Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Propriedades do limite

(solução da tarefa)

Vamos supor que f seja limitada em um conjunto do tipo $I = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, para algum $\delta > 0$ pequeno. Isso significa que $|f(x)| \le M$, para todo $x \in I$. Logo, temos que

$$|f(x)g(x)| \le |g(x)|M,$$

ou ainda,

$$-|g(x)|M \le f(x)g(x) \le |g(x)|M, \qquad \forall\, x \in I. \tag{1}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, podemos facilmente verificar que $\lim_{x \to a} |g(x)| = 0$. Logo

$$\lim_{x \to a} |g(x)|M = 0 \cdot M = 0.$$

Assim, podemos tomar o limite em (1) e usar o Teorema do Confronto para concluir que

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

Para a segunda parte basta observar que a função seno é limitada, pois

$$\left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \le 1, \qquad \forall\, x \ne 0.$$

Uma vez que $r > 0$, temos $\lim_{x \to 0} |x|^r = 0$. Logo, segue da primeira parte da tarefa que

$$\lim_{x \to 0} |x|^r \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Observe que o caso $r = 2$ foi tratado em um dos exemplos do texto.