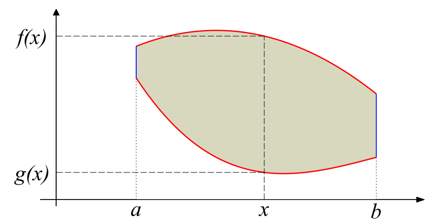
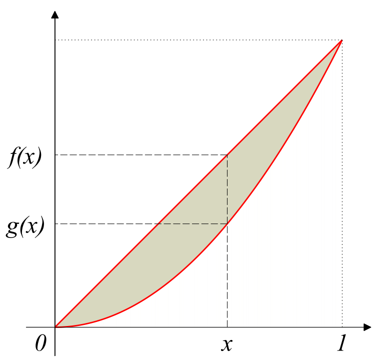
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Área entre curvas e a Integral definida



Seja S a região do plano delimitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Vamos desenvolver aqui uma técnica que permite calcular a área de S.



Para simplificar a exposição vamos considerar $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, definidas no intervalo $[0, 1]$. O leitor não terá dificuldades em verificar que, para todo $x \in [0, 1]$, vale $x \geq x^2$. Neste caso, a região S é denominada triângulo parabólico e está indica na figura ao lado.

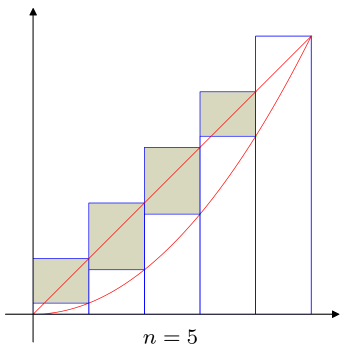
A ideia para calcular a área consiste em fazer aproximações e, depois, tomar o limite nas aproximações. Os passos seguintes mostram como faremos as nossas aproximações.

1. Dividimos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = \frac{1}{n}$ considerando os pontos
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1,$$
em que $x_k = k/n$, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

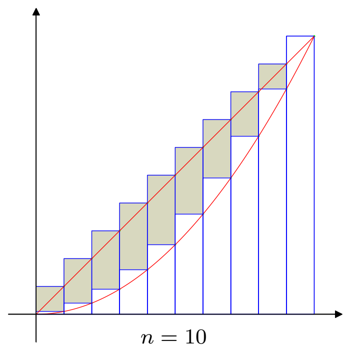
2. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ consideramos o retângulo cuja base é o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ e a altura é dada
$$l_k = f(x_k) - g(x_k).$$
Como a base desse retângulo tem comprimento $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} = \Delta x$, a sua área é exatamente $[f(x_k) - g(x_k)]\Delta x$.

3. Podemos agora aproximar a área S usando a soma das áreas de cada um desses retângulos. A aproximação tem a seguinte expressão:
$$\begin{aligned} A_n &= [f(x_1) - g(x_1)]\Delta x + [f(x_2) - g(x_2)]\Delta x + \cdots + [f(x_n) - g(x_n)]\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]\Delta x. \end{aligned}$$

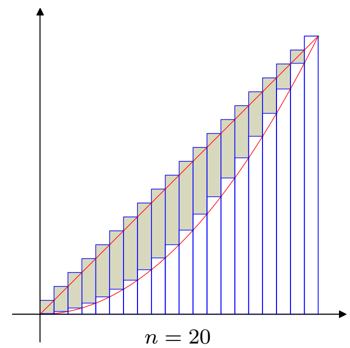
As figuras abaixo ilustram essas aproximações nos casos em que $n = 5$, $n = 10$ e $n = 20$, respectivamente.



$n = 5$



$n = 10$



$n = 20$

Intuitivamente, a aproximação melhora à medida que a quantidade de retângulos aumenta. Deste modo, a área da região S é dada pelo seguinte limite

$$\text{área}(S) = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]\Delta x. \tag{1}$$

Vamos calcular a área acima lembrando que $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ e que os pontos x_k foram escolhidos de modo que $x_k = k/n$, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Temos que

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right] \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2. \tag{2}$$

Vamos verificar que cada um dos termos acima possui limite quando $n \to +\infty$.

Para o primeiro, observe que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n).$$

A maior dificuldade aqui é que o termo $1/n^2$ tende para zero quando $n \to \infty$, enquanto a soma $(1+2+\cdots+n)$ claramente vai para infinito. Assim, ao tentarmos fazer $n \to \infty$, temos uma indeterminação. Ela pode ser resolvida se lembrarmos que os termos da soma entre parênteses acima formam uma progressão aritmética de razão 1, de modo que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Logo, podemos facilmente calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

O cálculo do limite que envolve a soma dos termos do tipo k^2 é um pouco mais delicada. De fato, neste caso os termos que vão sendo somados não formam uma PA, tampouco uma PG. Porém, pode-se mostrar que (veja Vídeo)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Logo,

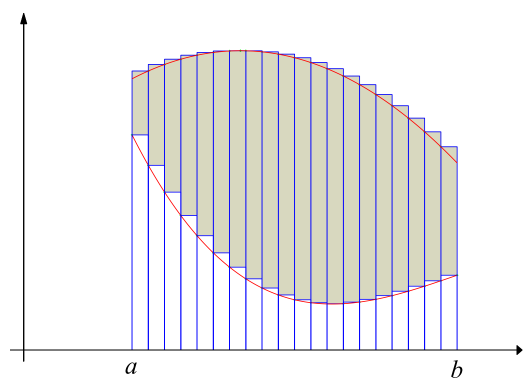
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{6n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Substituindo-se os resultados dos limites acima em (2) pode-se concluir que a área do triângulo parabólico é

$$\text{área}(S) = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

É importante observar que o procedimento acima vale para quaisquer funções $f(x)$ e $g(x)$ contínuas que satisfazem $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$. Assim, denotando por S a região do plano compreendida abaixo do gráfico de f e acima do gráfico de g, temos que

$$\text{área}(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]\Delta x.$$



O procedimento de aproximação acima pode ser feito de uma maneira geral. De fato, dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo tamanho $\Delta x = (b-a)/n$ que se interceptam somente (e possivelmente) nos extremos. Para isto, consideramos os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

em que $x_k = a + k\Delta x$, para cada $k = 1, \ldots, n$. Vamos escolher em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ um ponto x_k^* arbitrário e considerar a soma de Riemman

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

Observe que a soma acima depende, de fato, não só do índice n mas também da escolha dos pontos x_k^*'s. Contudo, pode-se mostrar que, quando $n \to +\infty$, a soma acima converge para um número, qualquer que seja a escolha destes pontos. Vamos denotar este limite da seguinte forma

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

O número acima é chamado **integral definida de f no intervalo** $[a,b]$. Definimos ainda

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

A integral $\int_a^b f(x)dx$ é um número, não dependendo portanto de x. De fato, a letra usada no símbolo da integral não é importante, de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Usando a definição de integral e os argumentos apresentados no início do texto concluímos que, se f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então a área da região S compreendida entre os gráficos das funções é exatamente

$$\text{área}(S) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

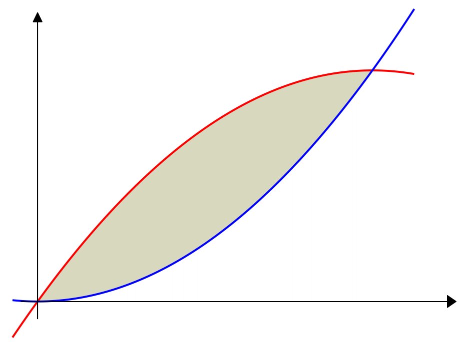
Em particular, se $f \geq 0$ em $[a,b]$, podemos tomar $g \equiv 0$ para concluir que a área abaixo do gráfico de f e acima do eixo $\mathcal{O}x$ é dada por $\int_a^b f(x)dx$.

O cálculo de uma integral usando a definição não é uma tarefa simples. De fato, é necessário obter fórmulas que nos permitam manipular o somatório que aparece na definição de modo a conseguir calcular o limite. Contudo, veremos em breve um método que nos permitirá calcular as integrais de maneira mais simples.

Tarefa

Nesta tarefa vamos calcular a área da região delimitada pelos gráficos das parábolas $f(x) = (4x - x^2)$ e $g(x) = x^2$, conforme ilustrado na figura abaixo.

A primeira dificuldade que encontramos é que, diferente do exemplo visto no texto sobre áreas, não sabemos aqui qual é o intervalo $[a, b]$ que utilizaremos no cálculo, tampouco qual das curvas fica por cima da outra. Os passos seguintes resolvem essa questão:



1. Determine as soluções da equação $f(x) = g(x)$, chamando de a o menor valor e b o maior.

2. Pelo Teorema do Valor Intermediário temos que, em todo o intervalo $[a, b]$, uma das funções é sempre maior ou igual à outra. Determine qual delas é a maior, calculando cada uma delas em ponto $c \in (a, b)$ e comparando os dois valores.

Uma vez que os gráficos se tocam em somente dois pontos, a região S a ser considerada é aquela que fica abaixo da função que está por cima, e acima da que está por baixo, sendo considerado somente o que ocorre no intervalo $[a, b]$.

3. Proceda como no texto para calcular o valor da aproximação de área A_n obtida quando dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de tamando $\Delta x = (b - a)/n$.

4. Usando as fórmulas apresentadas no texto calcule o limite $\lim_{n \to +\infty} A_n$ para obter o valor da área.

5. Escreva a área em termos de uma integral definida.