Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 1

Neste texto vamos provar um importante resultado que nos permite calcular integrais definidas. Ele pode ser enunciado como se segue.

Teorema 1 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 1)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$ e $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in(a,b)$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Uma função F como acima é chamada de **primitiva de f em** $[a,b]$. O teorema diz que, para calcular a integral de uma função, é suficiente conhecermos uma primitiva desta função. Isto estabelece uma interessante relação entre o processo de integração e o de derivação. O primeiro, que foi motivado aqui pelo cálculo de áreas, já era essencialmente conhecido pelos matemáticos gregos da antiguidade. Naquele tempo, calculavam áreas e volumes usando um processo de aproximação que ficou conhecido como *Método da Exaustão*. Por outro lado, as ideias básicas do processo de derivação já apareciam no século XIV, no contexto de dinâmica. Apesar do teorema ser muito útil para efetuar o cálculo das integrais, a sua importância histórica está no fato de que ele conecta duas habilidades que à primeira vista são distintas. O teorema conta ainda com uma segunda parte, que será vista em um texto seguinte.

Antes de provar o Teorema 1 precisamos lembrar a definição da integral $\int_a^b f(x)dx$. Dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de mesmo tamanho $\Delta x = (b-a)/n$, considerando os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

com $x_k = a + k\Delta x$, para cada $k = 1,\ldots,n$. Escolhemos, em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, um ponto x_k^* arbitrário e definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

É importante lembrar que, qualquer que seja a escolha dos pontos x_k^*, o limite acima sempre existe e tem o mesmo valor.

Demonstração do Teorema 1. Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\
&= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_0)] \\
&= \vdots \\
&= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \cdots + [F(x_1) - F(x_0)].
\end{aligned}$$

De fato, para checar a igualdade acima basta eliminar todos os colchetes e perceber que a maior parte dos termos se cancelam, restando no final somente o primeiro e o último, isto é, $F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$. Para cada $k = 1, \ldots, n$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para obter $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = f(x_k^*)\Delta x,$$

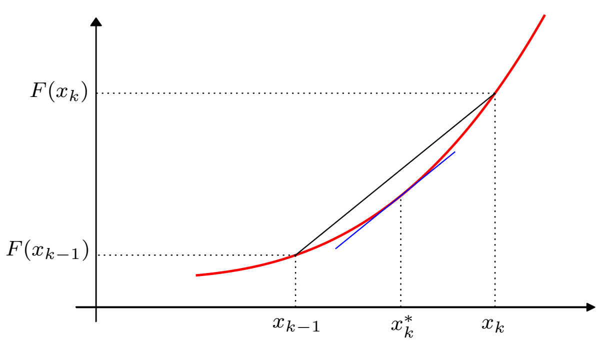


Figura 2: Gráfico de F

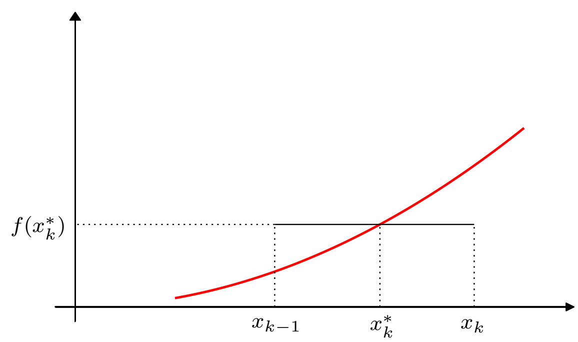


Figura 3: Gráfico de $F' = f$

uma vez que $F'(x) = f(x)$. Substituindo a igualdade acima em (1), obtemos

$$F(b) - F(a) = f(x_n^*)\Delta x + f(x_{n-1}^*)\Delta x \cdots + f(x_1^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$ e lembrando a definição de integral, concluímos finalmente que

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$

que é o que queríamos provar. □

Na sequência fazemos algumas aplicações deste importante teorema.

Exemplo 1. Em um texto anterior, vimos que a área da região S delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = (4x - x^2)$ e $g(x) = x^2$ é dada pela integral

$$\int_0^2 [(4x - x^2) - (x^2)]dx = \int_0^2 [4x - 2x^2]dx.$$

Naquela altura, o cálculo foi bem complicado, e necessitou de algumas fórmulas de somatórios. Vamos agora usar o Teorema para calcular esta área.

Observe que a função $H(x) = (2x^2 - (2/3)x^3)$ é contínua e satisfaz $H'(x) = (4x - 2x^2)$. Deste modo,

$$\int_0^2 [4x - 2x^2]dx = H(2) - H(0) = 2 \cdot 2^2 - \frac{2}{3}2^3 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Alguma dúvida de que foi mais simples agora?! $\square$

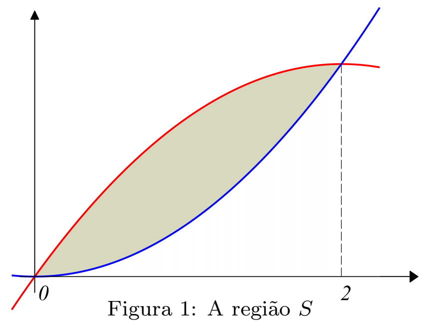


Figura 1: A região S

Exemplo 2. Considere $f(x) = \cos(x)$ e a integral definida

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx.$$

Uma vez que a função $F(x) = \text{sen}(x)$ é contínua e satifaz $F'(x) = (\text{sen}(x))' = \cos(x)$, vemos que ela é uma primitiva para $f(x)$ em $[0, \pi/2]$. Logo,

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(0) = 1.$$

Como $f \geq 0$ em $[0, \pi/2]$, o número acima representa a área da região compreendida abaixo do gráfico de $\cos(x)$, no intervalo $[0, \pi/2]$, e o eixo $\mathcal{O}x$. $\square$

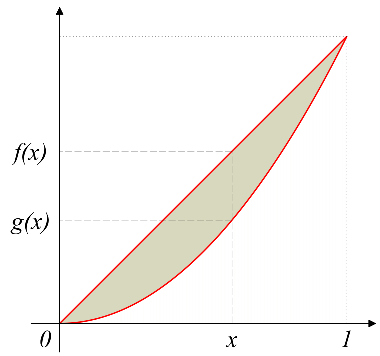
Se F é uma função qualquer e os pontos a e b estão no seu domínio, é usual denotar a diferença $F(b) - F(a)$ por

$$F(x)\Big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Assim, se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, o Teorema Fundamental do Cálculo se escreve como

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b}.$$

Exemplo 3. Vamos retomar outro exemplo do texto anterior. Lá, queríamos calcular a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, definidas em $[0, 1]$.



Como $f(x) \geq g(x)$ em $[0, 1]$, a área é dada pela integral

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (x - x^2)dx.$$

Uma conta simples nos permite encontrar uma primitiva para a função que está sendo integrada acima. De fato,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = x - x^2,$$

de modo que

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{6},$$

o que confirma o resultado obtido no texto anterior. $\square$

Exemplo 4. Uma vez que $(\arctan(x))' = 1/(1 + x^2)$, temos que

$$\int_0^4 \frac{4}{1 + x^2}dx = (4 \arctan(x))\Big|_{x=0}^{1} = 4 \arctan(1) - 4 \arctan(0) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 4 \cdot 0 = \pi.$$

O fator multiplicativo 4 não dificultou em nada a conta. De fato, a integral goza de uma série de propriedades que facilitam a vida, conforme você verá na sua tarefa. $\square$

Nesta altura, você poderia se perguntar se toda função possui primitiva. Confome veremos no próximo texto, a resposta é afirmativa se considerarmos funções contínuas. Mais especificamente, se f é contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a, b],$$

é contínua e cumpre $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$. Em outas palavas, a função acima é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Tarefa

Nesta tarefa você vai provar as propriedades básicas da integral definida. Ainda que todas elas possam ser provadas usando a definição de integral, faremos isto aqui usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Supondo que f e g são funções contínuas, prove as seguintes afirmações.

1. $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$, se $c \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)dx$, se $c \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$
6. se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
7. se $f(x) \geq g(x)$ em $[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
8. se $m \leq f(x) \leq M$ em $[a,b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$