Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 2

Temas abordados: Funções e limites
Seções do livro: 1.5

1) Calcule os limites abaixo.

(a) $\lim_{x \to 1}(-3x^2 + 3x + 5)$ (b) $\lim_{s \to 0} \sqrt{\dfrac{2s^2 + 3s - 4}{4s - 4}}$ (c) $\lim_{x \to -1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

2) Suponha $f(x) > 0$ para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -3$. Decida sobre a veracidade de cada uma das afirmações abaixo, justificando caso ela seja verdadeira ou apresentando um contra-exemplo caso seja falsa.

(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe (b) $\lim_{x \to 2} f(x) = -3$ (c) Se existir, $\lim_{x \to 2} f(x)$ é positivo.

3) No cálculo de um limite que envolve uma fração, pode ocorrer do denominador da fração se aproximar de zero. Nesse caso, não podemos aplicar a regra do quociente para limites. Ao invés disso, podemos tentar efetuar alguma manipulação algébrica de modo a reescrever a fração de uma outra maneira, na qual possamos aplicar as regras usuais de limite. Por exemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x + 3)} = \frac{1}{4}.$$

Nos itens seguintes, após fazer as devidas simplificações, calcule o limite pedido.

(a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{3 - x}$ (b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{2 - x}$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 8}$

(d) $\lim_{z \to 0} \dfrac{z^2 + 2z}{z}$ (e) $\lim_{x \to 9} \dfrac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

4) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, definimos a *reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(a, f(a))$ como sendo a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ no ponto a indicado e, em seguida, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

(a) $f(x) = x^2, \quad a = -1$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 3$

5) Se a posição de um carro no instante $t > 0$ é dada pela função $s(t)$, então a velocidade média entre os instantes t e $t + h$ é dada por $(s(t + h) - s(t))/h$, sempre que $t + h > 0$. Definimos a *velocidade instantânea* do carro no instante $t > 0$ como sendo

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h},$$

quando esse limite existe. Calcule a velocidade instantânea em cada um dos casos abaixo:

(a) $s(t) = \sqrt{t}$ (b) $s(t) = t^3$ (c) $s(t) = 2 + 3t + 4t^2$

RESPOSTAS

1) (a) 5 (b) 1 (c) -1

2) Todas as afirmações são falsas. Para os dois primeiros itens, um possível contra-exemplo é a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Para o terceiro item, podemos usar a função

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

3) (a) -6 (b) -2 (c) 1 (d) 2 (e) 1/3

Para simplificar a fração no item (c), note que $x = 2$ é uma raiz do numerador. Logo, podemos escrever $x^3 - x^2 - 2x = (x-2)q(x)$, para algum polinômio q de grau 2. Procedendo de maneira análoga para o denominador, podemos cancelar o termo comum $(x-2)$ e calcular o limite usando a regra do quociente.

Para simplificar a fração no item (e), tente fatorar o denominador, ou ainda multiplicar o numerador e o denominador por $(2\sqrt{x} + 6)$.

4) Note que o denominador da fração tende a zero, de modo que o seu cálculo deve ser feito como no exercício anterior. Após as devidas simplificações e o uso da equação da reta tangente

$$y(x) - f(a) = f'(a)(x-a),$$

obtemos as seguintes respostas:

(a) inclinação $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$;
equação da reta tangente: $y(x) = -2x - 1$

(b) inclinação $f'(3) = -1/(3)^2 = -1/9$;
equação da reta tangente: $y(x) = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{3}$

5) Aqui novamente é necessário fazer a simplificação do quociente antes de calcular o limite. Após as devidas simplificações e o cálculo do limite, obtemos:

(a) $v(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

(b) $v(t) = 3t^2$
Para simplificar o quociente, lembre que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

(c) $v(t) = 3 + 8t$
Para simplificar o quociente, lembre $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.