Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Derivada da função inversa

Nos textos anteriores, aprendemos a derivar as funções polinomiais, trigonométricas, a exponencial e qualquer tipo de composições, somas e produtos delas. Considerando as funções que aprendemos no Ensino Médio, resta-nos somente perguntar sobre a derivada da função logaritmo. Este é o objetivo deste texto.

Lembre que a função logarítmica é definida com sendo a inversa da função exponencial, de modo que

$$\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln y} = y, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\, y \in (0, +\infty).$$

A pergunta natural que deveríamos fazer agora é a seguinte: a inversa de uma função derivável é também derivável? Se for, podemos concluir que o logarítimo é derivável, por ser a inversa da função derivável e^x.

Na sequência apresentamos algumas condições sob as quais a pergunta acima tem resposta positiva.

Teorema 1. *Suponha que a função f tem derivada no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e que esta derivada nunca se anula. Então a função inversa f^{-1} existe, é derivável e*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)},$$

em que $a \in dom(f)$ é tal que $f(a) = b$.

O teorema acima é composto por três partes. Na primeira, garante-se a existência da inversa, na segunda que esta inversa é derivável e, finalmente, na terceira apresenta-se uma fórmula para calcular a derivada da inversa.

Vamos apresentar aqui um prova das duas últimas partes, supondo que a função inversa $g = f^{-1}$ existe e é contínua no ponto b. Se denotarmos $y = f(x)$ e $b = f(a)$, uma vez que g é a inversa de f, temos que $g(y) = x$ e $g(b) = a$. Deste modo,

$$(f^{-1})'(b) = g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

A última expressão acima faz sentido porque, como f é invertível, ela é uma função injetiva. Assim, $f(x) \neq f(a)$, sempre que $x \neq a$. Além disso, como estamos supondo que g é contínua em $y = b$, devemos ter $x = g(y) \to g(b) = a$, quando $y \to b$. Por isto, no último limite, escrevemos $x \to a$. Como $f'(a) \neq 0$, segue da equação acima que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

A fórmula acima estabelece que a derivada da inversa é o inverso da derivada. É necessário somente tomar cuidado com os pontos onde as funções são calculadas. Uma vez que $a \in \operatorname{dom}(f)$ e $f(a) = b$, então o ponto b está no domínio de f^{-1} e portanto no domínio de sua derivada. Por este motivo, a derivada de f é calculada no ponto a, enquanto que a derivada de f^{-1} é calculada no ponto b.

Vamos retomar agora para a função logaritmo. Note primeiro que $f(x) = e^x$ é derivável com $f'(x) = e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue então do Teorema 1 que a sua inversa $g(y) = \ln(y)$ é derivável. Para calcular a derivada podemos usar a fórmula dada pelo teorema. Contudo, o procedimento seguinte nos parece mais simples de ser memorizado: como g é a inversa de f, temos que

$$f(g(y)) = y, \qquad \forall\, y > 0.$$

Uma vez que já sabemos que as duas funções são deriváveis, podemos derivar os dois lados da igualdade acima, com respeito a y, e usar a Regra da Cadeia para escrever

$$f'(g(y))g'(y) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{e^{g(y)}} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}.$$

Deste modo, temos que

$$\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{y}, \qquad \forall\, y > 0.$$

Dada a importância da função exponencial e da sua inversa, vamos enunciar um resoltado que sumariza as considerações acima juntamente com as observações de textos anteriores.

Teorema 2. *As funções exponencial e logarítmica são deriváveis, com*

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Vamos fazer algumas aplicações do resultado acima.

Exemplo 1. Dado um número $a > 0$, com $a \neq 1$, definimos a função exponencial de base a como sendo

$$a^x = e^{x \ln(a)}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

A derivada desta função pode ser calculada usando-se a Regra da Cadeia como se segue

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln(a)} \frac{d}{dx}(x \ln(a)) = \ln(a) e^{x \ln(a)} = \ln(a) a^x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, se fizermos $a = e$, recuperamos o enunciado do último teorema, porque $\ln(e) = 1$. $\square$

O exemplo acima, embora simples, ilustra uma coisa importante. A igualdade $(e^x)' = e^x$ estabelece que a derivada da função exponencial é a própria exponencial. Porém, é preciso tomar cuidado com possíveis composições. Por exemplo, para derivar a função e^{x^2} é necessário usar a Regra da Cadeia, porque temos aqui a composição da exponencial com a função x^2. Deste modo, $(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$. O mesmo cuidado deve ser tomando com a função logarítmica:

$$\frac{d}{dx}\ln(1+x^2) = \frac{1}{1+x^2}\frac{d}{dx}(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

O exemplo a seguir generaliza as contas acima.

Exemplo 2. Se $f(x)$ é uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x), \qquad \frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)}f'(x),$$

com a restrição de que, no segundo cálculo, a função f seja positiva, para que a composição $\ln(f(x))$ faça sentido. $\square$

Finalizamos o texto introduzindo as *funções trigonométricas inversas*. Vamos tratar somente da inversa da tangente, deixando as demais como exercício.

A função tangente é definida, em todos os pontos onde o cosseno não se anula, por

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

Uma conta simples mostra que $\tan(x) = \tan(x+\pi)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função tangente não é injetiva, não podendo assim ser invertível. Contudo, se nos restringirmos ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, então a tangente é crescente, tendo portanto uma inversa, que vamos chamar de *arco tangente*. Deste modo, a função $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é definida pela seguinte expressão

$$y = \arctan(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ e } \tan(y) = x.$$

Lembre que a derivada da tangente é a função $\sec^2$, que é sempre positiva no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Segue então do Teorema 1 que a função arco tangente é derivável. Para calcular a derivada, vamos proceder como no caso da função logarítmica. Se denotarmos $y(x) = \arctan(x)$, então

$$\tan(y(x)) = x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Derivando os dois lados com respeito a x, e usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\sec^2(y(x))y'(x) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x) = \frac{1}{\sec^2(y(x))}.$$

A expressão acima, apesar de correta, não é muito boa para calcularmos os valores de $y'(x)$. Com o intuito de escrever o lado direito da última igualdade somente como função de x, vamos lembrar que $\sec^2(y) = 1 + \tan^2(y)$, de modo que

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = y'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2},$$

em que usamos o fato de que $\tan(y(x)) = x$.

Fazendo restrições convenientes do domínio, é possível inverter as outras funções trigonométricas, bem como calcular as derivadas das inversas. Na tarefa logo a seguir você será convidado a derivar a inversa do cosseno. As outras derivadas aparecerão nas listas de exercícios.

Tarefa

A função cosseno, com o domínio restrito ao intervalo $[0, \pi]$, é decrescente, sendo portanto inversível. Sua inversa $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ é definida por

$$y(x) = \arccos(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \in [0, \pi] \text{ e } \cos(y(x)) = x.$$

Siga os passos abaixo para calcular a derivada $y'(x)$.

1. Lembrando que $(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x) < 0$ para todo $x \in (0, \pi)$, use o Teorema 1 para concluir que a função $y(x) = \arccos(x)$ é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$.

2. Aplique o operador de derivação $\frac{d}{dx}$ em ambos os lados da igualdade $\cos(y(x)) = x$, não esquecendo de usar a Regra da Cadeia para derivar o lado esquerdo da igualdade.

3. Isole o termo $y'(x)$ na expressão encontrada acima.

4. Lembrando que $\operatorname{sen}(y) > 0$, $x = \cos(y)$ e $\operatorname{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1$, escreva $\operatorname{sen}(y)$ como função de x.

5. Use os itens acima para concluir que

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall\, x \in (-1, 1).$$