Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 10 – Soluções

Temas abordados: Concavidade; Esboço de gráficos; regra de L'Hospital
Seções do livro: 4.4, 4.5

1) Durante o processo de tosse, provocado pela presença na traquéia de algum corpo estranho, a traquéia se contrai com o objetivo de aumentar o fluxo de ar através dela, e assim tornar mais eficiente o método de expulsão do corpo estranho. Segundo Poiseuille, indicando por r_0 o raio da traquéia em estado normal e por $r \leq r_0$ o seu raio durante a tosse, o fluxo de ar $V = V(r)$ na traquéia pode ser modelado por

$$V(r) = \begin{cases} K\dfrac{r_0}{2}r^4 & \text{se} \quad 0 \leq r \leq r_0/2, \\ K(r_0 - r)\, r^4 & \text{se} \quad r_0/2 \leq r \leq r_0, \end{cases}$$

onde K é uma constante positiva.

(a) Determine os pontos críticos de $V(r)$ no intervalo $(0, r_0)$.

(b) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $V(r)$.

(c) Determine os intervalos em que o gráfico de $V(r)$ é côncavo para cima ou para baixo.

(d) Use os itens anteriores para esboçar o gráfico de $V(r)$ no caso em que $K = 1$.

Soluções:

(a) Observe que o único ponto onde a função pode não ser derivável é $r = r_0/2$. De fato, calculando os limites laterais do quociente de Newton nesse ponto temos que

$$\lim_{r \to \frac{r_0}{2}^-} \frac{V(r) - V(\frac{r_0}{2})}{r - \frac{r_0}{2}} = \lim_{r \to \frac{r_0}{2}^-} \frac{1}{r - \frac{r_0}{2}} \left(\frac{K r_0}{2} r^4 - \frac{K r_0}{2^5} r_0^4 \right) = \frac{K r_0^4}{4},$$

e

$$\lim_{r \to \frac{r_0}{2}^+} \frac{V(r) - V(r_0)}{r - \frac{r_0}{2}} = \lim_{r \to \frac{r_0}{2}^+} \frac{1}{r - \frac{r_0}{2}} \left(K(r_0 - r) r^4 - K(r_0 - r) \frac{r_0^4}{2^4} \right) = \frac{3K r_0^4}{16},$$

e portanto V não é derivável em $r = r_0/2$. A derivada nos intervalos $(0, r_0/2)$ e (r_0, r) pode ser feita de maneira usual e tem a seguinte expressão

$$V'(r) = \begin{cases} 2K r_0 r^3 & \text{se} \quad 0 < r < r_0/2, \\ K(4 r_0 r^3 - 5r^4) & \text{se} \quad r_0/2 < r < r_0. \end{cases} \tag{1}$$

Como a função acima se anula somente no ponto $r = 4r_0/5$, os pontos críticos de f são $r_0/2$ e $4r_0/5$.

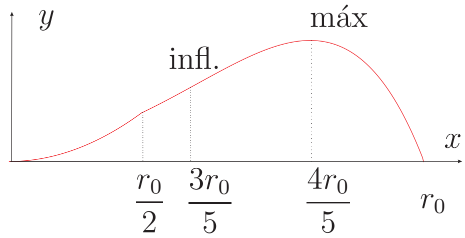
(b) Note que por (1) observa-se que $V'(r) > 0$ em $(0, r_0/2)$. Além disso, fazendo o estudo do sinal do polinômio $4r_0 r^3 - 5r^4$ observamos que $V'(r) > 0$ em $(r_0/2, 4r_0/5)$ e $V'(r) < 0$ em $(4r_0/5, r_0)$. Dessa forma, a função é crescente em $(0, r_0/2)$ e $(r_0/2, 4r_0/5)$, e decrescente em $(4r_0/5, r_0)$.

(c) A derivada segunda pode ser calculada como acima e, após as devidas simplificações, obtemos

$$V''(r) = \begin{cases} 6Kr_0r^2 & \text{se} \quad 0 < r < r_0/2, \\ 4Kr^2(3r_0 - 5r) & \text{se} \quad r_0/2 < r < r_0. \end{cases} \tag{2}$$

Procedendo de maneira análoga a feita do item (b), via estudo do sinal de cada parte da derivada segunda dada em (2), concluímos que a função é côncava para cima nos intervalos $(0, r_0/2)$ e $(r_0/2, 3\,r_0/5)$, e côncava para baixo no intervalo $(3\,r_0/5, r_0)$.

(d) O gráfico tem o aspecto mostrado abaixo. Observe que, apesar de não ser derivável



em $r_0/2$, a função $V(r)$ é contínua nesse ponto, sendo portanto crescente em todo o intervalo $(0, 4r_0/5)$.

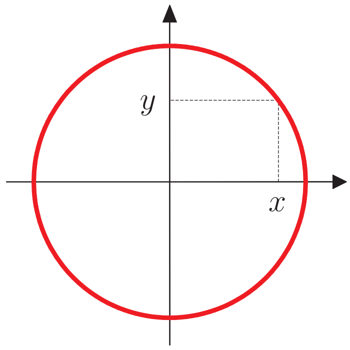
2) Conforme ilustra a figura abaixo, as áreas dos retângulos inscritos na circunferência $x^2+y^2=16$ podem ser calculadas por meio da função $A(x) = 4\,x\,\sqrt{16-x^2}$, com $x \in [0,4]$.

(a) Calcule os pontos críticos da função $A(x)$ no intervalo $(0,4)$.

(b) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento da função $A(x)$.

(c) Determine os intervalos em que a concavidade do gráfico de $A(x)$ é voltada para baixo e os intervalos em que concavidade é voltada para cima.

(d) Esboce o gráfico de $A(x)$.



__Soluções__:

(a) A derivada de A é dada por

$$A'(x) = 4\sqrt{16-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{64-8x^2}{\sqrt{16-x^2}}, 0 < x < 4, \tag{3}$$

e se anula somente no ponto $x = \sqrt{8}$.

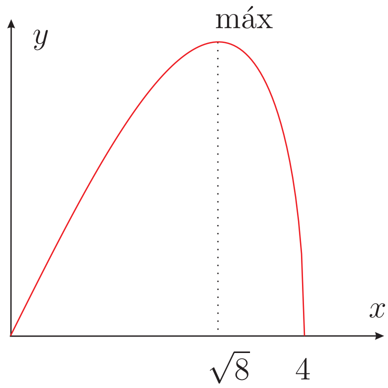
(b) Como $\sqrt{16-x^2} > 0$ em $(0,4)$, fazendo o estudo do sinal de $64-8x^2$, concluímos que $A(x)$ é crescente em $(0,\sqrt{8})$ e decrescente em $(\sqrt{8},4)$.

(c) Fazendo a derivada com relação a x em (3), obtemos pela regra do quociente

$$A''(x) = \frac{-16x}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{x(64-8x^2)}{(16-x^2)^{3/2}} = \frac{8x(-24+x^2)}{(16-x^2)^{3/2}}, 0 < x < 4. \tag{4}$$

Agora observe que como $x/(16-x^2)^{3/2} > 0$ em $0 < x < 4$, estudando-se o sinal do polinômio $(64-8x^2)$, concluímos que o gráfico tem concavidade voltada para baixo em $(0,4)$.

(d) Com base em (a)-(c), concluímos que o gráfico de $A(x)$ é como ao lado.



3) Suponha que o número de milhares de pessoas infectadas por um vírus seja modelado pela função $N(t) = -2t^3 + at^2 + bt + c$, em que a, b e c são constantes e o tempo t é medido em anos. Suponha ainda que, no instante $t = 0$, nove mil pessoas estavam infectadas, um ano depois esse número atingiu um valor mínimo e, em seguida, cresceu até atingir um valor máximo para $t = 2$.

(a) Determine as constantes a, b e c a partir das informações dadas.

(b) Determine o número de pessoas infectadas 1, 2 e 3 anos depois do instante $t = 0$.

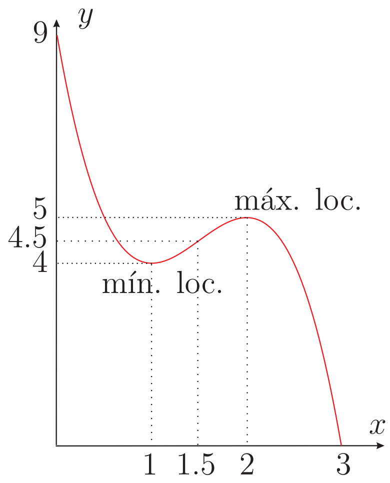
(c) Determine a concavidade de $N(t)$ e, em seguida, esboce o seu gráfico para $t \in [0, 3]$.

<u>**Soluções**</u>:

(a) Uma vez que $N(0) = c$ e 9 mil pessoas estavam infectadas no instante $t = 0$ concluímos que $c = 9$. Segue das informações do enunciado que $N'(1) = N'(2) = 0$. Uma vez que $N'(t) = -6t^2 + 2at + b$, substituindo os valores $t = 1$ e $t = 2$ concluímos que a e b devem satisfazer o sistema linear

$$\begin{cases} 2a + b &= 6 \\ 4a + b &= 24, \end{cases}$$

e portanto $a = 9$ e $b = -12$. Desse modo $N(t) = -2t^3 + 9t^2 - 12t$.



(b) Basta usar a expressão de $N(t)$.

(c) Como $N''(t) = -12t + 18$, estudando o sinal de N'' concluímos que N é côncava para cima em $(0, \frac{3}{2})$ e côncava para baixo em $(\frac{3}{2}, 3)$. Pelos dados do enunciado já sabemos que $t = 1$ e $t = 2$ são pontos críticos de $N(t)$. Como $N(t)$ é derivável, e $N'(t)$ é um polinômio do segundo grau, concluímos que estes são os únicos pontos críticos de $N(t)$. Ainda pelo enunciado, já sabemos que estes são pontos de máximo local e mínimo local, respectivamente. Note que o item (b) confirma está informação. Agora, como $N''(t)$ troca de sinal em $t = 1.5$, segue que este é um ponto de inflexão. Notando que $N(3/2) = 9/2$, e usando as informações dos itens (a)-(d) obtemos o gráfico ao lado.

4) O mecanismo de suspensão dos automóveis consiste num sistema composto de uma mola e de um amortecedor. Denotando por $s(t)$ a posição vertical de um veículo de massa m em relação a posição de equilíbrio, temos que a força da mola é dada, pela lei de Hooke, por $F = -ks(t)$ e a força do amortecedor é dada por $R = -bv(t)$, onde $v(t)$ é a velocidade instantânea e a constante b é denominada viscosidade do amortecedor. Como a força resultante é $F + R$, pela Segunda Lei de Newton, temos que

$$(*) \quad ma(t) = -ks(t) - bv(t)$$

para $t > 0$. Suponha que, em unidades adequadas, $m = 1$, $b = 4$ e $k = 4$ e considere

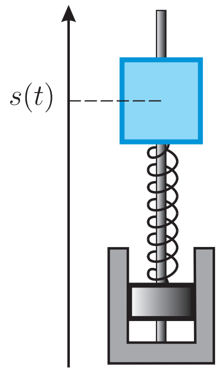
$$s(t) = -3te^{-2t}.$$

(a) Calcule $v(t)$ e $a(t)$ e verifique que a equação $(*)$ é satisfeita.

(b) Calcule os pontos críticos de $s(t)$ e determine seus extremos locais e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

(c) Determine os pontos de inflexão de $s(t)$ e os intervalos onde a concavidade é voltada para cima e onde é voltada para baixo.

(d) Determine as assíntotas de $s(t)$ e, em seguida, esboce o seu gráfico.



Soluções:

(a) Temos que

$$v(t) = -3(te^{-2t})' = -3((t)'e^{-2t} + (e^{-2t})'t) = -3(e^{-2t} - 2te^{-2t}) = -3(1-2t)e^{-2t}$$

e também que

$$a(t) = -3((1-2t)e^{-2t})' = -3((1-2t)'e^{-2t} + (e^{-2t})'(1-2t)) = 12(1-t)e^{-2t}.$$

Segue então que

$$-4s(t) - 4v(t) = -4(-3te^{-2t} + -3(1-2t)e^{-2t}) = 12(1-t)e^{-2t} = a(t),$$

verificando a equação $(*)$.

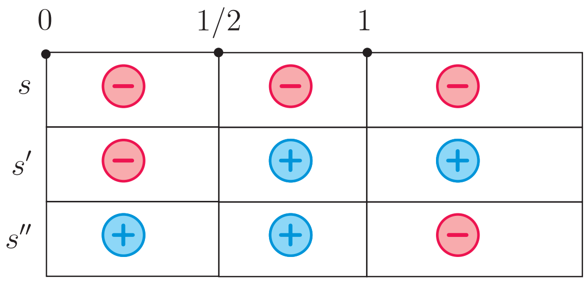
(b) Temos que $s'(t) = v(t) = 0$ se e só se $t = 1/2$, que é o único ponto crítico. Além disso, como $e^{-2t} > 0$, segue que o sinal $s'(t)$ é igual ao sinal de $-3(1-2t)$. Logo temos que $s'(t) > 0$, se $t > \frac{1}{2}$ e também $s'(t) < 0$, se $0 \leq t < \frac{1}{2}$. Portanto a função s cresce em $(\frac{1}{2}, \infty)$ e decresce em $[0, \frac{1}{2})$. Temos então que $t = 1/2$ é ponto de mínimo global de s.

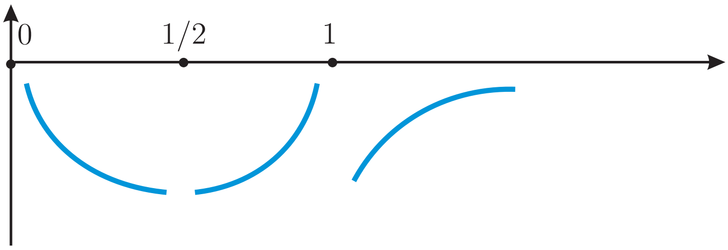
(c) Como $e^{-2t} > 0$, segue que o sinal $s''(t) = a(t)$ é igual ao sinal de $12(1-t)$. Logo $s''(t) > 0$, se $0 \leq t < 1$ e também $s''(t) < 0$, se $t > 1$. Portanto a função s tem concavidade para cima em $[0, 1)$ e tem concavidade para baixo em $(1, \infty)$. Temos então que $t = 1$ é um ponto de inflexão de s.

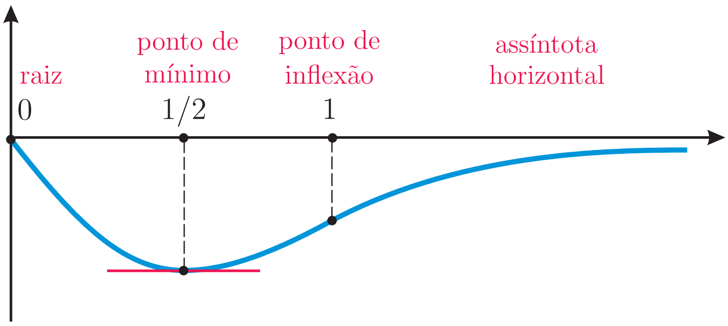
(d) Não existem assíntotas verticais nem assíntota horizontal pela esquerda, uma vez que $s(t)$ é contínua e está definida em $[0, \infty)$. Para determinar se existe assíntota horizontal pela direita, calculamos o limite

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{-3t}{e^{2t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-3}{2e^{2t}} = 0,$$

onde usamos L'Hospital, de modo que $s = 0$ é assíntota horizontal pela direita. Usando essas informações, podemos esboçar o gráfico de $s(t)$ como ilustrado abaixo.

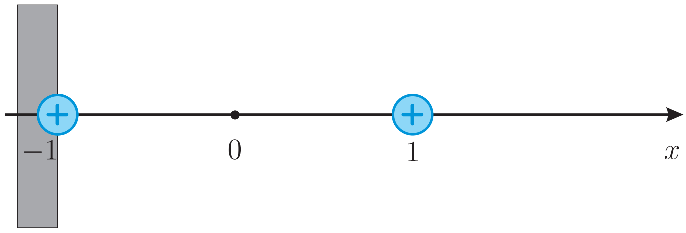






5) Considere duas cargas elétricas com carga unitária e positiva, fixadas num eixo perpendicular a uma parede, como na figura abaixo. O potencial elétrico gerado por essas duas partículas num ponto x ao longo desse eixo é dado, em unidades convenientes, pela seguinte função

$$V(x) = \frac{1}{|x+1|} + \frac{1}{|x-1|}, \qquad x > -1.$$



(a) Verifique que o potencial elétrico é dado por

$$V(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2-1}, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{2x}{x^2-1}, & x > 1 \end{cases}$$

(b) Calcule a força exercida numa partícula de carga unitária posicionada em x, dada por $F(x) = -V'(x)$.

(c) Calcule os pontos críticos de $V(x)$ e determine seus extremos locais e seus intervalos de crescimento e decrescimento. A força $F(x)$ se anula em algum ponto?

(d) Determine os pontos de inflexão de $V(x)$ e seus intervalos de concavidade para cima e para baixo.

(e) Determine as assíntotas verticais e horizontais de $V(x)$ e esboce seu gráfico.

Soluções:

(a) Para $-1 < x < 1$ temos que $x+1 > 0$ e que $x-1 < 0$, portanto

$$V(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x^2-1} = -2(x^2-1)^{-1}.$$

Para $x > 1$ temos que $x+1 > 0$ e que $x-1 > 0$, portanto

$$V(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} = 2x(x^2-1)^{-1}.$$

(b) Basta obter $V'(x)$. Como $V(x)$ não está definida no ponto $x = 1$ onde muda sua expressão algébrica, para derivar $V(x)$ basta derivar cada expressão algébrica

$$(-2(x^2-1)^{-1})' = 4x(x^2-1)^{-2},$$

$$(2x(x^2-1)^{-1})' = 2(x^2-1)^{-1} - 4x^2(x^2-1)^{-2} = -2(x^2+1)(x^2-1)^{-2},$$

de modo que

$$V'(x) = \begin{cases} 4x(x^2-1)^{-2}, & -1 < x < 1 \\ -2(x^2+1)(x^2-1)^{-2}, & x > 1 \end{cases}$$

(c) Nas análises de sinal, vamos usar diversas vezes que $x^2 - 1$ é negativo para $-1 < x < 1$ e positivo para $x > 1$ e que $(x^2-1)^2$ é positivo para $x \neq \pm 1$.

Pelo item (b), o sinal de $V'(x)$ em $(-1, 1)$ é o sinal de x. Segue que $x = 0$ é ponto crítico, que $V(x)$ é decrescente em $(-1, 0)$ e crescente em $(0, 1)$. Em particular, $x = 0$ é um mínimo local. O sinal de $V'(x)$ em $(1, \infty)$ é o sinal de $-(x^2+1)$ que é sempre negativo. Segue que $V(x)$ é decrescente em $(1, \infty)$.

Como $x = 0$ é o único ponto crítico de $V(x)$, segue esse é o único ponto onde a força $F(x)$ se anula.

(d) Uma vez que $V'(x)$ não está definida no ponto $x = 1$ onde muda sua expressão algébrica, para obter $V''(x)$ basta derivar cada expressão algébrica

$$(4x(x^2-1)^{-2})' = 4(x^2-1)^{-2} - 16x^2(x^2-1)^{-3} = -4(3x^2+1)(x^2-1)^{-3}$$

$$(-2(x^2+1)(x^2-1)^{-2})' = -4x(x^2-1)^{-2} + 8(x^2+1)x(x^2-1)^{-3} = 4x(x^2+3)(x^2-1)^{-3}$$

de modo que

$$V''(x) = \begin{cases} -4(3x^2+1)(x^2-1)^{-3}, & -1 < x < 1 \\ 4x(x^2+3)(x^2-1)^{-3}, & x > 1 \end{cases}$$

O sinal de $V''(x)$ em $(-1,1)$ é o sinal de $-(x^2-1)^{-3}$, que é o sinal de $-(x^2-1)$, que é positivo para $-1 < x < 1$. Segue que V possui concavidade para cima em $(-1,1)$. O sinal de $V''(x)$ em $(1,\infty)$ é o sinal de $x(x^2-1)^{-3}$, que é o sinal de x^2-1, que é positivo para $x > 1$. Segue que V possui concavidade para cima em $(1,\infty)$. Portanto $V(x)$ sempre possui concavidade para cima e não possui pontos de inflexão.

(e) Uma vez que $V(x)$ é contínua em $(-1,1)\cup(1,\infty)$, os candidatos a assíntotas verticais são $x = -1$ e $x = 1$. Temos que

$$\lim_{x\downarrow -1} V(x) = \lim_{x\downarrow -1} -\frac{2}{x^2-1} = +\infty,$$

uma vez que x^2-1 se anula em $x = -1$ e que o sinal de $-2/(x^2-1)$ quando $x \downarrow -1$ é positivo. Com uma análise análoga, concluímos que

$$\lim_{x\uparrow 1} V(x) = \lim_{x\uparrow 1} -\frac{2}{x^2-1} = +\infty.$$

Segue que ambas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais de $V(x)$. Temos por último que

$$\lim_{x\downarrow 1} V(x) = \lim_{x\downarrow 1} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty,$$

uma vez que x^2-1 se anula em $x = 1$, que $2x$ não se anula em $x = -1$ e que o sinal de $2x/(x^2-1)$ quando $x \downarrow 1$ é positivo.

Pela forma do domínio de $V(x)$ ela só pode ter assíntota horizontal à direita. Temos que

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0,$$

onde usamos L'Hospital no limite indeterminado ∞/∞. Segue que $y = 0$ é uma assíntota horizontal à direita de $V(x)$.

Para esboçar o gráfico de $V(x)$ primeiro notamos que $V(x)$ é sempre positivo, o que segue da sua expressão no enunciado da questão. Do item (c) segue que $V''(x)$ é sempre positivo. Assim, o gráfico de $V(x)$ está sempre acima do eixo x com concavidade para cima. O item (b) nos diz que $V(x)$ é decrescente em $(-1,0)$, crescente em $(0,1)$ e novamente decrescente em $(1,\infty)$. Juntando essa informação com a informação das assíntotas, temos que o esboço do gráfico de $V(x)$ abaixo.

	-1	0	1
V	$+$	$+$	$+$
V'	$-$	$+$	$-$
V''	$+$	$+$	$+$