



## Álgebra 1 - Turma D – 2º/2017

### 2ª Lista de Exercícios – Relações de equivalência

Prof. José Antônio O. Freitas

**Exercício 1:** Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre  $E = \{a, b, c\}$ ?

- a)  $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ ;
- b)  $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c)\}$ ;
- c)  $R_3 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$ ;
- d)  $R_4 = E \times E$ ;
- e)  $R_5 = \emptyset$ .

**Exercício 2:** Seja  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 1$ . Defina  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = km, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Z}$ .

**Exercício 3:** Determinar todas as relações de equivalência  $R$  sobre  $A$  e os respectivos conjuntos quocientes  $A/R$  para:

- a)  $A = \{a\}$ ;
- b)  $A = \{a, b\}$ ;
- c)  $A = \{a, b, c\}$ ;
- d)  $A = \{a, b, c, d\}$ .

**Exercício 4:** Quais das seguintes sentenças definem uma relação de equivalência em  $\mathbb{N}$ ?

- a)  $aRb$  se, e só se, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a - b = 3k$ .
- b)  $a \mid b$ .
- c)  $a \leq b$ .
- d)  $x + y = 10$ .

**Exercício 5:** Seja  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ . Considere a seguinte relação sobre  $A$ :

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $A$ .

**Exercício 6:** Seja  $A = \mathbb{R}$  e considere o conjunto definido por

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow 2a - b = 2c - d.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 7:** Para pontos  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  defina  $(a, b)S(c, d)$  quando  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ .

- a) Prove que  $S$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Liste todos os elementos no conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y)S(0, 0)\}$ .
- c) Liste cinco elementos distintos no conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y)S(1, 0)\}$ .

**Exercício 8:** Sejam  $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  e  $R = \{(x, y) \in E \times E \mid x + |x| = y + |y|\}$ . Mostrar que  $R$  é uma relação de equivalência e descrever  $E/R$ .

**Exercício 9:** Seja  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , onde  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Para  $(a, b), (c, d) \in A$ , considere a seguinte relação

$$(a, b)R(c, d) \text{ quando } ad = bc.$$

- a) Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $A$ .
- b) Descreva a classe de equivalência  $\overline{(0, 1)}, \overline{(1, 1)}, \overline{(1, 2)}, \overline{(2, 1)}, \overline{(2, 2)}, \overline{(2, 3)}$ .

**Exercício 10:** Considere a seguinte relação sobre  $\mathbb{C}$ :

$$(x + yi)R(r + si) \text{ quando } x^2 + y^2 = r^2 + s^2.$$

- a) Mostre que  $R$  é relação de equivalência.
- b) Descreva a classe de equivalência de  $1 + i$ .

**Exercício 11:** Seja  $R$  uma relação sobre  $\mathbb{Q}$  definida da seguinte forma:

$$xRy \text{ quando } x - y \in \mathbb{Z}.$$

- a) Prove que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Q}$ .
- b) Descreva a classe  $\bar{1}$ .
- c) Descreva a classe  $\overline{1/2}$ .

**Exercício 12:** A divisibilidade (ou seja, a relação definida por  $xRy$  se, e só se,  $x \mid y$ ) é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Z}$ ?

**Exercício 13:** Seja  $R$  a seguinte relação sobre  $\mathbb{Z}^*$ :

$$xRy \text{ quando } x \mid y \text{ e } y \mid x.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Z}^*$  e descreva o conjunto quociente  $\mathbb{Z}^*/R$ .

**Exercício 14:** Seja  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$ . Provar que  $R$  é uma relação de equivalência e descrever as classes representadas por  $1/2$  e  $\sqrt{2}$ .