Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Potencial gerado por 2 cargas elétricas positivas

(solução da tarefa)

Lembre que
$$P(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2-1}, & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{2x}{x^2-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Para calcular o limite lateral em $x = -1$ temos que analisar a expressão $2/(x^2-1)$ para valores de x próximos de -1, considerando somente aqueles que são maiores que -1. Note que o numerador se aproxima de 2 (porque é constante) enquanto que o denominador se aproxima de zero. Para analisar o sinal do denominador observamos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Uma vez que $x \to -1^+$ temos que $x + 1 > 0$, de modo que o denominador tende para zero por valores negativos. Assim
$$\lim_{x \to -1^+} P(x) = \lim_{x \to 1^-} -\frac{2}{x^2-1} = +\infty,$$
o que mostra que $x = -1$ é uma assíntota vertical de P.

Como a função não está definida para valores $x < -1$, não faz sentido perguntar pelo limite lateral pela esquerda no ponto $x = -1$.

Dado agora qualquer $a \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, temos que $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$. De fato, uma análise simples da expressão de $P(x)$ mostra que essa função é contínua. Assim, as únicas assíntotas horizontais são $x = -1$ e $x = 1$.

Para determinar as assíntotas horizontais vamos fazer $x \to +\infty$, visto que o domínio de P nos impede de fazer o limite quando $x \to -\infty$. Temos que
$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Segue que a reta $P = 0$ é uma assíntota horizontal de P. Observe que, ainda que a função P seja definida por duas sentenças, no cálculo acima usamos a expressão $2x/(x^2-1)$, pois estamos interessados somente no que acontece com P para valores grandes de x (e portanto maior que 1).

Usando todas as informações assintóticas acima podemos esboçar o gráfico de P como se segue: