Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

A regra do produto e do quociente para derivadas

(solução da tarefa)

Reduzindo as frações ao mesmo denominador obtemos

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}.$$

Subtraindo e somando o termo $f(a)g(a)$ no numerador da última expressão acima, e organizando os termos, concluímos que

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{1}{g(x)g(a)}\left[g(a)\cdot\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) - f(a)\cdot\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\right] \tag{1}$$

Lembrando agora que

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a), \qquad f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a},$$

e fazendo $x \to a$ em (1), obtemos finalmente

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

que é a regra do quociente.

Para a segunda parte da tarefa bastar lembrar que

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x), \qquad (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x),$$

e usar a fórmula do quociente. Após as devidas simplificações, obtemos

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x), \qquad \frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x), \qquad \frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x).$$

Lembramos novamente que **as derivadas acima não precisam ser memorizadas**, pois elas são consequências simples da fórmula do quociente e das derivadas (básicas) das funções seno e coseno.