



## Matemática 1

### O cálculo do imposto de renda

---

Nesse pequeno texto vamos explorar os conceitos de limites laterais e continuidade através de um exemplo simples, relacionado ao cálculo do imposto de renda. A fim de simplificar a exposição e os cálculos, vamos considerar a situação de um país imaginário, onde a moeda se chama cruzeta e o imposto é taxado segundo a regra abaixo.

**Regra do imposto:** quem ganha até 10 mil cruzetas é isento; quem ganha mais de 10 mil e até 20 mil cruzetas paga 10% da renda de imposto; os demais pagam 20% da renda.

A partir das informações acima, queremos definir uma função que fornece o valor  $I(r)$  de milhares de reais pago por um contribuinte que ganha  $r$  mil cruzetas por mês. Antes de apresentar a expressão da função  $I$  vamos observar que o domínio dessa função é

$$\text{dom}(I) = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\} = [0, +\infty).$$

De fato, como  $r$  denota a renda do contribuinte, é evidente que essa variável não pode assumir valores negativos. Estamos incluindo no domínio o ponto  $r = 0$  para contemplar todas as pessoas que não possuem renda. Lembrando agora que a maneira analítica de calcularmos 10 por cento de um número é multiplicá-lo por 0,1, podemos escrever a expressão da função  $I$  como se segue:

$$I(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r \leq 10, \\ 0,1r, & \text{se } 10 < r \leq 20, \\ 0,2r, & \text{se } r > 20. \end{cases}$$

Note que a expressão que define  $I$  em cada uma das 3 faixas é uma função linear. Contudo, a função  $I$  como um todo não é uma função linear. Embora o gráfico de  $I$  possa ser facilmente esboçado, vamos continuar a nossa exposição analisando as propriedades da função  $I$  sem o seu gráfico. Inicialmente, vamos tentar responder à seguinte pergunta:

**Pergunta 1:** Qual o valor aproximado do imposto pago por um contribuinte que ganha aproximadamente 15 mil cruzetas?

Do ponto de vista matemático, uma maneira de responder à essa pergunta é tentar calcular o limite  $\lim_{r \rightarrow 15} I(r)$ . Uma dificuldade inicial neste cálculo é que a função  $I$  é definida

por mais de uma sentença, de modo que precisamos decidir qual das sentenças utilizar no cálculo do limite. Para decidir isso vamos lembrar que, no cálculo de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , importa somente o que acontece com  $f(x)$  para valores de  $x$  próximos, e diferentes, de  $a$ . Ora, como  $r \rightarrow 15$ , devemos utilizar a expressão de  $I(r)$  fornecida quando  $r$  está próximo de 15, que é exatamente a expressão da 2a faixa do imposto. Assim

$$\lim_{r \rightarrow 15} I(r) = \lim_{r \rightarrow 15} (0,1r) = 0,1 \times 15 = 1,5.$$

Logo, um contribuinte que ganha aproximadamente 15 mil cruzetas vai pagar, aproximadamente, 1500 cruzetas de imposto. De fato, se a renda for de 15 mil cruzetas o valor do imposto é exatamente  $I(15) = 1,5$  mil cruzetas.

Vamos prosseguir a exposição considerando agora uma nova pergunta:

**Pergunta 2:** Qual o valor aproximado do imposto pago por um contribuinte que ganha aproximadamente 10 mil cruzetas?

A resposta agora é um pouco mais delicada. Na verdade, ela depende de uma informação extra, que é saber se o indivíduo ganha mais ou menos de 10 mil. De fato, se o contribuinte ganha um valor um pouco menor do que 10 mil, então é isento. Por outro lado, se ganha um pouco mais de 10 mil, então será taxado em 10 por cento. Esse tipo de restrição nos leva ao conceito de limites laterais.

Considerando primeiro os que ganham um pouco de menos de 10 mil temos

$$\lim_{r \rightarrow 10^-} I(r) = \lim_{r \rightarrow 10^-} 0 = 0.$$

Note que, no cálculo do limite acima, a notação  $r \rightarrow 10^-$  indica que o número  $r$  está se aproximando de 10 por valores *menores que 10* ou, equivalentemente, pela esquerda de 10. Como para valores menores (e próximos) de 10 a função  $I$  é identicamente nula, substituímos  $I(r)$  por 0 após a primeira igualdade. Para contribuintes que ganham um pouco mais de 10 mil, temos o seguinte limite lateral

$$\lim_{r \rightarrow 10^+} I(r) = \lim_{r \rightarrow 10^+} (0,1r) = 0,1 \times 10 = 1.$$

No cálculo do limite lateral acima temos uma observação importante: ainda que a função  $I$  seja igual a zero em  $r = 10$ , a expressão de  $I(r)$  que usamos após a primeira igualdade foi  $0,1r$ . Isso porque, no cálculo do limite acima, importa somente o que acontece com a função  $I$  para valores próximo e *maiores que 10*. O valor de  $I$  no ponto  $r = 10$  não interfere no valor deste limite lateral.

Observe que os limites laterais no ponto  $r = 10$ , apesar de existirem, são diferentes. Isso nos indica que o limite  $\lim_{r \rightarrow 10} I(r)$  **não existe**. Aqui, estamos usando o seguinte resultado, que caracteriza a existência de um limite.

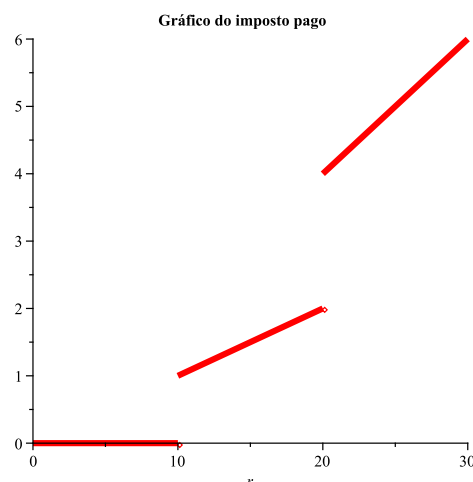
**Teorema.** *O limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe se, e somente se, os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existem e são iguais. Nesse caso, o valor comum desses limites laterais é igual ao valor do limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$*

No exemplo anterior temos

$$\lim_{r \rightarrow 10^-} I(r) = 0 \neq 1 = \lim_{r \rightarrow 10^+} I(r),$$

e portanto o limite não existe. A não existência desse limite pode ser facilmente percebida quando analisamos o gráfico da função  $I$ , que está esboçado abaixo.

Note que existe um salto no gráfico no ponto  $r = 10$ . Quando nos aproximamos de 10 pela esquerda a função se aproxima de 0, porque é sempre nula. Quando nos aproximamos pela direita, a função se aproxima de 1. Do ponto de vista matemática isso pode ser observado a partir do fato de que os limites laterais são distintos. A consequência disso é a não existência do limite de  $I(r)$  quando  $r \rightarrow 10$ .



Nesse ponto vale notar que o salto observado no gráfico acima causa uma injustiça no cálculo do imposto. Para exemplificar, suponha que um contribuinte tenha uma renda de 10 mil cruzetas. Nesse caso, como é isento de imposto de renda, ele receberia um valor líquido de 10 mil cruzetas. Porém, um outro contribuinte que tem uma renda de 11 mil cruzetas (e que eventualmente trabalha melhor do que o primeiro) paga 1,1 mil cruzetas de imposto de renda, tendo então uma renda líquida de 9,9 mil cruzetas!

A fim de corrigir a injustiça acima vamos fazer uma pequena mudança na regra da 2a faixa do imposto:

**Nova regra do imposto:** quem ganha até 10 mil cruzetas é isento; quem ganha mais de 10 mil e até 20 mil cruzetas paga 10% da renda de imposto menos uma parcela fixa de  $c$  cruzetas; os demais pagam 20% da renda.

Com essa nova regra, a função que calcula o imposto passa a ser

$$I_1(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r \leq 10, \\ 0,1r - c, & \text{se } 10 < r \leq 20, \\ 0,2r, & \text{se } r > 20, \end{cases}$$

onde estamos denotando por  $I_1$  a função que calcula esse novo imposto. Observe que, para cada escolha do valor da dedução  $c$ , temos uma função diferente. Gostaríamos de escolher o parâmetro  $c$  de modo que a injustiça citada acima não exista mais. Mais especificamente, queremos escolher o valor de  $c$  de modo a eliminar o salto no gráfico de  $I_1$  no ponto  $r = 10$ . Para tanto, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{r \rightarrow 10^-} I_1(r) = \lim_{r \rightarrow 10^-} 0 = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 10^+} I_1(r) = \lim_{r \rightarrow 10^+} (0,1r - c) = 1 - c.$$

De acordo com o teorema enunciado anteriormente, para que exista o limite no ponto  $r = 10$ , os limites laterais devem existir e serem iguais. Logo, o valor da dedução  $c$  deve ser tal que  $0 = 1 - c$ , ou seja,  $c = 1$ . Portanto, os contribuintes que estão na 2a faixa devem pagar 10% de sua renda menos 1 mil cruzetas, e a expressão final da nova função que calcula o imposto fica como se segue:

$$I_1(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r \leq 10, \\ 0,1r - 1, & \text{se } 10 < r \leq 20, \\ 0,2r, & \text{se } r > 20, \end{cases}$$

Abaixo você encontra o gráfico dessa nova função.



Observe que não ocorre mais aquele salto no ponto  $r = 10$ . O conceito matemático de *continuidade* serve para identificarmos possíveis saltos ou quebras no gráfico de funções. Antes de prosseguir, vamos lembrar esse importante conceito:

**Definição.** Dizemos que a função  $f$  é contínua no ponto  $a \in \text{dom}(f)$  se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Observe que, para que  $f$  seja contínua em  $x = a$ , é necessário que o ponto  $a$  esteja no domínio de  $f$ . Mais do que isso, como precisamos calcular  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , é necessário que o domínio de  $f$  contenha todo um intervalo aberto centrado no ponto  $x = a$ . Além disso, é preciso que o limite exista e coincida com o valor da função  $f$  no ponto  $x = a$ . O conceito de continuidade se estende para pontos que estão no extremos do domínio através do uso de limites laterais.

A função  $I_1$  cujo gráfico está esboçado acima é contínua em todos os pontos do seu domínio, exceto no ponto  $r = 20$ . De fato, nesse ponto ocorre um salto no gráfico, porque os limites laterais são diferentes. Assim, a inexistência do limite  $\lim_{r \rightarrow 20} I_1(r)$  implica que  $I_1$  não é contínua em  $r = 20$ . Procedendo como acima, não é difícil introduzir uma parcela de dedução na 3a faixa de modo a tornar a função contínua (veja a tarefa).

Para finalizar o texto, vamos considerar o caso do cálculo do imposto de renda no Brasil. A metodologia é análoga com a descrita acima, com a diferença que temos aqui 5 faixas, ao invés de 3. A tabela abaixo (que reflete o ano base de 2013 e está expressa em reais) apresenta os valores referentes a cada uma dessas faixas. Deixamos como exercício para o leitor obter a expressão da função  $I(r)$  que calcula o imposto em função da renda, bem como a verificação de que as parcelas de dedução foram escolhidas pelo governo de modo a tornar a função contínua em todos os pontos, evitando assim os saltos no gráfico e as decorrentes injustiças.

Renda	Alíquota	Dedução
Até R\$ 1.673,11	(isento)	(isento)
De R\$ 1.673,12 até R\$ 2.453,50	7,5%	R\$ 122,78
De R\$ 2.453,51 até R\$ 3.271,38	15%	R\$ 306,80
De R\$ 3.271,39 até R\$ 4.087,65	22,5%	R\$ 552,15
Acima de R\$ 4.087,65	27,5%	R\$ 756,53

## Tarefa

Vimos no texto que a função  $I_1$  era descontínua no ponto  $r = 20$ . Essa descontinuidade causa, novamente, uma injustiça para com os contribuintes que ganham um pouco mais de 20 mil cruzetas. Nessa tarefa vamos introduzir uma parcela de dedução na 3a faixa de modo a compensar essa injustiça.

Considerando então a (nova) função para o cálculo do imposto definida abaixo

$$I_2(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r \leq 10, \\ 0,1r - 1, & \text{se } 10 < r \leq 20, \\ 0,2r - b, & \text{se } r > 20, \end{cases}$$

resolva os itens a seguir:

1. Calcule os limites laterais no ponto  $r = 20$ ;
2. Determine o valor de  $b \in \mathbb{R}$ , de modo que  $I_2$  seja contínua no ponto  $r = 20$ ;
3. Faça um esboço do gráfico de  $I_2$ .