

Produtos Notáveis

Por Robison Sá

Considerações iniciais

Os conceitos sobre os **produtos notáveis** merecem muita atenção, pois seu uso facilita cálculos, reduz o tempo de resolução e agiliza o aprendizado. O conhecimento dessa ferramenta não implica dizer que não necessitamos saber o desenvolvimento do cálculo proposto, apenas que temos mais caminhos convergentes à solução final. Utilizamos o termo *notável* para apontar sua importância, sua notabilidade e sua carência de atenção.

Os gregos, na antiguidade, faziam uso de procedimentos algébricos e geométricos exatamente iguais aos produtos notáveis modernos. É importante destacar que o uso de sua maioria foi atribuído aos pitagóricos e estão registrados na obra de Euclides de Alexandria *Elementos* na forma de representações geométricas.

Ao lidarmos com operações algébricas, perceberemos que alguns polinômios aparecem frequentemente e, ainda, exibem certa regularidade. Esses são os **produtos notáveis**. Aqui estudaremos o **quadrado da soma de dois termos**, o **quadrado da diferença de dois termos**, o **produto da soma pela diferença de dois termos**, o **cubo da soma de dois termos** e, por fim, o **cubo da diferença de dois termos**. Vamos à explanação de cada um deles.

1. O quadrado da soma de dois termos

Verifiquem a representação e utilização da propriedade da potenciação em seu desenvolvimento.

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

Onde **a** é o primeiro termo e **b** é o segundo.

Ao desenvolvermos esse produto, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, teremos:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ ou seja:}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$(4w + 3z)^2 = (4w)^2 + 2 \cdot (4w) \cdot (3z) + (3z)^2 = 16w^2 + 24wz + 9z^2$$

$$(\sqrt{5}m + n)^2 = (\sqrt{5}m)^2 + 2 \cdot (\sqrt{5}m) \cdot n + n^2 = 5m^2 + 2\sqrt{5}mn + n^2$$

2. O quadrado da diferença de dois termos

Seguindo o critério do item anterior, temos:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

Onde **a** é o primeiro termo e **b** é o segundo.

Ao desenvolvermos esse produto, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, teremos:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2, \text{ ou seja:}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

$$(5x - y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot (5x) \cdot y + y^2 = 25x^2 - 10xy + y^2$$

$$(p - q)^2 = p^2 - 2 \cdot p \cdot q + q^2 = p^2 - 2pq + q^2$$

$$(0,5w - 0,2z)^2 = (0,5w)^2 - 2 \cdot (0,5w) \cdot (0,2z) + (0,2z)^2 = 0,25w^2 - 0,2wz + 0,04z^2$$

3. O produto da soma pela diferença de dois termos

Se tivermos o produto da soma pela diferença de dois termos, poderemos transformá-lo numa diferença de quadrados.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2, \text{ ou seja:}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos

- $(4c + 3d) \cdot (4c - 3d) = (4c)^2 - (3d)^2 = 16c^2 - 9d^2$
- $(x/2 + y) \cdot (x/2 - y) = (x/2)^2 - y^2 = x^2/4 - y^2$
- $(m + n) \cdot (m - n) = m^2 - n^2$

4. O cubo da soma de dois termos

Consideremos o caso a seguir:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2 \rightarrow \text{potência de mesma base.}$$

$$(a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) \rightarrow (a + b)^2$$

Aplicando a propriedade distributiva como nos casos anteriores, teremos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo termo.

Exemplos:

- $(2x + 2y)^3 = (2x)^3 + 3.(2x)^2.(2y) + 3.(2x).(2y)^2 + (2y)^3 = 8x^3 + 24x^2y + 24xy^2 + 8y^3$
- $(w + 3z)^3 = w^3 + 3.(w^2).(3z) + 3.w.(3z)^2 + (3z)^3 = w^3 + 9w^2z + 27wz^2 + 27z^3$
- $(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

5. O cubo da diferença de dois termos

Acompanhem o caso seguinte:

$$(a - b)^3 = (a - b).(a - b)^2 \rightarrow \text{potência de mesma base.}$$

$$(a - b).(a^2 - 2ab + b^2) \rightarrow (a - b)^2$$

Aplicando a propriedade distributiva como nos casos anteriores, teremos:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, menos três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo termo.

Exemplos

- $(2 - y)^3 = 2^3 - 3.(2^2).y + 3.2.y^2 - y^3 = 8 - 12y + 6y^2 - y^3$ ou $y^3 - 6y^2 + 12y - 8$
- $(2w - z)^3 = (2w)^3 - 3.(2w)^2.z + 3.(2w).z^2 - z^3 = 8w^3 - 12w^2z + 6wz^2 - z^3$
- $(c - d)^3 = c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3$

Considerações finais

Utilizando os produtos notáveis, certamente aceleraremos o cálculo, permitindo o progresso em temas posteriores da matemática. A propriedade distributiva da multiplicação foi determinante para se chegar ao desenvolvimento dos produtos levando-os a sua fase reduzida. Jamais deveremos deixar de buscar conhecimentos mais profundos, como demonstrações de teoremas a fim de compreendermos melhor os caminhos trilhados para se chegar às pequenas fórmulas, tão úteis, como as conhecemos hoje.

“A notabilidade cognitiva do indivíduo é o reflexo de uma boa educação”

Robison Sá.

Referências bibliográficas

SOUZA, JOAMIR ROBERTO DE; PATARO, PATRÍCIA ROSANA MORENO. **Vontade de Saber Matemática, 8º ano**. São Paulo: FTD, 2009. 288p. – (Coleção Vontade de Saber).

GIOVANNI JÚNIOR, JOSÉ RUY; CASTRUCCI, BENEDICTO. **A Conquista da Matemática, 8º ano**. São Paulo: FTD, 2009. 384p. – (Coleção a Conquista da Matemática).

Arquivado em: Educação Matemática, Matemática

