Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 14

Temas abordados: Integração por partes
Seções do livro: 6.1

1) Use integração por partes para calcular as integrais abaixo.

(a) $\int x\ln(x^2)\mathrm{d}x$ (b) $\int x^2\ln(2x)\mathrm{d}x$ (c) $\int xe^{3x}\mathrm{d}x$

(d) $\int \ln(5x)\mathrm{d}x$ (e) $\int x^3e^{-x}\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ (h) $\int (1-x)e^x$ (i) $\int x\sqrt{x+5}\mathrm{d}x$

2) Calcule as integrais abaixo usando, antes da integração por partes, a mudança de variáveis indicada.

(a) $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad u=\sqrt{x}$

(b) $\int x^3e^{x^2}\mathrm{d}x,\quad u=x^2$

3) Suponha que uma pressão sonora provoque a vibração da membrana do tímpano de uma pessoa e que a velocidade $v(t)$ de um ponto da membrana seja dada por $v(t)=2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$.

(a) Determine a integral indefinida da função $v(t)$.

(b) Determine a posição $s(t)$ do ponto da membrana supondo que $s(0)=0$.

(c) Determine o comportamento de $s(t)$ após um longo período de tempo, isto é, $\lim_{t\to\infty} s(t)$.

4) Após t segundos, um carro está se movendo com uma velocidade de $te^{-t/2}$ metros por segundo. Sabendo que no instante $t=0$ o carro estava na posição $s(0)=0$, determine a posição $s(t)$ no instante $t>0$.

5) Estima-se que daqui a t anos a população de uma certa cidade estará variando à taxa $t\ln(\sqrt{t+1})$ milhares de habitantes por ano. Se a população atual é de 2 milhões de habitantes, qual será a população daqui a cinco anos?

RESPOSTAS

1) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + K$

(b) $\frac{1}{3}x^3 \ln(2x) - \frac{1}{9}x^3 + K$

(c) $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + K$

(d) $x \ln(5x) - x + K$

(e) $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + K$

(f) $\frac{2}{3}(x+2)^{3/2} - 4\sqrt{x+2} + K$

(g) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + K$

(h) $2e^x - xe^x + K$

(i) $\frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + K$

2) Em todos os itens abaixo $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(a) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + K$

(b) $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + K$

3) (a) Integrando por partes com $u = \operatorname{sen}(t)$ e $\mathrm{d}v e^{-t}\mathrm{d}t$ obtemos

$$\int e^{-t} \operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t = -e^{-t}\cos(t) - \int e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t.$$

A última integral acima pode ser feita por partes novamente, agora escolhendo $u = e^{-t}$ e $\mathrm{d}v = \cos(t)$, de modo que obtemos

$$\int e^{-t} \operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t) - \int e^{-t}\operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t.$$

Passando a última integral para o lado esquerdo da primeira igualdade e acrescentando a constante de integração obtemos

$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = 2\int e^{-t}\operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t = -e^{-t}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) + K$$

(b) Como $0 = s(0) = -1 + K$, concluímos que $K = 1$. Portanto

$$s(t) = 1 - e^{-t}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)).$$

(c) Uma vez que $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ e as funções seno e cosseno são limitadas, segue dos dois itens acima que

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = 1 - \frac{\operatorname{sen}(t) + \cos(t)}{e^t} = 1.$$

4) $s(t) = 4 - 2e^{-t/2}(t+2)$

5) 2.008.876 habitantes