Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

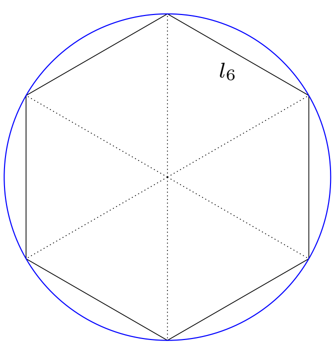
O perímetro da circunferência

O perímetro de um polígono de n lados é a soma do comprimento dos seus lados. Dado um polígono qualquer, você pode sempre calcular o seu perímetro utilizando uma régua para medir o tamanho de cada lado. Isso funciona bem porque cada um dos lados é um segmento de reta. Esse conceito pode ser estendido para uma curva qualquer no plano. Nesse caso, o perímetro é definido como sendo o comprimento do contorno da curva. Pode ser complicado calculá-lo quando o contorno não é formado somente por segmentos de reta, tendo algumas partes curvas. Neste texto estamos interessados em calcular o perímetro de uma das curvas mais famosas. Mais especificamente, vamos estudar a seguinte questão:

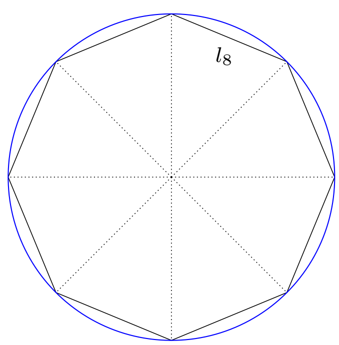
Problema: Qual o comprimento de uma circunferência de raio $r > 0$?

Você certamente sabe que o perímetro é dado por $2\pi r$. O que queremos aqui é apresentar um processo de aproximação que nos conduza a essa fórmula. A ideia é parecida com aquela apresentada no texto sobre a velocidade de um carro.

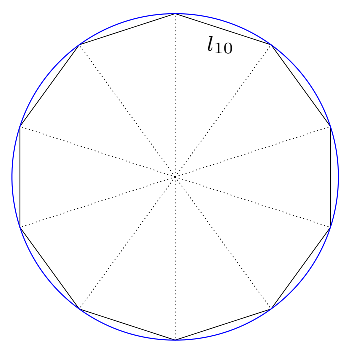
O processo de aproximação pode ser descrito da seguinte maneira: para cada número natural $n \geq 3$, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio r. Podemos ver abaixo o desenho de algum desses polígonos.



$n = 6$



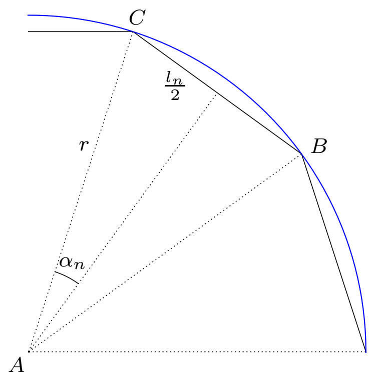
$n = 8$

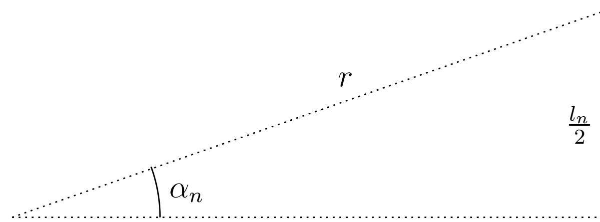


$n = 10$

Chamando de P o comprimento da circunferência, fica claro a partir dos desenhos que, quanto maior for o valor de n, mais próximo o número p_n estará de P. Note ainda que a aproximação é sempre feita por falta, isto é, temos que $p_n < P$ para todo n.

Observe que cada polígono pode ser decomposto em n triângulos isósceles. Vamos dar um *zoom* em um deles de modo a calcular o valor de p_n.





Se l_n é o comprimento do lado do polígono, então é claro que $p_n = nl_n$. Para obter o valor de l_n, vamos usar o triângulo retângulo acima para escrever

$$\operatorname{sen}(\alpha_n) = \frac{\frac{l_n}{2}}{r}.$$

O ângulo $B\widehat{A}C$ mede $2\pi/n$ radianos. Como o triângulo ABC é isósceles, temos que α_n é a metade do ângulo $B\hat{A}C$, isto é, $\alpha_n = \pi/n$. Desse modo, segue da expressão acima que $l_n = 2r\operatorname{sen}(\pi/n)$ e portanto

$$p_n = 2r \times n \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Com o auxílio de uma calculadora, podemos calcular o perímetro, por exemplo, do triângulo e do octógono regular inscritos

$$p_3 = 2r \times 3 \times \operatorname{sen}(\pi/3) \cong 5,21r, \qquad p_8 = 2r \times 8 \times \operatorname{sen}(\pi/8) \cong 6,12r,$$

onde fizemos aproximações usando 2 casas decimais.

Para estudar como p_n varia quando n cresce, temos que saber o comportamento do produto $n\operatorname{sen}(\pi/n)$. Uma vez que a fração π/n se aproxima de zero, o termo que envolve o seno se aproxima de $\operatorname{sen}(0) = 0$. Por outro lado, esse termo está multiplicado por outro que fica muito grande. Não está claro o que ocorre com o produto e por isso dizemos que isso é uma *indeterminação do tipo* $0 \cdot \infty$.

Para entender melhor o que isso significa considere os 3 produtos abaixo.

$$\frac{1}{n} \cdot n, \qquad \frac{1}{n^2} \cdot n, \qquad \frac{1}{n} \cdot n^2.$$

Em todos eles temos o produto de dois termos que dependem de n. Quando n cresce, o primeiro se aproxima de zero e o segundo fica cada vez maior. No entanto, em cada caso, o produto tem um comportamente diferente quando n cresce. No primeiro ele se aproxima de 1 (porque na verdade é igual a 1 sempre), no segundo se aproxima de zero (porque é igual a $1/n$) e no terceiro fica cada vez maior (porque é igual a n). Daí o termo indeterminação.

Você deve recordar que, no texto sobre a velocidade do carro, nos deparamos com uma situação parecida com a do parágrafo acima. A diferença é que lá tínhamos uma indeterminação do tipo 0/0, isto é, uma fração com numerador e denominador se aproximando de zero. Para aproveitar aquela experiência, vamos reescrever a expressão de p_n na seguinte forma:

$$p_n = 2r \times n \times \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi r \frac{\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n}.$$

Assim, basta que estudemos o comportamento do número

$$\beta_n = \frac{\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n}.$$

Isto será feito através da função

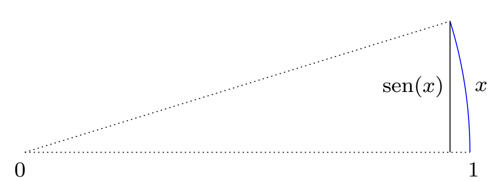
$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Como $\beta_n = f(\pi/n)$ e π/n se aproxima de zero quando n cresce, precisamos estudar o comportamento de $f(x)$ para valores x próximos de zero. Escrevemos então

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = \lim_{n\to+\infty} f(\pi/n) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}. \tag{1}$$

Embora a notação acima ainda não tenha sido introduzida formalmente, o seu significado não é complicado. Por exemplo, quando olhamos para o limite $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$, estamos fazendo a seguinte pergunta: o que acontece com a fração quando os valores de x ficam cada vez mais próximos de 0? Como no texto da velocidade do carro, temos uma fração cujo numerador e denominador se aproximam de zero. Lá, fomos capazes de fazer algumas simplificações na fração de modo a calcular o limite. Aqui a situação é mais complicada porque não está claro como podemos fazer simplificações no quociente $\text{sen}(x)/x$. Vamos primeiro usar a figura abaixo para trazer alguma luz sobre o que está acontecendo.

Note que, no círculo de raio 1, a medida em radianos de um ângulo é exatamente o comprimento do arco, indicado por x na figura, enquanto $\text{sen}(x)$ é a medida do segmento de reta vertical que forma um dos catetos do triângulo. Assim, é razoável dizer que, quando x se aproxima de zero, o comprimento do segmento de reta e do arco se aproximam um do outro, o que faria com que a fração se aproximasse de 1.



Com o auxílio de uma calculadora, podemos ainda construir a seguinte tabela:

	$x = 1$	$x = 0,5$	$x = 0,1$	$x = 0,01$
$f(x) = \text{sen}(x)/x$	0,84147	0,95885	0,99833	0,99998

Novamente, somos tentados a dizer que a fração se aproxima de 1. Isso de fato ocorre, conforme será visto nas semanas seguintes. Por ora, vamos confiar na nossa intuição para escrever o *limite trigonométrico fundamental*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

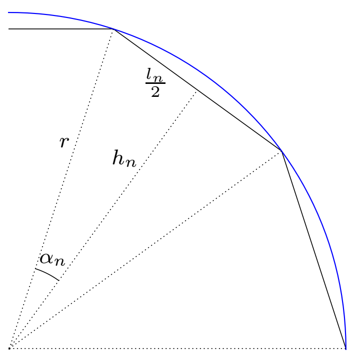
De posse dessa informação, podemos usar as igualdades em (1) para obter

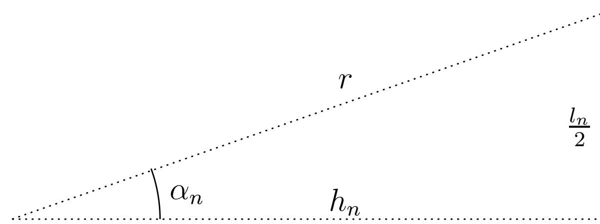
$$P = \lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} 2\pi r \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = 2\pi r \times \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = 2\pi r.$$

Assim, o perímetro da circunferência de raio $r > 0$ é igual a $2\pi r$, conforme afirmado pelos nossos professores das séries básicas.

Tarefa

Nesta tarefa, vamos usar o mesmo procedimento do texto para calcular a área do círculo de raio r. Para tanto, vamos denotar por A essa área e por a_n a área do polígono regular de n lados inscrito na circunferência, com $n \geq 3$. A área a_n será calculada como a soma da área de cada um dos n triângulos em que o polígono pode ser dividido. As figuras abaixo ilustram isso. O número h_n é a altura do triângulo.





1. Calcule os valores do cosseno e do seno do ângulo α_n para verificar que a área do triângulo é dada por $r^2 \operatorname{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n)$.

2. Conclua do item acima que
$$a_n = \pi r^2 \times \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

3. Observando que π/n se aproxima de zero quando n cresce, determine o valor do limite
$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

4. Lembrando agora que o termo que envolve o seno na expressão de a_n também se aproxima de 1, determine a área do círculo, que é dada por
$$A = \lim_{n\to+\infty} a_n = \pi r^2 \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \times \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$