

# Ciência das Redes

## Modelos de Redes

Ricardo Luders  
Thiago H Silva



## Por que um modelo?

- representação simples de rede complexa
- pode derivar propriedades matematicamente
- prever propriedades e resultados
- Além disso: para ter uma linha de base
  - De que forma sua rede do mundo real é diferente do modelo hipotético?
  - Que percepções podem ser extraídas disso?

## Três modelos de redes importantes

### Rede aleatória (random graph)

- Modelo de Erdös-Rényi
- Existe uma probabilidade de um nó se conectar a outro
- Mundo pequeno (Small-world)
  - Caminhos alternativos
- Ligações preferenciais (Scale-free)
  - Hubs

## Rede Aleatória (random graph)

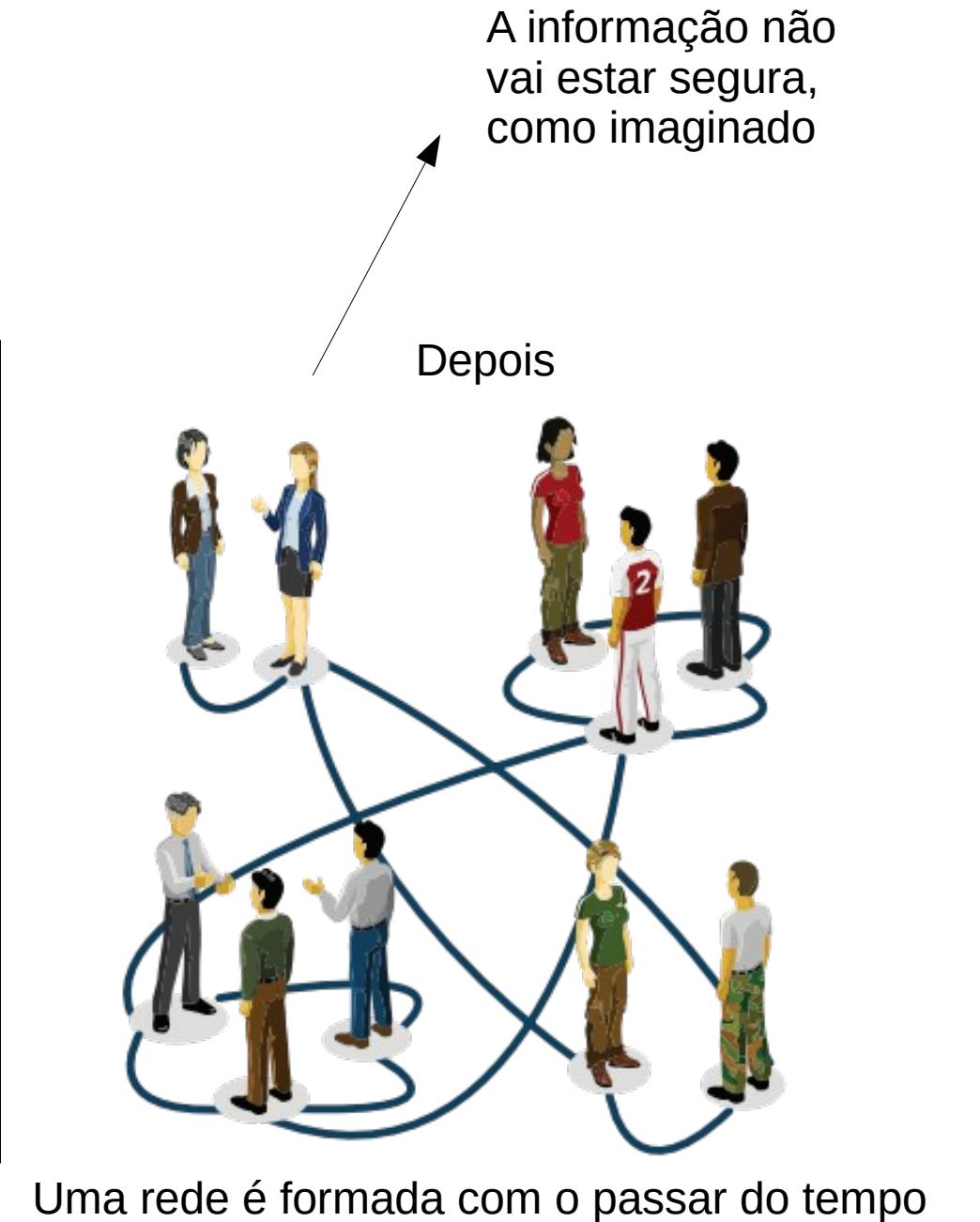
# Modelo de rede aleatória

Em uma festa, comenta para uma amiga próxima que achou uma garrafa de vinho raro.

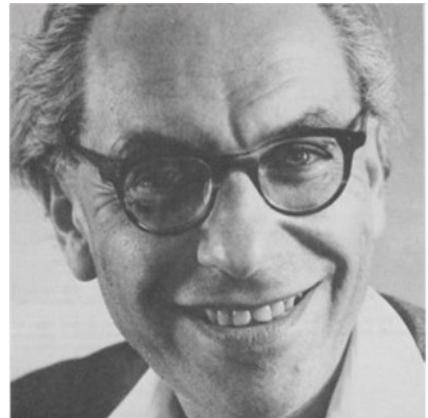


# Modelo de rede aleatória

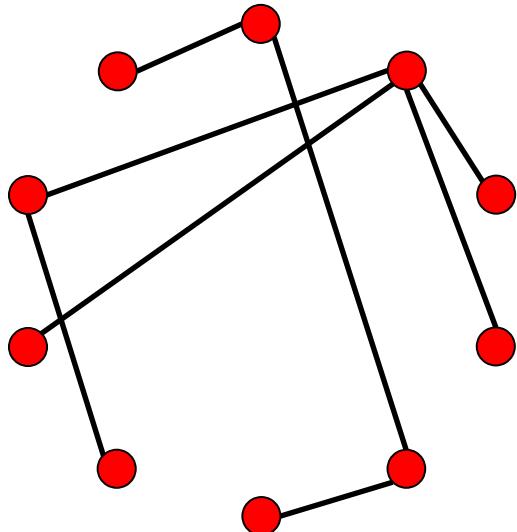
Em uma festa, comenta para uma amiga próxima que achou uma garrafa de vinho raro.



Pál Erdős  
(1913-1996)



Alfréd Rényi  
(1921-1970)



## Erdős-Rényi model (1960)

Conectar com probabilidade  $p$

$$p=1/6 \quad N=10$$

$$\langle k \rangle = 1.5$$

## Duas definições:

- 1- Modelo G(N,L): Os N nós são conectados com L links aleatórios.
- 2- Modelo G(N, p): Cada par de nós é conectado pela probabilidade p. Foco será mais neste.

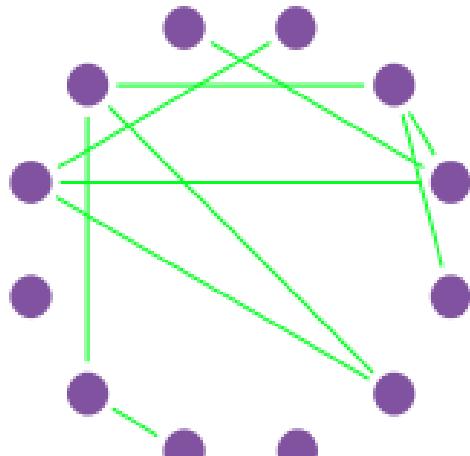
No modelo G(N,L) o grau médio é fácil de calcular:  $\langle k \rangle = 2L/N$

Outras características são mais fáceis de calcular no G(N,p)

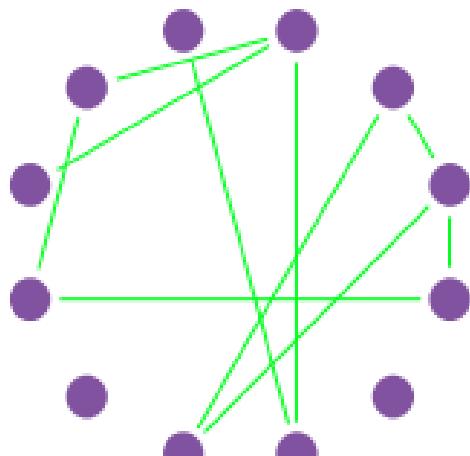
# Modelos de rede aleatória

$p=1/6$

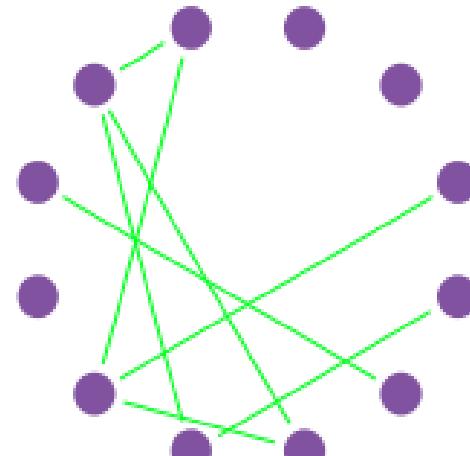
$N=12$



$L=8$



$L=10$

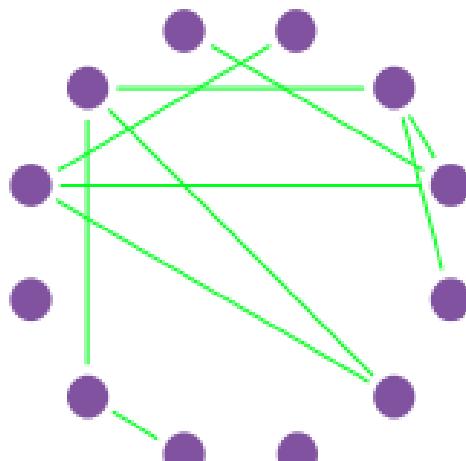


$L=7$

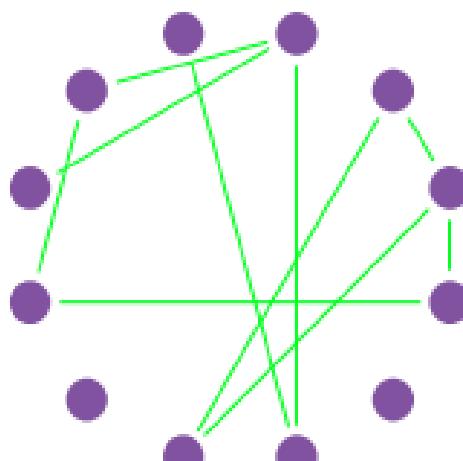
Mesmos parâmetros, mas diferentes redes são produzidas.

O que acontece se aumentarmos o  $p$ ?

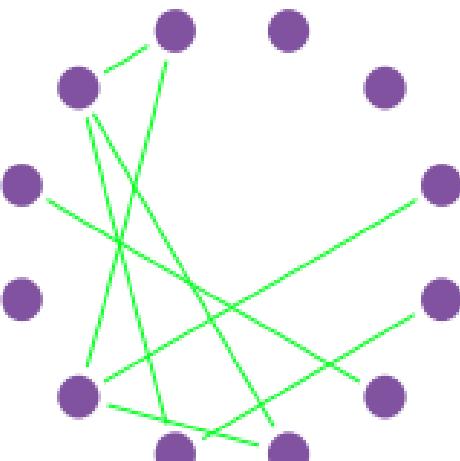
$p=1/6$   
 $N=12$



$L=8$



$L=10$

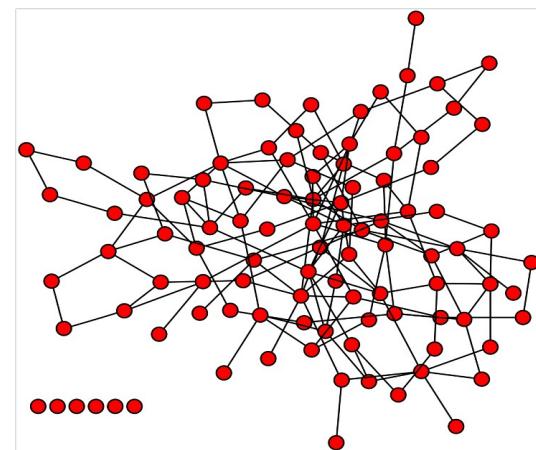
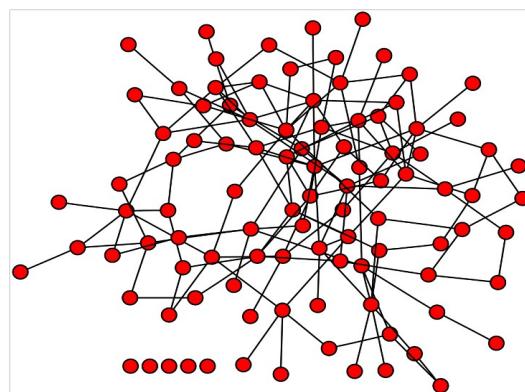
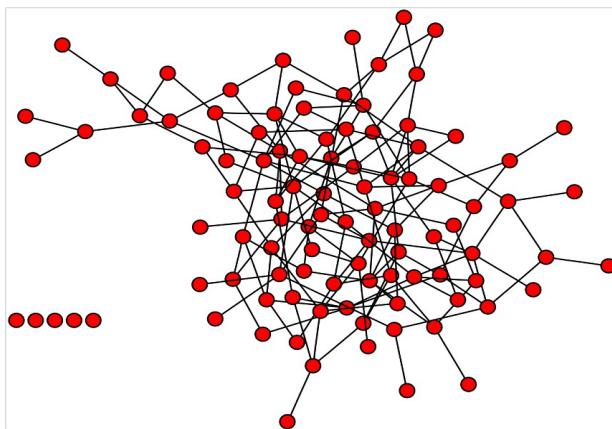


$L=7$

Mesmos parâmetros, mas diferentes redes são produzidas.

# Modelos de rede aleatória

$p=0.03$   
 $N=100$



**P (L):** a probabilidade de ter exatamente L links em uma rede de N nós e probabilidade p:

O número máximo de links em uma rede de N nós.

$$P(L) = \binom{N}{L} p^L (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2}-L}$$

Distribuição binomial

Número de maneiras diferentes de escolher L links entre todos os links potenciais.

$$x=L; \theta=p; n=N(N-1)/2$$

Distribuição Binomial (discreta):

Distribuição de probabilidade:  $p(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \dots, n; \theta \in [0, 1]$

Momentos:  $E(X) = n\theta; Var(X) = n\theta(1 - \theta)$

**P(L)**: a probabilidade de ter uma rede de exatamente L links

$$P(L) = \binom{N}{L} p^L (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2}-L}$$

Temos equações fechadas para o cálculo de várias propriedades:

- O número médio de links  $\langle L \rangle$  em um gráfico aleatório

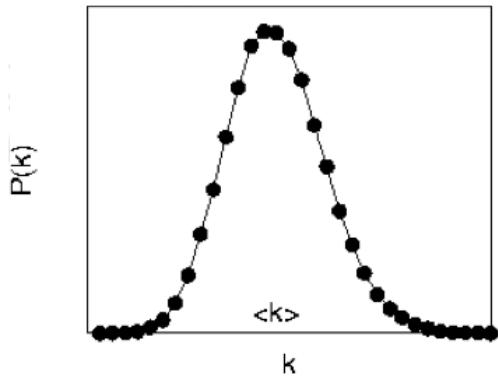
$$\langle L \rangle = \sum_{L=0}^{\frac{N(N-1)}{2}} L P(L) = p \frac{N(N-1)}{2}$$

$$\langle k \rangle = 2L/N = p(N-1)$$

- O desvio padrão

$$\sigma^2 = p(1-p) \frac{N(N-1)}{2}$$

# Distribuição de graus em um grafo aleatório



$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{(N-1)-k}$$

Selezione k nós de N-1

probabilidade de ter k arestas

probabilidade de faltar N-1-k arestas

$$\langle k \rangle = p(N-1)$$

$$\sigma_k^2 = p(1-p)(N-1)$$

Coeficiente de variação

$$\frac{\sigma_k}{\langle k \rangle} = \left[ \frac{1-p}{p} \frac{1}{(N-1)} \right]^{1/2} = \frac{1}{(N-1)^{1/2}}$$

Conforme o tamanho da rede aumenta, a distribuição se torna cada vez mais estreita - estamos cada vez mais confiantes de que o grau de um nó está próximo a  $\langle k \rangle$ .

Distribuição de Poisson (discreta):

Distribuição de probabilidade:  $p(x; \gamma) = \frac{e^{-\gamma} \gamma^x}{x!}; x = 0, 1, \dots, n; \gamma \geq 0$

Momentos:  $E(X) = \gamma; Var(X) = \gamma$

Para **N** grande e **k** pequeno, chegamos à distribuição de Poisson:

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

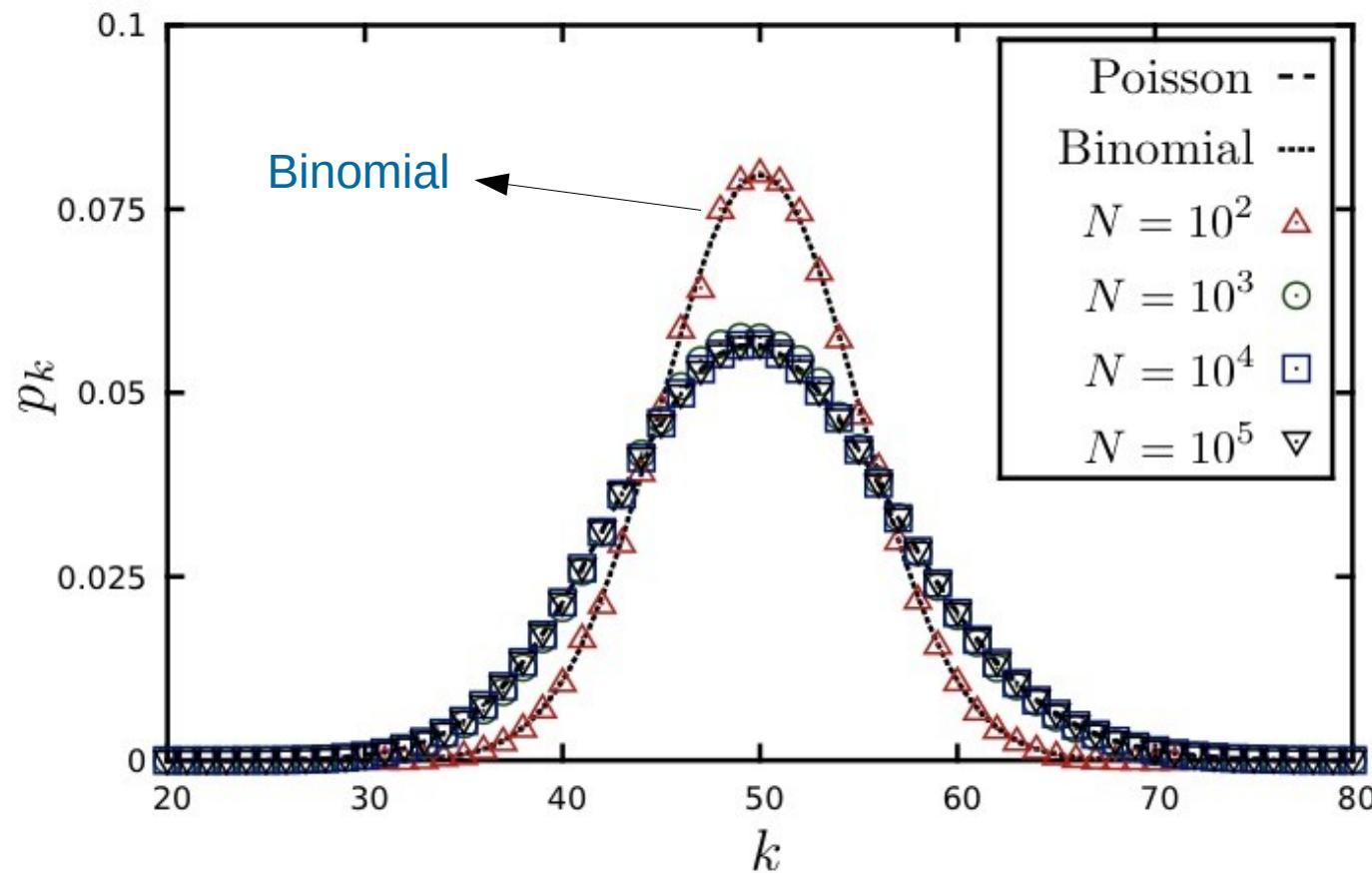
Redes reais tendem a ter  $\langle k \rangle \ll N$ , sendo assim esse é uma aproximação interessante, pois é mais simples:

Precisamos somente do termo k

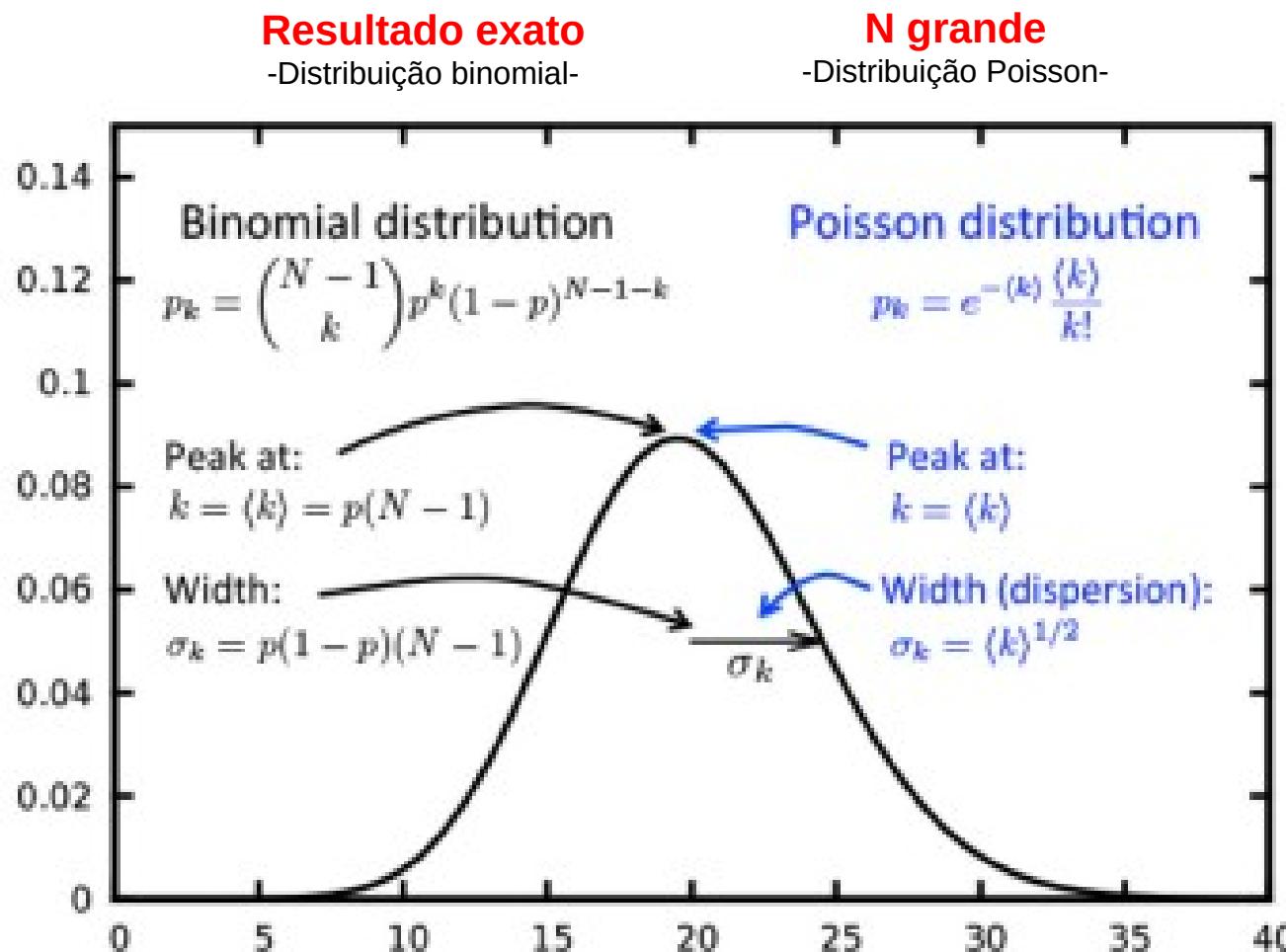
# Distribuição de graus em um grafo aleatório

$\langle k \rangle = 50$

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$



Para redes pequenas, ou seja  $N=10^2$ , a distribuição de graus varia significativamente de uma Poisson, pois a condição  $N >> \langle k \rangle$  do exemplo não é satisfeita.



Assumindo que as pessoas conhecem pelo nome em média 1000 indivíduos ao longo da sua vida:  $\langle k \rangle = 1000$

Se a rede social mundial fosse aleatória

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

O indivíduo mais conectado tem grau  $k_{\max} \sim 1.185$

O indivíduo menos conectado tem grau  $k_{\min} \sim 816$

A probabilidade de encontrar um indivíduo com grau  $k > 2.000$  é  $10^{-27}$ . Consequentemente, a chance de encontrar um indivíduo com 2.000 conhecidos é tão pequena que esses nós são virtualmente inexistentes em uma sociedade aleatória.

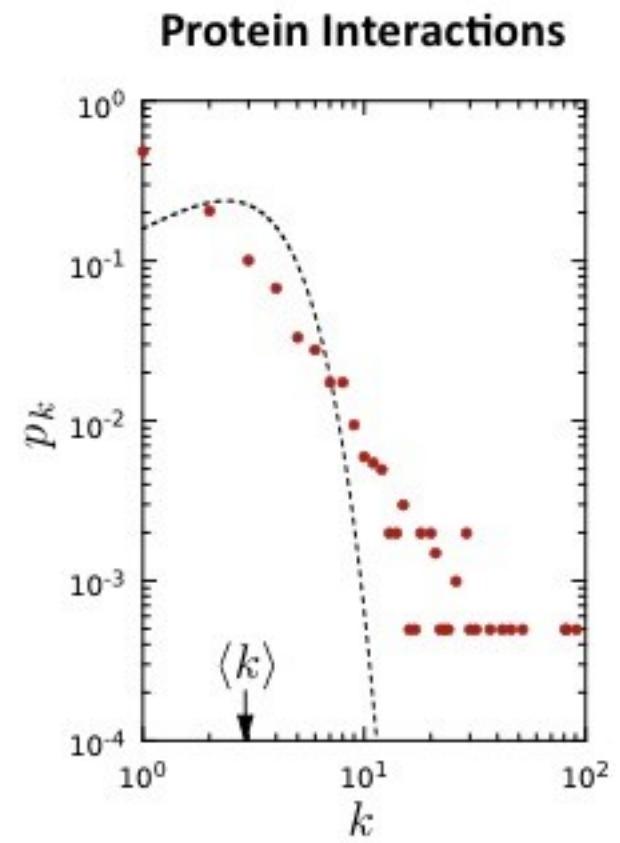
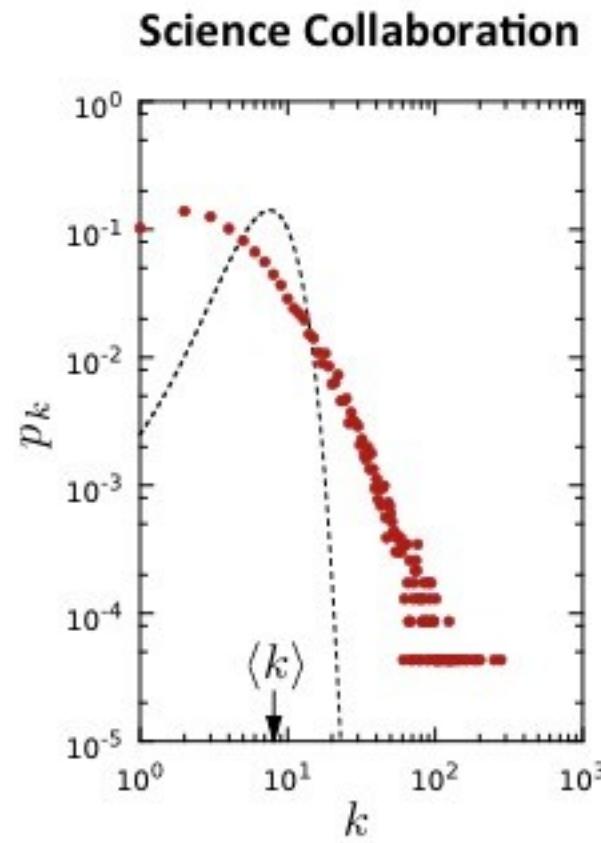
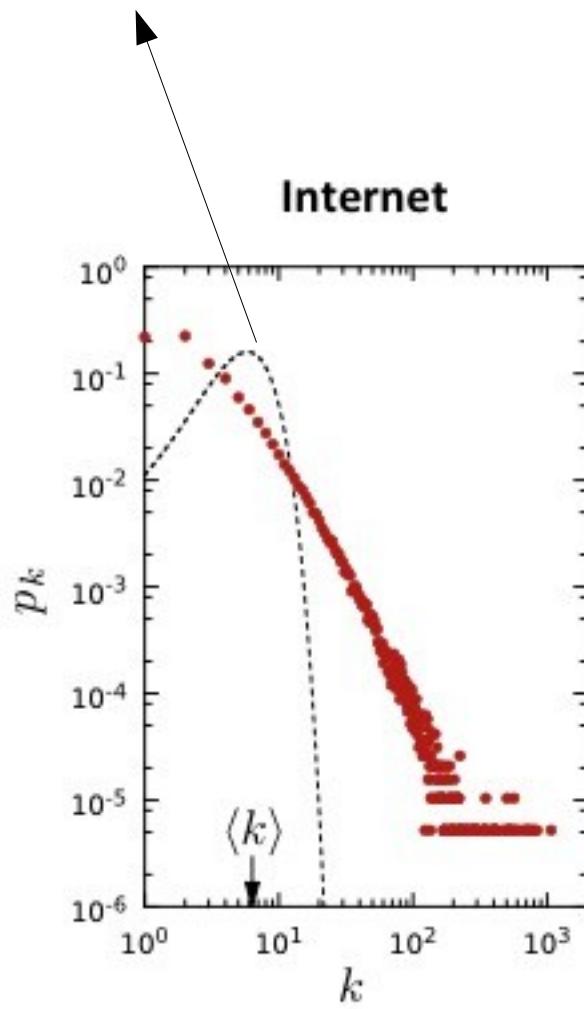
Uma sociedade aleatória consistiria principalmente de indivíduos médios, com todos com aproximadamente o mesmo número de amigos.

Faltariam *outliers*, indivíduos que são altamente populares ou reclusos.

# A distribuição de graus em redes reais

Linha pontilhada corresponde a uma Poisson

Redes reais não  
são aleatórias!



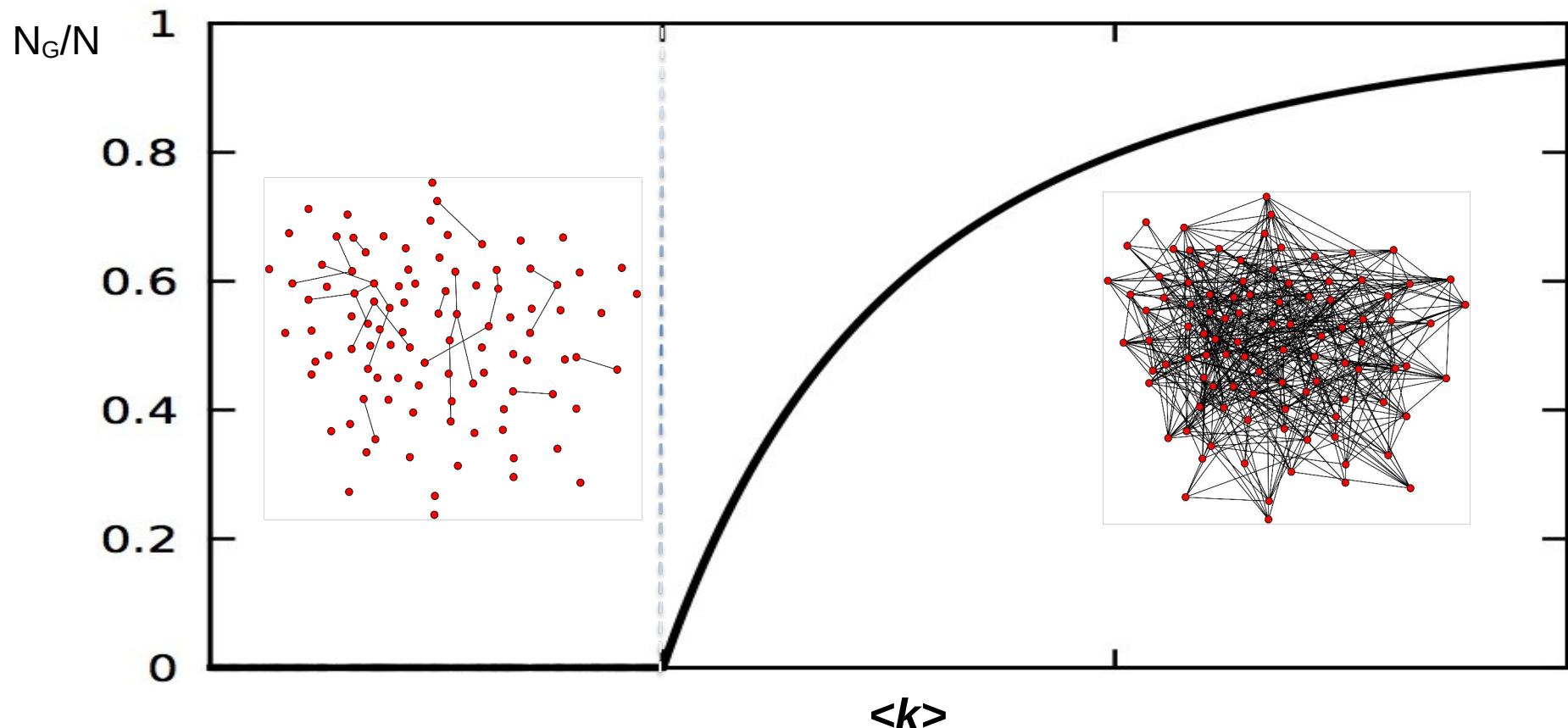
# A evolução de uma rede aleatória

$N_G$  – número de nós da componente gigante

Nós desconectados



**NETWORK.**



**Como essa transição acontece?**

# A evolução de uma rede aleatória

Nós desconectados → **NETWORK.**

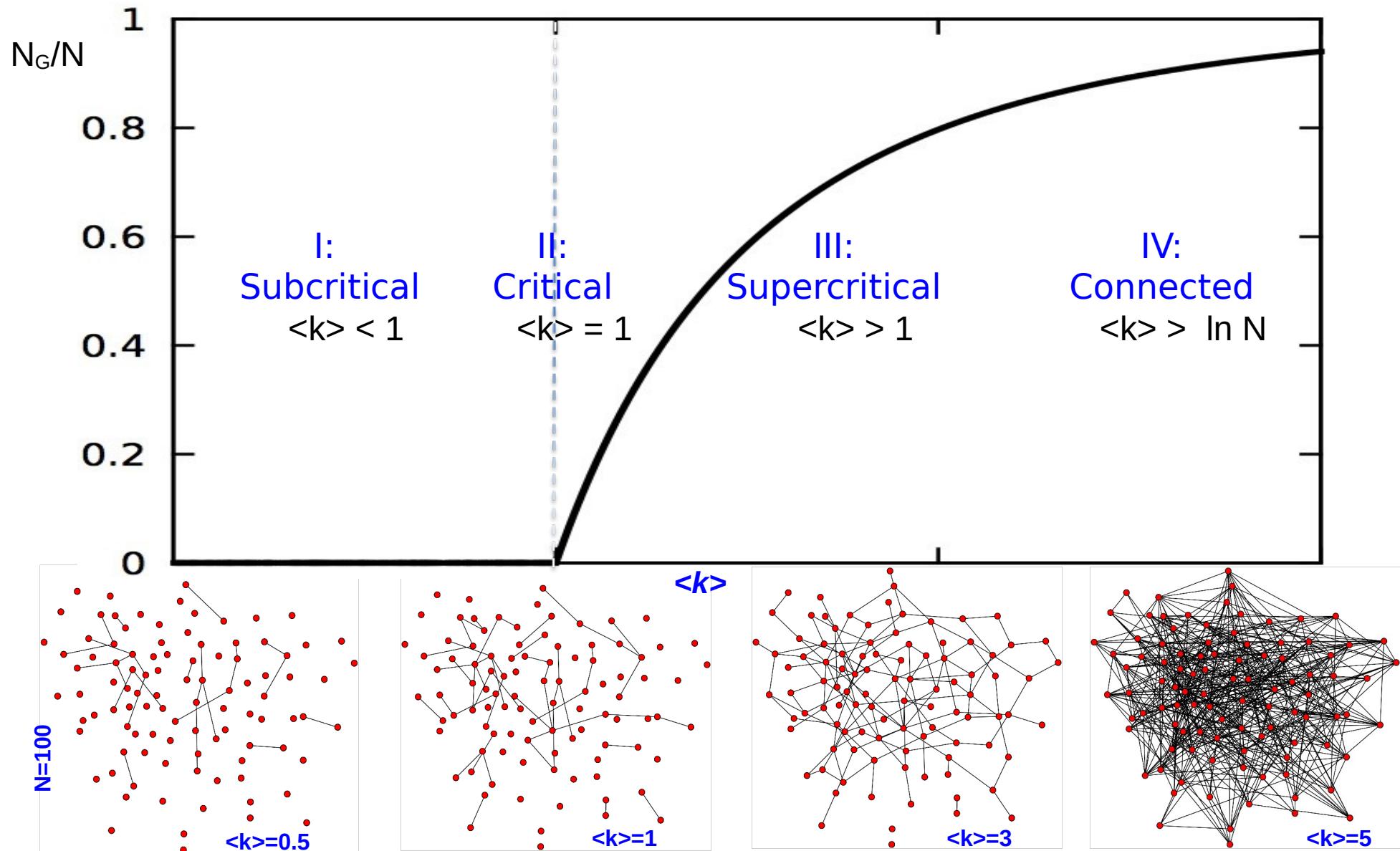
É necessário a condição:  $\langle k_c \rangle = 1$  (*Erdos and Renyi, 1959*)

O fato de que pelo menos um link por nó é necessário para ter um componente gigante não é inesperado. Na verdade, para que um componente gigante exista, cada um de seus nós deve estar ligado a pelo menos um outro nó.

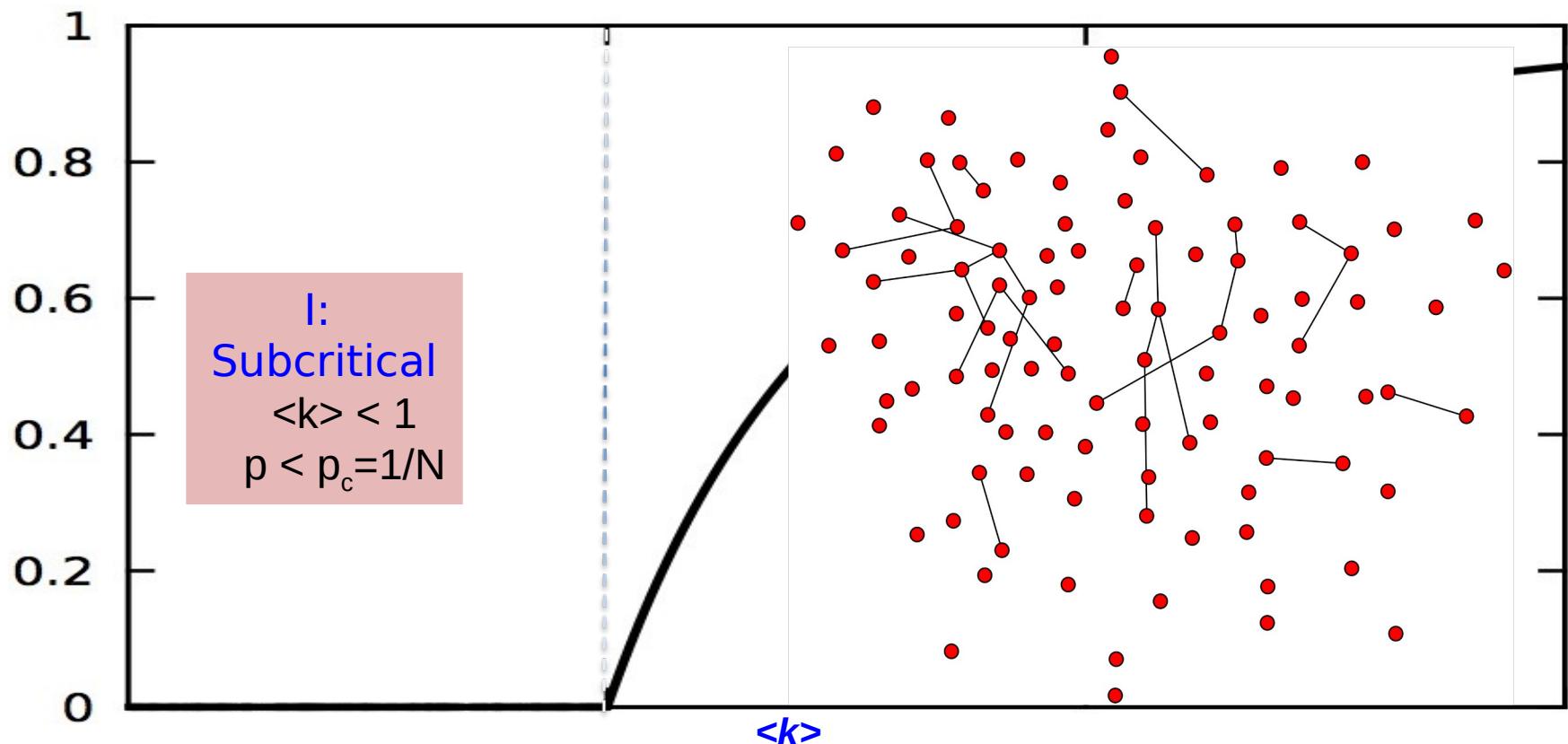
É um tanto inesperado, no entanto, que um link seja suficiente para o surgimento de um componente gigante.

É igualmente interessante que o surgimento do componente gigante não é gradual, mas segue o que os físicos chamam de transição de fase de segunda ordem em  $\langle k \rangle = 1$ .

# Distribuição do tamanho do cluster



# Distribuição do tamanho do cluster

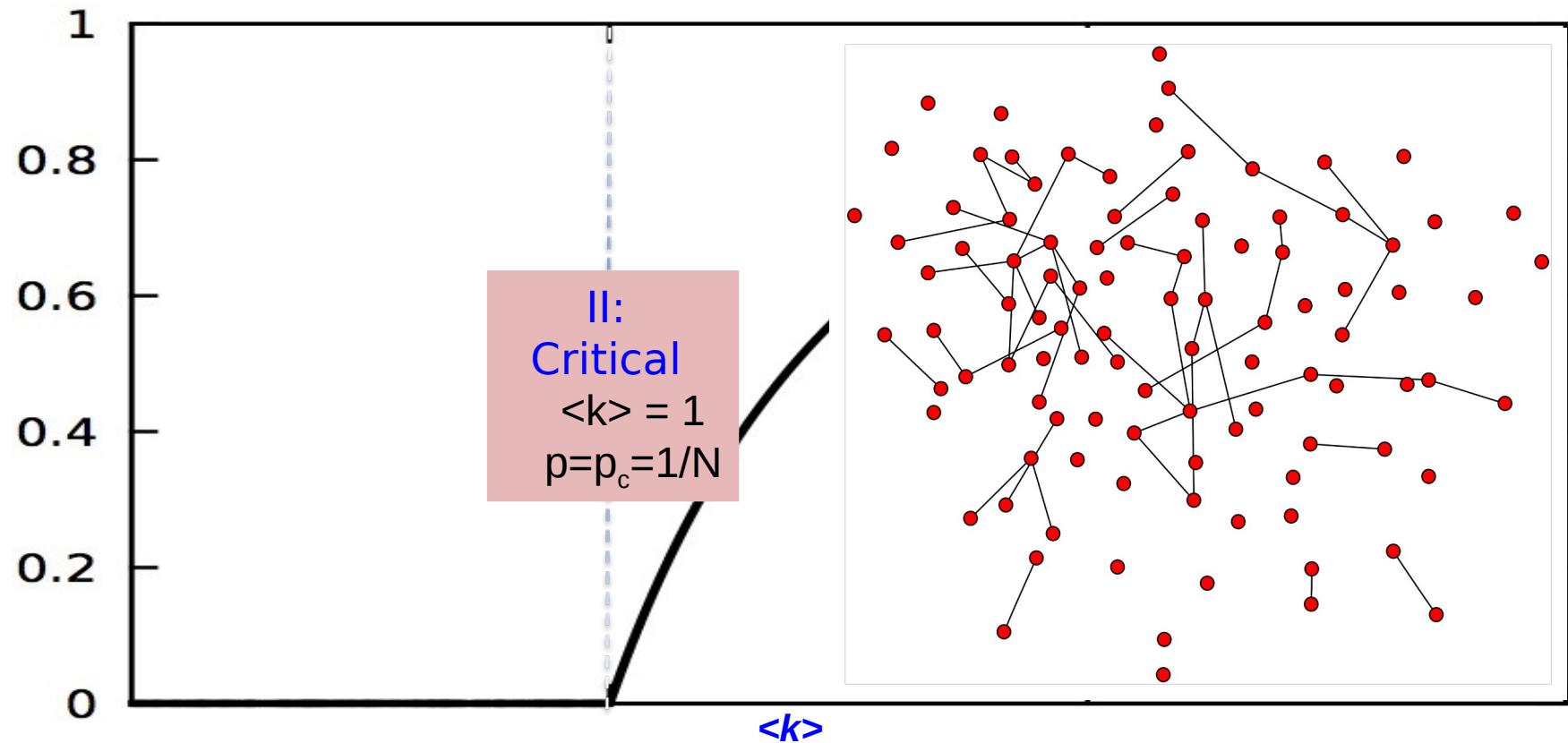


Nenhum componente gigante.

N-L clusters isolados, a distribuição do tamanho do cluster é exponencial

O maior cluster é uma árvore, seu tamanho  $\sim \ln N$

# Distribuição do tamanho do cluster

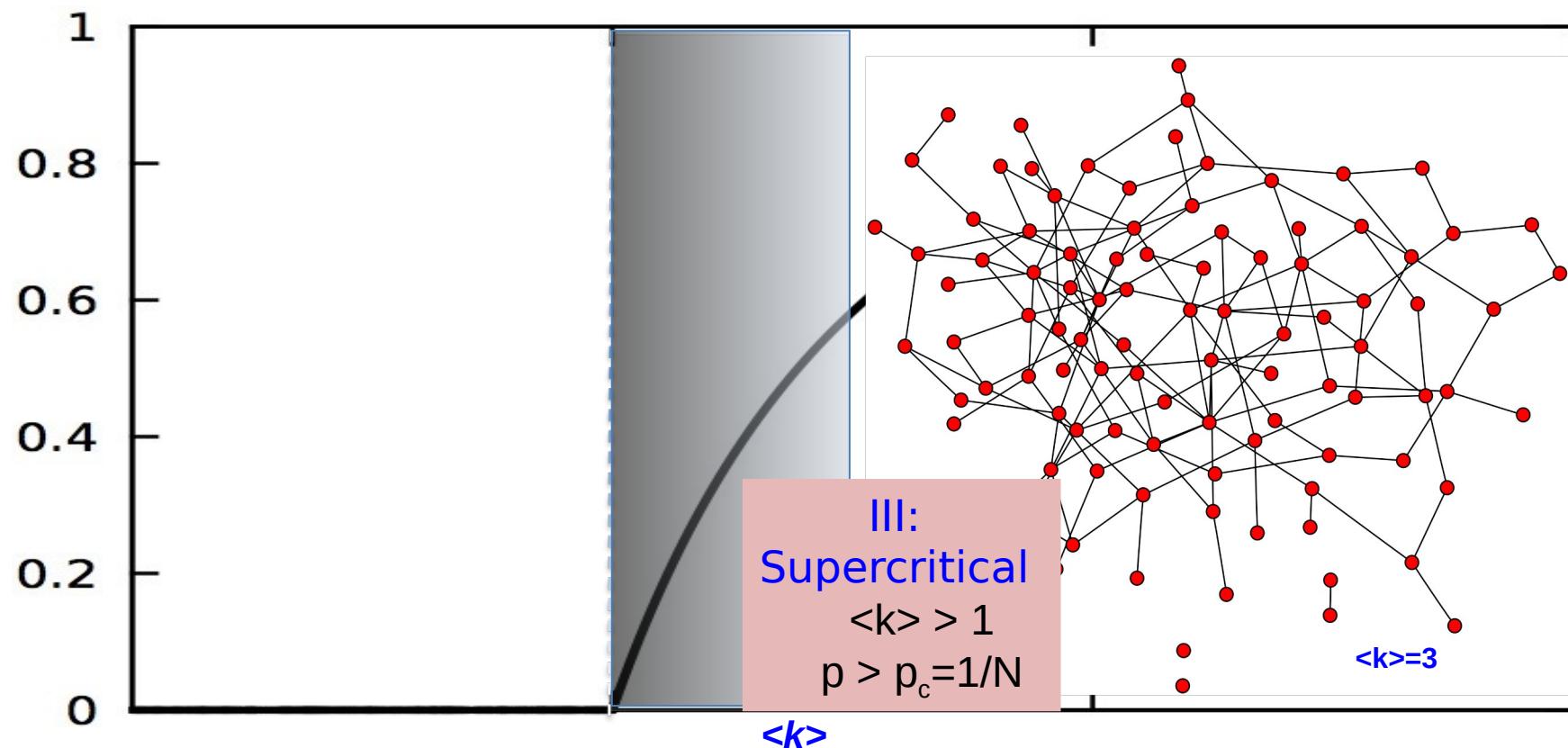


**Sem componente gigante**

Tamanho do maior cluster:  $N_G \sim N^{2/3}$

- Os clusters podem conter loops

# Distribuição do tamanho do cluster

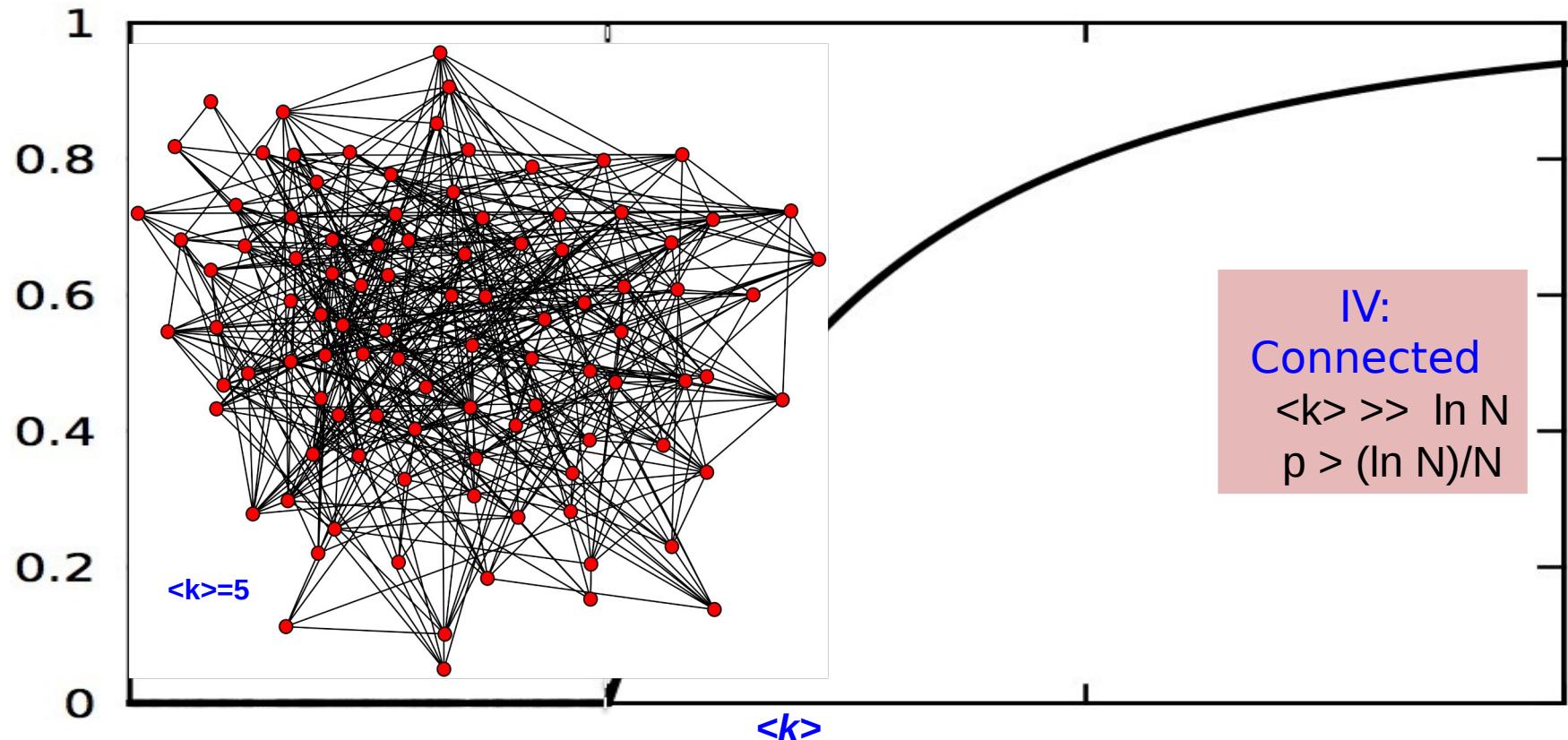


**Único componente gigante:**  $N_G \sim (p - p_c)N$

→ Componente gigante tem loops

- Clusters pequenos são árvores

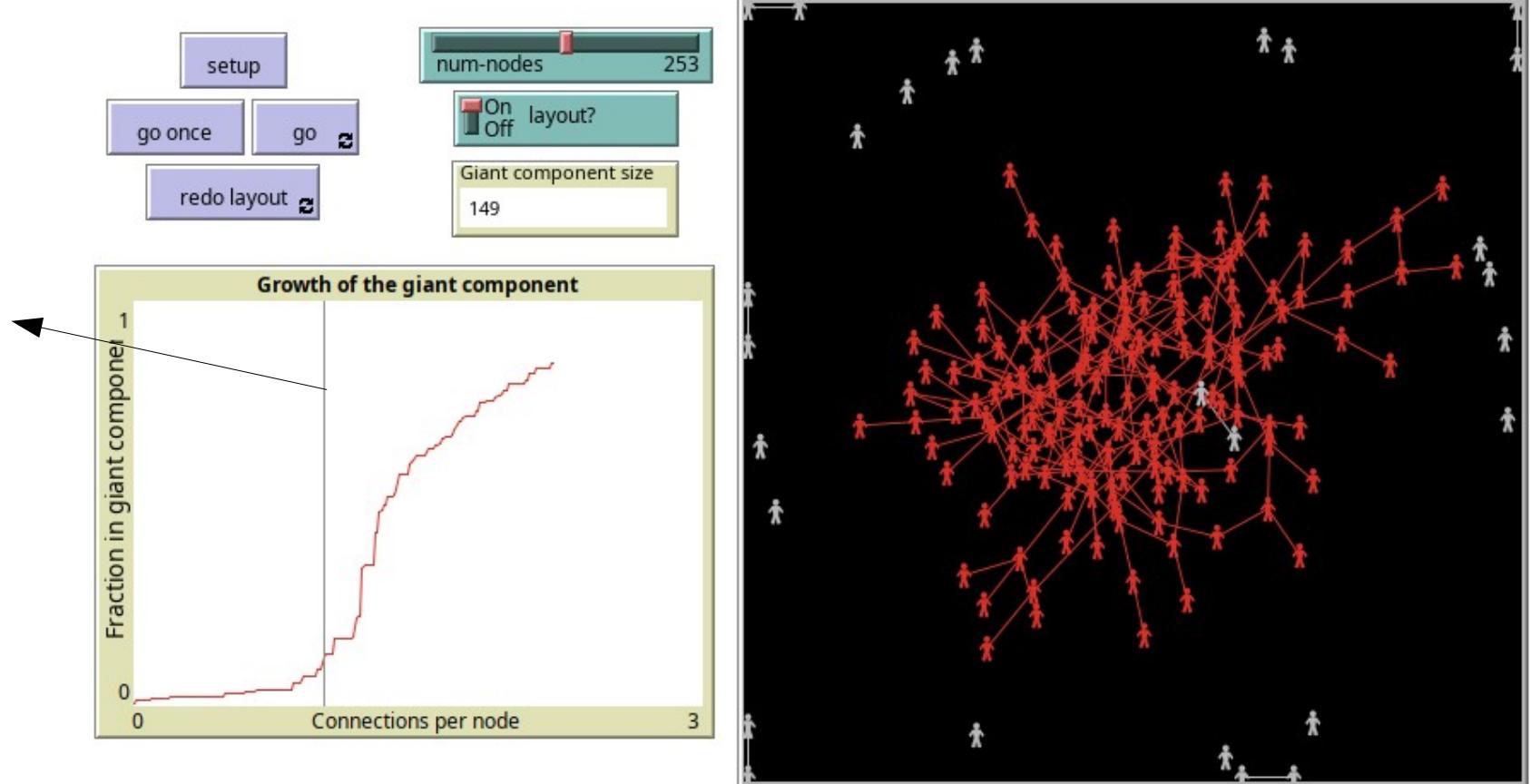
# Distribuição do tamanho do cluster



Apenas um único componente gigante:  $N_G=N$   
→ Componente gigante é denso.

Não tem distribuição de clusters

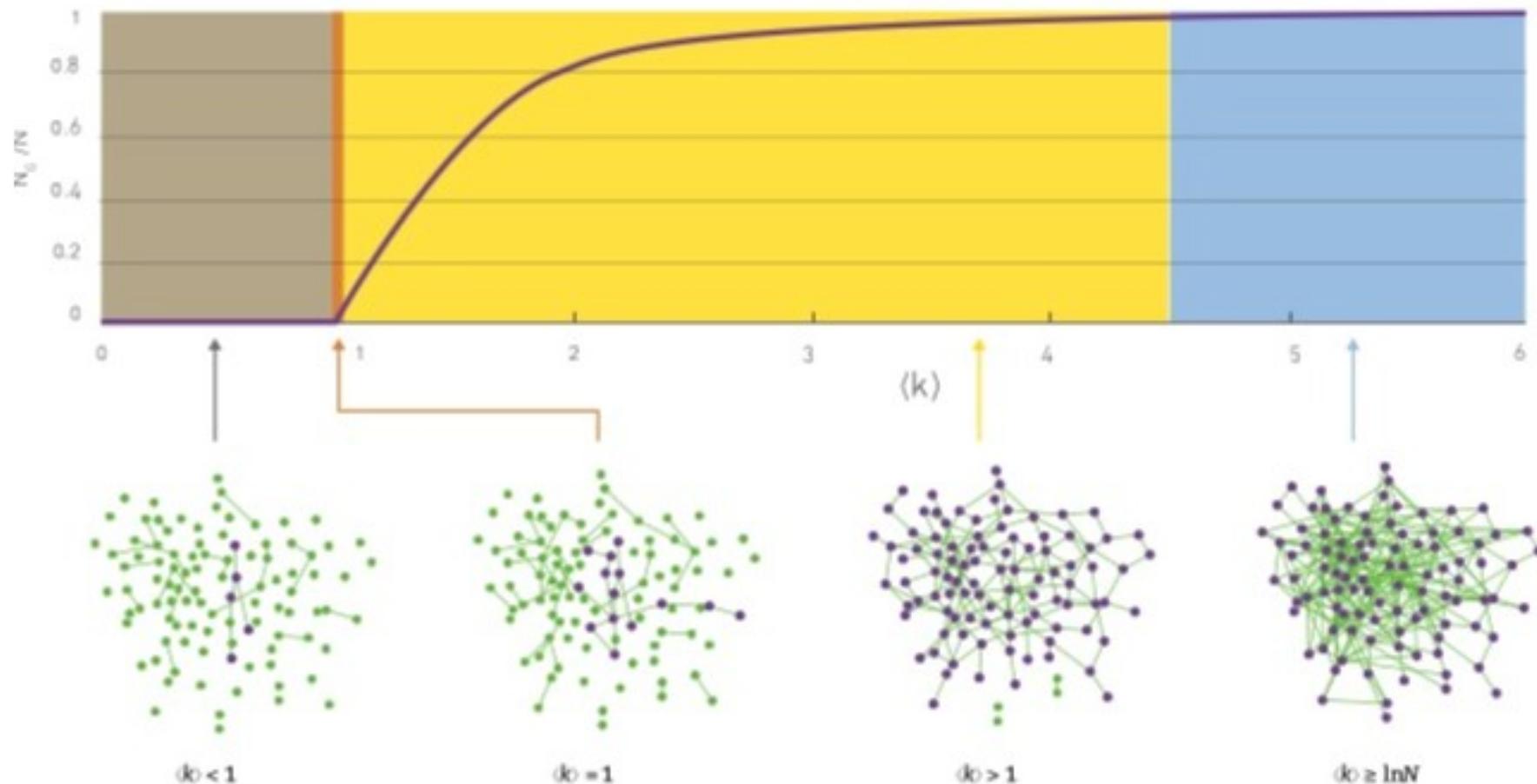
# Teste no netlogo



Netlogo > Arquivo> Biblioteca de Modelos > Networks > Giant componenent

<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/GiantComponent>

# Distribuição do tamanho do cluster



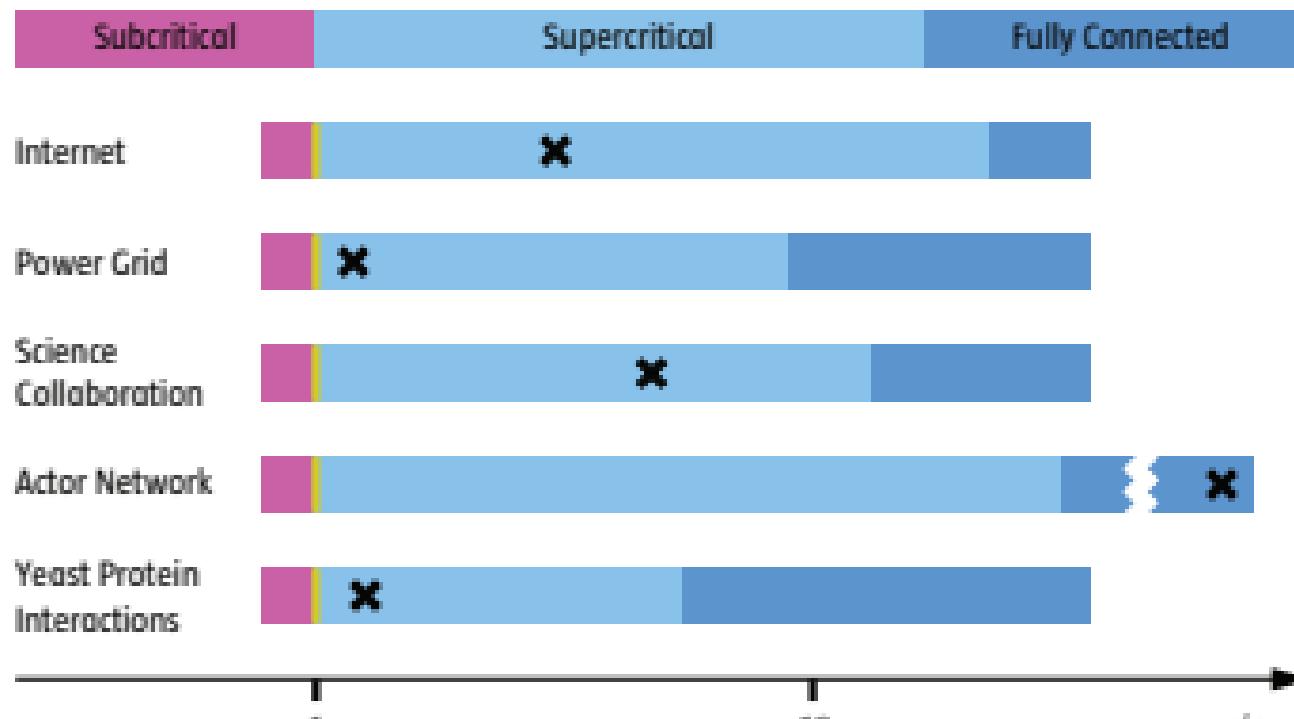
- (b) Subcritical Regime**
- No giant component
  - Cluster size distribution:  $p_i \sim s^{-\gamma} e^{-si}$
  - Size of the largest cluster:  $N_L \sim \ln N$
  - The clusters are trees

- (c) Critical Point**
- No giant component
  - Cluster size distribution:  $p_i \sim s^{-\gamma/2} e^{-si}$
  - Size of the largest cluster:  $N_L \sim N^{1/\gamma}$
  - The clusters may contain loops

- (d) Supercritical Regime**
- Single giant component
  - Cluster size distribution:  $p_i \sim s^{-\gamma} e^{-si}$
  - Size of the giant component:  $N_L \sim (p - p_c)N$
  - The small clusters are trees
  - Giant component has loops

- (e) Connected Regime**
- Single giant component
  - No isolated nodes or clusters
  - Size of the giant component:  $N_L \approx N$
  - Giant component has loops

# Redes reais são supercríticas



Network	$N$	$L$	$\langle k \rangle$	$\ln N$
Internet	192,244	609,066	6.34	12.17
Power Grid	4,941	6,594	2.67	8.51
Science Collaboration	23,133	186,936	8.08	10.04
Actor Network	212,250	3,054,278	28.78	12.27
Yeast Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	7.61

$$d_{\max} = \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$

Na maioria das redes, isso oferece uma melhor aproximação para a distância média entre dois nós escolhidos aleatoriamente,  $\langle d \rangle$ , do que para  $d_{\max}$ .

$$\langle d \rangle = \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$

Chamaremos de **fenômeno de mundo pequeno** a propriedade de que o comprimento médio do caminho ou o diâmetro depende logaritmicamente do tamanho do sistema.

Portanto, "pequeno" significa que  $\langle d \rangle$  é proporcional a  $\log N$ , ao invés de  $N$ .

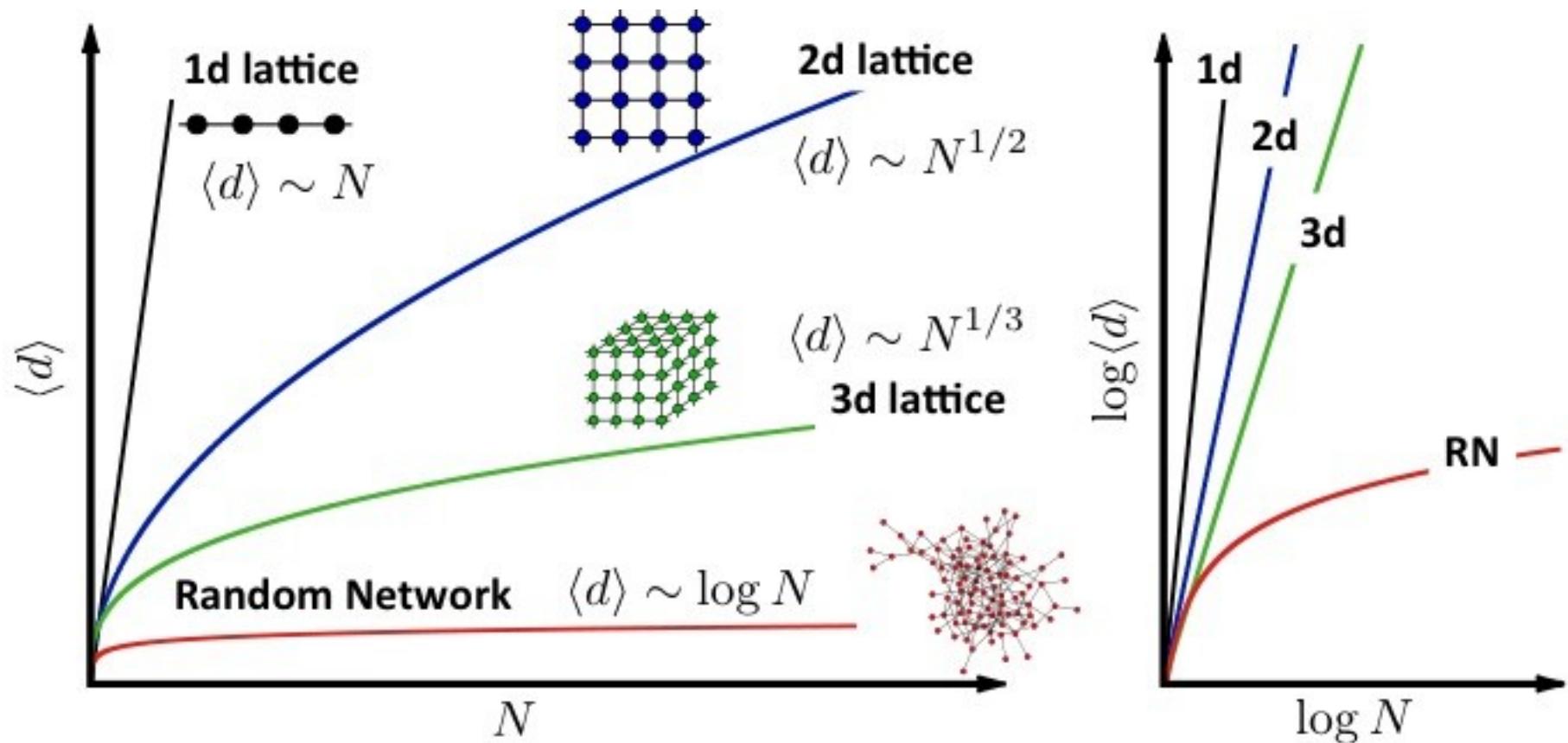
O termo  $1 / \log \langle k \rangle$  implica que quanto mais densa a rede, menor será a distância entre os nós.

# Distância em grafos aleatórios

Network	$N$	$L$	$\langle k \rangle$	$\langle d \rangle$	$d_{\max}$	$\frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$
Internet	192,244	609,066	6.34	6.98	26	6.58
WWW	325,729	1,497,134	4.60	11.27	93	8.31
Power grid	4,941	6,594	2.67	18.99	46	8.66
Mobile phone calls	36,595	91,826	2.51	11.72	39	11.42
Email	57,194	103,731	1.81	5.88	18	18.4
Science collaboration	23,133	93,439	8.08	5.35	15	4.81
Actor network	702,388	29,397,908	83.71	3.91	14	3.04
Citation network	449,673	4,707,958	10.43	11.21	42	5.55
<i>E. coli</i> metabolism	1,039	5,802	5.58	2.98	8	4.04
Protein interactions	2,018	2,930	2.90	5.61	14	7.14

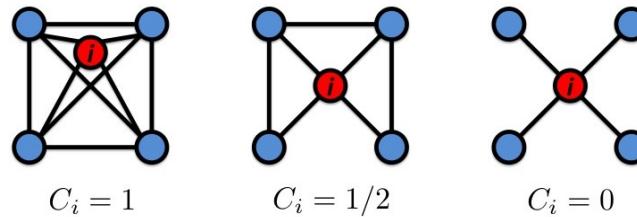
Dadas as enormes diferenças de escopo, tamanho e grau médio, a concordância é excelente.

# Por o ‘mundo pequeno’ é surpreendente?



# Coeficiente de clusterização

$$C_i \equiv \frac{2 \langle L_i \rangle}{k_i(k_i - 1)}$$



Uma vez que as arestas são independentes e têm a mesma probabilidade  $p$ ,

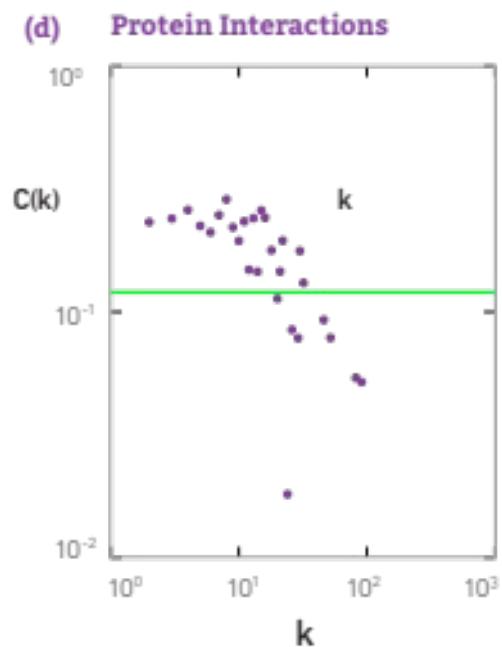
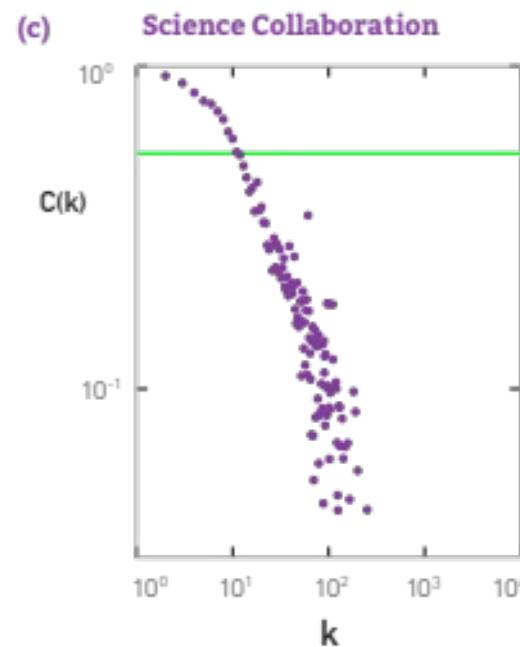
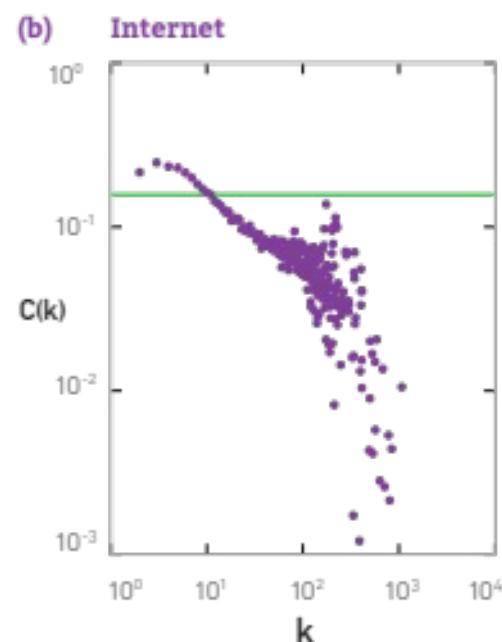
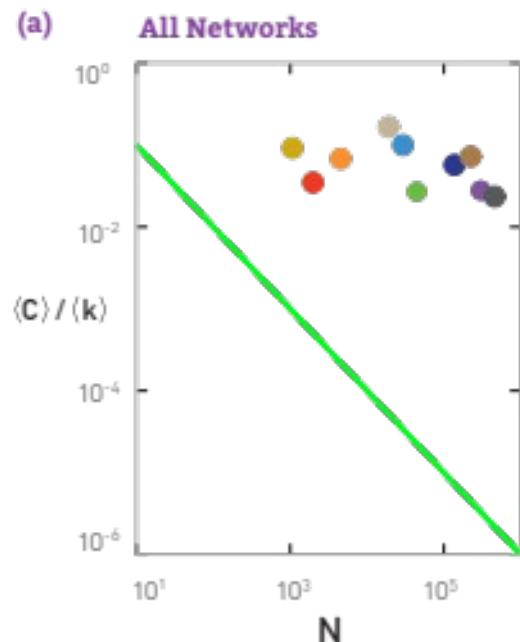
$$\langle L_i \rangle \geq p \frac{k_i(k_i - 1)}{2} \quad \Rightarrow \quad C_i = \frac{2\langle L_i \rangle}{k_i(k_i - 1)} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}.$$

O coeficiente de agrupamento de grafos aleatórios é pequeno.

Para um grau fixo,  $C$  diminui com o tamanho do sistema  $N$ .

$C$  é independente do grau  $k$  de um nó.

# Coeficiente de clusterização



Linha verde é a previsão obtida com essa equação:

$$C_i = \frac{2\langle L_i \rangle}{k_i(k_i - 1)} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}.$$

C diminui com o tamanho do sistema N.

C é independente do grau k de um nó.

**Figura a:** todas as redes da tabela do slide 37

À medida que dados quantitativos sobre redes reais se tornam disponíveis, podemos comparar sua topologia com as previsões da teoria de grafos aleatórios.

Observe que, uma vez que temos  $N$  e  $\langle k \rangle$  para uma rede aleatória, podemos derivar todas as propriedades mensuráveis. Na verdade, temos:

Comprimento médio do caminho:

$$\langle d \rangle = \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$

Coeficiente de clusterização:

$$C_i = \frac{2\langle L_i \rangle}{k_i(k_i - 1)} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}.$$

Distribuição de Graus:

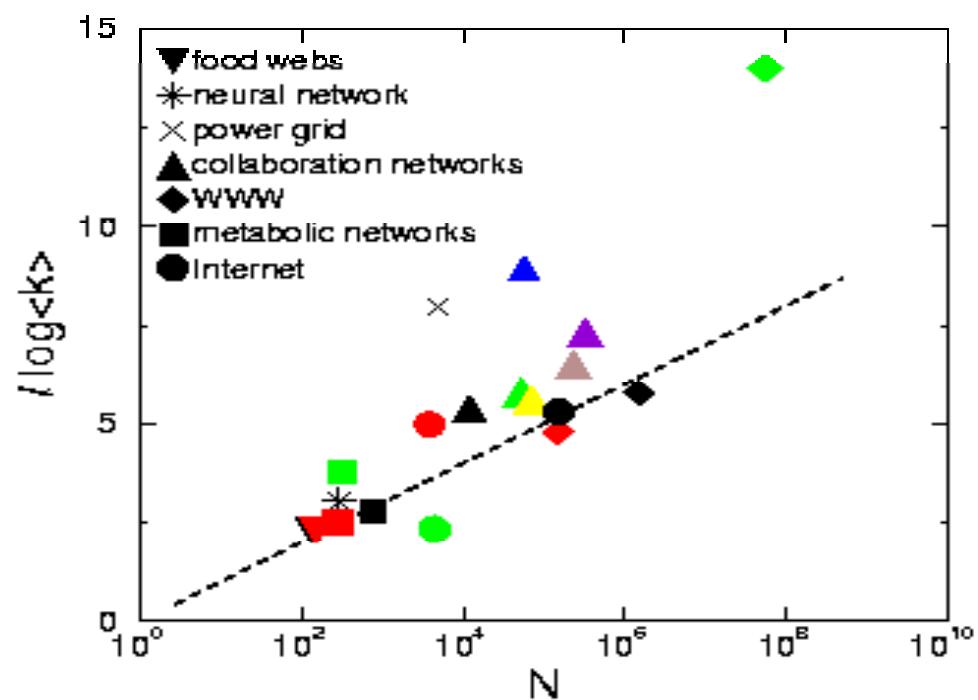
$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

## Predição:

$$\langle d \rangle = \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$

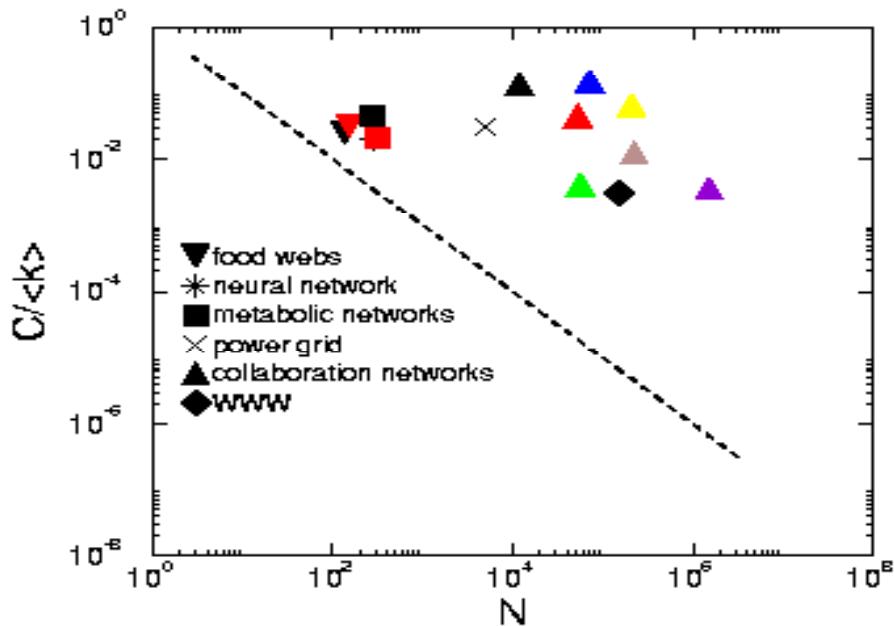


Redes reais têm distâncias curtas como grafos aleatórios.



## Predição:

$$C_i = \frac{2\langle L_i \rangle}{k_i(k_i - 1)} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}$$

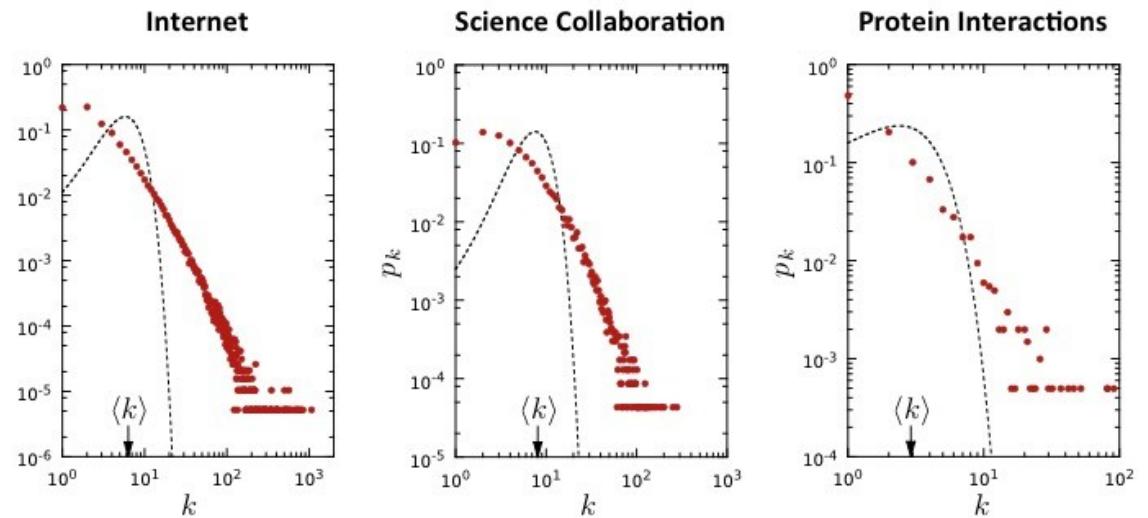


$C_{rand}$  subestima com ordens de magnitudes o coeficiente de agrupamento de redes reais.



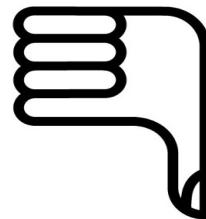
## Predição:

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$



## Dados reais:

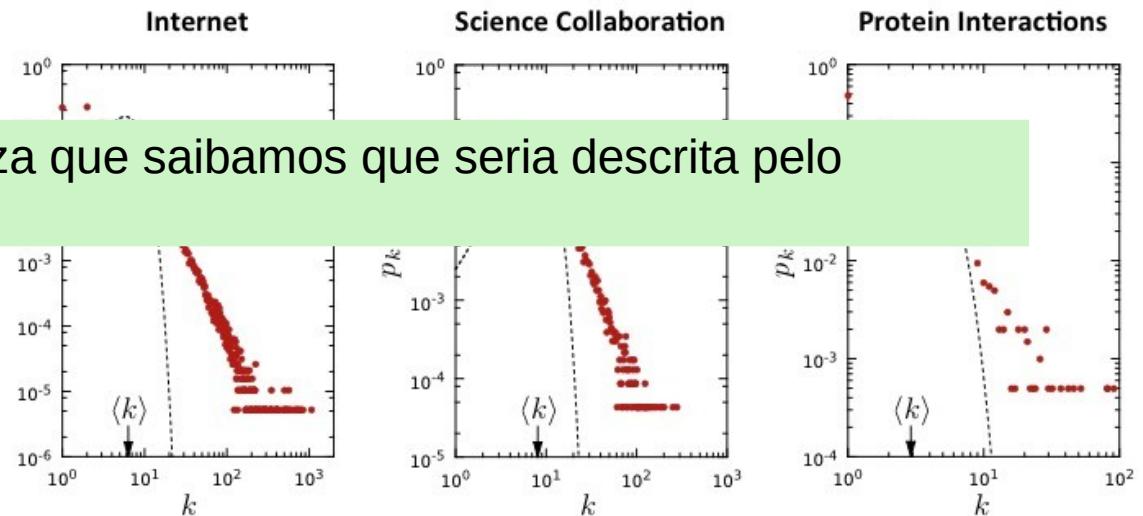
$$P(k) \propto k^{-g}$$



## Predição:

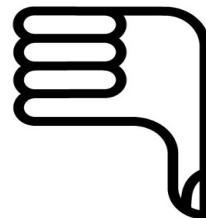
Não há nenhuma rede na natureza que saibamos que seria descrita pelo modelo de rede aleatória.

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$



## Dados reais:

$$P(k) \propto k^{-\gamma}$$



# Qual a importância de redes aleatórias?

É o modelo de referência.

Isso nos ajudará a calcular muitas medidas, que podem então ser comparadas aos dados reais, entendendo até que ponto uma determinada propriedade é resultado de algum processo aleatório.

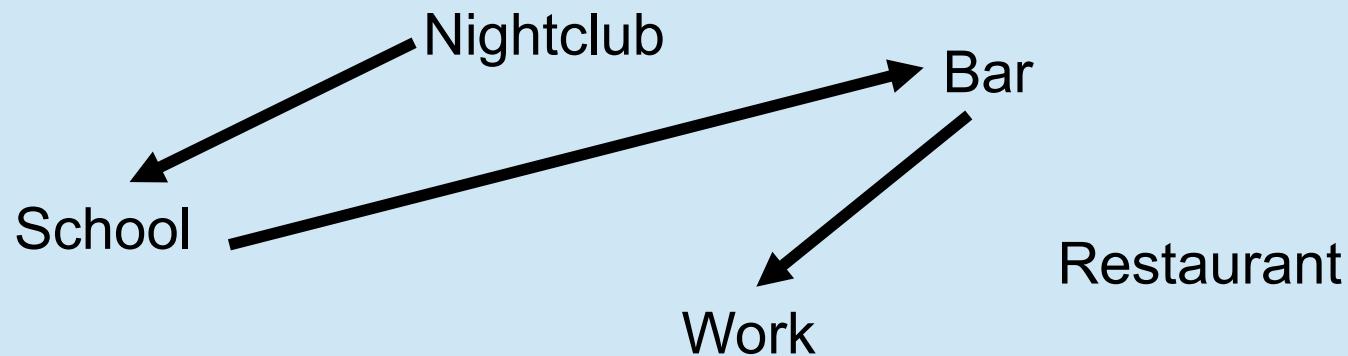
Padrões em redes reais que são compartilhados por um grande número de redes reais, mas que se desviam das previsões do modelo de rede aleatório.

Para identificá-los, precisamos entender como seria uma propriedade em particular se fosse conduzida inteiramente por processos aleatórios.



As transições são aleatórias?

*Segunda-feira típica*



Silva, T. H., Vaz de Melo, P. O., Almeida, J. M., Salles, J., & Loureiro, A. A. (2014). Revealing the city that we cannot see. ACM Transactions on Internet Technology (TOIT), 14(4), 1-23.

## Grafo de transição urbana:

User1

Tempo 1



Pizzaria

“Food”

## Grafo de transição urbana:

User1

Tempo 1



Pizzaria  
“Food”

User1

Tempo 2

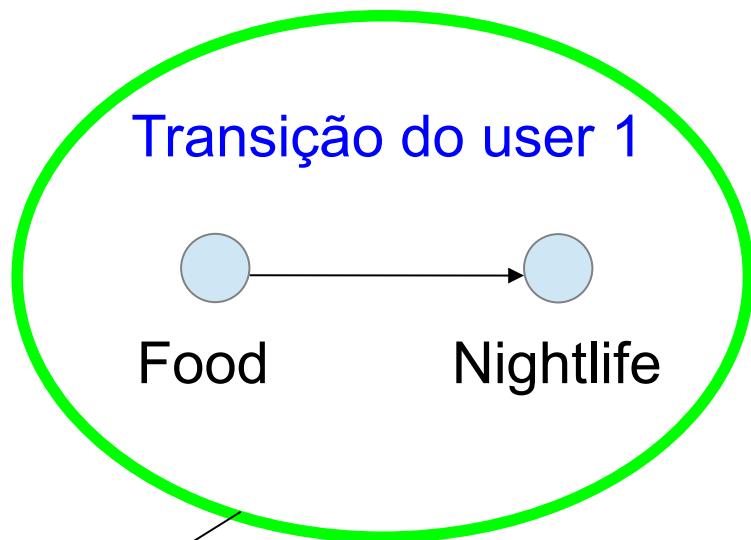


Jazz bar  
“Nightlife”

## Grafo de transição urbana:

User1  
Tempo 1  
  
Pizzaria  
“Food”

User1  
Tempo 2  
  
Jazz bar  
“Nightlife”

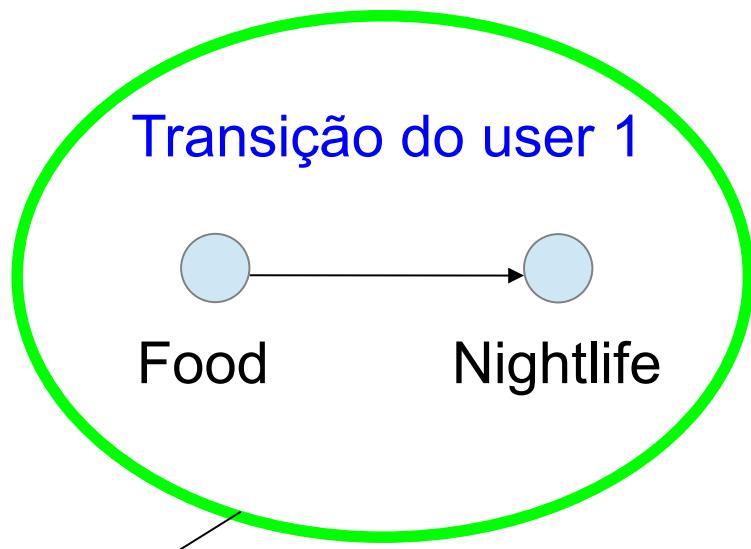


**Grafo de transição urbana  $G(V, E)$**   
Nós são as categorias de locais

## Grafo de transição urbana:

User1  
Tempo 1  
  
Pizzaria  
“Food”

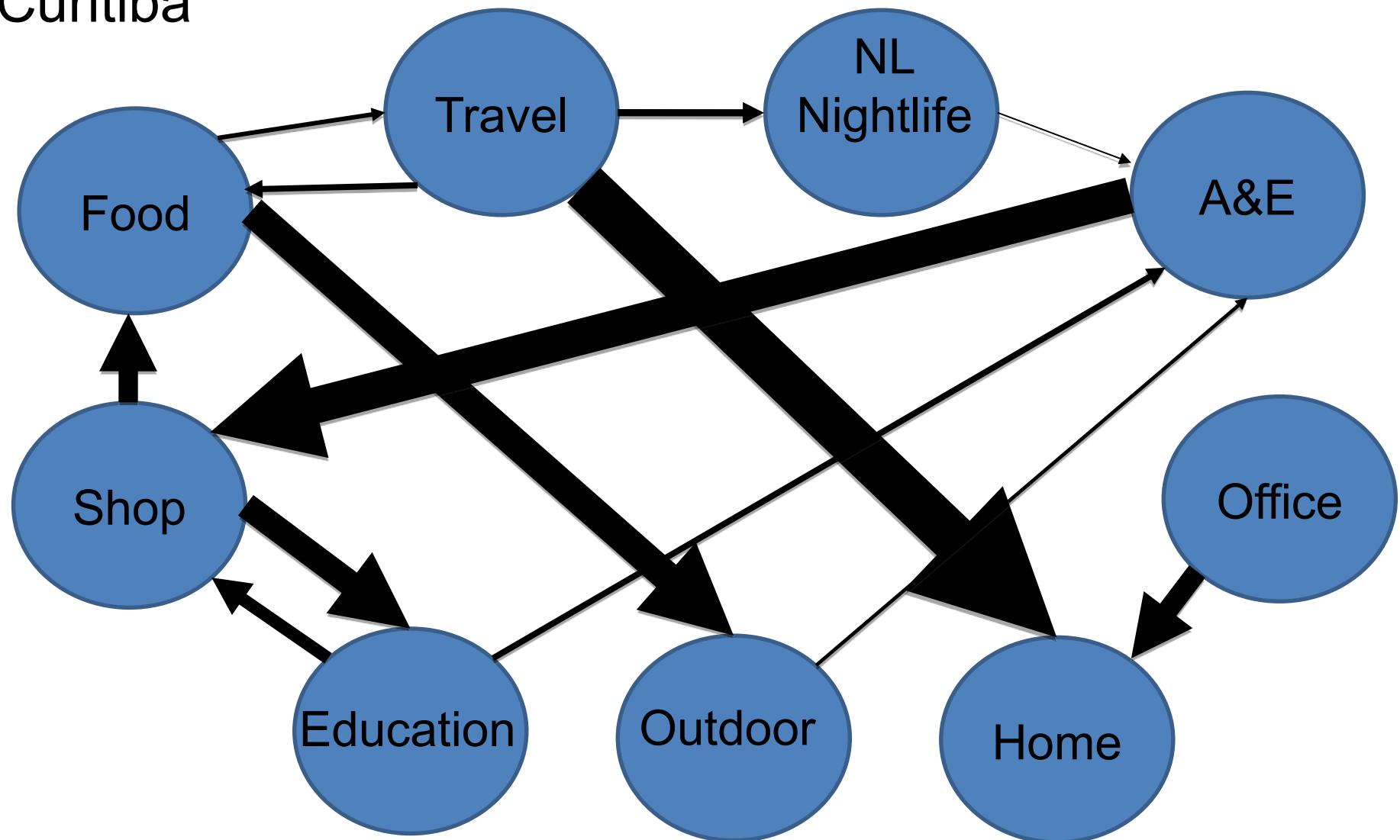
User1  
Tempo 2  
  
Jazz bar  
“Nightlife”



**Grafo de transição urbana  $G(V, E)$**   
Peso de uma aresta é o número total de  
ocorrências das transições

# Exemplo

Curitiba



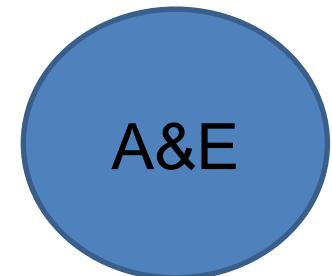
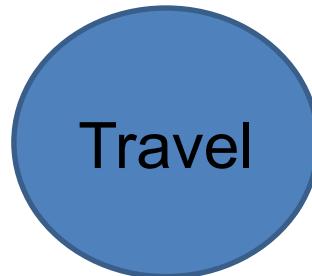
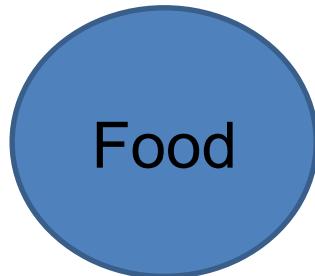
## Vários grafos aleatórios

Mesmo número de nós do grafo original  $G(V, E)$

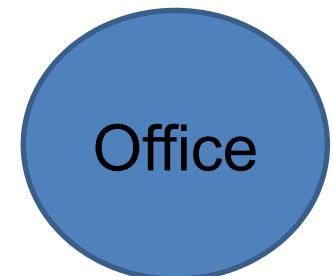
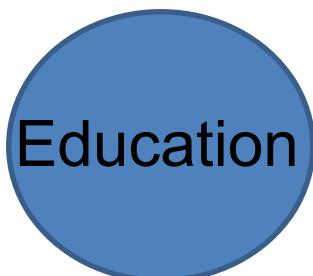
Ao invés de considerar a transição atual escolhemos uma aleatória

# Exemplo

Aleatório

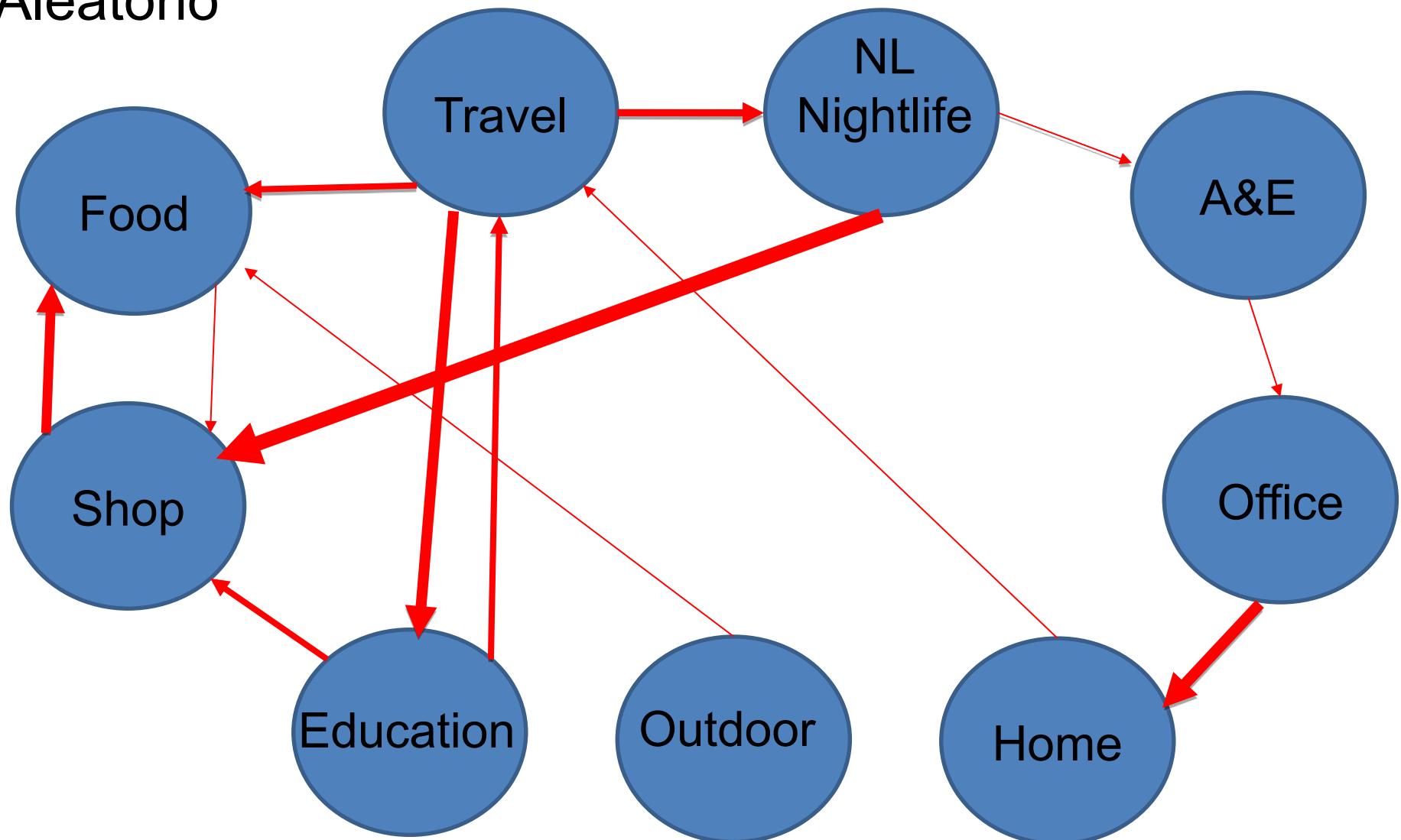


Escolha aleatória de arestas

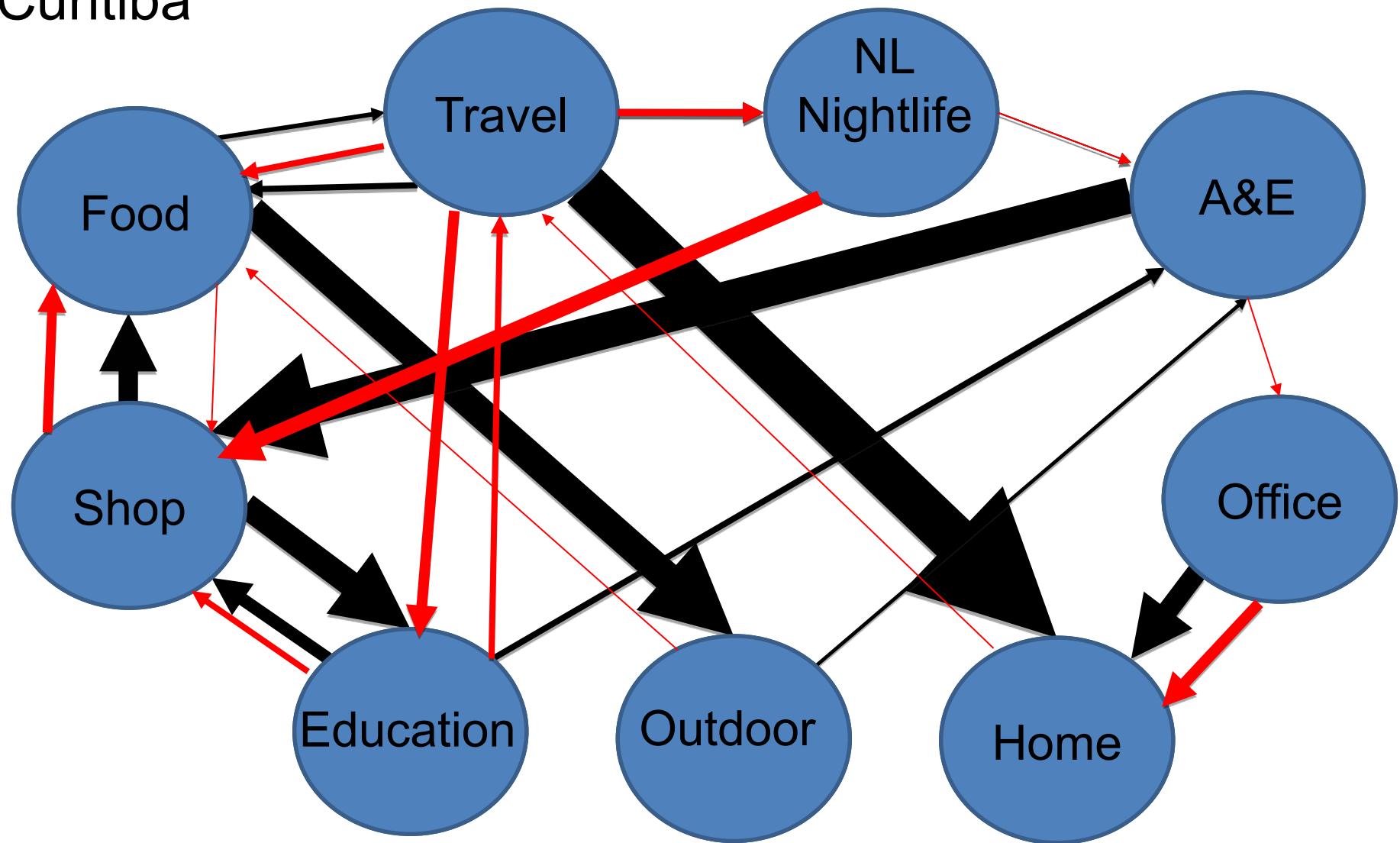


# Exemplo

# Aleatório

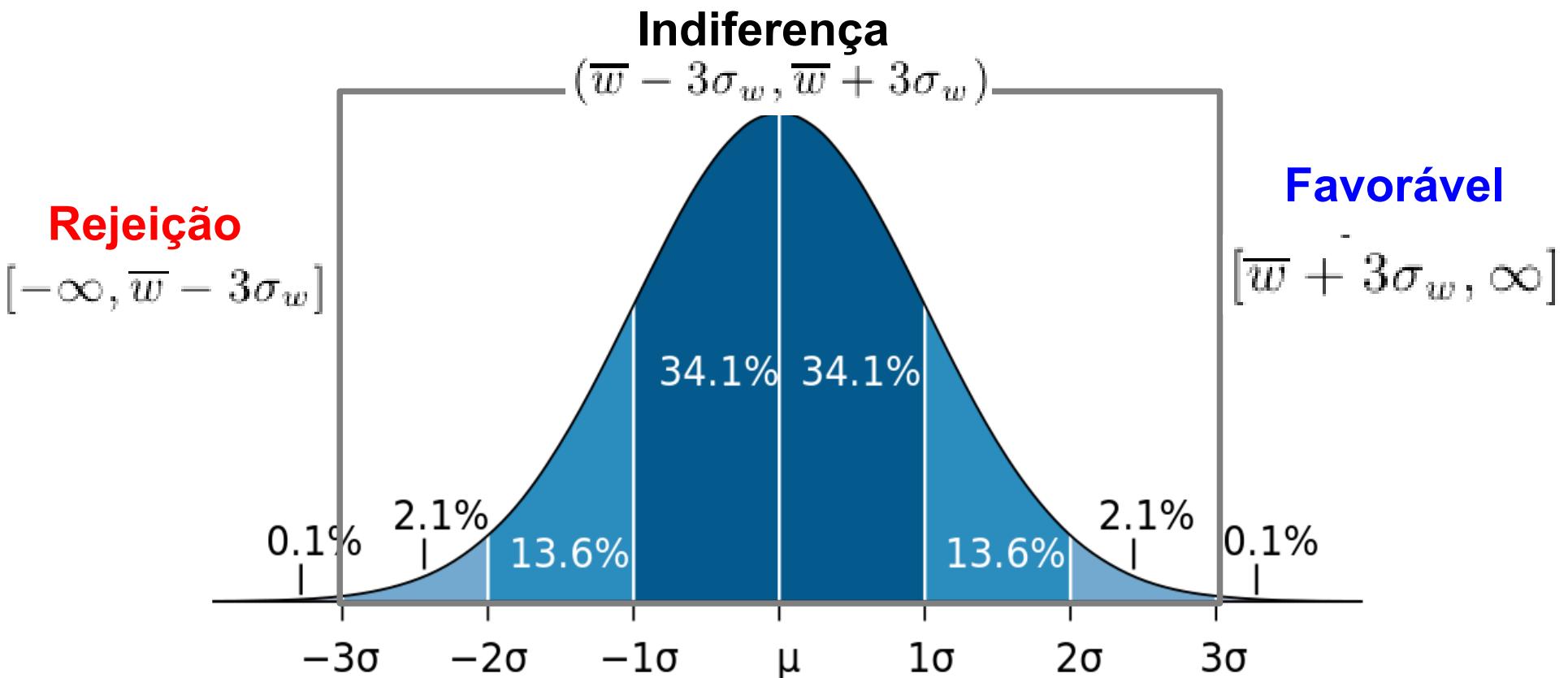


Curitiba

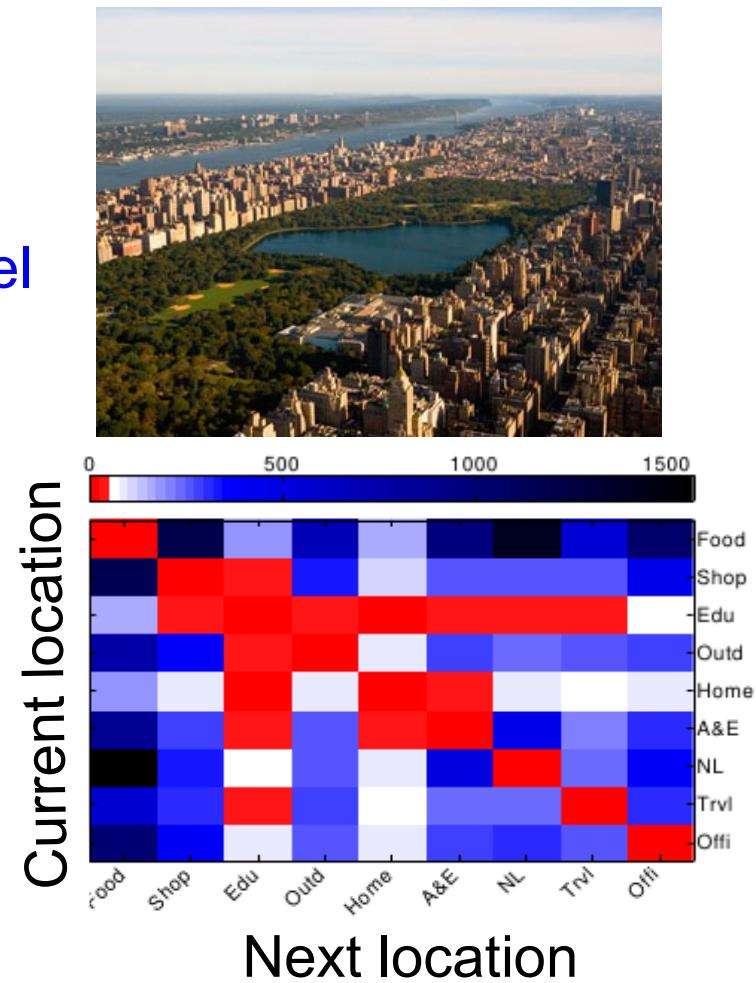
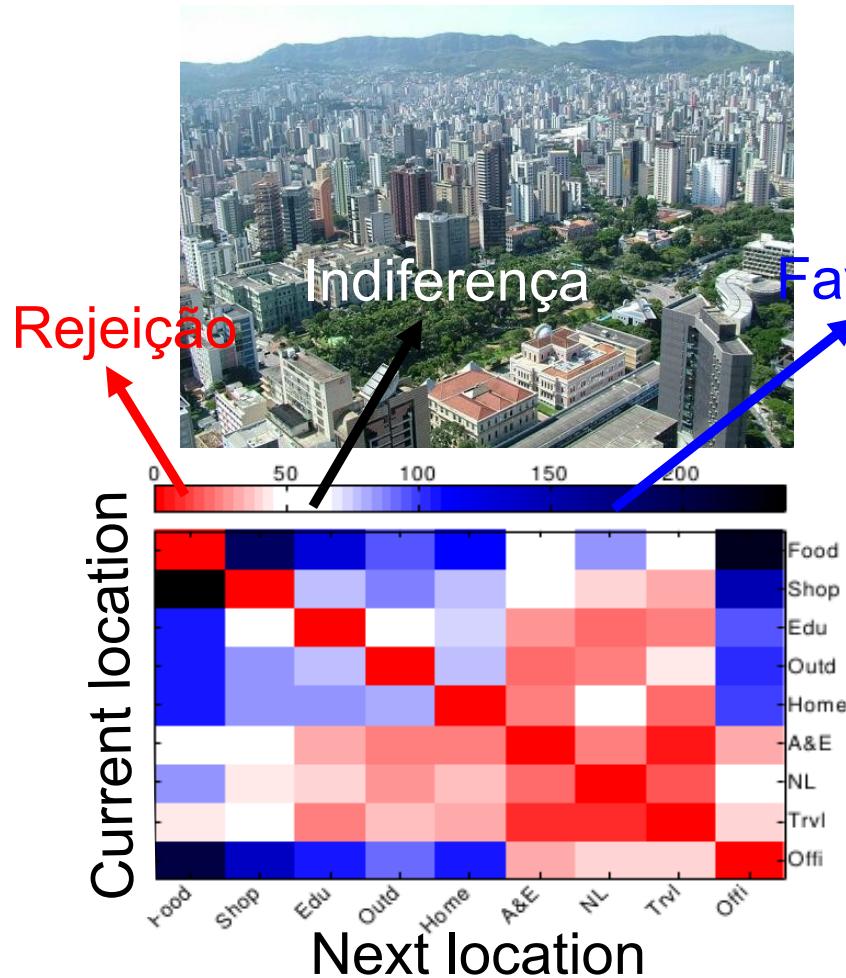


Distribuição dos pesos das arestas aleatórias -> normal  $N(\bar{w}, \sigma_w)$

Usar a média  $\bar{w}$  e desvio padrão  $\sigma_w$  da distribuição

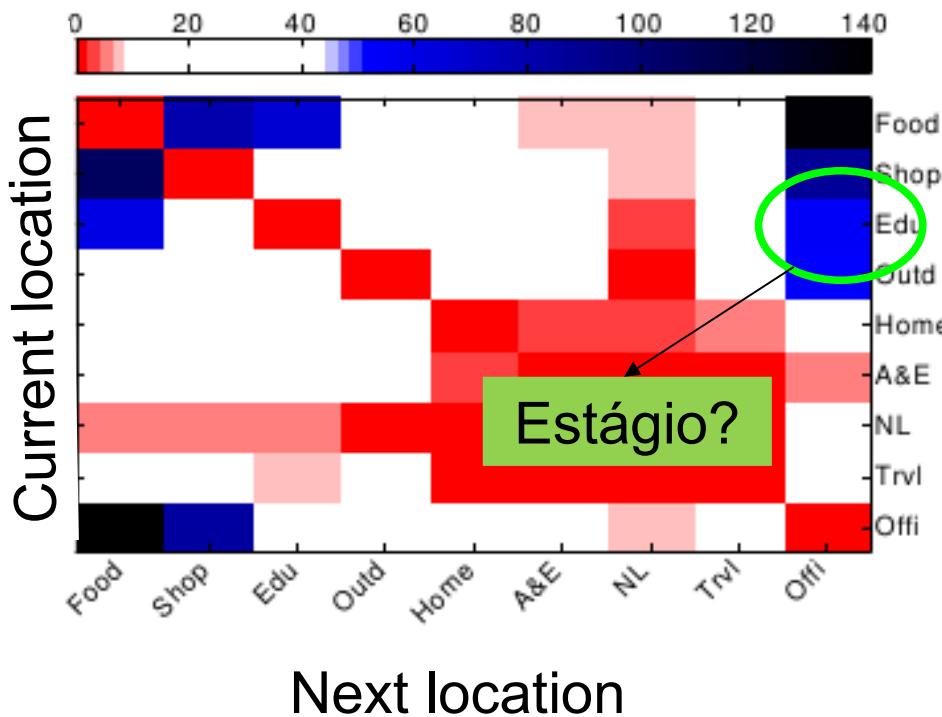


# Exemplo

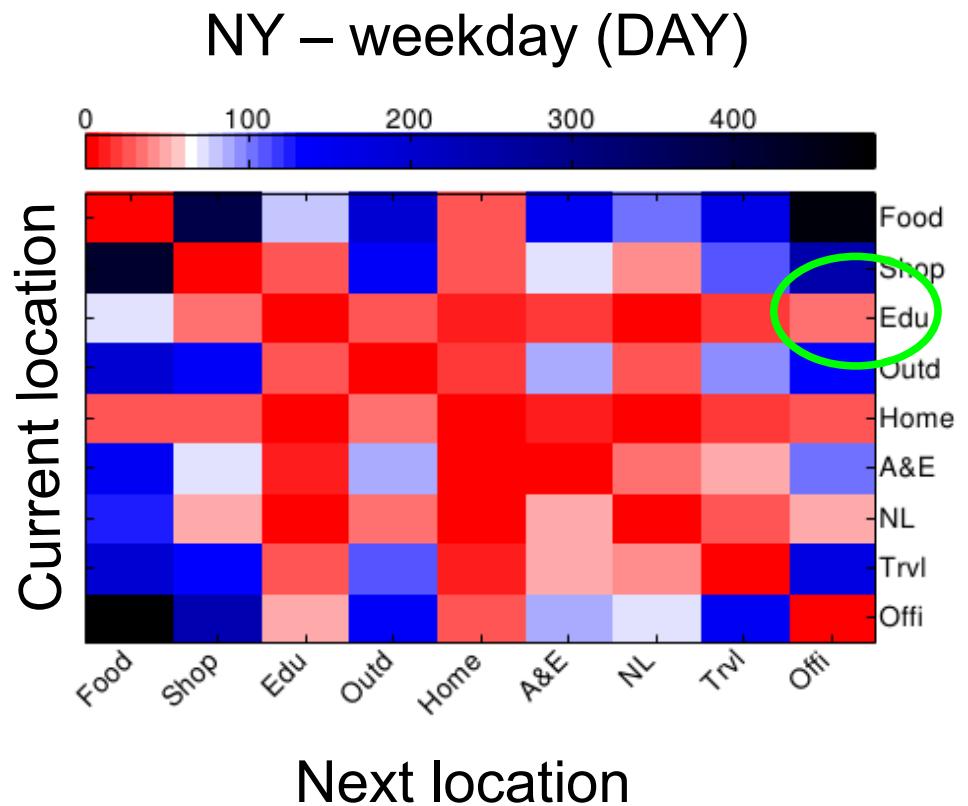


É possível diferenciar as rotinas dos habitantes

Belo Horizonte – weekday (DAY)



NY – weekday (DAY)

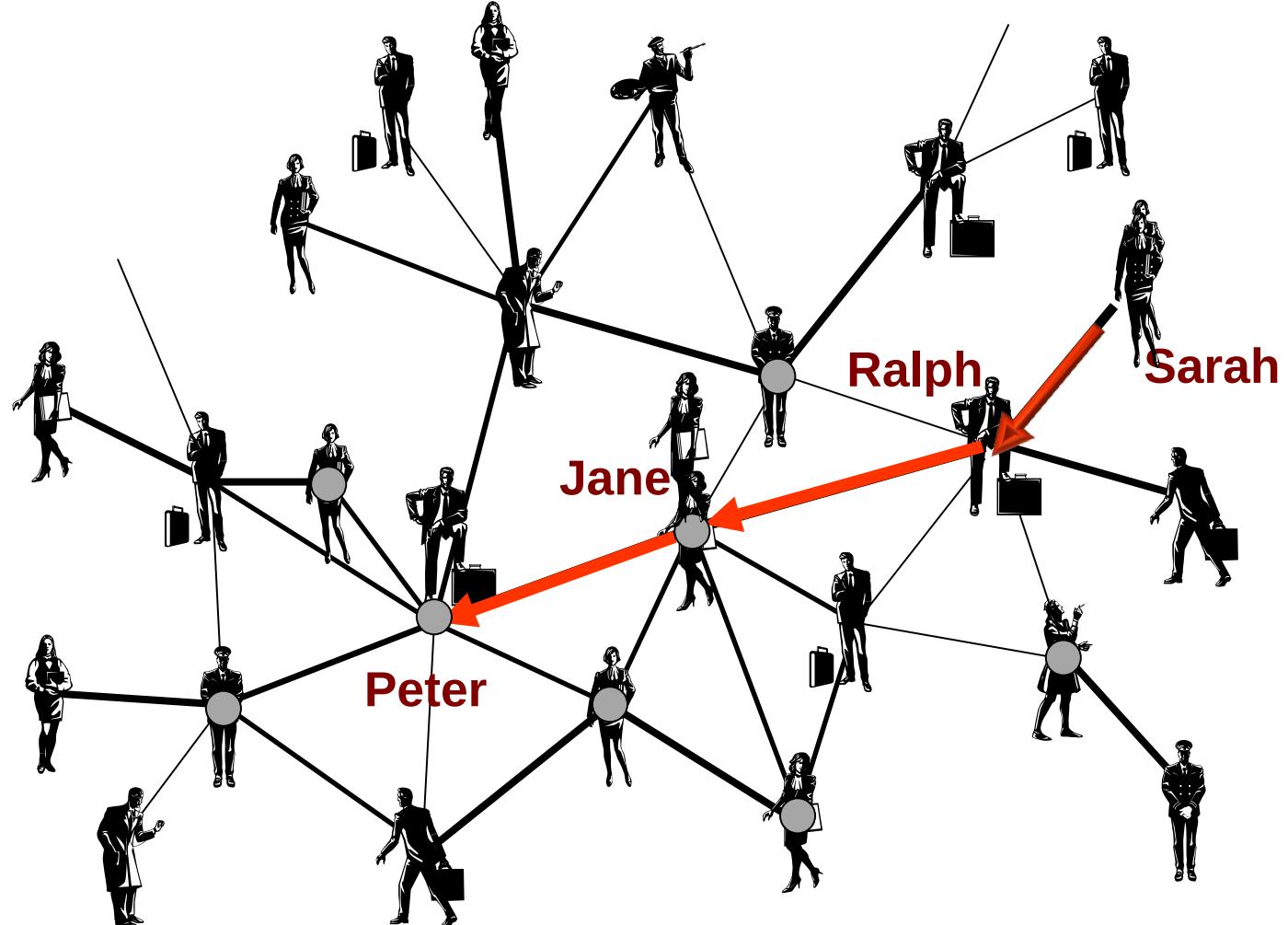


## Mundo pequeno (small-world)

## COMO PARTICIPAR NESTE ESTUDO

1. ADICIONE SEU NOME AO ROSTER NO FINAL DESTA FOLHA, para que a próxima pessoa que receber esta carta saiba de quem ela veio.
2. RETIRE UM CARTÃO. PREENCHA E DEVOLVA À HARVARD UNIVERSITY. Nenhum carimbo é necessário. O postal é muito importante. Ele nos permite acompanhar o andamento da pasta conforme ela se move em direção à pessoa-alvo.
3. SE VOCÊ CONHECE A PESSOA ALVO DE FORMA PESSOAL, ENVIE ESTA PASTA DIRETAMENTE PARA ELE (ELA). Faça isso apenas se você já conheceu a pessoa alvo e se conhece pelo primeiro nome.
4. SE VOCÊ NÃO CONHECE A PESSOA ALVO DE FORMA PESSOAL, NÃO TENTE ENTRAR EM CONTATO COM ELE DIRETAMENTE. EM VEZ, ENVIE ESTA PASTA (CARTÕES POSTAIS E TUDO) PARA UMA CONHECIMENTO PESSOAL QUE É MAIS PROVÁVEL DO QUE VOCÊ SABER A PESSOA ALVO. Você pode enviar a pasta para um amigo, parente ou conhecido, mas deve ser alguém que você conhece pelo primeiro nome.

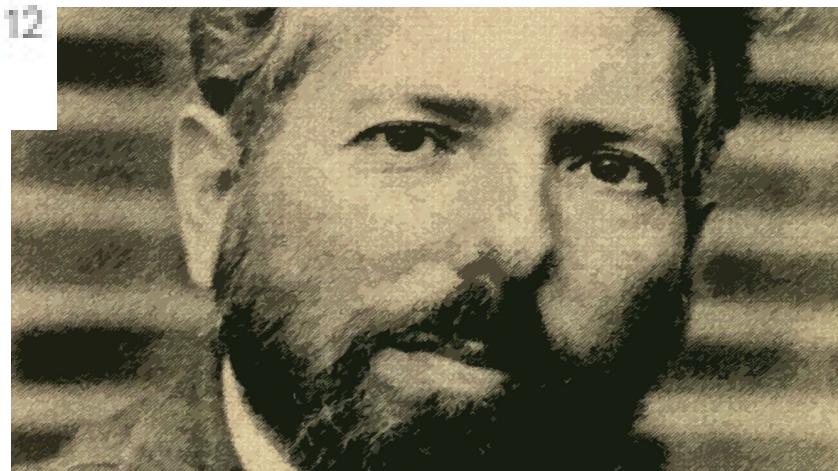
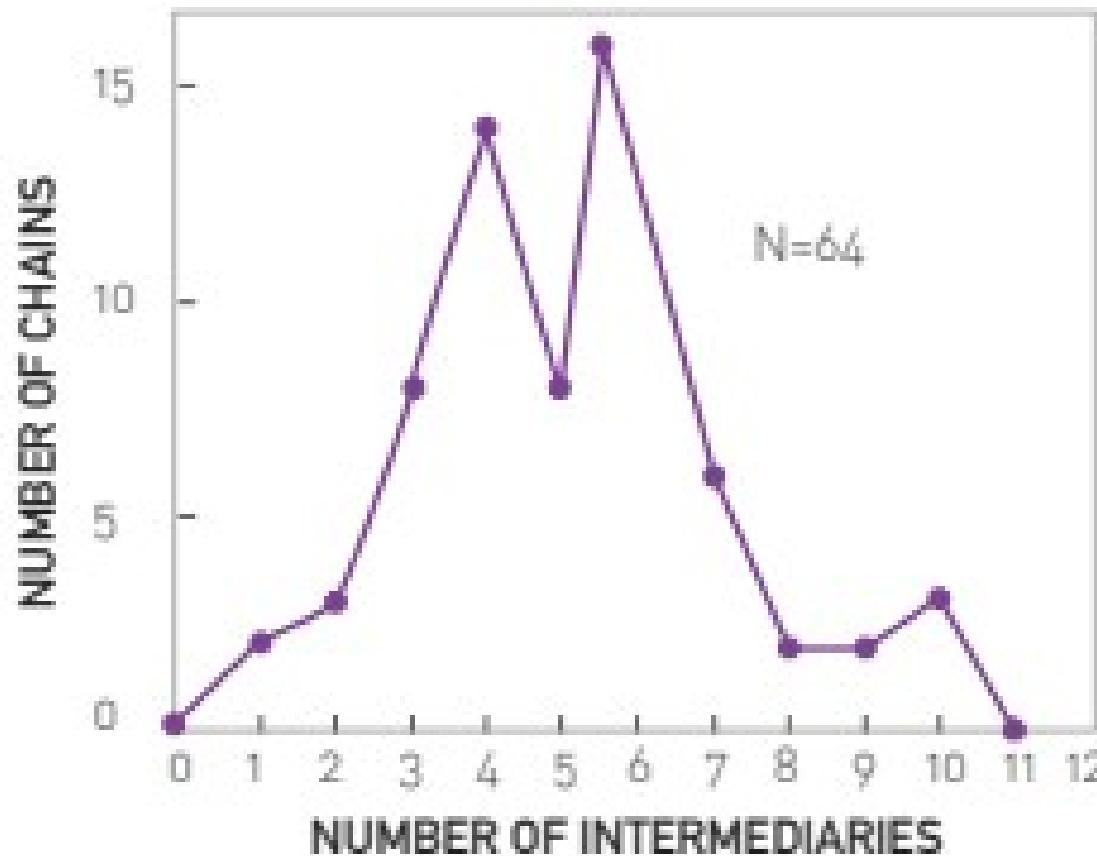




Frigyes Karinthy, 1929  
Stanley Milgram, 1967

# Mundo pequeno – 1967 Stanley Milgram

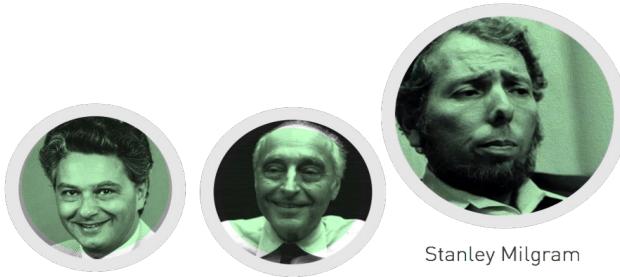
Fenômeno *small world*, também conhecido como *six degrees of separation*



# Por que o ‘mundo pequeno’ é surpreendente?

*“The worker knows the manager in the shop, who knows Ford; Ford is on friendly terms with the general director of Hearst Publications, who last year became good friends with Árpád Pásztor, someone I not only know, but to the best of my knowledge a good friend of mine.”*

Karinthy, 1929



Manfred Kochen      Ithiel de Sola Pool

Stanley Milgram

MILESTONES

PUBLICATION DATE

1929

1935

WWII

1945

1950

1958

1960

1967

1970

1978

1980

1985

XXI

1998

2000

2005

2011



**Frigyes Karinthy** (1887-1938)  
Hungarian writer, journalist and playwright, the first to describe the small world property. In his short story entitled 'Láncszemek' (Chains) he links a worker in Ford's factory to himself [23, 24].

**Manfred Kochen** (1928-1989),  
**Ithiel de Sola Pool** (1917-1984)  
Scientific interest in small worlds started with a paper by political scientist Ithiel de Sola Pool and mathematician Manfred Kochen. Written in 1958 and published in 1978, their work addressed in mathematical detail the small world effect, predicting that most individuals can be connected via two to three acquaintances. Their paper inspired the experiments of Stanley Milgram.

**Stanley Milgram** (1933-1984)  
American social psychologist who carried out the first experiment testing the small-world phenomena. (BOX 3.6).

**John Guare** (1938)  
The phrase 'six degrees of separation' was introduced by the playwright John Guare, who used it as the title of his Broadway play.

**Duncan J. Watts** (1971),  
**Steven Strogatz** (1959)  
A new wave of interest in small worlds followed the study of Watts and Strogatz, finding that the small world property applies to natural and technological networks as well.

*“Everybody on this planet is separated by only six other people. Six degrees of separation. Between us and everybody else on this planet. The president of the United States. A gondolier in Venice. It’s not just the big names. It’s anyone. A native in a rain forest. A Tierra del Fuegan. An Eskimo. I am bound to everyone on this planet by a trail of six people. It’s a profound thought. How every person is a new door, opening up into other worlds.”*

Guare, 1991



4-DEGREE OF SEPARATION

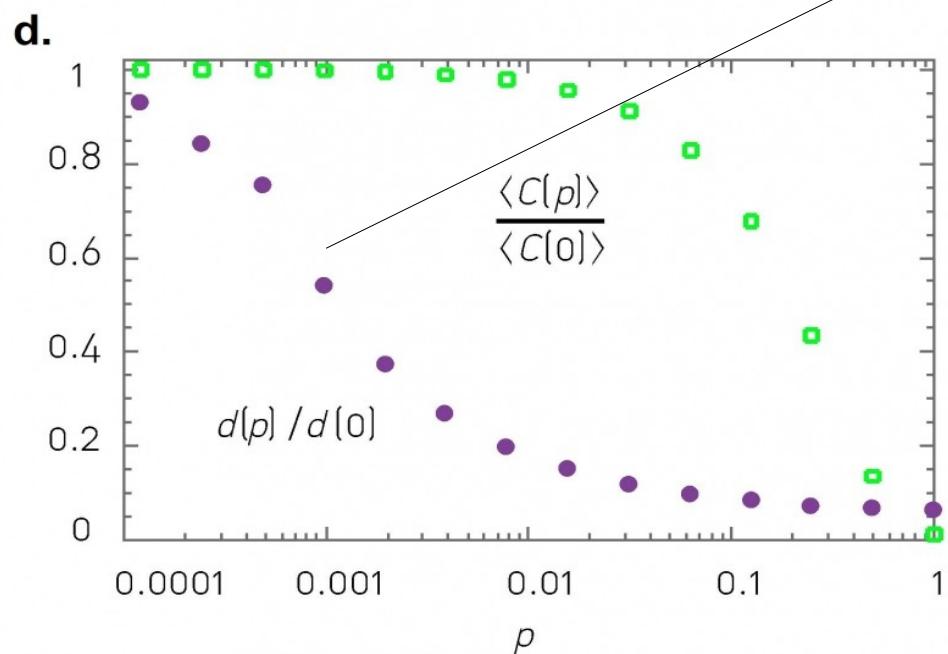
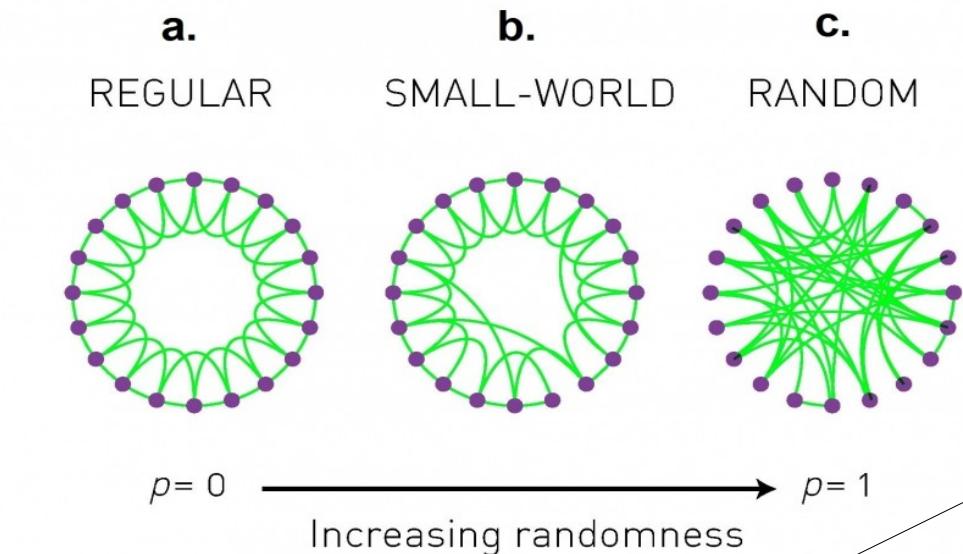
John Guare

Duncan J. Watts

Steven Strogatz



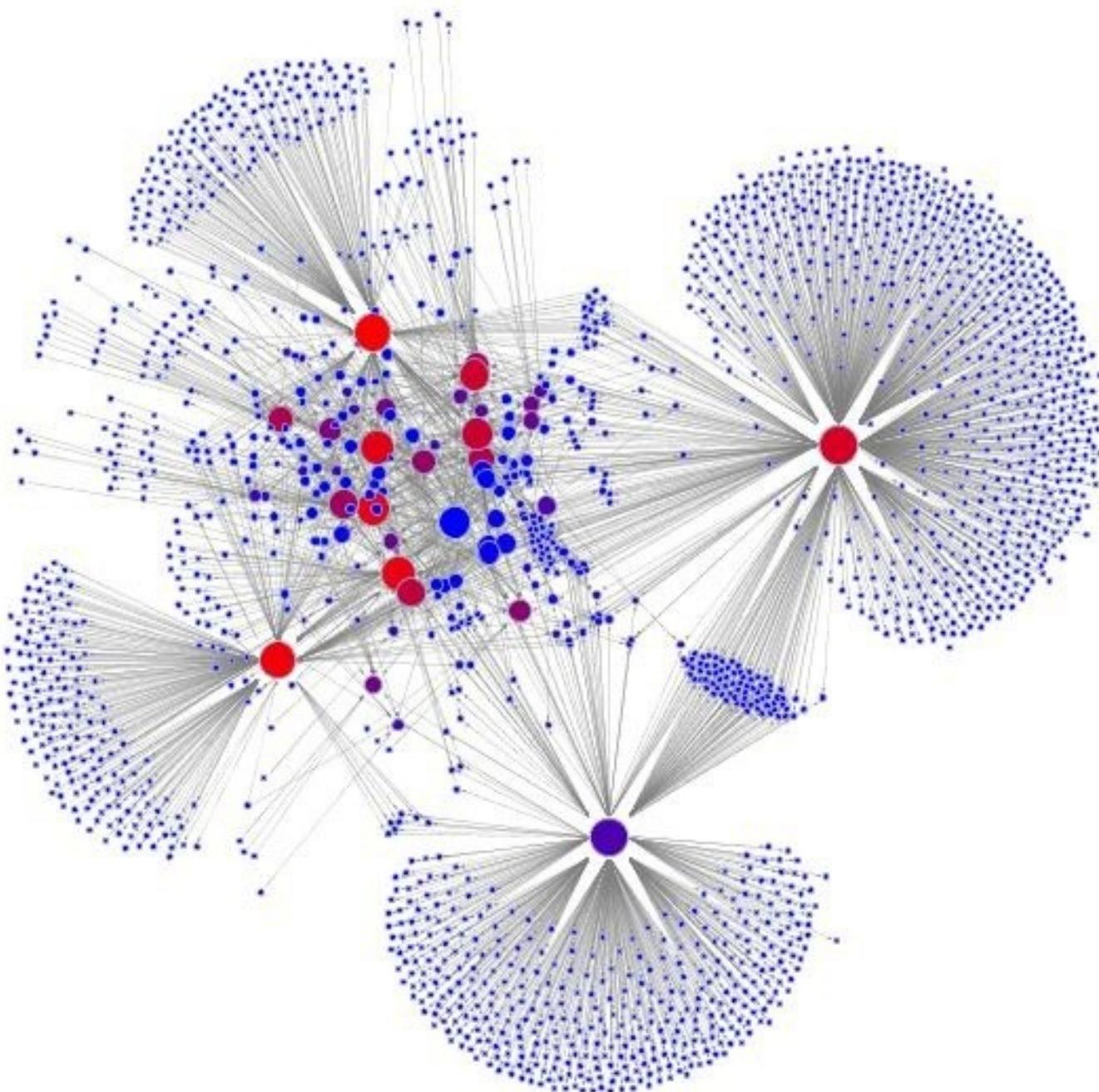
# Modelo Watts-Strogatz



O rápido decrescimento de  $d(p)$  e o  $C(p)$  praticamente constante indica a ocorrência do *small world phenomenon*

Também chamado de *small world model*

## Ligações preferenciais (scale-free)

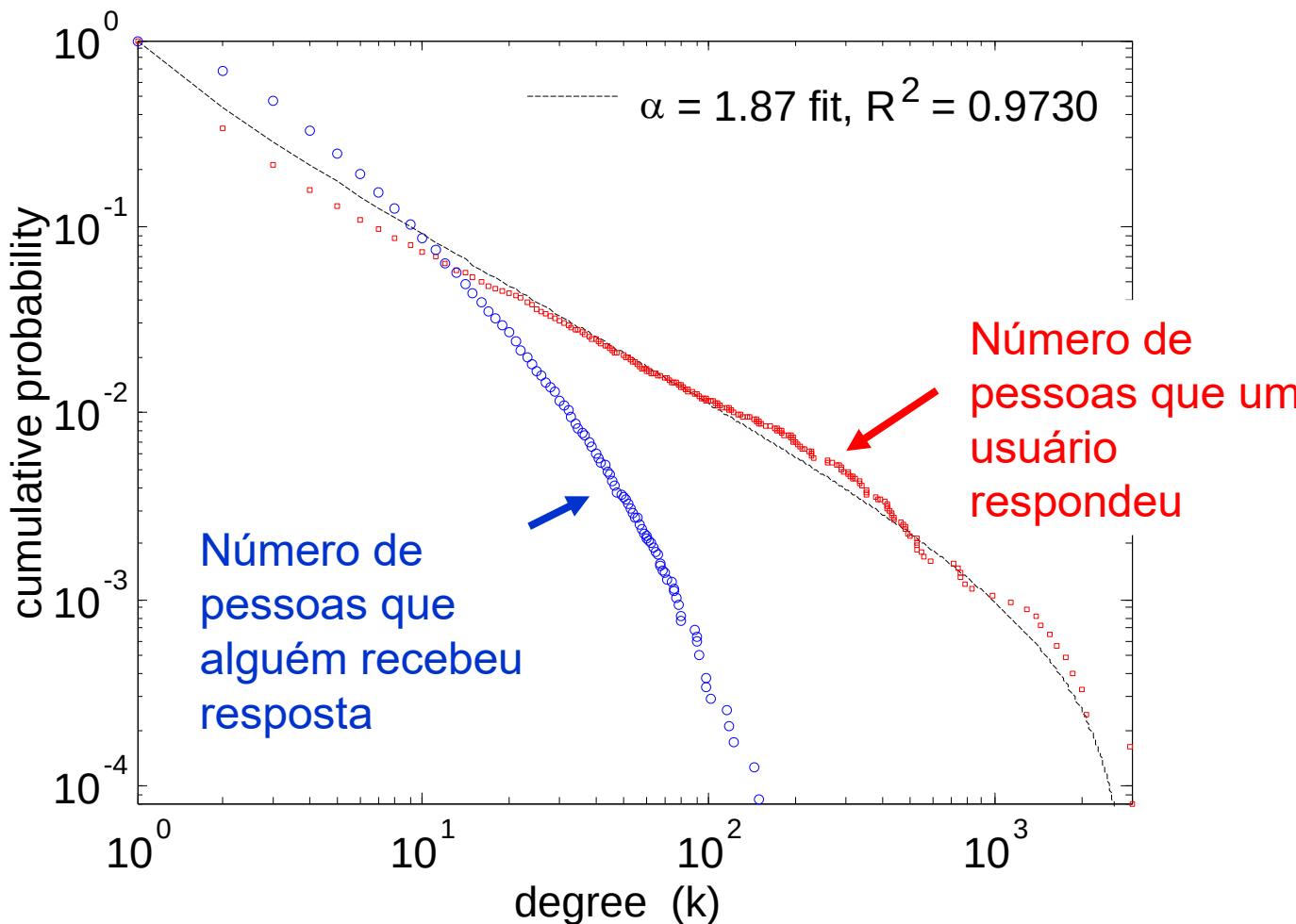


Aresta se respondeu  
uma pergunta ou  
postou uma pergunta e  
recebeu uma resposta

Quem responde =  
vermelho

Quem pergunta = azul

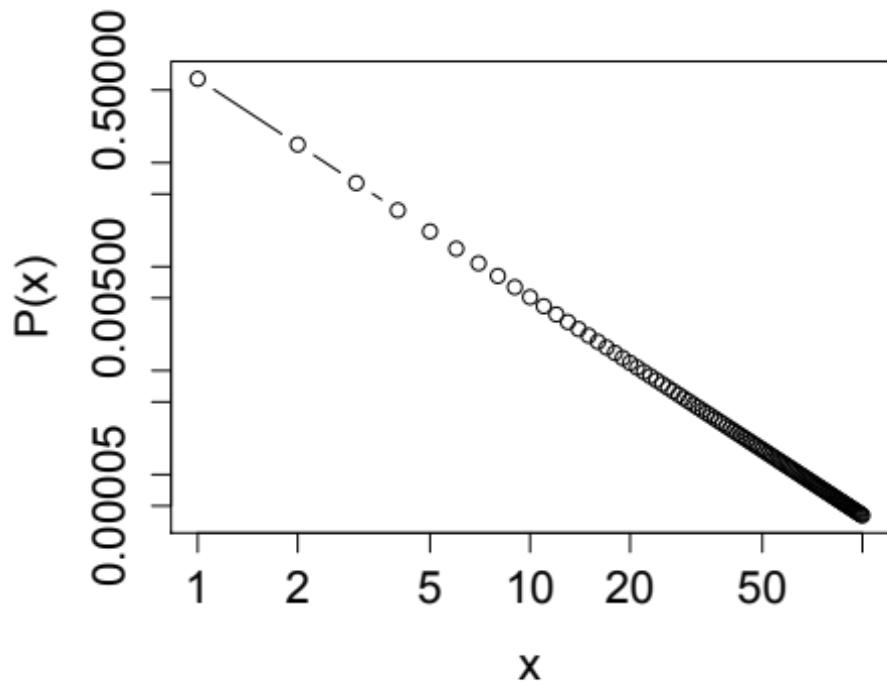
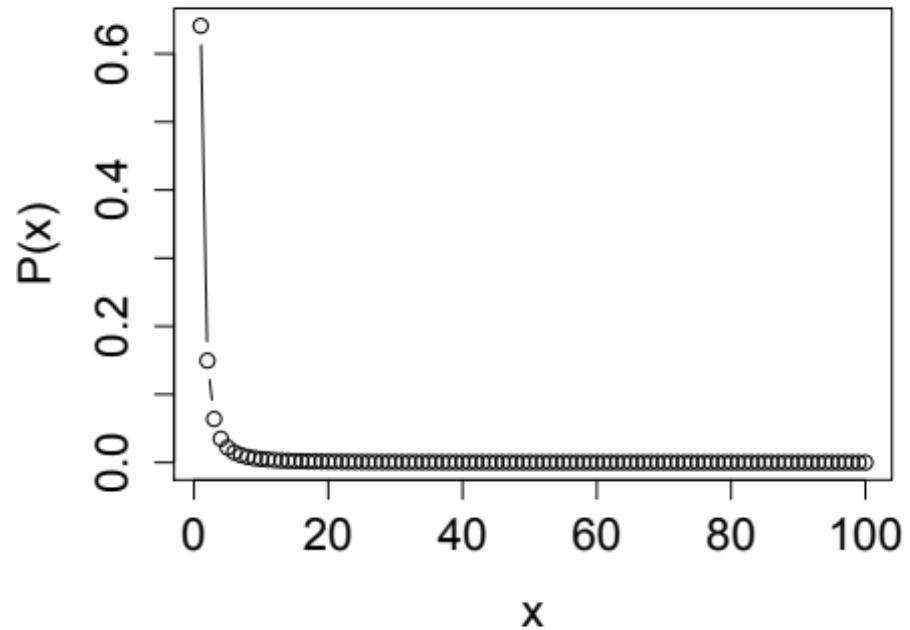
# Participação desbalanceada



'Pessoas que respondem' pode responder a milhares de outras pessoas

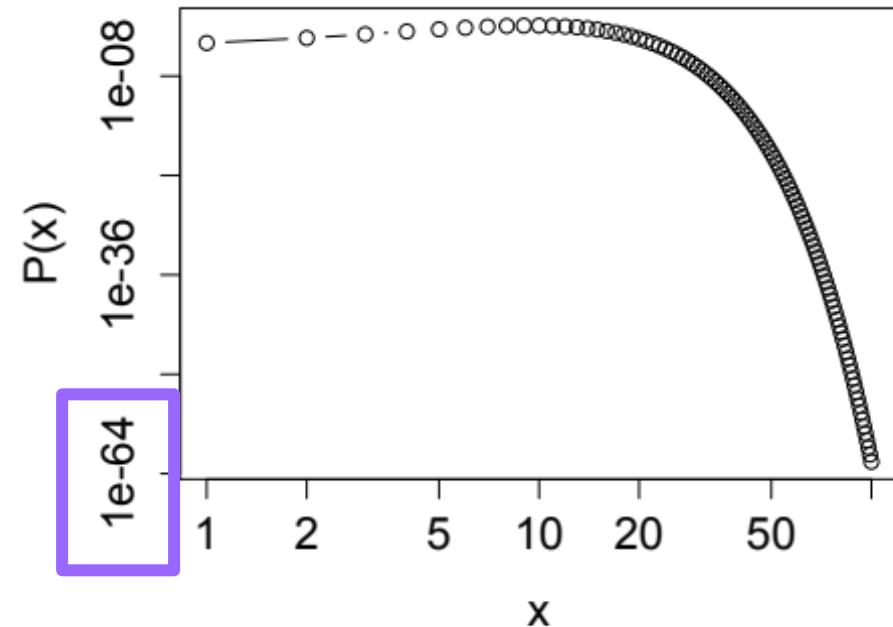
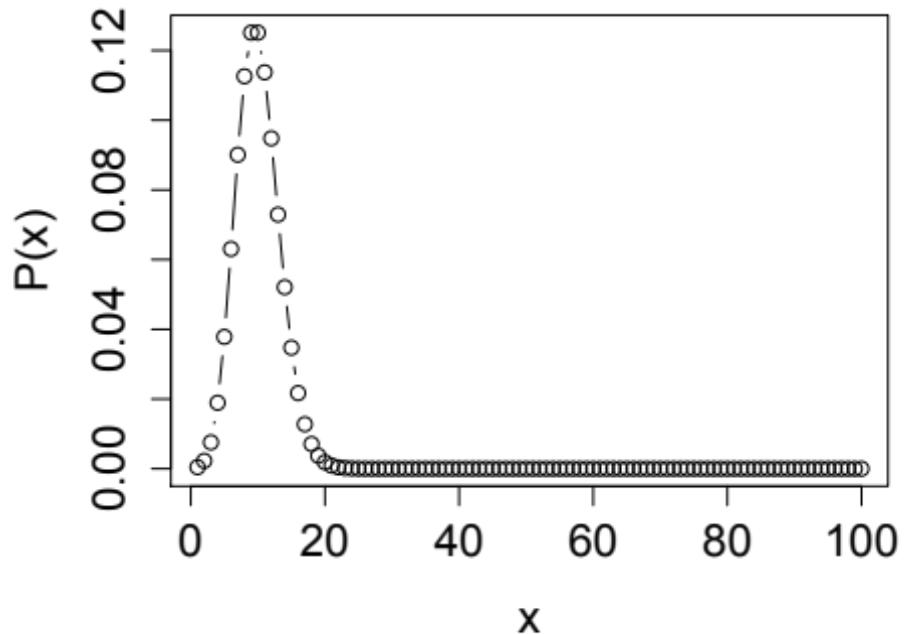
"Pessoas que perguntam" também são desiguais no número de respondentes às suas postagens, mas em menor grau

# Distribuição power-law



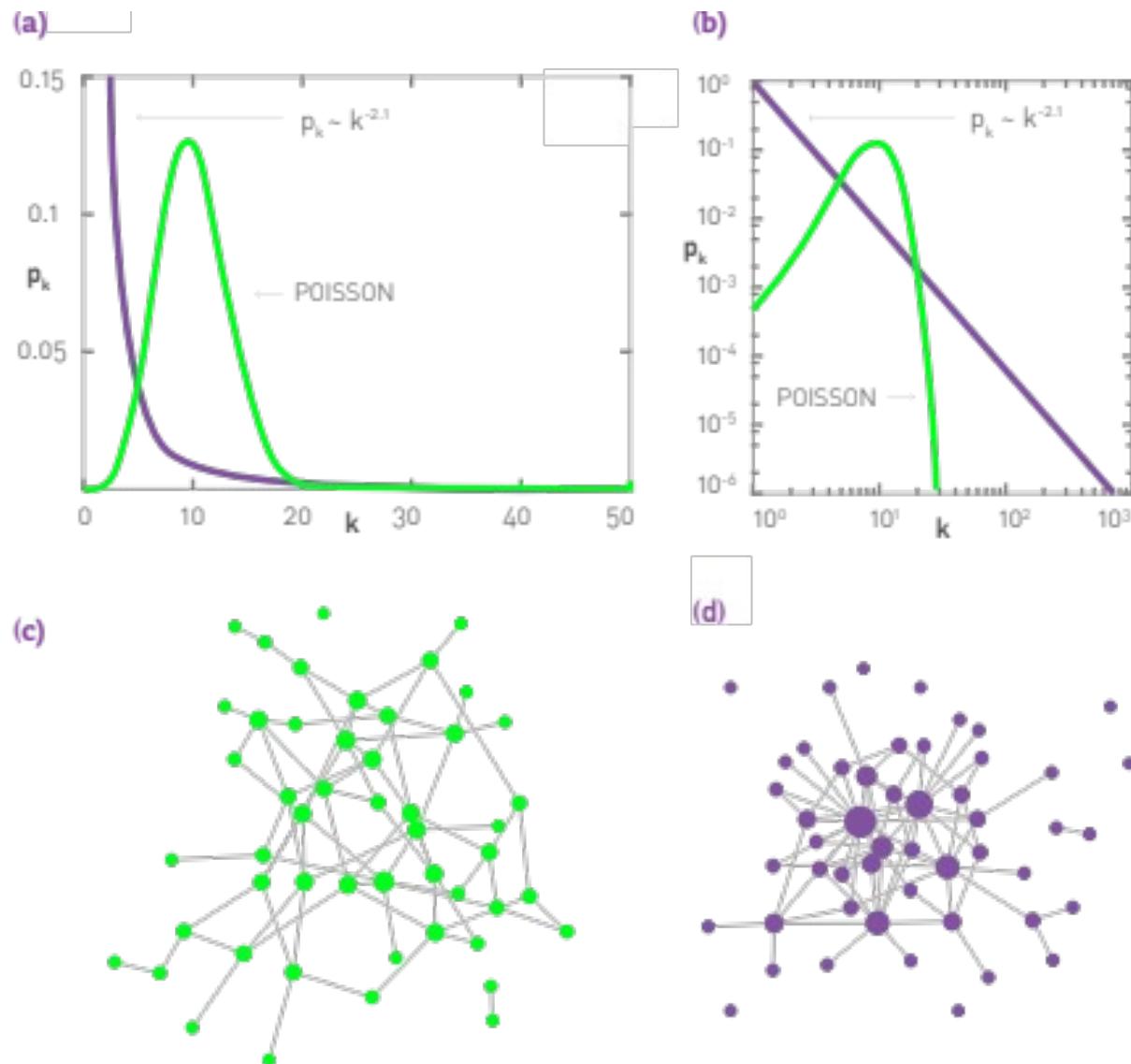
Alta inclinação (assimetria)  
Linha reta em um gráfico log-log

# Distribuição Poisson

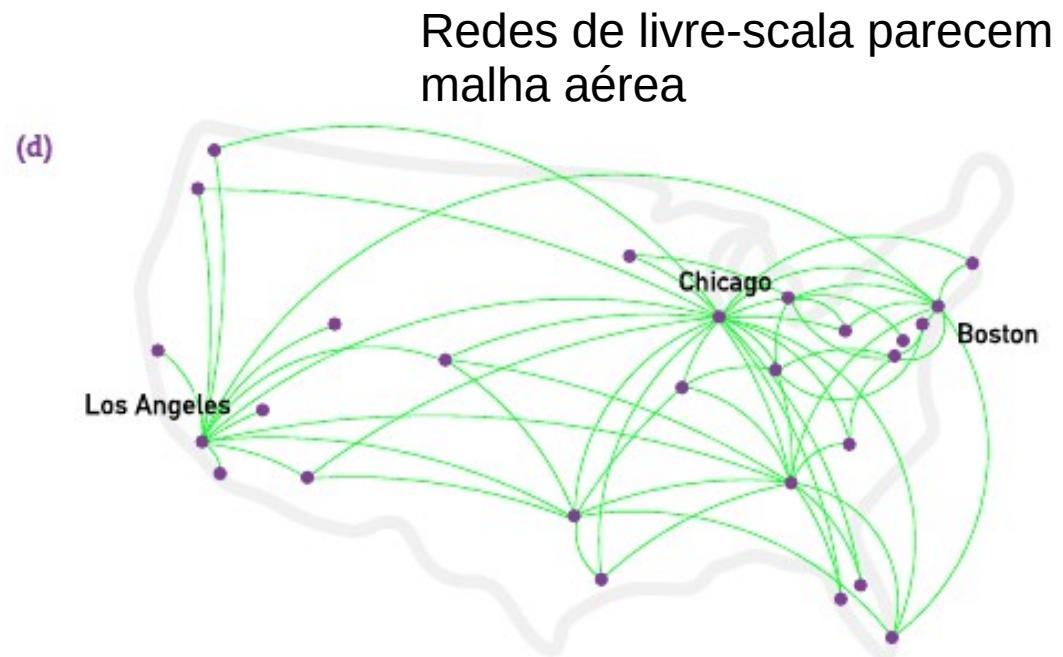
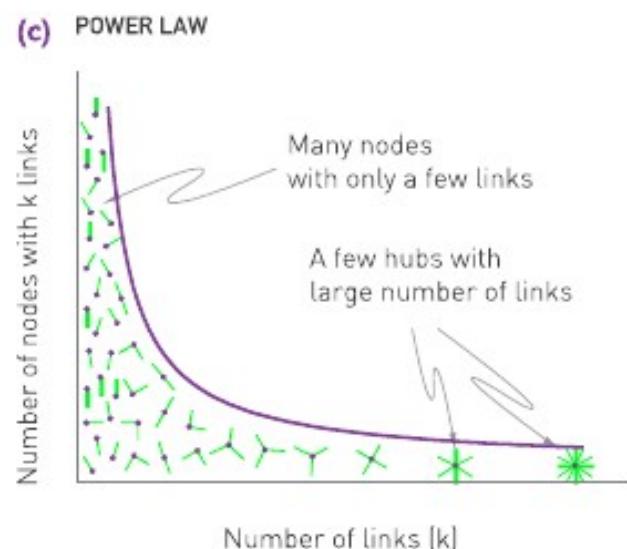
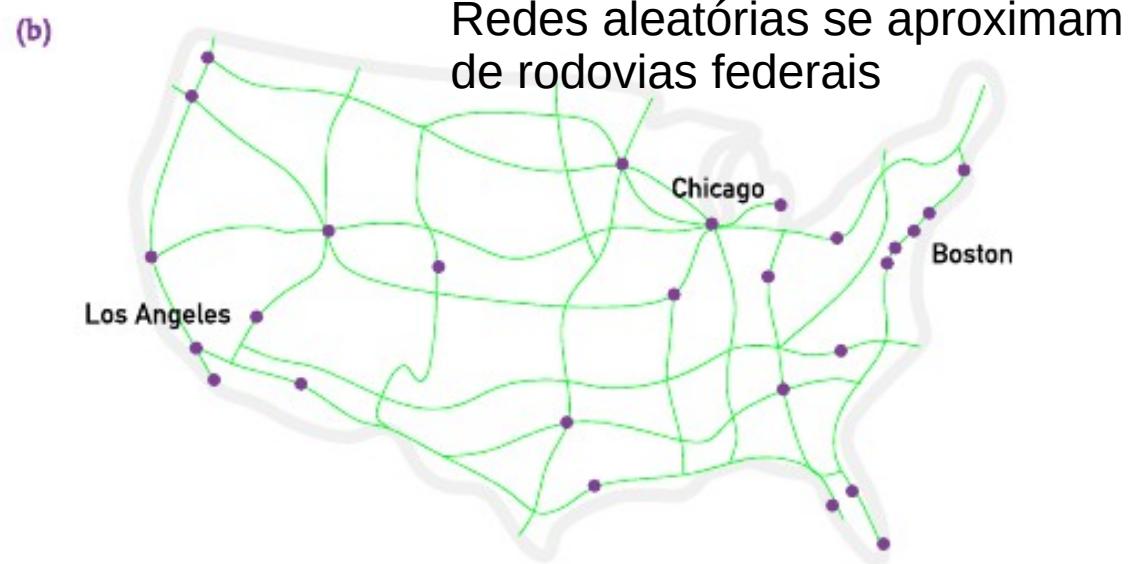
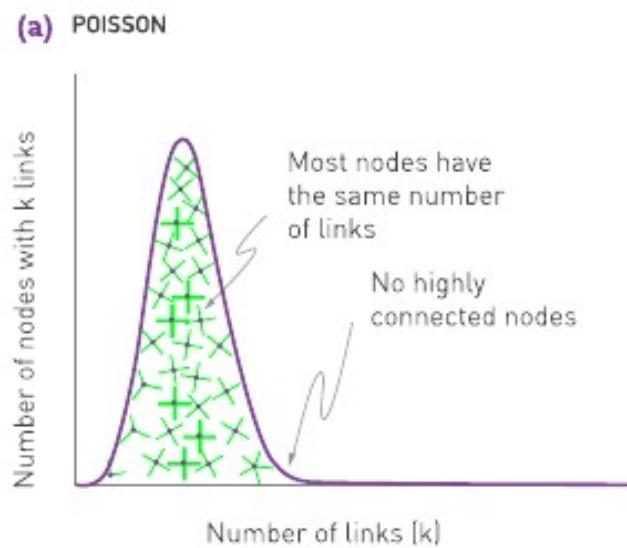


Pequena inclinação (assimetria)  
Curvado em um gráfico log-log

# Distribuição poisson vs power-law



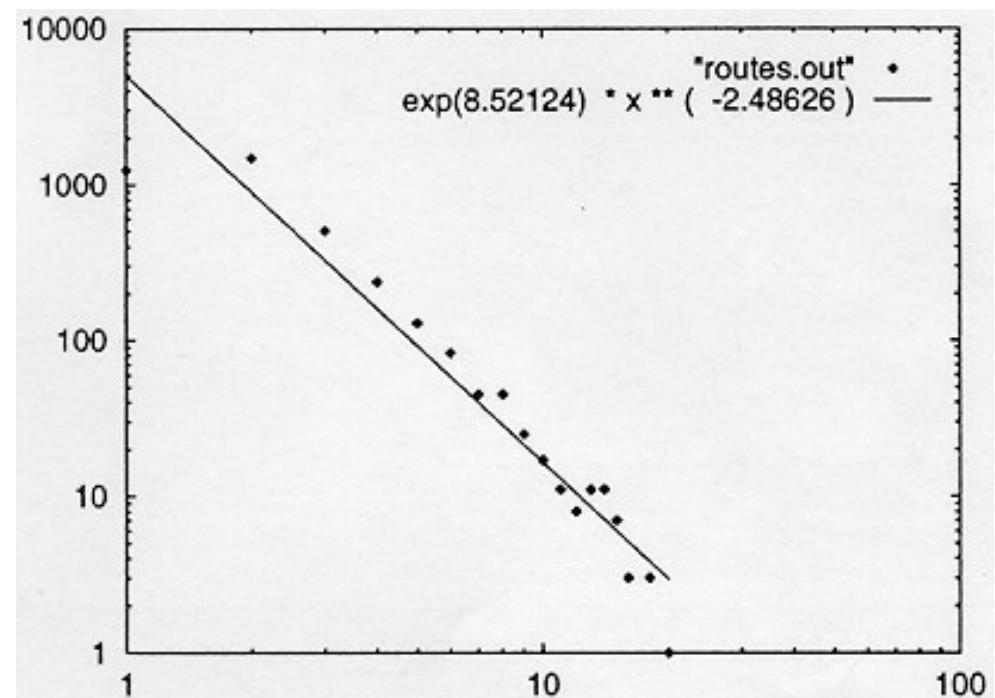
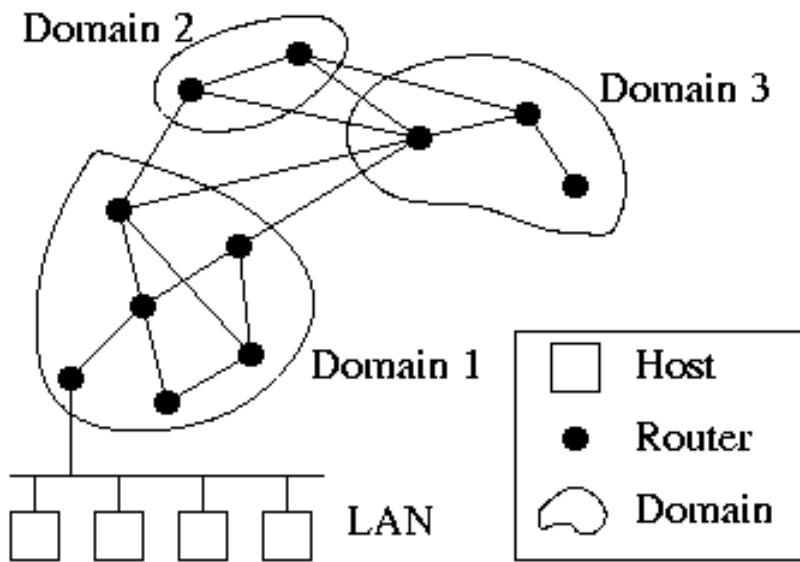
# Distribuição poisson vs power-law



# Power-law em várias redes

**Nodes**: computers, routers

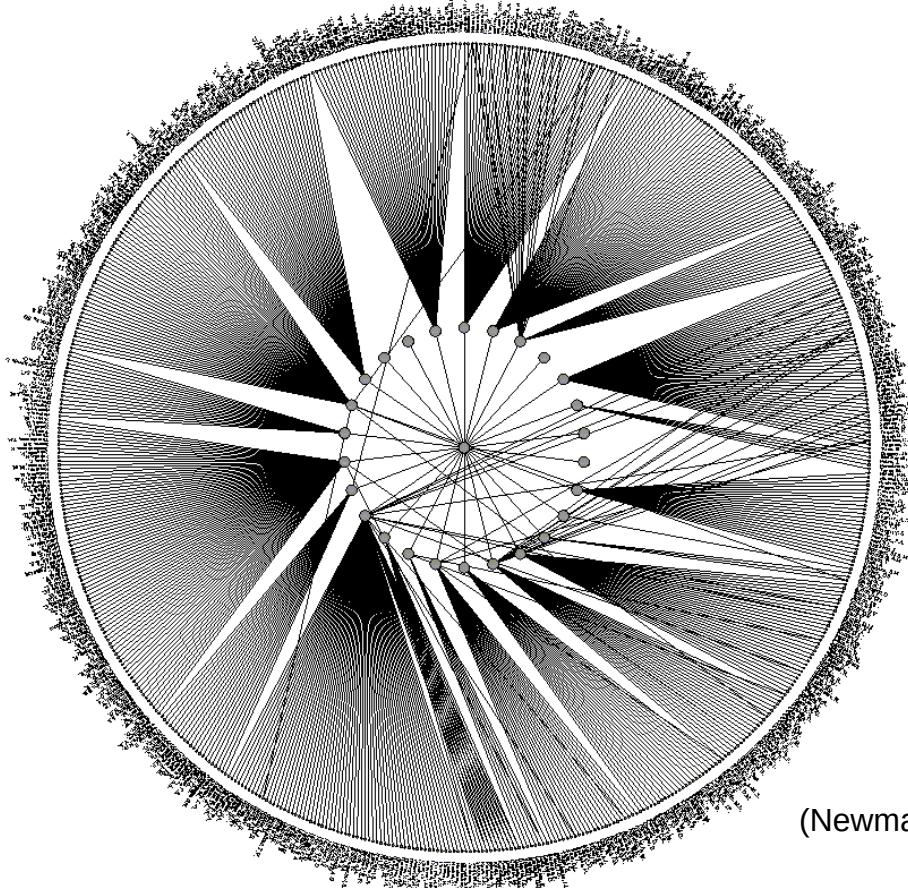
**Links**: physical lines



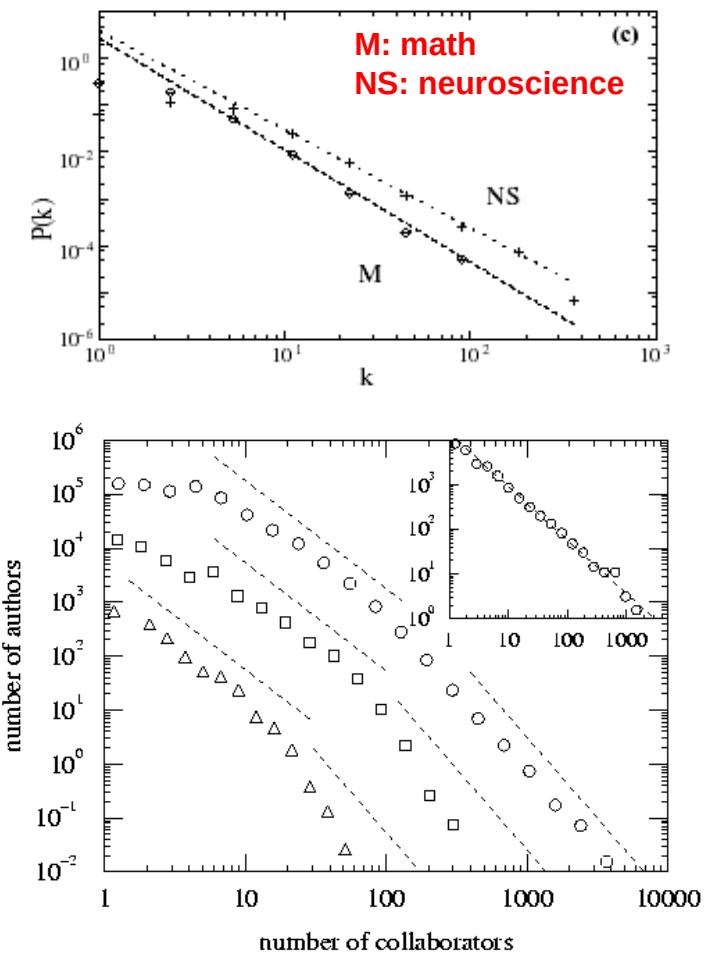
(Faloutsos, Faloutsos and Faloutsos, 1999)

# Coautoria científica

**Nodes:** scientist (authors)  
**Links:** joint publication



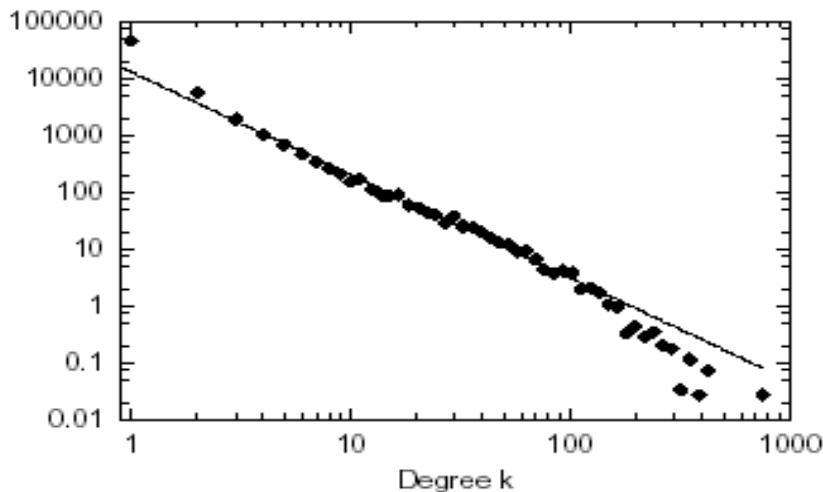
(Newman, 2000, Barabasi et al 2001)



# Comunidades online

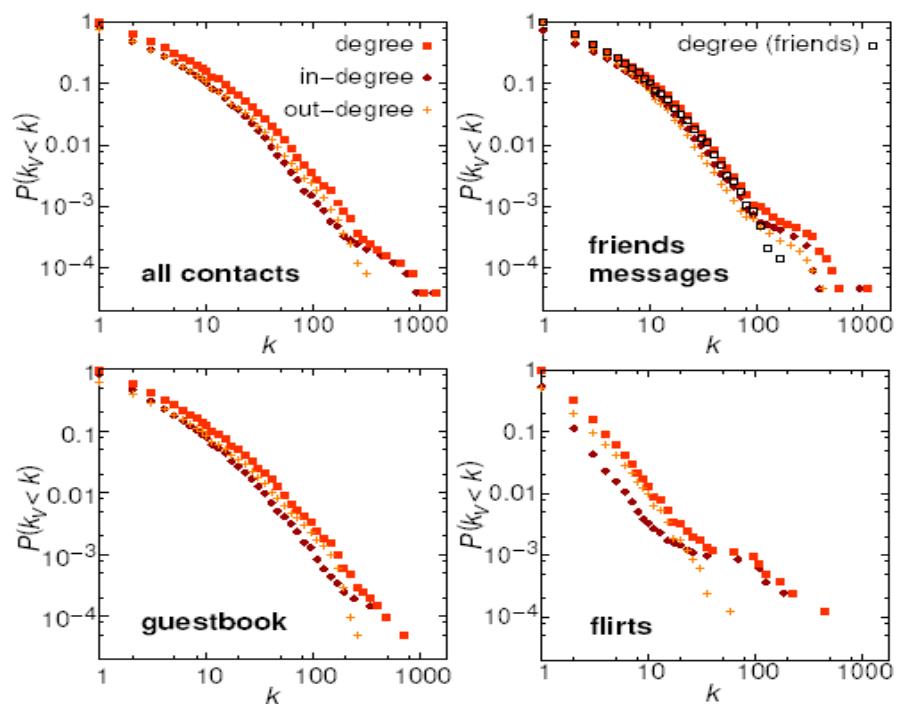
**Nodes:** online user  
**Links:** email contact

Kiel University log files  
112 days, N=59,912 nodes



Ebel, Mielsch, Bornholdtz, PRE 2002.

Pussokram.com online community;  
512 days, 25,000 users.



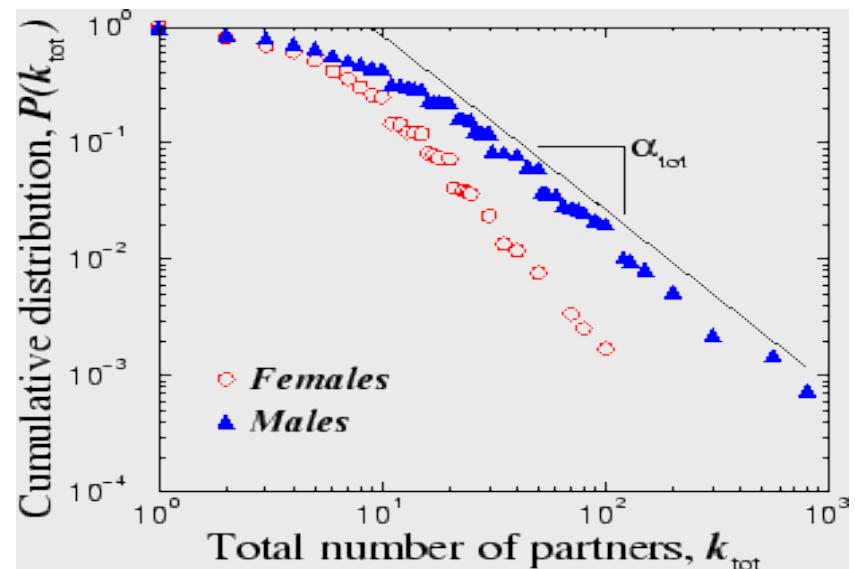
Holme, Edling, Liljeros, 2002.

# Rede de parceiros sexuais



**Nodes:** people (Females; Males)

**Links:** sexual relationships

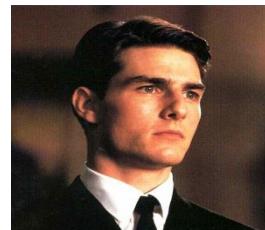


4781 Swedes; 18-74;  
59% response rate.

Liljeros et al. Nature 2001

# Rede de atores

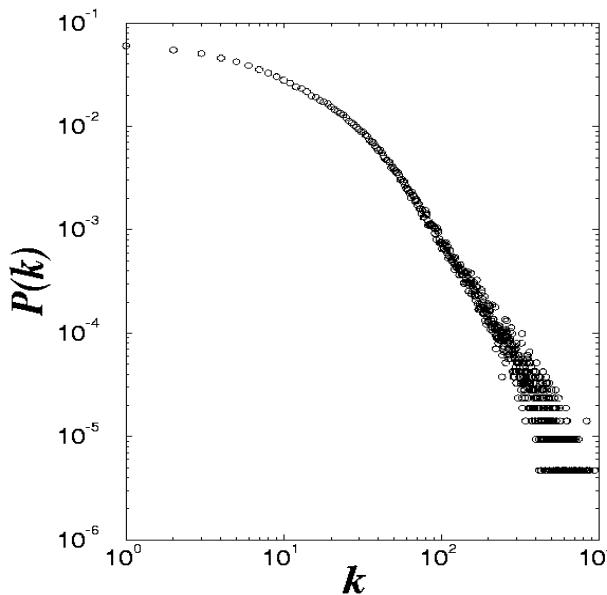
**Nodes:** actors  
**Links:** cast jointly



*Days of Thunder* (1990)  
*Far and Away* (1992)  
*Eyes Wide Shut* (1999)



$N = 212,250$  actors



Linha reta na escala log-log

$$\ln(p(k)) = c - \alpha \ln(k)$$

Exponencie ambos os lados para obter que  $p(k)$ , a probabilidade de observar um nó de grau 'k':

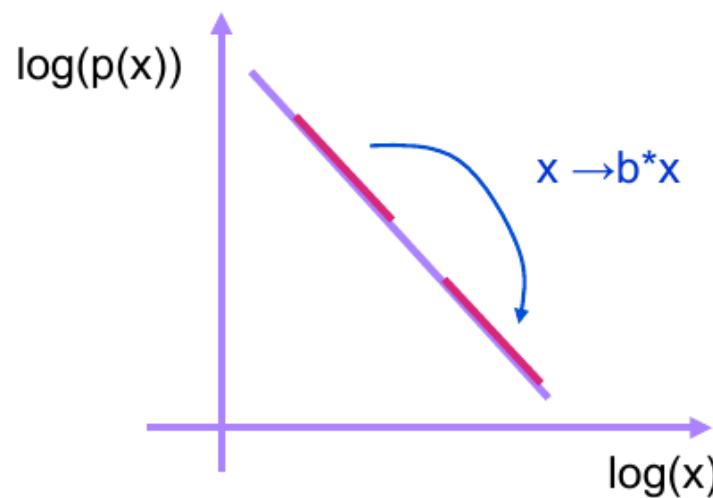
$$p(k) = C k^{-\alpha}$$

constante de normalização  
(probabilidades para todos  
os  $k$  devem somar 1)

Expoente de power law  $\alpha$

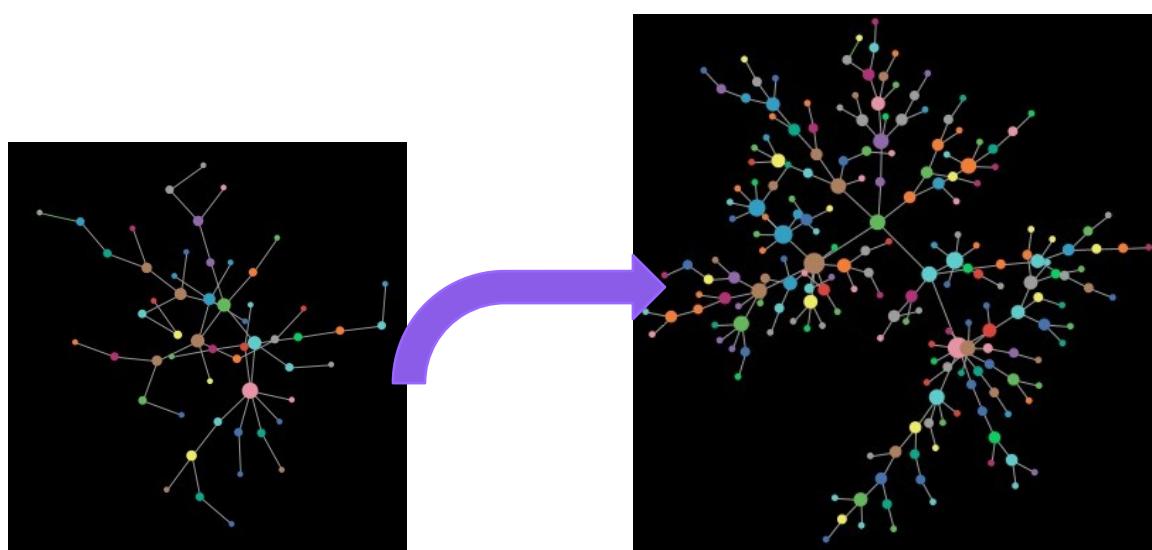
## What does it mean to be scale free?

- A power law looks the same no mater what scale we look at it on (2 to 50 or 200 to 5000)
- Only true of a power-law distribution!
- $p(bx) = g(b) p(x)$  – shape of the distribution is unchanged except for a multiplicative constant
- $p(bx) = (bx)^{-\alpha} = b^{-\alpha} x^{-\alpha}$

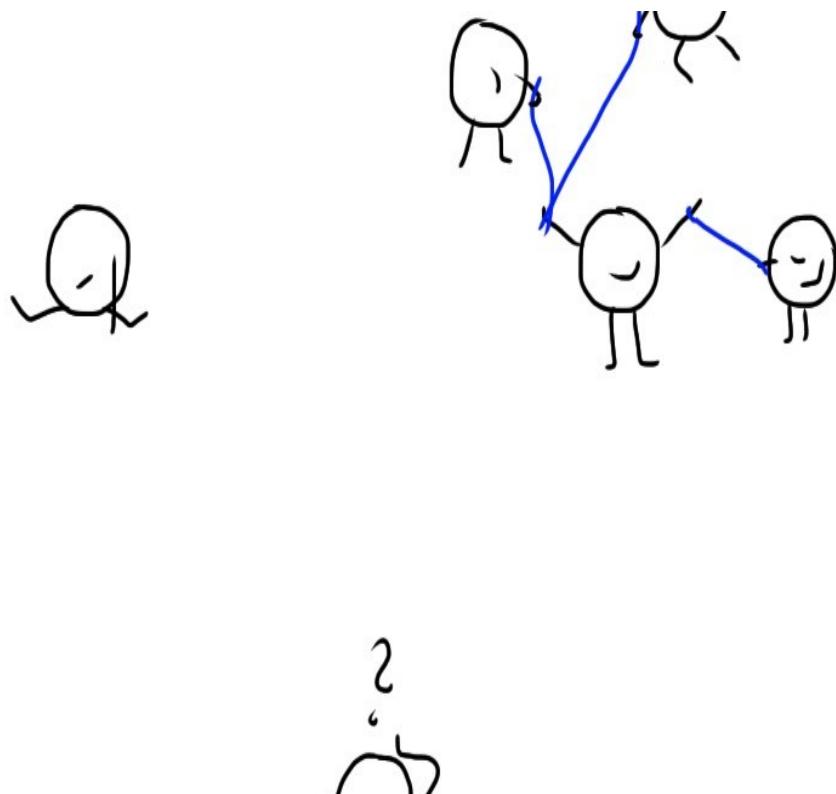


# Dois ingredientes em redes power-law

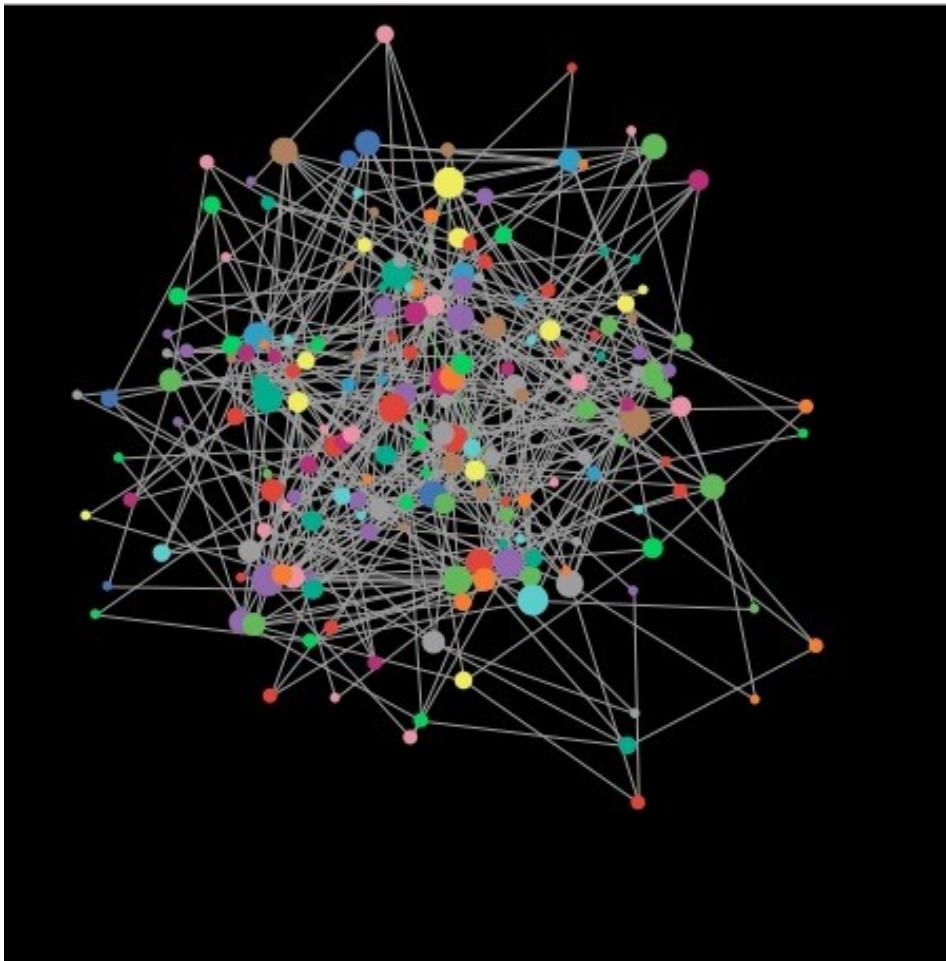
1- Nós aparecem ao longo do tempo (crescimento ou *growth*)



2- Nós preferem anexar a nós com muitas conexões  
(anexação preferencial, vantagem cumulativa)



Os nós aparecem um por um, cada um selecionando m outros nós aleatoriamente para se conectar



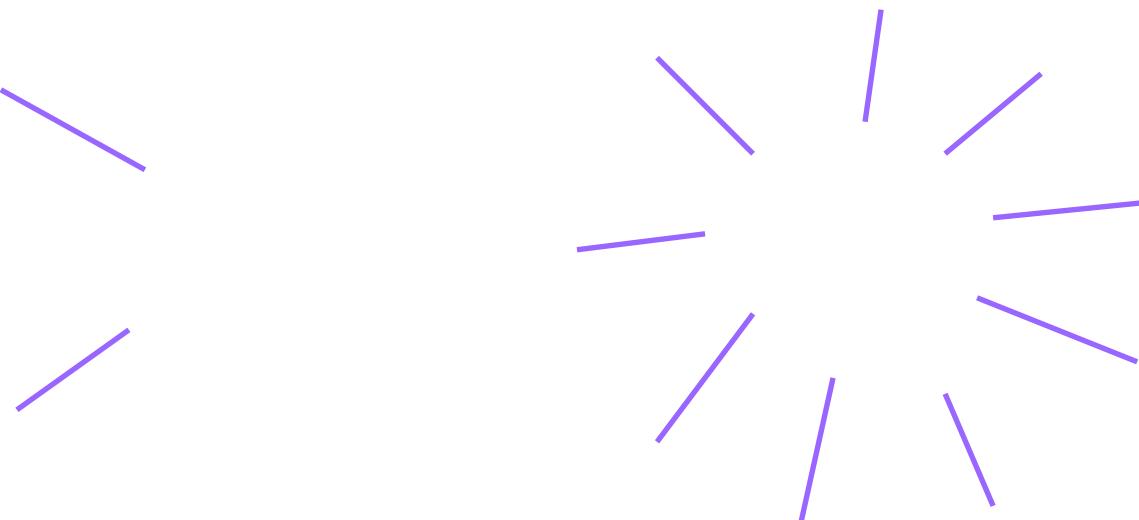
$$m = 2$$

# Crescimento em redes aleatórias

Em média  $k_i(t) > k_j(t)$

se  $i < j$

ou seja, nós mais antigos, em média, têm mais arestas



Como tornar o modelo de crescimento mais realista para as redes sociais?

- nós velhos morrem
- alguns nós são mais sociáveis
- amizades somem com o tempo
- tudo acima

## Anexação preferencial:

- novos nós preferem se conectar a nós bem conectados em vez de nós menos bem conectados

Processo também conhecido como:

- cumulative advantage (vantagem cumulativa)
- rich-get-richer (rico fica mais rico)
- Matthew effect

- Cada novo artigo é gerado com  $m$  citações (média)
- Novos artigos citam artigos anteriores com probabilidade proporcional ao seu grau de entrada (citações)
- E artigos sem citações?
  - cada artigo é considerado como tendo uma citação “padrão”

Power law com expoente  $\sigma = 2 + 1/m$

# Vantagem cumulativa, como?



- mecanismo de cópia
  - visibilidade