Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Rotação em torno do eixo $\mathcal{O}y$

Considere a função $f(x) = \text{sen}(x)$ definida no intervalo $[0, \pi]$ e denote por $\mathcal{A}$ a região compreendida abaixo do seu gráfico e acima do eixo $\mathcal{O}x$. Se girarmos essa região em torno do eixo $\mathcal{O}y$ vamos obter um sólido $\mathcal{S}$ cujo volume queremos calcular neste texto.

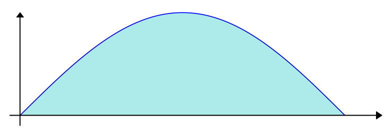

Figura 1: A regiío $\mathcal{A}$

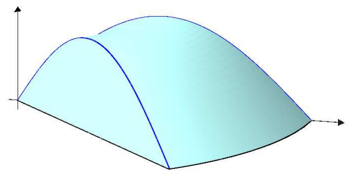

Figura 2: Parte do sólido $\mathcal{S}$

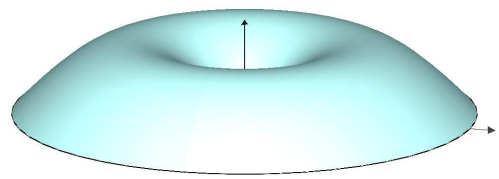

Figura 3: O sólido $\mathcal{S}$

Vamos usar uma ideia parecida com aquela utilizada quando discutimos a rotação em torno do eixo $\mathcal{O}x$. Ela consiste em fazermos aproximações para o volume de $\mathcal{S}$ utilizando algum sólido cujo volume sabemos calcular. Mais especificamente, dado um número $n \in \mathbb{N}$, dividimos o intervalo $[a, b] = [0, \pi]$ em n subintervalos de igual tamanho $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, considerando os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

em que $x_k = a + k\Delta x$, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Fixado um número $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vamos escolher um ponto $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ e construir um retângulo cuja base é o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ e altura é $f(x_k^*)$. Ao rotacionarmos este retângulo em torno do eixo $\mathcal{O}y$ vamos obter uma espécie de anel cuja espessura é exatamente $x_k - x_{k-1} = \Delta x$. O volume deste anel pode ser calculado como a diferença do volume de dois cilindros, e vale exatamente

$$\pi x_k^2 f(x_k^*) - \pi x_{k-1}^2 f(x_k^*) = \pi(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}) f(x_k^*) = 2\pi\Delta x \left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) f(x_k^*).$$

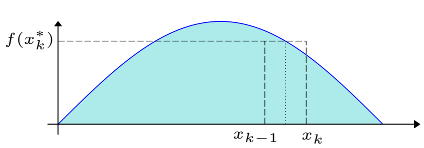

Figura 4: O retângulo

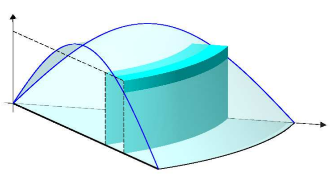

Figura 5: Parte do anel

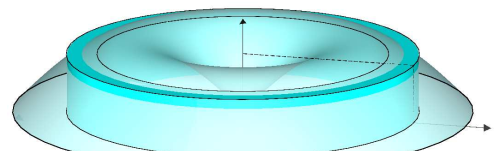

Figura 6: O anel

Observe agora que o número $(x_k + x_{k-1})/2$ pertence ao intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. De fato, ele é exatamente o ponto médio deste intervalo. Assim, se desde o início tivéssemos escolhido $x_k^* = (x_k + x_{k-1})/2$, o volume do anel seria exatamente $2\pi x_k^* f(x_k^*)\Delta x$.

Procedendo como acima, variando k de 1 até n, e chamando de $\mathcal{S}_n$ o sólido obtido quando rotacionamos os n retângulos em torno do eixo $\mathcal{O}y$, concluímos que uma aproximação para o volume do sólido $\mathcal{S}$ é

$$\text{volume}(\mathcal{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k^* f(x_k^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\Delta x,$$

em que $g(x) = 2\pi x f(x)$. Uma vez que a aproximação se torna melhor quando n cresce, concluímos que o volume de $\mathcal{S}$ é dado por

$$\text{volume}(\mathcal{S}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b 2\pi x f(x)dx.$$

Lembrando agora que $f(x) = \text{sen}(x)$, $a = 0$ e $b = \pi$, o volume V do sólido em questão é dado pela integral definida

$$V = \int_0^\pi 2\pi x \,\text{sen}(x)dx.$$

A fim de calcular esta integral vamos primeiro determinar uma primitiva para a função $x\,\text{sen}(x)$. Para tanto, vamos usar a técnica de integração por partes com as escolhas $u = x$ e $dv = \text{sen}(x)dx$. Um cálculo direto mostra que $du = dx$ e $v = -\cos(x)$, de modo que

$$\int x\,\text{sen}(x)dx = -x\cos(x) - \int(-\cos(x))dx = -x\cos(x) + \text{sen}(x) + K,$$

onde K é uma constante. Assim, o volume é dado por

$$\text{volume}(\mathcal{S}) = 2\pi\left(-x\cos(x) + \text{sen}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = 2\pi\left\{-\pi\cos(\pi) + \text{sen}(\pi)\right\} = 2\pi^2.$$

Vamos finalizar observando que o procedimento acima é mais geral do que parece. De fato, seja $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ uma função contínua, com $a \geq 0$, e $\mathcal{A}$ a região compreendida entre o gráfico de f e o eixo $\mathcal{O}x$. Quando giramos $\mathcal{A}$ em torno do eixo $\mathcal{O}y$, obtemos um sólido $\mathcal{S}$ cujo volume é dado por

$$\text{volume}(\mathcal{S}) = \int_a^b 2\pi x f(x)dx.$$

É importante não confundir a fórmula acima com aquela que nos dá o volume quando giramos em torno do eixo $\mathcal{O}x$, que é exatamente $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$.

Tarefa

Denote por $\mathcal{A}$ a região delimitada pelo gráfico das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Use a fórmula do texto para calcular o volume do sólido $\mathcal{S}$ obtido ao girarmos $\mathcal{A}$ em torno do eixo $\mathcal{O}y$. Note que esta região não é a região abaixo do gráfico de uma função, mas sim a região compreendida entre duas funções. Assim, não será possível aplicar diretamente a fórmula. Porém, pode-se obter o resultado desejado como a diferença entre os volumes de dois outros sólidos.

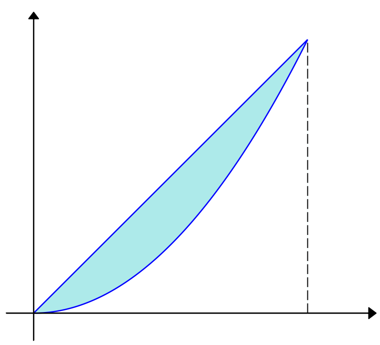

Figura 1: A região $\mathcal{A}$

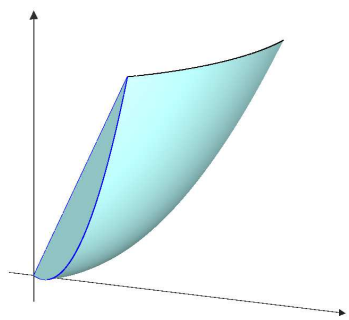

Figura 2: Parte do sólido $\mathcal{S}$

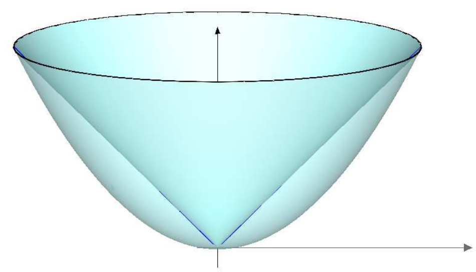

Figura 3: O sólido $\mathcal{S}$