Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Exemplos de funções contínuas

Começamos lembrando que a função f é contínua em um ponto a no interior do seu domínio quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Se a função é definida em um intervalo do tipo $[a, b]$, dizemos que ela é contínua em $x = a$ e/ou $x = b$ se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e/ou} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b),$$

pois, neste caso, não faz sentido fazer $x \to a$ ou $x \to b$, visto que só podemos nos aproximar destes pontos por um dos lados. Quando a função f é contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos somente que f *é uma função contínua*.

No que se segue, apresentamos alguns exemplos de funções contínuas.

Exemplo 1. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{x \to a} c = c,$$

e portanto a função constante $f(x) = c$ é contínua. $\square$

Exemplo 2. Se $p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ é um polinômio, então

$$\lim_{x \to a} p(x) = \lim_{x \to a} (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = b_0 + b_1 a + \cdots + b_n a^n = p(a),$$

o que mostra que todo polinômio é uma função contínua. $\square$

Exemplo 3. Uma *função racional* é uma função definida como o quociente de dois polinômios. Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(a) \neq 0$, então podemos aplicar a regra do quociente para obter

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Uma vez que $\text{dom}(p/q) = \{x \in \mathbb{R} : q(a) \neq 0\}$, concluímos que toda função racional é contínua. $\square$

O resultado a seguir é uma consequência das propriedades de limite. Ele nos permite construir vários outros exemplos de funções contínuas a partir dos 3 acima.

Teorema 1. *Se f e g são contínuas no ponto $x = a$, então são também contínuas neste ponto as funções*

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
4. $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *desde que* $g(a) \neq 0$.

Em resumo, as operações básicas entre funções contínuas resultam em funções contínuas. Uma vez que a prova do teorema é bem simples, vamos considerar somente o item 1, deixando os demais para o leitor. Como f e g são contínua em $x = a$ temos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Assim

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

o que mostra que $f + g$ é contínua em $x = a$. A prova dos outros itens pode ser feita de maneira análoga. Destacamos somente que, no item 4, estamos supondo $g(a) \neq 0$ para que possamos aplicar a regra do quociente para limites. De fato, se $g(a) = 0$, a função f/g não está definida no ponto $x = a$.

Exemplo 4. Lembremos que

$$\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0 = \operatorname{sen}(0), \qquad \lim_{\theta\to 0} \cos(\theta) = 1 = \cos(0),$$

o que mostra que o seno e o coseno são contínuos no ponto $\theta = 0$. Considerando agora um ponto qualquer $a \in \mathbb{R}$, podemos usar o fórmula do seno de uma soma e a mudança de variáveis $\theta = x - a$, para obter

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) &= \lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta + a) \\
&= \lim_{\theta\to 0} [\operatorname{sen}(\theta)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(\theta)] \\
&= \operatorname{sen}(0) \cdot \cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(0) = \operatorname{sen}(a),
\end{aligned}$$

e portanto o seno é uma função contínua. Você vai verificar na sua tarefa que as demais funções trigonométricas são também contínuas. □

Exemplo 5. Embora não possamos ainda demonstrar, vamos registrar aqui que as funções exponencial e logaritmo são também contínuas. Isso significa que

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a, \qquad \lim_{x \to b} \ln(x) = \ln(b),$$

para todos $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. □

O próximo resultado mostra que a composição de funções contínuas é uma função contínua.

Teorema 2. *Se g é contínua no ponto $x = a$, e f é contínua no ponto $y = g(a)$, então a função composta*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

é contínua no ponto $x = a$.

Intuitivamente, o que ocorre no teorema acima é o seguinte: quando x se aproxima de a, os valores $y = g(x)$ se aproximam de $g(a)$, porque g é contínua em $x = a$. Por outro lado, como f é contínua em $g(a)$, à medida em que os valores $y = g(x)$ se aproximam de $g(a)$, os valores $f(y) = f(g(x))$ se aproximam de $f(g(a))$. Portanto, a composição de funções contínuas é ainda uma função contínua.

Exemplo 6. Neste exemplo final vamos considerar a função

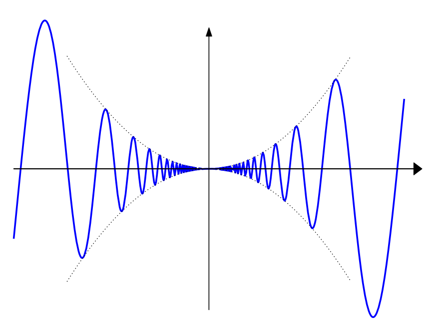
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

que já foi alvo de nosso estudo em um texto anterior. Observe que ela está definida em toda a reta. Dado $a \neq 0$, sabemos qua a função $1/x$ é contínua em $x = a$. Como o seno é contínuo, concluímos que $\operatorname{sen}(1/x)$ é contínua em $x = a$. O mesmo ocorre para x^2, de modo que f é contínua em todo ponto $a \neq 0$ por ser o produto de duas funções contínua neste ponto.

A parte mais delicada é o estudo da continuidade no ponto $x = 0$. Observe que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0 = f(0),$$

o que mostra que f é também contínua em $x = 0$. Na penúltima desigualdade acima o cálculo do limite foi feito utilizando-se o Teorema do Confronto, conforme o texto em que apresentamos as propriedades básicas do limite. □



Tarefa

Vimos no texto que a função seno é contínua. Nesta tarefa vamos provar a continuidade das demais funções trigonométricas.

1. Utilize a fórmula

   $$\cos(\theta + a) = \cos(\theta)\cos(a) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(a)$$

   e a mesma mudança de variáveis do Exemplo 4 do texto para verificar que

   $$\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a),$$

   e concluir que a função coseno é contínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

2. Use agora o Teorema 1 do texto para mostra que são contínua as demais funções trigonométricas, a saber

   $$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \qquad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$