Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 13

Temas abordados: Integral Indefinida; Regra da Substituição
Seções do livro: 5.5

1) No momento em que um carro está a $72km/h$ o motorista aciona os freios, desacelerando a uma taxa de $2.5m/s$. Lembrando que $3.6km/h$ corresponde a $1m/s$, e denotando por $t = 0$ o instante em que o motorista começa freiar, resolva os itens abaixo.

(a) Determine a velocidade $v(t)$ para $t \geq 0$. Calcule T_p, o tempo de parada do carro após o início da frenagem.

(b) Encontre $s(t)$, a função posição do veículo a partir do instante de frenagem. Mostre que $s'(t) > 0$, $0 \leq t < T_p$.

(c) Supondo que o tempo de reação do motorista seja de 1 segundo e usando o item (b), encontre a distância total percorrida pelo veículo até parar.

(d) Repita os itens (a),(b) e (c), supondo que o velocímetro marcasse $144km/h$.

2) Inicialmente, $3g$ de sódio são dissolvidos em um recipiente com $6l$ de água. Uma solução sódica passa a ser bombeada para dentro do recipiente a uma taxa de $0,5l$ por minuto, sendo que depois de ser bem misturada é drenada na mesma taxa. Considerando-se $Q(t)$ a quantidade de sal após t minutos segue que

$$Q'(t) = T_e - T_s,$$

onde T_e e T_s denotam, respectivamente, as taxas de entrada e saída de sal.

(a) Supondo que a concentração que entra seja de $2g/l$, mostre que $T_e - T_s = 1 - \dfrac{Q(t)}{12}$ para concluir que

$$Q'(t) = 1 - \frac{Q(t)}{12}. \qquad (1)$$

(b) Multiplicando a equação (1) por $e^{t/12}$, mostre que

$$\left(e^{t/12}Q(t)\right)' = e^{t/12}. \qquad (2)$$

(c) Faça substituição $t = 12z$ para encontrar uma primitiva de $e^{t/12}$. Conclua da equação acima que

$$Q(t) = Ce^{-t/12} + 12.$$

(d) Use que $Q(0) = 3$ para encontrar C na expressão acima. Qual seria a quantidade de sal no recipiente após os primeiros 12 minutos?

(e) Encontre a quantidade de sal no recipiente após um longo tempo.

3) Suponha que a temperatura $T(t)$ de um corpo imerso em um meio com temperatura constante e igual a 20 seja tal que $T(0) = 80$ graus Celsius. Segundo a *Lei do Resfriamento de Newton*, a taxa de variação $T'(t)$ é proporcional à diferença entre as temperaturas $T(t)$ e 20. Supondo que a constante de proporcionalidade seja igual a -2, segue que

$$T'(t) = -2(T(t) - 20), \qquad t > 0.$$

(a) A partir dos dados apresentados, determine a temperatura $T(t)$.

(b) Determine o instante t_0 em que $T(t_0) = 40$.

(c) O que acontece com a temperatura $T(t)$ após muito tempo?

4) Uma partícula de massa $m > 0$ se move retilineamente sob a ação de uma força F que é proporcional à velocidade $v(t)$ da partícula e atua em sentido contrário ao deslocamento. Desse modo $F = -k\, v(t)$, com $k > 0$ constante. Supondo que $v(0) = v_0 > 0$ resolva os itens a seguir.

(a) De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos que $F = m\, v'(t)$, em que $v'(t)$ é a aceleração da partícula. Usando essa informação e a expressão para F dada no enunciado, obtenha a equação que relaciona m, k, $v(t)$ e $v'(t)$.

(b) Lembrando que a derivada de $\ln(v(t))$ é igual a $v'(t)/v(t)$, use o item anterior para obter $v(t)$ em termos de v_0, k e m.

(c) Determine o espaço $s(t)$ percorrido pela partícula até o instante t, supondo $s(0) = 0$.

(d) Calcule a distância total d percorrida pela partícula, dada por $d = \lim\limits_{t\to\infty} s(t)$.

Gabarito

1. (a) $v(t) = -2.5t + 20$ e $T_p = 8$ segundos.
   (b) $s(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 20t$
   (c) 100 metros
   (d) $v(t) = -2.5 + 40$, $T_p = 16$ segundos, $s(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 40t$ e a distância de frenagem será de $360m$.
2. (a)
   (b)
   (c)
   (d) $C = -9, Q(12) = -9/e + 12$.
   (e) $12g$.
3. (a) $T(t) = 20 + 60e^{-2t}$
   (b) $t_0 = \dfrac{\ln 3}{2}$
   (c) se aproxima de 20 graus
4. (a) $mv'(t) = -kv(t)$
   (b) $v(t) = v_0 e^{-kt/m}$
   (c) $s(t) = \dfrac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$
   (d) $\dfrac{mv_0}{k}$