



Cálculo 1

Derivada da função inversa

(solução da tarefa)

Começamos lembrando que a função cosseno, com o domínio restrito ao intervalo $[0, \pi]$, é decrescente, sendo portanto inversível. Sua inversa $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ é definida por

$$y(x) = \arccos(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y \in [0, \pi] \text{ e } \cos(y(x)) = x.$$

Uma vez que $(\cos(y))' = -\text{sen}(y) < 0$, para todo $y \in (0, \pi)$, podemos usar o Teorema 1 do texto para garantir que a função $\arccos(x)$ é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$. Note que este último intervalo é a imagem do intervalo $(0, \pi)$ pela função $\cos(y)$.

Para calcular a derivada $y'(x)$ vamos usar a equação abaixo

$$x = \cos(y(x)), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Derivando os dois lados da igualdade com relação a x , obtemos

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\cos(y(x)) = -\text{sen}(y(x))y'(x).$$

Na última igualdade acima, usamos a Regra da Cadeia. Isto é possível porque sabemos que tanto o cosseno quando a função $y(x)$ são deriváveis.

Da expressão acima segue que

$$y'(x) = \frac{-1}{\text{sen}(y(x))}.$$

Gostaríamos agora de escrever o lado direito somente como função de x . Para isso, lembre que $\text{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1$, de onde se conclui que

$$\text{sen}(y) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(y)}.$$

Como $y \in (0, \pi)$, o seno de y deve ser positivo. Assim, o sinal correto é o sinal positivo. Lembrando agora que $x = \cos(y)$, obtemos

$$y'(x) = \frac{-1}{\text{sen}(y(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$