Linearizacija

Nedeljko Stojaković
Marko Pejić

Novembar, 2021.

Cilj ovog dokumenta je upoznati se sa koracima linearizacije nelinearnih modela i primeniti ih na konkretne probleme.

1. Uvod

Postupak linearizacije podrazumeva postupak dobijanja linearnog modela u okolini radne tačke na osnovu polaznog nelinearnog sistema.
Koraci linearizacije su:

1. Odrediti radnu tačku pisanjem i rešavanjem odgovarajućih algebarskih jednačina
2. Prepisati sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti
3. Zameniti sve nelinearne članove sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red
4. Skratiti konstantne članove u diferencijalnim jednačinama. (Upotrebiti algebarske jednačine koje određuju radnu tačku)
5. Definisati početene vrednosti inkrementalnih promenljivih $\hat{x}(0) = x(0) - \overline{x}$

Linearizaciju je moguće izvršiti i primenom obrasca (1) koji je izveden na osnovu prethodno opisanih koraka. Ako posmatramo matematički model nelinearnog sistema:

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$

nakon određivanja radne tačke sistema, linearizacija nelinearnog modela u okollini radne tačke $(\overline{x}, \overline{u})$ može da se odredi po obrascu:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{x} + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{u} \\ \hat{y} &= \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{x} + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{u} \end{aligned} \tag{1}$$

2. Primeri sa rešenjima

Primer 1. Za dati nelinearni sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 0$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + 2x - 3 + u \\ y &= x \end{aligned}$$

Rešenje:
a) Primenjujemo korake linearizacije

1. Određujemo radne tačke:

$$\dot{x} = 0 \implies x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -3$$

   odakle zaključujemo da imamo dve radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u})$ i $(\overline{x}_2, \overline{u})$, tj. $(1, 0)$ i $(-3, 0)$.

2. Zapisujemo sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti:

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} + \hat{x} \\ y &= \overline{y} + \hat{y} \\ u &= \overline{u} + \hat{u} \end{aligned}$$

   Dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned} (\overline{x} \dot{+} \hat{x}) &= x^2 + 2(\overline{x} + \hat{x}) - 3 + \overline{u} + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= \overline{x} + \hat{x} \end{aligned} \tag{1}$$

   gde je $(\overline{x} \dot{+} \hat{x}) = \dot{\hat{x}}$ jer je $\overline{x}$ konstanta.

3. Menjamo nelinearni član x^2 sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red:

$$F(x) = x^2$$

$$F(\overline{x} + \hat{x}) = F(\overline{x}) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \hat{x} = \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x}$$

   Uvrštavanjem u (1) dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} + 2\overline{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= \overline{x} + \hat{x} \end{aligned}$$

4. Određujemo linearne modele za sve radne tačke, pri čemu će nam konstantni članovi u diferencijalnim jednačinama pokratiti:
   Pošto je $y = x$, odatle sledi da je $\overline{y} = \overline{x}$, tako da se dobija:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} + 2\overline{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x} \end{aligned}$$

Za radnu tačku $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 1 + 2\hat{x} + 2 + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Konstantni članovi se pokrate i konačno dobijamo linearan model u okolini radne tačke $(1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Za radnu tačku $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (-3, 0)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

b) Primenjujemo obrazac (1):
Radne tačke su određene u prvom delu zadatka ($(1, 0)$ i $(-3, 0)$), tako da možemo odrediti linearizovan model, tj. $\dot{\hat{x}}$ i $\hat{y}$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (2x + 2)\Big|_{\overline{x}, \overline{u}} \hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (-3, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Primer 2. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 0$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x - 1)(x - 3) + u \\ y &= x^2\end{aligned}$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - 4x + 3 + u \\ y &= x^2\end{aligned}$$

a) Primenjujemo korake linearizacije

1. Određujemo radne tačke:

$$\dot{x} = 0 \implies (x-1)(x-3) = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$$

odakle zaključujemo da imamo dve radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u})$ i $(\overline{x}_2, \overline{u})$, tj. $(1,0)$ i $(3,0)$.

2. Zapisujemo sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti:

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} + \hat{x} \\ y &= \overline{y} + \hat{y} \\ u &= \overline{u} + \hat{u} \end{aligned}$$

Dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= x^2 - 4(\overline{x} + \hat{x}) + 3 + \overline{u} + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= x^2 \end{aligned} \tag{2}$$

gde je $\dot{\hat{x}} = (\overline{x} \dot{+} \hat{x})$ jer je $\overline{x}$ konstanta.

3. Menjamo nelinearni član x^2 sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red:

$$F(x) = x^2$$

$$F(\overline{x} + \hat{x}) = F(\overline{x}) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \hat{x} = \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x}$$

Uvrštavanjem u (2) dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} - 4\overline{x} - 4\hat{x} + 3 + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} \end{aligned}$$

4. Određujemo linearane modele za sve radne tačke, pri čemu će nam konstantni članovi u diferencijalnim jednačinama pokratiti:
Pošto je $y = x^2$, onda je i $\overline{y} = \overline{x}^2$, tako da se dobija da je $\hat{y} = 2\overline{x}\hat{x}$.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} - 4\overline{x} - 4\hat{x} + 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2\overline{x}\hat{x} \end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= -2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2\hat{x} \end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (3, 0)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= 2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 6\hat{x} \end{aligned}$$

b) Primenjujemo obrazac (1):
Radne tačke su određene u prvom delu zadatka ((1, 0) i (3, 0)), tako da možemo odrediti linearizovan model, tj. $\dot{\hat{x}}$ i $\hat{y}$:

$$\dot{\hat{x}} = (2x-4)\Big|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{x} + \hat{u}$$

$$\hat{y} = 2x\Big|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{x}$$

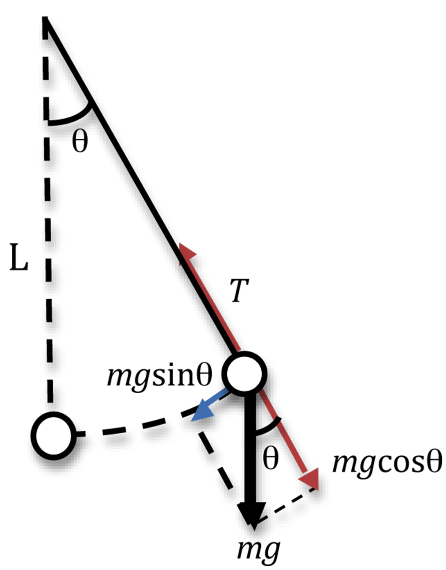
Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$:

$$\dot{\hat{x}} = -2\hat{x} + \hat{u}$$
$$\hat{y} = 2\hat{x}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (3, 0)$:

$$\dot{\hat{x}} = 2\hat{x} + \hat{u}$$
$$\hat{y} = 6\hat{x}$$

Primer 3. Primer linearizacije: Obrnuto klatno



Slika 1: Klatno

Nelinearna dinamika obrnutog klatna data je jednačinom:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin\theta = \tau,$$

Prelazak u stanje prostora definiše stanje kao:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad u = [\tau].$$

Tada je dinamika u obliku stanja prostora:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u.$$

Linearizacija sistema se vrši oko tačke ravnoteže:

$$\theta = \pi, \quad \dot{\theta} = 0, \quad u = 0.$$

Za linearnu analizu, određujemo Jakobijan sistema:

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Ovde je $f_1 = \dot{\theta}$ i $f_2 = \frac{1}{ml^2}\left(\tau - b\dot{\theta} - mgl\sin\theta\right)$. Računamo parcijalne izvode:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = -\frac{g}{l}\cos(\theta), \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{b}{ml^2}.$$

Jakobijan u tački ravnoteže ($\theta = \pi$) je:

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\pi) & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}.$$

Pošto je $\cos(\pi) = -1$, dobijamo:

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}.$$

Za parcijalni izvod po ulazu $u = \tau$ Dakle:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = \frac{1}{ml^2}.$$

Jakobijan po ulazu (B-matrica) je:

$$\nabla_u f = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}.$$

Linearizovana dinamika sistema je tada:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u},$$

gde su:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}.$$

3. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 1$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 3x + 2 + x(1-u) \\ y &= 2x^2 + 3x \end{aligned}$$

Zadatak 2. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 1$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x-5}{1+x^2} + 5u \\ y &= x \end{aligned}$$

Zadatak 3. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 1$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} - 2sin(2x) &= u \\ y &= 2x^2 + 3x \end{aligned}$$

Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *Julia* programski jezik (sajt) https://julialang.org/
- *Think Julia* (*online* knjiga) https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html.