Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Concavidade

(solução da tarefa)

A tarefa consiste em estudar a concavidade da função

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3},$$

que está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. O primeiro passo é calcular as derivadas da função, utilizando a regra do produto combinada com a regra da cadeia. Para f' temos que

$$f'(x) = (x^{2/3}(6-x)^{1/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3}(6-x)^{1/3} - \frac{1}{3}x^{2/3}(6-x)^{-2/3} = \frac{(2/3)(6-x)-(1/3)x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$$

e portanto

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$

Usando o mesmo tipo de raciocínio e simplificações obtemos

$$f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Lembremos agora que os pontos críticos de uma função são os pontos do seu domínio onde a derivada se anula ou não existe. A expressão de f' calculada acima se nula somente quando seu numerado é igual a zero, ou seja, quando $x = 4$. Por outro lado, o denominador que aparece na expressão de f' mostra que a função não é derivável nos pontos $x = 0$ e $x = 6$. Deste modo, o conjunto de pontos críticos de f é dado por $\{0, 4, 6\}$.

O Teste da Derivada Segunda se aplica em pontos críticos aonde a derivada se anula e a derivada segunda é contínua próximo ao ponto. Logo, podemos aplicá-lo somente no ponto $x = 4$. Como $f''(4) = -8/(2^{13/3}) < 0$, o gráfico da função, nas proximidades de $x = 4$, se parece com um cume de montanha. Logo, o ponto $x = 4$ é um ponto de máximo local.

Passemos agora ao estudo da concavidade do gráfico, que é determinada pelo sinal da derivada segunda. Note inicialmente que ela nunca se anula, porque o numerador da expressão que a define é sempre igual a -8. Contudo, temos dois pontos onde a derivada segunda não está definida, quais sejam: $x = 0$ e $x = 6$. Estes pontos dividem a reta em 3 intervalos distintos aonde o sinal de f'' deve ser analisado. O quadro abaixo contém está análise

	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, 6)$	$x \in (6, +\infty)$
sinal de f''	negativo	negativo	positivo
concavidade	para baixo	para baixo	para cima

Do quadro acima concluímos que o ponto $x = 6$ é um ponto de inflexão. No ponto $x = 0$, apesar de não existir a derivada segunda, não ocorre mudança de concavidade. Logo ele não é ponto de inflexão.

Antes de terminar o texto vamos detalhar um pouco mais o comportamento da função f. Faremos isto inicialmente estudando o sinal da derivada primeira. O conjunto dos pontos críticos de f é $\{0, 4, 6\}$ e ele determina 4 subintervalos da reta. Em cada um deles a derivada tem o mesmo sinal, a saber

	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, 4)$	$x \in (4, 6)$	$x \in (6, +\infty)$
sinal de f'	negativo	positivo	negativo	negativo
comportamento de f	decrescente	crescente	decrescente	decrescente

A tabela acima confirma o que já tínhamos descoberto com o Teste da Derivada Segunda: o ponto $x = 4$ é um ponto de máximo local. Ela permite ainda classificar os outros 2 pontos críticos de f. De fato, analisando o sinal da derivada antes e depois de cada um deles, podemos concluir que $x = 0$ é um ponto de mínimo local, enquanto que o ponto crítico $x = 6$ não é extremos local.

Podemos ainda tentar encontrar assíntotas horizontais calculando o limite de f quando $x \to \pm\infty$. Temos

$$\lim_{x \to -\infty} x^{2/3}(6 - x)^{1/3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} x^{2/3}(6 - x)^{1/3} = -\infty.$$

Juntando todas as informações acima podemos esboçar o gráfico de f como se segue:

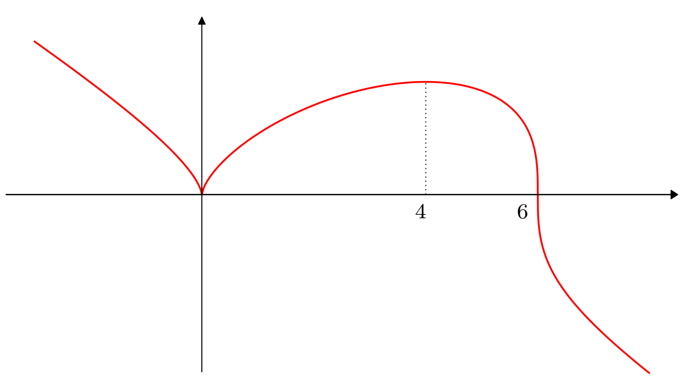

Gráfico da função f