Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 02 – Soluções

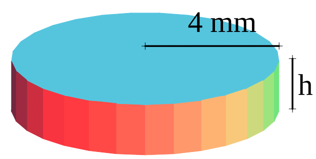
Temas abordados: Limites no ponto (conceito intuitivo e formal)

Seções do livro: 2.1 a 2.4

1) Suponha que um comprimido tenha a forma de um cilindro circular reto de raio da base igual a 4 mm, altura $h > 0$, e deva ter volume igual a 20 mm^3. Como o processo de fabricação está sujeito a erros, a altura h deve ser razoavelmente precisa, uma vez que dela depende a dosagem de medicamento que é ingerida pelo paciente.

(a) Determine, em função de h, o volume $V(h)$ do comprimido.

(b) Determine o valor h_0 para que o volume do comprimido seja igual a $V(h_0) = V_0 = 20$ mm^3.



(c) Determine, em mm, o erro máximo tolerado na altura h de maneira que $|V(h) - 20|$ seja inferior a $1/10$.

(d) Dado $\varepsilon > 0$, encontre $\delta > 0$ tal que o erro $|V(h) - 20|$ no volume do comprimido seja menor do que ε sempre que o erro na altura $|h - h_0|$ seja menor do que δ.

Soluções:

(a) O volume de um cilindro reto é dado pela área base vezes a sua altura, de modo que $V(h) = 4^2\pi h$.

(b) Basta resolver a equação $V(h_0) = 20$ para obter $h_0 = 20/(4^2\pi)$.

(c) Para estimar o erro do volume em termos do erro na altura basta notar que

$$|V(h) - 20| = |V(h) - V(h_0)| = |4^2\pi h - 4^2\pi h_0| = 4^2\pi|h - h_0|.$$

Logo $|V(h) - 20| < 1/10$, sempre que $|h - h_0| < 1/(10 \times 4^2\pi)$. Dessa forma, o erro máximo é dado por $1/(10 \times 4^2\pi)$.

(d) Basta usar as ideias do item anterior, substituindo $1/10$ por ε e considerando $\delta > 0$ como o erro máximo. Da fato,

$$|V(h) - V(h_0)| = |4^2\pi h - 4^2\pi h_0| = 4^2\pi|h - h_0| \tag{1}$$

Logo, se

$$|h - h_0| < \varepsilon/(4^2\pi)$$

Temos por (1) que

$$|V(h) - V(h_0)| < \varepsilon$$

Logo basta tomar $\delta < \varepsilon/(4^2\pi)$.

2) Uma companhia de turismo cobra uma taxa de serviço fixa de R\$ 50,00 para pacotes turísticos de valor menor ou igual a R\$ 1.000,00. Para pacotes de valor superior a R\$ 1.000,00 e menor ou igual a R\$ 5.000,00, a companhia cobra uma taxa fixa de R\$ 30,00 acrescida de 2% do valor do pacote. Para os demais pacotes, a taxa fixa é de R\$ c, acrescida de 1% do valor do pacote. Indicando por $T(x)$ o valor total da taxa de serviço cobrada por um pacote turístico no valor de x reais, julgue os itens abaixo, justificando suas respostas.

(a) O gráfico da função $T(x)$ contém o ponto $(3000, 90)$.

(b) Para $c = 100$, não é possível encontrar um pacote turístico de valor R\$ x_0 de modo que se tenha $T(x_0) = 140$.

(c) $\lim_{x\to 1000^+} T(x) = 50$.

(d) Não existe o limite $\lim_{x\to 1000} T(x)$.

(e) $\lim_{x\to 5000^+} T(x)$ não depende de c.

(f) $c = 80$ se, e somente se, $\lim_{x\to 5000} T(x) = T(5000)$.

Soluções:

Note que $0,02x$ é a maneira analítica de expressarmos 2% de um dado valor x. Logo

$$T(x) = \begin{cases} 50, & \text{se } x \in (0, 1000], \\ 30 + 0,02x, & \text{se } x \in (1000, 5000], \\ c + 0,01x, & \text{se } x \in (5000, +\infty). \end{cases}$$

(a) Como $T(3000) = 30 + 0,02 \times 3000 = 90$ o ponto $(3000, 90)$ pertence ao gráfico da função.

(b) Observe que se $T(x_0) = 140$ então $x_0 > 5000$. Daí considere $c = 100$ na expressão acima e desenhe o gráfico de T.

Para resolver os quatro últimos itens basta lembrar que $\lim_{x\to a} T(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais no ponto existem e são iguais. Nesse caso, esse valor comum é igual ao valor do limite.

(c) No cálculo de $\lim_{x\to 1000^+} T(x)$ lembre que interessam somente os valores de $T(x)$ quando x está à direita e próximo do ponto $a = 1000$. Assim,

$$\lim_{x\to 1000^+} T(x) = \lim_{x\to 1000^+} (30 + 0,02x) = 30 + 0,02 \times 1000 = 50.$$

(d) O mesmo raciocínio nos permite concluir que

$$\lim_{x\to 1000^-} T(x) = 50,$$

o que em conjunto com o item (c) nos garante que

$$\lim_{x\to 1000} T(x) = 50.$$

(e) Observe que

$$\lim_{x\to 5000^+} T(x) = 50 + c$$

(f) Aqui precisamos verificar duas afirmações. De fato, queremos saber se é verdade que:

(i) Se $c = 80$ então $\lim_{x\to 5000} = T(5000)$.

(ii) Se $\lim_{x\to 5000} = T(5000)$ então $c = 80$.

Para o subitem (i), veja que se $c = 80$

$$\lim_{x\to 5000^+} 80 + 0,01x = \lim_{x\to 5000^-} 30 + 0,02x = 130 = T(5000).$$

Para o subitem (ii), suponha que $\lim_{x\to 5000} = T(5000)$.

Em particular,

$$T(5000) = \lim_{x\to 5000^-} T(x) = 130,$$

pelo que vimos no subitem (i).

Assim, já que por hipótese

$$T(5000) = \lim_{x\to 5000^+} c + 0,01x = c + 50,$$

segue-se que $c = 80$.

3) Um gás é mantido a uma temperatura constante em um pistão. À medida que o pistão é comprimido, o volume do gás decresce com a função $V(P) = 200/P$ litros, até atingir a pressão crítica de 100 torr quando ele se liquidifica, havendo nesse momento uma variação brusca de volume. Em seguida, o seu volume passa a ser dado pela função $V(P) = -0,01P + 2$ até que seja atingida a nova pressão crítica de 150 torr, a partir da qual o volume permanece constante e igual a 0,5 litros.

(a) Determine a expressão de $V(P)$.

(b) Calcule os limites laterais $\lim\limits_{P\to P_0^-} V(P)$ e $\lim\limits_{P\to P_0^+} V(P)$ para $P_0 = 100$. Em seguida, decida sobre a existência do limite $\lim\limits_{P\to P_0} V(P)$

(c) Repita o item acima para $P_0 = 150$.

(d) O que acontece com o volume $V(P)$ para valores P próximos de zero?

Soluções:

(a) De acordo com as informações do enunciado temos que

$$V(P) = \begin{cases} 200/P, & \text{se } 0 < P \leq 100, \\ -0,01P + 2, & \text{se } 100 < P \leq 150, \\ 0,5, & \text{se } 150 < P. \end{cases}$$

(b) Temos que

$$\lim_{P\to 100^-} V(P) = \lim_{P\to 100^-} \frac{200}{P} = 2$$

e

$$\lim_{P\to 100^+} V(P) = \lim_{P\to 100^+} (-0,01P + 2) = -1 + 2 = 1.$$

Apesar dos limites laterais existirem eles não são iguais. Desse modo, concluímos que não existe limite quanto P tende para 100.

(c) Temos que

$$\lim_{P\to 150^-} V(P) = \lim_{P\to 100^-} (-0,01P + 2) = -1,5 + 2 = 0,5$$

e

$$\lim_{P\to 150^+} V(P) = \lim_{P\to 100^+} 0,5 = 0,5.$$

Os limites laterais existirem e são iguais, de modo que o limite quanto P tende para 150 existe. Mais especificamente $\lim_{P\to 150} V(P) = 0,5$.

(d) Quando P está próximo de zero o quociente $200/P$ se torna cada vez maior.

4) Considere o círculo unitário da figura abaixo, em que α denota um ângulo no intervalo $(0, \pi/2)$. O triângulo Δ_{OAB}, cuja altura está representada por h, está contido no setor circular S_{OAB}, que, por sua vez, está contido no triângulo Δ_{OCB} de altura H.

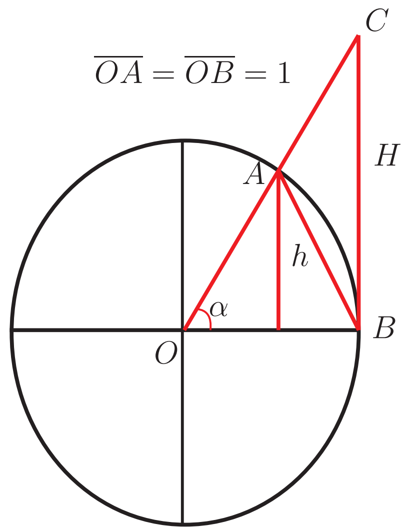
(a) Determine, em termos de h, α e H, as expressões das áreas do triângulo Δ_{OAB}, do setor circular S_{OAB} e do triângulo Δ_{OCB}. Em seguida, use a figura para comparar tais grandezas.

(b) Determine, com ajuda de funções trigonométricas convenientes, uma equação que relaciona α e h; e outra que relaciona α e H.

(c) Use os itens (a) e (b) para mostrar que se $\alpha \in (0, \pi/2)$, então vale $0 < \operatorname{sen}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

(d) Use o item (c) para mostrar que $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{sen}\alpha = 0$.

(e) Usando o mesmo método para ângulos pertencentes ao intervalo $(-\pi/2, 0)$, mostre que $\lim_{\alpha\to 0^-} \operatorname{sen}\alpha = 0$. Em seguida, conclua que $\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{sen}\alpha = 0$.



<u>**Soluções**</u>:

(a) Usando as fórmulas da área de triângulos e setores circulares, temos que

$$A_{\Delta_{OAB}} = \frac{\overline{OB}\ h}{2} = \frac{h}{2}, \quad A_{S_{OAB}} = \frac{\alpha\ \overline{OB}^2}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad A_{\Delta_{OAC}} = \frac{\overline{OB}\ H}{2} = \frac{H}{2}$$

Observe que o triângulo Δ_{OAB} está contido no setor circular S_{OAB} e, S_{OAB} está contido no triângulo Δ_{OAC}. Logo, comparando-se as áreas

$$h < \alpha < H. \tag{2}$$

(b) Note que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\overline{OA}} = h \text{ e que } H = \frac{H}{\overline{OB}} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

(c) Veja que se $0 < \alpha < \pi/2$, temos que o triângulo Δ_{OAB} está contido no setor circular S_{OAB} e, S_{OAB} está contido no triângulo Δ_{OAC}. Combinando-se (2) e (3) o resultado segue.

(d) Como $\operatorname{sen}(\alpha) = h$ e o triângulo está contido no setor circular, temos que $0 < \operatorname{sen}\alpha < \alpha$, para todo $\alpha \in (0, \pi/2)$. Segue do Teorema so Sanduíche que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{sen}\alpha = 0. \tag{4}$$

(e) Suponha que $-\pi/2 < \alpha < 0$. Considerando uma construção como na figura 2 (veja abaixo), temos: De forma análoga a que fizemos nos itens (a)-(c) concluímos que

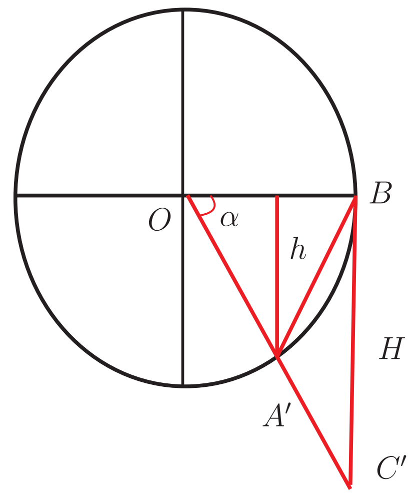
$$0 < \frac{-\text{sen }\alpha}{2} < \frac{-\alpha}{2} \tag{5}$$

Usando (4) e o Teorema do Sanduíche mostramos que

$$\lim_{\alpha \to 0^-} \text{sen}\,\alpha = 0. \tag{6}$$

Combinando-se (4) e (6) o resultado segue.

$\overline{OA'} = \overline{OB} = 1$



5) Ainda com respeito à figura do exercício acima, vamos mostrar o Limite Trigonométrico Fundamental.

(a) Sabendo que $\cos\alpha > 0$ sempre que $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ faça $\cos\alpha = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}$ e conclua que $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$.

(b) Inverta a desigualdade $\operatorname{sen}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, válida para $\alpha \in (0, \pi/2)$.

(c) Lembrando que se $\alpha \in (0, \pi/2)$ temos $\operatorname{sen}\alpha > 0$ use o item acima para mostrar que, nesse intervalo, vale $\cos\alpha < \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < 1$.

(d) Mostre que $\lim_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$.

(e) Use um procedimento análogo para ângulos pertencentes ao intervalo $(-\pi/2, 0)$ e mostre que $\lim_{\alpha\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$. Em seguida, conclua que $\lim_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$.

Soluções:

(a) Observe que como $\cos\,\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\,\alpha}$ e

$$\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\,\alpha} = \sqrt{\lim_{\alpha\to 0}\left(1-\operatorname{sen}^2\,\alpha\right)} = \sqrt{1-\left(\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{sen}\,\alpha\right)^2},$$

usando o item (e) da questão acima, obtemos que $\lim_{\alpha\to 0}\cos\,\alpha = 1$.

(b) Lembre que caso $x < y$ para $x \neq 0$ e $y \neq 0$ então

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

Assim, como $\operatorname{sen}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, então:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \forall\alpha \in (0, \pi/2).$$

(c) Lembre que caso $x < y$ e $c \geq 0$ então $cx > cy$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Logo, usando o item (b) e o fato de que $\operatorname{sen}\alpha > 0$, se $\alpha \in (0, \pi/2)$ temos que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \forall\alpha \in (0, \pi/2).$$

Como $\operatorname{sen}\alpha > 0$ segue que

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \cos\alpha, \forall\alpha \in (0, \pi/2). \tag{7}$$

(d) Basta combinar os itens (a), (b) e (c) e aplicar o Teorema do Sanduíche. De fato,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} 1 = 1 \text{ e } \lim_{\alpha\to 0^+}\cos\alpha = 1. \tag{8}$$

Como (7) é válida para todo $0 < \alpha < \pi/2$, o resultado segue combinando (7), (8) e o Teorema do Sanduíche.

(e) Lembre que caso $x < y$ e $c \leq 0$ então $cx < cy$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Logo, usando o item (b) e o fato de que $\operatorname{sen}\alpha < 0$, se $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ temos que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \forall\alpha \in (-\pi/2, 0).$$

Como $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ segue que

$$1 < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < \cos\alpha, \forall\alpha \in (0, \pi/2). \tag{9}$$

Para provar o resultado basta usar (9) e um raciocínio análogo ao aplicado no item (d).