Probabilidade Condicional

Quando temos dois eventos, A e B , que dependem um do outro, ou seja, que o fato de um deles acontecer interfere na probabilidade do outro acontecer também, precisamos falar do conceito de probabilidade condicional.

Probabilidade condicional é a probabilidade de um evento acontecer sabendo que um outro evento já aconteceu.

Ou seja, podemos ter:

$$P(A|B) \rightarrow probabilidade\ de\ A,\ dado\ B$$

$$P(B|A) \rightarrow probabilidade\ de\ B,\ dado\ A$$

Ex1) Imagine que temos um saco com 2 bolas laranjas e 3 vermelhas. Qual seria a probabilidade de retirarmos 2 bolas vermelhas em sequência ?
Temos os seguintes eventos possíveis:

A: *primeira bola ser vermelha*

B: *primeira bola ser laranja*

C: *segunda bola ser vermelha*

Nela, a seta do início até L , mostra a probabilidade da primeira bola ser laranja, ou seja, $P(B)$ Seguindo de L até o próximo V, temos a probabilidade da segunda bola ser vermelha sabendo que a primeira foi laranja, ou seja, $P(C|B)$.
A situação que queremos, que é ocorrer A e C , ou seja, $A \cap C$.

$P(C|A)$é a probabilidade da segunda bola ser vermelha sabendo que a primeira já foi uma bola vermelha. Logo a probabilidade do evento A e do evento C ocorrerem, que nada mais é do que $P(A \cap C)$, é igual :

$$P(A).P(C|A) = \frac{3}{5}.\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Com esse exemplo foi apresentada a fórmula da probabilidade condicional:

Se,

$$P(A \cap C) = P(A).P(C|A)$$

Então:

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$$

Ex2) Carlos tirou uma carta do baralho, sabendo que a carta é uma figura de copas, qual a probabilidade de ser uma dama ?

Aqui temos:

$$A = a\ carta\ uma\ figura\ de\ copas$$

$$B = a\ carta\ uma\ dama$$

Para calcularmos $P(B|A)$podemos considerar que A é o novo espaço amostral, que chamaremos de espaço amostral reduzido.

Antes, o eram todas cartas do baralho, mas depois de sabermos de A , o se reduziu a apenas as 3 figuras de copas: valete, dama e rei.

Agora basta considerar no numerador apenas o número de elementos de A que satisfazem B , a interseção (que é a dama).

Teremos que:

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

Eventos Independentes

Consideramos que um evento é independente se:

$P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

Ou seja,

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Ex3) Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$em que seus elementos são equiprováveis. Sejam A = {1,2}, B = {1,3}, C = {1,4}, de modo que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Esses eventos são independentes dois a dois, pois $= \frac{1}{4}$. Porém,

Exercícios

1) Suponha que uma urna contém 8 bolas vermelhas e 4 bolas brancas. Retiramos 2 bolas da urna sem reposição. Se assumirmos que cada bola na urna tem a mesma probabilidade de ser selecionada, qual é a probabilidade de que ambas as bolas retiradas sejam vermelhas?

2) Ao responder a uma pergunta em um teste de múltipla escolha, o aluno ou sabe a resposta ou chuta. Seja p a probabilidade de que o aluno saiba a resposta e 1 − p a probabilidade de que o aluno chute. Suponha que um aluno que tente adivinhar a resposta, possa acertá-la com probabilidade 1/m, onde m é o número de alternativas da questão de múltipla escolha. Qual é a probabilidade condicional de que um estudante realmente sabia a resposta, uma vez que ele ou ela respondeu o teste corretamente? Calcule a probabilidade para m = 5 e p = 1/2.

3) Em um determinado estágio de uma investigação criminal, o inspetor responsável está 60% convencido da culpa de um certo suspeito . Suponha, no entanto, que uma nova peça de evidência, mostrando que o criminoso tem uma certa característica (como canhoto, calvície, ou cabelo castanho), é descoberta. Se 20% da população possui esta característica, quão certo da culpa do suspeito o inspetor deve estar agora?

4) Suponha que temos três cartas idênticas na forma, exceto que ambos os lados da primeira carta são da cor vermelha, ambos os lados da segunda carta são pretos, e um dos lados da terceira carta é vermelho enquanto o outro é preto. As três cartas são misturadas em um chapéu, e uma carta é selecionada aleatoriamente. Se o lado superior da carta escolhida é vermelho, qual a probabilidade de que o outro lado seja preto?

5) Um escaninho contém três tipos diferentes de lanternas descartáveis. A probabilidade de que uma lanterna tipo 1 dure mais de 100 horas de uso é 0,7, e as respectivas probabilidades de duração (mais de 100 horas) das lanternas tipo 2 e tipo 3 são 0,4 e 0,3. Suponha que 20% das lanternas encontradas no lixo são do tipo 1, 30% são do tipo 2, e 50% são do tipo 3.

a) Qual é a probabilidade de que uma lanterna escolhida aleatoriamente dure mais de 100 horas?

b) Uma vez que uma lanterna durou mais de 100 horas, qual é a probabilidade condicional de que, a lanterna seja do tipo j, $j = 1, 2, 3$?

6) Um chimpanzé fêmea deu à luz. Não é certo, no entanto, qual dos dois chimpanzés machos é o pai. Antes que qualquer análise genética seja realizada, considera-se que a probabilidade de que o macho número 1 seja o pai é p e a probabilidade de que o macho número 2 seja o pai é $1 - p$. A partir do DNA obtido da mãe, do macho número 1 e do macho número 2, há indícios de que, em um local específico do genoma, a mãe tem o par de genes (A, A), o macho número 1 possui o par de genes (a, a), e o macho número 2 tem o par de genes (A, a). Se um teste de DNA mostra que o chimpanzé bebê tem o par de genes (A, a), qual é a probabilidade de que o macho número 1 seja o pai?

7) Dois gabinetes idênticos em aparência tem duas gavetas. O gabinete A contém uma moeda de prata em cada gaveta e o gabinete B contém uma moeda de prata em uma das suas gavetas e uma moeda de ouro na outra. Um gabinete foi selecionado aleatoriamente, uma de suas gavetas foi aberta, e uma moeda de prata foi encontrada. Qual é a probabilidade de que exista uma moeda de prata na outra gaveta?