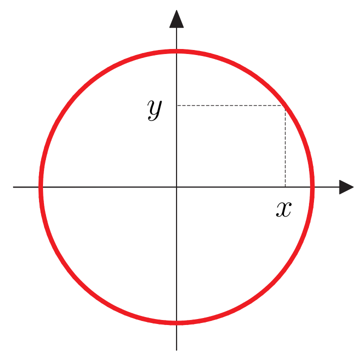
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

A Regra da Cadeia

(solução da tarefa)

Utilizando a equação $x^2 + y^2 = 16$ podemos isolar o y para obter $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$. Como o número y é positivo (veja desenho ao lado), concluímos que $y = \sqrt{16 - x^2}$.



Deste modo, como o retângulo da figura acima tem lados medindo x e y, e ele representa a quarta parte do retângulo inscrito, concluímos que

$$A(x) = 4x\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in (0, 4).$$

Observe que excluímos os pontos $x = 0$ e $x = 4$ do domínio da função porque, nestes casos, o retângulo se degenera em uma linha, que teria portanto área igual a zero.

Para calcular a derivada de $A(x)$ vamos primeiro utilizar a regra do produto

$$A'(x) = (4x)'\sqrt{16 - x^2} + 4x(\sqrt{16 - x^2})' = 4\sqrt{16 - x^2} + 4x(\sqrt{16 - x^2})'.$$

Para calcular a derivada $(\sqrt{16 - x^2})'$, vamos primeiro notar que o termo a ser derivado é uma composição de funções. Para verificar isso, basta que tentemos calcular a função em algum ponto, digamos $x = 2$. Primeiro, precisamos calcular $16 - 2^2 = 12$ e, depois, tomar a raiz quadrada do resultado para obter $\sqrt{12}$. Como foi necessário mais de um passo temos uma composição de funções. Mais especificamente, se $f(y) = \sqrt{y}$ e $g(x) = 16 - x^2$, então $\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{g(x)} = f(g(x))$. Deste modo, da Regra da Cadeia obtemos que

$$(\sqrt{16 - x^2})' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}(16 - x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}}(-2x),$$

em que usamos o fato de que $f'(y) = (\sqrt{y})' = 1/(2\sqrt{y})$.

Substituindo na expressão de $A'(x)$ obtemos

$$A'(x) = 4\sqrt{16 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{64 - 8x^2}{\sqrt{16 - x^2}}, \quad x \in (0, 4).$$

Assim, a derivada $A'(x)$ se anula somente no ponto $x_0 = \sqrt{8}$, de modo que a maior área que pode ser obtida é

$$A(x_0) = A(\sqrt{8}) = 4\sqrt{8}\sqrt{16 - (\sqrt{8})^2} = 32.$$