Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Cálculo 1

## Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 2

No texto anterior vimos que, se $F$ é uma primitiva de $f$ em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Isto reduz o problema de resolver uma integral àquele de encontrar uma primitiva de $f$. Deste modo, é natural perguntar se toda função contínua possui uma primitiva. Confome veremos a seguir, a resposta é afirmativa. Mais especificamente, considere $f$ contínua em $[a,b]$ e defina a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad x \in [a,b]. \tag{1}$$

Note que, dentro da integral, estamos usando a variável $t$ somente para diferenciar do $x$ que está no limite superior de integração. Isto não é problema nenhum pois, como já vimos, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^u f(u)\mathrm{d}u$, por exemplo.

No resultado abaixo apresentamos a parte final do Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 1** (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 2)**.** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a função $g$ definida em (1) é contínua, derivável em $(a,b)$ e*

$$g'(x) = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

*Em particular, toda função contínua possui uma primitiva.*

O resultado acima, juntamente com aquele do texto anterior, forma o que chamamos de Teorema Fundamental do Cálculo. A primeira demonstração de uma versão do teorema foi apresentada por James Gregory (1638-1675). Isaac Barrow (1630-1677) provou uma versão um pouco mais geral para que, depois, o seu brilhante aluno Isaac Newton (1643-1727) completasse o desenvolvimento da teoria matemática por trás do teorema. Não menos destaque merece o nome de Gottfried Leibniz (1646-1716) que foi quem sistematizou o conhecimento em uma teoria de quantidades infinitesimais e introduziu a notação usada hoje. A enorme variedade de aplicações desta teoria nos permite afirmar, sem exageros, que estamos diante de uma das maiores descobertas científicas da era moderna. Logo, todos os esforços demandados até aqui no curso de Cálculo não foram em vão...

Antes de apresentar a prova do Teorema 1 vamos definir o que se entende por média de uma função. Supondo então que $f$ está definida em $[a, b]$, tomamos um número $n \in \mathbb{N}$ e dividimos o itervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos fechados de tamanho $\Delta x = (b - a)/n$ de modo que a união de todos eles dê o intervalo $[a, b]$ e eles se interceptem, possivelmente, nos seus extremos. Em cada um dos $n$ intervalos, escolhemos um ponto $x_k^*$ e calculamos a média aritmética

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots f(x_n^*)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{k} f(x_k^*) \Delta x.$$

Quando o número $n$ cresce, aumentamos a quantidade de pontos que vão entrar no cálculo da média. Se $f$ for integrável em $[a, b]$, fazendo $n \to +\infty$, obtemos o conceito de média de uma função:

$$\text{media}(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

O resultado abaixo é uma consequência interessante das propriedades da integral definida.

**Lema 1** (Teorema da Média)**.** *Se $f$ é contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

*Em outras palavras, a média de uma função contínua é sempre assumida.*

**Demonstração.** Sejam $m$ e $M$ o mínimo e máximo de $f$ em $[a, b]$, respectivamente. Sabemos que estes dois números existem porque toda função contínua definida em um intervalo fechado assume máximo e mínimo. Uma vez que $m \leq f(x) \leq M$ em $[a, b]$, integrando obtemos

$$m(b-a) = \int_a^b m \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b M \mathrm{d}x = M(b-a).$$

Assim, se denotarmos por $x_m$ e $x_M$ os pontos de mínimo e máximo, respectivamente, obtemos

$$f(x_m) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq M = f(x_M).$$

Aplicando o Teorema do Valor Intermediário no intervalo $[x_m, x_M]$ (ou $[x_M, x_m]$), obtemos $c \in [a, b]$ tal que $f(c)$ coincide com a média de $f$. $\square$

Usando o resultado acima, podemos facilmente provar a 2a parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

**Prova do Teorema 1.** Para calcular a derivada da função $g$ definida em (1), vamos ter que usar a definição de derivada. Considere então $x \in (a, b)$ fixado e $h > 0$ pequeno de tal modo que $x$, $x+h \in (a,b)$. Temos que

$$\begin{aligned} g(x+h)-g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t\right) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dividindo por $h>0$ e usando o Teorema da Média, obtemos $c_h \in [x, x+h]$, tal que

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(c_h).$$

Uma vez que $x \le c_h \le x+h$, temos que $c_h \to x$, quando $h \to 0^+$. A continuidade de $f$ implica então que $\lim_{h\to 0^+} f(c_h) = f(x)$ e portanto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x).$$

Isso mostra que derivada lateral à direita é igual a $f(x)$.

Usando o mesmo argumento obtemos

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x),$$

o que mostra que a derivada lateral à esquerda também vale $f(x)$. Portanto, a função $g$ é derivável e

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right] = g'(x) = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

A existência da derivada acima mostra que $g$ é contínua em $(a,b)$. A continuidade nos pontos extremos $x=a$ e $x=b$ é uma consequência da existência dos limites laterais acima. Isto finaliza a prova do teorema. $\square$

Vale notar que, apesar do Teorema 1 garantir a existência de primitiva, ele não ajuda muito no cálculo efetivo de uma integral definida. De fato, sabendo que a função $g$ definida em (1) é uma primitiva de $f$ e usando a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = g(b)-g(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

que é uma igualdade óbvia.

**Exemplo 1.** Como a função cosseno é contínua, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos^3(t)\mathrm{d}t\right] = \cos^3(x).$$

Note que, no cálculo acima, não é necessário resolver a integral para depois derivar. Basta usar o Teorema 1. $\square$

**Exemplo 2.** Vamos calcular a derivada da função

$$f(x) = \int_1^{x^2+1} e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

O ponto importante aqui é que não podemos aplicar diretamente o Teorema 1, porque o limite de integração é $x^2$, e não $x$. Contudo, se definirmos

$$p(x) = x^2 + 1, \qquad q(x) = \int_1^x e^{t^2} \mathrm{d}t,$$

temos que $f(x) = q(p(x))$. Podemos então usar a Regra da Cadeia para obter

$$f'(x) = q'(p(x))p'(x) = e^{p(x)^2} \cdot (x^2+1)' = 2xe^{(x^2+1)^2}.$$

Note que usamos o Teorema 1 para calcular $q'(x) = e^{x^2}$. $\square$

**Exemplo 3.** Existem funções que não possuem primitivas. De fato, considere a função $f$ definida em $[0,2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1) \cup (1,2], \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Suponha que ela possui uma primitiva, que vamos denotar por $F$. Uma vez que $F'(x) = f(x)$ em $(0,2)$, concluímos que $F' \equiv 0$ nos intervalos $(0,1)$ e $(1,2)$. Deste modo, a função $F$ é constante em cada um desses intervalos, isto é, existem $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$, tais que $F \equiv c_1$ em $(0,1)$ e $F \equiv c_2$ em $(1,2)$. Por outro lado, como $F$ é contínua em $x = 1$, temos que

$$c_1 = \lim_{x \to 1^-} F(x) = F(1) = \lim_{x \to 1^+} F(x) = c_2.$$

Deste modo, $c_1 = c_2$ e a função $F$ é constante em todo o intervalo $(0,2)$. Isto implica que $0 = F'(1) = f(1)$, o que é um absurdo, pois $f(1) = 1$.

Concluímos então que a função $f$ acima não possui primitiva. Isso naturalmente não contradiz o Teorema 1, porque $f$ não é contínua. $\square$

# Tarefa

A primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser provada a partir da segunda. Faremos isso nesta tarefa.

Considere $f$ um função contínua em $[a, b]$ e resolva os itens a seguir.

1. Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dada por
$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$
determine a derivada $g'(x)$.

2. Supondo que $F$ é uma primitiva (qualquer) de $f$ em $[a, b]$, justifique a existência de uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que
$$g(x) = f(x) + C, \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

3. Fazendo $x = a$ na igualdade acima, determine o valor de $C$.

4. Conclua dos itens anteriores que
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$