Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Limite trigonométrico fundamental

Neste texto vamos nos concentrar em calcular o limite

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}. \tag{1}$$

O limite acima apareceu em um texto anterior, quando queríamos determinar o perímetro de um círculo. Naquela oportunidade fizemos a tabela

	$\theta = 1$	$\theta = 0,5$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,01$
$\operatorname{sen}(\theta)/\theta$	0,84147	0,95885	0,99833	0,99998

e deixamos nossa intuição livre para concluir que o limite era igual a 1. Queremos agora usar o Teorema do Confronto para confirmar a nossa intuição.

O primeiro passo é verificar as seguinte igualdades

$$\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0, \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = 1. \tag{2}$$

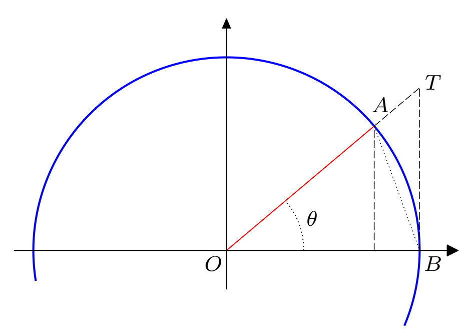
Deixaremos para você a verificação da primeira delas (veja a tarefa ao final do texto). Para a segunda, vamos lembrar que $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2(\theta) = 1$, de modo que $\cos(\theta) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}$. Se $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, então $\cos(\theta)$ é positivo. Assim, para tais ângulos, vale

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}.$$

Como $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0$, obtemos

$$\lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{\lim_{\theta \to 0} (1 - \operatorname{sen}^2(\theta))} = \sqrt{1 - 0^2} = 1.$$

Vamos agora calcular o limite em (**??**) com a ajuda da figura ao lado.



Observe que o triângulo retângulo OAB está contido no setor circular determinado pelo ângulo θ, que por sua vez está contido no triângulo retângulo OTB. Deste modo, temos que

$$\text{área}(\Delta OAB) < \text{área(setor circular)} < \text{área}(\Delta OTB).$$

A altura do primeiro triângulo é exatamente $\operatorname{sen}(\theta)$ e a sua base tem a mesma medida do raio do círculo, ou seja, mede 1. Assim, a primeira área acima vale $\operatorname{sen}(\theta)/2$. Para o outro triângulo temos altura igual a $\tan(\theta)$ e mesma base, de modo que

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} < \text{área(setor circular)} < \frac{\tan(\theta)}{2}.$$

Pode-se mostrar que a área do setor é proporcional ao ângulo central θ. Quando este ângulo vale 2π, a área é total é π, pois o círculo tem raio igual a 1. Deste modo, se denotarmos por A_θ a área do setor circular, temos que

$$\frac{\pi}{A_\theta} = \frac{2\pi}{\theta},$$

ou ainda $A_\theta = \theta/2$.

Concluímos então que

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan(\theta)}{2}.$$

Lembre agora que, se $0 < x < y$, então $(1/x) > (1/y)$. Assim, segue da expressão acima que

$$\frac{2}{\tan(\theta)} < \frac{2}{\theta} < \frac{2}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

Multiplicando todos os termos por $\operatorname{sen}(\theta)/2 > 0$, concluímos que

$$\cos(\theta) < \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} < 1,$$

para todo $\theta \in (0, \pi/2)$. Passando a expressão acima ao limite, usando (**??**) e o Teorema do Confronto concluímos que

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1.$$

Para o cálculo do limite pela esquerda, vamos lembrar que a função seno é ímpar e usar a mudança de variáveis $\beta = -\theta$ para obter

$$\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = \lim_{\beta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-\beta)}{-\beta} = \lim_{\beta \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(\beta)}{-\beta} = \lim_{\beta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\beta} = 1.$$

Como os dois limites laterais existem e são iguais a um, concluímos que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1,$$

conforme esperávamos.

O limite acima é conhecido como *Limite Trigonométrico Fundamental*. Ele possui várias aplicações. Apresentamos duas delas nos exemplos a seguir.

Exemplo 1. Vamos determinar a reta tangente ao gráfico da função $\cos(\theta)$ no ponto $P = (0, \cos(0))$. Para isto, vamos primeiro lembrar que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é dada pelo limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Fazendo $f(\theta) = \cos(\theta)$ e $a = 0$, somos levados a considerar

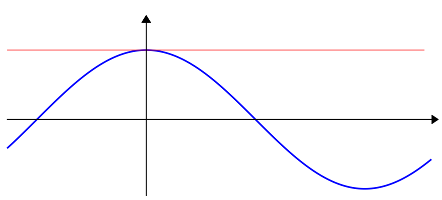
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta) - \cos(0)}{\theta - 0} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta) - 1}{\theta}.$$

Observe que, no limite acima, numerador e denominador se aproximam de zero. Para eliminar a indeterminação, vamos multiplicar ambos pelo conjugado do numerador:

$$\frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} = \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\theta}\frac{(\cos(\theta) + 1)}{(\cos(\theta) + 1)} = \frac{\cos^2(\theta) - 1}{\theta(\cos(\theta) + 1)} = -\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\theta(\cos(\theta) + 1)},$$

em que usamos a relação $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ na última igualdade. Assim,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \left[-1 \cdot \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{(\cos(\theta) + 1)}\right] = (-1) \cdot 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.$$



Portanto, a reta tangente tem inclinação nula. Uma vez que ela passa pelo ponto $(0, \cos(0)) = (0, 1)$, concluímos que ela é exatamente a reta horizontal $y = 1$, conforme ilustra a figura ao lado. $\square$

Exemplo 2. Vamos calcular o limite

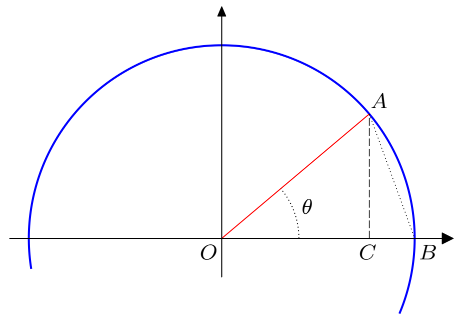
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}.$$

Embora sejamos tentados a afirmar que ele vale 1, note que o numerador da fração é $\operatorname{sen}(5x)$, e não $\operatorname{sen}(x)$. Para poder usar (**??**) vamos fazer a mudança $y = 5x$ e observar que, quando $x \to 0$, temos que $y \to 0$. Deste modo, podemos escrever

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} 5 \cdot \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = 5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = 5 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Note que o limite trigonométrico fundamental foi utilizado na penúltima igualdade. $\square$

Tarefa



Nesta tarefa vamos mostrar que

$$\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0,$$

utilizando a a figura ao lado.

1. Lembrando que $\operatorname{sen}(\theta) = \overline{AC}$, argumente como no texto para verificar que, se $\theta \in (0, \pi/2)$, então

$$0 < \operatorname{sen}(\theta) < \theta.$$

2. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \operatorname{sen}(\theta) = 0$.

3. Lembrando que o seno é uma função ímpar, calcule o limite pela esquerda.

4. Use os dois itens acima para concluir que $\lim\limits_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0$.