Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Derivada de algumas funções elementares

Vamos lembrar que a função f é derivável no ponto $x = a$ se existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Conforme vimos em um texto anterior, a derivada de uma função tem diversas interpretações, dependendo do contexto. Neste texto estamos interessados somente em calcular a derivada de algumas funções elementares.

Exemplo 1. Se $m \in \mathbb{R}$ e $f(x) = m$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{m - m}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Assim, uma função constante tem derivada em todos os pontos e esta derivada vale zero. Geometricamente, isso significa que em qualquer ponto $(a, f(a))$ a reta tangente ao gráfico é horizontal. $\square$

Exemplo 2. Seja $f(x) = mx + b$, m, $b \in \mathbb{R}$. Temos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[m(a+h) + b] - [ma + b]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m \cdot h}{h} = m,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. O gráfico da função f é uma reta de inclinação m e a conta acima mostra que, em cada ponto $(a, f(a))$, a inclinação da reta tangente ao gráfico é também igual a m. De fato, o que ocorre é que a reta tangente coincide com a própria reta. $\square$

Exemplo 3. Se $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{(x-a)} \\ &= a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + a^2 \cdot a^{n-2} + \cdots + a^{n-2} \cdot a + a^{n-1} = na^{n-1}, \end{aligned}$$

para cada $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Dada uma função f podemos construir uma nova função f' que chamaremos de função derivada de f. Esta função associa, para cada elemento a onde f é derivável, a sua derivada $f'(a)$. Quando a função f tem derivada em todos os seus pontos, o domínio da sua derivada f' é o mesmo domínio de f e dizemos que a função é derivável.

Exemplos 1, 2 e 3 (revistados). As funções constante, $f(x) = mx + b$ e $g(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, são deriváveis e

$$(m)' = 0, \qquad (mx+b)' = m, \qquad (x^n) = nx^{n-1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 4. Suponha que f é derivável no ponto $x = a$ e $f(a) \neq 0$. Vamos verificar que a função $1/f(x)$ é também derivável em $x = a$. Para isto, primeiro simplificamos o quociente de Newton como se segue

$$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a} = -\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\frac{1}{f(x)f(a)}.$$

Fazendo $x \to a$ e lembrando que f é derivável obtemos

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -1 \times \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)f(a)} = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.$$

$\square$

Exemplo 5. Vamos calcular a derivada de $f(x) = x^n$ quando n é um *inteiro negativo*. Para isto, observe primeiro que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = -m$. Deste modo, podemos usar os dois exemplos anteriores para calcular

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1},$$

para todo $x \neq 0$. Obviamente, no ponto $x = 0$ a função x^n não pode ser derivável quando n é negativo, porque ela não está nem definida neste ponto. $\square$

Exemplo 6. Juntando os Exemplos 3 e 5, podemos escrever $(x^n)' = nx^{n-1}$, sempre que $n \in \mathbb{Z}$. Pode-se provar que

$$(x^r)' = rx^{r-1},$$

para qualquer potência $r \in \mathbb{R}$. A fórmula acima é conhecida como *regra da potência* para derivadas. $\square$

Exemplo 7. Vamos calcular a derivada da função $\operatorname{sen}(x)$. Para tanto, note incialmente que a fórmula do seno de uma soma nos permite escrever

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h)+\operatorname{sen}(h)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{h}\\ &= \operatorname{sen}(x)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\cos(x)\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right).\end{aligned}$$

Lembrando agora que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}=1, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0, \tag{1}$$

podemos calcular

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}(x))' &= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen}(x)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\cos(x)\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)\right]\\ &= \operatorname{sen}(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1=\cos(x).\end{aligned}$$

Na tarefa você vai provar que a função coseno tem como derivada a função $-\operatorname{sen}(x)$. Assim, temos

$$(\operatorname{sen}(x))'=\cos(x), \qquad (\cos(x))'=-\operatorname{sen}(x),$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. $\square$

Usando somente a definição de derivada e as propriedades do limite podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 1. *Se $c\in\mathbb{R}$ e as funções f e g são deriváveis em $x=a$, então*

1. $(cf)'(a)=cf'(a)$;
2. $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$;
3. $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$.

Vamos provar o item 2 acima. Temos que

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]=f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

Os outros itens podem ser provados de maneira análoga.

Usando o teorema acima e os exemplos anteriores, podemos agora calcular a derivada de várias funções. Por exemplo

$$\left(3\operatorname{sen}(x)+5\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)'=3(\operatorname{sen}(x))'+5(x^{1/2})'-(x^{-1})'=3\cos(x)+\frac{5}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}.$$

Antes de terminar o texto vamos observar que existem outras notações para a derivada de uma função, além de f'. Destacamos aqui somente uma delas, que é $\frac{d}{dx}f(x)$, embora você possa encontrar outras dependo do livro que está usando. Com esta outra notação temos, por exemplo,

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x), \qquad \frac{d}{dx}(f(x)) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x).$$

Os exemplos tratados neste texto (e na tarefa a seguir) nos permitem construir a seguinte tabela de derivadas:

função	derivada	
$mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$	m	Exemplo 2
x^r, com $r \in \mathbb{R}$	rx^{r-1}	Exemplos 3, 5 e 6
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	Exemplo 7
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	Tarefa
$cf(x)$, com $c \in \mathbb{R}$	$cf'(x)$	Teorema 1
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$	Teorema 1

Você deve ter notado que a tabela acima não contempla todas as funções básicas que conhecemos. Por exemplo, a função $\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ não aparece na tabela. Olhando para o Teorema 1, seria natural perguntarmos se a derivada de um quociente de funções deriváveis não é o quociente das derivadas. Se assim fosse, seria fácil calcularmos a derivada da tangente, uma vez que sabemos a derivada do seno e do coseno. De fato, o produto e o quociente de funções deriváveis é ainda derivável. Contudo, as regras para calcular tais derivas são ligeiramente mais complicadas e serão objeto de um outro texto.

Tarefa

Nesta tarefa vamos calcular a derivada da função coseno, a partir dos passos abaixo:

1. Lembrando que $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)$, escreva o quociente

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

   em termo das expressões que aparecem na equação (1) do texto;

2. Procedendo como no Exemplo 7, faça $h \to 0$ na expressão acima para calcular a derivada de $\cos(x)$.