Cálculo 1

Lista de Aplicações – Semana 05 – Soluções

Temas abordados: Retas Tangentes; Derivada e suas regras básicas

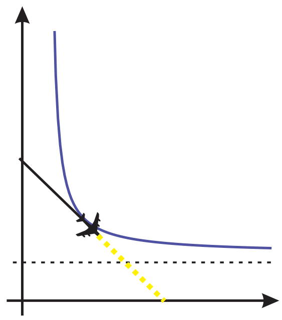
Seções do livro: 2.7; 3.1 a 3.3

1) Para atacar posições inimigas, um avião de caça dá um vôo rasante, percorrendo a trajetória determinada pelo gráfico da função $f(x) = 1 + (1/x)$, para $x > 0$. O avião efetua os seus disparos segundo a direção tangente, conforme figura abaixo.

(a) Determine, usando a definição de derivada, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em um ponto genérico $(a, f(a))$.

(b) Se um disparo é efetuado da posição $(1, 2)$, determine a abscissa do ponto no eixo $\mathcal{O}x$ atingido.

(c) Determine o ponto sobre o gráfico de $f(x)$ em que o disparo deve ser efetuado para atingir um alvo situado no ponto $(8, 0)$.



Soluções:

(a) Temos que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2},$$

de modo que a equação da reta tangente é

$$y_a(x) = \frac{-1}{a^2}(x - a) + 1 + \frac{1}{a}.$$

(b) De acordo com o item acima, quando $a = 1$, o disparo é efetuado ao longo da reta

$$y(x) = y_1(x) = -\frac{1}{1^2}(x - 1) + 1\frac{1}{1} = 3 - x.$$

A abscissa do ponto atingido é exatamente a raíz da reta acima, ou seja, 3.

(c) O valor de a tem que ser tal que a reta y_a passe pelo ponto $(8, 0)$, isto é,

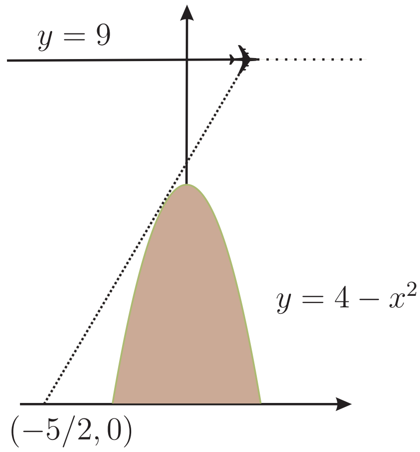
$$0 = y_a(8) = -\frac{1}{a^2}(8 - a) + 1 + \frac{1}{a}.$$

A equação acima é equivalente a

$$\frac{1}{a^2}(8 - a) = \frac{1 + a}{a},$$

que tem como soluções $a = 2$ e $a = -4$. Como a deve ser positivo a posição do tiro deve ser $(2, f(2)) = (2, \frac{3}{2})$.

2) Suponha que o eixo $\mathcal{O}x$ representa o solo e uma montanha é modelada pela equação $g(x) = 4 - x^2 = (2 + x)(2 - x)$, onde $x \in [-2, 2]$. Um avião sobrevoa a montanha horizontalmente da esquerda para direita sobre a reta $y = 9$, de modo que, no instante $t > 0$ minutos, a posição do avião no plano cartesiano abaixo é dada por $(4t, 9)$. Considerando que a luz se propaga em linha reta, resolva os ítens abaixo.



(a) Determine, usando a definição de derivada, a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x)$ em um ponto genérico $(a, g(a))$.

(b) Determine a equação da reta tangente à montanha que passa por um observador localizado em $(-5/2, 0)$.

(c) Determine o instante t_0 em que o observador do item b) perde a visão do avião devido à montanha.

Soluções:

(a) Expandindo o quadrado e efetuando as simplificações obtemos

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(a+h)^2 + a^2}{h} = -2a,$$

de modo que a reta tangente é

$$y_a(x) = -2a(x - a) + g(a).$$

(b) Aqui, precisamos descobrir o ponto $(a, g(a))$ de tangência da reta. Para tanto note que $y_a(-5/2) = 0$. Substituindo obtemos $a^2 + 5a + 4 = 0$, isto é, $a = -1$ ou $a = -4$. Como $a \in (-2, 2)$ devemos ter $a = -1$, donde se conclui que a reta em questão é

$$y(x) = 2x + 5.$$

(c) Note que no instante t_0 o avião está na posição $(4t_0, 9)$. Usando o item (a) e resolvendo $2(4t_0) + 5 = y(4t_0) = 9$, obtemos $t_0 = 1/2$.

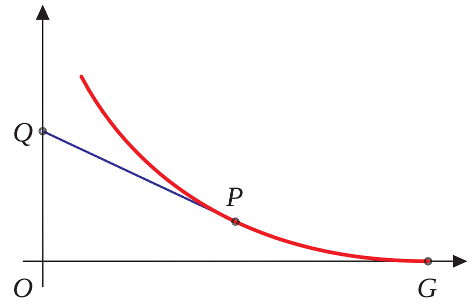
3) Um gato está no ponto $G = (1, 0)$, descobre um rato situado na origem $O = (0, 0)$ e parte em sua perseguição. No mesmo instante, o rato percebe o gato e foge seguindo a direção positiva do eixo $\mathcal{O}y$, com velocidade igual à metade da do gato. A trajetória percorrida pelo gato para alcançar o rato é conhecida como *curva de perseguição* e tem a seguinte propriedade: se o rato e o gato estiverem nas posições Q e P ilustradas na figura abaixo, então a reta determinada pelos pontos P e Q é tangente à curva no ponto P. No exemplo considerado, pode-se mostrar que a curva de perseguição é o gráfico da função $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - 1\right) + \frac{2}{3}$.

(a) Calcule, pela definição, a derivada de $g(x) = \sqrt{x}$ em um ponto $a \in (0,1)$. Para isso, vale lembrar a igualdade $x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})$.

(b) Use o item anterior e as regras de derivação para calcular a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

(c) Determine a posição $Q = (0, y_0)$ em que se encontra o rato no instante em que o gato estiver na posição $P = (1/4, f(1/4))$.

(d) Calcule o espaço total percorrido pelo rato antes de ser apanhado pelo gato.



Soluções:

(a) A derivada é dada por

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(b) Usando agora a regra do produto para derivadas e simplificando obtemos

$$f'(a) = (\sqrt{x})' \left(\frac{x}{3} - 1\right) + \sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{x}{3} - 1\right) + \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}.$$

A reta tangente no ponto $(a, f(a))$ tem inclinação $f'(a)$, e portanto sua equação é dada por

$$y_a(x) = \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)(x - a) + f(a).$$

(c) Faça $a = 1/4$, de modo que $f(1/4) = 5/24$ e a reta tangente se torna

$$y(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{16} + \frac{5}{24}.$$

Logo a posição do rato será $(0, y(0)) = (0, y_0)$, com $y_0 = \frac{3}{16} + \frac{5}{24}$.

(d) Observe que o gato alcança o rato quando $x = 0$. Assim, 0 espaço total percorrido pelo rato é exatamente $f(0) = 2/3$.

4) Suponha que um reservatório, inicialmente com 50 litros de água pura, comece a ser abastecido com água salgada à razão de 5 litros/min e com uma concentração de 1 grama/litro de sal. Nesse caso, o volume de água $V(t)$ e a quantidade de sal $Q(t)$ no reservatório são funções do tempo $t \geq 0$, e portanto a concentração de sal $c(t)$ no reservatório é também uma função do tempo.

(a) Obtenha as expressões das funções $V(t)$, $Q(t)$ e $c(t)$.

(b) Calcule o limite $c'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{c(t+h) - c(t)}{h}$, simplificando antes o quociente.

(c) Usando o item anterior, decida em qual dos instantes $t_0 = 10$ ou $t_1 = 30$ a concentração está variando mais rapidamente.

Soluções:

(a) Como temos 50 litros de água no início e a cada minuto entram outros 5 litros no reservatório então $V(t) = 50 + 5t, t \geq 0$. Os 50 litros iniciais são puros e portanto todo o sal é proveniente do abastecimento. Assim $Q(t) = 5t$, e portanto a concentração, em gramas/litro é dada por $c(t) = Q(t)/V(t) = t/(10+t), t \geq 0$.

(b) Usando a expressão de $c(t)$ e fazendo as devidas simplificações obtemos

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \frac{(t+h)(10+t) - t(10+t+h)}{h(10+t)(10+t+h)} = \frac{10}{(10+t)(10+t+h)},$$

de modo que

$$c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \frac{10}{(10+t)^2}, \quad t > 0.$$

(c) Para o último item basta notar que $c'(10) > c'(30)$.

5) Suponha que a quantidade de bens produzidos por uma fábrica possa ser modelada em função do número x de empregados, por uma função derivável $p(x)$, em que $p(x)$ é medida em milhares e x em centenas. A produtividade média por empregado é então dada pela função $M(x) = p(x)/x$, e pode-se mostrar que o número x_0 de empregados que maximiza a função $M(x)$ é aquele para o qual $M'(x_0) = 0$.

(a) Usando as regras de derivação, calcule $M'(x)$ em termos da derivada $p'(x)$.

(b) Use o item anterior para justificar a afirmação de que $M'(x_0) = 0$ se, e somente se, $p'(x_0) = M(x_0)$.

(c) Calcule $p'(x)$ supondo que $p(x) = \dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$.

(d) Determine o número de empregados que maximiza a produtividade média da fábrica.

<u>**Soluções**</u>:

(a) Observe que por hipótese a função $p(x)$ é derivável em $x > 0$. Assim a função $M(x)$ é derivável e podemos usar a regra do quociente para obter

$$M'(x) = \left(\frac{p(x)}{x}\right)' = \frac{xp'(x) - p(x)}{x^2}.$$

(b) Usando a expressão do item anterior temos que para $x_0 > 0$

$$M'(x_0) = \left(\frac{p(x_0)}{x_0}\right)' = \frac{x_0 p'(x_0) - p(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 p'(x_0) = p(x_0) \Leftrightarrow p'(x_0) = M(x_0).$$

(c) Mais uma vez, como x^2 e x^2+1 são diferenciáveis e x^2+1 é não nulo, pela regra do quociente temos que

$$p'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

(d) Aqui $p(x) = 2x^2/(x^2+1)$. Agora, pelo item (b), se $M'(x_0) = 0$ temos que $p'(x_0) = M(x_0)$. Assim, para $x_0 > 0$, precisamos resolver a equação

$$\frac{4x_0}{(x_0^2+1)^2} = \frac{2x_0}{x_0^2+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x_0^2+1} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1.$$

Como $x_0 > 0$, concluímos que $x_0 = 1$.