Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Integração por partes

(solução da tarefa)

Vamos começar aplicando integração por partes na integral indefinida $\int \cos^n(x)\mathrm{d}x$. Fazendo a escolha $u = \cos^{n-1}(x)$ temos que

$$\begin{aligned} u &= \cos^{n-1}(x), & \mathrm{d}v &= \cos(x)\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u &= -(n-1)\cos^{n-2}(x)\mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x, & v &= \mathrm{sen}(x), \end{aligned}$$

e portanto, como $\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

$$\begin{aligned} \int \cos^n(x)\mathrm{d}x &= \cos^{n-1}(x)\mathrm{sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\mathrm{sen}^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \cos^{n-1}(x)\,\mathrm{sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

o que nos leva à igualdade

$$\int \cos^n(x)\mathrm{d}x = \cos^{n-1}(x)\mathrm{sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

Passando a última integral para o lado esquerdo, concluímos que

$$\int \cos^n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\mathrm{sen}(x) + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x,$$

que é a fórmula recursiva perguntada no item (c) da tarefa.

Uma vez que $\cos(\pi/2) = 0 = \mathrm{sen}(0)$, a expressão acima e o Teorema Fundamental do Cálculo nos fornecem

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\mathrm{sen}(x)\right)\Big|_{x=0}^{\pi/2} + \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$