Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Regra de L'Hôpital

Começamos lembrando que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

No primeiro limite acima, numerador e denominador se aproximam de zero, de modo que temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Para resolver o problema, simplificamos a fração para que se tornasse claro o valor do limite. Infelizmente, nem sempre é possível fazer uma tal simplificação, como fica claro a partir do exemplo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}. \tag{1}$$

De fato, não há nenhuma manipulação algébrica aparente que nos permite entender o comportamento da fração quando x está próximo de 1.

A fim de motivar o resultado que nos permitirá calcular o limite acima, vamos supor que $f(a) = g(a) = 0$ e que as derivadas de f e g são contínuas com $g'(a) \neq 0$. Note que o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é uma indeterminação do tipo $0/0$, pois f e g são contínuas em $x = a$. Neste caso, vale o seguinte

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))}{(x-a)} \frac{(x-a)}{(g(x) - g(a))} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

O raciocínio acima pode ser usado para resolver o limite (1). De fato, considerando $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = (x-1)$ e $a = 1$, temos que $f(1) = g(1) = 0$ e $g'(1) = 1 \neq 0$, de modo que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Na verdade, esta conta é uma caso particular de um resultado geral que enunciamos abaixo.

Teorema 1 (Regra de L'Hôpital)**.** *Sejam f e g duas funções deriváveis tais que $g'(x) \neq 0$ para x próximo de a, exceto possivelmente em a. Suponha que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \textit{ou que} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \ \textit{e} \ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

se o limite da direita existe (ou é ∞ ou é $-\infty$). O mesmo resultado vale se substituirmos o símbolo $x \to a$, em todos os limites, por qualquer dos símbolos a seguir: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

A Regra de L'Hôpital simplesmente nos diz que o limite de um quociente é igual ao limite do quociente de suas derivadas, desde que as hipóteses do teorema sejam satisfeitas.

Exemplo 1. Vamos calcular o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. Para tanto, observe primeiro que temos uma indeterminação do tipo $0/0$, numerador e denominador são deriváveis e a derivada do denominador é igual a 1, não podendo portanto se anular. Assim, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital para obter

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Note que o numerador $e^x - 1$ não permite fatorações evidentes que permitam simplificar o quociente. Assim, a aplicação do teorema foi uma maneira eficiente de calcular o limite. $\square$

Exemplo 2. O limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ é uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando o teorema obtemos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x}.$$

Note que o último limite ainda é uma indeterminação do tipo ∞/∞. Podemos então aplicar o teorema novamente para obter

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Não é difícil generalizar o resultado acima no seguinte sentido: se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é um polinômio de grau n, então n aplicações de L'Hôpital nos fornece

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0,$$

isto é, a função exponencial cresce mais rápido do que qualquer polinômio. $\square$

Exemplo 3. No limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞. Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \tag{2}$$

e recaímos em uma indeterminação do tipo $0/0$. Se aplicar o teorema novamente vamos obter

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^{3/2}}},$$

o que não parece ser melhor. De fato, se continuarmos aplicando o teorema sempre vamos cair em uma indeterminação do tipo $0/0$. Isso não quer dizer que o teorema está errado, tampouco que não é possível calcular o limite. De fato, podemos simplesmente manipular o último quociente em (2) como segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Isso nos mostra que nem sempre a aplicação do teorema é o melhor caminho. Às vezes, uma manipulação algébrica nos leva mais rapidamente ao resultado esperado. □

Exemplo 4. No caso do limite $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)}$, o numerador tende para $-\infty$ e o denominador para $+\infty$. Assim, temos um indeterminação do tipo ∞/∞. Todas as hipóteses do teorema estão satisfeitas, de modo que podemos calcular

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sec^2(\frac{\pi}{2}-x)} \tag{3}$$

e cair em outra indeterminação do tipo ∞/∞. Antes de aplicar o teorema novamente, vamos escrever o lado direito de uma maneira mais conveniente

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sec^2(\frac{\pi}{2}-x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{-\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}{x}.$$

Agora, temos uma indeterminação do tipo $0/0$ e a regra nos fornece

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)} = \cdots = \lim_{x\to0^+} \frac{-\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-2\cos(\frac{\pi}{2}-x)\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}-x)}{1} = 0.$$

Você pode, como exercício, tentar aplicar L'Hôpital diretamente no último limite em (3) para se convencer que a manipulação que fizemos era realmente o melhor caminho. □

É importante ter em mente a necessidade de checar se estamos com uma indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞ quando vamos aplicar a regra. De fato, se a aplicarmos ao limite $\lim_{x\to\pi^-} \mathrm{sen}(x)/(\cos(x)-1)$ vamos obter

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{-\mathrm{sen}(x)} = -\infty,$$

em que usamos na última igualdade o fato do numerador se aproximar de -1 e o denominador tender para zero por valores positivos. Ora, este resultado é claramente falso pois note que

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) - 1} = \frac{0}{-1-1} = 0.$$

O que aconteceu aqui é que o limite original não era sequer uma indeterminação. $\square$.

Exemplo 5. Vamos agora tentar calcular o limite

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x).$$

Neste caso um dos fatores vai para zero, enquanto o outro vai para $-\infty$, e temos portanto um *indeterminação do tipo* $0 \times \infty$. Não é possível aplicar L'Hôpital diretamente. Em vez disso, vamos inverter um dos fatores e dividir pelo inverso. Lembre que multiplicar por 2 equivale a dividir por 1/2. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

Observe que, embora o limite $\lim_{x \to 0^+} (1/x)/(-1/x^2)$ seja também uma indeterminação em que pode-se aplicar L'Hôpital, a simplificação feita no último passo nos leva ao resultado diretamente.

Neste ponto, vale a pena fazer um pouco de contas e se convencer de que a igualdade

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}},$$

embora correta, não nos levaria a lugar algum. $\square$

Exemplo 6. O limite $\lim_{x \to 0^+} x^x$ é uma *indeterminação do tipo* 0^0, já que a função da base e da potência vão para zero. Para analisar indeterminações com potências, recorremos à igualdade $y = e^{\ln(y)}$, válida para todo $y > 0$. Escrevemos

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln(x)} = e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)} = e^0 = 1,$$

em que usamos o resultado do último exemplo e a continuidade da função exponencial. $\square$.