Cálculo 1

Esboço de gráficos (solução da tarefa)

Para $-1 < x < 1$ temos que $x + 1 > 0$ e que $x - 1 < 0$, portanto

$$P(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} = 2x(x^2-1)^{-1}.$$

Usando o mesmo raciocínio no intervalo $(1, +\infty)$, obtemos

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-1}, & -1 < x < 1, \\ \dfrac{-2}{x^2-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Vamos agora calcular a derivada $P'(x)$. Como $P(x)$ não está definida no ponto $x = 1$ onde muda sua expressão algébrica, para derivar $P(x)$ basta derivar cada expressão algébrica

$$(2x(x^2-1)^{-1})' = 2(x^2-1)^{-1} - 4x^2(x^2-1)^{-2} = -2(x^2+1)(x^2-1)^{-2},$$

$$(-2(x^2-1)^{-1})' = 4x(x^2-1)^{-2},$$

de modo que

$$P'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Note que a derivada nunca se anula, e portanto não existe nenhum ponto crítico. Deste modo, no estudo do sinal, temos dois intervalos a serem considerados: $(-1, 1)$ e $(1, +\infty)$. Uma observação que facilita a análise do sinal da derivada é notar que o denominador das duas expressões é sempre positivo. Deste modo, chegamos facilmente ao diagrama abaixo:

	sinal de $P'(x)$	função P
$x \in (-1, 1)$	$-$	decrescente
$x \in (1, +\infty)$	$+$	crescente

Uma vez que $P'(x)$ não está definida no ponto $x = 1$ onde muda sua expressão algébrica, para obter $P''(x)$ basta derivar cada expressão algébrica

$$(-2(x^2+1)(x^2-1)^{-2})' = -4x(x^2-1)^{-2} + 8(x^2+1)x(x^2-1)^{-3} = 4x(x^2+3)(x^2-1)^{-3}$$

$$(4x(x^2-1)^{-2})' = 4(x^2-1)^{-2} - 16x^2(x^2-1)^{-3} = -4(3x^2+1)(x^2-1)^{-3}$$

de modo que

$$P''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, & x > 1. \end{cases}$$

Observe que a derivada segunda se anula em $x = 0$. Assim, para estudar o seu sinal, teremos que considerar os intervalos $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(1,+\infty)$. A análise pode ser feita sem maiores dificuldades e fornece

	sinal de $P''(x)$	função P
$x \in (-1,0)$	$+$	concavidade para cima
$x \in (0,1)$	$-$	concavidade para baixo
$x \in (1,+\infty)$	$-$	concavidade para baixo

Segue do quadro acima que ponto $x = 0$ é um ponto de inflexão.

O próximo passo para o esboço do gráfico é estudar o comportamento da função P nas vizinhanças de $x = -1$, $x = 1$ e quando $x \to +\infty$. Após fazer isso, você vai encontrar

$$\lim_{x\to -1^+} P(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} P(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} P(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} P(x) = 0,$$

de modo que as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais e a reta $P = 0$ é uma assíntota horizontal.

Utilizando todas as informações acima podemos esboçar o gráfico de P: