Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

O Limite de uma função

Sabemos que, se $s(t)$ denota a posição de um carro no instante $t > 0$, então a velocidade instantânea $v(t)$ pode ser obtida calculando-se a velocidade média $(s(t+h) - s(t))/h$ para valores pequenos de h. Isto pode ser escrito, sucintamente, da seguinte forma

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}. \tag{1}$$

Note que o quociente acima não está definido para $h = 0$. De fato, isto não é importante para o cálculo da velocidade. Precisamos somente saber o que ocorre com o quociente quando h está muito perto de zero.

A ideia de proximidade acima pode ser considerada em situações mais gerais. Suponha que uma função f está definida em intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$. Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{2}$$

para representar o fato de que os valores $f(x)$ ficam próximos do número L desde que x esteja próximo de a. A expressão acima deve ser lida da seguinte maneira: *o limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a L.*

O conceito de limite tem inúmeras aplicações, a velocidade de um carro sendo somente uma delas. Neste texto estamos mais interessados em entender a definição e considerar exemplos matemáticos simples. Antes de fazer isso, precisamos destacar que o conceito de proximidade é relativo. De fato, se dois carros viajam para uma mesma cidade e estão a 300 metros um do outro, podemos dizer que eles estão próximos. Por outro lado, se estes carros estão em uma corrida de Fórmula 1, essa mesma distância não pode ser considerada pequena. Tudo que você precisa saber agora é que é possível definir o conceito de limite acima usando uma terminologia que não dependa de relativizações, embora este não seja o objetivo deste texto.

Vale a pena reforçar que, no cálculo do limite em (2), não importa o valor da função f no ponto $x = a$. De fato, a função não precisa estar definida neste ponto, isto é, o ponto $x = a$ pode não pertencer ao domínio de f. Para ilustrar isto considere os dois gráficos abaixo:

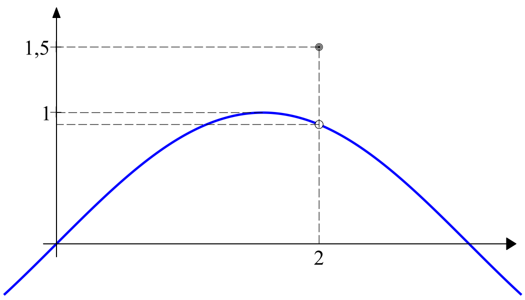


Figura 1

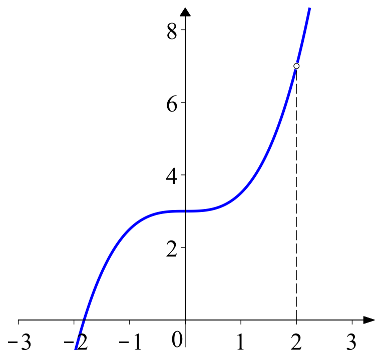


Figura 2

Se denotarmos por f a função cujo gráfico está esboçado na Figura 1, temos que o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ é um número um pouco menor do que 1, apesar de que $f(2) = 1,5$. Na Figura 2, temos uma função cujo limite quando x tende para 2 é igual a aproximadamente 7, mas a função não está definida no ponto $x = 2$.

Antes de passar aos exemplos vamos ainda destacar que, em alguns casos, o limite de uma função não existe. Isso pode ocorrer por diversos motivos. Listamos abaixo dois exemplos clássicos:

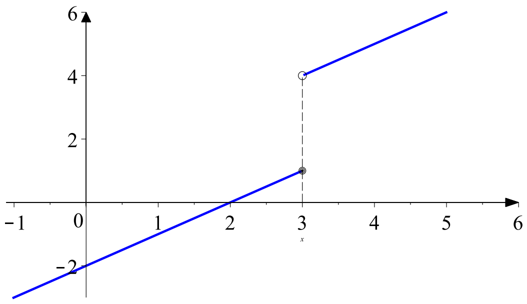


Figura 3

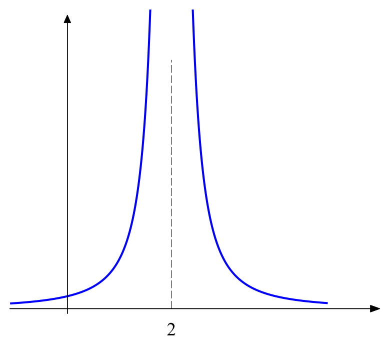


Figura 4

Na Figura 3 não existe limite quando $x \to 3$ porque, para valores próximos e menores que $x = 3$, a função se aproxima de 1, enquanto que à direita ela fica próxima de 4. Na Figura 4 o limite quando $x \to 2$ não existe pois, quando x se aproxima de 2, a função assume valores cada vez maiores, não podendo portanto se aproximar de um número.

As situações de não existência listadas acima serão mais bem exploradas no futuro. Por ora, vamos nos concentrar em alguns exemplos em que o limite existe e aprender um pouco como calculá-los.

Exemplo 1. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}.$$

Observe que, quando x fica próximo de 2, o termo x^2 fica próximo de $2^2 = 4$. De uma maneira geral, a potência x^n se aproxima de 2^n, quando $x \to 2$. Deste modo, o numerador da fração acima se aproxima de $2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$, enquanto o denominador se aproxima de $2^2 - 1 = 3$. Ora, se dividimos um número próximo de 8 por outro próximo de 3, o resultado deve ficar perto de $8/3$. Assim, concluímos que o limite existe e é igual a $8/3$. $\square$

Neste ponto cabe observar que, no cálculo do exemplo acima, bastaria fazer $x = 2$ na fração $(x^3 + x^2 - 2x)/(x^2 - 1)$ para obter o resultado $8/3$. Contudo, esse procedimento não vai funcionar sempre, especialmente porque em muitos casos a função na qual o limite é calculado pode não estar definida no ponto em que se estuda este limite. No próximo exemplo utilizamos a mesma função para ilustrar isso.

Exemplo 2. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}.$$

Seja $f(x)$ a fração acima e observe que, neste caso, não podemos simplesmente calcular $f(1)$, porque $x = 1$ não está no domínio da função. Mesmo assim o limite acima pode existir. A estratégia de analisar o que acontece com numerador e denominador também não vai funcionar aqui. De fato, ambos se aproximam de zero, e *não podemos dizer que o limite é igual a $0/0$, porque não podemos nunca fazer o denominador de uma fração ser igual a zero.*

Vamos calcular $f(x)$ para alguns valores de x próximos de 1 (maiores do que 1, menores do que 1, mas nunca iguais a 1). Fazendo isto com o auxílio de uma calculadora, e considerando os cálculos até a quarta casa decimal, construímos a tabela abaixo.

$x \sim 1$	0,95	1,05	0,99	1,01	0,999	1,001	0,9999	1,0001
$f(x)$	1,4372	1,5622	1,4875	1,5129	1,4987	1,5012	1, 4999	1,50001

A tabela sugere que o valor do limite é $3/2 = 1,5$. Contudo, qualquer tabela como a feita acima teria somente um número finito de termos, enquanto que a quantidade de números próximos de $x = 1$ é infinita. Como saber se, a partir de um determinado x próximos de 1, os valores $f(x)$ vão começar a se afastar de 1,5? Para responder esta pergunta vamos tentar escrever $f(x)$ de uma outra maneira, de modo que possamos olhar para a nova expressão e entender claramente de onde ela se aproxima quando $x \to 1$. Isso será feito nos parágrafos seguintes.

Vamos inicialmente denotar por $p(x) = (x^3 + x^2 - 2x)$ o numerador da fração que define $f(x)$. Conforme já havíamos observado $p(1) = 0$, isto é, $x = 1$ é uma raiz de $p(x)$. Por conta disto podemos fatorar o polinômio $p(x)$, escrevendo-o na forma $p(x) = (x - 1)q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio de grau 2. Isso pode ser feito efetuando-se a divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$ e trará como resultado

$$x^3 + x^2 - 2x = (x - 1)(x^2 + 2x).$$

Se você não se lembra como efetuar divisão de polinômios este é um excelente momento para recordar este importante tópico!

Considerando agora o denominador $(x^2 - 1)$ da fração que define $f(x)$ podemos usar o mesmo raciocínio para escrever

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Neste caso a fatoração pode ser feita de maneira mais simples, bastando para isso lembrar-se do produto notável $(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$.

Utilizando as duas expressões acima concluímos que

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + 2x)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x}{x+1},$$

de modo que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{3}{2},$$

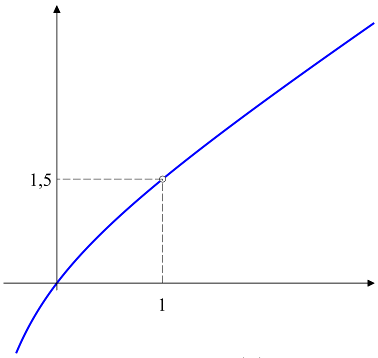


Gráfico de $f(x)$

conforme esperávamos. Note que no cálculo do último limite recaímos na situação do exemplo anterior, em que numerador tem limite e o *denominador se aproxima de um número diferente de zero.* $\square$

A maior parte dos limites que você vai encontrar neste curso se parece com o do Exemplo 2, isto é, uma fração onde o numerador e o denominador se aproximam de zero. Esse casos são conhecidos como *indeterminações do tipo* $0/0$. Em muitas delas, a estratégia a ser seguida é a mesma: efetuar alguma manipulação algébrica na fração de modo a reescrevê-la de uma maneira em que o denominador da nova expressão não se aproxime de zero. A melhor maneira de aprender a fazer isso é praticar!

Tarefa

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, definimos a *reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$* como sendo a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe.

Nesta tarefa vamos determinar a reta tangente para o caso em que $f(x) = \sqrt{x}$ e $a > 0$. O passo crucial é determinar a sua inclinação através do limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}.$$

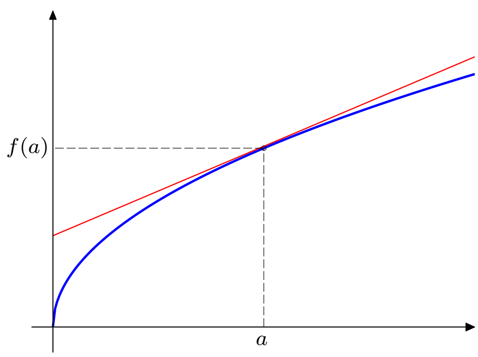
Observe que, no limite acima, numerador e denominador se aproximam de zero.

1. Para resolver a indeterminação multiplique o numerador e o denominador da fração por $(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ para concluir, após as devidas simplificações, que

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

2. Tomando o limite quando $x \to a$ na última expressão conclua que a inclinação da reta tangente é igual a $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.

3. Determine agora a equação da reta tangente, lembrando que ela deve passar pelo ponto $(a, f(a))$. Veja o gráfico abaixo.



Reta tangente