Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

O Teorema Fundamental do Cálculo

Neste texto vamos provar um importante resultado que nos permite calcular integrais definidas. Ele pode ser enunciado como se segue.

Teorema 1 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Se f é contínua em $[a, b]$ e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Uma função F como acima é chamada de primitiva de f. O teorema diz que, para calcular a integral de uma função, é suficiente conhecermos uma primitiva desta função. Isto estabelece uma interessante relação entre o processo de integração e o de derivação. O primeiro, que foi motivado aqui pelo cálculo de áreas, já era essencialmente conhecido pelos matemáticos gregos da antiguidade. Naquele tempo eles calculavam áreas e volumes usando um processo de aproximação que ficou conhecido como *Método da Exaustão*. Por outro lado, as ideias básicas do processo de derivação já apareciam no século XIV no contexto de dinâmica. Apesar do teorema ser muito útil para efetuar o cálculo das integrais, a sua importância histórica está no fato de que ele conecta duas habilidades que à primeira vista são distintas.

A primeira demonstração de uma versão do teorema foi apresentada por James Gregory (1638-1675). Isaac Barrow (1630-1677) provou uma versão um pouco mais geral para que, depois, o seu brilhante aluno Isaac Newton (1643-1727) completasse o desenvolvimento da teoria matemática por trás do teorema. Não menos destaque merece o nome de Gottfried Leibniz (1646-1716) que foi quem sistematizou o conhecimento em uma teoria de quantidades infinitesimais e introduziu a notação usada hoje. [1] A enorme quantidade de aplicações desta teoria nos permite afirmar, sem exageros, que estamos diante de uma das maiores descobertas científicas da era moderna.

[1]fonte: Wikipedia

Antes de provar o teorema vamos mostrar como ele pode ser útil no cálculo de integrais. Vamos lembrar que a área da região S delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = (4x - x^2)$ e $g(x) = x^2$ é dada pela integral

$$\int_0^2 [(4x - x^2) - (x^2)]dx = \int_0^2 [4x - 2x^2]dx.$$

Em uma tarefa anterior, usando a definição de integral, verificamos que esta área é igual a 8/3. Na solução da tarefa foi necessário apelarmos para algumas fórmulas de somatórios de modo a calcular o limite envolvido na definição de integral. Vamos usar agora o Teorema Fundamental da Cálculo para calcular novamente esta integral. Observe inicialmente que a função $H(x) = (2x^2 - (2/3)x^3)$ é tal que $H'(x) = 4x - 2x^2$. Deste modo, temos que

$$\int_0^2 [4x - 2x^2]dx = H(2) - H(0) = 2 \cdot 2^2 - \frac{2}{3}2^3 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Não há dúvidas de que a solução acima é bem mais simples!

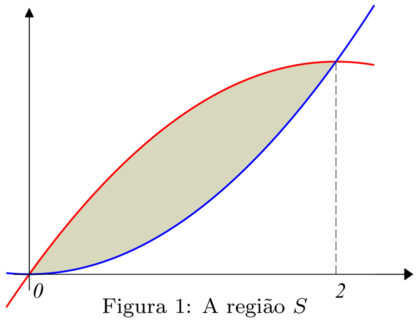

Figura 1: A região S

Antes de provar o Teorema 1 precisamos lembrar a definição da integral $\int_a^b f(x)dx$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo tamanho $\Delta x = (b - a)/n$ considerando os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

em que $x_k = a + k\Delta x$, para cada $k = 1, \ldots, n$. Escolhemos, em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, um ponto x_k^* arbitrário e definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

É importante lembrar que, qualquer que seja a escolha dos pontos x_k^*, o limite acima sempre existe e tem o mesmo valor.

Estamos prontos para apresentar a

Demonstração. [do Teorema 1] Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_0)] \\ &= \vdots \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \cdots + [F(x_1) - F(x_0)]. \end{aligned}$$

De fato, para checar a igualdade acima basta eliminar todos os colchetes e perceber que a maior parte dos termos se cancelam, restando no final somente o primeiro e o último, isto é, $F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$. Para cada $k = 1, \ldots, n$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para obter $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = f(x_k^*)\Delta x,$$

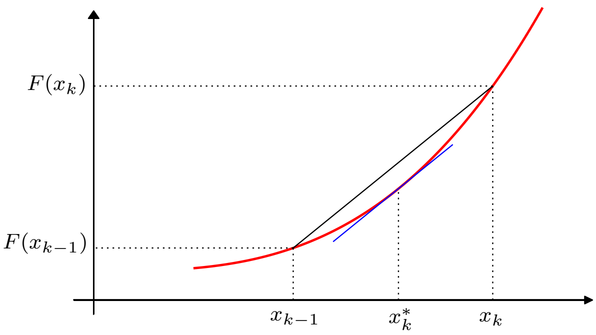

Figura 2: Gráfico de F

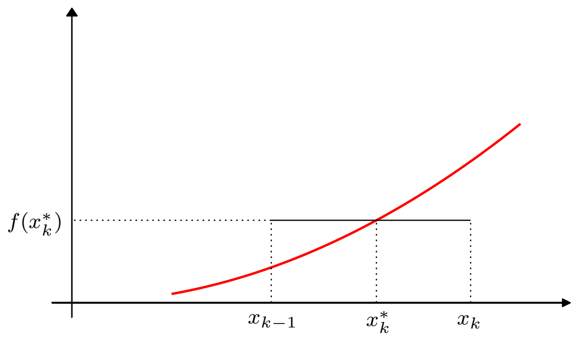

Figura 3: Gráfico de $F' = f$

em que usamos o fato de que $F'(x) = f(x)$. Substituindo a igualdade acima em (1) obtemos

$$F(b) - F(a) = f(x_n^*)\Delta x + f(x_{n-1}^*)\Delta x \cdots + f(x_1^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$ e lembrando a definição de integral obtemos

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$

que é o que queríamos provar. $\square$

Você poderia se perguntar se toda função possui primitiva. A resposta é afirmativa para funções contínuas. Este fato pode ser provado sem muita dificuldade, mas não faremos isso aqui. Ao invés disso, vamos utilizá-lo para obter um interessante resultado:

Corolário 1. *Se f é contínua em $[a, b]$, então a função G definida por*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a, b],$$

é derivável em (a, b) com $G'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração. A prova é uma aplicação simples do Teorema Fundamental do Cálculo. De fato, seja F uma primitiva da função f. Então

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Como o lado direito da expressão acima é derivável concluímos que G também o é. Derivando os dois lados com respeito a x obtemos

$$G'(x) = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x),$$

o que conclui a prova. $\square$

O resultado acima estabelece uma interessante conexão entre derivação e integração. Ele mostra que, em um certo sentido, uma operação é o inverso da outra.

Finalizamos o texto observando que existe uma outra demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo em que as coisas são feitas na ordem inversa. Primeiro mostra-se o resultado acima, concluindo-se assim que toda função contínua possui primitiva. Em seguida, usando este fato, prova-se o Teorema 1. Deixamos para o leitor interessado a tarefa de buscar esta prova alternativa nos textos clássicos.

Tarefa

Nesta tarefa você vai provar as propriedades básicas da integral definida. Ainda que todas elas possam ser provadas usando a definição de integral, excetuando-se o item 6, você pode usar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Supondo que f e g são funções contínuas, prove as seguintes afirmações.

1. $\int_a^b c dx = c(b-a)$, se $c \in \mathbb{R}$;
2. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, se $c \in \mathbb{R}$;
3. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
6. se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
7. se $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)$;
8. se $m \leq f(x) \leq M$ em $[a, b]$, então
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Para a solução da tarefa vamos supor que F é G são primitivas das funções f e g, respectivamente. Isto significa que $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$. Vamos lembrar ainda que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad \int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a).$$