Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Aplicações do TVM

Neste pequeno texto, vamos fazer mais algumas aplicações da relação entre o sinal da derivada de uma função e o caráter de crescimento ou decrescimento da função.

Exemplo 1. No primeiro exemplo, vamos fazer um esboço do gráfico do polinômio

$$f(x) = x^4 - 6x^3 - 20x^2 + 10.$$

O primeiro passo para estudar o sinal da sua derivada é encontrar os pontos críticos. Uma vez que f é derivável, os pontos críticos de f são os valores de x para os quais a derivada se anula. Calculando temos

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 40x = 2x(2x^2 - 9x - 20),$$

e portanto temos os pontos críticos

$$x = 0, \quad x_1 = \frac{9 - \sqrt{241}}{4} < 0, \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{241}}{4} > 0.$$

Note que os valores de duas das raízes envolvem raízes que não são exatas. Conforme veremos a seguir, isto não cria nenhuma dificuldade na análise do sinal de f'. De fato, a derivada pode ser fatorada da seguinte forma

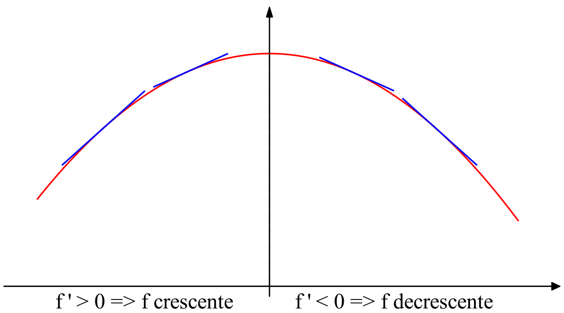
$$f'(x) = 4x(x - x_1)(x - x_2).$$

Assim, para determinar o sinal de f', basta calcular o sinal de cada um dos monômios acima e fazer a regra dos sinais para a multiplicação.

Como temos três pontos críticos, teremos quatro intervalos para analisar, quais sejam: $(-\infty, x_1)$, $(x_1, 0)$, $(0, x_2)$ e $(x_2, +\infty)$. Lembrando que $x_1 < 0 < x_2$, a tabela para o sinal dos monômios pode ser feita como se segue:

	sinal de $4x$	$(x - x_1)$	$(x - x_2)$	sinal de f'	função f
$x \in (-\infty, x_1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente
$x \in (x_1, 0)$	$-$	$+$	$-$	$+$	crescente
$x \in (0, x_2)$	$+$	$+$	$-$	$-$	decrescente
$x \in (x_2, +\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente

Vamos agora usar o sinal da derivada para determinar a natureza do ponto crítico $x = 0$.



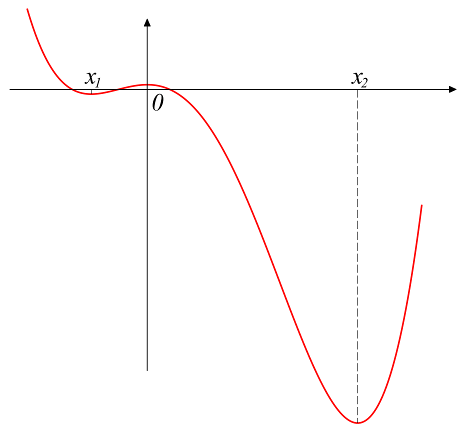
Observe que à esquerda deste ponto a derivada é positiva e à sua direta ela é negativa. Isto implica que antes de $x = 0$ a função é crescente e depois é decrescente. Logo, o gráfico de f perto de $x = 0$ se parece com um cume de montanha (veja figura ao lado), o que mostra que $x = 0$ é um ponto de máximo local.

Na vizinhança dos pontos $x = x_1$ e $x = x_2$ ocorre exatamente o inverso, com a derivada passando de negativa para positiva. Assim, estes dois pontos são mínimos locais.

Como o termo dominante do polinômio $f(x)$ é x^4, é fácil verificar que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

e portanto podemos usar todas as informações obtidas para esboçar o gráfico de f como ao lado. $\square$.



Exemplo 2. Vamos agora considerar o polinômio

$$p(x) = 8x^3 + 30x^2 + 24x + 10.$$

Como $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$, é sempre possível encontrar $a < b$ tais que $p(a) < 0 < p(b)$. Segue então do Teorema do Valor Intermediário que p tem uma raiz no intervalo (a, b). De fato, este mesmo argumento mostra que todo polinômio de grau ímpar possui raiz.

O que vamos fazer aqui é mostrar que $p(x)$ não pode ter mais de uma raiz. Para tanto, note inicialmente que

$$p'(x) = 24x^2 + 60x + 24 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2},$$

e portanto p possui exatamente os dois pontos críticos. A análise do sinal da derivada fornece

	$x \in (-\infty, -2)$	$x \in (-2, -\frac{1}{2})$	$x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$
sinal da derivada p'	positiva	negativo	positivo
comportamento de p	crescente	decrescente	crescente

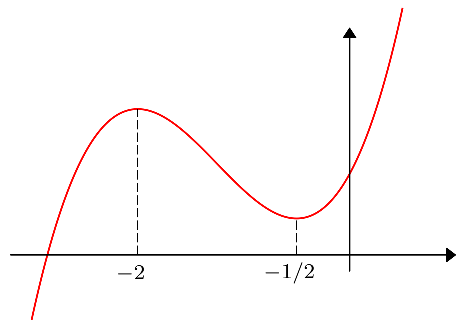
Como $p(-2) = 18$ e $p(-1/2) = 9/2$, a função $p(x)$ decresce de 18 para $9/2$ no intervalo $(-2, -\frac{1}{2})$, não podendo portanto se anular aí. Do ponto $x = -1/2$ em diante a função sempre cresce. Como ela começa em $9/2 > 0$, também não pode haver raiz no intervalo $(-\frac{1}{2}, +\infty)$. Assim, todas as raízes de p se encontram em $(-\infty, -2)$. Como a função é crescente neste intervalo, ela deve se anular somente uma vez neste intervalo.

Embora não seja necessário, vamos estudar a natureza dos pontos críticos e fazer um esboço do gráfico de $p(x)$. Para classificar os pontos críticos note que, perto do ponto crítico $x = -2$, a derivada passa de positiva para negativa, de modo que $x = -2$ é um ponto de máximo local. No outro ponto crítico acontece o contrário e portanto $x = -1/2$ é um ponto de mínimo local.

Conforme já havíamos observado, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty,$$

de modo que o gráfico tem o aspecto abaixo.



A análise do gráfico confirma o que já havíamos provado, isto é, que a função possui exatamente uma raiz. Como $g(-3) = -3 < 0 < 18 = g(-2)$, podemos ainda afirmar que esta raiz está no intervalo $(-3, -2)$. $\square$

Tarefa

Vamos verificar nesta tarefa uma interessante propriedade da função exponencial.

1. Verifique que $f(x) = e^x - x$, definida no intervalo $[0, \infty)$, é uma função crescente tal que $f(0) = 1$. Conclua que
$$e^x > x, \qquad \forall\, x \geq 0.$$

2. Considerando agora $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, mostre que
$$e^x > \frac{x^2}{2}, \qquad \forall\, x \geq 0.$$

3. Conclua do item acima que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$