Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 08 – Soluções

Temas abordados: Taxas relacionadas; Extremos de funções

Seções do livro: 3.10, 4.1

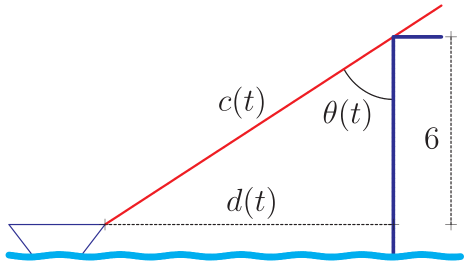
1) Suponha que um barco seja puxado para o cais por uma corda presa à sua proa, situada 6 m abaixo do apoio da corda no cais, conforme a figura abaixo. Suponha ainda que a corda seja puxada com uma velocidade de 2 m/s. Nesse caso, o comprimento $c(t)$ da corda entre a proa e o apoio, a distância $d(t)$ do barco ao cais e o ângulo $\theta(t)$ entre a corda e a vertical são funções do tempo t. Denote por τ o instante em que $c(\tau) = 10$ m.

(a) Calcule o valor de $d(\tau)$.

(b) Calcule a derivada $d'(\tau)$.

(c) Calcule o valor de $\operatorname{tg}(\theta(\tau))$.

(d) Usando os itens anteriores e a regra da cadeia, calcule o valor de $\theta'(\tau)$.



Soluções:

(a) Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de lados $d(\tau)$, $c(\tau)$ e 6, temos que

$$d(\tau) = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

(b) Novamente por Pitágoras, segue-se que as medidas $c(t)$, $d(t)$ e 6 estão relacionadas por

$$c^2(t) = d^2(t) + 6^2.$$

Derivando essa igualdade e utilizando regra da cadeia, segue que

$$2c(t)\, c'(t) = (c^2)'_{c=c(t)}(c(t))' = (c^2(t))' = (d^2(t) + 6^2)' = (d^2)'_{d=d(t)}(d(t))' = 2d(t)\, d'(t).$$

Da igualdade $2c(t)\, c'(t) = 2d(t)\, d'(t)$, isolando $d'(t)$, obtemos que $d'(t) = c(t)\, c'(t)/d(t)$. Observe agora que $c'(t) = -2$, uma vez que a corda está sendo *puxada* com uma velocidade de 2. Após esta observação, basta substituir $t = \tau$ na expressão de $d'(t)$ e usar os valores $d(\tau) = 10$, obtido no item anterior, $c(\tau) = 10$ e $c'(\tau) = -2$, de modo a obter

$$d'(\tau) = \frac{-20}{8}.$$

(c) A tangente de $\theta(\tau)$ é igual à medida $d(\tau) = 8$ do cateto oposto dividida pela medida 6 do cateto adjacente, de modo que

$$\operatorname{tg}(\theta(\tau)) = \frac{8}{6}.$$

(d) Em um instante genérico t, tem-se $\operatorname{tg}(\theta(t)) = d(t)/6$. Derivando esta igualdade em relação a t, obtém-se que

$$(\, 1 + \operatorname{tg}^2(\theta(t))\,)\, \theta'(t) = d'(t)/6.$$

Basta agora isolar $\theta'(t)$, susbtituir $t = \tau$ e usar os valores já calculados de $\operatorname{tg}(\theta(\tau)) = 8/6$ e $d'(\tau) = -20/8$, de modo a obter

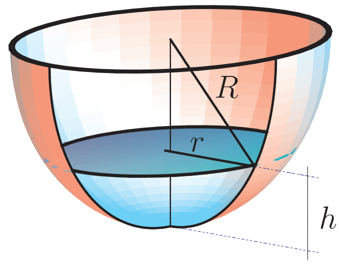
$$\theta'(\tau) = \frac{-12}{80}.$$

2) Considere um reservatório, na forma de um hemisfério de raio $R = 10$ m, com água até uma altura h, conforme ilustra a figura abaixo. Nesse caso, o volume de água é dado por $V(h) = (\pi/3)(3\,R\,h^2 - h^3)$. Suponha que o reservatório esteja sendo abastecido com uma vazão de $16\,\pi$ m^3/min. Portanto a altura h e o raio r da superfície da água são funções do tempo. Observe que a forma esférica do reservatório estabelece uma relação entre as funções $h = h(t)$ e $r = r(t)$.

(a) Usando a regra da cadeia aplicada a $V(h(t))$, determine o valor de $h'(\tau)$ no instante τ em que $h(\tau) = 4$.

(b) Obtenha a relação entre as funções $h(t)$ e $r(t)$ menciona acima.

(c) Usado os itens anteriores, determine o valor de $r'(\tau)$ no instante τ em que $h(\tau) = 4$.



Soluções:

(a) Como o reservatório está sendo abastecido com uma vazão de $16\,\pi$ m^3/min, segue que

$$(V(h(t)))' = 16\,\pi,$$

para todo t. Temos que $V'(h) = \pi(2\,R\,h - h^2)$. Pela regra da cadeia, obtemos então que

$$16\,\pi = (V(h(t)))' = (V(h))'_{h=h(t)}(h(t))' = \pi(2\,R\,h(t) - h^2(t))h'(t).$$

Isolando $h'(t)$, segue que

$$h'(t) = \frac{16}{2\,R\,h(t) - h^2(t)}.$$

Calculando isso no instante τ, no qual $h(\tau) = 4$, obtemos que

$$h'(\tau) = \frac{16}{8\,R - 16}.$$

(b) Pela figura, observando que a altura do reservatório é R, temos que $r(t)$ e $R - h(t)$ são os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa R. Pelo teorema de Pitágoras, segue que

$$r^2(t) + (R - h(t))^2 = R^2.$$

(c) Isolando $r(t)$ da igualdade do item anterior, obtemos que $r(t) = \sqrt{2\,R\,h(t) - h^2(t)}$. Em particular, no instante τ em que $h(\tau) = 4$, temos que $r(\tau) = \sqrt{8\,R - 16}$. Agora derivando a igualdade do item anterior e utilizando a regra da cadeia, segue que

$$(r^2)'_{r=r(t)}(r(t))' + ((R-h)^2)'_{h=h(t)}(h(t))' = 2r(t)r'(t) - 2(R - h(t))h'(t) = 0.$$

Isolando $r'(t)$, obtemos que

$$(*) \quad r'(t) = \frac{R - h(t)}{r(t)}\,h'(t).$$

Calculando isso no instante τ e utilizando os valores $r(\tau)$ e $h'(\tau)$, obtidos nos ítens anteriores, e $h(\tau) = 4$, segue que

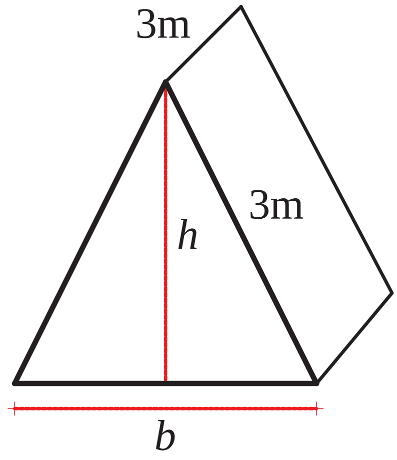
$$r'(\tau) = \frac{R-4}{\sqrt{8\,R - 16}}\frac{16}{8\,R - 16} = 16\frac{R-4}{(8\,R - 16)^{\frac{3}{2}}}.$$

3) Suponha que, na construção de uma barraca com vista frontal na forma de um triângulo isósceles de altura h, as laterais devem ser feitas a partir de uma lona com 6 m de comprimento e 3 m de largura, conforme ilustra a figura.

(a) Determine o comprimento b da base do triângulo em função da altura h.

(b) Use o item anterior para expressar o volume $V(h)$ da barraca em função de h.

(c) Determine h de forma que o volume $V(h)$ seja máximo, justificando a sua resposta.



<u>Soluções</u>:

(a) Usando o Teorema de Pitágoras obtemos que $3^2 = h^2+(b/2)^2$, e assim $b = 2\sqrt{9-h^2}$.

(b) Basta usar o item (a) para se concluir que

$$V(h) = 3\frac{bh}{2} = 3h\sqrt{9-h^2}, \quad h \in [0,3].$$

(c) Note que

$$V'(h) = 3\sqrt{9-h^2} - \frac{3h^2}{\sqrt{9-h^2}}.$$

Assim, a equação $V'(h) = 0$ é equivalente a

$$3\sqrt{9-h^2} = \frac{3h^2}{\sqrt{9-h^2}},$$

ou ainda,

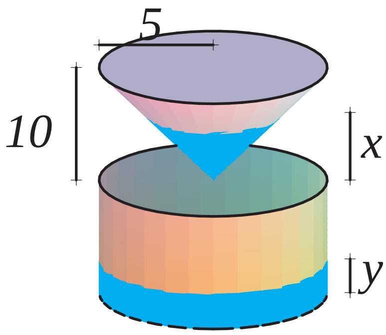
$$9 - h^2 = h^2.$$

Logo, o único ponto crítico de V no intervalo $(0,3)$ é o ponto $h = 3/\sqrt{2}$. Uma vez que $V(0) = V(3) = 0$ e $V(3/\sqrt{2}) > 0$ concluímos que o ponto crítico $h = 3/\sqrt{2}$ é o ponto de máximo global de V em $[0,3]$.

4) Um filtro na forma de um cone circular reto tem altura igual a 10 cm e raio da base igual a 5 cm. Suponha que uma certa quantidade de água seja colocada nesse filtro e que ela escoe para um recipiente na forma de um cilindro circular reto de mesmo raio e altura que o filtro, conforme ilustra a figura abaixo. Indique por x a altura da água no filtro e por y a altura da água no recipiente.

(a) Sendo r o raio da superfície da água no filtro, use semelhança de triângulos para determinar r em função de x.

(b) Sabendo que o volume de um cone circular reto de raio r e altura x é igual a $(1/3)\pi r^2 x$, determine o volume $V_1(x)$ da água no filtro como função de x.



(c) Determine o volume $V_2(y)$ de água no recipiente cilíndrico.

(d) Considerando que $x = x(t)$ e $y = y(t)$, em que $t > 0$ denota o tempo, determine y' no instante $\tau > 0$ tal que $x(\tau) = 5$ e $x'(\tau) = -0,5$.

Soluções:

(a) Fazendo um corte transversal no cone veremos dois triângulos retângulos semelhantes. Os catetos do primeiro medem 5 e 10. Os respectivos catetos do outro medem r e x. Segue então $r = x/2$.

(b) Basta usar a fórmula do volume do cone e lembrar que $r = r(x) = x/2$ para obter $V_1(x) = (\pi/12)x^3$

(c) O volume de água no cilindro reto é dado por $V_2(y) = 5^2 \cdot \pi \cdot y$.

(d) Como a água escoa do cone para o cilindro sem desperdício, a taxa de variação dos dois volumes V_1 e V_2, em módulo, são iguais. Como uma delas diminui enquanto a outra aumenta, elas têm sinal contrário, isto é, $\frac{d}{dt}V_2(y(t)) = -\frac{d}{dt}V_1(x(t))$. Assim, podemos usar os itens anteriores e a regra da cadeia para obter

$$3\frac{\pi}{12}x(t)^2 x'(t) = \frac{d}{dt}V_1(x(t)) = -\frac{d}{dt}V_2(y(t)) = -25\pi y'(t),$$

ou ainda

$$y'(t) = -\frac{1}{4 \cdot 25}x(t)^2 x'(t).$$

Fazendo $t = \tau$ e usando os valores do enunciado concluímos que $y'(\tau) = 1/8$.

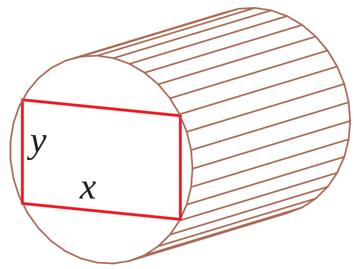
5) Suponha que uma viga retangular, de largura x e altura y, deva ser cortada de um cilindro de seção circular de raio a, como ilustra a figura abaixo. A resistência R dessa viga é diretamente proporcional ao produto de sua largura x pelo quadrado de sua altura y. Indique por K a constante de proporcionalidade e observe que a altura $y = y(x)$ pode ser obtida a partir da largura x, e portanto a resistência $R = R(x)$ pode ser expressa apenas em função da largura da viga x, onde x varia de 0 até o diâmetro $2a$ do cilindro circular.

(a) Obtenha a expressão de $y = y(x)$ em termos de x.

(b) Obtenha a expressão da resistência $R = R(x)$ como função de x.

(c) Calcule os pontos críticos de $R(x)$ no domínio $(0, 2a)$.

(d) Calcule o valor máximo da resistência que pode ser obtido entre as vigas cortadas do cilindro.



Soluções:

(a) Como o centro do círculo de raio a coincide com o centro do retângulo inscrito de lados x e y, a diagonal deste retângulo tem comprimento igual a $2a$. Pelo teorema de Pitágoras, segue que $(2a)^2 = x^2 + y^2$, e portanto $y = y(x) = \sqrt{4a^2 - x^2}$.

(b) A resistência é dada por $R = Kxy^2$, isto é,

$$R = R(x) = Kx(4a^2 - x^2) = K(4a^2x - x^3).$$

(c) Como a função R é derivável em $(0, 2a)$, os pontos críticos nesse intervalo são as soluções da equação $R'(x) = K(4a^2 - 3x^2) = 0$. No domínio $(0, 2a)$, a única solução dessa equação é

$$x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

(d) Observe que o valor de R nos extremos do intervalo é $R(0) = R(2a) = 0$. Nos itens anteriores vimos que R possui apenas o ponto crítico $x = 2a/\sqrt{3}$ no intervalo $(0, 2a)$. O valor de R nesse ponto é dado por

$$R\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right) = K\left(4a^2\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = K\frac{16a^3}{3\sqrt{3}} = K\frac{16a^3\sqrt{3}}{9} > 0.$$

Comparando os valores de R na fronteira e no ponto $x = 2a/\sqrt{3}$ concluímos este último é o ponto de máximo de R. Assim, a resistência máxima é $K\frac{16a^3\sqrt{3}}{9}$.