Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

Volume de um gás em um pistão

Suponha que um gás é mantido a uma temperatura constante em um pistão. À medida que o pistão é comprimido, o volume do gás decresce com a função $V(p) = 200/p$ litros, até atingir a pressão crítica de 100 torr quando ele se liquidifica, havendo nesse momento uma variação brusca de volume. Em seguida, o seu volume passa a ser dado pela função $V(p) = -0,01p + 2$ até que seja atingida a nova pressão crítica de 150 torr, a partir da qual o volume permanece constante e igual a 0,5 litros.

A partir das informações podemos concluir que

$$V(p) = \begin{cases} 200/p, & \text{se } 0 < p \leq 100, \\ -0,01p + 2, & \text{se } 100 < p \leq 150, \\ 0,5, & \text{se } 150 < p. \end{cases}$$

Estamos interessados aqui em estudar o comportamento da função V para valores p próximos de zero e para valores grandes de p. Antes disso, vamos utilizar a expressão de V para recordar alguns conceitos relativos à continuidade.

Vamos inicialmente estudar a continuidade da função V no ponto $p = 100$. De acordo com o enunciado anterior, quando a pressão atinge esse valor ocorre uma *variação brusca de volume*, o que parece nos indicar que teremos um fenômeno descontínuo para esse valor da pressão. Do ponto de vista matemático, podemos justificar a descontinuidade da função V no ponto $p = 100$ observando que

$$\lim_{p \to 100^-} V(p) = \lim_{p \to 100^-} \frac{200}{p} = \frac{200}{100} = 2$$

e

$$\lim_{p \to 100^+} V(p) = \lim_{p \to 100^+} (-0,01p + 2) = -1 + 2 = 1.$$

Assim, apesar dos limites laterais existirem, eles não são iguais. Desse modo, concluímos que não existe limite quanto p tende para 100. A não existência desse limite implica que V é descontínua em $p = 100$.

Olhando para a definição de V percebemos que o ponto $p = 150$ também é um ponto importante dessa função. De fato, a expressão de V sofre uma mudança quando passamos por $p = 150$. No entanto, nesse caso temos que

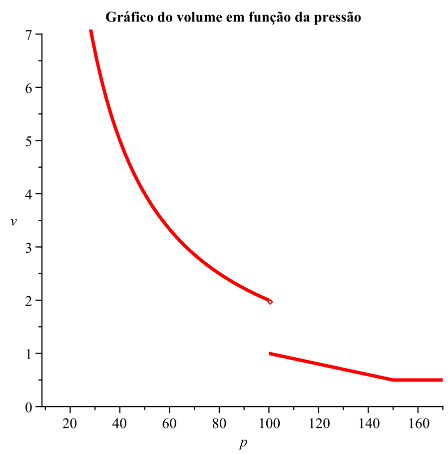
$$\lim_{p \to 150^-} V(p) = \lim_{p \to 100^-} (-0,01p + 2) = -1,5 + 2 = 0,5$$

e

$$\lim_{p\to 150^+} V(p) = \lim_{p\to 100^+} 0,5 = 0,5.$$

Os limites laterais existem e são iguais, de modo que o limite quanto p tende para 150 existe. Mais especificamente $\lim_{p\to 150} V(p) = 0,5 = V(150)$, o que mostra que V é contínua em $p = 150$.

Note agora que a expressão da função V para $0 < p \leq 100$ é a expressão de uma hipérbole. Nas demais sentenças da definição de V temos equações de retas. Assim, recordando os conhecimentos de geometria analítica do ensino médio e usando as informações acima podemos esboçar o gráfico de V como na figura abaixo:



Observe que a descontinuidade em $p = 100$ está bem caracterizada graficamente pelo salto que ocorre nesse ponto.

Passemos agora ao estudo do comportamento de V quando p está próximo de zero. Para tanto, precisamos estudar o limite $\lim_{p\to 0^+} V(p)$. Note que só faz sentido tomar o limite lateral pela direita, visto que a função não está definida para valores negativos de p. Observe ainda que, no cálculo do limite $\lim_{p\to 0^+} 200/p$, não podemos simplesmente substituir o valor $p = 0$, pois isso anularia o denominador. Além disso, a expressão de V não sugere nenhum tipo de fatoração ou simplificação que nos permita contornar o fato do denominador estar se aproximando de zero. De fato, o problema aqui é que o denominador se aproxima de zero, enquanto o denominador se aproxima de uma número não nulo (que é 200).

Para tentar entender o que acontece com a fração vamos olhar para a tabela abaixo, que apresenta o valor da pressão $V(p)$ alguns valores p próximos de zero:

p	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-n}
$V(p)$	200	2.000	20.000	200.000	$2 \times 10^{n+2}$

em que $n \in \mathbb{N}$ é um número natural. Observe que, à medida em que p se aproxima de 0 (pela direita), os valores $V(p)$ se tornam cada vez maiores. Escrevemos então

$$\lim_{p \to 0^+} V(p) = \lim_{p \to 0^+} \frac{200}{p} = +\infty.$$

A expressão acima indica que a função V assume valores *arbitrariamente grandes* desde que p esteja *suficienteme próximo* de 0. Para ilustrar isso, suponha que queremos garantir que, para valores próximos de zero, o volume V fique maior do que 1 bilhão de litros. Para tanto, devemos ter

$$V(p) = \frac{200}{p} > 10^9 \iff p \times 10^9 < 2 \times 10^2 \iff p < 2 \times 10^{-7}.$$

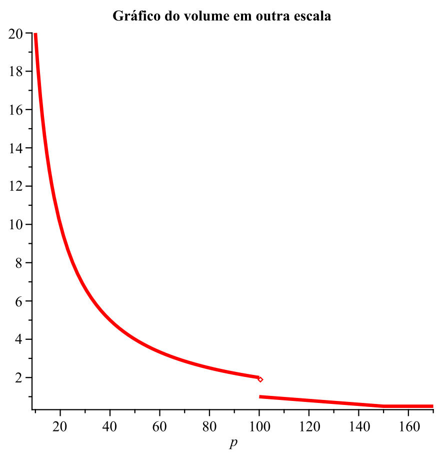
Assim, o volume ultrapassa o valor de 1 bilhão de litros *sempre que* a pressão p satisfaz $0 < p < 2 \times 10^{-7}$.

O conceito de limite infinito descrito acima nos leva à seguinte definição:

Definição. *Dizemos que a reta $x = a$ é uma* ***assíntota vertical*** *da função f quando pelo menos uma das quatro situações abaixo ocorre*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Para a nossa função volume temos que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical de V, visto que $\lim_{p \to 0^+} V(p) = +\infty$. Enfatizamos que, mesmo que não possamos calcular o limite de $V(p)$ quando $p \to 0^-$, o fato do limite pela direita ser infinito já implica que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical. Geometricamente, o que acontece é que o gráfico de V se aproxima da reta $x = 0$ quando $p \to 0^+$, conforme pode ser verificado pelo gráfico abaixo, que foi feito em uma escala diferente da anterior.



No que segue queremos investigar o que ocorre com a função V para valores grandes de p. Ora, usando a expressão de V (ou o gráfico acima), é muito fácil perceber que, para valores grandes de p, a função fica constante e igual a 0,5 litros. Escrevemos então

$$\lim_{p \to +\infty} V(p) = \lim_{p \to +\infty} 0,5 = 0,5.$$

O limite acima é o que chamamos de um limite no infinito. Esse tipo de limite nos leva ao seguinte conceito:

Definição. *Dizemos que a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** da função f quando pelo menos uma das duas situações abaixo ocorre*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Evidentemente, para que uma dada função tenha assíntota horizontal é preciso que o domínio de f contenha um intervalo do tipo $(b, +\infty)$ ou $(-\infty, b)$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Além disso, uma função pode ter no máximo duas assíntotas horizontais, ao contrário das assíntotas verticais, que podem ocorrer em qualquer número.

No caso da nossa função V o domínio é $(0, +\infty)$ e, como $\lim_{p \to +\infty} V(p) = 1/2$, concluímos que a reta $y = 1/2$ é uma assíntota horizontal. Geometricamente, isso significa que o gráfico da função V vai se aproximando da reta horizontal $y = 1/2$ quando p vai se tornando grande.

Tarefa

Nessa tarefa vamos praticar o uso da definição de limites infinitos e no infinito. Antes de começar, vamos recordar essas definições:

Definição. *Dizemos que* $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ *se, para todo* $M > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > M$ *sempre que* $a < x < a + \delta$.

Definição. *Dizemos que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $N > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $x > N$.

Na tarefa, vamos considerar a função volume do texto, qual seja

$$V(p) = \begin{cases} 200/p, & \text{se } 0 < p \leq 100, \\ -0,01p + 2, & \text{se } 100 < p \leq 150, \\ 0,5, & \text{se } 150 < p, \end{cases}$$

e justificar os limites que calculamos no texto.

1. Dado $M > 0$, determine $p_0 > 0$ tal que $V(p) > M$, sempre que $0 < p < p_0$;

2. Conclua do item anterior que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical de V;

3. Dado $\varepsilon > 0$, determine $N_0 > 0$ tal que $|V(p) - 0,5| < \varepsilon$, sempre que $p > N_0$;

4. Conclua do item anterior que a reta $y = 1/2$ é uma assíntota horizonal de V.