сначала проверить весь журнал (на наличие обновлений), прежде чем обращаться к базе данных. И здесь можно использовать это нечеткое понятие хеш-таблицы: если хеш идентификатора записей сообщает «нет», то запись определенно не была изменена, и мы обращаемся непосредственно к базе данных; если получен ответ «да», то мы должны проверить журнал.

Мы уже видели простой пример реализации этой идеи ранее, когда использовали один список (или массив) логических значений с модульной арифметикой для представления множества. Когда множество сообщало, что числа 4 в нем нет, это было абсолютно истинно, но при ответе о наличии 5 и 10 в действительности присутствовало только одно из этих чисел. Преимущество заключалось в огромной экономии пространства и времени: требовался только один бит на корзину, и не нужно было выполнять поиск в списке, чтобы ответить на вопрос о членстве. Недостатком, разумеется, была чрезвычайно неточная структура набора данных, а также коррелированная фатальная ошибка, связанная с арифметикой взятия по модулю.

Аналогичное использование – фильтрация вредоносных веб-сайтов. Система сокращения URL-адресов частично использует его для этой цели (<https://word.bitly.com/post/28558800777/dabooms-an-open-source-scalable-counting>).

Есть простой способ улучшить это решение: вместо одного массива используйте несколько (но количество массивов должно быть фиксированным). Когда элемент добавляется в множество, он добавляется в каждый массив, а при проверке членства мы сверяемся с каждым массивом. Множество отвечает утвердительно на вопрос о членстве только в том случае, если все массивы его подтверждают.

Естественно, использование нескольких массивов не дает абсолютно никаких преимуществ, если все массивы имеют одинаковый размер: поскольку вставка и поиск являются детерминированными операциями, они будут выдавать один и тот же ответ. Устранить проблему позволяет простое средство: использование разных размеров массивов. В частности, используя размеры массивов, представленных относительно простыми друг к другу числами, мы минимизируем вероятность конфликта (только хеши, являющиеся произведением всех размеров массивов, смогут обмануть массив).

Эта структура данных, называемая фильтром Блума (Bloom filter), является вероятностной (probabilistic) структурой данных. В отличие от предыдущей нашей версии структуры данных, эта структура не всегда дает правильный ответ, но в отличие от компромисса пространство–время, мы экономим и пространство, и время, немного изменяя задачу, чтобы принимать некорректные ответы. Если мы что-либо знаем о распределении хеш-значений и у нас есть некоторая допустимая граница погрешности, то можем спроектировать размеры хеш-таблиц так, чтобы с высокой вероятностью фильтр Блума находился в пределах допустимых границ погрешности.

## 28.3. УСТРАНЕНИЕ ПОВТОРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЗАПОМИНАНИЯ ОТВЕТОВ

Мы уже упоминали в нескольких случаях компромисс между пространством и временем. Самый очевидный компромисс – процесс вычисления «запоминает» ранее полученные результаты и вместо их повторного вычисления просматривает их и возвращает требуемые ответы. Это частный случай такого компромисса, потому что он использует пространство (для запоминания ранее вычисленных ответов) вместо времени (повторное вычисление ответа). Рассмотрим, как можно записать такие вычисления.

### 28.3.1. Интересная числовая последовательность

Предположим, что необходимо создать выражения с правильной расстановкой круглых скобок и игнорировать все символы без скобок. Сколько существует способов создания выражений в круглых скобках при заданном количестве открывающих (соответственно и закрывающих) скобок?

Если у нас нет открывающих скобок, единственное выражение, которое мы можем создать, – это пустое выражение. Если у нас есть одна открывающая скобка, единственное выражение, которое мы можем сформировать, – это

«()» (обязательно должна существовать закрывающая скобка, поскольку нас интересуют только правильно заключенные в скобки выражения). Если у нас есть две открывающие скобки, то можно создать «(( ))» и «( )()». При заданных трех скобках возможно создание выражений «((( )))», «(( )( ))», «( )(())», «( )()( )» и «( )(()) » – всего пять вариантов и т. д. Обратите внимание: решения на каждом уровне используют все возможные варианты, существующие на один уровень ниже, которые объединены всеми возможными способами.

В действительности существует широко известная математическая последовательность, соответствующая числу таких выражений, которая называется последовательностью Каталана (Catalan sequence) ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа\\_Каталана](https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Каталана)). Числа в этой последовательности обладают свойством весьма быстро увеличиваться: если начать с малых исходных значений, описанных выше, то десятое число Каталана (т. е. десятый элемент последовательности Каталана) равно 16 796. Простая рекуррентная формула позволяет вычислять числа Каталана, и мы можем превратить эту формулу в простую программу:

```
fun catalan(n):
    if n == 0: 1
    else if n > 0:
        for fold(acc from 0, k from range(0, n)):
            acc + (catalan(k) * catalan(n - 1 - k))
        end
    end
end
```

Кажется, что эту функцию следует тестировать, как показано ниже:

```
<catalan-tests> ::=
check:
    catalan(0) is 1
    catalan(1) is 1
    catalan(2) is 2
    catalan(3) is 5
    catalan(4) is 14
    catalan(5) is 42
    catalan(6) is 132
    catalan(7) is 429
    catalan(8) is 1430
    catalan(9) is 4862
    catalan(10) is 16796
    catalan(11) is 58786
end
```

Но будьте осторожны! При измерении времени выполнения этой функции обнаруживается, что несколько первых тестов выполняются очень быстро, но где-то между значениями 10 и 20 – в зависимости от мощности вашего компьютера и языка программирования, на котором реализована программа, – вы должны заметить начавшееся замедление, сначала небольшое, затем с нарастающим эффектом.

***Выполните прямо сейчас***

Проверьте, при каком значении становится заметным существенное замедление на вашем компьютере. Постройте график зависимости времени выполнения от размера входных данных. Какой вывод можно сделать по полученным результатам?

Причина, по которой вычисление последовательности Каталана требует так много времени, заключается именно в том, о чём мы упоминали ранее: на каждом уровне существует зависимость от чисел всех более ранних уровней, и это вычисление, в свою очередь, требует использования чисел всех более ранних уровней и т. д. до бесконечности.

***Упражнение 28.2***

Изобразите внутренние вычисления функции `catalan`, чтобы увидеть, почему время вычисления возрастает столь «взрывообразно». Определите временну́ю сложность в наихудшем случае для этой функции.

### ***28.3.1.1. Использование состояния для запоминания предыдущих ответов***

Таким образом, это явно тот случай, когда нужно пожертвовать пространством и получить выигрыш во времени. Но как это сделать? Необходима концепция памяти, в которую записываются все предыдущие ответы, а при последующих попытках их вычисления проверяется, не являются ли они уже известными, и при положительном ответе просто возвращаются ранее полученные результаты вместо повторного их вычисления.

***Выполните прямо сейчас***

На каком весьма важном предположении основана эта концепция?

Разумеется, при этом предполагается, что для конкретных входных данных ответ всегда будет одним и тем же. Как мы видели ранее, функции с сохранением состояния часто нарушают это правило, поэтому обычные функции с сохранением состояния не могут применить этот метод оптимизации. По иронии судьбы, мы будем использовать сохранение состояния для реализации этой концепции оптимизации, так что мы создадим функцию с сохранением состояния, которая всегда возвращает один и тот же ответ для заданных конкретных входных данных, и, следовательно, используем состояние в этой функции для имитации функции без сохранения состояния. Классно получилось!

Но сначала необходима реализация такой концепции памяти. Можно придумать несколько вариантов, но ниже показан один из самых простых:

```
data MemoryCell:  
    | mem(in, out)  
end  
  
var memory :: List<MemoryCell> = empty
```

Как теперь необходимо изменить функцию `catalan?` Сначала требуется узнать, не находится ли уже конкретное значение в памяти `memory`, и если находится, то мы возвращаем его без дальнейшего вычисления, но если такого значения нет, то результат вычисляется, сохраняется в структуре `memory` и только после этого возвращается:

```
fun catalan(n :: Number) -> Number:  
    answer = find(lam(elt): elt.in == n end, memory)  
    cases (Option) answer block:  
        | none =>  
            result =  
                if n == 0: 1  
                else if n > 0:  
                    for fold(acc from 0, k from range(0, n)):  
                        acc + (catalan(k) * catalan(n - 1 - k))  
                    end  
                end  
            memory := link(mem(n, result), memory)  
            result  
        | some(v) => v.out  
    end  
end
```

Вот и все. Теперь при выполнении приведенных выше тестов мы заметим, что результаты вычисляются гораздо быстрее, и к тому же можно даже решиться на более крупные вычисления, например `catalan(50)`.

Такой процесс преобразования функции в версию, которая запоминает полученные ранее результаты, называется мемоизацией (memoization).

### 28.3.1.2. От дерева вычислений к НАГ

Мы практически незаметно преобразовали дерево вычислений в НАГ для того же вычисления с повторным использованием равнозначных вызовов. Ранее каждый вызов генерировал множество рекурсивных вызовов, которые выполняли еще больше рекурсивных вызовов, но теперь мы повторно используем результаты предыдущих рекурсивных вызовов, т. е. совместно используем результаты, вычисленные ранее. Это, по существу, перенаправляет рекурсивный вызов на тот, который был выполнен ранее. Таким образом, форма вычисления преобразуется из дерева в направленный ациклический граф (НАГ) вызовов.

Это дает важное преимущество по сложности. Ранее мы выполняли суперэкспоненциальное количество вызовов, теперь мы выполняем только один вызов для каждого варианта входных данных и совместно используем все предыдущие вызовы, тем самым сводя работу `catalan(n)` к выполнению

числа новых вызовов, пропорционального  $n$ . Поиск результата предыдущего вызова требует времени, пропорционального размеру памяти (поскольку мы представили память в виде списка, но более эффективные представления привели бы к еще более существенному улучшению), но это вводит всего лишь еще один линейный коэффициент-множитель, уменьшая общую сложность до квадратичной относительно размера входных данных. Это весьма значительное снижение общей сложности. Напротив, другие варианты применения мемоизации могут привести к гораздо менее существенным улучшениям, превращая использование этой методики в истинный инженерный компромисс.

### 28.3.1.3. Сложность чисел

Но когда мы приступаем к выполнению более крупных вычислений, то, возможно, замечаем, что вычисления начинают требовать больше времени, чем предполагает линейный график роста. Это связано с тем, что числа возрастают до произвольно больших значений – например, результат `catalan(100)` равен 896519947090131496687170070074100632420837521538745909320, и операции с числами больше не могут выполняться за постоянное время, вопреки тому, что мы утверждали ранее (раздел 18.4). Действительно, при работе над криптографическими задачами тот факт, что операции над числами не ограничены только лишь постоянным временем, чрезвычайно важен для фундаментальных результатов вычисления сложности (а также, например, для предполагаемой невозможности взлома современных криптографических алгоритмов).

### 28.3.1.4. Абстрагирование мемоизации

Теперь мы добились желаемого улучшения сложности, но в структуре нашего пересмотренного определения функции `catalan` все еще остается кое-что неудовлетворительное: операция запоминания тесно переплетена с определением числа Каталана, даже притом, что по глубокому рассуждению они должны быть различны. Это будет нашей следующей задачей.

По существу, необходимо разделить программу на две части. Одна часть определяет общую концепцию мемоизации, а другая определяет `catalan` в терминах этой обобщенной концепции.

Что означает первая часть? Необходимо инкапсулировать концепцию «памяти» (поскольку, по всей видимости, нежелательно, чтобы она хранилась в переменной, которую может изменить любая старая часть программы). В результате должна получиться функция, принимающая входные данные, которые мы хотим проверить, и если эти данные найдены в памяти, то возвращается зафиксированный для них ответ, в противном случае мы вычисляем ответ, сохраняем его и возвращаем. Чтобы вычислить ответ, необходима функция, которая определяет, как это сделать. Объединим эти части:

```
data MemoryCell:
    | mem(in, out)
end
```

```
fun memoize-1<T, U>(f :: (T -> U)) -> (T -> U):
    var memory :: List<MemoryCell> = empty
    lam(n):
        answer = find(lam(elt): elt.in == n end, memory)
        cases (Option) answer block:
            | none =>
                result = f(n)
                memory := link(mem(n, result), memory)
                result
            | some(v) => v.out
        end
    end
end
```

Здесь использовано имя функции `memoize-1`, обозначающее, что это мемоизатор для функций с одним аргументом. Обратите внимание: приведенный выше код практически одинаков с написанным ранее, за исключением того, что на месте логики вычисления числа Каталана теперь находится параметр `f`, определяющий, что необходимо сделать.

После этого можно определить функцию `catalan`, как показано ниже:

```
rec catalan :: (Number -> Number) =
    memoize-1(
        lam(n):
            if n == 0: 1
            else if n > 0:
                for fold(acc from 0, k from range(0, n)):
                    acc + (catalan(k) * catalan(n - 1 - k))
                end
            end
    end)
```

Несколько замечаний по этому определению:

- 1) мы не написали `fun catalan(...): ...`, потому что процедура, связанная с `catalan`, генерируется функцией `memoize-1`;
- 2) обратите особое внимание: рекурсивные вызовы `catalan` должны быть направлены в функцию, связанную с результатом мемоизации, следовательно, должны вести себя как объект (`object`). Критическая ошибка при ссылке к той же самой совместно используемой процедуре означает, что эти рекурсивные вызовы не будут мемоизированы, следовательно, будет утрачено преимущество этого процесса;
- 3) обоснования необходимости использования `ges` мы рассматривали в разделе 15.3;
- 4) каждый вызов `memoize-1` создает новую таблицу сохраняемых результатов. Следовательно, каждый процесс мемоизации различных функций будет создавать собственные таблицы вместо использования общих совместных таблиц, а это плохая идея.

### Упражнение 28.3

Почему создание совместно используемых таблиц мемоизации является плохой идеей? Ответ должен быть конкретным.

## 28.3.2. Редакторское расстояние для исправления орфографических ошибок

Текстовые редакторы, текстовые процессоры, мобильные телефоны и различные другие устройства теперь в обязательном порядке исправляют орфографию или предлагают варианты правильного написания слов (или исправления ошибок). Как они это делают? Требуются две возможности: вычисление расстояния между словами и поиск слов, которые находятся рядом в соответствии с этой метрикой. В этом разделе мы рассмотрим первый из этих вопросов. (При обсуждении мы не будем останавливаться на точном определении того, что такое «слово», а вместо этого просто будем работать со строками. Реальная система должна была бы сосредоточиться на этом определении с существенными подробностями.)

#### **Выполните прямо сейчас**

Подумайте о том, как можно было бы определить «расстояние между двумя словами». Не является ли оно определением метрического пространства (metric space) ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Метрическое\\_пространство](https://ru.wikipedia.org/wiki/Метрическое_пространство))?

### Упражнение 28.4

Будет ли определение, которое приведено ниже, определять метрическое пространство над множеством слов?

Может существовать несколько допустимых способов определения расстояния между словами, но здесь нас интересует расстояние в весьма специфическом контексте орфографических ошибок. Учитывая меру расстояния, одно из применений может состоять в вычислении расстояния заданного слова от всех слов в словаре и предложении ближайшего слова (т. е. слова с наименьшим расстоянием) в качестве предлагаемого исправления. С учетом такого предложенного варианта использования хотелось бы получить, как минимум, следующие характеристики:

Очевидно, что мы не можем вычислить расстояние от каждого отдельного вводимого слова до каждого слова в большом словаре. Обеспечение эффективности этого процесса составляет другую половину рассматриваемой здесь задачи. Короче говоря, необходимо как можно быстрее отбросить большинство слов, поскольку вряд ли они будут достаточно близкими, а для этого может оказаться весьма полезным такое представление, как мешок слов (bag-of-words; [https://ru.wikipedia.org/wiki/Мешок\\_слов](https://ru.wikipedia.org/wiki/Мешок_слов)) (здесь мешок символов).

- расстояние от любого слова до самого себя должно быть нулевым;
  - расстояние от слова до любого другого слова, исключая самого себя, должно быть строго положительным (иначе, если задано слово, которое уже содержится в словаре, то «исправлением» может оказаться другое слово из словаря);
  - расстояние между двумя словами должно быть симметричным, т. е. не должно зависеть от порядка, в котором передаются аргументы.
- 

### Упражнение 28.5

Обратите внимание: мы не включили неравенство треугольника, связанное со свойствами метрики. Почему? Если не требуется неравенство треугольника, то позволяет ли это нам определить более интересные функции расстояния, которые не являются метриками?

---

При рассмотрении пары слов предполагается, что мы хотели ввести одно, но на самом деле ввели другое. Здесь также существует несколько возможных определений, но самое широко распространенное считает, что есть три варианта опечаток (из-за «неулюжих пальцев»):

- 1) пропуск символа;
- 2) ввод символа дважды;
- 3) вместо требуемого символа введен другой.

В частности, нас интересует наименьшее количество правок этих форм, которые необходимо выполнить для перехода от одного слова к другому. По естественным причинам это понятие расстояния называется редакторским расстоянием (edit distance), или в честь его создателя расстоянием Левенштейна (Levenshtein distance).

Более подробно об этом  
см. «Википедию» ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Расстояние\\_Левенштейна](https://ru.wikipedia.org/wiki/Расстояние_Левенштейна)).

Существует несколько вариантов этого определения. Пока мы рассмотрим самый простой, который предполагает, что каждая из таких ошибок имеет равную стоимость. Для конкретных устройств ввода, возможно, потребуется присваивание этим ошибкам разной стоимости, кроме того, также можно назначить различные значения стоимости в зависимости от того, какой именно неправильный символ был набран (два символа, расположенных рядом на клавиатуре, с гораздо большей вероятностью окажутся вполне логичной ошибкой, чем два символа, расположенных далеко друг от друга). Скоро мы вернемся к некоторым из этих соображений (раздел 28.3.3).

С учетом этой метрики расстояние между «kitten» и «sitting» равно 3, потому что необходимо заменить «k» на «s», «e» на «i» и вставить «g» в конце (или симметрично: выполнить противоположные замены и удалить «g»). Ниже приведены дополнительные примеры:

```
<levenstein-tests> ::=
check:
  levenstein(empty, empty) is 0
  levenstein([list:"x"], [list: "x"]) is 0
  levenstein([list: "x"], [list: "y"]) is 1
```

```

# Всего около 600 примеров – здесь показан один из них.
levenshtein(
  [list: "b", "r", "i", "t", "n", "e", "y"],
  [list: "b", "r", "i", "t", "a", "n", "y"])
is 3
# http://en.wikipedia.org/wiki/Levenshtein\_distance
levenshtein(
  [list: "k", "i", "t", "t", "e", "n"],
  [list: "s", "i", "t", "t", "i", "n", "g"])
is 3
levenshtein(
  [list: "k", "i", "t", "t", "e", "n"],
  [list: "k", "i", "t", "t", "e", "n"])
is 0
# http://en.wikipedia.org/wiki/Levenshtein\_distance
levenshtein(
  [list: "S", "u", "n", "d", "a", "y"],
  [list: "S", "a", "t", "u", "r", "d", "a", "y"])
is 3
# http://www.merriampark.com/ld.htm
levenshtein(
  [list: "g", "u", "m", "b", "o"],
  [list: "g", "a", "m", "b", "o", "l"])
is 2
# http://www.csse.monash.edu.au/~lloyd/tildeStrings/Alignment/92.IPL.html
levenshtein(
  [list: "a", "c", "g", "t", "a", "c", "g", "t", "a", "c", "g", "t"],
  [list: "a", "c", "a", "t", "a", "c", "t", "t", "g", "t", "a", "c", "t"])
is 4
levenshtein(
  [list: "s", "u", "p", "e", "r", "c", "a", "l", "i",
   "f", "r", "a", "g", "i", "l", "i", "s", "t"],
  [list: "s", "u", "p", "e", "r", "c", "a", "l", "y",
   "f", "r", "a", "g", "i", "l", "e", "s", "t"])
is 2
end

```

В действительности основной алгоритм чрезвычайно прост:

```

<levenshtein> ::=

rec levenshtein :: (List<String>, List<String> -> Number) =
  <levenshtein-body>

```

Здесь, поскольку входные данные представлены двумя списками, существуют четыре варианта, из которых два являются симметричными:

```

<levenshtein-body> ::=

lam(s, t):
  <levenshtein-both-empty>
  <levenshtein-one-empty>
  <levenshtein-neither-empty>
end

```

Если оба входных списка пустые, то ответ прост:

```
<levenshtein-both-empty> ::=  
if is-empty(s) and is-empty(t): 0
```

Если один из списков пустой, то редакторское расстояние соответствует длине другого списка, который необходимо вставить (или удалить) полностью (поэтому мы учитываем стоимость по единице для каждого символа):

```
<levenshtein-one-empty> ::=  
else if is-empty(s): t.length()  
else if is-empty(t): s.length()
```

Если оба списка не пустые, то в каждом из них имеется первый символ. Если первые символы одинаковые, то стоимость редактирования, связанная с этим символом, отсутствует (это отражено рекуррентным выражением для остальной части слов без добавления стоимости редактирования). Но если первые символы не одинаковы, то для каждого рассматриваются возможные варианты редактирования:

```
<levenshtein-neither-empty> ::=  
else:  
  if s.first == t.first:  
    levenshtein(s.rest, t.rest)  
  else:  
    min3(  
      1 + levenshtein(s.rest, t),  
      1 + levenshtein(s, t.rest),  
      1 + levenshtein(s.rest, t.rest))  
  end  
end
```

В первом случае мы предполагаем, что в строке *s* слишком много символов, поэтому вычисляем стоимость, как если бы удаляли ее, и находим наименьшую стоимость для остальных строк (но учитывая стоимость этого удаления). Во втором случае мы с учетом симметрии предполагаем, что в строке *t* слишком много символов. В третьем случае предполагается, что один символ был заменен другим, поэтому учитываем стоимость, равную единице, но продолжаем рассматривать остальные части обоих слов (например, предположим, что вместо «k» был введен символ «s», и продолжаем рассматривать остальные части «itten» и «itting»). Для этого используется следующая вспомогательная функция:

```
fun min3(a :: Number, b :: Number, c :: Number):  
  num-min(a, num-min(b, c))  
end
```

Разумеется, этот алгоритм успешно пройдет все тесты, написанные выше, но при этом возникает проблема: время работы возрастает экспоненциально. Причина в том, что каждый раз, когда мы находим несоответствие, мы

опять возвращаемся к трем подзадачам. Таким образом, теоретически алгоритм требует времени, пропорционального третьей степени длины более короткого слова. На практике любой совпадающий префикс не приводит к ветвлению, ветвление вызывают несовпадения (таким образом, подтверждение того, что расстояние от слова до самого себя равно нулю, требует времени, линейного относительно размера этого слова).

Но следует отметить, что многие из этих подзадач одинаковы. Например, для данных «kitten» и «sitting» несоответствие начального символа заставит алгоритм вычислить расстояние «itten» от «itting», а также «itten» от «sitting» и «kitten» от «itting». Эти последние два вычисления расстояния также будут включать сопоставление «itten» с «itting». Таким образом, снова необходимо, чтобы дерево вычислений превратилось в НАГ выражений, которые действительно вычисляются.

Следовательно, решение естественным образом приводится к мемоизации. В первую очередь необходима функция-мемоизатор, работающая с двумя аргументами вместо одного:

```
data MemoryCell2<T, U, V>:
    | mem(in-1 :: T, in-2 :: U, out :: V)
end

fun memoize-2<T, U, V>(f :: (T, U -> V)) -> (T, U -> V):
    var memory :: List<MemoryCell2<T, U, V>> = empty
    lam(p, q):
        answer = find(
            lam(elt): (elt.in-1 == p) and (elt.in-2 == q) end,
            memory)
        cases (Option) answer block:
            | none =>
                result = f(p, q)
                memory :=
                    link(mem(p, q, result), memory)
                result
            | some(v) => v.out
        end
    end
end
```

Большая часть кода осталась неизменной, за исключением того, что теперь сохраняются два аргумента, а не один, и, соответственно, рассматриваются оба.

С учетом приведенного выше кода можно переопределить функцию `levenshtein`, чтобы воспользоваться мемоизацией:

```
<levenshtein-memo> ::=
rec levenshtein :: (List<String>, List<String> -> Number) =
    memoize-2(
        lam(s, t):
            if is-empty(s) and is-empty(t): 0
            else if is-empty(s): t.length()
```

```
else if is-empty(t): s.length()
else:
    if s.first == t.first:
        levenshtein(s.rest, t.rest)
    else:
        min3(
            1 + levenshtein(s.rest, t),
            1 + levenshtein(s, t.rest),
            1 + levenshtein(s.rest, t.rest))
end
end
end)
```

Здесь аргумент для `memoize-2` в точности тот же, что мы видели ранее в `<levenshtein-body>` (и теперь вы знаете, почему мы определили функцию `levenshtein` несколько странно, без использования ключевого слова `fun`).

Сложность этого алгоритма остается нетривиальной. Во-первых, введем термин «суффикс»: суффикс строки – это остальная ее часть, начинающаяся с любой позиции. (Таким образом, «`kitten`», «`itten`», «`ten`», «`n`» и «» – это все суффиксы слова «`kitten`».) Теперь обратите внимание на то, что в худшем случае, начиная с каждого суффикса в первом слове, возможно, необходимо выполнить сравнение с каждым суффиксом во втором слове. К счастью, для каждого из этих суффиксов мы выполняем постоянное вычисление, связанное с рекурсией. Следовательно, общая времененная сложность вычисления расстояния между строками длины  $m$  и  $n$  равна  $O([m, n \rightarrow m \cdot n])$ . (Мы вернемся к определению используемого пространства позже (в подразделе 28.3.5).)

---

### Упражнение 28.6

Измените приведенный выше алгоритм так, чтобы он создавал действительную (оптимальную) последовательность операций редактирования. Иногда это обозначают термином «обратная трассировка» (traceback).

---

## 28.3.3. Природа как машинистка с неловкими пальцами

Мы только что рассмотрели, как исправить ошибки, допущенные людьми. Однако люди не единственные плохие машинистки: природа – тоже одна из них.

Изучая живую материю, мы получаем последовательности аминокислот и других подобных химических веществ, включающих молекулы, такие как ДНК, которые содержат важную и потенциально определяющую информацию о конкретном организме. Эти последовательности состоят из схожих фрагментов, которые мы хотим идентифицировать, потому что они представляют взаимоотношения в поведении или эволюции организма. К сожалению, эти последовательности никогда не бывают идентичными: как

и все специалисты, занимающиеся программированием на низком (близком к аппаратуре) уровне, природа промахивается и иногда совершает ошибки при копировании (так называемые – по предположению – мутации). Следовательно, поиск строгого равенства исключил бы слишком много последовательностей, которые почти наверняка равнозначны. Вместо этого мы должны выполнить шаг выравнивания, чтобы найти эти равнозначные последовательности. Как можно догадаться, этот процесс в значительной степени представляет собой процесс вычисления редакторского расстояния и использования некоторого порогового значения для определения того, достаточно ли малым является редакторское расстояние. Этот алгоритм назван в честь его создателей алгоритмом Смита–Ватермана (Smith–Waterman) и имеет ту же сложность, что и алгоритм Левенштейна, поскольку по существу идентичен ему.

Единственное различие между обычно применяемыми представлениями Левенштейна и Смита–Ватермана заключается в том, что упоминалось ранее: почему каждой операции редактирования присваивается расстояние, равное единице? Вместо этого в представлении Смита–Ватермана предполагается, что у нас есть функция, которая дает нам оценку разрыва (gap score), т. е. значение для присваивания операции редактирования каждого символа, т. е. оценки как для совпадений, так и для правок, причем эти оценки определяются биологическими соображениями. Разумеется, как мы уже отмечали, эта потребность характерна не только для биологии, с тем же успехом мы могли бы использовать «оценку разрывов», чтобы отобразить вероятность замены на основе характеристик клавиатуры.

Этот подраздел, возможно, необходимо пропустить в некоторых штатах и странах ([https://en.wikipedia.org/wiki/Creation\\_and\\_evolution\\_in\\_public\\_education](https://en.wikipedia.org/wiki/Creation_and_evolution_in_public_education)).

Если выражаться более точно, мы выполняем локальное выравнивание последовательностей ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Выравнивание\\_последовательностей](https://ru.wikipedia.org/wiki/Выравнивание_последовательностей)).

## 28.3.4. Динамическое программирование

Мы использовали мемоизацию как стандартное средство сохранения значений предыдущих вычислений для повторного использования в дальнейшем. Для этого существует еще одна широко известная методика, называемая динамическим программированием (dynamic programming). Эта методика тесно связана с мемоизацией, и действительно, ее можно рассматривать как двойной метод достижения одной и той же цели. Сначала мы рассмотрим динамическое программирование в действии, а затем обсудим, чем оно отличается от мемоизации.

Динамическое программирование также основано на накоплении в памяти ответов и поиска их вместо повторных вычислений. Таким образом, это также процесс преобразования формы вычисления из дерева в направленный ациклический граф (НАГ) реальных вызовов. Главное отличие состоит в том, что вместо того, чтобы начать с самых крупных вычислений и рекуррентного обращения к менее значимым, метод начинает с самых мелких вычислений и постепенно переходит к более крупным.

Мы рассмотрим предыдущие примеры с применением этого метода.

### 28.3.4.1. Числа Каталана и динамическое программирование

Для начала необходимо определить структуру данных для хранения ответов. Соблюдая соглашение, будем использовать массив.

MAX-CAT = 11

Что происходит, когда пространство исчерпано? Мы можем использовать метод дублирования, рассмотренный в главе 20.

```
answers :: Array<Option<Number>> = array-of(None, MAX-CAT + 1)
```

Теперь функция `catalan` просто ищет ответ в этом массиве:

```
fun catalan(n):
  cases (Option) array-get-now(answers, n):
    | none => raise("looking at uninitialized value")
    | some(v) => v
  end
end
```

Но как заполнить этот массив? Мы начинаем с одного известного значения и используем формулу для вычисления остальной части в инкрементальном порядке:

```
fun fill-catalan(upper):
  array-set-now(answers, 0, some(1))
  when upper > 0:
    for map(n from range(1, upper + 1)):
      block:
        cat-at-n =
          for fold(acc from 0, k from range(0, n)):
            acc + (catalan(k) * catalan(n - 1 - k))
          end
        array-set-now(answers, n, some(cat-at-n))
      end
    end
  end
end

fill-catalan(MAX-CAT)
```

Полученная программа успешно проходит тесты, описанные в `<catalan-tests>`.

Обратите внимание: нам пришлось отменить естественное рекурсивное определение, которое следует от больших значений к меньшим, чтобы вместо него использовать цикл, выполняющий проход от меньших значений к большим. Теоретически в программе существует опасность: когда мы применяем функцию `catalan` к некоторому значению, этот индекс ответов `answers` может оказаться еще не инициализированным, что приведет к ошибке. Но в действительности нам известно, что поскольку мы заполняем все мень-

шие индексы в `answers` перед вычислением следующего большего индекса, то такая ошибка никогда не возникнет. Следует отметить, что это требует тщательного обоснования нашей программы, в чем не было необходимости при использовании мемоизации, потому что там выполнялся именно тот рекурсивный вызов, который был нужен, – он либо находил значение, либо вычислял его заново.

### 28.3.4.2. Расстояние Левенштейна и динамическое программирование

Теперь попробуем переписать процесс вычисления расстояния Левенштейна:

```
<levenshtein-dp> ::=  
fun levenshtein(s1 :: List<String>, s2 :: List<String>):  
    <levenshtein-dp/1>  
end
```

Мы будем использовать табличное представление редакторского расстояния для каждого префикса каждого слова. То есть получим двумерную таблицу с количеством строк, равным длине строки `s1`, и количеством столбцов, равным длине строки `s2`. В каждой ячейке будет записано редакторское расстояние для префиксов `s1` и `s2` по индексам, представленным как положение в таблице.

Следует отметить, что арифметика индексов будет создавать постоянную нагрузку: если слово имеет длину  $n$ , то необходимо записать редакторское расстояние в  $n + 1$  позиций и в одну дополнительную, соответствующую пустому слову. Это верно для обоих слов:

```
<levenshtein-dp/1> ::=  
s1-len = s1.length()  
s2-len = s2.length()  
answers = array2d(s1-len + 1, s2-len + 1, none)  
<levenshtein-dp/2>
```

Обратите внимание: создавая `answers` внутри `levenshtein`, мы можем определить точный необходимый размер на основе входных данных вместо резервирования пространства с запасом или динамического наращивания массива.

Мы инициализировали таблицу значением `none`, поэтому получим сообщение об ошибке, если случайно попытаемся использовать неинициализированную запись. Поэтому удобнее будет создать вспомогательные функции, которые позволят обеспечить содержание в таблице только чисел:

Что оказалось необходимым при написании и отладке этого кода.

```
<levenshtein-dp/2> ::=  
fun put(s1-idx :: Number, s2-idx :: Number, n :: Number):  
    answers.set(s1-idx, s2-idx, some(n))  
end
```

```
fun lookup(s1-idx :: Number, s2-idx :: Number) -> Number:
    a = answers.get(s1-idx, s2-idx)
    cases (Option) a:
        | none => raise("looking at uninitialized value")
        | some(v) => v
    end
end
```

Теперь необходимо заполнить массив. Сначала инициализируем строку, представляющую редакторские расстояния, когда строка `s2` пуста, и столбец, где строка `s1` является пустой. В позиции (0,0) редакторское расстояние равно нулю, а в каждой последующей позиции это расстояние текущей ячейки от нуля, потому что именно столько символов должно быть добавлено к одному слову или удалено из другого, чтобы оба совпали:

```
<levenshtein-dp/3> ::=

for each(s1i from range(0, s1-len + 1)):
    put(s1i, 0, s1i)
end

for each(s2i from range(0, s2-len + 1)):
    put(0, s2i, s2i)
end

<levenshtein-dp/4>
```

Наконец, мы добрались до самой сердцевины вычисления. Необходимо выполнить итеративный проход по каждому символу в каждом слове. Эти символы размещены по индексам от 0 до `s1-len - 1` и `s2-len - 1` и точно представляют диапазоны значений, генерированных выражениями `range(0, s1-len)` и `range(0, s2-len)`.

```
<levenshtein-dp/4> ::=

for each(s1i from range(0, s1-len)):
    for each(s2i from range(0, s2-len)):
        <levenshtein-dp/compute-dist>
    end
end

<levenshtein-dp/get-result>
```

Обратите внимание: мы создаем наш маршрут вычислений «изнутри наружу» – от малых случаев к более крупным, а не начинаем с самых больших входных данных, проводя вычисления «снаружи внутрь» и рекурсивно спускаясь к малым данным.

### Выполните прямо сейчас

Это строго истинно?

Нет. Сначала мы заполнили значениями ячейки на «границах» таблицы. Причина в том, что заполнение в середине `<levenshtein-dp/compute-dist>` связано с гораздо большими затруднениями. Инициализируя все известные

значения, мы обеспечиваем ясность основного вычисления. Но это означает, что порядок заполнения таблицы становится более сложным.

Теперь вернемся к вычислению расстояния. Для каждой пары позиций требуется редакторское расстояние между парой слов до этих позиций включительно. Это расстояние определяется путем проверки идентичности символов в паре позиций. Если символы идентичны, то расстояние такое же, как и для предыдущей пары префиксов, иначе придется попробовать три разных вида редактирования:

```
dist =
  if get(s1, s1i) == get(s2, s2i):
    lookup(s1i, s2i)
  else:
    min3(
      1 + lookup(s1i, s2i + 1),
      1 + lookup(s1i + 1, s2i),
      1 + lookup(s1i, s2i))
end
put(s1i + 1, s2i + 1, dist)
```

Кроме того, такого рода арифметические операции с координатами «зашвышения/занижения диапазона на единицу» (off-by-one) обычны при использовании табличных представлений, потому что мы пишем код с учетом элементов, которые не присутствуют изначально, следовательно, должны создать дополняемую таблицу для хранения значений для граничных условий. В качестве альтернативы можно было бы разрешить в такой таблице начать адресацию с -1, чтобы основное вычисление выглядело как обычно.

В любом случае, когда это вычисление выполнено, вся таблица заполнена значениями. Нам еще предстоит прочитать ответ, расположенный в конце таблицы:

```
<levenshtein-dp/get-result> ::=
lookup(s1-len, s2-len)
```

Даже без учета вспомогательных функций, которые мы написали, чтобы усмирить параноидальные сомнения по поводу использования неопределенных значений, в итоге получаем:

```
fun levenshtein(s1 :: List<String>, s2 :: List<String>):
  s1-len = s1.length()
  s2-len = s2.length()
  answers = array2d(s1-len + 1, s2-len + 1, none)

  for each(s1i from range(0, s1-len + 1)):
    put(s1i, 0, s1i)
```

На момент написания этой книги текущая версия ([https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=levenshtein\\_distance&oldid=581406185#iterative\\_with\\_full\\_matrix](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=levenshtein_distance&oldid=581406185#iterative_with_full_matrix)) страницы «Википедии» ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Расстояние\\_Левенштейна](https://ru.wikipedia.org/wiki/Расстояние_Левенштейна)) о расстоянии Левенштейна содержит версию динамического программирования, которая очень похожа на приведенный выше код. Запись на псевдокоде позволяет избежать проблем с адресной арифметикой (обратите внимание: слова индексируются, начиная с 1 вместо 0, что позволяет телу кода выглядеть более «нормальным»), а инициализация всех элементов нулем становится потенциальным источником трудно обнаруживаемых ошибок, потому что неинициализированный элемент таблицы неотличим от допустимой записи с нулевым редакторским расстоянием. На странице также приведено рекурсивное ([https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=levenshtein\\_distance&oldid=581406185#recursive](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=levenshtein_distance&oldid=581406185#recursive)) решение и упоминается мемоизация, но это не показано в коде.

```
end
for each(s2i from range(0, s2-len + 1)):
    put(0, s2i, s2i)
end

for each(s1i from range(0, s1-len)):
    for each(s2i from range(0, s2-len)):
        dist =
            if get(s1, s1i) == get(s2, s2i):
                lookup(s1i, s2i)
            else:
                min3(
                    1 + lookup(s1i, s2i + 1),
                    1 + lookup(s1i + 1, s2i),
                    1 + lookup(s1i, s2i))
            end
        put(s1i + 1, s2i + 1, dist)
    end
end

lookup(s1-len, s2-len)
end
```

Этот вариант кода заслуживает сравнения с мемоизированной версией (*<levenshtein-memo>*).

## 28.3.5. Сравнение мемоизации и динамического программирования

После того как мы рассмотрели два совершенно разных метода, позволяющих избежать повторных вычислений, следует их сравнить. Важно отметить, что мемоизация – гораздо более простой метод: напишите естественное рекурсивное определение, определите его пространственную сложность, определите степень проблематичности, чтобы обосновать компромисс между пространством и временем, и если это обосновано, то примените мемоизацию. Код остается понятным, и в дальнейшем читатели и сопровождающие лица будут благодарны за это. Напротив, динамическое программирование требует реорганизации алгоритма для работы снизу вверх, что часто может сделать код более трудным для понимания и полным тонких инвариантов граничных условий и порядка вычислений.

Тем не менее решение методом динамического программирования иногда может оказаться более эффективным с точки зрения вычислений. Например, в случае с расстоянием Левенштейна обратите внимание на то, что в каждом элементе таблицы мы (самое большое) используем только те элементы, которые взяты из предыдущей строки и столбца. Это означает, что никогда не требуется хранить всю таблицу, можно сохранить только граничные значения, что уменьшает пространство до пропорционального сумме, а не произведению

Дополнительные примеры классических задач динамического программирования см. на веб-странице [https://people.cs.clemson.edu/~bcdean/dp\\_practice/](https://people.cs.clemson.edu/~bcdean/dp_practice/). Подумайте, как каждую из этих задач можно представить в виде прямой рекурсии.

длин слов. Например, в области вычислительной биологии (при использовании алгоритма Смита–Ватермана) эта экономия может быть существенной. Но такая оптимизация практически невозможна для мемоизации.

Более конкретное сравнение приведено в табл. 28.1.

**Таблица 28.1. Сравнение мемоизации и динамического программирования**

Мемоизация	Динамическое программирование
Сверху вниз	Снизу вверх
Поиск в глубину	Поиск в ширину
Черный ящик	Требуется реорганизация кода
Необходимы все сохраненные вызовы	Возможно выполнение вычислений, не являющихся необходимыми
Невозможность простого исключения ненужных данных	Возможность простого исключения ненужных данных
Никогда нельзя случайно использовать неинициализированный ответ	Можно случайно использовать неинициализированный ответ
Необходимость проверки существования ответа	Решение можно спроектировать так, чтобы не нужно было проверять наличие ответа

Из табл. 28.1 следует, что это, по существу, двойственные методы. В большинстве описаний динамического программирования остается неучтенным тот факт, что этот метод также основан на вычислении, всегда дающем один и тот же ответ для заданного ввода, т. е. является чистой функцией.

С точки зрения разработки программного обеспечения есть еще два соображения.

Во-первых, производительность мемоизированного решения может отставать от производительности динамического программирования, когда мемоизированное решение использует общую структуру данных для хранения мемо-таблицы, в то время как решение динамического программирования неизменно будет использовать пользовательскую структуру данных (поскольку код в любом случае необходимо переписывать). Поэтому, прежде чем переходить к динамическому программированию из соображений производительности, имеет смысл попробовать создать собственную функцию мемоизации для задачи: те же самые знания, реализованные в версии динамического программирования, часто могут быть закодированы в этой пользовательской функции мемоизации (например, с использованием массива вместо списка для улучшения времени доступа). Таким образом, программа может выполняться со скоростью, сравнимой со скоростью динамического программирования, сохраняя при этом читабельность и удобство сопровождения.

Во-вторых, предположим, что пространство является важным фактором, и версия динамического программирования может использовать значительно меньше места. Тогда имеет смысл применить динамическое программирование. Означает ли это, что версия с мемоизацией бесполезна?

### Выполните прямо сейчас

А как вы думаете? Мы все еще можем извлечь пользу из версии с мемоизацией?

Да, разумеется, можем. Версия с мемоизацией может служить предсказателем (см. раздел 17.4) для версии динамического программирования, так как предполагается, что они в любом случае будут давать одинаковые ответы, а версия с мемоизацией должна быть гораздо более эффективным предсказателем, чем чисто рекурсивная реализация, поэтому ее можно использовать для проверки версии динамического программирования на гораздо более крупных входных данных.

Короче говоря, всегда сначала создавайте версию с мемоизацией. Если необходимо улучшение производительности, то рассмотрите возможность выбора и начальной настройки структуры данных для функции мемоизации. Если также необходимо сэкономить место и есть возможность получить более эффективное решение методом динамического программирования, то сохраните обе версии под рукой, используя первую для тестирования второй (программист, который будет заниматься сопровождением вашего кода с необходимостью его изменения, будет вам очень благодарен).

---

### Упражнение 28.7

Мы охарактеризовали главное различие между мемоизацией и динамическим программированием как различие между вычислением сверху вниз и поиском в глубину и вычислением снизу вверх и поиском в ширину. Вполне естественно, что при этом должен возникнуть вопрос о порядке вычислений:

- сверху вниз, поиск в ширину;
- снизу вверх, поиск в глубину.

Есть ли у них особые названия, которых мы просто не знаем? Или они совершенно не интересны? Или их почему-то вообще не обсуждают?

---

**Часть VII**

---

**ПРИЛОЖЕНИЯ**

# Глава 29

---

## Pyret для пользователей Racket и Scheme

Если вы раньше программировали на таком языке, как Scheme, или на студенческом уровне Racket (или в среде программирования WeScheme), или даже частично на OCaml, Haskell, Scala, Erlang, Clojure или других языках, то многие элементы Pyret покажутся вам очень знакомыми. Эта глава написана специально для того, чтобы помочь вам перейти от (студенческого уровня) Racket/Scheme/WeScheme (далее используется сокращение RSW) к Pyret, демонстрируя, как необходимо преобразовать синтаксис. Большая часть того, что мы рассматриваем здесь, относится ко всем этим языкам, хотя в некоторых случаях мы будем ссылаться конкретно на функции Racket (и WeScheme), которых нет в Scheme.

В каждом приведенном ниже примере показаны две программы, при выполнении которых получаются одинаковые результаты.

### 29.1. ЧИСЛА, СТРОКИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Числа очень похожи в обоих языках. Как и в Scheme, в Pyret реализованы числа и дроби (рационально-дробные числа) с произвольной точностью. В Pyret нет некоторых более специфических систем счисления, поддерживаемых в Scheme (например, комплексных чисел). Кроме того, Pyret интерпретирует неточные числовые значения немного по-другому.

RSW	Pyret
1	1
RSW	Pyret
1/2	1/2
RSW	Pyret
#i3.14	~3.14

Строки также очень похожи, но в Pyret разрешается использование еще и одиночных кавычек.

RSW	Pyret
"Hello, world!"	"Hello, world!"
RSW	Pyret
"\"Hello\"", he said"	"\"Hello\"", he said"
RSW	Pyret
"\"Hello\"", he said"	'"Hello\"", he said'

Логические значения имеют одинаковые имена:

RSW	Pyret
true	true
RSW	Pyret
false	false

## 29.2. ИНФИКСНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Pyret использует инфиксный синтаксис, напоминающий синтаксис многих других языков программирования с текстовыми управляемыми конструкциями:

RSW	Pyret
(+ 1 2)	1 + 2
RSW	Pyret
(* (- 4 2) 5)	(4 - 2) * 5

Обратите внимание: в Pyret нет правил, определяющих порядок приоритетности операторов, поэтому при наличии нескольких операторов в выражении необходимо использовать круглые скобки, чтобы четко обозначить свои намерения. Если один и тот же оператор повторяется в цепочке вычислений, то скобки не обязательны, цепочечные вычисления выполняются слева направо в обоих языках:

RSW	Pyret
(/ 1 2 3 4)	1 / 2 / 3 / 4

В обоих случаях вычисляется значение 1/24.

## 29.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

При определении и применении функций в Pyret применяется инфиксный синтаксис, в большей степени похожий на синтаксис других языков программирования с текстовыми управляемыми конструкциями. Применение функций соответствует синтаксису, принятому в книгах по алгебре:

RSW	Pyret
(dist 3 4)	dist(3, 4)

Соответственно, для применения используется тот же синтаксис в заголовках функций, а в теле – инфиксный:

RSW	Pyret
(define (dist x y) (sqrt (+ (* x x) (* y y))))	fun dist(x, y): num-sqrt((x * x) + (y * y)) end

## 29.4. Тесты

Фактически существуют три различных способа записи тестов, равнозначных `check-expect` в Racket. Их можно преобразовать в блоки `check`:

RSW	Pyret
(check-expect 1 1)	check: 1 is 1 end

Обратите внимание: несколько тестов можно поместить в один блок:

RSW	Pyret
(check-expect 1 1) (check-expect 2 2)	check: 1 is 1 2 is 2 end

Второй способ: в качестве псевдонима (алиаса) для `check` можно также написать `examples`. Оба варианта функционально одинаковы, но позволяют человеку четко определить различия между примерами (которые исследуют саму задачу и записываются перед попыткой решения) и тестами (которые пытаются обнаружить ошибки в решении и записываются как черновые варианты проектного решения).

Третий способ: запись блока `where`, включенного в определение функции. Например:

```
fun double(n):  
  n + n  
where:  
  double(0) is 0  
  double(10) is 20  
  double(-1) is -2  
end
```

Такой блок можно написать даже для внутренних функций (т. е. функций, которые содержатся внутри других функций), что невозможно сделать для `check-expect`.

В Pyret, в отличие от Racket, блок тестирования может содержать строку документации. В Pyret это используется для вывода сообщений об успешном и неудачном прохождении теста. Например, попробуйте выполнить приведенный ниже код и посмотрите на его результаты:

```
check "squaring always produces non-negatives":
  # "При возведении в квадрат всегда получаются неотрицательные числа."
  (0 * 0) is 0
  (-2 * -2) is 4
  (3 * 3) is 9
end
```

Это полезно для документирования цели блока тестирования.

Как и в Racket, в Pyret существует много операторов тестирования (в дополнение к `is`). Более подробно см. документацию (<https://www.pyret.org/docs/latest/testing.html>).

## 29.5. ИМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Оба языка имеют довольно либеральную систему именования переменных. Хотя вы можете использовать CamelCase (верблюжий стиль) и `under_scores` (символ подчеркивания) в обоих языках, обычно вместо этого используется стиль, известный как `kebab-case` (<http://wiki.c2.com/?KebabCase>) (кебаб-стиль или шашлык-стиль).

Стиль `kebab-case` выглядит так:

RSW	Pyret
<code>this-is-a-name</code>	<code>this-is-a-name</code>

Это неточное название. Слово «kebab» (кебаб) означает только «meat» (мясо). А шампур (или вертел) – это «shish». Поэтому стиль должен называться, по крайней мере, «shish kebab case».

Хотя в Pyret есть операция инфиксного вычитания, сам язык может однозначно отличить `this-name` (переменная) от `this - name` (выражение вычитания), поскольку во втором выражении знак минус – должен быть окружен пробелами.

Несмотря на это соглашение о выделении операции пробелами, в Pyret не разрешены некоторые более причудливые имена, допустимые в Scheme. Например, в Scheme можно написать:

```
(define e^i*pi -1)
```

Но в Pyret это некорректное имя.

## 29.6. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ

Pyret отличается от Racket (и тем более от Scheme) способом обработки определений данных. Сначала рассмотрим, как определяется структура:

RSW

```
(define-struct pt (x y))
```

Pyret

```
data Point:  
    | pt(x, y)  
end
```

Последняя запись может показаться избыточной, но прямо сейчас мы увидим, почему она удобна. Между тем стоит отметить: когда в определении записывается только один тип данных, несколько строк кажутся слишком громоздкой формой. Запись в одну строку допустима, но в этом случае символ | в середине выглядит несколько неуклюже:

```
data Point: | pt(x, y) end
```

Поэтому Pyret разрешает исключить начальный символ |, и запись становится более удобной для чтения:

```
data Point: pt(x, y) end
```

Теперь предположим, что имеется два типа точек. В учебной (student) версии Racket мы должны описать эти типы с помощью комментария:

```
;; A Point is either  
;; - (pt number number), or  
;; - (pt3d number number number)
```

В Pyret те же типы можно определить непосредственно в коде:

```
data Point:  
    | pt(x, y)  
    | pt3d(x, y, z)  
end
```

Короче говоря, Racket оптимизирует определение данных с одним вариантом, тогда как Pyret оптимизирует определение данных с несколькими вариантами. Поэтому в Racket трудно четко выразить многовариантное определение, а в Pyret одновариантное определение выражается громоздким способом.

Для структур и Racket, и Pyret предлагают конструкторы, селекторы и предикаты. Конструкторы – это просто функции:

RSW

```
(pt 1 2)
```

Pyret

```
pt(1, 2)
```

Предикаты также представляют собой функции со специализированной схемой именования:

RSW

```
(pt? x)
```

Pyret

```
is-pt(x)
```

Поведение предикатов одинаково (он возвращают значение `true`, если аргумент был создан соответствующим конструктором, иначе возвращается

`false`). Но операция выбора (селектор) различна в этих двух языках (об операции выбора мы узнаем больше, когда ниже будем рассматривать `cases`):

RSW	Pyret
( <code>pt-x v</code> )	<code>v.x</code>

Следует отметить, что в Racket операция `pt-x` проверяет факт создания параметра конструктором `pt` до извлечения значения поля `x`. Таким образом, `pt-x` и `pt3d-x` – это две различные функции, и одну из них нельзя использовать вместо другой. Напротив, в Pyret операция `.x` извлекает любое значение поля `x`, не обращая внимания на то, как был создан объект `v`. Поэтому можно использовать операцию `.x` для значения, созданного `pt` или `pt3d` (или любого другого значения, содержащего поле `x`). Но операция `cases` учитывает это различие.

## 29.7. УСЛОВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

В Pyret существует несколько типов условных выражений – больше, чем в учебной версии Racket.

Общие условные выражения можно записывать с использованием ключевого слова `if`, соответствующего `if` в Racket, но с другим синтаксисом.

RSW	Pyret
( <code>if full-moon</code> <code>"howl"</code> <code>"meow"</code> )	<code>if full-moon:</code> <code>"howl"</code> <code>else:</code> <code>"meow"</code> <code>end</code>
RSW	Pyret
( <code>if full-moon</code> <code>"howl"</code> ( <code>if new-moon</code> <code>"bark"</code> <code>"meow"</code> ))	<code>if full-moon:</code> <code>"howl"</code> <code>else if new-moon:</code> <code>"bark"</code> <code>else:</code> <code>"meow"</code> <code>end</code>

Обратите внимание: в Pyret конструкция `if` включает `else if`, предоставляя возможность создания списка из нескольких вопросов на одном уровне выравнивания, а в конструкции `if` в Racket такой возможности нет. Для восстановления одинакового уровня выравнивания соответствующий код в Racket должен быть записан так:

```
(cond
  [full-moon "howl"]
  [new-moon "bark"]
  [else "meow"])
```

Похожая конструкция в Pyret называется `ask`, она предназначена для аналогичной проверки условий `cond`:

```
ask:  
| full-moon then: "howl"  
| new-moon then: "bark"  
| otherwise: "meow"  
end
```

В Racket конструкция `cond` также используется для выбора способа вычислений по типу данных:

```
(cond  
[(pt? v) (+ (pt-x v) (pt-y v))]  
[(pt3d? v) (+ (pt-x v) (pt-z v))])
```

В Pyret можно было бы записать это выражение проверки типа данных почти так же:

```
ask:  
| is-pt(v) then: v.x + v.y  
| is-pt3d(v) then: v.x + v.z  
end
```

Или даже так:

```
if is-pt(v):  
    v.x + v.y  
else if is-pt3d(v):  
    v.x + v.z  
end
```

(Как и в учебных версиях Racket, в версиях Pyret выводится сообщение об ошибке, если отсутствует ветвь вычислений для совпадшего условного выражения.)

Но Pyret предоставляет еще и особый синтаксис, специально предназначенный для определений данных:

```
cases (Point) v:  
| pt(x, y)      => x + y  
| pt3d(x, y, z) => x + z  
end
```

Здесь проверяется, принадлежит ли `v` к типу `Point`, предоставляется понятный синтаксический способ определения альтернативных ветвей, а также создается возможность присваивания краткого локального имени каждой позиции поля вместо необходимости использования селекторов, таких как `.x`. В общем случае в Pyret мы предпочтаем пользоваться конструкцией `cases` для обработки определений данных. Но в некоторых случаях, например при наличии многочисленных вариантов данных, функция обрабатывает

лишь несколько вариантов. В подобных ситуациях более разумно явно использовать предикаты и селекторы.

## 29.8. Списки

В Racket в зависимости от уровня языка списки создаются с использованием ключевых слов `cons` или `list` с применением `empty` для пустого списка. Соответствующими формами записи в Pyret являются `link`, `list` и `empty`. Функция `link` принимает два аргумента, как и `cons` в Racket:

RSW	Pyret
<code>(cons 1 empty)</code>	<code>link(1, empty)</code>
RSW	Pyret
<code>(list 1 2 3)</code>	<code>[list: 1, 2, 3]</code>

Обратите внимание: синтаксис `[1, 2, 3]`, представляющий списки во многих языках, не является допустимым в Pyret: списки не выделяются собственным особым синтаксисом. Вместо этого обязательно необходимо явно использовать конструктор: `[list: 1, 2, 3]` создает список, а `[set: 1, 2, 3]` создает множество вместо списка.

В действительности мы можем создавать собственные пользовательские конструкторы ([https://www.pyret.org/docs/latest/Expressions.html#%28part.\\_s~3aconstruct-expr%29](https://www.pyret.org/docs/latest/Expressions.html#%28part._s~3aconstruct-expr%29)) и использовать их, применяя тот же синтаксис.

---

### Упражнение 29.1

Попробуйте ввести `[1, 2, 3]` и посмотрите, какое сообщение об ошибке будет выведено.

---

Это показывает нам, как создавать списки. Чтобы определить их составные части, мы используем `cases`. Существуют два варианта: `empty` и `link` (которые мы использовали для создания списков):

RSW	Pyret
<code>(cond</code> <code>[(empty? l) 0]</code> <code>[(cons? l)</code> <code>(+ (first l)</code> <code>(g (rest l))))]</code>	<code>cases (List) l:</code> <code>  empty      =&gt; 0</code> <code>  link(f, r) =&gt; f + g(r)</code> <code>end</code>

Существует соглашение, по которому поля называются `f` (`first` – первый элемент) и `r` (`rest` – остальная часть). Разумеется, это соглашение теряет силу, если существуют другие объекты с теми же именами, в частности при написании вложенной процедуры разделения списка на отдельные элементы

мы по соглашению пишем `fr` (first of the rest – первый элемент из остальной части) и `rr` (rest of the rest – остальная часть от остальной части).

## 29.9. ФУНКЦИИ ПЕРВОГО КЛАССА

В Racket существует функция `lambda`, в Pyret – равнозначная ей функция `lam`:

RSW	Pyret
<code>(lambda (x y) (+ x y))</code>	<code>lam(x, y): x + y end</code>

## 29.10. АННОТАЦИИ

В учебных версиях Racket аннотации обычно записываются как комментарии:

```
; square: Number -> Number
; sort-nums: List<Number> -> List<Number>
; sort: List<T> * (T * T -> Boolean) -> List<T>
```

В Pyret можно записывать аннотации непосредственно в параметрах и возвращаемых значениях. Pyret будет проверять их динамически, но с некоторыми ограничениями, а также может проверять их статически с помощью собственного средства проверки типов. Аннотации, соответствующие приведенным выше, должны записываться следующим образом:

```
fun square(n :: Number) -> Number: ...
fun sort-nums(l :: List<Number>) -> List<Number>: ...
fun sort<T>(l :: List<T>, cmp :: (T, T -> Boolean)) -> List<T>: ...
```

Хотя в Pyret существует форма для отдельной записи аннотации (аналогичная синтаксису с комментариями в Racket), в настоящее время эта форма не является строго обязательной в языке, поэтому здесь мы не приводим ее описание.

## 29.11. ЧТО ЕЩЕ?

Если вы хотите узнать о сравнении других элементов синтаксиса Scheme или Racket с синтаксисом Pyret, то сообщите нам об этом (<http://cs.brown.edu/~sk/Contact/>).

# Глава 30

---

## Сравнение Pyret с Python

Для заинтересованных читателей здесь предлагается несколько примеров, оправдывающих нашу неудовлетворенность использования Python для начального этапа обучения программированию.

**Таблица 30.1. Сравнение Pyret с Python**

Python	Pyret
Python по умолчанию предоставляет машинную арифметику. Таким образом, по умолчанию $0.1 + 0.2$ – это не то же самое, что $0.3$ . (Надеемся, что вы не удивлены, услышав это утверждение.) Объяснение этого явления представляет собой увлекательную тему для изучения, но мы постоянно обнаруживаем, что это является отвлекающим фактором для начинающих программистов, пишущих программы с использованием арифметики. И если мы ничего не будем говорить о подробностях арифметических операций с плавающей запятой, то насколько серьезно будут восприниматься наши заявления о надежности программы?	Pyret по умолчанию реализует точную арифметику, включая рациональные числа. В Pyret $0.1 + 0.2$ действительно равно $0.3$ . Там, где вычисление должно возвращать неточное число, Pyret делает это явно: главное требование в учебном курсе, основанном на надежности
Понимание различия между созданием переменной и обновлением ее значения является наиболее важным результатом обучения, наряду с пониманием областей видимости переменных. Python явно объединяет объявление с обновлением и имеет запутанную историю с областью видимости ( <a href="https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/pmmwplck-python-full-monty/">https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/pmmwplck-python-full-monty/</a> )	Pyret обеспечивает статическую область видимости и делает все возможное – например, при разработке языка запросов для таблиц – для ее поддержки. В синтаксисе Pyret для работы с переменными нет никакой двусмысленности

<b>Python</b>	<b>Pyret</b>
Python имеет нечетко определенный и необязательный механизм аннотаций, который был добавлен на завершающем этапе разработки языка и обобщает значения и типы ( <a href="https://twitter.com/joepolitz/status/1357751800795832321?s=20">https://twitter.com/joepolitz/status/1357751800795832321?s=20</a> )	С учетом уроков, извлеченных из наших нескольких предыдущих исследовательских проектов ( <a href="https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/gsk-flow-typing-theory/">https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/gsk-flow-typing-theory/</a> ) по добавлению типов в языки задним числом, Рурет с самого начала был разработан с возможностью типизации с несколькими изощренными вариантами проектных решений, позволяющими это сделать. Рурет также поддерживает аннотации (в настоящее время динамические), уточняющие тип
Python имеет слабую встроенную поддержку тестирования. Существуют дополнительные профессиональные библиотеки для тестирования программного обеспечения, но их применение связано с дополнительной нестандартной нагрузкой на обучающихся, поэтому в большинстве вводных учебных программ они не используются	Во-первых, учебный курс, провозглашающий надежность, непременно должен включать возможность тестирования. Во-вторых, в нашем педагогическом подходе уделяется большое внимание использованию примеров и, в частности, созданию абстракций по конкретным вариантам. По обеим этим причинам Рурет предоставляет расширенную поддержку для написания примеров и тестов в самом языке, а не в дополнительных внешних библиотеках, а также обеспечивает непосредственную поддержку в языке для решения многих интересных и сложных проблем, возникающих при этом
Изображения не являются значениями языка. Можно написать программу для создания изображения, но вы не сможете просто просмотреть его в своей среде программирования	Изображения являются значениями. Рурет может выводить изображение точно так же, как строку или число (почему бы и нет?). Изображения – это весьма интересные значения, но они предназначены не только для развлечений: изображения особенно полезны для глубокого понимания и объяснения важных, но абстрактных вопросов, таких как композиция функций
В языке нет встроенной формы записи для реактивных программ	Реактивность является основной концепцией языка и предметом исследования проектирования ( <a href="https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/plpk-reactor-design/">https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/plpk-reactor-design/</a> ) и реализации ( <a href="https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/bnpg-stopify/">https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/bnpg-stopify/</a> )

Python	Pyret
Сообщения об ошибках Python не предназначены для начинающих как основного контингента	Начинающие делают много ошибок. Их особенно пугают сообщения об ошибках, и они могут чувствовать разочарование из-за допущенных ошибок. Поэтому сообщения об ошибках Pyret являются результатом почти десятилетнего исследования ( <a href="https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/mfk-measureffect-error-msg-novice-sigcse/">https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/mfk-measureffect-error-msg-novice-sigcse/</a> , <a href="https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/mfk-mind-lang-novice-inter-error-msg/">https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/mfk-mind-lang-novice-inter-error-msg/</a> , <a href="https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/wk-error-msg-classifier/">https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/wk-error-msg-classifier/</a> ). В действительности некоторые преподаватели создали педагогические методы, которые явно полагаются на характер и представление информации в сообщениях об ошибках Pyret
Python начал страдать от усложнений, которые, как мы полагаем, идут на пользу профессионалам, но не начинающим. Например, результат <code>map</code> в Python на самом деле является специальным значением генератора. Это может привести к результатам, требующим дополнительных пояснений, например <code>map(str, [1, 2, 3])</code> создает <code>&lt;map object at 0x1045f4940&gt;</code> . Аннотации типов (обсуждаемые выше) – еще один пример	Поскольку целевой аудиторией Pyret являются начинающие программисты, программирующие в стиле этой книги, наша основная цель при добавлении любой функции – сохранить ранее накопленный опыт и избежать неожиданностей
Определения данных занимают центральное место в информатике, но Python чрезмерно полагается на встроенные структуры данных (особенно словари) и делает определяемые пользователем структуры данных слишком громоздкими для создания	Pyret заимствует богатые традиции таких языков, как Standard ML, OCaml и Haskell, для представления алгебраических типов данных, отсутствие которых часто вынуждает программистов прибегать к громоздким (и неэффективным) приемам кодирования
Python имеет еще несколько острых углов, которые могут привести к неожиданным и нежелательным результатам. Например, оператор <code>=</code> иногда вводит новые переменные, а иногда выполняет повторное связывание имени и значения. Функция, в которой обучающийся забыл вернуть значение, не приводит к ошибке, а молча возвращает <code>None</code> . В Python существует сложная таблица ( <a href="https://papl.cs.brown.edu/2020/growing-lang.html#%28part._design-space-cond%29">https://papl.cs.brown.edu/2020/growing-lang.html#%28part._design-space-cond%29</a> ), которая описывает, какие значения верны, а какие нет и т. д.	Pyret разработан с нуля, чтобы избежать всех проблем, характерных для Python

# Глава 31

---

## Сравнение этой книги с книгой «Как проектировать программы» (HtDP)

Эту книгу (DCIC) часто сравнивают с книгой «Как проектировать программы» (*How to Design Programs* – HtDP) (<https://htdp.org/>), из которой она черпает огромное вдохновение<sup>1</sup>. Здесь мы кратко опишем, как сравниваются эти две книги.

На высоком уровне они очень похожи:

- обе книги построены на основе центральной структуры данных. Обе намерены предоставить методы для разработки программ. Обе начинают с функционального программирования, но переходят (и относятся очень серьезно) к императивному программированию с отслеживанием состояния;
- обе книги основаны на языках, тщательно разработанных с учетом требований образования. Языки обеспечивают специальную поддержку для написания примеров и тестов, сообщений об ошибках, предназначенных для начинающих, встроенные изображения и реактивность. Языки избегают необъяснимых ловушек (в отличие от Python: см. главу 30 или, если вы хотите узнать гораздо больше, прочтите статью <https://cs.brown.edu/~sk/Publications/Papers/Published/pmmwplck-python-full-monty/>);
- и т. д.

Но называть это «сходством» неправильно и даже вредно. DCIC скопировала эти идеи из HtDP, а в некоторых случаях HtDP даже была их первооткрывателем.

Теперь о различиях. Обратите внимание: сейчас мы говорим именно о различиях. Некоторые идеи из DCIC переходят в HtDP, и со временем возможен взаимообмен между ними.

---

<sup>1</sup> Фелляйзен М., Финдлер Р. Б., Кришнамурти Ш., Флэтт М. Как проектировать программы. М.: ДМК Пресс, 2022. <https://dmkpress.com/catalog/computer/programming/978-5-93700-926-3/>.

- Наиболее очевидным различием является то, что в DCIC используется Pyret. В HtDP есть огромное количество хороших идей, но все они игнорируются, потому что реализованы на Racket, синтаксис которого некоторым людям (особенно некоторым преподавателям) не нравится. Мы создали Pyret, чтобы воплотить самые лучшие идеи, о которых узнали из учебных версий Racket, и другие наши собственные идеи, но при этом упаковать их в хорошо знакомый синтаксис. Однако, как вы сами можете убедиться, эти два языка на самом деле не так уж далеки друг от друга: см. главу 29.
- Следующим наиболее очевидным различием является то, что в DCIC также используется Python. У HtDP есть (официально не опубликованное) продолжение, в котором обучают разработке программ на Java (<https://felleisen.org/matthias/HtDC/htdc.pdf>). Мы же, напротив, хотели интегрировать переход на Python в DCIC. На этом противопоставлении можно многому научиться. В частности, Pyret и его среда были тщательно разработаны с учетом педагогических принципов для обучения. Python для этого не подходил, несмотря на его повсеместное использование и сложность состояния. Таким образом, при введении сохранения состояния можно многое добиться, чтобы противопоставить их.
- Далее, в DCIC весьма большое внимание уделено алгоритмическому содержимому, тогда как в HtDP его почти нет. DCIC рассматривает, например, анализ О-большого (глава 18). В DCIC даже есть раздел, посвященный амортизационному анализу (глава 20). Здесь рассматриваются некоторые алгоритмы для графов. Это гораздо более продвинутый материал, чем представленный в HtDP.

В этом заключается большинство различий. Они заметны (некоторые даже очевидны) при беглом просмотре оглавления. Но есть еще одно весьма глубокое различие, которое не будет очевидным для большинства читателей, мы обсудим его ниже.

HtDP основана на превосходной идее: рассматриваемые структуры данных постепенно усложняются с применением принципов теории множеств. Поэтому HtDP начинает с простейших (атомарных) данных, далее рассматриваются данные фиксированного размера (структуры), затем неограниченные наборы (списки) атомарных данных, пары списков, списки структур и т. д. Весь материал выстроен систематически, в четкой последовательности.

Но у такого подхода есть обратная сторона. Вы должны точно знать, что представляют собой данные (это число – возраст, эта строка – имя, а этот список – значения GDP), но это идеальный случай. В каком-то смысле большинство реальных данных – это изображения. После этого (или даже раньше) все данные «виртуализируются» и появляется возможность представить их как изображения.

На наш взгляд, наиболее интересными данными являются списки структур. (Помните их? Они сложны и проходят несколько этапов обработки.) Если это может показаться удивительным, то вот вам другое имя для них: таблицы. Таблицы применяются везде. Их обрабатывают и публикуют даже компании, даже учащиеся начальной школы распознают и используют их. Возможно, это самая важная универсальная форма структурированных данных.

Более того, множество реальных данных представлены в виде таблиц. Вам не нужно что-то воображать или придумывать фиктивные значения GDP, такие как 1, 2 и 3. Вы можете получить реальные значения GPD, или численности населения, или доходов от проката кинофильмов, или спортивных результатов, или что-либо еще, интересующее вас. (В идеальном случае очищенные и тщательно отобранные данные.) Мы считаем, что почти каждый ученик – даже каждый ребенок – начинающий специалист по данным (по крайней мере, когда это удобно для него). Даже ребенок, который говорит «Я ненавижу математику», часто с удовольствием использует статистику, чтобы привести аргументы в пользу своего любимого актера, спортсмена или кого-то еще. Нам просто нужно найти то, что его мотивирует.

Но при этом появляется большое преимущество. Главной особенностью HtDP является то, что для каждого уровня типа данных предоставляется готовый рецепт проектного решения для программирования с использованием этого типа данных. Списки структур сложны. Таков рецепт программирования для них. И мы хотим поместить его как можно ближе к началу. Более того, рецепт проектного решения игнорировать опасно. Студенты борются с пробелами в учебном материале и часто заполняют их плохим кодом, от которого потом трудно отказаться. Рецепт проектного решения обеспечивает структуру, каркас, обозримость и многое другое. Это основано на схемах с познавательной точки зрения.

Поэтому за последние несколько лет мы работали над разнообразными методами разработки программ, которые решают одни и те же задачи разными средствами. Многие из наших недавних исследований в сфере образования заложили новые основы в этой области. Очень многие исследования продолжаются. И DCIC является квинтэссенцией этих исследований и разработок. По мере появления новых результатов мы будем включать их в DCIC (возможно, также и в HtDP). Всегда будьте в курсе этих изменений.

# Глава 32

---

## Примечания к текущей редакции книги

Здесь приведен краткий обзор обновлений, сделанных в каждой редакции книги (за исключением опечаток и других незначительных исправлений).

### **Версия от 25.01.2022 г.**

- Окно определений и взаимодействий переименовано в панель определений и взаимодействий на постоянной основе.
- Материал по работе с переменными перенесен из раздела «Введение в Python» в раздел «Программирование с сохранением состояния». Раздел «Изменение структурированных данных» размещен перед разделом «Изменение переменных» в разделе «Программирование с сохранением состояния».
- Добавлена сравнительная характеристика книг DCIC и HtDP.
- В этой редакции строка включения библиотек DCIC выглядит следующим образом:

```
include shared-gdrive(  
    "dcic-2021",  
    "1wyQZj_L0qqV9Ekgr9au6RX2iqt2Ga8Ep")
```

### **Версия от 21.08.2021 г. – первая редакция книги.**

# Глава 33

---

## Словарь терминов

### **Задержка (*latency*)**

Задержка между двумя узлами в сети – это время, требуемое для передачи пакетов между этими узлами.

### **Идемпотентность (*idempotency*)**

Идемпотентный оператор – это оператор, повторное применение которого к любому значению в его домене (области определения) дает тот же результат, что и при однократном применении ( обратите внимание: при этом подразумевается, что диапазон (значений) является подмножеством домена). Таким образом, функция  $f$  является идемпотентной, если для всех  $x$  в ее области определения  $f(f(x)) = f(x)$  (и по индукции это верно для дополнительных приложений  $f$ ).

### **Инварианты (*invariants*)**

Инварианты – это утверждения о программах, которые всегда должны быть истинными («*in-vary-ant*» – никогда не меняющийся). Например, процедура сортировки может использовать в качестве инварианта тот факт, что возвращаемый ею список всегда является отсортированным.

### **Кеш (*Cache*)**

Кеш представляет собой конкретный случай *компромиссного согласования пространства-времени* (см. термин в этой главе): он жертвует пространством ради времени, используя пространство, чтобы избежать повторного вычисления ответа. Действие использования кеша называется кешированием. Слово «кеш» часто используется в свободно интерпретируемом смысле, но мы используем его только для обозначения информации, которая может быть полностью восстановлена, даже если она была потеряна: это позволяет программе, в которой необходимо изменить условия компромисса – т. е. использовать меньший объем памяти в обмен на большее время, – сделать это безопасно, точно зная, что не будет потеряна никакая информация, следовательно, не принося в жертву корректность.

### **Коиндукция (*coinduction*)**

Коиндукция – это принцип доказательства для математических структур, оснащенных методами наблюдения, а не построения. И напротив, функции на индуктивных данных разделяют их на компоненты, а функции на коиндук-

тивных данных объединяют их. Классический учебник по этой теме (<http://www.cs.ru.nl/~bart/PAPERS/JR.pdf>) будет полезен читателям, интересующимся математикой.

### **Компромисс пространство–время (*space-time tradeoff*)**

Предположим, что существует дорогостоящее вычисление, которое всегда дает один и тот же ответ для заданного набора входных данных. После того как вы вычислили ответ один раз, теперь у вас есть выбор: сохранить ответ, чтобы вы могли просто найти его, когда он вам понадобится снова, или отбросить его и вычислить заново в следующий раз. Первый вариант занимает большее пространство, но экономит время; второй использует меньшее пространство, но требует больше времени. Это, по существу, компромисс между пространством и временем. Мемоизация (раздел 28.3) и использование кеша (см. термин в этой главе) являются примерами этого компромисса.

### **Метасинтаксическая переменная (*metasyntactic variable*)**

Метасинтаксическая переменная – это переменная, которая существует вне языка и охватывает диапазон фрагмента синтаксиса. Например, если мы пишем «для выражений  $e_1$  и  $e_2$  сумма  $e_1 + e_2$ », то не имеем в виду, что программист буквально написал " $e_1$ " в программе, скорее, мы используем  $e_1$  для обозначения того, что программист может написать слева от знака сложения. Следовательно,  $e_1$  является метасинтаксисом.

### **Парсинг (синтаксический разбор) (*parsing*)**

Синтаксический анализ – в весьма широком смысле это действие по преобразованию содержимого одного типа структурированного ввода в содержимое другого типа. Структуры могут быть очень похожими, но обычно они совершенно разные. Часто входной формат прост, в то время как выходной формат должен содержать обширную информацию о содержании входных данных. Например, ввод может быть линейной последовательностью символов во входном потоке, а вывод может быть более сложным и иметь древовидную структуру в соответствии с некоторым типом данных: эта задача ставится для большинства программ и синтаксических анализаторов естественного языка.

### **Пропускная способность (*bandwidth*)**

Пропускная способность между двумя узлами сети – это количество данных, которое может быть передано между ними за определенную единицу времени.

### **Редукция (иногда: *сведение* или *сёртка*) (*reduction*)**

Редукция – это отношение между парой ситуаций – задач, функций, структур данных и т. д., в котором одна определяется через другую. Редукция  $R$  является функцией преобразования ситуаций формы  $P$  в ситуации формы  $Q$ , если для каждого экземпляра  $P$   $R$  может построить экземпляр  $Q$  так, что он сохраняет смысл  $P$ . Обратите внимание: строгое соблюдение обратного условия не требуется.

### ***Переменная типа (type variable)***

Переменные типа – это идентификаторы на языке типов, которые (обычно) охватывают диапазон реальных типов.

### ***Упакованное представление (packed representation)***

На машинном уровне упакованное представление игнорирует обычные границы выравнивания (на старых или маломощных компьютерах – байты, на большинстве современных компьютеров – слова), позволяя нескольким значениям разместиться внутри или даже выйти за границы стандартной единицы памяти.

Например, предположим, что мы хотим сохранить вектор из четырех значений, каждое из которых представляет один из четырех вариантов. Обычное представление хранило бы одно значение по каждой границе выравнивания, тем самым потребляя четыре единицы памяти. Упакованное представление должно определить, что для каждого значения требуется два бита, а четыре таких значения могут поместиться в восемь бит, поэтому один байт может содержать все четыре значения. Предположим, вместо этого мы хотим сохранить четыре значения, каждое из которых представляет пять вариантов, поэтому для каждого значения требуется три бита. Представление, выровненное по байтам или словам, принципиально не изменится, но упакованное представление будет использовать два байта для хранения двенадцати бит, позволяя даже разделить три бита третьего значения по границе байта.

Разумеется, упакованные представления имеют свою стоимость. Извлечение значений требует более осторожных и сложных операций. Таким образом, они представляют собой классический компромисс между *пространством и временем* (см. термин в этой главе): использование большего количества времени для сокращения занимаемого пространства. Менее заметное свойство: упакованные представления могут сбивать с толку определенные системы времени выполнения, которые, возможно, ожидают, что данные будут выровнены.

### ***Формат передачи данных (wire format)***

Нотация, используемая для передачи данных через закрытую платформу (такую как виртуальная машина), а не внутри нее. Обычно ожидается, что данные будут относительно простыми, потому что они должны быть реализованы на многих языках и в слабых процессах. Также ожидается, что данные будут непротиворечивыми, чтобы способствовать простому, быстрому и правильному синтаксическому разбору. Широко известные примеры включают XML, JSON и s-выражения.

# Предметный указатель

## Символы

`<=>`, бинарный оператор проверки на равенство, 294  
`==`, бинарный оператор проверки на равенство, 294  
`|`, символ определения варианта условных данных, 170  
`%something`, форма для сравнения приблизительных значений, 240

## А

Accessor, 134  
Accumulator, 157  
Additive identity, 139, 157  
add-row, функция добавления строки в конец таблицы, 97  
Amortized analysis, 284  
and, логический оператор, 68  
Any, специальный тип данных, 128  
append, операция списка, 364  
Array, 387  
    random-access, 387  
ASCII, кодировка символов, 271  
ASCII, система кодировки символов, 67  
assert, инструкция тестирования, 358, 361  
Attribute, 166  
Average-case analysis, 250, 283  
AVL tree, 278

## Б

Bachmann-Landau notation, 257  
Bag, 277  
Bag-of-words, 397  
Balanced binary search tree, BBST, 276  
Balance factor, 277  
Binary search tree, BST, 273  
Binary tree, 272  
Binning, 112  
Bloom filter, 391  
Boolean, логический тип данных, 65  
Breadth-first traversal, 313

Bucket, 387

build-column, функция создания нового столбца таблицы, 94

## С

Canvas, 220  
cases, конструкция выбора варианта, 140  
cases, конструкция обработки вариантов, 172  
Catalan sequence, 392  
check, блок для тестов, 237  
Clock tick, 219  
Coinduction, 213  
Conditional data, 167  
Constructor, 135  
Contract, 38  
count, функция, 105  
CPO, 31  
    интерактивная панель, 31, 42  
    кнопка Run, 34, 42, 46  
    панель определений, 42  
    промпт, 31  
csv, comma-separated values, 99

## Д

data, конструкция для создания данных, 170  
Dataclass, 335  
Depth-first traversal, 313  
Dequeue, 284  
Dictionary, 377  
    key, 377  
Dijkstra's algorithm, 317  
Directed acyclic graph, DAG, 294  
Disjoint-set structure, 322  
distinct, функция списка, 124, 127  
Dynamic programming, 403

## Е

Edit distance, 398  
else, спецификатор или ветвь, 65

**empty**, пустой список, 134

**Enqueue**, 284

**equal-always**, оператор проверки на равенство, 294

**Expected effect**, 343

**Expression**, 32

**Extrapolation**, 246

## F

**false**, логическое значение ложь, 65

**Field**, 167

**Field access**, 172

**filter**, функция списка, 124, 127

**filter-with**, функция отбора строк таблицы, 91

**First-in, first-out**, FIFO, 284

**for**, цикл, 350

**Function**, 51

call, 52

## G

**get**, функция списка, 126

**global**, аннотация (ключевое слово), 357

**global**, ключевое слово, 374

**Google Sheet**, 99

## H

**Handler**, 221

**Hash**, 271

**Hash function**, 271

**Hashing**, 271, 386

**Hash table**, 388

**Hashtable**, 377

**Haskell**, 213

**Heap**, 317, 346

## I

**identical**, оператор (функция) проверки на равенство, 294

**Identifier**, 43

**if**, стоимость, 251

**if-выражение**, 64

вложенное, 76

упрощение, 72

часть else if, 69

**import**, инструкция включения библиотеки в код, 123

**Interpolation**, 246

**is**, оператор, 291

**is-not**, оператор, 291

## L

**lam**, лямбда-функция, 208

**lam**, определение лямбда-функции, 129

**Last-in, first-out**, LIFO, 284

**length**, функция списка, 127

**Levenshtein distance**, 398

**link**, конструктор списков, 135

**List**

first, 133

rest, 133

**load-table**, команда загрузки данных, 99

**Lower bound**, 250

## M

**map**, функция списка, 127

**member**, функция списка, 128

**Memoization**, 394

**Metric space**, 397

**Moravian Spanning Tree**, MST, 318

**Multiplicative identity**, 139

## N

**none**, значение для отсутствующих данных (Pyret), 100

**None**, специальное значение в Python, 367

**not**, логический оператор не (отрицание), 68

**num-modulo**, функция взятия остатка от целочисленного деления, 222

## O

**or**, логический оператор или, 68

**order-by**, функция сортировки строк таблицы, 92

## P

**Path compression**, 385

**pick**, метод выбора элемента множества, 179

**Predicate**, 242

**Prim's algorithm**, 319

**Program**, 33

**Programming environment**, 31

**Pyret**, 31

выполнение (вычисление) функции, 53

документация, 40

каталог, 45

связь имени с значением, 45

круглые скобки в вычислении, 31

**определение функции**

связывание имени с исходным кодом, 53  
 поддержка графических изображений, 34  
 правила выполнения программ, 52  
 представление числа, 331  
 пробелы, окружающие арифметические операторы, 32  
 сообщение об ошибке, 31, 197  
 список, порядок обработки элементов, 339  
 сравнение с Python, 327  
 pytest, пакет тестирования Python, 330  
 Python, 327  
     возврат значения из функции, 329  
     имя переменной, 328  
     класс данных, 335  
     ключевое слово return, 328  
     определение функции, 328  
     представление числа, 332  
     сообщение об ошибке, 376  
     список, 333  
         порядок обработки элементов, 338  
         шаблон обработки, 340  
     сравнение с Pyret, 327  
     тестирование, 330  
     тип данных, 328  
     условное выражение, 333  
     цикл for, 336  
         создание списка, 339

**Q**

Queue, 284  
     head, 286  
     tail, 286

**R**

raise, инструкция генерации ошибки, 198  
 raise, ключевое слово, 376  
 Reactor, 221  
 rec, ключевое слово, 210  
 Recurrence relation, 254  
 Recursive data, 186  
 Reference, 293  
 Reference equality, 289  
 remove, операция списка, 365  
 remove, функция списка, 124  
 REPL, интерактивный цикл, 239  
 Resource consumption, 249  
 Row, тип данных строка таблицы, 87  
 Running time, 249

**S**

sanitize, спецификатор Pyret, 101  
 satisfies, форма проверки на соответствие предварительному условию (предикату), 242  
 Singleton, 296  
 Smith-Waterman, алгоритм, 403  
 SQL, 121  
 Statement, 44  
 Stream, 209  
 String, 33  
 String, библиотека, 103  
 string-split, функция разделения строк (Pyret), 112  
 string-split-all, функция разделения строк (Pyret), 112  
 Structured data, 85, 134, 167  
 Subtree, 273  
 Syntax, 40

**T**

table, тип данных таблица, 85  
 Tail call, 162  
 Template, 193, 202  
 Thunk, 210, 211  
 Traceback, 402  
 transform-column, функция обновления значения столбца таблицы, 95  
 true, логическое значение истина, 65

**U**

Union-find, 322  
 uniq, функция выбора не повторяющихся значений, 159  
 Upper bound, 250

**V**

Value, 33  
 ValueError, специализированный тип данных Python, 376

**W**

where, блок для записи примеров, 237  
 where, директива документирования функции с примерами, 57  
 Worst case, 251

**A**

AVL-дерево, 278  
 Адельсон-Вельский Г. М., 278

Аккумулятор, 156, 158, 164

Аксессор, 134

Алгоритм

Борувки, 321

Дейкстры, 317

жадный, 317

Краскала, 320

Прима, 319

Смита–Ватермана, 403

оценка разрыва, 403

Соллина, 320

Ярнике, 319

union-find (объединение–поиск), 383

Амортизационная сложность, 285

Амортизационный анализ, 284

кредит, 287

сравнение со стоимостью отдельных операций, 287

Амортизация, 284

Анализ среднего варианта, 283

Анимация, 217, 221

основной принцип кино, 217

с обратной связью, 217

условие завершения, 228

## Б

Бахмана–Ландау нотация, 257

Библиотека, 123

включение в код, 123

Блума фильтр, 391

Борувка, Отакар (Otakar Borůvka), 318

Буль, Джордж (George Boole), 65

## В

Временна€я сложность, 265, 270

Выбор варианта решения задачи, 131

Выражение, 32, 33, 44

if, 64

возвращает значение, 44

вычисление и возврат результата, 44

логическое объединение, 68

табличное, 85

условное, 64

вложенное, 76

Вычисление приблизительного значения, 239

## Г

Граф, 299

вершина, 299

взвешенный, 315

вырожденный, 299

достижимость, 309

интерфейс, 303

направленный ациклический, 299

невзвешенный, 315

обход, 299

аккумулятор, 301

в глубину, 313

в ширину, 313

с запоминанием, 301, 311

сложность, 314

плотность, 303

представление, 303

путь, 309

наикратчайший, 314, 315

самый легкий, 315

с наименьшим весом, 317

размер, 300, 308

ребро, 299, 307

вес, 314

инцидентное, 319

список, 307

связный, 309, 322

сложность, 309

структура, 303

с циклом, 311

узел, 299, 303

индекс, 305

ключ, 303, 306

сосед, 305, 307

цикл, 299

## Д

Данные

атрибут, 166

категориальный, 115

количественный, 115

биннинг, 112

визуализация, 115

выборка, 245

график, 116

гистограмма, 116

диаграмма рассеяния, 116

круговая (секторная) диаграмма, 116

частотных диапазонов, 116

группа (bin), 112

загрузка, 99

набор, 176

пример, 176

сочетание со структурированными

данными, 181

список, 176

- несвязанные, 187  
 нормализация, 103  
     систематическое применение, 106  
 отсутствующий элемент, 100  
 ошибка, 100  
     переставленные/пропущенные  
         буквы, 107  
 планирование решения задачи, 108  
     декомпозиция, 109  
     подзадача, 108  
     стратегия, 109  
     схема, 109  
 представление имен, 113  
 произвольного размера, 187  
 простые  
     строка, 349  
     хранение в памяти, 348  
 рекурсивные, 186  
     процесс проектирования функции  
     обработки, 193  
     функция для обработки, 190  
     шаблон для обработки, 193  
 санитайзер (Pyret), 101  
 совместно используемые  
     изменение, 344  
     пример банковского счета, 367  
 статистическое группирование, 112  
 структура бесконечная, 213  
 структурированные, 85, 134, 167  
     аннотация, 169  
     доступ к полю, 172  
     набор, 175  
     определение, 168  
     пример, 169  
     создание, 135  
     сочетание с набором данных, 181  
     сочетание с набором данных, пример  
         учебного теста, 182  
 таблица  
     документация, 103  
     именование, 114  
     разделение столбца, 112  
 табличные, 82  
     пример, 82  
     создание, 84  
     список основных характеристик, 83  
 тип  
     option (Pyret), 100  
     дерево, 199  
 управление анализом,  
 последовательность, 117  
 условные, 167  
     |, символ определения  
     варианта, 170  
     вариант, 171  
     разделение вариантов, 172  
     создание, 170  
     циклическая ссылка, 371  
     тестирование, 373  
     циклический элемент, 298  
     чистые, 83  
     элемент  
         поле, 167  
         структура, 167  
 Данные, разделенные запятыми, 99  
 Дерево, 272, 296  
     двоичное, 272, 299  
     восстановление баланса, 278  
     вырожденное, 276  
     высота, 277  
     коэффициент  
     сбалансированности, 277  
     поиска, 273  
     самобалансирующееся, 278  
     сбалансированное, 276  
 конструктор, 199  
 методика решения задачи, 203  
 остоянное моравское, 318  
 родословной, 199  
 с циклом, 300  
 тип данных, 199  
     функция для обработки, 201  
     шаблон, 202, 203  
 Динамическое программирование, 403  
     сравнение с мемоизацией, 408  
 Дифференцирование, 205  
     символьное, 206  
     численное, 206
- E**
- Единичный (нейтральный) элемент по  
 операции умножения, 139
- 3**
- Задача  
     объединение- поиск, 322  
     о структуре непересекающихся  
         множеств, 322  
 Значение, 33  
     имя, 42  
     идентификатор, 43  
     связь, 43  
     упрощение выражения, 48

**И**

Изображение, 34  
операция, 35  
Имя  
    как выражение, 45  
    отличие от строки, 43  
Индукция, 213, 262, 316  
Инструкция, 44  
    передача указания, а не возврат результата, 44  
Интерполяция, 246

**К**

Каталана  
    последовательность, 392  
    число, 392, 395  
Каталог-плюс-куча, 346  
Каталог программы, 350  
    обновление, 354  
Квантор, 257  
Кеширование, 275  
Класс данных  
    поле  
        доступ, 343  
        изменение, 343  
    ToDoItem, пример, 342  
Ключ:значение, пара в словаре, 378  
Код, правила пунктуации, 39  
Коиндукия, 213  
Конструктор, 135  
Контракт, 38  
    информация о функции, 38  
Корзина, 387  
Краскаль, Джозеф (Joseph Kruskal), 319  
Куча, 317, 346

**Л**

Ландис Е. М., 278  
Левенштейна расстояние, 398, 405  
Ленивые вычисления, 213  
Логарифм, 272  
Логарифмическое время, 270  
Лямбда-функция, 129, 208  
    анонимная, 129  
    однострочный код, 130

**М**

Массив, 387  
    произвольный доступ, 387  
Математический анализ, 205  
Мемоизация, 394, 395

сравнение с динамическим программированием, 408  
Метрическое пространство, 397  
Мешок, 277  
Мешок слов, 397  
Множество, 176, 283  
    выбор элемента, 179  
    вычисление размера, 181  
деревьев, 274  
    из одного элемента, 323  
как набор данных, пример, 178  
непустое pick-some, 179  
объединение, 323  
отличие от списка, 264  
представление, выбор, 266  
представление списком, 263, 264  
проблема повторяющихся элементов, 265  
пустое pick-none, 179  
реализация size, 266  
синглтон, 323  
чисел, 264  
элемент репрезентативный, 323

**Н**

НАГ, 394. См. Граф направленный ациклический  
Направленный ациклический граф, 394  
Направленный ациклический граф,  
НАГ, 294  
Нулевой (нейтральный) элемент по операции сложения, 139, 157

**О**

О-большое, 257, 267  
    интерпретация табличных операций, 259  
объединение функций стоимости, 258  
    сложение, 259  
    умножение на константу, 259  
    умножение на функцию, 259  
Обработчик, 221  
Обратимость, 272  
Обратная трассировка, 402  
Однострочник, функция, записанная в одной строке, 208  
Ожидаемый эффект, 343  
Оператор, 51  
    сравнения на равенство, 294  
Операция, 35  
    время выполнения  
    наихудший случай, 251

- специальная форма записи анонимных функций, 256  
сравнение функций, 256  
для изображения, 35  
сравнения на равенство ==, 66  
стоимость, 249  
табличный метод, 252
- О**  
Определение, 44  
связывание имени с значением, 44
- Основная теорема арифметики, 271
- Очередь, 284  
голова, 286  
операция  
    вставка, 284  
    реверсивная, 285  
    удаление, 284  
хвост, 286
- Ошибка  
    несвязанный идентификатор, 43  
нотации, 39  
формата, 39
- П**  
Память, 346  
адрес, 346  
куча, 346  
обновление, 354  
слот, 346
- Панель ввода текста, 106
- Первым вошел, первым вышел, 284
- Переменная  
    вариант использования, 374  
    глобальная, 357, 374  
    изменение, 352  
        с помощью функции, 356  
    локальная, 374  
    присваивание значения, 353
- Поддерево, 273
- Последним вошел, первым вышел, 284
- Поток, 209, 211  
    переходник, 211  
    селектор, 211  
        извлечение первого элемента, 211  
        функция-аналог map, 212
- Прабхакар Радж (Prabhakar Ragde), 252
- Предикат, 242
- Пример  
    закономерность, 138  
    логический вывод исходного кода, 155
- Прим Р. К. (R.C. Prim), 319
- Программа, 33  
время выполнения, 249
- абстрактное, 250  
анализ среднего варианта, 250  
верхняя граница, 250  
дерево рекурсии логарифмической высоты, 262  
линейное, 260, 261  
логарифмическое, 261  
модель стоимости, 250  
нижняя граница, 250  
систематизированный способ аналитического вычисления, 254  
экспоненциальное, 262
- каталог, 45, 346, 350  
глобальный, 76  
локальный, 76
- метод тестирования, 224
- обратная связь, 221
- операция, стоимость, 249
- оценка эффективности, 248  
    основной аналитический принцип, 249
- потребление ресурсов, 249
- реакция, 221
- стоимость, 249
- Производная функции, 206, 214
- Р**  
Равенство, 347  
оператор сравнения, 294  
по ссылкам, 289
- Реактор, 221  
обработка нажатий клавиш, 227  
условие завершения анимации, 229
- Редакторское расстояние, 398
- Рекуррентная последовательность, 270  
решение, 259  
шаблон, 260
- Рекуррентное отношение, 254
- С**  
Свертка, 264  
Свойство изменяемости, 385, 387
- Сжатие пути, 385
- Синглтон, 296
- Синтаксис, 40
- Словарь, 377  
значение, 377  
    извлечение, 378  
    изменение, 378  
    структурированные данные, 380  
итеративный проход по ключам, 379

- ключ, 377  
 добавление, 378  
 структурированные данные, 380  
 удаление, 378  
 поиск по условию, 378  
 создание, 378
- Соллин М. (M. Sollin), 320
- Состояние окружающей среды, 218  
 начальное, 226, 233  
 обновление, 219  
 определение, 219  
 окончательное, 235  
 представление, 220
- Список, 121, 176  
 безымянный, 121  
 бесконечный, 209  
 добавление элемента, 364  
 как анонимные данные, 122  
 как значение, 122  
 как набор данных, 176  
 конструктор, 135, 185  
 литеральный, 122  
 мономорфный, 165  
 не пустой, 135  
 обновление, 354  
 один тип данных, 121  
 операция с любыми данными, 123  
 операция с числами, 123  
 остальная часть, 133  
 отличие от множества, 264  
 первый элемент, 133  
 получение элемента по позиции, 126  
 порядок, 121  
 представление в памяти, 365  
 представление множества, 263  
 преобразование, 127  
 присваивание имени, 122  
 пустой, 123, 134, 135  
 совместное использование, 364  
 совместное использование с таблицами, 130  
 создание, 122  
 стратегия разработки функций, 141  
 структура, 135  
     характеристика, 136
- Спускающееся меню, 106
- Среда  
 программирования, 30  
 разработки программ, 31
- Ссылка, 293  
 на значение, 292  
 стоимость вычисления, 292
- Строка, 33  
 как простые данные, 349  
 отличие от имени, 43  
 учет различия в регистрах букв, 34
- Структура данных вероятностная, 391
- Т**
- Таблица, 82  
 литеральная, 85  
 предоставление примеров для функций создания, 96  
 равенство, 84  
 родословной, 196  
 совместное использование со списками, 130  
 столбец, 83  
     вычисление нового значения, 95  
     извлечение, 120  
     порядок имеет значение, 84  
     создание нового, 93
- строка, 83  
 нумерация, 86  
 поиск, 90  
 сортировка, 92  
 упорядочение, 91  
 функция для обработки, 88
- электронная  
 импорт, 85
- элемент, 83
- ячейка, 86  
 извлечение значения, 86
- Тест, 237  
 в блоке вне функции, 238  
 набор, 238  
     расширение, 238  
     связь с примерами, 238
- пробал, 241  
 причина, 241  
 прогнозирование, 242  
 функций с предсказуемыми приблизительными результатами, 240
- Тип данных, 35, 37  
 логический, 65  
 таблица (table), 85  
 Row (строка), 87
- У**
- Уикхэм Хэдли (Hadley Alexander Wickham), 83
- Ф**
- Фибринк Ребекка (Rebecca Fiebrink), 287

- 
- Фоновое изображение, 220  
 Функциональное программирование, 325  
 Функция, 35, 51  
     аннотация, 207, 210  
     аннотация параметров, 54  
     аннотация типа возвращаемого  
         значения, 54  
     анонимная  
         без аргументов, 211  
         короткая форма записи, 208  
     без аргументов, 209  
     вывод частично упорядоченный, 271  
     вызов, 52, 53  
     выполнение по запросу, 209  
     для обработки дерева, 201  
     для работы со строками таблицы, 88  
     документирование  
         с примерами, 57  
         docstring, 55, 59  
     изменение глобальной переменной, 374  
     изменяющая переменную, 355  
     композиция, 36  
     ленивое вычисление, 209  
     обновление данных, тестирование, 343  
     определение, 53  
     отложенный вызов, 209  
     параметр, 51  
     переходник, 210  
     полиморфная, 165  
     практическая методика разработки, 56  
         сложный пример, 58  
     рекурсивная, 190, 211  
     рекурсивный вызов, 252  
     совместное использование  
         нескольких, 73  
             каталог программы, 75  
             процесс вычисления, 74  
     создание из выражений, 51  
     список основных характеристик, 61  
     с сохранением состояния, 393  
     стоимость вычисления, 292  
     структурированная, 252  
     тест, 58  
     тестирование, 357  
         внутренняя структура, 361  
         ожидаемый эффект, 358  
         стратегия, 362
- Х**
- Хвостовой вызов, 162  
 Хеш-значение, 271  
     вычисление, 271  
 Хеш-таблица, 377, 388  
 Хеш-функция, 271  
     детерминированная, 271  
     обратимая, 271  
 Хеширование, 271, 386
- Ц**
- Цикл for, 350
- Ч**
- Число, 30  
 дробь, 33  
 представление, 332
- Ш**
- Шаблон, 138, 202  
 на основе структуры данных, 202
- Э**
- Эквивалентность ссылок, 289  
 Экстраполяция, 246
- Я**
- Ярник Войтех (Vojtěch Jarník), 318

Книги издательства «ДМК ПРЕСС»  
можно купить оптом и в розницу  
в книготорговой компании «Галактика»  
(представляет интересы издательств  
«ДМК ПРЕСС», «СОЛООН ПРЕСС», «КТК Галактика»).

Адрес: г. Москва, пр. Андропова, 38, оф. 10;  
тел.: (499) 782-38-89, электронная почта: [books@aliants-kniga.ru](mailto:books@aliants-kniga.ru).

При оформлении заказа следует указать адрес (полностью),  
по которому должны быть высланы книги;  
фамилию, имя и отчество получателя.

Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.

Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: <http://www.galaktika-dmk.com/>.

Кати Фислер, Шрирам Кришнамурти,  
Бенджамин С. Лернер, Джо Гиббс Политц

## **Введение в программирование и структуры данных**

Главный редактор *Мовчан Д. А.*  
*dmkpress@gmail.com*

Зам. главного редактора *Сенченкова Е. А.*  
Перевод *Снастин А. В.*  
Корректор *Синяева Г. И.*  
Верстка *Чаннова А. А.*  
Дизайн обложки *Мовчан А. Г.*

Гарнитура PT Serif. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 35,75. Тираж 200 экз.

Веб-сайт издательства: [www.dmkpress.com](http://www.dmkpress.com)

В книге представлены полезные методы программирования, имеющие практическую ценность. Опираясь на свой многолетний опыт, авторы показывают, как написать надежный код, который смогут читать другие разработчики. Основной принцип обучения – составление плана решения: от определения структур данных по условиям поставленной задачи через примеры и тесты к написанию программного кода. Книга содержит большое количество примеров и упражнений, позволяющих читателям самостоятельно закрепить изученный материал на практике.

Книга будет полезна студентам вузов, где преподается информатика, а также всем, кто хочет изучить современное программирование.

### **Рассматриваемые темы:**

- основные концепции программирования с учетом ориентации на данные;
- специализированный для обучения язык программирования Pyret;
- структуры данных, как основа для проектирования плана решения задачи;
- алгоритмы и их сложность;
- применение рекурсии и рекуррентных выражений;
- работа с динамически изменяемыми переменными и структурами данных;
- переход от учебного языка Pyret к языку Python;
- методики тестирования программ;
- организация памяти: каталог программы и динамически распределяемая память (куча);
- программирование с сохранением и отслеживанием состояния;
- практическая работа с конкретными составными структурами данных: таблицами, списками, множествами, очередями, деревьями, графами, словарями и хеш-таблицами.

**Кати Фислер** – научный сотрудник в области информационных технологий в университете Брауна.

**Шрирам Кришнамурти** – профессор информатики в университете Брауна (Провиденс, США).

**Бенджамин С. Лернер** – адъюнкт-профессор информатики Khoury Colledge в Северо-Восточном университете (Бостон, США).

**Джо Гиббс Политц** – адъюнкт-профессор информатики Калифорнийского университета Сан-Диего, США.

ISBN 978-5-93700-137-5

**Интернет-магазин:**  
[www.dmkpress.com](http://www.dmkpress.com)

**Оптовая продажа:**  
КТК “Галактика”  
[books@aliants-kniga.ru](mailto:books@aliants-kniga.ru)

