Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

O Limite de uma função

(solução da tarefa)

A inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é dada pelo limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a},$$

uma vez que $f(x) = \sqrt{x}$. Como o numerador e o denominador tendem para zero, temos uma indeterminarão. Vamos rescrever o quociente usando o seguinte artifício

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{(x - a)} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}.$$

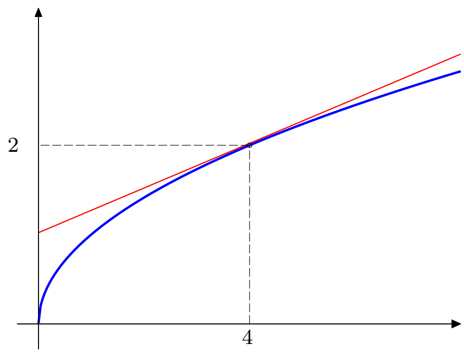
O último denominador acima tende para $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \neq 0$, quando $x \to a$. Logo,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Agora basta lembrar que a equação da reta que passa por (x_0, y_0) e tem inclinação m é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$. No caso da reta tangente temos $(x_0, y_0) = (a, f(a))$ e $m = f'(a)$, de modo que $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Substituindo os valores e isolando $y(x)$ obtemos

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) + \sqrt{a}.$$

Antes de terminar você deve observar que a equação acima de fato define uma reta. Apesar da expressão envolver x e a, a variável ali é somente x. Estamos pensando que o número $a > 0$ está fixado. Por exemplo, se escolhemos $a = 4$ então $f(a) = f(4) = \sqrt{4} = 2$, e a reta fica com a seguinte expressão $y(x) = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$, ou ainda, $y = \frac{x}{4} + 1$.



Reta tangente