Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 03

Temas abordados: Continuidade

Seções do livro: 2.6

1) A alíquota da conta de água é crescente! Isto quer dizer que quanto mais se consome, mais caro fica o preço do m^3 de água. Suponha que ao se consumir $x m^3$ de água/mês, o valor mensal a ser pago seja de $q(x)$ reais. Quando x é menor ou igual a 10; maior que 10 e menor que 15; maior ou igual a 15, paga-se, respectivamente, $1,60x$; $3,00x + a$; $6,40x + b$, onde a e b são constantes reais. Assim,

$$q(x) = \begin{cases} 1,6x & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 3x + a & \text{se } 10 < x < 15, \\ 6,4x + b & \text{se } x \geq 15. \end{cases}$$

(a) Determine o valor de a de forma que $q(x)$ seja contínua em $x = 10$.

(b) Usando o valor de a calculado acima, determine $\lim_{x \to 15^-} q(x)$.

(c) Sabendo que $q(x)$ é contínua em $x = 15$, encontre o valor de b.

(d) Faça um esboço do gráfico de $q(x)$.

2) Suponha que um painel solar consiga gerar uma quantidade de energia $E = I\,\mathrm{sen}(\alpha)$ kilojoules, em que I é a intensidade luminosa e α o ângulo de incidência entre os raios de luz e o painel. Para um determinado dia, o ângulo α e a intensidade luminosa são dados por $\alpha(t) = \frac{\pi}{12}t$ e $I(t) = 6t - \frac{1}{2}t^2$, onde t é o tempo medido em horas a partir do nascer do sol, $0 \leq t \leq 12$. É claro que para valores de $t \in (12, 24]$ a energia gerada é nula, pois o painel solar não funciona durante a noite.

(a) Obtenha a expressão de $E(t)$ em função de t, para todo $t \in [0, 24]$.

(b) Determine os valores de $E(2)$ e $E(6)$. Em seguida, decida se existe $t_0 \in [2, 6]$ tal que $E(t_0) = 13$, justificando sua resposta .

(c) Decida se a função E é contínua no ponto $t = 12$, justificando sua resposta.

3) Um dos elevadores mais rápidos do mundo, localizado no Taipei Financial Center, subia com velocidade constante de 10 m/s, quando subitamente, após 5 segundos de sua partida, suas cordas de sustentação se partem. Felizmente, neste momento, não há ninguém em seu interior. A função que descreve a altura do elevador em relação ao solo é dada então pela seguinte expressão

$$s(t) = \begin{cases} 10t + 100, & \text{se } \ 0 < t \leq 5 \\ 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2, & \text{se } \ 5 < t < t_A \end{cases}$$

onde t_A é o tempo de aterrissagem, a altura é dada em metros e o tempo é dado em segundos.

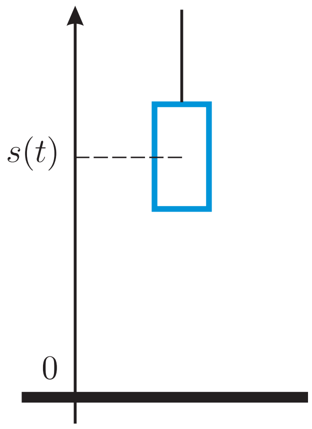
(a) Calcule o seguinte limite lateral direito da posição $\lim_{t \to 5^+} s(t)$.

(b) A função s é contínua em $t = 5$?

(c) Calcule o seguinte limite lateral direito da velocidade média entre os instantes t e 5

$$\lim_{t \to 5^+} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}.$$

(d) Existe o limite da velocidade média entre os instantes t e 5 quando t tende à 5?



4) Em um certo país, o imposto de renda é cobrado da seguinte maneira: aqueles que ganham até R$10.000,00 são isentos; os que ganham mais de R$10.000,00 e até R$20.000,00 pagam 10% sobre a renda, menos um valor fixo c e, de todos os demais, é cobrada uma taxa de 20% da renda. Nessas circunstâncias,

(a) determine a função $I(x)$ que associa a renda x ao valor do imposto.

(b) calcule a parcela a deduzir c, de forma que I seja contínua em $x = 10.000$.

(c) supondo que o valor de c é como acima, decida se existe algum contribuinte que paga R$3.000,00 de imposto de renda, justificando sua resposta.

(d) ainda considerando o valor de c obtido no item (b), faça um esboço do gráfico de $I(x)$.

5) As funções trigonométricas são contínuas? A resposta é sim, conforme vamos verificar! Lembre que, na lista da semana 2, provou-se na questão 4 que a função seno é contínua na origem, ou seja, que

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

(a) Use a relação $\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$ para isolar $\cos(t)$ em termos de $\operatorname{sen}(t)$, para valores de $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Lembre que, para tais valores de t, o cosseno é positivo.

(b) Com ajuda do item acima, mostre que a função cosseno é contínua em $x = 0$.

(c) Note que, para uma dada função f, vale

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{t \to 0} f(t + a),$$

desde que o primeiro limite exista. Usando a expressão acima com $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e sabendo que $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$, mostre que a função seno é contínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

(d) Usando agora $f(x) = \cos(x)$ juntamente com a fórmula $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$, mostre que a função cosseno é contínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

Gabarito

1. (a) $a = -14$
   (b) $\lim_{x \to 15^-} q(x) = 31$
   (c) $b = -65$
2. (a) $E(t) = \left(6t - \frac{t^2}{2}\right) \operatorname{sen}(\frac{\pi}{12}t)$ se $0 \leq t \leq 12$; $E(t) = 0$ se $12 < t \leq 24$
   (b) $E(2) = 5$, $E(5) = 18$ e existe t_0
   (c) é contínua em $t = 12$
3. (a) $\lim_{t \to 5^+} s(t) = 150$
   (b) é contínua em $t = 5$
   (c) o limite pedido vale 10
   (d) existe e vale 10
4. (a)
   $$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 10000, \\ 0,1\ x - c & \text{se } 10000 < x \leq 20000, \\ 0,2\ x & \text{se } x > 20000. \end{cases}$$
   (b) 1000
   (c) Não existe.