Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 15 – Soluções

Temas abordados: Integração por frações parciais; Comprimento de arco
Seções do livro: 8.4; 6.3

1) Numa reação química do tipo $X + Y \to Z$, a taxa de crescimento da concentração de Z é proporcional ao produto das concentrações de X e Y. Como a massa total do sistema se conserva, essas concentrações são proporcionais às respectivas quantidades, de modo que a taxa de formação de Z é proporcional ao produto das quantidades remanescentes de X e Y. Supondo que 1g de X combina com 3g de Y para formar 4g de Z e denotando por $q(t)$ a quantidade de Z no instante t, temos que $q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de X e $3\,q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de Y. Supondo que existem inicialmente 50 g de X e 33 g de Y, as quantidades remanescentes de X e Y após t segundos são, respectivamente, $50 - q(t)/4$ e $33 - 3\,q(t)/4$. Com essas considerações, temos que a taxa de formação do composto Z é dada por

$$q'(t) = k\left(50 - \frac{q(t)}{4}\right)\left(33 - \frac{3q(t)}{4}\right) = K(200 - q(t))(44 - q(t)),$$

onde k e K são constantes positivas. A equação acima é então equivalente a

$$(*) \qquad \frac{q'(t)}{(200 - q(t))(44 - q(t))} = K.$$

(a) Use a regra da substituição para transformar $\displaystyle\int \frac{q'(t)}{(200 - q(t))(44 - q(t))}\,dt$ em uma outra integral que não envolve a função $q(t)$ nem a derivada $q'(t)$. Calcule a integral obtida usando o método das frações parciais.

(b) Sabendo que $200 - q(t) > 0$ e $44 - q(t) > 0$, use a equação $(*)$ e os itens anteriores para determinar uma expressão de $q(t)$ em termos da função exponencial e de uma constante arbitrária.

(c) Determine essa constante usando a condição inicial $q(0) = 0$.

(d) Usando os itens anteriores, determine o que acontece com a quantidade $q(t)$ após muito tempo decorrido, calculando o limite $\lim_{t\to\infty} q(t)$. Sobrará algum reagente após muito tempo decorrido?

Soluções:

(a) Utilizando a substituição $x = q(t)$, temos que $dx = q'(t)dt$ e, portanto, que

$$\int \frac{q'(t)}{(200 - q(t))(44 - q(t))}\,dt = \int \frac{1}{(200 - x)(44 - x)}\,dx.$$

Pelo método das frações parciais, devemos escrever

$$\frac{1}{(200 - x)(44 - x)} = \frac{A}{200 - x} + \frac{B}{44 - x} = \frac{A(44 - x) + B(200 - x)}{(200 - x)(44 - x)},$$

determinando as constantes A e B. Igualando os numeradores, segue da igualdade dos polinômios

$$0x + 1 = 1 = A(44 - x) + B(200 - x) = (-A - B)x + 44A + 200B$$

que $-A - B = 0$ e que $44A + 200B = 1$. Segue então que $A = -1/156$ e $B = 1/156$, de modo que

$$\int \frac{1}{(200-x)(44-x)}\,dx = -\frac{1}{156}\int \frac{1}{200-x}\,dx + \frac{1}{156}\int \frac{1}{44-x}\,dx.$$

Integrando cada um dos termos dessa soma e utilizando as propriedades do logaritmo, segue que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(200-x)(44-x)}\,dx &= \frac{1}{156}\ln(|200-x|) - \frac{1}{156}\ln(|44-x|) + R \\ &= \frac{1}{156}\ln\left(\left|\frac{200-x}{44-x}\right|\right) + R,\end{aligned}$$

de modo que

$$\int \frac{q'(t)}{(200-q(t))(44-q(t))}\,dt = \frac{1}{156}\ln\left(\left|\frac{200-q(t)}{44-q(t)}\right|\right) + R.$$

(b) Integrando a equação $(*)$ e usando que $200 - q(t) > 0$ e $44 - q(t) > 0$, obtemos que

$$\frac{1}{156}\ln\left(\frac{200-q(t)}{44-q(t)}\right) + R = Kt + S.$$

Subtraindo R de ambos os membros da equação, multiplicando por 156 e aplicando a exponencial, segue que

$$\frac{200-q(t)}{44-q(t)} = e^{156Kt+C} = De^{156Kt},$$

onde $C = 156(S - R)$ e $D = e^C$ são constantes arbitrárias. Isolando $q(t)$ na equação acima, obtemos que

$$q(t) = \frac{44De^{156Kt} - 200}{De^{156Kt} - 1}.$$

(c) Usando a condição inicial, obtemos que

$$0 = q(0) = \frac{44D - 200}{D - 1},$$

mostrando que $D = 200/44 = 55/11$.

(d) Aplicando a regra de L'Hospital, segue que

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{44D156Ke^{156Kt}}{D156Ke^{156Kt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{44}{1} = 44.$$

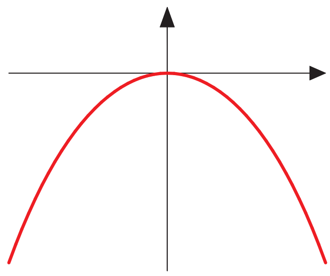
A quantidade remanescente dos reagentes X e Y após muito tempo decorrido é dada, respectivamente, pelos limites

$$\lim_{t\to\infty}\left(50 - \frac{q(t)}{4}\right) = 39, \qquad \lim_{t\to\infty}\left(33 - \frac{3q(t)}{4}\right) = 0,$$

mostrando que sobraram 39g de reagente X e 0g de reagente Y.

2) O comprimento do gráfico de uma função $f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$, é dado pela integral $C = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. Considere a função $f(x) = \ln(1 - x^2)$, definida para $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

(a) Verifique que $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ é da forma $p(x)/q(x)$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios do segundo grau.



(b) Verifique que $\dfrac{p(x)}{q(x)} = A + \dfrac{B}{1 - x^2}$, em que A e B são constantes.

(c) Calcule o comprimento de arco da função $f(x)$.

<u>**Soluções**</u>:

(a) Como $f'(x) = -2x/(1 - x^2)$ temos que

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{\frac{(1 - x^2)^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

(b) Note agora que

$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \frac{-1 + x^2 + 2}{1 - x^2} = -1 + \frac{2}{1 - x^2}.$$

(c) A expressão em frações parciais de $2/(1 - x^2)$ é como segue

$$\frac{2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}$$

e portanto uma primitiva para a função $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ é $G(x) = -x + \ln\left|\dfrac{1 + x}{1 - x}\right| + K$, em que K é a constante de integração. Basta agora usar a fórmula do enunciado e o Teorema Fundamental do Cálculo.

3) Suponha que uma população inicial de 200 mil fêmeas de um determinado inseto habite uma região agrícola, e que esteja crescendo a uma taxa de 50% ao ano. Para retardar o crescimento sem o uso de pesticidas, foram introduzidos 50 mil machos estéreis na região, que cruzam com as fêmeas mas não produzem descendentes. Indique por p a população, em milhares, de fêmeas desse inseto em um determinado instante. Nesse caso, o tempo $T(p)$, em anos, necessário para que essa população alcance o número $p < 200$ pode ser modelado pela função

$$T(p) = -2\int_{200}^{p} \frac{x+50}{x(x+100)}\,dx\ .$$

(a) Determine constantes A e B tais que $\dfrac{x+50}{x\,(x+100)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+100}$.

(b) Usando o item anterior, obtenha uma expressão explícita para $T(p)$ em termos da função logarítmica.

(c) Usando a aproximação $\ln(3) = 11/10$, determine o tempo necessário para que a população de fêmeas seja reduzida à metade da população inicial.

<u>Soluções</u>:

(a) Observe que

$$\frac{x+50}{x\,(x+100)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+100} = \frac{(A+B)\,x + A\,100}{x\,(x+100)}.$$

Dessa forma,

$$x + 50 = (A+B)\,x + A\,100, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando-se a noção de igualdade entre polinômios, obtemos que

$$x + 50 = (A+B)\,x + 100A,$$

isto é, $A + B = 1$ e $100A = 50$. Resolvendo, obtém-se $A = B = 1/2$.

(b) Pelo item (a), temos que

$$\begin{aligned} T(p) &= -\left(\int_{200}^{p} \frac{1}{x}\,dx + \int_{200}^{p} \frac{1}{x+100}\,dx\right) \\ &= -\left[\ln(x) + \ln(x+100)\right]\Big|_{200}^{p} \\ &= \ln\left(\frac{200 \times 300}{p\,(p+100)}\right). \end{aligned}$$

(c) A metade da população inicial é igual a 100, e o tempo necessário para que a população de fêmeas seja reduzida a esse número corresponde ao valor de $T(100)$. Segue diretamente do item (b), que

$$T(100) = \ln\left(\frac{200 \times 300}{100 \times 200}\right) = \ln(3) \approx 1,1 \text{ ano}.$$

4) Podemos modelar a produção de iogurte através do modelo logístico, onde uma população $p(t)$ de bactérias cresce transformando uma quantidade $L(t)$ de leite em iogurte. Segundo esse modelo, a taxa de reprodução da população por bactéria $p'(t)/p(t)$ é proporcional à taxa de consumo de leite por bactéria $-L'(t)/p(t)$, que é proporcional à concentração de leite, que por sua vez é proporcional a $L(t)$, uma vez que a massa total do sistema se conserva. Deste modo, existem constantes positivas a e b tais que

$$(*) \qquad \frac{p'(t)}{p(t)} = -a\frac{L'(t)}{p(t)} = bL(t).$$

(a) Utilizando a equação $(*)$, verifique que $L'(t) = -\frac{1}{a}p'(t)$. Integrando essa equação e utilizando as condições iniciais $p(0) = p_0$ e $L(0) = L_0$, mostre que $L(t) = \frac{1}{a}(c - p(t))$, onde $c = aL_0 + p_0$.

(b) Substituindo a expressão de $L(t)$ obtida no item anterior na equação $(*)$, verifique que $\dfrac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))} = \dfrac{b}{a}$, denominada *equação logística*.

(c) Use a regra da substituição para transformar $\displaystyle\int \frac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))}\,dt$ em uma outra integral que não envolve a função $p(t)$ nem a derivada $p'(t)$. Calcule a integral obtida usando o método das frações parciais.

(d) Sabendo que $p(t) > 0$ e $c - p(t) > 0$, use a equação logística e o item anterior para determinar uma expressão de $p(t)$ em termos da função exponencial, das constantes a, b, c, e de uma constante arbitrária.

(e) Usando o item anterior, determine o que acontece com a população $p(t)$ após muito tempo decorrido, calculando o limite $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$. Esse limite depende da constante arbitrária?

Soluções:

(a) Uma vez que, pela equação $(*)$, $\dfrac{p'(t)}{p(t)} = -a\dfrac{L'(t)}{p(t)}$, obtemos a expressão desejada cancelando $p(t)$ e isolando $L'(t)$. Integrando a equação $L'(t) = -\frac{1}{a}p'(t)$, obtemos que

$$L(t) = -\frac{1}{a}p(t) + C.$$

Utilizando as condições iniciais $p(0) = p_0$ e $L(0) = L_0$, obtemos que

$$L(t) = -\frac{1}{a}p(t) + L_0 + \frac{1}{a}p_0 = \frac{1}{a}(c - p(t)),$$

onde $c = aL_0 + p_0$.

(b) Pela equação $(*)$ e pelo item anterior, temos que

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = bL(t) = \frac{b}{a}(c - p(t)),$$

de modo que

$$\frac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))} = \frac{b}{a}.$$

(c) Utilizando a substituição $x = p(t)$, temos que $dx = p'(t)dt$ e, portanto, que

$$\int \frac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))}\,dt = \int \frac{1}{x(c-x)}\,dx.$$

Pelo método das frações parciais, devemos escrever

$$\frac{1}{x(c-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{c-x} = \frac{A(c-x)+Bx}{x(c-x)},$$

determinando as constantes A e B. Igualando os numeradores, segue da igualdade dos polinômios

$$0x + 1 = 1 = A(c-x) + Bx = (B-A)x + Ac$$

que $B - A = 0$ e que $Ac = 1$. Segue então que $A = B = 1/c$, de modo que

$$\int \frac{1}{x(c-x)}\,dx = \frac{1}{c}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{c}\int \frac{1}{c-x}\,dx.$$

Integrando cada um dos termos dessa soma e utilizando as propriedades do logaritmo, segue que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(c-x)}\,dx &= \frac{1}{c}\ln(|x|) - \frac{1}{c}\ln(|c-x|) + R \\ &= \frac{1}{c}\ln\left(\left|\frac{x}{c-x}\right|\right) + R,\end{aligned}$$

de modo que

$$\int \frac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))}\,dt = \frac{1}{c}\ln\left(\left|\frac{p(t)}{c-p(t)}\right|\right) + R.$$

(d) Integrando a equação logística e usando que $p(t) > 0$ e $c - p(t) > 0$, obtemos que

$$\frac{1}{c}\ln\left(\frac{p(t)}{c-p(t)}\right) + R = \frac{b}{a}t + S.$$

Subtraindo R de ambos os membros da equação, multiplicando por c e aplicando a exponencial, segue que

$$\frac{p(t)}{c-p(t)} = e^{\frac{cb}{a}t + C} = De^{\frac{cb}{a}t},$$

onde $C = c(S-R)$ e $D = e^C$ são constantes arbitrárias. Isolando $p(t)$ na equação acima, obtemos que

$$p(t) = \frac{cDe^{\frac{cb}{a}t}}{1 + De^{\frac{cb}{a}t}}.$$

(e) Aplicando a regra de L'Hospital, segue que

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{cD\frac{cb}{a}e^{\frac{cb}{a}t}}{D\frac{cb}{a}e^{\frac{cb}{a}t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{c}{1} = c,$$

mostrando que esse limite não depende da constante D.

5) Um modelo para o estudo da velocidade de queda $v(t)$ de um pára-quedista é supor que a força de resistência do ar seja dada por $R = b\,v(t)^2$, isto é, proporcional ao quadrado da velocidade. Como a força resultante é $P + R$, onde $P = -mg$ é a força peso, pela Segunda Lei de Newton, temos que

$$ma(t) = -mg + bv(t)^2.$$

Suponha que a aceleração da gravidade é $g = 10$ m/s^2, a massa conjunta do pára-quedas e do pára-quedista é $m = 70$ kg e que $b = 700$ kg/m. Da Segunda Lei de Newton segue que

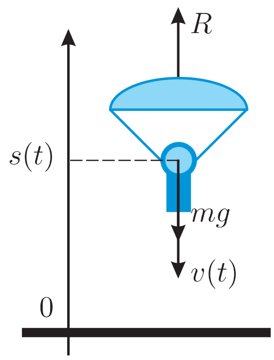
$$(*) \qquad \frac{v'(t)}{v(t)^2 - 1} = 10,$$

para todo tempo $t \geq 0$.

(a) Use a regra da substituição para transformar a integral $\int v'(t)/(v(t)^2 - 1)\, dt$ em uma outra que não envolve a função $v(t)$ nem a derivada $v'(t)$. Calcule a integral obtida usando o método das frações parciais.

(b) Sabendo que $v(t)^2 - 1 > 0$, use a equação $(*)$ para determinar uma expressão de $v(t)$ em termos da função exponencial e de uma constante arbitrária.

(c) Se o salto for efetuado de uma altura suficientemente grande, a velocidade com que o pára-quedista alcança o solo é aproximadamente igual ao limite $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$. Esse limite depende da constante arbitrária?



Soluções:

(a) Utilizando a substituição $x = v(t)$, temos que $dx = v'(t)dt$ e, portanto, que

$$\int \frac{v'(t)}{v(t)^2 - 1}\, dt = \int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx.$$

Pelo método das frações parciais, devemos escrever

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)},$$

determinando as constantes A e B. Igualando os numeradores, segue da igualdade dos polinômios

$$0x + 1 = 1 = A(x-1) + B(x+1) = (A+B)x + B - A$$

que $A + B = 0$ e que $B - A = 1$. Segue então que $A = -1/2$ e $B = 1/2$, de modo que

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx.$$

Integrando cada um dos termos dessa soma e utilizando a propriedades do logaritmo, segue que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\, dx &= -\frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + R \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + R,\end{aligned}$$

de modo que

$$\int \frac{v'(t)}{v(t)^2 - 1}\, dt = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{v(t)-1}{v(t)+1}\right|\right) + R.$$

(b) Integrando a equação $(*)$ e usando que $v(t)^2 - 1 = (v(t)+1)(v(t)-1) > 0$, obtemos que $v(t)-1$ e $v(t)+1$ possuem o mesmo sinal, de modo que

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v(t)-1}{v(t)+1}\right) + R = 10t + S.$$

Subtraindo R de ambos os membros da equação, multiplicando por 2 e aplicando a exponencial, segue que

$$\frac{v(t)-1}{v(t)+1} = e^{20t+C} = De^{20t},$$

onde $C = 2(S-R)$ e $D = e^C$ são constantes arbitrárias. Para isolarmos $v(t)$ na equação acima, primeiro passamos o denominador do lado esquerdo multiplicando o lado direito

$$v(t) - 1 = v(t)De^{20t} + De^{20t},$$

de modo que

$$v(t) - v(t)De^{20t} = 1 + De^{20t}$$

e que

$$v(t) = \frac{1+De^{20t}}{1-De^{20t}}.$$

(c) Aplicando a regra de L'Hospital, segue que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{20De^{20t}}{-20De^{20t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-1} = -1,$$

mostrando que esse limite não depende da constante D.