Matemática 1

Lista de Exercícios da Semana 7

Temas abordados: Regra da cadeia

Seções do livro: 2.4

1) Use a regra da cadeia para calcular a derivada dy/dx nos itens abaixo

(a) $y = u^4 + 1$; $u = 3x^2 - 2x$

(b) $y = \sqrt{u}$; $u = 1/(x-1)$

(c) $y = u^2 + 2u - 3$; $u = \sqrt{x}$

(d) $y = u^3 + u$; $u = 1/\sqrt{x}$

(e) $y = \cos(u)$; $u = x + x^2$

(f) $y = \mathrm{sen}(u)$; $u = \sqrt{x}$

2) Calcule a derivada das funções abaixo.

(a) $f(x) = (3x^3 + 4x^2 - 4)^{3/4}$

(b) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x}}$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-1}}$

(d) $f(x) = (4x+2)^3(2x-1)^5$

(e) $f(x) = (\tan(x))^2$

(f) $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{\mathrm{sen}(2x)}$

3) Lembrando que $(e^x)' = e^x$ e que $(\ln x)' = 1/x$, derive as funções abaixo.

(a) $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$

(b) $f(x) = xe^{2x}$

(c) $f(x) = \dfrac{e^x + x}{\ln x}$

(d) $f(x) = x^2 \ln(3x)$

(e) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

4) Um ponto move-se sobre o gráfico de $y = 1/(x^2+1)$, de tal modo que sua abcissa x varia a uma velocidade de 5 m/s. Qual a velocidade de y no instante em que x é igual a 10 metros.

5) Uma escada de 8 metros está encostada numa parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/seg, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 metros da parede?

6) Um objeto circular aumenta de tamanho de alguma forma desconhecida. Entretanto, é sabido que quando o raio é igual a 6 metros, a taxa de variação do raio é igual a 4 m/min. Encontre a taxa de variação da área quando o raio é igual a 6 metros.

7) Suponha que a relação entre o comprimento L, em metros, e o peso P, em kg, de um determinado peixe seja dada por $P(L) = 10L^3$. Suponha ainda que a taxa de variação do comprimento em relação ao tempo, dado em anos, satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt}L(t) = 0,2\,(2 - L(t)).$$

(a) Determine o comprimento do peixe no caso em que $P = 20$ kg.

(b) Determine a taxa de variação do peso em relação ao tempo.

(c) Use os itens anteriores para determinar a taxa de variação do peso do peixe, em relação ao tempo, para um peixe de 20 kg.

RESPOSTAS

1) (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 4u^3(6x-2) = 4(3x^2-2x)^3(6x-2)$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}(-1)(x-1)^{-2} = \dfrac{-1}{2(x-1)^2\sqrt{1/(x-1)}}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = (2u+2)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + x^{-1/2}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = (3u^2+1)\dfrac{-1}{2x^{3/2}} = \dfrac{-(3+x)}{2x\sqrt{x^3}}$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(u)\cdot(1+2x) = -\operatorname{sen}(x+x^2)\cdot(1+2x)$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(u)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

2) (a) $f'(x) = \dfrac{3}{4}(3x^3+4x^2-4)^{-1/4}(9x^2+8x)$

(b) $f'(x) = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{2x}}}$

(c) $f'(x) = \dfrac{-5}{2}\dfrac{(3x+1)^{-1/2}}{(2x-1)^{3/2}}$

(d) $f'(x) = 32(8x+1)(2x+1)^2(2x-1)^4$

(e) $f'(x) = 2\tan(x)\sec^2(x)$

(f) $f'(x) = -\dfrac{2x\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(x^2)+2\cos(x^2)\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}$

3) (a) $f'(x) = \frac{3}{2}\frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{3x}}$

(b) $f'(x) = (1+2x)e^{2x}$

(c) $f'(x) = \dfrac{(e^x+1)\ln x - \frac{e^x+x}{x}}{(\ln x)^2}$

(d) $f'(x) = 2x\ln(3x) + x$

(e) $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+2)}{x^3}$

(f) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

4) $-100/101^2$ m/s

5) $6/\sqrt{55}$ m/s

6) 48π m^2/min

7) (a) $2^{1/3}$ (b) $P'(t) = 6L(t)^2(2-L(t))$ (c) $6\cdot 2^{2/3}(2-2^{1/3})$