Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Matemática 1

## Concavidade

Conforme vimos anteriormente, o sinal da derivada de uma função em um intervalo nos dá informação sobre crescimento ou decrescimento desta função. Neste texto vamos entender qual a informação dada pelo sinal da derivada segunda, isto é, pelo sinal da função $f''(x) = (f'(x))'$.

Lembremos inicialmente que, se $f$ é uma função tal que $f' > 0$ no intervalo $(a, b)$, então $f$ é crescente neste intervalo. Nas figuras abaixo você encontra dois possíveis aspectos para o gráfico da função $f$ em $(a, b)$.

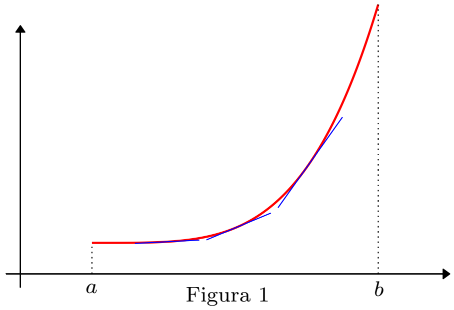

Figura 1

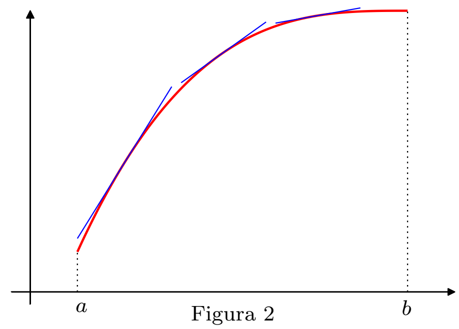

Figura 2

Naturalmente, existem outras configurações possíveis para o gráfico. O que difere cada um deles? Vamos olhar para o comportamento das retas tangentes quando percorremos o intervalo $(a, b)$ da esquerda da direita. Note que, na primeira figura, a reta tangente vai ficando cada vez mais inclinada, enquanto que, na segunda, a inclinação vai diminuindo. Lembrando que a inclinação da reta tangente no ponto $(x, f(x))$ é dada pela derivada $f'(x)$, percebemos que na primeira figura a derivada é crescente em $(a, b)$, enquanto que na segunda ela é decrescente.

Essas observações nos permitem definir o conceito de concavidade, como se segue.

**Definição 1.** *O gráfico de uma função $f$ derivável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ é*

1. côncavo para cima *em $I$, se $f'$ é crescente em $I$;*
2. côncavo para baixo *em $I$, se $f'$ é decrescente em $I$.*

Quando a função possui derivada segunda $f''$ no intervalo $I$ fica mais simples determinar a sua concavidade. De fato, basta lembrar que os intervalos onde $(f')' = f''$ é positiva, são aqueles em que a derivada $f'$ é crescente, e portanto o gráfico é côncavo para cima. De fato, esta observação é a prova do seguinte resultado.

**Teorema 1.** *Suponha que $f$ tem derivada segunda $f''$ no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Então*

1. *o gráfico de $f$ é côncavo para cima em $I$, se $f'' > 0$ em $I$;*
2. *o gráfico de $f$ é côncavo para baixo em $I$, se $f'' < 0$ em $I$.*

Vamos apresentar alguns exemplos do conceito de concavidade. Para a função $f(x) = x^3$ temos que $f'(x) = 3x^2$, e portanto $f''(x) = 6x$. Note que $f'' < 0$ no intervalo $(-\infty, 0)$ e $f'' > 0$ no intervalo $(0, +\infty)$. Deste modo, o gráfico da função é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncavo para cima em $(0, +\infty)$. Observe na figura abaixo a diferença do comportamento da função antes e depois do zero.

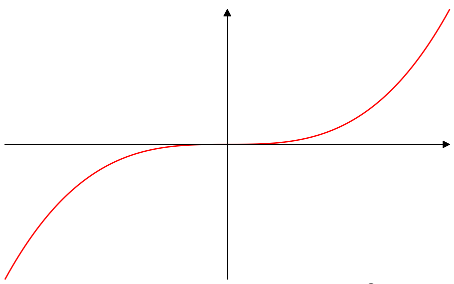

Figura 3: gráfico de $f(x) = x^3$

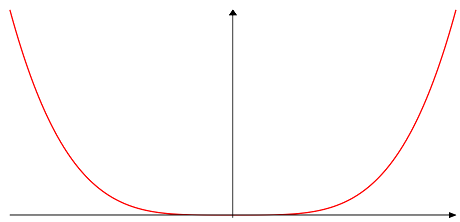

Figura 4: gráfico de $f(x) = x^4$

Já para a função $g(x) = x^4$ temos que $g''(x) = 12x^2$, de modo que o seu gráfico é sempre côncavo para cima. Outros exemplo de funções que têm sempre a mesma concavidade são dados pelas funções $\ln(x)$ e $e^x$. De fato, $(\ln(x))'' = (1/x)' = -1/x^2 < 0$ para todo $x > 0$. Deste modo, o gráfico da função logaritmo é sempre côncavo para baixo. Por outro lado, a exponencial é tal que $(e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0$, tendo assim gráfico sempre côncavo para cima.

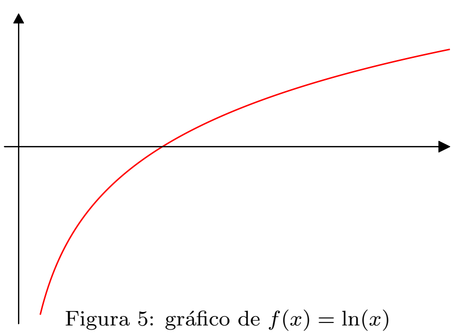

Figura 5: gráfico de $f(x) = \ln(x)$

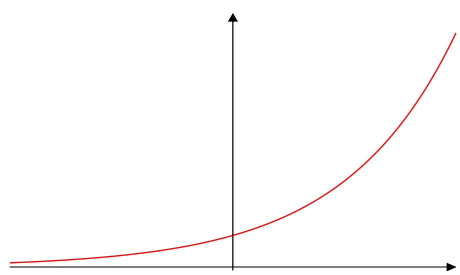

Figura 6: gráfico de $f(x) = e^x$

A função $h(x) = x^4 - 4x^3$ é tal que $h''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$. Para descobrir a concavidade é necessário estudar o sinal de $h''$. Para tanto, observe inicialmente que ela se anula nos pontos $x = 0$ e $x = 2$. O quadro abaixo descreve o comportamento da função $h''$.

| | $x \in (-\infty, 0)$ | $x \in (0, 2)$ | $x \in (2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| sinal de $h''$ | positivo | negativo | positivo |
| concavidade | para cima | para baixo | para cima |

Note que a derivada segunda "troca de sinal" duas vezes. Vamos introduzir uma nomenclatura para determinar os pontos onde esta troca ocorre.

**Definição 2.** *O ponto $x = c$ é um* ponto de inflexão *da função $f$ se a concavidade do gráfico de $f$ muda quando passamos por $c$.*

O ponto $x = 0$ é um ponto de inflexão da função $f(x) = x^3$ pois, conforme vimos anteriormente, a concavidade antes de $x = 0$ está voltada para baixo e depois para cima. As funções $\ln(x)$ e $e^x$ não possuem ponto de inflexão, porque a concavidade delas não se altera. A função $h(x) = x^4 - 4x^3$ possui dois pontos de inflexão, a saber $x = 0$ e $x = 2$. Veja a figura ao lado.

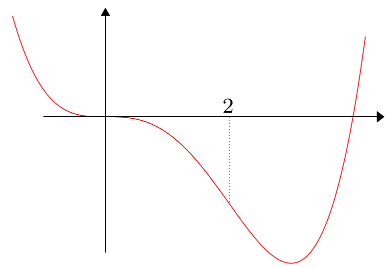

Figura 7: gráfico de $h(x) = x^4 - 4x^3$

Uma vez que a concavidade está relacionada com o sinal de $f''$, os ponto onde $f''$ se anula (ou não existe) são candidatos naturais a pontos de inflexão. Por exemplo, a derivada segunda da função $f(x) = x^3$ se anula no ponto de inflexão $x = 0$, e da mesma forma para a função $h(x) = x^4 - 4x^3$ nos pontos $x = 0$ e $x = 2$. Porém, é importante notar que a derivada segunda pode se anular em um ponto sem que este seja ponto de inflexão. De fato, para a função $g(x) = x^4$ temos que $g''(0) = 0$. Porém o ponto $x = 0$ não é ponto de inflexão, uma vez que o gráfico tem concavidade sempre voltada para cima.

Antes de terminar o texto vamos apresentar outra interessante aplicação da derivada segunda. Suponha que $f'(c) = 0$ e que a função $f''$ seja contínua em um intervalo aberto contendo o ponto $x = c$. Como $f'(c) = 0$, no ponto $(c, f(c))$ temos uma reta tangente horizontal. Se $f''(c) < 0$, a continuidade de $f''$ nos assegura que, em uma vizinhança de $x = c$, a derivada segunda é sempre negativa. Logo, o gráfico da função $f$ tem o aspecto de um cume de montanha, o que nos diz que $x = c$ é ponto de máximo local. Um raciocínio análogo para o caso $f''(c) > 0$ nos permite provar o resultado seguinte.

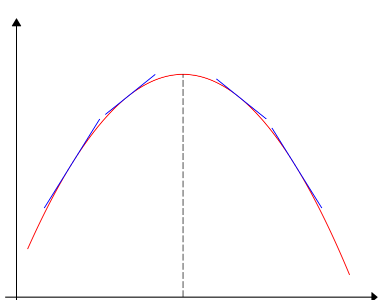
Figura 8: máximo local

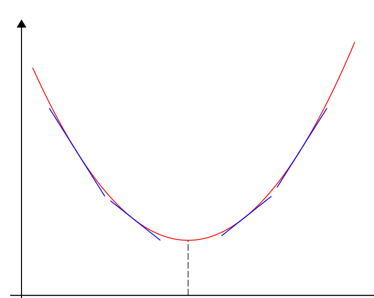
Figura 9: mínimo local

**Teorema 2** (Teste da Derivada Segunda). *Suponha que $f'(c) = 0$ e que $f''$ seja contínua em um intervalo aberto contendo $x = c$. Então*

1. *$x = c$ é um ponto de mínimo local, se $f''(c) > 0$;*

2. *$x = c$ é um ponto de máximo local, se $f''(c) < 0$.*

Lembre-se que, usando o teste da derivada primeira, você pode sempre classificar a natureza de um ponto crítico onde a derivada se anula. Para tanto, basta estudar o sinal da derivada antes e depois deste ponto. A vantagem do teste acima é que não é necessário o estudo de sinal da derivada primeira: basta calcular a derivada segunda no ponto $x = c$. Por exemplo, após alguns cálculos obtemos as seguintes expressões para as derivadas da função

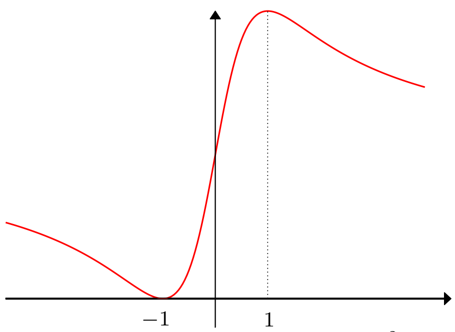

Figura 10: gráfico de $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \text{ e } f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Como $f'(-1) = 0$ e $f''(-1) = 1 > 0$, o ponto $x = -1$ é um ponto de mínimo local. Por outro lado, como $f'(1) = 0$ e $f''(1) = -1 < 0$, o ponto $x = 1$ é um ponto de máximo local. Veja que a análise foi feita sem a necessidade de estudar o sinal de $f'$.

Apesar da facilidade de aplicação, o Teste da Derivada Segunda tem um defeito. Se tivermos $f'(c) = 0$ e também $f''(c) = 0$, o teste é inconclusivo. Isso significa que o ponto $x = c$ pode ser máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois. De fato, se considerarmos as funções $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$ temos que, nos três casos, as derivadas primeira e segunda se anulam em $x = 0$. No caso da $f$ temos um mínimo local, no caso da $g$ um máximo local e no da $h$ o ponto $x = 0$ não é extremo local. Vale lembrar que, ainda que $f'(c) = f''(c) = 0$, é sempre possível utilizar o sinal da derivada primeira para classificar o ponto $x = c$ em termos de extremos locais.

# Tarefa

Considere a função

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

1. Após as devidas simplificações, verifique que

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \;\; \text{e} \;\; f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

2. Determine os 3 pontos críticos da função $f$. Determine ainda em quais deles é possível aplicar o Teste da Derivada Segunda e, após aplicá-lo, classifique o ponto crítico em termos de extremos locais.

3. Estude o sinal da derivada de $f''$ para determinar os intervalos onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

4. Quais os pontos de inflexão da função?