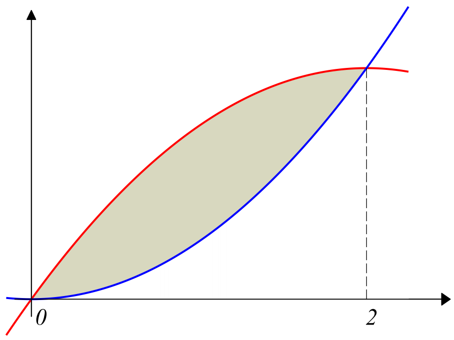
Matemática 1

Área entre curvas

O objetivo da nossa tarefa é calcular a área da região S delimitada pelos gráficos das parábolas $f(x) = (4x - x^2)$ e $g(x) = x^2$, conforme ilustrado na figura abaixo.



O primeiro passo é resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad 4x - x^2 = x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x(x-2) = 0, \end{aligned}$$

e portanto as funções são iguais nos pontos $a = 0$ e $b = 2$. O desenho ao lado mostra que, no intervalo $[a, b]$, uma das funções está sempre por cima da outra.

Vamos mostrar que, independete do desenho, esta é uma consequência do TVI-Teorema do Valor Intermediário.

De fato, considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$ definida para $x \in [0, 2]$. Vamos escolher um ponto arbitrário $x_0 \in (0, 2)$, digamos $x_0 = 1$, e calcular

$$h(x_0) = h(1) = f(1) - g(1) = 3 - 1 = 2 > 0.$$

Observando que o sinal de $h(1)$ é positivo, afirmamos que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 2]$. De fato, suponha que para algum ponto $x_1 \in (0, 1)$ temos que $h(x_1) < 0$. Aplicando o TVI no intervalo $[x_1, 1]$ e lembrando que $h(x_1) < 0 < h(1)$, concluiríamos que h possui uma raiz no intervalo $(x_1, 1)$. Mas isto não pode ocorrer pois $x = 0$ e $x = 2$ são raízes **consecutivas** de h. O mesmo raciocínio mostra que h não pode ficar negativa no intervalo $[1, 2]$.

Vamos agora calcular a área da aproximação A_n obtida quando dividimos o intervalo $[0, 2]$ em n intervalos de tamanho $\Delta x = (2-0)/n = 2/n$. Para a altura do k-ésimo retângulo vamos escolher o valor da função no ponto x_k que é o extremo direito do k-ésimo intervalo, isto é

$$x_k = a + k\Delta x = 0 + k\frac{2}{n} = \frac{2k}{n}.$$

A área do k-ésimo retângulo é dada por

$$[f(x_k) - g(x_k)]\Delta x = \left[4\frac{2k}{n} - \left(\frac{2k}{n}\right)^2 - \left(\frac{2k}{n}\right)^2\right]\frac{2}{n} = \left[\frac{8k}{n} - \frac{8k^2}{n^2}\right]\frac{2}{n} = \frac{16}{n^2}k - \frac{16}{n^3}k^2.$$

Assim, utilizando as fórmulas para as somas $\sum_{k=1}^{n} k$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2$ apresentadas no texto, podemos calcular a aproximação A_n:

$$\begin{aligned} A_n = \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - g(x_k)]\Delta x &= \frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{16}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{16}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

O limite do primeiro termo acima pode ser calculado da seguinte forma

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{16}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 8.$$

Para o segundo temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{16}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to+\infty} 16\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{6n}\right) = 16\cdot\frac{2}{6} = \frac{16}{3}.$$

Logo

$$\text{área}(S) = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{16}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Para finalizar, vamos observar que a área calculada acima pode ser representada em termos de integrais definidas da seguinte forma

$$\text{área}(S) = \int_0^2 [(4x - x^2) - (x^2)]dx.$$