Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 08

Temas abordados: Taxas relacionadas; Extremos de funções

Seções do livro: 3.10, 4.1

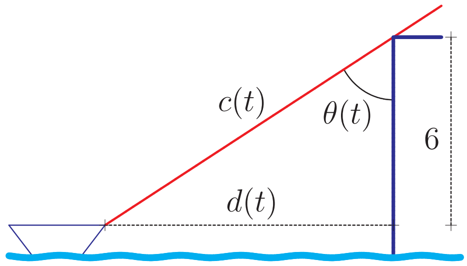
1) Suponha que um barco seja puxado para o cais por uma corda presa à sua proa, situada 6 m abaixo do apoio da corda no cais, conforme a figura abaixo. Suponha ainda que a corda seja puxada com uma velocidade de 2 m/s. Nesse caso, o comprimento $c(t)$ da corda entre a proa e o apoio, a distância $d(t)$ do barco ao cais e o ângulo $\theta(t)$ entre a corda e a vertical são funções do tempo t. Denote por τ o instante em que $c(\tau) = 10$ m.

(a) Calcule o valor de $d(\tau)$.

(b) Calcule a derivada $d'(\tau)$.

(c) Calcule o valor de $\operatorname{tg}(\theta(\tau))$.

(d) Usando os itens anteriores e a regra da cadeia, calcule o valor de $\theta'(\tau)$.

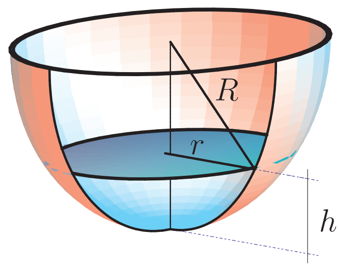


2) Considere um reservatório, na forma de um hemisfério de raio $R = 10$ m, com água até uma altura h, conforme ilustra a figura abaixo. Nesse caso, o volume de água é dado por $V(h) = (\pi/3)(3\,R\,h^2 - h^3)$. Suponha que o reservatório esteja sendo abastecido com uma vazão de $16\,\pi$ m^3/min. Portanto a altura h e o raio r da superfície da água são funções do tempo. Observe que a forma esférica do reservatório estabelece uma relação entre as funções $h = h(t)$ e $r = r(t)$.

(a) Usando a regra da cadeia aplicada a $V(h(t))$, determine o valor de $h'(\tau)$ no instante τ em que $h(\tau) = 4$.

(b) Obtenha a relação entre as funções $h(t)$ e $r(t)$ menciona acima.

(c) Usado os itens anteriores, determine o valor de $r'(\tau)$ no instante τ em que $h(\tau) = 4$.

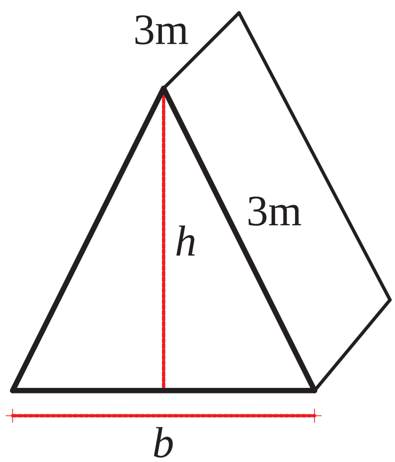


3) Suponha que, na construção de uma barraca com vista frontal na forma de um triângulo isósceles de altura h, as laterais devem ser feitas a partir de uma lona com 6 m de comprimento e 3 m de largura, conforme ilustra a figura.

(a) Determine o comprimento b da base do triângulo em função da altura h.

(b) Use o item anterior para expressar o volume $V(h)$ da barraca em função de h.

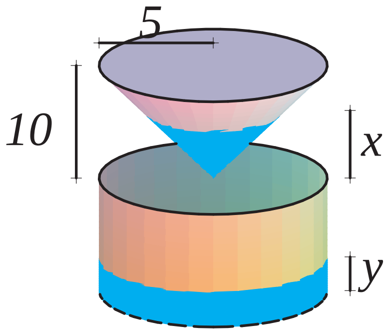
(c) Determine h de forma que o volume $V(h)$ seja máximo, justificando a sua resposta.



4) Um filtro na forma de um cone circular reto tem altura igual a 10 cm e raio da base igual a 5 cm. Suponha que uma certa quantidade de água seja colocada nesse filtro e que ela escoe para um recipiente na forma de um cilindro circular reto de mesmo raio e altura que o filtro, conforme ilustra a figura abaixo. Indique por x a altura da água no filtro e por y a altura da água no recipiente.

(a) Sendo r o raio da superfície da água no filtro, use semelhança de triângulos para determinar r em função de x.

(b) Sabendo que o volume de um cone circular reto de raio r e altura x é igual a $(1/3)\pi r^2 x$, determine o volume $V_1(x)$ da água no filtro como função de x.



(c) Determine o volume $V_2(y)$ de água no recipiente cilíndrico.

(d) Considerando que $x = x(t)$ e $y = y(t)$, em que $t > 0$ denota o tempo, determine y' no instante $\tau > 0$ tal que $x(\tau) = 5$ e $x'(\tau) = -0,5$.

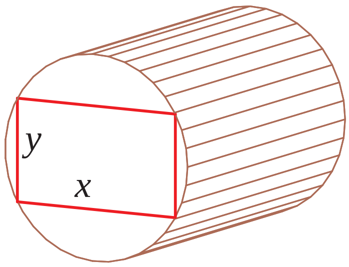
5) Suponha que uma viga retangular, de largura x e altura y, deva ser cortada de um cilindro de seção circular de raio a, como ilustra a figura abaixo. A resistência R dessa viga é diretamente proporcional ao produto de sua largura x pelo quadrado de sua altura y. Indique por K a constante de proporcionalidade e observe que a altura $y = y(x)$ pode ser obtida a partir da largura x, e portanto a resistência $R = R(x)$ pode ser expressa apenas em função da largura da viga x, onde x varia de 0 até o diâmetro $2a$ do cilindro circular.

(a) Obtenha a expressão de $y = y(x)$ em termos de x.

(b) Obtenha a expressão da resistência $R = R(x)$ como função de x.

(c) Calcule os pontos críticos de $R(x)$ no domínio $(0, 2a)$.

(d) Calcule o valor máximo da resistência que pode ser obtido entre as vigas cortadas do cilindro.



Gabarito

1. (a) $d(\tau) = 8$
   (b) $d'(\tau) = -20/8$
   (c) $\operatorname{tg}(\theta(\tau)) = 8/6$
   (d) $\theta'(\tau) = -12/80$
2. (a) $h'(\tau) = 1/4$
   (b) $100 = r(t)^2 + (10 - h(t))^2$
   (c) $r'(\tau) = 3/16$
3. (a) $b = 2\sqrt{9 - h^2}$
   (b) $V(h) = 3h\sqrt{9 - h^2}$
   (c) $h = 3/\sqrt{2}$ m
4. (a) $r = x/2$
   (b) $V_1(x) = (\pi/12)x^3$
   (c) $V_2(y) = 25\pi y$
   (d) $y'(\tau) = 1/8$
5. (a) $y(x) = \sqrt{4a^2 - x^2}$
   (b) $R(x) = K(4a^2x - x^3)$
   (c) $x = 2a/\sqrt{3}$
   (d) $16a^3\sqrt{3} \cdot (K/9)$