Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 12

Temas abordados: Integral Definida, Teorema Fundamental do Cálculo e Áreas
Seções do livro: 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4

1) Calcule as integrais definidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(2x+5)\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{32}x^{-6/5}\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(8t^2+\cos(t))\mathrm{d}t$ (e) $\displaystyle\int_{1}^{-1}(r+1)^2\mathrm{d}r$ (f) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\mathrm{d}s$

(g) $\displaystyle\int_{1}^{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_{0}^{1}(3+4e^x)\mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (k) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}2\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$ (l) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}e^{-x}\mathrm{d}x$

2) Se f é uma função contínua e não negativa em $[a,b]$, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ é exatamente a área da região abaixo do gráfico de f e acima do eixo $\mathcal{O}x$. Utilizando o gráfico da função, calcule cada uma das integrais abaixo.

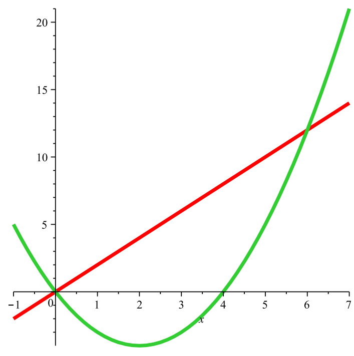
(a) $\displaystyle\int_{-4}^{2}|x|\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{-3}^{0}(1+\sqrt{9-x^2})\,\mathrm{d}x$

3) Se p e q são funções contínuas e $p(x)\geq q(x)$ em $[a,b]$, então a área da região compreendida acima do gráfico de q e abaixo do gráfico de p é dada por $\int_a^b[p(x)-q(x)]dx$. Nos itens abaixo, vamos calcular esta área para o caso em que $f(x)=2x$ e $g(x)=x^2-4x$.

(a) Determine as soluções da equação $f(x)=g(x)$, chamando de a o menor valor e b o maior.

(b) Pelo Teorema do Valor Intermediário temos que, em todo o intervalo $[a,b]$, uma das funções é sempre maior ou igual a outra. Determine qual delas é a maior, calculando cada uma delas em ponto $c\in(a,b)$ e comparando os dois valores.

(c) Determine agora a área integrando, no intervalo $[a,b]$, a função que está por cima menos a que está por baixo.



4) Proceda como no exercício anterior para calcular a área a área da região limitada pelas curvas dadas.

(a) $f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=x^2$

(b) $f(x)=6-x^2,\quad g(x)=3-2x$

(c) $f(x)=|x-2|,\quad g(x)=2-(x-2)^2$

5) Repita o argumento acima para as funções abaixo. Neste caso, você encontrará 3 raízes para a equação $f(x) = g(x)$, digamos $a < b < c$. A área agora será calculada como a soma de duas integrais, uma do tipo $\int_a^b$ e outra do tipo $\int_b^c$. Em cada uma delas, você deve integrar a função que está por cima, menos a que está por baixo no intervalo de integração.

(a) $f(x) = x^3 - x + 1, \;\; g(x) = 1$ (b) $f(x) = 4x, \quad g(x) = x^3 + 3x^2$

6) Se f é contínua em $[a, b]$, então o Teorema Fundamental da Cálculo afirma que a derivada da função $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ é igual a $f(x)$ no intervalo (a, b). Vamos usar este resultado para calcular a derivada da função

$$g(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Verifique que, se $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t)\mathrm{d}t$ e $c(x) = x^3$, então $g(x) = (F \circ c)(x)$.

(b) Use a regra da cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar $g'(x)$.

7) Verifique que as funções abaixo não dependem de x. Note que, procedendo como acima, é possível fazer isso sem saber a primitiva das funções que estão sendo integradas.

(a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{(1+t^2)}\mathrm{d}t$, definida para $x > 0$.

(b) $f(x) = \displaystyle\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$, para $x \in (0, \pi/2)$.

8) Considere a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1) \cup (1,2], \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Supondo que ela possui uma primitiva F, resolva os itens a seguir.

(a) Mostre que existem c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ tais que $F(x) = c_1$ para todo $x \in (0, 1)$, e $F(x) = c_2$ para todo $x \in (1, 2)$.

(b) Usando a continuidade de F, verifique que $c_1 = c_2$ e portanto $F'(1) = 0$.

(c) Usando o item anterior e lembrando que $F'(1) = f(1) = 1$, conclua que a função F não pode existir, isto é, f não possui primitiva em $[0, 2]$.

(d) Explique a razão pela qual o item acima não contradiz o Teorema Fundamental do Cálculo.

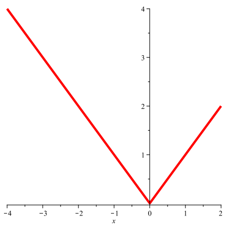
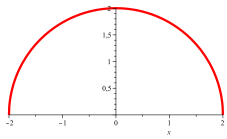
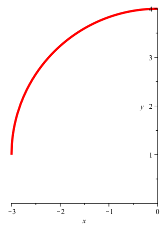
RESPOSTAS

1)

(a) 6	(b) $5/2$	(c) 2	(d) $2+2\pi^3/3$
(e) $-8/3$	(f) $2^{3/4}-\sqrt{2}-1$	(g) e	(h) $4e-1$
(i) π	(j) $\pi/3$	(k) 0	(l) $1/2$

2) (a) 10 (b) 2π (c) $3+9\pi/4$

Os valores podem ser calculados a partir dos gráficos, que estão esboçados abaixo.

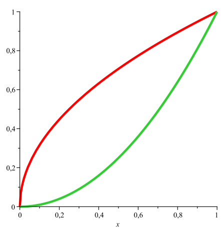
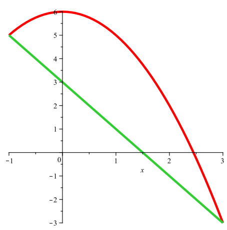
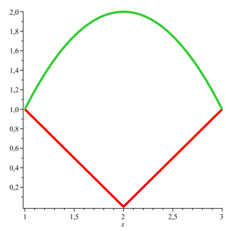
3) (a) As funções são iguais em $x=0$ e $x=6$.

(b) Como $f(5)=10>5=g(5)$, a função f é maior ou igual a g em todo o intervalo $[0,6]$. Não há nada de especial no ponto 5 escolhido. Você poderia escolher qualquer um no intervalo aberto $(0,6)$.

(c) A área é dada pela integral $\int_0^6 [f(x)-g(x)]dx = \int_0^6 (6x-x^2)dx = 36$.

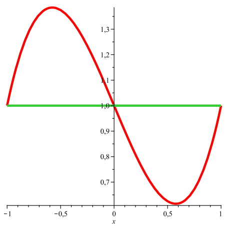
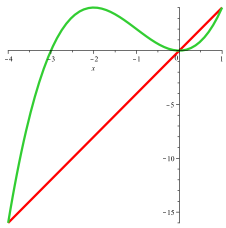
4) (a) $1/3$ (b) $32/3$ (c) $7/3$

Neste caso é possível fazer o cálculo sem conhecer os gráficos. Contudo, para maior entendimento, eles estão esboçadas abaixo.

5) (a) $1/2$ (b) $32+(3/4)$

Neste caso é possível fazer o cálculo sem conhecer os gráficos. Contudo, para maior entendimento, eles estão esboçadas abaixo.

6) Pela regra da cadeia $f'(x)=F'(c(x))c'(x)$. Basta agora lembra que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo $F'(x)=\operatorname{sen}^3(x)$, de modo que $f'(x)=3x^2\operatorname{sen}^3(x^3)$

7) Para o item (b) escreva $\int_{-\cos(x)}^{\operatorname{sen}(x)} = \int_{-\cos(x)}^{0} + \int_0^{\operatorname{sen}(x)}$.