Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 05

Temas abordados: Retas Tangentes; Derivada e suas regras básicas

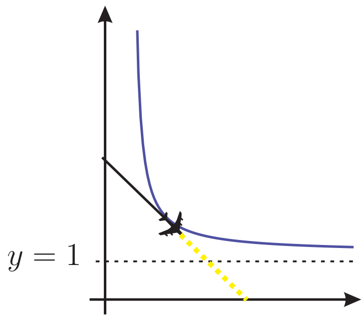
Seções do livro: 2.7; 3.1 a 3.3

1) Para atacar posições inimigas, um avião de caça dá um vôo rasante, percorrendo a trajetória determinada pelo gráfico da função $f(x) = 1 + (1/x)$, para $x > 0$. O avião efetua os seus disparos segundo a direção tangente, conforme figura abaixo.

(a) Determine, usando a definição de derivada, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em um ponto genérico $(a, f(a))$.

(b) Se um disparo é efetuado da posição $(1, 2)$, determine a abscissa do ponto no eixo $\mathcal{O}x$ atingido.

(c) Determine o ponto sobre o gráfico de $f(x)$ em que o disparo deve ser efetuado para atingir um alvo situado no ponto $(8, 0)$.

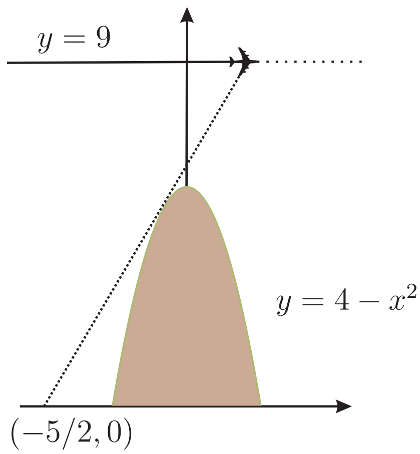


2) Suponha que o eixo $\mathcal{O}x$ representa o solo e uma montanha é modelada pela equação $g(x) = 4 - x^2 = (2 + x)(2 - x)$, onde $x \in [-2, 2]$. Um avião sobrevoa a montanha horizontalmente da esquerda para direita sobre a reta $y = 9$, de modo que, no instante $t > 0$ minutos, a posição do avião no plano cartesiano abaixo é dada por $(4t, 9)$. Considerando que a luz se propaga em linha reta, resolva os ítens abaixo.

(a) Determine, usando a definição de derivada, a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x)$ em um ponto genérico $(a, g(a))$.

(b) Determine a equação da reta tangente à montanha que passa por um observador localizado em $(-5/2, 0)$.

(c) Determine o instante t_0 em que o observador do item b) perde a visão do avião devido à montanha.



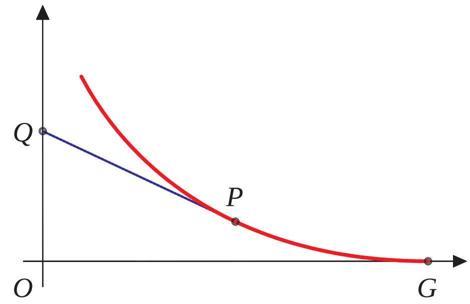
3) Um gato está no ponto $G = (1, 0)$, descobre um rato situado na origem $O = (0, 0)$ e parte em sua perseguição. No mesmo instante, o rato percebe o gato e foge seguindo a direção positiva do eixo $\mathcal{O}y$, com velocidade igual à metade da do gato. A trajetória percorrida pelo gato para alcançar o rato é conhecida como *curva de perseguição* e tem a seguinte propriedade: se o rato e o gato estiverem nas posições Q e P ilustradas na figura abaixo, então a reta determinada pelos pontos P e Q é tangente à curva no ponto P. No exemplo considerado, pode-se mostrar que a curva de perseguição é o gráfico da função $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}\left(\dfrac{x}{3} - 1\right) + \dfrac{2}{3}$.

(a) Calcule, pela definição, a derivada de $g(x) = \sqrt{x}$ em um ponto $a \in (0, 1)$. Para isso, vale lembrar a igualdade $x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$.

(b) Use o item anterior e as regras de derivação para calcular a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

(c) Determine a posição $Q = (0, y_0)$ em que se encontra o rato no instante em que o gato estiver na posição $P = (1/4, f(1/4))$.

(d) Calcule o espaço total percorrido pelo rato antes de ser apanhado pelo gato.



4) Suponha que um reservatório, inicialmente com 50 litros de água pura, comece a ser abastecido com água salgada à razão de 5 litros/min e com uma concentração de 1 grama/litro de sal. Nesse caso, o volume de água $V(t)$ e a quantidade de sal $Q(t)$ no reservatório são funções do tempo $t \geq 0$, e portanto a concentração de sal $c(t)$ no reservatório é também uma função do tempo.

(a) Obtenha as expressões das funções $V(t)$, $Q(t)$ e $c(t)$.

(b) Calcule o limite $c'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{c(t+h) - c(t)}{h}$, simplificando antes o quociente.

(c) Usando o item anterior, decida em qual dos instantes $t_0 = 10$ ou $t_1 = 30$ a concentração está variando mais rapidamente.

5) Suponha que a quantidade de bens produzidos por uma fábrica possa ser modelada em função do número x de empregados, por uma função derivável $p(x)$, em que $p(x)$ é medida em milhares e x em centenas. A produtividade média por empregado é então dada pela função $M(x) = p(x)/x$, e pode-se mostrar que o número x_0 de empregados que maximiza a função $M(x)$ é aquele para o qual $M'(x_0) = 0$.

(a) Usando as regras de derivação, calcule $M'(x)$ em termos da derivada $p'(x)$.

(b) Use o item anterior para justificar a afirmação de que $M'(x_0) = 0$ se, e somente se, $p'(x_0) = M(x_0)$.

(c) Calcule $p'(x)$ supondo que $p(x) = \dfrac{2\,x^2}{x^2 + 1}$.

(d) Determine o número de empregados que maximiza a produtividade média da fábrica.

Gabarito

1. (a) $y(x) = \dfrac{-1}{a^2}(x-a) + 1 + \dfrac{1}{a}$
   (b) 3
   (c) $(2, 3/2)$
2. (a) $y_a(x) = -2a(x-a) + g(a)$
   (b) $y(x) = 2x + 5$
   (c) $t_0 = 1/2$
3. (a) $g'(a) = 1/(2\sqrt{a})$
   (b) $y_a(x) = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}(x-a) + f(a)$
   (c) $y_0 = \frac{3}{16} + \frac{5}{24}$
   (d) 2/3.
4. (a) $V(t) = 50 + 5t,\ Q(t) = 5t,\ c(t) = t/(10+t)$
   (b) $c'(t) = 10/(10+t)^2$
   (c) no instante $t_0 = 10$
5. (a) $M'(x) = \dfrac{xp'(x) - p(x)}{x^2}$
   (b) $p'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$
   (c) $x_0 = 1$