Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 09

Temas abordados: Teorema do Valor Médio; Crescimento de funções; Otimização

Seções do livro: 4.2, 4.3, 4.6

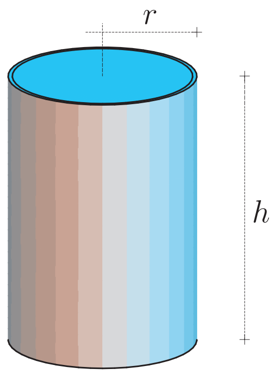
1) Suponha que, na produção de uma lata de refrigerante, o custo do material da lateral e do fundo é de uma unidade monetária por centímetro quadrado, mas para o material da tampa esse custo é de $98/27$ unidades monetárias por centímetro quadrado. Suponha ainda que a lata seja cilíndrica de raio r cm e altura h cm, conforme ilustra a figura abaixo, e que o volume seja constante e igual a $5^3\,\pi$ cm^3. A máquina que fabrica as latas é capaz de fazer latas com raio da base r entre 1 e 6 cm.

(a) Obtenha a expressão da altura h em função do raio r e do volume da lata.

(b) Obtenha a área lateral $L(r)$ da lata em função do raio r.

(c) Obtenha o custo de produção $C(r)$ de uma lata de raio r.

(d) Calcule o raio r_0 que minimiza o custo de produção.

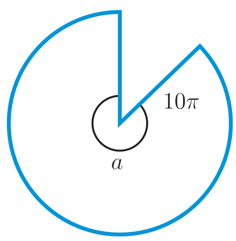


2) Para construir um cone circular reto remove-se um setor de uma folha circular de cartolina de raio 10π cm e unem-se as duas margens retilíneas do corte, conforme a figura ao lado, em que a indica o ângulo do setor circular restante em radianos. O objetivo desse exercício é determinar os ângulos a que fornecem os cones de maior volume. Uma vez montado o cone, denote sua altura por h e seu raio da base por r, de modo que seu volume é dado por $(1/3)\pi r^2 h$.

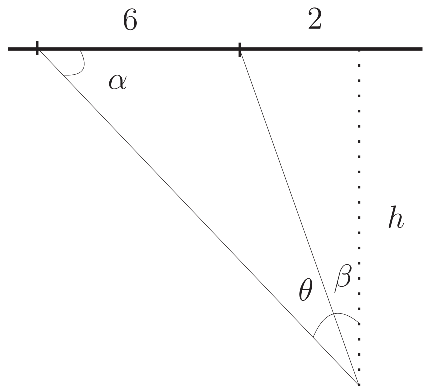
(a) Lembrando que o perímetro do setor circular ao lado é igual a $10\pi a$, obtenha a expressão de r em função do ângulo a.

(b) Determine o volume do cone obtido em função do ângulo a.

(c) Determine o ângulo a_0 para o qual o volume do cone obtido seja o maior possível.



3) Um meia-atacante avança em direção à área adversária perpendicularmente à linha de fundo. Suponha que a bola esteja a uma distância de h *metros* da linha de fundo, que o gol tenha 6 metros de comprimento e que a linha da bola esteja 2 metros distante da trave direita. Conforme ilustra a figura, o ângulo θ de visão do atleta depende de h.



(a) Utilizando uma função trigonométrica inversa, determine o valor de $\alpha(h)$ e $\beta(h)$.

(b) Observando que $\theta(h) = \pi/2 - \alpha(h) - \beta(h)$, calcule $\theta'(h)$ e determine os pontos críticos de $\theta(h)$ no intervalo $(0, +\infty)$.

(c) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de $\theta(h)$

(d) Calcule os limites $\lim_{h \to 0^+} \theta(h)$ e $\lim_{h \to +\infty} \theta(h)$.

(e) Determine o valor de h de modo que o ângulo de visão do jogador seja máximo.

4) Para uma bola arremessada verticalmente sem resistência do ar, temos que a energia mecânica

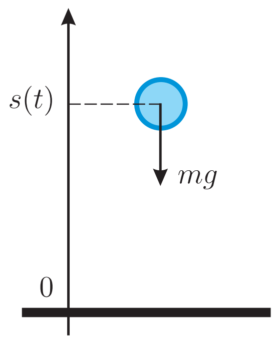
$$m\frac{v(t)^2}{2} + mgs(t) = E$$

se conserva, onde $s(t)$ e $v(t)$ são, respectivamente, a posição e a velocidade instantâneas, m é a massa do bloco e g é a gravidade. Supondo que $m = 1$, $g = 2$ e que $E = 8$, temos que $s(t)$ é solução da seguinte equação

$$(*) \qquad \frac{s'(t)}{\sqrt{4 - s(t)}} = 2$$

Como ilustra os itens a seguir, a equação $(*)$ pode ser melhor entendida a partir do fato de que, se a derivada de uma função for identicamente nula em um intervalo, então a função é necessariamente constante.

(a) Calcule as derivadas das funções $-2\sqrt{4 - s(t)}$ e $2t$.



(b) Lembrando que se uma função tem derivada identicamente nula em um intervalo I, então ela é constante em I, use o item anterior e as informações dadas para obter uma relação entre as funções $-2\sqrt{4 - s(t)}$ e $2t$.

(c) Use o item anterior e a condição inicial $s(0) = 3$ para obter a expressão de $s(t)$.

(d) Determine a velocidade no instante $t = 1$.

5) Denote por $v(t)$ a velocidade de um corpo de massa $m = 0,1$ kg que foi lançado verticalmente com velocidade inicial $v(0) = 63$ m/s e sujeito a uma força de resistência do ar $FR = -v(t)$. Nesse caso, usando a aproximação $g = 10$ m/s^2 da aceleração da gravidade, pode-se mostrar que $v(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{1+v(t)} = -10, & t > 0, \\ v(0) = 63 \end{cases}$$

Para encontrar a solução $v(t)$, resolva os itens seguintes.

(a) Calcule as derivadas das funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

(b) Lembrando que se uma função tem derivada identicamente nula em um intervalo I, então ela é constante em I, use o item anterior e as informações dadas para obter uma relação entre as funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

(c) Use o item anterior e a condição inicial $v(0) = 63$ para obter a expressão de $v(t)$.

(d) Determine o instante em que o corpo alcança a altura máxima.

Gabarito

1. (a) $h = 5^3/r^2$
   (b) $L(r) = (2\pi 5^3)/r$
   (c) $C(r) = L(r) + \pi r^2 + (98/27)\pi r^2$
   (d) $r_0 = 3$

2. (a) $r = 5a$
   (b) $V(a) = \dfrac{25\pi}{3} a^2(100\pi^2 - 25a^2)^{1/2}$
   (c) $a_0 = 2\pi\sqrt{2/3}$

3. (a) $\alpha(h) = \arctan(h/8)$, $\beta(h) = \arctan(2/h)$
   (b) $\theta'(h) = -\dfrac{8}{64+h^2} + \dfrac{2}{4+h^2}$, ponto crítico: $h = 4$
   (c) cresce em $(0, 4)$; decresce em $(4, +\infty)$
   (d) $\lim_{h\to 0^+} \theta(h) = \lim_{h\to +\infty} \theta(h) = 0$
   (e) $h = 4$ é ponto de máximo

4. (a) 2 e $s'(t)/\sqrt{4 - s(t)}$, respectivamente
   (b) $-2\sqrt{4 - s(t)} = 2t + K_1$, com $K_1 \in \mathbb{R}$
   (c) $s(t) = 3 + 2t - t^2$
   (d) $v(1) = 0$

5. (a) $v'(t)/(1 + v(t))$ e -10, respectivamente
   (b) $\ln(1 + v(t)) = -10t + K_1$, com $K_1 \in \mathbb{R}$ constante
   (c) $v(t) = 64e^{-10t} - 1$
   (d) $3\ln 2/5 \simeq 0,414$