Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 12

Temas abordados: Integral Definida, Teorema Fundamental do Cálculo e Áreas
Seções do livro: 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4

1) Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Divida o intervalo $[0, 1]$ em n partes iguais como o indicado na figura abaixo e resolva os itens a seguir.

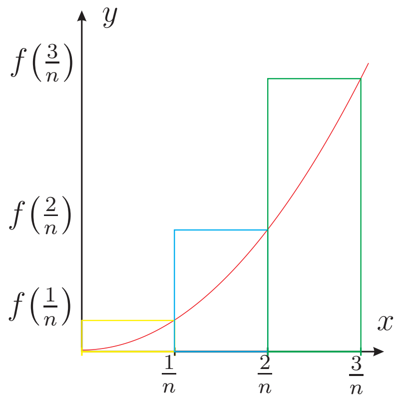
(a) Defina, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, o ponto $x_i^* = i/n$ e calcule $f(x_i^*)$.

(b) Defina agora $\Delta x_i = 1/n$ e calcule

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \qquad (1)$$

usando a seguinte fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$



(c) Lembrando que a integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ é o limite, quando $n \to +\infty$, do somatório em (1), encontre a área delimitada pelo gráfico da função e o eixo $\mathcal{O}x$.

2) (**O Teorema da Média**) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere m e M os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$, respectivamente.

(a) Use as propriedades da integral para verificar que

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x.$$

(b) Usando o Teorema do Valor Intermediário, conclua que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Usando o mesmo raciocínio mostre que, se $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função não negativa tal que $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

3) (**O Teorema Fundamental do Cálculo**) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina

$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad x \in [a, b].$$

(a) Para $x \in (a, b)$ e $h > 0$ pequeno, use as propriedades da integral e o Teorema da Média para verificar que

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(c_h),$$

para algum $c_h \in [x, x+h]$.

(b) Usando o item anterior e a continuidade de f, mostre que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

(c) Repita o argumento acima para $h < 0$, e conclua que a função g é derivável e

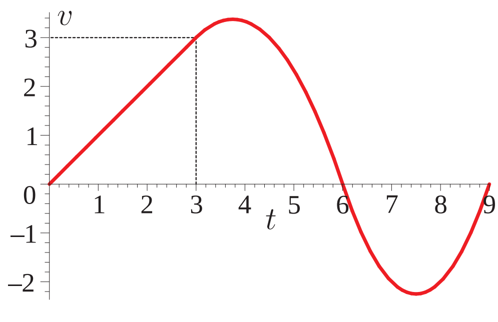
$$g'(x) = f(x), \qquad x \in (a, b).$$

(d) Supondo agora que F é uma primitiva qualquer de f, mostre que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

4) Suponha que, no instante t, a posição em relação à origem de uma partícula que se desloca ao longo de uma reta seja dada por $s(t) = \int_0^t v$, em que $v \colon [0, 9] \to \mathbb{R}$ é a função velocidade, cujo gráfico está ilustrado abaixo. Considere ainda que t seja dado em segundos, que $s(t)$ seja dada em metros e que, para $0 \leq t \leq 3$, o gráfico de $v(t)$ seja um segmento de reta. A partir do gráfico da função velocidade, julgue os itens a seguir.

(a) A partícula está se afastando da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$.



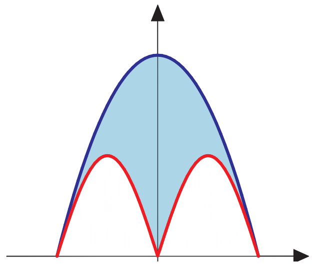
(b) A partícula percorre menos de 4 metros nos primeiros 3 segundos.

(c) No instante $t = 6$ a partícula está na origem.

(d) No instante $t = 9$ a posição da partícula é positiva.

(e) O espaço total percorrido pela partícula é igual a $\int_0^6 v - \int_6^9 v$.

5) A figura ao lado indica a área delimitada pelos gráficos das funções



$$f(x) = 2 - 2x^2$$

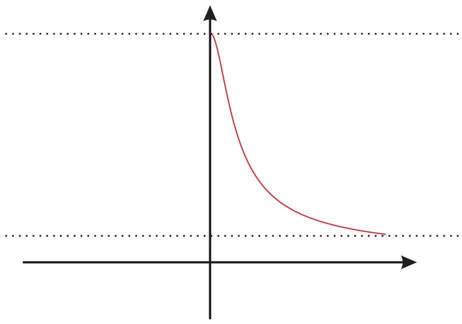
e

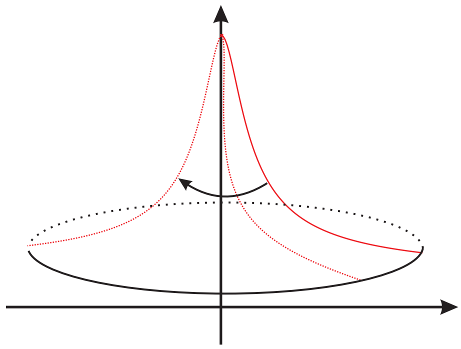
$$g(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)|,$$

com $x \in [-1, 1]$. Use a integral definida para calcular o valor dessa área.

6) Considere a curva $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, definida para $0 \leq x \leq t$. Ao girarmos o gráfico de g em torno do eixo $\mathcal{O}y$ obtemos um sólido cujo volume é dado por

$$V(t) = \int_0^t 2\pi x g(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^t \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$





(a) Verifique que a função $G(x) = \ln(1+x^2)$ é uma primitiva de $(2x)/(1+x^2)$.

(b) Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular o volume do sólido no caso em que $t = 2$.

(c) Calcule $V(t)$ para $t \geq 0$.

(d) Calcule agora $V'(t)$ e, em seguida, determine $\lim_{t\to\infty} V'(t)$.

Gabarito

1. (a) $\dfrac{i^3}{n^3}$ (b) $\dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$ (c) $\dfrac{1}{4}$
2.
3.
4. Itens corretos: (a), (d), (e)
5. A área é igual a $\dfrac{8}{3} - \dfrac{4}{\pi}$
6. (a)
   (b) $V(2) = \pi \ln(5)$
   (c) $V(t) = \pi \ln(1+t^2)$
   (d) $V'(t) = (2\pi t)/(1+t^2)$ e $\lim_{t\to\infty} V'(t) = 0$.