Teorema da Probabilidade Total

Vamos supor que temos um espaço amostral Ω e que ele é formado por vários eventos: $A_1, A_2, A_3, \cdots$ todos mutuamente exclusivos (interseção vazia). Veja na imagem:

Agora, temos um evento qualquer B desse espaço amostral, e que depende dos eventos anteriores.

Temos as interseções $A_1 \cap B, A_2 \cap B, A_3 \cap B \ e \ A_4 \cap B$ são todos mutuamente exclusivos também, então dizemos que:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup (A_4 \cap B)$$

E já que são mutuamente exclusivos:

$$P(B) = (A_1 \cap B) + (A_2 \cap B) + (A_3 \cap B) + (A_4 \cap B)$$

Definição formal do teorema da probabilidade total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)$$

Ex1) Um velejador experiente tem 50% de chance de vencer uma regata sob vento forte, porém sem a presença de vento forte, suas chances caem para 25%. As autoridades do serviço de meteorologia da cidade que sediará a próxima regata estimam em 30% a probabilidade de que ocorra vento forte durante a competição. Sabendo disso, qual a probabilidade do velejador ser o vencedor ?

Solução:

Passo 1) Definir os eventos

V: vencer a regata W: ventar forte NW: não ventar forte

$P(V|W) = \text{prob. de vencer com o vento forte} = 0,50$

$P(V|NW)$=prob. de vencer sem vento forte $= 0,25$

$P(W) = $ prob. de ventar forte=0,30

P(NW)=prob. de n o ventar forte = 1 - 0,30 = 0,70

Passo 2) Sabendo as probabilidades condicionais que envolvem o evento Vque são as probabilidades do velejador vencer a regata tendo vento forte ou não tendo vento forte, temos como saber também a sua probabilidade total $P(V)$.

$$P(V) = P(V|W).P(V) + P(V|NW).P(NW)$$

$$P(V) = 0,50.0,30 + 0,25.0,70$$

$$P(V) = 0,325$$

Teorema de Bayes

Esse teorema é uma reeleitura da fórmula que encontramos para a probabilidade condicional.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sendo que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$$

Combinando essas duas equações, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Agora, tomando a mesma suposição que fizemos para o teorema da probabilidade total. Um espaço amostral , dividido em eventos mutuamente exclusivos:
$A_1, A_2, A_3, \ldots$ teremos o <u>teorema de bayes</u>:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{P(B)},\ i = 1,2,3,\ \ldots\ ,\ n$$

Onde P(B) pode ser calculado pelo teorema da probabilidade total.

Com esse teorema podemos calcular a probabilidade de alguma coisa ter acontecido sabendo evidências futuras, sabendo o que aconteceu no final.

Ex2) Qual é a probabilidade de ter tido vento forte durante a regata sabendo que o velejador venceu.

Passo 1)

$$P(W|V) = prob.\ de\ ter\ ventado\ forte\ sabendo\ que\ ele\ venceu$$

Dados que foram calculados no exemplo 1.

$$P(V|W) = 0,50$$

$$P(W) = 0,30$$

$$P(V) = 0,325$$

Passo 2) Aplicando o Teorema de Bayes

$$P(W|V) = \frac{P(V|W).P(W)}{P(V)}$$

$$P(W|V) = \frac{0,50.0,30}{0,325}$$

$$P(W|V) \approx 0,46$$