Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 12

Temas abordados: Integral definida; Teorema Fundamental do Cálculo
Seções do livro: 5.3; 5.4

1) Calcule as integrais definidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(2x+5)\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{32} x^{-6/5}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(8t^2+\cos(t))\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{-1}(r+1)^2\mathrm{d}r$

(f) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\mathrm{d}s$

(g) $\displaystyle\int_{1}^{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{1}(3+4e^x)\mathrm{d}x$

2) Se f é uma função contínua e não negativa em $[a,b]$, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ é exatamente a área da região abaixo do gráfico de f e acima do eixo $\mathcal{O}x$. Utilizando o gráfico da função, calcule cada uma das integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_{-4}^{2}|x|\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

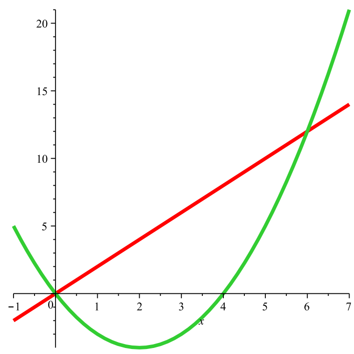
(c) $\displaystyle\int_{-3}^{0}(1+\sqrt{9-x^2})\,\mathrm{d}x$

3) Se p e q são funções contínuas e $p(x)\geq q(x)$, para todo $x\in[a,b]$, então a área da região compreendida acima do gráfico de q e abaixo do gráfico de p é dada por $\int_a^b[p(x)-q(x)]dx$. Nos itens abaixo vamos calcular esta área para o caso em que $f(x)=2x$ e $g(x)=x^2-4x$.

(a) Determine as soluções da equação $f(x)=g(x)$, chamando de a o menor valor e b o maior.

(b) Pelo Teorema do Valor Intermediário temos que, em todo o intervalo $[a,b]$, uma das funções é sempre maior do que a outra. Determine qual delas é a maior, calculando cada uma delas em ponto $c\in(a,b)$ e comparando os dois valores.

(c) Determine agora a área integrando, no intervalo $[a,b]$, a função que está por cima menos a que está por baixo.



4) Proceda como no exercício anterior para calcular a área a área da região limitada pelas curvas dadas.

(a) $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=x^2$

(b) $f(x)=6-x^2,\quad g(x)=3-2x$

(c) $f(x)=|x-2|,\ \ g(x)=2-(x-2)^2$

5) Repita o argumento acima para as funções abaixo. Neste caso, você encontrará 3 raízes para a equação $f(x) = g(x)$, digamos $a < b < c$. A área agora será calculada como a soma de duas integrais, uma do tipo $\int_a^b$ e outra do tipo $\int_b^c$. Em cada uma delas, você deve integrar a função que está por cima, menos a que está por baixo no intervalo de integração.

(a) $f(x) = x^3 - x + 1, \;\; g(x) = 1$

(b) $f(x) = 4x, \quad g(x) = x^3 + 3x^2$

6) Suponha que, no instante t, a posição em relação à origem de uma partícula que se desloca ao longo de uma reta seja dada por $s(t) = \int_0^t v(x)dx$, em que $v\colon [0,9] \to \mathbb{R}$ é a função velocidade, cujo gráfico está ilustrado abaixo. Considere ainda que t seja dado em segundos, que $s(t)$ seja dada em metros e que, para $0 \leq t \leq 3$, o gráfico de $v(t)$ seja um segmento de reta. A partir do gráfico da função velocidade, julgue os itens a seguir.

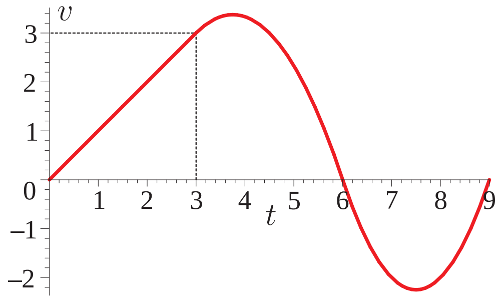
(a) A partícula está se afastando da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$.

(b) A partícula percorre menos de 4 metros nos primeiros 3 segundos.

(c) No instante $t = 6$ a partícula está na origem.

(d) No instante $t = 9$ a posição da partícula é positiva.

(e) O espaço total percorrido pela partícula é igual a $\displaystyle\int_0^6 v - \int_6^9 v$.

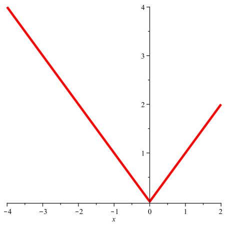
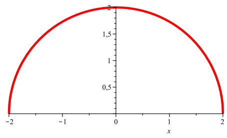
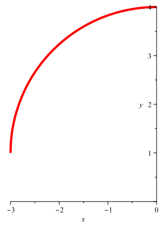


RESPOSTAS

1) (a) 6 (b) $5/2$ (c) 2 (d) $2 + 2\pi^3/3$
(e) $-8/3$ (f) $2^{3/4} - \sqrt{2} - 1$ (g) e (h) $4e - 1$

2) (a) 10 (b) 2π (c) $3 + 9\pi/4$

Os valores podem ser calculados a partir dos gráficos, que estão esboçados abaixo.

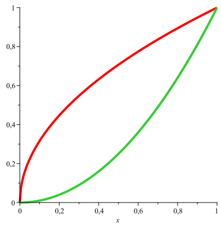
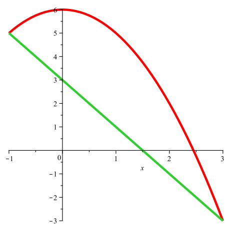
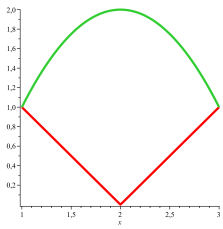
3) (a) As funções são iguais em $x = 0$ e $x = 6$.

(b) Como $f(5) = 10 > 5 = g(5)$, a função f é maior ou igual a g em todo o intervalo $[0, 6]$. Não há nada de especial no ponto 5 escolhido. Você poderia escolher qualquer um no intervalo aberto $(0, 6)$.

(c) A área é dada pela integral $\int_0^6 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^6 (6x - x^2)dx = 36$.

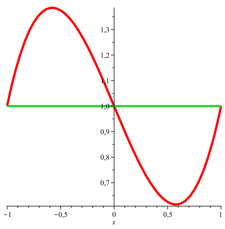
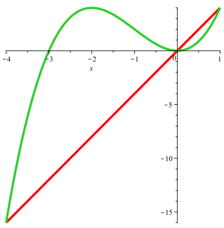
4) (a) $1/3$ (b) $32/3$ (c) $7/3$

Neste caso é possível fazer o cálculo sem esboçar os gráficos. Para maior entendimento, as curvas estão esboçadas abaixo.

5) (a) $1/2$ (b) $32 + (3/4)$

Neste caso é possível fazer o cálculo sem esboçar os gráficos. Para maior entendimento, as curvas estão esboçadas abaixo.

6) (a) Pelo Teorema Fundamental, a velocidade da partícula é $s'(t) = v(t)$, e o sinal da velocidade indica o sentido de percurso. Assim, a partícula está se *afastando* da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$, uma vez que $v(t) > 0$ nesse intervalo.

(b) Esse espaço corresponde à área abaixo do gráfico de $v(t)$ para $t \in [0, 3]$. Pelo gráfico, essa área é igual a $3 \times 3\,/2 = 9/2$, e portanto o espaço percorrido é *maior* do que 4 metros.

(c) Até o instante $t = 6$, a partícula tem velocidade $s'(t) = v(t)$ positiva, e está se afastando da origem. Logo, ela se encontra *à direita* da origem nesse instante.

(d) No intervalo $[6, 9]$, a partícula tem velocidade negativa, e está se aproximando da origem. Porém, comparando as áreas sob o gráfico de $v(t)$, verifica-se que o espaço percorrido no intervalo $[0, 6]$ é maior do que o percorrido no intervalo $[6, 9]$, e portanto a partícula ainda está *à direita* da origem.

(e) O espaço percorrido no intervalo $[0, 6]$ é igual a $\displaystyle\int_0^6 v$. Já no intervalo $[6, 9]$, como $s'(t)$ é negativa, o espaço percorrido é igual a $\displaystyle -\int_6^9 v$. Assim, o espaço total percorrido pela partícual é igual a $\displaystyle\int_0^6 v - \int_6^9 v$.