Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 07

Temas abordados: Regras da cadeia; Derivação implícita; Derivada de funções inversas
Seções do livro: 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9

1) Suponha que a relação entre o comprimento L, em metros, e o peso P, em kg, de um determinado peixe seja dada por $P(L) = 10L^3$. Suponha ainda que a taxa de variação do comprimento em relação ao tempo, dado em anos, satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt}L(t) = 0,2\,(2 - L(t)).$$

(a) Determine o comprimento do peixe no caso em que $P = 20$ kg.

(b) Determine a taxa de variação do peso em relação ao tempo.

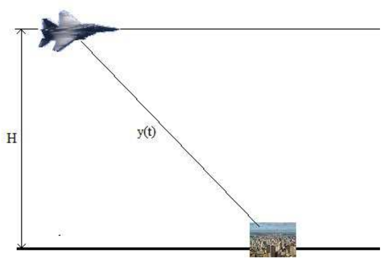
(c) Use os itens anteriores para determinar a taxa de variação do peso do peixe, em relação ao tempo, para um peixe de 20 kg.

2) Um avião de caça sobrevoa uma cidade percorrendo uma trajetória retilínea conforme a figura abaixo. Sua posição escalar sobre tal trajetória é uma função do tempo $x(t) = 3t-2$ se $t \leq 1$ e $x(t) = t^3$ se $t > 1$, onde t é o tempo medido em minutos. A distância entre o caça e a cidade é dada por $y(t) = \sqrt{H^2 + x^2(t)}$.

(a) Calcule os limites laterais

$$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{x(1+h) - x(1)}{h}$$

e em seguida decida sobre a existência de $x'(1)$.



(b) Determine a velocidade escalar do avião $v(t) = x'(t)$, para cada t real.

(c) Dada $f(z) = \sqrt{H^2 + z^2}$, encontre $\dfrac{d}{dz}f(z)$.

(d) Sabendo que $y(t) = f(x(t))$, determine $\dfrac{d}{dt}y(t)$.

(e) Em quais instantes o avião se aproxima e em quais ele se afasta da cidade?

3) Indique por $W(V)$ o trabalho realizado por um gás ideal ao se expandir isotermicamente, desde um volume inicial V_0 até o volume V. Pode-se mostrar que em unidades apropriadas, $W(V) = C \cdot \ln\left(\dfrac{V}{V_0}\right)$, onde $C > 0$ é uma constante que depende da temperatura e do número de mols do gás. Suponha que o volume seja uma função do tempo dada por $V(t) = 2t^4 + 1$, $t \geq 0$. A potência gerada pelo sistema é a taxa de variação do trabalho em relação ao tempo.

(a) Encontre as derivadas $\frac{d}{dV}W(V)$ e $\frac{d}{dt}V(t)$.

(b) Encontre a expressão da potência gerada pelo sistema, $P(t) = \frac{d}{dt}W(V(t))$.

(c) Sabendo que $C = 10$, obtenha a potência do sistema quando o volume é 33.

4) Suponha que o número de indivíduos de uma população de bactérias seja dado, no instante $t \geq 0$, por $N(t) = 2N_0/(1+e^{kt})$, onde $k > 0$ é uma constante e $N_0 > 0$ é a população inicial. Sabendo que a derivada da exponencial é ela própria, $(e^x)' = e^x$, resolva os itens seguintes.

(a) Determine o instante t_0 em que o número de indivíduos é metade do inicial.

(b) Determine a derivada $\frac{d}{dt}e^{kt}$.

(c) Determine a taxa de variação do número de indivíduos em relação ao tempo.

(d) Sabendo que $N_0 = 1000$ e $k = 4$, determine a taxa acima no instante t_0 calculado no item (a).

5) A função secante, com o domínio restrito ao intervalo $[0, \pi/2)$ e contradomínio restrito ao intervalo $[1, \infty)$, é bijetiva sendo portanto invertível. Sua inversa $\text{arcsec} : [1, \infty) \longrightarrow [0, \pi/2)$ é definida por

$$y(x) = \text{arcsec}(x) \quad \Leftrightarrow \quad y \in [0, \pi/2) \quad \text{e} \quad \sec(y(x)) = x.$$

Sabendo que ela é derivável em $(1, +\infty)$, siga os passos abaixo para calcular $y'(x)$.

(a) Use a regra do quociente (ou a da cadeia) para mostrar que $\frac{d}{dy}\sec(y) = \sec(y)\,\text{tg}(y)$.

(b) Aplique o operador de derivação $\frac{d}{dx}$ em ambos os lados da igualdade $x = \sec(y(x))$, não esquecendo de usar a regra da cadeia para derivar o lado direito da igualdade.

(c) Isole o termo $y'(x)$ na expressão encontrada acima.

(d) Lembrando que $x = \sec(y)$ e $\sec^2(y) = \text{tg}^2(y) + 1$, escreva $\text{tg}(y)$ como função de x.

(e) Substitua $\sec(y)$ e $\text{tg}(y)$ na resposta do item c) para obter a expressão de $y'(x)$ como função apenas da variável x.

Gabarito

1. (a) $2^{1/3}$ **(b)** $P'(t) = 6L(t)^2(2 - L(t))$ **c)** $6 \cdot 2^{2/3}(2 - 2^{1/3})$
2. (a) Os limites laterais existem e valem 3. Logo $x'(1) = 3$.

   (b) $x'(t) = 3$ se $t \in (0, 1]$; $x'(t) = 3t^2$ se $t \in (1, +\infty)$

   (c) $f'(z) = \dfrac{z}{\sqrt{H^2 + z^2}}$

   (d) $y'(t) = \dfrac{x(t)x'(t)}{\sqrt{H^2 + x(t)^2}}$

   (e) se aproxima para $t \in (0, 2/3)$ e se afasta para $t \in (2/3, +\infty)$
3. (a) $\frac{d}{dV}W(V) = C/V$, $\frac{d}{dt}V(t) = 8t^3$ (b) $P(t) = C \times 8t^3/(2t^4 + 1)$ (c) $640/33$
4. (a) $t_0 = (\ln 3)/k$ (b) $(e^{kt})' = ke^{kt}$ (c) $N'(t) = -2N_0 ke^{kt}/(1 + e^{kt})^2$ (d) -1500
5. (a) $y'(x) = 1/(\sec(y)\,\mathrm{tg}(y))$ (d) $\mathrm{tg}(y) = \sqrt{x^2 - 1}$ (e) $y'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$