Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 10

Temas abordados: Esboço de gráficos; Assíntotas
Seções do livro: 3.3; 1.5

1) Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5-4x}{2x-3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{8x^3-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{1-x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$

2) Determine as assíntotas verticais e horizontais de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+3x}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

3) Para cada uma das funções abaixo determine: pontos críticos, máximos e mínimos locais, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, intervalos onde f é côncava para cima e para baixo. Determine ainda as (possíveis) assíntotas e, finalmente, faça um esboço do gráfico da função.

(a) $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(c) $f(x) = e^{-x^2/2}$ (d) $f(x) = \ln(1+x^2)$

4) Repita as mesmas tarefas do último exercício para a função f cuja expressão e derivadas são como abaixo.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}, \qquad f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

5) De acordo com um certo modelo, a população mundial (em bilhões de habitantes) t anos após 1960 seria aproximadamente

$$P(t) = \frac{40}{1+12e^{-0{,}08t}}.$$

(a) Segundo este modelo, com que rapidez estava aumentando a população no ano 2000?

(b) Em que ano a população estava aumentando mais rapidamente?

(c) O que acontece com $P(t)$ a longo prazo?

(d) Você acha que esse modelo de população é razoável? Por que?

6) Uma empresa estima que se x mil empregados forem contratados, o lucro $P(x)$ em milhões de reais é dado pela função

$$L(x) = 10 + \ln\left(\frac{x}{25}\right) - 12x^2, \quad x > 0.$$

Determine o número de empregados que faz com que o lucro seja o maior possível.

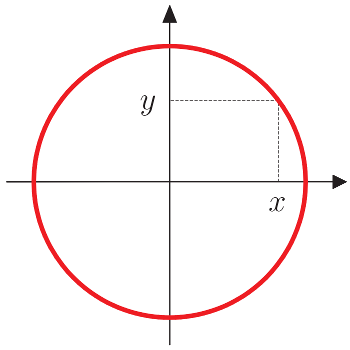
7) Conforme ilustra a figura abaixo, as áreas dos retângulos inscritos na circunferência $x^2+y^2 = 16$ podem ser calculadas por meio da função $A(x) = 4\,x\sqrt{16-x^2}$, com $x \in [0, 4]$.

(a) Calcule os pontos críticos da função $A(x)$ no intervalo $(0, 4)$.

(b) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento da função $A(x)$.

(c) Determine os intervalos em que a concavidade do gráfico de $A(x)$ é voltada para baixo e os intervalos em que concavidade é voltada para cima.

(d) Esboce o gráfico de $A(x)$.



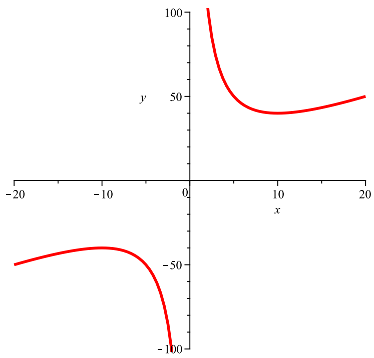
RESPOSTAS

1) (a) -2
   (b) 0
   (c) $-\infty$
   (d) 0

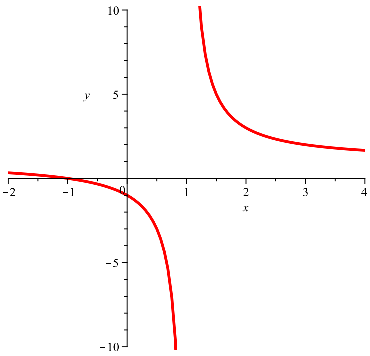
2) (a) assíntotas verticais: $x = -3$
   assíntotas horizontais: $y = 1$
   (b) assíntotas verticais: não existem
   assíntotas horizontais: $y = -2$ e $y = 2$
   (c) assíntotas verticais: não existem
   assíntotas horizontais: $y = -1$ e $y = 1$
   (d) assíntotas verticais: $x = -2$ e $x = 2$
   assíntotas horizontais: $y = -1$ e $y = 1$

3) (a) pontos críticos: $x = -10$ (máximo local); $x = 10$ (mínimo local)
   crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -10)$; $(10, +\infty)$
   decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-10, 0)$; $(0, 10)$
   concavidade voltada para cima em: $(0, +\infty)$
   concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, 0)$
   pontos de inflexão: não existem
   assíntotas verticais: $x = 0$
   assíntotas horizontais: não existem
   (b) pontos críticos: não existem
   decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$
   concavidade voltada para cima em: $(1, +\infty)$
   concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, 1)$
   pontos de inflexão: não existem
   assíntotas verticais: $x = 1$
   assíntotas horizontais: $y = 1$
   (c) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local)
   crescente em: $(-\infty, 0)$
   decrescente em: $(0, +\infty)$
   concavidade voltada para cima em: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   concavidade voltada para baixo em: $(-1, 1)$
   ponto de inflexão: $x = -1$ e $x = 1$
   assíntotas verticais: não existem
   assíntotas horizontais: $y = 0$
   (d) pontos críticos: $x = 0$ (mínimo local)
   crescente em: $(0, +\infty)$
   decrescente em: $(-\infty, 0)$
   concavidade voltada para cima em: $(-1, 1)$
   concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   ponto de inflexão: $x = -1$ e $x = 1$
   assíntotas verticais: não existem
   assíntotas horizontais: não existem

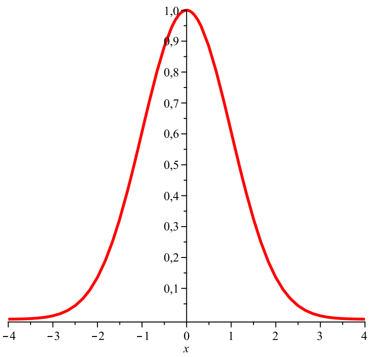
Apresentamos abaixo o gráfico de cada uma das funções do exercício.



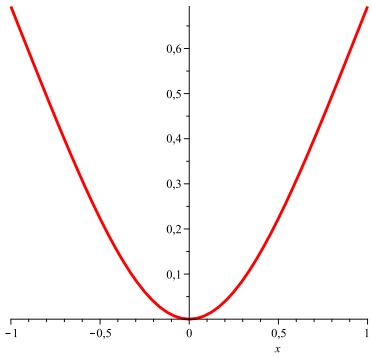
(a) $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$



(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$



(c) $f(x) = e^{-x^2/2}$



(d) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

Figura 1: Gráficos do exercício 3

4) pontos críticos: $x = -1$ (mínimo local); $\quad x = 1$ (máximo local)
crescente em: $(-1, 1)$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$
concavidade voltada para cima em: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
pontos de inflexão: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$
assíntotas verticais: não existem
assíntotas horizontais: $y = 1$

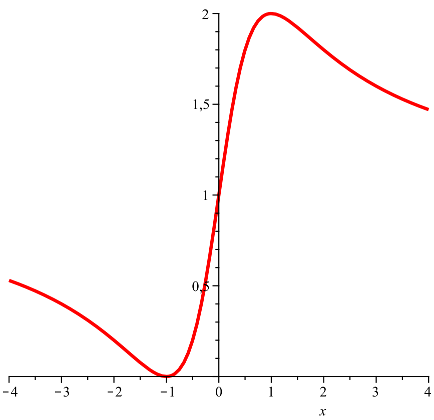


Figura 2: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$

5) (a) a uma taxa de aproximadamente 0,7 bilhões de pessoas ao ano

(b) no ano de 1991

(c) a população tende a se estabilizar em 40 bilhões de pessoas

6) Aproximadamente 200 empregados, pois o ponto de máximo de L ocorre em $x = \sqrt{6}/12$.

7) A derivada de A é dada por

$$A'(x) = 4\sqrt{16 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{64 - 8x^2}{\sqrt{16 - x^2}}, \qquad 0 < x < 4,$$

e se anula somente no ponto $x = \sqrt{8}$. Como $\sqrt{16 - x^2} > 0$ em $(0, 4)$, fazendo o estudo do sinal de $64 - 8x^2$, concluímos que $A(x)$ é crescente em $(0, \sqrt{8})$ e decrescente em $(\sqrt{8}, 4)$. Utilizando a regra do quociente e as devidas simplificações obtemos

$$A''(x) = \frac{-16x}{\sqrt{16 - x^2}} + \frac{x(64 - 8x^2)}{(16 - x^2)^{3/2}} = \frac{8x(-24 + x^2)}{(16 - x^2)^{3/2}}, \qquad 0 < x < 4.$$

Agora observe que como $x/(16 - x^2)^{3/2} > 0$ em $0 < x < 4$, estudando-se o sinal do polinômio $(64 - 8x^2)$, concluímos que o gráfico tem concavidade voltada para baixo em $(0, 4)$. Assim, o gráfico de $A(x)$ é como abaixo.