instituto politécnico de gestão e tecnologia

CURSO: INGENIERÍA INFORMÁTICA

Unidad Curricular: Matemáticas I

(1er año)

CAPÍTULO 1 – FUNCIONES

1. CONCEPTOS Y DEFINICIONES

1.1 Definición de función

Función o **aplicación f** se da a una correspondencia entre un conjunto A y un conjunto B en la que cada elemento x del primer conjunto corresponde a uno y sólo un elemento $f(x)$ del segundo conjunto.

Se representa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x)=y \end{array}$$

donde x es el **objeto** y $f(x)=y$ es la **imagen**.

1.2 Dominio y Codominio

Considere la función:

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x)=y \end{array}$$

El conjunto A, el conjunto de objetos, se llama **dominio** de la función y está representado por D_f.

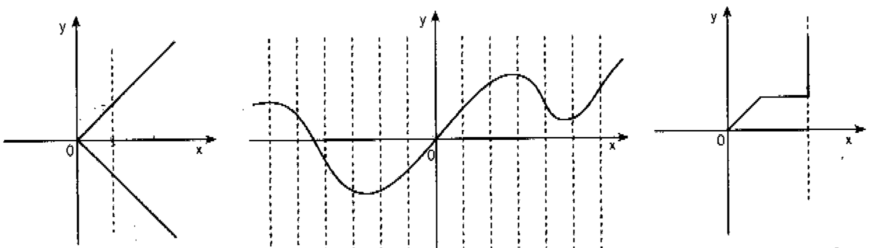
El conjunto B se llama **conjunto de llegada** de la función.

El conjunto de imágenes se llama **codominio** de la función y está representado por D'_f.

El codominio puede coincidir o no con el conjunto de llegada.

Cuando el dominio y el conjunto de llegada de una función son subconjuntos de IR, se dice que la función es una **función real de una variable real** .

Gráficamente, lo que distingue la representación gráfica de una función de cualquier conjunto de puntos representados en una referencia cartesiana es que a cada objeto le corresponde una y sólo una imagen, por lo que la gráfica de una función sólo puede ser intersecada, como máximo, una vez por cualquier línea vertical.



Não se trata da representação gráfica de uma função — Trata-se de uma representação gráfica de uma função — Não se trata da representação gráfica de uma função

1.3 Ceros de una función

Definición:

Cero de una función es cualquier objeto que tenga imagen nula, es decir, dada una función f para determinar los ceros, la ecuación queda resuelta $f(x)=0$.

Gráficamente, los ceros son las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje x.

2 . POLINOMAS

2.1 Definiciones

- Un **polinomio** es una expresión algebraica.
- Una **expresión algebraica** es un número, una letra o un conjunto de números y letras unidos por símbolos de operación y con significado matemático.
- Un número real o el producto de un número y una o más variables se llama **término .**

  Ejemplo: $2x$; $\frac{5}{2}xy^2$; $\sqrt{7}x^2yz$; $\frac{1}{2}$.

- El **coeficiente de un término** es su parte numérica y la otra parte se llama **parte literal** .

  Ejemplo: El coeficiente del término $2x^2$ es 2 y la parte literal es x^2 .

- El **grado de un término con una variable** corresponde al valor del exponente de esa variable.

  Ejemplo: El término $4x^8$ tiene grado 8

  El término 5 tiene grado 0. $\left(5 = 5x^0\right)$

  El término 0 tiene un grado indeterminado. $\left(0 = 0x^3\ ; 0 = 0x^5\ ; 0 = 0x^{1000}\ ; ...\right)$

- Dos términos son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

  Ejemplo: $-2x^3$ y $\frac{1}{2}x^3$ son términos semejantes.

- Un **polinomio de grado n**, en la variable x, es cualquier expresión del tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

  tal que:

  - ✓ x es la variable real;
  - ✓ $a_0, a_1, ..., a_n \in IR$ y $a_0 \neq 0$;
  - ✓ $n \in IN_0$.

- Un polinomio con dos términos se llama **binomio** .
- Un polinomio con un solo término **se** llama monomio.

2.2 Operaciones con polinomios

- **Suma**

  Para sumar dos polinomios se aplican las propiedades conmutativas y asociativas de la suma y se reducen los términos semejantes.

  <u>Ejemplo</u> :

$$10x^2 + 5x - 1 + 2x^2 + 5x - 6 = 12x^2 + 10x - 7$$

- **Sustracción**

  Para obtener la diferencia de dos polinomios se procede de la misma forma que la suma.

  <u>Ejemplo</u> :

$$\left(10x^2 + 2x + 1\right) - \left(5x^2 - x - 2\right) = 10x^2 + 2x + 1 - 5x^2 + x + 2 = 5x^2 + 3x + 3$$

- **Multiplicación**

  Para calcular el producto de dos polinomios se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación y se reducen los términos semejantes.

  Si los grados de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son, respectivamente, m y n, entonces el polinomio $P(x)\times Q(x)$ tiene un grado igual a $m+n$.

  Ejemplo :

$$\left(3x^2+x+1\right)(5x-6)=15x^3-18x^2+5x^2-6x+5x-6=15x^3-13x^2-x-6$$

- **División**

  Realizar la división entera de un polinomio $A(x)$ por un polinomio $B(x)$ consiste en determinar el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$, tal que:

$$A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

  Si los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ tienen grados iguales a m y n $(m\geq n)$, respetivamente, entonces el grado de $Q(x)$ es $m-n$ y $R(x)$ tiene grado $r<n$.

  Ejemplo :

  Realizar $\left(x^3-2x+5\right)\div(x-3)$

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-2x+5 & x-3 \\ \hline \end{array}$$

El dividendo y el divisor se escriben, de forma ordenada, según las potencias decrecientes de x, escribiendo también los términos nulos del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-2x+5 & x-3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

Los términos del grado más alto del dividendo y del divisor se dividen: $x^3\div x=x^2$

El resultado es el término con el grado más alto del cociente.

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-2x+5 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2 \\ \cline{1-1} 3x^2-2x+5 & \end{array}$$

El divisor se multiplica por el término de mayor grado del cociente, se escribe la simetría de ese producto y se suma al dividendo, obteniendo así el resto parcial.

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-2x+5 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2+3x \\ \cline{1-1} 3x^2-2x+5 & \\ -3x^2+9x \quad\quad & \\ \cline{1-1} 7x+5 & \end{array}$$

Divida el término de mayor grado del resto parcial por el término de mayor grado del divisor:

$$3x^2\div x=3x$$

El resultado es el 2º término del cociente.

A continuación, se repite todo el proceso.

$$\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2-2x+5 & x-3 \\ \cline{2-2}
-x^3+3x^2 \qquad\quad & x^2+3x+7 \\ \cline{1-1}
3x^2-2x+5 & \\
-3x^2+9x \quad\; & \\ \cline{1-1}
7x+5 & \\
-7x+21 & \\ \cline{1-1}
26 &
\end{array}$$

Divida el término de mayor grado del resto parcial por el término de mayor grado del divisor:

$$7x \div x = 7$$

El resultado es el 3º término del cociente.
A continuación, se repite todo el proceso.

La división terminó porque el resto obtenido tiene un grado menor que el grado del divisor. Entonces,

$$\underbrace{x^3-2x+5}_{A(x)} = \underbrace{(x-3)}_{B(x)}\underbrace{\left(x^2+3x+7\right)}_{Q(x)} + \underbrace{26}_{R(x)}$$

Regla de Ruffini (Paolo Ruffini 1765 – 1822)

En el desarrollo del cálculo algebraico hubo interés por la división de polinomios en los que el divisor era un polinomio del tipo $x-\alpha$.
La regla de Ruffini es un método rápido para resolver este problema y una alternativa al algoritmo de división.

Ejemplo:

Determina el cociente y el resto de la división $A(x)=x^3-2x+5$ por $B(x)=x-3$.

Nota : Si el dividendo es un polinomio incompleto, escribe 0 en lugar de los coeficientes de los términos cero.

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 0 & -2 & 5 & \leftarrow \text{Coeficientes de dividendo (ordenados en orden descendente)} \\
\text{Número que anula o polinómio divisor} \rightarrow \; 3 & & & & & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 5 \\
3 & \downarrow & 3 & & \\ \hline
 & 1 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 5 \\
3 & & 3 & 9 & \\ \hline
 & 1 & 3 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -2 & 5 \\
3 & & 3 & 9 & 21 \\
\hline
 & 1 & 3 & 7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -2 & 5 \\
3 & & 3 & 9 & 21 \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad 3 \quad 7}_{\substack{\text{Coeficientes de cociente} \\ \text{(ordenados en orden descendente)}}} & & & 26 \leftarrow \text{Resto}
\end{array}$$

Cociente: $Q(x) = x^2 + 3x + 7$

Resto: $R = 26$

La regla de Ruffini al dividir $A(x)$ por $(ax - b)$ com $a \in IR \setminus \{0\}$:

Queremos hacer $A(x) \div (ax - b)$.

Dividiendo por $a \neq 0$ el dividendo y el divisor, obtenemos $\dfrac{A(x)}{ax - b} = \dfrac{\frac{A(x)}{a}}{x - \frac{b}{a}}$

Ahora es posible aplicar la regla de Ruffini y dividir $\dfrac{A(x)}{a}$ por $\left(x - \dfrac{b}{a}\right)$, pero el resto cambia ya que al dividir

$A(x) = (ax - b) \times Q(x) + R(x)$ por $a \neq 0$ obtenemos $\dfrac{A(x)}{a} = \left(x - \dfrac{b}{a}\right) \times Q(x) + \dfrac{R(x)}{a}$

Por tanto, el resto de la división se obtiene multiplicando por a el resto de la división $\dfrac{A(x)}{a}$ por $\left(x - \dfrac{b}{a}\right)$.

Ejemplo:

Realizar $(3x^3 - 2) \div (2x + 1)$

La regla de Ruffini no se puede aplicar directamente porque el divisor no es un binomio de tipo $x - \alpha$.

Dividiendo el dividendo y el divisor por 2:

$$\frac{3x^3 - 2}{2x + 1} = \frac{\frac{3}{2}x^3 - 1}{x + \frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{19}{16}
\end{array}$$

Multiplicando el resto obtenido por 2 tenemos:

$$R = -\frac{19}{16} \times 2 = -\frac{19}{8}$$

Entonces,

$$Q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} \text{ y } R = -\frac{19}{8}$$

2.4 Descomposición de un polinomio em fatores. Calcular las raíces de un polinomio

Descomponer un polinomio en factores o factorizar un polinomio es escribirlo en forma de producto de factores del menor grado posible.

$$\underbrace{x^2 - 25}_{\substack{\text{Polinómio} \\ \text{não factorizado}}} = \underbrace{(x-5)(x+5)}_{\substack{\text{Polinómio} \\ \text{factorizado}}}$$

Teorema:

Sea $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ un polinomio de grado *n*, con *n* raíces $x_1, x_2, ..., x_n$, entonces $P(x)$ se puede descomponer en factores de la siguiente manera $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$

Teorema:

Un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene, como máximo, *n* raíces reales (ceros).

Ejemplo:

Descomponerse en factores :

- $2x^2 - 7x + 3$

  $2x^2 - 7x + 3 = 0$

  $$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2}{4} \vee x = \frac{12}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 3$$

  Entonces, $2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$

- $2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

  La regla de Ruffini :

  $\alpha = 1$

	2	–2	–2	2
1		2	0	–2
	2	0	–2	0

  $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

  Entonces, $2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 2(x+1)(x-1)(x-1)$

3. FUNCIONES

3.1 Función polinómica

Una función f, real de una variable real, definida por un polinomio se llama **función polinómica:**

$$\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \end{array}$$

$a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_n \in IR\ \ y\ \ n \in IN$.

Determinar los ceros de una función polinómica equivale a determinar los ceros del polinomio que la define.

3.2 Función afín

Una **función afín** se define mediante una expresión algebraica del tipo:

$$f(x) = mx + b \quad ; \quad m \in IR \setminus \{0\}\ ,\ b \in IR$$

La gráfica de una función afín es una línea recta.

Designamos m como **la pendiente** de la recta y b como **la ordenada en el origen** .

- Si $m > 0$, la recta es creciente.
- Si $m < 0$, la recta es decreciente.

Una función afín cuya gráfica es una recta que contiene el origen de las coordenadas se llama **función lineal** .
La expresión algebraica de una función lineal es del tipo:

$$f(x) = mx \quad ; \quad m \in IR \setminus \{0\}$$

Una función cuya gráfica es una recta paralela al eje *x* es una **función constante** y la expresión algebraica es del tipo:
$f(x) = b\ ;\ b \in IR$

3.3 Función cuadrática

Una **función cuadrática** es del tipo:

$$\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

con $a, b, c \in IR\ \ y\ \ a \neq 0$.

La gráfica que corresponde a una función cuadrática es una **parábola** cuyo vértice se puede calcular de la siguiente manera:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

La parábola puede tener una concavidad hacia arriba: $\cup$ o una concavidad hacia abajo: $\cap$

Los ceros de una función cuadrática se pueden calcular resolviendo la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ y usando la **fórmula de resolución**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>Ejemplo</u>:

$-3x^2 + 10x - 3 = 0$

$a = -3\,;\, b = 10\,;\, c = -3$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-3)(-3)}}{2(-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 8}{-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10-8}{-6} \vee x = \frac{-10+8}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{-18}{-6} \vee x = \frac{-2}{-6} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$$

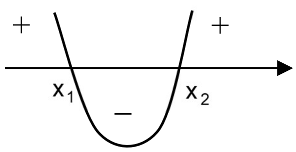
El binomio discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ indica el número de ceros. Si:

- $\Delta > 0 \rightarrow$ La función tiene dos ceros distintos;
- $\Delta = 0 \rightarrow$ La función tiene un doble cero;
- $\Delta < 0 \rightarrow$ La función no tiene ceros.

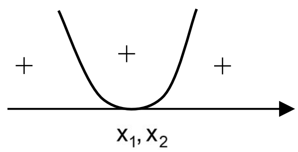
Teniendo en cuenta el número de ceros y el signo de <u>*a*</u> , la gráfica de una función cuadrática corresponderá a una de las siguientes seis posibilidades.

Concavidad hacia arriba: $a > 0$

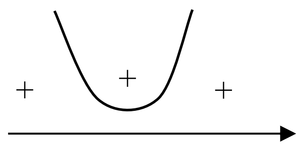
$\Delta > 0$



$\Delta = 0$

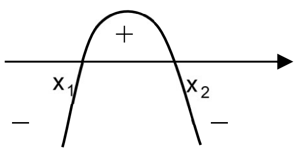


$\Delta < 0$

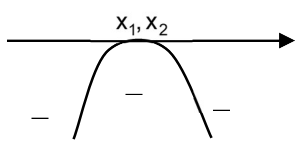


Concavidad hacia abajo: $a < 0$

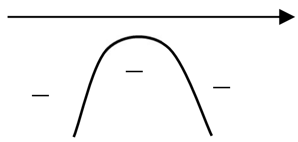
$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$



3.4 Funciones racionales

Así como un número racional se define como el cociente de dos números enteros (donde el denominador es distinto de cero), una función racional se define como el cociente de dos polinomios.

Definición:

Una función racional es una función real de una variable real definida por:

$$f(x)=\frac{A(x)}{B(x)} \quad (B(x)\neq 0) \quad , \text{ com } A(x) \text{ y } B(x) \text{ polinomios}$$

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales que no anulan el denominador:

$$D_f=\{\, x \in IR : B(x)\neq 0 \,\}$$

Ejemplo:

Determinar el dominio de la función racional definida por $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

$$D_f=\{x \in IR : x^2-4\neq 0\}=\{x \in IR : x^2\neq 4\}=\{x \in IR : x\neq \pm\sqrt{4}\}=\{x \in IR : x\neq \pm 2\}=IR\setminus\{-2,2\}$$

3.5 Funciones irracionales

Se dice que una función es **irracional** si la variable independiente x está bajo el símbolo radical.

Ejemplo:

- La función definida por $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ es una función irracional.
- La función definida por $g(x)=\sqrt{3}+x$ no es una función irracional

Para determinar el dominio de funciones irracionales hay que tener en cuenta que es imposible calcular una raíz índice par de un número negativo.

Ejemplo:

Determine el dominio de la función irracional definida por $g(x)=\sqrt{x-5}$

$$D_g=\{\, x \in IR : x-5\geq 0 \,\}=\{\, x \in IR : x\geq 5 \,\}=[\,5,+\infty\,[$$

3.6 Funciones exponenciales

La expresión "crecimiento exponencial" forma parte del lenguaje cotidiano. Significa que algo crece muy rápidamente.

Las funciones racionales no son modelos capaces de describir este tipo de fenómenos.

Las funciones que trascienden lo que puede describirse mediante funciones algebraicas se denominan *funciones trascendentes* y, por tanto, las funciones exponenciales son funciones trascendentes.

Definición:

Una *función exponencial* con base a es una función definida por:

$$f(x)=a^x$$

Siendo a y x números reales tales que $a>0$ y $a\neq 1$.

Tenga en cuenta que si:

- ✓ $a=0$ entonces $f(x)=0 \ \forall x\in IR^+$.
- ✓ $a=0$ y $x\in IR^-$ entonces $f(x)$ no es un número real.
- ✓ $a=1$ entonces $f(x)=1 \ \forall x\in IR$.
- ✓ $a<0$ entonces $f(x)$ no siempre es un número real.

  Por ejemplo, si $a=-4$ entonces $f\left(\frac{1}{2}\right)=(-4)^{1/2}=\sqrt{-4}$ no es un número real.

Propiedades de las funciones exponenciales

- El dominio es IR.
- El codominio es IR^+.
- La función exponencial es estrictamente creciente si $a>1$ y estrictamente decreciente si $0<a<1$.
- La gráfica de la función corta el eje $y's$ en el punto de coordenadas $(0,1)$.

Definición :

Una clase especial de funciones exponenciales son las definidas por:

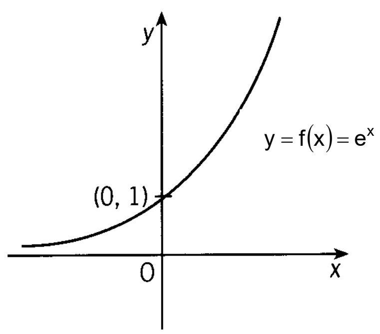
$$f(x)=e^{mx}$$

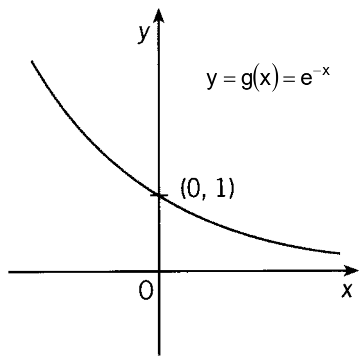
La base de esta función exponencial es e (número de Neper → número irracional cuyo valor es aproximadamente 2,7).

Las funciones de base exponencial son apropiadas, en particular, para modelar el crecimiento y la disminución continuos.

Dos funciones especiales de la clase antes mencionada son:

$$f(x)=e^x \text{ y } g(x)=e^{-x}$$





3.7 Funciones logarítmicas

La función inversa de cualquier función exponencial se llama *función logarítmica* .

Definición :

Para $a > 0$ y $a \neq 1$, la *función logarítmica* con base a está definida por:

$$f(x) = \log_a x$$

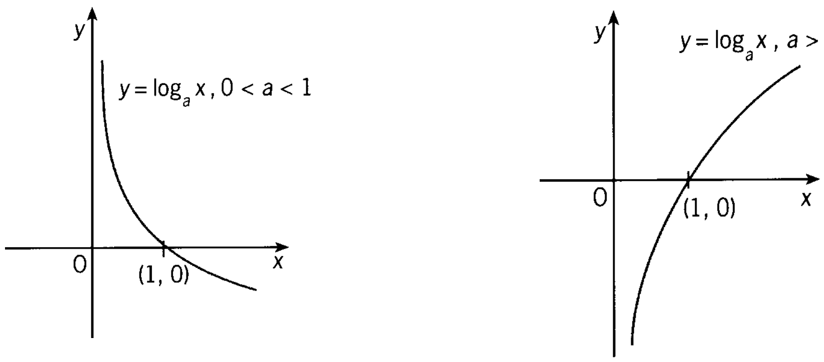
$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

De la definición se sigue:

- El logaritmo de 1 en cualquier base es 0.
- Sólo puedes calcular el logaritmo de un número positivo.

Propiedades de las funciones logarítmicas

- El dominio es IR^+.
- El contradominio es IR.
- La función logarítmica es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.
- La gráfica de la función corta el eje $x's$ en el punto de coordenadas $(1,0)$.



Al calcular con logaritmos, hay dos bases que se utilizan con mayor frecuencia: la base 10 (también llamada *base común*) y la base e (también llamada *base natural*).

Notación:

- $\log_{10} x = \log x$
- $\log_e x = \ln x$

Notas:

- ✓ $\log 10 = 1 \rightarrow 10^1 = 10$
- ✓ $\log 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$
- ✓ $\log 1000 = 3 \rightarrow 10^3 = 1000$
- ✓ $\ln e = 1 \rightarrow e^1 = e$

Propiedades de los logaritmos

- Logaritmo del producto:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

- Logaritmo del cociente:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

- Logaritmo de potencia:

$$\log_a(x^p) = p\log_a(x)$$

Cambio de Base

Para calcular el valor del logaritmo $\log_a(x)$ con $a \in IR^+ \setminus \{1\}$ la siguiente igualdad se debe tener en cuenta:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Ejemplo :

$$\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Algunas ecuaciones que involucran logaritmos se pueden resolver usando una ecuación exponencial equivalente y algunas ecuaciones con la incógnita en exponente se pueden resolver usando logaritmos. Tal equivalencia es posible dado que:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Al resolver una ecuación logarítmica es necesario tener en cuenta el dominio de la expresión porque, si no es así, se corre el riesgo de presentar como solución un valor o valores que ni siquiera dan significado a la expresión. .

Para la función $f(x) = \log_a(x)$, $a \in IR^+ \setminus \{1\}$, tenga en cuenta que su dominio es IR^+ y para la función $g(x) = a^x$, $a \in IR^+ \setminus \{1\}$, tenga en cuenta que su dominio es IR.

Para $a > 0$ y $a \neq 1$:

- $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
- $\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $e^{\ln x} = x$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln e^x = x\ln e = x$

Ejemplos:

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\ln x^2 + \ln x = 9$

$\ln x^2 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \in IR \setminus \{0\}$

$\ln x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in IR^+$

Por tanto, el dominio de la expresión es $D = IR \setminus \{0\} \cap IR^+ = IR^+$

$\ln x^2 + \ln x = 9 \Leftrightarrow 2\ln x + \ln x = 9 \Leftrightarrow 3\ln x = 9 \Leftrightarrow \ln x = \frac{9}{3} \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^3 \Leftrightarrow x = e^3$

¿Cómo $e^3 \in IR^+$ entonces? $S = \{e^3\}$

2. $\log_5(1-x) - \log_5(x+2) = 1$

$\log_5(1-x) \Rightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow x \in \left]-\infty;1\right[$

$\log_5(x+2) \Rightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \Rightarrow x \in \left]-2;+\infty\right[$

$D = \left]-\infty;1\right[\cap \left]-2;+\infty\right[= \left]-2;1\right[$

$$\log_5(1-x) - \log_5(x+2) = 1 \Leftrightarrow \log_5\left(\frac{1-x}{x+2}\right) = 1 \Leftrightarrow 5^{\log_5\left(\frac{1-x}{x+2}\right)} = 5^1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} = 5 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x-5x-10}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x-9}{x+2} = 0 \Leftrightarrow -6x-9 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow -6x = 9 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{6} \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \wedge x \neq -2$$

Cómo $-\frac{3}{2} \in \left]-2;1\right[$ entonces $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

3. $e^{2x} = 5$

El dominio de la expresión es $D = IR$.

$e^{2x} = 5 \Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln 5 \Leftrightarrow 2x\underbrace{\ln e}_{1} = \ln 5 \Leftrightarrow 2x = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{2}$

$$S = \left\{\frac{\ln 5}{2}\right\}$$

4. SUMA, DIFERENCIA DE PRODUCTOS Y COCIENTE DE FUNCIONES

Considere las funciones reales de las variables reales f y g definidas por $f(x)$ y $g(x)$ tales que $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Estas funciones se pueden combinar para obtener una nueva función.

- ✓ **Función de suma**

  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$$f+g: \begin{array}{ccc} D_f \cap D_g & \to & IR \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

- ✓ **Función de diferencia**

  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

  $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$$f-g: \begin{array}{ccc} D_f \cap D_g & \to & IR \\ x & \mapsto & f(x)-g(x) \end{array}$$

- ✓ **Función del producto**

  $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

$$f \times g: \begin{array}{ccc} D_f \cap D_g & \to & IR \\ x & \mapsto & f(x) \times g(x) \end{array}$$

- ✓ **Función cociente**

  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$

  $D_{f/g} = \left(D_f \cap D_g\right) \setminus \{ x \in IR : g(x) = 0\}$

$$\frac{f}{g}: \begin{array}{ccc} \left(D_f \cap D_g\right) \setminus \{x \in IR : g(x) = 0\} & \to & IR \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \ (g(x) \neq 0) \end{array}$$

<u>Ejemplo</u>**:**

Considere las funciones f y g definidas por, respectivamente, $f(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{x}{4x-8}$.

Como $D_f = IR$ y $D_g = IR \setminus \{2\}$, entonces:

- ✓ $f(x) + g(x) = 2x + \frac{x}{4x-8}$

  $D_{f+g} = IR \cap \left(IR \setminus \{2\}\right) = IR \setminus \{2\}$

$$f+g: \begin{array}{ccc} IR \setminus \{2\} & \to & IR \\ x & \mapsto & 2x + \frac{x}{4x-8} \end{array}$$

- ✓ $f(x) - g(x) = 2x - \frac{x}{4x-8}$

  $D_{f-g} = IR \cap \left(IR \setminus \{2\}\right) = IR \setminus \{2\}$

$$\begin{array}{lccc} f-g: & IR\setminus\{2\} & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & 2x-\dfrac{x}{4x-8} \end{array}$$

- ✓ $f(x)\times g(x)=2x\cdot\dfrac{x}{4x-8}=\dfrac{2x^2}{4x-8}$

  $D_{f\times g}=IR\cap\left(IR\setminus\{2\}\right)=IR\setminus\{2\}$

$$\begin{array}{lccc} f\times g: & IR\setminus\{2\} & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x^2}{4x-8} \end{array}$$

- ✓ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x(4x-8)}{x}=\dfrac{8x^2-16x}{x}$

  $D_{f/g}=\left(D_f\cap D_g\right)\setminus\{\,x\in IR: g(x)=0\}=\left(IR\setminus\{2\}\right)\setminus\{0\}=IR\setminus\{0,2\}$

$$\begin{array}{lccc} \dfrac{f}{g}: & IR\setminus\{0;2\} & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{8x^2-16x}{x} \end{array}$$

5. FUNCIÓN COMPUESTA POR DOS FUNCIONES

5.1 Definición

Sean f y g dos funciones reales de una variable real definida por:

$$f(x)=3x \;\text{ y }\; g(x)=x+1$$

$f(x)$ y $g(x)$ son números reales y como tales es posible calcular $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

Ejemplo:

- $f[g(3)]=f(4)=12$
- $g[f(3)]=g(9)=10$
- $f[g(x)]=f(x+1)=3(x+1)=3x+3$
- $g[f(x)]=g(3x)=3x+1$

$f[g(x)]$ es una nueva función y está representada por $f\circ g$ (f después de g).
$f\circ g$ es el compuesto de f por g.

$g[f(x)]$ es una nueva función y está representada por $g\circ f$ (g después de f).
$g\circ f$ está compuesto de g por f.

Entonces, $f\circ g=f[g(x)]=3x+3$ y $g\circ f=g[f(x)]=3x+1$

5.2 Dominio

Dada la función $f \circ g$, su dominio se puede determinar de la siguiente manera:

$$D_{f\circ g} = \{ x \in IR : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \}$$

De la misma manera, el dominio de $g \circ f$:

$$D_{g\circ f} = \{ x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \}$$

Ejemplo:

Sean f y g funciones definidas por $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

El dominio de estas funciones es:

$D_f = \{ x \in IR : x - 1 \neq 0 \} = \{ x \in IR : x \neq 1 \} = IR \setminus \{1\}$

$D_g = \{ x \in IR : x \geq 0 \} = IR_0^+$

A continuación, se determinará la expresión analítica y el dominio de la función $f \circ g$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

$D_{f\circ g} = \{ x \in IR : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \} = \{ x \in IR : x \in IR_0^+ \wedge \sqrt{x} \in IR \setminus \{1\} \} = IR_0^+ \setminus \{1\}$

Caracterización de $f \circ g$:

$$\begin{array}{llcl} f \circ g : & IR_0^+ \setminus \{1\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} \end{array}$$

De manera similar se puede determinar la expresión analítica y el dominio de la función $g \circ f$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$

$D_{g\circ f} = \{ x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \} = \left\{ x \in IR : x \in IR \setminus \{1\} \wedge \dfrac{1}{x-1} \in IR_0^+ \right\}$

$\dfrac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x > 1$

$D_{g\circ f} = \left]1, +\infty\right[$

Caracterización de $g \circ f$:

$$\begin{array}{llcl} g \circ f : &]1, +\infty[& \to & IR \\ & x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1}{x-1}} \end{array}$$

Observación:

Dos funciones f y g son intercambiables si $f \circ g = g \circ f$.

6 . FUNCIÓN INYECTIVA. FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN INYECTIVA

6.1 Función Inyectiva

Definición:

Una función real de una variable real $f : A \to IR$ es inyectiva si cada elemento del contradominio es imagen por f de un solo elemento del dominio, es decir, $f : A \to IR$ es inyectiva si, dados dos elementos diferentes del dominio, sus imágenes por f son diferentes.

Simbólicamente:

$$f : A \to IR \text{ es inyectiva si: } \forall x_1, x_2 \in A ,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o

$$f : A \to IR \text{ es inyectiva si: } \forall x_1, x_2 \in A ,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo:

Demuestre analíticamente que la función definida por $f(x) = -x + 3$ es una función inyectiva.

Sean x_1 y x_2 dos elementos cualesquiera de $D_f = IR$.

Si $f(x_1) = f(x_2)$, ven $-x_1 + 3 = -x_2 + 3 \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Por tanto, f es inyectiva.

6.2 Función inversa de una función inyectiva

Definición:

Dada una función inyectiva f , la inversa de f es la función f^{-1} tal que:

$$D_{f^{-1}} = D'_f ,\ D'_{f^{-1}} = D_f \text{ e } y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),\ \forall x \in D_f ,\ \forall y \in D_{f^{-1}}$$

Ejemplo:

Sea f una función real de una variable real, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Caracteriza la inversa de la función f.

- Expresión de la inversa:

  1º) Reemplazar $f(x)$ con y: $y = \dfrac{1}{x-2}$

  2) Intercambiar las variables x e y : $x = \dfrac{1}{y-2}$

  3º) Resolver en orden a y: $y - 2 = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x} + 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1+2x}{x}$

  Entonces, $f^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{x}$

- Dominio de la función inversa:

  $D_{f^{-1}} = \{ x \in IR : x \neq 0 \} = IR \setminus \{0\}$

- Contradominio de la función inversa:

$$D'_{f^{-1}} = D_f = \{ x \in IR : x - 2 \neq 0 \} = \{ x \in IR : x \neq 2 \} = IR \setminus \{2\}$$

- Caracterización:

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & IR \setminus \{0\} & \to & IR \setminus \{2\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1+2x}{x} \end{array}$$

Ejercicios

1. Calcula el cociente y resto de las siguientes divisiones:

1.1. $\left(x^3+3x^2+5x+1\right):(x+2)$

1.2. $\left(x^4-7x^3+9x^2+8x+5\right):(x-4)$

1.3. $\left(x^4+1\right):(x-1)$

1.4. $\left(x^4-16\right):(4x-2)$

1.5. $\left(3x^3+5x^2+x-5\right):(3x-1)$

1.6. $\left(4x^3-8x^2-1\right):(2x-1)$

usando:

- Algoritmo de división
- El regla de Ruffini

2. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios y descompóngalas en factores:

2.1. $2x^2-x-1$

2.2. $3x^2-7x+2$

2.3. x^3-x

2.4. x^3-x^2-x+1

2.5. x^3+4x^2+5x+2

2.6. $-2x^3-3x^2-x$

3. Resuelva, en IR, cada una de las siguientes ecuaciones:

3.1. $4\ln x-10=0$

3.2. $3e^{x-4}=24$

3.3. $2\ln(x+3)=\ln(1-3x)$

3.4. $\dfrac{1}{16}=2^{1-x^2}$

3.5. $\log_2(x-1)=3-\log_2(x-3)$

3.6. $\ln x^4-\ln x^2=8$

3.7. $4^x-6\cdot 2^x+5=0$

3.8. $x^2\ln x-64\ln x=0$

3.9. $\log_2\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)+\log_2((x+2)(x-1))=2$

3.10. $\log_3\left(x^2-5x+6\right)-\log_3(2-x)=0$

3.11. $9^x+4\cdot 3^x+3=0$

3.12. $\ln(6x)=\ln\left(x^2-16\right)$

3.13. $4e^{2x-3}=12$

3.14. $\ln(2x)-\ln(x-2)=0$

3.15. $2e^{-2x}=80$

3.16. $\ln\left(x^2+5\right)=2\ln(x-1)$

3.17. $4e^{x-2}=18+2e^{x-2}$

3.18. $\log_5(x)+\log_5(2x+1)=0$

4. Dadas las funciones f y g definidas por:

- $f(x)=x$ y $g(x)=2x$
- $f(x)=\dfrac{4}{x}$ y $g(x)=2x-1$

- $f(x) = \sqrt{x} + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$
- $f(x) = \sqrt{x-5}$ y $g(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}$ y $g(x) = 2x + 1$

4.1. Determine, para cada par, el dominio de las funciones.

4.2. Caracterice, para cada par, $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$ e $g \circ f$.

5. Caracterizar, si existe, la inversa de f, donde f es una función real de una variable real, definida por:

5.1. $f(x) = 2x$

5.2. $f(x) = 2x - 3$

5.3. $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$

5.4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

5.5. $f(x) = x^2 + 3x$

5.6. $f(x) = \sqrt{x}$