Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 11

Temas abordados: Regra de L'Hôpital
Seções do livro: 4.6

1) Resolva as indeterminações abaixo usando a Regra de L'Hôpital. (veja Vídeo 1)

(a) $\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$

2) Em alguns casos, é necessário aplicar a Regra de L'Hôpital mais de uma vez. Por exemplo,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Note que tanto o primeiro quanto o segundo limite são indeterminações do tipo ∞/∞, enquanto o último pode ser resolvido com as regras usuais do limite.

Use a ideia acima para resolver os limites abaixo. (veja Vídeo 1)

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3e^{3x}}{e^{3x}}$ (d) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3}$

3) A Regra de L'Hôpital se aplica somente a indeterminações do tipo $0/0$ e ∞/∞. Em alguns casos, quando temos uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$, uma manipulação algébrica adequada nos permite aplicar L'Hôpital. Por exemplo,

$$\lim_{x \to -\infty} (x-3)e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-3}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Note que, no segundo limite acima, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞, enquanto no último o denominador tende para infinito.

Use a ideia acima para resolver os limites abaixo. (veja Vídeo 2)

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln(x)$ (b) $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}(1/x) = 1$

4) O limite $\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x}$ é uma indeterminação do tipo 1^∞. Ele pode ser calculado, observando-se que

$$(1+x)^{1/x} = e^{\ln(1+x)^{1/x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

Vimos no primeiro exercício que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Assim, como a função exponencial é contínua, temos que

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

Use a ideia acima para resolver os limites abaixo. (veja Vídeo 2)

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^x$ (b) $\lim_{x \to \infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\ln(x)}}$

5) Calcule cada um dos limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-(x/2)}{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos(x)-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x-1}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^{-2}e^{-x^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^r\ln(x),\ \text{com } r>0$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\ln(x)$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{p(x)}{e^x}$, onde p é um polinômio

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{3+x}{x-2}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4}$

RESPOSTAS

1)	(a) 1	(b) 1	(c) 0	(d) 0
2)	(a) 0	(b) -1	(c) 3	(d) não existe
3)	(a) 0	(b) 1		
4)	(a) 1	(b) $e^{1/2}$		
5)	(a) $-1/8$	(b) 1	(c) 1	(d) -16
	(e) 3	(f) 0	(g) 0	(h) 0
	(i) $-1/2$	(j) 0	(k) $+\infty$	(l) 1
	(m) 0	(n) 1	(o) $-\infty$	(p) -1