

Analiza ponašanja modela u prostoru stanja.

Nedeljko Stojaković

Marko Pejić

Oktober, 2021.

Cilj ovog dokumenta je upoznavanje sa određivanjem odziva, tj. simulacijom sistema opisanih linearnim matematičkim modelom u prostoru stanja.

1. Uvod

Posmatračemo modele opisane linearnim, vremenski kontinualnim modelom u prostoru stanja koji se opisuje sistemom diferencijalnih jednačina prvog reda u matričnom obliku (1) i (2).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

Poznato je da matematički model u prostoru stanja sistema ne pokazuje samo dinamičku zavisnost između ulaznih i izlaznih veličina, nego da sadrži i informacije o zavisnosti ponašanja sistema od početnih uslova. Zato se ponašanje sistema i odziva sistema sastoji u opštem slučaju od dve komponente. Prva komponenta pokazuje zavisnost ponašanja stanja i odziva sistema od početnih uslova, dok druga komponenta pokazuje zavisnost ponašanja sistema i izlaza sistema usled delovanja upravljačkih (ulaznih) signala.

Kada je ponašanje sistema opisano linearnim modelom, tada je postupak računanja jednostavniji i izvesnije je da će se odrediti funkcija izlaza. Međutim, određivanje $x(t)$ i tada može biti složeno, te iz tog razloga u analitičkom rešavanju vrlo često se primenjuje Laplasova transformacija i predstavljanje modela preko funkcije prenosa. Drugi način, koji je pogodniji za simulacije, zasniva određivanje izlaza na primeni fundamentalne matrice.

Primenom Laplasove transformacije na izraz (1), uz uvažavanje početnih uslova dobija se:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (3)$$

I je jedinična matrica istih dimenzija kao matrica A .

gde je

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (4)$$

Matrica $\Phi(s)$ naziva se **rezolventna matrica**¹ i njena inverzna Laplasova transformacija je od velikog značaja u analizi ponašanja sistema. Matrica $\Phi(t)$ (5) naziva se **fundamentalna matrica** i ona nosi sve informacije o slobodi kretanja sistema.

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \quad (5)$$

Uvrštavanjem izraza (4) u izraz (3) i primenom inverzne Laplasove transformacije² dobiće se izraz za određivanje kretanja sistema opisanog modelom u prostoru stanja.

$$\begin{aligned} X(s) &= \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BU(s) \quad / \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

Uvrštavanjem izraza (6) u (2) dobija se jednačina ponašanja izlaza sistema:

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + C \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (7)$$

Iz izraza (6) vidimo da se sastoji iz dva dela, tj. komponente, gde prva komponenta $\Phi(t)x(0)$ pokazuje zavisnost ponašanja sistema i odziva sistema od početnih uslova, a druga komponenta $\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$ pokazuje zavisnost usled delovanja ulaznih signala

Inverzna matrica određuje se po izrazu: $M^{-1} = \frac{adj(M)}{det(M)}$
¹ U literaturi se za rezolventnu matricu koristi i oznaka $R(s)$.

² Koristi se osobina konvolucije originala.

Kroz literaturu, ove dve komponente se često nazivaju sopstvenim i prinudnim odzivom, respektivno.

2. Primeri sa rešenjima

Primer 1. Odrediti kretanje sistema (promenljivih stanja) i ponašanje izlaza za sistem opisan linearnim matematičkim modelom u prostoru stanja za dati vektor početnih uslova $x(0) = [1 \ 1]^T$ i pobudu $u(t) = \delta(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 5] x(t) \end{aligned}$$

Rešenje:

Početnu formulu (6) razdvojićemo na dva sabirka koja ćemo posebno računati i označićemo ih sa $x'(t)$ i $x''(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= \Phi(t)x(0) \\ x''(t) &= \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Za $x'(t)$ potrebna nam je fundamentalna matrica sistema (5).

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

Adjungovana matrica¹ $(sI - A)$:

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice $(sI - A)$:

$$\det(sI - A) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

Sada računamo inverznu matricu $(sI - A)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

¹ Postupak određivanja inverzne matrice dat je u prilogu.

U međukoraku izvršen je razvoj na parcijalne razlomke za svaki član matrice posebno.

Fundamentalna matrica:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Sada možemo odrediti $x'(t)$:

$$x'(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-2t} - 3e^{-t} \\ 3e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Dalje možemo da odredimo i drugu komponentu $x''(t)$, ali radi jednostavnijeg računa primenićemo osobinu konvolucije Laplasove transformacije i odrediti kompleksni lik $X''(s)$:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\right\} \implies X''(s) = \Phi(s)BU(s)$$

$$X''(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$X''(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobija se:

$$x''(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Sada možemo izračunati $x(t) = x'(t) + x''(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-2t} - 3e^{-t} \\ 3e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 4e^{-t} \\ 4e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ponašanje izlaza sistema $y(t) = Cx(t) + Du(t)$:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 4e^{-t} \\ 4e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 20e^{-t} - 15e^{-2t}$$

Primer 2. Za dati matematički model sistema odrediti kretanje promenljivih stanja $x(t)$ i ponašanje izlaza $y(t)$. Početni uslovi su $x(0) = [1 \ 1]^T$, a pobuda je $u(t) = h(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3x_2(t) + 5u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Rešenje:

Postavljeni matematički model sistema možemo zapisati u matricnom obliku:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Fundamentalna matrica sistema $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

Adjungovana matrica $(sI - A)$:

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice $(sI - A)$:

$$\det(sI - A) = (s+2)(s+3)$$

Inverzna matrica $(sI - A)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Kretanje promenljivih stanja pod dejstvom početnih uslova:

$$x'(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Kretanje promenljivih stanja pod dejstvom pobude:

$$\begin{aligned}
 X''(s) &= \Phi(s)BU(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{5}{(s+2)} - \frac{5}{(s+3)} \\ \frac{5}{(s+3)} \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{5}{s(s+2)} - \frac{5}{s(s+3)} \\ \frac{5}{s(s+3)} \end{bmatrix} \\
 X''(s) &= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \frac{1}{s} - \frac{5}{2} \frac{1}{(s+2)} + \frac{5}{3} \frac{1}{(s+3)} \\ \frac{5}{3} \frac{1}{s} - \frac{5}{3} \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \\
 x''(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X''(s)\} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t} \\ \frac{5}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Kretanje promenljivih stanja $x(t) = x'(t) + x''(t)$:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t} \\ \frac{5}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \\
 x(t) &= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ponašanje izlaza sistema $y(t) = Cx(t) + Du(t)$:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \\
 y(t) &= \frac{5}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t}
 \end{aligned}$$

3. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Odrediti kretanje sistema (promenljivih stanja) i ponašanje izlaza za sistem opisan linearnim matematičkim modelom u prostoru stanja za dati vektor početnih uslova $x(0) = [1 \ 1]^T$ i pobudu $u(t) = \delta(t)$.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 4] x(t)$$

Zadatak 2. Odrediti kretanje sistema (promenljivih stanja) i ponašanje izlaza za sistem opisan linearnim matematičkim modelom u prostoru stanja za dati vektor početnih uslova $x(0) = [1 \ 1]^T$ i pobudu $u(t) = \delta(t)$.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 1] x(t)$$

Prilog - Određivanje inverzne matrice

Matrica će imati svoju inverznu matricu samo ako je regularna, tj. da je determinanta matrice različita od nule. Ako je matrica A regularna, tada njenu inverznu matricu označavamo sa A^{-1} gde je $A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$. Sa $adj(A)$ označava se adjungovana matrica.

Postupak određivanja inverzne matrice za matricu A može se definisati kroz četiri koraka:

1. Odredimo transponovanu matricu.
2. Svaki element transponovane matrice zamenimo sa njemu odgovarajućim kofaktorom. Rezultat je adjungovana matrica $adj(A)$.
3. Odredimo determinantu matrice $det(A)$.
4. Odredimo inverznu matricu $A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$.

Kofaktori matrice se računaju po izrazu:

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

gde je $\Delta_{i,j}$ minor matrice, tj. determinanta matrice koja se dobija izostavljanjem i -te vrste i j -te kolone iz matrice, a m i n predstavljaju broj vrsta i broj kolona, respektivno.

Determinanta matrice jednaka je sumi proizvoda elemenata, bilo koje vrste ili kolone i njegovih odgovarajućih kofaktora.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Determinantu možemo izračunati koristeći i -tu vrstu:

$$det(A) = a_{i,1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \Delta_{i,1} + a_{i,2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot \Delta_{i,2} + \dots + a_{i,n} \cdot (-1)^{i+n} \cdot \Delta_{i,n}$$

ili koristeći j -tu kolonu:

$$det(A) = a_{1,j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \Delta_{1,j} + a_{2,j} \cdot (-1)^{2+j} \cdot \Delta_{2,j} + \dots + a_{n,j} \cdot (-1)^{n+j} \cdot \Delta_{n,j}$$

Primer 1. Za datu matricu A odrediti inverznu matricu A^{-1} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Odredimo transponovanu matricu:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Zamenimo elemente transponovane matrice odgovarajućim kofaktorima:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{1,1} = (-1)^2 \cdot 5 = 5 \\ A_{1,2} &= (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{1,2} = (-1)^3 \cdot 3 = -3 \\ A_{2,1} &= (-1)^{2+1} \cdot \Delta_{2,1} = (-1)^3 \cdot 2 = -2 \\ A_{2,2} &= (-1)^{2+2} \cdot \Delta_{2,2} = (-1)^4 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobijenih kofaktora dobijamo adjungovanu matricu:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Odredimo determinantu matrice:

$$\det(A) = 1 \cdot 5 - 6 = -1$$

4. Inverzna matrica:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{-1} \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primer 2. Za datu matricu A odrediti inverznu matricu A^{-1} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Odredimo transponovanu matricu:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Postupak određivanja adjungovane matrice za matricu dimenzija 2×2 je prilično jednostavan. Elementi na glavnoj dijagonali zamene mesta, dok se elementi na sporednoj dijagonali pomnože sa -1 .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adj}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice 2×2 računa se kao:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

2. Zamenimo elemente transponovane matrice odgovarajućim kofaktorima:

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &= (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{1,1} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \\
 A_{1,2} &= (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{1,2} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 4) = -5 \\
 A_{1,3} &= (-1)^{1+3} \cdot \Delta_{1,3} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \\
 A_{2,1} &= (-1)^{2+1} \cdot \Delta_{2,1} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 1) = -11 \\
 A_{2,2} &= (-1)^{2+2} \cdot \Delta_{2,2} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \\
 A_{2,3} &= (-1)^{2+3} \cdot \Delta_{2,3} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 8) = 7 \\
 A_{3,1} &= (-1)^{3+1} \cdot \Delta_{3,1} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \\
 A_{3,2} &= (-1)^{3+2} \cdot \Delta_{3,2} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 3) = 1 \\
 A_{3,3} &= (-1)^{3+3} \cdot \Delta_{3,3} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobijenih kofaktora dobijamo adjungovanu matricu:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -11 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

3. Primenujući formulu za računanje determinante za prvu vrstu dobijamo:

$$det(A) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 = -18$$

4. Inverzna matrica:

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{adj(A)}{det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -11 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -11 \end{bmatrix}}{-18} \\
 A^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{11}{18} & -\frac{1}{18} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{7}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{11}{18} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *Julia* programski jezik (sajt) <https://julialang.org/>
- *Think Julia* (online knjiga) <https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html>.