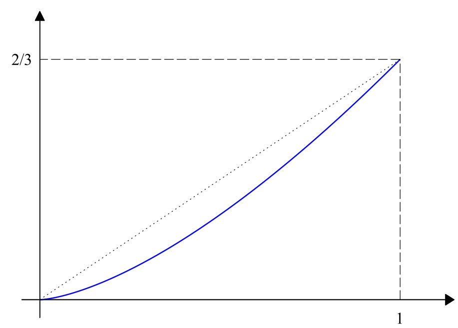
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Comprimento de arco

Considere a função $f(x) = (2/3)\sqrt{x^3}$ definida no intervalo $[0, 1]$, cujo gráfico está ilustrado abaixo. Neste texto vamos desenvolver uma técnica para calcular o comprimento da curva que descreve o gráfico da função.

Começamos observando que, se o gráfico da função f fosse um segmento de reta, o cálculo seria simples, pois seria suficiente saber as coordenadas do ponto inicial e final do segmento e utilizar a conhecida fórmula da distância entre dois pontos. No exemplo, o ponto inicial é $(0, 0)$ e o final é $(1, 2/3)$, e a distância entre eles é $\sqrt{(1-0)^2 + (2/3-0)^2} = \sqrt{5}/3$. Ocorre que, no caso em questão (e também no caso geral), o gráfico da função não é um segmento de reta, e seu comprimento deve ser maior do que $\sqrt{5}/3$.



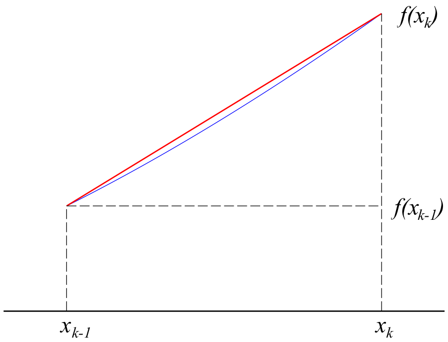
Antes de atacar o nosso problema é interessante fazer um paralelo entre ele e outros problemas já estudados. No cálculo de área entre duas curvas uma dificuldade semelhante se apresentava. Naquele momento, utilizamos o fato de sabermos calcular a área de retângulos, que foram usados para fazer aproximações da área a ser calculada. A mesma ideia foi utilizada no volume de sólido de revolução, onde a região foi aproximada por cilindros, cujos volumes também sabíamos calcular.

As considerações acima nos dão uma pista de como proceder. Uma vez que sabemos calcular comprimento de segmentos de reta, nada mais natural do que aproximarmos a curva por tais segmentos. Em outras palavras, "em time que está ganhando não se mexe".

Vamos então colocar a mão na massa, denotando por L o comprimento do gráfico e por $[a, b]$ o intervalo $[0, 1]$. Dado um número $n \in \mathbb{N}$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual tamanho $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, considerando os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Na notação acima, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, estamos denotando $x_k = a + k\Delta x$. Vamos chamar ainda de I_k o segmento de reta obtido quando ligamos os pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ com $(x_k, f(x_k))$. Conforme observamos anteriormente, o comprimento de I_k é dado por



$$\begin{aligned} \text{comp.}(I_k) &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função f no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ obtemos um ponto $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

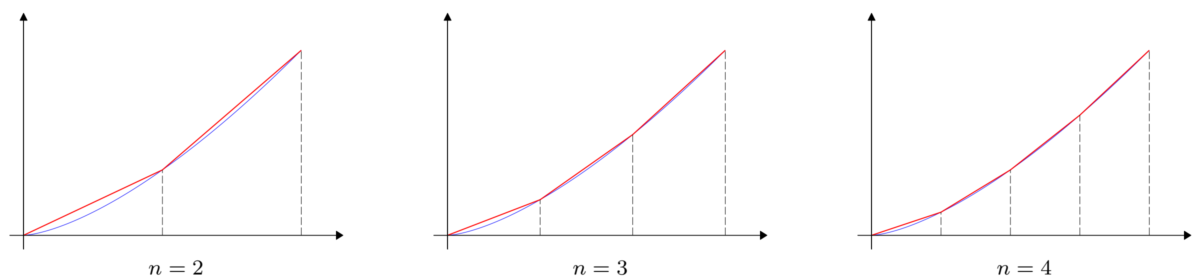
$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = f'(x_k^*)\Delta x.$$

Desse modo, lembrando que $\Delta x > 0$, podemos substituir a expressão acima em (1) para obter

$$\text{comp.}(I_k) = \sqrt{(1 + f'(x_k^*)^2)(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + f'(x_k^*)^2}\Delta x.$$

Ao somarmos todos os comprimentos acima obtemos uma aproximação L_n do comprimento L, cuja expressão é dada por

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \text{comp.}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_k^*)^2}\Delta x.$$



Neste ponto estamos certos que você já sabe o que deve ser feito! De fato, quanto maior for o número de segmentos da nossa poligonal mais próximo o valor de L_n vai estar de L. Desse modo, temos que

$$L = \lim_{n \to +\infty} L_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_k^*)^2}\Delta x.$$

Ora, mas o lado direito da expressão acima nada mais é do que uma soma de Riemman para a função $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ no intervalo $[a, b]$. Desse modo, o limite do lado direito acima é exatamente $\int_a^b g(x)dx$, isto é,

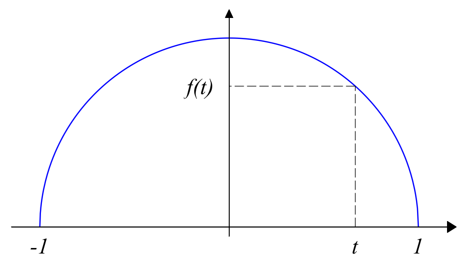
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Vamos agora usar a fórmula acima para o nosso caso específico, em que $f(x) = (2/3)\sqrt{x^3}$ no intervalo $[a, b] = [0, 1]$. Um cálculo simples mostra que $f'(x) = \sqrt{x}$ e portanto uma mudança de variáveis nos permite calcular

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$$

A fórmula para o comprimento de arco desenvolvida no texto pode ter um inconveniente: o aparecimento da raiz quadrada no integrando faz com que, em alguns casos, o cálculo da integral se torne muito complicado. Vamos exemplificar isso com o caso de uma circunferência de raio 1. Embora essa circunferência não seja o gráfico de uma função, podemos considerar a função

$$f(t) = \sqrt{1-t^2}, \ \ t \in [-1,1],$$

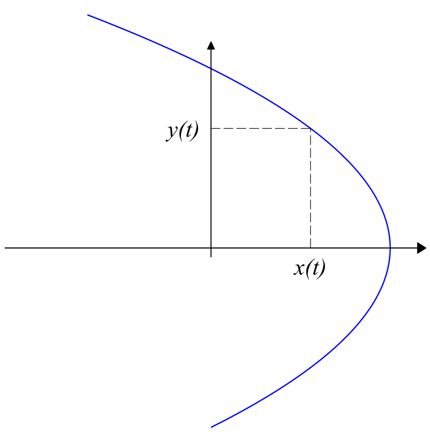


cujo gráfico é uma semicircunferência, conforme figura ao lado. Assim, para obtermos o comprimento do círculo é suficiente calcularmos o comprimento do gráfico e multiplicar por dois. Após as devidas simplificações obtemos a seguinte fórmula para o comprimento do círculo

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \cdots = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

A integral acima pode ser resolvida se você lembrar das funções trigonométricas inversas. Pode ainda ser calculada com um método chamado *substituição trigonométrica* que será visto posteriormente.

Ao invés de resolver a integral acima vamos proceder de uma maneira diferente. Suponha que duas funções $x(t)$ e $y(t)$ são deriváveis em $[a,b]$ e, além disso, suas derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ não se anulam simultaneamente em $[a,b]$. Neste caso, se denotarmos por



$$C = \{(x(t), y(t)) : t \in [a,b]\},$$

dizemos que C é uma curva parametrizada. Note que o conjunto C de fato descreve uma curva no plano. Vamos adaptar os argumentos utilizados no início do texto para mostrar que o comprimento L desta curva é dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \qquad (2)$$

Antes porém, vamos observar que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, então a curva parametrizada por $(t, f(t))$, com $t \in [a, b]$, descreve exatamente o gráfico de f. Neste caso, como $x'(t) = 1$, a expressão acima se transforma na primeira fórmula desenvolvida no texto.

Para verificar a validade da fórmula (2) vamos dividir o domínio $[a, b]$ das funções coordenadas em n subintervalos escolhendo os pontos

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Podemos proceder como antes, construindo segmentos de reta que terão agora comprimento igual a

$$\text{comp.}(I_k) = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio obtemos pontos $t_k^*, t_k^{**} \in (t_{k-1}, t_k)$, tais que

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k^*)\Delta t, \qquad y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k^{**})\Delta t,$$

e portanto a aproximação L_n para o comprimento da curva é igual a

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \text{comp.}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k^{**})^2}\Delta t.$$

Passando ao limite, obtemos

$$\text{comp.}(C) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k^{**})^2}\Delta t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

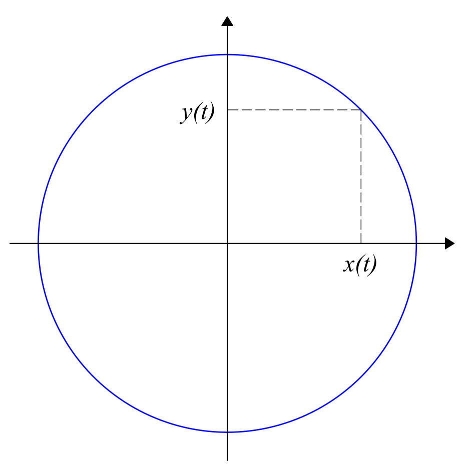
Vamos usar a fórmula (2) para calcular o comprimento de um círculo de raio $r > 0$. Ele pode ser parametrizado a partir das seguintes funções coordenadas

$$x(t) = r\cos(t), \qquad y(t) = r\,\text{sen}(t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

De fato, para todo $t \in [0, 2\pi]$, temos que

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2(\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)) = r^2,$$

onde usamos identidade trigonométrica fundamental $\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$. A igualdade destacada acima mostra que os pontos da curva estão sobre o círculo. Além disso, a definição das funções seno e cosseno, a partir do círculo trigonométrico, mostra que qualquer ponto do círculo corresponde a um ponto da curva.



Uma vez que $x'(t) = -r\,\text{sen}(t)$ e $y'(t) = r\cos(t)$, o mesmo procedimento usado acima nos fornece

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2(\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)) = r^2,$$

o que mostra que as duas derivadas x' e y' não podem se anular no mesmo ponto. Assim, o comprimento da curva é dado por

$$\text{comprimento}(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}t = 2\pi r,$$

conforme vimos nas nossas aulas iniciais de geometria.

Tarefa

O *astróide* é a curva definida, parametricamente, pelas funções coordenadas

$$x(t) = \cos^3(t), \qquad y(t) = \operatorname{sen}^3(t),$$

com $t \in [0, 2\pi]$. Calcule o comprimento do astróide, observando que ele é exatamente 4 vezes o comprimento da curva que fica no 1o quadrante.