Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Integração por frações parciais - Parte 2

(solução da tarefa)

Observe inicialmente que o denominador pode ser fatorado como $x(x^2+2x+2)$. Além disso, o polinômio quadrático x^2+2x+2 é irredutível, porque não possui raiz real. Deste modo, a decomposição em frações parciais é da forma

$$\frac{3x^2+7x+6}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)x}{x(x^2+2x+2)}.$$

Efetuando as contas e igualando os numeradores, somos levados ao sistema linear

$$A+B=3, \qquad 2A+C=7, \qquad 2A=6,$$

cuja solução única é $A=3$, $B=0$ e $C=1$. Deste modo,

$$\int \frac{3x^2+7x+6}{x(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = 3\ln|x| + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x.$$

Para resolver a última integral acima vamos observar que $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, de modo que

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

em que usamos a mudança de variáveis $u=(x+1)$ na última integral. Como $\frac{d}{du}\arctan(u) = 1/(1+u^2)$, concluímos que

$$\int \frac{3x^2+7x+6}{x(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x = 3\ln|x| + \arctan(x+1) + K.$$