Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 14 – Soluções

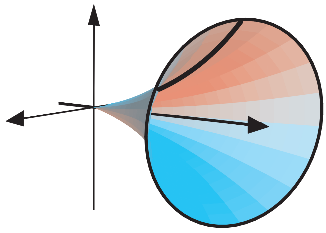
Temas abordados: Integração por partes; Volumes

Seções do livro: 8.1; 6.1; 6.2

1) Para uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do seu gráfico em torno do eixo $\mathcal{O}x$ é dado por

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Calcule esse volume no caso em que $f(x) = xe^x$, definida no intervalo $[0, 1]$, conforme ilustra a figura ao lado.



Soluções: O volume em questão é igual a $\pi \int_0^1 x^2 e^{2x} \mathrm{d}x$. A fim de obter uma primitiva para a função $x^2 e^{2x}$ vamos fazer duas integrações por partes.

Inicialmente, escolhemos $u = x^2$ e $dv = e^{2x} dx$ para obter

$$\int x^2 e^{2x} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int x e^{2x} \mathrm{d}x.$$

Na integral do lado direito escolhemos agora $u = x$ e $dv = e^{2x} dx$ e obtemos

$$\int x^2 e^{2x} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} \mathrm{d}x = e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + K.$$

Denotando por $G(x)$ a função do lado direito da igualdades acima podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar o volume como segue

$$V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} \mathrm{d}x = \pi(G(1) - G(0)) = \frac{\pi(e^2 - 1)}{4}.$$

2) A figura ao lado ilustra o gráfico da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$. A área $A(R)$ sob esse gráfico entre $x = 0$ e $x = R$ é dada pela integral

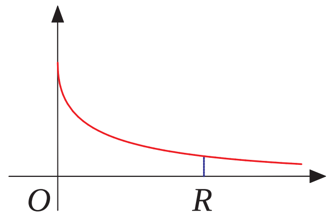
$$A(R) = \int_0^R e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

(a) Use uma mudança de variáveis para transformar a integral indefinida $\int e^{-\sqrt{x}}\, dx$ em uma outra cujo integrando não envolva a função raiz quadrada.

(b) Calcule a integral do item anterior usando integração por partes.

(c) Usando os resultados anteriores, determine explicitamente a função $A(R)$.

(d) Calcule o limite $\lim\limits_{R\to\infty} A(R)$ usando a regra de H'Lôpital, e verifique se a área sob o gráfico da $f(x)$, para $x \in [0, \infty)$, é finita.



<u>**Soluções**</u>:

(a) Usando a substituição $x = t^2$ com $t > 0$, tem-se que $dx = 2t\, dt$, e portanto

$$\int e^{-\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \int e^{-\sqrt{t^2}} 2t\, \mathrm{d}t = 2 \int te^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

(b) Usando integração por partes com as escolhas $u = t$ e $dv = e^{-t}dt$, tem-se que

$$2 \int te^{-t}\, \mathrm{d}t = 2 \left[t(-e^{-t}) - \int -e^{-t}\, \mathrm{d}t \right] = 2(-te^{-t} - e^{-t}) + C = -2\left(\frac{t+1}{e^t}\right) + K.$$

(c) Voltando à variável $x = t^2$, segue-se que

$$A(R) = \int_0^R e^{-\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = -2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{e^{\sqrt{x}}}\right)\Big|_0^R = 2 - 2\left(\frac{\sqrt{R}+1}{e^{\sqrt{R}}}\right).$$

(d) Usando a regra de L'Hôpital, tem-se

$$\lim_{R\to\infty} \left(\frac{\sqrt{R}+1}{e^{\sqrt{R}}}\right) = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{R}}}{\frac{1}{2\sqrt{R}} e^{\sqrt{R}}}\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{R}}} = 0,$$

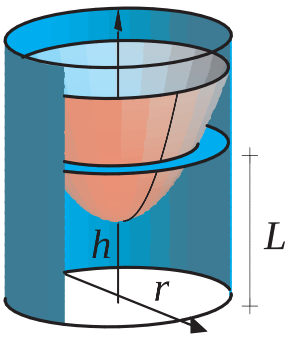
e portanto

$$\lim_{R\to\infty} A(R) = \lim_{R\to\infty} 2 - 2 \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\sqrt{R}+1}{e^{\sqrt{R}}}\right) = 2.$$

Assim, a área sob o gráfico da $f(x)$, para $x \in [0, \infty)$, é finita e igual a 2.

3) Considere um recipiente cilíndrico de raio $r = 5$ cm, inicialmente em repouso com água até a altura $L = 10$ cm. Em seguida, o recipiente começa a girar até que, juntamente com a água, alcance uma velocidade angular constante igual a ω rad/s. Nesse caso, a superfície da água corresponde à rotação, em torno do eixo $\mathcal{O}y$, do gráfico de uma função $f(x)$, com $x \in [0, r]$. Não havendo perda de água, pode-se mostrar que $f(x) = h + \omega^2 x^2/2g$, onde $g = 980$ cm/s^2 é a aceleração da gravidade e h é uma constante que depende de ω.

(a) O volume V do sólido de rotação do gráfico de $f(x)$ em torno do eixo $\mathcal{O}y$ é igual a $V = \int_0^r 2\pi\, x\, f(x)\, dx$. Use essa informação para calcular o volume de água no recipiente em termos de ω e h.



(b) Usando o item anterior, obtenha h como função de ω.

(c) Determine o valor de ω para que h seja igual à metade da altura da água em repouso.

<u>Soluções</u>:

(a) Temos que

$$V = 2\pi \int_0^r x \left(h + \frac{\omega^2\, x^2}{2\, g} \right) dx.$$

A função $F(x) = h\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\omega^2}{2g}\dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva para o integrando acima. Desse modo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$V = 2\pi(F(r) - F(0)) = \pi\, h\, r^2 + \frac{\pi\, \omega^2\, r^4}{4\, g}.$$

(b) Por hipótese, não há perda de água. Sendo assim, como o volume em repouso é $\pi\, r^2\, L$, segue da igualdade acima que

$$V = \pi\, h\, r^2 + \frac{\pi\, \omega^2\, r^4}{4\, g} = \pi\, r^2\, L$$

Isolando h da igualdade acima, obtemos

$$h(\omega) = L - \frac{\omega^2\, r^2}{4\, g}.$$

(c) O valor de $\omega > 0$ para o qual $h(\omega) = L/2$ é a solução da equação

$$L - \frac{\omega^2\, r^2}{4\, g} = \frac{L}{2}$$

Resolvendo, obtemos $\omega = \sqrt{2\, L\, g}/r$.

4) Suponha que, juntamente com o combustível, um foguete tenha massa inicial de m_0 kg, e que o combustível seja consumido a uma taxa de r kg/s. Assim, a massa do foguete no instante $t \geq 0$ é dada por $m(t) = m_0 - r\,t$. Suponha ainda que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante de v_0 m/s em relação ao foguete. Nesse caso, indicando por g a aceleração da gravidade e considerando valores pequenos de t, a velocidade do foguete em relação à Terra pode ser modelada por

$$v(t) = -g\,t - v_0 \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

(a) Determine uma primitiva para a função $\ln(x)$ usando integração por partes.

(b) Use o item anterior e substituição de variáveis para determinar uma primitiva para a função $\ln(m(t)/m_0)$.

(c) Determine a altura $s(t)$ do foguete em um instante $t > 0$, supondo $s(0) = 0$.

(d) Seja t_0 o instante em que $m(t_0)$ é igual a 90% da massa inicial m_0. Calcule a altura do foguete no instante t_0 em termos das constantes m_0, r, v_0, g e $\ln(9/10)$.

Soluções:

(a) Escolhendo $u = \ln(x)$ e $dv = dx$, obtém-se $du = dx/x$ e $v = x$. Assim, usando integração por partes, segue-se que

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\,\ln(x) - \int x\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x(\ln(x) - 1) + K.$$

(b) Usando a substituição $u = m(t)/m_0$, tem-se $du = (1/m_0)m'(t)\,dt$, onde $m'(t) = -r$. Segue-se que $(-m_0/r)\,du = dt$. Substituindo na integral de $\ln(m(t)/m_0)$ e usando o item anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) \mathrm{d}t &= \frac{-m_0}{r} \int \ln(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{-m_0}{r}\,u\,(\ln(u) - 1) + K_1 \\
&= \frac{-m(t)}{r}\left(\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - 1\right) + K_1.
\end{aligned}$$

(c) Como $s'(t) = v(t)$, podemos usar a equação satisfeita por $v(t)$ e o item acima para obter

$$s(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\frac{m(t)}{r}\left(\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - 1\right) + K_1.$$

Fazendo $t = 0$ e lembrando que $s(0) = 0$, concluímos que $K = v_0\dfrac{m_0}{r}$.

(d) O instante t_0 é aquele para o qual $m(t_0) = m_0 - r\,t_0 = (9/10)\,m_0$, isto é, $t_0 = m_0/(10\,r)$. Substituindo esse valor na expressão de $s(t)$, obtém-se

$$s(t_0) = -\frac{1}{2}\,g\,\left(\frac{m_0}{10\,r}\right)^2 + v_0\frac{9\,m_0}{10\,r}\left(\ln\left(\frac{9}{10}\right) - 1\right) + v_0\frac{m_0}{r}.$$

5) Suponha que uma pressão sonora provoque a vibração da membrana do tímpano de uma pessoa e que a velocidade $v(t)$ de um ponto da membrana seja dada por $v(t) = 2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$.

(a) Determine a integral indefinida da função $v(t)$.

(b) Determine a posição $s(t)$ do ponto da membrana supondo que $s(0) = 0$.

(c) Determine o comportamento de $s(t)$ após um longo período de tempo, isto é, $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)$.

Soluções:

(a) Integrando por partes com $u = \operatorname{sen}(t)$ e $\mathrm{d}ve^{-t}\mathrm{d}t$ obtemos

$$\int e^{-t}\operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t = -e^{-t}\cos(t) - \int e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t.$$

A última integral acima pode ser feita por partes novamente, agora escolhendo $u = e^{-t}$ e $\mathrm{d}v = \cos(t)$, de modo que obtemos

$$\int e^{-t}\operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t) - \int e^{-t}\operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t.$$

Passando a última integral para o lado esquerdo da primeira igualdade e acrescentando a constante de integração obtemos

$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = 2\int e^{-t}\operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t = -e^{-t}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) + K$$

(b) Como $0 = s(0) = -1 + K$, concluímos que $K = 1$. Portanto

$$s(t) = 1 - e^{-t}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)).$$

(c) Uma vez que $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ e as funções seno e cosseno são limitadas, segue dos dois itens acima que

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = 1 - \frac{\operatorname{sen}(t) + \cos(t)}{e^t} = 1.$$