Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Integração por subtituição

Vimos que, para determinar o valor da integral $\int f(x)dx$, o que precisamos é encontrar uma primitiva para f. Isto pode ser feito com facilidade em alguns casos. Porém, as ideias que desenvolvemos até aqui não nos permitem calular, por exemplo, a integral

$$\int 2x\,\mathrm{sen}(x^2)dx.$$

A técnica que vamos desenvolver para considerar esta e outras integrais está baseada na regra da cadeia. Suponha que f seja uma função com uma primitiva F, e que g seja uma função derivável tal que a composição $f(g(x))$ esteja bem definida. Neste caso, temos que

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Integrando, obtemos

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + K. \tag{1}$$

Voltando ao exemplo do início do texto, observe que se denotarmos $g(x) = x^2$, então $g'(x) = 2x$. Assim, a integral fica

$$\int 2x\,\mathrm{sen}(x^2)dx = \int \mathrm{sen}(g(x))g'(x)dx = -\cos(x^2) + K,$$

uma vez que $F(x) = -\cos(x)$ é uma primitiva da função seno.

A expressão (1) é conhecida como fórmula de *mudança de variáveis*. O seu nome pode ser entendido a partir da seguinte técnica mnemônica. Se introduzirmos a variável $u = g(x)$, então $\frac{du}{dx} = g'(x)$. Fazendo um abuso de notação, podemos escrever $du = g'(x)dx$, de modo que a igualdade em (1) fica

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + K = F(g(x) + K.$$

A técnica é também chamada de *substituição*.

Exemplo 1. Vamos usar uma mudança de variáveis para calcular

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx.$$

Se fizermos $u = (1 + x^2)$ temos que $\frac{du}{dx} = 2x$, ou ainda $dx = \frac{1}{2x} du$. Deste modo,

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \int x\sqrt{u}\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + K = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + K.$$

Note que, na última igualdade, voltamos para a variável x. $\square$

O ponto chave do método é a escolha da nova variável. Ela pode ser feita de maneira arbitrária mas, uma vez feita, o termo du fica determinado. Uma escolha boa é aquela que nos permite, na nova integral, eliminar completamente a variável original. Além disso, é importante que saibamos como calcular a integral resultante, que envolve a variável u. Por exemplo, a substituição $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ na integral $\int 2x\cos(x^4)dx$, nos leva a

$$\int \cos(u^2)du,$$

que não sabemos calcular.

A melhor maneira de identificar uma substituição boa é usar a experiência. Vamos então trabalhar alguns exemplos.

Exemplo 2. Na integral

$$\int x^2(x^3-2)^7 dx,$$

podemos fazer $u = (x^3 - 2)$, de modo que $\frac{du}{dx} = 3x^2$, ou ainda $dx = \frac{1}{3x^2}du$. Assim,

$$\int x^2(x^3-2)^7 dx = \int x^2u^7\frac{1}{3x^2}du = \frac{1}{3}\int u^7 du = \frac{1}{24}u^8 + K = \frac{1}{24}(x^3-2)^8 + K.$$

Note que, neste caso, poderíamos ter expandido o temo $x^2(x^3 - 2)^7$ em potências de x e integrado cada termo. Não há dúvidas que a mudança de variáveis fornece o resultado de maneira mais rápida. $\square$

Exemplo 3. Para calcular a integral definida $\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, escolhemos $u = \sqrt{x}$, de modo que $dx = 2\sqrt{x}\,du$, e a integral indefinida se escreve como

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int 2e^u\,du = 2e^u + K = 2e^{\sqrt{x}} + K.$$

Logo,

$$\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\Big|_{x=1}^{9} = 2(e^3 - e),$$

em que usamos o Teorema Fundamental do Cálculo na penúltima igualdade. $\square$

Usando o TFC, podemos facilmente verificar que, se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de g pelo intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

A igualdade acima mostra que a mudança de variáveis pode ser feita diretamente na integral definida, desde que tomemos o cuidado de fazer a respectiva mudança nos extremos de integração. No último exemplo, temos que se $x = 1$, então $u = \sqrt{1} = 1$, enquanto que quando $x = 9$, $u = 3$. Logo,

$$\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^3 2e^u\,du = 2e^u\Big|_{u=1}^{3} = 2(e^3 - e).$$

Exemplo 4. Para a integral

$$\int_0^\pi 3\cos^2(x)\mathrm{sen}(x)dx,$$

fazemos $u = \cos(x)$ para obter $dx = -\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}dx$. Quando $x = 0$ e $x = 1$, temos que $u = \cos(0) = 1$ e $u = \cos(\pi) = -1$, respectivamente. Logo,

$$\int_0^\pi 3\cos^2(x)\mathrm{sen}(x)dx = -\int_1^{-1} 3u^2du = -u^3\Big|_{u=1}^{-1} = [-(-1)^3] - [-1^3] = 2.$$

Naturalmente, o processo anterior de mudar variáveis na indefinida, resolver a integral na variável u, voltar para a variável x a aplica o TFC daria o mesmo resultado. □

Exemplo 5. Vamos mostrar que, se f é uma função contínua, então a integral

$$\int_{-a}^{a} f(x^2)x\,dx$$

é igual a zero, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. De fato, fazendo a mudança $u = x^2$, obtemos

$$\int_{-a}^{a} f(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2} f(u)\,du = 0,$$

uma vez que, quando $x = \pm a$, a variável u vale a^2. □

Exemplo 6. Em alguns casos a substituição pode ser menos óbvia. Por exemplo, na integral

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx,$$

podemos fazer $u = (x-1)$ para obter $du = dx$. Fazendo então a mudança de variáveis, obtemos

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}\,du.$$

Uma vez que $(u+1)^2\sqrt{u} = (u^2+2u+1)\sqrt{u}$, podemos fazer a multiplicação e obter

$$\int (u+1)^2\sqrt{u}\,du = \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + K,$$

e portanto

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + K.$$

A integral acima também pode ser resolvida com a substituição $u = \sqrt{x-1}$. Deixamos para o leitor esta parte. □

Exemplo 7. Para a integral

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx,$$

usamos a mudança $x = -\ln(u)$. Com essa escolha, temos $e^x = (1/u)$. Como $\frac{dx}{du} = -(1/u)$, concluímos que $dx = -(1/u)du$, e portanto

$$\int \frac{1}{1+(1/u)}\left(-\frac{1}{u}\right)du = \int \frac{-1}{1+u}du = -\ln|1+u| + K = -\ln|1+e^{-x}| + K.$$

Observe que, neste caso, como escrevemos x como função da nova variável u, o cálculo que fizemos foi de $\frac{dx}{du}$. □

Tarefa

Suponha que uma árvore foi transplantada e, t anos depois, está crescendo à razão de $1 + (t+1)^{-2}$ metros por ano. Sabendo que após 2 anos a árvore atingiu uma altura de 5 metros, determine qual era a altura da árvore quando ela foi transplantada.