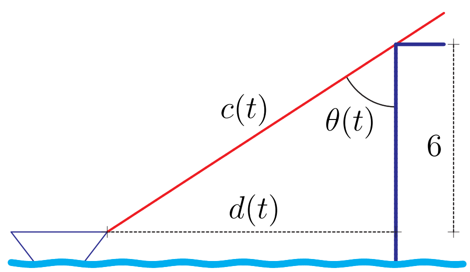
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Taxas relacionadas

Suponha que um barco seja puxado para o cais por uma corda presa à sua proa, situada 6 metros abaixo do apoio da corda no cais. Suponha ainda que a corda seja puxada com uma velocidade de 2 m/s. Nesse caso, o comprimento $c(t)$ da corda entre a proa e o apoio, a distância $d(t)$ do barco ao cais e o ângulo $\theta(t)$ entre a corda e a vertical são funções do tempo t. A figura abaixo ilustra a situação descrita.

Estamos interessados em descobrir a velocidade com que o barco se aproxima do cais no instante t_0 em que $c(t_0) = 10$.



Se fosse possível obter, a partir das informações dadas, a expressão da função $d(t)$, seria suficiente avaliar a sua derivada no ponto $t = 10$. Porém, vamos mostrar aqui que isso não é necessário, resolvendo o problema de uma maneira que não envolve o cálculo da expressão das funções envolvidas. Faremos isso supondo que todas elas são deriváveis.

Começamos utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de lados $d(\tau)$, $c(\tau)$ e 6, para obter

$$c^2(t) = d^2(t) + 6^2. \tag{1}$$

A ideia agora é derivar os dois lados da igualdade acima, de modo a obter uma relação entre as funções e as taxas de variação envolvidas no problema. Antes de fazer isso, vamos observar que, se $f(x)$ é uma função derivável, então a função $f(x)^2$ é também derivável e, pela Regra da Cadeia, temos que

$$\frac{d}{dx} f(x)^2 = 2f(x)\frac{d}{dx} f(x) = 2f(x)f'(x).$$

Utilizando a expressão acima e derivando os dois lados da igualdade em (1), obtemos

$$2c(t)\, c'(t) = 2d(t)\, d'(t),$$

ou ainda,

$$d'(t) = \frac{c(t)\,c'(t)}{d(t)}.$$

A igualdade acima é válida sempre que $d(t) > 0$, ou seja, para todos os instantes que antecedem o momento T em que a proa do barco toca a parede do cais.

Note agora que, como a corda está sendo puxada com uma velocidade de 2 m/s, devemos ter $c'(t) = -2$. O sinal negativo aqui significa que o comprimento da corda $c(t)$ está diminuindo, de modo que a taxa de variação de $c(t)$ deve ser negativa. Concluímos então que

$$d'(t) = \frac{-2c(t)}{d(t)}, \qquad \forall\, t \in (0,T).$$

O problema inicial pode agora ser facilmente resolvido. No instante em que $c(t_0) = 10$, segue da equação (1) que $d(t_0) = \sqrt{c(t_0)^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Substituindo isto na última expressão, obtemos

$$d'(t_0) = \frac{-2c(t_0)}{d(t_0)} = \frac{-2 \cdot 10}{8} = -\frac{20}{8}.$$

Assim, no instante t_0, o barco se aproxima da parede do cais com uma velocidade de 20/8 metros por segundo. O sinal negativo aqui significa, novamente, que a função $d(t)$ está diminuindo.

Vale ressaltar novamente que todas as contas acima foram feitas somente usando a relação (1) e as informações do problemas. De fato, podemos explorar muitas coisas sem saber a expressão das funções envolvidas no problema.

Por exemplo, suponha que queremos saber a taxa de variação do ângulo $\theta(t)$ no instante t_0. Começamos observando que a tangente deste ângulo é dada por

$$\tan(\theta(t)) = \frac{d(t)}{6}.$$

Derivando a última igualdade (com respeito ao tempo t) e usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\sec^2(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = \frac{d'(t)}{6},$$

ou ainda

$$\theta'(t) = \frac{d'(t)}{6}\cos^2(\theta(t)) = \frac{d'(t)}{6}\frac{6^2}{c(t)^2}, \qquad \forall\, t \in (0,T).$$

Fazendo $t = t_0$, e lembrando que $d'(t_0) = -20/8$ e $c(t_0) = 10$, obtemos $\theta'(t_0) = -12/80$.

Tarefa

Suponha que um balão esférico esteja cheio de gás. A partir de um determinado instante, o gás começa a escapar do balão à razão de 2 L/min, de modo que o seu raio r passa a ser uma função do tempo.

1. Lembrando que o volume de uma esfera de raio $R > 0$ é $(4/3)\pi R^3$, determine a expressão que relaciona $r(t)$ com a taxa de variação do volume e do raio com respeito ao tempo.

2. Usando os dados do problema, calcule a taxa de variação do raio no instante t_0 em que $r(t_0) = 1$. O raio está aumentando ou diminuindo?

3. Sabendo que a área de uma esfera de raio $R > 0$ é $4\pi R^2$, mostre que a taxa de variação da área superficial (com respeito ao tempo) do balão é inversamente proporcional ao seu raio.