Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 12 – Soluções

Temas abordados: Integral Definida, Teorema Fundamental do Cálculo e Áreas
Seções do livro: 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4

1) Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Divida o intervalo $[0, 1]$ em n partes iguais como o indicado na figura abaixo e resolva os itens a seguir.

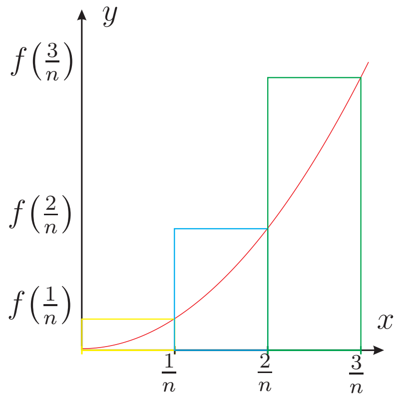
(a) Defina, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, o ponto $x_i^* = i/n$ e calcule $f(x_i^*)$.

(b) Defina agora $\Delta x_i = 1/n$ e calcule

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \tag{1}$$

usando a seguinte fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$



(c) Lembrando que a integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ é o limite, quando $n \to +\infty$, do somatório em (1), encontre a área delimitada pelo gráfico da função e o eixo $\mathcal{O}x$.

Soluções:

(a) Basta usar que $f(x) = x^3$.

(b) Observe que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

(c) Segue de (b) que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

2) (**O Teorema da Média**) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere m e M os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$, respectivamente.

(a) Use as propriedades da integral para verificar que

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x.$$

(b) Usando o Teorema do Valor Intermediário, conclua que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Usando o mesmo raciocínio mostre que, se $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função não negativa tal que $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Soluções:

(a) Como m e M são o mínimo e o máximo de f em $[a, b]$ temos que

$$m \le f(x) \le M, \ \forall x \in [a, b].$$

Integrando a expressão acima em $[a, b]$ obtemos

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(b) Calculando as integrais das funções constantes acima e dividindo todos os membros por $(b - a) > 0$, obtemos

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M.$$

Como f é contínua em $[a, b]$ ela assume mínimo e máximo nesse intervalo. Assim, existem x_0 e x_1 em $[a, b]$ tais que

$$m = f(x_0) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le f(x_1) = M,$$

de modo que pelo T.V.I. existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Como $p(x)$ é positiva temos que

$$mp(x) \le f(x)p(x) \le Mp(x), \ \forall x \in [a, b].$$

Daí, integrando em $[a, b]$ obtemos que

$$m\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)p(x)\ \mathrm{d}x \le M\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Agora, como $\int_a^b p(x)\ \mathrm{d}x > 0$, basta proceder de maneira análoga ao item (b) para obter o resultado desejado.

3) (**O Teorema Fundamental do Cálculo**) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina

$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad x \in [a,b].$$

(a) Para $x \in (a,b)$ e $h > 0$ pequeno, use as propriedades da integral e o Teorema da Média para verificar que

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(c_h),$$

para algum $c_h \in [x, x+h]$.

(b) Usando o item anterior e a continuidade de f, mostre que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

(c) Repita o argumento acima para $h < 0$, e conclua que a função g é derivável e

$$g'(x) = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

(d) Supondo agora que F é uma primitiva qualquer de f, mostre que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

<u>**Soluções**</u>:

(a) Como $\int_a^{x+h} = \int_a^x + \int_x^{x+h}$, temos que

$$g(x+h) - g(x) = \left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t\right) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t.$$

Dividindo por $h > 0$ e usando o Teorema da Média, obtemos $c_h \in [x, x+h]$, tal que

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(c_h),$$

(b) Quando $h \to 0^+$, temos que $c_h \to x$. Como f é contínua, $f(c_h) \to f(x)$, o que mostra que a derivada lateral à direita é igual a $f(x)$.

(c) Argumentando como acima, obtemos

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Deste modo, a derivada lateral à direita e à esquerda existem e valem $f(x)$, o que mostra que

$$g'(x) = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

(d) Como a derivada de F e g são iguais em (a,b), obtemos uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C, \qquad x \in (a,b).$$

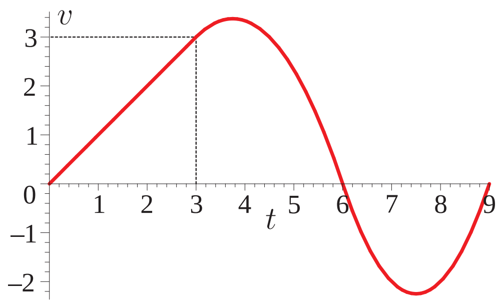
A função g, por ser derivável, é contínua em (a,b). Por outro lado, a expressão acima nos permita concluir que g é também contínua em $x = a$ e $x = b$, porque F o é. Assim, a desigualdade acima vale para todo $x \in [a,b]$. Fazendo $x = a$, concluímos que $g(a) = F(a) + C$, ou ainda $C = -F(a)$. Agora, fazendo $x = b$, obtemos

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - C = F(b) - F(a).$$

4) Suponha que, no instante t, a posição em relação à origem de uma partícula que se desloca ao longo de uma reta seja dada por $s(t) = \int_0^t v$, em que $v\colon [0,9] \to \mathbb{R}$ é a função velocidade, cujo gráfico está ilustrado abaixo. Considere ainda que t seja dado em segundos, que $s(t)$ seja dada em metros e que, para $0 \leq t \leq 3$, o gráfico de $v(t)$ seja um segmento de reta. A partir do gráfico da função velocidade, julgue os itens a seguir.

(a) A partícula está se afastando da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$.

(b) A partícula percorre menos de 4 metros nos primeiros 3 segundos.



(c) No instante $t = 6$ a partícula está na origem.

(d) No instante $t = 9$ a posição da partícula é positiva.

(e) O espaço total percorrido pela partícula é igual a $\int_0^6 v - \int_6^9 v$.

<u>**Soluções**</u>:

(a) Pelo Teorema Fundamental, a velocidade da partícula é $s'(t) = v(t)$, e o sinal da velocidade indica o sentido de percurso. Assim, a partícula está se *afastando* da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$, uma vez que $v(t) > 0$ nesse intervalo.

(b) Esse espaço corresponde à área abaixo do gráfico de $v(t)$ para $t \in [0,3]$. Pelo gráfico, essa área é igual a $3 \times 3\,/2 = 9/2$, e portanto o espaço percorrido é *maior* do que 4 metros.

(c) Até o instante $t = 6$, a partícula tem velocidade $s'(t) = v(t)$ positiva, e está se afastando da origem. Logo, ela se encontra *à direita* da origem nesse instante.

(d) No intervalo $[6,9]$, a partícula tem velocidade negativa, e está se aproximando da origem. Porém, comparando as áreas sob o gráfico de $v(t)$, verifica-se que o espaço percorrido no intervalo $[0,6]$ é maior do que o percorrido no intervalo $[6,9]$, e portanto a partícula ainda está *à direita* da origem.

(e) O espaço percorrido no intervalo $[0,6]$ é igual a $\int_0^6 v$. Já no intervalo $[6,9]$, como $s'(t)$ é negativa, o espaço percorrido é igual a $-\int_6^9 v$. Assim, o espaço total percorrido pela partícual é igual a $\int_0^6 v - \int_6^9 v$.

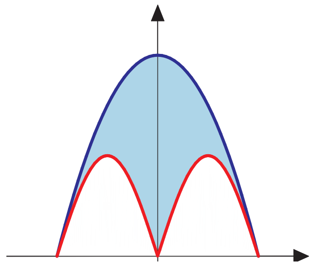
5) A figura ao lado indica a área delimitada pelos gráficos das funções

$$f(x) = 2 - 2x^2$$

e

$$g(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)|,$$

com $x \in [-1, 1]$. Use a integral definida para calcular o valor dessa área.



<u>**Soluções**</u>: Observe que a função $f(x)$ é sempre maior do que $g(x)$ no intervalo $(-1, 1)$. Logo a área A em questão é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2 - |\operatorname{sen}(\pi x)|)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} |\operatorname{sen}(\pi x)|\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} - \int_{-1}^{1} |\operatorname{sen}(\pi x)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Para eliminar o módulo na última integral acima vamos separá-la em dois pedaços e lembrar que $\operatorname{sen}(\pi x) \leq 0$ se $x \in [-1, 0]$ e $\operatorname{sen}(\pi x) \geq 0$ se $x \in [0, 1]$. Assim

$$\int_{-1}^{1} |\operatorname{sen}(\pi x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-\operatorname{sen}(\pi x))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \operatorname{sen}(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

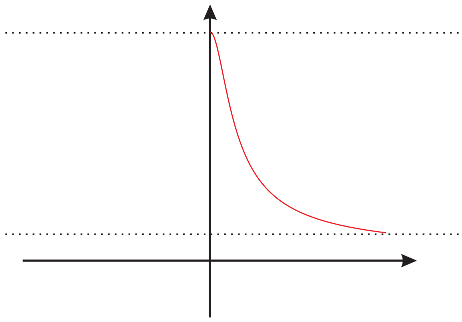
No cálculo acima usando o fato de que a função $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ é uma primitiva de $\operatorname{sen}(\pi x)$.

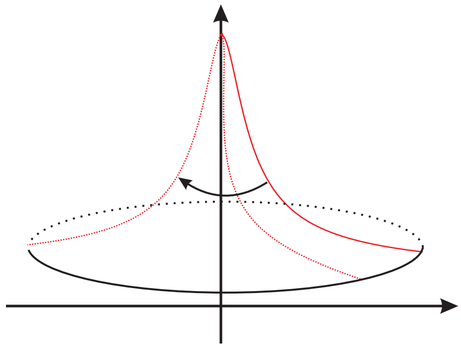
Uma outra maneira de calcular a mesma área é notar que a função $f(x) - g(x)$ é par em $[-1, 1]$. Logo

$$A = 2\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \cdots = 2\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{\pi}\right).$$

6) Considere a curva $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, definida para $0 \leq x \leq t$. Ao girarmos o gráfico de g em torno do eixo $\mathcal{O}y$ obtemos um sólido cujo volume é dado por

$$V(t) = \int_0^t 2\pi x g(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^t \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$





(a) Verifique que a função $G(x) = \ln(1+x^2)$ é uma primitiva de $(2x)/(1+x^2)$.

(b) Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular o volume do sólido no caso em que $t = 2$.

(c) Calcule $V(t)$ para $t \geq 0$.

(d) Calcule agora $V'(t)$ e, em seguida, determine $\lim_{t\to\infty} V'(t)$.

Soluções:

(a) Pela regra da cadeia temos que

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}(\ln)(1+x^2)\cdot\frac{d}{dx}(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

(b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo $\int_0^2 (2x)/(1+x^2)\mathrm{d}x = (G(2) - G(0)) = \ln(5)$ e portanto $V(2) = \pi\ln(5)$.

(c) Observe que pelo item (a), $\pi G(x)$ é uma primitiva de $\frac{2\pi x}{1+x^2}$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$V(t) = \int_0^t \frac{2\pi x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi(G(t) - G(0)) = \pi\ln(1+t^2).$$

(d) Basta usar a regra da cadeia para obter

$$V'(t) = \frac{d}{dt}\pi\ln(1+t^2) = \pi\frac{d}{dt}(\ln)(1+t^2)\cdot\frac{d}{dt}(1+t^2) = \frac{2\pi t}{1+t^2}.$$

Uma outra maneira, mais simples, de calcular V' é notar que como$f(x) = \frac{2\pi x}{1+x^2}$ é uma função contínua, fixando-se $F(t) = V(t)$, temos pelo Exercício 2(d) que

$$V'(t) = (2\pi t)/(1+t^2).$$