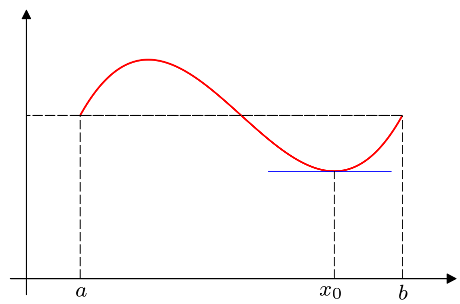
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

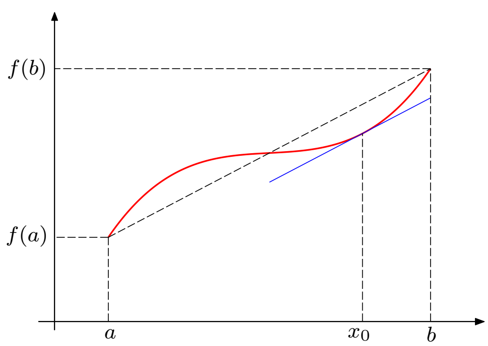
Consequências do Teorema do Valor Médio

Neste texto vamos demonstrar o Teorema do Valor Médio e apresentar as suas importantes consequências.

Precisamos primeiro de um resultado auxiliar, que é conhecido na literatura como Teorema de Rolle. A prova é um exercício simples que será parte da sua tarefa.



Lema 1. *Suponha que g seja uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b). Se $g(a)=g(b)$, então existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $g'(x_0)=0$.*



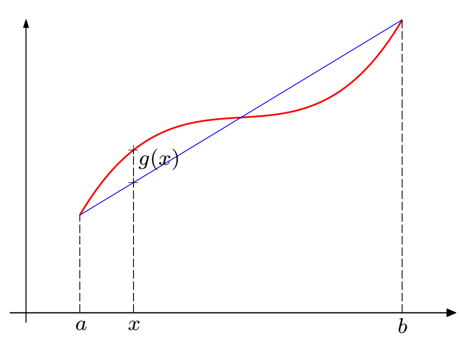
O resultado principal deste texto é o seguinte

Teorema 1 (Teorema do Valor Médio)**.** *Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), então existe $x_0 \in (a,b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1}$$

Demonstração. Vamos denotar por $r(x)$ a função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Usando a fórmula para a equação de uma reta passando por dois pontos distintos dados, obtemos

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$



Vamos agora denotar por $g(x)$ a função cujo módulo fornece a distância de um ponto $(x, f(x))$ no gráfico de f a um ponto $(x, r(x))$ na reta. A expressão de g é dada por

$$g(x) = f(x) - r(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Naturalmente, $g(a)=g(b)=0$. Usando as hipóteses sobre f concluímos ainda que g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Segue então do Lema 1 que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

e portanto este ponto x_0 satisfaz (1). $\square$

No que se segue vamos apresentar algumas consequências do teorema acima. A primeira delas já foi introduzida em outro texto e será colocada aqui somente para completude.

Corolário 1. *Se f é derivável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e*

(i) $f' > 0$ *em* I*, então* f *é crescente em* I*;*

(ii) $f' < 0$ *em* I*, então* f *é decrescente em* I*.*

Demonstração. Vamos supor que $f' < 0$ em I e tomar dois pontos $a, b \in I$ com $a < b$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[a, b]$, obtemos $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) < 0,$$

em que usamos o fato de $f'(x_0) < 0$ e $a < b$. A expressão acima mostra que $f(a) > f(b)$, e portanto f é decrescente em I. A prova para o caso em que $f' > 0$ em I é análoga. $\square$

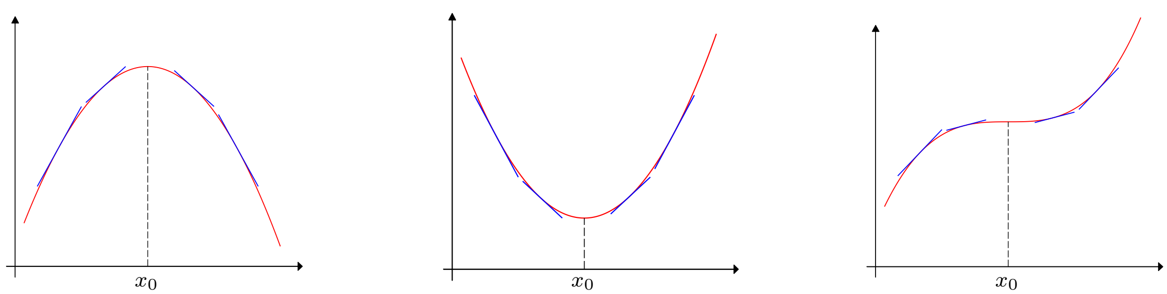
O próximo resultado é uma consequência deste último e vai nos permitir classificar a natureza de um ponto crítico em termos de extremos locais.

Corolário 2 (Teste da derivada primeira)**.** *Suponha que f contínua no ponto crítico x_0, e derivável em um intervalo aberto contendo x_0, exceto possivelmente em x_0.*

(i) Se f' é positiva antes e negativa depois de x_0, então x_0 é um ponto de máximo local;

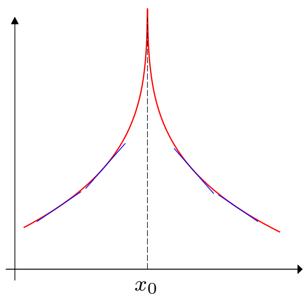
(ii) Se f' é negativa antes e positiva depois de x_0, então x_0 é um ponto de mínimo local;

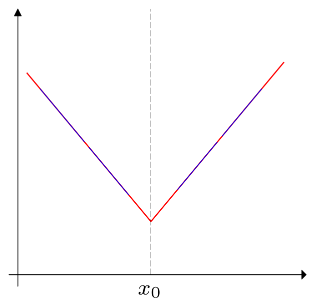
(iii) Se f' tem o mesmo sinal antes e depois de x_0, então x_0 não é um extremo local.

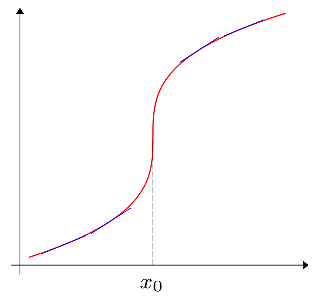


Embora esse resultado possa ser provado de maneira analítica, acreditamos que seja mais instrutivo usar um argumento geométrico. Vamos então considerar o caso *(i)* acima e supor ainda que x_0 é um ponto crítico do tipo $f'(x_0) = 0$. Neste caso, no ponto $(x_0, f(x_0))$ temos uma reta tangente horizontal. Um pouco antes do ponto x_0 a derivada é positiva, e portanto a função é crescente. Após o ponto x_0, a derivada se torna negativa e a função começa a decrescer. Logo, nas proximidades do ponto x_0, o gráfico de f se parece com um cume de montanha, o que nos leva a concluir que x_0 é um ponto de máximo local (veja o primeiro desenho acima). Os demais casos podem ser tratados de maneira análoga.

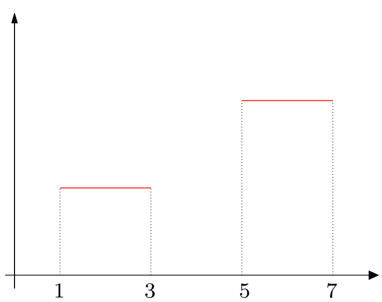
As figuras abaixo ilustram os casos em que a derivada $f'(x_0)$ não existe. Mesmo neste caso, o teorema ainda pode ser aplicado. O importante é que a derivada exista um pouco antes e um pouco depois de x_0.







Antes de apresentar a próxima consequência vamos lembrar que, se uma função é constante, então a sua derivada é sempre nula. É natural perguntar se a recíproca é verdadeira, isto é, se uma função que tem derivada nula em todos os pontos é necessariamente constante.



Em um primeiro momento pode ser tentador afirmar que sim. Porém, a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (1,3), \\ 2, & \text{se } x \in (5,7), \end{cases}$$

mostra que a resposta pode ser negativa. De fato, neste caso temos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (1,3) \cup (5,7)$, mas a função f não é constante, porque pode assumir os valores 1 e 2. Observe porém que ela é constante em cada um dos intervalos $(1,3)$ e $(5,7)$, o que nos leva a crer que o problema foi que o domínio tem dois pedaços desconectados. De uma maneira geral temos o seguinte

Corolário 3. *Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo aberto I, então a função f é constante em I, isto é, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Escolha $a \in I$ e defina $C = f(a)$. Mostraremos que $f(b) = C$ para todo $b \in I$. De fato, suponha primeiro $a < b$. Então f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), pois $[a,b] \subset I$. Assim, aplicando o Teorema do Valor Médio, obtemos $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(x_0) = 0,$$

em que na última igualdade usamos o fato da derivada ser nula em todos os pontos. Ora, uma fração só se anula quando seu numerador é zero, e portanto $f(b) = f(a) = C$. O caso em que $b < a$ é tratado de maneira análoga. Assim, $f(b) = C$ para todo $b \in I$, isto é, f é constante em I. $\square$

O próximo resultado é uma consequência do anterior.

Corolário 4. *Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo aberto I, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = g(x) + C, \ \ \forall x \in I.$$

Demonstração. Basta notar que $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo $x \in I$, e aplicar o Corolário 3. □

Embora este último resultado tenha uma prova bem simples, ele tem consequências interessantes. Vamos finalizar o texto ilustrando uma delas. Dado $b > 0$, considere a função

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{b}\right), \ \ x \in I = (0, +\infty).$$

Pela Regra da Cadeia

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{x}{b}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-1} \frac{1}{b} = \frac{1}{x}.$$

Por outro lado, a função $g(x) = \ln(x)$ também satisfaz $g'(x) = (1/x)$ no intervalo aberto I. Assim, segue do último corolário que, para todo $x \in I$,

$$\ln\left(\frac{x}{b}\right) = \ln(x) + C,$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = b$ na expressão acima, obtemos

$$0 = \ln(1) = \ln(b) + C,$$

ou ainda, $C = -\ln(b)$. Deste modo, concluímos que

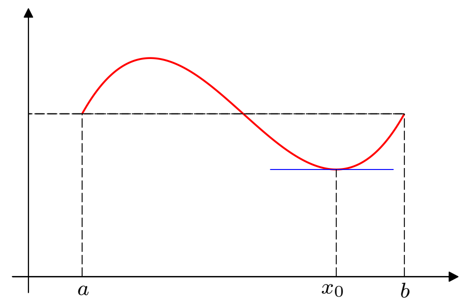
$$\ln\left(\frac{x}{b}\right) = \ln(x) - \ln(b), \ \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Um raciocínio análogo nos permite provar as outras duas propriedades básicas da função logarítmica, quais sejam

$$\ln(bx) = \ln(b) + \ln(x), \qquad \ln(x^r) = r\ln(x),$$

para todo $x \in (0, +\infty)$ e $r \in \mathbb{R}$.

Tarefa



Na primeira parte da tarefa vamos fazer a demonstração do seguinte

Lema 1. *Suponha que g é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Se $g(a) = g(b)$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $g'(x_0) = 0$.*

A prova pode ser feita seguindo-se os passos abaixo.

1. Explique por que o resultado é verdadeiro se g é constante em $[a, b]$.

2. Supondo que g não é constante, explique por que o ponto de máximo ou o ponto de mínimo de g tem que estar no intervalo aberto (a, b). Por que estes pontos de fato existem?

3. O que acontece com a derivada da função no ponto extremo do item anterior?

Na segunda parte da tarefa vamos verificar que a função logaritmo transforma potências em multiplicações. Para isso, considere $r \in \mathbb{R}$ e resolva os itens abaixo.

1. Use a regra da cadeia para calcular a derivada de $f(x) = \ln(x^r)$. Em seguida, verifique que $g(x) = r \ln(x)$ possui a mesma derivada.

2. Conclua do item acima que, para alguma constante $C \in \mathbb{R}$, vale

$$\ln(x^r) = r \ln(x) + C.$$

3. Escolha um valor apropriado de x na igualdade acima para provar que $C = 0$ e portanto

$$\ln(x^r) = r \ln(x), \ \ \forall\, x \in (0, +\infty),\, r \in \mathbb{R}.$$