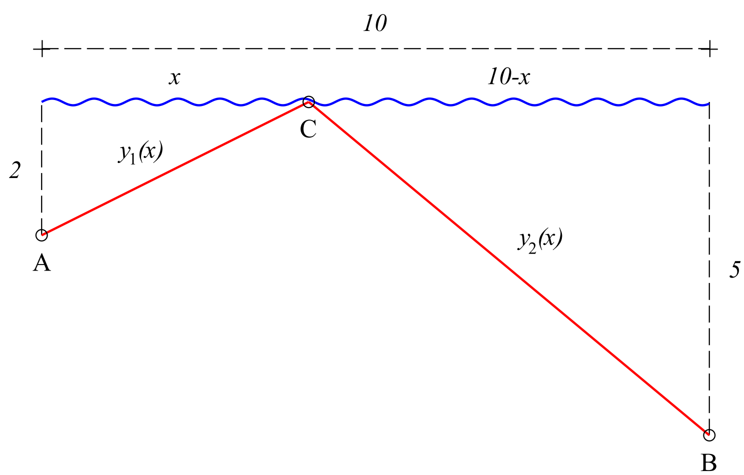
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Instalando um lustre

(solução da tarefa)

A parte inicial da nossa solução se baseia na figura abaixo:



Para o cálculo de $y_1(x)$ é suficiente aplicar o Teorema de Pitágoras para obter $y_1(x)^2 = 2^2 + x^2$, o que é equivalente a $y_1(x) = \sqrt{4+x^2}$, uma vez que o comprimento $y_1(x)$ não pode ser negativo. De maneira análoga concluímos que $y_2(x) = \sqrt{25 + (10-x)^2}$. Deste modo

$$L(x) = \sqrt{4+x^2} + \sqrt{25+(10-x)^2}, \quad x \in [0, 10].$$

Observe que a expressão que define $L(x)$ pode ser calculada para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. Contudo, analisando a figura, fica claro que se escolhermos um valor $x < 0$ gastaremos mais tubulação do que para $x = 0$, por exemplo. Analogamente, uma escolha de $x > 10$ certamente será mais custosa do que $x = 10$. Deste modo, podemos sempre supor que $x \in [0, 10]$.

Para $x \in (0, 10)$ podemos usar a regra da cadeia para calcular a derivada, como se segue

$$L'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x^2}}(4+x^2)' + \frac{1}{2\sqrt{25+(10-x)^2}}((10-x)^2)' = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}}.$$

É importante estar atento ao sinal de menos que aparece na expressão acima. Ele surge quando aplicamos a regra da cadeia na derivada do termo $(10-x)^2$, derivada que é igual a $2(10-x) \times (10-x)' = -2(10-x)$.

Note que a função possui derivada em todos os pontos do intervalo aberto $(0, 10)$. Assim, os candidatos a mínimo neste intervalo são somente os pontos em que a derivada se anula. A equação $L'(x) = 0$ é equivalente a

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{4+x^2} = \frac{(10-x)^2}{25+(10-x)^2}.$$

Efetuando as contas acima somos levados à equação de 2^o grau

$$21x^2 + 80x - 400 = 0,$$

cujas raízes são $x = 20/7$ e $x = -20/3$. Esta última deve ser descartada porque a derivada só está definida no intervalo $(0, 10)$.

Como L é contínua em $[0, 10]$ sabemos ela tem um ponto de mínimo. Além disso, este ponto de mínimo pertence ao conjunto $\{0, 20/7, 10\}$. Podemos agora utilizar uma calculadora para computar a função em cada um destes pontos e obter

$$L(0) = 2 + \sqrt{125} \sim 13,18, \qquad L(10) = \sqrt{104} + 5 \sim 15,19$$

e

$$L(20/7) = \frac{\sqrt{597}}{7} + \frac{\sqrt{3725}}{7} \sim 3,49 + 8,72 = 12,21.$$

Assim, a posição $x_0 = 20/7$ é aquela que minimiza o comprimento da tubulação, com comprimento mínimo correspondente igual a $L(20/7) \sim 12,21$.