Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

A posição de um carro

Dada uma função $f(x)$, dizemos que a função $F(x)$ é uma *primitiva* de f quando $F'(x) = f(x)$. Naturalmente, se $F(x)$ é uma primitiva de f então, para todo $K \in \mathbb{R}$, temos que $(F(x) + K)' = f(x)$, de modo que $F(x) + K$ também é uma primitiva. Suponha que o domínio de f é um intervalo e que $G(x)$ é uma outra primitiva de f. Neste caso, temos que

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

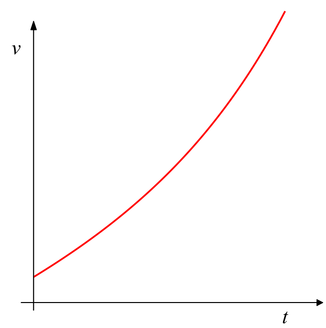
Lembremos agora que, pelo Teorema do Valor Médio, se uma função tem derivada igual a zero em um intervalo então ela deve ser constante neste intervalo. Deste modo, existe um constante $K \in \mathbb{R}$, tal que $G(x) = F(x) + K$. Isso mostra que a família de funções $F(x) + K$ contém todas as primitivas de f. Esta família de funções é dita a *integral indefinida* de f e é denotada da seguinte maneira

$$\int f(x)dx = F(x) + K.$$

Na expressão acima, $K \in \mathbb{R}$ é a chamada *constante de integração*. Observe que, para encontrar a integral de f, é suficiente encontrar uma primitiva de f e, em seguida, adicionar a constante de integração.

Faremos agora uma aplicação simples do conceito de integral. Suponha que a velocidade de um carro é dada por

$$v(t) = 2t + e^t, \quad t \geq 0.$$



Queremos determinar a sua posição $s(t)$ em um instante $t \geq 0$. Note que este é um problema inverso a outros já estudados. De fato, vimos anteriormente que a velocidade é a taxa de variação da posição. Deste modo, se sabemos a posição podemos obter a velocidade simplesmente derivando a posição. Aqui temos o contário: sabemos a velocidade e queremos determinar a posição.

Embora o problema seja diferente o ponto de partida para a solução é o mesmo: como a taxa de variação da posição é a velocidade temos que

$$s'(t) = v(t) = 2t + e^t, \quad t > 0.$$

Observe que, na igualdade acima, estamos considerando o intervalo aberto $(0, +\infty)$. Isto é feito porque, como sabemos, nos pontos da extremidade do domínio ($t = 0$) não existe derivada.

Como as funções $s'(t)$ e $(2t + e^t)$ são iguais no intervalo $(0, +\infty)$, elas devem possuir a mesma integral. Logo,

$$s(t) + K_1 = \int s'(t)dt = \int (2t + e^t)dt = t^2 + e^t + K_2.$$

De início, a primeira igualdade acima pode parecer confusa mas, na verdade, ela é muito simples. De fato, ao tentarmos calcular $\int s'(t)dt$ estamos procurando uma função cuja deravada seja $s'(t)$. Ora, tal função é exatamente $s(t)$ acrescida de qualquer constante K_1. A igualdade acima pode ser reescrita da seguinte maneira

$$s(t) = t^2 + e^t + K,$$

onde a constante arbitrária K foi obtida juntando-se todas as constantes que apareciam anteriormente.

Uma primeira análise do resultado do parágrafo anterior nos deixa um pouco frustrados. O aparecimento da constante (arbitrária) K nos levaria à conclusão de que o problema tem infinitas soluções. Isto soa estranho porque, em um dado instante $t > 0$, o carro só pode estar em uma posição. Para entender o que está acontecendo suponha que temos agora dois carros partindo de posições iniciais diferentes, mas com mesma velocidade $v(t) = 2t+e^t$. Ora, ainda que eles tenham a mesma velocidade, a posição deles será sempre diferente, porque partiram de posições diferentes. O que vai ocorrer é que, em cada instante $t > 0$, a distância entre eles será sempre a mesma, sendo exatamente igual à distância entre os pontos de partida.

A observação feita acima mostra que obtivemos infinitas soluções porque o conjunto de dados que temos é incompleto. De fato, para determinar a posição do carro, além da velocidade, precisamos saber o ponto de partida, digamos $s(0) = 5$. Com esta nova informação somos levados a resolver o seguinte problema: determinar uma função $s : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} s'(t) = 2t + e^t, \quad t \in (0, +\infty), \\ s(0) = 5. \end{cases}$$

Conforme verificado anteriormente, as soluções da primeira equação são da forma $s(t) = t^2 + e^t + K$. Precisamos agora escolher a constante K de modo que a *condição inicial* $s(0) = 5$ seja satisfeita. Isso pode ser feito simplesmente calculando a família de soluções no ponto $t = 0$:

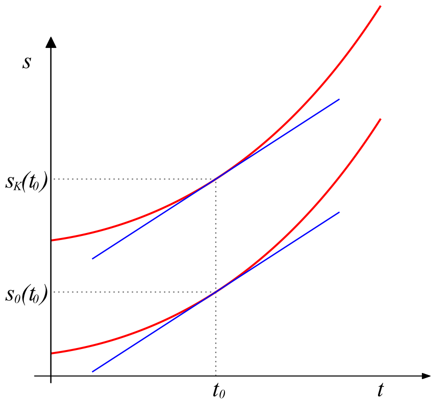
$$5 = s(t) = 0^2 + e^0 + K = 1 + K \;\Rightarrow\; K = 4.$$

Deste modo, a solução do problema é dada por

$$s(t) = t^2 + e^t + 4, \;\; t \geq 0.$$

Vale destacar que, para obter a constante K no exemplo acima, foi utilizado o fato de sabermos a posição no instante $t = 0$. Não existe nada de especial na escolha de $t = 0$. De fato, para determinamos a constante K, bastava saber a posição em qualquer instante $a \geq 0$. Assim, se soubéssemos por exemplo que $s(a) = b$, bastaria calcular $b = s(a) = a^2 + e^a + K$, para concluir que $K = b - a^2 - e^a$.

Para finalizar o texto vamos fazer análise geométrica da família de primitivas da funções $v(t)$. A exposição acima nos permitiu concluir que existem infinitas funções cuja derivada é $(2t + e^t)$, visto $\int (2t + e^t)dt = t^2 + e^t + K$. Do ponto de vista geométrico o que a constante K faz é "levantar" (se $K > 0$) ou "abaixar" (se $K < 0$) em K unidades o gráfico da função $s_0(t) = (t^2 + e^t)$. Assim, se denotarmos por l_0 a reta tangente ao gráfico de s_0 no ponto $(t_0, s_0(t_0))$, quando deslocamos o gráfico de s_0 para cima ou para baixo, o mesmo ocorre com sua reta tangente. Porém, nesse deslocamento, a inclinação da reta tangente permanece inalterada, de modo que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $s_K(t) = t^2 + e^t + K$ no ponto $(t_0, s_K(t_0))$ é o mesma inclinação de l_0.



Tarefa

Nesta tarefa vamos supor que uma árvore foi transplantada e, t anos depois, está crescendo à razão de $1 + (t + 1)^{-2}$ metros por ano. Sabemos que após 2 anos a árvore atingiu uma altura de 5 metros, determine qual era a altura da árvore quando ela foi transplantada.