Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 01 – Soluções

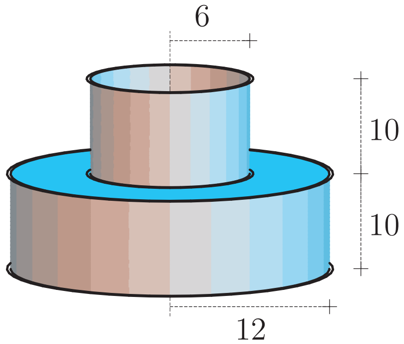
Temas abordados: Funções

Seções do livro: 1.1 a 1.3; 1.5; 1.6

1) A figura abaixo ilustra um recipiente formado por dois cilindros circulares retos justapostos de altura 10m e raios respectivamente 12m e 6m. Suponha que, a partir do instante $t = 0$, o recipiente comece a ser abastecido a uma vazão constante de modo que o nível da água $s(t)$ no recipiente é dada por

$$s(t) = \begin{cases} 2t, & \text{para } \ 0 \leq \text{t} \leq 5 \\ 8t - 30, & \text{para } \ 5 < \text{t} \leq 6 \end{cases}$$

onde a altura é dada em metros e o tempo é dado em segundos.



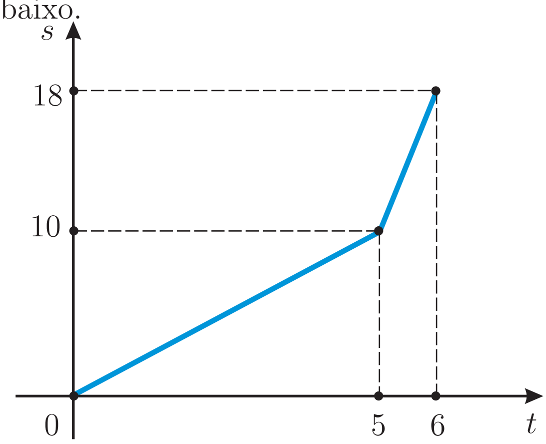
(a) Esboce o gráfico da função $s(t)$.

(b) Determine, caso existam, os instantes $\tau \in [0, 6]$ nos quais $s(\tau) = 15$.

(c) Determine a imagem da função s.

Soluções:

(a) Para $0 \leq t \leq 5$, o gráfico é um segmento de reta de inclinação 2 que passa pela origem; para $5 < t \leq 6$, o gráfico é um segmento de reta de inclinação 8 que se conecta ao segmento de reta de inclinação 2. Usando essas informações, o gráfico é como ilustrado abaixo.



(b) Do gráfico de $s(t)$ vemos que $s(t)$ é crescente, com $s(0) = 0$, $s(5) = 10$ e $s(6) = 18$. Um vez que 15 está entre 10 e 18, um instante τ em que $s(\tau) = 15$ deve estar, portanto, no intervalo $(5, 6)$, no qual temos que $s(t) = 8t - 30$. Resolvendo para τ a equação

$$8\tau - 30 = 15,$$

obtemos que $\tau = 45/8$ é o único instante para o qual $s(\tau) = 15$.

(c) A análise do gráfico mostra que a imagem da função s é o intervalo fechado $[0, 18]$.

2) Considere a função $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Pode-se mostrar que a inclinação da reta L_a, que é tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P_a = (a, f(a))$, é dada por $\dfrac{-1}{2a\sqrt{a}}$. A figura abaixo ilustra o gráfico da função, a reta L_a e os pontos Q_a e R_a em que a reta intercepta os eixos coordenados. Julgue a veracidade dos itens a seguir, justificando suas respostas.

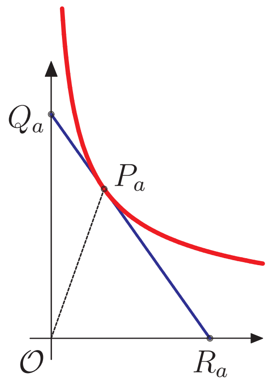
(a) A reta L_a tem equação $y = \dfrac{-x}{2a\sqrt{a}} + \dfrac{3}{2\sqrt{a}}$.

(b) Tem-se que $R_a = (2a, 0)$.

(c) A área do triângulo $\Delta \mathcal{O} P_a R_a$ é igual a $\dfrac{1}{2} 2af(a)$.

(d) A área do triângulo $\Delta \mathcal{O}\, P_a\, Q_a$ é igual a $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2\sqrt{a}}a$.

(e) Para todo $a > 0$, a área do triângulo $\Delta \mathcal{O} P_a Q_a$ é o dobro da área do triângulo $\Delta \mathcal{O}\, P_a\, R_a$.



<ins>**Soluções**</ins>: Lembre que a equação da reta r que tem inclinação m e passa pelo ponto (x_0, y_0) é dada por $r(x) = y_m + m(x - x_0)$.

(a) Correto. A reta L_a tem inclinação $-1/(2a\sqrt{a})$ e passa pelo ponto $(a, f(a)$. Desse modo, se denotarmos por $L_a(x)$ a sua equação, temos que

$$L_a(x) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x - a) + f(a) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x - a) + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

(b) Errado. Veja que $R_a = (x_a, 0)$. Uma vez que esse ponto pertence à reta L_a temos que

$$0 = L_a(x_a) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x_a - a) + \frac{1}{\sqrt{a}},$$

de modo que $-x_a + a = -2a$, ou ainda, $x_a = 3a$. Assim $R_a = (3a, 0)$.

(c) Errado. A base do triângulo $\Delta \mathcal{O} P_a R_a$ mede $3a$ e sua altura mede $f(a)$. Como a área de um triângulo é igual à metade do produto entre a base e a altura, a área em questão é igual a $\frac{1}{2} 3af(a) = \frac{3}{2\sqrt{a}}a$.

(d) Correto. Observe que $Q_a = (0, y)$ e pertence à reta L_a. Assim,

$$y = L_a(0) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(0 - a) + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{3\sqrt{a}}.$$

Como o triângulo $\Delta \mathcal{O}\, P_a\, Q_a$ tem base medindo y e altura medindo $x = a$, concluímos que sua área é dada por $\frac{1}{2}\frac{3}{2\sqrt{a}}a$

(e) Errado. Pelos itens (c) e (d), a área de $\Delta \mathcal{O}\, P_a\, Q_a$ vale a metade da área de $\Delta \mathcal{O} P_a R_a$.

3) Uma amostra radioativa emite partículas alfa e, consequentemente, sua massa $M = M(t)$ é uma função decrescente do tempo. Suponha que, para um determinado material radioativo, essa função seja dada por $M(t) = M_0 e^{-k_1 t}$, onde $M_0 > 0$ é a massa inicial, $k_1 > 0$ é uma constante e $t > 0$ é o tempo medido em anos. A *meia-vida* do material é o tempo necessário para que a massa se reduza à metade da massa inicial.

(a) Calcule k_1 sabendo que, depois de um ano e meio, a massa restante é $1/8$ da inicial.

(b) Usando o item anterior, determine a meia-vida do material.

(c) Calcule quantos anos devemos esperar para que 99% da amostra tenha se desintegrado (use as aproximações $\ln 2 = 0,7$ e $\ln 5 = 1,6$).

(d) Suponha que outra amostra radioativa tenha massa $N(t) = M_0 e^{-k_2 t}$, com $k_2 > 0$. Estabeleça uma relação entre k_1 e k_2 sabendo que a meia-vida desse segundo material é igual ao triplo da meia-vida do primeiro.

<u>**Soluções**</u>:

(a) Note que

$$\frac{M_0}{8} = M(3/2) = M_0 e^{-k_1 \frac{3}{2}}.$$

Cancelando o termo M_0 e aplicando o logaritmo dos dois lados obtemos

$$-\frac{3}{2}k_1 = \ln(1/8) = -\ln 8 = -\ln 2^3 = -3\ln 2.$$

(b) Basta notar que, se t_0 é a meia-vida do material, então $M(t_0) = M_0 e^{-2ln2\ t_0} = M_0/2$. Dessa forma, mais uma vez cancelando o termo M_0 e aplicando o logaritmo dois lados obtemos

$$t_0 = \frac{\ln\ 2}{k_1}. \tag{1}$$

(c) Procuramos o instante t_1 para o qual $M(t_1) = 0,01M_0$. Utilizando o fato de que

$$\ln 100 = \ln(4 \cdot 25) = 2(\ln 2 + \ln 5)$$

e procedendo como em (b) encontramos t_1.

(d) Considere agora o material cuja massa é $N(t)$. Procedendo de forma análoga ao item (b), concluímos que a sua meia vida é dada por

$$\overline{t}_0 = \frac{\ln\ 2}{k_2}. \tag{2}$$

Como $\overline{t}_0 = 3t_0$, combinando-se (1) e (2) obtemos que $k_2 = k_1/3$.

4) Uma espira circular está imersa em uma região de campo magnético uniforme e constante. O fluxo magnético pela espira é dado por $\phi(\alpha) = AB\cos(\alpha)$, onde A é a área da espira, B é a intensidade do campo e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é o ângulo entre o vetor normal ao plano da espira e as linhas de campo. Supondo inicialmente que, em unidades físicas apropriadas, $AB = 4$, resolva os itens a seguir.

(a) Calcule o menor e o maior valor que o fluxo ϕ pode assumir.

(b) Determine um ângulo $\alpha_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $\phi(\alpha_0) = 2$.

(c) Se a espira tivesse o dobro do diâmetro e estivesse imersa no mesmo campo, qual seria o valor do produto AB ?

(d) Para uma espira com o dobro do diâmetro, use o valor encontrado no item (c) para determinar um ângulo $\alpha_1 \in [0, \pi]$ tal que o fluxo magnético seja igual a 4.

Soluções:

(a) Como para todo ângulo α temos $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1, \forall\alpha$, segue que $-4 \leq \phi(\alpha) \leq 4$. Além disso, $\phi(0) = \phi(2\pi) = AB = 4$ e $\phi(\pi) = -AB = -4$. Desse modo

$$\max_{\alpha\in[0,2\pi]} \phi(\alpha) = 4 \text{ e } \min_{\alpha\in[0,2\pi]} \phi(\alpha) = -4.$$

(b) Procuramos por $\alpha_0 \in [0, \pi]$ tal que $4\cos(\alpha_0) = 2$ ou, equivalentemente, $\cos(\alpha_0) = 1/2$. Basta então escolher $\alpha_0 = \pi/3$ ou $\alpha = 5\pi/3$.

(c) Sejam A_0 e A, respectivamente, as áreas da espira inicial e da espira com o diâmetro dobrado. Note que se $A_0 = \pi r^2$, onde $r > 0$ é o raio da espira inicial, então:

$$A = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 = 4A_0.$$

Logo,

$$AB = 4A_0B = 16.$$

(d) Aqui, basta resolver a equação $16\cos(\alpha) = 4$. Observe que a função

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

é invertível. Sua inversa, chamada de *arco-cosseno*, é dada por

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

onde

$$\text{arc cos } y = x \Leftrightarrow \cos x = y.$$

Desse modo, para que $16\cos(\alpha) = 4$, devemos ter $\alpha = \arccos(1/4)$.

5) O objetivo desse exercício é usar as propriedades da função exponencial e^x para investigar as propriedades das funções *cosseno e seno hiperbólicos* dadas por

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

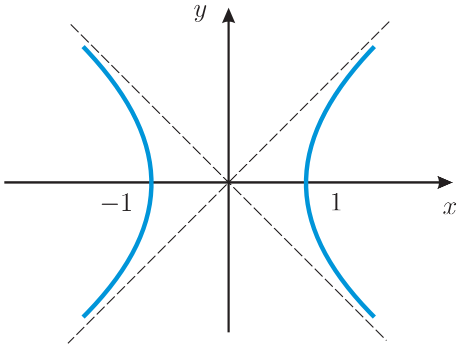
Lembrando que $e^{x+y} = e^x e^y$, onde e é a base Neperiana, resolva os itens abaixo.

(a) Mostre que

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1.$$

Fazendo $x = \cosh(t)$ e $y = \operatorname{senh}(t)$, isso mostra que o ponto (x, y) está sobre a hipérbole unitária dada por

$$x^2 - y^2 = 1.$$



(b) Verifique a fórmula do cosseno hiperbólico da soma

$$\cosh(s+t) = \cosh(s)\cosh(t) + \operatorname{senh}(s)\operatorname{senh}(t).$$

(c) Verifique a fórmula do seno hiperbólico da soma

$$\operatorname{senh}(s+t) = \operatorname{senh}(s)\cosh(t) + \operatorname{senh}(t)\cosh(s).$$

(d) Verifique que $\cosh(t)$ é uma função par enquanto $\operatorname{senh}(t)$ é uma função ímpar.

(e) Prove que não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{senh}(t) = \cosh(t)$.

Compare as propriedades dos itens acima com as suas análogas para as funções trigonométricas.

Soluções:

(a) Uma vez que $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, segue que

$$\cosh^2(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{(e^t)^2 + 2 + (e^{-t})^2}{4} = \frac{(e^t)^2 + (e^{-t})^2}{4} + \frac{1}{2}$$

e

$$\operatorname{senh}^2(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{(e^t)^2 - 2 + (e^{-t})^2}{4} = \frac{(e^t)^2 + (e^{-t})^2}{4} - \frac{1}{2}.$$

Isso que mostra que

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1.$$

(b) Usando que $e^{x+y} = e^x e^y$, temos que

$$\cosh(s)\cosh(t) = \left(\frac{e^s + e^{-s}}{2}\right)\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{s+t} + e^{s-t} + e^{-s+t} + e^{-s-t}}{4}$$

e que

$$\operatorname{senh}(s)\operatorname{senh}(t) = \left(\frac{e^s - e^{-s}}{2}\right)\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{s+t} - e^{s-t} - e^{-s+t} + e^{-s-t}}{4}.$$

Isso mostra que

$$\cosh(s)\cosh(t) + \operatorname{senh}(s)\operatorname{senh}(t) = \frac{2e^{s+t} + 2e^{-s-t}}{4} = \frac{e^{s+t} + e^{-(s+t)}}{2} = \cosh(s+t).$$

(c) Usando que $e^{x+y} = e^x e^y$, temos que

$$\text{senh}(s)\cosh(t) = \left(\frac{e^s - e^{-s}}{2}\right)\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{s+t} + e^{s-t} - e^{-s+t} - e^{-s-t}}{4}$$

logo, trocando s por t, temos que

$$\text{senh}(t)\cosh(s) = \frac{e^{t+s} + e^{t-s} - e^{-t+s} - e^{-t-s}}{4} = \frac{e^{s+t} + e^{-s+t} - e^{s-t} - e^{-s-t}}{4}.$$

Isso mostra que

$$\text{senh}(s)\cosh(t) + \text{senh}(t)\cosh(s) = \frac{2e^{s+t} - 2e^{-s-t}}{4} = \frac{e^{s+t} - e^{-(s+t)}}{2} = \text{senh}(s+t).$$

(d) Temos que

$$\cosh(-t) = \frac{e^{-t} + e^{-(-t)}}{2} = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t)$$

e

$$\text{senh}(-t) = \frac{e^{-t} - e^{-(-t)}}{2} = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2} = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} = -\text{senh}(t).$$

(e) Suponha que, para algum $t \in \mathbb{R}$, tenhamos $\text{senh}(t) = \cosh(t)$. Então

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

o que implica que

$$e^{-t} = 0.$$

Mas a igualdade acima nunca se verifica, visto que a imagem da função exponencial é o intervalo $(0, +\infty)$.