Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Concentração de um medicamento

(solução da tarefa)

Vamos determinar as assíntotas da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-4}.$$

Começamos pelas horizontais. Como o domínio da função é $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, podemos fazer $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$. Temos que

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-4} = \frac{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)}.$$

Quando fazemos $x \to -\infty$, podemos assumir que $x < 0$, de modo que $|x| = -x$. Assim, segue da expressão acima que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = 1.$$

Assim, temos a **assíntotas horizontais** $y = -1$ **e** $y = 1$.

Para encontrar as assíntotas verticais observamos primeiro que a função é contínua. Assim, se $a \in \operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Deste modo, a única possível assíntota seria $x = 2$. Neste ponto, temos que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-4} = -\infty,$$

pois o numerador se aproxima de $\sqrt{17} > 0$ e o denominador tende para zero por valores negativos. Isto mostra que a reta $x = 2$ **é a única assíntota vertical**. Vamos calcular o limite pela direita para que possamos entender bem o comportamento de f para valores próximos e maiores do que $x = 2$. Temos

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-4} = +\infty,$$

pois agora o denominador tende a zero por valores positivos.

Com as informações destacadas acima podemos inferir que o gráfico de f tem o aspecto mostrado abaixo