Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Propriedades do limite

Neste texto apresentamos as propriedades básicas dos limites. Consideramos sempre que f e g são funções definidas em um intervalo aberto contendo o ponto $x = a$, exceto possivelmente no ponto $x = a$.

Teorema 1. *Se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

então

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$;
2. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$;
3. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M$;
4. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *desde que* $M \neq 0$;
5. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, *desde que* $L > 0$ *se* n *for par.*

Em outras palavras o limite de uma soma é a soma dos limites, o mesmo valendo para subtração e para o produto. Não é muito difícil acreditar na veracidade das afirmações acima e, de fato, elas já foram utilizadas em textos anteriores. Todas elas podem ser provadas rigorosamente, mas este não será o nosso foco aqui. Estamos interessados em usar as propriedades para calcular limites de funções.

Destacamos que **a propriedade 4 só pode ser usada quando** $M \neq 0$. Isso ocorre porque queremos dizer que o limite vale L/M e isso não faz sentido no caso em que $M = 0$, pois não podemos dividir por zero. Isto não significa que não é possível calcular o limite de uma fração quando o denominador se aproxima de zero. De fato, vimos no caso da velocidade do carro e da reta tangente que, nesta situação, podemos tentar algum tipo de simplificação na fração de modo a saber o que ocorre quando $x \to a$.

Na propriedade 5, quando n é par, temos a restrição $L > 0$. Ela é importante para garantir que o número $\sqrt[n]{L}$ esteja bem definido. Por exemplo, se $\lim_{x\to a} f(x) = -1$, não faz sentido tentar usar a propriedade para calcular $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)}$. De fato, como a função $f(x)$ se aproxima de -1, não podemos calcular $\sqrt{f(x)}$ para valores x próximos de a, visto que não existe raiz quadrada de número negativo.

Exemplo 1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \cdot x = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a \cdot a = a^2.$$

Aplicando a mesma propriedade repetidas vezes, vemos que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2. Se $p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ é um polinômio, então

$$\lim_{x\to a} p(x) = \lim_{x\to a}(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = b_0 + b_1 a + \cdots + b_n a^n = p(a).$$

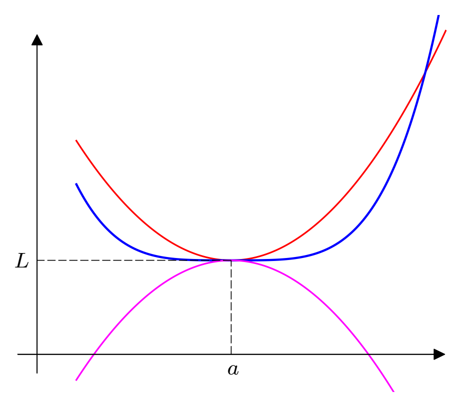
No exemplo acima usamos a propriedade da soma, do produto e o Exemplo 1. A conclusão é que, para calcular o limite de um polinômio quando $x \to a$, basta calcular $p(a)$. □

Exemplo 3. Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(a) \neq 0$, então podemos aplicar a regra do quociente para obter

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

□

No próximo resultado vamos considerar o caso em que temos 3 funções que estão "ordenadas" na vizinhança do ponto $x = a$. Isso significa que temos uma delas entre as outras duas, em uma espécie de sanduíche, com a função do meio funcionando como um presunto entre duas fatias de pão. A partir do desenho é natural inferir que, se as funções que estão por cima e por baixo se aproximam de um número L, o mesmo deve ocorrer com o a que está no meio.



Mais especificamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 2 (Teorema do Confronto). *Suponha que*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

para todo os valores de x próximos de a, exceto possivelmente em a. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

então

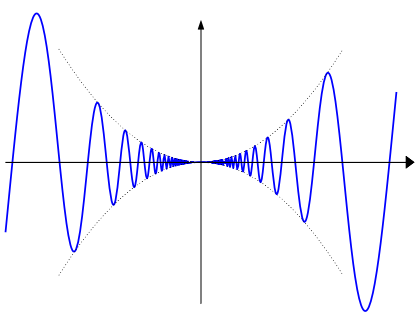
$$\lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Antes de aplicar o resultado vamos lembrar que a estrutura de "sanduíche" é necessária somente perto do ponto a, não importando o que ocorre com as funções para valores x distantes de a. Novamente, a figura acima ilustra bem esta observação.

Exemplo 4. Vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observe que não podemos usar a regra do produto aqui pois, apesar de x^2 se aproximar de zero, não sabemos o que acontece com o termo $\operatorname{sen}(1/x)$. De fato, este último termo não possui limite porque o termo $1/x$ vai ficando cada vez maior em módulo, de modo que o seu seno fica oscilando entre -1 e 1.



O fato de não podermos usar a regra do produto não implica que não é possível calcular o limite. O comportamento da função $h(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ pode ser descrito da seguinte maneira: o termo que envolve o seno fica oscilando, enquanto o termo x^2 faz com que a amplitude desta oscilação se modifique quando x varia. O gráfico ao lado ilustra o que estamos dizendo.

A partir do gráfico somos levados a crer que $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$. Para comprovar isto, vamos utilizar o Teorema 2, observando inicialmente que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $x^2 > 0$, concluímos que

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}(1/x) \leq x^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $x \to 0$ e usando o Teorema 2 concluímos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

□

Finalizamos este texto observando que os Teoremas 1 e 2 valem também para limites laterais. Assim, se substituirmos $x \to a$, por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$, todas as afirmações destes teoremas permanecem válidas. No caso do Teorema 2, quanto tratamos de limites laterais, a "estrutura de sanduíche" das 3 funções precisa valer somente do lado em que estamos fazendo o limite lateral.

Tarefa

Uma função f é *limitada* se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \qquad \forall\, x \in \mathrm{dom}(f).$$

1. Suponha que f esteja definida um pouco à esquerda e um pouco à direita de $x = a$. Se $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e f é limitada, mostre que

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

   Explique por que a limitação de f é necessária somente próximo ao ponto $x = a$.

2. Use o item acima para concluir que, se $r > 0$ é um número racional, então

$$\lim_{x \to 0} |x|^r \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$