Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

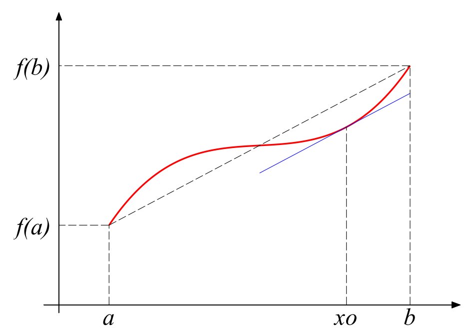
Cálculo 1

O Teorema do Valor Médio

Começamos este texto enunciado um importante resultado sobre derivadas:

Teorema do Valor Médio. Suponha que f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



A figura ao lado ilustra o teorema, cuja demonstração será apresentada em um outro texto. Estamos interessados aqui em explorar uma importante consequência dele, que pode ser enunciada como se segue:

Consequência: (Crescimento/decrescimento de funções) Se uma função f é derivável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $f' > 0$ em I, então f é crescente no intervalo I. Se $f' < 0$ em I então f é decrescente em I.

Lembre que a derivada f' mede a taxa de variação instantânea de f. Deste modo, uma função com taxa de variação positiva em um intervalo deve ser crescente neste intervalo. O enunciado acima é então bem natural. Por exemplo, se f mede a posição de um carro, sabemos que a derivada f' mede a sua velocidade. Assim, se um carro tem velocidade positiva a sua posição deve estar aumentando com o passar do tempo. Se a velocidade for negativa, então a posição está diminuindo com o tempo, o que significa que o carro se move no sentido contrário ao que foi tomado como positivo.

Para provar a consequência enunciada acima, suponha que $f' > 0$ em I e considere dois pontos a, $b \in I$ com $a < b$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[a, b]$, obtemos $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) > 0,$$

em que usamos o fato de $f'(x_0) > 0$ e $a < b$. A expressão acima mostra que $f(a) < f(b)$ e portanto f é crescente em I.

O exemplo abaixo, embora um pouco longo, contém várias ideias importantes que estão relacionadas com o resultado acima.

Exemplo 1. Suponha que o lucro de uma empresa seja modelado pela função

$$L(t) = 3t^4 - 28t^3 + 84t^2 - 96t + 77, \qquad t \in [0,5],$$

onde o tempo t é medido em anos e $t = 0$ corresponde ao primeiro balancete feito pelos administradores. Sabe-se que a variação do lucro foi tal que ele atingiu o seu menor valor no ano correspondente a $t = 4$. Ele foi influenciado por vários fatores, dentre os quais as políticas de venda e o cenário econômico vigente, de modo que é importante entender como estes fatores se combinam. Assim, de modo a estabelecer políticas exitosas, precisamos determinar os intervalos de tempo onde o lucro aumentou e aqueles onde ele diminuiu.

Conforme observado anteriormente, tais informações são fornecidas pelo sinal da derivada $L'(t)$, cuja expressão é

$$L'(t) = 12t^3 - 84t^2 + 168t - 96, \quad t \in (0,5).$$

Como a função L' é contínua no intervalo $(0,5)$, uma estratégia para o estudo do seu sinal é encontrar os pontos onde ela se anula e observar que, pelo Teorema do Valor Intermediário, entre dois zeros consecutivos a derivada (contínua) tem sempre o mesmo sinal.

A solução da equação $L'(t) = 0$ apresenta uma primeira dificuldade porque a derivada é um polinômio de grau 3. Porém, conforme pode-se perceber do enunciado, a função L assume mínimo em $t = 4$, e portanto sabemos que $L'(4) = 0$. Logo, temos que $L'(t) = (t-4)p(t)$, onde $p(t)$ é um polinômio de grau 2. Fazendo os devidos cálculos concluímos que

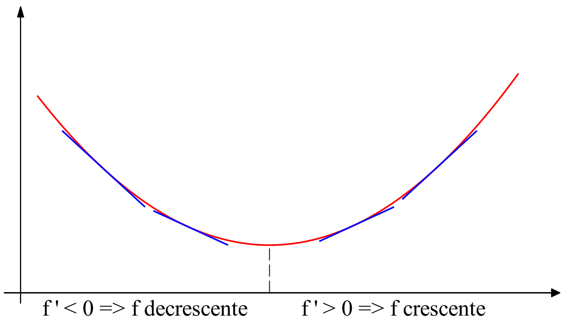
$$L'(t) = 12(t-1)(t-2)(t-4), \quad t \in (0,5).$$

Logo, os pontos críticos de L no intervalo $(0,5)$ são $t = 1$, $t = 2$ e $t = 4$.

Os pontos encontrados acima determinam 4 subintervalos de $[0,5]$, a saber: $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$ e $(4,5)$. Precisamos analisar o sinal da derivada em cada um deles. Para todo $t \in (0,1)$, cada um dos monômios que aparecem na expressão de L' é negativo. Como temos 3 deles, a regra do sinal na multiplicação nos permite concluir que $L' < 0$ em $(0,1)$. Quando $t \in (1,2)$, o primeiro monômio é positivo e os outros dois são negativos. Logo, $L' > 0$ em $(1,2)$.

Até este ponto, temos a seguinte configuração

	$t \in (0,1)$	$t \in (1,2)$	$t \in (2,4)$	$t \in (4,5)$
sinal da derivada L'	negativo	positivo		
comportamento de L	decrescente	crescente		



Antes de continuar o preenchimento do quadro vamos explorar um pouco melhor o comportamento da função L nas proximidades de $t = 1$. Observe que, um pouco antes deste instante, a função é decrescente e, logo após, crescente. Assim, se você tentar desenhar o gráfico de L perto de $t = 1$, vai perceber que ele se parece com um vale, o que mostra que $t = 1$ é um ponto de mínimo local (veja figura ao lado).

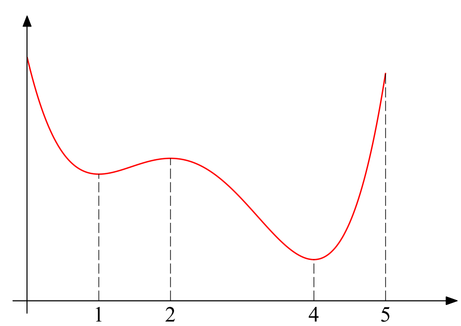
O sinal de L' no intervalo $(2, 4)$ pode ser determinado analisando-se os monômios de L'. Vamos porém decidir sobre este sinal usando um argumento diferente. Escolhemos um número qualquer dentro do intervalo, digamos $t = 3$, e calculamos $L'(3) = -24 < 0$. Como L' tem sinal constante em $(2, 4)$ concluímos que este sinal é o mesmo de $L'(3)$, isto é, negativo. De maneira análoga podemos decidir sobre o sinal no intervalo $(4, 5)$ e completar a tabela:

	$t \in (0, 1)$	$t \in (1, 2)$	$t \in (2, 4)$	$t \in (4, 5)$
sinal da derivada L'	negativo	positivo	negativo	positivo
comportamento de L	decrescente	crescente	decrescente	crescente

Vamos ver o que acontece perto de $t = 2$. Olhando para a tabela, vemos que a função passa de crescente para decrescente. Como consequência, nas vizinhanças de $t = 2$, o gráfico se parece com um cume de montanha. Assim, o ponto $t = 2$ é um ponto de máximo local.

Perto do ponto crítico $t = 4$, a função passa de decrescente para crescente ou, se preferir, a derivada passa de negativa para positiva. Isto mostra que $t = 4$ é um ponto de mínimo local. Na verdade, já sabíamos que este ponto era um ponto de mínimo da função, por causa do enunciado do problema.

Utilizando todas as informações acima podemos esboçar o gráfico de L como ao lado. Olhando para o gráfico podemos claramente identificar os dois pontos de mínimo local $t = 1$ e $t = 4$, e o ponto de máximo local $t = 2$. Mas o ponto importante é que esta classificação pode ser feita sem o uso do gráfico, apenas olhando-se para o sinal da derivada da função antes e depois do ponto crítico. □



Exemplo 2. Em um texto anterior, apresentamos um modelo em que a concentração de um medicamento no sangue era dada, em função do tempo, pela função

$$C(t) = \frac{3t}{2t^2 + 8}, \qquad t \geq 0.$$

Vamos estudar os intervalos de crescimento e decrescimento de C. Para isso, usamos a regra do quociente e algumas simplificações para obter

$$C'(t) = \frac{24 - 6t^2}{(2t^2 + 8)^2}, \qquad t > 0.$$

Como a derivada existe em todo o intervalo, os possíveis pontos críticos nele são aqueles onde a derivada se anula. A expressão acima se anula para $t = -2$ e $t = 2$. O primeiro valor deve ser descartado porque não pertence ao domínio da derivada. O segundo divide o intervalo $(0, +\infty)$ em dois pedaçoes: $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$.

Como

$$C'(1) = \frac{18}{10^2} > 0, \qquad C'(3) = -\frac{30}{26^2} < 0,$$

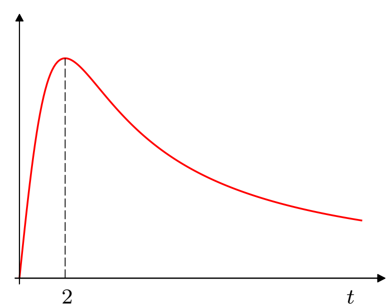
o comportamento da função C pode ser descrito pelo quadro abaixo

	$t \in (0, 2)$	$t \in (2, +\infty)$
sinal da derivada C'	positivo	negativo
comportamento de C	crescente	decrescente

Observe que, no ponto crítico $t = 2$, a derivada passa de positiva para negativa. Isso mostra que o ponto $t = 2$ é um ponto de máximo local. Uma vez que $C(0) = 0$ e

$$\lim_{t \to +\infty} C(t) = 0,$$

o quadro acima nos permite concluir que o gráfico da função $C(t)$ é como na figura ao lado. $\square$



A análise do sinal da derivada antes e depois de um ponto crítico nos permite concluir se ele é ou não um extremo local. De uma maneira geral, esta análise não identifica pontos de máximo ou mínimo global. Contudo, no exemplo acima, mesmo antes de desenhar o gráfico, poderíamos ter afirmado que $t = 2$ era um ponto de máximo global. De fato, bastava observar que antes deste ponto a função sempre cresce, e depois sempre decresce.

Exemplo 3. Neste último exemplo veremos que pode ocorrer de um ponto crítico não ser máximo nem mínimo local. De fato, para $f(x) = x^3$, temos que $f'(x) = 3x^2$, e portanto o único ponto crítico é $x = 0$. Note que a derivada f' é positiva antes e depois do ponto crítico. Isso mostra que $x = 0$ não pode ser máximo nem mínimo local, porque f é sempre crescente. $\square$

Tarefa

Estamos interessados em construir uma lata cilíndrica com volume igual a 1 e menor área superficial possível. Para isso, vamos denotar por h a altura da lata e por r o raio da base, que tem formato circular.

1. Explique porque a área total da lata, em função de h e r, é dada por $(2\pi r^2 + \pi r^2 h)$.
2. Lembrando que o volume vale 1, escreva h como função de r. Depois, determine a expressão da função $A(r)$, que fornece a área da lata em função de $r > 0$.
3. Após calcular os pontos críticos de A, determine os intervalos de crescimento e decrescimento de A. Em seguida, classifique o(s) ponto(s) crítico(s) como sendo de máximo local, mínimo local, ou nenhum dos dois.
4. Calcule os limites de $A(r)$ quando $r \to 0^+$ e $r \to +\infty$ para, em seguida, fazer um esboço do gráfico de A.
5. Determine as dimensões que minimizam a área superficial, explicando sua resposta.