Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

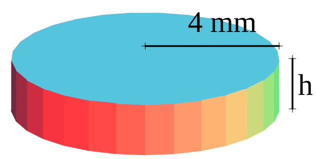
Lista de Aplicações – Semana 02

Temas abordados: Limites no ponto (conceito intuitivo e formal)

Seções do livro: 2.1 a 2.4

1) Suponha que um comprimido tenha a forma de um cilindro circular reto de raio da base igual a 4 mm, altura $h > 0$, e deva ter volume igual a 20 mm^3. Como o processo de fabricação está sujeito a erros, a altura h deve ser razoavelmente precisa, uma vez que dela depende a dosagem de medicamento que é ingerida pelo paciente.

(a) Determine, em função de h, o volume $V(h)$ do comprimido.



(b) Determine o valor h_0 para que o volume do comprimido seja igual a $V(h_0) = V_0 = 20$ mm^3.

(c) Determine, em mm, o erro máximo tolerado na altura h de maneira que $|V(h) - 20|$ seja inferior a $1/10$.

(d) Dado $\varepsilon > 0$, encontre $\delta > 0$ tal que o erro $|V(h) - 20|$ no volume do comprimido seja menor do que ε sempre que o erro na altura $|h - h_0|$ seja menor do que δ.

2) Uma companhia de turismo cobra uma taxa de serviço fixa de R$ 50,00 para pacotes turísticos de valor menor ou igual a R$ 1.000,00. Para pacotes de valor superior a R$ 1.000,00 e menor ou igual a R$ 5.000,00, a companhia cobra uma taxa fixa de R$ 30,00 acrescida de 2% do valor do pacote. Para os demais pacotes, a taxa fixa é de R$ c, acrescida de 1% do valor do pacote. Indicando por $T(x)$ o valor total da taxa de serviço cobrada por um pacote turístico no valor de x reais, julgue os itens abaixo, justificando suas respostas.

(a) O gráfico da função $T(x)$ contém o ponto $(3000, 90)$.

(b) Para $c = 100$, não é possível encontrar um pacote turístico de valor R$ x_0 de modo que se tenha $T(x_0) = 140$.

(c) $\lim_{x\to 1000^+} T(x) = 50$.

(d) Não existe o limite $\lim_{x\to 1000} T(x)$.

(e) $\lim_{x\to 5000^+} T(x)$ não depende de c.

(f) $c = 80$ se, e somente se, $\lim_{x\to 5000} T(x) = T(5000)$.

3) Um gás é mantido a uma temperatura constante em um pistão. À medida que o pistão é comprimido, o volume do gás decresce com a função $V(P) = 200/P$ litros, até atingir a pressão crítica de 100 torr quando ele se liquidifica, havendo nesse momento uma variação brusca de volume. Em seguida, o seu volume passa a ser dado pela função $V(P) = -0,01P + 2$ até que seja atingida a nova pressão crítica de 150 torr, a partir da qual o volume permanece constante e igual a 0,5 litros.

(a) Determine a expressão de $V(P)$.

(b) Calcule os limites laterais $\lim\limits_{P \to P_0^-} V(P)$ e $\lim\limits_{P \to P_0^+} V(P)$ para $P_0 = 100$. Em seguida, decida sobre a existência do limite $\lim\limits_{P \to P_0} V(P)$

(c) Repita o item acima para $P_0 = 150$.

(d) O que acontece com o volume $V(P)$ para valores P próximos de zero?

4) Considere o círculo unitário da figura abaixo, em que α denota um ângulo no intervalo $(0, \pi/2)$. O triângulo Δ_{OAB}, cuja altura está representada por h, está contido no setor circular S_{OAB}, que, por sua vez, está contido no triângulo Δ_{OCB} de altura H.

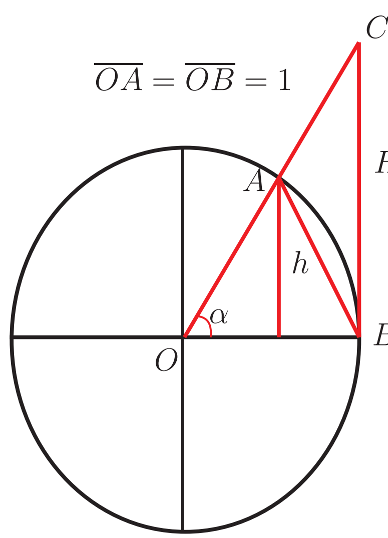
(a) Determine, em termos de h, α e H, as expressões das áreas do triângulo Δ_{OAB}, do setor circular S_{OAB} e do triângulo Δ_{OCB}. Em seguida, use a figura para comparar tais grandezas.

(b) Determine, com ajuda de funções trigonométricas convenientes, uma equação que relaciona α e h; e outra que relaciona α e H.

(c) Use os itens (a) e (b) para mostrar que se $\alpha \in (0, \pi/2)$, então vale $0 < \operatorname{sen} \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

(d) Use o item (c) para mostrar que $\lim_{\alpha \to 0^+} \operatorname{sen} \alpha = 0$.

(e) Usando o mesmo método para ângulos pertencentes ao intervalo $(-\pi/2, 0)$, mostre que $\lim_{\alpha \to 0^-} \operatorname{sen} \alpha = 0$. Em seguida, conclua que $\lim_{\alpha \to 0} \operatorname{sen} \alpha = 0$.



5) Ainda com respeito à figura do exercício acima, vamos mostrar o Limite Trigonométrico Fundamental.

(a) Sabendo que $\cos \alpha > 0$ sempre que $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ faça $\cos \alpha = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} \alpha)^2}$ e conclua que $\lim_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 1$.

(b) Inverta a desigualdade $\operatorname{sen} \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$, válida para $\alpha \in (0, \pi/2)$.

(c) Lembrando que se $\alpha \in (0, \pi/2)$ temos $\operatorname{sen} \alpha > 0$ use o item acima para mostrar que, nesse intervalo, vale $\cos \alpha < \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} < 1$.

(d) Mostre que $\lim_{\alpha \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$.

(e) Use um procedimento análogo para ângulos pertencentes ao intervalo $(-\pi/2, 0)$ e mostre que $\lim_{\alpha \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$. Em seguida, conclua que $\lim_{\alpha \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$.

Gabarito

1. (a) $V(h) = 4^2 \pi h$
   (b) $h_0 = 20/(4^2\pi)$
   (c) $1/(10 \times 4^2\pi)$
   (d) $\delta \le \varepsilon/(4^2\pi)$
2. Itens corretos: (a), (b), (c), (f)
3. (a)
$$V(P) = \begin{cases} 200/P, & \text{se } 0 < P \le 100, \\ -0,01P + 2, & \text{se } 100 < P \le 150, \\ 0,5, & \text{se } 150 < P. \end{cases}$$
   (b) $\lim_{P \to 100^-} V(P) = 2, \quad \lim_{P \to 100^+} V(P) = 1.$ Não existe o limite.
   (c) $\lim_{P \to 150^-} V(P) = 1/2, \quad \lim_{P \to 150^+} V(P) = 1/2.$ O limite existe e vale $1/2$
   (d) se torna cada vez maior
4. (a) área $\Delta_{OAB} = h/2$; área $S_{OAB} = \alpha/2$; área $\Delta_{OBC} = H/2$
   (b) $h = \operatorname{sen} \alpha$; $H = \operatorname{tg} \alpha$
5. (a)
   (b) $\dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$