Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

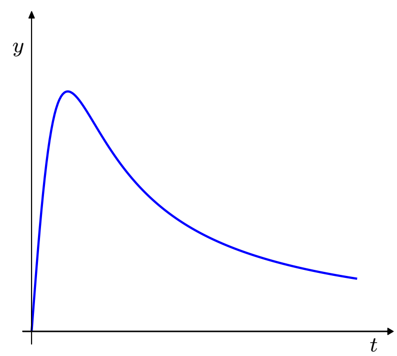
Concentração de medicamento no sangue

Suponha que a concentração de medicamento no sangue de um paciente seja dada pela função

$$C(t) = \frac{3t}{2t^2+8}, \qquad t \geq 0,$$

após $t \geq 0$ horas de aplicação da medicação. Estamos interessados em saber o que acontece com esta concentração para valores grandes de t. Como não estamos supondo que ocorre nova aplicação, é natural imaginar que, com o passar do tempo, a concentração deve diminuir, se aproximando cada vez mais de zero. Isto pode ser melhor compreendido a partir da igualdade abaixo

$$C(t) = \frac{3t}{2t^2+8} = \frac{t^2 \cdot \frac{3}{t}}{t^2\left(2+\frac{8}{t^2}\right)} = \frac{\frac{3}{t}}{2+\frac{8}{t^2}}.$$



Note que, quando t vai ficando muito grande, o termo $3/t$ vai se aproximando de zero, o mesmo ocorrendo com $8/t^2$. Deste modo, a fração se aproxima de $0/(2+0) = 0$. Escrevemos então

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0.$$

De uma maneira geral, suponha que uma função f está definida em um intervalo do tipo $(b, +\infty)$ e considere $L \in \mathbb{R}$. Escrevemos

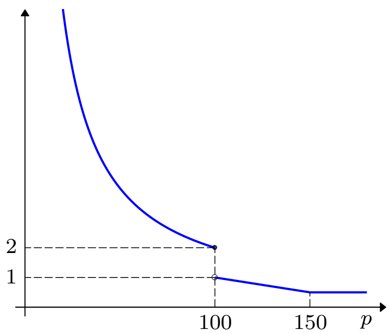
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

para representar o fato de que, à medida que x se torna arbitrariamente grande, os valores $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximos de L. A expressão acima deve ser lida da seguinte maneira: *o limite de $f(x)$, quando x tende para infinito, é igual a L.* De maneira análoga, podemos definir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Quando ocorre qualquer uma das situações acima dizemos que a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** da função f.

Exemplo 1. Para a função



$$V(p) = \begin{cases} 200/p, & \text{se } 0 < p \leq 100, \\ -0,01p + 2, & \text{se } 100 < p \leq 150, \\ 1/2, & \text{se } 150 < p, \end{cases}$$

temos que

$$\lim_{p \to +\infty} V(p) = \lim_{p \to +\infty} (1/2) = 1/2.$$

Logo, a reta $y = 1/2$ é uma assíntota horizontal de V. Isto significa que o gráfico de V se aproxima desta reta quando p cresce. Neste caso, de fato, a assíntota se confunde com o gráfico para $p > 150$.

Observe que, no cálculo do limite, usamos somente a expressão de $V(p)$ que vale para $p > 150$. Isto porque estamos interessados em saber o que ocorre com $V(p)$ quando p é grande. Note ainda que, para esta função, não faz sentido tentar calcular $\lim_{p \to -\infty} V(p)$, pois o domínio da função é $(0, +\infty)$. $\square$

Exemplo 2. Sejam f e g as funções cujos gráficos estão indicados pelas Figuras 1 e 2 abaixo, respectivamente.

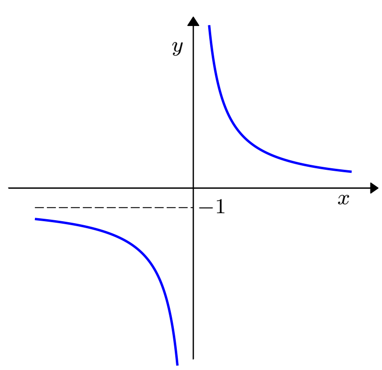


Figura 1

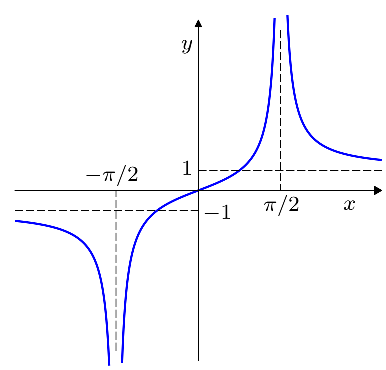


Figura 2

Observe que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, de modo que as retas $y = -1$ e $y = 0$ são assíntotas horizontais da função f. Para a função g, temos as assíntotas horizontais $y = -1$ e $y = 1$, conforme pode-se notar pelo gráfico. Novamente, perceba que o gráfico se aproxima de suas assíntotas. $\square$

Vale a pena olhar para os gráficos acima e identificar também as assíntotas verticais das funções f e g. Para a primeira, temos $x = 0$, que é exatamente o eixo $\mathcal{O}y$, enquanto que a segunda possui duas assíntotas verticais $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$.

Evidentemente, uma função pode ter no máximo duas assíntotas horizontais, ao passo que pode ter muitas assíntotas verticais. Por exemplo, a função $\tan(x)$ possui assíntotas verticais em qualquer reta do tipo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, mas não possui nenhuma assíntota horizontal, por ser periódica e não constante.

O exemplo abaixo nos permite calcular uma classe bem variada de limites no infinito.

Exemplo 3. Vamos verificar que, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

De fato, a expressão acima nos diz que, quando $x > 0$ cresce muito, o número x^{-n} fica próximo de zero. Para verificar isso, suponha que queiramos que $|x^{-n}| < 10^{-5}$. Considerando $x > 0$, uma conta simples mostra que

$$|x^{-n}| = \frac{1}{x^n} < 10^{-5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^n > 10^5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \sqrt[n]{10^5}.$$

Não existe nada de especial no número 10^{-5}. Na verdade, dado qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $|x^{-n}| < \varepsilon$, desde que $|x| > \sqrt[n]{1/\varepsilon}$. Assim, podemos facilmente concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{x^n} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x^n},$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. O mesmo vale, quando $x \to +\infty$, se substituirmos n por um número racional $r > 0$. $\square$

Exemplo 4. Temos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3 - 3x + 1}{2x^3 + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3(4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^3(2 + \frac{1}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{(2 + \frac{1}{x})} = \frac{4 - 0 + 0}{2 + 0} = 2.$$

O que ocorre neste exemplo é que, quando $|x|$ é grande, o termo $4x^3$ do numerador fica muito maior (em módulo), do que os outros termos. Da mesma forma, no demoninador, o termo dominante é $2x^3$. Logo, quando $|x|$ cresce, a fração se comporta como $\frac{4x^3}{2x^3} = 2$. $\square$

Exemplo 5. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - 9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{3/2}})}{x^2(1 - \frac{9}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{3/2}})}{(1 - \frac{9}{x^2})} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0.$$

Como no exemplo anterior, podemos identificar aqui o termo dominante do numerador e denominador. Quando x é grande, a fração se comporta como $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0$, quando $x \to +\infty$. Por isso o limite é igual a zero. $\square$

A estratégia de observar o termo dominante nos permite calcular muitos limites no infinito. Contudo, é preciso ter o cuidado de verificar se a intuição está mesmo correta. O exemplo a seguir ilustra bem o que queremos dizer.

Exemplo 6. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x).$$

Veja que o termo que envolve o radical fica muito grande, o mesmo ocorrendo com o termo x que está sendo subtraído. Dizemos então que temos uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$.

Poderíamos pensar que, quando x é grande, o termo $\sqrt{x^2+x}$ se comporta como $\sqrt{x^2}=x$, de modo que o limite deve ser igual a zero. Porém, observe que

$$(\sqrt{x^2+x}-x)=(\sqrt{x^2+x}-x)\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}.$$

Como $x\to\infty$, podemos supor que $x>0$, de modo que $\sqrt{x^2}=|x|=x$. Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Outros tipos de indeterminações podem aparecer, não só no cálculo de limites no infinito, mas também de limites em um ponto. Esteja atento! $\square$

Em algumas situações, teremos de considerar limites infinitos no infinito. Como a exposição teórica é longa e não apresenta dificuldades extras, achamos que o exemplo abaixo ilustra bem o que isso significa.

Exemplo 7. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=+\infty,$$

pois o numerador fica grande (e positivo) e o denominador se aproxima de 1. De maneira análoga, temos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=-\infty.$$

Note que aqui, como x fica negativo, a fração também fica negativa (e grande em módulo). Por isso o limite é $-\infty$. Vale lembrar que, nos dois casos acima, o limite não existe. $\square$

Tarefa

Determine as assíntotas horizontais e verticais da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-4}.$$

Em seguida, use essas informações para fazer um esboço do gráfico da função.