Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Volume de um gás em um pistão

(solução da tarefa)

Vamos lembrar que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}, & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 4, \\ x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e observar, inicialmente, que domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Ela é contínua nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ e $(4, \infty)$. Assim, para qualquer que seja a em um destes intervalos, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, de modo que $x = a$ não pode ser assíntota vertical. Resta considerar as retas $x = 0$ e $x = 4$.

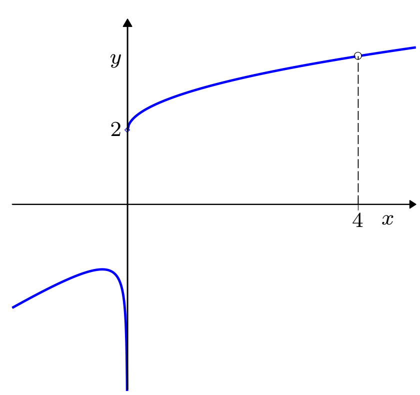
Temos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

A existência do limite lateral acima não descarta ainda a reta $x = 0$ como assíntota. Precisamos ainda ver o que ocorre à esquerda. Temos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = -\infty.$$

A igualdade acima ocorre porque o numerador tende para 1 e o denominador para zero por valores negativos. Assim, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical.



Vamos agora considerar $x = 4$. Na vizinhança deste ponto a função vale $(x-4)/(\sqrt{x}-2)$, de modo que o denominador tende para zero. Vale lembrar que este fato, sozinho, não implica que temos um limite infinito. Isto porque, neste caso, o numerado também tende para zero quando $x \to 4$. Um cálculo conhecido mostra que

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{(\sqrt{x}-2)} \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} (\sqrt{x}+2) = 4,$$

o que mostra que $x = 4$ não é assíntota vertical.