Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 5

Temas abordados: Derivadas e suas regras básicas
Seções do livro: 2.1; 2.2; 2.3

1) Um projétil é lançado verticalmente para cima e $t > 0$ segundo após o lançamento está a s metros do solo, onde $s(t) = 256t - 16t^2$. Calcule

(a) a velocidade do projétil t segundos após o lançamento;

(b) o tempo necessário que a altura máxima seja atingida;

(c) a altura máxima atingida pelo projétil.

2) Uma partícula de move sobre uma linha reta de acordo com a equação $s = \sqrt{t}$, sendo s a distância (em metros) da partícula ao seu ponto de partida, $t > 0$ segundo após a partida.

(a) Calcule a velocidade média da partícula entre os instantes $t = 9$ e $t = 16$;

(b) Calcule a velocidade instantânea da partícula quando $t = 9$.

3) No instante $t > 0$ horas um veículo está $(16\sqrt{t^3} - 24t + 16)$ quilômetros à leste de um ponto de referência na estrada.

(a) Qual a velocidade no instante $t = 1/4$? Nesse instante o veículo está se afastando ou aproximando do ponto de referência?

(b) Onde está o veículo quanto a velocidade é zero?

4) Calcule a taxa de variação do volume de um balão esférico em relação ao seu raio, quando o raio do balão for igual a 5 cm.

5) Suponha que um reservatório, inicialmente com 50 litros de água pura, comece a ser abastecido com água salgada à razão de 5 litros/min e com uma concentração de 1 grama/litro de sal. Nesse caso, o volume de água $V(t)$ e a quantidade de sal $Q(t)$ no reservatório são funções do tempo $t \geq 0$, e portanto a concentração de sal $c(t)$ no reservatório é também uma função do tempo.

(a) Obtenha as expressões das funções $V(t)$, $Q(t)$ e $c(t)$.

(b) Calcule a taxa de variação da concentração.

(c) Usando o item anterior, decida em qual dos instantes $t_0 = 10$ ou $t_1 = 30$ a concentração está variando mais rapidamente.

6) A partir de uma cartolina medindo 10×16 vamos construir uma caixa sem tampa como segue: recortamos quadrados de lado x em cada um dos vértices da cartolina e dobramos as abas. Nessas condições, resolva os itens a seguir.

(a) Encontre a expressão e o domínio da função $V(x)$ que fornece o volume da caixa em função de x.

(b) Determine os intervalos onde V é crescente e decrescente.

(c) Determine o valor de $x \in \text{dom}(V)$ que fornece o volume máximo.

7) Para cada uma das funções abaixo, determine os pontos onde a derivada se anula. Em seguida, estude o sinal da derivada em cada um dos intervalos determinados por essas raízes para descobrir os intervalos onde f é crescente e aqueles onde ela é decrescente.

(a) $f(x) = x^3 - 12x - 5$

(b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 8}$

(d) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$, $x \neq 0$

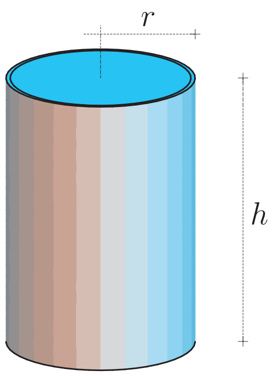
8) Suponha que, na produção de uma lata de refrigerante, o custo do material da lateral e do fundo é de uma unidade monetária por centímetro quadrado, mas para o material da tampa esse custo é de $98/27$ unidades monetárias por centímetro quadrado. Suponha ainda que a lata seja cilíndrica de raio r cm e altura h cm, conforme ilustra a figura abaixo, e que o volume seja constante e igual a $5^3 \pi$ cm^3. A máquina que fabrica as latas é capaz de fazer latas com raio da base r entre 1 e 6 cm.

(a) Obtenha a expressão da altura h em função do raio r e do volume da lata.

(b) Obtenha a área lateral $L(r)$ da lata em função do raio r.

(c) Obtenha o custo de produção $C(r)$ de uma lata de raio r.

(d) Calcule o raio r_0 que minimiza o custo de produção.



RESPOSTAS

1) (a) $v(t) = 256 - 32t$

(b) 8 segundos

(c) 1024 metros

2) (a) 1/7 m/s

(b) Como $v(t) = (\sqrt{t})' = 1/(2\sqrt{t})$, temos que a velocidade em $t = 9$ é igual a 1/6 m/s.

3) (a) Se aproximando a 12 km/h

(b) 8 km a leste do ponto de referência

4) 100π

5) (a) $V(t) = 50 + 5t,\ Q(t) = 5t,\ c(t) = t/(10 + t)$

(b) $c'(t) = 10/(10 + t)^2$

(c) no instante $t_0 = 10$

6) (a) $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$ para $x \in (0, 5)$

(b) V é crescente em $(0, 2)$ e decrescente em $(2, 5)$

(c) O valor máximo ocorre quando $x = 2$ e vale $V(2) = 144$

7) (a) raízes da derivada: $x = -2$ e $x = 2$
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -2)$; $(2, +\infty)$
decrescente em $(-2, 2)$

(b) raízes da derivada: $x = -2$ e $x = 1$
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -2)$; $(1, +\infty)$
decrescente em $(-2, 1)$

(c) raízes da derivada: $x = -2$ e $x = 2$
crescente em $(-2, 2)$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -2)$; $(2, +\infty)$

(d) raízes da derivada: $x = \sqrt[3]{6}$
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, 0)$; $(\sqrt[3]{6}, +\infty)$
decrescente em $(0, \sqrt[3]{6})$
Neste item, quando for considerar os subintervalos determinados pela raiz da derivada, é necessário considerar também o ponto $x = 0$

8) (a) O volume V da lata é dado pela área da base $\pi\, r^2$ vezes a altura h, isto é, $V = \pi\, r^2\, h$. Usando que $V = 5^3\,\pi$ e isolando h na igualdade anterior, obtém-se $h = h(r) = 5^3/r^2$.

(b) Substituindo $h = h(r)$ na expressão da área lateral $L = 2\,\pi\, r\, h$, obtém-se $L(r) = 2\,\pi\, 5^3/r$.

(c) A soma das áreas lateral e do fundo é igual a $L(r) + \pi\, r^2$, enquanto que a área da tampa é $\pi\, r^2$. Considerando o custo destes materiais e a expressão de $L(r)$, segue-se que $C(r)$ é dada por

$$C(r) = 2\,\pi\,\frac{5^3}{r} + \pi\, r^2 + \frac{98}{27}\,\pi\, r^2 = \pi\left(2\frac{5^3}{r} + \left(\frac{98}{27} + 1\right) r^2\right) = 125\pi\left(\frac{2}{r} + \frac{r^2}{27}\right).$$

(d) Temos que

$$C'(r) = 125\pi\left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2r}{27}\right) = 250\pi\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{r}{27}\right)$$

e portanto para que a derivada se anule devemos ter

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{r}{27} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r}{27} = \frac{1}{r^2} \quad \Longleftrightarrow \quad r^3 = 27.$$

Como $r > 0$, segue que $r = 3$ é a única raiz da derivada. Esta raiz determina os intervalos abertos $(1,3)$ e $(3,6)$, uma vez que o raio só pode variar no intervalo $[1,6]$. Calculamos agora $C'(1) = 250\pi(-1 + \frac{1}{27}) < 0$ e $C'(5) = 250\pi(-\frac{1}{25} + \frac{5}{27}) > 0$ para construir a tabela abaixo

	$r \in (1,3)$	$r \in (3,6)$
sinal da derivada C'	negativo	positivo
comportamento de C	decrescente	crescente

Segue da tabela que o ponto $r = 3$ é aquele onde temos o menor custo.