Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 15

Temas abordados: Integração por frações parciais; Comprimento de arco

Seções do livro: 8.4; 6.3

1) Numa reação química do tipo $X + Y \to Z$, a taxa de crescimento da concentração de Z é proporcional ao produto das concentrações de X e Y. Como a massa total do sistema se conserva, essas concentrações são proporcionais às respectivas quantidades, de modo que a taxa de formação de Z é proporcional ao produto das quantidades remanescentes de X e Y. Supondo que 1g de X combina com 3g de Y para formar 4g de Z e denotando por $q(t)$ a quantidade de Z no instante t, temos que $q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de X e $3\,q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de Y. Supondo que existem inicialmente 50 g de X e 33 g de Y, as quantidades remanescentes de X e Y após t segundos são, respectivamente, $50 - q(t)/4$ e $33 - 3\,q(t)/4$. Com essas considerações, temos que a taxa de formação do composto Z é dada por

$$q'(t) = k\left(50 - \frac{q(t)}{4}\right)\left(33 - \frac{3q(t)}{4}\right) = K(200 - q(t))(44 - q(t)),$$

onde k e K são constantes positivas. A equação acima é então equivalente a

$$(*) \qquad \frac{q'(t)}{(200 - q(t))(44 - q(t))} = K.$$

(a) Use a regra da substituição para transformar $\displaystyle\int \frac{q'(t)}{(200 - q(t))(44 - q(t))}\,dt$ em uma outra integral que não envolve a função $q(t)$ nem a derivada $q'(t)$. Calcule a integral obtida usando o método das frações parciais.

(b) Sabendo que $200 - q(t) > 0$ e $44 - q(t) > 0$, use a equação $(*)$ e os itens anteriores para determinar uma expressão de $q(t)$ em termos da função exponencial e de uma constante arbitrária.

(c) Determine essa constante usando a condição inicial $q(0) = 0$.

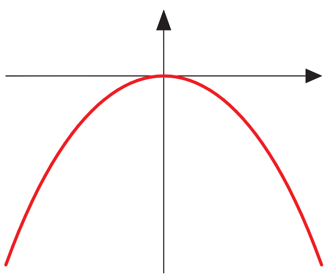
(d) Usando os itens anteriores, determine o que acontece com a quantidade $q(t)$ após muito tempo decorrido, calculando o limite $\lim_{t\to\infty} q(t)$. Sobrará algum reagente após muito tempo decorrido?

2) O comprimento do gráfico de uma função $f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$, é dado pela integral $C = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$. Considere a função $f(x) = \ln(1 - x^2)$, definida para $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

(a) Verifique que $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ é da forma $p(x)/q(x)$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios do segundo grau.

(b) Verifique que $\dfrac{p(x)}{q(x)} = A + \dfrac{B}{1 - x^2}$, em que A e B são constantes.

(c) Calcule o comprimento de arco da função $f(x)$.



3) Suponha que uma população inicial de 200 mil fêmeas de um determinado inseto habite uma região agrícola, e que esteja crescendo a uma taxa de 50% ao ano. Para retardar o crescimento sem o uso de pesticidas, foram introduzidos 50 mil machos estéreis na região, que cruzam com as fêmeas mas não produzem descendentes. Indique por p a população, em milhares, de fêmeas desse inseto em um determinado instante. Nesse caso, o tempo $T(p)$, em anos, necessário para que essa população alcance o número $p < 200$ pode ser modelado pela função

$$T(p) = -2\int_{200}^{p} \frac{x+50}{x(x+100)}\,dx\ .$$

(a) Determine constantes A e B tais que $\dfrac{x+50}{x\,(x+100)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+100}$.

(b) Usando o item anterior, obtenha uma expressão explícita para $T(p)$ em termos da função logarítmica.

(c) Usando a aproximação $\ln(3) = 11/10$, determine o tempo necessário para que a população de fêmeas seja reduzida à metade da população inicial.

4) Podemos modelar a produção de iogurte através do modelo logístico, onde uma população $p(t)$ de bactérias cresce transformando uma quantidade $L(t)$ de leite em iogurte. Segundo esse modelo, a taxa de reprodução da população por bactéria $p'(t)/p(t)$ é proporcional à taxa de consumo de leite por bactéria $-L'(t)/p(t)$, que é proporcional à concentração de leite, que por sua vez é proporcional a $L(t)$, uma vez que a massa total do sistema se conserva. Deste modo, existem constantes positivas a e b tais que

$$(*) \qquad \frac{p'(t)}{p(t)} = -a\frac{L'(t)}{p(t)} = bL(t).$$

(a) Utilizando a equação $(*)$, verifique que $L'(t) = -\frac{1}{a}p'(t)$. Integrando essa equação e utilizando as condições iniciais $p(0) = p_0$ e $L(0) = L_0$, mostre que $L(t) = \frac{1}{a}(c - p(t))$, onde $c = aL_0 + p_0$.

(b) Substituindo a expressão de $L(t)$ obtida no item anterior na equação $(*)$, verifique que $\dfrac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))} = \dfrac{b}{a}$, denominada *equação logística*.

(c) Use a regra da substituição para transformar $\displaystyle\int \frac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))}\,dt$ em uma outra integral que não envolve a função $p(t)$ nem a derivada $p'(t)$. Calcule a integral obtida usando o método das frações parciais.

(d) Sabendo que $p(t) > 0$ e $c - p(t) > 0$, use a equação logística e o item anterior para determinar uma expressão de $p(t)$ em termos da função exponencial, das constantes a, b, c, e de uma constante arbitrária.

(e) Usando o item anterior, determine o que acontece com a população $p(t)$ após muito tempo decorrido, calculando o limite $\displaystyle\lim_{t\to\infty} p(t)$. Esse limite depende da constante arbitrária?

5) Um modelo para o estudo da velocidade de queda $v(t)$ de um pára-quedista é supor que a força de resistência do ar seja dada por $R = b\,v(t)^2$, isto é, proporcional ao quadrado da velocidade. Como a força resultante é $P + R$, onde $P = -mg$ é a força peso, pela Segunda Lei de Newton, temos que

$$ma(t) = -mg + bv(t)^2.$$

Suponha que a aceleração da gravidade é $g = 10$ m/s^2, a massa conjunta do pára-quedas e do pára-quedista é $m = 70$ kg e que $b = 700$ kg/m. Da Segunda Lei de Newton segue que

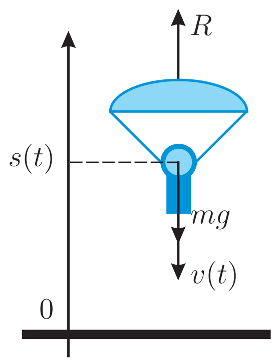
$$(*) \qquad \frac{v'(t)}{v(t)^2 - 1} = 10,$$

para todo tempo $t \geq 0$.

(a) Use a regra da substituição para transformar a integral $\int v'(t)/(v(t)^2 - 1)\,dt$ em uma outra que não envolve a função $v(t)$ nem a derivada $v'(t)$. Calcule a integral obtida usando o método das frações parciais.

(b) Sabendo que $v(t)^2 - 1 > 0$, use a equação $(*)$ para determinar uma expressão de $v(t)$ em termos da função exponencial e de uma constante arbitrária.

(c) Se o salto for efetuado de uma altura suficientemente grande, a velocidade com que o pára-quedista alcança o solo é aproximadamente igual ao limite $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$. Esse limite depende da constante arbitrária?



Gabarito

1. (a) $\displaystyle\int \frac{q'(t)}{(200-q(t))(44-q(t))}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(200-x)(44-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{156}\ln\left|\frac{200-x}{44-x}\right| + L$

   (b) $q(t) = \dfrac{44De^{156Kt}-200}{De^{156Kt}-1}$

   (c) $D = 200/44$

   (d) $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 44$; sobram 39g do reagente X

2. (a) $\sqrt{1+f'(x)^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

   (b) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \dfrac{2}{1-x^2}$

   (c) $2\ln(3) - 1 \approx 1,2$

3. (a) $A = B = 1/2$

   (b) $T(p) = \ln\left(\dfrac{200\cdot 300}{p\,(p+100)}\right)$

   (c) aproximadamente 1,1 ano

4. (a)

   (b)

   (c) $\displaystyle\int \frac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{x(c-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\ln\left|\frac{x}{c-x}\right| + R$

   (d) $p(t) = \dfrac{cDe^{\frac{cb}{a}t}}{1+De^{\frac{cb}{a}t}}$

   (e) $\lim_{t\to+\infty} p(t) = c$, independente de D

5. (a) $\displaystyle\int \frac{v'(t)}{v(t)^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + R$

   (b) $v(t) = \dfrac{1+De^{20t}}{1-De^{20t}}$

   (c) $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = -1$, independente de D