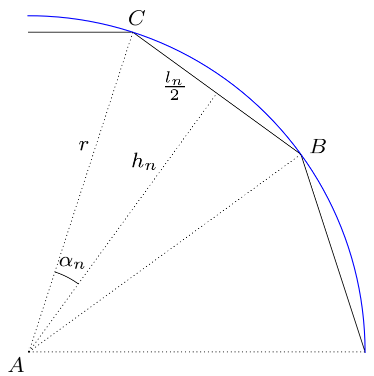
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

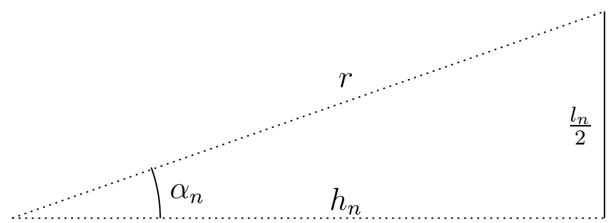
Cálculo 1

O perímetro do círculo

(solução da tarefa)

Para a solução da tarefa vamos usar as figuras abaixo e proceder como no texto.





Usando o triângulo retângulo do lado direito vemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha_n) = \frac{l_n/2}{r}, \qquad \cos(\alpha_n) = \frac{h_n}{r},$$

de modo que $l_n/2 = r\operatorname{sen}(\alpha_n)$ e $h_n = r\cos(\alpha_n)$. A área de um triângulo é metade do produto do comprimento da sua altura pela sua base. Assim, como $\alpha_n = \pi/n$, a área do triângulo ABC acima é dada por

$$\frac{1}{2} l_n h_n = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Como o polígono é formado por n triângulo deste tipo, temos que a sua área é

$$a_n = \pi r^2 \times \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Vamos estudar o comportamento do termo que envolve o cosseno. Uma vez que π/n se aproxima de zero quando n cresce, este termo deve se aproximar de $\cos(0) = 1$. Deste modo

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1.$$

Por outro lado, vimos no texto que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = 1.$$

Logo, a área A do círculo é igual a

$$A = \lim_{n\to+\infty} a_n = \pi r^2 \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \times \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2.$$