Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 9

Temas abordados: Concavidade e assíntotas verticais
Seções do livro: 3.2; 1.5

1) Para cada uma das funções abaixo determine: pontos críticos, máximos e mínimos locais, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, intervalos onde f é côncava para cima e para baixo.

(a) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 4$
(b) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$
(c) $f(x) = x^3 - 12x + 5$
(d) $f(x) = x + (3/x)$
(e) $f(x) = \ln(x)$
(f) $f(x) = e^x$

2) Suponha que o número de milhares de pessoas infectadas por um vírus seja modelado pela função $N(t) = -2t^3 + at^2 + bt + c$, em que a, b e c são constantes e o tempo t é medido em anos. Suponha ainda que, no instante $t = 0$, nove mil pessoas estavam infectadas, um ano depois esse número atingiu um valor mínimo e, em seguida, cresceu até atingir um valor máximo para $t = 2$.

(a) Determine as constantes a, b e c a partir das informações dadas.
(b) Determine o número de pessoas infectadas 1, 2 e 3 anos depois do instante $t = 0$.
(c) Determine a concavidade de $N(t)$ e, em seguida, esboce o seu gráfico para $t \in [0, 3]$.

3) Para as funções abaixo você deve calcular limites laterais do tipo $x \to a^{\pm}$. Após efetuar o cálculo, decida se a reta $x = a$ é uma assíntota vertical da função.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+1}{x-3}$
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{4x+3}{(3-x)^2}$
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x+4}{2x-4}$
(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3x-4}{x-1}$
(e) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2-1}\right)$
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$

4) Para as funções f abaixo determine: pontos críticos, máximos e mínimos locais, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, intervalos onde f é côncava para cima e para baixo, assíntotas verticais. Note que as derivadas já estão dadas.

(a) $f(x) = \dfrac{16-x^2}{4(x-2)^2}$, $\quad f'(x) = \dfrac{x-8}{(x-2)^3}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2(11-x)}{(x-2)^4}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, $\quad f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x}(x-4)$, $\quad f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad f''(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(x+2)}{\sqrt[3]{x^5}}$

RESPOSTAS

1) (a) pontos críticos: $x = -2$ (mínimo local); $x = 1$ (máximo local)
crescente em $(-2, 1)$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -2)$; $(1, +\infty)$
concavidade voltada para cima em: $(-\infty, -1/2)$
concavidade voltada para baixo em: $(-1/2, +\infty)$
ponto de inflexão: $x = -1/2$

(b) pontos críticos: $x = 0$ (mínimo local); $x = 1$ (não é extremo local)
crescente em $(0, +\infty)$
decrescente em $(-\infty, 0)$
concavidade voltada para cima em: $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$
concavidade voltada para baixo em: $(1/3, 1)$
pontos de inflexão: $x = 1/3$ e $x = 1$

(c) pontos críticos: $x = -2$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -2)$; $(2, +\infty)$
decrescente em $(-2, 2)$
concavidade volta para cima em: $(0, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-\infty, 0)$
pontos de inflexão: $x = 0$

(d) pontos críticos: $x = -\sqrt{3}$ (máximo local); $x = \sqrt{3}$ (mínimo local)
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}, +\infty)$
decrescente em $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
concavidade volta para cima em: $(0, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-\infty, 0)$
pontos de inflexão: não existem

(e) pontos críticos: não existem
sempre crescente
concavidade sempre voltada para baixo
pontos de inflexão: não existem

(f) pontos críticos: não existem
sempre crescente
concavidade sempre voltada para cima
pontos de inflexão: não existem

2) (a) $a = 9$; $b = -12$; $c = 9$

(b) 4000, 5000 e 0, respectivamente

(c) côncava para cima em $(0, (3/2))$; côncava para baixo em $((3/2), 3)$

3) (a) $-\infty$

(b) $+\infty$

(c) $+\infty$

(d) 5;

(e) $-\infty$

(f) $-\infty$

O único item em que não temos assíntota vertical é o item (d), pois nele o limite quando $x \to 1$ existe e é igual a 5.

4) (a) pontos críticos: $x = 8$ (mínimo local)
crescente em: $(-\infty, 2)$; $(8, +\infty)$
decrescente em: $(2, 8)$
concavidade volta para cima em: $(-\infty, 2)$; $(2, 11)$
Observe que estaria incorreto dizer que f é côncava para cima em $(-\infty, 11)$ porque $2 \notin dom(f)$
concavidade volta para baixo em: $(11, +\infty)$
pontos de inflexão: $x = 11$
assíntotas verticais: $x = 2$

(b) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em: $(-\infty, 0)$; $(2, +\infty)$
decrescente em: $(0, 1)$; $(1, 2)$
Observe que estaria incorreto dizer que f é decrescente em $(0, 2)$ porque $1 \notin dom(f)$ concavidade volta para cima em: $(1, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-\infty, 1)$
pontos de inflexão: não existem
assíntotas verticais: $x = 1$

(c) pontos críticos: $x = 0$ (não é extremo local); $x = 1$ (mínimo local)
crescente em: $(1, +\infty)$
decrescente em: $(-\infty, 1)$
concavidade volta para cima em: $(-\infty, -2)$; $(0, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-2, 0)$
pontos de inflexão: $x = -2$; $x = 0$
assíntotas verticais: não existem