Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 3

Temas abordados: Limite laterais e continuidade
Seções do livro: 1.5; 1.6

1) Explique o que significa dizer que uma função f é contínua no ponto $x = a$.

2) Para cada uma das funções f abaixo, verifique se existe uma função contínua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$. Em caso afirmativo, determine $F(x)$, em caso negativo, explique porque tal função não pode existir.

(a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

3) Decida se a função função $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1, \\ 1/2 & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $x = 1$.

4) Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que a função $f(x) = \begin{cases} 1 + ax & \text{se } x \leq 0, \\ x^4 + 2a & \text{se } x > 0, \end{cases}$ seja contínua em $x = 0$.

5) Determine a, $b \in \mathbb{R}$ tal que a função $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2 - x} & \text{se } x < 1, \\ ax + b & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ |x^2 - 7x + 12| & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$, seja contínua.

6) Utilizando o Teorema do Valor Intermediário, enontre um intervalo de comprimento 1 que contenha uma raiz para cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = x^3 + x - 1$ (b) $g(x) = x^3 + 3x - 5$

7) Utilizando o Teorema do Valor Intermediário, verifique que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{sen}(x) = x - 1.$$

8) A alíquota da conta de água é crescente! Isto quer dizer que quanto mais se consome, mais caro fica o preço do m^3 de água. Suponha que ao se consumir x m^3 de água/mês, o valor mensal a ser pago seja de $q(x)$ reais. Quando x é menor ou igual a 10; maior que 10 e menor que 15; maior ou igual a 15, paga-se, respectivamente, $1,60x$; $3,00x + a$; $6,40x + b$, onde a e b são constantes reais. Assim,

$$q(x) = \begin{cases} 1,6x & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 3x + a & \text{se } 10 < x < 15, \\ 6,4x + b & \text{se } x \geq 15. \end{cases}$$

(a) Determine o valor de a de forma que $q(x)$ seja contínua em $x = 10$.

(b) Usando o valor de a calculado acima, determine $\lim_{x \to 15^-} q(x)$.

(c) Sabendo que $q(x)$ é contínua em $x = 15$, encontre o valor de b.

(d) Faça um esboço do gráfico de $q(x)$.

9) Um gás é mantido a uma temperatura constante em um pistão. À medida que o pistão é comprimido, o volume do gás decresce com a função $V(P) = 200/P$ litros, até atingir a pressão crítica de 100 torr quando ele se liquidifica, havendo nesse momento uma variação brusca de volume. Em seguida, o seu volume passa a ser dado pela função $V(P) = -0,01P + 2$ até que seja atingida a nova pressão crítica de 150 torr, a partir da qual o volume permanece constante e igual a 0,5 litros.

(a) Determine a expressão de $V(P)$.

(b) Calcule os limites laterais $\lim\limits_{P \to P_0^-} V(P)$ e $\lim\limits_{P \to P_0^+} V(P)$ para $P_0 = 100$. Em seguida, decida sobre a existência do limite $\lim\limits_{P \to P_0} V(P)$

(c) Repita o item acima para $P_0 = 150$.

(d) O que acontece com pressão $V(P)$ para valores P próximos de zero?

10) Suponha que um painel solar consiga gerar uma quantidade de energia $E = I\text{sen}(\alpha)$ kilojoules, em que I é a intensidade luminosa e α o ângulo de incidência entre os raios de luz e o painel. Para um determinado dia, o ângulo α e a intensidade luminosa são dados por $\alpha(t) = \frac{\pi}{12}t$ e $I(t) = 6t - \frac{1}{2}t^2$, onde t é o tempo medido em horas a partir do nascer do sol, $0 \leq t \leq 12$. É claro que para valores de $t \in (12, 24]$ a energia gerada é nula, pois o painel solar não funciona durante a noite.

(a) Obtenha a expressão de $E(t)$ em função de t, para todo $t \in [0, 24]$.

(b) Determine os valores de $E(2)$ e $E(6)$. Em seguida, decida se existe $t_0 \in [2, 6]$ tal que $E(t_0) = 13$, justificando sua resposta .

(c) Decida se a função E é contínua no ponto $t = 12$, justificando sua resposta.

11) Um dos elevadores mais rápidos do mundo, localizado no Taipei Financial Center, subia com velocidade constante de 10 m/s, quando subitamente, após 5 segundos de sua partida, suas cordas de sustentação se partem. Felizmente, neste momento, não há ninguém em seu interior. A função que descreve a altura do elevador em relação ao solo é dada então pela seguinte expressão

$$s(t) = \begin{cases} 10t + 100, & \text{se } \ 0 < t \leq 5 \\ 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2, & \text{se } \ 5 < t < t_A \end{cases}$$

onde t_A é o tempo de aterrissagem, a altura é dada em metros e o tempo é dado em segundos.

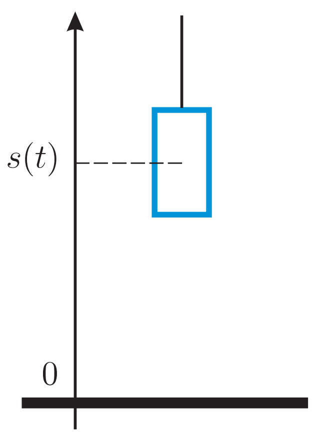
(a) Calcule o seguinte limite lateral direito da posição $\lim\limits_{t \to 5^+} s(t)$.

(b) A função s é contínua em $t = 5$?

(c) Calcule o seguinte limite lateral direito da velocidade média entre os instantes t e 5

$$\lim_{t \to 5^+} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}.$$

(d) Existe o limite da velocidade média entre os instantes t e 5 quando t tende à 5?



RESPOSTAS

1) A função f é contínua no ponto $x = a$ se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Desse modo, o ponto a tem que estar no domínio de f, o limite nesse ponto deve existir e coincidir com o valor da função no ponto.

2) (a) Não, pois não existe o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$. Esse último não existe porque os limites laterais, apesar de existirem, são diferentes.

   (b) $F(x) = x + 2$

3) Sim, pois $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{2} = f(1)$.

4) $a = 1/2$

5) $a = 3$, $b = -4$

6) (a) $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$. Como f é contínua em $[0,1]$ segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$

   (b) $[1,2]$

7) Observe que é equivalente obter uma raiz da função $h(x) = x - 1 - \operatorname{sen}(x)$.

8) (a) Como

$$\lim_{x\to 10^-} q(x) = 16 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 10^+} q(x) = 30 + a,$$

a condição para que exista o limite no ponto $x = 10$ é que $16 = 30 + a$, isto é, $a = -14$. Para esse valor de a temos que $\lim_{x\to 10} q(x) = 16 = q(10)$, e portanto a função é contínua nesse ponto.

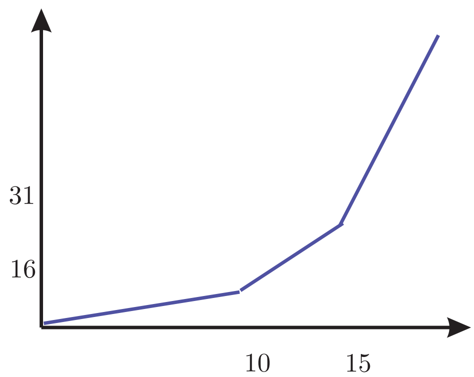
   (b) Temos que $\lim_{x\to 15^-} q(x) = \lim_{x\to 15^-} (3x - 14) = 31$.

   (c) Como $\lim_{x\to 15^-} q(x) = 45 - a = 31$ e

$$\lim_{x\to 15^+} q(x) = \lim_{x\to 15^+} (6,4\,x + b) = 96 + b,$$

então q é contínua em $x = 15$ se $b = -65$.

   (d) O gráfico está esboçado abaixo.



9) (a) De acordo com as informações do enunciado temos que

$$V(P) = \begin{cases} 200/P, & \text{se } 0 < P \leq 100, \\ -0,01P + 2, & \text{se } 100 < P \leq 150, \\ 0,5, & \text{se } 150 < P. \end{cases}$$

(b) Temos que

$$\lim_{P\to 100^-} P(V) = \lim_{P\to 100^-} \frac{200}{P} = 2$$

e

$$\lim_{P\to 100^+} P(V) = \lim_{P\to 100^+} -0,01P + 2 = -1 + 2 = 1.$$

Apesar dos limites laterais existirem eles não são iguais. Desse modo, concluímos que não existe limite quanto P tende para 100.

(c) Temos que

$$\lim_{P\to 150^-} P(V) = \lim_{P\to 100^-} -0,01P + 2 = -1,5 + 2 = 0,5$$

e

$$\lim_{P\to 150^+} P(V) = \lim_{P\to 100^+} 0,5 = 0,5.$$

Os limites laterais existirem e são iguais, de modo que o limite quanto P tende para 150 existe. Mais especificamente $\lim_{P\to 150} P(V) = 0,5$.

(d) Quando P está próximo de zero o quociente $200/V$ se torna cada vez maior.

10) (a) De acordo com o enunciado temos

$$E(t) = \begin{cases} \left(6t - \dfrac{t^2}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) & \text{se } 0 \le t \le 12, \\ 0 & \text{se } 12 < x \le 24. \end{cases}$$

(b) Como $E(2) = 5$ e $E(6) = 18$ então $E(2) < 13 < E(6)$. Como a função E é contínua em $[2, 6]$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $t_0 \in [2, 6]$ tal que $E(t_0) = 13$.

(c) Como polinômios são contínuos e a função seno é contínua, segue diretamente da definição que a função E é contínua em $[0, 12) \cup (12, 24]$. A fim de verificar que E é também contínua em $t = 12$ note que

$$\lim_{t\to 12^-} E(t) = \lim_{t\to 12^+} E(t) = 0 = E(12).$$

Desse modo a função é contínua em todo o intervalo $[0, 24]$.

11) (a) Para valores de $t > 5$, temos que $s(t) = 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2$, de onde segue que

$$\lim_{t\to 5^+} s(t) = \lim_{t\to 5^+} 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2 = 150.$$

(b) Para valores de $t \le 5$, temos que $s(t) = 10t + 100$, de onde segue que

$$\lim_{t\to 5^-} s(t) = \lim_{t\to 5^-} 10t + 100 = 150$$

e que

$$s(5) = 10(5) + 100 = 150.$$

Utilizando o item anterior, segue que

$$\lim_{t\to 5^-} s(t) = s(5) = \lim_{t\to 5^+} s(t),$$

o que mostra que a função s é contínua em $t = 5$.

(c) Para valores de $t > 5$, temos que $s(t) = 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2$. Como $s(5) = 150$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 5^+} \frac{s(t) - s(5)}{t-5} &= \lim_{t\to 5^+} \frac{(150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2) - 150}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5^+} \frac{10(t-5) - 5(t-5)^2}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5^+} 10 - 5(t-5) = 10. \end{aligned}$$

(d) Para valores de $t \le 5$, temos que $s(t) = 10t + 100$, de onde segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 5^-} \frac{s(t) - s(5)}{t-5} &= \lim_{t\to 5^-} \frac{10t + 100 - 150}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5^-} \frac{10t - 50}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5^-} \frac{10(t-5)}{t-5} = 10. \end{aligned}$$

Como os dois limites laterais existem e coincidem, segue que existe o limite

$$\lim_{t\to 5} \frac{s(t) - s(5)}{t-5} = 10.$$