Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

O Teorema do Valor Médio

(solução da tarefa)

Como a base e a tampa da lata têm forma circular, a soma das suas áreas é $2\pi r^2$. Para calcular a área lateral, basta notar que, cortando a lata ao longo de seu eixo e "abrindo", obtemos um retângulo com um dos lados medindo h e o outro tendo comprimento igual a $2\pi r$. Deste modo, a área total é $(2\pi r^2 + 2\pi r h)$. Como o volume é igual a 1, temos que $1 = \pi r^2 h$, ou ainda $h = 1/(\pi r^2)$. Deste modo

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}, \qquad r > 0.$$

Para encontrar os pontos críticos calculamos

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}, \qquad r > 0,$$

que tem somente a raiz $r_0 = 1/\sqrt[3]{2\pi}$. Uma vez que $\lim_{r\to 0^+} A'(r) = -\infty$ e $\lim_{r\to+\infty} A'(r) = +\infty$, o diagrama de crescimento de A é

	$r \in (0, r_0)$	$r \in (r_0, +\infty)$
sinal da derivada A'	negativo	positivo
comportamento de A	decrescente	crescente

O diagrama acima mostra que o ponto crítico r_0 é um ponto de mínimo local. De fato, como a função decresce antes dele e cresce depois, este ponto na verdade é um ponto de mínimo global. Assim, a menor área ocorre quando o raio da base é igual a $r_0 = (2\pi)^{-1/3}$ e a altura é igual a $(\pi r_0^2)^{-1}$.

Para o esboço do gráfico note que

$$\lim_{r\to 0^+} A(r) = +\infty = \lim_{r\to+\infty} A(r),$$

de modo que o gráfico tem o aspecto da figura ao lado. Pode-se perceber claramente que, de fato, o valor $r = r_0$ é um ponto de mínimo global.