Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Cálculo 1

## Máximos e mínimos em intervalos fechados

(solução da tarefa)

Após retirar os quadrados da cartolina, podemos dobrar as abas para obter uma caixa com altura igual a $x$. A base da caixa é um retângulo cujos lados medem $(10-2x)$ e $(16-2x)$. Isso pode ser constatado observando-se que, em cada um dos lados da cartolina original, retiramos dois pedaços de tamanho $x$ cada um. Como o volume de uma caixa é área da base multiplicado pela altura, obtemos

$$V(x) = x(10-2x)(16-2x).$$

Uma vez que cada um dos lados da base da caixa deve ser um número positivo, os valores de $x$ devem ser tais que $10 > 2x$ e $16 > 2x$. Deste modo, o domínio da função é o intervalo aberto $(0,5)$.

Para determinar os pontos críticos da função $V$, precisamos primeiro calcular a derivada de $V$. Isso pode ser feito mais facilmente se escrevermos

$$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x, \qquad x \in (0,5).$$

Assim,

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x^2 - 26x + 40).$$

Uma vez que a função $V$ é derivável em $(0,5)$, a única possibilidade de termos um ponto crítico neste intervalo é a derivada se anular. Uma conta simples mostra que $V'(x) = 0$ para $x = 20/3$ e $x = 2$. Uma vez que $20/3 \notin (0,5)$, este primeiro valor deve ser descartado, e portanto o único ponto crítico de $V$ no intervalo $(0,5)$ é o ponto $x = 2$.

O domínio da função $V$ não é fechado, de modo que não podemos garantir que a função tem ponto de máximo. Porém, podemos estender a função para o intervalo $[0,5]$, uma vez que a expressão de $V$ nos permite considerar $x = 0$ e $x = 5$. Vamos denotar ainda por $V$ esta nova função.

Após o passo acima, a função $V$ é contínua e está definida em um intervalo fechado. Logo, ela possui um ponto de máximo. Este ponto ocorre nos extremos do domínio ou é um ponto crítico do intervalo $(0,5)$. Em outras palavras, o ponto de máximo pertence ao conjunto $\{0,2,5\}$. Calculando

$$V(0) = 0, \qquad V(2) = 144, \qquad V(5) = 0,$$

percebemos que o máximo de $V$ ocorre no ponto $x = 2$. Deste modo, o maior volume possível é 144 e ele ocorre quando a base da caixa mede 6 por 12.

Finalizamos observando que, na solução acima, introduzimos os pontos $x = 0$ e $x = 5$ no domínio da função. É claro que, na prática, estes valores não são admissíveis. Assim, após resolver o problema, é importante checar se o ponto de máximo encontrado de fato pertence ao domínio original da função. Neste caso, isso evidentemente ocorre. Além disso, a análise acima mostra que, se perguntássemos por uma caixa com volume mínimo, o problema não teria solução, porque o ponto de mínimo da (nova) função $V$ aconteceu exatamente nos extremos do domínio.