# Odnos između matematičkog modela sistema u vremenskom i kompleksnom domenu

*Nedeljko Stojaković*
*Marko Pejić*

*Oktobar, 2021.*

Cilj ovog dokumenta je da se upoznamo sa postupkom transformacija (konverzija) matematičkih modela zapisanih u vremenskom domenu (linearni matematički modeli u prostoru stanja) u matematičke modele zapisane u kompleksnom domenu (funkcije prenosa) i obrnuto. Za prelazak iz kompleksnog u vremenski domen koriste se kanonske forme. Postoji više kanonskih formi kojima se dobija matematički model u vremenskom domenu, ali u ovom dokumentu biće detaljno predstavljena samo jedna kanonska forma koju ćemo koristiti kroz zadatke. Za prelazak iz vremenskog u kompleksni domen koristi se obrazac čije će izvođenje biti ovde prikazano.

## 1. Uvod

U postupku transformacije, tj. konverzije funkcije prenosa u linearni matematički model u prostoru stanja koristi se dobro poznati matematički alat koji se zove **kanonska forma**. Postoje tri kanonske forme:

1. Prva kanonska forma (redno programiranje, opservabilna kanonska forma)
2. Druga kanonska forma (direktno programiranje, kontrolabilna kanonska forma)
3. Treća kanonska forma (*Jordan*-ova kanonska forma, dijagonalna)

Termini opservabilnosti i kontrolabilnosti, tj. osmotrivosti i upravljivosti dolaze iz teorije upravljanja.

Rezultat svih kanonskih formi je matematički model u prostoru stanja koji može da se razlikuje kod svake kanonske forme, jer je prostor stanja dosta složeniji, uglavnom zato što postoji više oblika prostora stanja za opisivanje sistema. Ta razlika se može videti i u različitim postupcima primene kanonskih formi.

### 1.1 Druga kanonska forma (iz kompleksnog u vremenski domen)

U nastavku ćemo proći kroz postupak primene druge kanonske forme koja je verovatno i najjednostavnija. Neka je data funkcija prenosa sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

$a_n = 1$

Prvi korak kod druge kanonske forme je uvođenje nove promenljive $Z(s)$, tako što pomnožimo funkciju prenosa sa $\frac{Z(s)}{Z(s)}$.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} \cdot \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

Prethodna jednačina se može zameniti sa sledeće dve jednačine:

$$\begin{aligned} U(s) &= (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0) Z(s) \\ Y(s) &= (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0) Z(s) \end{aligned}$$

Nakon toga se uvode promenljive veličine stanja pomoću nove promenljive na sledeći način:

$$\begin{aligned} & X_1(s) = Z(s) \\ & X_2(s) = sZ(s) \implies X_2(s) = sX_1(s) \\ & X_3(s) = s^2 Z(s) \implies X_3(s) = sX_2(s) \\ & \qquad \vdots \\ & X_n(s) = s^{n-1} Z(s) \implies X_n(s) = sX_{n-1}(s) \end{aligned}$$

Inverznom Laplasovom transformacijom dolazi se do matematičkog modela u vremenskom domenu koji će biti predstavljen sistemom diferencijalnih jednačina prvog reda koje možemo zapisati u matričnom obliku (1) i (2).

### 1.2 Iz vremenskog u kompleksni domen

Transformacija iz vremenskog u kompleksni domen je jednoznačna i jednostavna. Primenom Laplasove transformacije na (1) i (2) uz pretpostavku da su svi početni uslovi nula, dobija se obrazac za izračunavanje multivarijabilne matrice prenosa sistema (3).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1} BU(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C(sI - A)^{-1}B + D} \tag{3}$$

## 2. Primeri sa rešenjima

**Primer 1.** Upotrebom druge kanonske forme odrediti linearan matematički model u prostoru stanja za sistem opisan funkcijom prenosa.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 1}$$

Rešenje:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 1} \cdot \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= (s^2 - 2s + 1)Z(s) &&= s^2 Z(s) - 2sZ(s) + Z(s) \\ Y(s) &= (s+1)Z(s) &&= sZ(s) + Z(s) \end{aligned}$$

Kako se radi o sistemu drugog reda[1] uvodimo dve smene:

[1] Najviši stepen promenljive $s$ je dva.

$$\begin{aligned} &X_1(s) = Z(s) \\ &X_2(s) = sZ(s) \implies X_2(s) = sX_1(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{\dot{x_1}(t) = x_2(t)} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem smena dobija se:

$$\begin{aligned} U(s) &= sX_2(s) - 2X_2(s) + X_1(s) \\ sX_2(s) &= -X_1(s) + 2X_2(s) + U(s) \end{aligned}$$

Primenimo inverznu Laplasovu transformaciju:

$$\boxed{\dot{x_2}(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)}$$

Isti postupak ponovimo za drugu jednačinu:

$$\begin{aligned} &Y(s) = X_2(s) + X_1(s) \qquad /\mathcal{L}^{-1} \\ &\boxed{y(t) = x_2(t) + x_1(t)} \end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih jednačina u vremenskom domenu možemo da zapišemo matematički model u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

**Primer 2.** Za sistem opisan diferencijalnom jednačinom formirati matematički model u prostoru stanja upotrebom druge kanonske forme.

$$\dddot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) + 16y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\dddot{y} + 5\ddot{y} + 16y &= \dot{u} + 2u \qquad /\mathcal{L} \\
Y(s)(s^3 + 5s^2 + 16) &= U(s)(s+2) \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s+2}{s^3 + 5s^2 + 16} \cdot \frac{Z(s)}{Z(s)} \\
U(s) &= (s^3 + 5s^2 + 16)Z(s) \\
Y(s) &= (s+2)Z(s)
\end{aligned}$$

Uvodimo smene i uvrštavamo ih u jednačine:

$$X_1(s) = Z(s)$$

$$X_2(s) = sZ(s) \implies X_2(s) = sX_1(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{\dot{x_1}(t) = x_2(t)}$$

$$X_3(s) = s^2 Z(s) \implies X_3(s) = sX_2(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{\dot{x_2}(t) = x_3(t)}$$

$$U(s) = sX_3(s) + 5X_3(s) + 16X_1(s)$$

$$sX_3(s) = U(s) - 5X_3(s) - 16X_1(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{\dot{x_3}(t) = u(t) - 5x_3(t) - 16x_1(t)}$$

$$Y(s) = sZ(s) + 2Z(s) = X_2(s) + 2X_1(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y(t) = x_2(t) + 2x_1(t)}$$

Matematički model u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \\ \dot{x_3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

**Primer 3.** Odrediti funkciju prenosa, ako je model opisan matematičkim modelom u prostoru stanja.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Rešenje: koristimo obrazac (3).
Prvo odredimo matricu rezolventnu matricu $(sI - A)$:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}$$

Odredimo inverznu matricu $(sI - A)^{-1} = \dfrac{adj(sI - A)}{det(sI - A)}$

$$adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) = s^2 - 2s + 1$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{s^2 - 2s + 1} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2-2s+1} & \frac{1}{s^2-2s+1} \\ \frac{-1}{s^2-2s+1} & \frac{s}{s^2-2s+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2-2s+1} & \frac{1}{s^2-2s+1} \\ \frac{-1}{s^2-2s+1} & \frac{s}{s^2-2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s-3}{s^2-2s+1} & \frac{s+1}{s^2-2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dobija se funkcija prenosa:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 1}$$

**Primer 4.** Odrediti funkciju prenosa, ako je model opisan matematičkim modelom u prostoru stanja.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Rešenje:
Rezolventna matrica:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 16 & 0 & s+5 \end{bmatrix}$$

Odredimo inverznu matricu $(sI-A)^{-1}$:

$$(sI-A)^T = \begin{bmatrix} s & 0 & 16 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$adj(sI-A) = \begin{bmatrix} s^2+5s & s+5 & 1 \\ -16 & s^2+5s & s \\ -16s & -16 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$det(sI-A) = s^3+5s^2+16$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+5s & s+5 & 1 \\ \\ -16 & s^2+5s & s \\ \\ -16s & -16 & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+5s^2+16}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s^2+5s}{s^3+5s^2+16} & \frac{s+5}{s^3+5s^2+16} & \frac{1}{s^3+5s^2+16} \\ \frac{-16}{s^3+5s^2+16} & \frac{s^2+5s}{s^3+5s^2+16} & \frac{s}{s^3+5s^2+16} \\ \frac{-16s}{s^3+5s^2+16} & \frac{-16}{s^3+5s^2+16} & \frac{s^2}{s^3+5s^2+16} \end{bmatrix}$$

Funkcija prenosa:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s^2+5s}{s^3+5s^2+16} & \frac{s+5}{s^3+5s^2+16} & \frac{1}{s^3+5s^2+16} \\ \frac{-16}{s^3+5s^2+16} & \frac{s^2+5s}{s^3+5s^2+16} & \frac{s}{s^3+5s^2+16} \\ \frac{-16s}{s^3+5s^2+16} & \frac{-16}{s^3+5s^2+16} & \frac{s^2}{s^3+5s^2+16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2s^2+10s-16}{s^3+5s^2+16} & \frac{s^2+7s+10}{s^3+5s^2+16} & \frac{s+2}{s^3+5s^2+16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^3+5s^2+16}$$

## 3. Zadaci za vežbu

**Zadatak 1.** Za model opisan diferencijalnom jednačinom, upotrebom druge kanonske forme odrediti matematički model u prostoru stanja.

$$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t) + u(t)$$

**Zadatak 2.** Za model opisan matematičkim modelom u prostoru stanja, odrediti funkciju prenosa.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

## Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *Julia* programski jezik (sajt) https://julialang.org/
- *Think Julia* (*online* knjiga) https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html.