Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Volume de um gás em um pistão

Suponha que um gás é mantido a uma temperatura constante em um pistão. À medida que o pistão é comprimido, o volume do gás decresce com a função $V(p) = 200/p$ litros, até atingir a pressão crítica de 100 torr, quando ele se liquidifica, havendo nesse momento uma variação brusca de volume. Em seguida, o seu volume passa a ser dado pela função $V(p) = -0,01p + 2$, até que seja atingida a nova pressão crítica de 150 torr, a partir da qual o volume permanece constante e igual a $0,5$ litro.

A partir das informações acima, podemos concluir que

$$V(p) = \begin{cases} 200/p, & \text{se } 0 < p \leq 100, \\ -0,01p + 2, & \text{se } 100 < p \leq 150, \\ 1/2, & \text{se } 150 < p. \end{cases}$$

Queremos estudar o comportamento de V quando p está próximo de zero. Para tanto, precisamos estudar o limite $\lim_{p \to 0^+} V(p)$. Note que só faz sentido tomar o limite lateral pela direita, pois a função não está definida para valores negativos de p. Observe ainda que, no cálculo do limite $\lim_{p \to 0^+} 200/p$, não podemos simplesmente substituir o valor $p = 0$, pois isso anularia o denominador. Além disso, a expressão de V não sugere nenhum tipo de fatoração ou simplificação que nos permita contornar o fato do denominador aproximar-se de zero. De fato, o problema aqui é que o denominador se aproxima de zero, enquanto o numerador se aproxima de uma número não nulo (que é 200).

Para entender o que acontece com a fração vamos olhar para a tabela abaixo, que apresenta o valor da pressão $V(p)$ para alguns valores p próximos de zero:

p	1	0, 1	0, 01	0, 001	10^{-n}
$V(p)$	200	2.000	20.000	200.000	$2 \times 10^{n+2}$

em que $n \in \mathbb{N}$ é um número natural. Observe que, à medida que p se aproxima de 0 (pela direita), os valores $V(p)$ se tornam cada vez maiores. Escrevemos então

$$\lim_{p \to 0^+} V(p) = \lim_{p \to 0^+} \frac{200}{p} = +\infty.$$

A expressão acima indica que a função V assume valores *arbitrariamente grandes* desde que p esteja *suficientemente próximo* de 0. Para ilustrar isso, suponha que queremos garantir que o volume fique maior do que 1 bilhão de litros. Para tanto, devemos ter

$$V(p) = \frac{200}{p} > 10^9 \iff p \times 10^9 < 2 \times 10^2 \iff p < 2 \times 10^{-7}.$$

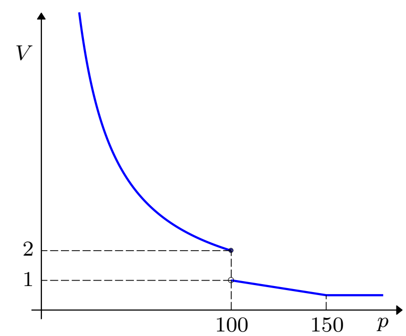
Assim, o volume ultrapassa o valor de 1 bilhão de litros *sempre que* a pressão p satisfaz $0 < p < 2 \times 10^{-7}$.

O comportamento de V próximo aos pontos $p = 100$ e $p = 150$ pode ser facilmente determinado a partir dos limites laterais nestes pontos:

$$\lim_{p\to 100^-} V(p) = 2, \qquad \lim_{p\to 100^+} V(p) = 1, \qquad \lim_{p\to 150^-} V(p) = 1/2, \qquad \lim_{p\to 150^+} V(p) = 1/2.$$

Note que não existe o limite em $p = 100$, e portanto V não é contínua neste ponto. Este fato está relacionado com a variação brusca de volume citada no texto.

Para fazer um esboço do gráfico de V vamos observar que, para $0<p\leq 100$, a função tem a expressão de uma hipérbole. Nas demais sentenças da definição de V, temos equações de retas. Recordando os conhecimentos de geometria analítica do ensino médio e usando as informações acima, podemos esboçar o gráfico de V como na figura ao lado.



De uma maneira geral, suponha que uma função f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$. Escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \tag{1}$$

para representar o fato de que, quando x vai se tornando próximo de a, os valores $f(x)$ vão se tornando cada vez maiores. A expressão acima deve ser lida da seguinte maneira: *o limite de $f(x)$, quando x tende para a, é infinito.* De maneira análoga, podemos definir

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

Quando ocorre (1) ou qualquer um dos casos acima, dizemos que a reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** da função f.

Vale observar que, quando escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou qualquer outra das igualdades acima), não estamos falando que o limite existe. Para que ele exista é preciso que a função se aproxime de um número. O que ocorre neste caso é que **o limite não existe** mas, apesar disso, sabemos que a função assume valores muito grandes quando x está próximo de a.

Outra observação importante é que, **se uma função é contínua no ponto a, a reta $x = a$ não pode ser uma assíntota vertical da função**, pois $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Assim, quando vamos procurar as assíntota verticais de uma função, temos que descartar todos os valores onde a função é contínua.

Exemplo 1. Para a função $V(p)$ do início do texto temos que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical, visto que $\lim_{p\to 0^+} V(p) = +\infty$. Geometricamente, o que acontece é que o gráfico de V se aproxima do eixo das ordenadas quando $p \to 0^+$, conforme pode ser observado no gráfico da página anterior. Vale notar que, mesmo que não possamos calcular o limite $\lim_{p\to 0^-} V(p)$, o fato do limite pela direita ser infinito já implica que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical. $\square$

Exemplo 2. Sejam f e g as funções cujos gráficos estão indicados pelas Figuras 1 e 2 abaixo, respectivamente.

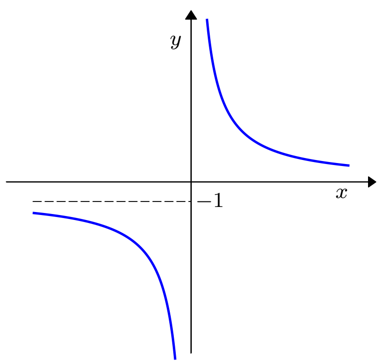


Figura 1

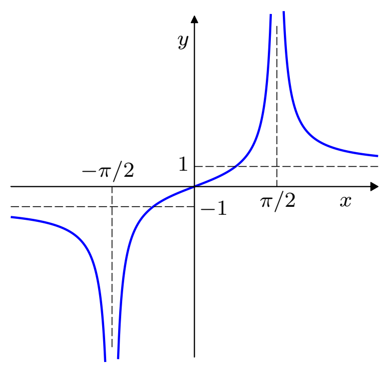


Figura 2

Observe que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, de modo que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical da função f. No caso desta função, temos também que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Porém, somente a informação do limite pela esquerda já seria suficiente para determinar a assíntota vertical. Para a função g da Figura 2 temos que $\lim\limits_{x\to -\pi/2} g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to \pi/2} g(x) = +\infty$. Portanto a função possui as assíntotas verticais $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$. $\square$

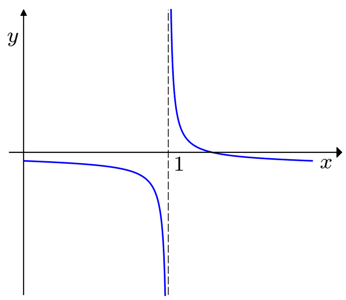
Suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Se $M \neq 0$ segue facilmente da regra do quociente que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L/M$. Se $M = 0$ temos duas possibilidades: quando $L = 0$ ocorre uma indeterminação do tipo $0/0$ e, conforme já vimos, o cálculo do limite exige algum tipo de manipulação algébrica. O caso complementar, em que $L \neq 0$ e $M = 0$, nos fornece uma assíntota vertical, desde que o denominador tenha sinal definido nas proximidades de $x = a$. Quando isto ocorre, este sinal vai determinar se o limite é $+\infty$ ou $-\infty$. O exemplo seguinte esclarece como isso pode ser feito.

Exemplo 3. Vamos estudar o comportamento da função $f(x) = (x^2 + x - 3)/(1 - x)$ nas vizinhanças do ponto $x = 1$. Quando $x \to 1^-$, o numerador se aproxima de $1^2 + 1 - 3 = -1$, enquanto o denominador se aproxima de zero por valores positivos, pois devemos considerar

$x < 1$. Deste modo, a fração deve ter sinal negativo, o que nos leva a concluir que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 3}{1 - x} = -\infty.$$

Por outro lado, quando $x \to 1^+$, o denominador se aproxima de zero por valores positivos.



A fração então torna-se positiva, de modo que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 3}{1 - x} = +\infty.$$

Qualquer um dos limites laterais acima implica que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical, conforme pode-se perceber do gráfico ao lado. $\square$

Pode ocorrer de, quando $x \to a$, o numerador se aproximar de um número não nulo, o denominador de zero e mesmo assim não termos uma assíntota vertical em $x = a$. Um exemplo curioso deste fato é a função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}.$$

O denominador se aproxima de zero mas o seu sinal fica oscilando entre negativo e positivo, por causa do termo que envolve o seno. Deste modo, a função assume valores que, em módulo, são muito grandes. Mas o seu sinal também oscila entre negativo e positivo.

É importante notar que **para encontrar assíntotas verticais não basta igualar o denominador de uma fração a zero!** Ao fazer isso, encontramos somente os candidatos à assíntotas verticais. É necessário checar se, de fato, a funções tem algum limite lateral infinito quando x tende para a raiz do denominador. O exemplo abaixo ilustra esta importante observação.

Exemplo 4. O denominador da função $g(x) = (x+1)/(x^2 - x - 2)$ se anula para $x = -1$ e $x = 2$. Logo, temos dois candidatos à assíntotas verticais. Para $x = -1$ temos que

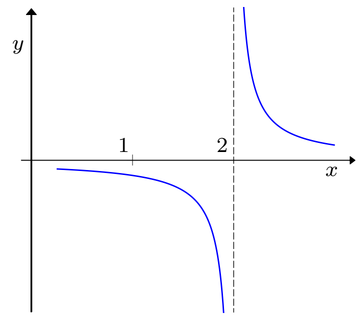
$$\lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)}{(x-2)(x+1)} = -\frac{1}{3},$$

de modo que $x = -1$ não é assíntota vertical!

Por outro lado, procedendo como no exemplo anterior, podemos calcular

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} g(x) = \lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{1}{(x-2)} = \pm\infty,$$

e portanto $x = 2$ é assíntota vertical. O gráfico de f está esboçado ao lado. $\square$



Tarefa

Determine todas as assíntotas verticais da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}, & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 4, \\ x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$