Cálculo 1

Lista Extra de Exercícios – Semana 16

Temas abordados: Lista extra: Integração por partes; Volumes
Seções do livro: 8.1; 6.1; 6.2

1) Use a substituição indicada para calcular as integrais abaixo:

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $\quad x = \frac{1}{t}$;

(b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$, $\quad x = -\ln t$;

(c) $\int x(5\,x^2-3)^7\,dx$, $\quad 5\,x^2-3=t$;

(d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$, $\quad t=\sqrt{x+1}$;

(e) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\mathtt{sen}(x)^2}}$, $\quad t = \mathtt{sen}(x)$.

2) Use a substituição mais adequada para calcular as integrais abaixo:

(a) $\int x(2\,x+5)^{10}\,dx$; (b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$; (c) $\int \frac{dx}{x\,\sqrt{2x+1}}$;

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; (e) $\int \frac{\ln(2x)\,dx}{x\,\ln(4x)}$; (f) $\int \frac{(\arcsin x)^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(g) $\int \frac{\mathtt{sen}(x)^3\,dx}{\sqrt{\cos x}}$; (h) $\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2+1}}$.

3) Calcule as integrais abaixo usando substituição trigonométrica:

(a) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (b) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$; (c) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x}$;

(d) $\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2-1}}$; (e) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{x}$; (f) $\int \frac{dx}{x^2\,\sqrt{4-x^2}}$;

(g) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

4) Use a substituição dada para transformar as integrais abaixo:

$\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx \qquad x = 2\,t-1$;

$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad x = \mathtt{sen}t$;

$\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \qquad x = \mathtt{sh}t$;

$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \qquad x = \arctan t$.

5) Calcular as integrais usando as substituições indicadas:

$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $\qquad x = t^2;$

$\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}\,dx}{(x-2)^{2/3}+3}$ $\qquad x-2 = z^3;$

$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ $\qquad e^x - 1 = z^2;$

$\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\,\cos t}$ $\qquad \tan(\frac{t}{2}) = z;$

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2\,\mathtt{sen}^2 x}$ $\qquad \tan x = t.$

6) Demonstre que se $f(x)$ é uma função par, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Mostre que se $f(x)$ é uma função ímpar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

7) Use a fórmula de integração por partes para calcular as integrais seguintes:

(a) $\int \ln x\,dx;$ $\qquad (b)$ $\int \arctan x\,dx;$ $\qquad (c)$ $\int \arcsin x\,dx;$

(d) $\int x\,\mathtt{sen} x\,dx;$ $\qquad (e)$ $\int x\,\cos(3x)\,dx;$ $\qquad (f)$ $\int \frac{x\,dx}{e^x};$

(g) $\int x\,2^{-x}\,dx;$ $\qquad (h)$ $\int x^2\,e^{3x}\,dx;$ $\qquad (i)$ $\int (x^2-5\,x+5)\,e^{-x}\,dx;$

(j) $\int x^3\,e^{-x/3}\,dx;$ $\qquad (k)$ $\int x\,\mathtt{sen}(x)\,\cos(x)\,dx;$ $\qquad (l)$ $\int (x^2+5\,x+6)\,\cos(2x)\,dx;$

(m) $\int x^2\,\ln(x)\,dx;$ $\qquad (n)$ $\int \ln(x)^2\,dx;$ $\qquad (o)$ $\int \frac{\ln(x)\,dx}{x^3};$

(p) $\int \frac{\ln(x)\,dx}{\sqrt{x}};$ $\qquad (q)$ $\int x\,\arctan x\,dx;$ $\qquad (r)$ $\int x\,\arcsin x\,dx;$

(s) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx;$ $\qquad (t)$ $\int \frac{x\,dx}{\mathtt{sen}(x)^2};$ $\qquad (u)$ $\int \frac{x\,\cos x\,dx}{\mathtt{sen}(x)^2};$

(v) $\int e^x\,\mathtt{sen} x\,dx;$ $\qquad 23)$ $\int 3^x\,\cos x\,dx;$ $\qquad (x)$ $\int e^{ax}\,\mathtt{sen}(bx)\,dx;$

(y) $\int \mathtt{sen}(\ln x)\,dx.$

8) Use o método de sua escolha para resolver as integrais seguintes:

(a) $\int x^3\,e^{-x^2}\,dx;$ $\qquad (b)$ $\int e^{\sqrt{x}}\,dx;$ $\qquad (c)$ $\int (x^2-2\,x+3)\,\ln x\,dx;$

(d) $\int x\,\ln(\frac{1-x}{1+x})\,dx;$ $\qquad (e)$ $\int \frac{\ln(x)^2}{x^2}\,dx;$ $\qquad (f)$ $\int \frac{\ln(\ln x)\,dx}{x};$

(g) $\int x^2\,\arctan(3\,x)\,dx;$ $\qquad (h)$ $\int x\,(\arctan x)^2\,dx;$ $\qquad (i)$ $\int (\arcsin x)^2\,dx;$

(j) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx;$ $\qquad (k)$ $\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}\,dx;$ $\qquad 12)$ $\int x\,\tan(2\,x)^2\,dx;$

(l) $\int \frac{\mathtt{sen}^2 x}{e^x}\,dx;$ $\qquad (m)$ $\int \cos^2(\ln x)\,dx;$ $\qquad 15)$ $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2};$

(n) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2};$ $\qquad (o)$ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx;$ $\qquad (p)$ $\int \sqrt{A+x^2}\,dx;$

(q) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$

9) Calcule as integrais abaixo:

$$(a)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (b)\quad \int \frac{(2\,x+4)\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2} \qquad (c)\quad \int \frac{(3\,x^2-5\,x+8)\,dx}{x^2-4}$$

usando os seguintes métodos:

(a) decompondo as frações nos itens b e c numa soma de frações;

(b) usando a substituição $x = \mathtt{ch}\theta$ **ou** $x = \mathtt{sh}\theta$ (usar o fato de que $\mathtt{ch}^2\theta - \mathtt{sh}^2\theta = 1$) no item a;

10) Calcule a área da figura limitada pelas curvas dadas:

(a) parábola $y = 4\,x - x^2$ e o eixo ox;

(b) curva $y = \ln x$, eixo ox e a reta $x = e$;

(c) curva $y = x(x-1)(x-2)$ e o eixo ox;

(d) curva $y^3 = x$, retas $y = 1$ e $x = 8$.

(e) curva $y = \tan x$, eixo ox e $x = \frac{\pi}{3}$;

(f) curva de Agnesi $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ e eixo ox, para $-a \leq x \leq a$;

(g) curvas $y^2 = 2\,p\,x$ e $x^2 = 2\,p\,y$;

(h) parábola $y = x^2$ e reta $y = 3 - 2\,x$;

(i) parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e reta $y = 2\,x$;

(j) hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e reta $x = 2\,a$;

11) Considere os resultados abaixo:

- O volume V do sólido gerado pela rotação de uma região R em torno do eixo ox é

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

- O volume V do sólido gerado pela rotação de uma região R em torno do eixo oy é

$$V = \int_a^b 2\pi\, x\, f(x) dx.$$

- A área da superfície S gerada pela revolução da curva dada por $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo oy é

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- A área da superfície S gerada pela revolução da curva dada por $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo ox é

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Levando-sae em conta estes resultados determine a área da superf'ıcie de revolução e o volume do sólido de revolução determinados pela rotação da região dada em torno de cada um dos eixos coordenados:

(a) parábola $y = 4\,x - x^2$ e o eixo ox;

(b) curva $y = \ln x$, eixo ox e a reta $x = e$;

(c) curva $y^3 = x$, retas $y = 1$ e $x = 8$.

(d) curva $y = \tan x$, eixo ox e $x = \frac{\pi}{3}$;

(e) curva de Agnesi $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ e eixo ox, para $0 \leq x \leq a$;

(f) curvas $y^2 = 2\,p\,x$ e $x^2 = 2\,p\,y$;

(g) parábola $y = x^2$ e reta $y = 3 - 2\,x$;