Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

A regra do produto e do quociente para derivadas

Vimos em um texto anterior que a derivada de uma soma é a soma das derivadas, um resultado análogo valendo para a diferença de duas funções. Deste modo, é natural questionarmos se a derivada de um produto é o produto das derivadas. Vamos investigar esta questão com um exemplo.

Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$, temos que

$$f'(x) \cdot g'(x) = (x^3)' \cdot (x^2)' = 3x^2 \cdot 2x = 6x^3, \qquad (f \cdot g)'(x) = (x^3 \cdot x^2)' = (x^5)' = 5x^4.$$

Assim, o produto das derivadas é $6x^3$, que é um polinômio de grau 3, enquanto que a derivada do produto é $5x^4$, que é um polinômio de grau 4. Este exemplo mostra que **a derivada de um produto não é o produto das derivadas**. Utilizando as mesmas funções acima pode-se facilmente calcular

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3x}{2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = (x)' = 1,$$

e portanto a **a derivada de um quociente não é o quociente das derivadas**.

Apesar de nos exemplos acima a regra ditada pela nossa intuição ter falhado, em ambos os casos as novas funções se mostraram deriváveis. O teorema abaixo estabele que o produto (e o quociente) de funções deriváveis é derivável e fornece a regra para o cálculo dessas derivadas.

Teorema 1. *Se as funções f e g são deriváveis em $x = a$, então*

1. $(f \cdot g)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$;
2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, *desde que* $g(a) \neq 0$.

Prova do Teorema 1. Vamos provar a regra do produto. Como f e g são deriváveis em $x = a$ temos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\
&= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\
&= g(x)\cdot\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)+f(a)\cdot\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right).
\end{aligned}$$

Na segunda igualdade acima, subtraímos e somamos o termo $f(a)g(x)$ no numerador. Isto pode parece arbitrário mas tem uma razão simples: queremos que os quocientes em (1) apareçam, porque sabemos que eles possuem limite. Tomando o limite na expressão acima, usando (1) e lembrado que g é contínua em $x=a$ (por ser derivável neste ponto), obtemos

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\left[g(x)\cdot\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)+f(a)\cdot\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\right]\\
&= g(a)\cdot f'(a)+f(a)\cdot g'(a),
\end{aligned}$$

o que estabelece a fórmula do item 1. A prova do item 2 será uma parte da sua tarefa. □

Exemplo 1. Se $f(x)=x^3$ e $g(x)=x^2$, temos que

$$(f\cdot g)'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)=x^3\cdot(2x)+(3x^3)\cdot x^2=5x^4,\qquad \forall\, x\in\mathbb{R},$$

e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}=\frac{x^2\cdot(3x^2)-x^3\cdot(2x)}{x^4}=\frac{x^4}{x^4}=1,\qquad \forall\, x\neq 0,$$

conforme esperado. Evidentemente, para as funções acima seria mais simples fazer o produto (ou quociente) primeiro e depois derivar, sem usar assim as regras do Teorema 1. Porém, vale a pena usar estas funções somente para ver que a aplicação da fórmula nos dá de fato o resultado correto.

Observe ainda que, ao derivarmos o quociente, foi necessário excluir o ponto $x=0$ do domínio da derivada. Isto ocorre porque a fórmula do item 2 do Teorema 1 vale somente quando $g(a)\neq 0$ (lembre que não podemos dividir por zero!). □

Exemplo 2. Usando a regra do produto temos que

$$(\sqrt{x}\cos(x))'=(\sqrt{x})'\cos(x)+\sqrt{x}(\cos(x))'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x)-\sqrt{x}\,\mathrm{sen}(x),\qquad \forall\, x>0.$$

Note que o domínio da derivada é o conjunto $(0,+\infty)$, ainda que $x=0$ esteja no domínio da função $\sqrt{x}\cos(x)$. □

Exemplo 3. Lembre que em um texto anterior ficamos devendo a derivada da função tangente. Vamos a ela:

$$\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot(\operatorname{sen}(x))' - \operatorname{sen}(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cdot(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x), \qquad \forall x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Note que excluímos do domínio os pontos para os quais a função cosseno se anula. □

Não vale a pena memorizar a derivada da função tangente. É mais simples memorizar a regra do quociente pois, com ela e com a derivada das funções seno e coseno, podemos facilmente repetir a conta acima. De fato, a tabela abaixo contém as regras básicas e, a partir delas, podemos derivar muitas outras funções (veja a tarefa para alguns exemplos).

função	derivada
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$(f\cdot g)(x)$	$f(x)g'(x) + f(x)g'(x)$
$(f/g)(x)$, se $g(x) \neq 0$	$\dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
x^r, com $r \in \mathbb{R}$	rx^{r-1}
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$

Com relação às funções elementares, ainda falta calcularmos a derivada das funções exponencial e logaritmo. Isso será feita mais para frente.

Finalizamos o texto com um exemplo um pouco mais interessante do ponto de vista prático. Para ele, precisamos lembrar que a derivada de uma função representa a sua taxa de variação.

Exemplo 4. Suponha que a concentração de medicamento no sangue de um paciente, $t > 0$ horas após a ingestão de um comprimido, seja dada por

$$C(t) = \frac{3t}{2t^2+8}.$$

Neste caso, a taxa de variação da concentração pode ser calculada usando-se a fórmula da potência e do quociente:

$$C'(t) = \frac{(2t^2+8)\cdot(3t)' - 3t\cdot(2t^2+8)'}{(2t^2+8)^2} = \frac{(2t^2+8)\cdot 3 - 3t\cdot(4t)}{(2t^2+8)^2},$$

e portanto

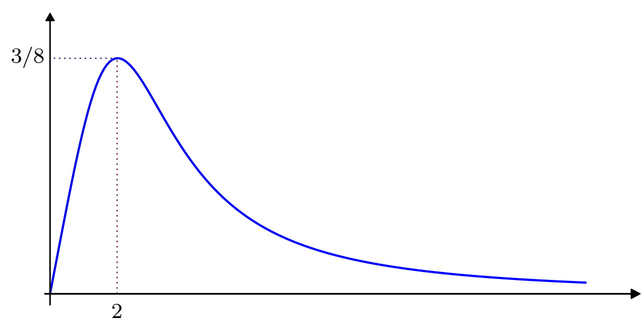
$$C'(t) = \frac{24 - 6t^2}{(2t^2 + 8)^2}, \qquad t > 0.$$

Note que a derivada existe somente no intervalo aberto $(0, \infty)$. Além disso, ela se anula exatamente em $t = 2$, tendo o seu sinal o seguinte comportamento:

$$C'(t) > 0 \text{ quando } t \in (0, 2), \qquad C'(t) < 0 \text{ quando } t \in (2, \infty).$$

Ora, sendo C' a taxa de variação da concentração, o estudo de sinal acima nos permite intuir que a função C cresce no intervalo $(0, 2)$, pois neste intervalo a sua taxa de variação é positiva. Analogamente, a função C deve ser decrescente no intervalo $(2, \infty)$.

Deste modo, a concentração começa valendo zero (antes da ingestão do comprimido), cresce nas duas primeitas horas e decresce a partir de então. Seu gráfico deve ter o aspecto abaixo:



Observe que, no instante $t = 2$, a reta tangente ao gráfico de C é horizontal. Este é exatamente o instante em que a concentração de medicamento é máxima. $\square$

Estudos como o feito acima são fundamentais porque permitem decidir de quantas em quantas horas deve ser tomado cada comprimido. A eficácia está relacionada com o tempo que a medicação age no organismo durante o tratamento. Se a função determinasse o lucro de uma empresa em função da quantidade de empregados, o estudo permitiria decidir qual a quantidade de empregados que faz com que o lucro seja máximo.

Os arguentos acima serão formalizados nas próximas semanas. Esperamos que eles sirvam de motivação para que você avance no maravilhoso mundo das derivadas e suas diversas aplicações!

Tarefa

Na primeira parte da tarefa vamos provar a fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

supondo que f e g são deriváveis em $x = a$ e que $g(a) \neq 0$.

1. Efetue os cálculos que faltam na expressão abaixo

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \cdots = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}.$$

2. Somando e subtraindo o termo $f(a)g(a)$ no numerador da expressão acima, verifique que

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{1}{g(x)g(a)}\left[g(a)\cdot\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) - f(a)\cdot\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\right]$$

3. Faça $x \to a$ para obter a fórmula do quociente.

Já sabemos a derivada do seno, coseno e tangente. Na segunda parte da tarefa você deve usar a fórmula acima para calcular as derivadas das demais funções trigonométrias, cuja expressões estão indicadas abaixo:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \csc(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}, \qquad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$