Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 04 – Soluções

Temas abordados: Limites envolvendo o infinito; Assíntotas

Seções do livro: 2.4

1) Duas partículas carregadas com cargas de módulos q_1 e q_2 interagem com uma força eletrostática. Segundo a Lei de Coulomb, o módulo dessa força, em Newtons, é modelado pela função $F : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ dada por $F(x) = \dfrac{Kq_1q_2}{x^2}$, onde $K > 0$ é uma constante que depende do meio e x é a distância, em metros, entre as partículas. Suponha que, em unidades físicas apropriadas, $Kq_1q_2 = 10$ e resolva os itens a seguir.

(a) Encontre $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que se $0 < x < \delta$, então a força entre as partículas tem módulo maior que 10^7N (dez milhões de Newtons).

(b) Encontre $M > 0$ suficientemente grande tal que se $x > M$, então a força entre as partículas tem módulo menor que 10^{-6}N (um milhonésimo de Newton).

(c) Determine $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ e $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

(d) Faça um esboço do gráfico de F .

Soluções:

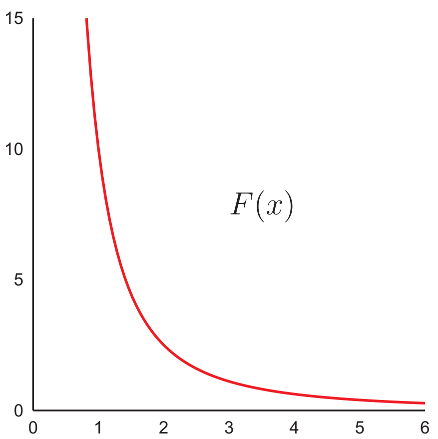
(a) Note que

$$F(x) = \frac{10}{x^2} > 10^7 \quad \Leftrightarrow \quad 10^7x^2 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad x < 10^{-3}.$$

(b) Procedendo como no item (b) temos

$$F(x) = \frac{10}{x^2} < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-6}x^2 > 10 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 10^7 \quad \Leftrightarrow \quad x > 10^{7/2} = 10^3\sqrt{10}.$$

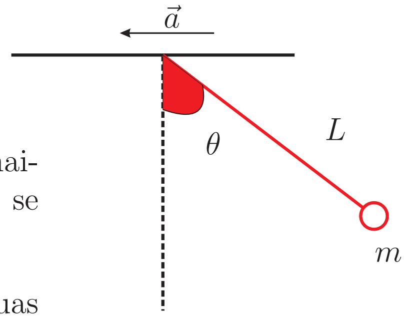
(c) Quando $x \to 0^+$, o numerador de $F(x)$ vale 10 e o denominador se aproxima, por valores positivos, de zero. Desse modo, concluímos que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$. Por outro lado, quando $x \to +\infty$, o numerador vale 10 enquanto o denominador tende para infinito, o que mostra que $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 0$. Note que não pode existir o limite de $F(x)$ quando x se aproxima de zero, visto que a função F não está definida em uma vizinha à esquerda do zero. Também não existe o limite lateral $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ visto que um limite (mesmo lateral) existe somente quando a função se aproxima de um número real.



2) A figura abaixo ilustra um corpo de massa $m > 0$ pendurado no teto de um trem bala por um fio inextensível de comprimento $L > 0$. Quando o trem possui aceleração a o pêndulo se encontra inclinado, fazendo um ângulo θ com a vertical. Pode-se provar que, se g é a aceleração da gravidade local, então $a(\theta) = g\,\mathrm{tg}(\theta)$. Como $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, temos que $\theta(a) = \mathrm{arctg}(a/g)$, onde a função $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ é a função inversa da tangente. Supondo que $g = 10$ m/s^2, resolva os itens seguintes.

(a) Sabendo que $\mathrm{tg}(\theta) = \mathrm{sen}\,(\theta)/\cos(\theta)$, encontre

$$\lim_{\theta\to-\pi/2^+} a(\theta) \text{ e } \lim_{\theta\to\pi/2^-} a(\theta).$$



(b) Se a aceleração do trem tomar valores cada vez maiores, o ângulo $\theta(a)$ se aproxima de que valor? E se $a \to -\infty$, então $\theta(a)$ tende para algum número?

(c) Faça um esboço dos gráficos de $a(\theta)$ e $\theta(a)$, com suas assíntotas.

Soluções:

(a) Basta observar que

$$\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}^+} 10\,\mathrm{tg}(\theta) = \lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{10\,\mathrm{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = -\infty,$$

visto que o numerador se aproxima de $-10 < 0$ e o denominador se aproxima de zero por valores positivos, pois a função cosseno é positiva no 4^o quadrante.

Analogamente, concluímos que

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} 10\,\mathrm{tg}(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{10\,\mathrm{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \infty,$$

(b) Observe que $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ é a inversa da função $a : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$. Logo, como

$$\lim_{a\to\pi/2^-} a(\theta) = +\infty$$

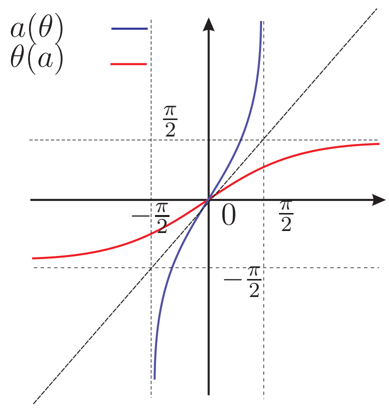
segue da definição de limites no infinito e da definição de função inversa que

$$\lim_{a\to+\infty} \theta(a) = \pi/2.$$

Por razões análogas, concluímos que

$$\lim_{a\to-\infty} \theta(a) = -\pi/2,$$

de forma que as retas $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de $a(\theta)$.



3) Considerando a função $q(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2-x}$, definida para $x \neq 2$, resolva os itens abaixo.

(a) Calcule os limites no infinito da função q e, em seguida, determine a(s) assíntota(s) horizontal(is) do gráfico da função q, se esta(s) existir(em).

(b) Calcule os limites laterais de q no ponto $x = 2$ e, em seguida, determine a(s) assíntota(s) vertical(is) do gráfico da função q, se esta(s) existir(em).

(c) Faça um esboço do gráfico de q.

<u>**Soluções**</u>:

(a) Para os cálculos dos limites no infinito note que

$$q(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)} = \frac{|x|}{x}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{x}-1}.$$

Assim, por exemplo,

$$\lim_{x\to-\infty} q(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(\frac{2}{x}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(\frac{2}{x}-1\right)} = -\frac{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)} = 1.$$

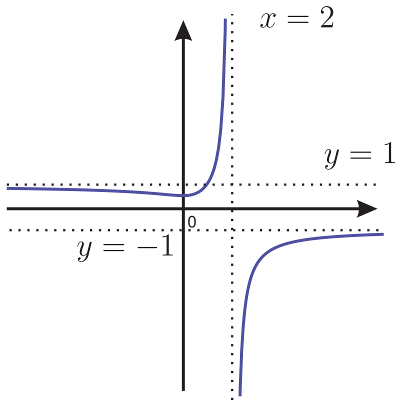
Na segunda igualdade acima usamos o seguinte: como $x \to -\infty$, interessa somente o que acontece com a função para valores de x que são grandes em módulo e negativos. Em particular, podemos supor que $x < 0$, de modo que $|x| = -x$. Um raciocínio análogo nos permite concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} q(x) = -1.$$

Logo, as restas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais.

(b) A reta $x = 2$ é uma candidata natural à assíntota vertical, visto que o denominador da expressão que define a função q se anula quando $x = 2$.

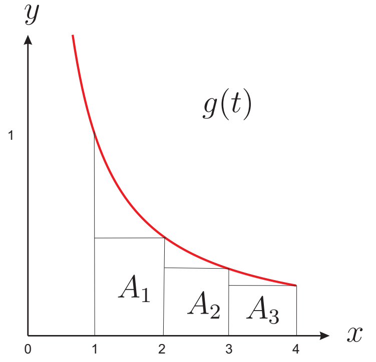
Vamos estudar o limite lateral quando $x \to 2^-$. Temos que o numerador se aproxima de $\sqrt{5}$ e o denominador se aproxima de zero, sempre assumindo valores positivos, visto que estamos nos aproximando por valores menores que 2.



Uma vez que $\sqrt{5} > 0$ concluímos que $\lim_{x\to2^-} q(x) = +\infty$. Um raciocínio análogo mostra que $\lim_{x\to2^+} q(x) = +\infty$. Logo, a reta $x = 2$ é de fato uma assíntota vertical

4) Para cada $a > 1$, o número positivo $\ln a$ pode ser caracterizado como a área da região limitada pelo eixo Ox, pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$ e pelo gráfico da função $g(t) = 1/t$. Por exemplo, o número $\ln 4$ é a área da região compreendida entre o gráfico da função g e as retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = 4$. Na figura foram destacados ainda três retângulos de base unitária cujas alturas são $g(2)$, $g(3)$ e $g(4)$.

(a) Determine as áreas A_1, A_2 e A_3 dos retângulos indicados, e faça sua soma.



(b) Usando o resultado anterior, justifique a desigualdade $\ln 4 > 1$.

(c) Dada uma constante $M > 0$ arbitrariamente grande, mostre que se $x > 4^M$, então $\ln x > M$. Conclua daí que $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

(d) Sabendo que para todo $x > 0$ tem-se $e^x > \ln x$, investigue a existência de $\lim_{x\to\infty} e^x$.

(e) Lembre que $e^{-x} = 1/e^x$ e calcule $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$. Esboce o gráfico das funções e^x, e^{-x} e $\ln x$.

Soluções:

(a) Claramente, $A_1 = (2-1)g(2) = \dfrac{1}{2}$, $A_2 = (3-2)g(3) = \dfrac{1}{3}$ e $A_3 = (4-3)g(4) = \dfrac{1}{4}$. Dessa forma, $A_1 + A_2 + A_3 = \dfrac{13}{12}$.

(b) Observe que a área indicada na figura é maior do que a soma das áreas dos retângulos A_1, A_2 e A_3. Dessa forma, como a área indicada vale $\ln 4$ temos que $\ln 4 > A_1 + A_2 + A_3 = \dfrac{13}{12} > 1$.

(c) Como o logaritmo é uma função crescente, aplicando o ln na desigualdade $x > 4^M$ obtemos $\ln x > M \ln 4 > M$, donde se conclui que

$$\ln x > M, \text{ para cada } x > 4^M.$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

(d) Primeiro observe que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty. \tag{1}$$

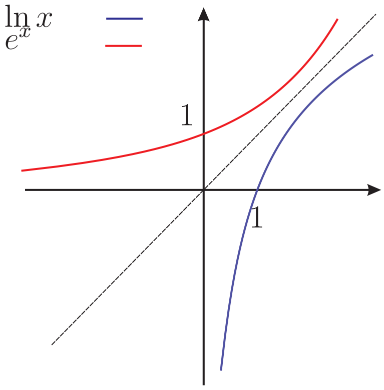
De fato, dado $M > 0$ note que se $x > \ln M$, então aplicando-se a exponencial nos dois lados da desigualdade

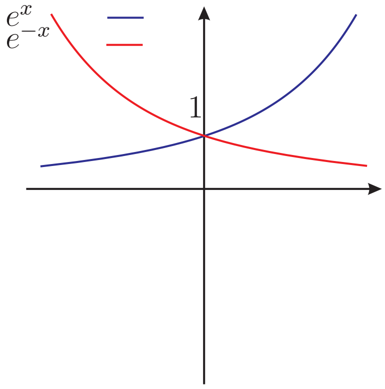
$$e^x > e^{\ln M} = M,$$

e assim (1) segue (note que usamos o fato da função exponencial ser crescente). Dessa forma, usando as propriedades de limites infinitos

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

(e) Os gráficos são como abaixo.





5) Suponha que, em um ambiente com capacidade de sustentar um número limitado de indivíduos, a população após t anos, $P(t)$, seja modelada pela função $P(t) = \dfrac{1100}{1+9\,E(t)}$, em que $E(t) = 3^{-t}$ é uma função exponencial, o tempo $t \geq 0$ é medido em anos e $t = 0$ corresponde à população inicial $P(0)$. O gráfico da função $E(t)$, ilustrado na figura abaixo, pode ser útil no estudo do comportamento de $P(t)$. A partir dessas informações, julgue a veracidade dos itens a seguir, justificando suas respostas.

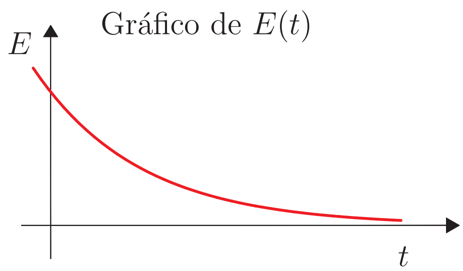
(a) A população inicial é superior a 100 indivíduos.

(b) A função $f(t) = 1 + 9\,E(t)$ é tal que $f(t_1) < f(t_2)$ sempre que $t_1 < t_2$.

(c) $P(t)$ é uma função decrescente da variável t.

(d) Após três anos, a população será superior a 800.

(e) Existem valores de $t > 0$ para os quais a população apresenta um número superior a 1100 indivíduos.



<u>**Soluções**</u>: Observe que a função P pode ser escrita como

$$P(t) = \frac{1100}{1+\frac{9}{3^t}} = 1100\left(\frac{3^t}{3^t+9}\right).$$

A expressão acima nos permite calcular a população $P(t)$ nos instantes $t = 0$ (inicial) e $t = 3$, entre outros.

(a) Correto, pois $P(0) = 110$.

(b) Errado. Veja que a função exponencial 3^{at} é decrescente se, e somente se, $a < 0$.

(c) Errado. Veja que $P(0) = 110 < P(1) = 275$.

(d) Correto, pois P(3)=825.

(e) Errado, pois $\frac{3^t}{3^t+9} < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.