Álgebra 1

Notas de Aula 2/2017

José Antônio O. Freitas

16 de agosto de 2017

Sumário

Prefácio

Essas notas de Aula são referentes à matéria Álgebra 1, ministrada na UnB - Universidade de Brasília - durante o 2^o Semestre de 2010 pelo professor José Antônio O. de Freitas, Departamento de Matemática. Tais notas foram transcritas e editadas pelo graduando em Ciências Econômicas Luiz Eduardo Sol R. da Silva[1].

Revisão e ampliação das notas feita por José Antônio O. de Freitas.

[1] luizeduardosol@hotmail.com

1. Conceitos Básicos

Definição 1.0.1 Uma **proposição** é todo conjunto de palavras ou símbolos ao qual podemos atribuir um **valor lógico**.

Definição 1.0.2 Diz-se que o **valor lógico** de uma proposição é "verdade" (V) se a proposição é verdadeira ou "falsidade" (F) se a proposição é falsa.

■ **Exemplos 1.1** Julgue se as seguintes sentenças são ou não proposições:

1. Todo número primo é ímpar. Essa setença é uma proposição de valor lógico "Falsidade."
2. $x^2+y^2 \geq 0$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Esse setença é uma proposição de valor lógico "Verdade".
3. Amanhã irá chover. Essa sentença não é uma proposição. Não é possível atribuir um valor lógico a ela.

1.1 Princípio da não contradição e do terceiro excluído

1. Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
2. Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

Assim esses princípios afirmam que:

"Toda proposição tem um, e um só, dos valores lógicos **verdade** ou **falsidade**."

De modo geral vamos trabalhar com proposições da forma:

1. Se $\mathscr{H}$, então $\mathscr{T}$.
   Aqui $\mathscr{H}$ é chamado de hipótese e $\mathscr{T}$ de tese. Neste tipo de proposição iremos admitir que $\mathscr{H}$ é uma verdade e precisaremos provar que $\mathscr{T}$ é verdade. Ou seja precisamos construir um argumento que justifique $\mathscr{T}$ ser verdadeira à partir do fato de $\mathscr{H}$ ser verdadeira.
2. $\mathscr{H}$ se, e somente se, $\mathscr{T}$ ou $\mathscr{H}$ se, e só se, $\mathscr{T}$.
   Esse tipo de proposição será decomposta em duas proposições no formato anterior. Isto é:
   (a) Se $\mathscr{H}$, então $\mathscr{T}$.
   (b) Se $\mathscr{T}$, então $\mathscr{H}$.

No primeiro caso admitimos $\mathscr{H}$ verdadeira e provamos que $\mathscr{T}$ também é verdadeira e no segundo caso admitimos que $\mathscr{T}$ é verdadeira e provamos que $\mathscr{H}$ é verdadeira.

2. Noções de Teoria de Conjuntos

2.1 Conceitos básicos

Um conjunto é uma "coleçã o" ou "família" de elementos.

Usaremos letras maiúsculas do alfabeto para denotar os conjuntos e denotaremos elementos de um dado conjunto por letras minúsculas do alfabeto.

Dado um conjunto A, para indicar o fato de que x é um elemento de A, escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento x não pertence ao conjunto A, escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio**. Tal conjunto é denotado por $\emptyset$.

Dado um conjunto A e x um elemento, ocorre sempre o uma das seguintes situações:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A.$$

Além disso, para dois elementos x, $y \in A$, ocorre exatamente uma das seguinte situações:

$$x = y \text{ ou } x \neq y.$$

2.2 Descrição de um conjunto

Um conjunto A pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, como por exemplo:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{verdade, falso\}.$$

Um conjunto também pode ser dado pela descrição das propriedades dos seus elementos, como por exemplo:

$$A = \{n \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2,4,6,...\}.$$

2.3 Alguns conjuntos importantes

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ o conjunto do números naturais.
2. $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ o conjunto dos números inteiros.
3. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números inteiros não negativos.
4. $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.
5. $\mathbb{R}^*$ o conjunto dos números reais não nulos.
6. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ o conjunto dos números racionais.

2.4 Propriedades dos conjuntos

Definição 2.4.1 Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A e B são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo $x \in A$ temos que $x \in B$ e para todo $y \in B$ temos $y \in A$.

Se A e B são iguais, escrevemos $A = B$

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 2, 1, 4\}$$

$$\{1, 2, 3\} \neq \{2, 3\}$$

Definição 2.4.2 Se A e B são dois conjuntos, dizemos que A é um **subconjunto** de B ou que A **está contido** em B ou que B **contém** A se todo elemento de A for elemento de B. Ou seja, se para todo elemento $x \in A$, temos $x \in B$. Nesse caso, escrevemos $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$.

Caso A seja um subconjunto de B mas não é igual a B, escrevemos:

$$A \subsetneq B.$$

Nesse caso, dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B.

Para dizer que A não está contido em B, escrevemos $A \nsubseteq B$

Usando a definição de continência de conjuntos podemos definir igualdade de conjuntos da seguinte forma:

dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Ou seja,

se $A = B$ então $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Além disso,

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

Quando A e B não são iguais, escrevemos $A \neq B$. Para que $A \neq B$ devemos ter $A \nsubseteq B$ ou $B \nsubseteq A$. Isto é, precisamos encontrar algum elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$ ou então encontrar $y \in B$ tal que $y \notin A$.

Proposição 2.4.1 Dados três conjuntos A, B e C temos:

1. $A \subseteq A$ (Reflexividade)
2. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. (Antissimetria)
3. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. (Transitividade)

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2,4,6,...\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3,6,9,...\}.$$

Neste caso, $2 \in A$ e $2 \notin B$, logo $A \nsubseteq B$. Por outro lado, $3 \in B$ e $3 \notin A$ e com isso $B \nsubseteq A$. Portanto, dados dois conjuntos A e B, nem sempre temos $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Proposição 2.4.2 Seja A um conjunto. Então $\emptyset \subseteq A$.

Prova: Suponha que $\emptyset \nsubseteq A$. Logo existe $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas por definição, o conjunto vazio não contém elementos. Logo a existência de $x \in \emptyset$ é uma contradição. Tal contradição surgiu por termos suposto que $\emptyset \nsubseteq A$. Portanto, $\emptyset \subseteq A$, como queríamos demonstrar. ■

2.5 Relações entre conjuntos

Definição 2.5.1 — Intersecção. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos a **intersecção** de A e B como sendo o conjunto $A \cap B$ cujos elementos pertencem ao conjunto A e B simultaneamente. Assim,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

■ **Exemplo 2.1** Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ e $C = \{r,s,t\}$. Então

$$A \cap B = \{2,3\}$$
$$A \cap C = \emptyset.$$

Definição 2.5.2 — União. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos a **união** de A com B como sendo o conjunto $A \cup B$, cujos elementos pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B. Assim,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

■ **Exemplo 2.2** Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ e $C = \{r,s,t\}$. Então

$$A \cup B = \{1,2,3,4\}$$
$$A \cup C = \{1,2,3,r,s,t\}.$$

Proposição 2.5.1 Sejam A e B dois conjuntos. Então:
1. $(A \cap B) \subseteq A$;
2. $(A \cap B) \subseteq B$;
3. $A \subseteq A \cup B$;
4. $B \subseteq A \cup B$.

Prova: Para provar a primeira afirmação seja $x \in A \cap B$ um elemento qualquer. Da definição de interseção de conjuntos, Definição 2.5.1, temos $x \in A$ e $x \in B$. Assim podemos afirmar com certeza que $x \in A$. Logo todo elemente de $A \cap B$ também está em A, ou seja, $A \cap B \subseteq A$. De modo análogo prova-se a segunda afirmação sobre interseção.

Para a terceira afirmação, seja $x \in A$. Da definição de união de conjuntos, Definição 2.5.2, segue que $x \in A \cup B$. Logo todo elemento de A também está em $A \cup B$, ou seja, $A \subseteq (A \cup B)$. De modo análogo prova-se a quarta afirmação. ■

O conceito de união ($\cup$) e intersecção ($\cap$) pode ser estendido para mais de dois conjuntos.

Definição 2.5.3 — União e Intersecção finita de conjuntos. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos. Então

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

é o conjunto dos elementos x tais que x pertence a pelo menos um dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$. Agora,

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

é o conjunto dos elementos x que pertencem a todos os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ simultaneamente.

Definição 2.5.4 Sejam A e B conjuntos. Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**.

Sejam A e B conjuntos tais que $C = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Neste caso dizemos que C é uma **união disjunta** de A e B. Denotamos tal fato por

$$C = A \sqcup B.$$

Proposição 2.5.2 Sejam A, B e C três conjuntos, então:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Prova:

1. Precisamos mostrar que
   i) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

   Para provar i) seja $x \in A \cap (B \cup C)$. Logo $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Agora, de $x \in B \cup C$, segue que $x \in B$ ou $x \in C$. Suponha que $x \in B$. Como $x \in A$ e $x \in B$, então $x \in A \cap B$. Assim, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ou seja, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Por outro lado, se $x \in C$, como $x \in A$, então $x \in A \cap C$ e daí $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, logo $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Portanto,

   $$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

   Agora para provar ii), seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Daí, $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Suponha que $x \in A \cap B$. Assim, $x \in A$ e $x \in B$. Como $x \in B$, segue que $x \in B \cup C$ e então $x \in A \cap (B \cup C)$, ou seja, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Agora, suponha que $x \in A \cap C$. Com isso $x \in A$ e $x \in C$. Desse modo, $x \in B \cup C$ e então $x \in A \cap (B \cup C)$ e daí

   $$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

   Portanto

   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

   como queríamos.
2. Análoga ao caso anterior.

■

Definição 2.5.5 — Diferença de Conjuntos. Dados dois conjuntos A e B, definimos a **diferença** dos conjuntos A e B, denotada por $A-B$ ou $A\backslash B$ como sendo o conjunto

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ e } x\notin B\}.$$

■ **Exemplos 2.1** 1) Se $A=\{1,2,3,5,4\}$, $B=\{2,3,6,8\}$, então

$$A-B=\{1,4,5\}$$
$$B-A=\{6,8\}.$$

2) Se $A=\{2,4,6,8,10,...\}$, $B=\{3,6,9,12,15,...\}$, então

$$A-B=\{2,4,8,10,14,16,...\}$$
$$B-A=\{3,9,15,21,...\}$$

Proposição 2.5.3 Sejam A, B e C conjuntos não vazios. Então

$$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C).$$

Prova: Segue da definição de diferença de conjuntos. ■

Definição 2.5.6 — Complementar. Dados dois conjuntos A e E tais que $A\subseteq E$, definimos o **complementar** de A em E, denotado A^C ou $C_E(A)$, como

$$C_E(A)=\{x\in E \mid x\notin A\}.$$

■ **Observações 2.1** 1. Se $A=E$, então $C_A(A)=\{x\in A \mid x\notin A\}=\emptyset$.
2. $(A^C)^C=\{x\in E \mid x\notin A^C\}=\{x\in E \mid x\in A\}=A$

■ **Exemplo 2.3** Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e $E=\{1,2,3,5,4,0,8,9\}$. Primeiro note que $A\subseteq E$, daí

$$A^C=C_E(A)=\{0,5,8,9\}.$$

Proposição 2.5.4 Sejam A, B e E conjuntos. Se $A\subseteq B\subseteq E$, então $C_E(B)\subseteq C_E(A)$.

Prova: Seja $x\in C_E(B)$. Assim $x\notin B$ e como $A\subseteq B$, então $x\notin A$. Daí por definição $x\in C_E(A)$, ou seja, $C_E(B)\subseteq C_E(A)$. ■

Proposição 2.5.5 Sejam A, B e E três conjunto tais que $A\subseteq E$ e $B\subseteq E$. Então:
1. $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
2. $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

Prova:
1. Seja $x\in(A\cup B)^C$. Logo $x\notin A\cup B$, assim $x\notin A$ e $x\notin B$. Daí, $x\in A^C$ e $x\in B^C$, isto é, $x\in A^C\cap B^C$. Desse modo,

$$(A\cup B)^C\subseteq A^C\cap B^C. \tag{2.1}$$

Por outro lado, se $x\in A^C\cap B^C$, então $x\in A^C$ e $x\in B^C$. Com isso, $x\notin A$ e $x\notin B$, ou seja, $x\notin A\cup B$, logo $x\in(A\cup B)^C$. Desse modo

$$A^C\cap B^C\subseteq(A\cup B)^C. \tag{2.2}$$

Portanto, de (2.1) e (2.2) temos

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

2. Seja $x \in (A \cap B)^C$. Logo $x \notin A \cap B$, assim $x \notin A$ ou $x \notin B$. Então $x \in A^C$ ou $x \in B^C$, isto é, $x \in A^C \cup B^C$. Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \tag{2.3}$$

Por outro lado, se $x \in A^C \cup B^C$, então $x \in A^C$ ou $x \in B^C$. Daí, $x \notin A$ ou $x \notin B$, ou seja, $x \notin A \cap B$, logo $x \in (A \cap B)^C$. Desse modo

$$A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C. \tag{2.4}$$

Portanto, de (2.3) e (2.4) temos

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

■

Definição 2.5.7 — Produto Cartesiano. Dados dois conjuntos A e B, definimos o **produto cartesiano** de A por B como sendo o conjunto

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Dados (x,y), $(z,t) \in A \times B$, temos

$$(x,y) = (z,t) \textbf{ se, e somente se, } x = z \textbf{ e } y = t.$$

■ **Exemplo 2.4** Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4\}$. Então

$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$
$$B \times A = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

■ **Observaçao 2.1** Do Exemplo (2.4) vemos que em geral $A \times B \neq B \times A$.

Definição 2.5.8 — Conjunto Partes. Para qualquer conjunto A, indicamos por $\mathscr{P}(A)$ o conjunto

$$\mathscr{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

que é chamado de **conjunto das partes** de A.

Os elementos desse conjunto são todos os subconjuntos de A. Dizer que $Y \in \mathscr{P}(A)$ significa que $Y \subseteq A$. Particularmente, temos $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$ e $A \in \mathscr{P}(A)$.

■ **Exemplos 2.2**
1. $A = \emptyset$, $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}$;
2. $B = \{x\}$, $\mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{x\}\}$;
3. $C = \{a,b,c\}$, $\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, C\}$;
4. $D = \mathbb{R}$, $\mathscr{P}(D) = \{X \mid X \subseteq \mathbb{R}\}$, por exemplo $\mathbb{Q} \in \mathscr{P}(D)$.

Bibliografia

[1] H.H. Domingues, G.Iezzi: *Álgebra Moderna*, 2ł Ed., Atual, 1982

[2] S. Shokranian: *Álgebra 1*, Ciência Moderna, 2010

[3] Adilson Gonçalves: *Introdução à Álgebra*, 5ł Ed., IMPA, 2003

[4] G. Birkhoff, S. MacLane: *Álgebra Moderna Básica*, 4ł Ed., Guanabara Dois, 1980

[5] E. A. Filho: *Iniciação à Lógica Matemática*, Nobel, 2002