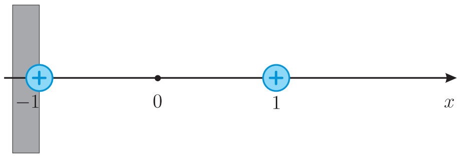
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Potencial gerado por 2 cargas elétricas positivas

Considere duas cargas elétricas com carga unitária e positiva, fixadas num eixo perpendicular a uma parede, como na figura abaixo.



O potencial elétrico gerado por essas duas partículas num ponto x ao longo desse eixo é dado, em unidades convenientes, pela seguinte função

$$P(x) = \frac{1}{|x+1|} + \frac{1}{|x-1|}, \qquad x > -1,\ x \neq 1.$$

Antes de estudar as assíntotas da função potencial P vamos observar que o seu domínio é $(-1,1) \cup (1,+\infty)$. Para simplificar as contas, precisamos melhorar a expressão de P, de modo a se livrar dos símbolos de módulo. Para isso, note que quando $-1 < x < 1$ temos que $x+1 > 0$ e que $x-1 < 0$, portanto

$$P(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x^2-1} = -2(x^2-1)^{-1}.$$

Para $x > 1$ temos que $x+1 > 0$ e que $x-1 > 0$, portanto

$$P(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} = 2x(x^2-1)^{-1}.$$

Desse modo, a função P pode ser reescrita como

$$P(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2-1}, & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{2x}{x^2-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Estamos interessados em determinar assíntotas verticais para a função P. Para determinar essas retas vamos lembrar que, se a função $f(x)/g(x)$ é tal que $f(x)$ tende para um número não nulo e $g(x)$ tende para zero quando $x \to a$, então a fração $f(x)/g(x)$ tende para mais infinito ou menos infinito. Desse modo, os candidatos naturais a assíntota vertical da função P são as retas do tipo $x = a$, onde a é um número que anula o denominador em uma das expressões de P. Assim, os candidatos a assíntotas verticais são $x = -1$ e $x = 1$.

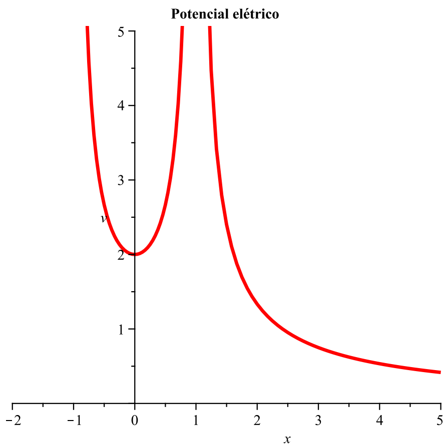
Vamos estudar o limite lateral quando $x \to 1^+$. Para tanto, observe que o quociente a ser estudado é $2x/(x^2-1)$, visto que essa é a expressão de P no intervalo $(1, +\infty)$. O numerador tende para 2, enquanto que o denominador tende para 0. Isso indica que esse limite deve ser $+\infty$ ou $-\infty$, dependendo do sinal da fração. O numerador é positivo, pois ele se aproxima de $2 > 0$. Com relação ao denominador, basta observar que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ e que, como $x \to 1^+$, temos que $x - 1 > 0$. Desse modo, o denominador se aproxima de 0 por valores positivos. Assim, a fração é positiva, de modo que

$$\lim_{x\to 1^+} V(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty,$$

o que mostra que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical de V.

Observe que, do ponto de vista das assíntotas, não é mais necessário calcular o limite lateral $\lim_{x\to 1^-} P(x)$. De fato, como $\lim_{x\to 1^+} P(x) = +\infty$, já sabemos que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical, independente do que ocorrer com o limite quando $x \to 1^-$.

Na tarefa que sucede o texto você será convidado a determinar as demais assíntotas da função P. Após fazer isso, você perceberá que o gráfico de P é como se segue:



Tarefa

Lembrando que a função potencial é dada por

$$P(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2 - 1}, & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{2x}{x^2 - 1}, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

resolva os itens abaixo.

1. Calcule o limite lateral $\lim_{x \to -1^+} P(x)$ para concluir que a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical de P;
2. Explique porque não é possível calcular o limite pela esquerda no ponto $x = -1$;
3. Calcule o limite de $P(x)$ em um ponto genérico $x = a$ do seu domínio para concluir que, nesse caso, a reta $x = a$ não pode ser assíntota vertical;
4. Calcule o limite no infinito $\lim_{x \to +\infty} P(x)$ para determinar a assíntota horizontal de P;
5. Explique porque não é possível calcular o limite quando $x \to -\infty$;
6. Resumindo os itens acima e as informações do texto, concluímos que a função P tem as retas $x = 1$ e $x = -1$ como assíntotas verticais e a reta $P = 0$ como assíntota vertical. Utilizando esses fatos e lembrando que P é sempre positiva, verifique que o gráfico de P tem o aspecto apresentado no texto.