Modelagem dos Problemas de Programação Linear

Danilo Fernandes Costa[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

1. Problema de Steiner em grafos com limites de elo e links

1.1. Entrada

Um grafo $G = (V, E)$ com pesos nas arestas c_{ij}, $\forall ij \in E$, um conjunto de terminais (obrigatórios) $T \subset V$ e dois inteiros l e r.

1.2. Objetivo

Conectar os nós terminas com custo (peso) mínimo, eventualmente utilizando os demais nós como passagem (vértices de Steiner) de tal forma que a quantidade de vértices de Steiner com grau 2 seja menor ou igual a l e a quantidade de vértices de Steiner com grau maior que 3 seja menor ou igual a r.

1.3. Modelagem

1.3.1. Variáveis de decisão

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } ij \text{ pertence à solução} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad ij \in E$$

$$p_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ possui, na solução, grau maior ou igual a 2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i \in V \backslash T$$

$$q_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ possui, na solução, grau maior ou igual a 3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i \in V \backslash T$$

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ possui, na solução, grau maior ou igual a 4} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i \in V \backslash T$$

1.3.2. Restrições

- Domínio

  $y_{ij} \in \{0, 1\}$, onde $ij \in E$
  $p_j, q_j, s_j \in \{0, 1\}$, onde $j \in V \backslash T$

- Para todo par de vértices terminais, deve existir na solução um caminho que os conecte

  $C(\delta(W)) \geq 1$, para todo $W \subset V$ tal que $W \cap T \neq \emptyset$ e $(V \backslash W) \cap T \neq \emptyset$

  onde $\delta(W)$ é o conjunto de arestas com um vértice em W e o outro em $V \backslash W$, e $C(F) = \sum_{ij \in F} y_{ij}$ para $F \subseteq E$

- Um vértice não-terminal é um vértice de Steiner com grau maior ou igual a 2 se, e somente se, possui ao menos duas arestas pertencentes à solução

  $p_i \geq y_{ij} + y_{ik} - 1$, onde $i \in V \backslash T$ e $j, k \in N(i)$ com $j \neq k$

  $p_i \leq \sum_{j \in N(i) \backslash \{k\}} y_{ij}$, onde $i \in V \backslash T$ e $k \in N(i)$

- Um vértice não-terminal é um vértice de Steiner com grau maior ou igual a 3 se, e somente se, possui ao menos três arestas pertencentes à solução

  $q_i \geq y_{ij} + y_{ik} + y_{im} - 2$, onde $i \in V \backslash T$ e $j, k, m \in N(i)$ com $j \neq k \neq m$

  $q_i \leq \sum_{j \in N(i) \backslash \{k,m\}} y_{ij}$, onde $i \in V \backslash T$ e $k, m \in N(i)$ com $k \neq m$

- Um vértice não-terminal é um vértice de Steiner com grau maior ou igual a 4 se, e somente se, possui ao menos quatro arestas pertencentes à solução

  $s_i \geq y_{ij} + y_{ik} + y_{im} + y_{in} - 3$, onde $i \in V \backslash T$ e $j, k, m, n \in N(i)$ com $j \neq k \neq m \neq n$

  $s_i \leq \sum_{j \in N(i) \backslash \{k,m,n\}} y_{ij}$, onde $i \in V \backslash T$ e $k, m, n \in N(i)$ com $k \neq m \neq n$

- Limite na quantidade de vértices de Steiner de grau 2

  $\sum_{i \in V \backslash T} (p_i - q_i) \leq l$

- Limite na quantidade de vértices de Steiner de grau superior a 3

  $\sum_{i \in V \backslash T} s_i \leq r$

1.3.3. Função objetivo

$$min \sum_{ij \in E} c_{ij} \cdot y_{ij}$$