Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

A reta tangente

(solução da tarefa)

A inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é dada pelo limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a},$$

uma vez que $f(x)=\sqrt{x}$. Como o numerador e o denominador tendem para zero, temos uma indeterminarão. Vamos rescrever o quociente usando o seguinte artifício

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(x-a)}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}.$$

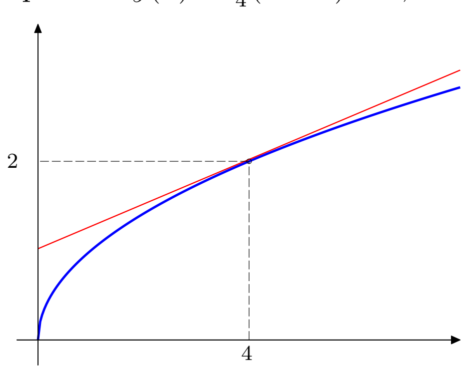
O último denominador acima tende para $\sqrt{a}+\sqrt{a} = 2\sqrt{a} \neq 0$, quando $x \to a$. Logo,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Agora basta lembrar que a equação da reta que passa por (x_0, y_0) e tem inclinação m é dada por $y-y_0 = m(x-x_0)$. No caso da reta tangente temos $(x_0, y_0) = (a, f(a))$ e $m = f'(a)$, de modo que $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. Substituindo os valores e isolando $y(x)$ obtemos

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + \sqrt{a}.$$

Antes de terminar você deve observar que a equação acima de fato define uma reta. Apesar da expressão envolver x e a, a variável ali é somente x. Estamos pensando que o número $a > 0$ está fixado. Por exemplo, se escolhemos $a = 4$ então $f(a) = f(4) = \sqrt{4} = 2$, e a reta fica com a seguinte expressão $y(x) = \frac{1}{4}(x-4)+2$, ou ainda, $y = \frac{x}{4}+1$.



Reta tangente