Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Integração por subtituição

(solução da tarefa)

Vamos denotar por $h(t)$ a altura da árvore t após ter sido transplantada. Usando as informações do enunciado da tarefa concluímos que a função $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} h'(t) = 1 + \dfrac{1}{(t+1)^2}, & t \in (0,+\infty), \\ h(2) = 5. \end{cases}$$

Procedendo como no texto temos que

$$h(t) + K_1 = \int h'(t)dt = \int \left(1 + \frac{1}{(t+1)^2}\right) dt = t - \frac{1}{1+t} + K_2. \tag{1}$$

Um cálculo direto mostra que a derivada da última expressão acima coincidade com $1 + (t+1)^{-2}$. O segundo termo pode trazer alguma dificuldade e sua integral pode ser feita substituindo-se a expressão $(1+t)$ por u. Desse modo, temos que $du = dt$, e portanto

$$\int \frac{1}{(t+1)^2} dt = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = -u^{-1} + K_3 = -\frac{1}{t+1} + K_3.$$

Voltado à expressão (1), podemos juntar as constantes de integração para escrever

$$h(t) = t - \frac{1}{1+t} + K.$$

Para determinar K vamos utilizar a informação da altura no instante $t = 2$:

$$5 = h(2) = 2 - \frac{1}{2+1} + K \;\Rightarrow\; K = \frac{10}{3},$$

de modo que a expressão para a altura da árvore é dada por

$$h(t) = t - \frac{1}{1+t} + \frac{10}{3}, \;\; t \geq 0.$$

O momento em que a árvore foi transplantada corresponde ao instante $t = 0$. Logo, a sua altura neste instante era

$$h(0) = 0 - \frac{1}{0+1} + \frac{10}{3} = -1 + \frac{10}{3} = \frac{7}{3},$$

isto é, aproximadamente 2,3 metros.