Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Continuidade e o cálculo do imposto de renda

Neste texto vamos introduzir um importante conceito, utilizando como motivação o cálculo do imposto de renda. Para simplificar a exposição e os cálculos, consideramos a situação de um país imaginário, onde a moeda se chama cruzeta e o imposto é taxado segundo a regra abaixo.

Regra do imposto: quem ganha até 10 mil cruzetas é isento; quem ganha mais de 10 mil e até 20 mil cruzetas paga 10% da renda de imposto; os demais pagam 20% da renda.

Como a maneira de calcular 10 por cento de um número é multiplicá-lo por $10/100 = 0,1$, segue da regra acima que

$$I(r) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq r \leq 10, \\ 0,1r\,, & \text{se } 10 < r \leq 20, \\ 0,2r\,, & \text{se } r > 20. \end{cases}$$

Note que a expressão que define I em cada uma das 3 faixas é uma função linear. Contudo, a função I como um todo não é uma função linear. Embora o gráfico de I possa ser facilmente esboçado, vamos continuar a nossa exposição analisando as propriedades da função I sem o seu gráfico.

Suponha que queremos saber o valor aproximado do imposto pago por um contribuinte que ganha aproximadamente 10 mil cruzetas. Olhando para a função fica claro que a resposta depende de uma informação extra, que é saber se o indivíduo ganha mais ou menos de 10 mil. Se o contribuinte ganha um valor um pouco menor do que 10 mil, então é isento. Por outro lado, se ganha um pouco mais de 10 mil, então será taxado em 10 por cento. Como a função do imposto tem comportamento diferente à direita e à esquerda de $r = 10$, vamos ter que lançar mão de limites laterais:

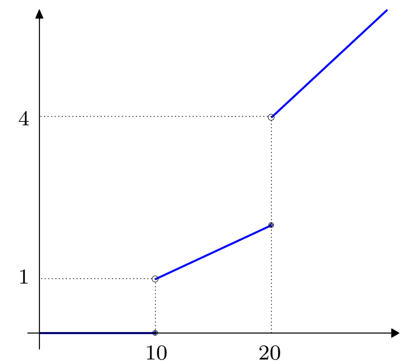
$$\lim_{r \to 10^-} I(r) = \lim_{r \to 10^-} 0 = 0, \qquad \lim_{r \to 10^+} I(r) = \lim_{r \to 10^+} (0,1r) = 0,1 \times 10 = 1.$$

No primeiro limite acima consideramos a primeira faixa, porque r se aproxima por valores menores que 10. Já no segundo, a faixa considerada foi a segunda, que é aquela de quem ganha um pouco mais de 10 mil. No cálculo do segundo limite lateral acima temos uma observação importante: ainda que a função I seja igual a zero em $r = 10$, a expressão de

$I(r)$ que usamos após a primeira igualdade foi $0,1r$. Isso porque, no cálculo do limite pela direita, importa somente o que acontece com a função I para valores próximos e *maiores que* 10. O valor de I no ponto $r = 10$ não interfere no valor deste limite lateral.

Concluímos então que o **o limite** $\lim_{r\to 10} I(r)$ **não existe**, pois os limites laterais são diferentes. Esta não existência pode ser facilmente percebida quando analisamos o gráfico da função I, que está esboçado abaixo.

Note que existe um salto no gráfico no ponto $r = 10$. Quando nos aproximamos de 10 pela esquerda a função se aproxima de 0, porque é sempre nula. Quando nos aproximamos pela direita, a função se aproxima de 1. Do ponto de vista matemático isso pode ser observado a partir do fato de que os limites laterais são distintos. A consequência disso é a não existência do limite de $I(r)$ quando $r \to 10$.



Nesse ponto vale notar que o salto observado no gráfico acima causa uma injustiça no cálculo do imposto. Para exemplificar, suponha que um contribuinte tenha uma renda de 10 mil cruzetas. Nesse caso, como é isento de imposto de renda, ele receberia uma valor líquido de 10 mil cruzetas. Porém, um outro contribuinte que tem uma renda de 11 mil cruzetas (e que eventualmente trabalha melhor do que o primeiro) paga 1,1 mil cruzetas de imposto de renda, tendo então uma renda líquida de 9,9 mil cruzetas!

Para tentar corrigir a injustiça acima vamos fazer uma pequena mudança na regra da 2^a faixa do imposto:

Nova regra do imposto: quem ganha até 10 mil cruzetas é isento; quem ganha mais de 10 mil e até 20 mil cruzetas paga 10% da renda de imposto menos uma parcela fixa de c mil cruzetas; os demais pagam 20% da renda.

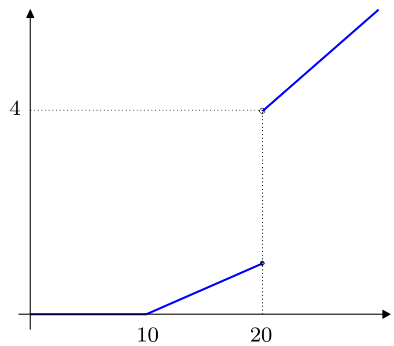
Com essa nova regra, a função que calcula o imposto passa a ser

$$I_1(r) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \le r \le 10, \\ 0,1r - c\,, & \text{se } 10 < r \le 20, \\ 0,2r\,, & \text{se } r > 20, \end{cases}$$

onde estamos denotando por I_1 a função que calcula esse novo imposto. Observe que, para cada escolha do valor da dedução c, temos uma função diferente. Gostaríamos de escolher o parâmetro c de modo que a injustiça citada acima não exista mais. Mais especificamente, queremos escolher o valor de c de modo a eliminar o salto no gráfico de I_1 no ponto $r = 10$. Para tanto, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{r\to 10^-} I_1(r) = \lim_{r\to 10^-} 0 = 0, \qquad \lim_{r\to 10^+} I_1(r) = \lim_{r\to 10^+} (0,1r - c) = 1 - c.$$

Para que exista o limite no ponto $r = 10$, os limites laterais devem existir e serem iguais. Logo, o valor da dedução c deve ser tal que $0 = 1 - c$, ou seja, $c = 1$. Portanto, os contribuintes que estão na 2^a faixa devem pagar 10% de sua renda menos 1 mil cruzetas.



O gráfico ao lado representa o novo imposto, cuja expressão pode ser descrita como se segue:

$$I_1(r) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq r \leq 10, \\ 0,1r - 1\,, & \text{se } 10 < r \leq 20, \\ 0,2r\,, & \text{se } r > 20. \end{cases}$$

Observe que não ocorre mais aquele salto no ponto $r = 10$. Introduzimos abaixo um conceito matemático que serve para garantirmos que não existem saltos ou quebras no gráfico de funções.

Definição 1. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto $x = a$. Dizemos que ela é contínua neste ponto se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Para que f seja contínua em $x = a$, é necessário que o ponto a esteja no domínio de f. Mais do que isso, como precisamos calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, é necessário que o domínio de f contenha todo um intervalo aberto centrado no ponto $x = a$. Além disso, é preciso que o limite exista e coincida com o valor da função f no ponto $x = a$.

Exemplo 1. Vamos mostar que I_1 é contínua em $r = 10$. Para isto, primeiro temos que checar se o limite existe no ponto $r = 10$:

$$\lim_{r \to 10^-} I_1(r) = \lim_{r \to 10^-} 0 = 0, \qquad \lim_{r \to 10^+} I_1(r) = \lim_{r \to 10^+} (0,1r - 1) = 1 - 1 = 0.$$

Como os limites laterais existem e são iguais, concluímos que o limite existe e é igual a 0. Além disso, como $I(10) = 0$, temos que

$$\lim_{r \to 10} I_1(r) = 0 = I(10),$$

o que mostra que I_1 é contínua em $r = 10$. $\square$

Exemplo 2. A cointinuidade em $r = 15$ é mais simples de ser verificada, pois nem precisamos de limites laterais:

$$\lim_{r \to 15} I_1(r) = \lim_{r \to 15} (0,1r - 1) = 0,5 = I_1(15).$$

Por outro lado, **no ponto** $r = 20$ **a função não é contínua**. De fato,

$$\lim_{r \to 20^-} I_1(r) = \lim_{r \to 20^-} (0,1r - 1) = 1, \qquad \lim_{r \to 20^+} I_1(r) = \lim_{r \to 20^+} 0,2r = 4.$$

Como os limites laterais são diferentes não existe o limite. Assim, I_1 não é contínua em $r = 20$. $\square$

Poderíamos nos questionar sobre a continuidade no ponto $r = 0$. Neste caso, não podemos calcular o limite quando $r \to 0$, pois a função não está definida à esquerda de $r = 0$. Vamos precisar de um conceito que dê conta de casos como este.

A definição de continuidade apresentada acima não se aplica em pontos que são a extremidade de intervalos do tipo $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ ou $[a, +\infty)$. Para contornar este problema, dizemos que a função é contínua numa extremidade de um intervalo se o valor da função nessa extremidade for igual ao limite lateral adequado naquele ponto.

Exemplo 3. A função I_1 é contínua no ponto $r = 0$, pois

$$\lim_{r \to 0^+} I_1(r) = \lim_{r \to 0^+} 0 = 0 = I(0).$$

Destacamos novamente que, aqui, só podemos calcular o limite no ponto $r = 0$ pela direita, pois a função não está definida para $r < 0$. $\square$

Os argumentos apresentados nos exemplos acima nos permitem concluir que a função I é contínua em todos os pontos do seu domínio, exceto no ponto $r = 20$. Na sua tarefa você vai introduzir uma dedução na 3a faixa para eliminar esta descontinuidade.

Finalizamos considerando o cálculo do imposto de renda no Brasil. A metodologia é análoga à descrita acima, com a diferença que temos aqui 5 faixas, ao invés de 3. A tabela abaixo (que reflete o ano base de 2014 e está expressa em reais) apresenta os valores referentes a cada uma dessas faixas. Deixamos como exercício para o leitor obter a expressão da função $I(r)$ que calcula o imposto em função da renda, bem como a verificação de que as parcelas de dedução foram escolhidas pelo governo de modo a tornar a função contínua em todos os pontos, evitando assim os saltos no gráfico e as decorrentes injustiças.

Renda	**Alíquota**	**Dedução**
Até R$ 1.787,77	(isento)	(isento)
De R$ 1.787,78 até R$ 2.679,29	7,5%	R$ 134,08
De R$ 2.679,30 até R$ 3.572,43	15%	R$ 335,03
De R$ 3.572,44 até R$ 4.463,81	22,5%	R$ 602,96
Acima de R$ 4.463,81	27,5%	R$ 825,15

Tarefa

Vimos no texto que a função I_1 não é contínua no ponto $r = 20$. Essa descontinuidade causa, novamente, uma injustiça para com os contribuintes que ganham um pouco mais de 20 mil cruzetas. Nessa tarefa vamos introduzir uma parcela de dedução na 3a faixa de modo a compensar essa injustiça.

Considerando então a (nova) função para o cálculo do imposto definida abaixo

$$I_2(r) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq r \leq 10, \\ 0{,}1r - 1\,, & \text{se } 10 < r \leq 20, \\ 0{,}2r - b\,, & \text{se } r > 20, \end{cases}$$

resolva os itens a seguir:

1. Calcule os limites laterais no ponto $r = 20$;
2. Determine o valor de $b \in \mathbb{R}$, de modo que I_2 seja contínua no ponto $r = 20$;
3. Faça um esboço do gráfico de I_2.