Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Integração por frações parciais - Parte 2

Vamos continuar o estudo de primitivas para funções racionais, tomando como exemplo a função $f(x) = \dfrac{x+4}{(x-1)(x^2+1)}$. Note que não é possível fatorar mais o denominador, de modo que uma tentativa inspirada pelo texto anterior seria escrever

$$\frac{x+4}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{1+x^2}.$$

Porém, esta decomposição nos leva ao sistema

$$A = 0, \qquad B = 1, \qquad A - B = 4,$$

que não tem solução!

Precisamos então fazer uma tentativa diferente. Como o termo irredutível em (x^2+1) tem grau 2, poderíamos colocar no seu numerador um polinômio de grau 1. Assim, vamos buscar uma decomposição na forma

$$\frac{x+4}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Após efetuar as contas, somos levados ao sistema

$$A + B = 0, \qquad -B + C = 1, \qquad A - C = 4,$$

e portanto $A = 5/2$, $B = -5/2$ e $C = -3/2$. Deste modo,

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{5}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Usando a mudança de variáveis $u = 1 + x^2$ na segunda integral do lado direito, concluímos que

$$\int \frac{1}{(x-1)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln(1+x^2) - \frac{3}{2}\arctan(x) + K.$$

O exemplo acima pode ser generalizado e enunciado como uma regra. Ao aplicar o método de frações parciais, se o denominador (em sua forma fatorada) contém um termo do tipo $(x^2+px+q)^m$, como $n \in \mathbb{N}$ e (x^2+px+q) sendo um polinômio irredutível (sem raiz real), então a decomposição em frações parciais deve conter uma soma do tipo

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Exemplo 1. Para a função $f(x) = \dfrac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}$, temos a seguinte decomposição

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Após tediosos cálculos, somos levados ao sistema

$$C + A = 0, \qquad -2C + D - A + B = 0, \qquad C - 2D + A = -2, \qquad D - A + B = 4,$$

cuja (única) solução é $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$ e $D = 1$. Portanto,

$$\int \frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + 2\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

de onde segue que

$$\int \frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \arctan(x) + K,$$

que é o resultado final. □

Exemplo 2. A decomposição em frações parciais da função $f(x) = \dfrac{x^2+x-4}{(x+2)(x^2-4x+6)}$ é da forma

$$\frac{x^2+x-4}{(x+2)(x^2-4x+6)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+6},$$

uma vez que o polinômio (x^2-4x+6) é irredutível. Fazendo as contas, pode-se facilmente encontrar o valor das constantes. Feito isso, vamos precisar resolver integrais do tipo

$$\int \frac{1}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x.$$

Vamos estudar a primeira integral acima. Lembrando que $\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \arctan(x) + K$, vamos manipular o denominador da seguinte maneira:

$$\frac{1}{x^2-4x+6} = \frac{1}{(x-2)^2+2} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}(x-2)^2+1\right)} = \frac{1/2}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.$$

Assim, fazendo $u = \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)$, obtemos

$$\int \frac{1}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u,$$

e portanto

$$\int \frac{1}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

Para a segunda integral procedemos da seguinte maneira:

$$\int \frac{x}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4+4}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2-4x+6}\mathrm{d}x.$$

A última integral foi resolvida acima, enquanto a penúltima pode ser facilmente resolvida com a mudança de variáveis $u = x^2 - 4x + 6$. $\square$

Finalizamos observando que, se $q(x)$ é um polinômio de irredutível, então ele deve ter grau 1 ou 2. De fato, todo polinômio de grau maior ou igual a 3 pode ser fatorado. Deste modo, podemos resumir o método de frações parciais como segue abaixo.

1. O método se aplica a um um quociente de polinômios do tipo $p(x)/q(x)$, com o *grau de q sendo menor do que o grau de p.*

2. A forma da decomposição depende da fatoração do denominador em termos de polinômios irredutíveis (de grau 1 ou 2), eventualmente elevados a uma potência natural.

3. Na fatoração de $q(x)$, termos do tipo $(x-a)^m$, com $m \in \mathbb{N}$, nos levam a uma soma do tipo
$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}, \qquad A_k \in \mathbb{R}.$$

4. Na fatoração de $q(x)$, termos do tipo $(x^2+bx+c)^n$, como $n \in \mathbb{N}$ e (x^2+bx+c) irredutível, nos levam a uma soma do tipo
$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}, \qquad B_k,\, C_k \in \mathbb{R}.$$

5. Se decomposição for feita desta maneira, seremos levados a um sistema de equações nas incógnitas A_k, B_k e C_k. Este sistema sempre tem solução única e, uma vez encontradas as constantes, basta integrar cada termo para encontrar a primitiva.

Tarefa

Utilize o método de frações parciais para encontrar uma primitiva da função

$$f(x) = \frac{3x^2+7x+6}{x^3+2x^2+2x}.$$