Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

A derivada de uma função

Suponha que a função f está definida em todo um intervalo aberto contendo o ponto $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que f é *derivável no ponto* $x = a$ se existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Não é difícil ver que, quando existem, os dois limites acima são iguais. De fato, basta fazer $x = a + h$ no primeiro limite e observar que $h \to 0$, quando $x \to a$. O número $f'(a)$ é chamado *derivada da função* f *no ponto* $x = a$.

A *função derivada de* f, que denotamos por f', é a função que associa para cada $a \in \text{dom}(f)$, a derivada de f no ponto $x = a$. O seu domínio é o conjunto de todos os pontos onde a função f possui derivada. Quando este conjunto coincide com o domínio de f dizemos que f é uma *função derivável*.

O conceito de derivada é extremamente importante e tem muitas aplicações. No que se segue, faremos algumas interpretações do número $f'(a)$.

Interpretação dinâmica da derivada

Suponha que a função f mede a posição de um carro. Neste caso, temos o seguinte significado para o quociente que aparece na definição de derivada

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{velocidade média entre os instantes } a \text{ e } a + h$$

Conforme discutido anteriormente, quando h se aproxima de zero o quociente acima se aproxima da velocidade no instante a, isto é,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{velocidade no instante } a$$

Logo, **se a função f mede a posição de um carro, a derivada $f'(a)$ fornece a velocidade no instante** a.

O mesmo raciocínio mostra que, se f mede a velocidade instantânea, então o quociente fornece a aceleração média e portanto a derivada vai medir a aceleração instantânea.

Tanto a velocidade quanto a aceleração podem ser vistas como sendo taxas de variação. A velocidade é a taxa de variação da posição com relação ao tempo, e a aceleração é a taxa de variação da velocidade. De uma maneira geral, **a derivada $f'(a)$ é a taxa de variação**

instantânea da função f no ponto $x = a$. O conceito de taxa pode ser usado em outros contextos, que não envolvam física. Por exemplo, um engenheiro pode estar interessado na taxa segundo a qual a largura de uma viga muda com a temperatura.

Exemplo 1. Se a posição de uma carro é dada por $s(t) = t^3$, então sua velocidade é dada por

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^3 - t^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3t^2 + 3th + h^2)}{h} = 3t^2,$$

para cada $t > 0$. $\square$

Exemplo 2. Suponha que a relação entre o volume e pressão de um gás dentro de um pistão seja dada por $V(p) = 200/p$. A taxa de variação do volume em relação à pressão é dada por

$$V'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{V(p+h) - V(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{200}{p+h} - \frac{200}{p}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-200 \cdot h}{h(p+h)p} = -\frac{200}{p^2},$$

para cada $p > 0$. Se quisermos calcular a taxa de variação no instante em que a pressão é igual 10, basta calcularmos

$$V'(10) = -\frac{200}{10^2} = -2.$$

Note que, para qualquer $p > 0$, a derivada $V'(p)$ é negativa, por causa do sinal de menos. O fato da taxa de variação ser negativa significa que, quando a pressão aumenta, o volume diminui. Em outras palavras, a função volume é decrescente. Se você pensar em um pistão de ar comprimido vai facilmente entender o que está acontecendo. $\square$

Interpretação geométrica da derivada

A interpretação geométrica da derivada foi feita em um texto anterior. Dada a sua importância, vamos lembrá-la aqui. Fixado o ponto $P_a = (a, f(a))$ sobre o gráfico de f, vamos considerar, para cada $x \in \text{dom}(f)$ com $x \neq a$, outro ponto sobre o gráfico com coordenadas $P_x = (x, f(x))$. A reta secante pelos pontos P_a e P_x é a (única) reta que passa por estes dois pontos. Sua inclinação é dada por

$$m_{P_a P_x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quando $x \to a$, o ponto P_x vai se aproximando do ponto P_a. Se as retas secantes se aproximarem de uma reta quando isto ocorre, é natural que a inclinação desta reta seja o limite da inclinação das secantes, isto é, a inclinação desta reta limite deve ser

$$m_{tg} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Observe que o limite acima, quando existe, é igual à derivada de f no ponto $x = a$. Definimos neste caso *reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(a, f(a))$ como sendo a reta cuja equação é dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Note que ela passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a $f'(a)$. Assim, a derivada $f'(a)$ é exatamente a **inclinação da reta tangente no ponto** $(a, f(a))$.

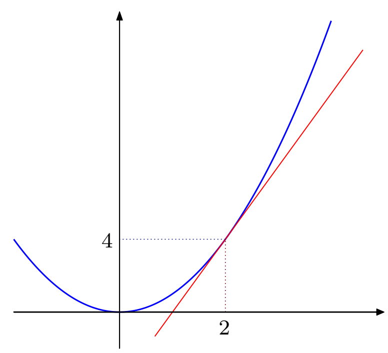
É importante destacar que, na expressão acima, o valor a está fixado. A variável é portanto x, de modo que a função $y = y(x)$ é de fato uma reta, pois ela pode ser colocada na forma $y(x) = mx + b$, com $m = f'(a)$ e $b = (f(a) - f'(a)a)$.

Exemplo 3. Vamos calcular a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em um ponto genérico $(a, f(a))$, com $a \in \mathbb{R}$. O primeiro passo é determinar a inclinação da reta tangente, ou seja, a derivada de f em $x = a$:

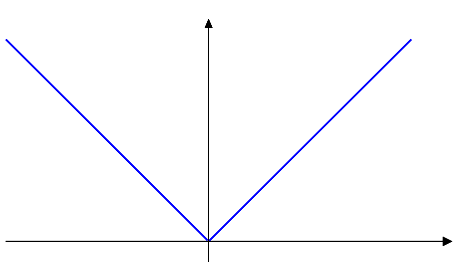
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x\to a}(x + a) = 2a.$$

Lembre que a reta tangente deve passar pelo ponto $(a, f(a)) = (a, a^2)$. Assim, sua equação é $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, isto é, $y(x) = 2a \cdot (x - a) + a^2$, ou ainda

$$y(x) = 2ax - a^2.$$



A expressão acima fornece, de fato, uma família de retas indexadas pelo parâmetro a. Isto significa que, para cada $a \in \mathbb{R}$ fixado, temos uma reta diferente. Se escolhermos $a = 2$, por exemplo, a equação da reta fica $y(x) = 4x - 4$. No desenho ao lado você pode ver o gráfico de $f(x)$, juntamente com sua reta tangente no ponto $(2, 4)$. $\square$



Exemplo 4. Pode ocorrer de uma função não ter derivada em um ponto (e consequentemente não existir a reta tangente). O exemplo clássico é dado pela função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está ilustrado ao lado.

Para cada $x \neq 0$, existem duas alternativas para a reta secante pelos ponto $P_0 = (0, 0)$ e $P_x = (x, f(x))$. Se $x > 0$ esta reta coincide com a reta $y = x$, e se $x < 0$ reta secante coincide com a reta $y = -x$. Isso já parece mostrar que, quando $x \to 0$, as retas secantes não podem se aproximar de uma (única) reta. Portanto, não deve existir reta tangente no ponto $(0, 0)$.

Para confirmar a intuição geométrica precisamos mostrar que não existe a derivada $f'(0)$. Uma vez que a função tem expressões diferentes dependo do lado em que estamos de $x = 0$, precisamos usar limites laterais no cálculo dos limites abaixo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Na penúltima igualdade acima usamos que $|x| = -x$, quando $x < 0$.

Como os limites laterais são diferentes, concluímos que o limite $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ não existe. Portanto *a função módulo não é derivável em $x = 0$*, o que implica que não existe reta tangente no ponto $(0, 0)$.

Vale observar que, em qualquer ponto $a \neq 0$, a função módulo tem derivada (e portanto reta tangente). De fato, um cálculo análogo ao executado acima mostra que a derivada de $|x|$ é igual a -1 no conjunto $(-\infty, 0)$ e igual a 1 no conjunto $(0, +\infty)$. $\square$

O resultado abaixo relaciona a existência de derivada com o conceito de continuidade.

Teorema 1. *Se f é derivável em $x = a$, então f é contínua em $x = a$.*

Prova. Note que

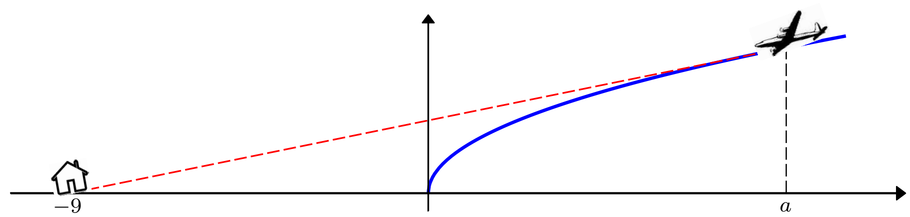
$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Na penúltima desigualdade acima estamos usando que f é derivável em $x = a$ e portanto o limite do primeiro termo existe e é igual a $f'(a)$. Segue da expressão acima que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e portanto f é contínua em $x = a$. $\square$

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. Isso significa dizer que **o fato de uma função ser contínua em um ponto não implica que ela seja derivável neste ponto**. A função módulo exemplifica esta observação. Ela é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$. Porém, ela não possui derivada neste ponto, conforme vimos acima. Graficamente, o que ocorre é que temos um "bico"no ponto $(0, 0)$. De uma maneira geral, sempre que tivermos um bico em um ponto do gráfico, não teremos reta tangente neste ponto.

Tarefa

Suponha que um avião de caça faça um vôo rasante e sua trajetória ocorra ao longo do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$. Os disparos do avião são dados sempre na direção da reta tangente. Vamos determinar qual deve ser o ponto $(a, f(a))$ de disparo de modo a atingir um alvo situado no ponto $(-9, 0)$. Naturalmente $a > 0$ e depois do disparo ser efetuado o avião vai mudar sua trajetória, retornando para sua base em segurança.



1. Calcule o limite
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a};$$

2. Mostre que a equação $y_a(x)$ da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ é dada por
$$y_a(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{\sqrt{a}}{2};$$

3. Denotando por $(b, 0)$ o alvo atingido pelo disparo, determine o valor de b em função a;

4. Determine o valor de a para que o disparo atinja um alvo situado no ponto $(-9, 0)$.