Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Integração por partes

Vimos nos textos anteriores que a técnica de mudança de variáveis é muito útil no cálculo de algumas primitivas. Porém, existem casos em que ela não é suficiente. Por exemplo, suponha que queremos resolver a integral

$$\int xe^x \mathrm{d}x.$$

Uma análise inicial mostra que esta integral não é de resolução imediata. De fato, se estivéssemos integrando somente o termo x, teríamos a primitiva $x^2/2$, enquanto que se o integrando fosse somente e^x, poderíamos tomar a primitiva e^x. Contudo, neste caso, temos o produto destas duas funções.

Uma tentativa inicial seria usar a mudança $u = e^x$, que nos fornece $\mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x$ e $x = \ln(u)$. Assim,

$$\int xe^x \mathrm{d}x = \int x du = \int \ln(u) \mathrm{d}u.$$

Embora a igualdade acima esteja correta, ela não nos ajuda muito, porque também não sabemos uma primitiva para a função $\ln(u)$. Portanto, a integral proposta não deve ser resolvida por mudança de variáveis. Neste texto vamos introduzir uma nova técnica que vai nos permitir, entre outras coisas, encontrar uma primitiva para a função xe^x.

Lembre que a fórmula de mudança de variáveis foi obtida a partir da Regra da Cadeia. O que vamos fazer inicialmente é obter, a partir da regra de derivação de um produto, uma nova fórmula. Para tanto, lembre que

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

sempre que f e g são deriváveis. Integrando a igualdade acima com respeito a x, e lembrando que uma primitiva de $(f(x)g(x))'$ é o produto $f(x)g(x)$, obtemos

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

A igualdade acima é conhecida como *fórmula de integração por partes*. Na sequência, vamos mostrar como ela pode ser útil.

Exemplo 1. Vamos usar a fórmula para resolver a integral $\int xe^x \mathrm{d}x$. Se denotarmos $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, obtemos

$$\int xe^x \mathrm{d}x = \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = x \cdot g(x) - \int 1 \cdot g(x)\mathrm{d}x.$$

Para finalizar o cálculo, precisamos descobrir quem é $g(x)$. Como $g'(x) = e^x$, temos que $g(x) = \int g'(x)\mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}x = e^x + K_1$, em que K_1 é a constante de integração. Deste modo

$$\int xe^x \mathrm{d}x = x(e^x + K_1) - \int (e^x + K_1)\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x,$$

ou ainda,

$$\int xe^x \mathrm{d}x = (x-1)e^x + K.$$

Se você quiser, pode checar o resultado acima simplesmente derivando o lado direito. □

Vale notar que, no cálculo da função g acima, a constante de integração K_1 sempre vai desaparecer. De fato, basta notar que

$$f(x)(g(x) + K_1) - \int f'(x)(g(x) + K_1)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

qualquer que seja o número K_1. Deste modo, ao aplicarmos a fórmula, é comum escolher $K_1 = 0$ na expressão de $g(x)$.

Outra observação importante é que a fórmula pode ser reescrita de uma maneira mais simples de ser lembrada, através do seguinte artifício: considere $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Com esta definição, temos que $\frac{du}{dx} = f'(x)$. Se considerarmos, formalmente, o símbolo $\frac{du}{dx}$ como sendo uma fração, isso nos leva a $du = f'(x)dx$ e, de maneira análoga, $dv = g'(x)dx$. Assim, a fórmula de integração por partes pode ser escrita como

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Exemplo 2. Para a integral indefinida $\int x\cos(x)\mathrm{d}x$, vamos considerar $u = x$ e $\mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x$. Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} u &= x, & \mathrm{d}v &= \cos(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x, & v &= \textstyle\int \mathrm{d}v = \int \cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{sen}(x), \end{aligned}$$

onde escolhemos a constante de integração como sendo 0 no cálculo de v. Assim, usando a fórmula, obtemos

$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = x\,\mathrm{sen}(x) - \int \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x,$$

ou ainda
$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) + K.$$
Novamente, a igualdade pode ser checada pela simples derivação do lado direito. $\square$

Ao aplicar a fórmula, é fundamental fazer uma escolha apropriada do termo $\mathrm{d}v$. A primeira dica para esta escolha é lembrar que, para aplicar a fórmula, será necessário conhecer o valor de v, isto é, calcular a integral $\int \mathrm{d}v$. Deste modo, o termo $\mathrm{d}v$ deve ser uma função que sabemos integrar. Esta observação, quando aplicada no Exemplo 2 acima, descarta imediatamente a escolha $\mathrm{d}v = x\cos(x)$. Porém, ainda restariam três possibilidades:

$$\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x.$$

Já vimos que a terceira escolha acima funciona. Para a primeira teríamos

$$\begin{aligned} u &= \cos(x), & \mathrm{d}v &= x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= -\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x, & v &= \textstyle\int x\mathrm{d}x = x^2/2, \end{aligned}$$

de modo que
$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cos(x) + \int \frac{x^2}{2}\mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x.$$
Esta igualdade, embora correta, não ajuda muito, porque a integral que aparece do lado direito não parece ser mais simples do que a inicial. Deixamos para o leitor a verificação de que a escolha $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ também não é boa.

Exemplo 3. Vamos calcular
$$\int \ln(x)\mathrm{d}x,$$
integrando por partes. Fazendo a escolha $u = \ln(x)$, somos levados a $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned} u &= \ln(x), & \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x, & v &= \textstyle\int \mathrm{d}x = x, \end{aligned}$$

e portanto
$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + K.$$
Novamente aqui, a escolha $\mathrm{d}v = \ln(x)$ não seria boa, porque a princípio não sabemos uma primitiva de $\ln(x)$. $\square$

Exemplo 4. Em alguns casos precisamos aplicar o método mais de uma vez. Por exemplo, para

$$\int x^2 \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x,$$

fazemos $u = x^2$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x$, de modo que $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ e $v = -\cos(x)$. Assim

$$\int x^2 \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x = -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Resolvendo a última integral partes (cf. Exemplo 2), obtemos

$$\int x^2 \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x = -x^2\cos(x) + 2\left(x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)\right) + K,$$

que é o resultado desejado. □

Observe que a ideia do exemplo acima funciona em qualquer integral do tipo $\int x^n f(x)\mathrm{d}x$, quando $n \in \mathbb{N}$ e a função f é, por exemplo, do tipo $\cos(ax)$, $\mathrm{sen}(ax)$ ou e^{ax}, com $a \in \mathbb{R}$. Quanto maior o valor de n, mais vezes teremos que integrar por partes. A parte boa é que, a cada integração, o expoente do termo x da nova integral diminui até chegarmos em $x^0 = 1$.

Exemplo 5. Vamos agora aplicar integração por partes na integral

$$\int \mathrm{sen}(\ln(x))\mathrm{d}x,$$

com as escolhas seguintes

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{sen}(\ln(x)), & \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x, & v &= x. \end{aligned}$$

Substituindo, vem

$$\int \mathrm{sen}(\ln(x))\mathrm{d}x = x\,\mathrm{sen}(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x))\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Note que a integral resultante parece ter a mesma complexidade da inicial, o que poderia nos levar a pensar que a ideia não foi boa. Porém, vamos aplicar integração por partes a esta nova integral, com a seguinte escolha

$$\begin{aligned} u &= \cos(\ln(x)), & \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u &= -\frac{\mathrm{sen}(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x, & v &= x, \end{aligned}$$

para obter

$$\int \cos(\ln(x))\mathrm{d}x = x\cos(\ln(x)) + \int \mathrm{sen}(\ln(x))\mathrm{d}x.$$

Substituindo a igualdade acima em (1), obtemos

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x))\mathrm{d}x = x\operatorname{sen}(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int \operatorname{sen}(\ln(x))\mathrm{d}x.$$

Note que a integral que queríamos calcular apareceu novamente, do lado direito, multiplicada por um fator diferente de 1. Podemos então levá-la para o lado esquerdo da igualdade e obter

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x\operatorname{sen}(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))\Big] + K,$$

com K sendo a constante de integração.

A mesma ideia acima nos permite calcular integrais do tipo $\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\mathrm{d}x$ ou $\int e^{ax}\cos(bx)$, com a, $b \in \mathbb{R}$. Deixamos para o leitor a tarefa de considerar casos como esses. $\square$

Exemplo 6. Em alguns casos, as técnicas de integração podem se misturar. Por exemplo, na integral $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, podemos fazer a mudança de variáveis $y = \sqrt{x}$ para obter $\mathrm{d}x = 2\sqrt{y}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$, e portanto

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int ye^{y}\mathrm{d}y.$$

Esta última integral pode ser facilmente resolvida por integração por partes. De maneira análoga podemos tratar, por exemplo, $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\mathrm{d}x$ ou $\int \cos(\sqrt{x})\mathrm{d}x$. $\square$

Finalizamos observando que a fórmula de integração por partes pode ser aplicada na integral definida. De fato, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Assim, lembrando do Exemplo 1, temos

$$\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x = xe^x\Big|_{x=0}^{1} - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = (e-0) - (e^x)\Big|_{x=0}^{1} = e - (e-1) = 1.$$

Tarefa

A fórmula de integração por partes nos permite obter fórmulas recurssivas para algumas integrais. Por exemplo, para todo natural $n \geq 3$, considere

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Use integração por partes, com $u = \cos^{n-1}(x)$ e $\mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x$, para obter

$$\int \cos^n(x)\mathrm{d}x = \mathrm{sen}(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{sen}^2(x)\mathrm{d}x.$$

2. Lembrando que $\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, conclua que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

3. Escreva uma fórmula recursiva para a integral indefinida $\int \cos^n(x)\mathrm{d}x$.