Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 03 – Soluções

Temas abordados: Continuidade

Seções do livro: 2.6

1) A alíquota da conta de água é crescente! Isto quer dizer que quanto mais se consome, mais caro fica o preço do m^3 de água. Suponha que ao se consumir $x\mathrm{m}^3$ de água/mês, o valor mensal a ser pago seja de $q(x)$ reais. Quando x é menor ou igual a 10; maior que 10 e menor que 15; maior ou igual a 15, paga-se, respectivamente, $1,60x$; $3,00x + a$; $6,40x + b$, onde a e b são constantes reais. Assim,

$$q(x) = \begin{cases} 1,6x & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 3x + a & \text{se } 10 < x < 15, \\ 6,4x + b & \text{se } x \geq 15. \end{cases}$$

(a) Determine o valor de a de forma que $q(x)$ seja contínua em $x = 10$.

(b) Usando o valor de a calculado acima, determine $\lim_{x\to 15^-} q(x)$.

(c) Sabendo que $q(x)$ é contínua em $x = 15$, encontre o valor de b.

(d) Faça um esboço do gráfico de $q(x)$.

Soluções:

(a) Como

$$\lim_{x\to 10^-} q(x) = 16 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 10^+} q(x) = 30 + a,$$

a condição para que exista o limite no ponto $x = 10$ é que $16 = 30 + a$, isto é, $a = -14$. Para esse valor de a temos que $\lim_{x\to 10} q(x) = 16 = q(10)$, e portanto a função é contínua nesse ponto.

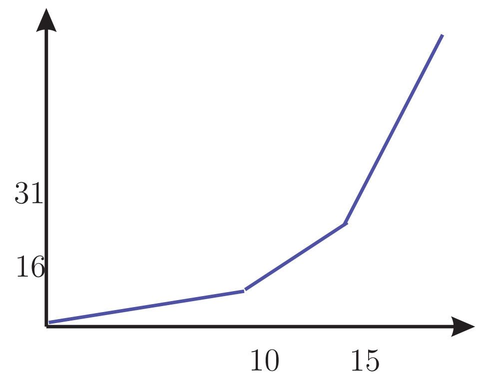
(b) Temos que $\lim_{x\to 15^-} q(x) = \lim_{x\to 15^-}(3x - 14) = 31$.

(c) Como $\lim_{x\to 15^-} q(x) = 45 - a = 31$ e

$$\lim_{x\to 15^+} q(x) = \lim_{x\to 15^+}(6,4\,x + b) = 96 + b,$$

então q é contínua em $x = 15$ se $b = -65$.

(d) O gráfico está esboçado abaixo.



2) Suponha que um painel solar consiga gerar uma quantidade de energia $E = I\text{sen}(\alpha)$ kilojoules, em que I é a intensidade luminosa e α o ângulo de incidência entre os raios de luz e o painel. Para um determinado dia, o ângulo α e a intensidade luminosa são dados por $\alpha(t) = \frac{\pi}{12}t$ e $I(t) = 6t - \frac{1}{2}t^2$, onde t é o tempo medido em horas a partir do nascer do sol, $0 \leq t \leq 12$. É claro que para valores de $t \in (12, 24]$ a energia gerada é nula, pois o painel solar não funciona durante a noite.

(a) Obtenha a expressão de $E(t)$ em função de t, para todo $t \in [0, 24]$.

(b) Determine os valores de $E(2)$ e $E(6)$. Em seguida, decida se existe $t_0 \in [2, 6]$ tal que $E(t_0) = 13$, justificando sua resposta .

(c) Decida se a função E é contínua no ponto $t = 12$, justificando sua resposta.

<u>**Soluções**</u>:

(a) De acordo com o enunciado temos

$$E(t) = \begin{cases} \left(6t - \dfrac{t^2}{2}\right) \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) & \text{se } 0 \leq t \leq 12, \\ 0 & \text{se } 12 < x \leq 24. \end{cases}$$

(b) Como $E(2) = 5$ e $E(6) = 18$ então $E(2) < 13 < E(6)$. Como a função E é contínua em $[2, 6]$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $t_0 \in [2, 6]$ tal que $E(t_0) = 13$.

(c) Como polinômios são contínuos e a função seno é contínua, segue diretamente da definição que a função E é contínua em $[0, 12) \cup (12, 24]$. A fim de verificar que E é também contínua em $t = 12$ note que

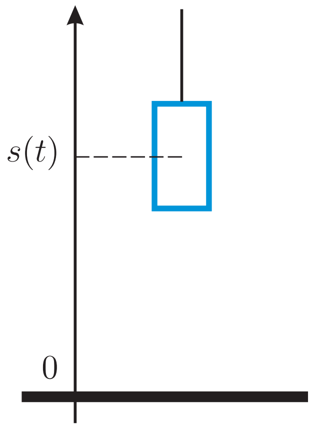
$$\lim_{t \to 12^-} E(t) = \lim_{t \to 12^+} E(t) = 0 = E(12).$$

Desse modo a função é contínua em todo o intervalo $[0, 24]$.

3) Um dos elevadores mais rápidos do mundo, localizado no Taipei Financial Center, subia com velocidade constante de 10 m/s, quando subitamente, após 5 segundos de sua partida, suas cordas de sustentação se partem. Felizmente, neste momento, não há ninguém em seu interior. A função que descreve a altura do elevador em relação ao solo é dada então pela seguinte expressão

$$s(t) = \begin{cases} 10t + 100, & \text{se } \ 0 < t \leq 5 \\ 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2, & \text{se } \ 5 < t < t_A \end{cases}$$

onde t_A é o tempo de aterrissagem, a altura é dada em metros e o tempo é dado em segundos.



(a) Calcule o seguinte limite lateral direito da posição $\lim\limits_{t \to 5^+} s(t)$.

(b) A função s é contínua em $t = 5$?

(c) Calcule o seguinte limite lateral direito da velocidade média entre os instantes t e 5

$$\lim_{t \to 5^+} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}.$$

(d) Existe o limite da velocidade média entre os instantes t e 5 quando t tende à 5?

<u>**Soluções**</u>:

(a) Para valores de $t > 5$, temos que $s(t) = 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2$, de onde segue que

$$\lim_{t \to 5^+} s(t) = \lim_{t \to 5^+} 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2 = 150.$$

(b) Para valores de $t \leq 5$, temos que $s(t) = 10t + 100$, de onde segue que

$$\lim_{t \to 5^-} s(t) = \lim_{t \to 5^-} 10t + 100 = 150$$

e que

$$s(5) = 10(5) + 100 = 150.$$

Utilizando o item anterior, segue que

$$\lim_{t \to 5^-} s(t) = s(5) = \lim_{t \to 5^+} s(t),$$

o que mostra que a função s é contínua em $t = 5$.

(c) Para valores de $t > 5$, temos que $s(t) = 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2$. Como $s(5) = 150$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 5^+} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} &= \lim_{t \to 5^+} \frac{(150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2) - 150}{t-5} \\ &= \lim_{t \to 5^+} \frac{10(t-5) - 5(t-5)^2}{t-5} \\ &= \lim_{t \to 5^+} 10 - 5(t-5) = 10. \end{aligned}$$

(d) Para valores de $t \leq 5$, temos que $s(t) = 10t + 100$, de onde segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 5^-} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} &= \lim_{t \to 5^-} \frac{10t + 100 - 150}{t - 5} \\
&= \lim_{t \to 5^-} \frac{10t - 50}{t - 5} \\
&= \lim_{t \to 5^-} \frac{10(t - 5)}{t - 5} = 10.
\end{aligned}$$

Como os dois limites laterais existem e coincidem, segue que existe o limite

$$\lim_{t \to 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = 10.$$

4) Em um certo país, o imposto de renda é cobrado da seguinte maneira: aqueles que ganham até R$10.000,00 são isentos; os que ganham mais de R$10.000,00 e até R$20.000,00 pagam 10% sobre a renda, menos um valor fixo c e, de todos os demais, é cobrada uma taxa de 20% da renda. Nessas circunstâncias,

(a) determine a função $I(x)$ que associa a renda x ao valor do imposto.

(b) calcule a parcela a deduzir c, de forma que I seja contínua em $x = 10.000$.

(c) supondo que o valor de c é como acima, decida se existe algum contribuinte que paga R$3.000,00 de imposto de renda, justificando sua resposta.

(d) ainda considerando o valor de c obtido no item (b), faça um esboço do gráfico de $I(x)$.

Soluções:

(a) De acordo com o enunciado temos

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 10.000, \\ 0,1\, x - c & \text{se } 10.000 < x \leq 20.000, \\ 0,2\, x & \text{se } 20.000 < x. \end{cases}$$

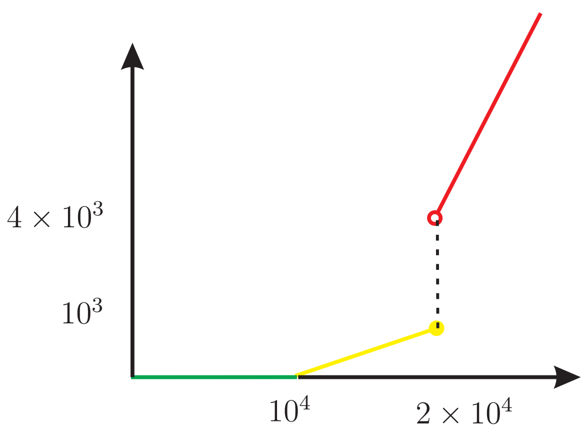
(b) Como

$$\lim_{x \to 10.000^+} I(x) = 1.000 - c \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 10.000^-} I(x) = 0,$$

a condição para existência de limite no ponto $x = 10.000$ é que $1.000 - c = 0$, isto é, $c = 1.000$. Para esse valor de c temos que $\lim_{x \to 10.000} I(x) = 0 = I(10.000)$, e portanto $I(x)$ será contínua em $x = 10000$.

(c) Caso existisse um tal contribuinte, sua renda deveria ser maior que 10.000, para que ele entrasse em alguma das duas últimas faixas de tributação. Lembrando que $c = 1.000$ e resolvendo a equação $0,1\, x - 1.000 = 3.000$ obtemos $x = 40.000$, que fica fora da segunda faixa. Analogamente, resolvendo $0,2\, x = 3.000$ obtemos $x = 15.000$, que agora fica fora da 3a faixa. Logo, não existe contribuinte que paga 3.000 reais de imposto de renda.

(d) O gráfico está esboçado abaixo.



5) As funções trigonométricas são contínuas? A resposta é sim, conforme vamos verificar! Lembre que, na lista da semana 2, provou-se na questão 4 que a função seno é contínua na origem, ou seja, que

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

(a) Use a relação $\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$ para isolar $\cos(t)$ em termos de $\operatorname{sen}(t)$, para valores de $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Lembre que, para tais valores de t, o cosseno é positivo.

(b) Com ajuda do item acima, mostre que a função cosseno é contínua em $x = 0$.

(c) Note que, para uma dada função f, vale

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to 0} f(t + a),$$

desde que o primeiro limite exista. Usando a expressão acima com $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e sabendo que $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$, mostre que a função seno é contínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

(d) Usando agora $f(x) = \cos(x)$ juntamente com a fórmula $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$, mostre que a função cosseno é contínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

Soluções:

(a) Uma vez que o cosseno é positivo no primeiro e no quarto quadrante, obtemos

$$\cos(t) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(t)} \text{ para todo } t \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{1}$$

(b) Usando (1) segue que

$$\lim_{t\to 0} \cos(t) = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(t)} = 1 = \cos(0),$$

o que mostra que o cosseno é contínuo na origem.

(c) Agora, dado $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) &= \lim_{t\to 0} \operatorname{sen}(t + a) \\
&= \lim_{t\to 0} (\operatorname{sen}(t)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(t)) = 0 \cdot \cos(a) + \operatorname{sen}(a) \cdot 1 \\
&= \operatorname{sen}(a),
\end{aligned}$$

ficando assim estabelecida a continuidade da função seno no ponto $a \in \mathbb{R}$.

(d) Use que

$$\cos(t + a) = \cos(t)\cos(a) - \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(a)$$

e argumente como no item (c).