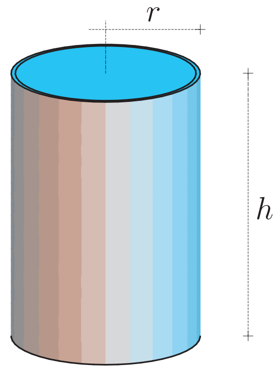
Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 09 – Soluções

Temas abordados: Teorema do Valor Médio; Crescimento de funções; Otimização
Seções do livro: 4.2, 4.3, 4.6

1) Suponha que, na produção de uma lata de refrigerante, o custo do material da lateral e do fundo é de uma unidade monetária por centímetro quadrado, mas para o material da tampa esse custo é de $98/27$ unidades monetárias por centímetro quadrado. Suponha ainda que a lata seja cilíndrica de raio r cm e altura h cm, conforme ilustra a figura abaixo, e que o volume seja constante e igual a $5^3\,\pi$ cm^3. A máquina que fabrica as latas é capaz de fazer latas com raio da base r entre 1 e 6 cm.



(a) Obtenha a expressão da altura h em função do raio r e do volume da lata.

(b) Obtenha a área lateral $L(r)$ da lata em função do raio r.

(c) Obtenha o custo de produção $C(r)$ de uma lata de raio r.

(d) Calcule o raio r_0 que minimiza o custo de produção.

Soluções:

(a) O volume V da lata é dado pela área da base $\pi\,r^2$ vezes a altura h, isto é, $V = \pi\,r^2\,h$. Usando que $V = 5^3\,\pi$ e isolando h na igualdade anterior, obtém-se $h = h(r) = 5^3/r^2$.

(b) Substituindo $h = h(r)$ na expressão da área lateral $L = 2\,\pi\,r\,h$, obtém-se $L(r) = 2\,\pi\,5^3/r$.

(c) A soma das áreas lateral e do fundo é igual a $L(r) + \pi\,r^2$, enquanto que a área da tampa é $\pi\,r^2$. Considerando o custo destes materiais e a expressão de $L(r)$, segue-se que $C(r)$ é dada por

$$C(r) = 2\,\pi\,\frac{5^3}{r} + \pi\,r^2 + \frac{98}{27}\,\pi\,r^2 = \pi\left(2\frac{5^3}{r} + \left(\frac{98}{27} + 1\right)r^2\right) = 125\pi\left(\frac{2}{r} + \frac{r^2}{27}\right).$$

(d) Aplicamos o método da otimização para a função $C(r)$, onde $r \in [1, 6]$. Temos que

$$C'(r) = 125\pi\left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2r}{27}\right) = 250\pi\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{r}{27}\right), \quad r \in (1, 6).$$

Os pontos críticos de C em $(1, 6)$ são obtidos resolvendo para r

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{r}{27} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r}{27} = \frac{1}{r^2} \quad \Longleftrightarrow \quad r^3 = 27.$$

Segue que $r = 3$ é o único ponto crítico de C no intervalo $(1, 6)$. O valor de C nesse ponto é dado por

$$C(3) = 125\pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 125\pi.$$

Os valores de C nos pontos do extremos domínio $[1,6]$ são

$$C(1) = 125\pi\left(2 + \frac{1}{27}\right) > 125\pi,$$

$$C(6) = 125\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{36}{27}\right) > 125\pi.$$

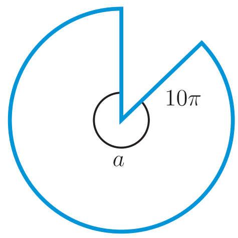
Comparando os valores de C obtidos, concluímos que $r = 3$ é o ponto de mínimo de C em $[1,6]$. Logo o raio $r_0 = 3$ minimiza o custo de produção.

2) Para construir um cone circular reto remove-se um setor de uma folha circular de cartolina de raio 10π cm e unem-se as duas margens retilíneas do corte, conforme a figura ao lado, em que a indica o ângulo do setor circular restante em radianos. O objetivo desse exercício é determinar os ângulos a que fornecem os cones de maior volume. Uma vez montado o cone, denote sua altura por h e seu raio da base por r, de modo que seu volume é dado por $(1/3)\pi r^2 h$.

(a) Lembrando que o perímetro do setor circular ao lado é igual a $10\pi a$, obtenha a expressão de r em função do ângulo a.

(b) Determine o volume do cone obtido em função do ângulo a.

(c) Determine o ângulo a_0 para o qual o volume do cone obtido seja o maior possível.



<u>**Soluções**</u>:

(a) Temos que o perímetro da base do cone é $2\pi r = 10\pi a$, de modo que $r = 5a$.

(b) Primeiro obtemos h como função de r, fazendo um corte no cone com um plano que contém a altura h, obtendo assim um triângulo retângulo com catetos medindo h e r e com hipotenusa medindo 10π. Segue que $(10\pi)^2 = h^2 + r^2$, de onde obtemos que $h = \sqrt{(10\pi)^2 - r^2}$. Substituindo a expressão de r em função de a e usando a fórmula para o volume do cone obtemos

$$V(a) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{25\pi}{3} a^2 (100\pi^2 - 25a^2)^{1/2}.$$

(c) Aplicamos o método da otimização para a função $V(a)$, onde $a \in [0, 2\pi]$. A derivada de V é dada por

$$V'(a) = \frac{25\pi}{3}\left(2a(100\pi^2 - 25a^2)^{1/2} - 25a^3(100\pi^2 - 25a^2)^{-1/2}\right), \quad a \in (0, 2\pi).$$

Colocando em evidência $a(100\pi^2 - 25a^2)^{-1/2}$, temos que

$$V'(a) = \frac{25\pi}{3}(100\pi^2 - 25a^2)^{-1/2} a(-75a^2 + 200\pi^2), \quad a \in (0, 2\pi).$$

Como a derivada existe em todo o intervalo $(a, 2\pi)$, os pontos críticos de V nesse intervalo são aqueles para os quais $V'(a) = 0$, ou ainda, $75a^2 - 200\pi^2 = 0$. Resolvendo essa equação concluímos que o único ponto crítico no intervalo $(0, 2\pi)$ é $a = 2\pi\sqrt{2/3}$. Note que a expressão acima também se anula quando $a = 0$, porém a função não possui derivada nesse ponto. Uma vez que $V(0) = V(2\pi) = 0$ e $V(2\pi\sqrt{2/3}) > 0$, concluímos que o ângulo que maximiza o volume é $a_0 = 2\pi\sqrt{2/3}$.

3) Um meia-atacante avança em direção à área adversária perpendicularmente à linha de fundo. Suponha que a bola esteja a uma distância de h *metros* da linha de fundo, que o gol tenha 6 metros de comprimento e que a linha da bola esteja 2 metros distante da trave direita. Conforme ilustra a figura, o ângulo θ de visão do atleta depende de h.

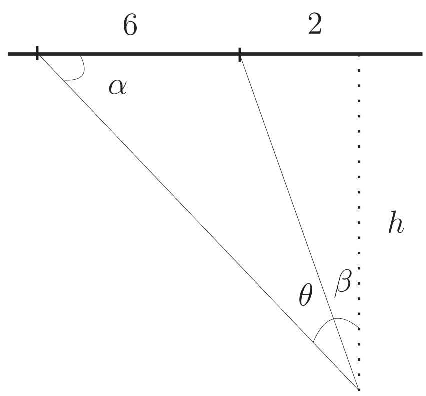
(a) Utilizando uma função trigonométrica inversa, determine o valor de $\alpha(h)$ e $\beta(h)$.

(b) Observando que $\theta(h) = \pi/2 - \alpha(h) - \beta(h)$, calcule $\theta'(h)$ e determine os pontos críticos de $\theta(h)$ no intervalo $(0, +\infty)$.

(c) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de $\theta(h)$

(d) Calcule os limites $\lim\limits_{h\to 0^+} \theta(h)$ e $\lim\limits_{h\to +\infty} \theta(h)$.

(e) Determine o valor de h de modo que o ângulo de visão do jogador seja máximo.



__Soluções__:

(a) De acordo com a figura temos que $\tan(\alpha) = h/8$ e $\tan(\beta) = 2/h$, de modo que

$$\alpha(h) = \arctan\left(\frac{h}{8}\right) \text{ e } \beta(h) = \arctan\left(\frac{2}{h}\right).$$

(b) Lembrando que $\frac{d}{dy}\arctan(y) = 1/(1+y^2)$ e usando a regra da cadeia obtemos, após algumas simplificações,

$$\theta'(h) = -\frac{8}{64+h^2} + \frac{2}{4+h^2} = \frac{-6h^2+96}{(64+h^2)(4+h^2)}. \quad (1)$$

Dessa forma, o único ponto crítico de $\theta(h)$ no intervalo $(0, +\infty)$ é $h = 4$.

(c) Estudando o sinal da derivada concluímos que $\theta' > 0$ em $(0, 4)$, e $\theta' < 0$ em $(4, +\infty)$. Note que isso implica que $h = 4$ é um ponto de máximo local de θ.

(d) Perceba inicialmente que $\theta + \beta + \alpha + (\pi/2) = \pi$, de modo que

$$\theta(h) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{h}{8}\right) - \arctan\left(\frac{2}{h}\right).$$

Uma vez que a função arctan é contínua, temos que $\lim\limits_{y\to 0} \arctan(y) = \arctan(0) = 0$. Por outro lado, como $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty$ e a inversa da tangente é a função arctan, temos que $\lim\limits_{y\to\infty} \arctan(y) = \pi/2$. Essas informações e a expressão acima implicam que

$$\lim_{h\to 0^+} \theta(h) = \lim_{h\to +\infty} \theta(h) = 0.$$

(e) Como a função cresce em $(0, 4)$ e decresce em $(4, +\infty)$, o ponto $h = 4$ é o ponto de máximo global de θ.

4) Para uma bola arremessada verticalmente sem resistência do ar, temos que a energia mecânica

$$m\frac{v(t)^2}{2} + mgs(t) = E$$

se conserva, onde $s(t)$ e $v(t)$ são, respectivamente, a posição e a velocidade instantâneas, m é a massa do bloco e g é a gravidade. Supondo que $m = 1$, $g = 2$ e que $E = 8$, temos que $s(t)$ é solução da seguinte equação

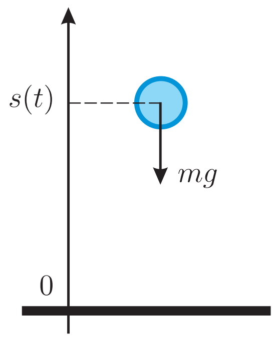
$$(*) \qquad \frac{s'(t)}{\sqrt{4 - s(t)}} = 2$$

Como ilustra os itens a seguir, a equação $(*)$ pode ser melhor entendida a partir do fato de que, se a derivada de uma função for identicamente nula em um intervalo, então a função é necessariamente constante.

(a) Calcule as derivadas das funções $-2\sqrt{4 - s(t)}$ e $2t$.

(b) Lembrando que se uma função tem derivada identicamente nula em um intervalo I, então ela é constante em I, use o item anterior e as informações dadas para obter uma relação entre as funções $-2\sqrt{4 - s(t)}$ e $2t$.

(c) Use o item anterior e a condição inicial $s(0) = 3$ para obter a expressão de $s(t)$.



(d) Determine a velocidade no instante $t = 1$.

Soluções:

(a) Temos que $(2t)' = 2$ e, usando a regra da cadeia e que $(\sqrt{(x)})' = 1/2\sqrt{x}$, obtemos que

$$(-2\sqrt{4 - s(t)})' = -2(\sqrt{(x)})'_{x=4-s(t)}(4 - s(t))' = \frac{s'(t)}{\sqrt{4 - s(t)}}.$$

(b) Pelos cálculos do item anterior e como $s(t)$ é solução da equação $(*)$, temos que $(-2\sqrt{4 - s(t)})' = 2 = (2t)'$, para todo tempo t. Portanto as funções $-2\sqrt{4 - s(t)}$ e $2t$ diferem por uma constante, ou seja, tem-se que $-2\sqrt{4 - s(t)} = 2t + K$, onde $K \in \mathbb{R}$.

(c) Usando as informações do item anterior, temos que $K = -2\sqrt{4 - s(t)} - 2t$. Como $s(0) = 3$, obtém-se que $K = -2\sqrt{4 - s(0)} = -2$. Portanto $-2\sqrt{4 - s(t)} = 2t - 2$, o que mostra que $s(t) = 3 + 2t - t^2$.

(d) Como $s(t) = 3 + 2t - t^2$, segue que $v(t) = (3 + 2t - t^2)' = 2 - 2t$. Logo $v(1) = 0$.

5) Denote por $v(t)$ a velocidade de um corpo de massa $m = 0,1$ kg que foi lançado verticalmente com velocidade inicial $v(0) = 63$ m/s e sujeito a uma força de resistência do ar $FR = -v(t)$. Nesse caso, usando a aproximação $g = 10$ m/s^2 da aceleração da gravidade, pode-se mostrar que $v(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{1+v(t)} & = & -10, \qquad t > 0, \\ v(0) & = & 63 \end{cases}$$

Para encontrar a solução $v(t)$, resolva os itens seguintes.

(a) Calcule as derivadas das funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

(b) Lembrando que se uma função tem derivada identicamente nula em um intervalo I, então ela é constante em I, use o item anterior e as informações dadas para obter uma relação entre as funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

(c) Use o item anterior e a condição inicial $v(0) = 63$ para obter a expressão de $v(t)$.

(d) Determine o instante em que o corpo alcança a altura máxima.

Soluções:

(a) Note que

$$\frac{d}{dt}(-10t) = -10 \text{ e } \frac{d}{dt}(\ln(1 + v(t)) = \frac{v'(t)}{1+v(t)} = 10, \tag{2}$$

por hipótese.

(b) Segue de (2) que

$$\frac{d}{dt}(\ln(1 + v(t)) + 10t) = \frac{v'(t)}{1+v(t)} + 10 = 0. \tag{3}$$

Seja então

$$f(t) = \ln(1 + v(t)) + 10t \tag{4}$$

de modo que $f'(t) = 0$ em $(0, +\infty)$. Pelo Teorema do Valor Médio $f(t)$ é constante em $(0, +\infty)$, e assim

$$\ln(1 + v(t)) = -10t + K_1, \tag{5}$$

para alguma constante $K_1 \in \mathbb{R}$.

(c) Tomando-se a exponencial nos dois lados de (5), obtemos

$$v(t) = Ke^{-10t} - 1,$$

onde $K = e^{K_1}$ é também uma constante. A igualdade acima vale para todo $t > 0$. Assim, por continuidade, vale também para $t = 0$. Fazendo então $t = 0$ concluímos que

$$63 = v(0) = Ke^{-10\times 0} - 1,$$

o que implica que $K = 64$. Logo

$$v(t) = 64e^{-10t} - 1.$$

(d) A altura máxima é atingida no instante t_0 em que $v(t_0) = 0$. Assim $e^{-10t_0} = 1/64 = 2^{-6}$, o que nos fornece $-10t_0 = -6\ln 2$, ou ainda, $t_0 = 3\ln 2/5 \simeq 0,414$, em que usamos a aproximação $\ln 2 \simeq 0,69$.