Blok dijagrami i diferencijalne jednačine

Danilo Kaćanski

Januar, 2026.

U ovoj vežbi prikazan je sistematičan postupak prelaska između diferencijalnih jednačina i blok dijagrama. Prvo se konstruiše blok dijagram polazeći od diferencijalne jednačine (integratorska realizacija), a zatim se radi obrnuto: iz datog blok dijagrama pišu se jednačine stanja i formira se model u prostoru stanja - *MMuPS*. Cilj je da studenti razumeju kako se struktura sistema (sabirači, pojačanja, integratori i nelinearni blokovi) direktno mapira na matematički zapis i obrnuto.

1. Blok dijagrami i diferencijalne jednačine

U modelovanju dinamičkih sistema često prelazimo između dva ekvivalentna opisa:

- **Diferencijalne jednačine** u vremenskom domenu,
- **Blok dijagrami** (signal-flow reprezentacija sa sabiračima, pojačanjima i integratorima).

Ključna ideja je da se diferencijalna jednačina prevede u oblik pogodan za realizaciju pomoću integratora:

1. izdvojimo **najviši izvod** (npr. y'' ili $x^{(n)}$),
2. napišemo ga kao kombinaciju ulaza i povratnih veza,
3. napravimo **lanac integratora** kojim dobijamo niže izvode, a u nekom trenutku i samu promenljivu, tj. rešenje diferencijalne jednačine,
4. koeficijente iz jednačine modelujemo kao pojačanja, a nelinearne članove kao posebne nelinearne blokove.

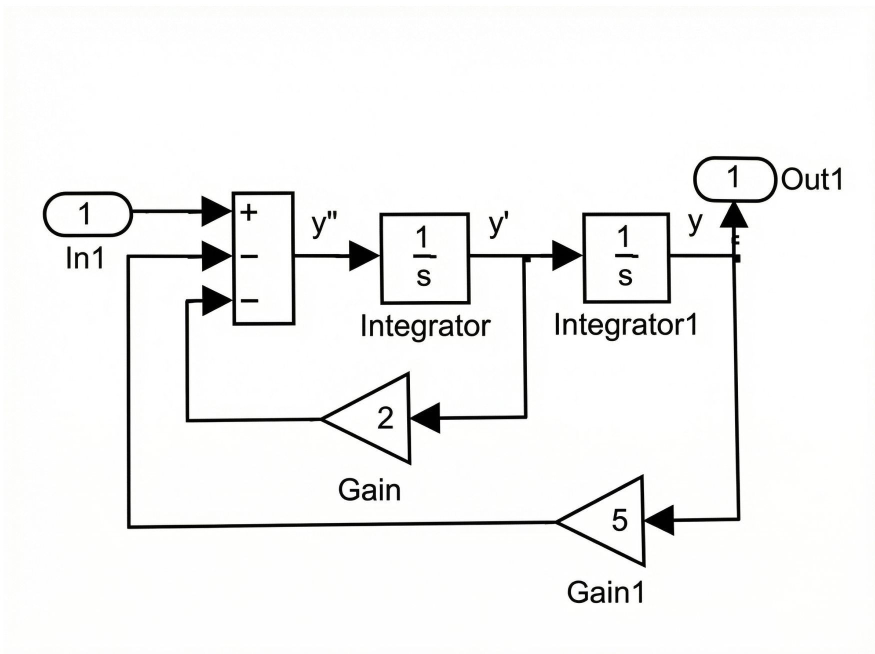
Obrnut smer (blok dijagram $\rightarrow$ diferencijalne jednačine/MMuPS) radi se tako što:

1. izlaze integratora proglasimo stanjima,
2. za svaki integrator važi $\dot{x}_i =$ (ulaz integratora),
3. ulaze integratora očitamo iz sabirača i pojačanja (pazeći na znakove),
4. po potrebi eliminišemo stanja da dobijemo jednačinu višeg reda, ili sve zapišemo kao MMuPS.

2. Zadaci

Zadatak 1. Nacrtati blok dijagram za sistem opisan diferencijalnom jednačinom:

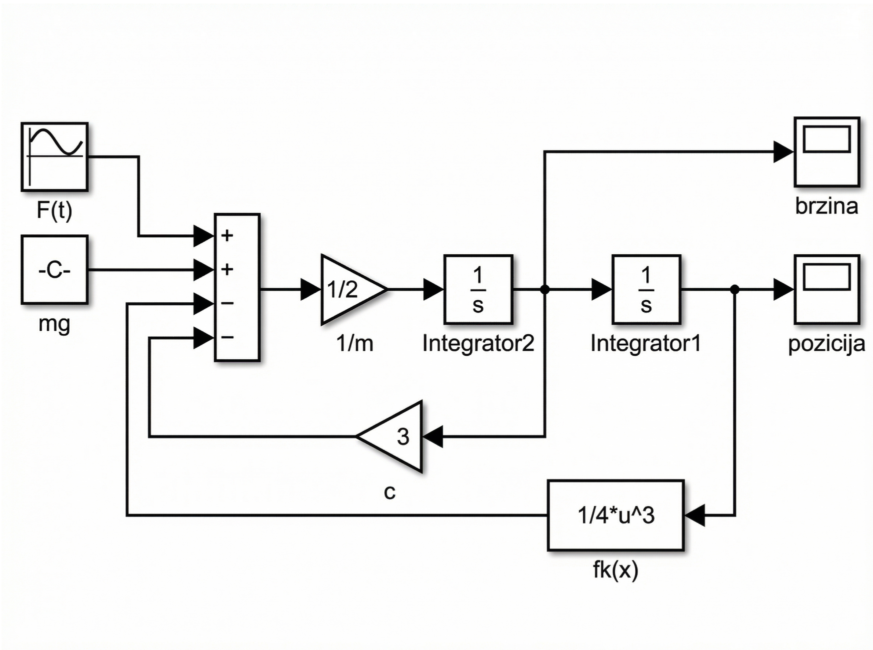
$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t).$$



Slika 1: Rešenje zadatka 1

Zadatak 2. Nacrtati blok dijagram za nelinearni sistem:

$$x''(t) = \frac{1}{2}\Big(mg + f(t) - 3x'(t) - \frac{1}{4}x^3(t)\Big).$$



Slika 2: Rešenje zadatka 2

Zadatak 3. Za dati blok dijagram uraditi sledeće:

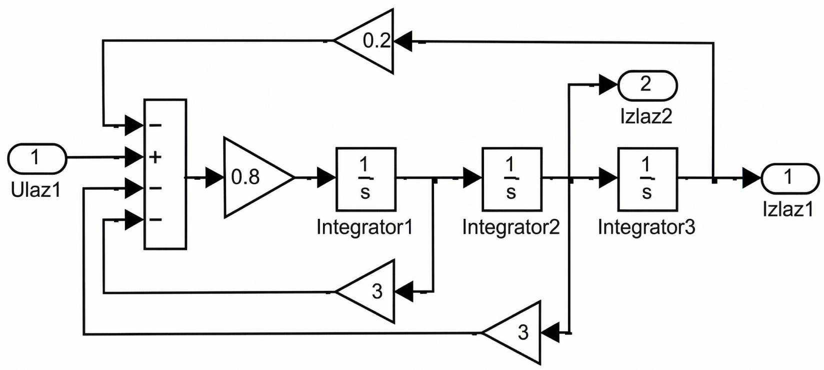
a) napisati diferencijalnu jednačinu koju opisuje blok dijagram,

b) napisati jednačine stanja $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ na osnovu ulaza integratora,

c) zapisati model u matričnoj formi (MMuPS):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

gde su A, B, C, D određeni iz strukture bloka (sabirači, pojačanja i veze).



Slika 3: Blok dijagram

Rešenje.

Sa slike se vidi da postoje tri integratora, pa uvodimo stanja kao izlaze integratora:

$x_1(t) =$ izlaz integratora 1, $\quad x_2(t) =$ izlaz integratora 2, $\quad x_3(t) =$ izlaz integratora 3.

Ulaz sistema označimo sa $u(t)$. Izlazi su:

$$y(t) = \text{Izlaz1} = x_3(t), \qquad y_2(t) = \text{Izlaz2} = x_2(t).$$

b) Jednačine stanja

Ulaz prvog integratora je signal posle pojačanja 0.8. Ulaz u sabirač (pre pojačanja 0.8) čine:

- $+u(t)$ (direktna grana),
- $-3x_1(t)$ (povratna grana sa pojačanjem 3 sa izlaza integratora 1),
- $-3x_2(t)$ (povratna grana sa pojačanjem 3 sa izlaza integratora 2),
- $-0.2x_3(t)$ (gornja povratna grana sa pojačanjem 0.2 sa izlaza integratora 3).

Zato je

$$e(t) = u(t) - 3x_1(t) - 3x_2(t) - 0.2x_3(t),$$

a pošto je posle sabirača pojačanje 0.8, ulaz Integrator1 je $0.8\,e(t)$, pa važi:

$$\dot{x}_1(t) = 0.8\,e(t) = 0.8u(t) - 2.4x_1(t) - 2.4x_2(t) - 0.16x_3(t).$$

Kako su integratori redno vezani:

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t), \qquad \dot{x}_3(t) = x_2(t).$$

Dakle, sistem jednačina stanja je:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2.4x_1(t) - 2.4x_2(t) - 0.16x_3(t) + 0.8u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t). \end{cases}$$

c) MMuPS (matrični oblik)

Za

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

dobijamo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

gde su:

$$A = \begin{bmatrix} -2.4 & -2.4 & -0.16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Diferencijalna jednačina višeg reda

Pošto je $y(t) = x_3(t)$, iz kaskade integratora sledi:

$$y'(t) = \dot{x}_3(t) = x_2(t), \qquad y''(t) = \dot{x}_2(t) = x_1(t), \qquad y'''(t) = \dot{x}_1(t).$$

Uvrštavanjem izraza za $\dot{x}_1(t)$ i zamenama $x_1 = y''$, $x_2 = y'$, $x_3 = y$ dobijamo:

$$y'''(t) = 0.8u(t) - 2.4y''(t) - 2.4y'(t) - 0.16y(t),$$

odnosno standardno:

$$\boxed{y'''(t) + 2.4y''(t) + 2.4y'(t) + 0.16y(t) = 0.8u(t).}$$

Literatura

- K. Ogata: *Modern Control Engineering* (poglavlja o blok dijagramima, realizacijama i modelima u prostoru stanja)
- R. C. Dorf, R. H. Bishop: *Modern Control Systems* (signal-flow, blok dijagrami, stanja i realizacije)
- Dokumentacija: *Julia* i paketi za simulaciju (`DifferentialEquations.jl`, `ControlSystems.jl`)