Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

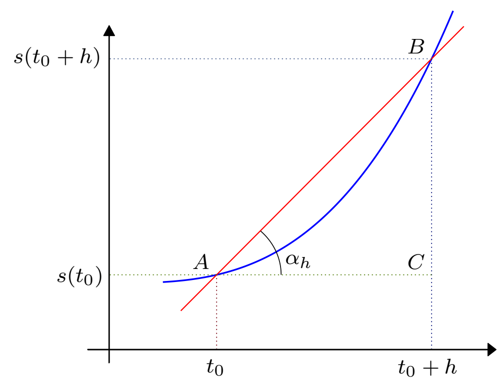
A reta tangente

Se a posição de um carro no instante $t > 0$ é dada pela função $s(t)$, vimos que a sua velocidade em um instante arbitrário $t_0 > 0$ pode ser calculada através de aproximações da velocidade média entre os instantes t_0 e $t_0 + h$. Mais especificamente escrevemos

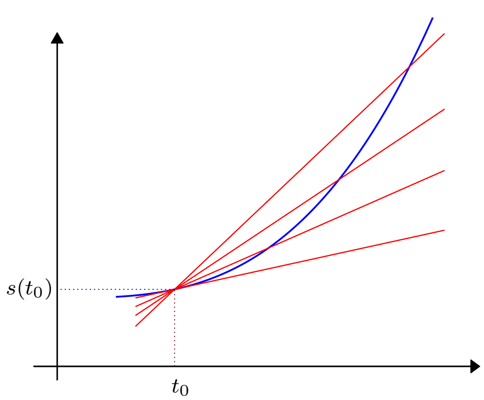
$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h},$$

para indicar que, quanto mais próximo o número h estiver de zero, mais próximo o quociente acima estará da velocidade no instante t_0. Faremos no que se segue uma interpretação geométrica das quantidades acima.

Observe inicialmente que, dado $h \neq 0$, podemos considerar a reta que passa pelos pontos $A = (t_0, s(t_0))$ e $B = (t_0 + h, s(t_0 + h))$. Ela está ilustrada na figura ao lado e estamos interessados em calcular o seu coeficiente angular m_h. Lembre que este número é exatamente a tangente do ângulo α_h formado pela reta com o eixo $\mathcal{O}t$. Por semelhança de triângulos, temos que ela pode ser calculada usando-se o triângulo retângulo ACB da figura.



A tangente do ângulo α_h é dada pela razão entre o comprimento do seu cateto oposto e da hipotenusa. Assim



$$\begin{aligned} m_h = \tan(\alpha_h) &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{(t_0 + h) - t_0} \\ &= \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}. \end{aligned}$$

Logo, **a velocidade média entre os instantes t_0 e $t_0 + h$ é exatamente a inclinação da reta que passa pelos pontos** $(t_0, s(t_0))$ **e** $(t_0 + h, s(t_0 + h))$. Em analogia ao que ocorre quando classificamos uma reta com relação ao um círculo dado, chamamos esta reta de *reta secante*.

Para cada $h \neq 0$, temos uma reta secante diferente e portanto uma inclinação m_h diferente. Quando h se aproxima de zero, essas retas secantes parecem se aproximar de uma outra reta, que vamos chamar de *reta tangente no ponto* $(t_0, s(t_0))$. Nada mais natural do que inferir que a inclinação m_h da reta secante deve se aproximar da inclinação da reta tangente, quando h se aproxima de zero. Assim, **a velocidade no instante t_0 é exatamente a inclinação da reta tangente no ponto** $(t_0, s(t_0))$.

Os conceitos introduzidos acima podem ser estendidos para uma função mais geral $f(x)$ definida em um intervalo aberto contendo o ponto $x = a$. Para cada $x \neq a$ pertencente ao domínio de f a reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ tem inclinação igual a

$$\tan \alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quando x se aproxima de a, o ponto $(x, f(x))$ se aproxima do ponto $(a, f(a))$. As retas secantes se aproximam de uma reta que chamaremos de *reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(a, f(a))$. Esta reta é a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o quociente acima se aproxima de um número à medida em que x se aproxima de a.

Vamos determinar esta reta no caso em que $f(x) = x^2$ e $a = 2$. A inclinação é dada por

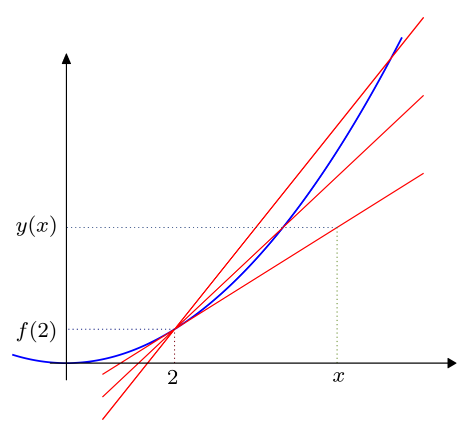
$$f'(4) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Observe que o numerador e o denominador se aproximam de zero, quando x se aproxima de 2. No entanto, podemos fatorar o numerador para calcular

$$f'(4) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Na última igualdade, estamos dizendo que o número $(x + 2)$ se aproxima de 4, quando x se aproxima de 2. Das contas acima concluímos que a inclinação da reta tangente $y(x)$ no ponto $(2, f(2))$ é igual 4. Uma vez que esta reta passa pelo ponto $(2, f(2)) = (2, 4)$, a sua equação é dada por $y(x) - 4 = 4(x - 2)$, isto é

$$y(x) = 4x - 4.$$



Tarefa

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, lembre que a *reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(a, f(a))$ é a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe.

Nesta tarefa vamos determinar a reta tangente para o caso em que $f(x) = \sqrt{x}$ e $a > 0$. O passo crucial é determinar a sua inclinação através do limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}.$$

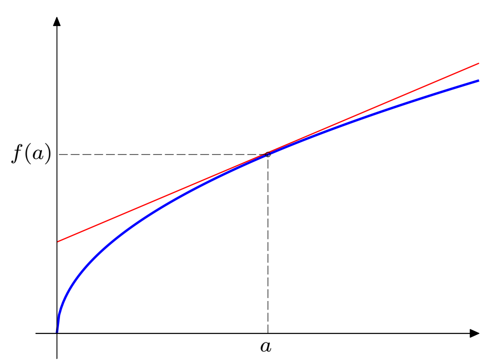
Observe que, no limite acima, numerador e denominador se aproximam de zero.

1. Para resolver a indeterminação multiplique o numerador e o denominador da fração por $(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ para concluir, após as devidas simplificações, que

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

2. Tomando o limite quando $x \to a$ na última expressão, conclua que a inclinação da reta tangente é igual a $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.

3. Determine agora a equação da reta tangente, lembrando que ela deve passar pelo ponto $(a, f(a))$. Veja o gráfico abaixo.



Reta tangente