Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 14

Temas abordados: Integração por partes; Volumes

Seções do livro: 8.1; 6.1; 6.2

1) Use integração por partes para calcular as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x^2\ln(2x)\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int xe^{3x}\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \ln(5x)\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int x^3e^{-x}\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int 4x\sec^2(2x)\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int \arccos(x)\mathrm{d}x$

2) Calcule as integrais abaixo usando, antes da integração por partes, uma substituição apropriada.

(a) $\displaystyle\int x^7\cos(x^4)\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\mathrm{d}x$

3) Para uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do seu gráfico em torno do eixo $\mathcal{O}x$ é dado por $V=\int_a^b \pi f(x)^2\mathrm{d}x$. Calcule esse volume no caso das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x)=r$, para $x\in[0,h]$, onde h, $r>0$

(b) $f(x)=\dfrac{r}{h}x$, para $x\in[0,h]$, onde h, $r>0$.

(c) $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, para $x\in[-r,r]$, onde $r>0$.

(d) $f(x)=x\sqrt{\operatorname{sen}x}$, para $x\in[0,\pi]$

(e) $f(x)=\sqrt{\arctan x}$, para $x\in[0,1]$

4) Faça o gráfico das funções dos três primeiros itens acima e responda qual o sólido gerado pela rotação indicada. Em seguida, confronte a resposta que você obteve acima com a fórmula para o volume desse sólido, que você provavelmente já conhecia.

5) Seja $a\geq 0$, $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ uma função contínua e $\mathcal{R}$ a região compreendida entre o gráfico de f e o eixo $\mathcal{O}x$. Quando giramos a região $\mathcal{R}$ em torno do eixo $\mathcal{O}y$, obtemos um sólido de revolução cujo volume é dado por $V=\int_a^b 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$. Calcule esse volume no caso das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, para $x\in[0,1]$

(b) $f(x)=\ln(x)$, para $x\in[1,e]$

(c) $f(x)=\arctan x$, para $x\in[0,1]$

6) Após identificar a técnica apropriada, determine o valor das integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \arctan(x)\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int x\ln(x)\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(2x)\mathrm{d}x$

RESPOSTAS

1) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

   (a) $2x\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) + K$

   (b) $\frac{1}{3}x^3\ln(2x) - \frac{1}{9}x^3 + K$

   (c) $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + K$

   (d) $x\ln(5x) - x + K$

   (e) $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + K$

   (f) $2x\tan(2x) + \ln(\cos(2x)) + K$

   (g) $-\frac{1}{5}e^{2x}\cos(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\,\text{sen}(x) + K$

   (h) $x^2\,\text{sen}(x) - 2\,\text{sen}(x) + 2x\cos(x) + K$

   (i) $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + K$

2) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

   (a) $\frac{1}{4}\cos(x^4) + \frac{1}{4}x^4\,\text{sen}(x^4) + K$

   (b) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + K$

   (c) $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + K$

3) (a) $\pi r^2 h$

   (b) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

   (c) $\frac{4}{3}\pi r^3$

   (d) $\pi^3 - 4\pi$

   (e) $\frac{\pi^2}{4} - \dfrac{1}{2}\pi\ln(2)$

4) Os sólidos são, respectivamente: cilindro circular reto de altura h e raio da base r; cone circular reto de altura h e raio da base r; esfera de raio r.

5) (a) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi - \dfrac{2}{3}\pi$

   (b) $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$

   (c) $\frac{1}{2}\pi^2 - \pi$

6) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

   (a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + K$

   (b) $x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + K$

   (c) $\frac{x}{2}\left(\text{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\right) + K$

   (d) $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + K$

   (e) $-\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + K$

   (f) $\frac{1}{2}\arctan(x^2) + K$

   (g) $-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + K$

   (h) $\frac{1}{4}\text{sen}(2x) - \frac{1}{2}x\cos(2x) + K$