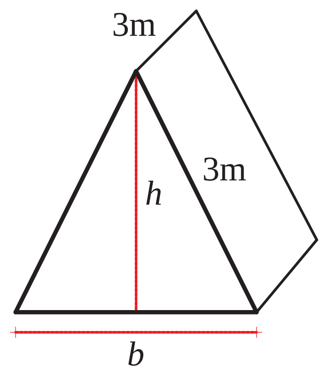
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

A Regra da Cadeia

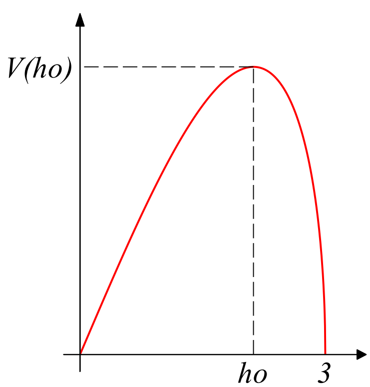
Suponha que, a partir de uma lona de plástico com 6 metros de comprimento e 3 de largura, desejamos construir uma barraca com vista frontal na forma de um triângulo isósceles. Se denotarmos por h a altura da barraca e por b o comprimento da sua base, a situação pode ser descrita pela figura ao lado.



Queremos escolher as dimensões de h e b de modo que o volume da barraca seja o maior possível.

Para tanto, vamos inicialmente observar que este volume, em metros cúbicos, é dado pela área do triângulo que fornece a vista frontal da barraca multiplicado por 3, isto é, o volume é exatamente $(3/2)bh$.

É importante notar que o valor de b depende de h. De fato, usando o Teorema de Pitágoras, vemos que $3^2 = h^2 + (b/2)^2$, ou ainda, $b = 2\sqrt{9-h^2}$. Assim, podemos construir uma função $V(h)$ que fornece, para cada valor de h, o volume da barraca. A expressão dessa função é como se segue:



$$V(h) = 3h\sqrt{9-h^2}, \quad h \in (0,3).$$

Analisando o gráfico da função V ao lado concluímos que o seu maior valor é atingido para algum $h_0 \in (0,3)$. Nas semanas seguintes vamos aprender como justificar melhor essa afirmação, bem como desenvolver uma técnica que nos permita traçar o gráfico da função. Por ora, vamos acreditar que o gráfico é de fato como acima e nos concentrar em encontrar o valor h_0 que maximiza a função V.

Ainda explorando o gráfico, vemos que a função V é crescente no intervalo $(0,h_0)$. Isto está intimamente relacionado com o sinal da derivada V' neste intervalo. De fato, note que a reta tangente em qualquer ponto do tipo $(h, V(h))$ com $h \in (0,h_0)$ tem inclinação positiva. Como esta inclinação é dada pelo número $V'(h)$, concluímos que a derivada é positiva no intervalo $(0,h_0)$. De maneira análoga temos que V' é negativa em $(h_0,3)$, intervalo onde a função V é decrescente.

As observações acima nos dão a pista importante de como encontrar o número h_0. De acordo com o gráfico, este ponto deve ser tal que $V'(h_0) = 0$, isto é, no ponto onde a função atinge o seu maior valor a reta tangente é horizontal.

A estratégia agora está bem clara: precisamos derivar a função V e buscar o ponto onde a sua derivada se anula. No cálculo da derivada vamos usar a regra do produto

$$V'(h) = (3h)'\sqrt{9-h^2} + 3h(\sqrt{9-h^2})' = 3\sqrt{9-h^2} + 3h(\sqrt{9-h^2})'. \tag{1}$$

Neste ponto uma dificuldade técnica se apresenta: como calcular a derivada $(\sqrt{9-h^2})'$? Nas semanas anteriores apredemos que $(9-h^2)' = -2h$ e que $(\sqrt{y})' = 1/(2\sqrt{y})$. Contudo, a função que temos que derivar não é nenhuma destas duas, mas sim a sua composição. Mais especificamente, se denotarmos

$$f(y) = \sqrt{y} \quad \text{e} \quad g(h) = 9 - h^2,$$

então

$$(f \circ g)(h) = f(g(h)) = f(9-h^2) = \sqrt{9-h^2}.$$

Para derivar a composição de funções acima vamos tomar $a \in (0,3)$, denotar $y = g(h)$ e calcular

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{h \to a} \frac{f(g(h)) - f(g(a))}{h-a} = \lim_{h \to a} \frac{f(g(h)) - f(g(a))}{g(h) - g(a)} \frac{g(h) - g(a)}{h-a} \\ &= \lim_{y \to g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} \lim_{h \to a} \frac{g(h) - g(a)}{h-a} = f'(g(a)) \cdot g'(a), \end{aligned}$$

em que usamos o fato de que $y = g(h) \to g(a)$ quando $h \to a$, visto que a função g é contínua no ponto $h = a$, por ser derivável neste ponto. Note ainda que, na conta acima, multiplicamos o numerador e o denominador por $g(h) - g(a)$. Isso é permitido porque, como g é descrescente, temos que $g(h) \neq g(a)$ para todo h próximo (e diferente) de a.

Uma vez que $f'(y) = 1/(2\sqrt{y})$ e $g'(h) = -2h$, segue da fórmula acima que

$$(\sqrt{9-h^2})' = (f \circ g)'(h) = f'(g(h))g'(h) = f'(9-h^2)(9-h^2)' = \frac{1}{2\sqrt{9-h^2}} \cdot (-2h).$$

Assim, podemos retomar a equação (1) para obter a derivada da função V:

$$V'(h) = (3h)'\sqrt{9-h^2} + 3h(\sqrt{9-h^2})' = 3\sqrt{9-h^2} + 3h\frac{-h}{\sqrt{9-h^2}}.$$

A equação $V'(h) = 0$ é então equivalente a

$$3\sqrt{9-h^2} = \frac{3h^2}{\sqrt{9-h^2}},$$

ou ainda,

$$9 - h^2 = h^2.$$

Desse modo, o único ponto do intervalo $(0,3)$ em que a derivada se anula é $h_0 = 3/\sqrt{2}$. De acordo com as considerações feitas anteriormente essa deve ser a escolha da altura da barraca para que tenhamos o maior volume possível.

A conta que fizemos acima para calcular a derivada de uma composta pode ser utilizada em várias outras situações. Ela é uma das mais importantes regras de derivação e pode ser enunciada como se segue

Teorema 1 (Regra da Cadeia)**.** *Se g é derivável no ponto $x = a$ e f é derivável no ponto $y = g(a)$, então a composição $(f \circ g)$ é derivável em $x = a$ e vale a seguinte fórmula*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Antes de fazer alguns exemplos vamos observar que, na fórmula acima, a derivada da função f é calculada no ponto $y = g(a)$. Em um certo sentido, a regra afirma que a derivada da composta é o produto das derivadas. É preciso somente tomar o cuidado de calcular as derivadas nos pontos corretos do domínio das funções f e g.

Exemplo 1. Vamos calcular a derivada da função

$$h(x) = (x^2 + 5 + \operatorname{sen}(x))^9.$$

Para identificar a composição envolvida nesta função, vamos calcular a função h em um ponto arbitrário, por exemplo em $x = 0$. Primeiro, temos que calcular $0^2 + 5 + \operatorname{sen}(0) = 5$. Em seguida, elevamos este valor à potência 9 para obter $h(0) = 5^9$. Note que foram necessários dois passos, o que indica que temos a composição de duas funções. Mais especificamente, se definirmos

$$g(x) = x^2 + 5 + \operatorname{sen}(x), \qquad f(y) = y^9,$$

temos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 5 + \operatorname{sen}(x)) = (x^2 + 5 + \operatorname{sen}(x))^9 = h(x).$$

Uma vez que $g'(x) = 2x + \cos(x)$ e $f'(y) = 9y^8$, segue da Regra da Cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 9g(x)^8 g'(x) = 9(x^2 + 5 + \operatorname{sen}(x))^8(2x + \cos(x)).$$

Destacamos que a derivada acima poderia ter sido calculada multiplicando-se a função $g(x)$ por ela mesmo nove vezes e, em seguida, calculando-se a derivada de cada um dos termos resultantes. Não é difícil perceber que seriam muitos termos, de modo que neste caso o mais simples é mesmo usar a Regra da Cadeia. □

Exemplo 2. Para identificar a composição na função $h(x) = \tan(\sqrt{x})$ vamos proceder como no exemplo acima, calculando a função em $x = 4$. O primeiro passo é $\sqrt{4} = 2$. O segundo é calcular a tangente deste valor para obter $h(4) = \tan(2)$. Deste modo, $h(x) = f(g(x))$, com $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(y) = \tan(y)$. Uma vez que $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ e $f'(y) = \sec^2(y)$, temos que

$$\frac{d}{dx}\tan(\sqrt{x}) = \sec^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}},$$

para todo $x > 0$. $\square$

Exemplo 3. Em alguns casos podemos ter a composição de mais de duas funções. Quando isto ocorre, a regra deve ser utilizada mais de uma vez. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}\cos(\sqrt{x^2+1}) = -\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+1})\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = -\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+1})\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Se $y = y(u)$ e $u = u(x)$, então a função y pode ser vista como uma função da variável x. Neste caso, a Regra da Cadeia pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

em que $\frac{dy}{du}$ é a derivada de função y vista como função de u, e $\frac{du}{dx}$ é a derivada de u com respeito a x. O exemplo seguinte ilustra esta maneira de olhar para a regra.

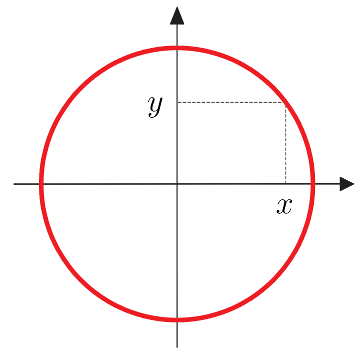
Exemplo 4. A função $y(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ pode ser vista como uma composição. De fato, se fizermos $u(x) = \cos(x)$ e $y(u) = u^{-1}$, então $y(x) = u(x)^{-1} = \cos(x)^{-1}$. Deste modo

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2}(-\operatorname{sen}(x)) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \sec(x)\tan(x),$$

em que usamos na penúltima igualdade o fato de que $u(x) = \cos(x)$. Evidentemente, a derivada acima poderia também ter sido calculada usando-se a regra do quociente para derivadas. $\square$

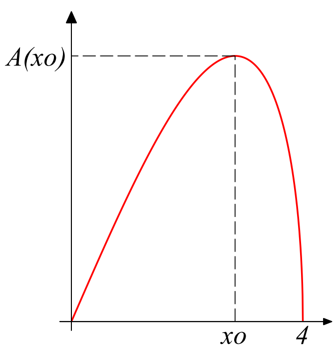
Tarefa

O objetivo desta tarefa é determinar qual é o retângulo de maior área que pode ser inscrito em uma circuferência de raio 4. Para nos ajudar na tarefa exibimos ao lado um desenho contendo esta circunferência e a quarta parte do retângulo em questão.



1. Utilizando o desenho acima e lembrando que a equação da circunferência é dada por $x^2 + y^2 = 16$, verifique que a altura y apontada na figura é dada por $y = \sqrt{16 - x^2}$.

2. Denotando por $A(x)$ a área do retângulo (inscrito) cuja base mede $2x$ e altura $2y$, use o item acima para concluir que esta área é dada por



$$A(x) = 4x\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in (0, 4).$$

Conforme veremos nas semanas seguintes, o gráfico da função $A(x)$ tem o aspecto descrito na figura ao lado. Deste modo, podemos argumentar como no caso da barraca para obter o ponto $x_0 \in (0, 4)$ em que A atinge seu maior valor.

3. Usando as regras do produto e da cadeia, determine a derivada $A'(x)$.

4. Determine o (único) ponto do intervalo $(0, 4)$ em que a derivada se anula.

5. Usando o item acima, calcule a área máxima que pode ser obtida.