Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 4

Temas abordados: Derivadas e suas regras básicas

Seções do livro: 2.1; 2.2; 2.3

1) Defina o conceito de derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$. Qual é a interpretação geomtérica do número $f'(a)$?.

2) Usando as regras de derivação e lembrando que $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$ e $(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$, calcule a derivada das funções trigonométricas abaixo.

(a) $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

(b) $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

(c) $\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$

(d) $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

3) Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = 3x^4 - 7x^2 - \dfrac{4}{x^2} - 11$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-2x}$

(d) $f(x) = \sqrt{x}\sec(x)$

(e) $f(x) = 9\sqrt[3]{x}(\cos(x) + x^2) + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

(f) $f(x) = \cos(x) + (x^2+1)\operatorname{sen}(x)$

(g) $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 4x^7}{2\sqrt{x} - 3x^5}$

(h) $f(x) = \dfrac{4 - \cos(x)}{6\operatorname{sen}(x)}$

4) Neste exercício vamos verificar que a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é derivável neste ponto.

(a) Calcule o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ e conclua que f é contínua em $x = 0$.

(b) Calule os limites laterais do quociente $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ quando $x \to 0$ pela direita e pela esquerda para concluir. Por que não existe a derivada $f'(0)$?

5) Se f é uma função derivável no ponto $x = a$, definimos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ como sendo a única reta que passa por este ponto e tem inclinação $f'(a)$. Determine esta equação em cada um dos casos abaixo.

(a) $f(x) = x^2 - x + 1, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = -2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad a = \pi$

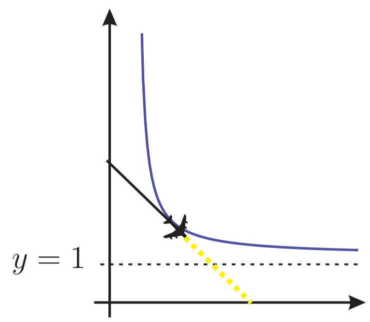
6) Quantas retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x + 1$? Determine a equação dessas retas tangentes.

7) Para atacar posições inimigas, um avião de caça dá um vôo rasante, percorrendo a trajetória determinada pelo gráfico da função $f(x) = 1 + (1/x)$, para $x > 0$. O avião efetua os seus disparos segundo a direção tangente, conforme figura abaixo.

(a) Determine, usando a definição de derivada, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em um ponto genérico $(a, f(a))$.

(b) Se um disparo é efetuado da posição $(1, 2)$, determine a abscissa do ponto no eixo $\mathcal{O}x$ atingido.

(c) Determine o ponto sobre o gráfico de $f(x)$ em que o disparo deve ser efetuado para atingir um alvo situado no ponto $(8, 0)$.

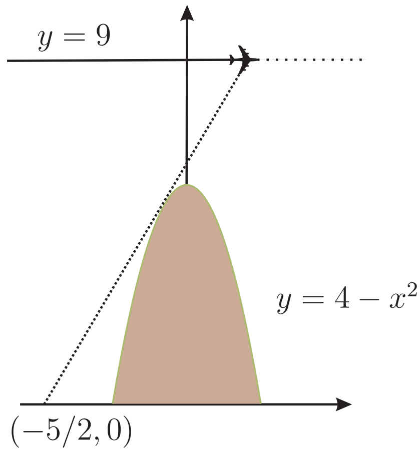


8) Suponha que o eixo $\mathcal{O}x$ representa o solo e uma montanha é modelada pela equação $g(x) = 4 - x^2 = (2 + x)(2 - x)$, onde $x \in [-2, 2]$. Um avião sobrevoa a montanha horizontalmente da esquerda para direita sobre a reta $y = 9$, de modo que, no instante $t > 0$ minutos, a posição do avião no plano cartesiano abaixo é dada por $(4t, 9)$. Considerando que a luz se propaga em linha reta, resolva os itens abaixo.

(a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x)$ em um ponto genérico $(a, g(a))$.

(b) Determine a equação da reta tangente à montanha que passa por um observador localizado em $(-5/2, 0)$.

(c) Determine o instante t_0 em que o observador do item b) perde a visão do avião devido à montanha.



RESPOSTAS

1) A derivada de uma função f no ponto $x = a$ é o limite

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

sempre que o limite acima existe. Geometricamente, a derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

2) (a) $\sec^2(x)$ (b) $\sec(x)\tan(x)$ (c) $-\csc(x)\,\text{cotan}(x)$ (d) $-\csc^2(x)$

3) (a) $f'(x) = 12x^3 - 14x + \dfrac{8}{x^3}$

(b) $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 6x - 2}{(x^2-1)^2}$

(c) $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x}{2\sqrt{x}(x^2 - 2x)^2}$

(d) $f'(x) = \sqrt{x}\sec(x)\tan(x) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sec(x)$

(e) $f'(x) = 9\sqrt[3]{(x)}(\,\text{sen}(x) + 2x) + 3x^{-2/3}(\cos(x) + x^2) + \dfrac{3x^{-3/2}}{2}$

(f) $f'(x) = (2x - 1)\,\text{sen}(x) + (x^2 + 1)\cos(x)$

(g) $f'(x) = \dfrac{(2\sqrt{x} - 3x^5)(-\,\text{sen}(x) - 28x^6) - (\cos(x) - 4x^7)(x^{-1/2} - 15x^4)}{(2\sqrt{x} - 3x^5)^2}$

(h) $f'(x) = \dfrac{1 - 4\cos(x)}{6\,\text{sen}^2(x)}$

4) (a) Para verificar que f é contínua em $x = 0$ temos que mostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. De fato,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0 = f(0),$$

e portanto f é contínua em $x = 0$

(b) Temos que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1,$$

em que usamos o fato de que $|x| = -x$ se $x < 0$. De maneira análoga concluímos que $\lim_{x\to 0^+} |x|/x = 1$. Como os limites laterais são diferentes, o limite $\lim_{x\to 0} |x|/x$ não existe, de modo que f não tem derivada em $x = 0$.

5) (a) $y = x$ (b) $y = -\dfrac{1}{4}x - 1$ (c) $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ (d) $y = -x + \pi$

6) duas retas, com equações $y = 6x - 2$ e $y = 6x + 2$

7) (a) Temos que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2},$$

de modo que a equação da reta tangente é

$$y_a(x) = \frac{-1}{a^2}(x-a) + 1 + \frac{1}{a}.$$

(b) De acordo com o item acima, quando $a = 1$, o disparo é efetuado ao longo da reta

$$y(x) = y_1(x) = -\frac{1}{1^2}(x-1) + 1\frac{1}{1} = 3 - x.$$

A abscissa do ponto atingido é exatamente a raíz da reta acima, ou seja, 3.

(c) O valor de a tem que ser tal que a reta y_a passe pelo ponto $(8, 0)$, isto é,

$$0 = y_a(8) = -\frac{1}{a^2}(8-a) + 1 + \frac{1}{a}.$$

A equação acima é equivalente a

$$\frac{1}{a^2}(8-a) = \frac{1+a}{a},$$

que tem como soluções $a = 2$ e $a = -4$. Como a deve ser positivo a posição do tiro deve ser $(2, f(2)) = (2, \frac{3}{2})$.

8) (a) $y_a(x) = -2a(x-a) + g(a)$

(b) $y(x) = 2x + 5$

(c) $t_0 = 1/2$