Matematički modeli

Modeliranje i simulacija sistema

Uvod

- Različiti aspekti klasifikacije modela
- **Vremenski kontinualni modeli**
  - model opisan algebarskim jednačinama
  - model opisan običnim diferencijalnim jednačinama
- **Vremenski diskretni modeli** – simulacije
- Modeli opisani parcijalnim diferencijalnim jednačinama
  - opštiji, složeno korišćenje – ne razmatraju se
- Težnja - upotrebljiv model →pojednostaljenje modela

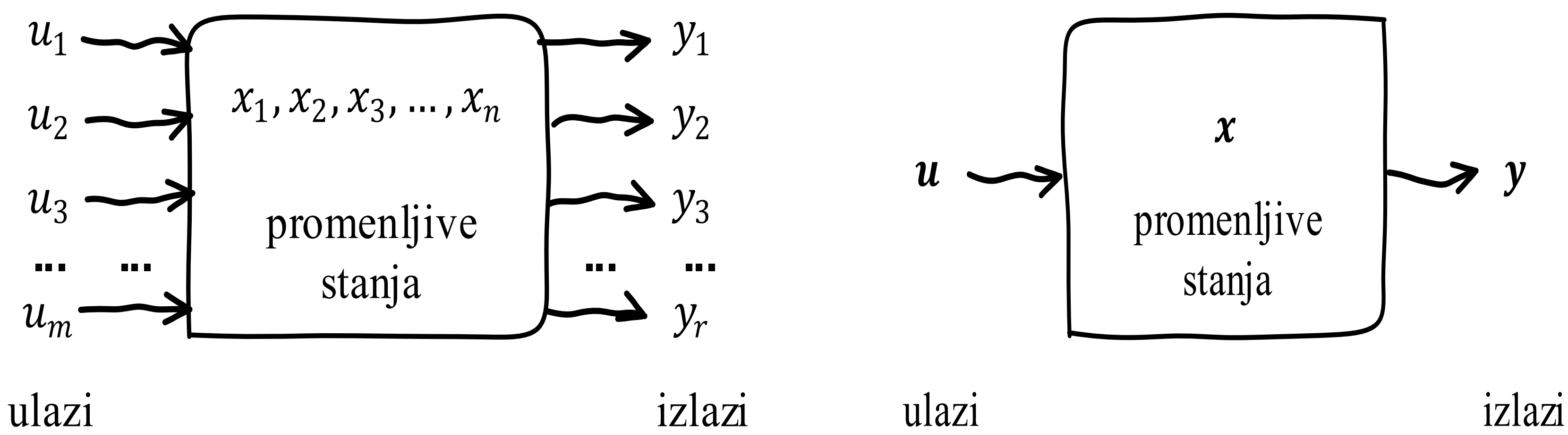
Osnovne promenljive za opis modela

- **Ulazi u model** $u_1, u_2, \dots, u_m$ - spoljašnji uticaji na sistem
- Unutrašnje promenljive – ***promenljive stanja*** $x_1, x_2, \dots, x_n$ - najmanji skup promenljivih pomoću kojih se jednoznačno opisati ponašanje sistema
- **Izlazi iz modela** $y_1, y_2, \dots, y_r$ - veličine od interesa (podskup promenljivih stanja)
  - izračunavaju se na osnovu vrednosti promenljivih stanja i ulaza.

- ***multivarijabilni sistemi*** - modeluju se sa više ulaza i/ili izlaza

- ***model sa jednim ulazom i jednim izlazom*** - $m = 1$ i $r = 1$ (dok je $n \geq 1$)

Osnovne promenljive za opis modela



Sistem sa označenim signalima a) pojedinačnim, b) u vektorskoj notaciji

Model opisan algebarskim jednačinama

- zavisnost promenljivih stanja i njihova veza sa ulazima

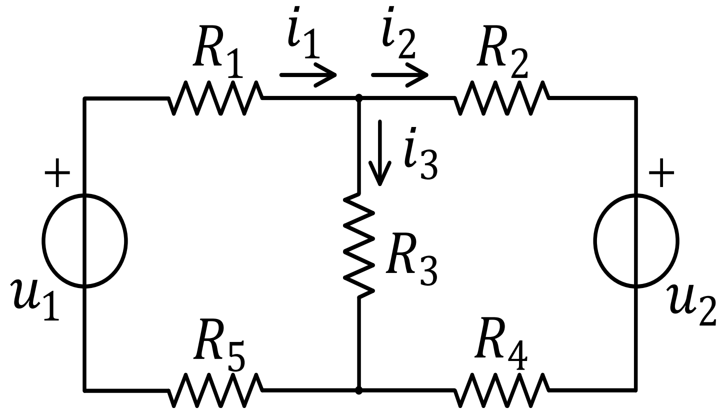
$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) = 0$$
$$\dots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) = 0$$

- izlazi modela se mogu opisati preko vrednosti ulaza i promenljivih stanja

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$
$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$
$$\dots$$
$$y_r(t) = g_r(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t).$$

Model opisan algebarskim jednačinama

- Primer



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -R_1 - R_5 & 0 & -R_3 \\ -R_1 - R_5 & -R_2 - R_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

- $i_1 - i_2 - i_3 = 0$, pa se dobija

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$$

Model opisan običnim diferencijalnim jednačinama

- Pogodan oblik – sistem običnih diferencijalnih jed. 1. reda

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t), \qquad & x_1(t_0) &= x_{10} \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t), \qquad & x_2(t_0) &= x_{20} \\
&\dots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t), \qquad & x_n(t_0) &= x_{n0}
\end{aligned}$$

- ponašanje modela za svako $t > t_0$, ako se zna vrednost promenljivih stanja u početnom trenutku t_0 i promene ulaza za $t > t_0$.

- Autonomni model

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

- Eksplicitna forma $\quad f\left(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$

- Česta je transformacija (uvođenje novih promenljivih)

$$y_i = y^{(i-1)}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

- pa se dobija sistem

$$\begin{gathered}\dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{gathered}$$

Koncept prostora stanja

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

- gde su $\boldsymbol{f}(.)$ i $\boldsymbol{g}(.)$ vektorske funkcije , a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{x}$ vektori ulaza, izlaza i promenljivih stanja
- $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{bmatrix}.$
- Pogodnosti upotreba na digitalnom računaru
  - ***Brže rešavanje dif.jed. 1. reda***
  - ***Prilagođeno matričnoj algebri***
  - ***Jednostavno uključivanje početnih uslova***
  - ***Primena na vremenski promenljive, nelinearne, stohastičke i diskretne modela***

Primer 1: Van der Pol oscillator

- Van der Pol oscilator je nekonzervativni oscilator sa nelinearnim prigušenjem.
- Opisuje se diferencijalnom jednačinom 2. reda:

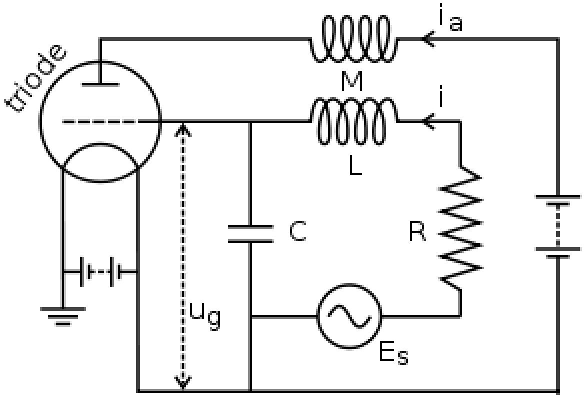
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

gde je x promenljiva zavisna od vremena t, a μ je parametar (mera nelinearnosti i jačina prigušenja)

- Ovaj oscilator je 1920. godine osmislio holandski el. inženjer i fizičar Balthasar van der Pol dok je radio za Philips.

Balthasar van der Pol

Born	January 27, 1889 Utrecht
Died	October 6, 1959 (aged 70) Wassenaar
Nationality	Dutch
Fields	Physics
Notable awards	IEEE Medal of Honor



Van der Pol jednačina

- Diferencijalna jednačina 2. reda: $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\dfrac{dx}{dt} + x = 0$
- Uvodimo smenu: $y = \dfrac{dx}{dt}$
- Nakon diferenciranja dobijamo: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \mu(1-x^2)\dfrac{dx}{dt} - x$
- Konačno model od dve diferencijalne jednačine 1. reda (ekvivalentan polaznoj jednačini)

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu(1-x^2)y - x$$

Primer 2: Lotka–Volterra jednačina

- Model dinamičkog biološkog sistema gde dve vrste imaju odnos: grabljivica-plen

$$\dot{x} = x(\alpha - \beta y) = \alpha x - \beta xy$$
$$\dot{y} = -y(\gamma - \delta x) = -\gamma y + \delta xy$$

Deterministički
Kontinualan
Nelinearan
model 2. reda

x – broj jedinki plena (npr. zečevi)
y – broj jedinki grabljivica (npr. lisice)
izvodi predstavljaju porast broja populacije, *t* vreme, a parametri $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ određuju njihovu interakciju.

- Pretpostavke:
  - Plen uvek ima dovoljno hrane
  - Zalihe hrane za grabljivice zavise od populacije plena
  - Stopa promene populacije je proporcionalna njenoj veličini
  - Okruženje se ne menja u korist jedne vrste i nema genetske adaptacije

Promena populacije Plen-Grabljivica

- Promena populacije plena
  - Raste srazmerno broju jedinki zbog reprodukcije
  - Opada srazmerno učestanosti susreta sa grabljivicama

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x y$$

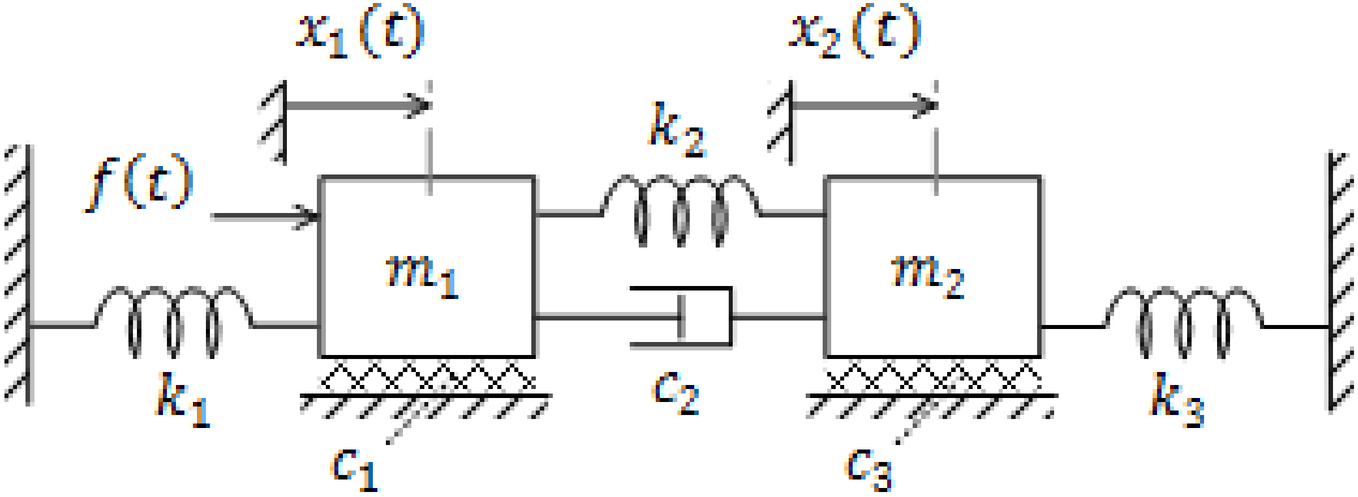
- Promena populacije grabljivica
  - Raste srazmerno ishrani
  - Opada zbog prirodne smrti

$$\dot{y} = -\gamma y + \delta x y$$

Primer 3

- mehanički sistema sa dva tela se opisuje sa

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = f(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_3\dot{x}_2 + k_3x_2 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_2 - x_1) = 0.$$



Linearni modeli

Linearni modeli

- Model opisan jednačinom oblika

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i + r(t) = 0$$

ili u formi

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} + r(t)$$

ili u razvijenom obliku

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y + r(t)$$

- Drugi zapisi - linearan matematički model u prostoru stanja i funkcija prenosa

Osobine linearnih modela

1. **Princip superpozicije**.

Odziv linearnog sistema na pobudu datu zbirom pojedinačnih pobuda može se dobiti kao suma odziva na pojedinačne pobude, koje na sistem deluju nezavisno jedna od druge.

ako je $y = f(u)$

tada je $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

Osobine linearnih modela

2. Princip homogenosti.

Odziv na pobudu uvećanu *k* puta može se dobiti kao *k* puta uvećan odziv na neuvećanu pobudu.

ako je $\boldsymbol{y=f(u)}$,

tada je $\boldsymbol{f(k \cdot u)=k \cdot f(u)}$

Osobine linearnih modela

3. Princip stacionarnosti.

Ako na linearan, stacionaran sistem bez početne energije (nulti početni uslovi) deluje

pobuda odziv

$$x(t)h(t) \quad -> \quad y(t)h(t)$$

$$x(t-T)h(t-T) \quad -> \quad y(t-T)h(t-T)$$

Primeri provere osobina linearnosti

1. Neka je model

$$y = f(u) = au + b,$$

gde je u ulaz, y izlaz, a a i b su parametri modela.

Provera principa homogenosti

$$\boldsymbol{f(k \cdot u) \stackrel{?}{=} k \cdot f(u)}$$

$$f(k \cdot u) = a(k \cdot u) + b$$

$$k \cdot f(u) = k \cdot (au + b)$$

$$\boldsymbol{a(k \cdot u) + b \neq k \cdot (au + b)}$$

NIJE LINEARAN MODEL.

Primeri provere osobina linearnosti

2. Model $$y = f(u) = au^2$$

Provera principa superpozicije

$$f(u_1 + u_2) \stackrel{?}{=} f(u_1) + f(u_2)$$

$$f(u_1 + u_2) = a(u_1 + u_2)^2 = au_1^2 + au_2^2 + 2au_1u_2$$
$$f(u_1) + f(u_2) = au_1^2 + au_2^2$$

$$\boldsymbol{au_1^2 + au_2^2 + 2au_1u_2 \neq au_1^2 + au_2^2}$$

- Model je nije linearan, jer ne važi princip superpozicije.
- Domaći: Proveriti da li važi princip superpozicije za primer 1 i princip homogenosti za primer 2!

Linearizacija

- Unosi grešku

- Vezuje se za radnu tačku (određenu vrednost ulaza, promenljivih stanja i izlaza)

- Izbor radne tačke?
  - Najčešće (uobičajene) vrednosti promenljivih
    - Vrednosti u ustaljenom stanju – nominalne vrednosti

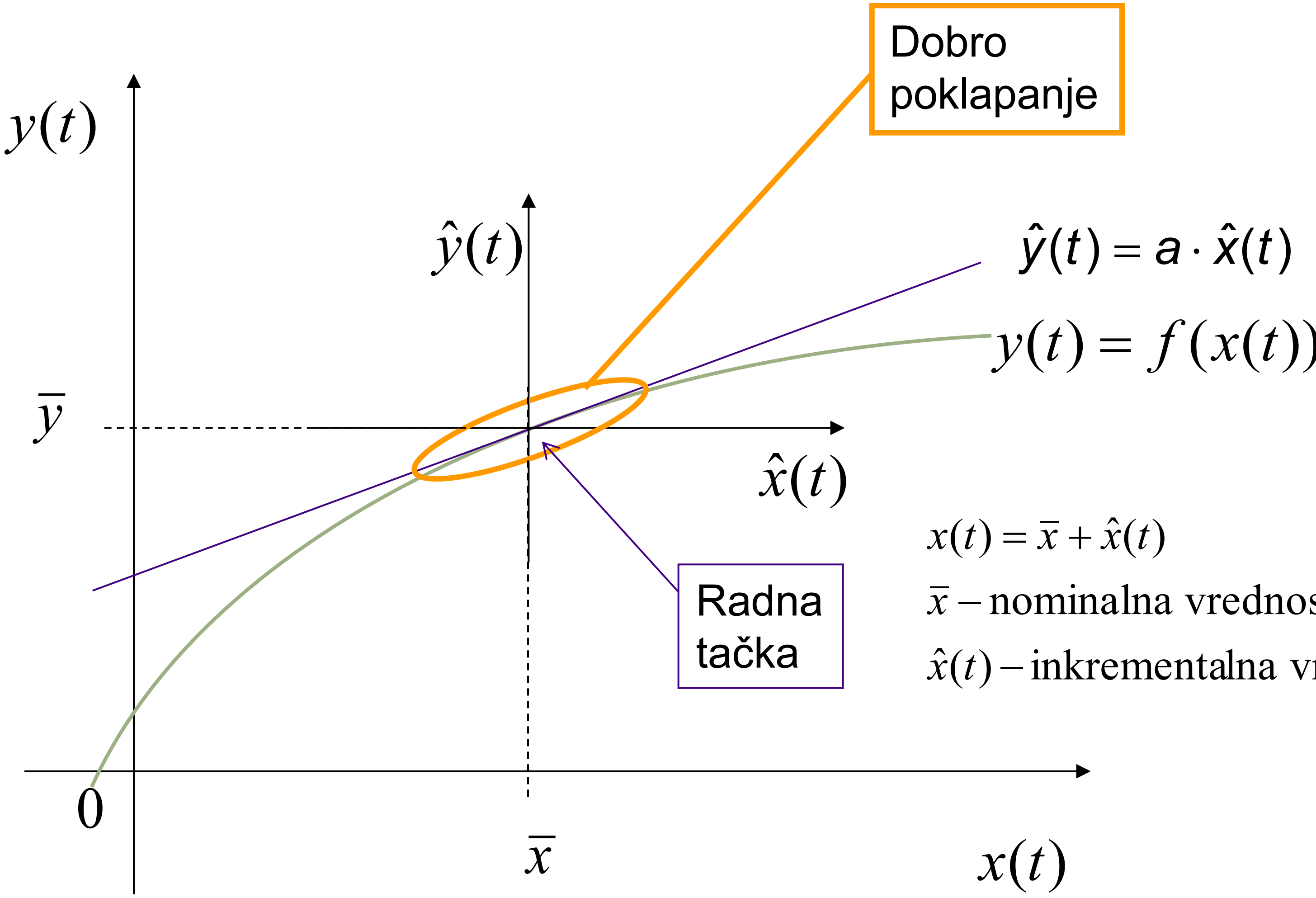
Linearizacija – stanje sistema

- Stanje sistema opisano *nominalnim vrednostima* ulaza $\bar{\boldsymbol{u}}$, izlaza $\bar{\boldsymbol{y}}$ i promenljivih stanja $\bar{\boldsymbol{x}}$

$$x_k(t) = \bar{x}_k + \hat{x}_k(t), k = 1,2, \dots, n$$
$$u_k(t) = \bar{u}_k + \hat{u}_k(t), k = 1,2, \dots, m$$
$$y_k(t) = \bar{y}_k + \hat{y}_k(t), k = 1,2, \dots, r.$$

- Promena veličine u odnosu na nominalnu vrednost se naziva ***inkrementalna vrednost***

Princip linearizacije



$x(t) = \bar{x} + \hat{x}(t)$

$\bar{x}$ – nominalna vrednost

$\hat{x}(t)$ – inkrementalna vrednost

Princip – razvojem u Tejlorov red

Funkcija jedne promenljive

$$y = f(x)$$

$$y = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \frac{(x-\bar{x})}{1!} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\bar{x}} \frac{(x-\bar{x})^2}{2!} + \left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{\bar{x}} \frac{(x-\bar{x})^3}{3!} + \ldots$$

$$y - f(\bar{x}) \approx \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \frac{(x-\bar{x})}{1!}$$

$$\hat{y} = a \cdot \hat{x} \qquad a = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}$$

$x = \bar{x} + \hat{x}$

$y = \bar{y} + \hat{y}$

$\bar{x}, \bar{y}$ – nominalne vrednosti

$\hat{x}, \hat{y}$ – inkrementalne vrednosti

Funkcija više promenljivih

$$y = f(\mathbf{x})$$

$$y = f(\bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} (x_1 - \bar{x}_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} (x_2 - \bar{x}_2) + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} (x_n - \bar{x}_n) + \ldots$$

$$\widehat{y} = a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + \ldots + a_n \hat{x}_n$$

Linearan matematički model

- Nastao linearizacijom – povezuje inkrementalne promenljive $\hat{u}, \hat{x}, \hat{y}$

- Sistem linearnih običnih diferencijalnih jednačina 1. reda

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = a_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{1n}\hat{x}_n(t) + b_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{1m}\hat{u}_m(t)$$
$$\dot{\hat{x}}_2(t) = a_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{2n}\hat{x}_n(t) + b_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{2m}\hat{u}_m(t)$$
$$\dots$$
$$\dot{\hat{x}}_n(t) = a_{n1}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{nn}\hat{x}_n(t) + b_{n1}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{nm}\hat{u}_m(t)$$

- Sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\hat{y}_1(t) = c_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{1n}\hat{x}_n(t) + d_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{1m}\hat{u}_m(t)$$
$$\hat{y}_2(t) = c_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{2n}\hat{x}_n(t) + d_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{2m}\hat{u}_m(t)$$
$$\dots$$
$$\hat{y}_r(t) = c_{r1}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{rn}\hat{x}_n(t) + d_{r1}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{rm}\hat{u}_m(t)$$

Linearan matematički model – vektorski zapis

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} \quad b_{ik} \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_k}\right|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} \quad c_{lj} = \left.\frac{\partial g_l}{\partial x_j}\right|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} \quad d_{lk} \left.\frac{\partial g_l}{\partial u_k}\right|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}$$

$$i = 1,\ldots n$$
$$j = 1,\ldots n$$
$$k = 1,\ldots r$$
$$l = 1,\ldots m$$

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)$$
$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)$$

$$\mathbf{A} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{B} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_r \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}} \quad \mathbf{D} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \frac{\partial g_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{u}}}}$$

Pisanje “kapica” se izbegava

Vektorski format (još jednom)

Često se naziva „**Linearan matematički model u prostoru stanja**"

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t)$$

Matrica stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrica ulaza (upravljanja)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

Matrica izlaza

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrica ulaza/izlaza (direktnog upravljanja)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$$

Koraci linearizacije

1. Odrediti radnu tačku – pisanjem i rešavanjem odgovarajućih algebarskih jednačina
2. Prepisati sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti
3. Zameniti sve nelinearne članove sa prva 2 sabirka razvoja u Tejlorov red
4. Skratiti konstantne članove u diferencijalnim jednačinama
   (Upotrebiti algebarske jednačine koje određuju radnu tačku.)
5. Definisati početne vrednosti inkrementalnih promenljivih $\hat{x}(0) = x(0) - \bar{x}$

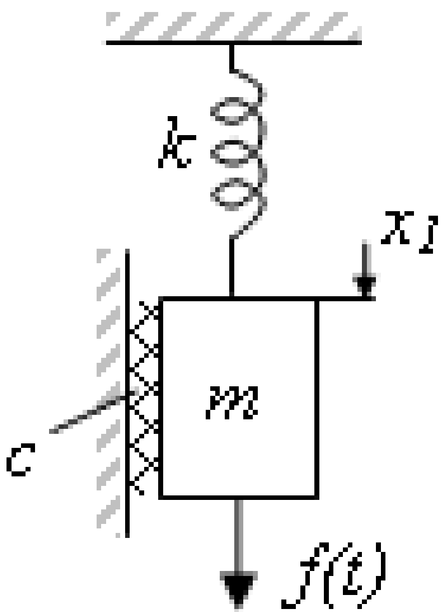
$\boldsymbol{x}(t) = \bar{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{x}}(t)$

$\bar{\boldsymbol{x}}$ – nominalna vrednost

$\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ – inkrementalna vrednost

Primer

- Amortizer se kreće pod dejstvom gravitacione sile i pobudne sile $f(t)$. Međutim, ne može se smatrati da je sila u opruzi linearna za sva istezanja, nego je ona funkcija pomeraja x, $f_k=f_k(x)$. Ukoliko je ta sila $f_k(x)=kx^3$ i pobudna sila $f_0=const$ odrediti vrednost pomeraja x_0. Nadalje, ako se pobudna sila menja kao $f(t)=f_0+\Delta f(t)$, napisati linearan matematički model koji opisuje promene položaja u odnosu na nominalnu vrednost x_0.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f_k(x) = mg + f(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f_k(x) = mg + f(t)$$

1. U ustaljenom stanju, promene položaja x ne postoje i tada važi

$$kx_0^3 = mg + f_0 \qquad x_0 = \sqrt[3]{\frac{mg + f_0}{k}}$$

2. radna tačka

$$f(t) = f_0 + \Delta f(t) = \bar{f} + \hat{f}(t)$$

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t) = \bar{x} + \hat{x}(t)$$

$$m\ddot{\hat{x}} + c\dot{\hat{x}} + k(\bar{x} + \hat{x})^3 = mg + \bar{f} + \hat{f}(t)$$

3. Linearizacija nelinearnog člana $F_k(x)=kx^3$

$$F_k(\bar{x} + \hat{x}(t)) \approx F(\bar{x}) + \left.\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \hat{x}(t) = k\bar{x}^3 + 3k\bar{x}^2\hat{x}(t)$$

4. Nakon zamene

$$m\ddot{\hat{x}} + c\dot{\hat{x}} + k\bar{x}^3 + 3k\bar{x}^2\hat{x} = mg + \bar{f} + \hat{f}$$

$$m\ddot{\hat{x}} + c\dot{\hat{x}} + k_1\hat{x} = \hat{f} \qquad k_1 = 3k\bar{x}^2$$

Izbor promenljivih stanja linearnog modela

- minimalan skup linearno nezavisnih promenljivih
- imaju fizičku interpretaciju
- obično fizičke veličine elemenata sposobnih da prime i uskladište energiju
  - temperature tela koja imaju toplotni kapacitet,
  - naponi na kondenzatorima i jačine struje kroz kalemove
- diferencijalne jednačine višeg reda - veličina za koju se računaju izvodi

Funkcija prenosa

- Primenom Laplasove transformacije se linearan model može transformisati iz vremenskog domena u kompleksan domen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t)$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

- u radnoj tački – *stacionaran* - sve početne vrednosti inkrementalnih promenljivih jednake nuli

- Laplasova transformacija

$$s^nY(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \cdots + a_2s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s)$$
$$= b_ms^mU(s) + b_{m-1}s^{m-1}U(s) + \cdots + b_1sU(s) + b_0U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

W(*s*) je ***funkcija prenosa***.

Dobijanje funkcije prenosa iz MMUPS

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)$$
$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)$$

$$s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D} \cdot U(s)$$

$$Y(s) = (\boldsymbol{C} \cdot (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = \boldsymbol{C} \cdot (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

Funkcija prenosa multivarijabilnog sistema

- linearni modeli sa više ulaza i izlaza, za svaki par ulaz-izlaz

$$G_{kj}(s) = \frac{Y_k(s)}{U_j(s)}, \qquad k = 1,2,\dots,r, \qquad j = 1,2,\dots,m.$$

Primenom superpozicije

$$Y_k(s) = G_{k1}(s)U_1(s) + G_{k2}(s)U_2(s) + \cdots + G_{km}(s)U_m(s)$$

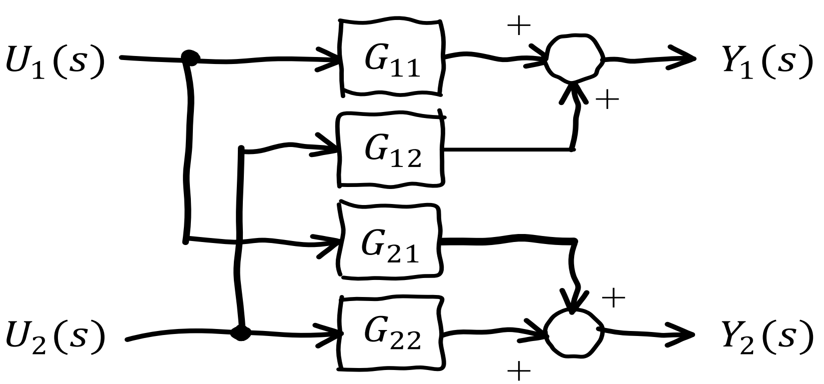
$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s) \cdot \boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \dots & \dots & & \dots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rm}(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \dots \\ U_m(s) \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \dots \\ Y_r(s) \end{bmatrix}.$$

Primer

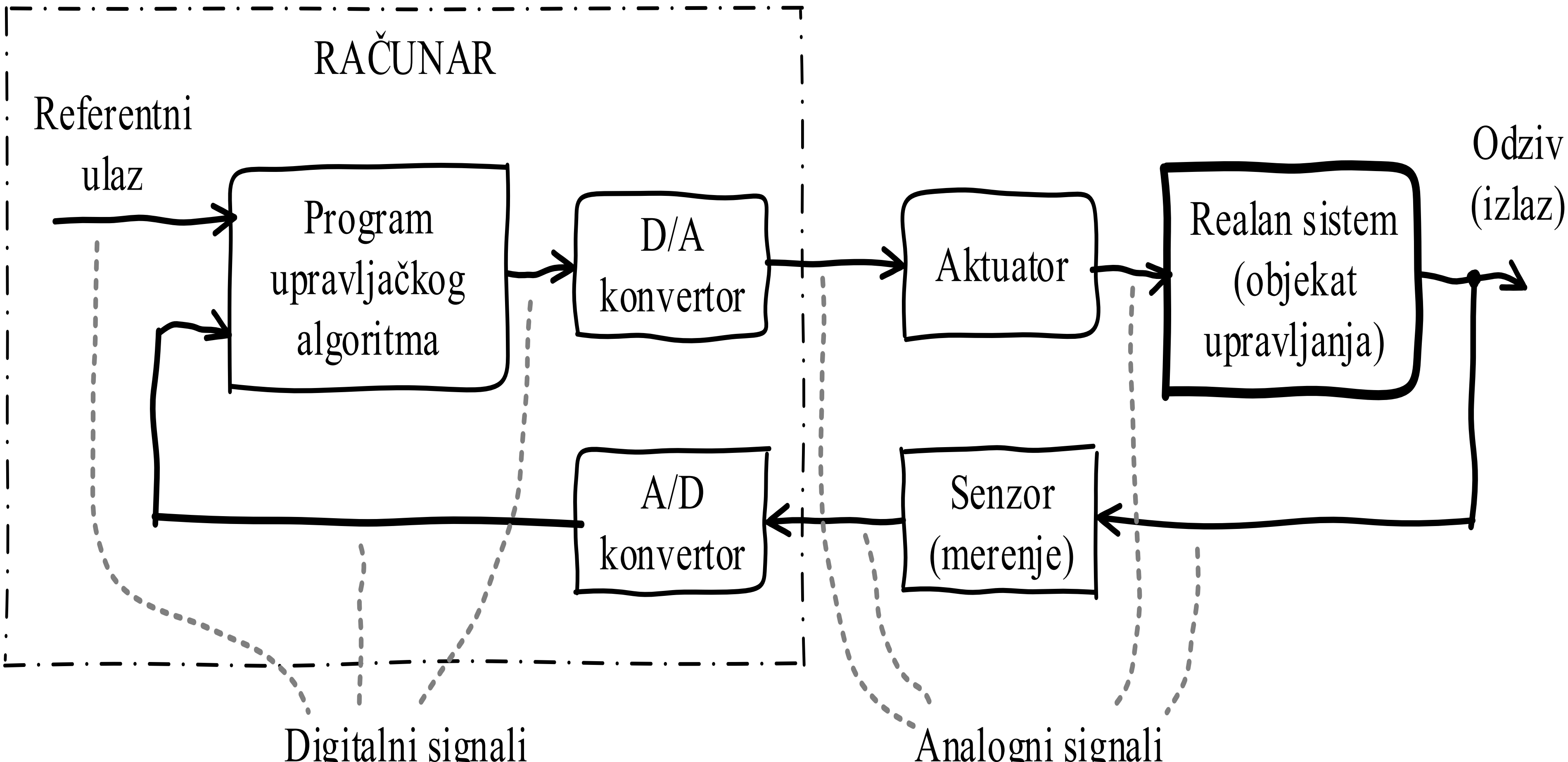
$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$
$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s).$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$



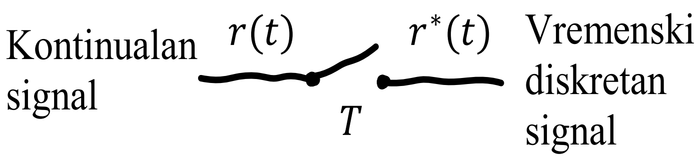
Vremenski diskretni modeli

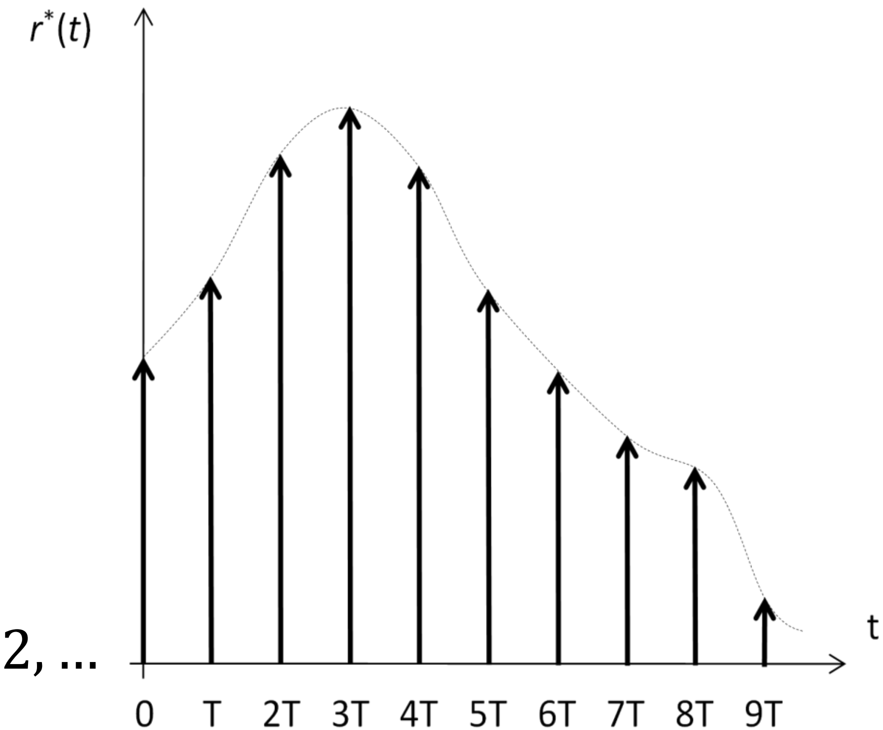
- Brža i jednostavnija obrada na računaru
- Primer – upravljački sistem na računaru



Kvantovanje signala

- Po vremenu i po nivou (amplitudi)
- Kvantovanje po vremenu se sprovodi periodično i vrši ga komponenta nazvana odabirač





$$r^*(t) = \begin{cases} r(kT), & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases} \quad k = 1,2,\ldots$$

ili

$$r^*(t) = r(kT) \cdot \delta(t - kT), \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \delta(t - kT).$$

Kvantovanje signala po nivou

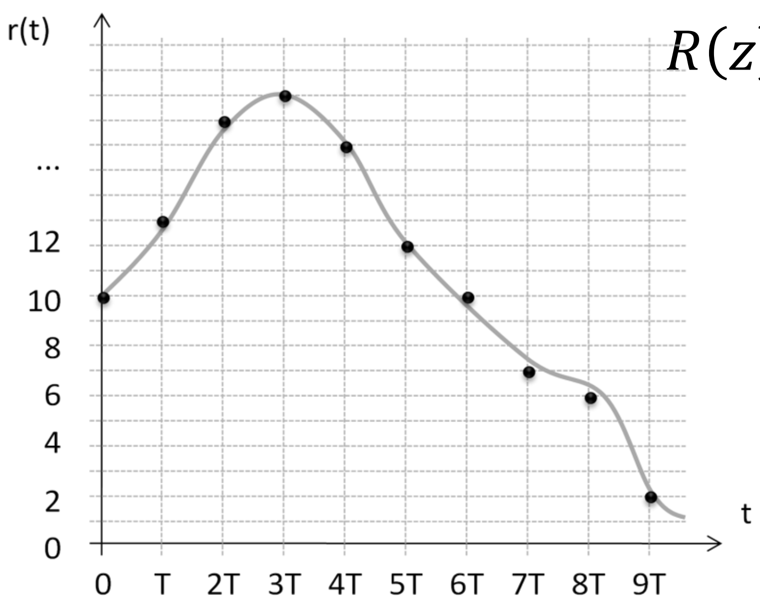
- Kvantovanje po nivou – A/D konvertor
- Zavisi od rezolucije A/D konvertora – tipično 2^8, 2^{10}, 2^{12}, 2^{16} nivoa

$$R^*(s) = \mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t-kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot e^{-kTs}$$

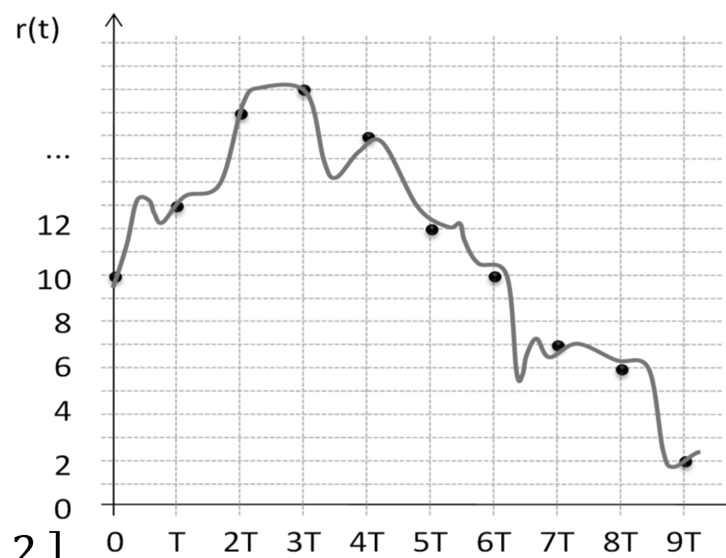
Smena $z = e^{sT}$

$$\mathcal{Z}\{r(t)\} = \mathcal{Z}\{r^*(t)\} = R(z)$$

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot z^{-k}.$$

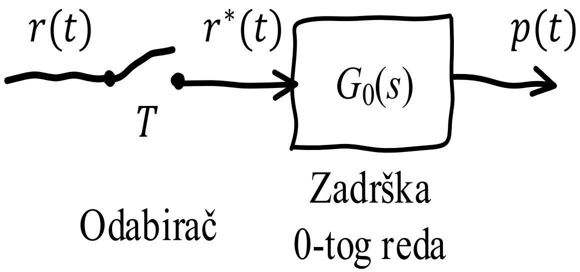


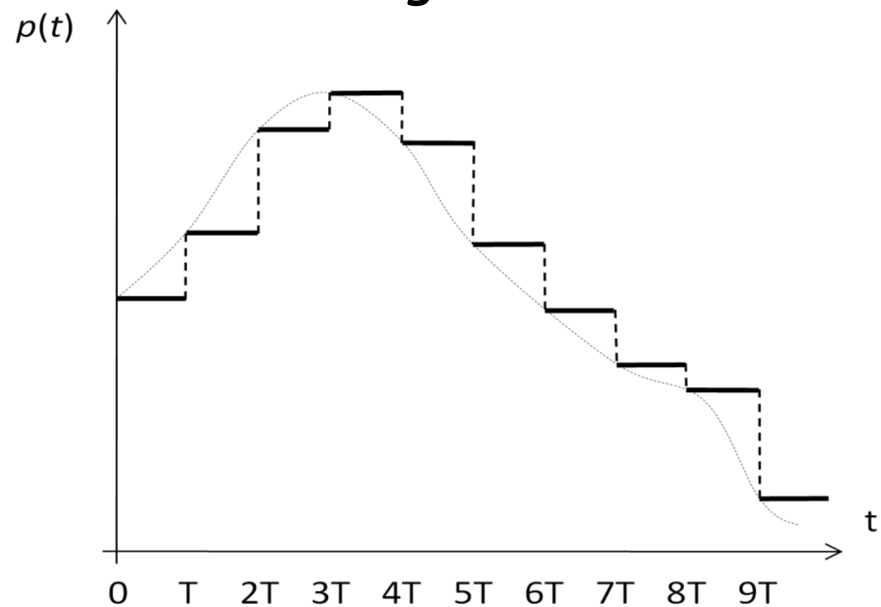
$$r^* = [\,10\ \ 13\ \ 17\ \ 18\ \ 16\ \ 12\ \ 10\ \ 7\ \ 6\ \ 2\,]$$



Odabiranje

- proces odabiranja ugrađuje ***kolo zadrške nultog reda***





- Teorema o odabiranju : „Ako kontinualan signal $f(t)$ ne sadrži harmonike u području učestanosti ω_0 [rad/s], on se može kompletno okarakterisati vrednostima signala merenih u trenucima međusobno udaljenim za vreme $T = 0.5(2\pi/\omega_0)$.
- Teorijski - perioda uzorkovanja signala – 2x kraća od periode komponente signala koja ima najveću učestanost $T_g = 2\pi/\omega_0$.
- Praktično – 10-20x kraća od T_g

Nelinearan vremenski diskretan model u prostoru stanja

- Nelinearan vremenski diskretan model u prostoru stanja se sastoji od skupa diferencnih jednačina

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k)$$

$$k \equiv kT, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

- gde su: $\boldsymbol{x}$ – vektor promenljivih stanja, $\boldsymbol{u}$ – vektor ulaza i $\boldsymbol{y}$ – vektor izlaza, isto kao i kod kontinualnog modela u prostoru stanja.

Linearan vremenski diskretan model u prostoru stanja

- poseban oblik prethodno prikazanog modela gde je u funkcijama opisana linearna kombinacija: promenljivih stanja $\boldsymbol{x}$, ulaza $\boldsymbol{u}$ i izlaza $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}(k), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}(k)$$

$$k \equiv kT, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}_{n\times n}, \qquad \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}_{n\times m}, \qquad \boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{C}_{r\times n},$$
$$\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_{r\times m}$$

Diskretna funkcija prenosa

- primenom Z transformacije na linearan vremenski diskretan model u prostoru stanja se dobija

$$\mathcal{Z}\{\boldsymbol{x}(k+1)\} = z\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{F}\cdot U(z).$$

$$\boldsymbol{X}(z) = (z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E})^{-1}\cdot\boldsymbol{F}\cdot U(z)$$

$$Y(z) = (\boldsymbol{C}\cdot(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E})^{-1}\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{D})U(z)$$

- Izraz u zagradi daje količnik dva polinoma $A(z)$ i $B(z)$ po kompleksnoj promenljivoj z

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z)$$

$$B(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0,$$

$$A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \qquad n \geq m$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}.$$

Diskretna funkcija prenosa (II)

- može predstaviti u obliku (nakon deljenja oba polinoma sa z^n)

$$W(z^{-1}) = z^{-(n-m)} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{m-1} z^{-(m-1)} + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}}$$

$$W(z^{-1}) = z^{-d} \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

pa se dobija

$$(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}) Y(z) = z^{-d} (\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}) U(z)$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 z^{-d} U(z) + \cdots + b_m z^{-d-m} U(z)$$

- primena inverzne Z transformacije - ***diferencna jednačina***

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + \cdots + b_m u(k-d-m)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-d-i) - \sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) \,.$$