# Cálculo 1

## Lista de Exercícios – Semana 01

*Temas abordados*: Introdução ao Cálculo e Revisão
*Seções do livro*: 2.1; 1.1 a 1.3; 1.5; 1.6

**1)** Se a posição de um carro no instante $t > 0$ é dada por $s(t) = (4 + t^2)$, então a velocidade média entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + h$ é dada por (veja Texto 1 e/ou vídeo)

$$\frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{[4 + (2+h)^2] - [4 + 2^2]}{h} = \cdots = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h.$$

Quanto mais próximo $h$ estiver de zero, mais perto a velocidade média estará da velocidade em $t = 2$, de modo que essa velocidade vale

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = (4 + 0) = 4.$$

Para cada função abaixo, simplifique o quociente $(s(t_0+h) - s(t_0))/h$ que dá a velocidade média entre os instantes $t = t_0$ e $t = t_0+h$. Em seguida, calcule a velocidade $v(t_0)$ fazendo $h$ se aproximar de zero.

(a) $s(t) = t^2$, no ponto $t_0 = 3$

(b) $s(t) = t^3$, no ponto $t_0 = 1$

(c) $s(t) = \sqrt{t}$, no ponto $t_0 = 9$

(d) $s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{a}{2} t^2$, com $s_0$, $v$, $a \in \mathbb{R}$, em um ponto $t_0 > 0$ genérico

Dica: para o item (b), lembre que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\sqrt{9+h} + 3)$

**2)** Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, a *reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto* $(a, f(a))$ é a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe (veja Texto 2 e/ou vídeo). Neste caso, a equação da reta tangente $y = y(x)$ é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. A expressão acima significa que, quando $x$ se aproxima de $a$, o quociente $(f(x) - f(a))/(x - a)$ se aproxima do número $f'(a)$.

Por exemplo, se $f(x) = x^3$ e $a = 1$, então

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = (1^2 + 1 + 1) = 3,$$

de modo que a equação da reta tangente no ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$ é $y - 1 = 3(x - 1)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ para o valor de $a$ indicado. Em seguida, calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(a, f(a))$

(a) $f(x) = x^2$, para $a = 2$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para $a = 3$

(c) $f(x) = mx + b$, com $m$, $b \in \mathbb{R}$, para um valor genérico de $a$

Dica: para calcular $f'(2)$ no item (a), fatore o numerador $(x^2 - 4)$ de modo a cancelar o denominador $(x - 2)$; no item (b), calcule a diferença $(1/x) - (1/3)$ reduzindo as frações a um mesmo denominador, de modo a eliminar o denominador $(x - 3)$

# Revisão

Nos exercícios abaixo são lembrados alguns conteúdos estudados no Ensino Médio. Espera-se que você consiga resolver todos eles. Se não for esse o caso, este é o momento de pegar os livros antigos e recordar as coisas!

**1)** A função módulo é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Marcando o ponto $x$ na reta real, o módulo de $x$ é exatamente a distância desse ponto até o ponto 0. Determine para quais valores de $x$ as igualdades abaixo são satisfeitas.

(a) $|x| = 4$ (b) $|2 - x| = -1$ (c) $|x| = -|x|$

(d) $|2x + 5| = 4$ (e) $|x - 3| = |2x + 1|$

**2)** Determine para quais valores de $x$ as desigualdades abaixo são satisfeitas.

(a) $|x| < 2$ (b) $|5x| \geq 20$ (c) $|x| > 0$

(d) $|x + 3| \geq 2$ (e) $|3x - 8| < 4$

**3)** Determine o domínio de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x^2 - x - 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{\sqrt[3]{x + 1}}$ (c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{|x| - x}}{e^x - 1}$

(d) $r(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x| - 1}}$ (e) $p(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

**4)** Definimos a *soma de duas funções $f$ e $g$* como sendo a função

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f + g) := \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g).$$

Observe que o domínio da função soma é a intersecção dos domínio de $f$ e $g$, pois para somar precisamos calcular $f(x)$ e $g(x)$.

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{7\} \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(x) = 2x^2 - 8, \qquad g(x) = \frac{2}{x - 7},$$

então $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 - 8 + \dfrac{2}{x - 7}$, para todo $x \in \operatorname{dom}(f + g) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

De maneira análoga definimos subtração, produto e quociente de duas funções. Neste último caso é importante excluir do domínio os pontos que anulam o denominador.

Para $f$ e $g$ como acima, determine a expressão e domínio de

(a) $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ (b) $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) := \dfrac{g(x)}{f(x)}$

**5)** Definimos a *composição de duas funções $f$ e $g$* como sendo a função

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f \circ g) := \{x \in \operatorname{dom}(g) : g(x) \in \operatorname{dom}(f)\}.$$

Para o cálculo de $(f \circ g)(x)$, calculamos $f(y)$, com $y = g(x)$. Assim, é preciso que $y = g(x)$ esteja no domínio de $f$, daí a explicação do domínio da composição.

Por exemplo, considerando as funções $f$ e $g$ do exercício anterior, temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2}{f(x) - 7} = \frac{2}{(2x^2 - 8) - 7} = \frac{2}{2x^2 - 15}, \qquad \forall\, x \neq \pm\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Veja que, no domínio, tivemos que excluir todos os pontos tais $f(x) \notin \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Assim, eliminamos todos os valores de $x$ reais, tais que $f(x) = 2x^2 - 8 = 7$.

Ainda considerando as funções $f$ e $g$ como no exercício anterior, determine a expressão e domínio de cada uma das composições abaixo.

(a) $(f \circ g) = f(g(x))$ (b) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ (c) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$

**6)** Considerando $f(x) = (4 - x)/x$, determine a expressão e o domínio de cada uma das funções abaixo.

(a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{f(x)}$ (b) $f(x^2) - f(x)^2$ (c) $f(f(x))$

**7)** Em cada um dos itens abaixo, encontre a equação da reta que satisfaz as exigências apresentadas (veja vídeo).

(a) passa pelos pontos $(3, 4)$ e $(-2, 5)$

(b) passa pelo ponto $(-1, 3)$ e tem inclinação igual a $-1$

(c) passa pelo ponto $(5, -1)$ e é paralela à reta $2x + 5y = 15$

(d) passa pelo ponto $(0, 1)$ e é perpendicular à reta $8x - 13y = 13$

**8)** Denotando por $x$ e $y$ os lados de um retângulo cujo perímetro é igual a 100, determine o domínio e a expressão da função $d(x)$ que fornece o comprimento da diagonal do retângulo em função de $x$.

**9)** A partir de uma cartolina medindo $14 \times 22$ vamos construir uma caixa sem tampa como segue: recortamos quadrados de lado $x$ em cada um dos vértices da cartolina e dobramos as abas. Determine a expressão e o domínio da função $V(x)$ que fornece o volume da caixa em função de $x$.

**10)** Sejam $x$, $y$ e $z$ os lados de um triângulo retângulo, onde $x$ é a hipotenusa. Suponha que o triângulo tem perímetro igual a 6. Determine a expressão da função $A(x)$ que fornece a área do triângulo em função de $x$.

Dica: *eleve os dois lados da igualdade* $y + z = 6 - x$ *ao quadrado.*

**11)** Um grama de gelo, inicialmente a $-40^o$C, é posto em uma fonte de calor. Neste experimento, observa-se a menor quantidade de calor absorvido $Q(T)$, em calorias, para que a amostra atinja temperatura $T$, em $^o$C. Sabe-se que a cada 1 cal, o gelo aumenta sua temperatura em $2^o$C. Quando atinge $0^o$C, são necessárias mais 80 cal para o derretimento total (que ocorre sob temperatura constante). Depois de liquefeita, a água necessita de 1 cal para aumentar sua temperatura em $1^o$C.

(a) Calcule $Q(-40)$, $Q(-38)$, $Q(0)$, $Q(1)$ e $Q(2)$.

(b) Determine a expressão de $Q(T)$, para $T \in [-40, 80]$.

## RESPOSTAS

**1)** (a) $v(3)=6$ (b) $v(1)=3$ (c) $v(9)=\frac{1}{6}$ (d) $v(t)=v_0+at$

**2)** (a) $f'(2)=4, \quad y-4=4(x-2)$

(b) $f'(3)=-\frac{1}{9}, \quad y-\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}(x-3)$

(c) $f'(a)=m, \quad y=mx+b$

# Revisão

**1)** (a) $x\in\{-4,4\}$ (b) nenhum valor de $x$, pois $|x|\geq 0$ (c) $x=0$

(d) $x\in\left\{-\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right\}$ (e) $x\in\left\{-4,\frac{2}{3}\right\}$

**2)** (a) $x\in(-2,2)$ (b) $x\in\mathbb{R}\setminus(-4,4)$ (c) $x\neq 0$

(d) $x\in(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$ (e) $x\in(\frac{4}{3},4)$

**3)** (a) $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ (b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(d) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ (e) $[-1,1]$ (f) $(1,3)$

**4)** (a) $(f-g)(x)=2x^2-8-\dfrac{2}{(x-7)}$, para $x\neq 7$

(b) $(f\cdot g)(x)=\dfrac{4x^2-16}{x-7}$, para $x\neq 7$

(c) $(\frac{f}{g})(x)=(x^2-4)(x-7)$, para $x\in\mathbb{R}$

(d) $(\frac{g}{f})(x)=\dfrac{1}{(x-7)(x^2-4)}$, para $x\notin\{-2,2,7\}$

**5)** (a) $(f\circ g)(x)=\dfrac{8}{(x-7)^2}-8$, para $x\neq 7$

(b) $(f\circ f)(x)=8x^4-64x^2+120$, para $x\in\mathbb{R}$

(c) $(g\circ g)(x)=\dfrac{2(x-7)}{-7x+51}$, para $x\notin\{7,\frac{51}{7}\}$

**6)** (a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{-4(x^2-4x+1)}{4-x}$, para $x\notin\{0,4\}$

(b) $f(x^2)-f(x)^2=\dfrac{-2(x^2-4x+6)}{x^2}$, para $x\neq 0$

(c) $f(f(x))=\dfrac{5x-4}{4-x}$, para $x\notin\{0,4\}$

**7)** (a) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{23}{5}$ (b) $y=-x+2$ (c) $y=-\frac{2}{5}x+1$ (d) $y=-\frac{13}{8}x+1$

**8)** $d(x)=\sqrt{x^2+(50-x)^2}$, $x\in(0,50)$

**9)** $V(x)=x(22-2x)(14-2x)$, $x\in(0,7)$

**10)** $A(x)=9-3x$

**11)** (a) $Q(-40)=0$, $Q(-38)=1$, $Q(0)=20$, $Q(1)=101$, $Q(2)=102$

(b) $Q(T)=\begin{cases}(T/2)+20 & \text{se } T\in[-40,0]\\ T+100 & \text{se } T\in(0,80]\end{cases}$