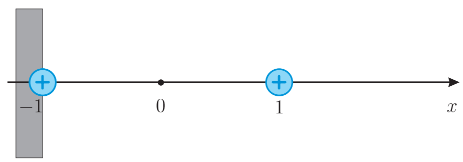
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Esboço de gráficos

Neste texto vamos retomar o problema de duas cargas elétricas com carga unitária e positiva, fixadas num eixo perpendicular a uma parede, como na figura abaixo.



O potencial elétrico gerado por essas duas partículas num ponto x ao longo desse eixo é dado, em unidades convenientes, pela seguinte função

$$P(x) = \frac{1}{|x+1|} + \frac{1}{|x-1|}, \qquad x > -1,\ x \neq 1.$$

Conforme vimos anteriormente, usando a definição da função módulo podemos reescrever o potencial como

$$P(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2-1}, & \text{se } -1 < x < 1, \\ \dfrac{2x}{x^2-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

No que se segue vamos fazer um estudo do sinal das derivadas de primeira e segunda ordem da função P. Vamos inicialmente observar que a derivada de P não está definida em $x = 1$ mas existe no conjunto $(-1,1) \cup (1,+\infty)$. Para determiná-la basta derivar cada expressão algébrica

$$\begin{aligned} (-2(x^2-1)^{-1})' &= 4x(x^2-1)^{-2} \\ (2x(x^2-1)^{-1})' &= 2(x^2-1)^{-1} - 4x^2(x^2-1)^{-2} \\ &= -2(x^2+1)(x^2-1)^{-2} \end{aligned}$$

de modo que

$$P'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}, & \text{se } -1 < x < 1, \\ \dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Os eventuais pontos críticos da função P são aqueles nos quais a derivada se anula. Note que, no intervalo $(-1,1)$, a derivada se anula somente no ponto $x=0$. No outro intervalo ela é sempre negativa. Portanto, o único ponto crítico da função P é o ponto $x=0$.

Para estudar o sinal de P' observamos que, além do ponto crítico, temos ainda que considerar os extremos dos subintervalos do domínio. Deste modo, temos três intervalos a serem considerados: $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(1,+\infty)$. Uma observação que facilita a análise do sinal da derivada é notar que o denominador das duas expressões é sempre positivo. Assim, o sinal vai ser determinado pelo numerador. Temos então a seguinte configuração:

	sinal de $4x$	$-2(x^2+1)$	$(x^2-1)^2$	P'	função P
$x \in (-1,0)$	$-$	indiferente	$+$	$-$	decrescente
$x \in (0,1)$	$+$	indiferente	$+$	$+$	crescente
$x \in (1,+\infty)$	indiferente	$-$	$+$	$-$	decrescente

Uma outra forma de indicar esse resultado é usar o diagrama abaixo:

P		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
P'	-1	$-$	0	$+$	1	$-$

Tanto o quadro quanto o diagrama nos permite concluir que o ponto crítico $x=0$ é um ponto de mínimo local. Observe que, ainda que antes do ponto $x=1$ a derivada seja positiva e depois negativa, não podemos afirmar que este ponto é um ponto de máximo local. De fato, esta análise não se aplica neste ponto porque ele nem pertence ao domínio da função.

Passemos agora a estudar a derivada segunda, lembrando que o seu sinal nos fornece informações sobre a concavidade do gráfico. A concavidade é voltada para cima onde P'' é positiva e para baixo onde P'' é negativa. O cálculo da derivada segunda pode ser feito como antes

$$\begin{aligned}
(4x(x^2-1)^{-2})' &= 4(x^2-1)^{-2} - 16x^2(x^2-1)^{-3} \\
&= -4(3x^2+1)(x^2-1)^{-3} \\
(-2(x^2+1)(x^2-1)^{-2})' &= -4x(x^2-1)^{-2} + 8(x^2+1)x(x^2-1)^{-3} \\
&= 4x(x^2+3)(x^2-1)^{-3}
\end{aligned}$$

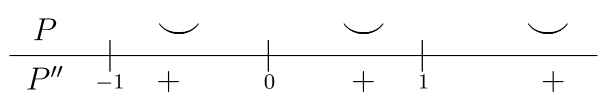
de modo que

$$P''(x) = \begin{cases} \dfrac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, & \text{se } -1 < x < 1, \\[2ex] \dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Note que a derivada segunda nunca se anula no intervalo $(-1, 1)$, porque o numerador $-4(3x^2 + 1)$ é sempre negativo. Também no intervalo $(1, +\infty)$ ela não se anula. De fato, o numerador $4x(x^2+3)$ se anularia somente se $x = 0$, mas este ponto não pertence ao intervalo $(1, +\infty)$. Assim, a derivada segunda tem sinal constante em cada um dos seus intervalos de definição. No primeiro intervalo este sinal é o mesmo de, por exemplo, $P''(0) = -4/(-1) = 4 > 0$ e no segundo o mesmo de $P''(2) = 8 \cdot 12/3^3 > 0$, e portanto o gráfico é sempre côncavo para cima. Esta conclusão poderia também ser obtida a partir do quadro abaixo:

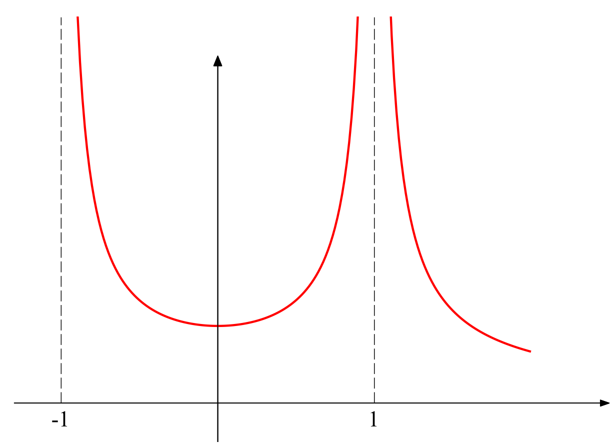
	sinal de $-4(3x^2+1)$	$4x(x^2+3)$	$(x^2-1)^3$	P''	função P
$x \in (-1, 0)$	$-$	indiferente	$-$	$+$	concavidade p/ cima
$x \in (0, 1)$	$-$	indiferente	$-$	$+$	concavidade p/ cima
$x \in (1, +\infty)$	indiferente	$+$	$+$	$+$	concavidade p/ cima

Mais uma vez, esse resultado pode ser indicado com o diagrama



O próximo passo para o esboço do gráfico é estudar o comportamento da função P nas vizinhanças de $x = -1$, $x = 1$ e quando $x \to +\infty$. Isto já foi feito na tarefa de um texto anterior, e os resultados encontrados foram os seguintes:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^+} P(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{-2}{x^2-1} = +\infty \\
\lim_{x\to 1^-} P(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{x^2-1} = +\infty \\
\lim_{x\to 1^+} P(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty \\
\lim_{x\to +\infty} P(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0
\end{aligned}$$

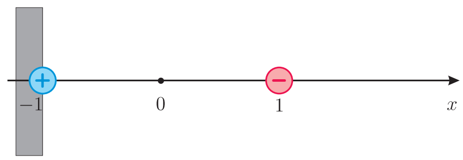


Deste modo, as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais e a reta $P = 0$ é uma assíntota horizontal.

Utilizando essas informações podemos esboçar o gráfico de P como ilustrado acima.

Tarefa

Considere duas cargas elétricas, a primeira com carga unitária positiva e a segunda com carga unitária negativa, fixadas num eixo perpendicular a uma parede, como na figura abaixo.



O potencial elétrico gerado por essas duas partículas num ponto x ao longo desse eixo é dado, em unidades convenientes, pela seguinte função

$$P(x) = \frac{1}{|x+1|} - \frac{1}{|x-1|}, \qquad x > -1.$$

O objetivo desta tarefa e fazer um esboço da gráfico da função acima.

1. Lembrando que $|y| = y$ se $y \geq 0$ e $|y| = -y$ se $y < 0$, verifique a função P pode ser reescrita na forma
$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-1}, & -1 < x < 1, \\ \dfrac{-2}{x^2-1}, & x > 1. \end{cases}$$

2. Calcule a derivada de $P(x)$ e determine seus (possíveis) extremos locais e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

3. Calcule a derivada segunda $P''(x)$ e determine intervalos de concavidade para cima e para baixo.

4. Determine as assíntotas verticais e horizontais de $P(x)$

5. Utilizando as informações acima esboce o gráfico de $P(x)$.