Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

O problema da velocidade instantânea

Suponha que um carro se move em uma estrada com velocidade constante e igual a 60 km/h. Se no instante $t = 0$ ele estava no marco zero da estrada, não é difícil notar que a função que fornece a posição em um instante $t > 0$ é dada por $s(t) = 60t$. De uma maneira mais geral, se a posição inicial era $s_0 \in \mathbb{R}$ e a velocidade (constante) é igual a $v_0 \in \mathbb{R}$, então a posição é dada por $s(t) = s_0 + v_0 t$.

Você certamente já se deparou com o problema acima. Na verdade, nos seus estudos do ensino médio, considerava-se uma situação mais geral, com o carro tendo uma aceleração constante e igual a $a \in \mathbb{R}$. Nesse caso, supondo que a posição inicial é s_0 e a velocidade inicial é v_0, sabemos que a equação do espaço é dada por

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad t > 0,$$

que é exatamente a equação do espaço do *movimento uniformemente variado*. Como a aceleração é igual a a, podemos facilmente deduzir que a velocidade do carro, em função do tempo, é dada pela função

$$v(t) = v_0 + at, \quad t > 0.$$

Estamos interessados aqui no seguinte problema: supondo que conhecemos a posição do carro $s(t)$, queremos determinar a sua velocidade $v(t)$ em um dado instante $t > 0$. No caso em que $s(t)$ é um polinômio de grau 1 ou 2, a solução já foi dada nos dois parágrafos anteriores. O que queremos agora é obter uma forma de calcular a velocidade para funções $s(t)$ mais gerais.

As ideias que vamos desenvolver servem para muitas expressões da função $s(t)$. Porém, para fixar essas ideias, vamos supor que $s(t) = t^3$. Também, para facilitar a exposição inicial, vamos supor que queremos encontrar a velocidade do carro no instante $t = 2$. Sumarizando, vamos tratar do problema seguinte:

Problema: Supondo que a posição do carro seja dada por $s(t) = t^3$, qual é a velocidade do carro no instante $t = 2$?

A primeira coisa que deve ser observada é que as fórmulas aprendidas no ensino médio não são suficientes para obtermos a resposta. De fato, as fórmulas anteriores só se aplicam para aos casos em que a função $s(t)$ é um polinômio de grau 1 (velocidade constante) ou um polinômio de grau 2 (aceleração constante). Desse modo, precisamos desenvolver uma nova técnica para resolver o nosso problema.

Você vai se lembrar agora de que, ainda que não saibamos calcular a velocidade $v(t)$, podemos usar a expressão de $s(t)$ para calcular a velocidade média entre dois instantes. A velocidade média entre os instante $t = 2$ e $t = 4$ é dada pela expressão

$$\frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{4^3 - 2^3}{4 - 2} = \frac{64 - 8}{2} = 28.$$

Logo, como não sabemos calcular $v(2)$, podemos *aproximar esse valor* usando a velocidade média calculada acima. Naturalmente, essa aproximação contém algum tipo de erro, porque estamos deixando um intervalo de 2 horas em que o motorista poderia, eventualmente, efetuar mudanças de velocidade, sem com isso mudar o valor de $v(2)$. Parece natural que, se diminuirmos esse intervalo de tempo para 1 hora somente, a aproximação poderia ficar melhor. Assim, podemos agora considerar como velocidade aproximada a velocidade média entre os intantes $t = 2$ e $t = 3$, a saber

$$\frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{27 - 8}{1} = 19.$$

Procedendo como acima, podemos construir uma tabela que nos fornece, para cada valor $h \neq 0$, a velocidade média do carro entre o instante inicial $t = 2$ e o instante final $t = 2 + h$. Listamos abaixo alguns valores dessa tabela:

$h \neq 0$	instante final $t = 2 + h$	velocidade média $\frac{s(2+h)-s(2)}{(2+h)-2}$
2	4	28
1	3	19
0,5	2,5	15,25
0,1	2,1	12,61
0,01	2,01	12,0601
0,001	2,001	12,006001

Do ponto de vista físico, parece claro que a aproximação que estamos usando (velocidade média) fica mais precisa à medida em que o intervalo de tempo h se torna mais próximo de zero. Assim, a tabela parece indicar que a velocidade no instante 2 é igual a 12.

Para melhor justificar a afirmação acima, vamos criar uma nova função. Seja então $vm_2(h)$ a função que associa a velocidade média entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + h$. Formalmente,

$$vm_2(h) = \frac{s(2+h) - s(2)}{(2+h) - 2} = \frac{(2+h)^3 - 2^8}{h}. \tag{1}$$

Observe que o valor de h nunca pode ser igual a zero. Mais especificamente, como estamos falando de dois instantes *distintos* $t = 2$ e $t = 2 + h$, os valores possiveis para h são todos aqueles em que $h \neq 0$ e $h \geq -2$. Essa última restrição surge porque, se $h < -2$, então $2 + h < 0$, e não faz sentido falarmos em instante de tempo negativo. Em resumo, o domínio da função vm_2 é dado por

$$\text{Dom}(vm_2) = [-2, 0) \cup (0, +\infty) = \{h \in \mathbb{R} : h \geq -2 \text{ e } h \neq 0\}.$$

Estamos interessado em descobrir o que acontece com o valor de $vm_2(h)$ quando h fica próximo de zero. Se olharmos para o último quociente da definição de vm_2 em (1), podemos perceber que, à medida em que h se aproxima de zero, tanto o numerador quanto o denominador desse quociente se aproximam de zero. Para que possamos entender melhor o comportamento do quociente, vamos lembrar que, para todo a, $b \in \mathbb{R}$, temos $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Desse modo, a expressão de $vm_2(h)$ em (1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} vm_2(h) &= \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{(2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 + h^3) - 2^3}{h} \\ &= \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h}, \end{aligned}$$

ou ainda

$$vm_2(h) = 12 + 6h + h^2.$$

Vale ressaltar que, ainda que a expressão do lado direito da equação acima possa ser calculada para qualquer valor de h, o domínio da função vm_2 continua sendo $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Usando a expressão acima, os valores de $vm_2(h)$ da tabela anterior podem ser facilmente calculados. Além disso, fica muito simples perceber o que acontence com $vm_2(h)$ quando h se aproxima de zero. De fato, como os termos $6h$ e h^2 ficam próximos de zero, concluímos que $vm_2(h)$ se aproxima de 12, conforme esperávamos. Usamos a seguinte notação para escrever isso de maneira sucinta:

$$\lim_{h \to 0} vm_2(h) = \lim_{h \to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = 12.$$

Observe que todas essas considerações nos permitem concluir que a velocidade do carro no instante $t = 2$ é igual a 12.

Não existe nada de especial no instante $t = 2$, escolhido para a exposição acima. Para qualquer $t > 0$, podemos calcular a velocidade no instante $t > 0$ como sendo

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{(t+h) - t} = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^3 - t^3}{h}.$$

Usando novamente a expressão do cubo de uma soma, obtemos

$$(t+h)^3 - t^3 = (t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3) - t^3 = h(3t^2 + 3th + h^2),$$

de modo que

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{h(3t^2 + 3th + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3t^2 + 3th + h^2) = 3t^2 + 0 + 0 = 3t^2.$$

Na penúltima igualdade acima, usamos o fato de, para cada $t > 0$ fixado, os termos $3th$ e h^2 se aproximarem de zero quando h se aproxima de zero. Assim, podemos enunciar a solução do nosso problema como se segue:

Solução do problema: Se a posição do carro é dada pela função $s(t) = t^3$, então a velocidade é $v(t) = 3t^2$, para todo $t > 0$. Em particular, a velocidade no instante 2 é igual a 12.

Finalizamos este pequeno texto com algumas observações importantes:

1. O método desenvolvido aqui nos permite considerar várias expressões diferentes para a função $s(t)$. Tudo o que deve ser feito é uma manipulação algébrica da expressão

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h},$$

de modo a descobrir o que acontece com o quociente quando h se aproxima de zero.

2. A expressão acima não está definida quando $h = 0$. Isso não é importante na aplicação do método, visto que queremos estudar o comportamento do quociente para valores h que são próximos, *mas diferentes* de zero.

3. As ideias apresentadas neste texto serão desenvolvidas à exaustão nas próximas semanas, quando introduziremos o conceito de derivada. Contudo, se você chegou vivo até aqui, não terá nenhuma dificuldade para entender o que está por vir.

4. O que foi feito aqui depende somente de sabermos a definição de velocidade média. Assim, você pode agora tentar explicar isso tudo para aquele seu primo que curso o primeiro ano do ensino médio! Como um bom exercício, vale a pena refazer as contas acima para o caso em que $s(t) = s_0 + v_0 t + (a/2)t^2$, com s_0, $a \in \mathbb{R}$, para verificar que, nesse caso, temos $v(t) = v_0 + at$.

Tarefa

Nessa tarefa vamos usar a mesma estratégia adotada no texto para determinar a velocidade do carro, supondo agora que a posição é dada pela função

$$s(t) = \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

Vamos inicialmente calcular a velocidade no instante $t = 3$. Para tanto, siga os passos abaixo:

1. Com o auxílio de uma calculadora, complete a tabela abaixo

$h \neq 0$	instante final $t = 3 + h$	velocidade média $\frac{s(3+h)-s(3)}{(3+h)-3}$
1	4	$-0,0833$ (aproximadamente)
0,1	3,1	
0,01		
0,001		

2. Verifique que, após as devidas simplificações, temos que

$$\frac{s(3+h)-s(3)}{h} = \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \cdots = -\frac{1}{(3+h)3}$$

3. Fazendo $h \to 0$ na expressão acima, determine $v(3)$.

Repetindo o argumento do item 2 acima verifique que

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \cdots = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(t+h)t},$$

e obtenha a expressão para $v(t)$. O que significa o sinal de menos que aparece nessa expressão?