Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

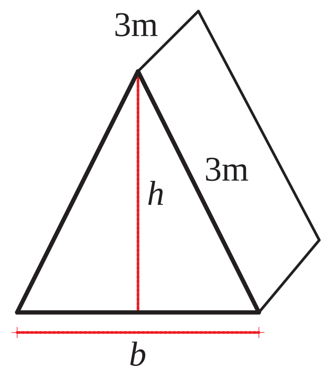
Máximos e mínimos em intervalos fechados

No texto em que aprendemos a Regra da Cadeia, fomos confrontados com o seguinte problema: a partir de uma lona de plástico com 6 metros de comprimento e 3 de largura, desejamos construir uma barraca com vista frontal na forma de um triângulo isósceles.

Se denotarmos por h a altura da barraca, o seu volume pode ser descrito pela função

$$V(h) = 3h\sqrt{9-h^2}, \quad h \in [0,3].$$

Naquele texto desenvolvemos um argumento geométrico que, juntamente com a Regra da Cadeia, nos permitiu encontrar o valor de h que fornecia o maior volume possível. Apresentaremos aqui argumentos teóricos que justificam os passos lá utilizados.



Vamos considerar na primeira parte da exposição uma função f qualquer. Dizemos que $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ é um *ponto de máximo de* f se

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall\, x \in \mathrm{dom}(f).$$

O número $f(x_0)$ é chamado *valor de máximo de* f. Os conceitos de *ponto de mínimo* e *valor de mínimo* da função f são definidos de maneira análoga.

A nomenclatura acima é bem natural. O ponto de máximo de uma função nada mais é do que o ponto onde ela atinge o maior valor de todos, que é chamado valor de máximo.

É importante observar que nem sempre uma função tem ponto de máximo. De fato, como

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty,$$

a função $f(x) = x$ não pode assumir valor máximo nem valor mínimo. Mesmo se o domínio for um conjunto limitado, as coisas podem não funcionar bem. Por exemplo, considere a função $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$. Vamos mostrar que essa função não pode assumir valor máximo. Dado qualquer número $x_0 \in (-1,1)$, temos que $(1+x_0)/2 \in \mathrm{dom}(g)$, pois $x_0 < 1$. Além disso,

$$g(x_0) = x_0 < \frac{1+x_0}{2} = g\left(\frac{1+x_0}{2}\right),$$

o que mostra que $x = x_0$ não pode ser ponto de máximo de f. Um argumento análogo mostra também que g não possui ponto de mínimo.

É claro que, para a função g acima, se considerássemos o domínio como sendo o intervalo fechado $[-1, 1]$, então o ponto $x = 1$ seria ponto de máximo. Porém, pode ocorrer de uma função definida em um intervalo fechado também não possuir ponto de máximo. Um exemplo pode ser construído, a partir da função acima, se definirmos

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 1/2, & \text{se } x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

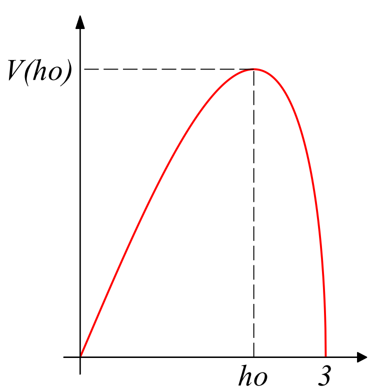
O mesmo raciocínio usado para a função g mostra que h também não assume valor máximo (nem mínimo) no intervalo $[-1, 1]$. Vale notar que, ao contrário das funções que usamos nos exemplos anteriores, essa última função não é contínua.

O resultado a seguir mostra que as obstruções que fazem com que uma função não tenha ponto de máximo são sempre de uma das naturezas acima, isto é, domínio ilimitado, domínio não sendo fechado ou função não sendo contínua.

Teorema 1 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f assume máximo e mínimo no intervalo $[a, b]$.*

O teorema garante que, se o domínio é um intervalo fechado e a função é contínua, então ela deve possuir pelo menos um ponto de máximo e pelo menos um ponto de mínimo. A demonstração é não trivial e não será apresentada aqui. Ao invés disso, vamos ver como utilizar o teorema para resolver vários problemas em que precisamos maximizar (ou minimizar) alguma função. Esse tipo de problema é conhecido como *problema de otimização*.

Uma pergunta natural agora é: como fazer para encontrar o ponto de máximo de uma função contínua definida em um intervalo fechado? Para trazer um pouco de luz à discussão, vamos recorrer novamente à nossa barraca.



Sabemos que a função V, por ser contínua, atinge o seu maior valor em algum $h_0 \in [0, 3]$. Olhando para o gráfico de V ao lado, podemos concluir que h_0 está na verdade no intervalo aberto $(0, 3)$. Note que o gráfico de V, próximo ao ponto de máximo, se parece com o cume de uma montanha. Se pensarmos na reta tangente percebemos que, no ponto $(h_0, V(h_0))$, ela é uma reta horizontal, e portanto devemos ter $V'(h_0) = 0$.

A situação acima é geral, conforme nos mostra o próximo resultado.

Teorema 2. *Se $x_0 \in dom(f)$ é um ponto de máximo (ou mínimo) da função f e f é derivável em $x = x_0$, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. A justificativa geométrica foi apresentada logo acima. Para a prova formal, suponha que $x_0 \in \text{dom}(f)$ é um ponto de máximo e que $f'(x_0)$ existe. Como $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \text{dom}(f)$, temos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

pois o numerador é não positivo e $(x - x_0) < 0$. Na expressão acima estamos usando o fato de que, como $f'(x_0)$ existe, tanto faz tomar o limite pela esquerda, pela direita, ou mesmo $x \to x_0$. Fazendo o limite pela direita, obtemos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

visto que agora $(x - x_0) > 0$ e o numerador continua sendo não positivo. As duas desigualdades acima implicam que $f'(x_0) = 0$. $\square$

O resultado acima motiva a seguinte definição:

Definição 1. *O ponto $x_0 \in (a, b) \subset dom(f)$ é chamado* ponto crítico *de f se uma das situações abaixo ocorre*

1. $f'(x_0) = 0$
2. $f'(x_0)$ *não existe.*

Observe que os pontos críticos estão sempre no interior do domínio da função. Para entender a importância deles, suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. De acordo com o Teorema 1, o ponto de máximo $x_0 \in [a, b]$ existe. Se $x_0 \in (a, b)$, então ele um ponto crítico de f. Deste modo, **os candidatos o ponto de máximo (ou mínimo) de f são os pontos críticos e os pontos a e b do extremos do domínio**.

Exemplo 1. Vamos encontrar o ponto de máximo da função

$$V(h) = 3h\sqrt{9 - h^2}, \quad h \in [0, 3].$$

O primeiro passo é determinar os pontos críticos. Para tanto, calculamos

$$V'(h) = 3\sqrt{9 - h^2} - \frac{3h^2}{\sqrt{9 - h^2}}, \qquad h \in (0, 3).$$

Como V possui derivada em todos os pontos de $(0, 3)$, os possíveis pontos críticos são aqueles pontos onde a derivada se anula. Isso ocorre somente em $h_0 = 3/\sqrt{2}$. Logo, o ponto de máximo de V pertence ao conjunto $\{0, h_0, 3\}$. Como $V(0) = V(3) = 0$ e $V(h_0) > 0$, concluímos que h_0 é o ponto de máximo de V no intervalo $[0, 3]$.

É importante lembrar que, na formulação original do problema da barraca, o domínio da função era o intervalo aberto $(0, 3)$. Isso porque quando $h = 0$ ou $h = 3$, teríamos barracas não habitáveis, porque o volume seria igual a zero. O que fizemos foi acrescentar estes dois pontos ao domínio da função de modo a poder aplicar o Teorema 1. Feito isso, é importante garantir que o ponto que resolve o problema de fato fica no intervalo aberto. Isso vai garantir que este problema de otimização de fato tem solução. $\square$

Exemplo 2. Vamos encontrar os pontos de máximo e mínimo da função

$$f(x) = x(2 - \ln(x)), \qquad x \in [1, e^2].$$

Eles existem porque a função é contínua e o domínio é um intervalo fechado.

Para determinar os pontos críticos em $(1, e^2)$ calculamos a derivada

$$f'(x) = (2 - \ln(x)) + x\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln(x), \qquad x \in (1, e^2).$$

Novamente, como f é derivável, os pontos críticos são somente as raízes da equação $f'(x) = 0$ que pertencem ao intervalo $(1, e^2)$. Fazendo as contas, obtemos somente $x = e$.

Os candidatos à máximo (ou mínimo) estão no conjunto $\{1, e, e^2\}$. Uma vez que

$$f(1) = 2, \qquad f(e) = e, \qquad f(e^2) = e^2(2 - \ln e^2) = e^2(2 - 2\ln e) = 0,$$

concluímos que o ponto $x = e$ é o ponto de máximo e $x = e^2$ é o ponto de mínimo de f.

O fato do mínimo ocorrer em $x = e^2$ mostra que é importante não esquecer de calcular a função também nos pontos do extremo do intervalo de definição. $\square$

Exemplo 3. Vamos considerar agora

$$f(x) = 2x + |x - 2|, \qquad x \in [0, 3].$$

Observe inicialmente que, como a função $y \mapsto |y|$ não é derivável em $y = 0$, o mesmo ocorre para a função f no ponto $x = 2$. Assim, este é um ponto crítico da função f.

Se $x \in (0, 2)$, temos que $f(x) = 2x + (2 - x) = x + 2$, de modo que $f'(x) = 1$. Por outro lado, no intervalo $(2, 3)$, temos que $f(x) = 2x + (x - 2) = 3x - 2$, de modo que $f'(x) = 3$. Assim, o único ponto crítico no intervalo $(0, 3)$ é o ponto $x = 2$.

As considerações acima mostram que os candidatos à pontos de máximo e mínimo são $\{0, 2, 3\}$. Uma vez que

$$f(0) = 2, \qquad f(2) = 4, \qquad f(3) = 7,$$

concluímos que $x = 0$ é ponto de mínimo e $x = 3$ é ponto de máximo de f. $\square$

Tarefa

A partir de uma cartolina medindo 10×16 vamos construir uma caixa sem tampa como segue: recortamos quadrados de lado x em cada um dos vértices da cartolina e dobramos as abas.

1. Verifique que a função $V(x)$, que fornece o volume da caixa em função de x, é dada por
$$V(x) = x(10-2x)(16-2x), \qquad x \in (0,5).$$
2. Determine os pontos críticos da função V no intervalo $(0,5)$.
3. Explique por que a função V, quando considerada no intervalo $[0,5]$, tem ponto de máximo. Em seguida, calcule este ponto.
4. Determine as dimensões da caixa de maior volume que pode ser construída com o processo do enunciado.