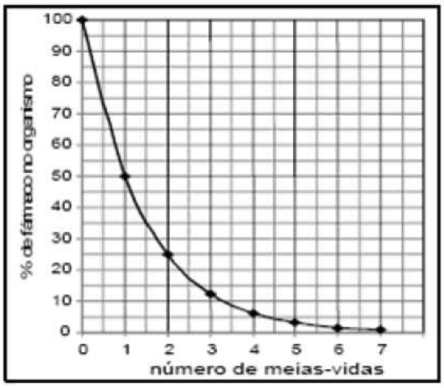
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

A derivada de uma função

A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual à metade da quantidade no início desse intervalo. O gráfico ao lado representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.



F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. Farmalologia Clínica. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de cerca de 1 hora. Assim, a taxa de variação da quantidade desse antibiótico no organismo pelo tempo transcorrido será diferente em cada período analisado. Se 100 mg for a quantidade inicial ingerida pelo indivíduo, na primeira hora, essa taxa de variação será igual a $(100-50)/(1-0)=50$ mg/h. Na segunda hora, a taxa será igual a $(50-25)/(2-1)=25$ mg/h. Na terceira hora, será de $12,5$ mg/h.

Vamos ilustrar com mais um exemplo o cálculo da meia-vida. Uma fonte de ouro radioativo (198Au), com uma quantidade inicial de 100×10^6 átomos, cuja meia- vida é de $2,7$ dias, terá, ao final de um período de 2,7 dias, 50×10^6 átomos. Após um período de $5,4$ dias, a fonte terá 25×10^6 átomos e, assim por diante. Podemos montar a seguinte tabela com esses valores:

Tempo (dias)	$t=0$	$2,7$	$5,5$	$8,1$	$10,8$	$13,5$	$16,2$
Átomos (quantidade)	100×10^6	50×10^6	25×10^6	125×10^5	625×10^4	3125×10^3	15625×10^2

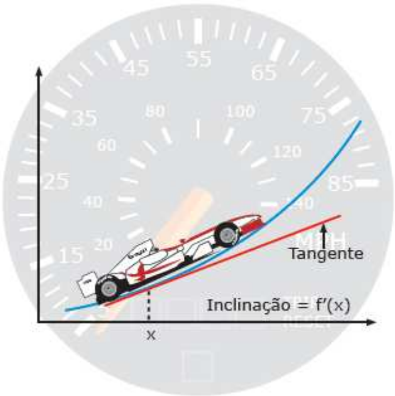
A **taxa de variação** da quantidade de átomos pelo tempo transcorrido será diferente em cada período analisado. No primeiro período, essa taxa será igual a

$$\frac{100\times 10^6-50\times 10^6}{2,7-0}=\frac{50\times 10^6}{2,7}=18,518...\times 10^6\text{átomos/dia}.$$

No segundo período, a taxa será igual a

$$\frac{50\times 10^6-25\times 10^6}{5,4-2,7}=\frac{25\times 10^6}{2,7}=9,259...\times 10^6\text{átomos/dia}.$$

Outro exemplo muito interessante a respeito de taxas de variação é o caso da **velocidade**. É possível sabermos a velocidade em que estamos viajando em um carro, avião ou outro meio de transporte mecânico, se utilizarmos o aparelho chamado velocímetro.



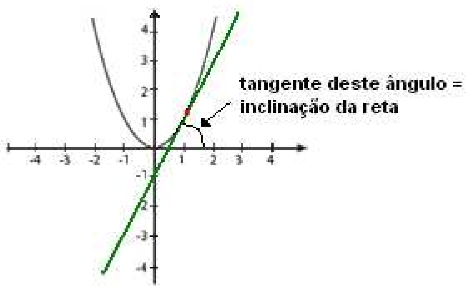
Esse aparelho indica, grosso modo, a velocidade naquele instante em que estamos observando-o. Mas, se a velocidade é definida como o espaço percorrido em um determinado período (de tempo), como é possível a determinação de uma velocidade “naquele instante”, isto é, sem que haja variação de tempo? Como é possível a leitura de uma velocidade “instantânea”, se o próprio conceito de velocidade envolve uma variação do tempo? Essa taxa de variação “instantânea” é o que chamamos de **derivada**.

No caso da velocidade, ela é a taxa de variação instantânea do espaço em função do tempo. Ela pode ser definida matematicamente se utilizarmos o **conceito de limite**.

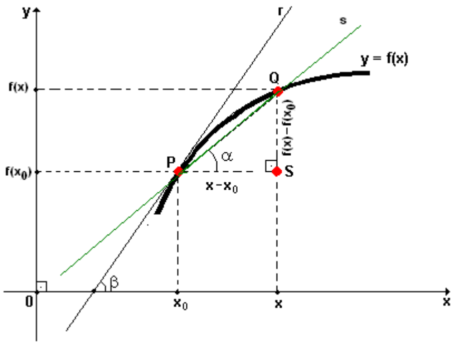
Suponha, por exemplo, que um trem viaja entre duas cidades que distam 200 km. Se quisermos saber a velocidade do trem ao passar embaixo de um viaduto situado em algum trecho de seu percurso, é claro que a resposta obtida será muito pouco expressiva se dividirmos a distância total de 200 km pelo tempo total necessário para percorrê-la. A aproximação será melhor se medirmos o tempo que o trem leva entre as estações situadas imediatamente antes e depois do viaduto. Tudo leva a crer que podemos obter respostas cada vez mais precisas se formos anotando o tempo gasto pelo trem para percorrer distâncias cada vez menores, que englobem o viaduto. Assim, a velocidade instantânea é o limite para o qual tende essa seqüência de velocidades médias obtidas entre dois pontos à medida que o intervalo entre eles diminui.

Reta tangente

Geometricamente, a derivada de uma função em um ponto é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, como está representado na parábola da figura ao lado. Mas como encontrar a tangente a uma curva em um ponto? O melhor, como veremos a seguir, é tomar retas secantes à curva em dois pontos e aproximar esses pontos até que eles se identifiquem. (Como mencionamos no exemplo do trem.)



As retas secantes vão se aproximar de uma reta que “toca” a curva em um único ponto. Esta será, então, a reta tangente á parábola nesse ponto.



Essa situação pode ser melhor compreendida na figura ao lado, em que s é a reta secante ao gráfico da função $y = f(x)$ pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x, f(x))$ e r é a reta tangente pelo ponto P. A inclinação da reta secante s é igual à tangente do ângulo α, que, por sua vez, no triângulo retângulo PQS é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente, ou seja,

$$tg(\alpha) = \frac{QS}{PS} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Logo, a inclinação da reta tangente r será obtida fazendo-se o ponto Q se aproximar do ponto P, ou, equivalentemente, fazendo-se o ponto $(x, f(x))$ se aproximar do ponto $(x_0, f(x_0))$. Isso ocorre quando x se aproxima de x_0. Quanto menor for a diferença entre x e x_0, mais a reta secante que une $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$ se aproxima da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Com essa motivação, podemos introduzir, formalmente, o conceito de derivada.

Definição: A derivada de uma função real $y = f(x)$ em um ponto x_0, cujo símbolo pode ser $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$, é definida como sendo o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

quando este limite existe.

Para calcular esse valor, precisamos das retas secantes e fazer o "limite" quando essas secantes se aproximam da tangente. Veja como a razão $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ representa a taxa de variação da função f em relação à variação de x. Quando x se aproxima de x_0, o que temos é uma medida da variação "instantânea" de f em x_0.

É comum chamarmos a diferença $x - x_0$ de h, ou seja, na expressão correspondente à derivada, fazemos $x - x_0 = h$, obtendo

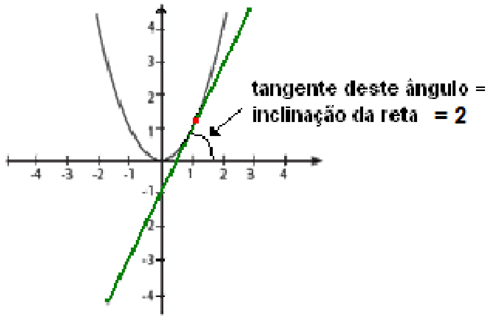
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

O resultado final será sempre o mesmo, já que, à medida que x se aproxima de x_0 , o valor de h se aproxima de 0.

Vamos usar esse conceito para calcular a taxa de variação de $f(x) = x^2$, no ponto $x_0 = 1$. Usando a expressão acima, obtemos:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

Note que fatoramos o polinômio do numerador, o que possibilitou fazermos o cancelamento com o termo do denominador, antes de procedermos ao processo do limite. Esse cálculo mostra que a derivada de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 1$ é igual a 2, o que pode simplesmente ser representado pela igualdade: $f'(1) = 2$. Geometricamente, isso significa que a inclinação da reta tangente à parábola, gráfico de $f(x) = x^2$, no ponto de abscissa $x_0 = 1$, é igual a 2.



Tarefa

Agora você deverá assistir ao vídeo Interpretação da Derivada (clique no link ou digite o seguinte endereço no seu navegador: http://www.youtube.com/watch?v=9waONy64Kk8) e observar, na tela que vai ser apresentada, o movimento da reta tangente à curva. Observe o que acontece com os valores da função e da derivada à medida que a reta se movimenta.

Em seguida, resolva os itens abaixo.

1. Observando o canto superior esquerdo da tela, anote os intervalos da varivál x nos quais a função é crescente;
2. Determine o maior valor assumido pela derivada em cada um dos intervalos obtidos acima;
3. Anote agora os intervalos da variável x nos quais a função é decrescente;
4. Determine o menor valor assumido pela derivada em cada um dos intervalos do item anterior
5. Determine agora o valor da derivada nos pontos x em que a função passa de crescente para decrescente, ou vice-versa.