Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 14

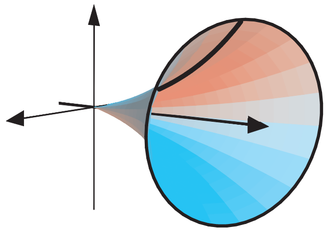
Temas abordados: Integração por partes; Volumes

Seções do livro: 8.1; 6.1; 6.2

1) Para uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do seu gráfico em torno do eixo $\mathcal{O}x$ é dado por

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Calcule esse volume no caso em que $f(x) = xe^x$, definida no intervalo $[0, 1]$, conforme ilustra a figura ao lado.



2) A figura ao lado ilustra o gráfico da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$. A área $A(R)$ sob esse gráfico entre $x = 0$ e $x = R$ é dada pela integral

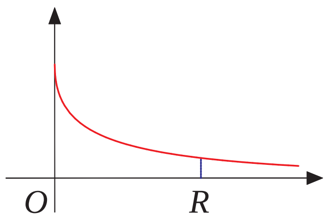
$$A(R) = \int_0^R e^{-\sqrt{x}} \, dx.$$

(a) Use uma mudança de variáveis para transformar a integral indefinida $\int e^{-\sqrt{x}} \, dx$ em uma outra cujo integrando não envolva a função raiz quadrada.

(b) Calcule a integral do item anterior usando integração por partes.

(c) Usando os resultados anteriores, determine explicitamente a função $A(R)$.

(d) Calcule o limite $\lim_{R\to\infty} A(R)$ usando a regra de H'Lôpital, e verifique se a área sob o gráfico da $f(x)$, para $x \in [0, \infty)$, é finita.

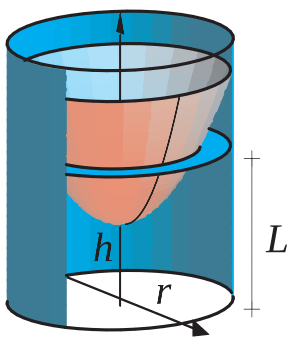


3) Considere um recipiente cilíndrico de raio $r = 5$ cm, inicialmente em repouso com água até a altura $L = 10$ cm. Em seguida, o recipiente começa a girar até que, juntamente com a água, alcance uma velocidade angular constante igual a ω rad/s. Nesse caso, a superfície da água corresponde à rotação, em torno do eixo $\mathcal{O}y$, do gráfico de uma função $f(x)$, com $x \in [0, r]$. Não havendo perda de água, pode-se mostrar que $f(x) = h + \omega^2 x^2 / 2g$, onde $g = 980$ cm/s^2 é a aceleração da gravidade e h é uma constante que depende de ω.

(a) O volume V do sólido de rotação do gráfico de $f(x)$ em torno do eixo $\mathcal{O}y$ é igual a $V = \int_0^r 2\pi \, x \, f(x) \, dx$. Use essa informação para calcular o volume de água no recipiente em termos de ω e h.

(b) Usando o item anterior, obtenha h como função de ω.

(c) Determine o valor de ω para que h seja igual à metade da altura da água em repouso.



4) Suponha que, juntamente com o combustível, um foguete tenha massa inicial de m_0 kg, e que o combustível seja consumido a uma taxa de r kg/s. Assim, a massa do foguete no instante $t \geq 0$ é dada por $m(t) = m_0 - r\,t$. Suponha ainda que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante de v_0 m/s em relação ao foguete. Nesse caso, indicando por g a aceleração da gravidade e considerando valores pequenos de t, a velocidade do foguete em relação à Terra pode ser modelada por

$$v(t) = -g\,t - v_0 \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

(a) Determine uma primitiva para a função $\ln(x)$ usando integração por partes.

(b) Use o item anterior e substituição de variáveis para determinar uma primitiva para a função $\ln(m(t)/m_0)$.

(c) Determine a altura $s(t)$ do foguete em um instante $t > 0$, supondo $s(0) = 0$.

(d) Seja t_0 o instante em que $m(t_0)$ é igual a 90% da massa inicial m_0. Calcule a altura do foguete no instante t_0 em termos das constantes m_0, r, v_0, g e $\ln(9/10)$.

5) Suponha que uma pressão sonora provoque a vibração da membrana do tímpano de uma pessoa e que a velocidade $v(t)$ de um ponto da membrana seja dada por $v(t) = 2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$.

(a) Determine a integral indefinida da função $v(t)$.

(b) Determine a posição $s(t)$ do ponto da membrana supondo que $s(0) = 0$.

(c) Determine o comportamento de $s(t)$ após um longo período de tempo, isto é, $\lim_{t\to\infty} s(t)$.

Gabarito

1. O volume é igual a $\pi(e^2 - 1)/4$.
2. (a) $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^{-t}\,dt$
   (b) $-2(t+1)/e^t + K$
   (c) $A(R) = 2 - 2(\sqrt{R}+1)/e^{\sqrt{R}}$
   (d) a área é igual a 2
3. (a) $V = \pi r h^2 + (\pi\omega^2 r^4)/(4g)$
   (b) $h(\omega) = L - (\omega^2 r^2)/(4g)$
   (c) $\omega = \sqrt{2Lg}/r$
4. (a) $x(\ln(x) - 1) + K$
   (b) $\frac{-m(t)}{r}\left(\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - 1\right) + K_1$
   (c) $-\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\frac{m(t)}{r}\left(\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - 1\right) + v_0\frac{m_0}{r}$
   (d) $s(t_0) = -\frac{1}{2}\,g\,\left(\frac{m_0}{10\,r}\right)^2 + v_0\frac{9\,m_0}{10\,r}\left(\ln\left(\frac{9}{10}\right) - 1\right) + v_0\frac{m_0}{r}$
5. (a) $-e^{-t}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t))$
   (b) $s(t) = 1 - e^{-t}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t))$
   (c) $\lim_{t\to\infty} s(t) = 1$