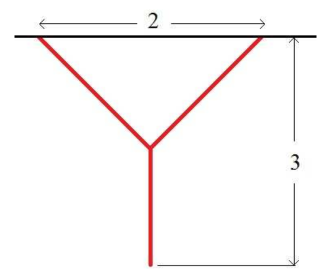
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Matemática 1

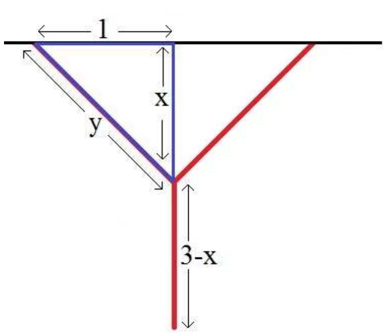
Como instalar um lustre

Suponha que queremos instalar um lustre em uma sala de jantar seguindo as seguintes recomendações: a instalação deve ser feita de forma que o fio que sustenta o lustre forme uma figura de Y. O lustre deve ficar a uma distância de 3 metros do teto e os pontos no teto nos quais o fio se prende devem estar a uma distância de 2 metros um do outro. A figura ao lado ilustra a situação.



Observe que existem diversas maneiras de pendurar o lustre. Basicamente, o que muda de uma configuração para outra é a distância que o nó que une os fios presos no teto está do próprio teto. Em tempos de arrocho salarial é sempre bom escolher a configuração que minimiza o custo do serviço. Neste caso, queremos então minimizar a quantidade de fio necessária.

A ideia é introduzir uma função que nos permita calcular a quantidade de fio utilizada em uma dada configuração. Para isso, vamos denotar por x a distância do nó até o teto. Usando os dados do problema, teremos uma situação que pode ser descrita pela figura abaixo.



Como o lustre deve ficar a 3 metros do teto, o valor de x deve estar no intervalo $[0, 3]$. Para $x = 0$, percebemos que o comprimento do fio é de 5 metros $(1 + 1 + 3)$. Para $x = 3$, usando o Teorema de Pitágoras, o comprimento correspondente do fio é de $2\sqrt{1^2 + 3^2} \approx 6,3$ metros. A pergunta é então se existe alguma configuração que use uma quantidade ainda menor de fio. Melhor ainda, a pergunta é como determinar a configuração que use a menor quantidade possível de fio.

Para isso, dado um valor de $x \in [0, 3]$, o comprimento total de fio é dado por $2y + (3 - x)$. Contudo, gostaríamos de expressá-lo somente como função da variável x. Isso pode ser feito usando-se o Teorema de Pitágoras para obter $y^2 = 1^2 + x^2$, ou ainda $y = \sqrt{1 + x^2}$, uma vez que y não pode ser negativo. Assim, se denotarmos por $L(x)$ o comprimento de fio necessário, temos que

$$L(x) = (3 - x) + 2\sqrt{1 + x^2}, \quad x \in [0, 3].$$

Daqui para frente vamos trabalhar na seguinte questão: determinar o ponto $x_0 \in [0,3]$ para o qual o valor $L(x_0)$ é o menor possível. Este ponto, se existir, será chamado *ponto de mínimo de* f. A existência deste ponto bem como a estratégia para encontrá-lo são dadas pelo resultado abaixo:

Teorema. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

1. *f assume seu valor mínimo (máximo) em algum ponto $x_0 \in [a,b]$;*
2. *se f é derivável em x_0 e $x_0 \in (a,b)$, então $f'(x_0) = 0$.*

Embora a demonstração do primeiro item acima seja complicada, a segunda parte não é difícil. Ela está relacionada com o fato de que, próximo ao ponto x_0, o gráfico de f deve ser parecido com um cume de montanha no caso de ser um máximo, ou com o fundo de um vale no caso de ser um mínimo. A demonstração formal não é mais complicada que isso. De fato, suponha que $x_0 \in (a,b)$ é um ponto de mínimo (que pode ser local) de f. Então, para $h > 0$ pequeno, temos que

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

uma vez que o numerador não é negativo e $h > 0$. Logo, como os limites laterais do quociente de Newton existem e são iguais a $f'(x_0)$, temos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Um raciocínio análogo para $h < 0$ mostra que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

As duas últimas expressões mostram que $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, e portanto $f'(x_0) = 0$.

Uma vez que a função L é contínua no intervalo fechado $[0,3]$, o teorema acima nos garante que o ponto de mínimo que estamos procurando existe. Além disso, se este ponto pertence ao intervalo aberto $(0,3)$, então uma das alternativas ocorre: $L'(x_0) = 0$ ou $L'(x_0)$ não existe. Como a função L é derivável em $(0,3)$, a segunda alternativa não pode ocorrer, ou seja, se o ponto de mínimo estiver no intervalo aberto ele tem que ser uma raiz da derivada.

Vamos então procurar os pontos onde a derivada de L se anula. Para tanto, vamos usar a regra da cadeia e calcular

$$L'(x) = (3-x)' + 2(\sqrt{1+x^2})' = -1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in (0,3).$$

A equação $L'(x) = 0$ é equivalente a

$$1 = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como o ponto $-1/\sqrt{3}$ não está no domínio da derivada concluímos que a única possibilidade do ponto de mínimo estar em $(0,3)$ e ele ser igual a $1/\sqrt{3}$.

A função L tem ponto de mínimo e este deve ocorrer nos extremos do intervalo de definição ou no seu interior. Assim, o ponto de mínimo x_0 é tal que

$$x_0 \in \{0, 1/\sqrt{3}, 3\}.$$

Basta agora calcular a função em cada um dos pontos acima e comparar os resultados. O menor valor será dado pelo ponto de mínimo. Após alguns cálculos e suas devidas simplificações obtemos

$$L(0) = 5, \quad L(3) = 2\sqrt{10}, \quad L(1/\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}.$$

O aparecimento das raízes não exatas acima pode complicar um pouco a comparação entre os valores. Porém, neste caso podemos observar que, como $10 > 9$ e a função raiz quadrada é crescente, temos que $L(3) = 2\sqrt{10} > 2\sqrt{9} = 6$. Analogamente, $L(1/\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} < 3 + \sqrt{4} = 5$. Assim, o menor valor é $L(1/\sqrt{3})$.

Concluímos então que o menor comprimento de fio ocorre quando a distância do nó até o teto é dada por $1/\sqrt{3} \sim 0,58$ metros. Este comprimento é $L(1/\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} \sim 4,73$ metros.

O procedimento descrito acima nos permite encontrar o ponto de mínimo (ou máximo) de qualquer função contínua f definida em um intervalo fechado $[a,b]$. De fato, os passos necessários a esta tarefa são:

1. Encontre os pontos do intervalo aberto (a,b) onde a derivada é nula ou não existe;

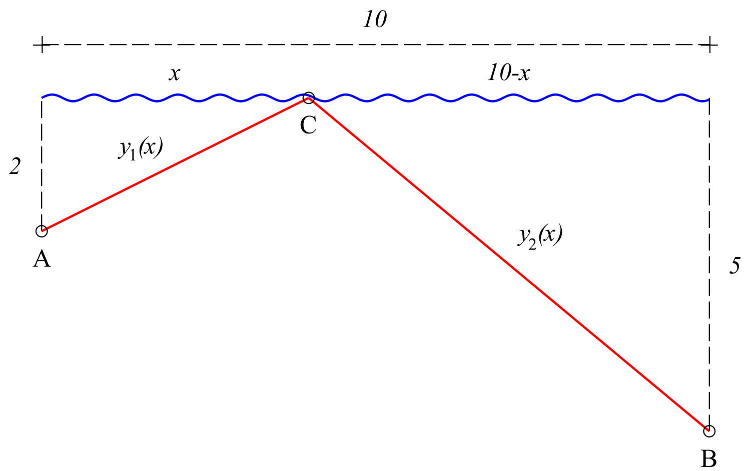
2. Calcule a função em cada um dos pontos acima;

3. Calcule a função nos extremos do intervalo, isto é, $f(a)$ e $f(b)$;

4. Compare todos os resultados dos dois últimos passos. O menor valor é dado pelo ponto de mínimo (e o maior pelo ponto de máximo).

Tarefa

Duas cidades A e B, situadas ao sul do leito de um rio, devem ser abastecidas por um gaseoduto que será construído no leito do rio. A figura abaixo, com distâncias medidas em centenas de quilômetros, ilustra a posição das cidades com relação ao leito do rio.



Na figura podemos identificar ainda o ponto C, que é o local onde a estação de bombeamento de gás deve ser construída. O objetivo deste exercício é determinar a posição x_0 da estação que faz com que a quantidade de tubulação gasta seja mínima.

1. Usando o Teorema de Pitágoras, determine os comprimentos $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

2. Determine o comprimento total do duto $L(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Em seguida, explique por que o domínio desta função pode ser tomado como sendo o intervalo $[0, 10]$.

3. Determine os pontos críticos de L no intervalo $(0, 10)$.

4. Determine o valor x_0 que minimiza o comprimento L.