1 Введение

Управление объектом, имеющим много степеней подвижности, довольно сложная задача. Она ещё усложняется, если степени подвижности влияют друг на друга и если количество и/или расположение движителей не соответствует степеням подвижности.

Рассмотрим задачу в общем виде.

Пусть есть объект управления (ОУ), описываемый следующим дифференциальным уравнением:

$$U(t) = F(t, y, y^{(1)}, y^{(2)} \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.1}$$

где $U(t)$ – управление, зависящее (вообще говоря) от времени;

t – время;

$F(*)$ – функция управления;

$y = y(t)$ – управляемая величина:

$y^{(i)} = y^{(i)}(t)$ – i-я производная по времени ($i \leq n - 1$).

Под управляемой величиной будем понимать три параметра: положение, скорость (производную от положения) и ускорение (производную от скорости). Поэтому, в системе уравнений (1.1) i-я производная может быть и отрицательной – то есть, будем считать $y^{(-1)}$ – интегралом от $y(t)$, а $y^{(-2)}$ - интегралом от интеграла и т.д. То есть, если управляемой величиной является положение, то

$$i \geq 0$$

если управляем скоростью –

$$-1 \leq i \geq +1$$

Управляя же ускорением, имеем

$$i \leq 0.$$

Задача классическая: создать такое управление, чтобы рассогласование e между заданием y_g и текущим положением (отработкой) y_c было минимальным. Рассмотрим некоторое текущее состояние ОУ, которое назовём начальным:

$$e(0) = e_0$$
$$\dots \qquad (1.2)$$
$$e^{(i)}(0) = e_{i0}$$

где e, e_0 – рассогласование и текущее рассогласование системы;

$e^{(i)}, e_{i0}$ – i-я производная рассогласования по времени.

Естественно, что наличие констант задания не меняет величины производных, поэтому логично систему состояний (1.2) переписать в следующем виде:

$$e = y_g - y_c$$
$$\dots \qquad (1.3)$$
$$e^{(i)} = y^{(i)}(t)\Big|_{t=0}$$

Для решения поставленной задачи логично постараться свести все текущие операторы рассогласования к нулю. Здесь можно предложить параметризованную функцию $y(t) = f(t)$, которая даст траектории движения ОУ к цели в фазовом пространстве, и количество параметров которой равно удвоенному порядку дифференциального уравнения (1.1) плюс 2, то есть, *2n*. Для определения этих параметров требуется решить систему уравнений, естественно вытекающих из системы (1.3). Но в системе (1.3) всего n уравнений, поэтому требуется расширить систему (1.3) условиями в целевом состоянии:

$$e(t_1) = 0$$
$$\dots \qquad (1.4)$$
$$e^{(i)}(t_1) = 0$$

То есть для определения параметров функции $f(t)$, требуется решить систему из *2n* уравнений, описывающую состояния ОУ в начальный и в конечный момент времени, т.е. в системы (1.3) и (1.4) подставить соответствующие производные от f.

Получив таким образом функцию управляемого параметра от времени $y = f(t)$, подставляем её в уравнение (1.1). Получаем требуемое управление.

Здесь есть дополнительная сложность. Дело в том, что скорость изменения управления $U(t)$ ограничена. Поэтому единственный такт управления, скорее всего, не сможет полностью погасить рассогласование. Отсюда возникает дополнительный параметр t_1 – время на выполнение операции. Его можно определить исходя из выражения

$$\left|\dot{U}(\tau_{iэ})\right| \le U_{1max},$$

$$\tau_{iэ} : \ \ddot{U}(\tau_{iэ}) = 0$$

где U_{1max}, естественно, максимальная скорость роста управления. И ещё: само управление $U(t)$ ограничено по величине. То есть имеем ещё одно выражение для определения управляющей фазовой траектории

$$|U(t_{iэ})| \le U_{max},$$

$$t_{iэ} : \ \dot{U}(t_{iэ}) = 0$$

Тем не менее, этого можно не делать, то есть не находить время на выполнения операции t_1. Дело в том, что реальное устройство привода объекта управления и так имеет как некоторую определённую разгонную характеристику, так и определённое максимальное значение, и их не превысить. Более того, как показано чуть ниже, даже знание этих характеристик не является строго обязательным.

Теперь будем рассматривать реальную цифровую СУ с тактом управления, который здесь обозначим Δt. Пусть на каждом такте управления считается, что управляется «с нуля». То есть, функцию $y(t)$ «отвязываем» от параметра времени t и делаем константой ***<u>на каждом такте</u>***, где в качестве времени применяем длительность одного такта (то есть, считаем t = временем одного такта).

Пусть также в качестве фазовой траектории управляемой величины выбираем полиномиальную функцию:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f, \tag{1.5}$$

Полином выбран по причине того, что кривую нечётной степени можно настроить не только на требующиеся значения, но и требующиеся производные на концах отрезка.

Далее составляем две системы уравнений (1.3) и (1.4) и после упрощений получаем результат

$$y(t) = \frac{t^2 a_0}{2} + e_0 - \frac{6t^5 e_0}{t_1^5} + \frac{15t^4 e_0}{t_1^4} - \frac{t^5 a_0}{2t_1^3} - \frac{10t^3 e_0}{t_1^3} + \frac{3t^4 a_0}{2t_1^2} - \frac{3t^3 a_0}{2t_1} + tv_0 - \frac{3t^5 v_0}{t_1^4} + \frac{8t^4 v_0}{t_1^3} - \frac{6t^3 v_0}{t_1^2} \tag{1.6}$$

где e_0 – рассогласование управляемой величины;

v_0 – текущая производная управляемой величины;

a_0 – текущая производная v_0.

Нет никаких противоречий в том, чтобы считать текущее время начальным (т.е. нулевым), время следующего такта равным времени такта управления $t = \Delta t$, а время на всё управление считаем двойным тактом $t_1 = 2\Delta t$.

При таких допущениях получаем компактные формулы для величины, скорости и ускорения (не зависящие от управляемого объекта):

$$\begin{aligned} q &= \frac{a_0\,\Delta t^2 + 8e_0 + 5\,\Delta t\,v_0}{16} \\ q' &= -\frac{a_0\,\Delta t^2 + 15\,e_0 + 7\,\Delta t\,v_0}{16\,\Delta t} \\ q'' &= -\frac{a_0\,\Delta t + 3\ v_0}{4\,\Delta t} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь специально введены обозначения q, q' и q'' чтобы их не путать с производными по времени, обозначаемыми точками.

Для иллюстрации рассмотрим простые примеры. Сложные случаи будут приведены в последующих главах.

Пусть имеется звено 2-го порядка, описывающееся уравнением:

$$U(t) = A\,\ddot{y} + B\,\dot{y} + C\,y, \tag{1.8}$$

где A, B, C – константы;

$y = y(t)$ - управляемая величина.

Пусть также в качестве управляемой величины выбрана полиномиальная функция (1.5).

Подставляя (1.6) в уравнение (1.8) и упрощая[1] получаем громоздкое выражение для управления

$$\begin{aligned} U(t) = e_0\left(Bv1 - \frac{180At^5}{t_1^7} + \frac{300At^4}{t_1^6} + \frac{30Ct^5}{t_1^6} - \frac{120At^3}{t_1^5} - \frac{60Ct^4}{t_1^5} + \frac{30Ct^3}{t_1^4}\right) + \\ v_0\left(Bv1 - \frac{60At^5}{t_1^6} + \frac{96At^4}{t_1^5} + \frac{12Ct^5}{t_1^5} - \frac{36At^3}{t_1^4} - \frac{24Ct^4}{t_1^4} + \frac{12Ct^3}{t_1^3}\right) + \\ a_0\left(Bv1 - \frac{6At^5}{t_1^5} + \frac{9At^4}{t_1^4} + \frac{3Ct^5}{2t_1^4} - \frac{3At^3}{t_1^3} - \frac{3Ct^4}{t_1^3} + \frac{3Ct^3}{2t_1^2}\right), \end{aligned} \tag{1.9}$$

Определить величину t_1, как говорилось выше, можно по величине изменения управления. Здесь надо заметить, что лишь на концах отрезка производная от функции (1.8) максимальна по абсолютной величине – см. рисунок 1.1, где приводится график для конкретных параметров.

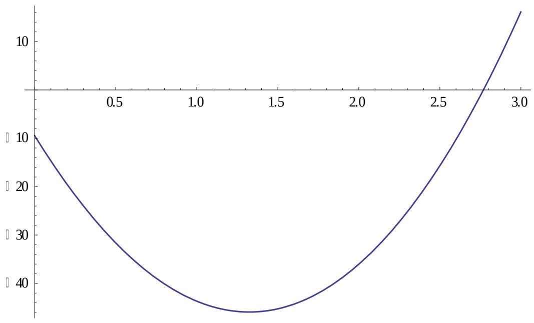


Рисунок 1.1 – График функции управления

Рассмотрим внимательнее формулу (1.8). В ней специально сгруппированы величины при e_0, v_0 и a_0. Так как параметр времени $t = \Delta t$ всегда равен длительности такта управления (т.е., на каждом такте управляем «как в первый раз»), а параметр длительности управления есть $t_1 = 2\Delta t$, то в скобках при e_0, v_0 и a_0 находятся константы. То есть закон управления, в общем виде, выглядит следующим образом:

[1] - Упрощения, как и все преобразования в настоящей работе, выполнялись в системе Wolfram Mathematica

$$U(t) = const1 * e_0 + \ const2 * v_0 + const3 * a_0, \qquad (1.10)$$

Вспомнив, что v_0 является производной от e_0 и т.д. видим, что это аналитический вывод ПИД-регулятора.

То есть, формулы (1.9) и (1.10) – пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД-регулятор) – дифференциальный регулятор 2-го порядка. Причём, надо заметить, что этот регулятор *адаптивный*, так как коэффициенты вычисляются не один раз и навсегда, как в классическом ПИД-регуляторе, а на **каждом такте управления** в зависимости от текущих рассогласований.

В общем виде дифференциальный регулятор n-ного порядка выглядит следующим образом:

$$U(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i \, e^{(i)}$$

На практике же, регулятор выше 2-го порядка использовать проблематично.

Второй пример.

Пусть имеется подводный аппарат, одна степень подвижности которого описывается *нелинейным* дифференциальным уравнением

$$U(t) = \ A \, \dot{v}(t) - \ C_x \, v^2(t), \qquad (1.11)$$

где A и C_x – константы,

$v(t)$ – скорость аппарата.

Первое слагаемое правой части – закон Ньютона ($F = ma$), второе – закон гидродинамического сопротивления, которое пропорционально квадрату скорости. Отличие от первого примера в том, что тут зависимость не линейна.

Для этого объекта хочется минимизировать положение, т.е. интеграл от управляемой величины – скорости. Поэтому в качестве пожелания рассмотрим полином пятой же степени, но уже для положения:

$$s(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f, \tag{1.12}$$

Поступая способом, полностью аналогичным первому примеру, получаем зависимость управления:

$$\begin{aligned}
U(t) = {} & \frac{900t^{10}c_x e_0^2}{t_1^{12}} - \frac{3600t^9 c_x e_0^2}{t_1^{11}} + \frac{5400t^8 c_x e_0^2}{t_1^{10}} - \frac{3600t^7 c_x e_0^2}{t_1^9} + \frac{900t^6 c_x e_0^2}{t_1^8} \\
& + \frac{27t^8 a_0^2 c_x}{2t_1^6} + \frac{9t^{10} a_0^2 c_x}{4t_1^8} - \frac{9t^7 a_0^2 c_x}{t_1^5} + \frac{9t^6 a_0^2 c_x}{4t_1^4} \\
& + \frac{144t^{10} c_x v_0^2}{t_1^{10}} - \frac{576t^9 c_x v_0^2}{t_1^9} + \frac{864t^8 c_x v_0^2}{t_1^8} - \frac{576t^7 c_x v_0^2}{t_1^7} + \frac{144t^6 c_x v_0^2}{t_1^6} \\
& - \frac{180At^5 e_0}{t_1^7} + \frac{300At^4 e_0}{t_1^6} - \frac{120At^3 e_0}{t_1^5} \\
& - \frac{60At^5 v_0}{t_1^6} + \frac{96At^4 v_0}{t_1^5} - \frac{36At^3 v_0}{t_1^4} \\
& - \frac{6At^5 a_0}{t_1^5} + \frac{9At^4 a_0}{t_1^4} - \frac{3At^3 a_0}{t_1^3} \\
& + \frac{90t^{10} a_0 c_x e_0}{t_1^{10}} - \frac{360t^9 a_0 c_x e_0}{t_1^9} + \frac{540t^8 a_0 c_x e_0}{t_1^8} - \frac{360t^7 a_0 c_x e_0}{t_1^7} + \frac{90t^6 a_0 c_x e_0}{t_1^6} \\
& + \frac{720t^{10} c_x e_0 v_0}{t_1^{11}} - \frac{2880t^9 c_x e_0 v_0}{t_1^{10}} - \frac{2880t^7 c_x e_0 v_0}{t_1^8} + \frac{4320t^8 c_x e_0 v_0}{t_1^9} + \frac{720t^6 c_x e_0 v_0}{t_1^7} \\
& + \frac{36t^{10} a_0 c_x v_0}{t_1^9} - \frac{144t^9 a_0 c_x v_0}{t_1^8} + \frac{216t^8 a_0 c_x v_0}{t_1^7} - \frac{144t^7 a_0 c_x v_0}{t_1^6} + \frac{36t^6 a_0 c_x v_0}{t_1^5}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь по причине нелинейности уравнения динамики (1.11) получили нелинейный ПИД-регулятор.

Разумеется, использовать такие сложные формулы, как (1.9) и (1.13), на практике невозможно. Поэтому их применение осуществляется так, как показано на рисунке 1.2.

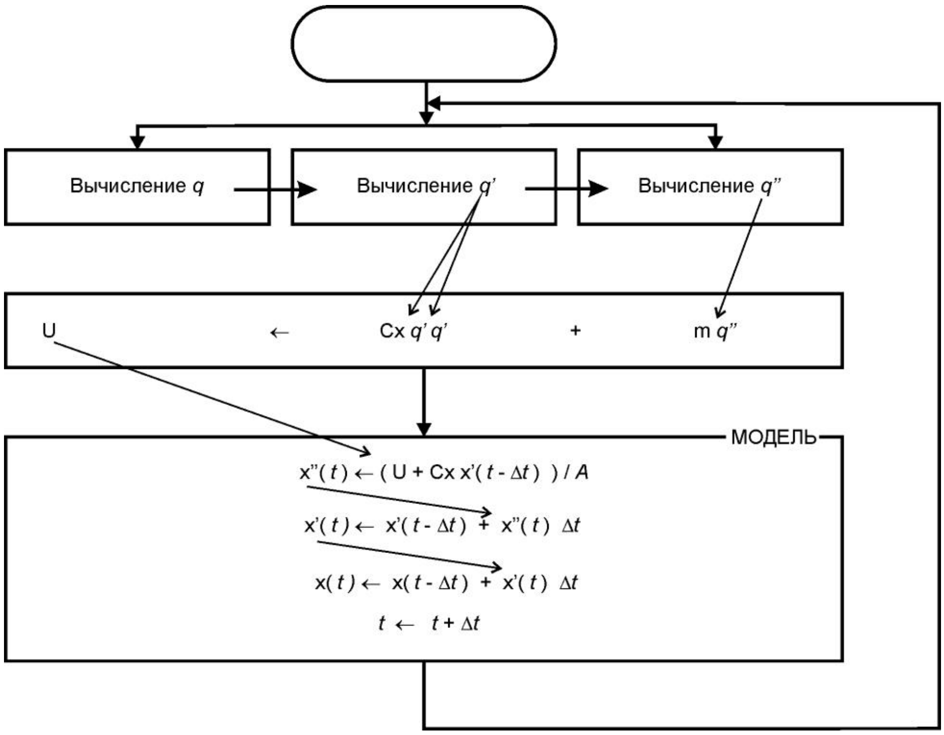


Рисунок 1.2 – Алгоритм применения формул (1.9) и (1.13).

Для одномерного случая получаем результаты отработки – перемещение на 10 метров объекта в воде, масса которого 10 кг. Результаты приведены на рисунках 1.3.

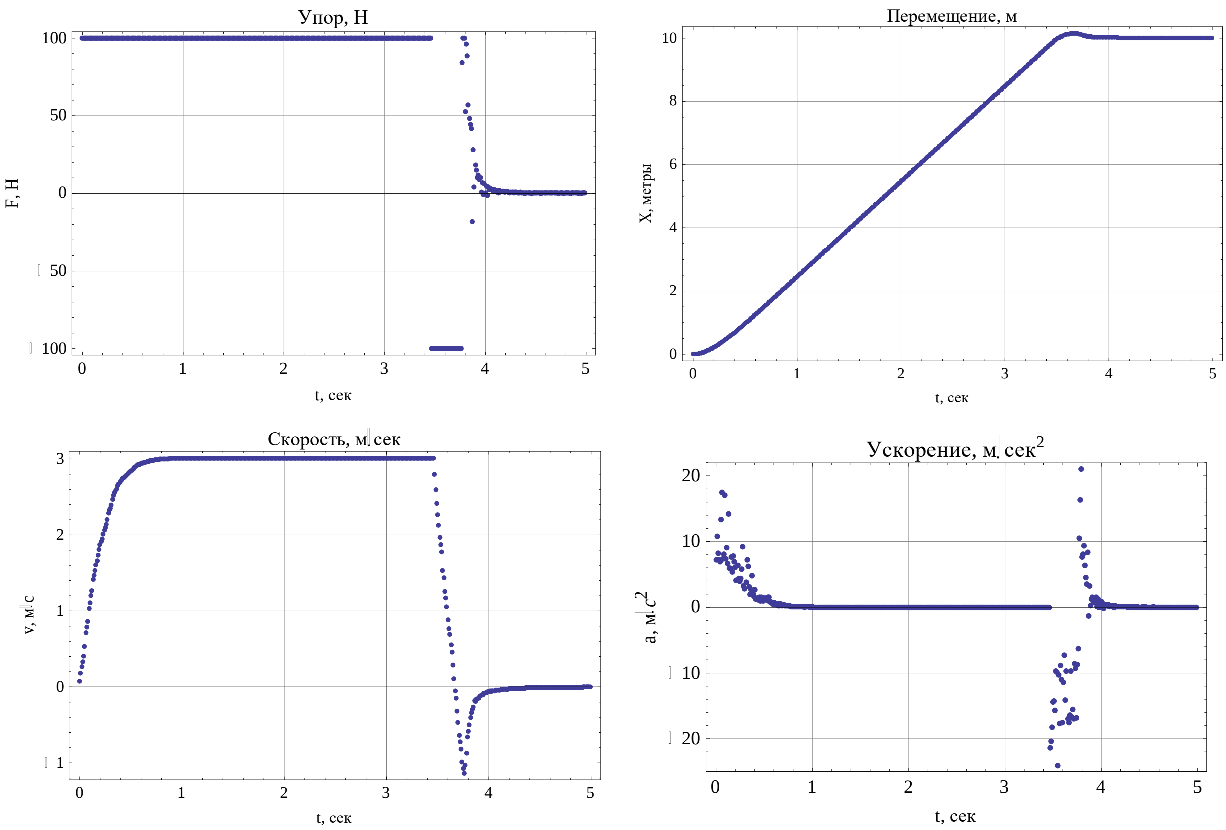
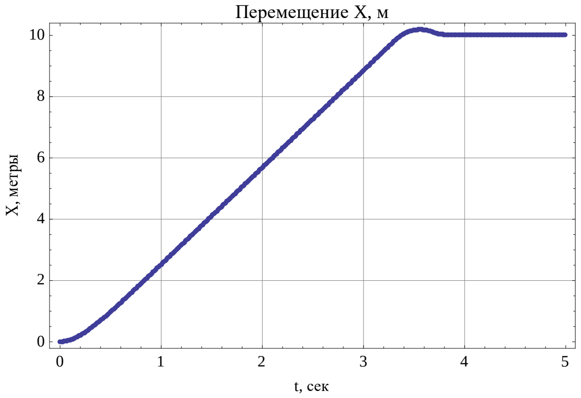


Рисунок 1.3 – Графики отработки перемещения на 10 метров

Двумерный случай: обе степени подвижности друг на друга не влияют. Результаты – рисунок 1.4.



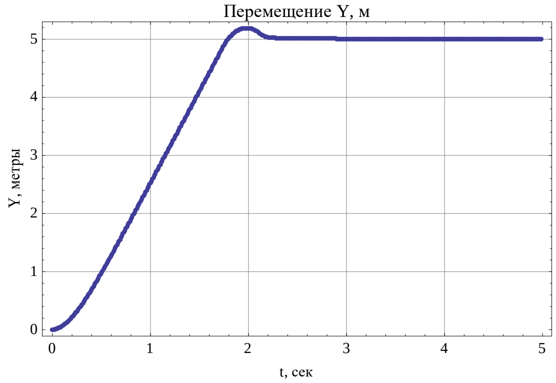


Рисунок 1.4 – Результаты отработки для двумерного случая

По графикам видно, что отработка происходит удовлетворительно с перерегулированием менее 3%. С другой стороны, оба канала управления работают не синхронно и ОУ по координатам достигает целей не согласованно.

Рассмотрим более сложный плоский пример, где есть три степени подвижности и два привода, которые влияют друг на друга – см. схему «гантели» на рисунке 1.5

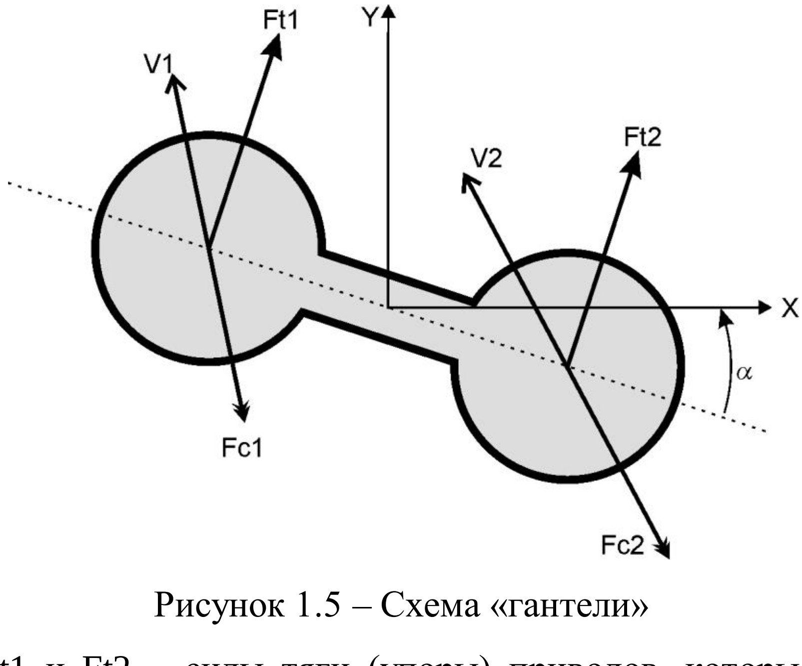


Рисунок 1.5 – Схема «гантели»

Здесь Ft1 и Ft2 – силы тяги (упоры) приводов, которые направлены ортогонально продольной оси аппарата (штриховая линия), V1 и V2 – скорости шаров и им противоположно направленные силы сопротивления среды Fc1 и Fc2. Для демонстрации всех деталей приведу полную схему построения модели и системы управления к ней.

Модель строится по методу уравнений Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим обобщённые координаты: это перемещение по оси абсцисс x, ординат y и поворот на угол α. Обобщённые силы:

$$\begin{gathered} Q_x = F_{T1x} + F_{T2x} - 2\,C_x\,\dot{x}(t)|\dot{x}(t)| \\ Q_y = F_{T1y} + F_{T2y} - 2\,C_x\,\dot{y}(t)|\dot{y}(t)| \\ Q_\alpha = \frac{F_{T2} - F_{T1}}{2} l - 2\,C_x l^2\,\dot{\alpha}(t)|\dot{\alpha}(t)| \end{gathered} \tag{1.14}$$

где Q_x, Q_y и Q_α – обобщённые силы;

F_{T1x}, F_{T1y} и F_{T1y}, F_{T1y} - проекции упоров F_{T1} и F_{T2} на оси координат;

C_x – лобовое сопротивление при скорости 1 м/сек (то есть в формулу $c\,S\,\frac{\rho\,v^2}{2}$ подставлена скорость v = 1 м/с);

l - расстояние между центрами шаров.

Отсюда получаем уравнения движения:

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) = \frac{-(F_{T1} + F_{T2})sin\big(\alpha(t)\big) - 2\,C_x\,\dot{x}(t)|\dot{x}(t)|}{m} \\ \ddot{y}(t) = \frac{(F_{T1} + F_{T2})cos\big(\alpha(t)\big) - 2\,C_x\,\dot{y}(t)|\dot{y}(t)|}{m} \\ \ddot{\alpha}(t) = \frac{(F_{T2} - F_{T1})l - C_x\,l^2\dot{\alpha}(t)|\dot{\alpha}(t)|}{J} \end{gathered} \tag{1.15}$$

где J - момент инерции относительно начала координат.

Уравнения движения (1.15) используем в модели. Но из этих же уравнений получаем и значения упоров, предназначенных для выполнения целевых перемещений:

$$\begin{gathered} F_{T1} = \frac{2J(s-c)\ddot{\alpha} + l\,m(\ddot{x} + \ddot{y}) + 2\dot{\alpha}\,l(s-c)|\dot{\alpha}| + 2C_x l(\dot{x}|\dot{x}| + \dot{y}|\dot{y}|)}{2l(c-s)} \\ F_{T2} = \frac{2J(c-s)\ddot{\alpha} + l\,m(\ddot{x} + \ddot{y}) - 2\dot{\alpha}\,l(s-c)|\dot{\alpha}| + 2C_x l(\dot{x}|\dot{x}| + \dot{y}|\dot{y}|)}{2l(c-s)} \end{gathered} \tag{1.16}$$

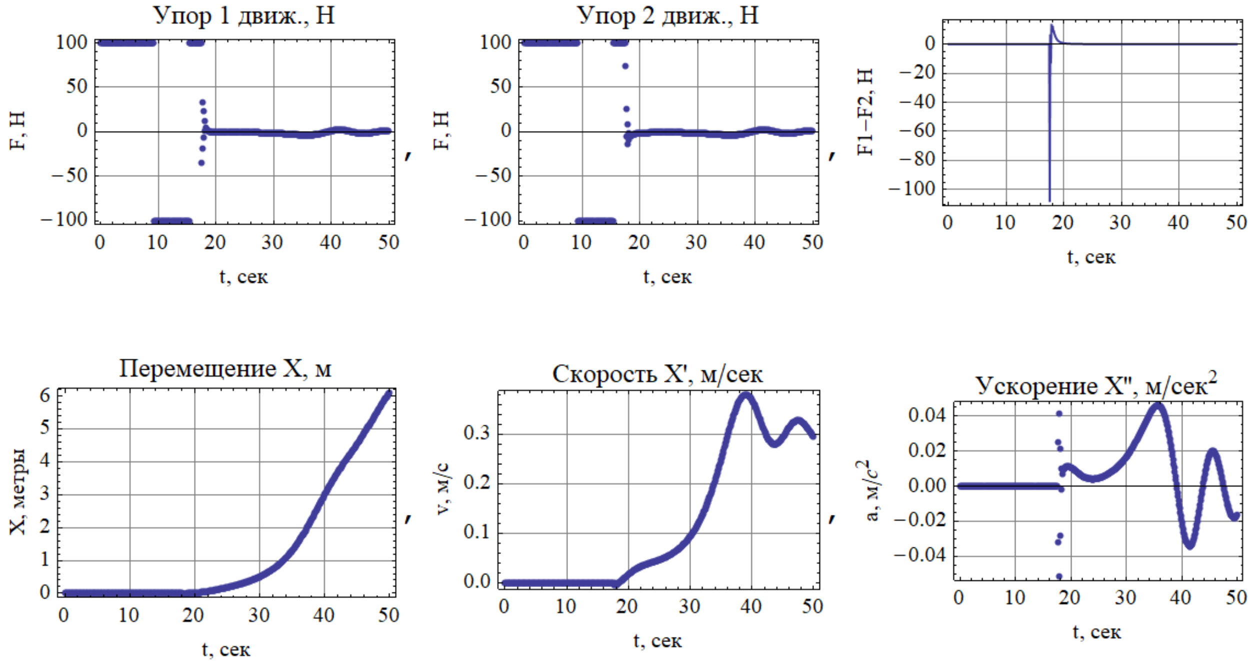
где $\quad c = cos(\alpha),\ s = sin(\alpha).$

Итак, для имитации управления в цикле выполняются три действия (по полной аналогии рисунка 1.2): 1) по заданной цели для каждой степени подвижности вычисляются фазовые траектории по формулам (1.7), 2) эти значения подставляются в формулы сил (1.16), 3) а они, в свою очередь, подставляются в формулы модели аппарата (1.15). И так далее, 1-2-3…

Рассмотрим выполнение задания перемещения аппарата на 65 метров по оси ординат и поворот на угол 45°. Результаты приведены на рисунке 1.6.

Анализ результатов показывает, что перемещение осуществлялось не одновременно с поворотом. Более того, перерегулирование достигло 20%, положение в целевом положении по оси ординат оказалось неустойчивым (после 30 секунд положение стало «уплывать»), а позиция по оси абсцисс сместилась на 6 метров, хотя задания такого не было.

Цели настоящей работы: описанными методами добиться согласованных движений по степеням подвижности, минимизировать паразитные движения и убрать перерегулирование и колебания для СУ сложными объектами управления.



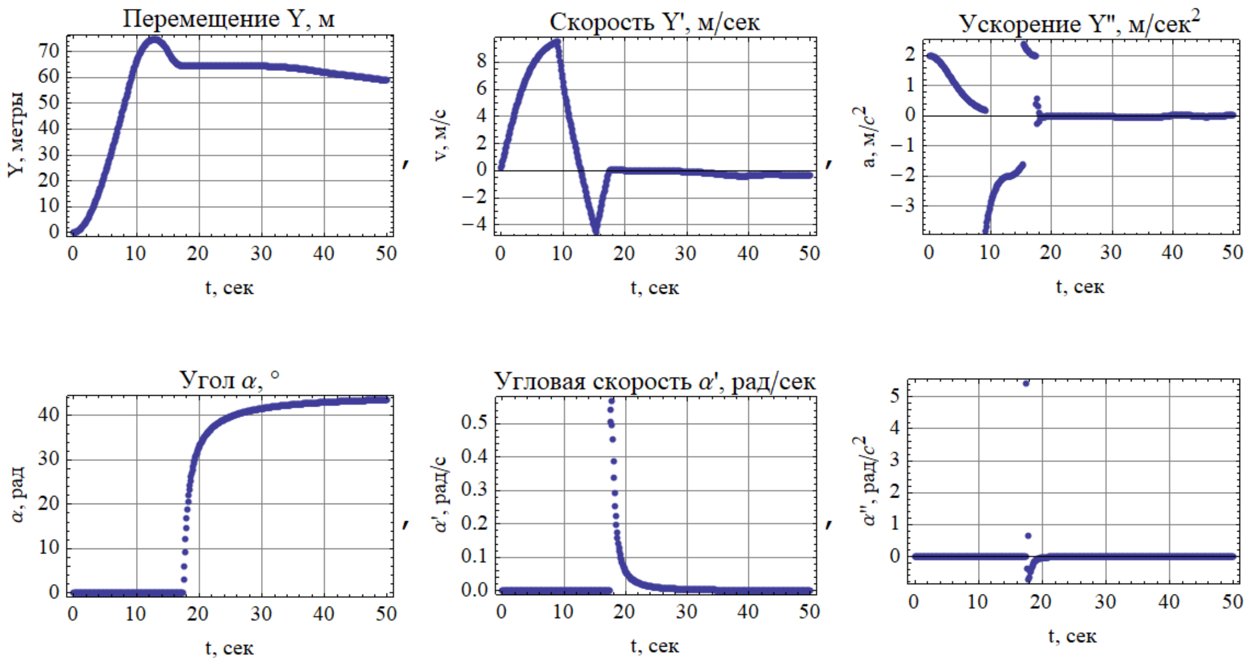


Рисунок 1.6 – Результаты отработки задания перемещения и поворота