Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

O limite de uma função

Se $s(t)$ denota a posição de um carro no instante $t > 0$, então a velocidade instantânea $v(t)$ pode ser obtida calculando-se a velocidade média $(s(t+h) - s(t))/h$ para valores de h cada vez mais próximos de zero. Isto pode ser escrito, sucintamente, da seguinte forma

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Note que o quociente acima não está definido para $h = 0$. De fato, isto não é importante para o cálculo da velocidade. Precisamos somente saber o que ocorre com o quociente quando h está muito perto de zero.

A ideia de proximidade acima pode ser considerada em situações mais gerais. Suponha que uma função f está definida em intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$. Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{1}$$

para representar o fato de que, quando x vai se tornando próximo de a, os valores $f(x)$ se aproximam de L. A expressão acima deve ser lida da seguinte maneira: *o limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a L.*

É importante destacar que o conceito de proximidade é relativo. De fato, se dois carros viajam para uma mesma cidade e estão a 300 metros um do outro, podemos dizer que eles estão próximos. Por outro lado, se estes carros estão em uma corrida de Fórmula 1, essa mesma distância não pode ser considerada pequena. Tudo que você precisa saber agora é que é possível definir o conceito de limite usando uma terminologia que não dependa de relativizações, embora este não seja o objetivo deste texto. De fato, o que pretendemos agora é entender o conceito e considerar alguns exemplos simples.

Antes de apresentar os exemplos vale reforçar que, no cálculo do limite em (**??**), não importa o valor da função f no ponto $x = a$. A função não precisa estar definida neste ponto, isto é, o ponto $x = a$ pode não pertencer ao domínio de f. Para ilustrar isto considere os dois gráficos abaixo:

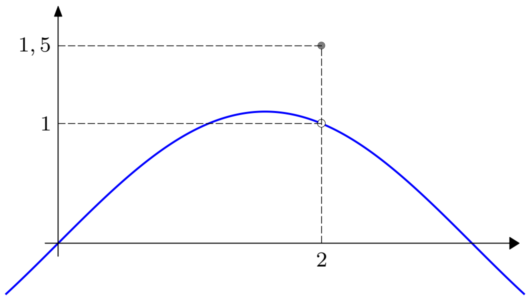

Figura 1

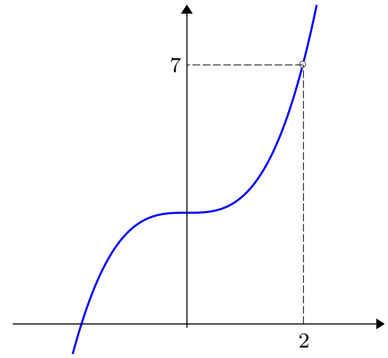

Figura 2

Se denotarmos por f a função cujo gráfico está esboçado na Figura 1, temos que o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ é igual a 1, apesar de que $f(2) = 1,5$. Na Figura 2, temos uma função cujo limite quando x tende para 2 é igual a 7, mas a função não está definida no ponto $x = 2$.

Vamos na sequência considerar alguns exemplos de cálculo de limites.

Exemplo 1. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}.$$

Observe que, quando x fica próximo de 2, o termo x^2 fica próximo de $2^2 = 4$. De uma maneira geral, a potência x^n se aproxima de 2^n, quando $x \to 2$. Deste modo, o numerador da fração acima se aproxima de $(2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2) = 8$, enquanto o denominador se aproxima de $(2^2 - 1) = 3$. Ora, se dividimos um número próximo de 8 por outro próximo de 3, o resultado deve ficar perto de 8/3. Assim, concluímos que o limite existe e é igual a 8/3. $\square$

Neste ponto cabe observar que, no cálculo acima, bastaria fazer $x = 2$ na fração $(x^3 + x^2 - 2x)/(x^2 - 1)$ para obter o resultado 8/3. Contudo, este procedimento não vai funcionar sempre, especialmente porque em muitos casos a função na qual o limite é calculado pode não estar definida no ponto em que se estuda o limite. As figuras 1 e 2 apresentadas anteriormente são situações onde não basta calcular (ou tentar calcular) $f(2)$. No próximo exemplo utilizamos a mesma função do Exemplo 1 para ilustrar este fato, bem como estabelecer uma estratégia que pode funcionar em alguns casos.

Exemplo 2. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}.$$

Seja $f(x)$ a fração acima e observe que, neste caso, não podemos simplesmente calcular $f(1)$, porque $x = 1$ não está no domínio da função. Mesmo assim o limite acima pode existir. A estratégia de analisar o que acontece com numerador e denominador também não vai funcionar aqui. De fato, ambos se aproximam de zero, e *não podemos dizer que o limite é igual a* $0/0$*, porque não podemos nunca fazer o denominador de uma fração ser igual a zero.*

Vamos calcular $f(x)$ para alguns valores de x próximos de 1 (maiores do que 1, menores do que 1, mas nunca iguais a 1). Fazendo isto com o auxílio de uma calculadora, e considerando os cálculos até a quarta casa decimal, construímos a tabela abaixo.

$x \sim 1$	0,95	1,05	0,99	1,01	0,999	1,001	0,9999	1,0001
$f(x)$	1,4372	1,5622	1,4875	1,5129	1,4987	1,5012	1, 4999	1,50001

A tabela sugere que o valor do limite é $1,5$. Contudo, qualquer tabela como a feita acima teria somente um número finito de termos, embora a quantidade de números próximos de $x = 1$ seja infinita. Como saber se, a partir de um determinado x próximo de 1, os valores $f(x)$ não vão começar a se afastar de 1,5? Para responder esta pergunta vamos tentar escrever $f(x)$ de uma outra maneira, de modo que possamos olhar para a nova expressão e entender claramente o que ocorre com ela quando $x \to 1$.

Vamos inicialmente denotar por $p(x) = (x^3 + x^2 - 2x)$ o numerador da fração que define $f(x)$. Conforme já havíamos observado $p(1) = 0$, isto é, $x = 1$ é uma raiz de $p(x)$. Por conta disto, podemos fatorar o polinômio $p(x)$, escrevendo-o na forma $p(x) = (x - 1)q(x)$, em que $q(x)$ é um polinômio de grau 2. Isso pode ser feito efetuando-se a divisão de $p(x)$ por $(x-1)$ e trará como resultado

$$x^3 + x^2 - 2x = (x - 1)(x^2 + 2x).$$

Se você não se lembra como efetuar divisão de polinômios este é um excelente momento para recordar este importante tópico!

Lembrando do produto notável $(x^2 - a^2) = (x-a)(x+a)$, podemos fatorar o denominador de $f(x)$ como

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Utilizando as duas expressões acima concluímos que

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + 2x)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x}{x + 1},$$

de modo que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{3}{2},$$

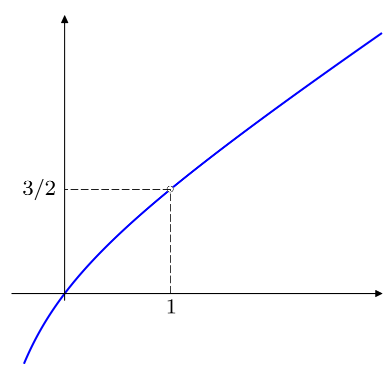

Gráfico de $f(x)$

conforme esperávamos. Note que, no cálculo do último limite, recaímos na situação do exemplo anterior, em que numerador tem limite e o *denominador se aproxima de um número diferente de zero.* □

Exemplo 3. Vamos tentar agora calcular o limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{|x-2|}.$$

Como no exemplo anterior, numerador e denominador se aproximam de zero. Para melhor entender o que ocorre neste caso vamos denotar $g(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$, para $x \neq 2$. Observe que, se $x > 2$, então $x - 2 > 0$, de modo que $|x-2| = x - 2$. Assim, $g(x) = 1$ para todo $x > 2$. Quando $x < 2$, temos $x - 2 < 0$, e portanto $|x-2| = -(x-2)$, implicando que $g(x) = -1$ para todo $x < 2$. Assim, o gráfico de função g é como abaixo:

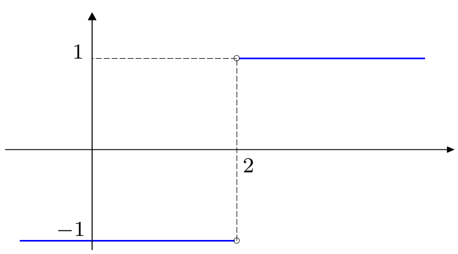

Gráfico de $g(x)$

Olhando para o gráfico vemos que não existe um número L tal que $g(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de 2. De fato, para valores de x próximos e maiores que 2 a função se aproxima de 1, enquanto para valores de x próximos e menores que 2 a função se aproxima de -1. Neste caso dizemos que **não existe o limite** $\lim_{x \to 2} g(x)$**.** $\square$

Vamos olhar com mais cuidado o exemplo anterior. Ainda que o limite não exista temos informações suficientes para descrever o comportamento da função próximo ao ponto $x = 2$. De fato, conforme vimos, ela se aproxima de 1 quando x se aproxima de 2 pela direita. Quando nos aproximamos pela esquerda de 2, a função se aproxima de -1. Isso motiva as definições que apresentamos na sequência.

Suponha que a função f está definida em um intervalo aberto do tipo (a, b). Escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se $f(x)$ se aproxima de L à medida em que x se aproxima de a pela direita. A expressão acima deve ser lida da seguinte maneira: *o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita é igual a L.*

De maneira análoga, se o domínio de f contém um intervalo do tipo (c, a), escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M,$$

se $f(x)$ se aproxima de M à medida em que x se aproxima de a pela esquerda. A expressão acima deve ser lida da seguinte maneira: *o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda é igual a M.*

Estes dois últimos conceitos são conhecidos como *limites laterais*. O cálculo de um limite lateral se faz da mesma maneira que o de um limite normal. A diferença é que considera-se o que ocorre com os valores de $f(x)$ somente de um dos lados do ponto a.

Por exemplo, se o gráfico da função f é como na figura ao lado, então os limites laterais no ponto $x =$ são dados por

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 5.$$

Note que não existe o limite $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. Isto pode ser visto no gráfico e é também uma consequência do Teorema 1 que veremos logo mais.

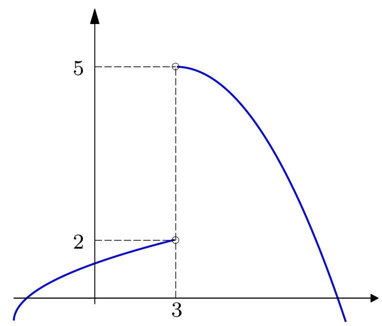

Figura 3

Exemplo 3 (revisitado). Vamos calcular limites laterais em $x = 2$ para a função

$$g(x) = \frac{x-2}{|x-2|}.$$

Temos que

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{-(x-2)} = -1,$$

onde usamos, na penúltima igualdade, o fato de que $|x-2| = -(x-2)$ sempre que $x-2 < 0$, ou equivalentemente, $x < 2$. $\square$

Finalizamos observando que, no Exemplo 3, apesar de existirem os limites laterais, não existe o limite quando $x \to 2$. Isso ocorre porque os limites laterais são diferentes. De fato, os limites laterais nos permitem caracterizar completamente a existência ou não de um limite, conforme estabelece o teorema seguinte.

Teorema 1. *O limite* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe se, e somente se, os limites laterais* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *existem e são iguais. Neste caso, o limite é igual ao valor comum dos limites laterais.*

Vale a pena entender direito o que o teorema acima estabelece. Ele diz que, quando o limite existe, então os dois limites laterais existem e são iguais. Reciprocamente, se os dois limites laterais (pela direita e pela esquerda) existem e são iguais, então o limite existe. No caso do Exemplo 3 acima, ou mesmo da Figura 3 acima, o que ocorre é que, apesar dos limites laterais existirem, eles são diferentes, o que implica a não existência do limite.

Tarefa

Nesta tarefa vamos investigar a existência do limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 5x-7, & \text{se } x \leq 1, \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Observe que $f(1) = -2$, embora este valor não tenha nenhuma influência no valor do limite. Como vimos, ele não interfere sequer na existência ou não do limite limite $\lim_{x\to 1} f(x)$. Outro ponto importante é que a função tem uma expressão de definição diferente dependendo se estamos à esquerda ou à direita de $x = 1$. Isto sugere que devemos utilizar limites laterais na investigação do comportamento de f próximo ao ponto $x = 1$.

1. Calcule o limite lateral pela esquerda $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
2. Calcule o limite lateral pela direita $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Neste caso, temos numerador e denominador se aproximando de zero, de modo que será necessário fazer fatorações para calcular o limite.
3. Usando os itens acima, decida sobre a existência do limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, justificando sua resposta.