Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 04

Temas abordados: Limites envolvendo o infinito; Assíntotas

Seções do livro: 2.4

1) Duas partículas carregadas com cargas de módulos q_1 e q_2 interagem com uma força eletrostática. Segundo a Lei de Coulomb, o módulo dessa força, em Newtons, é modelado pela função $F : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ dada por $F(x) = \dfrac{Kq_1q_2}{x^2}$, onde $K > 0$ é uma constante que depende do meio e x é a distância, em metros, entre as partículas. Suponha que, em unidades físicas apropriadas, $Kq_1q_2 = 10$ e resolva os itens a seguir.

(a) Encontre $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que se $0 < x < \delta$, então a força entre as partículas tem módulo maior que 10^7N (dez milhões de Newtons).

(b) Encontre $M > 0$ suficientemente grande tal que se $x > M$, então a força entre as partículas tem módulo menor que 10^{-6}N (um milhonésimo de Newton).

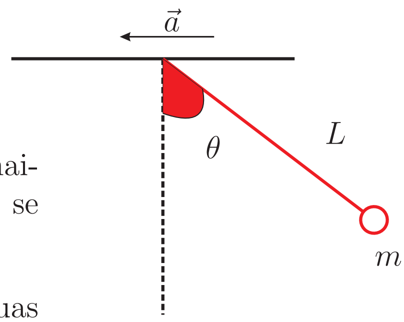
(c) Determine $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ e $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

(d) Faça um esboço do gráfico de F .

2) A figura abaixo ilustra um corpo de massa $m > 0$ pendurado no teto de um trem bala por um fio inextensível de comprimento $L > 0$. Quando o trem possui aceleração a o pêndulo se encontra inclinado, fazendo um ângulo θ com a vertical. Pode-se provar que, se g é a aceleração da gravidade local, então $a(\theta) = g\,\mathrm{tg}(\theta)$. Como $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, temos que $\theta(a) = \mathrm{arctg}(a/g)$, onde a função $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ é a função inversa da tangente. Supondo que $g = 10$ m/s^2, resolva os itens seguintes.

(a) Sabendo que $\mathrm{tg}(\theta) = \mathrm{sen}\,(\theta)/\cos(\theta)$, encontre

$$\lim_{\theta\to -\pi/2^+} a(\theta) \text{ e } \lim_{\theta\to \pi/2^-} a(\theta).$$



(b) Se a aceleração do trem tomar valores cada vez maiores, o ângulo $\theta(a)$ se aproxima de que valor? E se $a \to -\infty$, então $\theta(a)$ tende para algum número?

(c) Faça um esboço dos gráficos de $a(\theta)$ e $\theta(a)$, com suas assíntotas.

3) Considerando a função $q(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2-x}$, definida para $x \neq 2$, resolva os itens abaixo.

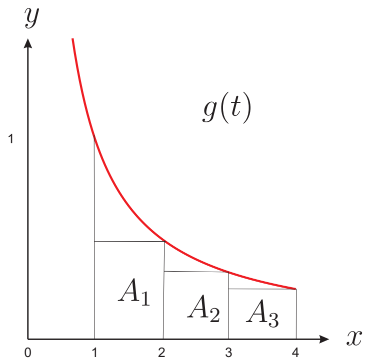
(a) Calcule os limites no infinito da função q e, em seguida, determine a(s) assíntota(s) horizontal(is) do gráfico da função q, se esta(s) existir(em).

(b) Calcule os limites laterais de q no ponto $x = 2$ e, em seguida, determine a(s) assíntota(s) vertical(is) do gráfico da função q, se esta(s) existir(em).

(c) Faça um esboço do gráfico de q.

4) Para cada $a > 1$, o número positivo $\ln a$ pode ser caracterizado como a área da região limitada pelo eixo Ox, pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$ e pelo gráfico da função $g(t) = 1/t$. Por exemplo, o número $\ln 4$ é a área da região compreendida entre o gráfico da função g e as retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = 4$. Na figura foram destacados ainda três retângulos de base unitária cujas alturas são $g(2)$, $g(3)$ e $g(4)$.

(a) Determine as áreas A_1, A_2 e A_3 dos retângulos indicados, e faça sua soma.



(b) Usando o resultado anterior, justifique a desigualdade $\ln 4 > 1$.

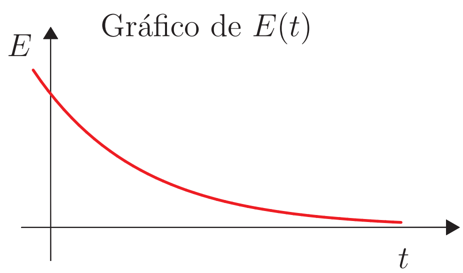
(c) Dada uma constante $M > 0$ arbitrariamente grande, mostre que se $x > 4^M$, então $\ln x > M$. Conclua daí que $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

(d) Sabendo que para todo $x > 0$ tem-se $e^x > \ln x$, investigue a existência de $\lim_{x\to\infty} e^x$.

(e) Lembre que $e^{-x} = 1/e^x$ e calcule $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$. Esboce o gráfico das funções e^x, e^{-x} e $\ln x$.

5) Suponha que, em um ambiente com capacidade de sustentar um número limitado de indivíduos, a população após t anos, $P(t)$, seja modelada pela função $P(t) = \dfrac{1100}{1 + 9\,E(t)}$, em que $E(t) = 3^{-t}$ é uma função exponencial, o tempo $t \geq 0$ é medido em anos e $t = 0$ corresponde à população inicial $P(0)$. O gráfico da função $E(t)$, ilustrado na figura abaixo, pode ser útil no estudo do comportamento de $P(t)$. A partir dessas informações, julgue a veracidade dos itens a seguir, justificando suas respostas.

(a) A população inicial é superior a 100 indivíduos.



(b) A função $f(t) = 1 + 9\,E(t)$ é tal que $f(t_1) < f(t_2)$ sempre que $t_1 < t_2$.

(c) $P(t)$ é uma função decrescente da variável t.

(d) Após três anos, a população será superior a 800.

(e) Existem valores de $t > 0$ para os quais a população apresenta um número superior a 1100 indivíduos.

Gabarito

1. (a) $\delta \leq 10^{-3}$
   (b) $M \geq 10^{7/2}$
   (c) $+\infty$ e 0, respectivamente
2. (a) $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente
   (b) $\lim_{a\to+\infty} \theta(a) = \pi/2$ e $\lim_{a\to-\infty} \theta(a) = -\pi/2$
3. (a) $\lim_{t\to-\infty} q(t) = 1$ e $\lim_{t\to+\infty} q(t) = -1$. As retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais
   (b) $\lim_{t\to 2^-} q(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to 2^+} q(t) = -\infty$. A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical
4. (a) $A_1 = 1/2$, $A_2 = 1/3$, $A_3 = 1/4$
   (b)
   (c)
   (d) $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$
   (e) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$
5. (a) Correto.
   (b) Errado.
   (c) Errado.
   (d) Correto.
   (e) Errado.