Rotacioni mehanički sistemi

Nedeljko Stojaković
Marko Pejić

Oktobar, 2021.

Cilj ovog materijala je upoznavanje sa modelovanjem jednostavnih mehaničkih sistema, u kojima će uglavnom biti razmatrano rotaciono kretanje. Slično opisu translatornih mehaničkih sistema, i ovde će na početku biti opisane osnovne fizičke veličine i načini na koje se modeluju osnovne pojave kod rotacionog kretanja. Nakon toga, opisani su zakoni uzajamnog dejstva elemenata, dok se na kraju nalaze rešeni jednostavniji i složeniji primeri, kao i zadaci za samostalan rad.

1. Promenljive, elementi i zakonitosti

U mehaničkim sistemima, pored translatornog kretanja, često se sreće i kružno kretanje, odnosno rotacije tela oko osa. U ovom poglavlju dat je pregled promenljivih, elemenata i zakonitosti koje se koristi prilikom modelovanja mehaničkih sistema sa rotacionim kretanjem.

1.1 Promenljive

Fizičke veličine kojima se opisuje rotaciono kretanje su:

- ugaoni pomeraj θ $[rad]$
- ugaona brzina $\omega = \dot{\theta}$ $[rad/s]$
- ugaono ubrzanje $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ $[rad/s^2]$

Kao i kod translatornog kretanja, do promene stanja rotacionog kretanja nekog tela može doći samo pri uzajamnom delovanju tela. Međutim, kod rotacionog kretanja međusobna interakcija tela opisuje se delovanjem momenata sila. Ovde će se najčešće posmatrati mehanički sistemi sastavljeni iz više tela, koji su izvedeni iz stanja mirovanja (ravnotežnog položaja). Tada se, primenom osnovnih zakona fizike vrši postavljanje matematičkog modela, čime se izračunavaju (analitički ili numerički) promene ugaonih pomeraja, brzina i ubrzanja svih tela u sistemu.

1.2 Elementi

Slično kao kod translatornih mehaničkih sistema, potrebno je uočiti tela koja imaju masu, odnosno u slučaju rotacionog kretanja moment inercije $[m^2kg]$. U mehaničkim sistemima sa kojima ćemo se ovde susretati, moment sile može se javiti kao posledica elastičnosti ili trenja, ili se moment sile javlja zbog dejstva neke spoljašnje sile (koja deluje na kraku). Prema tome, za formiranje modela rotacionog mehaničkog sistema posmatraju se elementi koji imaju moment inercije, trenje i elastičnost, kao i poluga kao telo koje obavlja rotaciono kretanje i može uticati na kretanje drugih elemenata mehaničkog sistema.

Moment inercije $\boldsymbol{J}$ je izuzetno bitna veličina za opisivanje rotacije tela i zavisi od oblika tela, raspodele mase i ose oko koje telo rotira. Prema definiciji, moment inercije materijalne tačke mase m za neku osu je

$$J = mr^2 \tag{1}$$

gde je r rastojanje tačke od ose rotacije. U opštem slučaju, moment inercije tela računa se sumiranjem momenata inercije svih njegovih sastavnih delova

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \tag{2}$$

Posedovanjem momenta inercije telo ima inertnost da zadrži stanje mirovanja ili ravnomernog rotacionog kretanja (I Njutnov zakon primenjen na rotaciono kretanje). Moment inercije tela je kvantitativna mera inertnosti i utiče na promenu stanja kretanja tela pod dejstvom spoljašnjih momenata sila.

Prilikom računanja momenta inercije za proizvoljno telo, izraz (2) se svodi na integral momenata inercije beskonačno malih delova tela masa dm. U rotacionim mehaničkim sistemima tipično se susrećemo sa koturom mase m i poluprečnika osnove R. Moment inercije ovakvog kotura izračunava pomoću izraza:

$$J = \frac{1}{2} mR^2 \tag{3}$$

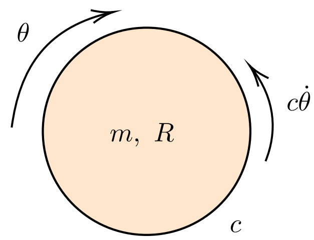
Trenje se u rotacionim sistemima javlja usled međusobnog dodirivanja tela ili dodirivanja tela i fiksnog zida. Slično kao i kod translatornog kretanja, i ovde će se posmatrati viskozno trenje gde postoji tanak uljani film između površi koje se dodiruju. Analogno trenju kod translatornog kretanja, moment sile viskoznog trenja τ_t usmeren je suprotno od ugaonog pomeraja tela (smera rotacije θ) i ima intenzitet koji zavisi od razlike ugaonih brzina ω_1 i ω_2 tela koja se dodiruju:

$$\tau_t = \tau_t(\Delta\omega), \qquad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \tag{4}$$

Ukoliko navedenu zavisnost pojednostavimo i predstavimo je linearnom vezom momenta sile trenja i razlike ugaonih brzina uvođenjem koeficijenta trenja c $[Nms]$, dobijamo izraz za izračunavanje intenziteta momenta inercije viskoznog trenja:

$$\tau_t = c\Delta\omega = c\Delta\dot{\theta} \tag{5}$$

U slučaju trenja tela sa nepokretnom podlogom, moment sile trenja srazmeran je ugaonoj brzini kretanja tela $\tau_t = c\omega = c\dot{\theta}$.



Slika 1: Moment sile trenja između rotirajućeg diska i nepokretne podloge

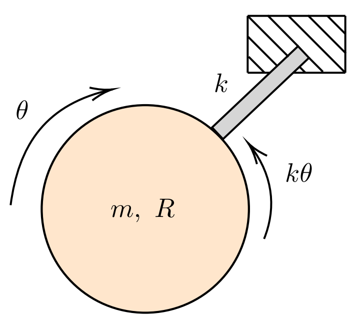
Elastičnost pri rotaciji javlja se prilikom uvrtanja koje se opisuje razlikom tekuće pozicije (ugla) u odnosu na prvobitnu poziciju $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, i tada je moment sile elastičnosti

$$\tau_e = \tau_e(\Delta\theta) \tag{6}$$

Moment sile elastičnosti je uvek suprotnog smera od porasta deformacije $\Delta\theta$, a za male deformacije intenzitet momenta sile može se aproksimirati linearnom zavisnošću od $\Delta\theta$

$$\tau_e = k\Delta\theta \tag{7}$$

gde je k $[Nm]$ koeficijent elastičnosti. U rotacionim sistemima koji će biti obrađivani u nastavku, elastičnost pri rotaciji javlja se usled deformacije torzione opruge, tj. elementa najčešće pričvršćenog između nepokretnog zida i rotirajućeg diska.



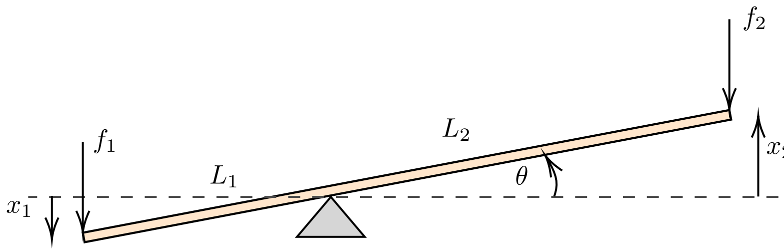
Slika 2: Moment sile usled elastičnosti torzione opruge

Poluga je još jedan od čestih elemenata u mehaničkim sistemima i predstavlja idealni štap (nema masu, rotacija se vrši bez trenja) koji ima tačku oslonca oko koje može da se rotira. Na krajevima poluge povezani su drugi elementi, tako da se kretanje koje obavlja jedan kraj štapa prenosi na drugi kraj. Takođe, sila koja deluje na jednom kraju prenosi svoje dejstvo na drugi kraj.

S obzirom da se poluga rotira oko tačke oslonca, krajevi poluge kreću se po kružnoj putanji. Međutim, za male ugaone pomeraje može se smatrati da se krajevi kreću po pravolinijskim putanjama, zbog toga što za takve pomeraje važi $sin(\theta) \approx \theta$. Prema tome, translatorni pomeraji krajeva poluge mogu se izraziti kao $x_1 \approx L_1\theta \approx L_2\theta$, gde su L_1 i L_2 dužine krakova poluge[1]. Na osnovu ove aproksimacije

[1] Dobijeno na osnovu:

$$sin(\theta) \approx \theta = \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2}$$



Slika 3: Poluga

dobijaju se odnosi translatornih pomeraja krajeva poluge, kao i odnosi brzina i ubrzanja krajeva poluge.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{L_2}{L_1}, \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{L_2}{L_1}, \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \frac{L_2}{L_1} \tag{8}$$

Odnosi sila koji deluju na krakove poluge mogu se odrediti na osnovu ravnoteže momenata sila $\sum \tau_i = 0$, primenom II Njutnovog zakona

$$L_1 f_1 - L_2 f_2 = 0 \tag{9}$$

odakle sledi

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{L_1}{L_2} \tag{10}$$

1.3 Zakonitosti

Kada se u mehaničkom sistemu koji se modeluje uoče tela sa momentom inercije (odnosno tela sa masom), momenti sile trenja, momenti sila kao posledica elastičnosti, kao i svi spoljašnji momenti sila, potrebno je formirati matematički model sistema poštojući zakonitosti uzajamnog dejstva elemenata iz posmatranog sistema. Prilikom modelovanja rotacionih mehaničkih sistema važe iste zakonitosti kao i za mehaničke sisteme u kojima se tela kreću translatorno. Jedina razlika je u tome što je sve zakone potrebno primeniti na rotaciono kretanje, odnosno neophodno je posmatrati momente sila.

2. Primeri sa rešenjima

Primer 1. Za rotacioni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:

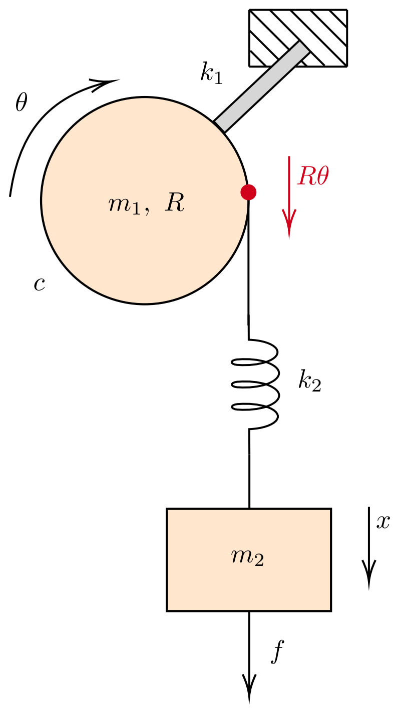
a) diferencijalne jednačine,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako su ulazi gravitaciono ubrzanje g i pobudna sila f, a izlazi ugaoni pomeraj i ugaona brzina diska,

c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih 20s, za sledeće vrednosti parametara: $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $c = 10$, $k_1 = 15$, $k_2 = 10$, $R = 1$, $g = 9.81$, $f(t) = sin(t)$, a inicijalna pozicija tela mase m_2 je za 2 na dole, dok su ostali početni uslovi nulti.

d) odrediti ugaono ubrzanje diska,

e) na istom grafiku iscrtati promenu ugaone pozicije, ugaone brzine i ugaonog ubrzanja diska u vremenu.

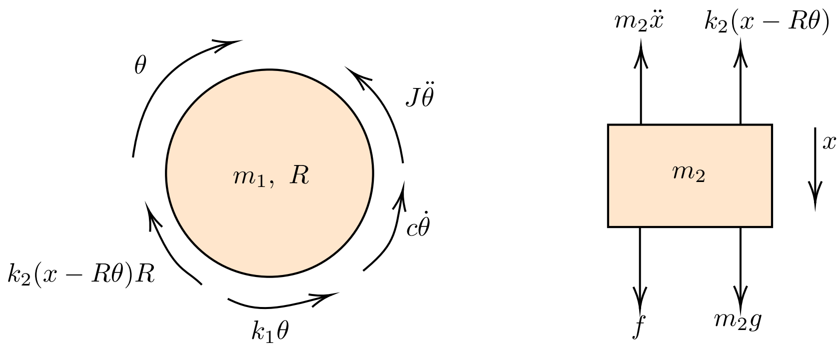


Rešenje:

Prvo što se može uočiti prilikom analize datog sistema jeste da se on sastoji iz diska mase m_1 koji se kreće rotaciono u smeru označenim ugaonim pomerajem θ, kao i tela mase m_2 koje se kreće translatorno, u smeru označenim sa x. Između ta dva tela nalazi se opruga, tako da je neophodno utvrditi njeno dejstvo na oba tela. Da bismo to uradili, neophodno je posmatrati dodirnu tačku između diska i opruge (crvena tačka na slici), i u toj tački aproksimirati ugaoni pomeraj pomoću translatornog pomeraja. S obzirom da se disk kreće u smeru kazaljke na satu, jasno je da je translatorni pomeraj diska u dodirnoj tački sa oprugom usmeren ka dole[1]. Intenzitet navedene translatorne aproksimacije ugaonog pomeraja iznosi $R\theta$, zbog toga što se radi o dovoljno malom ugaonom pomeraju θ, pa važi $sin(\theta) \approx \theta$. Sada imamo oprugu koeficijenta elastičnosti k_2, čiji se krajevi kreću u istom smeru, za translatorne pomeraje $R\theta$ i x. Prema tome, neophodno pretpostaviti koji pomeraj je veći, i u skladu sa tom pretpostavkom rešiti zadatak. Ukoliko usvojimo pretpostavku $x > R\theta$, dobijamo FBD prikazan na sledećoj slici.

Bitno je primetiti da se pod usvojenom pretpostavkom $x > R\theta$ opruga isteže, pa joj je reakcija skupljanje, čime će telo m_2 povući na gore silom intenziteta

[1] Ovaj translatorni pomeraj tačke na kraju diska nije dat u zadatku, već je potrebno prepoznati ga , ispravno definisati i usmeriti u skladu sa ugaonim pomerajem diska.



$k_2(x - R\theta)$, dok će u dodirnoj tački između opruge i diska delovati na dole, silom istog intenziteta. Budući da se disk opisuje rotacionim kretanjem, silu koja deluje na dodirnu tačku diska i opruge potrebno je pomnožiti sa krakom na kojem deluje (poluprečnik R), čime se dobija moment sile elastičnosti, koji na disk deluje u smeru rotacije diska θ.

Na osnovu dobijenog FBD-a, diferencijalne jednačine formiraju se na isti način kao i kod translatornih mehaničkih sistema.

$$
\begin{aligned}
&J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k_1\theta - k_2(x - R\theta)R = 0 \\
&m_2\ddot{x} + k_2(x - R\theta) - m_2 g - f = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

S obzirom da je dati sistem opisan pomoću dve diferencijalne jednačine drugog reda, transformacijom dobijamo sistem od četiri diferencijalne jednačine prvog reda.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \theta & &\rightarrow & \dot{x}_1 &= x_2 \\
x_2 &= \dot{\theta} & &\rightarrow & \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}(k_2(x_3 - Rx_1)R - k_1x_1 - cx_2) \\
x_3 &= x & &\rightarrow & \dot{x}_3 &= x_4 \\
x_4 &= \dot{x} & &\rightarrow & \dot{x}_4 &= \frac{1}{m_2}(f + m_2 g - k_2(x_3 - Rx_1))
\end{aligned}
\tag{2}
$$

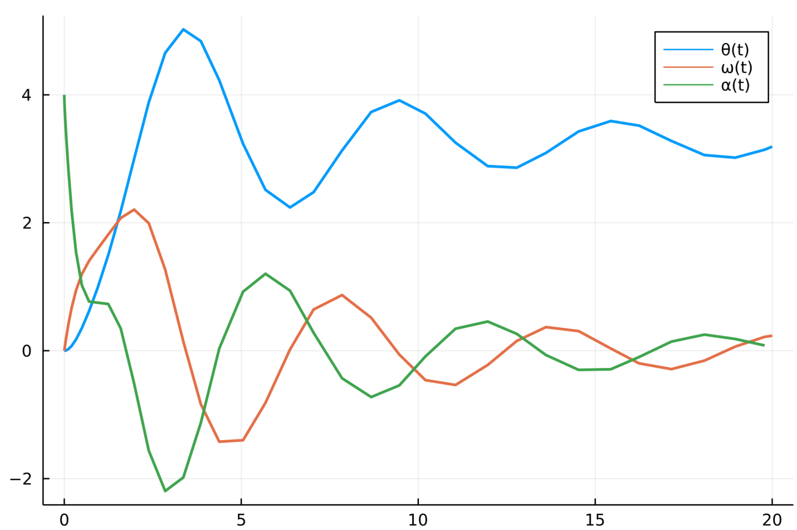
Iz ovako definisanog sistema jednačina, znajući da je $u(t) = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}$ i $y(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, jednostavno se dobija matematički model u prostoru stanja.

$$
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2R^2}{J} & -\dfrac{c}{J} & \dfrac{k_2R}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2R}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} u(t) \tag{3}
$$

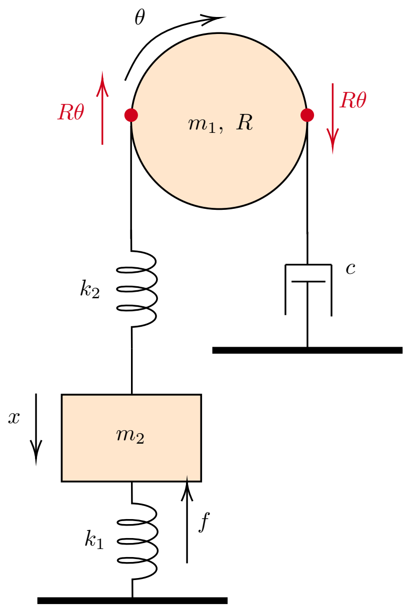
$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)
$$

U nastavku je dat kod kojim je dati sistem opisan i simuliran upotrebom paketa *DifferentialEquations*.

```
using Plots, DifferentialEquations

function sistem!(dx, x, p, t)
    m1, m2, c, k1, k2, R, g = p
    f = sin(t)
    J = 1 / 2 * m1 * R^2

    dx[1] = x[2]
    dx[2] = (1 / J) * (k2 * (x[3] - R * x[1]) * R - k1 * x[1] - c * x[2])
    dx[3] = x[4]
    dx[4] = (1 / m2) * (f + m2 * g - k2 * (x[3] - R * x[1]))
end

t = (0.0, 20.0)
p = (10.0, 5.0, 10.0, 15.0, 10.0, 1.0, 9.81)
x0 = [0.0, 0.0, 2.0, 0.0]

prob = ODEProblem(sistem!, x0, t, p)
sol = solve(prob)

θ = [x[1] for x in sol.u]
ω = [x[2] for x in sol.u]
α = diff(ω) ./ diff(sol.t)

plot(sol.t, [θ, ω], lw=2, label=["θ(t)" "ω(t)"])
plot!(sol.t[1:end-1], α, lw=2, label="α(t)")
```



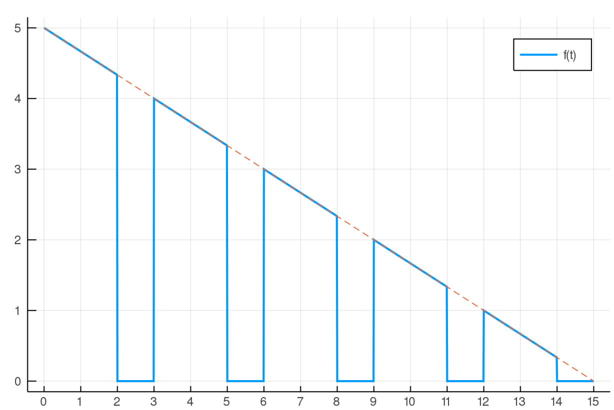
Primer 2. Za rotacioni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:



a) diferencijalne jednačine,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako su ulazi gravitaciono ubrzanje g i pobudna sila f, a izlazi ugaoni pomeraj i ugaona brzina diska,

c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih $15s$, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na grafiku, a vrednosti parametara su sledeće: $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $c = 10$, $k_1 = 15$, $k_2 = 10$, $R = 1$, $g = 9.81$, za nulte početne uslove.

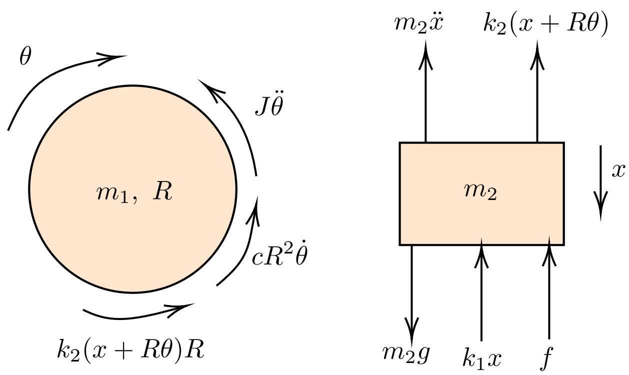


d) odrediti pređeni put tela mase m_2,

e) na istom grafiku iscrtati promenu ugaone pozicije i ugaone brzine diska u vremenu.

Rešenje:

S obzirom da je disk u datom mehaničkom sistemu povezan sa telom mase m_2 preko opruge i sa nepokretnim zidom preko prigušnice, neophodne su dve tačke u kojima se rotaciono kretanje oboda diska aproksimira translatornim pomerajem $R\theta$. Bitno je primetiti da su navedeni translatorni pomeraji oboda diska usmereni u skladu sa smerom rotacije diska i označeni crvenom bojom na prethodnoj slici. Sila kojom prigušnica deluje na kraj diska usmerena je suprotno od translatornog pomeraja $R\theta$, a njen intenzitet je $cR\dot{\theta}$. Budući da je moment sile veličina od interesa za rotaciono kretanje, neophodno je navedenu silu pomnožiti sa krakom na kom deluje, u ovom slučaju sa poluprečnikom diska R, čime se dobija intenzitet momenta sile $cR^2\dot{\theta}$. Translatorni pomeraji x i $R\theta$ istežu oprugu koja se nalazi između tela mase m_1 i diska. Prema tome, reakcija opruge je skupljanje silom čiji je intenzitet $k_2(x+R\theta)$, koju je potrebno pomnožiti sa poluprečnikom R kako bi se dobio moment sile elastičnosti koja deluje na disk.



a)

$$\begin{aligned} &J\ddot{\theta} + cR^2\dot{\theta} + k_2(x+R\theta)R = 0 \\ &m_2\ddot{x} + k_2(x+R\theta) + k_1x + f - m_2g = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

b)

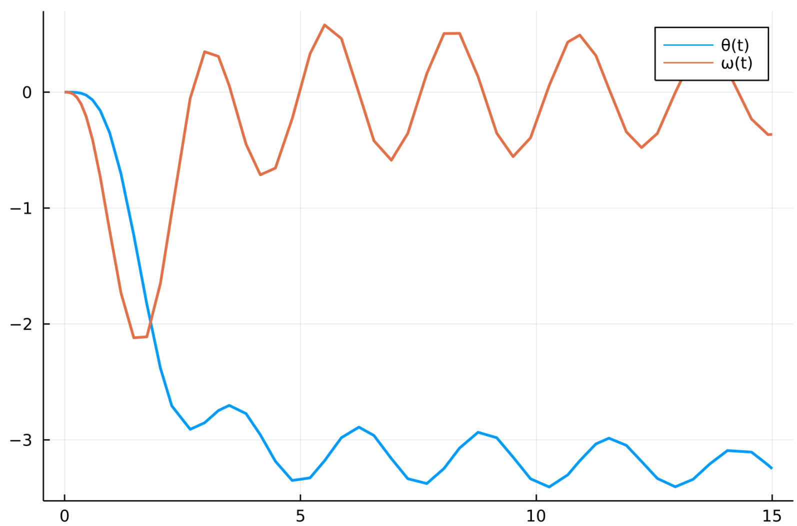
$$\begin{aligned} x_1 &= \theta & &\rightarrow & \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= \dot{\theta} & &\rightarrow & \dot{x}_2 &= -\frac{1}{J}(k_2(x_3+Rx_1)R + cR^2x_2) \\ x_3 &= x & &\rightarrow & \dot{x}_3 &= x_4 \\ x_4 &= \dot{x} & &\rightarrow & \dot{x}_4 &= \frac{1}{m_2}(m_2g - f - k_1x_3 - k_2(x_3+Rx_1)) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_2 R^2}{J} & -\dfrac{cR^2}{J} & -\dfrac{k_2 R}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_2 R}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_1 + k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -\dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} u(t) \qquad (6)$$

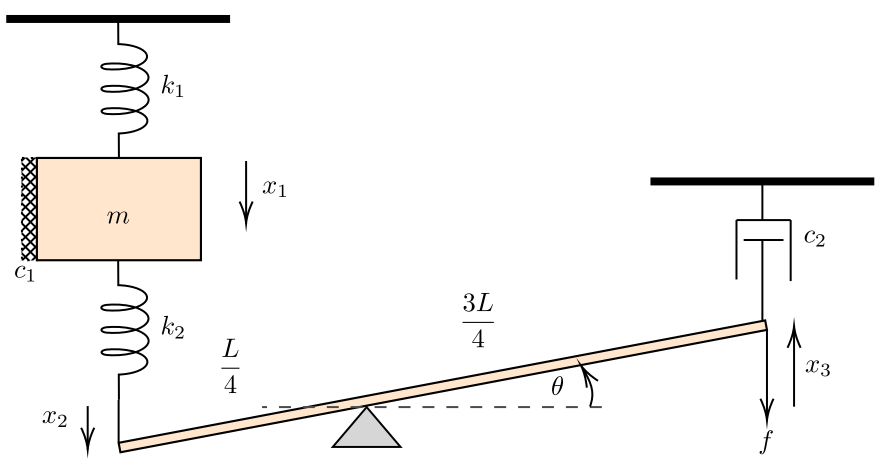
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

c), d), e)

```julia
using Plots, DifferentialEquations

function signal(t)
    tp = rem.(t, 3)
    y = (-1 / 3 * t .+ 5) .* (tp .< 2)
end

function sistem!(dx, x, p, t)
    m1, m2, c, k1, k2, R, g = p
    J = 1 / 2 * m1 * R ^2
    f = signal(t)

    dx[1] = x[2]
    dx[2] = (-1 / J) * (k2 * (x[3] + R * x[1]) * R + c * R^2 * x[2])
    dx[3] = x[4]
    dx[4] = (1 / m2) * (m2 * g - f - k1 * x[3] - k2 * (x[3] + R * x[1]))
end

t = (0.0, 15.0)
p = (10.0, 5.0, 10.0, 15.0, 10.0, 1.0, 9.81)
x0 = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0]

prob = ODEProblem(sistem!, x0, t, p)
sol = solve(prob)

# d)
x = [x[3] for x in sol.u]
predjeni_put = sum(abs.(diff(x)))
println(predjeni_put)

# e)
θ = [x[1] for x in sol.u]
ω = [x[2] for x in sol.u]

plot(sol.t, [θ, ω], lw=2, label=["θ(t)" "ω(t)"])
```



Primer 3. Mehanički sistem prikazan na slici sadrži idealnu polugu i telo mase m.



Za dati sistem odrediti:

a) diferencijalne jednačine,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako su ulazi gravitaciono ubrzanje g i pobudna sila f, a izlazi translatorni pomeraj tela mase m i kraćeg kraja poluge (levi kraj),

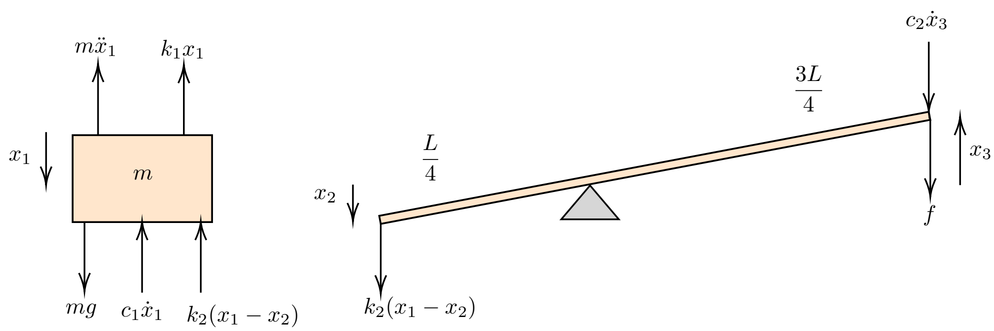
c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih $100s$, ako je pobudna sila $f(t) = sin(t)$, a vrednosti parametara su sledeće: $m = 10$, $c_1 = c_2 =$

10, $k_1 = 15$, $k_2 = 10$, $g = 9.81$, ako je telo mase m u početnom trenutku pomereno za 1 na gore, dok su ostali početni uslovi nule.

d) prikazati promenu brzine tela mase m tokom prvih $20s$,

e) na istom grafiku iscrtati promene pozicija tela mase m i levog kraja poluge.

Rešenje:



a)

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) - mg = 0 \\
&\frac{3L}{4}(f + c_2\dot{x}_3) - \frac{L}{4}k_2(x_1 - x_2) = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

b)

Ukoliko pogledamo jednačinu kojom je opisano ponašanje poluge (druga jednačina iz (7)), možemo primetiti da se u njoj pojavljuju i x_2 i x_3, odnosno pomeraji oba kraja poluge. S obzirom da za datu polugu važi $\dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{L_2}{L_1}$, jasno je da možemo izraziti pomeraj x_3 preko pomeraja x_2 i odnosa dužine krakova poluge: $x_3 = x_2\dfrac{L_2}{L_1} = 3x_2$, što znači da drugu jednačinu iz (7) možemo zapisati kao:

$$
3(f + 3c_2\dot{x}_2) - k_2(x_1 - x_2) = 0 \tag{8}
$$

Prema tome, dati sistem možemo opisati preko tri promenljive stanja: dve za telo mase m (x_1 i $\dot{x}_1$) i jedna za polugu (x_2).

$$
\begin{aligned}
x_1 = x_1 \quad &\rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 \\
x_2 = \dot{x}_1 \quad &\rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(mg - k_1x_1 - k_2(x_1 - x_3) - c_1x_2) \\
x_3 = x_2 \quad &\rightarrow \quad \dot{x}_3 = \frac{k_2(x_1 - x_3) - 3f}{9c_2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m} & -\dfrac{c_1}{m} & \dfrac{k_2}{m} \\ \dfrac{k_2}{9c_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{9c_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{3c_2} \end{bmatrix} u(t) \tag{10}$$

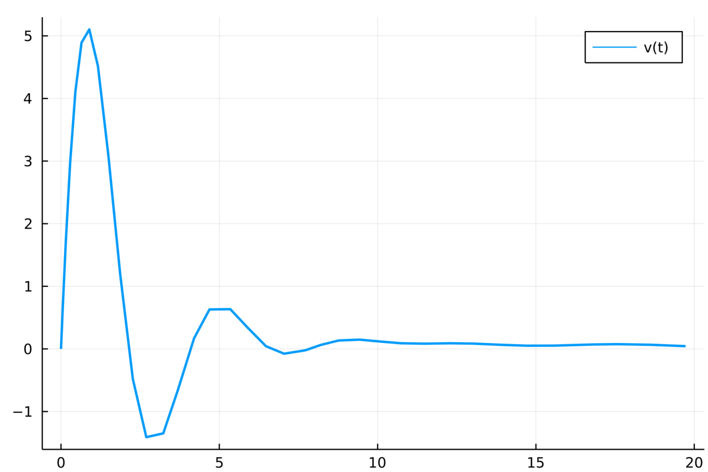
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

c)

```
function sistem!(dx, x, p, t)
    m, c1, c2, k1, k2, g = p
    f = sin(t)
    dx[1] = x[2]
    dx[2] = (1 / m) * (m * g - k1 * x[1] - k2 * (x[1] - x[3]) - c1 * x[2])
    dx[3] = (k2 * (x[1] - x[3]) - 3 * f) / (9 * c2)
end

x0 = [-1.0, 0.0, 0.0]
t = (0.0, 100.0)
p = (10.0, 10.0, 10.0, 15.0, 10.0, 9.81)

prob = ODEProblem(sistem!, x0, t, p)
sol = solve(prob)
```

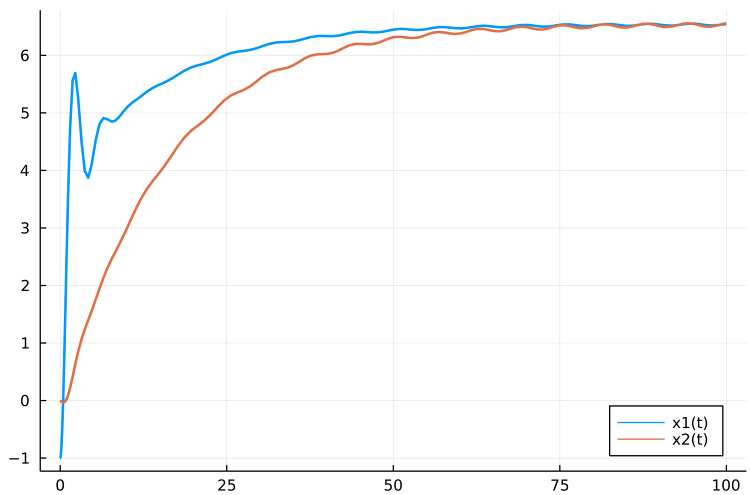
d)

```
v = [x[2] for x in sol.u]
plot(sol.t[sol.t .<= 20], v[sol.t .<= 20], label="v(t)", lw=2)
```



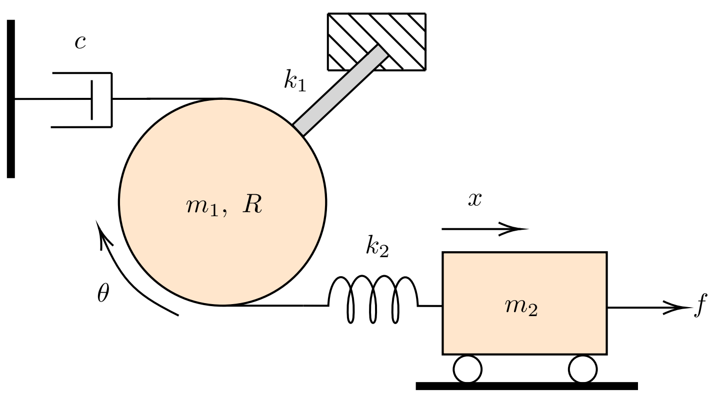
e)

```
x1 = [x[1] for x in sol.u]
x2 = [x[3] for x in sol.u]
plot(sol.t, [x1, x2],
     label=["x1(t)" "x2(t)"],
     legend=:bottomright,
     lw=2,
     yticks=-1:6)
```



3. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Za rotacioni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:



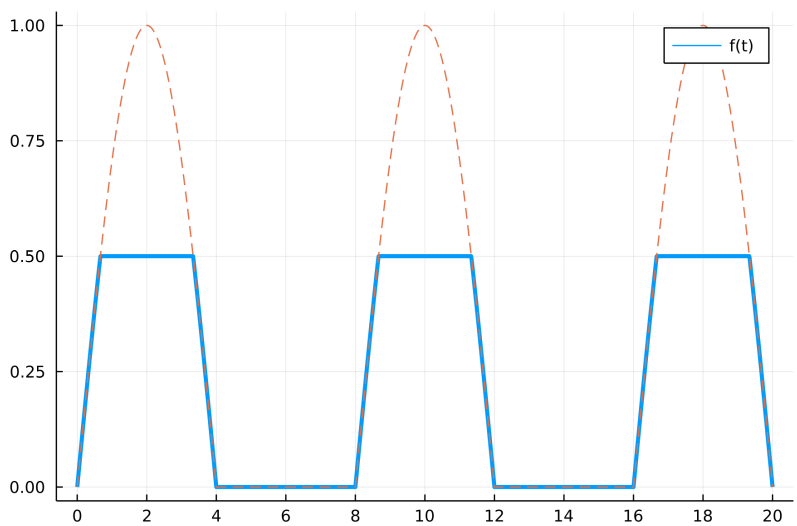
a) diferencijalne jednačine,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako je ulaz pobudna sila f, a izlazi pomeraj i brzina tela mase m_2,

c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih $20s$, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na grafiku, a vrednosti parametara su sledeće: $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $c = 10$, $k_1 = 10$, $k_2 = 15$, $R = 1$, ako je početna ugaona brzina 2 u smeru rotacije diska, dok su ostali početni uslovi nulti.

d) odrediti promenu ugaonog ubrzanja diska u vremenu, i prikazati na istom grafiku promenu ugaone brzine i ubrzanja,

e) na istom grafiku iscrtati promenu pozicije i brzine tela mase m_2 u vremenu.



Zadatak 2. Za rotacioni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:

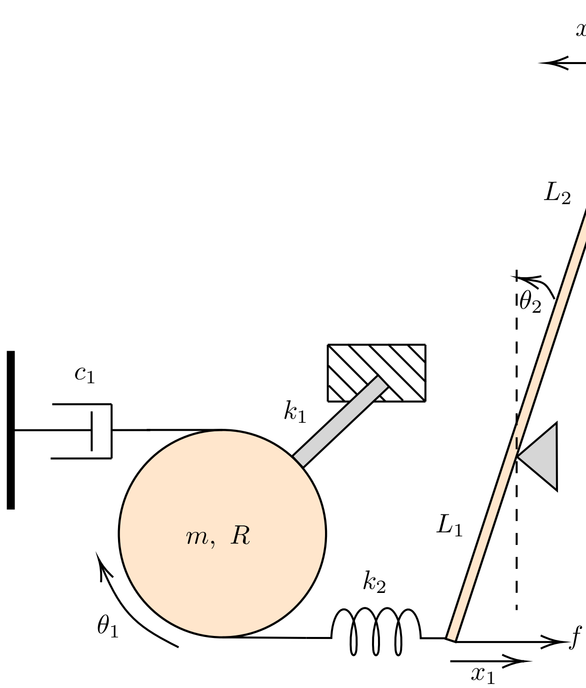
a) diferencijalne jednačine,

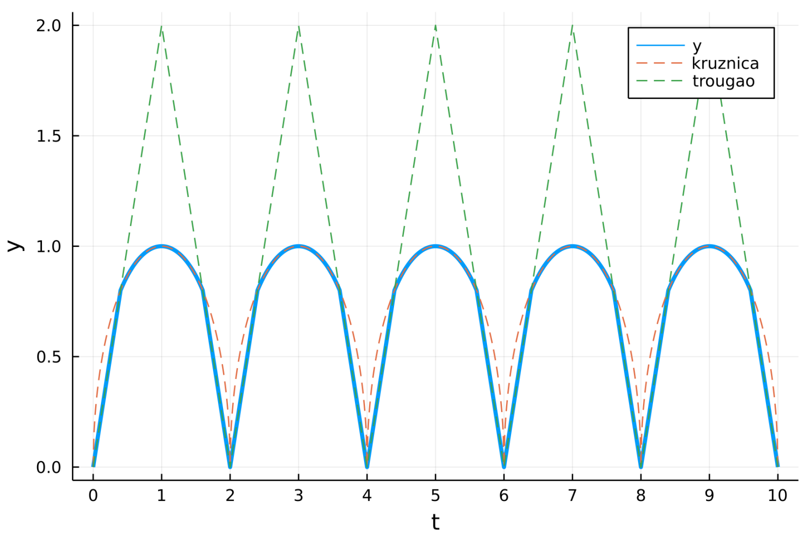
b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako je ulaz pobudna sila f, a izlazi ugaoni pomeraji diska i poluge,

c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih $100s$, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na grafiku (prikazanih je prvih $10s$ signala), a vrednosti parametara su sledeće: $m = 10$, $c_1 = 10$, $c_2 = 8$, $k_1 = 10$, $k_2 = 15$, $R = 1$, $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, za nulte početne uslove.

d) na istom grafiku iscrtati promene ugaonih pozicija oba tela u vremenu,

e) odrediti i iscrtati ugaono ubrzanje tela mase m, i označiti tačku u kojoj je disk dostigao maksimalno ubrzanje.





Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.

- *Julia* programski jezik (sajt) https://julialang.org/
- *Think Julia* (*online* knjiga) https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html.