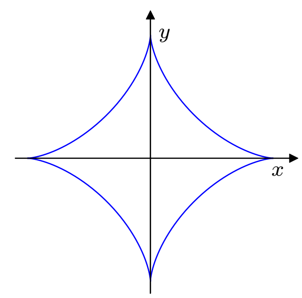
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Comprimento de arco

(solução da tarefa)

Lembremos que as funções coordenadas da nossa curva, ilustrada ao lado, são dadas por



$$x(t) = \cos^3(t), \qquad y(t) = \operatorname{sen}^3(t),$$

com $t \in [0, 2\pi]$. Assim, as derivadas são da forma

$$x'(t) = -3\cos^2(t)\operatorname{sen}(t), \qquad y'(t) = 3\operatorname{sen}^2(t)\cos(t).$$

Observe que, no ponto $t = \pi/2$, as duas derivadas acima se anulam, de modo que não podemos aplicar a fórmula diretamente. De fato, as derivadas se anulam, simultaneamente, nos pontos $t = \pi/2$, $t = \pi$, $t = 3\pi/2$. No entanto, usando a simetria da curva, podemos afirmar que o comprimento do astróide e 4 vezes o comprimento da curva contida no primeiro quadrante. Esta curva é obtida com as mesmas funções coordenadas, fazendo o parâmetro t variar no intervalo $[0, \pi/2]$. Assim,

$$\text{comp.}(C) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Temos que

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 9\cos^4(t)\operatorname{sen}^2(t) + 9\operatorname{sen}^4(t)\cos^2(t) \\ &= 9\cos^2(t)\operatorname{sen}^2(t)[\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)] \\ &= 9\cos^2(t)\operatorname{sen}^2(t), \end{aligned}$$

de modo que $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |3\cos(t)\operatorname{sen}(t)| = 3\cos(t)\operatorname{sen}(t)$, sempre que $t \in [0, \pi/2]$. Usando agora a fórmula do comprimento de arco, juntamente com a mudança de variáveis $u = \operatorname{sen}(t)$, obtemos

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 3\cos(t)\operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t = 3\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}.$$

Conforme observamos anteriormente, o comprimento do astróide é quatro vezes o valor acima, isto é, $4 \cdot (3/2) = 6$.