Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 07

Temas abordados: Regra da cadeia; Derivação Implícita; Derivada de funções inversas
Seções do livro: 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9

1) Supondo que $y = y(u)$ e $u = u(x)$, use a regra da cadeia para calcular a derivada dy/dx nos itens abaixo

(a) $y = u^4 + 1$; $u = 3x^2 - 2x$
(b) $y = \sqrt{u}$; $u = 1/(x-1)$
(c) $y = u^2 + 2u - 3$; $u = \sqrt{x}$
(d) $y = u^3 + u$; $u = 1/\sqrt{x}$
(e) $y = \cos(u)$; $u = x + x^2$
(f) $y = \operatorname{sen}(u)$; $u = \sqrt{x}$

2) Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo. (veja Vídeo 3)

(a) $f(x) = \cos(x + x^2)$
(b) $f(x) = e^{\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x})$
(c) $f(x) = \operatorname{sen}((x+1)^2(x+2))$
(d) $f(x) = (3x^3 + 4x^2 - 4)^{3/4}$
(e) $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x)$ (veja Vídeo 2)
(f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x}}$
(g) $f(x) = \ln(x\sqrt{x^2+1})$
(h) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x^4+1)^{5/2}}$
(i) $f(x) = \arctan(3x^2 + 1)$
(j) $f(x) = (e^x)^x$
(k) $f(x) = x^2 e^{-x}$
(l) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

3) Se f é uma função derivável e positiva, então $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Vamos usar este fato para calcular a derivada da função

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}.$$

Tomando o logarítmo nos dois lados, e lembrando que a função logaritmo transforma produtos em soma e potências em produtos, obtemos

$$\ln(f(x)) = 2\ln(x) + \frac{1}{3}\ln(7x-14) - 4\ln(1+x^2).$$

Derivando, obtemos

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{7/3}{7x-14} - \frac{8x}{1+x^2},$$

e portanto

$$f'(x) = \frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}\left(\frac{2}{x} + \frac{7/3}{7x-14} - \frac{8x}{1+x^2}\right).$$

O procedimento acima é chamado de *derivação logarítmica*. Use-o para derivar as funções abaixo.

(a) $f(x) = (x+1)^x$
(b) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$.

4) Suponha que f é derivável e $g(x) = f^2(\cos x)$. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1/2$, calcule $g'(\pi/2)$.

5) Seja g uma função derivável e $f(x) = (\cos x)g^2\left(\tan\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)\right)$. Sabendo que $g(0) = 1/2$ e $g'(0) = 1$, calcule $f'(0)$.

6) Dado um número $a > 0$, com $a \neq 1$, definimos a função exponencial de base a como sendo

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Use a regra da cadeia para calcular a derivada de a^x. Em seguida, compare-a com a derivada da função potência x^a.

7) Sendo $x = f(y)$ definida implicitamente pela equação $x^2 - x\sqrt{xy} + 2y^2 = 10$ para $x > 0$ e $y > 0$, encontre uma expressão $m(x, y)$ para o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de $f(y)$, para os pontos onde $x^{3/2} - 8y^{3/2} \neq 0$.

8) Considere $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^4 - xy + y^4 = 1$. Calcule $f'(0)$, sabendo que f é uma função positiva. (veja Vídeo 1)

9) Considere a curva cuja equação é $(2 - x)y^2 = x^3$.

(a) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da curva em $(1, 1)$.

(b) Obtenha as equações das retas tangentes ao gráfico da curva nos pontos em que $x = 3/2$.

RESPOSTAS

1) (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 4u^3(6x-2) = 4(3x^2-2x)^3(6x-2)$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}(-1)(x-1)^{-2} = \dfrac{-1}{2(x-1)^2\sqrt{1/(x-1)}}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = (2u+2)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + x^{-1/2}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = (3u^2+1)\dfrac{-1}{2x^{3/2}} = \dfrac{-(3+x)}{2x\sqrt{x^3}}$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = -\text{sen}(u)\cdot(1+2x) = -\text{sen}(x+x^2)\cdot(1+2x)$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(u)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

2) (a) $f'(x) = -(1+2x)\,\text{sen}(x+x^2)$

(b) $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))}{2x}$

(c) $f'(x) = \left[(x+1)^2 + 2(x+1)(x+2)\right]\cos((x+1)^2(x+2))$

(d) $f'(x) = \dfrac{3}{4}(3x^3+4x^2-4)^{-1/4}(9x^2+8x)$

(e) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

(f) $f'(x) = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{2x}}}$

(g) $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$

(h) $f'(x) = \dfrac{(x^4+1)^{5/2}(3x^2-6x) - (x^3-3x^2)(5/2)(x^4+1)^{3/2}(4x^3)}{(x^4+1)^5}$

(i) $f'(x) = \dfrac{6x}{9x^4+6x^2+2}$

(j) $f'(x) = 2xe^{x^2}$

(k) $f'(x) = e^{-x}(2x-x^2)$

(l) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2\sqrt{1-(x^2+1)^{-2}}}$

3) (a) $f'(x) = (x+1)^x\left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)$

(b) $f'(x) = (\,\text{sen}\,x)^{\cos x}\left[-(\,\text{sen}\,x)\ln(\,\text{sen}\,x) + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x}\right].$

4) 1

5) 1/2

6) $(a^x)' = e^{x\ln(a)}(x\ln(a))' = \ln(a)a^x$. Para x^a usamos a regra da potência para obter $(x^a)' = ax^{a-1}$.

7) $m(x,y) = \dfrac{3x^{1/2}y - 4xy^{1/2}}{x^{3/2} - 8y^{3/2}}$

8) 1/4

9) (a) $y = 2x-1$ (b) $y = 3\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ e $y = -3\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$