Modelagem dos Problemas de Programação Linear

Danilo Fernandes Costa[1]
Rodolfo Moreira[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

1. Coloração de aresta com custo mínimo

1.1. Entrada

Um grafo $G = (V, E)$.

1.2. Objetivo

Colorir as arestas de G de forma a minimizar o somatório dos custos, em que o custo de uma cor $c_i = i$.

1.3. Modelagem

1.3.1. Variáveis de decisão

$$x_{ic} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } i \text{ for colorida com a cor } c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i, c = 1, ..., |E|$$

1.3.2. Restrições

- Domínio:
  $x_{ic} \in \{0, 1\}$, onde $i, c = 1, ..., |E|$
- Unicidade da cor:
  $\sum_{c=1}^{|E|} x_{ic} = 1$, onde $i = 1, ..., |E|$
- Distinção de cor entre arestas adjacentes:
  $x_{ic} + x_{jc} \leq 1$, se i e j são arestas adjacentes e para $c = 1, ..., |E|$

1.3.3. Função objetivo

$$min \sum_{i=1}^{|E|} \sum_{c=1}^{|E|} c \cdot x_{ic}$$

2. Diversified Top-k Clique

2.1. Entrada

Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k.

2.2. Objetivo

Encontrar um conjunto com k cliques maximais (subgrafo completo) $\mathscr{C} = \{c_1, c_2, ..., c_k\}$ de forma a maximizar a cobertura $cob(\mathscr{C})$. A cobertura é definida como $cob(\mathscr{C}) = \bigcup\limits_{c_i \in \mathscr{C}} c_i$. Note que o objetivo é maximizar $|cob(\mathscr{C})|$.

2.3. Modelagem

2.3.1. Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ pertence a clique maximal } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1, ..., |V|, \quad j = 1, ..., k$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ pertence a uma clique maximal} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1, ..., |V|$$

2.3.2. Restrições

- Domínio:
  $x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}$, onde $i = 1, ..., |V|$ e $j = 1, ..., k$
- Restrição de clique:
  $x_{pj} + x_{qj} \leq 1$, se $pq \notin E$ e para $j = 1, ..., k$
- Restrição de cobertura
  $y_i \leq \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$, onde $j = 1, ..., k$

2.3.3. Função objetivo

$$max(F_{obj}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = max \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{|V|} x_{ij} + k \cdot |V| \cdot \sum_{i=1}^{|V|} y_i \right)$$

onde $\mathbf{x} = \{x_{11}, ..., xij, ..., x_{|V|k}\}$ e $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_{|V|}\}$.

Preposição: Se F_{obj} tem seu ponto de máximo em $(\mathbf{x^o}, \mathbf{y^o})$, então $\sum_{i=1}^{|V|} y_i^o$ é a cobertura máxima do grafo G.

Prova: Provemos por absurdo: suponha que $\sum_{i=1}^{|V|} y_i'$ seja a cobertura máxima de G e que $\sum_{i=1}^{|V|} y_i' > \sum_{i=1}^{|V|} y_i^o > 0$. Logo, temos que:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{|V|} x_{ij}^o \leq k \cdot |V| \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{|V|} x_{ij}^o + \left(k \cdot |V| \cdot \sum_{i=1}^{|V|} y_i^o \right) \leq k \cdot |V| + \left(k \cdot |V| \cdot \sum_{i=1}^{|V|} y_i^o \right)$$

$$\Rightarrow F_{obj}(\mathbf{x^o}, \mathbf{y^o}) \leq k \cdot |V| \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{|V|} y_i^o\right) \leq k \cdot |V| \cdot \sum_{i=1}^{|V|} y_i' \tag{1}$$

Seja $\mathbf{x}'$ arbitrário e tal que, em conjunto com $\mathbf{y}'$, obedecem às restrições 3.3.2. Desse modo, pela restrição de cobertura,

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{|V|} x_{ij}' > 0 \tag{2}$$

Por (1) e (2):

$$F_{obj}(\mathbf{x^o}, \mathbf{y^o}) < k \cdot |V| \cdot \sum_{i=1}^{|V|} y_i' + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{|V|} x_{ij}' = F_{obj}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \tag{3}$$

O que é uma contradição. Logo, se F_{obj} tem seu ponto de máximo em $(\mathbf{x^o}, \mathbf{y^o})$, então $\sum_{i=1}^{|V|} y_i^o$ é a cobertura máxima do grafo G. $\square$