Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Consequências do Teorema do Valor Médio

(solução da tarefa)

Vamos inicialmente provar o Teorema de Rolle:

Lema 1. *Suponha que g é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Se $g(a) = g(b)$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $g'(x_0) = 0$.*

Observe primeiro que, se g é constante, então a derivada é sempre zero, e portanto podemos escolher qualquer $x_0 \in (a, b)$. Se g não é constante, então existe um ponto $x_1 \in (a, b)$ tal que $g(x_1) \neq g(a) = g(b)$. Se $g(x_1) < g(a)$ então o ponto de mínimo x_0 de g, que existe porque ela é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, deve pertencer ao interior (a, b). Neste caso, $g'(x_0) = 0$ pois em pontos de mínimo aonde a derivada existe, ela deve se anular. Se $g(x_1) > g(a)$ podemos seguir o mesmo raciocínio para concluir que a derivada se anula no ponto de máximo, que também está em (a, b).

Na segunda parte da tarefa vamos mostrar que a função $\ln(x)$ transforma potências em produtos. Dado $r \in \mathbb{R}$, segue da Regra da Cadeia que

$$\frac{d}{dx} \ln(x^r) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x}.$$

Por outro lado, $(r \ln(x))' = (r/x)$. Assim, estas duas funções possuem a mesma derivada no intervalo aberto $(0, +\infty)$. Segue então que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ln(x^r) = r \ln(x) + C.$$

Fazendo $x = 1$ obtemos $0 = r \cdot 0 + C$, ou ainda $C = 0$. Assim,

$$\ln(x^r) = r \ln(x), \ \ \forall\, x \in (0, +\infty),\ r \in \mathbb{R}.$$