Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 8

Temas abordados: Otimização
Seções do livro: 3.4; 3.5

1) Determine os pontos onde ocorrem os extremos absolutos de cada uma das funções abaixo, nos intervalos especificados.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in [-1, 3]$
(b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$, $x \in [-2, 2]$
(c) $f(x) = 1 - |x - 1|$, $x \in [0, 2]$
(d) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in [0, \pi]$
(e) $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $x \in [-2, 1]$
(f) $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-3, 3]$
(g) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-1, 2]$

2) A concentração de certa substância química no fluxo sanguíneo t horas após ele ter sido injetado é dada por

$$C(t) = \frac{3t}{54 + t^3}, \quad t > 0.$$

Após determinar os pontos críticos de C, decida em quais intervalos a função cresce e em quais decresce. Finalmente, determine o instante em que a concentração é máxima.

3) Nesse exercício vamos provar que, entre todos os retângulos com um dado perímetro P, o quadrado é o que possui maior área. Para fazer isso, vamos denotar por x e y dois lados não paralelos deste retângulo e resolver os itens a seguir.

(a) Determine a relação entre x, y e o perímetro P.

(b) Mostre que a função que fornece a área, em função de x, é dada por $A(x) = x\left(\frac{P}{2} - x\right)$, para $x \in (0, P/2)$.

(c) Determine os pontos críticos da função A. Em seguida, estude o sinal da derivada $A'(x)$.

(d) Use o item acima para concluir que a maior área é dada quando $x = y$.

4) Um retângulo deve ser inscrito em uma semicircunferência de raio 2 metros. Qual é a maior área que o retângulo pode ter e quais as suas dimensões? (veja o vídeo no Moodle)

5) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 6$ e a receita obtida na venda é dada por $R(x) = 60x - 12x^2$, determine o número de unidades que maximiza o lucro.

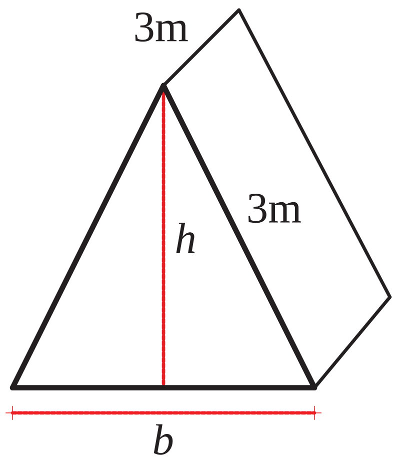
6) A taxa de operação (expressa em porcentagem) de fábricas, minas e empresas de serviços em uma certa região do país no t-ésimo dia do ano 2000 é dada pela função

$$f(t) = 80 + \frac{1200t}{t^2 + 40000}, \quad t \in [0, 250].$$

Em qual dos 250 primeiros dias do ano de 2000 a taxa de operação da capacidade de produção foi máxima?

7) Considere os triângulos retângulos situados no 1o quadrante, com cada um dos seus catetos apoiados nos eixos coordenados e cuja hipotenusa contém o ponto $(2, 3)$. Encontre o triângulo de área mínima.

8) Suponha que, na construção de uma barraca com vista frontal na forma de um triângulo isósceles de altura h, as laterais devem ser feitas a partir de uma lona com 6 m de comprimento e 3 m de largura, conforme ilustra a figura.



(a) Determine o comprimento b da base do triângulo em função da altura h.

(b) Use o item anterior para expressar o volume $V(h)$ da barraca em função de h.

(c) Determine h de forma que o volume $V(h)$ seja máximo, justificando a sua resposta.

9) Considere todas as latas cilíndricas de volume 1 litro. Denotado por r o raio da base r e h a altura h, vamos descobrir qual é a lata com menor área superficial.

(a) Explique por que a área superficial á dada por $2\pi rh + 2\pi r^2$.

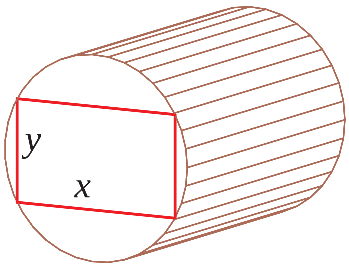
(b) Lembrando que o volume da lata é dado pela área da base vezes a altura, escreva a altura em função do raio.

(c) Conclua dos dois itens acima que a área lateral é dada, em função do raio, por $A(r) = 2/r + 2\pi r^2$, para $r > 0$.

(d) Encontre os pontos críticos de A, determine os intervalos de crescimento e decrescimento. Em seguida, determine para qual raio temos ao menor valor de $A(r)$.

10) Suponha que uma viga retangular, de largura x e altura y, deva ser cortada de um cilindro de seção circular de raio a, como ilustra a figura abaixo. A resistência R dessa viga é diretamente proporcional ao produto de sua largura x pelo quadrado de sua altura y. Indique por K a constante de proporcionalidade e observe que a altura $y = y(x)$ pode ser obtida a partir da largura x, e portanto a resistência $R = R(x)$ pode ser expressa apenas em função da largura da viga x, onde x varia de 0 até o diâmetro $2a$ do cilindro circular.

(a) Obtenha a expressão de $y = y(x)$ em termos de x.



(b) Obtenha a expressão da resistência $R = R(x)$ como função de x.

(c) Calcule os pontos críticos de $R(x)$ no domínio $(0, 2a)$.

(d) Calcule o valor máximo da resistência que pode ser obtido entre as vigas cortadas do cilindro.

RESPOSTAS

1) (a) ponto(s) de máximo: $x = 0$ e $x = 3$
   ponto(s) de mínimo: $x = -1$ e $x = 2$

   (b) ponto(s) de máximo: $x = 2$
   ponto(s) de mínimo: $x = -2$

   (c) ponto(s) de máximo: $x = 1$
   ponto(s) de mínimo: $x = 0$ e $x = 2$

   (d) ponto(s) de máximo: $x = 0$ e $x = \pi$
   ponto(s) de mínimo: $x = \pi/2$

   (e) ponto(s) de máximo: $x = -2$
   ponto(s) de mínimo: $x = 0$

   (f) ponto(s) de máximo: $x = 0$
   ponto(s) de mínimo: $x = -3$ e $x = 3$

   (g) ponto(s) de máximo: $x = 0$
   ponto(s) de mínimo: $x = 2$

2) O único ponto crítico é $t = 3$. A função cresce no intervalo $(0, 3)$ e decresce no intervalo $(3, +\infty)$. A concentração será máxima após 3 horas a injeção do medicamento.

3) A área é dada por xy. Como $P = 2x+2y$, temos que $y = (P/2)-x$. O único ponto crítico de A é $X = P/4$. A função A cresce no intervalo $(0, \frac{P}{4})$ e descrescente no intervalo $(\frac{P}{4}, \frac{P}{2})$. Logo, o ponto $x = P/4$ é o ponto de máximo. Para esse valor de x temos $y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$. Assim $x = y = P/4$ e temos um quadrado.

4) A maior área é de 4 metros e é dada por um retângulo de lados $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ metros.

5) 1000 unidades.

6) No ducentésimo dia.

7) o triângulo cujos catetos medem 4 e 6.

8) (a) $b = 2\sqrt{9 - h^2}$

   (b) $V(h) = 3h\sqrt{9 - h^2}$

   (c) $h = 3/\sqrt{2}$

9) (a) A tampa e o fundo têm área πr^2 cada um. Para a área lateral basta cortar a lata longitudinalmente para obter um retângulo de medidas h por $2\pi r$. Assim, a área lateral é dada por $2\pi rh$. Deste modo, a área supercial é a soma de todas estas parcelas, isto é, $2\pi rh + 2\pi r^2$.

   (b) Como $\pi r^2 h = 1$, temos que $h = 1/(\pi r^2)$

   (c) Basta subsituir o valor de h na expressão do primeiro item.

   (d) O único ponto crítico é $r_0 = \sqrt[3]{1/(2\pi)}$. A função é decrescente no intervalo $(0, r_0)$ e crescente no intervalo $(r_0, +\infty)$. Deste modo, a menor área ocorre quando $r = r_0$.

10) (a) Como o centro do círculo de raio a coincide com o centro do retângulo inscrito de lados x e y, a diagonal deste retângulo tem comprimento igual a $2a$. Pelo teorema de Pitágoras, segue que $(2a)^2 = x^2 + y^2$, e portanto $y = y(x) = \sqrt{4a^2 - x^2}$.

(b) A resistência é dada por $R = Kxy^2$, isto é,

$$R = R(x) = Kx(4a^2 - x^2) = K(4a^2x - x^3).$$

(c) Como a função R é derivável em $(0, 2a)$, os pontos críticos nesse intervalo são as soluções da equação $R'(x) = K(4a^2 - 3x^2) = 0$. No domínio $(0, 2a)$, a única solução dessa equação é

$$x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

(d) Aplicamos o método da otimização para a função $R(x)$, onde $x \in [0, 2a]$. O valor de R na fronteira de $\mathrm{dom}(R)$ é dado por

$$R(0) = R(2a) = 0.$$

Nos itens anteriores vimos que R possui apenas o ponto crítico $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. O valor de R nesse ponto é dado por

$$R\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right) = K\left(4a^2\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = K\frac{16a^3}{3\sqrt{3}} = K\frac{16a^3\sqrt{3}}{9} > 0.$$

Comparando os valores de R na fronteira e nos pontos críticos, concluímos que o valor acima é o valor máximo de R.