Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 15

Temas abordados: Integração por frações parciais; Comprimento de arco

Seções do livro: 8.4; 6.3

1) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável então o comprimento da curva determinada pelo gráfico de f é dado pela integral $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$. Calcule esse comprimento em cada um dos casos abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, para $x \in [0, 2]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, para $x \in [0, 3]$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in [-1/2, 1/2]$

2) Seja C uma curva no plano definida, parametricamente, por $(x(t), y(t))$, com $a \le t \le b$. Suponha que x' e y' são funções contínuas que não se anulam simultaneamente em $[a, b]$ e que a curva C é percorrida exatamente uma vez quando t avança de $t = a$ para $t = b$. Nessas condições, o comprimento de C é dado pela integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

Calcule esse comprimento em cada um dos casos abaixo.

(a) $x(t) = r\cos(t)$, $y(t) = r\,\mathrm{sen}(t)$, para $0 \le t \le 2\pi$ e $r > 0$

(b) $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = \mathrm{sen}^3(t)$, para $0 \le t \le 2\pi$

(c) $x(t) = e^t - t$, $y(t) = 4e^{t/2}$, para $0 \le t \le 3$

(d) $x(t) = t^3$, $y(t) = \dfrac{3}{2}t^2$, para $0 \le t \le \sqrt{3}$

3) Para cada uma das funções abaixo, determine o formato da sua expressão em frações parciais. Aqui, não é necessário calcular as constantes mas somente apresentar o formato da soma.

(a) $\dfrac{3x + 1}{x^2 + 3x - 4}$ (b) $\dfrac{2x + 5}{x^3 - 2x^2}$ (c) $\dfrac{x^8 + 1}{x^4 + x^3 + x^2}$

(d) $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 7}{x^3 + x}$ (e) $\dfrac{2x}{(9 - x^2)^2}$ (f) $\dfrac{x^2 - 3x + 8}{x^4 + 10x^2 + 25}$

4) Calcule cada uma das integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1 - x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 + 5x - 6}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)}\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 3x - 10}\mathrm{d}x$

5) Calcule cada uma das integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int 4xe^{x}\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int 4xe^{x^2}\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}(x)-6}\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int x\cos(5x)\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \ln(\cos(x))\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x$ (j) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2(4x+1)}\mathrm{d}x$

RESPOSTAS

1) (a) $\dfrac{e^2+e^{-2}}{2}$ (b) 12 (c) $\dfrac{\pi}{3}$

2) (a) $2\pi r$ (b) 6 (c) e^3+2 (d) 7

3) Nas respostas abaixo, as letras maiúsculas são constantes reais.

(a) $\dfrac{3x+1}{x^2+3x-4}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+4}$

(b) $\dfrac{2x+5}{x^3-2x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-2}$

(c) $\dfrac{x^8+1}{x^4+x^3+x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+(Ex^4+Fx^3+Gx^2+Hx+I)$

(d) $\dfrac{x^4-2x^2+7}{x^3+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+(Dx+E)$

(e) $\dfrac{2x}{(9-x^2)^2}=\dfrac{A}{3-x}+\dfrac{B}{(3-x)^2}+\dfrac{C}{3+x}+\dfrac{D}{(3+x)^2}$

(f) $\dfrac{x^2-3x+8}{x^4+10x^2+25}=\dfrac{Ax+B}{x^2+5}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+5)^2}$

4) Em todos os itens abaixo $K\in\mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+K$

(b) $\dfrac{5}{7}\ln|x-1|+\dfrac{2}{7}\ln|x+6|+K$

(c) $\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{1}{1+x}+3\ln|1+x|+K$

(d) $\dfrac{1}{4}\left(-\ln|x^2+1|+2\ln|1+x|+2\arctan(x)\right)+K$

(e) $\ln(e^x+1)-\ln(e^x+2)+K$

(f) $\dfrac{1}{2}x(x+4)+K$

5) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+K$

(b) $\dfrac{2}{5}(x+1)^{5/2}-\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+K$

(c) $\dfrac{3}{4}\ln|x-3|+\dfrac{1}{4}\ln|x+1|+K$

(d) $4xe^x-4e^x+K$

(e) $2e^{x^2}+K$

(f) $\dfrac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(x)-2|-\dfrac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(x)+3|+K$

(g) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|-\ln|x|+K$

(h) $\dfrac{x}{5}\operatorname{sen}(5x)+\cos(5x)+K$

(i) $\cos(x)-\ln(\cos(x))+K$

(j) $-\dfrac{3}{x}-10\ln|x|+10\ln|1+4x|+K$