Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Crescimento de funções

Vimos que a derivada de uma função f em um ponto a representa, geometricamente, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Neste texto vamos explorar um outro aspecto da derivada de uma função.

Vamos primeiro retomar o exemplo de um carro cuja posição, no instante $t > 0$, é dado pela função $s = s(t)$. Nestas condições, a derivada da posição é dada pelo limite

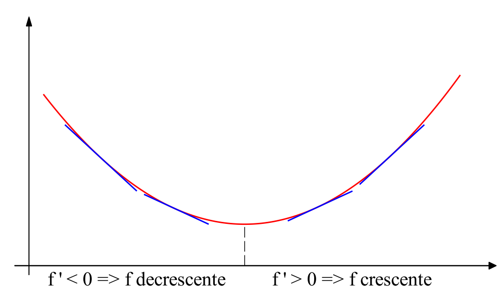
$$s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Note que, na expressão acima, a fração é exatamente a velocidade média entre os instante t e $t + h$. Deste modo, quando fazemos $h \to 0$, estamos calculando a velocidade instantânea do carro no instante $t > 0$. Isto se reflete dizendo que a velocidade do carro é a taxa de variação instantânea da sua posição. O mesmo raciocínio pode ser usado para outras funções, conforme os exemplos abaixo:

função	variação	derivada
posição $s(t)$	velocidade média $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$	velocidade $v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$
velocidade $v(t)$	aceleração média $\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$	aceleração $a(t) = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}$
população $p(t)$	variação média da população	taxa de variação da população $p'(t)$

De uma maneira geral, dada uma função derivável f, a taxa de variação instantânea de f em $x = x_0$ é exatamente a sua derivada $f'(x_0)$ neste ponto.

O significado da derivada depende de qual grandeza a função f mede. Seja qual for, é natural esperar que uma função com taxa de variação positiva em um intervalo deve crescer neste intervalo. Por outro lado, se a derivada é negativa no intervalo a função deve ser decrescente. A figura ao lado ilustra esta propriedade.



A relação entre o sinal da derivada de uma função e a sua monotonicidade tem várias aplicações. Devido à sua importância, vamos destacar esta relação no resultado que se segue.

Teorema: (crescimento/descrescimento de funções) Suponha que a função f é derivável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

1. Se $f' > 0$ em I, então f é crescente no intervalo I.
2. Se $f' < 0$ em I então f é decrescente no intervalo I.

Para fazer uma aplicação do teorema acima vamos considerar a seguinte situação: segundo o modelo de Ward-Smith, a potência P necessária para o vôo horizontal de uma gaivota depende de sua velocidade v, e é dada pela função

$$P(v) = K_1\, v^3 + \frac{K_2}{v}$$

em que $v > 0$ e K_1 e K_2 são constantes positivas que dependem da densidade do ar, da área das asas, do peso do pássaro, etc. Em longos percursos, as gaivotas voam à velocidade que minimiza a potência necessária.

Suponha que, em unidades apropriadas de medidas, $K_1 = 1$ e $K_2 = 48$, queremos determinar qual deve ser a velocidade da gaivota de modo a minimizar a potência. Para isto, vamos primeiro descobrir em quais intervalos do domínio $(0, +\infty)$ a função $P(v)$ é crescente e em quais é decrescente. Conforme o teorema, essa informação esta relacionada com o sinal da derivada. Como $K_1 = 1$ e $K_2 = 48$ a derivada é dada por

$$P'(v) = 3v^2 - \frac{48}{v^2} = \frac{3v^4 - 48}{v^2}, \quad v \in (0, +\infty).$$

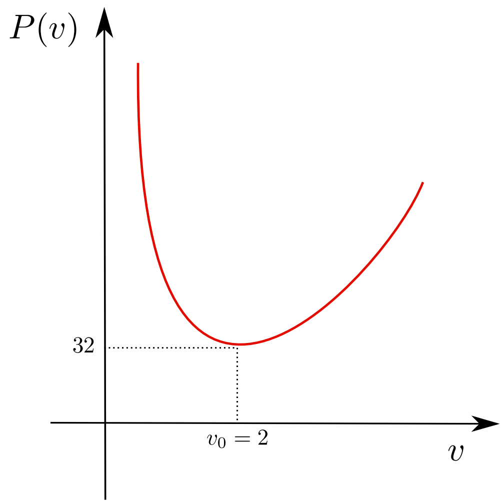
Observe que a função P possui derivada em todos os pontos do seu domínio e é contínua. Além disso, ela se anula somente se o numerador acima é igual a zero, isto é, somente quando $v = v_0 = 2$.

O ponto v_0 onde a derivada se anula divide o domínio da derivada $(0, +\infty)$ em dois intervalos disjuntos, a saber $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$. Afirmamos que a derivada P' tem sempre o mesmo sinal neste primeiro intervalo. De fato, se houvessem dois pontos v_1, $v_2 \in (0, 2)$ tais que $P'(v_1) < 0$ e $P'(v_2) > 0$, o Teorema do Valor Intermediário implicaria que a função P' teria que se anular em algum ponto entre v_1 e v_2. Mais isso não pode acontecer porque ambos são menores do que $v_0 = 2$, que é o único ponto onde a derivada se anula. Logo, o sinal de P' no intervalo $(0, 2)$ é sempre o mesmo. Para descobrir este sinal basta calcular a derivada em algum ponto do intervalo, digamos $v = 1$. Como $P'(1) = 3 - 48 < 0$ concluímos que P' é negativa em $(0, 2)$.

O mesmo raciocínio do parágrafo anterior nos permite concluir que o sinal de P' no intervalo $(2, +\infty)$ é sempre o mesmo. Para descobrir o sinal calculamos $P'(3) = 195/9 > 0$, e portanto P' é sempre positiva no intervalo $(2, +\infty)$. Podemos então construir a seguinte tabela:

	$v \in (0, 2)$	$v \in (2, +\infty)$
sinal da derivada P'	negativo	positivo
comportamento de P	decrescente	crescente

Note que a expressão de $P(v)$ não é das mais simples, de modo que não sabemos ainda fazer o desenho do seu gráfico. Contudo, analisando com cuidado os dados da tabela acima, podemos inferir que ele deve ter o aspecto esboçado ao lado. Deste modo, concluímos que a velocidade para a qual corresponde a menor potência é exatamente $v_0 = 2$. Essa potência é igual a $P(2) = 32$ e deve ser utilizado em vôos de longa distância, para que a gaivota se canse menos.



A estratégia seguida acima nos permite esboçar o gráfico de qualquer função que tenha derivada contínua. O ponto crucial é determinar os intervalos onde a derivada da função é positiva e aqueles onde ela é negativa. Para fazer isto, deve-se seguir o mesmo procedimento usado no texto, que sistematizamos abaixo:

Importante: Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função derivável $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ seguimos os seguintes passos:

1. determine os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (a, b)$ para os quais $f'(x) = 0$;
2. os pontos acima determinam $(k + 1)$ intervalos disjuntos (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_k, b), todos contidos em (a, b);
3. determine o sinal da derivada em cada um dos intervalos acima. Naqueles onde a derivada é positiva a função é crescente. Naqueles em que ela é negativa a função é decrescente.

Tarefa

Considere a função

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 100$$

e resolva os itens abaixo:

1. Determine as três soluções da equação $f'(x) = 0$.
2. Determine o sinal da derivada em cada um dos 4 intervalos determinados pelos pontos encontrados acima. Note que o primeiro intervalo é da forma $(-\infty, x_1)$, em que x_1 é a menor raiz da derivada.
3. Determine os intervalos onde f é crescente e aqueles onde ela é decrescente.
4. Utilize os itens acima para esboçar o gráfico de f.
5. Qual é o menor valor valor assumido pela função f e em qual ponto este menor valor é atingido?