Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

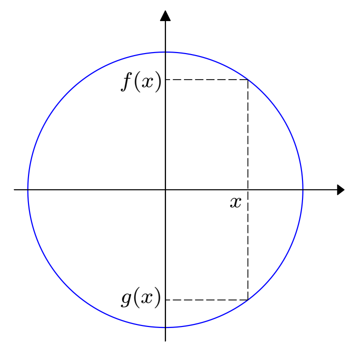
Cálculo 1

Derivação Implícita

As regras de derivação aprendidas até agora nos permitem derivar várias funções envolvendo potências, funções trigonométricas e muitas das possíveis combinações como somas, produtos e quocientes destas funções. Neste texto vamos considerar situações em que não sabemos a expressão da função $y = y(x)$ mas sim que o seu gráfico é um subconjunto de alguma curva no plano. Considere por exemplo a equação

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

que descreve uma circunferência de raio 5 centrada na origem. Se tentarmos isolar o y na equação acima vamos obter $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. O símbolo $\pm$ indica que, de uma maneira global, não podemos escrever y como sendo uma função de x. Logo, esta circunferência não pode ser o gráfico de uma função. Porém, se considerarmos somente a parte superior, obteremos o gráfico da função $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ com $x \in [-5, 5]$. Note que esta função é derivável e, pela regra da cadeia, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$. De maneira análoga, a parte de baixo da circunferência é o gráfico de $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, com $x \in [-5, 5]$. Usando novamente a regra da cadeia obtemos $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$.



Vamos mostrar agora uma outra maneira de calcular as derivadas acima. Faremos isto pulando a primeira etapa do cálculo, que foi essencialmente isolar o y na equação. De fato, vamos supor que a equação (1) define, implicitamente, y como função de x, para x variando em algum intervalo contido em $(-5, 5)$. Para deixar isto mais claro vamos escrever

$$x^2 + y(x)^2 = 25.$$

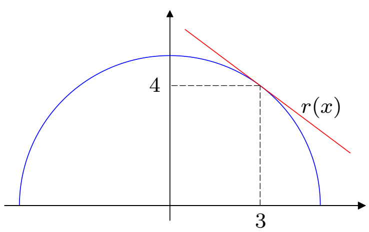
Supondo que a função y é derivável podemos derivar os dois lados dessa igualdade para obter

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y(x)^2) = \frac{d}{dx}(25).$$

A derivada do primeiro termo acima é $(x^2)' = 2x$ e a do último é $(25)' = 0$. Para o cálculo da derivada de $y(x)^2$ precisamos ser um pouco cautelosos. O leitor deve notar que o que temos aqui é, de fato, a derivada de uma composição de funções. De fato, observe que para calcular a função $y(x)^2$ em algum ponto x_0 são necessários dois passos: primeira calcula-se $y(x_0)$ e depois eleva-se este valor ao quadrado. Deste modo, usando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{d}{dx}y(x)^2 = 2y(x)y'(x).$$

Portanto, após as devidas simplificações, concluímos que



$$y(x)y'(x) = -x. \tag{2}$$

A expressão acima mostra que se soubermos os valores de x e $y(x)$ podemos calcular $y'(x)$. Note que isto pode ser feito sem que precisemos isolar o y. Por exemplo, se quisermos saber a equação da reta tangente ao círculo no ponto $(3, 4)$ basta substituir $x = 3$ e $y = y(x) = 4$ na expressão acima para obter $y'(3) = -3/4$. Assim, esta reta tangente $r(x)$ tem a seguinte equação

$$r(x) = -\frac{3}{4}(x - 3) + 4.$$

Vale observar que a reta tangente acima poderia ter sido calculada considerando-se a função $f(x)$ do início do texto e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, f(3)) = (3, 4)$. Contudo, a maneira como fizemos o cálculo é mais direta e, principalmente, a equação (2) fornece a inclinação em qualquer ponto da circunferência onde o y é não nulo e pode ser escrito como função de x. Por exemplo, se consideramos a parte superior da circunferência temos que $y(x) = \sqrt{25 - x^2}$, e portanto a equação (2) pode ser escrita como $y'(x) = -x/y(x) = -x/\sqrt{25 - x^2}$, que é exatamente a derivada da função $f(x)$.

O processo descrito acima se chama *derivação implícita*. Ele é especialmente útil quando temos uma equação complicada, em que se torna muito difícil escrever y como função de x. Este é o caso, por exemplo, da seguinte equação

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$$

cujo gráfico no plano é uma curva chamada de Lemniscata (ver figura a seguir). Observe que o par ordenado $(3, 1)$ satisfaz a equação. Vamos usar diferenciação implícita para determinar a equação da reta tangente neste ponto. Para tanto, vamos supor que na vizinhança deste ponto podemos escrever y como função de x e que a função $y(x)$ é derivável. Neste caso, temos que

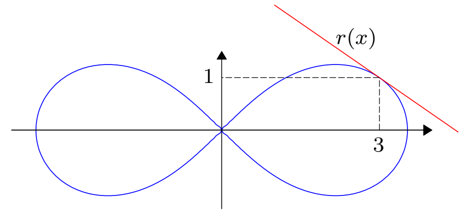
$$2(x^2 + y(x)^2)^2 = 25(x^2 - y(x)^2).$$

Derivando os dois lados da igualdade com relação a x e usando a regra da cadeia obtemos

$$4(x^2 + y(x)^2)(2x + 2y(x)y'(x)) = 25(2x - 2y(x)y'(x)).$$

Fazendo $x = 3$ e $y(x) = 1$, vem

$$4(9+1)(6+2y'(3)) = 25(6-2y'(3)).$$

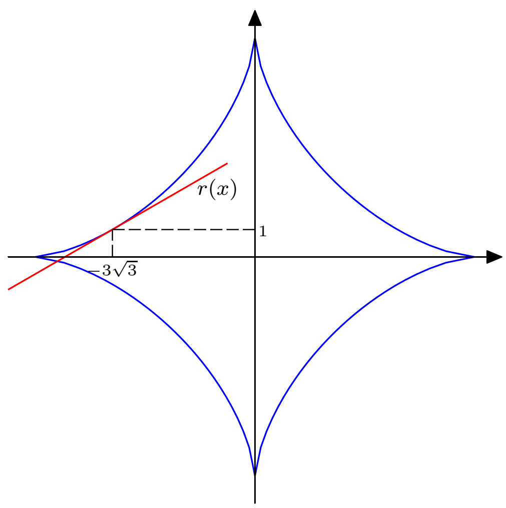


Fazendo as contas concluímos que $y'(3) = -9/13$, e portanto a reta tangente $r(x)$ tem a seguinte equação

$$r(x) = -\frac{9}{13}(x-3)+1 = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}.$$

Tarefa

A curva com equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ é chamada *astróide*, e está ilustrada a seguir.



1. Verifique que o ponto $(-3\sqrt{3}, 1)$ pertence à curva.

2. Usando diferenciação implícita, determine a equação da reta tangente no ponto acima.