Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 05

Temas abordados: Retas Tangentes; Derivada e suas regras básicas

Seções do livro: 2.7; 3.1 a 3.3

1) Explique o que significa dizer que uma função é derivável no ponto $x = a$. Qual é a interpretação geométrica do número $f'(a)$, quando ele existe? (veja vídeo)

2) Verifique que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então f é contínua neste ponto. Dê um exemplo mostrando que f pode ser contínua em um ponto sem ser derivável nele. (veja Texto 1)

3) Usando a definição, calcule a derivada de cada uma das funções abaixo. (veja Texto 2) Em seguida, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, para o valor de a indicado. (veja vídeo)

(a) $f(x) = x^2 - x + 1, \quad a = 1$ (b) $f(x) = 1/x, \quad a = -2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$ (d) $f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad a = 1$

4) Quantas retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x + 1$? Determine a equação dessas retas tangentes. (veja vídeo)

5) Dizemos que a função f possui *derivada lateral à esquerda no ponto* $x = a$ quando existe o limite

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De maneira análoga definimos *derivada lateral à direita* $f'_+(a)$. Mostre que f é derivável no ponto $x = a$ se, e somente se, as derivadas laterais existem e são iguais.

6) Para cada uma das funções abaixo, determine os valores de a e b de modo que f seja derivável. (veja vídeo)

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1, \\ ax + b & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 1, \\ -x^2 + 5x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

7) Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo. (veja Texto 3)

(a) $f(x) = (3x^4 - 7x^2)(5x - 11)$ (b) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{4}{x}$

(e) $f(x) = \left(4x^3 - \dfrac{5}{x^3} + \sqrt{x}\right)\left(\dfrac{3}{x} - 4x + 6\right)$ (f) $f(x) = x|x|$

8) Supondo que a posição de uma partícula é dada por $s = \sqrt{t}$, resolva os itens a seguir.

(a) Calcule a velocidade média da partícula entre os instantes $t = 9$ e $t = 16$.

(b) Calcule a velocidade instantânea da partícula quando $t = 9$.

9) Calcule a taxa de variação do volume de um balão esférico em relação ao seu raio, quando o raio do balão é igual a 5 cm.

10) Suponha que, após ser lançado para cima, a posição de um projétil é dada por $s(t) = 80t - 5t^2$, até o instante t_0 em que ele retorna ao solo.

(a) Calcule o tempo t_0 necessário para que o projétil retorne ao solo.

(b) Determine a velocidade $v(t)$ do projétil, para $t \in (0, t_0)$. O que acontece com a velocidade $v(t)$ para $t > t_0$?

(c) Determine a altura máxima atingida pelo projétil e o tempo necessário para que ele atinja esta altura. O que ocorre com a velocidade neste instante?

11) No instante $t > 0$ horas um veículo está $16\sqrt{t^3} - 24t + 16$ quilômetros à leste de um ponto de referência na estrada.

(a) Qual a velocidade no instante $t = 1/4$? Nesse instante, o veículo está se afastando ou se aproximando do ponto de referência?

(b) Onde está o veículo quanto a velocidade é zero?

12) Como a derivada de uma função é a sua taxa de variação, é de se esperar o seguinte: se uma função f tem derivada positiva (negativa) em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então ele é crescente (decrescente) neste intervalo. Vamos usar este fato neste exercício.

Supondo que o lucro de uma empresa, em centenas de milhares de reais, seja dado por

$$L(x) = \frac{6x}{3x^2 + 27}, \qquad x \geq 0,$$

em que x indica a quantidade de milhares de unidades vendidas, resolva os itens abaixo. (veja vídeo)

(a) Calcule a taxa de variação do lucro.

(b) Após determinar os intervalos onde $L'(x)$ é positiva (negativa), decida em quais intervalos $L(x)$ é crescente (decrescente).

(c) Calcule o limite $\lim\limits_{t \to +\infty} L(x)$.

(d) Usando os dois itens acima, faça um esboço do gráfico de $L(x)$.

(e) Qual deve ser a quantidade de itens vendidos para que o lucro seja máximo? O que acontece com a derivada no ponto onde isto ocorre?

RESPOSTAS

1) A derivada de uma função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Geometricamente, a derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

2) Para a demonstração basta fazer $x \to a$ na igualdade abaixo

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}(x - a).$$

3) (a) $f'(x) = 2x - 1$. A reta tangente no ponto $(1, f(1))$ é $y = x$.
   (b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. A reta tangente no ponto $(-2, f(-2))$ é $y = -\frac{1}{4}x - 1$.
   (c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. A reta tangente no ponto $(4, f(4))$ é $y = \frac{1}{4}x + 1$.
   (d) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. A reta tangente no ponto $(1, f(1))$ é $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

4) duas retas, com equações $y = 6x - 2$ e $y = 6x + 2$

5)

6) (a) $a = 2$ e $b = -1$ (b) $a = 3$ e $b = 1$

7) (a) $f'(x) = (12x^3 - 14x)(5x - 11) + 5(3x^4 - 7x^2)$.
   (b) $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 6x - 2}{(x^2 - 1)^2}$.
   (c) $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x}{2\sqrt{x}(x^2 - 2x)^2}$.
   (d) $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}} - \dfrac{4}{x^2}$.
   (e) $f'(x) = \left(12x^2 + 15x^{-4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{3}{x} - 4x + 6\right) + (4x^3 - 5x^{-3} + \sqrt{x})(-3x^{-2} - 4)$
   (f) $f'(x) = 2|x|$

8) (a) 1/7 m/s (b) 1/6 m/s

9) 100π

10) (a) $t_0 = 16$
   (b) A velocidade vale $v(t) = 80 - 10t$, para $t \in (0, t_0)$. Após o instante t_0 a velocidade é nula.
   (c) 320 metros no instante $t = 8$ segundos, que é o instante em que a velocidade se anula pela primeira vez.

11) (a) Se aproximando a 12 km/h (b) 8 km a leste do ponto de referência

12) (a) $L'(x) = (-18x^2 + 162)/(3x^2 + 27)^2$.
   (b) $C(x)$ é crescente no intervalo $(0, 3)$ e decrescente no intervalo $(3, +\infty)$.
   (c) o limite vale zero.
   (d)
   (e) O lucro é máximo quando $x = 3$, que ó ponto onde a derivada se anula. Logo, para maximizar o lucro devem ser vendidas 3 mil unidades. Neste caso, o lucro é aproximandamente R\$ 33.333, 33.