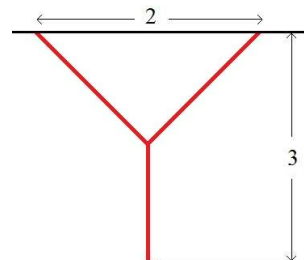




Cálculo 1

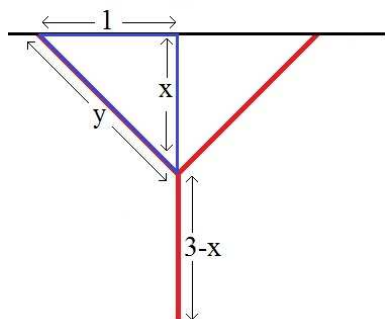
Como instalar um lustre

Suponha que queremos instalar um lustre em uma igreja seguindo as seguintes recomendações: a instalação deve ser feita de forma que o fio que sustenta o lustre forme uma figura de Y. O lustre deve ficar a uma distância de 3 metros do teto e os pontos no teto nos quais o fio se prende devem estar a uma distância de 2 metros um do outro. A figura ao lado ilustra a situação.



Observe que existem diversas maneiras de pendurar o lustre. Basicamente, o que muda de uma configuração para outra é a distância que o nó que une os fios presos no teto está do próprio teto. Em tempos de arrocho salarial é sempre bom escolher a configuração que minimiza o custo do serviço. Neste caso, queremos então minimizar a quantidade de fio necessária.

A ideia é introduzir uma função que nos permita calcular a quantidade de fio utilizada em uma dada configuração. Para isso, vamos denotar por x a distância do nó até o teto. Usando os dados do problema, temos uma situação que pode ser descrita pela figura abaixo.



Como o lustre deve ficar a 3 metros do teto, o valor de x deve estar no intervalo $[0, 3]$. Para $x = 0$, percebemos que o comprimento de fio é de 5 metros ($1 + 1 + 3$). Para $x = 3$, usando o Teorema de Pitágoras, o comprimento correspondente do fio é de $2\sqrt{1^2 + 3^2} \approx 6,3$ metros. A pergunta é então se existe alguma configuração que use uma quantidade ainda menor de fio. Melhor ainda, a pergunta é como determinar a configuração que use a menor quantidade possível de fio.

Dado um valor $x \in [0, 3]$, o comprimento total de fio é dado por $2y + (3 - x)$. Contudo, gostaríamos de expressá-lo somente como função da variável x . Isso pode ser feito usando-se o Teorema de Pitágoras para obter $y^2 = 1^2 + x^2$, ou ainda $y = \sqrt{1 + x^2}$, uma vez que y não pode ser negativo. Assim, se denotarmos por $L(x)$ o comprimento de fio necessário, temos que

$$L(x) = (3 - x) + 2\sqrt{1 + x^2}, \quad x \in [0, 3].$$

Daqui para frente vamos trabalhar na seguinte questão: determinar o ponto de mínimo x_0 da função L no intervalo $[0, 3]$. Como a função L é contínua e o seu domínio é um intervalo fechado, sabemos que este ponto de mínimo existe. Para encontrá-lo vamos lembrar que, se este ponto ocorre no intervalo aberto $(0, 3)$, então uma das alternativas ocorre: ou $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe. Em outras palavras, x_0 deve ser um ponto crítico de L .

O primeiro passo então é procurar os pontos críticos de L no intervalo $(0, 3)$. Para tanto, vamos usar a Regra da Cadeia e calcular

$$L'(x) = (3 - x)' + 2(\sqrt{1 + x^2})' = -1 + \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in (0, 3).$$

Uma vez que a derivada existe em todo o intervalo $(0, 3)$, os possíveis pontos críticos são aqueles nos quais a derivada se anula. A equação $L'(x) = 0$ é equivalente a

$$1 = \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como o ponto $-1/\sqrt{3}$ não está no domínio da derivada, concluímos que o único ponto crítico de L no intervalo $(0, 3)$ é o ponto $x = 1/\sqrt{3}$.

A função L tem ponto de mínimo e este deve ocorrer nos extremos do intervalo de definição ou no seu interior. Assim, o ponto de mínimo x_0 é tal que

$$x_0 \in \{0, 1/\sqrt{3}, 3\}.$$

Basta agora calcular a função em cada um dos pontos acima e comparar os resultados. O menor valor será dado pelo ponto de mínimo. Após alguns cálculos e suas devidas simplificações obtemos

$$L(0) = 5, \quad L(3) = 2\sqrt{10}, \quad L(1/\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}.$$

O aparecimento das raízes não exatas acima pode complicar um pouco a comparação entre os valores. Porém, neste caso podemos observar que, como $10 > 9$ e a função raiz quadrada é crescente, temos que $L(3) = 2\sqrt{10} > 2\sqrt{9} = 6$. Analogamente, $L(1/\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} < 3 + \sqrt{4} = 5$. Assim, o menor valor é $L(1/\sqrt{3})$.

Concluímos então que o menor comprimento de fio ocorre quando a distância do nó até o teto é dada por $1/\sqrt{3} \sim 0,58$ metros. Este comprimento é $L(1/\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} \sim 4,73$ metros.

O procedimento descrito acima nos permite encontrar o ponto de mínimo (ou máximo) de qualquer função contínua f definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Na sequência vamos lembrar os principais resultados necessários a esta tarefa, bem como estabelecer os passos que nos levam ao ponto de mínimo de f . Tudo está baseado no teorema que enunciamos abaixo e que foi discutido no texto anterior.

Teorema 1. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então*

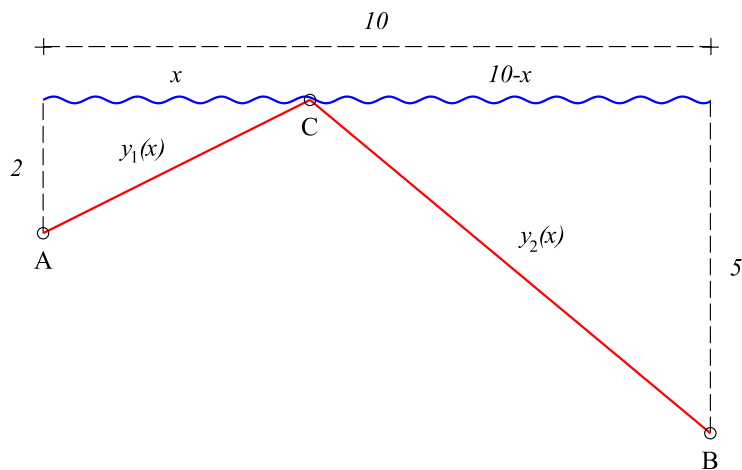
- 1. f assume mínimo (máximo) em algum ponto $x_0 \in [a, b]$;*
- 2. se f é derivável em x_0 e $x_0 \in (a, b)$, então $f'(x_0) = 0$.*

O mais importante aqui é que o teorema acima nos permite estabelecer uma estratégia para determinar os pontos de máximo e de mínimo. Se denotarmos por x_0 este ponto, somente uma das duas coisas seguintes pode acontecer: a derivada $f'(x_0)$ se anular ou ela não existir. Assim, os passos necessários para encontrar o ponto de mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ são:

1. Encontre os pontos do intervalo aberto (a, b) onde a derivada é nula ou não existe;
2. Calcule a função em cada um dos pontos acima;
3. Calcule a função nos extremos do intervalo, isto é, $f(a)$ e $f(b)$;
4. Compare todos os resultados dos dois últimos passos. O menor valor é dado pelo ponto de mínimo e o maior pelo ponto de máximo.

Tarefa

Duas cidades A e B , situadas ao sul do leito de um rio, devem ser abastecidas por um gasoduto que será construído no leito do rio. A figura abaixo, com distâncias medidas em centenas de quilômetros, ilustra a posição das cidades com relação ao leito do rio.



Na figura podemos identificar ainda o ponto C , que é o local onde a estação de bombeamento de gás deve ser construída. O objetivo deste exercício é determinar a posição x_0 da estação que faz com que a quantidade de tubulação gasta seja mínima.

1. Usando o Teorema de Pitágoras, determine os comprimentos $y_1(x)$ e $y_2(x)$.
2. Determine o comprimento total do duto $L(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Em seguida, explique por que o domínio desta função pode ser tomado como sendo o intervalo $[0, 10]$.
3. Determine os pontos críticos de L no intervalo $(0, 10)$.
4. Determine o valor x_0 que minimiza o comprimento L .