Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 13 – Soluções

Temas abordados: Integral Indefinida; Regra da Substituição

Seções do livro: 5.5

1) No momento em que um carro está a $72km/h$ o motorista aciona os freios, desacelerando a uma taxa de $2.5m/s$. Lembrando que $3.6km/h$ corresponde a $1m/s$, e denotando por $t = 0$ o instante em que o motorista começa freiar, resolva os itens abaixo.

(a) Determine a velocidade $v(t)$ para $t \geq 0$. Calcule T_p, o tempo de parada do carro após o início da frenagem.

(b) Encontre $s(t)$, a função posição do veículo a partir do instante de frenagem. Mostre que $s'(t) > 0$, $0 \leq t < T_p$.

(c) Supondo que o tempo de reação do motorista seja de 1 segundo e usando o item (b), encontre a distância total percorrida pelo veículo até parar.

(d) Repita os itens (a),(b) e (c), supondo que o velocímetro marcasse $144km/h$.

Soluções:

(a) Observe inicialmente que a velocidade do carro antes do acionamento dos freios é de 20 m/s, ou seja, $v(0) = 20$. Uma vez que a taxa de variação da velocidade é a aceleração, temos que $v'(t) = -2,5$ para todo $t \in (0, T_p)$. Integrando essa igualdade e lembrado que v é contínua concluímos que $v(t) = -2,5t + K, \quad t \in [0, T_p]$, em que $K \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração. Fazendo $t = 0$ obtemos $20 = v(0) = -2,5 \cdot 0 + K$, de onde segue que $K = 20$, e portanto a velocidade é dada por

$$v(t) = -2,5t + 20, \quad t \in [0, T_p].$$

Para calcular o valor de T_p basta observar que $0 = v(T_p) = -2,5T_p + 20$, e portanto $T_p = 8s$.

(b) Para esse item vamos supor que, no instante de acionamente dos freios, a posição do carro era $s(0) = 0$. Integrando a igualdade $s'(t) = v(t) = -2,5t+20$, obtemos $s(t) = -(5/4)t^2 + 20t + K$, onde $K \in \mathbb{R}$ é uma nova constante de integração. Lembrando que $s(0) = 0$ e procedendo como no item acima concluímos que $K = 0$, de modo que

$$s(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 20t, \quad t \in [0, T_p].$$

(c) O espaço percorrido pelo carro desde o acionamento do freio até o momento de parada é dado por $s(T_p) = -80 + 160 = 80$m. Durante o intervalo de tempo de 1s entre o instante em que o motorista vê o (possível) obstáculo e o acionamento do freio, o carro percorre 20m, visto que velocidade nesse período é constante e igual a 20 m/s. Desse modo a distância total percorrida é de 100 metros.

(d) Para esse item basta proceder como acima e observar que, nesse caso, a velocidade do carro no instante em que o freio é acionado vale 40 m/s. É importante notar que a duplicação da velocidade implicou na duplicação do tempo de parada. Porém o aumento na distância percorrida é bem maior, passando de 100 para 360 metros. Isso parece mostrar que uma velocidade de 144 km/h não é razoável para se trafegar.

2) Inicialmente, $3g$ de sódio são dissolvidos em um recipiente com $6l$ de água. Uma solução sódica passa a ser bombeada para dentro do recipiente a uma taxa de $0,5l$ por minuto, sendo que depois de ser bem misturada é drenada na mesma taxa. Considerando-se $Q(t)$ a quantidade de sal após t minutos segue que

$$Q'(t) = T_e - T_s,$$

onde T_e e T_s denotam, respectivamente, as taxas de entrada e saída de sal.

(a) Supondo que a concentração que entra seja de $2g/l$, mostre que $T_e - T_s = 1 - \frac{Q(t)}{12}$ para concluir que

$$Q'(t) = 1 - \frac{Q(t)}{12}. \tag{1}$$

(b) Multiplicando a equação (1) por $e^{t/12}$, mostre que

$$\left(e^{t/12}Q(t)\right)' = e^{t/12}. \tag{2}$$

(c) Faça substituição $t = 12z$ para encontrar uma primitiva de $e^{t/12}$. Conclua da equação acima que

$$Q(t) = Ce^{-t/12} + 12.$$

(d) Use que $Q(0) = 3$ para encontrar C na expressão acima. Qual seria a quantidade de sal no recipiente após os primeiros 12 minutos?

(e) Encontre a quantidade de sal no recipiente após um longo tempo.

Soluções:

(a) **aqui peço ajuda aos universitarios...** Assim, lembrando que $Q'(t) = T_e - T_s$, concluímos que a equação (1) se verifica.

(b) Fazendo o que é pedido obtemos que $e^{t/12}Q'(t) + \frac{e^{t/12}}{12}Q(t) = e^{t/12}$. É suficiente agora lembrar que, pela regra do produto e da cadeia, o lado esquerdo desa última igualdade é exatamente $(e^{t/12}Q(t))'$, de modo que a equação (2) também se verifica.

(c) A substituição $t = 12z$ nos fornece $dt = 12dz$. Assim,

$$e^{t/12}Q(t) = \int (e^{t/12}Q(t))'dt = \int e^{t/12}dt = 12\int e^z dz = 12e^z + C_1 = 12e^{t/12} + C_1,$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração. Dividindo a igualdade por $e^{t/12}$ concluímos que

$$Q(t) = Ce^{-t/12} + 12, \quad t \geq 0,$$

para uma nova constante de integração $C \in \mathbb{R}$.

(d) Temos que $3 = Q(0) = Ce^0 + 12 = C + 12$, de onde segue que $C = -9$, e portanto $Q(t) = -9e^{-t/12} + 12$. Após 12 minutos teremos $Q(12) = (12 - 9/e) \approx 8,7$ gramas de sal no recipiente.

(e) Essa quantidade é dada pelo limite

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{9}{e^{t/12}} + 12\right) = 12.$$

3) Suponha que a temperatura $T(t)$ de um corpo imerso em um meio com temperatura constante e igual a 20 seja tal que $T(0) = 80$ graus Celsius. Segundo a *Lei do Resfriamento de Newton*, a taxa de variação $T'(t)$ é proporcional à diferença entre as temperaturas $T(t)$ e 20. Supondo que a constante de proporcionalidade seja igual a -2, segue que

$$T'(t) = -2(T(t) - 20), \qquad t > 0.$$

(a) A partir dos dados apresentados, determine a temperatura $T(t)$.

(b) Determine o instante t_0 em que $T(t_0) = 40$.

(c) O que acontece com a temperatura $T(t)$ após muito tempo?

Soluções:

(a) Como a temperatura inicial $T(0) = 80$ é maior que a temperatura ambiente podemos supor que $T(t) > 20$ para todo tempo $t > 0$. Em outras palavras, estamos supondo que a temperatura de equilíbrio não será atingida em tempo finito. Desse modo

$$\frac{d}{dt}\ln(T(t) - 20) = \frac{T'(t)}{T(t) - 20} = -2. \tag{3}$$

Integrando os dois lados em relação à variável t e depois aplicando a função exponencial obtemos que

$$T(t) = Ke^{-2t} + 20, \tag{4}$$

em que $K \in \mathbb{R}$ é a constante de integração. Como $T(0) = 80$, segue que $K = 60$.

(b) Note que

$$T(t_0) = 40 \Leftrightarrow 60e^{-2t_0} = 20.$$

Aplicando a função logarítmica na expressão acima concluímos que $t_0 = \frac{\ln 3}{2}$.

(c) Como queremos saber o que ocorre para tempos t muito grandes, calculamos o limite da expressão $T(t)$ quando $t \to +\infty$ para obter

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty} 60e^{-2t} + \lim_{t\to+\infty} 20 = 20.$$

Assim, se t for muito grande, $T(t)$ estará muito próximo da temperatura ambiente 20 graus Celsius. Dizemos nesse caso que 20 é a *temperatura de equilíbrio* do sistema.

4) Uma partícula de massa $m > 0$ se move retilineamente sob a ação de uma força F que é proporcional à velocidade $v(t)$ da partícula e atua em sentido contrário ao deslocamento. Desse modo $F = -k\,v(t)$, com $k > 0$ constante. Supondo que $v(0) = v_0 > 0$ resolva os itens a seguir.

(a) De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos que $F = m\,v'(t)$, em que $v'(t)$ é a aceleração da partícula. Usando essa informação e a expressão para F dada no enunciado, obtenha a equação que relaciona m, k, $v(t)$ e $v'(t)$.

(b) Lembrando que a derivada de $\ln(v(t))$ é igual a $v'(t)/v(t)$, use o item anterior para obter $v(t)$ em termos de v_0, k e m.

(c) Determine o espaço $s(t)$ percorrido pela partícula até o instante t, supondo $s(0) = 0$.

(d) Calcule a distância total d percorrida pela partícula, dada por $d = \lim\limits_{t\to\infty} s(t)$.

<u>**Soluções**</u>:

(a) Segue diretamente da comparação entre as expressões dadas para a força F que

$$mv'(t) = -kv(t).$$

(b) Integrando a igualdade

$$\frac{d}{dt}\ln(v(t)) = \frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{k}{m}$$

concluímos que $\ln v(t) = -kt/m + A_1$, com $A_1 \in \mathbb{R}$ sendo uma constante de integração. Aplicando a função exponencial obtemos

$$v(t) = e^{A_1}e^{-\frac{k}{m}t} = A_2e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Como $v(0) = v_0$, obtemos $A_2 = v_0$ e portanto

$$v(t) = v_0e^{-\frac{kt}{m}}, \quad t \geq 0.$$

(c) Para calcular o espaço $s(t)$ basta lembrar que $s'(t) = v(t)$ e portanto

$$s(t) = \int s'(t)\mathrm{d}t = \int v_0e^{-\frac{kt}{m}}\mathrm{d}t = \frac{-mv_0}{k}e^{-\frac{kt}{m}} + C.$$

Como, $s(0) = 0$ segue da igualdade acima que $C = mv_0/k$.

(d) Basta calcular o limite

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{-mv_0}{k}e^{-\frac{kt}{m}} + \lim_{t\to+\infty}\frac{mv_0}{k} = \frac{mv_0}{k}.$$