Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 13

Temas abordados: Integral Indefinida e Regra da Substituição
Seções do livro: 5.5

1) Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int x(x^2+1)^{2013}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \tan(x)\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int e^{e^x}e^x\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5}\mathrm{d}v$

(f) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{d}\theta$

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arcsen}(y)}{2\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$

(h) $\displaystyle\int (1+e^{-at})^{\frac{3}{2}}e^{-at}\,\mathrm{d}t$

(i) $\displaystyle\int \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}^2(x)\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x.$

2) Calcule as integrais abaixo usando a Regra de Substituição, quando necessário.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^0 \mathrm{sen}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_1^0 -xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x$

3) Em cada um dos itens abaixo, determine uma função cuja derivada coincida com a função dada.

(a) $f(t) = -2\cos(t)$

(b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{1+x^2}\right)$

(c) $f(t) = \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right)$

(d) $f(\theta) = 7\,\mathrm{sen}(\theta/3)$

(e) $f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$

(f) $f(x) = \left(e^{-x} + \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

4) Lembrando que duas funções que possuem a mesma derivada em um intervalo diferem por uma constante, determine a função $y(x)$ que satisfaz as condições abaixo.

(a) $y'(x) = e^{3x} + 5e^{-x}$ e o gráfico de y passa pelo ponto $(0, -5)$

(b) $y'(x) = 1 + \tan^2(x), \quad y(0) = 2$

(c) $y'(x) = x^{-2} - 6x^2 - \frac{1}{3}, \quad y(1) = -1$

(d) $y'(x) = 2x(1 - x^{-3})$ e o gráfico de y passa pelo ponto $(2, 3)$

5) Use uma mudança de variáveis (substuição) para demonstrar as duas afirmações abaixo. Em seguida, faça uma interpretação geométrica de cada uma delas.

(a) se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

(b) se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

6) Suponha que a velocidade mínima para que um objeto escape da força gravitacional da Terra seja dada por

$$\int v\mathrm{d}v = -MG\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,$$

onde M representa a massa da Terra, G a constante gravitacional e x a distância até o centro da Terra. Considere que no instante inicial $x = R$, R o raio da Terra, e mostre que v e x estão relacionados pela equação

$$v^2 = v_0^2 + 2MG\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right),$$

onde v_0 é a velocidade inicial.

7) A velocidade de queda de um corpo com massa m caindo verticalmente após t segundos pode ser modelada por

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-mt/k}),$$

desde que suponhamos que a resistência do ar seja proporcional ao valor de v, onde g representa a aceleração gravitacional e k é uma constante adimensional. Encontre a altura h com relação a superfície da Terra, supondo que a altura inicial seja de h_0 metros.

RESPOSTAS

1) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $\dfrac{(x^2+1)^{2014}}{4028} + K$

(b) $-\ln(\cos(x)) + K$

(c) $e^{e^x} + K$

(d) $\dfrac{2(x-1)^{5/2}}{5} + \dfrac{2(x-1)^{3/2}}{3} + K$

(e) $(-1/2)(1+\sqrt{v})^{-4} + K$

(f) $\dfrac{1}{2}\left(\theta - \dfrac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + K$

(g) $\operatorname{arcsen}(y)^2/4 + K$

(h) $-\dfrac{2}{5a}(1+e^{-at})^{\frac{5}{2}} + K$

(i) $-\cos(x) + (1/3)\cos^3(x) + K$

(j) $\dfrac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \dfrac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + K$

2) (a) $1/3$ (b) $1/2$ (c) $-1/2$ (d) $1 - e^{-1/2}$

3) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $F(t) = -2\operatorname{sen}(t) + K$

(b) $F(x) = \ln|x| - 5\arctan(x) + K$

(c) $F(t) = t^3 + \dfrac{t^2}{4} + K$

(d) $F(\theta) = -21\cos(\theta/3) + K$

(e) $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + K$

(f) $F(x) = -e^{-x} + 3\operatorname{arc\,sen}(x) + K$

4) (a) $\frac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} - \frac{1}{3}$

(b) $\tan(x) + 2$

(c) $-\frac{1}{x} - 2x^3 - \frac{x}{3} + \frac{7}{3}$

(d) $x^2 + \frac{2}{x} - 2$

5) Para o item (a) note inicialmente que $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. Fazendo $y = -x$ na primeira integral e lembrando que $f(-y) = f(y)$ obtemos

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\mathrm{d}y = -\int_{a}^{0} f(y)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a} f(y)\mathrm{d}y.$$

6)

7) $h(t) = \frac{mgt}{k} + ge^{-mt/k} + h_0 - g.$