Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 10

Temas abordados: Concavidade; Esboço de gráficos; regra de L'Hospital
Seções do livro: 4.4, 4.5

1) Durante o processo de tosse, provocado pela presença na traquéia de algum corpo estranho, a traquéia se contrai com o objetivo de aumentar o fluxo de ar através dela, e assim tornar mais eficiente o método de expulsão do corpo estranho. Segundo Poiseuille, indicando por r_0 o raio da traquéia em estado normal e por $r \leq r_0$ o seu raio durante a tosse, o fluxo de ar $V = V(r)$ na traquéia pode ser modelado por

$$V(r) = \begin{cases} K\dfrac{r_0}{2}r^4 & \text{se} \quad 0 \leq r \leq r_0/2, \\ K(r_0 - r)\, r^4 & \text{se} \quad r_0/2 \leq r \leq r_0, \end{cases}$$

onde K é uma constante positiva.

(a) Determine os pontos críticos de $V(r)$ no intervalo $(0, r_0)$.

(b) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $V(r)$.

(c) Determine os intervalos em que o gráfico de $V(r)$ é côncavo para cima ou para baixo.

(d) Use os itens anteriores para esboçar o gráfico de $V(r)$ no caso em que $K = 1$.

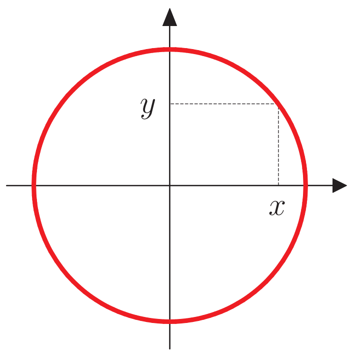
2) Conforme ilustra a figura abaixo, as áreas dos retângulos inscritos na circunferência $x^2+y^2 = 16$ podem ser calculadas por meio da função $A(x) = 4\,x\,\sqrt{16 - x^2}$, com $x \in [0, 4]$.

(a) Calcule os pontos críticos da função $A(x)$ no intervalo $(0, 4)$.

(b) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento da função $A(x)$.

(c) Determine os intervalos em que a concavidade do gráfico de $A(x)$ é voltada para baixo e os intervalos em que concavidade é voltada para cima.

(d) Esboce o gráfico de $A(x)$.



3) Suponha que o número de milhares de pessoas infectadas por um vírus seja modelado pela função $N(t) = -2t^3 + at^2 + bt + c$, em que a, b e c são constantes e o tempo t é medido em anos. Suponha ainda que, no instante $t = 0$, nove mil pessoas estavam infectadas, um ano depois esse número atingiu um valor mínimo e, em seguida, cresceu até atingir um valor máximo para $t = 2$.

(a) Determine as constantes a, b e c a partir das informações dadas.

(b) Determine o número de pessoas infectadas 1, 2 e 3 anos depois do instante $t = 0$.

(c) Determine a concavidade de $N(t)$ e, em seguida, esboce o seu gráfico para $t \in [0, 3]$.

4) O mecanismo de suspensão dos automóveis consiste num sistema composto de uma mola e de um amortecedor. Denotando por $s(t)$ a posição vertical de um veículo de massa m em relação a posição de equilíbrio, temos que a força da mola é dada, pela lei de Hooke, por $F = -ks(t)$ e a força do amortecedor é dada por $R = -bv(t)$, onde $v(t)$ é a velocidade instantânea e a constante b é denominada viscosidade do amortecedor. Como a força resultante é $F + R$, pela Segunda Lei de Newton, temos que

$$(*) \quad ma(t) = -ks(t) - bv(t)$$

para $t > 0$. Suponha que, em unidades adequadas, $m = 1$, $b = 4$ e $k = 4$ e considere

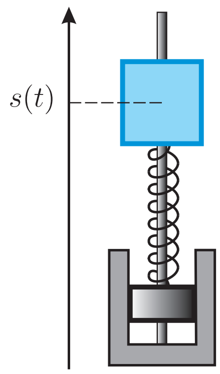
$$s(t) = -3te^{-2t}.$$

(a) Calcule $v(t)$ e $a(t)$ e verifique que a equação $(*)$ é satisfeita.

(b) Calcule os pontos críticos de $s(t)$ e determine seus extremos locais e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

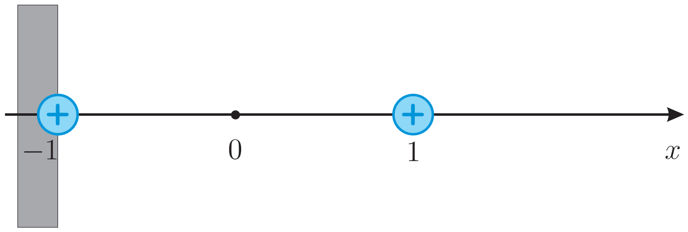
(c) Determine os pontos de inflexão de $s(t)$ e os intervalos onde a concavidade é voltada para cima e onde é voltada para baixo.

(d) Determine as assíntotas de $s(t)$ e, em seguida, esboce o seu gráfico.



5) Considere duas cargas elétricas com carga unitária e positiva, fixadas num eixo perpendicular a uma parede, como na figura abaixo. O potencial elétrico gerado por essas duas partículas num ponto x ao longo desse eixo é dado, em unidades convenientes, pela seguinte função

$$V(x) = \frac{1}{|x+1|} + \frac{1}{|x-1|}, \qquad x > -1.$$



(a) Verifique que o potencial elétrico é dado por

$$V(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2-1}, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{2x}{x^2-1}, & x > 1 \end{cases}$$

(b) Calcule a força exercida numa partícula de carga unitária posicionada em x, dada por $F(x) = -V'(x)$.

(c) Calcule os pontos críticos de $V(x)$ e determine seus extremos locais e seus intervalos de crescimento e decrescimento. A força $F(x)$ se anula em algum ponto?

(d) Determine os pontos de inflexão de $V(x)$ e seus intervalos de concavidade para cima e para baixo.

(e) Determine as assíntotas verticais e horizontais de $V(x)$ e esboce seu gráfico.

Gabarito

1. (a) $\{r_0/2, 4r_0/5\}$
   (b) cresce em $(0, r_0/2) \cup (r_0/2, 4r_0/5)$; decresce em $(4r_0/5, r_0)$
   (c) côncava para cima em $(0, r_0/2) \cup (r_0/2, 3\,r_0/5)$; côncava para baixo em $(3\,r_0/5, r_0)$
2. (a) $\{\sqrt{8}\}$
   (b) cresce em $(0, \sqrt{8})$; decresce em $(\sqrt{8}, 4)$
   (c) côncava para baixo em $(0, 4)$
3. (a) $a = 9$; $b = -12$; $c = 9$
   (b) 4000, 5000 e 0, respectivamente
   (c) côncava para cima em $(0, (3/2))$; côncava para baixo em $((3/2), 3)$
4. (a) $v(t) = s'(t) = -3(1 - 2t)e^{-2t}$, $a(t) = v'(t) = 12(1 - t)r^{-2t}$
   (b) ponto crítico: $t = 1/2$; cresce em $(\frac{1}{2}, \infty)$; decresce em $(0, \frac{1}{2})$
   (c) ponto de inflexão: $t = 1$; côncava para cima em $(0, 1)$; côncava para baixo em $(1, \infty)$
   (d) $s = 0$ é assíntota horizontal
5. (a) lembre que $|y| = y$ se $y \geq 0$, e $|y| = -y$ se $y < 0$
   (b)
   $$F(x) = -V'(x) = -\begin{cases} 4x(x^2-1)^{-2}, & -1 < x < 1 \\ -2(x^2+1)(x^2-1)^{-2}, & x > 1 \end{cases}$$
   (c) ponto crítico: $x = 0$ é mínimo local; cresce em $(0, 1)$; decresce em $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   (d) côncava para cima em todo o domínio
   (e) assíntotas verticais: $x = -1$ e $x = 1$; assíntota horizontal: $y = 0$