1. Calcule o quociente e o resto das seguintes divisões:

1.1. $\left(x^5+1\right):(x+3)$

Algoritmo da Divisão:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+1 & x+3 \\ \cline{2-2}
-x^5-3x^4 & x^4-3x^3+9x^2-27x+81 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^4+0x^3+0x^2+0x+1 & \\
\quad 3x^4+9x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 9x^3+0x^2+0x+1 & \\
\qquad -9x^3-27x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -27x^2+0x+1 & \\
\qquad\quad 27x^2+81x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 81x+1 & \\
\qquad\qquad -81x-243 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad -242 &
\end{array}
$$

Logo, $Q(x)=x^4-3x^3+9x^2-27x+81$ e $R=-242$

Regra de Ruffini:

	1	0	0	0	0	1
–3		–3	9	–27	81	–243
	1	–3	9	–27	81	–242

Logo, $Q(x)=x^4-3x^3+9x^2-27x+81$ e $R=-242$

1.2. $\left(-x^4+6x^2+4x\right):(3x+6)$

Algoritmo da Divisão:

$$
\begin{array}{l|l}
-x^4+0x^3+6x^2+4x+0 & 3x+6 \\ \cline{2-2}
\quad x^4+2x^3 & -\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x \\ \cline{1-1}
\qquad 2x^3+6x^2+4x+0 & \\
\quad -2x^3-4x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 2x^2+4x+0 & \\
\qquad -2x^2-4x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Logo, $Q(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x$ e $R=0$

Regra de Ruffini:

$$\left(-x^4+6x^2+4x\right):(3x+6)\rightarrow\left(-\frac{x^4}{3}+\frac{6}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right):\left(\frac{3}{3}x+\frac{6}{3}\right)\Leftrightarrow\left(-\frac{x^4}{3}+2x^2+\frac{4}{3}x\right):(x+2)$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 & \frac{4}{3} & 0 \\
-2 & & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\
\hline
 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
\cline{6-6}
\end{array}$$

Logo, $Q(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x$ e $R=0\times 3=0$

1.3. $\left(x^4-3x^2+2\right):\left(x^2+1\right)$

Algoritmo da Divisão:

$$\begin{array}{ll}
x^4+0x^3-3x^2+0x+2 & \multicolumn{1}{|l}{x^2+1} \\
\cline{2-2}
-x^4 \qquad -x^2 & x^2-4 \\
\cline{1-1}
\qquad -4x^2+0x+2 & \\
\qquad 4x^2 \qquad +4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 6 &
\end{array}$$

Logo, $Q(x)=x^2-4$ e $R=6$

Regra de Ruffini: Não é possível aplicar pois o divisor não é um polinómio de grau 1.

1.4. $\left(6x^3+5x^2-9x-2\right):(3x-1)$

Algoritmo da Divisão:

$$\begin{array}{ll}
6x^3+5x^2-9x-2 & \multicolumn{1}{|l}{3x-1} \\
\cline{2-2}
-6x^3+2x^2 & 2x^2+\frac{7}{3}x-\frac{20}{9} \\
\cline{1-1}
\qquad 7x^2-9x-2 & \\
\quad -7x^2+\frac{7}{3}x & \\
\cline{1-1}
\qquad -\frac{20}{3}x-2 & \\
\qquad \frac{20}{3}x-\frac{20}{9} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad -\frac{38}{9} &
\end{array}$$

Logo, $Q(x)=2x^2+\frac{7}{3}x-\frac{20}{9}$ e $R=-\frac{38}{9}$

Regra de Ruffini:

$$(6x^3+5x^2-9x-2):(3x-1)\to\left(\frac{6}{3}x^3+\frac{5}{3}x^2-\frac{9}{3}x-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{3}x-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\left(2x^3+\frac{5}{3}x^2-3x-\frac{2}{3}\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

	2	$\frac{5}{3}$	-3	$-\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$-\frac{20}{27}$
	2	$\frac{7}{3}$	$-\frac{20}{9}$	$-\frac{38}{27}$

Logo, $Q(x)=2x^2+\frac{7}{3}x-\frac{20}{9}$ e $R=-\frac{38}{27}\times 3=-\frac{38}{9}$

2. Determine as raízes de cada um dos seguintes polinómios e decomponha-os em fatores:

2.1. $x^2-5x-14$

$$x^2-5x-14=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4(1)(-14)}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{81}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm 9}{2}\Leftrightarrow x=\frac{5-9}{2}\vee x=\frac{5+9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{4}{2}\vee x=\frac{14}{2}\Leftrightarrow x=-2\vee x=7$$

Raízes: $\{-2;7\}$

Logo, $x^2-5x-14=(x+2)(x-7)$

2.2. $2x^3+3x^2-2x$

$$2x^3+3x^2-2x=0\Leftrightarrow x(2x^2+3x-2)=0\Leftrightarrow x=0\vee 2x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{-3\pm 5}{4}\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{-3-5}{4}\vee x=\frac{-3+5}{4}\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{8}{4}\vee x=\frac{2}{4}\Leftrightarrow x=0\vee x=-2\vee x=\frac{1}{2}$$

Raízes: $\left\{-2;0;\frac{1}{2}\right\}$

Logo, $2x^3+3x^2-2x=2(x+2)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)=2x(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

2.3. x^3-2x^2-x+2

$a=1$ é uma raiz do polinómio

Regra de Ruffini:

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

$x^2-x-2=0$

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1-3}{2} \vee x=\frac{1+3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-2}{2} \vee x=\frac{4}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

Raízes: $\{-1;1;2\}$

Logo, $x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

2.4. $-2x^3-2x^2+2x+2$

$x=1$ é uma raiz do polinómio

Regra de Ruffini:

	–2	–2	2	2
1		–2	–4	–2
	–2	–4	–2	0

$-2x^2-4x-2=0$

$-2x^2-4x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm 0}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{2} \Leftrightarrow x=-1 \rightarrow$ raiz dupla

Raízes: $\{-1\ ;1\}$

Logo, $-2x^3-2x^2+2x+2=-2(x+1)(x+1)(x-1)=-2(x+1)^2(x-1)$

3. Resolva, em IR, cada uma das seguintes condições:

3.1. $\frac{1}{25}=5^{1-x^2}$

$\frac{1}{25}=5^{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{5^2}=5^{1-x^2} \Leftrightarrow 5^{-2}=5^{1-x^2} \Leftrightarrow -2=1-x^2 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$$S=\left\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right\}$$

3.2. $8e^{-0,2t}+20=120+6e^{-0,2t}$

$8e^{-0,2t}+20=120+6e^{-0,2t} \Leftrightarrow 8e^{-0,2t}-6e^{-0,2t}=120-20 \Leftrightarrow 2e^{-0,2t}=100 \Leftrightarrow e^{-0,2t}=\frac{100}{2} \Leftrightarrow e^{-0,2t}=50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,2t=\ln(50) \Leftrightarrow -\frac{2}{10}t=\ln(50) \Leftrightarrow -\frac{1}{5}t=\ln(50) \Leftrightarrow t=-5\ln(50)$

$$S=\{-5\ln(50)\}$$

3.3. $3^{x-4}+4=2+2\times 3^{x-4}$

$3^{x-4}+4=2+2\times 3^{x-4}\Leftrightarrow 3^{x-4}-2\times 3^{x-4}=2-4\Leftrightarrow -3^{x-4}=-2\Leftrightarrow 3^{x-4}=2\Leftrightarrow \log_3 3^{x-4}=\log_3 2\Leftrightarrow x-4=\log_3 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4+\log_3 2$

$$S=\{4+\log_3 2\}$$

3.4. $\ln\left(x^2+5\right)=2\ln(x-1)$

$\ln\left(x^2+5\right)\Rightarrow x^2+5>0\rightarrow x\in IR$

$\ln\left(x-1\right)\Rightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1\rightarrow \left]1;+\infty\right[$

Domínio :

$D=IR\cap\left]1;+\infty\right[=\left]1;+\infty\right[$

Assumindo $x\in D$:

$\ln\left(x^2+5\right)=2\ln\left(x-1\right)\Leftrightarrow \ln\left(x^2+5\right)=\ln\left(x-1\right)^2\Leftrightarrow x^2+5=\left(x-1\right)^2\Leftrightarrow x^2+5=x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2+5-x^2+2x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{2}\Leftrightarrow \underbrace{x=-2}_{\notin\text{ Domínio}}$

$$S=\varnothing$$

3.5. $\ln(x)+\ln(2x+1)=0$

$\ln\left(x\right)\Rightarrow x>0\rightarrow x\in IR^+$

$\ln\left(2x+1\right)\Rightarrow 2x+1>0\rightarrow 2x>-1\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}\rightarrow x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

Domínio:

$D=IR^+\cap\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[=IR^+$

Assumindo $x\in D$:

$\ln\left(x\right)+\ln\left(2x+1\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(\left(x\right)\left(2x+1\right)\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(2x^2+x\right)=0\Leftrightarrow 2x^2+x=e^0\Leftrightarrow 2x^2+x=1\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 3}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-3}{4}\vee x=\dfrac{-1+3}{4}\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{4}\vee x=\dfrac{2}{4}\Leftrightarrow \underbrace{x=-1}_{\notin\text{ Domínio}}\vee \underbrace{x=\dfrac{1}{2}}_{\in\text{ Domínio}}$

$$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

3.6. $\ln x^4-\ln x=18$

$\ln x^4\Rightarrow x^4>0\rightarrow x\in IR\backslash\{0\}$

$\ln x\Rightarrow x>0\rightarrow x\in IR^+$

Domínio:

$D=IR\backslash\{0\}\cap IR^+=IR^+$

Assumindo $x \in D$:

$$\ln x^4 - \ln x = 18 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^4}{x}\right) = 18 \Leftrightarrow \ln\left(x^3\right) = 18 \Leftrightarrow x^3 = e^{18} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e^{18}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\left(e^6\right)^3} \Leftrightarrow \underbrace{x = e^6}_{\in \text{ Domínio}}$$

$$S = \left\{e^6\right\}$$

3.7. $9^x - 6 \cdot 3^x + 5 = 0$

$$9^x - 6 \cdot 3^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(3^2\right)^x - 6 \cdot 3^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 6 \cdot 3^x + 5 = 0 \underset{y=3^x}{\underbrace{\Leftrightarrow}} y^2 - 6 \cdot y + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow y = \frac{6-4}{2} \vee y = \frac{6+4}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2}{2} \vee y = \frac{10}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 5 \Leftrightarrow 3^x = 1 \vee 3^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_3 1 \vee x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \log_3 5$$

$$S = \left\{0\,;\log_3 5\right\}$$

3.8. $x\ln x + 5\ln x = 0$

$\ln x \Rightarrow x > 0 \rightarrow x \in IR^+$

Domínio:

$D = IR^+$

$$x\ln x + 5\ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x)\ (x+5) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee x+5 = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \vee x = -5 \Leftrightarrow \underbrace{x = 1}_{\in \text{ Domínio}} \vee \underbrace{x = -5}_{\notin \text{ Domínio}}$$

$$S = \{1\}$$

3.9. $\log_5(5-x) = 1 - \log_5(x)$

$\log_5(5-x) \Rightarrow 5 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5 \rightarrow x \in \left]-\infty;5\right[$

$\log_5(x) \Rightarrow x > 0 \rightarrow x \in IR^+$

Domínio :

$D = \left]-\infty;5\right[\cap IR^+ = \left]0;5\right[$

$$\log_5(5-x) = 1 - \log_5(x) \Leftrightarrow \log_5(5-x) + \log_5(x) = 1 \Leftrightarrow \log_5\left((5-x)\ (x)\right) = 1 \Leftrightarrow \log_5\left(5x - x^2\right) = 1 \Leftrightarrow 5x - x^2 = 5^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - x^2 = 5 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-20}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5-\sqrt{5}}{-2} \vee x = \frac{-5+\sqrt{5}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}}_{\in \text{ Domínio}} \vee \underbrace{x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}}_{\in \text{ Domínio}}$$

$$S = \left\{\frac{5-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

4. Dadas as seguintes funções:

- $f(x) = x + 2$ e $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{3}$
- $f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$ e $g(x) = 2x - 1$
- $f(x) = -x + \sqrt{4 - x}$ e $g(x) = 2x^2$
- $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 9}$ e $g(x) = 3x$

a) Determine, para cada par, o domínio das funções.

$f(x) = x + 2$ e $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{3}$

$D_f = IR$

$D_g = IR$

$f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$ e $g(x) = 2x - 1$

$D_f = \left\{ x \in IR : x^2 - 9 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in IR : x^2 \neq 9 \right\} = \left\{ x \in IR : x \neq \pm 3 \right\} = IR \setminus \left\{ -3 \; ; \; 3 \right\}$

$D_g = IR$

$f(x) = -x + \sqrt{4 - x}$ e $g(x) = 2x^2$

$D_f = \left\{ x \in IR : 4 - x \geq 0 \right\} = \left\{ x \in IR : -x \geq -4 \right\} = \left\{ x \in IR : x \leq 4 \right\} = \left] -\infty ; \; 4 \right]$

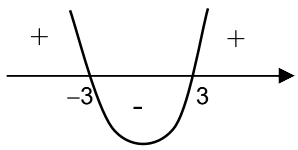
$D_g = IR$

$f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 9}$ e $g(x) = 3x$

$D_f = \left\{ x \in IR : x^2 - 9 \geq 0 \right\}$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$

$a = 1 > 0$



$D_f = \left\{ x \in IR : x^2 - 9 \geq 0 \right\} = \left] -\infty ; -3 \right] \cup \left[3 ; +\infty \right[$

$D_g = IR$

b) Caraterize, para cada par, $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ e $g \circ f$.

- $f(x) = x + 2$ e $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{3}$

Função Soma:

$$(f+g)(x)=x+2+\frac{2x^2+1}{3}=\frac{3x+6+2x^2+1}{3}=\frac{2x^2+3x+7}{3}$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=IR\cap IR=IR$$

$$\begin{array}{cccc} f+g: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x^2+3x+7}{3} \end{array}$$

Função Diferença:

$$(f-g)(x)=x+2-\frac{2x^2+1}{3}=\frac{3x+6-2x^2-1}{3}=\frac{-2x^2+3x+5}{3}$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=IR\cap IR=IR$$

$$\begin{array}{cccc} f-g: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{-2x^2+3x+5}{3} \end{array}$$

Função Produto:

$$(f\times g)(x)=(x+2)\left(\frac{2x^2+1}{3}\right)=\frac{2x^3+x+4x^2+2}{3}=\frac{2x^3+4x^2+x+2}{3}$$

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=IR\cap IR=IR$$

$$\begin{array}{cccc} f\times g: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{3} \end{array}$$

Função Quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+2}{\dfrac{2x^2+1}{3}}=\frac{3x+6}{2x^2+1}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)\backslash\left\{x\in IR{:}\,g(x)=0\right\}=\left(IR\cap IR\right)\backslash\left\{x\in IR{:}\,\frac{2x^2+1}{3}=0\right\}=IR\backslash\left\{x\in IR{:}\,2x^2+1=0\right\}=IR\backslash\left\{x\in IR{:}\,\underbrace{x^2=-\frac{1}{2}}_{\text{Imp. em IR}}\right\}=IR$$

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{f}{g}: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{3x+6}{2x^2+1} \end{array}$$

Função Composta $f\circ g$:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{2x^2+1}{3}\right)=\frac{2x^2+1}{3}+2=\frac{2x^2+1+6}{3}=\frac{2x^2+7}{3}$$

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in IR: x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in IR: x\in IR\wedge\frac{2x^2+1}{3}\in IR\right\}=\left\{x\in IR: x\in IR\wedge x\in IR\right\}=R\cap IR=IR$$

$$\begin{array}{cccc} f\circ g: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x^2+7}{3} \end{array}$$

Função Composta $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = \frac{2(x+2)^2+1}{3} = \frac{2(x^2+4x+4)+1}{3} = \frac{2x^2+8x+8+1}{3} = \frac{2x^2+8x+9}{3}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{x \in IR : x \in IR \wedge x+2 \in IR\} = R \cap IR = IR$$

$$\begin{array}{llll} g \circ f: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x^2+8x+9}{3} \end{array}$$

- $f(x) = \dfrac{2}{x^2-9}$ e $g(x) = 2x-1$

Função Soma:

$$(f+g)(x) = \frac{2}{x^2-9} + 2x - 1 = \frac{2+2x^3-18x-x^2+9}{x^2-9} = \frac{2x^3-x^2-18x+11}{x^2-9}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \} \cap IR = IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \}$$

$$\begin{array}{llll} f+g: & IR \backslash \{-3 \ ; 3\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x^3-x^2-18x+11}{x^2-9} \end{array}$$

Função Diferença:

$$(f-g)(x) = \frac{2}{x^2-9} - (2x-1) = \frac{2-2x^3+18x+x^2-9}{x^2-9} = \frac{-2x^3+x^2+18x-7}{x^2-9}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \} \cap IR = IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \}$$

$$\begin{array}{llll} f-g: & IR \backslash \{-3 \ ; 3\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{-2x^3+x^2+18x-7}{x^2-9} \end{array}$$

Função Produto:

$$(f \times g)(x) = \left(\frac{2}{x^2-9}\right)(2x-1) = \frac{4x-2}{x^2-9}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \} \cap IR = IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \}$$

$$\begin{array}{llll} f \times g: & IR \backslash \{-3 \ ; 3\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{4x-2}{x^2-9} \end{array}$$

Função Quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{2}{x^2-9}}{2x-1} = \frac{2}{2x^3-x^2-18x+9}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \backslash \{ x \in IR : g(x) = 0 \} = (IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \} \cap IR) \backslash \{ x \in IR : 2x-1 = 0 \} = (IR \backslash \{ -3 \ ; \ 3 \}) \backslash \left\{ x \in IR : x = \frac{1}{2} \right\} =$$

$$= IR \backslash \left\{ -3 \ ; \ \frac{1}{2} \ ; \ 3 \right\}$$

$$\frac{f}{g}: \quad IR \setminus \left\{-3\,;\frac{1}{2};3\right\} \quad \rightarrow \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad \frac{2}{2x^3 - x^2 - 18x + 9}$$

Função Composta $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = \frac{2}{(2x-1)^2 - 9} = \frac{2}{4x^2 - 4x + 1 - 9} = \frac{2}{4x^2 - 4x - 8}$$

$$D_{f \circ g} = \{\, x \in IR : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \,\} = \{\, x \in IR : x \in IR \wedge 2x - 1 \in IR \setminus \{\, -3 \,;\, 3 \,\}\}$$

$$2x - 1 \in IR \setminus \{-3\,;\,3\} \Rightarrow 2x - 1 \neq -3 \wedge 2x - 1 \neq 3 \Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{2} \wedge x \neq \frac{4}{2} \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 2 \rightarrow x \in IR \setminus \{-1\,;\,2\}$$

Logo,

$$D_{f \circ g} = \{x \in IR : x \in IR \wedge 2x - 1 \in IR \setminus \{-3\,;\,3\}\} = \{x \in IR : x \in IR \wedge x \in IR \setminus \{-1\,;\,2\}\} = IR \cap IR \setminus \{-1\,;\,2\} = IR \setminus \{-1\,;\,2\}$$

$$f \circ g: \quad IR \setminus \{-1\,;\,2\} \quad \rightarrow \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad \frac{2}{4x^2 - 4x - 8}$$

Função Composta $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x^2 - 9}\right) = 2\left(\frac{2}{x^2 - 9}\right) - 1 = \frac{4 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{-x^2 + 13}{x^2 - 9}$$

$$D_{g \circ f} = \{\, x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \,\} = \left\{\, x \in IR : x \in IR \setminus \{\, -3 \,;\, 3 \,\} \wedge \frac{2}{x^2 - 9} \in IR \,\right\}$$

$$\frac{2}{x^2 - 9} \in IR \Rightarrow x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq \pm 3 \rightarrow x \in IR \setminus \{-3\,;\,3\}$$

Logo,

$$D_{g \circ f} = \left\{\, x \in IR : x \in IR \setminus \{-3;3\} \wedge \frac{2}{x^2 - 9} \in IR \,\right\} = \{x \in IR : x \in IR \setminus \{-3\,;\,3\} \wedge x \in IR \setminus \{-3\,;\,3\}\} =$$
$$IR \setminus \{-3\,;\,3\} \cap IR \setminus \{-3\,;\,3\} = IR \setminus \{-3\,;\,3\}$$

$$g \circ f: \quad IR \setminus \{-3\,;\,3\} \quad \rightarrow \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad \frac{-x^2 + 13}{x^2 - 9}$$

- $f(x) = -x + \sqrt{4 - x}$ e $g(x) = 2x^2$

Função Soma:

$$(f + g)(x) = -x + \sqrt{4 - x} + 2x^2$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \left]-\infty\,;4\,\right] \cap IR = \left]-\infty\,;4\,\right]$$

$$f + g: \quad \left]-\infty\,;4\right] \quad \rightarrow \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad -x + \sqrt{4 - x} + 2x^2$$

Função Diferença:

$(f-g)(x) = -x + \sqrt{4-x} - 2x^2$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g =]-\infty;4] \cap IR =]-\infty;4]$

$$\begin{array}{llll} f-g: &]-\infty;4] & \to & IR \\ & x & \mapsto & -x+\sqrt{4-x}-2x^2 \end{array}$$

Função Produto:

$(f\times g)(x) = \left(-x+\sqrt{4-x}\right)\left(2x^2\right) = -2x^3 + 2x^2\sqrt{4-x}$

$D_{f\times g} = D_f \cap D_g =]-\infty;4] \cap IR =]-\infty;4]$

$$\begin{array}{llll} f\times g: &]-\infty;4] & \to & IR \\ & x & \mapsto & -2x^3+2x^2\sqrt{4-x} \end{array}$$

Função Quociente:

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x+\sqrt{4-x}}{2x^2}$

$D_{\frac{f}{g}} = \left(D_f \cap D_g\right) \backslash \{ x \in IR : g(x) = 0 \} = \left(]-\infty;4] \cap IR\right) \backslash \{ x \in IR : 2x^2 = 0 \} = \left(]-\infty;4]\right) \backslash \{ x \in IR : x = 0 \} =]-\infty;4] \backslash \{0\}$

$$\begin{array}{llll} \frac{f}{g}: &]-\infty;4] \backslash \{0\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{-x+\sqrt{4-x}}{2x^2} \end{array}$$

Função Composta $f \circ g$:

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(2x^2\right) = -2x^2 + \sqrt{4-2x^2}$

$D_{f\circ g} = \{ x \in IR : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \} = \{ x \in IR : x \in IR \wedge 2x^2 \in]-\infty;4] \}$

$2x^2 \in]-\infty;4] \Rightarrow 2x^2 \le 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 \le 0$

$2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2-4$	+	0	-	0	+

$2x^2 - 4 \le 0 \Rightarrow x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$D_{f\circ g} = \{x \in IR : x \in IR \wedge 2x^2 \in]-\infty;4]\} = \{x \in IR : x \in IR \wedge x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\} = IR \cap \left(\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\right) =$

$= \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$$\begin{array}{llll} f\circ g: & \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] & \to & IR \\ & x & \mapsto & -2x^2+\sqrt{4-2x^2} \end{array}$$

Função Composta $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(-x + \sqrt{4-x}\right) = 2\left(-x + \sqrt{4-x}\right)^2$$

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in IR : x \in \left]-\infty;\ 4\right] \wedge \left(-x + \sqrt{4-x}\right) \in IR \right\}$$

$$-x + \sqrt{4-x} \in IR \Rightarrow 4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \rightarrow x \in \left]-\infty; 4\right]$$

Logo,

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in IR : x \in \left]-\infty;4\right] \wedge -x + \sqrt{4-x} \in IR \right\} = \left\{ x \in IR : x \in \left]-\infty;4\right] \wedge x \in \left]-\infty;4\right] \right\} = \left]-\infty;4\right] \cap \left]-\infty;4\right] =$$
$$= \left]-\infty;4\right]$$

$$\begin{array}{rcccl} g \circ f : & \left]-\infty;4\right] & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & 2\left(-x + \sqrt{4-x}\right)^2 \end{array}$$

- $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 9}$ e $g(x) = 3x$

Função Soma:

$$(f+g)(x) = 2 + \sqrt{x^2-9} + 3x$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \left(\left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[\right) \cap IR = \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[$$

$$\begin{array}{rcccl} f+g : & \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;+\infty\right[& \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & 2 + \sqrt{x^2-9} + 3x \end{array}$$

Função Diferença:

$$(f-g)(x) = 2 + \sqrt{x^2-9} - 3x$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \left(\left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[\right) \cap IR = \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[$$

$$\begin{array}{rcccl} f-g : & \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;+\infty\right[& \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & 2 + \sqrt{x^2-9} - 3x \end{array}$$

Função Produto:

$$(f \times g)(x) = \left(2 + \sqrt{x^2-9}\right)(3x) = 6x + 3x\sqrt{x^2-9}$$

$$D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \left(\left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[\right) \cap IR = \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[$$

$$\begin{array}{rcccl} f \times g : & \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;+\infty\right[& \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & 6x + 3x\sqrt{x^2-9} \end{array}$$

Função Quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2+\sqrt{x^2-9}}{3x}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \left(D_f \cap D_g\right) \setminus \left\{ x \in IR : g(x) = 0 \right\} = \left(\left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[\right) \setminus \left\{ x \in IR : 3x = 0 \right\} = \left(\left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[\right) \setminus \left\{ x \in IR : x = 0 \right\} =$$
$$= \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;\ +\infty\right[$$

$$\frac{f}{g}: \quad]-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty\,[\quad \to \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad \frac{2+\sqrt{x^2-9}}{3x}$$

Função Composta $f\circ g$:

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 2+\sqrt{(3x)^2-9} = 2+\sqrt{9x^2-9}$

$D_{f\circ g} = \{\, x\in IR : x\in D_g \wedge g(x)\in D_f \,\} = \{\, x\in IR : x\in IR \wedge 3x \in (\,]-\infty;-3\,]\cup[\,3\,;\,+\infty\,[\,)\,\}$

$3x\in(\,]-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty\,[\,) \Rightarrow 3x\le -3 \vee 3x\ge 3 \Leftrightarrow x\le -1 \vee x\ge 1 \to x\in\,]-\infty;-1\,]\cup[\,1;+\infty\,[$

Logo,

$D_{f\circ g} = \{x\in IR : x\in IR \wedge 2x^2 \in\,]-\infty;4]\,\} = \{\,x\in IR : x\in IR \wedge x\in(\,]-\infty;-1\,]\cup[\,1;+\infty\,[\,)\,\} =$

$IR\cap(\,]-\infty;-1\,]\cup[\,1;+\infty\,[\,) = \,]-\infty;-1\,]\cup[\,1;+\infty\,[$

$$f\circ g: \quad]-\infty;-1\,]\cup[\,1;+\infty\,[\quad \to \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad 2+\sqrt{9x^2-9}$$

Função Composta $g\circ f$:

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(2+\sqrt{x^2-9}\right) = 3\left(2+\sqrt{x^2-9}\right) = 6+3\sqrt{x^2-9}$

$D_{g\circ f} = \{\, x\in IR : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g \,\} = \left\{\, x\in IR : x\in(\,]-\infty;-3\,]\cup[\,3\,;\,+\infty\,[\,) \wedge \left(2+\sqrt{x^2-9}\right)\in IR \,\right\}$

$2+\sqrt{x^2-9}\in IR \Rightarrow x^2-9\ge 0 \to x\in\,]-\infty;-3]\cup[\,3;+\infty\,[$

Logo,

$D_{g\circ f} = \left\{\, x\in IR : x\in(\,]-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty\,[\,) \wedge 2+\sqrt{x^2-9}\in IR \,\right\} =$

$= \{\,x\in IR : x\in(\,]-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty\,[\,) \wedge x\in(\,]-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty\,[\,)\,\} =$

$= \,]-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty\,[$

$$g\circ f: \quad]-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty\,[\quad \to \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad 6+3\sqrt{x^2-9}$$

5. Caraterize a inversa de f, sendo f uma função real de variável real, definida por:

5.1. $f(x) = -4x$

Expressão da inversa:

$y=-4x \to x=-4y \Leftrightarrow y=-\frac{x}{4}$

$D_{f^{-1}} = IR$ e $D'_{f^{-1}} = D_f = IR$

Caraterização:

$$f^{-1}: \quad \begin{array}{ccc} IR & \rightarrow & IR \\ x & \mapsto & -\dfrac{x}{4} \end{array}$$

5.2. $f(x) = -3x + 1$

Expressão da inversa:

$y = -3x + 1 \rightarrow x = -3y + 1 \Leftrightarrow 3y = 1 - x \Leftrightarrow y = \dfrac{1-x}{3}$

$D_{f^{-1}} = IR$ e $D'_{f^{-1}} = D_f = IR$

Caraterização:

$$f^{-1}: \quad \begin{array}{ccc} IR & \rightarrow & IR \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x}{3} \end{array}$$

5.3. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$

Expressão da inversa:

$y = \dfrac{2x+3}{x+1} \rightarrow x = \dfrac{2y+3}{y+1} \Leftrightarrow x(y+1) = 2y + 3 \Leftrightarrow xy + x = 2y + 3 \Leftrightarrow xy - 2y = 3 - x \Leftrightarrow y(x-2) = 3 - x \Leftrightarrow y = \dfrac{3-x}{x-2}$

$D_{f^{-1}} = IR \setminus \{2\}$ e $D'_{f^{-1}} = D_f = IR \setminus \{-1\}$

Caraterização:

$$f^{-1}: \quad \begin{array}{ccc} IR \setminus \{2\} & \rightarrow & IR \setminus \{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{3-x}{x-2} \end{array}$$

5.4. $f(x) = \sqrt{x-1}$

Expressão da inversa:

$y = \sqrt{x-1} \rightarrow x = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow y = x^2 + 1$

$D_{f^{-1}} = IR$ e $D'_{f^{-1}} = D_f = \{x \in IR : x - 1 \geq 0\} = \{x \in IR : x \geq 1\} = [1\ ;\ +\infty[$

Caraterização:

$$f^{-1}: \quad \begin{array}{ccc} IR & \rightarrow & [1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$$

6. Calcule os seguintes limites:

6.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 4} = "\dfrac{0}{0}"$

Fatorizando o numerador e o denominador:

$$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm 0}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{2} \Leftrightarrow x=1 \text{ (raiz dupla)}$$

$$x^2-2x+1=(x-1)(x-1)$$

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm 3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5-3}{2} \vee x=\frac{5+3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{2} \vee x=\frac{8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=4$$

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-4}=\frac{1-1}{1-4}=\frac{0}{-3}=0$$

6.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x^3-x^2+7}{4x^2-5}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3-x^2+7}{4x^2-5}=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Considerando o termo de maior grau no numerador e no denominador:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3-x^2+7}{4x^2-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3}{4x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x}{4}=\frac{-\infty}{4}=-\infty$$

6.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+2x+3}{(2x-5)^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+2x+3}{(2x-5)^2}=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Considerando o termo de maior grau no numerador e no denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+2x+3}{(2x-5)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+2x+3}{4x^2-20x+25}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{4}=\frac{+\infty}{4}=+\infty$$

6.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo binómio conjugado de $\left(\sqrt{x+2}-2\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

6.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3x} = "\frac{\infty}{\infty}"$$

Usando os limites notáveis:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\times\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1}{3}\times 0 = 0$$

6.6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{2x}$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{2x} = "\frac{0}{0}"$$

Usando os limites notáveis:

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{2x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\right)\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

6.7. $\lim\limits_{z\to5} \frac{z^2-10z+25}{z-5}$

$$\lim_{z\to5} \frac{z^2-10z+25}{z-5} = "\frac{0}{0}"$$

Fatorizando o numerador:

$$z^2 - 10z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{10 \pm 0}{2} \Leftrightarrow z = \frac{10}{2} \Leftrightarrow z = 5 \text{ (raiz dupla)}$$

$$z^2 - 10z + 25 = (z-5)(z-5) = (z-5)^2$$

Logo, $\lim\limits_{z\to5} \frac{z^2-10z+25}{z-5} = \lim\limits_{z\to5} \frac{(z-5)^2}{z-5} = \lim\limits_{z\to5}(z-5) = 5-5 = 0$

6.8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x+1}-e}{x^2-x}$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x+1}-e}{x^2-x} = "\frac{0}{0}"$$

Usando os limites notáveis:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x+1}-e}{x^2-x} = \lim_{x\to0} \frac{e(e^x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to0} \frac{e}{x-1}\times\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{e}{-1}\times 1 = -e$$

6.9. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right) = "\frac{0}{0}"$$

Usando os limites notáveis:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=\lim_{x\to 0} 2\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=2\times 1=2$$

6.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Multiplicando e dividindo pelo binómio conjugado de $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\overset{"\infty-\infty"}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

6.11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x^4}{2x-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x^4}{2x-2}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Usando os limites notáveis:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x^4}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{4x\ln x}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{2}\times\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}2x\times\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=2\times 1=2$$

7. Estude a continuidade de cada uma das seguintes funções nos pontos indicados. Caso não seja contínua, estude a continuidade à esquerda e à direita do ponto indicado.

7.1. $f(x)=|x|$ para $x=0$

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ então $\exists\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$f(0)=0$

Como $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, então f é contínua em $x=0$

7.2. $h(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{se } x<1\\ 2 & \text{se } x=1\\ 1+x^3 & \text{se } x>1\end{cases}$ para $x=1$

$$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+}\left(1+x^3\right) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-}\left(3x^2-1\right) = 3-1 = 2$$

Como $\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^-} h(x)$ então $\exists \lim_{x\to1} h(x)$ e $\lim_{x\to1} h(x) = 2$

$h(1) = 2$

Como $\lim_{x\to1} h(x) = h(1)$, então h é contínua em $x = 1$

7.3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ para $x = 1$

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim_{x\to1^+} g(x) \neq \lim_{x\to1^-} g(x)$ então $\nexists \lim_{x\to1} g(x)$

Logo, g não é contínua em $x = 1$

$g(1) = 2$

Como $g(1) \neq \lim_{x\to1^+} g(x)$ e $g(1) \neq \lim_{x\to1^-} g(x)$, então g não é contínua à direita nem contínua à esquerda de $x = 1$.

8. Mostre, aplicando o teorema de Bolzano, que a equação:

8.1. $x^3 - 2x + 5 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]-3,0[$

$f(x) = x^3 - 2x + 5$ é uma função polinomial logo é contínua em IR e em particular também é contínua em $]-3,0[$.

$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3) + 5 = -27 + 6 + 5 = -16$

$f(0) = 0^3 - 2(0) + 5 = 5$

Como $f(-3)\times f(0) = (-16)(5) = -80 < 0$ e visto que f é contínua em $]-3,0[$ então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem pelo menos uma raiz em $]-3,0[$.

Desta forma a equação $x^3 - 2x + 5 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]-3,0[$.

8.2. $x^4 - 2x - 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1,0]$

$f(x) = x^4 - 2x - 1$ é uma função polinomial logo é contínua em IR e em particular também é contínua em $[-1,0]$.

$f(0) = 0^4 - 2(0) - 1 = -1$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1) - 1 = 2$

Como $f(0)\times f(-1)=(-1)(2)=-2<0$ e visto que f é contínua em $[-1,0]$ então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem pelo menos uma raiz em $]-1,0[$.

Desta forma a equação $x^4-2x-1=0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1,0]$.

. **9.** Para cada uma das seguintes funções escreva uma equação para as assintotas do respetivo gráfico:

9.1. $f(x)=\dfrac{8}{4-x^2}$

Verticais:

$4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$x=-2$ e $x=2$

Horizontais: $y=0$

9.2. $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3}$

Verticais: $x=0$

Oblíqua: $y=x$

$$\begin{array}{r|l} x^4-16 & x^3 \\ \cline{2-2} -x^4 & x \\ \hline -16 & \end{array}$$

9.3. $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

- Assintotas verticais

$D_f=\{x\in IR : x^2-16>0\}$

$x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x=\pm 4$

Como x^2-16 representa uma parábola com concavidade voltada para cima, então $D_f=]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}=\frac{2(4)^2}{0^+}=\frac{32}{0^+}=+\infty$$

Logo, $x=4$ é uma assintota vertical unilateral.

$$\lim_{x\to -4^-} f(x)=\lim_{x\to -4^-}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}=\frac{2(-4)^2}{0^+}=\frac{32}{0^+}=+\infty$$

Logo, $x=-4$ é uma assintota vertical unilateral.

- Assintotas não verticais

✓ Quando $x \to +\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2-16}}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(2)=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)\underset{m=2}{\underbrace{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}-\frac{2x\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-2x\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2-16}}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\left(x-\sqrt{x^2-16}\right)}{\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\left(x-\sqrt{x^2-16}\right)\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}{\sqrt{x^2-16}\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\left(x^2-x^2+16\right)}{\sqrt{x^2-16}\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2-16}\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2-16}}\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2-16}}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2}}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{32x}{x}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to+\infty}(32)\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=32\times\left(\frac{1}{+\infty}\right)=$$

$$=32\times0=0$$

A reta de equação $y=mx+b \Leftrightarrow y=2x$ é uma assintota oblíqua quando $x \to +\infty$

✓ Quando $x \to -\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{x\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2-16}}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{-x\text{ pois }x<0}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-2)=-2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)\underset{m=2}{\underbrace{=}}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}-\frac{2x\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-2x\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2-16}}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x\left(x-\sqrt{x^2-16}\right)}{\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x\left(x-\sqrt{x^2-16}\right)\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}{\sqrt{x^2-16}\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x\left(x^2-x^2+16\right)}{\sqrt{x^2-16}\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2-16}\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2-16}}\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2-16}}\right)\times\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{32x}{\sqrt{x^2}}\right)\times\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{32x}{-x}\right)\times\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-32)\times\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-16}}\right)=-32\times\left(\frac{1}{-\infty}\right)=$$

$$=-32\times0=0$$

A reta de equação $y=mx+b \Leftrightarrow y=-2x$ é uma assintota oblíqua quando $x \to -\infty$

9.4. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

Verticais: $x=2$

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Horizontal: $y = 1$

9.5. $f(x) = x \cdot \ln x$

- Assintotas verticais

$D_f = \{x \in IR : x > 0\} =]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x \cdot \ln x)^{(0\times\infty)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

À esquerda de $x = 0$ a função não está definida.

Logo, a função f não tem assintotas verticais.

- Assintotas não verticais

Como $D_f =]0,+\infty[$ só faz sentido calcular estas assintotas quando $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\ln x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Como $m \notin IR$, não existe assintota não vertical quando $x \to +\infty$

9.6. $f(x) = \dfrac{\ln x^3}{x}$

- Assintotas verticais

$D_f = \{x \in IR : x^3 > 0 \wedge x \neq 0\} =]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(\ln x^3) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to 0^+} (\ln x^3) = \frac{1}{0^+} \times (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

À esquerda de $x = 0$ a função não está definida.

Logo, $x = 0$ é uma assintota vertical unilateral.

- Assintotas não verticais

Como $D_f =]0,+\infty[$ só faz sentido calcular estas assintotas quando $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x^3}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{x^2}^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x} \times \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x}\right) \times \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{3}{+\infty} \times 0 = 0 \times 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \underset{m=0}{=} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x^3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (3) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 3 \times 0 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assintota horizontal quando $x \to +\infty$