

**INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE  
ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS - ENCE  
MESTRADO EM ESTUDOS POPULACIONAIS E PESQUISAS  
SOCIAIS**

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ESTUDO DA MORTALIDADE DOS SERVIDORES  
PÚBLICOS CIVIS DO ESTADO DE SÃO PAULO: TÁBUA  
DE MORTALIDADE DESTINADA AOS REGIMES  
PRÓPRIOS DE PREVIDÊNCIA SOCIAL**

**Luciano Gonçalves de Castro e Silva**

**Rio de Janeiro  
Agosto de 2008**

# **ESTUDO DA MORTALIDADE DOS SERVIDORES PÚBLICOS CIVIS DO ESTADO DE SÃO PAULO: TÁBUA DE MORTALIDADE DESTINADA AOS REGIMES PRÓPRIOS DE PREVIDÊNCIA SOCIAL**

Dissertação de Mestrado apresentada por Luciano Gonçalves de Castro e Silva, para a obtenção do grau de mestre em Estudos Populacionais e Pesquisas Sociais pela Escola Nacional de Ciências Estatísticas - ENCE do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE.

Orientador

Prof. Kaizô Iwakami Beltrão

Ph. D em Estatística - Princeton University - EUA

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**SILVA, Luciano Gonçalves de Castro e. Estudo da Mortalidade dos Servidores Públicos Civis do Estado de São Paulo: Tábua de Mortalidade destinada aos Regimes Próprios de Previdência Social. Rio de Janeiro, 2008. 239 p. Dissertação de Mestrado. (Mestrado em Estudos Populacionais e Pesquisas Sociais) Escola Nacional de Ciências Estatísticas – ENCE, Rio de Janeiro, 2008. Inclui bibliografia.**



*“Se você conhece o inimigo e conhece a si mesmo, não precisa temer o resultado de cem batalhas. Se você se conhece, mas não conhece o inimigo, para cada vitória ganha sofrerá também uma derrota. Se você não conhece nem o inimigo nem a si mesmo, perderá todas as batalhas...”*

**SUN TZU**

## SUMÁRIO

RESUMO.....	12
ABSTRACT .....	13
CAPÍTULO 1 – AS BASES DA PREVIDÊNCIA SOCIAL DOS RPPS E SUA EXPERIÊNCIA PRÓPRIA DE MORTALIDADE .....	14
1.1) Introdução .....	14
1.2) Formulação da Situação Problema .....	20
1.3) Objetivos, Delimitação e Relevância do Estudo.....	29
1.4) Fundamentação Teórica .....	30
1.5) Questões de Interesse e Hipóteses .....	32
1.6) Organização do Estudo.....	34
CAPÍTULO 2 – TÁBUA DE MORTALIDADE.....	35
2.1) As Tábuas de Mortalidade .....	35
2.2) Um Histórico das Tábuas e do estudo da Mortalidade.....	41
2.2.1) John Graunt, o pioneiro, William Petty, o conselheiro .....	42
2.2.2) Edmond Halley, as tábuas de vida e o cometa.....	43
2.2.3) De Moivre: a primeira formulação matemática .....	45
2.2.4) Johann Peter Süssmilch e a “ordem divina” .....	46
2.2.5) Joshua Milne: a 1ª tábua de mortalidade nos princípios modernos.....	46
2.2.6) Benjamim Gompertz e a 1ª lei de mortalidade .....	48
2.2.7) William Makeham e a acidentabilidade .....	49
2.2.8) Wilhelm Lexis e o conhecido diagrama .....	50
2.2.9) Alfred Lotka, o matemático das populações .....	52
2.2.10) As Tábuas Modelo da ONU de 1955.....	52
2.2.11) O Sistema de Tábuas Modelo de Lendermann e Breas.....	53
2.2.12) As Tábuas Modelo de Coale & Demeny de 1966 e de 1983.....	55
2.2.13) William Brass e o Sistema Logito .....	57
2.2.14) As Tábuas de Mortalidade da ONU para países em desenvolvimento ..	59
2.3) As Tábuas de Mortalidade construídas no Brasil.....	61
2.4) Tipos de Modelos Padrão de Mortalidade.....	66
2.4.1) Representações Matemáticas .....	66
2.4.2) Representações Tabulares.....	67
2.4.3) Modelos Relacionais .....	68
2.5) Alguns Modelos Matemáticos .....	69
2.5.1) Modelo de Opperman (1870).....	71
2.5.2) Modelo de Thiele (1872).....	71
2.5.3) Modelo de Wittstein (1883).....	72
2.5.4) Modelo de Steffenson (1930) .....	72
2.5.5) Modelo de Perks (1932) .....	73
2.5.6) Modelo de Harper (1936).....	73
2.5.7) Modelo de Weibull (1939).....	73
2.5.8) Modelo de Van der Maen (1943) .....	74
2.5.9) Modelo de Brillinger (1960).....	74
2.5.10) Modelo de Beard (1961) .....	75
2.5.11) Modelo de Siller (1979).....	75
2.5.12) Modelo de Heligman & Pollard (1980).....	75
2.5.13) Modelo de Petrioli (1981).....	76
2.5.14) Modelo de Rogers e Planck (1983) .....	77

2.5.15) Modelo de Martinelle (1987) .....	77
2.5.16) Modelo de Kostaki (1992) .....	77
2.5.17) Modelo de Kannisto (1992) .....	78
2.5.18) Modelos Polinomiais .....	78
2.6) A disseminação de um padrão emergente nas tábuas de mortalidade: as causas externas .....	79
2.7) A escolha do modelo adequado .....	81
CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA .....	84
3.1) Cálculo das probabilidades de morte (EMV) .....	85
3.2) Características do Modelo de Heligman & Pollard .....	88
3.3) Características do Modelo de Lee-Carter .....	93
CAPÍTULO 4 – BASE DE DADOS .....	96
4.1) Descrição e coleta dos dados .....	96
4.2) Tratamento e análise dos dados .....	99
CAPÍTULO 5 – APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....	110
5.1) As Tábuas de Mortalidade ajustadas pelo Modelo de Heligman & Pollard para SP .....	110
5.1.1) Comparação com a Tábua de Mortalidade AT-49 .....	124
5.2) O ajuste pelo Modelo de Lee-Carter .....	132
5.2.1) Modelagem utilizada e coeficientes calculados .....	132
5.2.2) Análise de resíduos .....	138
5.2.3) Considerações com relação ao aumento da mortalidade observado para as mulheres em São Paulo .....	143
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	153
Referências Bibliográficas .....	158
Referências Legais .....	165
Anexo A – Tábuas de mortalidade RPPSP-98 ajustadas pelo modelo de Heligman & Pollard e seus respectivos intervalos de 95% de confiança .....	168
Anexo B – Funções calculadas para as tábuas de mortalidade ajustadas .....	170
Anexo C – Análise de sensibilidade dos parâmetros A, B, C, D, E, F, G, H, K, utilizados no Modelo de Heligman & Pollard que ajusta os dados de mortalidade .....	190
Anexo D – Comparações das tábuas ajustadas com tábuas de mercado .....	199
Anexo E – Glossário de termos técnicos atuariais e siglas utilizadas .....	234

### **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1 - Estrutura da Seguridade Social e da Previdência Social no Brasil .....	15
Figura 2 - A Reserva Matemática calculada no Método Prospectivo .....	21

### **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Distribuição dos funcionários por situação de vínculo .....	97
Tabela 2 - Distribuição % dos registros por nível de escolaridade, segmentado por sexo .....	98

Tabela 3 - Distribuição % dos registros por sexo, segmentado por nível de escolaridade.....	98
Tabela 4 - Distribuição dos indivíduos expostos ao risco por sexo e nível de escolaridade em dezembro 2005.....	101
Tabela 5 - Estimativas e intervalo de confiança dos parâmetros do modelo de Heligman & Pollard ajustado - homens.....	123
Tabela 6 - Estimativas e intervalo de confiança dos parâmetros do modelo de Heligman & Pollard ajustado - mulheres.....	123
Tabela 7 - Estimativas e intervalo de confiança dos parâmetros do modelo de Heligman & Pollard ajustado - ambos os sexos.....	124
Tabela 8 - Estimativas e intervalo de confiança dos coeficientes dos polinômios ajustados para as taxas de variação da mortalidade pelo modelo de Lee-Carter - homens.....	134
Tabela 9 - Estimativas e intervalo de confiança dos coeficientes dos polinômios ajustados para as taxas de variação da mortalidade pelo modelo de Lee-Carter - mulheres.....	134
Tabela 10 - Frequência absoluta da situação dos servidores ativos não-desligados (em dezembro de 2005) em relação ao vínculo com o Governo do Estado de São Paulo.....	143
Tabela 11 - Frequência relativa (em relação à classe) da situação dos servidores ativos não-desligados (em dezembro de 2005) em relação ao vínculo com o Governo do Estado de São Paulo.....	144

## **LISTA DE GRÁFICOS**

Gráfico 1 - Probabilidade de morte das tábuas AT-49 ( <i>male</i> ) e AT-83 ( <i>male</i> ) em escala logarítmica.....	23
Gráfico 2 - Expectativa de sobrevida a partir de determinada idade para as tábuas AT-49 ( <i>male</i> ) e AT-83 ( <i>male</i> ).....	24
Gráfico 3 - Probabilidade de morte das tábuas AT-49 ( <i>male</i> ) e PE-82 ( <i>male</i> ) em escala logarítmica.....	27
Gráfico 4 - Expectativa de sobrevida a partir de determinada idade para as tábuas AT-49 ( <i>male</i> ) e PE-82 ( <i>male</i> ).....	28
Gráfico 5 - Exemplo de curva de mortalidade (em escala logarítmica).....	39
Gráfico 6 - Diagrama de Lexis.....	51
Gráfico 7 - Probabilidade de morte ${}_nq_x$ (em escala logarítmica) - Tábua IBGE 2006.....	80
Gráfico 8 - Probabilidade de óbito (em escala logarítmica) - Modelo de Heligman & Pollard - componentes e total.....	92
Gráfico 9 - Diagrama de Lexis.....	100
Gráfico 10 - Distribuição relativa da exposição ao risco por sexo e nível de escolaridade - 1990/2005.....	102
Gráfico 11 - Distribuição por sexo e idade da população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo no final do ano - 1990/2005.....	103
Gráfico 12 - Idade média da população exposta ao risco de óbito - 1990/2005.....	106
Gráfico 13 - População exposta ao risco por idade individual - 1990/2005 (em escala logarítmica).....	108
Gráfico 14 - Número de óbitos na população exposta ao risco por idade individual - 1990/2005 (em escala logarítmica).....	109



Gráfico 15 - Taxa específica de mortalidade (observada e suavizada) por sexo - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005.	112
Gráfico 16 - Taxa específica de mortalidade (observada e suavizada) por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005.....	112
Gráfico 17 - Taxa específica de mortalidade (observada e ajustada) por sexo - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005.	116
Gráfico 18 - Taxa específica de mortalidade (observada e ajustada) por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005.....	117
Gráfico 19 - Taxa específica de mortalidade (ajustada e intervalos de 95% de confiança) por sexo - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005.....	117
Gráfico 20 - Taxa específica de mortalidade (ajustada e intervalos de 95% de confiança) por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 .....	118
Gráfico 21 - Taxa de mortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - homens - observada, suavizada, ajustada e IC de 95%.....	119
Gráfico 22 - Taxa de mortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - mulheres - observada, suavizada, ajustada e IC de 95%.....	119
Gráfico 23 - Taxa de mortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - ambos os sexos - observada, suavizada, ajustada e IC de 95%.....	120
Gráfico 24 - Sobremortalidade das taxas ajustadas e IC de 95% para homens e mulheres - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - com respeito à ajustada para ambos os sexos.....	121
Gráfico 25 - Sobremortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - homens - observada, suavizada e IC de 95% - com respeito à ajustada.....	121
Gráfico 26 - Sobremortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - mulheres - observada, suavizada e IC de 95% - com respeito à ajustada.....	122
Gráfico 27 - Sobremortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - ambos os sexos - observada, suavizada e IC de 95% - com respeito à ajustada .....	122
Gráfico 28 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - homens - 1990/2005 e tabela AT-49 ( <i>male</i> ) .....	126
Gráfico 29 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - mulheres - 1990/2005 e tabela AT-49 ( <i>female</i> ) .....	127
Gráfico 30 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - mulheres - 1990/2005 e tabela AT-49 ( <i>male</i> ) .....	128
Gráfico 31 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - ambos os sexos - 1990/2005 e tabela AT-49 ( <i>male</i> ) .....	129

Gráfico 32 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 ( <i>male</i> ) - homens .....	130
Gráfico 33 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 ( <i>female</i> ) - mulheres .....	131
Gráfico 34 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 ( <i>male</i> ) - mulheres .....	131
Gráfico 35 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 ( <i>male</i> ) - ambos os sexos ....	132
Gráfico 36 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível médio.....	136
Gráfico 37 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível superior.....	136
Gráfico 38 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível médio.....	137
Gráfico 39 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível superior.....	137
Gráfico 40 - Taxas de variação da mortalidade por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo.....	138
Gráfico 41 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível médio .....	141
Gráfico 42 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível superior .....	141
Gráfico 43 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível médio .....	142
Gráfico 44 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível superior .....	142
Gráfico 45 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - homens.....	146
Gráfico 46 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - mulheres.....	146
Gráfico 47 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - homens nível médio.....	147
Gráfico 48 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - homens nível superior.....	148
Gráfico 49 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - mulheres nível médio.....	148
Gráfico 50 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - mulheres nível superior.....	149
Gráfico 51 - Percentual de aposentados, por idade, sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos do civis do executivo do Estado de São Paulo (final de 2005).....	150

Gráfico 52 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - homens nível médio.....	151
Gráfico 53 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - homens nível superior.....	151
Gráfico 54 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - mulheres nível médio.....	152
Gráfico 55 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - mulheres nível médio.....	152

## **RESUMO**

A Previdência Social é um dos maiores programas sociais oferecidos pelo Estado a todos os servidores públicos e trabalhadores da iniciativa privada, e é juntamente com a Assistência Social e a Assistência à Saúde, uma das componentes da Seguridade Social no Brasil. Falando especificamente da previdência pública, todas as unidades federativas que possuam Regime Próprio de Previdência Social – RPPS têm por obrigação proceder a avaliações atuariais com periodicidade anual conforme as normas legais. Essas avaliações destinam-se a estimar o valor dos compromissos dos Sistemas Previdenciários, previstos no seu plano de benefícios, ou seja, as chamadas Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos (RMBC) e Reservas Matemáticas de Benefícios a Conceder (RMBAC). Um Sistema de Previdência é calcado em três bases principais: a Base Normativa, a Base Cadastral e a Base Atuarial. A Base Normativa diz respeito a todas as leis que regem a previdência pública, a Base Cadastral diz respeito ao cadastro individualizado dos dados de cada um dos indivíduos participantes do sistema previdenciário e a Base Atuarial está relacionada com todas as premissas e hipóteses utilizadas pelo atuário para a realização do cálculo atuarial. Nos dias de hoje, a maior dificuldade dentro da Base Atuarial, depois da estimativa da taxa de juros e da taxa de crescimento de salários / benefícios é sem dúvida nenhuma a escolha da tábua de mortalidade a ser utilizada para aquela população específica. Os Regimes Próprios de Previdência Social carecem de tábuas de mortalidade específicas, que realmente reflitam as características biométricas de sua população e têm utilizado tábuas importadas que carregam consigo características de determinados grupos populacionais de outros países, com culturas distintas e experiências de mortalidade diferentes dos servidores públicos brasileiros. Este trabalho apresenta dois objetivos principais. O primeiro objetivo é construir, a partir de dados cadastrais dos servidores públicos civis do poder executivo do Estado de São Paulo no período de 1990 a 2005, tábuas de mortalidade específicas. As tábuas foram construídas desagregando-se pelo sexo masculino e sexo feminino, uma vez que a literatura internacional aponta a existência de um claro diferencial nos níveis de mortalidade para homens e mulheres. A partir dos dados brutos procedeu-se a um ajuste de uma equação matemática proposta originalmente por Heligman & Pollard, que pode ser decomposta em três componentes: mortalidade infantil, mortalidade por causas externas e mortalidade por senescência. O segundo objetivo do trabalho é agregar uma componente que carrega as variações da mortalidade ocorridas ao longo do período de análise, utilizando uma modificação do modelo de Lee-Carter. Como objetivos secundários são feitas comparações com algumas tábuas de mortalidade comumente utilizadas no mercado atuarial.

## **PALAVRAS CHAVE**

mortalidade, tábua de mortalidade, tábua de sobrevivência, tábua de vida, modelos paramétricos, taxa de variação da mortalidade, Regimes Próprios de Previdência Social, Previdência Pública, modelo de Heligman & Pollard, modelo de Lee-Carter.

## **ABSTRACT**

Social Insurance is one of the largest social program offered by the State to all public servants and private workers and represents, jointly with Social Assistance and Health, one of the components of the Social Security System in Brazil. According to the present legislation, all of the municipalities and states that have their own Social Insurance must at least once a year, perform their Actuarial Evaluations. These evaluations have the objective of estimating the value of all obligations foreseen in the benefit plan, in other words, the Actuarial Liability for the active public servants and the Actuarial Liability for the pensioners. A Social Insurance System has 3 main bases: the Normative Basis, the Data Basis and the Actuarial Basis. The Normative Basis is related to all of the legislation and norms that rule Social Insurance, the Data Basis is related to the individual data of all participants in the System and the Actuarial Basis is related to all premises and hypotheses used by the actuary when he does the Actuarial Evaluation. Nowadays, the most common problem in the Actuarial Basis, besides estimation of the rate of return and the rate of salary/benefit increase, is no doubt, the choice of the adequate life table suitable to the given population. Public Systems of Social Insurance lack specific life/mortality tables that really reflect the biometric characteristics of its populations and has been using foreign tables suitable to specific population groups of other countries, with different cultures and mortality experiences. This work has two main objectives. First of all to construct specific life tables by fitting a mathematical equation originally proposed by Heligman & Pollard, for civil servants of São Paulo state based on public servants administrative data for the 1990/2005 period. This mathematical equation can be decomposed into three components: infant mortality, mortality by external causes and mortality by senescence. These tables were constructed for each sex, since international literature has pointed out a significant mortality gender differential. The second objective of this work is to aggregate another component to describe mortality variations along time, using a modification of the Lee-Carter proposal. As secondary objectives some comparisons are made of the tables so obtained to other mortality tables commonly used by the actuarial market.

## **KEYWORDS**

mortality, mortality tables, life tables, parametric models, mortality variation rate, Public Social Insurance System, Heligman & Pollard model, Lee-Carter model.

## **CAPÍTULO 1 – AS BASES DA PREVIDÊNCIA SOCIAL DOS RPPS E SUA EXPERIÊNCIA PRÓPRIA DE MORTALIDADE**

### **1.1) Introdução**

Este trabalho é uma tentativa de proporcionar uma contribuição científica para a previdência pública, com a criação de Tábuas de Mortalidade, baseadas na experiência dos servidores públicos estaduais.

A Previdência Social é um dos maiores benefícios oferecidos pelo Estado a todos os servidores públicos e trabalhadores da iniciativa privada, e é juntamente com a Assistência Social e a Assistência à Saúde, uma das componentes da Seguridade Social no Brasil, conforme reza o artigo 194 da Constituição Federal de 1988.

Dentro do universo da Previdência Social, mais precisamente no que chamamos de Previdência Básica, o cidadão brasileiro pode estar vinculado a dois Regimes distintos: O Regime Geral de Previdência Social (RGPS)<sup>1</sup>, previsto no artigo 201 da Constituição Federal de 1988, de filiação compulsória, para aqueles vinculados à iniciativa privada e/ou tendo seus vínculos empregatícios regidos pela Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), e o Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) dos servidores públicos da União, do Distrito Federal ou mesmo de algum Estado ou Município da federação, conforme previsto no artigo 40 da Constituição Federal de 1988, de filiação também compulsória, quando o indivíduo presta concurso público e tem o seu vínculo empregatício regido pelo estatuto dos servidores. Além da Previdência Básica, existe também o regime de Previdência Complementar, de filiação facultativa e administrativamente organizado de forma autônoma ao RGPS e RPPS, para aqueles que normalmente recebem proventos acima do teto constitucional vigente<sup>2</sup> ou simplesmente desejem perceber uma renda complementar na aposentadoria, previsto no artigo 202 da Constituição Federal de 1988 e oferecido pelas Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC),

---

<sup>1</sup> Administrado pelo Instituto Nacional do Seguro Social – INSS.

<sup>2</sup> O RGPS possui um teto para o pagamento dos benefícios. A partir de 1º de Março de 2008, o teto dos benefícios do Regime Geral passou a ser de R\$ 3.038,99, conforme Portaria MPS nº. 77, de 11 de março de 2008.

também chamadas de Fundos de Pensão, e Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC), normalmente bancos e seguradoras.

Vê-se a importância da previdência complementar<sup>3</sup>, que mesmo para os RPPS's, que têm seus planos de benefícios concebidos em uma modalidade chamada de Benefício Definido<sup>4</sup> e que pagam aposentadorias<sup>5</sup> para seus participantes seguindo os ditames da EC nº 41/03, existe a previsão legal para a criação dos Regimes de Previdência Complementar para os servidores públicos, conforme Emenda Constitucional nº 20 de 15/12/1999.

A figura 1 apresenta um resumo da atual estrutura da Seguridade Social no Brasil, com uma ramificação para a Previdência Social:

**Figura 1 - Estrutura da Seguridade Social e da Previdência Social no Brasil**



fonte: elaborado pelo autor a partir da Constituição Federal de 1988.

<sup>3</sup> Que como o próprio nome já diz, pode ter a função de complementar uma possível diferença negativa entre o valor do benefício de aposentadoria e o salário do indivíduo enquanto ativo.

<sup>4</sup> Ver "Plano de Benefício Definido" no glossário de termos técnicos apresentado no Anexo E.

<sup>5</sup> Os servidores admitidos após a publicação da EC nº. 41/03 passam a não ter mais direito ao benefício integral que era pago até então pelos RPPS's. O benefício passou a ser calculado por ocasião de sua concessão, como sendo uma média aritmética simples das 80% maiores remunerações, utilizadas como base para as contribuições do servidor aos regimes de previdência a que esteve vinculado, desde a competência julho de 1994 ou desde a do início da contribuição, se posterior àquela competência, conforme reza o artigo 1º da Lei nº. 10.887/04, que trouxe detalhamento com relação à metodologia de cálculo a ser utilizada.

Tratando agora mais especificamente da previdência pública dos Regimes Próprios, que teve como um divisor de águas o ano de 1998 com o advento da Lei nº 9.717, a chamada Lei dos RPPS's, todas as Unidades Federativas que possuam Regime Próprio de Previdência Social, têm por obrigação proceder a avaliações atuariais com periodicidade anual conforme as normas legais<sup>6</sup>. Essas avaliações destinam-se a estimar o valor dos compromissos do Sistema Previdenciário, previstos no seu plano de benefícios, ou seja, as chamadas Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos (RMBC) e Reservas Matemáticas de Benefícios a Conceder (RMBAC). Essas Reservas representam, respectivamente em um método de cálculo chamado de Prospectivo<sup>7</sup>, a diferença entre o valor atual dos benefícios futuros e o valor atual das contribuições futuras (ver Anexo E). O somatório dessas Reservas Matemáticas comparado ao atual patrimônio constituído pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) informa a situação na qual se encontra o Sistema Previdenciário<sup>8</sup>. A situação mais almejada pelos RPPS's é a situação chamada de **Equilíbrio Financeiro e Atuarial**, ou simplesmente "EFA", conforme previsto no artigo 40 da Constituição Federal de 1988 com redação posteriormente alterada pela Emenda Constitucional nº 41 de 2003:

"Art. 40. Aos servidores titulares de cargos efetivos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, incluídas suas autarquias e fundações, é assegurado regime de previdência de caráter contributivo e solidário, mediante contribuição do respectivo ente público, dos servidores ativos e inativos e dos pensionistas, observados critérios que preservem o equilíbrio financeiro e atuarial e o disposto neste artigo." *(grifo e negrito do autor) - Redação dada pela Emenda Constitucional nº 41, 19/12/2003.*

Esse dito EFA é condição tão necessária ao bom funcionamento e operacionalidade dos RPPS's, que é ratificado em outras normas como, por exemplo:

---

<sup>6</sup> Ver Lei nº 9.717 / 98 art.1º.

<sup>7</sup> Ver Ferreira (1985, vol IV, pp. 355-62).

<sup>8</sup> Essa situação poderá ser de: equilíbrio (também chamado de Equilíbrio Financeiro e Atuarial), quando as Reservas Matemáticas são iguais ao Patrimônio constituído; déficit, quando as Reservas Matemáticas são maiores que o Patrimônio constituído; ou superávit, quando o Patrimônio constituído é maior que as Reservas Matemáticas.



- no artigo 1º da Lei nº 9.717 / 1998 e no artigo 2º da Portaria MPS nº 4.992 / 1999 que possuem a mesma redação:

“Os regimes próprios de previdência social dos servidores públicos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, dos militares dos Estados e do Distrito Federal deverão ser organizados, baseados em normas gerais de contabilidade e atuária, **de modo a garantir o seu equilíbrio financeiro e atuarial...**” (*grifo e negrito do autor*).

- no artigo 69 da Lei Complementar nº 101 /2000, a chamada Lei de Responsabilidade Fiscal:

“Art. 69. O ente da Federação que mantiver ou vier a instituir regime próprio de previdência social para seus servidores conferirá-lhe o caráter contributivo e o organizará com base em normas de contabilidade e atuária **que preservem seu equilíbrio financeiro e atuarial.**” (*grifo e negrito do autor*).

Um Sistema de Previdência é calcado em 3 bases principais:

- **A Base Normativa;**
- **A Base Cadastral e**
- **A Base Atuarial.**

A **Base Normativa** é representada pela legislação aplicável, em que constam todas as normas relativas ao Sistema Previdenciário em questão. No caso dos Regimes Próprios de Previdência Social existe a Lei Maior que é a Constituição Federal de 1988 e uma série de Emendas Constitucionais, Leis Ordinárias, Leis Complementares, Portarias, Resoluções e Orientações Normativas, dentre outras as que regem a matéria<sup>9</sup>. Apenas como principais exemplos citam-se:

- **Constituição Federal**, de 05 de dezembro de 1988;
- **Emenda Constitucional nº 20**, de 15 de dezembro de 1998;

---

<sup>9</sup> Ver os *links* de acesso às respectivas normas no item “Referências Legais”, no final deste trabalho. As normas citadas estão atualizadas até 07/2008.

- **Emenda Constitucional nº 41**, de 19 de dezembro de 2003;
- **Emenda Constitucional nº 47**, de 5 de julho de 2005;
- **Lei Complementar nº 101**, de 4 de maio de 2000;
- **Lei nº 9.717**, de 27 de novembro de 1998;
- **Lei nº 9.796**, de 5 de maio de 1999;
- **Lei nº 10.887**, de 18 de junho de 2004;
- **Decreto nº 3.788**, de 11 de abril de 2001;
- **Decreto nº 3.112**, de 06 de julho de 1999;
- **Decreto nº 3.266**, de 29 de novembro de 1999;
- **Portaria MPS nº 204**, de 10 de julho de 2008.
- **Portaria MPS nº 142**, de 11 de abril de 2007;
- **Portaria MPS nº 4.992**, de 5 de fevereiro de 1999;
- **Portaria MPS nº 6.209**, de 16 de dezembro de 1999;
- **Resolução BACEN nº 3.506**, de 26 de outubro de 2007.

Uma outra base de um Sistema Previdenciário é a dita **Base Cadastral**. A Base Cadastral é aquela onde constam todas as informações pertinentes, relativas aos participantes ativos e assistidos (tais como: datas de nascimento, datas de admissão, datas de início de benefício, sexo, estado civil, número de dependentes, tempo de contribuição ao INSS, valor do salário, valor do benefício, composição familiar, etc). Uma base cadastral consistente levará a resultados atuariais dentro da verdadeira realidade do sistema em questão sendo a inversa também verdadeira, ou seja, uma base de dados pobre e inconsistente causará vieses na análise, tendo que na maioria das vezes o atuário utilizar-se de hipóteses conservadoras e que aumentam os custos do sistema.

A terceira e não menos importante base de um Sistema Previdenciário é a chamada **Base Atuarial**. A Base Atuarial<sup>10</sup> é composta por todas as premissas, hipóteses e técnicas matemáticas que norteiam o cálculo das Reservas Matemáticas do Sistema Previdenciário. Para o cálculo dessas Reservas o atuário leva em consideração todos os benefícios oferecidos pelo plano, podendo os mesmos serem classificados como Benefícios Programáveis ou Benefícios de Risco, e a partir daí traça o seu respectivo Plano de Custeio. Dentro desse Plano de Custeio será determinado o Regime Financeiro mais adequado para cada um dos benefícios, bem como o método de financiamento a ser empregado para uma eventual capitalização dos recursos, dependendo do benefício em questão. São componentes da Base Atuarial: a taxa de desconto ou taxa de juros, a taxa de crescimento salarial, a taxa de crescimento dos benefícios, a tábua de mortalidade<sup>11</sup> (usada para os eventos morte e sobrevivência), a tábua de entrada em invalidez, a tábua de mortalidade de inválidos, a tábua de rotatividade, etc. Com relação ao Regime Financeiro existem basicamente três tipos: Repartição Simples, Repartição de Capitais de Cobertura e Capitalização (ver Anexo E). Com relação ao método de financiamento, os mais comuns são o Método Agregado (*Aggregate Funding Method*), o Método do Crédito Unitário Projetado (*Project Unit Credit*) e o Método da Idade Normal de Entrada (*Entry Age Normal*)<sup>12</sup>.

Por conseguinte, a qualidade da estimativa dessas Reservas Matemáticas está diretamente relacionada, dentre outras causas, à tábua de mortalidade utilizada no cálculo atuarial<sup>13</sup>, que representa o foco deste trabalho.

Fazendo uma explanação da forma mais concisa possível, uma tábua de mortalidade é uma tabela que apresenta duas colunas. A primeira coluna representa a idade do indivíduo<sup>14</sup> e, a segunda coluna, a probabilidade do mesmo vir a falecer por qualquer que seja a causa, nessa idade<sup>15</sup>.

---

<sup>10</sup> Também chamada de Bases Técnicas.

<sup>11</sup> Que também é chamada de “tábua de vida” ou “tábua de sobrevivência”.

<sup>12</sup> Para maiores detalhes ver Scott (1989 pp.17-68), Winklevoss (1993 pp.140-148), Iyer (1999 pp.27-36) e Booth *et al.* (2005 pp.597-605).

<sup>13</sup> Ainda que a taxa de retorno e a política salarial, dependendo de sua intensidade, tenham maior impacto no cálculo dessas Reservas Matemáticas.

<sup>14</sup> Normalmente variando de 0 à 100 anos.

<sup>15</sup> Essa probabilidade é condicional, ou seja, dado que a pessoa sobreviveu até a idade  $x$ , qual é a probabilidade da mesma não sobreviver até a idade  $x+1$ .

Apesar de serem experiências internacionalmente aceitas, reconhecidas por sociedades de atuários internacionais e locais, em particular pelo Instituto Brasileiro de Atuária (IBA), as tábuas de mortalidade que por lei podem ser utilizadas nos cálculos atuariais dos RPPS's foram trabalhos realizados para regiões de outros países<sup>16</sup> e em outras épocas. Essas características específicas introduzem distorções decorrentes do fato de terem sido:

- ⇒ elaboradas tomando-se como base indivíduos num contexto social específico;
- ⇒ construídas para determinados grupos populacionais que possuem características biométricas distintas;
- ⇒ realizadas em um determinado momento histórico, parte das vezes distante da atualidade;

A conjunção entre países diferentes e períodos de construção pretéritos, insere necessariamente nessas tábuas características sociais, históricas, políticas, econômicas e geográficas bem específicas.

Os  $q_x$  das tábuas de mortalidade utilizadas nos exemplos e comparativos apresentados nessa dissertação são disponibilizados nas páginas da *Society of Actuaries* – SOA e do IBGE (ver ambos em referências bibliográficas).

## **1.2) Formulação da Situação Problema**

Com relação às inúmeras premissas e hipóteses que norteiam o cálculo atuarial previdenciário, as tábuas de vida são aquelas que carregam as características demográficas da população em risco. No plano de benefícios contemplado pelo cálculo atuarial existem os benefícios que são pagos em função do evento gerador “idade avançada e/ou tempo de contribuição” que são as aposentadorias normais (ver Anexo E) e existem os benefícios que são pagos em função do evento gerador “morte”, que são as pensões, sendo a manutenção do pagamento das aposentadorias e pensões feito em função da sobrevivência do indivíduo<sup>17</sup>. Uma determinada tábua de mortalidade pode tanto ser utilizada para o

---

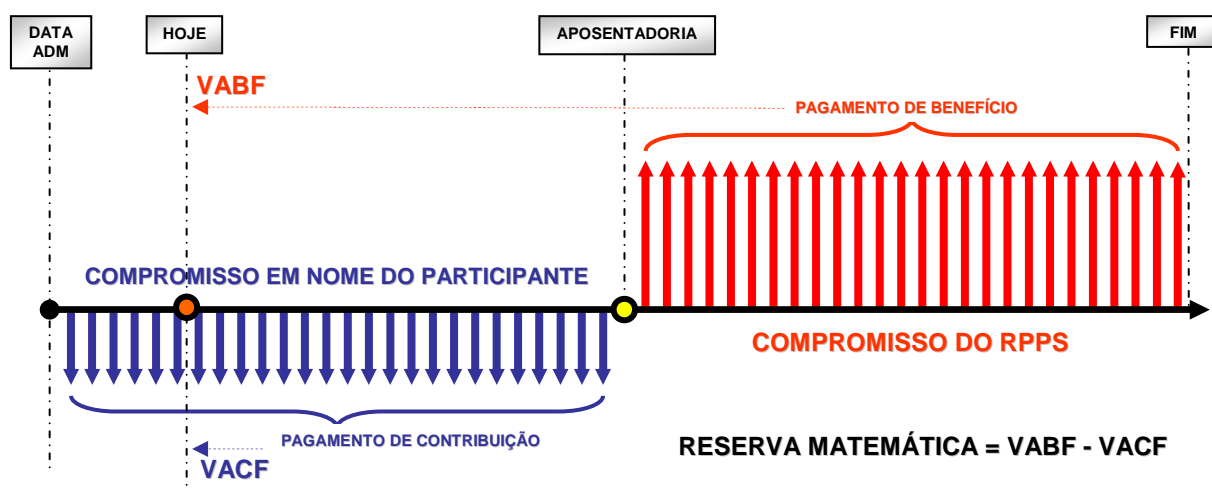
<sup>16</sup> Normalmente Estado Unidos e países europeus.

<sup>17</sup> Existem ainda outros benefícios, e.g., aposentadoria por invalidez ou mesmo os ditos auxílios (auxílio doença, auxílio reclusão, salário família e salário maternidade) que não são objeto desta dissertação.

cálculo dos custos com os fluxos de aposentadorias como para o cálculo da geração das pensões e custos inerentes aos seus fluxos de pagamentos. É por meio das tábuas de mortalidade que são feitas as estimativas de por quanto tempo um servidor irá em média receber o seu benefício de aposentadoria, podendo gerar posteriormente um benefício de pensão, e é por meio das tábuas de mortalidade que se estima por quanto tempo seu cônjuge sobrevivente ou outro dependente irá, em média, receber esse benefício.

A figura 2 é um esquema representando graficamente o cálculo da Reserva Matemática pelo método prospectivo (ver Anexo E) de um servidor hipotético, explicitando o fluxo de benefícios e o fluxo de contribuições e seu valor equivalente no dia de hoje.

**Figura 2 - A Reserva Matemática calculada no Método Prospectivo**



fonte: elaborado pelo autor.

Cada morte para qualquer idade individual  $x$  dentro de determinado grupo pode ser considerada uma variável aleatória apresentando Distribuição de Bernoulli, com probabilidade de morte igual a  $q_x$ . O valor esperado da variável aleatória morte para uma dada idade é a própria probabilidade de morte  $q_x$  apresentada nas tábuas de mortalidade. Quando se toma a variável aleatória número de mortes de indivíduos de uma determinada idade individual  $x$ , considera-se as mesmas possuindo Distribuição Binomial,  $B(N_x, q_x)$ , com parâmetro de tamanho da população em risco com idade  $x$  " $N_x$ ", e parâmetro de probabilidade de morte  $q_x$ .

Como a Reserva Matemática é calculada baseando-se nos  $q_x$  que são valores esperados de variáveis aleatórias, e possuindo a população, experiência de mortalidade segundo determinada tábua, o erro nas estimativas dessas reservas calculadas com esta tábua apresentará apenas uma componente referente à aleatoriedade do processo, ou seja, se em determinada população o regime de mortalidade se conforma à experiência retratada na dita tábua:

### **ERRO => ALEATORIEDADE**

Segundo a Lei dos Grandes Números (ver Spiegel, Murray R. *et al.* – Probabilidade e Estatística, p.95):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Ou seja, sendo  $S_n$  a soma de  $n$  variáveis aleatórias ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) mutuamente independentes, cada uma com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  finitas, então a probabilidade da média aritmética  $S_n/n$  diferir de seu valor esperado  $\mu$  em mais do que  $\varepsilon$  se aproxima de zero quando  $n \rightarrow \infty$ .

Quando se fala de um grupo grande de servidores ( $n$  grande) que possui experiência de mortalidade segundo uma determinada tábua, o estimador da probabilidade de morte/sobrevivência<sup>18</sup> desses servidores deverá ser muito próximo de seu valor esperado (o  $q_x$  ou o  $1-q_x$  por idade, oriundo da referida tábua).

O grande problema de se estimar no cálculo atuarial o valor da Reserva Matemática de um servidor qualquer, utilizando uma tábua de mortalidade que não contemple as características demográficas da população em estudo, é que as estimativas feitas carregarão consigo um erro que agora dependerá não apenas da aleatoriedade inerente ao processo, mas também do viés relativo à diferença entre a tábua utilizada e a verdadeira experiência de mortalidade da população, ou seja:

---

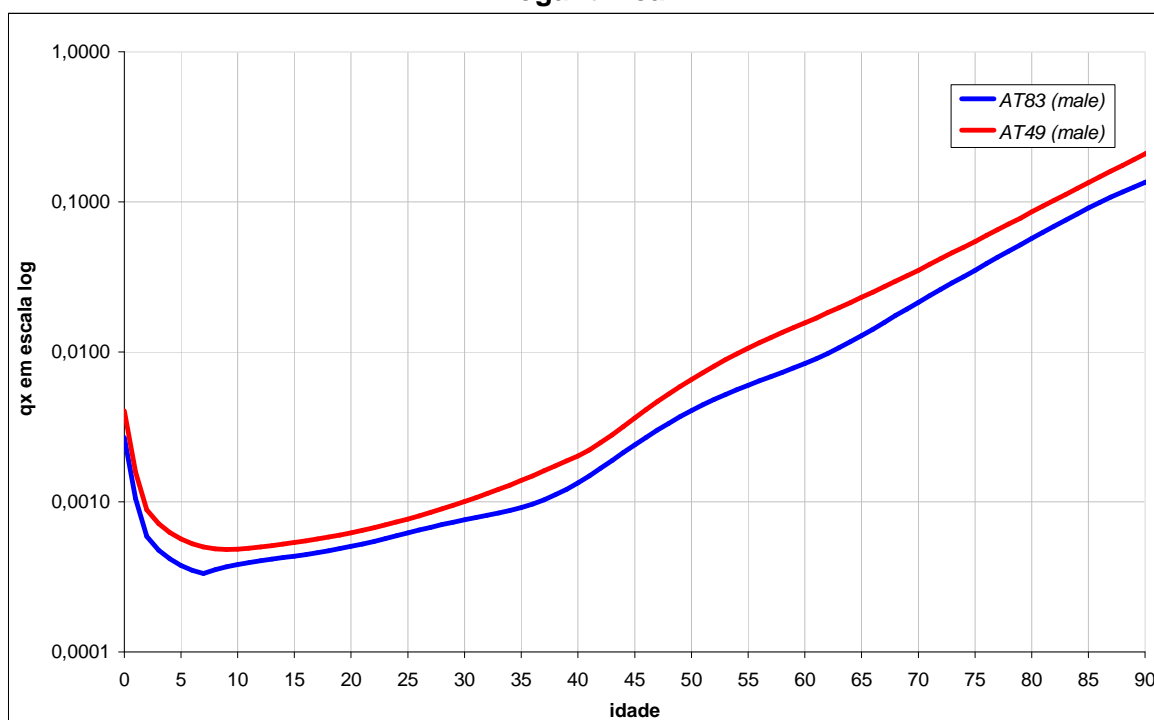
<sup>18</sup> Quando se fala da probabilidade de sobrevivência significa o complemento da probabilidade de morte, ou seja,  $1-q_x$ .

## ERRO => ALEATORIEDADE + VIÉS DA TÁBUA

Como será detalhado mais adiante, um dos objetivos na construção de tábuas específicas de mortalidade para os servidores públicos é justamente eliminar esse viés do erro no cálculo das Reservas Matemáticas.

Para a melhor compreensão do problema existente, como primeiro exemplo, analisa-se o caso mais simples desses vieses que é quando a probabilidade de morte da tábua utilizada é sempre menor do que a experimentada pela população real. No gráfico 1 toma-se como exemplo as tábuas de mortalidade AT-49 (*male*) e AT-83 (*male*). Supondo-se que a tábua utilizada num cálculo atuarial hipotético é a AT-83 (*male*) e a população possui experiência de mortalidade segundo a AT-49 (*male*), conforme mostrado neste gráfico.

**Gráfico 1 - Probabilidade de morte das tábuas AT-49 (*male*) e AT-83 (*male*) em escala logarítmica**

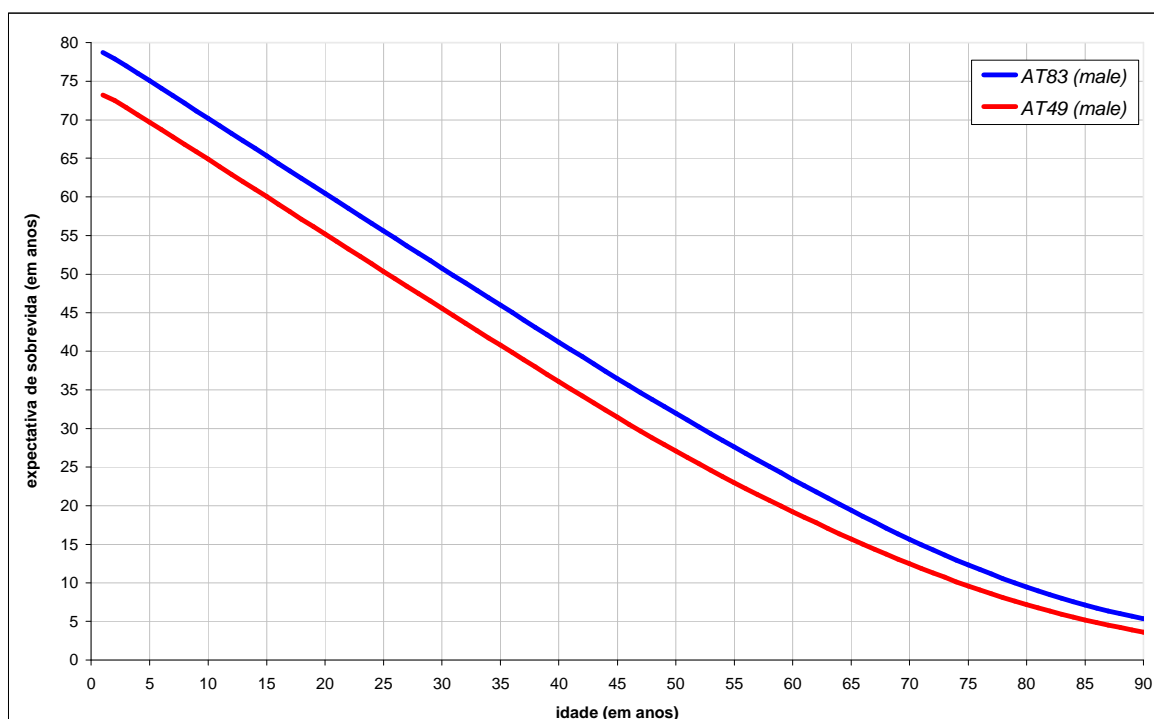


fonte: elaborado pelo autor.

Apenas tecendo um comentário que servirá de subsídio para analisar-se o nível de severidade dos vários tipos de vieses, bem como compreender-se qual dessas situações será mais prejudicial ao sistema, em um cálculo atuarial o custo de um benefício de aposentadoria (evento sobrevivência) é normalmente bem superior

ao custo de um benefício de pensão (evento morte). Para comparar esses valores ver como exemplo o quadro “Plano de Custeio por Benefício” (quadro 3.3) do Demonstrativo dos Resultados da Avaliação Atuarial (DRAA) do RPPS do Estado de São Paulo na página do Ministério da Previdência Social<sup>19</sup> na internet. No exemplo hipotético apresentado, ou seja, se a tábua utilizada nos estudos tiver uma expectativa de sobrevida menor do que a experimentada pela população em risco, as alíquotas de contribuição estipuladas no cálculo atuarial não serão suficientes para acumular os recursos necessários ao pagamento das aposentadorias em um regime de capitalização. Um outro fato importante que precisa ser mencionado é que a tábua utilizada nos cálculos atuariais só será a mesma para o cálculo dos benefícios gerados pelos eventos sobrevivência e morte, no caso de utilização da AT-49 (*male*), que segundo a norma legal<sup>20</sup> vigente representa o limite máximo de taxa de mortalidade para o cálculo dos benefícios gerados pelo evento sobrevivência e o limite mínimo de taxa de mortalidade para o cálculo dos benefícios gerados pelo evento morte. O gráfico 2 apresenta a expectativa de sobrevida calculada para as tábuas AT-49 (*male*) e AT-83 (*male*).

**Gráfico 2 - Expectativa de sobrevida a partir de determinada idade para as tábuas AT-49 (*male*) e AT-83 (*male*)**



fonte: elaborado pelo autor.

<sup>19</sup> Link de acesso disponível nas referências bibliográficas deste trabalho.

<sup>20</sup> Ver Portaria MPS nº 4.992/99 – Anexo1.



Analisando o gráfico 2, observa-se que a tábua de mortalidade utilizada no cálculo atuarial do exemplo apresenta uma expectativa de sobrevida maior<sup>21</sup> do que a experimentada pela população em risco. Neste caso, ao analisar-se pela ótica do benefício de aposentadoria (evento sobrevivência), prever-se-á o pagamento de um valor esperado de fluxo de benefícios maior do que deverá ocorrer na prática e ao analisar-se pela ótica do benefício de pensão (evento morte), prever-se-á um valor esperado para o número de pensões inferior ao da distribuição estatística que deverá ocorrer na realidade. Esse viés explicitado nesse primeiro exemplo, traduzindo para o jargão popular atuarial, acarretará uma superestimação (conservadorismo) nos cálculos pela utilização da referida tábua, pois como é previsto pagar um valor esperado de fluxo de benefício maior do que deverá ser efetivamente experimentado pela população, precisa-se arrecadar um montante também maior de contribuições para serem capitalizadas, no mesmo período de tempo. Isso gera uma necessidade de um aumento no valor das contribuições feitas por patrocinadores e servidores, com intuito da manutenção do EFA<sup>22</sup>. Com isso, o conservadorismo embutido no sistema pelo viés gerado nesse exemplo causa uma injustiça contributiva para todos, apesar da tendência neste caso, da geração de um saldo superavitário em condições normais do mercado de capitais brasileiro.

Agora supondo-se o oposto, ou seja, que a tábua utilizada no cálculo atuarial é a AT-49 (*male*) e a população possui experiência de mortalidade segundo a AT-83 (*male*). Neste segundo exemplo, como pode ser observado no gráfico 2, a tábua de mortalidade utilizada num cálculo atuarial apresenta uma expectativa de sobrevida menor<sup>23</sup> do que a experimentada pela população em risco. Neste caso, analisando pela ótica do benefício de aposentadoria (evento sobrevivência), prever-se-á o pagamento de um valor esperado de fluxo de benefícios menor do que na realidade deverá em média ocorrer, e analisando pela ótica do benefício de pensão (evento morte), prever-se-á a geração de um valor esperado de pensões maior ao

---

<sup>21</sup> No jargão popular dizemos que uma tábua com sobrevida maior “mata menos”.

<sup>22</sup> Segundo o artigo 2º da Lei nº 9.717 / 1998 a contribuição do patrocinador não poderá ser inferior ao valor da contribuição do servidor ativo, nem superior ao dobro desta contribuição. Na prática o que acontece é que o patrocinador acaba tendo que assumir sozinho a cobertura desse déficit, também chamado de Reserva Matemática à Amortizar, uma vez que não é justo punir o servidor público com aumento de sua contribuição previdenciária em função de imperícias ocorridas no histórico administrativo de seu RPPS.

<sup>23</sup> No jargão popular se diz que uma tábua com sobrevida menor “mata mais”.

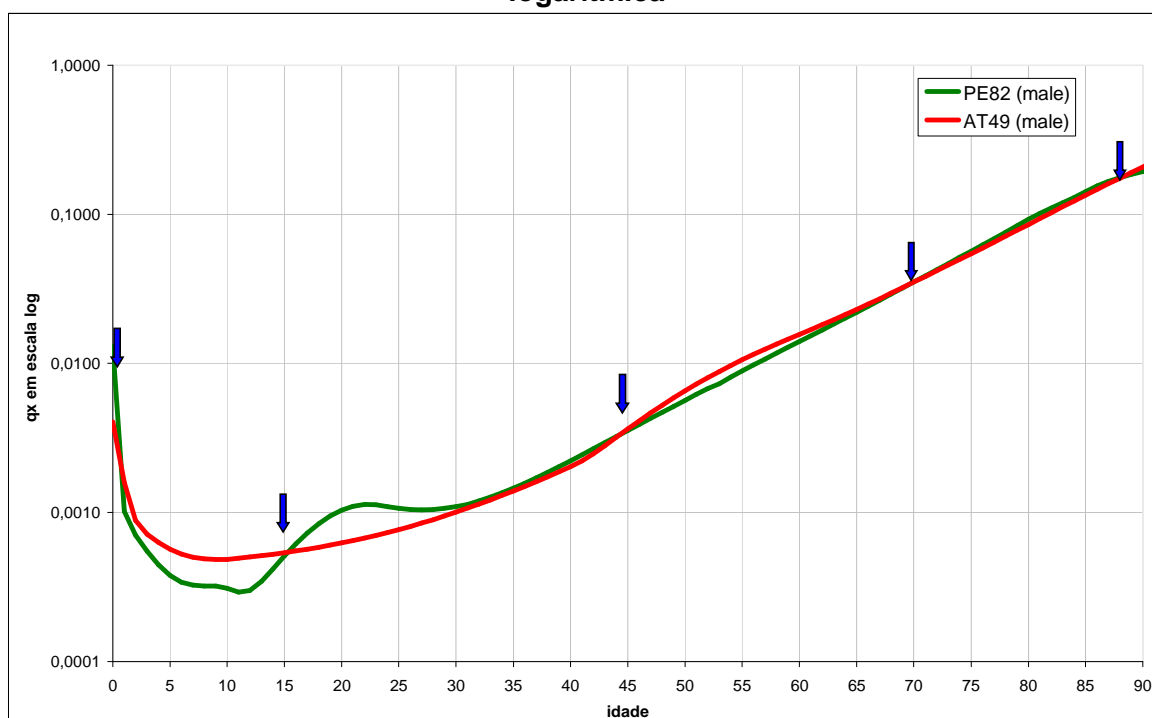
que deverá, em média, ser efetivamente experimentado pela população. Esse viés ocasionado nesse segundo exemplo acarretará uma subestimação nos cálculos pela utilização da referida tábua, pois como se espera pagar um fluxo de benefícios menor do que o real, será arrecadado um montante também menor de contribuições para serem capitalizadas, no mesmo período de tempo. Essa subestimação de valores embutida no sistema por esse exemplo de viés causará a princípio um problema de liquidez no sistema, pois em determinado momento faltarão recursos para o pagamento das aposentadorias e pensões. Nesse estágio o patrocinador terá que interceder e comprometer parte dos seus recursos, orçamentários ou não, para a cobertura desse déficit. Se nada for feito no sentido de uma adequação do Custo Total (Custo Normal mais Custo Suplementar - ver Anexo E) do Sistema, calculado agora em função de uma tábua de mortalidade adequada à experiência da população específica de servidores, no médio e longo prazos o sistema tornar-se-á insolvente e com comprometimento da máquina governamental, pois recursos que *a priori* seriam canalizados para investimentos na saúde, educação ou infra-estrutura, dentre outros, deverão ser direcionados para o pagamento das despesas com os aposentados e pensionistas. Uma outra dificuldade somada a esse déficit técnico gerado nesse segundo exemplo de viés é a questão do limite de comprometimento de gasto com pessoal explicitado na Lei Complementar nº 101, de 04 de maio de 2000. A chamada Lei de Responsabilidade Fiscal prevê em seu artigo 19 que a despesa com pessoal (ativos, inativos e pensionistas) de cada Ente Federativo não poderá exceder a 60% da Receita Corrente Líquida<sup>24</sup> no caso dos Estados e Municípios e 50% no caso da União. Na prática tem-se que muitos entes federativos já atingiram ou estão bem próximos do chamado “limite prudencial” de 95% desses valores, o que torna mais complexa e trabalhosa a maneira de atingir-se o Equilíbrio Financeiro e Atuarial do Sistema, pois uma correção de déficit técnico na maioria dos casos implicará em aumento dos gastos.

---

<sup>24</sup> Somatório das receitas tributárias, de contribuições, patrimoniais, industriais, agropecuárias, de serviços, transferências correntes e outras receitas também correntes, deduzidos no caso da União, dos Estados e Municípios, a contribuição dos servidores para o custeio do seu sistema de previdência e assistência social e as receitas provenientes da compensação financeira citada no § 9º do art. 201 da Constituição, deduzidos especificamente para União, os valores transferidos aos Estados e Municípios por determinação constitucional ou legal, e as contribuições mencionadas na alínea a do inciso I e no inciso II do art. 195, e no art. 239 da Constituição, e no caso especificamente dos Estados, as parcelas entregues aos Municípios por determinação constitucional.

Esses dois exemplos seriam os casos mais simples de discrepância entre a tábua utilizada e a tábua experimentada pela população em risco (probabilidade de morte da população em estudo sempre acima ou sempre abaixo da probabilidade de morte da tábua utilizada no cálculo). O grande complicador ocorre quando esses vieses apresentados nesses dois exemplos se misturam dentro de uma mesma análise, conforme explicitado no gráfico 3, que apresenta como exemplo as tábuas de mortalidade AT-49 (*male*) e PE-82 (*male*). Supondo-se que a tábua utilizada no cálculo é a AT-49 (*male*) e a população possua experiência de mortalidade segundo a tábua PE-82 (*male*).

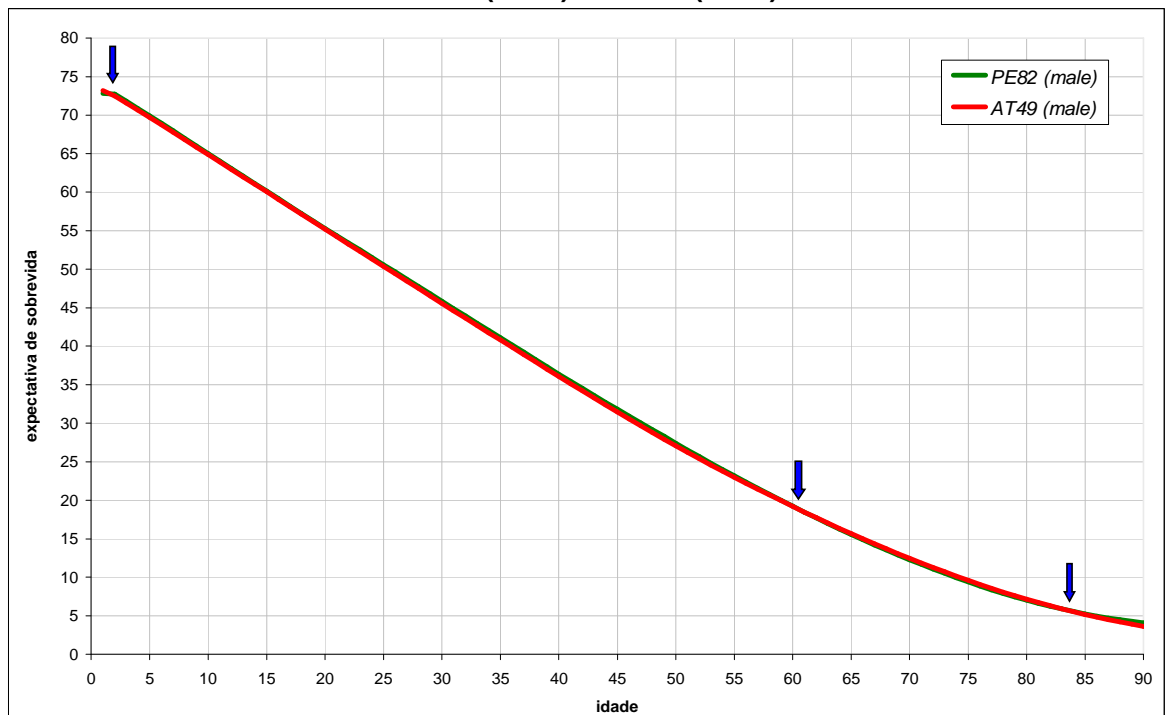
**Gráfico 3 - Probabilidade de morte das tábuas AT-49 (*male*) e PE-82 (*male*) em escala logarítmica**



fonte: elaborado pelo autor.

Analisando o gráfico 3, observa-se que dependendo da idade escolhida, a tábua utilizada no cálculo atuarial vai ter probabilidade de morte superior à experimentada pela população em risco. As setas azuis no gráfico 3 representam os cinco *crossovers* (ver Anexo E) existentes na comparação entre essas duas tábuas. Para esse exemplo não se pode dizer que a tábua utilizada possui expectativa de sobrevida maior ou menor do que a da população, pois esse referencial dependerá de qual idade se estará considerando. O gráfico 4 apresenta a expectativa de sobrevida calculada para as tábuas AT-49 (*male*) e PE-82 (*male*).

**Gráfico 4 - Expectativa de sobrevida a partir de determinada idade para as tábuas AT-49 (male) e PE-82 (male)**



fonte: elaborado pelo autor.

Quando as tábuas apresentam *crossovers* ao longo das idades, existe a possibilidade das curvas de expectativa de sobrevida serem bem parecidas, conforme ocorrido no exemplo explicitado no gráfico 4. Na prática uma grande variedade de situações pode ocorrer gerando vieses nos cálculos atuariais, parte das vezes não tão amenos como os ocorridos na comparação das tábuas AT-49 (male) e PE-82 (male), no exemplo. É importante notar que os *crossovers* das expectativas de sobrevida não obrigatoriamente coincidem com os das taxas de mortalidade.

Essas três situações apresentadas trazem exemplos das distorções ocorridas dentro do sistema previdenciário para o cálculo da Reserva Matemática de um indivíduo. Quando se trata de um grupo grande de indivíduos, observa-se pela Lei dos Grandes Números, que a parcela do erro referente à aleatoriedade do processo tende a zero, restando apenas a parte do erro relativa ao viés ocasionado entre a divergência de tábuas.

Com base na análise do viés de divergência de tábuas percebe-se claramente a necessidade de se utilizar a experiência específica de mortalidade dos servidores públicos brasileiros, no cálculo atuarial de seus RPPS's.

### **1.3) Objetivos, Delimitação e Relevância do Estudo**

Dentro dessa dissertação tem-se como principal objetivo a construção de tábuas de mortalidade para homens, mulheres e ambos os sexos, baseadas na experiência de mortalidade da população de servidores públicos do Estado de São Paulo, bem como se fará uma análise da variação dessa mortalidade ao longo dos anos de estudo.

Como objetivos secundários, se fará um comparativo de tábuas de mortalidade que podem ser utilizadas nas avaliações atuariais dos Regimes Próprios (além das tábuas IBGE-2000 e IBGE-2006), com as tábuas de mortalidade ajustadas para os funcionários públicos do Estado de São Paulo.

Tendo em vista as características de um Regime Próprio de Previdência Social, percebe-se que para o seu perfeito funcionamento o cálculo atuarial é ferramenta imprescindível, pois através do mesmo é que são determinados os compromissos/responsabilidades atuais e futuras do sistema, bem como o montante de recursos a serem capitalizados ao longo dos anos.

Como o custo de um sistema previdenciário está intrinsecamente relacionado com a expectativa de sobrevivência de cada um de seus segurados e beneficiários, existe a necessidade de uma avaliação acerca da correta tábua de mortalidade a ser adotada pelo sistema previdenciário em questão.

Se as tábuas utilizadas são defasadas ou não ajustadas às verdadeiras características biométricas da população em questão, as mesmas como já se viu anteriormente produzem vieses na avaliação atuarial, que resultarão em desequilíbrios futuros para o sistema previdenciário. Parte das vezes esses problemas são de difícil solução, podendo no limite, comprometer o bom andamento

da máquina governamental em função dos seus recursos ficarem cada vez mais comprometidos com o pagamento das aposentadorias e pensões.

Com a construção de tábuas de mortalidade que efetivamente espelhem as características biométricas da população em risco, os Regimes Próprios de Previdência Social poderão estimar com maior precisão os valores de suas Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos e de Benefícios a Conceder e assim traçar um planejamento estratégico com intuito de perenizar o tão almejado Equilíbrio Financeiro e Atuarial, ainda que o mesmo ainda dependa de uma série de outros fatores inerentes ao sistema previdenciário.

#### **1.4) Fundamentação Teórica**

Os RPPS's brasileiros carecem de experiências próprias com relação ao estudo da mortalidade de seus servidores. Até o presente momento pouquíssimos trabalhos foram realizados com base neste tipo de informação, o que deixa uma lacuna que necessita ser preenchida. Como a longevidade dos indivíduos tem se mostrado dinâmica e crescente ao longo do tempo, as tábuas de mortalidade necessitam estar sempre atualizadas, para que esses sistemas públicos de previdência possam ter o seu equilíbrio garantido.

No Brasil, alguns estudos sobre a mortalidade específica de determinados grupos populacionais baseados em dados administrativos já foram realizados. Pode-se citar como exemplos mais recentes:

- Conde (1991) construiu uma tábua de mortalidade baseada em informações dos funcionários e dirigentes da Empresa de Alimentos Sadia, que serviu de balizador para os cálculos atuariais de seu Fundo de Pensão (EFPC), a "FAF - Fundação Atílio Francisco Xavier Fontana";
- Beltrão, Sobral, Leal e Conceição (1995) montaram uma tábua para os funcionários do Banco do Brasil utilizando-se de informações do cadastro de sua Caixa de Previdência no período de 1940 a 1990;

- Ribeiro & Pires (2001) agregaram à tábua construída para os funcionários do Banco do Brasil em 1995, informações até o ano 2000;
- Beltrão & Sugahara (2002) ajustaram uma tábua de mortalidade para a população coberta pelos seguros privados, baseando-se em dados administrativos fornecidos pela Superintendência de Seguros Privados – SUSEP;
- Beltrão & Sugahara (2002) construíram uma tábua de mortalidade para os funcionários públicos civis federais do poder executivo, baseados nos dados administrativos do Sistema Integrado de Administração de Pessoal – SIAPE do Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão, no período de 1993 à 1999;
- Beltrão & Sugahara (2005) agregaram ao trabalho realizado em 2002 para população coberta pelos seguros privados uma comparação por tipo de cobertura e produto;
- Beltrão & Sugahara (2007) atualizaram à tábua de mortalidade previamente construída em 2002 para os funcionários públicos civis federais do poder executivo com informações até 2004, e agregaram uma componente que explicita as mudanças diferenciais na mortalidade desses indivíduos ocorridas em função do tempo, usando uma modificação do modelo originalmente proposto por Lee & Carter (1992);

Algumas dessas pesquisas citam especificidades com relação à mortalidade de determinados grupos populacionais dentro de uma mesma sociedade. Esses mesmos estudos apontam que o nível e a estrutura da mortalidade variam de uma população para população e, mesmo numa população específica, variam no tempo, apresentando diferenciais com relação à mortalidade de homens e mulheres, com relação à mortalidade em função do nível de escolaridade e mesmo renda.

*“Estudos sobre taxas de mortalidade têm sido desenvolvidos considerando a influência de fatores econômicos como, por exemplo, a riqueza. Todavia, devido à dificuldade de mensuração dessa variável é comum o uso de uma outra variável altamente correlacionada com a renda, como, por exemplo, a instrução ou a ocupação, mais facilmente mensuráveis” (Vallin, 1979 apud Beltrão 2002, p.7).*

Baseado nesses estudos afirma-se que a mortalidade dos funcionários públicos do Estado de São Paulo carrega consigo suas características específicas, que dificilmente serão descritas por alguma experiência internacional, e a grande vantagem de trabalhar-se com os dados administrativos do Governo do Estado é que nas probabilidades de morte calculadas, tanto o número de mortes (numerador do cálculo da taxa) quanto o número de expostos ao risco (denominador do cálculo da taxa) provêm da mesma fonte, eliminando o então problema do sub-registro das informações ou o problema do dígito preferencial, muito comum quando são calculadas as taxas de mortalidade baseadas em informações de óbitos oriundas do registro civil e informações da população em risco oriundas dos Censos (ver Beltrão 2002, p. 9). Existe a possibilidade (pelo menos em algumas UF's) de um subregistro de mortes dos funcionários, mas imagina-se que isto não seria o caso em São Paulo e outros estados mais afluentes.

### **1.5) Questões de Interesse e Hipóteses**

Conforme se evidenciou anteriormente, o uso de uma tábua de mortalidade embasada na experiência própria dos servidores públicos tem como objetivo fornecer uma maior segurança nas estimativas das Reservas Matemáticas do plano de benefícios e conseqüentemente dar uma maior tranquilidade aos servidores públicos que fazem parte dos RPPS's.

Sabe-se que nem todos os RPPS's têm a preocupação em armazenar informações históricas sobre seus servidores ativos, aposentados e pensionistas, tanto para aqueles que ainda mantém vínculo com o sistema, quanto para aqueles que já não fazem mais parte do plano, quer por morte ou mesmo exoneração, o que dificulta muito a reunião de experiências para a construção de suas tábuas específicas de mortalidade. Por conseguinte, considera-se um privilégio trabalhar com experiências próprias no presente trabalho, uma vez que tais estatísticas no Brasil são precárias e mesmo quando possuem certa consistência, são de difícil acesso.



Diante do exposto a questão que se coloca é a seguinte: será que as curvas de sobrevivência das famílias de tábuas<sup>25</sup> comumente utilizadas nos cálculos atuariais dos RPPS's realmente aderem à experiência de sobrevivência dos servidores públicos em questão e sua evolução no tempo? Caso essa resposta não seja positiva, o tão esperado EFA dos RPPS's brasileiros poderá ser prejudicado.

O modelo metodológico utilizado neste trabalho para a construção das tábuas de mortalidade do RPPS do Estado de São Paulo pode, sem dúvida nenhuma, ser empregado para outros RPPS's estaduais, municipais ou mesmo para o RPPS da União como fizeram Beltrão & Sugahara (2007), todavia, o resultado apurado levou em consideração apenas os dados dos servidores públicos de um estado brasileiro específico, que possuem suas características próprias.

Existe a plena consciência de que para realizar-se um trabalho com maior abrangência, como por exemplo, a construção de tábuas de mortalidade para as regiões Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul do Brasil, ou mesmo uma tábua de mortalidade nacional ou famílias de tábuas modelo, ter-se-ia a necessidade de se reunirem as experiências de muitos ou, de preferência, todos os 26 estados da federação mais o distrito federal, pois haveria uma massa maior de expostos ao risco de morte e com isso uma maior regularidade de dados em todas as faixas etárias.

Desta forma, a pretensão não é esgotar o assunto nesse trabalho específico, mas sim, através da experiência de mortalidade do RPPS do Governo do Estado de São Paulo, definir um protocolo para a construção de uma tábua de mortalidade para os servidores públicos do Brasil.

Uma hipótese que pode ser levantada é se as tábuas construídas para os servidores públicos de SP poderão ou não ser utilizadas como experiência própria para os outros RPPS's da federação.

---

<sup>25</sup> Como as famílias: AT (*Annuity Table*), CSO (*Commissioner's Standard Ordinary*), GAM (*Group Annuity Mortality*), dentre outras.

## **1.6) Organização do Estudo**

Essa dissertação está dividida em seis capítulos, sendo esta Introdução, o Capítulo 1. O Capítulo 2 apresenta a revisão da literatura, descrevendo em linhas gerais o tema mortalidade, as tábuas de vida, um breve histórico sobre as tábuas e sobre o estudo da mortalidade, as tábuas de mortalidade construídas no Brasil, os tipos de modelo padrão de mortalidade, dentre outros. O Capítulo 3 apresenta a Metodologia utilizada, descrevendo os estimadores utilizados para o cálculo das probabilidades de morte, bem como descreverá o modelo de Heligman & Pollard e o modelo de Lee-Carter, utilizados respectivamente para o cálculo da função matemática da mortalidade e de sua variação no tempo. O Capítulo 4 trata da base de dados, onde será feita uma descrição da população em estudo, os procedimentos da coleta dos dados e o tratamento e análise estatística dos mesmos. O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos para a população de funcionários públicos civis do poder executivo do Estado de São Paulo, desagregando por sexo e nível de escolaridade. No último capítulo, o Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e tecidas as devidas considerações. Depois disso são apresentadas as referências utilizadas nessa dissertação, segmentadas em Referências Bibliográficas (livros, textos, *papers*, trabalhos, etc.) e Referências Legais (legislação citada). Alguns anexos também são disponibilizados. O Anexo A apresenta as tábuas de mortalidade ajustadas e seus respectivos intervalos de confiança de 95%. O Anexo B apresenta algumas funções calculadas para essas tábuas. O Anexo C apresenta uma análise de sensibilidade dos parâmetros utilizados no modelo de Heligman & Pollard (1980) que ajusta os dados de mortalidade. O Anexo D apresenta uma série de comparações entre as tábuas ajustadas e as tábuas comumente utilizadas nos mercados previdenciário e segurador brasileiro. O Anexo E apresenta um glossário de termos técnicos atuariais e siglas utilizadas.

## CAPÍTULO 2 – TÁBUA DE MORTALIDADE

Neste capítulo apresenta-se o conceito de tábua de mortalidade, sua principal aplicabilidade no cotidiano das sociedades, um breve histórico de tábuas de mortalidade no mundo, bem como alguns trabalhos relativos ao tema realizados no Brasil, alguns dos principais modelos matemáticos existentes, destacando também um padrão emergente existente nas curvas de mortalidade, relacionado às causas externas.

### 2.1) As Tábuas de Mortalidade

*“A tábua de mortalidade ou tábua de vida, é a ferramenta mais completa para a análise da mortalidade de uma população, sendo seu estudo de interesse tanto para os demógrafos como para os diversos profissionais vinculados aos temas da saúde pública e planejamento, em uma grande variedade de problemas, dentre os quais se podem mencionar: a estimação do nível e da tendência da mortalidade, a análise da mortalidade por causas, os estudos de fecundidade, estrutura, dinâmica e crescimento populacional. Outra importância do estudo da mortalidade diz respeito à análise das diversas características socioeconômicas, tais como: a composição da força de trabalho, a população em idade escolar e a regulação dos sistemas previdenciários.”<sup>26</sup>*

(Ortega, 1987, prologo, p.vii)

Ratificando as palavras ditas por Ortega (1987), sintetiza-se então a tábua de mortalidade como um instrumento teórico que permite medir as probabilidades de sobreviver ou morrer em determinado período, para uma população exposta a este risco, em função da idade. Essa ferramenta fornece a mais completa descrição estatística da mortalidade de um determinado grupo de indivíduos, constitui a base

---

<sup>26</sup> Tradução do autor.

do modelo de população estacionária<sup>27</sup> e sua técnica é amplamente utilizada por demógrafos, atuários e estatísticos ao redor do mundo, despertando também interesse nos inúmeros profissionais que trabalham com políticas públicas, notadamente aquelas ligadas à saúde, previdência social, serviço social e planejamento estratégico.

As tábuas de mortalidade são classificadas em função de duas características específicas: quanto a sua forma de construção e quanto ao intervalo de idades. Com relação à forma de construção as tábuas podem ser de dois tipos: Longitudinais ou Transversais; com relação ao intervalo de idades, são classificadas em Abreviadas ou Completas.

Para construir uma Tábua de Vida Longitudinal, deve-se observar uma coorte de indivíduos (de determinada região) durante um intervalo de tempo que vai do nascimento dos indivíduos até a morte do último indivíduo, ou seja, até a extinção do grupo. Desta forma conseguir-se-ia apurar, para cada uma das idades ou mesmo por faixas etárias, o número de pessoas expostas ao risco de morte e dentre estas pessoas, aquelas que faleceram em um determinado período de tempo. Coletadas essas informações, dividi-se o número de óbitos em cada idade  $x$  pelo número de expostos ao risco com mesma idade, obtendo a chamada de Taxa Específica Mortalidade (TEM). A partir desse processo utiliza-se a metodologia que fornecerá o melhor ajuste para a curva de mortalidade em função dessas taxas específicas calculadas. A Tábua de Mortalidade Longitudinal também é chamada de Tábua por Gerações ou ainda Tábua por Coorte. Apesar desse tipo de tábua apresentar a vantagem de obtermos as taxas de mortalidade de um único grupo específico em diferentes idades, esse método empírico é completamente impraticável, pois se levaria muito tempo para coletar os dados de toda uma geração, entre o nascimento das pessoas e a extinção do grupo.

Na prática, as tábuas mais utilizadas são as Tábuas de Vida Transversais. Essas tábuas são construídas a partir da experiência de mortalidade observada durante um curto período de tempo (por exemplo, 1, 5 ou 10 anos), por todas as

---

<sup>27</sup> Ver Namboodiri (1996, p.172-76), Newell (1998, p.120-22), Rowland (2003, p.268) e Weeks (2005, p.333-34).

gerações/coortes de uma população real. Desta forma, observa-se uma coorte hipotética de indivíduos que estarão expostos, em cada idade, à força de mortalidade  $\mu_x$  do instante em que foi coletada a informação. Isso é o que se chama de coorte sintética. As Tábuas de Mortalidade Transversais também são chamadas de Tábuas de Momento.

Com relação ao intervalo de idades, são ditas Tábuas Completas, aquelas em que se pode calcular as chamadas funções da tábua (ver Anexo B), para todas as idades variando de 0 a  $\omega$ <sup>28</sup> (ômega) e são consideradas Tábuas Abreviadas aquelas apresentadas por faixas etárias (normalmente quinquênais ou decenais). Salienta-se que normalmente essas tábuas abreviadas possuem as idades conjugadas em faixas etárias a partir dos 5 anos de idade, apresentando dados de forma completa para cada uma das idades de 0, 1, 2, 3 e 4 anos, uma vez que esse é um intervalo de grande variação da mortalidade, e informação básica para o cálculo da mortalidade infantil e da mortalidade de crianças com até 4 anos.

Para construir uma tábua de vida de abrangência nacional ou mesmo regional, precisa-se conhecer de forma detalhada o quantitativo de pessoas expostas ao risco de morte por idade e a ocorrência dos óbitos nessas diversas idades. Infelizmente apenas as localidades<sup>29</sup> onde o desenvolvimento político, econômico e social proporcionou uma perfeita manutenção ao longo do tempo de um banco de registros fidedignos e completos, dispõem-se de tais estatísticas.

Na prática, as regiões menos desenvolvidas<sup>30</sup> possuem um conhecimento insuficiente com relação às suas estatísticas vitais<sup>31</sup>. Esta delicada situação desencadeou inúmeros esforços por parte dos estudiosos na demografia, em busca de soluções metodológicas alternativas que conseguissem sanar os problemas das lacunas biométricas existentes. A ferramenta de maior destaque para o conhecimento do comportamento da mortalidade nessas regiões menos favorecidas é chamada de Família de Tábuas-Modelo de Mortalidade.

---

<sup>28</sup> Ômega é considerado a idade em que não existem mais indivíduos vivos. Normalmente varia entre 100 e 115 anos.

<sup>29</sup> Países membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OECD.

<sup>30</sup> Países da América Latina e Caribe, África e Sudeste da Ásia.

<sup>31</sup> Nascimentos e Mortes.

Entendem-se essas Famílias Modelo como um conjunto de tábuas que contemplam diversos níveis de mortalidade, apresentando a característica específica de um padrão evolutivo de mortalidade ao longo do tempo.

Segundo Ortega (1987, pp. 02-05), dentro do campo demográfico existem cinco características principais com relação às tábuas de mortalidade. São elas:

1. Descrição do comportamento da mortalidade por idades, de suma importância, pois a intensidade da mortalidade muda muito em função dessa variável.

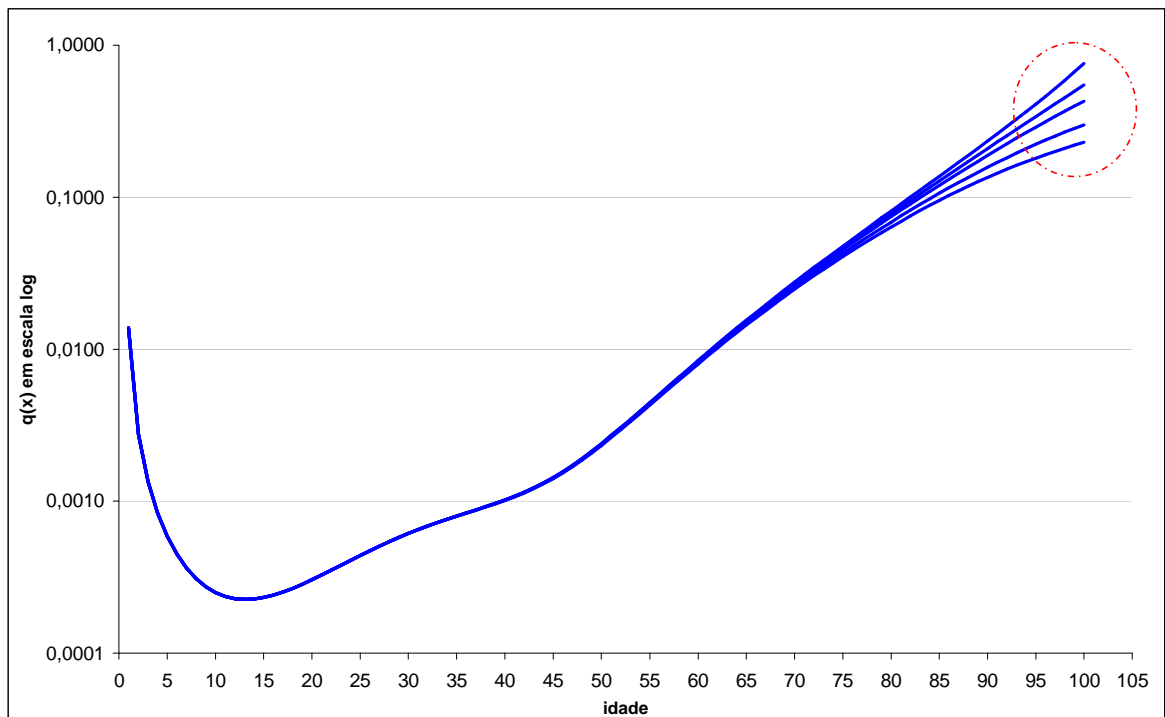
A mortalidade é alta no começo da vida, logo depois baixa rapidamente até um mínimo que normalmente acontece próximo das idades de 10 a 12 anos, a partir da qual aumenta vagarosamente até mais ou menos 35 ou 40 anos e depois aumenta mais rapidamente chegando a superar os níveis das primeiras idades. O gráfico 5 apresenta um exemplo de curva de mortalidade ( $q_x$ )<sup>32</sup>. Existem várias teorias que descrevem como seria o comportamento da curva de mortalidade nas idades avançadas<sup>33</sup>. Como não se dispõe de estatísticas suficientes que determinem um padrão específico da curva de mortalidade para as idades mais avançadas, qualquer uma das trajetórias marcadas dentro do círculo vermelho seriam teoricamente possíveis. Dentre os especialistas no assunto, não existe um consenso sobre como deveria ser a curva para as idades próximas dos 100 anos, apesar de existirem como citam Beltrão e Sugahara (2002), evidências da existência de um retardamento na taxa de crescimento da mortalidade na quarta idade, estudos mostram controvérsias com relação à causa. Os mesmos autores destacam também que fatos simples como a mistura de populações, cada qual com uma curva de mortalidade específica, podem implicar em desaceleração e mesmo decréscimo da taxa de mortalidade como função da idade.

---

<sup>32</sup> Essa curva de mortalidade foi gerada utilizando-se o modelo de Heligman & Pollard de nove componentes ( $A, B, C, D, E, F, G, H$  e  $K$ ). Os valores utilizados para os parâmetros foram:  $A=0,0035$ ,  $B=0,75$ ,  $C=0,2$ ,  $D=-0,0045$ ,  $E=5$ ,  $F=72$ ,  $G=0,00004$ , sendo que para o parâmetro  $K$  utilizou-se cinco valores distintos:  $-0,5$ ,  $0$ ,  $0,5$ ,  $1,5$  e  $2,5$ .

<sup>33</sup> Para maiores detalhes ver Wachter and Finch (1997), Goldsmith (2006) e Goldsmith (2007).

**Gráfico 5 - Exemplo de curva de mortalidade (em escala logarítmica)**



fonte: elaboração do autor.

Obs: Esse comportamento da mortalidade apresenta graficamente a forma de um “J”, que é mais ou menos geral para todos os países, sendo que o nível de mortalidade, que sofre influência direta de variáveis como tais como sexo, renda ou escolaridade, assim como a relação existente entre as diversas idades, varia consideravelmente de país para país. Por exemplo, existem países que possuem uma mortalidade infantil e juvenil relativamente baixa com relação à mortalidade das idades adultas e avançadas e existem outros onde acontece o oposto.

2. As tábuas de vida permitem obter probabilidades e outras medidas convencionais acerca da mortalidade, seja para se calcular o número de sobreviventes de determinada população, seja para se combinar com probabilidades de outros grupos etários ou para derivar relações analíticas entre as diversas variáveis demográficas. Por exemplo, pode-se combinar a probabilidade de sobreviver desde o nascimento até uma determinada idade  $x$ , com os nascimentos do passado, com o intuito de obter-se o número estimado de pessoas em determinado momento.

3. Além de descrever o comportamento da mortalidade em função das idades, uma tábua de vida proporciona uma medida resumo acerca da mortalidade que é chamada de “esperança de vida ao nascer” e simbolizada por  $e_0$ . Essa estatística possui a vantagem de não ser influenciada pela distribuição etária da população e é simples e fácil de ser calculada (ver Anexo B).
4. A tábua de vida pode ser entendida como um modelo teórico da população, chamado de população estacionária. Essa dita população é obtida quando se mantêm a estrutura dos nascimentos e o perfil da mortalidade constantes ao longo do tempo. Como consequência dessas suposições, a população total e a distribuição por idades permanecem constantes, sendo a taxa de natalidade igual à taxa de mortalidade, ocasionando um crescimento natural igual a zero. Este modelo fornece as relações de sobrevivência necessárias para projetar-se a população por idades e realizarem-se estudos acerca da estrutura e da dinâmica populacional.
5. O estudo das tábuas de mortalidade ajuda a encontrar soluções para uma série de problemas do cotidiano dos profissionais que se dedicam à questão populacional. Dentre as vantagens em se trabalhar com tábuas de mortalidade, cita-se:
  - A possibilidade de estimação do nível e tendência de mortalidade de uma população;
  - A possibilidade de realização de uma análise sobre as causas da mortalidade e conseqüente avaliação de programas de saúde;
  - A possibilidade de realização de estudos acerca da estrutura, dinâmica e crescimento da população;
  - A possibilidade de análise de diversas características socioeconômicas tais como: a composição da força laboral, a população em idade escolar e a regulação dos sistemas de aposentadorias e pensões.

Além disso, como se sabe, a mortalidade em uma população é uma das três componentes que determinam o seu tamanho ao longo do tempo. Pode-se então determinar o quantitativo de pessoas em uma determinada população em um



instante de tempo específico, analisando a população em um instante imediatamente anterior e conjugando as três componentes fundamentais: **nascimentos, mortes e migrações**. A dita equação compensadora ou equação básica da demografia define o tamanho de qualquer população, em qualquer instante de tempo, em função dessas componentes e da população num instante anterior:

$$POP_{(t+1)} = POP_{(t)} + \underbrace{(N_{[t,t+1]} - M_{[t,t+1]})}_{\text{CRESCIMENTO NATURAL}} + \underbrace{(I_{[t,t+1]} - E_{[t,t+1]})}_{\text{SALDO MIGRATÓRIO LÍQUIDO INTERNO}}$$

Onde:

$t$  = instante de tempo qualquer.

$Pop_{(t)}$  = população em  $t$ .

$N_{[t,t+1]}$  = nascimentos entre  $t$  e  $t+1$ .

$M_{[t,t+1]}$  = mortes entre  $t$  e  $t+1$ .

$I_{[t,t+1]}$  = imigração interna entre  $t$  e  $t+1$ .

$E_{[t,t+1]}$  = emigração interna entre  $t$  e  $t+1$ .

Em função do exposto, percebe-se mais uma vez a nítida importância das tábuas de vida como premissas nos estudos demográficos e atuariais, e também no planejamento estratégico governamental, principalmente no que diz respeito às áreas de Previdência Social (estudo da longevidade), Saúde (estudos das causas de morte, vacinas, demanda hospitalar), Educação (população em idade escolar) e Trabalho (população em idade ativa - PIA), dentre outras.

## 2.2) Um Histórico das Tábuas e do estudo da Mortalidade

Para uma melhor compreensão acerca da importância das tábuas e do estudo da mortalidade, precisa-se entender a partir de quando o mesmo foi iniciado e como foi a sua evolução ao longo dos séculos.

A história nos revela que a primeira tábua de mortalidade que se tem notícia foi organizada na época da Roma Clássica pelo prefeito Domitius Ulpianos (Ferreira, 1985, v.II, p.208) que estudou os documentos sobre nascimentos e mortes, mas foi apenas no século XVII, na Inglaterra, que começaram as primeiras tentativas de cálculo da probabilidade de sobrevivência dos indivíduos, onde o marco inicial foi o trabalho realizado pelo mascate/mercador de aviamentos (*haberdasher*) inglês John Graunt.

*“Considerando que para 100 indivíduos nascidos vivos, cerca de 36 deles morreram antes mesmo de completar de 6 (seis) anos de idade, e que apenas um sobreviveu até os 76 (setenta e seis) anos. Temos sete décadas entre 6 (seis) anos e 76 (setenta e seis) anos, e procuramos seis números médios proporcionais de óbitos entre os 64 indivíduos sobreviventes na idade de 6 (seis) anos e o único indivíduo que sobreviveu até os 76 (setenta e seis). Descobrimos que esses números médios proporcionais de óbitos são muito próximos da realidade, apesar dos seres humanos não morrerem em percentagem exata, nem em frações.”<sup>34</sup>*

(Graunt, 1662, p.69)

A seguir apresenta-se um breve histórico sobre os estudos da mortalidade:

### 2.2.1) John Graunt, o pioneiro, William Petty, o conselheiro

As primeiras idéias sobre as tábuas de vida foram desenvolvidas no século XVII, mais precisamente em 1662 pelo inglês **John Graunt (1620-1674)**. Em sua obra<sup>35</sup> foi apresentada uma referida geração de pessoas, a qual se reduzia gradativamente em função das mortes ocorridas (Ortega, 1987, prólogo, p. viii).



<sup>34</sup> Tradução do autor.

<sup>35</sup> Graunt (1662).

As observações de John Graunt publicadas em 1662 constituíram o primeiro exemplo do “método estatístico” e fizeram com que lhe desse o título de “**Inventor da Ciência Atuarial**”. (Ferreira, 1985, p.34)

Essa tábua desenvolvida por Graunt apesar de muito incipiente, representou um grande avanço nos estudos, desde um simples cálculo da taxa bruta de mortalidade até um novo modo de representação dos padrões de mortalidade por idade. Em seu trabalho, Graunt (1662, pp. 69-70), desenvolveu a seguinte tabela:

---

Dos 100 indivíduos nascidos vivos, 64 estavam vivos aos 6 anos de idade. A partir disso, temos que:	
Aos 16 anos.....	40
Aos 26 anos.....	25
Aos 36 anos.....	16
Aos 46 anos.....	10
Aos 56 anos.....	6
Aos 66 anos.....	3
Aos 76 anos.....	1
Aos 80 anos.....	0

---

Nota: grafia original.<sup>36</sup>

Despertado o interesse pelo assunto, um grande número de matemáticos de diferentes nações começou a prestar o seu apoio à causa, colaboração essa que foi de inestimável valor para o desenvolvimento da Ciência Atuarial. Dentre eles cita-se **William Petty (1623-1687)** (ou Sir William Petty), membro da “*Royal Society of London*”, amigo e conselheiro de Graunt que segundo historiadores teria escrito grande parte dos seus trabalhos (Weeks, 2005, p.74).



William Petty

### 2.2.2) Edmond Halley, as tábuas de vida e o cometa

Em seguida, uma importante etapa que caracterizou os primeiros estudos efetivamente mais elaborados com relação à sobrevivência das populações foi a elaboração das tábuas de vida de Halley, publicadas pelo astrônomo inglês **Edmond**

---

<sup>36</sup> Tradução do autor.

**Halley (1656-1742) em 1693**, ficando também mundialmente famoso pelo cálculo que realizou para obter a órbita do cometa que foi batizado com seu nome.

Sua publicação de 1693 é citada até hoje como um dos marcos na evolução do estudo e pesquisa acerca da mortalidade.

Essas tábuas foram baseadas nos registros de nascimentos e mortes dos anos de 1687 até 1691 na cidade polonesa de Breslau (Ortega, 1987, prólogo, p.viii).

A partir desses dados, Halley utilizou-se das técnicas relativas às tábuas de vida para determinar que a expectativa de vida em Breslau, capital da província da Silésia (atual Polônia) entre 1687 e 1691, era de 33,5 anos (Dublin *et al.*, 1949 *apud* Weeks 2005, p.74).



Edmond Halley

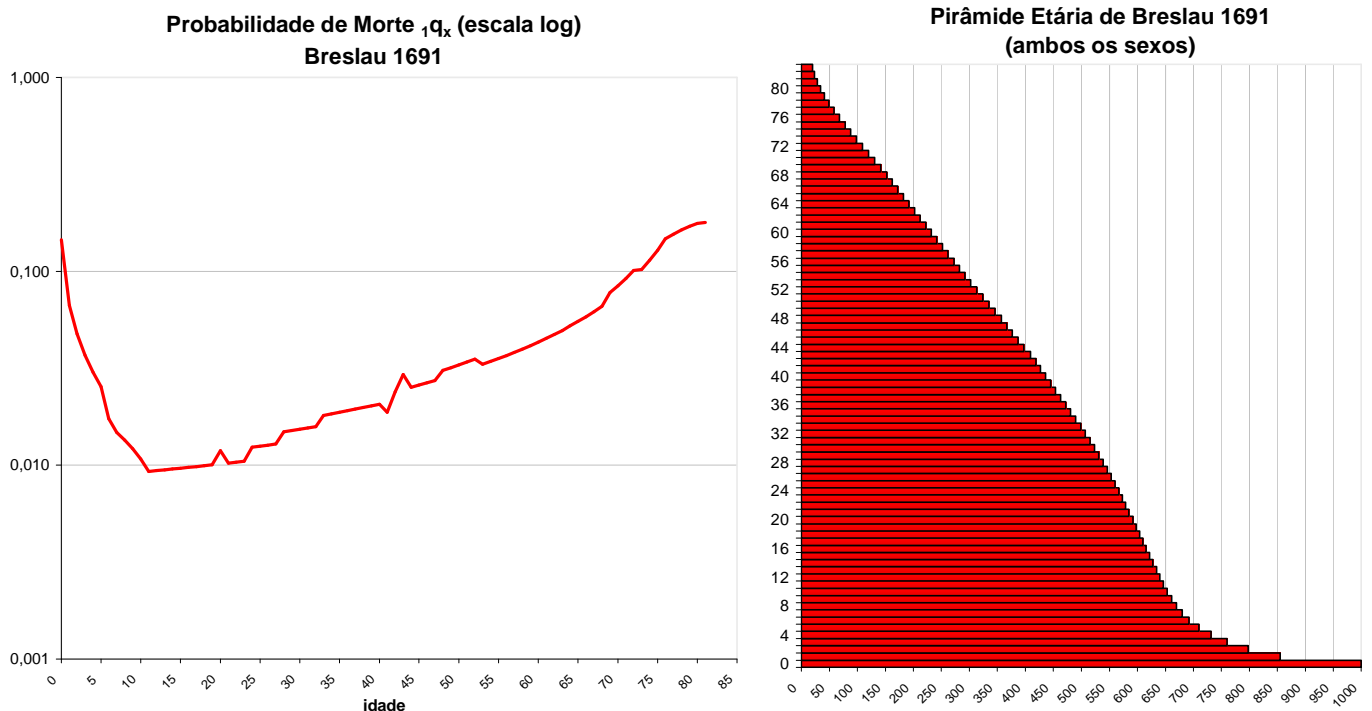
*“Afigura-se que durante os cinco anos mencionados (de 87 a 91, inclusive), haviam nascido em 6.193 pessoas e tinham sido enterradas 5.869, ou seja, 1.238 pessoas nascidas (em média) por ano, 1.174 pessoas enterradas (em média) por ano; consequentemente o crescimento (médio) do número de pessoas foi de aproximadamente 64 por ano, cerca da 20ª (vigésima) parte dos nascimentos, situação essa atribuída às mortes dos indivíduos que estavam a serviço do Imperador, na guerra. Mas sendo essas informações contingentes, e os nascimentos certos de ocorrerem, eu suponho que o povo de Breslaw irá crescer, em média, 1.238 nascimentos por ano. Destes, em função das mesmas tabelas, 348 indivíduos (em média) morrerão antes de completar 1 (um) ano de idade e 890 indivíduos (em média) completarão o primeiro ano de vida e, de igual modo, 198 pessoas (em média) morrerão nos cinco anos compreendidos entre as idades de 1 (um) e 6 (seis) anos, da mesma forma que 692 pessoas (em média) estarão vivas aos 6 (seis) anos. A partir desta idade, as crianças começam a ficar mais resistentes e a morrer menos; parece que de todo o Povo de Breslaw irá morrer anualmente conforme a seguinte tabela, onde a linha superior mostra a idade e a linha seguinte o número de pessoas que morrem por ano com aquela idade.”<sup>37</sup>*

(Halley, 1693, p.599)

---

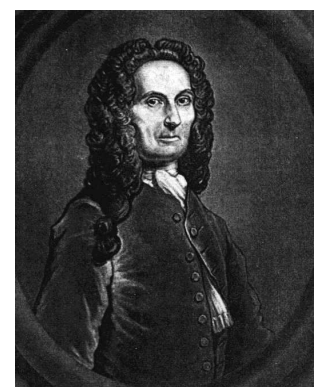
<sup>37</sup> Tradução do autor.

Os gráficos a seguir representam respectivamente, da esquerda para a direita, a probabilidade de morte  ${}_1q_x$  em escala logarítmica e a pirâmide etária para ambos os sexos, calculadas a partir dos dados de Halley (1693, p.600) e referentes à cidade polonesa de Breslau.



### 2.2.3) De Moivre: a primeira formulação matemática

Em 1725, **Abraham de Moivre (1667-1754)**, um francês que ainda rapaz fixou residência em Londres, preparou o “primeiro tratamento sistemático de probabilidade e sua aplicação às contingências da vida” (Ferreira, 1985, p.39). Em sua obra, De Moivre (1725) propôs um modelo de lei de mortalidade, que apesar de muito simples, representou um avanço nos estudos demográficos.



Abraham De Moivre

A fórmula proposta por de Moivre foi a seguinte:

$$l_x = k \left( 1 - \frac{x}{86} \right), \text{ para } 12 \leq x \leq 86 \text{ e } k=\text{constante}$$

De Moivre reconheceu que sua fórmula representava uma aproximação muito grosseira acerca da mortalidade humana. Todavia seu objetivo maior era com essa fórmula simplificar o cálculo dos valores das anuidades (ver Anexo E), o que naquela época representava uma árdua tarefa (Jordan, 1975, p. 21).

Para os propósitos desse trabalho, o modelo proposto por De Moivre não possui validade prática, uma vez que sua função de sobrevivência decresce linearmente com a idade, fato este fora dos padrões reais dos indivíduos.

#### **2.2.4) Johann Peter Süssmilch e a “ordem divina”**

Em 1741, um membro do clero prussiano chamado **Johann Peter Süssmilch (1707-1767)**, publicou a primeira edição de sua obra<sup>38</sup> onde demonstrou regularidades em diferentes eventos populacionais, mais precisamente com relação à estrutura populacional, taxas de natalidade e taxas de mortalidade para diferentes anos na região da Prússia. O seu volume teve o nome de “A Ordem Divina” (tradução para o português), pois por ser religioso, Süssmilch acreditava que por detrás desses eventos existia a mão divina governando a sociedade humana. Süssmilch é considerado “o pai da demografia alemã”.

#### **2.2.5) Joshua Milne: a 1ª tábua de mortalidade nos princípios modernos**

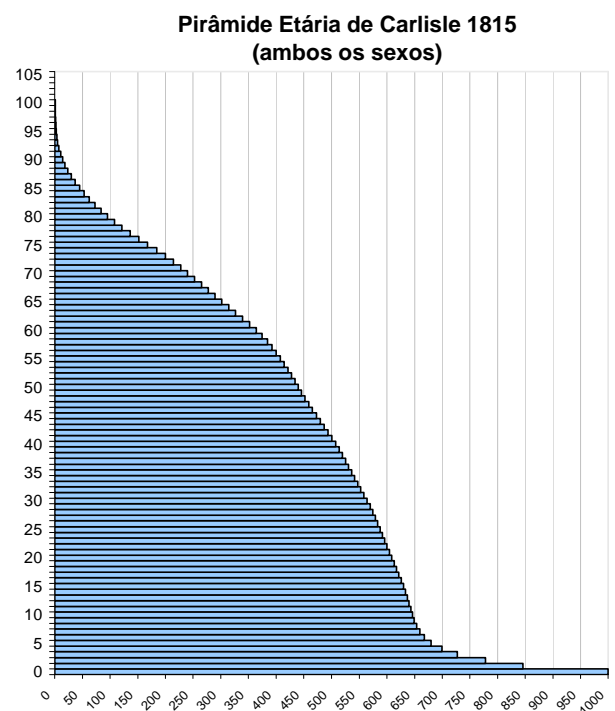
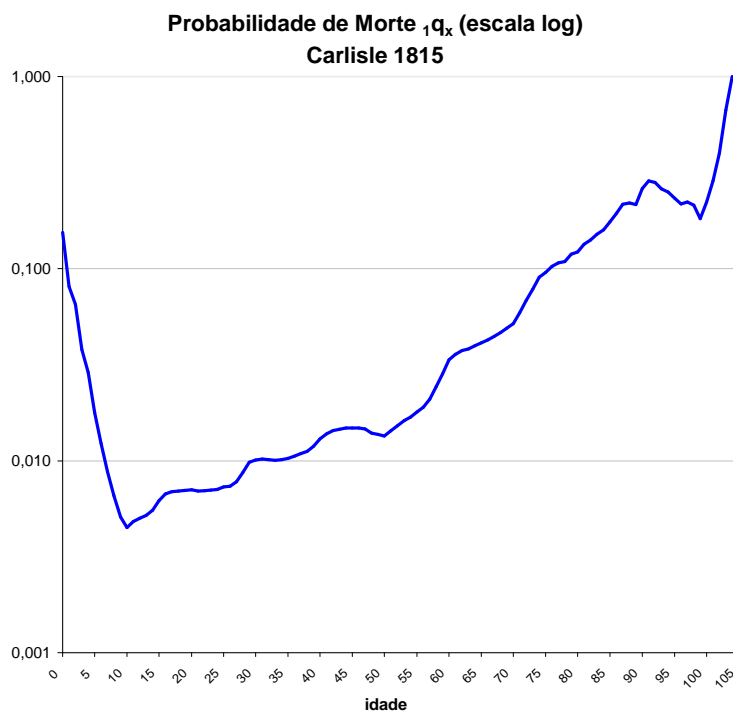
No início do século XIX foi construída a primeira tábua de mortalidade considerando os princípios atuariais modernos. Em 1815, **Joshua Milne (1776-1851)**, atuário da “*Sun Life Assurance Society*”, elaborou para a cidade inglesa de Carlisle uma tábua de vida considerando as informações de morte e a população exposta a esse risco. Baseado nessa nova tábua obteve-se a esperança de vida ao nascer de 38,7 anos para ambos os sexos combinados (Ortega, 1987, prólogo, p. viii). Na sua obra, Milne (1815) utilizou dados de populações que freqüentavam duas paróquias na cidade de Carlisle, entre 1779 e 1787, sendo os mesmos enumerados em faixas etárias a partir dos 5 anos de idade e realizado o mesmo procedimento

---

<sup>38</sup> Ver *Statistics Finland* em referências.

para as mortes ocorridas durante esses nove anos de estudo. Dados por grupos etários de 5 anos só estavam disponíveis para as mortes causadas por “varíola”. Milne estimou que a eliminação das mortes por varíola acarretaria em um aumento da expectativa de vida de 38,7 anos para 43,0 anos, um crescimento de 4,3 anos na sobrevida das pessoas (Daw, 1979, p. 313).

Os gráficos a seguir representam respectivamente, de cima para baixo, a probabilidade de morte  ${}_1q_x$  em escala logarítmica e a pirâmide etária para ambos os sexos, calculadas a partir dos dados de Milne (1815, p.564), referentes à cidade inglesa de Carlisle.



### 2.2.6) Benjamin Gompertz e a 1ª lei de mortalidade

Em 1825, o atuário inglês **Benjamin Gompertz (1779-1865)**, que trabalhava em uma companhia seguradora calculando o risco de morte de pessoas de diferentes idades, com o intuito de precificar os seguros de vida formulou aquela que seria uma das mais conhecidas leis de mortalidade, aplicável apenas para as idades adultas.



*“a média de esgotamento da força do homem para evitar a morte é de tal forma que, no final de infinitos pequenos intervalos iguais de tempo ele perde igual parte do seu poder restante de oposição à destruição, de mesma intensidade da que ele tinha no início destes intervalos.”<sup>39</sup>*  
(Gompertz, 1825, *apud* Jordan, 1975, p. 21).

Usando dados de várias regiões da Inglaterra, Gompertz<sup>40</sup> descobriu que o risco de morte aumentava de forma previsível em função de uma taxa proporcional à idade. Esses cálculos o levaram a concluir que a taxa de mortalidade dobrava a cada 10 (dez) anos entre as idades de 20 (vinte) e 60 (sessenta) anos (que era o intervalo básico entre as idades das pessoas que compravam seguro naquela época). A fórmula matemática usada para prever esse crescimento da taxa de mortalidade em progressão geométrica a partir da idade de 20 (vinte) anos é mundialmente conhecida como “**Gompertz Law of Mortality**” e está presente na sua obra. Gompertz (1825), então propôs que além da mortalidade aleatória atingir a jovens e idosos da forma igual, existe também uma força de mortalidade que tem a ver com a senescência. Nenhuma hipótese sobre um limite para a vida foi feita. A fórmula proposta para a força da mortalidade numa idade  $x$  segundo Gompertz, é:

$$\mu_x = \alpha e^{\beta x}, \text{ onde } \alpha \text{ e } \beta \text{ são parâmetros positivos.}$$

<sup>39</sup> Tradução do autor.

<sup>40</sup> Ver *Medicine Encyclopédia* em referências.



### 2.2.7) William Makeham e a acidentabilidade

Segundo Jordan (1975, p.22), quando no primeiro quarto do século XIX Gompertz apresentou a sua lei, ele declarou que era possível que a morte fosse consequência de duas causas gerais e coexistentes: a primeira relativa ao acaso ou acidentabilidade, sem previsão ou disposição prévia de quando ou como poderia ocorrer; a segunda, a deteriorização ou aumento da inabilidade de suportar a degeneração biológica. Quando Gompertz derivou a sua famosa lei ele levou em consideração apenas a segunda causa.

**Em 1860, William Makeham (1826 - 1891)** em sua obra combinou essas duas causas. Segundo Makeham (1860), o efeito da primeira causa, a acidentabilidade, seria adicionar uma constante na fórmula previamente escrita por Gompertz. A dita “**Makeham’s Law**” tornou-se um extraordinário aperfeiçoamento da fórmula anterior que a partir de então, com a devida escolha das suas constantes, poderia ser aplicada da idade de 20 anos até praticamente o resto da vida do indivíduo (Jordan, 1975, p.23). A fórmula proposta por Makeham para a força da mortalidade é a seguinte:

$$\mu_x = A + \alpha e^{\beta x}$$
, onde o primeiro termo  $A$  é relativo à morte por acidentes e o segundo é relativo à morte por senescência.

Mantendo a nomenclatura utilizada por Jordan (1975, p.21), na fórmula de Makeham, fazendo  $\alpha=B$  e  $e^{\beta}=c$ , obtemos:

$$\mu_x = A + Bc^x$$

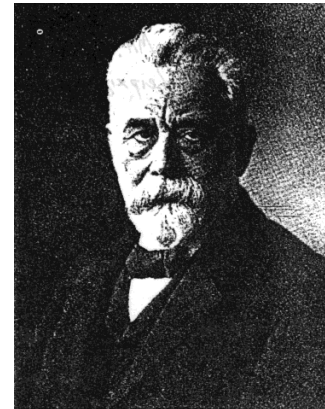
Jordan (1975, p.24) sugeriu que os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $c$ , normalmente variam dentro dos seguintes intervalos:

$0,001 < A < 0,003$
$10^{-6} < B < 10^{-3}$
$1,08 < c < 1,12$

### 2.2.8) Wilhelm Lexis e o conhecido diagrama

Em 1875, o estatístico e economista alemão **Wilhelm Lexis (1837-1914)** apresentou em sua obra com tradução para a língua portuguesa “Introdução a Teoria da Estatística Demográfica”, uma ferramenta de suma importância nos estudos demográficos, o chamado “**Diagrama de Lexis**”.

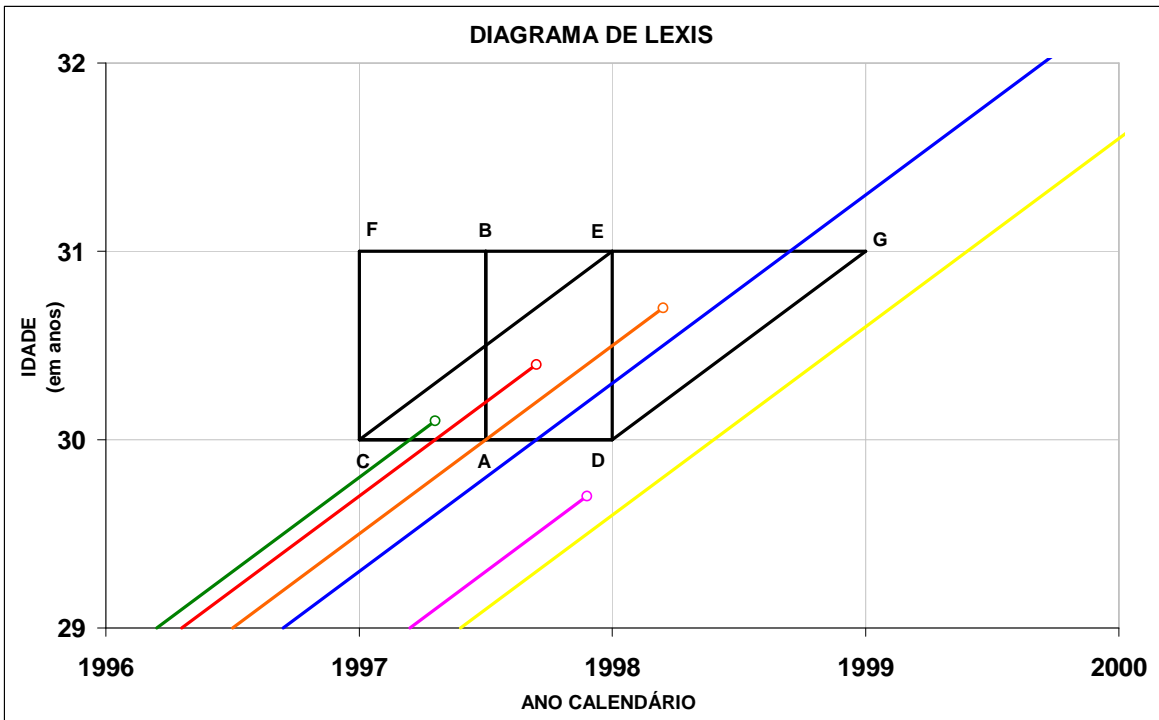
*“O diagrama de Lexis é utilizado para representar os fenômenos demográficos no tempo e facilitar a interpretação de diversas taxas e outros indicadores demográficos.”*  
(Ortega, 1987, p.7).



Wilhem Lexis

Num gráfico como este, denota-se cada indivíduo como uma sucessão de pontos, formando uma reta. Todas essas retas representando os indivíduos têm uma inclinação de  $45^\circ$ , pois os intervalos de passagem de tempo devem obrigatoriamente coincidir com os intervalos de envelhecimento dos indivíduos. As retas horizontais representam as idades exatas enquanto que as retas verticais representam os instantes de observação. Quando uma reta de  $45^\circ$  (indivíduo) cruza com uma reta horizontal (idade exata), isso indica que o indivíduo fez aniversário. Os cruzamentos das retas de  $45^\circ$  (indivíduos) com as retas verticais representam a mudança do ano calendário. O gráfico 6 apresenta um exemplo do referido diagrama, replicado de Hinde (1998, p.13).

### Gráfico 6 - Diagrama de Lexis



fonte: Hinde (1998, p.13).

No gráfico 6 a linha horizontal **CD** representa todas as pessoas que celebraram o seu 30º aniversário durante o ano de 1997 (e consequentemente nasceram todas em 1967). As linhas horizontais como a linha **CD**, representam o aniversário das coortes.

As mortes de pessoas que tinham idade  $x$  em seu último aniversário e que morreram em um particular período de tempo são representadas por pontos dentro de quadrados. No exemplo, os dois pontos dentro do quadrado **CDEF** representam todas as pessoas que morreram com 30 anos de idade durante o ano calendário de 1997.

As mortes de pessoas que possuíam idade  $x$  na sua data de morte, tendo todas celebrado o seu  $x$ -ésimo aniversário durante um particular ano, são representados por pontos dentro de paralelogramos. No exemplo do gráfico 6, os três pontos dentro do paralelogramo **CDGE** representam todas as pessoas que morreram com a idade de 30 anos e que celebraram o seu 30º aniversário durante o ano calendário de 1997.

### 2.2.9) Alfred Lotka, o matemático das populações

No início do século XX, **Alfred James Lotka (1880-1949)** realizou um cálculo aproximado baseando-se nos dados do livro “*Natural and Political Observations made upon Bills of Mortality*” de John Graunt e indicou que essas informações correspondiam a uma esperança de vida ao nascer<sup>41</sup> de 18 anos. (Ortega, 1987, prólogo, p. viii).



Alfred Lotka

De descendência austro-húngara, o biólogo e estatístico americano Alfred Lotka<sup>42</sup> deu uma colaboração decisiva na descrição matemática dos fenômenos populacionais. Ele examinou a relação entre as taxas de natalidade e mortalidade e seu impacto na estrutura etária da população provando, por exemplo, que o crescimento populacional nos Estados Unidos na década de 1920 foi produzido artificialmente por imigrantes. Lotka era conhecido como o “Matemático das Populações”.

### 2.2.10) As Tábuas Modelo da ONU de 1955

Em grande parte dos países em desenvolvimento não existem dados confiáveis acerca da mortalidade dos indivíduos, o que prejudica qualquer análise demográfica ou planificação econômica e social que porventura possa ser feita. **Em 1955**, foi construído na Divisão de População das Nações Unidas o primeiro sistema de tábuas-modelo de mortalidade (ver Manual X da ONU, 1983, p.12).

Essas tábuas-modelo foram construídas a partir de uma coleção de **158 tábuas** de vida para cada sexo e seu cálculo foi baseado na hipótese de que a probabilidade de morte entre as idades  $x$  e  $x+5$  ( ${}_5q_x$ ) seria uma função quadrática do valor prévio  ${}_5q_{x-5}$ . Esse sistema de tábuas-modelo da ONU é dito uni paramétrico.

<sup>41</sup> A esperança de vida ao nascer é tomada como um valor limite, representando as condições máximas de mortalidade de uma população.

<sup>42</sup> Ver *Statistics Finland* em referências.

pois o conhecimento de apenas um parâmetro<sup>43</sup> determinaria uma tábua de vida completa.

Apesar do método da regressão utilizado para o ajuste das equações aos dados levar em consideração a existência de erros, é assumido que esses erros possuem distribuição conhecida com média zero, o que na prática pode não ocorrer. Desta forma, as estimativas produzidas pelo ajuste poderão estar viesadas e o viés encontrado na estimativa de um determinado  ${}_5q_x$  irá influenciar a estimativa do  ${}_5q_{x+5}$  posterior e assim sucessivamente, contribuindo para acentuar ainda mais os erros nas estimativas seguintes.

Segundo o Manual X da ONU (1983, p.12), outra dificuldade na estimativa dessas tábuas-modelo foi que os coeficientes ajustados não tinham a mesma qualidade para cada uma das 158 tábuas masculinas e 158 tábuas femininas utilizadas. Algumas dessas tábuas eram baseadas em dados de países em desenvolvimento, que apresentavam informações precárias quanto à mortalidade dos indivíduos, mas mesmo assim foram incluídas no estudo. Como muitas áreas e regiões do mundo não possuíam qualquer estatística acerca da mortalidade, suas informações não foram contempladas. Em virtude da série de deficiências citadas, com o tempo essas tábuas de vida caíram em desuso.

#### **2.2.11) O Sistema de Tábuas Modelo de Ledermann e Breas**

**Ledermann & Breas** (1959, apud Manual X da ONU, 1983, p.16) criaram um sistema de tábuas modelo baseado na técnica de análise fatorial. A análise fatorial identifica o número mínimo de fatores (dimensões) que representam de forma mais eficiente um conjunto mais complexo de dados. Analisando as tabelas criadas, Ledermann & Breas descobriram que três fatores explicavam 90% da variabilidade existente entre as tábuas observadas (ver Preston *et al.* 2001, p.197). O primeiro e mais importante dos fatores está relacionado ao nível geral de mortalidade; o segundo refere-se à relação entre mortalidade infantil e mortalidade adulta e o terceiro está relacionado ao padrão de mortalidade nas idades avançadas.

---

<sup>43</sup> A mortalidade infantil  ${}_1q_0$  ou um nível equivalente que indexa os valores  ${}_1q_0$  usados.

Na década seguinte, **Ledermann** (1969, apud Manual X da ONU, 1983, p.16) desenvolveu Tábuas-modelo considerando um e dois parâmetros, realizando uma análise de regressão com dados das 154 tábuas utilizadas no primeiro estudo. As Tábuas-modelo eram então obtidas pela estimação da probabilidade de morte entre as idades  $x$  e  $x+5$  ( ${}_5q_x$ ), para homens, mulheres e ambos os sexos combinados, através de regressões tomando-se o logaritmo de  ${}_5q_x$ , ou seja:

- $\ln({}_5q_x) = a_{0(x)} + a_{1(x)} * \ln(Q)$  (para sistemas de um parâmetro)
- $\ln({}_5q_x) = b_{0(x)} + b_{1(x)} * \ln(Q_1) + b_{2(x)} * \ln(Q_2)$  (para sistemas de dois parâmetros)

Onde:  $Q$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$  são as variáveis independentes usadas em cada caso, e  $a_{i(x)}$  e  $b_{i(x)}$  representam os coeficientes de regressão estimados para o grupo etário  $x$  até  $x+5$ .

Segundo o Manual X da ONU (1983, pp.16-17), o modelo de Ledermann incorporou uma característica não existente nos sistemas anteriores. Ele fornecia não apenas as estimativas, mas também uma medida acerca da dispersão dos valores estimados com relação aos valores observados das probabilidades de morte, além de refletir os diferenciais de mortalidade por sexo e a maneira pela qual esses diferenciais variam com respeito ao nível geral de mortalidade nas tábuas utilizadas. Essa característica, contudo, representa o ponto fraco do sistema, pois apesar dos coeficientes de regressão terem sido calculados a partir de tábuas de vida separadas por sexo, as variáveis independentes ( $Q$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$ ) utilizadas, referem-se a parâmetros obtidos em função de dados para ambos os sexos combinados. Com isso, para utilizar o método, o usuário é obrigado a aceitar a relação de mortalidade entre homens e mulheres existente na concepção do sistema. Por exemplo, fica quase impossível de se estimar uma tábua de vida em que a expectativa de vida masculina exceda a feminina. Deve-se notar também que sua utilização para países em desenvolvimento não é fácil de ser feita, uma vez que essas variáveis independentes não conseguirão ser calculadas com muita facilidade pelas técnicas indiretas disponíveis até o presente.

### 2.2.12) As Tábuas Modelo de Coale & Demeny de 1966 e de 1983

Em 1966, os demógrafos americanos **Ansley Johnson Coale (1917-2002)** e **Paul Demeny**, elaboraram no “*Office of Population Research*” da Universidade de Princeton nos EUA uma nova coleção de tábuas-modelo. Esse estudo de Coale & Demeny (1966, apud Manual X da ONU, 1983, p.12) introduziu novos padrões de mortalidade por sexo e idade considerando as diferenças regionais (ver Rowland 2003, p.313).

Segundo o Manual X da ONU (1983, p.12), essas tábuas foram derivadas de um conjunto de 192 tábuas de vida segmentadas por sexo, computadas de populações de diversos países e em diferentes períodos de tempo<sup>44</sup>. As 192 tábuas foram selecionadas de um conjunto original de 326 tábuas, das quais foram excluídas aquelas que apresentavam padrões muito diferentes das demais. Todas essas 192 tábuas apresentavam informações consistentes, pois foram concebidas a partir de dados de registros que cobriam toda a população do país ou localidade as quais se referiam, ou seja: Europa, América do Norte, Austrália e Nova Zelândia (176 tábuas), Israel (3 tábuas), Japão (6 tábuas), Taiwan (3 tábuas) e África do Sul – população branca - (4 tábuas).

Uma análise preliminar dessas tábuas revelou que quatro diferentes padrões de mortalidade poderiam ser distinguidos entre elas. (ver Preston *et al.* 2001, pp.195-97) Esses padrões foram batizados de “Norte” (construído a partir de tábuas da Suécia, Noruega e Islândia e caracterizado principalmente por apresentar baixa mortalidade infantil e baixa mortalidade acima dos 50 anos de idade), “Sul” (construído a partir de tábuas da Espanha, Portugal e Sul da Itália e caracterizado principalmente por alta mortalidade até a idade de 5 anos e acima dos 65 e baixa mortalidade entre as idades de 40 e 60 anos), “Leste” (construído a partir de tábuas da Áustria, Alemanha, Norte da Itália, Hungria e Polônia e caracterizado principalmente por alta mortalidade na infância e mortalidade muito alta acima dos 50 anos) e “Oeste” (construído a partir das tábuas restantes, representando o padrão mais geral de mortalidade). Cada família possui 24 níveis de mortalidade,

---

<sup>44</sup> Sessenta e nove tábuas referentes ao período pós Segunda Guerra Mundial e trinta e nove delas relacionadas ao período antes de 1900.

variando a esperança de vida ao nascer ( $e_0$ ) feminina de 20 anos para o nível 1 até 77,5 anos para o nível 24.

Segundo Ortega (1987, p.101), para cada uma dessas quatro famílias de tábuas-modelo foram calculados para homens e mulheres, os coeficientes de equações por meio de regressões lineares<sup>45</sup> das variáveis  ${}_nq_x$  e  $\log({}_nq_x)$ , ambas com relação a  $e_{10}$ , ou seja:

$$(1) \quad {}_nq_x = A_x + B_x * e_{10}$$

$$(2) \quad \log({}_nq_x) = C_x + D_x * e_{10}$$

Onde os parâmetros  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $C_x$  e  $D_x$  foram determinados para cada grupo de idades, com base na informação das tábuas de mortalidade conhecidas.

Coale & Demeny melhoraram o antigo sistema de 1955 criado pela ONU, utilizando uma base empírica de maior abrangência, com uma seleção mais criteriosa das tábuas e construíram os quatro diferentes modelos que reconheciam as variações regionais entre os níveis e padrões de mortalidade. Todavia, seu método de construção apresenta claras deficiências, se comparado aos padrões estatísticos atuais (Preston *et al.* 2001, p.195).

Mesmo contemplando pouquíssimas informações de países em desenvolvimento, as tábuas de mortalidade de Coale & Demeny tornaram-se uma ferramenta necessária para a estimação indireta da mortalidade nos países com estatísticas precárias. O Manual X da ONU (1983) utiliza-se dessas tábuas modelo para trabalhar vários exemplos de técnicas indiretas de estimação da mortalidade.

Tais quais as tábuas da ONU de 1955, as tábuas de Coale & Demeny de 1966, com o tempo caíram em desuso. Além de não contemplar os outros padrões de mortalidade existentes no mundo, os dados utilizados para sua construção ficaram ultrapassados. Segundo Preston *et al.* (2001, p.197), um grave problema surge quando se trabalha com níveis muito altos ou muito baixos de mortalidade, fora da

---

<sup>45</sup> Utilizando o método dos mínimos quadrados.



amplitude na qual os modelos foram construídos. Estudos comprovam que extrapolações feitas para fora dos limites do modelo original não ficam adequadas.

Coale & Demeny (1983, apud Newell, 1988, p.135) elaboraram a segunda edição das Tábuas-Modelo de mortalidade. Segundo Newell (1988, p.139) a principal crítica com relação a essas tábuas, bem como às anteriores de 1966, é que as mesmas são baseadas, na sua grande maioria, em informações de mortalidade de países europeus. Desta forma, podem não ser apropriadas para estimar a mortalidade nos países em desenvolvimento e nos locais não contemplados no estudo, onde as causas de morte e os padrões de doenças são provavelmente diferentes, além do fato de apenas quatro diferentes padrões de mortalidade não fornecerem a flexibilidade necessária para contemplar a grande variedade de padrões existentes no mundo real.

### 2.2.13) William Brass e o Sistema Logito

Em 1968, **William Brass (1921-1999)** criou o chamado “Sistema Logito”. Esse modelo criado por Brass (1968, apud Manual X da ONU, p.17), inicialmente aplicado em um trabalho para países da África, apresentava uma grande evolução com relação aos modelos anteriormente criados, tamanha a sua flexibilidade. Segundo Newell (1988, p.153), Brass descobriu que tomando os logitos das probabilidades de morte entre duas tábuas, criava uma relação linear entre os correspondentes valores gerados.



William Brass

O sistema logital de Brass é dito um modelo relacional (ver Tuljapurkar and Boet, 1998, pp. 26-27) de estimação da mortalidade, pois parte de um modelo padrão de mortalidade conhecido para estimar um outro padrão de mortalidade. Esse sistema é distinto daqueles criados anteriormente, no sentido de que o mesmo não compreende um conjunto de tábuas-modelo, mas sim uma relação matemática que pode gerar infinitas tábuas (Ortega, 1987, p.111).

A transformação logito<sup>46</sup> da probabilidade de morte  $q_x$  foi definida por Brass como sendo:

$$\text{logito}(q_x) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{q_x}{1 - q_x} \right]$$

Segundo Preston *et al.* (2001, p.199), a vantagem da transformação proposta por Brass é que como  $q_x$  varia entre 0 e 1, o logito de  $q_x$  varia entre  $-\infty$  e  $+\infty$ . Desta forma, qualquer valor calculado para o logito de  $q_x$  entre  $-\infty$  e  $+\infty$ , implicará obrigatoriamente em um valor de  $q_x$  entre 0 e 1. Se podemos então calcular o logito de  $q_x$ , denotado por  $Y_{(x)}$ , podemos então transformar  $Y_{(x)}$  de volta e estimar a probabilidade de morte  $q_x$  da seguinte forma:

$$\hat{q}_x = \frac{\exp(2\hat{Y}_{(x)})}{1 + \exp(2\hat{Y}_{(x)})}$$

Brass propôs então o seguinte modelo relacional para predizer o valor de  $Y_{(x)}$ , a partir do logito de  $q_x$  de uma determinada população  $Y^s_{(x)}$ , definida como população padrão<sup>47</sup>:

$$Y_{(x)} = \alpha + \beta * Y^s_{(x)}$$

Se  $\alpha=0$  e  $\beta=1$ , substituindo na equação de  $Y_{(x)}$  tem-se que a tábua gerada é igual à tábua padrão. Variando o  $\alpha$  modifica-se o nível da curva, ou seja, obter-se-ão valores de  $q_x$  mais altos ou mais baixos que os da tábua padrão. Ao fazer-se o oposto, mantendo o  $\alpha$  fixo e variando o  $\beta$ , gerar-se-ão tábuas com padrões (formatos) diferentes que se interceptarão em algum ponto localizado na parte central da distribuição por idades (ver Manual X da ONU, 1983, p.18).

Ortega (1987, p.114) cita duas limitações do sistema de Brass. A primeira limitação é a dependência direta da tábua padrão utilizada, que quando apresenta

<sup>46</sup> Essa foi a transformação logito proposta inicialmente por Brass. Hoje em dia, na maioria dos livros o fator  $\frac{1}{2}$  não aparece na definição do logito (ver Preston *et al.* 2001, p.210).

<sup>47</sup> Onde a letra "s" vem do inglês *standard*.

erros na sua composição, a flexibilidade apresentada pelo modelo poderá conduzir a valores mais distantes da realidade; a segunda, diz respeito à relação matemática proposta por Brass para definir uma tábua a partir de um modelo padrão conhecido alterando apenas dois parâmetros, que podem não serem suficientes para descreverem o comportamento relativamente complexo da mortalidade observada nos diferentes países.

#### **2.2.14) As Tábuas de Mortalidade da ONU para países em desenvolvimento**

Tornou-se evidente que os padrões de mortalidade para os países em desenvolvimento frequentemente diferenciavam-se dos padrões apresentados nos sistemas de tábuas-modelo criados no passado. Com isso, **em 1982** a “*Population Division of the Department of International Economic and Social Affairs of the United Nations Secretariat*” preparou um novo estudo, contemplando as informações de mortalidade dos países em desenvolvimento<sup>48</sup> (Manual X da ONU, 1983, pp.18-19).

Apesar da disponibilidade e da confiança nos dados de mortalidade oriundos das regiões menos desenvolvidas do mundo ter aumentado significativamente desde a publicação das Tábuas da ONU em 1955 e das Tábuas de Coale & Demeny em 1966, os mesmos ainda apresentavam inúmeras inconsistências e em função disso uma cuidadosa seleção e avaliação, bem como os devidos ajustes, foram realizados para a construção desse novo conjunto de tábuas contemplando a experiência dos países menos abastados.

A base de dados utilizada para a construção dessas tábuas modelo consistia em 36 tábuas para homens e 36 tábuas para mulheres no total de 72 tábuas<sup>49</sup>. Dessas 72 tábuas, 32 (16 tábuas por sexo) vieram de 10 países da América Latina, 38 (19 tábuas por sexo) vieram de 11 países da Ásia e 2 (1 tábua por sexo) da África.

---

<sup>48</sup> United Nations (1982).

<sup>49</sup> Ibid, p.3 apresenta a lista completa de países.

Essas novas tábuas-modelo da ONU eram similares às originalmente construídas por Coale & Demeny sendo que desta vez foram incluídas informações com relação aos países em desenvolvimento. Essas tábuas-modelo além de apresentarem uma boa variedade de características regionais, permitiam também ao usuário a construção de outros diferentes padrões, via sistema logital de Brass.

Nessa nova publicação, cinco padrões-modelo de mortalidade foram criados, baseados nos dados disponíveis, que segundo Newell (1988, pp.139-140) possuíam as seguintes características quando comparadas à Família Modelo Oeste de Coale & Demeny (1966): América Latina (alta mortalidade infantil e na infância, causada principalmente pela diarreia e doenças parasitárias, alta mortalidade adulta causada por acidentes e mortalidade relativamente baixa nas idades avançadas, por conta do pequeno número de mortes causadas por doenças cardiovasculares), Chileno (mortalidade infantil muito alta, provavelmente causada pelas doenças do aparelho respiratório ou por término precoce do período de aleitamento), Sul da Ásia (alta mortalidade abaixo dos 15 e acima dos 55 anos, mas mortalidade adulta relativamente baixa), Oriente Médio (mortalidade muito alta nas idades avançadas, principalmente entre os homens, possivelmente devido ao histórico de tuberculose) e Geral (muito similar ao modelo oeste).

Para finalizar esse resumo histórico acerca do estudo da mortalidade, depois de Gompertz (1825) e Makeham (1860) diversas outras leis de mortalidade foram desenvolvidas. Sua formulação matemática é descrita mais adiante.

Com relação aos países da América Latina, foram criadas diversas tábuas de mortalidade para os países da região, mas o seu grau de confiabilidade é muito variável de país para país. Se de um lado existem países que possuem tradição na realização de censos e pesquisas amostrais e apresentam registros vitais de boa qualidade, que permitem utilizar procedimentos e técnicas mais refinadas para a elaboração de tábuas completas e consistentes, por outro lado existem países onde as estatísticas demográficas são precárias e neste caso necessita-se utilizar técnicas indiretas para a estimação dessa mortalidade, baseadas em padrões de mortalidade previamente conhecidos ou supostos.

### **2.3) As Tábuas de Mortalidade construídas no Brasil**

Apesar do controle das informações de óbitos e população exposta ao risco ter melhorado com o passar dos anos no Brasil, o registro das mortes ainda mostra-se insatisfatório em algumas regiões<sup>50</sup>, gerando problemas na estimativa de estatísticas confiáveis com relação ao padrão de mortalidade específico, quer pela dificuldade natural em função da abrangência geográfica continental, quer pelo sub-registro das mortes realizado por parte de sua população.

As tábuas de mortalidade criadas no Brasil e construídas a partir de informações oficiais de censos ou pesquisas, utilizam na sua construção técnicas indiretas para a correção dos sub-registros de mortes<sup>51</sup>, gerando certa incerteza quanto aos verdadeiros padrões da mortalidade dos seus indivíduos. Para maiores informações ver Oliveira e Albuquerque (2002).

No Brasil, a literatura aponta para a construção de uma tábua de mortalidade censitária no início da década de 1920, criada por Bulhões de Carvalho e com base nos dados daquele censo. Em 1944, foi elaborada no IBGE sob a coordenação de Giorgio Mortara (Mortara, 1944), uma tábua de mortalidade para a população do município do Rio de Janeiro, então Distrito Federal, e do município de São Paulo, considerando informações de 1939 até 1941. Anos mais tarde, o atuário Gastão Martin Pinto de Moura, sob patrocínio do Instituto de Resseguros do Brasil, construiu a primeira tábua de mortalidade brasileira focada nos seguros de vida, intitulada EB-5 e relativa ao período de 1949 até 1953 (Ferreira, 1985, v. 2 p.209).

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE (1981) criou o primeiro sistema de tábuas-modelo para o Brasil. Este trabalho foi uma continuidade do trabalho de Frias e Leite (1974). As taxas de mortalidade foram calculadas a partir das estatísticas de óbitos oriundas do registro civil, juntamente com os quantitativos populacionais oriundos dos recenseamentos gerais. A metodologia utilizada baseou-

---

<sup>50</sup> Os estados do Nordeste e Norte possuem historicamente maiores problemas de sub-registro do que os outros.

<sup>51</sup> Ver Brass (1975), Courbage&Fargues (1979), Preston, Coale, Trussel & Weinstein (1980), Preston & Hill (1980), Bennett & Horiuchi (1981).

se no modelo uni-paramétrico de Coale & Demeny (1966), na medida em que foi utilizada a idéia de correlacionar e fazer regressões entre as probabilidades de morte por idade e as esperanças de vida ao nascer ( $e_0$ ) e na idade de 10 anos ( $e_{10}$ ). No trabalho de 1981 foram construídos 22 níveis de curvas para a mortalidade de homens, mulheres e ambos os sexos. Foram utilizados dados do Distrito Federal (1920, 1940, 1950), municípios de São Paulo, Recife, Salvador, Porto Alegre e Belo Horizonte (1940), Estado e Município de São Paulo (1950), Estado da Guanabara e São Paulo (1960) e municípios de Niterói, Curitiba, Vitória, Salvador, Belo Horizonte, Porto Alegre, Região Metropolitana do Rio de Janeiro e Estado de São Paulo (1970). Paes (1993 apud Paes, 1994, pp.176-177) avaliou a adequabilidade dessas tábuas para as diversas regiões brasileiras e os resultados foram insatisfatórios, dadas as perceptíveis características peculiares regionais que ocasionam diferenças nos padrões de mortalidade em função da idade, para homens e mulheres.

O Brasil possui um histórico importante na execução de censos demográficos. Até agora foram 11 censos, sendo o primeiro realizado em 1872, o segundo em 1890, o terceiro em 1900, o quarto em 1920, o quinto em 1940 e a partir daí de 10 em 10 anos (com exceção do censo de 91) e o próximo será realizado em 2010. Já as estatísticas vitais do Registro Civil (nascimentos e óbitos) de pessoas naturais, somente foram organizadas em 1974, quando o IBGE passou a coletar junto aos cartórios essas informações. Nas décadas seguintes, o IBGE construiu três tábuas de mortalidade utilizando os dados dos censos de 1980, 1991 e 2000. Essas três tábuas são abreviadas com grupos quinquenais, com exceção da 1ª faixa etária que representa os menores de 1 ano, e possuem o último grupo aberto em 80+ (ver Albuquerque e Senna, 2005). As tábuas criadas posteriormente pelo IBGE foram concebidas a partir de um modelo de projeção populacional baseado em informações previamente conhecidas<sup>52</sup>.

Por determinação legal<sup>53</sup>, a partir de 1999 o IBGE<sup>54</sup> divulga anualmente no DOU, sua tábua completa de mortalidade referente ao ano anterior, com relação à

---

<sup>52</sup> Ver IBGE - Tábuas Completas de Mortalidade – 2003.

<sup>53</sup> Ver Decreto Presidencial nº 3.266 de 29/11/1999 e Lei 9.876 de 26/11/1999 art.29, inciso II parágrafo 8º.

<sup>54</sup> Na verdade o IBGE disponibiliza atualmente na sua página da *web* além das tábuas completas de 1999 a 2006, a tábua completa de 1998 e uma tábua abreviada de 1991.

população brasileira como um todo, para ambos os sexos combinados. A função da tábua “esperança de sobrevida na idade  $x$ ”,  $e_x$ , é utilizada pelo MPS como variável no cálculo do fator previdenciário. O dito fator é atualmente aplicado no cálculo do valor do benefício dos segurados do RGPS e corresponde ao resultado de uma expressão matemática que leva em consideração, além de  $e_x$ , o tempo de contribuição até o momento da aposentadoria, a idade no momento da aposentadoria e uma constante que representa a alíquota de contribuição (ver Lei nº 9.876 de 26/11/1999, anexo).

Conforme citado anteriormente, a principal dificuldade em se utilizar dados do registro civil e dados censitários para a estimativa das taxas de mortalidade, diz respeito aos problemas ocasionados em função da baixa qualidade dos registros dos óbitos, somada à questão dos dígitos preferenciais<sup>55</sup> por parte dos indivíduos.

Embora como se sabe, existam algumas técnicas para a correção desses sub-registros de mortes, os números variam muito de estado para estado da federação gerando uma dificuldade extra. Além desse fato, a metodologia de cálculo pressupõe uma cobertura uniforme dos registros para as idades maiores que 5 anos, o que na prática deve não ocorrer. Existem também fortes evidências de diferenciação na cobertura das mortes de crianças e idosos (nas chamadas idades extremas).

*“O problema dos dados sobre população é completamente diferente. Além da cobertura e da preferência de dígito, há erros sistemáticos na informação que a própria pessoa relata nos censos: as pessoas idosas, além de uma determinada idade, tendem a aumentar sua idade, assim como as pessoas de menor nível socioeconômico que, ao declararem idade ou ano de nascimento, arredondam os números para valores terminados em 0 ou 5. Esses problemas são notórios para o Brasil. Mesmo se fosse possível construir, com precisão, uma tábua para a população como um todo, ainda teríamos o problema de determinar quão próximo essa tábua de mortalidade se encontra da verdadeira”.* (Beltrão & Sugahara - 2005, p.9)

---

<sup>55</sup> Quando se pergunta em pesquisas a idade da pessoa, a mesma tende a arredondar para números terminando em 0 ou 5, os chamados dígitos preferenciais.

No que se refere às tábuas de mortalidade construídas no Brasil utilizando-se apenas dados administrativos, Conde (1991) montou uma das primeiras tábuas de mortalidade específica para um Fundo de Pensão. O atuário calculou então a tabela FAF-89, baseada em informações dos funcionários e dirigentes da Empresa de Alimentos Sadia, no período de 1979 a 1988. Para a construção dessa tabela agregada, Conde trabalhou com as fichas individuais de cada um dos participantes da EFPC (ver Anexo E) utilizando o método proposto pelo atuário Olifiers (1947, *apud* Conde 1991), para o cálculo da exposição ao risco (a modalidade que foi utilizada é a chamada de anos de seguros<sup>56</sup> ou *policy-year*) e ajustando a curva de mortalidade pela mesma metodologia<sup>57</sup> utilizada por Mortara (1944, *apud* Conde 1991).

Seguindo essa linha de pesquisa Beltrão *et al.* (1995) utilizaram informações do cadastro da Caixa de Previdência dos Funcionários do Banco do Brasil (PREVI) e calcularam uma tabela de mortalidade para os funcionários do banco, considerando informações de 1940 a 1990, a partir dos dados de um arquivo chamado de FUN-930 que apresentava mais de 200.000 registros individuais. Posteriormente, Ribeiro & Pires (2001) atualizaram essa tabela, agregando informações até o ano 2000 e criando a tabela de mortalidade chamada de BB-2000, sendo a mesma sugerida para uso no segmento bancário.

Em 2002, o mercado segurador brasileiro teve sua experiência própria de mortalidade contemplada. Baseados em dados administrativos fornecidos pela Superintendência de Seguros Privados – SUSEP, referente aos anos de 1998 e 1999, Beltrão & Sugahara (2002a) ajustaram tábuas de mortalidade por sexo, para cada um dos seguintes produtos da população coberta pelos seguros privados: Vida Individual (VI), Vida em Grupo (VG), Previdência Privada (PP) e Acidentes Pessoais (AP). Esse trabalho foi o resultado de um convênio firmado entre IBGE e SUSEP em 1998, onde o modelo escolhido para o ajuste das curvas foi um daqueles propostos por Heligman & Pollard (1980).

---

<sup>56</sup> Levando em consideração a exposição ao risco de 31 de dezembro entre os anos “x” e “x+1”.

<sup>57</sup> Na verdade, Conde tentou inicialmente fazer um ajuste utilizando a função de Gompertz e a função de Makeham, sendo que ambas apresentaram resultados insatisfatórios.



No mesmo ano de 2002, Beltrão & Sugahara (2002) construíram a primeira tábua de mortalidade considerando a experiência de servidores públicos vinculados a um Regime Próprio de Previdência Social. Com base nos dados administrativos do SIAPE<sup>58</sup> no período de 1993 a 1999, os autores ajustaram uma função por um dos modelos<sup>59</sup> de Heligman & Pollard (1980), criando tábuas de mortalidade em função do sexo e escolaridade. Os servidores públicos contemplados neste estudo foram os civis federais do poder executivo, vinculados ao RPPS da União. Esse trabalho mostrou mais uma vez o notório diferencial existente entre a mortalidade masculina e feminina (as mulheres vivendo sempre mais que os homens) e também quanto ao nível de escolaridade (dois grupos), tendo os indivíduos de nível superior apresentado uma expectativa de vida muito superior àqueles que possuíam apenas o 2º grau, indicando que as condições socioeconômicas associadas à escolaridade, afetam de fato o nível da mortalidade.

Em 2005, Beltrão & Sugahara (2005) ampliaram o trabalho previamente realizado em 2002 e fizeram também uma comparação para os produtos Vida Individual (VI), Vida em Grupo (VG), Previdência Privada (PP) e Acidentes Pessoais (AP), com desagregação por tipo de cobertura, a saber: sobrevivência, morte e invalidez. Nesse trabalho, utilizaram dados de um período de três anos (1998, 1999 e 2000) para os produtos Previdência Privada e Vida Individual e de um período de dois anos (1999 e 2000) para os produtos Vida em Grupo e Acidentes Pessoais, mantendo-se a mesma metodologia de cálculo utilizada anteriormente.

Em 2007, Beltrão & Sugahara (2007) agregaram ao trabalho realizado para os funcionários públicos federais em 2002 informações do Sistema Integrado de Administração de Pessoal (SIAPE) até o ano de 2005, e aplicaram uma variante do modelo proposto por Lee & Carter (1992) às tábuas de mortalidade<sup>60</sup> construídas por sexo e escolaridade, via modelo de Heligman & Pollard (1980). No modelo de Lee-Carter é prevista uma componente que explicita as mudanças diferenciais na mortalidade dos indivíduos ao longo do tempo. Como era esperado pelos autores,

---

<sup>58</sup> Sistema Integrado de Administração de Pessoal – SIAPE do Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão.

<sup>59</sup> Na verdade os autores usaram apenas as componentes (II) e (III) do modelo completo, visto que não dispunham de informações acerca da mortalidade infantil e de adolescentes.

<sup>60</sup> Essas tábuas de mortalidade foram construídas para as idades de 20 a 90 anos, dada a falta de representabilidade estatística de informações para as idades fora deste intervalo.

variações nos níveis das curvas de mortalidade ao longo do tempo foram verificadas, para todos os grupos: homens e mulheres, com ou sem nível superior. Os resultados para os servidores civis do poder executivo vinculados ao RPPS da União demonstraram uma nítida queda nas taxas de mortalidade em função do tempo.

Como se pode perceber são pouquíssimas as experiências próprias de mortalidade transformadas em tábuas de vida, principalmente no que concerne aos servidores públicos contribuintes de seus Regimes Próprios de Previdência. Esse fato torna o trabalho presente nessa dissertação, de suma importância, para somar-se a essas pesquisas anteriores, com objetivo de uma correta mensuração e precificação dos encargos relativos aos sistemas previdenciários, em especial, à previdência básica dos funcionários públicos.

## **2.4) Tipos de Modelos Padrão de Mortalidade**

Preston *et al.* (2001, pp.192-201) classifica esses modelos em três tipos distintos: Representações Matemáticas, Representações Tabulares e Modelos Relacionais. A seguir descreve-se cada um deles.

### **2.4.1) Representações Matemáticas**

Ao longo dos anos, muitos esforços foram realizados para encontrar uma função matemática simples, que fosse capaz de reproduzir a experiência de mortalidade humana com suficiente grau de precisão. (Spurgeon, 1949, p.191)

As representações matemáticas são aquelas que expressam as taxas específicas de mortalidade em função de alguma “Lei de Mortalidade”. Quando se ajusta uma função ao padrão de mortalidade sob estudo, necessita-se trabalhar com dados acurados, principalmente para determinadas idades específicas.

Segundo Bowers *et al.* (1986, p.71), existem três principais justificativas para se postular uma forma analítica para funções de mortalidade ou sobrevivência. A primeira justificativa possui o aspecto filosófico. Muitos dos fenômenos estudados na física podem ser explicados de forma eficiente pela utilização de fórmulas simples. Por esse motivo, alguns autores sugerem que a sobrevivência humana seja governada igualmente, por uma simples lei. A segunda justificativa tem a ver com o aspecto prático da coisa. É muito mais fácil trabalhar com uma função com alguns parâmetros do que trabalhar com uma tábua de vida completa, com talvez, 100 ou mais parâmetros ou probabilidades de morte. Além disso, algumas das formas analíticas possuem interessantes propriedades que são convenientes para a estimação das probabilidades envolvendo mais de uma vida. Por último, a terceira justificativa está relacionada com relativa facilidade de se estimar os parâmetros de uma função de sobrevivência, a partir dos dados brutos de mortalidade.

Exemplos de Representações Matemáticas: De Moivre (1729), Gompertz (1825), Makeham (1860), Thiele (1872), Wittstein (1883), Perks (1932), Weibull (1951), Beard (1971), Heligman & Pollard (1980), Kannisto (1992), dentre outros.

#### **2.4.2) Representações Tabulares**

Quando se possui dados não acurados, inadequados ou faltantes, os modelos tabulares são os mais adequados de serem utilizados. Esses modelos partem de um conjunto de tábuas previamente construídas e sintetizam a experiência de mortalidade através de padrões específicos variando em diversos níveis, normalmente indexados pela expectativa de vida ao nascer  $e_0$ .

O cerne da questão em utilizar-se de representações tabulares quando não se possui dados de qualidade, está no fato de que estudos realizados a partir de dados confiáveis comprovam a existência de um alto índice de correlação entre taxas de mortalidade calculadas para diferentes populações.

Para escolher-se qual a tábua-modelo a ser utilizada, necessita-se de algumas informações independentes, acerca do padrão de mortalidade da população. Quando não são disponibilizadas tais informações, normalmente toma-se como padrão de mortalidade a experiência de localidades vizinhas<sup>61</sup> (países, estados, etc.) que possuam melhores dados, partindo-se do pressuposto de que as localidades vizinhas teriam ambientes epidemiológicos similares, que refletiriam nas distribuições das causas de mortes e consequentemente no padrão da mortalidade.

Exemplos de Modelos Tabulares: Sistemas de Tábuas Modelo de Mortalidade da ONU (1955), Sistemas de Tábuas Modelo de Coale & Demeny (1966), Sistemas de Tábuas Modelo da ONU para países em desenvolvimento (1982), Tábuas Modelo de Mortalidade do IBGE (1981).

### 2.4.3) Modelos Relacionais

Os modelos relacionais misturam características dos dois modelos anteriores. A mortalidade é modelada através de uma transformação matemática de um padrão existente e a relação entre idade e mortalidade é expressa de forma tabular, como nas tábuas de vida. A noção básica desse tipo de modelo foi apresentada por Brass (1971), e seria construir uma função  $F(\mu_x)$  e relacionar a mortalidade da população em estudo com a mortalidade de uma população conhecida  $\mu_{0,x}$ , ou seja,  $F(\mu_x) = a + b F(\mu_{0,x})$ . Pode-se citar como exemplos dessa função  $F$  a função *logaritmo* e a função *logito* (ver Keyfitz e Caswell 2005, p.284) dessas taxas de mortalidade por idade. A escolha do tipo de função  $F$  depende, logicamente, do contexto da situação específica e será estabelecido quando do ajuste dos dados por idade e em função do determinado período considerado (Tuljapurkar and Boet, 1998, p.27). Desta forma, a mortalidade em diferentes períodos poderá ser comparada em função dos parâmetros  $a$  e  $b$  que a descrevem.

Existem duas características distintas de um modelo relacional que determinam o seu sucesso. A primeira diz respeito à escolha do padrão apropriado à

---

<sup>61</sup> Normalmente refere-se como “tomar emprestado” um modelo padrão previamente conhecido, de alguma localidade com dados acurados.

população em questão. A segunda está relacionada à regra que especifica a relação entre a mortalidade padrão e a mortalidade da outra tábua (Preston *et al.* 2001, p.200).

Alguns desses modelos relacionais são utilizados para prever a mortalidade futura (*forecasting methods*), baseados nos dados observados no passado. Para projetar essa mortalidade precisamos determinar não apenas as tendências gerais futuras, mas também o que deve ocorrer nas diversas idades individuais. (Keyfitz e Caswell 2005, p.283)

Exemplos de Modelos Relacionais: O Sistema Logital desenvolvido por Brass (1971), o modelo relacional de 4 parâmetros desenvolvido por Zaba (1979) e por Ewbank *et al.*(1983), o modelo de Lee-Carter (1992) que capta a variação da mortalidade no tempo, o modelo de dois parâmetros de Himes, Preston e Condran (1994) que faz comparações para a mortalidade em idades avançadas para países de baixa mortalidade, dentre outros.

Nesse trabalho, a mortalidade foi estimada diretamente das bases de dados, ajustando-se uma função matemática baseada em uma “Lei” específica de mortalidade. Em um segundo momento, aplicou-se um modelo relacional para avaliar a variação dessa mortalidade no tempo.

## **2.5) Alguns Modelos Matemáticos**

Defini-se a força da mortalidade  $\mu_x$  ou probabilidade instantânea de morte para um indivíduo com idade  $x$ , como sendo a probabilidade de que um indivíduo morra em um curto intervalo de tempo, dado que o mesmo sobreviveu até o início desse intervalo.

A criação de uma “Lei” de mortalidade baseada em  $\mu_x$ , implica no desenvolvimento de um modelo paramétrico de risco envolvendo a realização de uma regressão, onde o risco individual de morte é a variável de interesse a ser estimada, a partir de um conjunto de variáveis explicativas. Alguns autores

parametrizaram suas leis de mortalidade não em função da força de mortalidade  $\mu_x$  (ou taxa instantânea de mortalidade - *hazard function*), mas com relação à probabilidade de morte na idade  $x$  ( $q_x$ ), ou mesmo em função do número de sobreviventes na idade  $x$  ( $\ell_x$ ) e seu logaritmo na base 10 ( $\log_{10} \ell_x$ ). Heligman & Pollard, por exemplo, propuseram inicialmente uma parametrização para a razão  $q_x/p_x$ .

Neste tópico, apresenta-se um resumo de alguns dos principais modelos matemáticos desenvolvidos ao longo do tempo, um pouco mais abrangente do que aquele apresentado por Higgins (2003). Os primeiros modelos criados eram focados principalmente na estimação da mortalidade adulta e de idosos, tal como o de Gompertz (1825) e o de Makeham (1860). Depois dessa primeira modificação proposta por Makeham na função de Gompertz, outros autores fizeram as suas considerações e propostas baseadas na equação original, tal qual fizeram Perks (1932), Beard (1961) e Kannisto (1992). Como todos esses modelos foram desenvolvidos para representar apenas a mortalidade adulta e nas idades avançadas (senescência), não podem ser estendidos para descrever o comportamento da mortalidade em todas as idades, principalmente nas primeiras (crianças e jovens).

Como a mortalidade varia de forma não linear com as idades, principalmente durante a infância e adolescência dos indivíduos, outros tipos de modelos mais complexos foram criados com o intuito de contemplar a mortalidade das pessoas para todas as idades. O pioneiro desses modelos que foi o de Thiele (1872) seguido do modelo de Wittstein (1883) e posteriormente Heligman & Pollard (1980), Rogers e Planck (1983), Kostaki (1992), dentre outros.

A seguir destacam-se esses modelos citados e alguns outros que foram desenvolvidos no início da década de 90, não só para a modelagem da mortalidade como também para ajustar a sobrevivência dos indivíduos. Para maiores detalhes ver Tabeu *et al.* (2002) tabela 6.1, que apresenta uma ampla listagem de representações matemáticas, iniciando em de Moivre (1725).

### 2.5.1) Modelo de Opperman (1870)

Em 1870, Opperman propôs que a força de mortalidade  $\mu_x$  seria descrita por um modelo funcional de três componentes, sendo a primeira uma constante dividida pela raiz quadrada da idade  $x$ , a segunda uma constante e a terceira uma constante multiplicada pela raiz quadrada da idade  $x$ . Com isso, a função  $\mu_x$  proposta por Opperman tinha a seguinte característica:

$$\mu_x = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} \quad (1)$$

Onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os parâmetros a serem estimados.

### 2.5.2) Modelo de Thiele (1872)

Em 1872, Thiele propôs um modelo, onde a força da mortalidade  $\mu_x$  seria uma função de três componentes, uma relacionada à mortalidade na infância, outra com relação às idades medianas e uma terceira relativa à mortalidade de idosos. A hipótese levantada por Thiele era que as causas de morte estavam naturalmente alocadas em três fases distintas: infância e adolescência, adulta jovem e idosa. A função  $\mu_x$  proposta por Thiele tinha a seguinte característica:

$$\mu_x = \underbrace{a_1 e^{-b_1 x}}_{(I)} + \underbrace{a_2 e^{\left(-\frac{1}{2} b_2 (x-c)^2\right)}}_{(II)} + \underbrace{a_3 e^{b_3 x}}_{(III)} \quad (2)$$

Onde a componente (I) é relacionada à mortalidade na infância e adolescência, a componente (II) é uma função de densidade de probabilidade normal utilizada para modelar a mortalidade por causas externas nas idades adultas jovens (*calombo - accident hump*) e a componente (III) diz respeito à mortalidade nas idades mais avançadas (*senescência*).

### 2.5.3) Modelo de Wittstein (1883)

Em 1883, Wittstein propôs uma lei de mortalidade, modelando a taxa de mortalidade como sendo uma função de duas componentes, a primeira representando a mortalidade na infância e a segunda nas idades adultas. A fórmula proposta por Wittstein tinha a seguinte característica:

$$q_x = \frac{l}{m} * a^{-(mx)^n} + a^{-(M-x)^n} \quad (3)$$

Onde  $q_x$  é a probabilidade de um indivíduo com idade  $x$  morrer antes de atingir a idade  $x+1$ , e  $a$ ,  $m$ ,  $n$  e  $M$  (última idade alcançável) são os parâmetros a serem estimados.

### 2.5.4) Modelo de Steffenson (1930)

Em 1930, Steffenson propôs uma modelagem não para a força da mortalidade  $\mu_x$  ou para a probabilidade de morte  $q_x$ , mas para o  $\log_{10}$  do número de sobreviventes  $\ell_x$ . A fórmula de Steffenson tinha a seguinte característica:

$$\log_{10}(\ell_x) = 10^{-A\sqrt{x}-B} + C \quad (4)$$

Onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os parâmetros a serem estimados.



### 2.5.5) Modelo de Perks (1932)

Em 1932, Perks propôs modificações na curva de Gompertz para permitir que sua função contemplasse o lento aumento da taxa de mortalidade, presente nas idades avançadas. Perks (1932) sugeriu então a chamada função logística:

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{kc^{-x} + 1 + Dc^x} \quad (5)$$

Onde os parâmetros  $A$  (mede a acidentabilidade),  $B$  (mede a incapacidade de resistência à destruição),  $c$  (indica a taxa de deteriorização do corpo em função da idade),  $D$  (tem o efeito de reduzir a mortalidade nas idades avançadas) e  $k$  (tem o efeito de reduzir a mortalidade nas primeiras idades) são os parâmetros a serem estimados.

### 2.5.6) Modelo de Harper (1936)

Tal qual fez Steffenson em 1930, Harper em 1936 propôs uma modelagem para o  $\log_{10}$  de  $\ell_x$ . A fórmula de Harper apresentava a seguinte equação:

$$\log_{10}(\ell_x) = A + 10^{B\sqrt{x} + Cx + D} \quad (6)$$

Onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são os parâmetros a serem estimados.

### 2.5.7) Modelo de Weibull (1939)

Weibull propôs em 1939 um modelo que representa a falha técnica de um sistema em função do desgaste pelo uso. A idéia era considerar a distribuição do tempo até que a máquina deixe de funcionar, considerando que isso poderá ocorrer quando pelo menos uma de suas componentes venha a falhar. Fazendo um paralelo com os seres humanos, podemos considerar a distribuição do tempo até a falência de um dos seus órgãos, supondo que a morte do indivíduo poderá ocorrer caso pelo

menos um de seus órgãos deixe de funcionar. A distribuição de Weibull parte do pressuposto que a força de mortalidade não é constante com a idade e sim decrescente como uma hipérbole.

A função proposta por Weibull foi a seguinte:

$$\mu_x = \alpha X^{\beta-1} \quad (7)$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.8) Modelo de Van der Maen (1943)

Em 1943, Van der Maen desenvolveu dois modelos para descrever o comportamento de  $\mu_x$ . São eles:

$$\mu_x = A + Bx + Cx^2 + \frac{I}{N-x} \quad (8)$$

$$\mu_x = A + Bc^x + \frac{c}{N-x} \quad (9)$$

Onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $c$ ,  $I$  e  $N$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.9) Modelo de Brillinger (1960)

Em 1960, Brillinger desenvolveu o seguinte modelo para descrever o comportamento de  $\mu_x$ :

$$\mu_x = \sum_i \left( H_i (x - B_i)^{C_i-1} + \frac{A_i}{(b_i - x)^{C_i+1}} + E_i d_i^x \right) \quad (10)$$

Onde  $H_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $E_i$ ,  $b_i$  e  $d_i$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.10) Modelo de Beard (1961)

Em 1961, Beard desenvolveu um modelo muito semelhante ao proposto por Perks em 1932. A função proposta por Beard (1961), apresentava a seguinte característica:

$$\mu_x = \frac{Be^{ux}}{1 + De^{ux}} \quad (11)$$

Onde  $B$ ,  $D$  e  $u$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.11) Modelo de Siller (1979)

Em 1979, Siller propôs um modelo com 3 componentes, semelhante àquele proposto por Thiele em 1872, sendo que a segunda componente agora é modelada como uma constante. A função de Siller tinha a seguinte característica:

$$\mu_x = a_1 e^{-b_1 x} + a_2 + a_3 e^{b_3 x} \quad (12)$$

Onde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_1$  e  $b_3$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.12) Modelo de Heligman & Pollard (1980)

Em 1980, Heligman & Pollard propuseram um modelo de 8 parâmetros, que era capaz de ajustar o formato da curva de mortalidade para todas as idades. A função inicialmente proposta era:

$$\frac{q_x}{p_x} = \underbrace{A^{(x+B)^C}}_{(I)} + \underbrace{De^{-E(\ln(x) - \ln F)^2}}_{(II)} + \underbrace{GH^x}_{(III)} \quad (13)$$

Tal qual o modelo proposto por Thiele e aquele proposto por Siller, o modelo de Heligman & Pollard prevê que a mortalidade pode ser decomposta em três componentes, sendo que a componente (I) reflete a queda da mortalidade na infância, a componente (II) diz respeito à mortalidade por causas externas e a componente (III) trata da mortalidade por senescência.

Heligman & Pollard também propuseram algumas variantes para sua função, tais como:

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x)-\ln F)^2} + \frac{GH^x}{(1+GH^x)} \quad (14)$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x)-\ln F)^2} + \frac{GH^x}{(1+KGH^x)} \quad (15)$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x)-\ln F)^2} + \frac{GH^{x^K}}{(1+GH^{x^K})} \quad (16)$$

No Capítulo 3 descreve-se de forma detalhada o significado de cada um dos parâmetros desse modelo, que será o utilizado para ajustar a função de mortalidade aos dados disponibilizados. O Anexo C apresenta uma análise de sensibilidade para cada um desses parâmetros.

### 2.5.13) Modelo de Petrioli (1981)

Em 1981, Petrioli propôs uma função para modelar o número de sobreviventes  $\ell_x$ . Sua função foi representada da seguinte forma:

$$\ell_x = \frac{1}{x^a (\omega - x)^{-b} e^{\frac{c}{2}x^2 + dx} \frac{1}{k} + 1} \quad (17)$$

Onde  $a, b, c, d, k$  e  $\omega$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.14) Modelo de Rogers e Planck (1983)

Em 1983, Rogers e Planck propuseram que a probabilidade de morte  $q_x$  fosse descrita por uma função com quatro componentes. Essa função tinha a seguinte forma:

$$q_x = A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_2 (x-\mu_2) - e^{-\lambda_2 (x-\mu_2)}} + A_3 e^{\alpha_3 x} \quad (18)$$

Onde  $A_0, A_1, A_2, A_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_2$  e  $\lambda_2$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.15) Modelo de Martinelle (1987)

Em 1987, Martinelle propôs um modelo tal qual fez Beard (1961), variante do modelo de Perks (1932). A função proposta por Martinelle (1987) possuía a seguinte característica:

$$\mu_x = \frac{A + B e^{kx}}{1 + D e^{kx}} + c e^{kx} \quad (19)$$

Onde  $A, B, c, D$  e  $k$  são os parâmetros a serem estimados.

#### 2.5.16) Modelo de Kostaki (1992)

Em 1982, Kostaki propôs um modelo de nove parâmetros, semelhante ao de Heligman & Pollard (1980), composto também por três componentes. A função apresentava a seguinte característica:

$$\begin{aligned} \frac{q_x}{p_x} &= A^{(x+B)^C} + D e^{-E_1^2 \left[ \log\left(\frac{x}{F}\right) \right]^2} + G H^x, \text{ para } x \leq F \\ &= A^{(x+B)^C} + D e^{-E_2^2 \left[ \log\left(\frac{x}{F}\right) \right]^2} + G H^x, \text{ para } x > F \end{aligned} \quad (20)$$

Onde  $A, B, C, D, E_1, E_2, F, G$  e  $H$  são os parâmetros a serem estimados.

### 2.5.17) Modelo de Kannisto (1992)

Em 1992, Kannisto propôs um modelo funcional também semelhante ao de Beard (1932). A função proposta por Kannisto tinha a seguinte característica:

$$\mu_x = C + \frac{ae^{bx}}{1 + ae^{bx}} \quad (21)$$

Onde  $a$ ,  $b$  e  $C$  são os parâmetros a serem estimados.

### 2.5.18) Modelos Polinomiais

Existem outros modelos que ajustam a mortalidade por senescência que são mais descritíveis do que os modelos anteriores que trabalham com variáveis explanatórias. O modelo polinomial utiliza a taxa instantânea de mortalidade como variável resposta. Um exemplo seria:

$$\ln(\mu_x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k \quad (22)$$

Embora  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  constituam uma base para os polinômios, é comum a escolha de uma seqüência de polinômios ortogonais como base.

Segundo Higgins (2003, p.4), uma característica específica desses modelos ditos matemáticos é a hipótese com relação ao formato da função de risco. Além de modelar essa função de risco diretamente, pode-se ajustar uma função de risco que seria mais simples de se estimar a partir dos dados empíricos. Desta forma, por exemplo, a probabilidade de um indivíduo vivo com idade 0 sobreviver até a idade  $x$ , pode ser expressa em termos da função de risco:

$${}_x p_0 = e^{-\int_0^x \mu_s ds}$$

## **2.6) A disseminação de um padrão emergente nas tábuas de mortalidade: as causas externas**

As causas de mortalidade vêm se modificando através de várias gerações, tendo como local de início dessa mudança a Europa do século XVIII, onde a melhoria constante nas políticas de saúde pública conjugada ao desenvolvimento socioeconômico, atuou como principal responsável por essa transição (Weinstein & Pillai 2001, p.191). A esse período de substituição das causas tradicionais de mortalidade (como as doenças infecciosas) por outras, até se chegar as causas contemporâneas, dá-se o nome de transição epidemiológica<sup>62</sup>, que possui ligação direta com um fenômeno mais amplo chamado transição demográfica. Dentro dessas causas de morte contemporâneas deve-se destacar as chamadas causas externas, que mudam significativamente o padrão de “J” da curva de mortalidade conhecido até então.

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS, 1993) em sua 10ª Revisão da Classificação Internacional de Doenças – CID<sup>63</sup>, o termo “causas externas” refere-se, aos fatores externos ao organismo humano que provocam a morte do indivíduo, tais como:

- Acidentes de transporte;
- Agressões;
- Afogamento e submersão acidentalmente;
- Envenenamento, intoxicação por ou exposição a substâncias nocivas;
- Lesões autoprovocadas voluntariamente;
- Todas as outras causas externas: quedas, contato com animais ou plantas venenosas, contato com fonte de calor, excesso de esforços, exposição à corrente elétrica, à radiação e às temperaturas e pressões extremas do ambiente, exposição às forças da natureza, exposição a forças mecânicas animadas e inanimadas, dentre as principais.

Essas causas externas provocam uma alteração no padrão da mortalidade mundial, normalmente para as idades entre 15 e 40 anos. Inicialmente esse

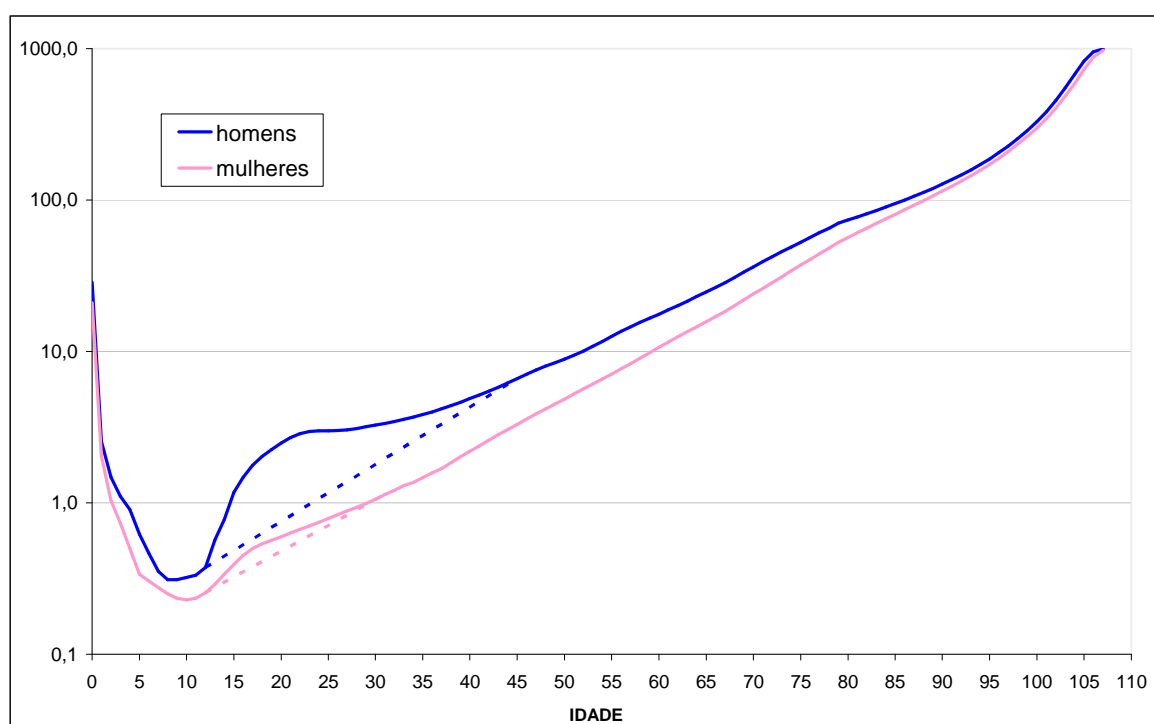
---

<sup>62</sup> Para maiores detalhes ver Yaukey *et al.* (2007, pp.121-153).

<sup>63</sup> Organização Mundial da Saúde - OMS (1993).

aumento da mortalidade jovem era percebido apenas para os homens, mas atualmente atinge também as mulheres. Na verdade este padrão já tinha sido percebido em 1875 por Thiele, possivelmente causado pelas guerras no caso dos homens (ou, entre as mulheres, pela mortalidade materna). O gráfico 7 apresenta a probabilidade de morte  ${}_nq_x$  da população brasileira em função das tábuas de mortalidade IBGE 2006 (que consideram a população brasileira como um todo), sendo que os  ${}_nq_x$  a partir da idade de 80 anos foram estimados em função da  $e_{80+} = 8,5$  anos para homens e  $e_{80+} = 9,5$  anos para mulheres, divulgados na mesma tábua. A linha tracejada foi incluída no gráfico para uma melhor visualização do impacto das causas externas na curva de mortalidade da população brasileira como um todo, em 2006.

**Gráfico 7 - Probabilidade de morte  ${}_nq_x$  (em escala logarítmica) - Tábua IBGE 2006**



fonte: tábuas de mortalidade IBGE 2006.

Os modelos de mortalidade criados no passado com o objetivo de melhor espelhar essa variável nos diversos países e regionalidades, com o passar dos anos têm se mostrados inadequados às transformações estruturais ocorridas, em função da variação nas causas de morte. A partir dos anos 80 o Brasil passou por um processo de desenvolvimento social que ocasionou certas modificações nos padrões de mortalidade até então correntes. A diminuição crescente da mortalidade infantil,



aliada ao aumento da mortalidade masculina em idades adultas jovens, fizeram com que as curvas de mortalidade se modificassem substancialmente.

Observando o gráfico 7, percebe-se claramente que as taxas de mortalidade femininas são mais baixas que as masculinas para todas as idades, como era de se esperar. A questão mais importante diz respeito ao calombo proeminente apresentado nas taxas masculinas para os indivíduos com idades de 12 a 45 anos. Para a população feminina, percebemos certa proeminência na curva entre as idades de 12 a 31 anos, o que demonstra que as mulheres também estão sendo vítimas da violência e dos acidentes de trânsito (as duas principais causas), ainda que em menor escala.

Como esses “calombos”<sup>64</sup> na curva de mortalidade geram um padrão diferente daquele experimentado pela população brasileira em grande parte do século passado, os modelos até então utilizados para as estimativas não são capazes de ajustar uma função aderente ao atual padrão da curva de mortalidade do Brasil, para todas as idades. Beltrão & Sugahara (2002) detectaram também a existência do “calombo” na curva de mortalidade dos servidores públicos da União.

## **2.7) A escolha do modelo adequado**

A literatura aponta para uma forte evidência de que em muitos países desenvolvidos a taxa de crescimento da mortalidade como função da idade desacelera nas idades mais avançadas (ver curvas inferiores do gráfico 5). Nessas mesmas localidades detectou-se também uma acentuada queda na mortalidade infantil ocorrida no tempo. Em linhas gerais, a redução nas taxas de mortalidade é normalmente resultado de uma evolução nos padrões de vida da população, decorrente de um conjunto de fatores tais como: os avanços na medicina e melhoria da saúde pública como um todo, melhoria na geração e distribuição da riqueza para a população, melhor qualidade de saneamento básico e tratamento da água, maior

---

<sup>64</sup> Tal como a corcova de um camelo. No artigo de Heligman & Pollard (1980) os autores se referem a “*accident hump*”.

controle e vacinação das doenças, tratamento do lixo, etc. Aliado a esses fatores, destaca-se também o aumento da consciência do indivíduo no que tange o seu estilo de vida. Fatores como o exercício regular, uma dieta rica e balanceada com refeições regulares, peso dentro da normalidade, consumo moderado de álcool e descanso médio de 7 horas diárias são atitudes que prolongam a vida das pessoas.

Além do fato do aumento da longevidade, com uma possível desaceleração da força de mortalidade  $\mu_x$  nas idades mais avançadas, tem-se a questão já citada anteriormente, do aumento da mortalidade adulta jovem, em função das causas externas. Todos esses fatores conjugados vão gerar um padrão da curva de mortalidade que deverá ser ajustado por um modelo que contemple essas possíveis especificidades, dentre outras mais.

Dada a complexidade do padrão brasileiro em função dos tamanhos contrastes regionais, utiliza-se nesse trabalho um modelo matemático bastante flexível, contemplando as diferenças de níveis de mortalidade existentes entre crianças, adolescentes, adultos e idosos, refletindo a questão do possível calombo (*accident hump*) gerado na curva de  $q_x$  (mais provavelmente para os homens) em função das causas externas, e por final, que contempla a questão de uma possível desaceleração das taxas de mortalidade nas idades mais avançadas. Dentro dessas circunstâncias a variante do modelo de Heligman & Pollard (15) é a mais adequada de ser utilizada. Maiores detalhes sobre o referido modelo serão apresentados no Capítulo 3.

Todos os modelos matemáticos descritos até agora neste trabalho são classificados como modelos estáticos, isto é, referem-se a um determinado instante no tempo. Como já mencionado, pesquisas têm apontado uma melhoria significativa nas taxas de mortalidade observadas no decorrer dos anos. Para tanto, utilizou-se também uma variante do Modelo de Lee-Carter (1992), que irá incorporar ao modelo de ajuste utilizado, uma componente que contempla a dimensão temporal e conseqüente variação da mortalidade ao longo dos anos.

Para os pesquisadores, uma particularidade interessante acerca dos modelos relacionais como o de Lee-Carter (1992) é que eles fornecem uma metodologia para

a projeção de taxas de mortalidade futuras, baseadas em experiências do passado. A heterogeneidade dos fatores que causam melhorias nas taxas de mortalidade significa que os padrões de mortalidade passados podem necessariamente não estar fornecendo uma boa previsão acerca dos padrões futuros, apesar de representarem a base inicial de toda e qualquer análise. Conseqüentemente, quando os coeficientes estimados para os modelos paramétricos mostram certa relação com o tempo, esses modelos fornecem, intrinsecamente, uma metodologia para a projeção da mortalidade futura.

### CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Para se construírem tábuas de mortalidade para os servidores públicos, tem-se *a priori* dois problemas distintos a serem solucionados. O primeiro deles diz respeito à base de dados a ser utilizada. Nesse trabalho foram utilizados os dados transversais dos servidores públicos do Estado de São Paulo, a saber, exposição ao risco e o número de mortes ocorridas no período de análise. O segundo problema tem a ver com a escolha do modelo mais adequado para descrever a mortalidade observada. Segundo Beltrão e Sugahara (2005, p.6), *"deve-se lembrar que tábuas de vida não são modelos no sentido comum, já que não são baseadas em teorias causais ou em modelos estatísticos, mas sim uma representação de fenômenos complexos sumarizados em poucos parâmetros"*.

O primeiro passo será calcular as probabilidades de morte  $q_x$  a partir dos dados observados. A partir desse ponto aplica-se um processo de suavização (*smoothing*) nos dados, nesse caso uma média móvel. Esse processo de suavização, chamado na literatura de graduação<sup>65</sup>, é baseado na hipótese de que valores adjacentes devem ser similares. Feito esse processo, tem-se uma noção acerca do formato da curva de mortalidade e pode-se definir qual será o modelo matemático mais adequado para representá-la. Uma vez definido o modelo, se estimarão todos os parâmetros que compõem o mesmo e ter-se-á finalmente a função matemática para a idade  $x$ .

Neste capítulo abordar-se-ão algumas questões metodológicas relacionadas às estimativas das tábuas de mortalidade específicas. Para tanto se descrevem os estimadores utilizados para o cálculo das probabilidades de óbito a partir das bases de dados disponibilizadas, o modelo matemático escolhido para representar a mortalidade específica observada e por último, o modelo dinâmico (relacional) de alocação temporal para essa mortalidade, contemplando as mudanças ocorridas no tempo.

---

<sup>65</sup> Para maiores detalhes Ver Pollard (1979).

### 3.1) Cálculo das probabilidades de morte (EMV)

Segundo o Dicionário Aurélio Eletrônico Século XXI (versão 3.0 de novembro de 1999), a palavra *verossímil* é aquilo que é provável, semelhante à verdade ou que parece verdadeiro; já a palavra *verossimilhança* é definida como a qualidade ou caráter de verossímil ou verossimilhante, verossimilitude ou ainda verossimilidade.

*“O uso desse princípio conduz a um método de estimação pelo qual se obtêm os chamados estimadores de máxima verossimilhança que, em geral, têm propriedades muito boas. Esse princípio foi anunciado por Fisher pela primeira vez em 1912 e, em 1922, deu-lhe forma mais completa, introduzindo a expressão “likelihood” (verossimilhança).”* (Bussab e Morettin, 2006, p.301)

Segundo Namboodiri e Suchindran (1987, pp. 171-173), um modelo estatístico para uma determinada variável aleatória especifica como a mesma será gerada, e os dados então observados são vistos como realizações do processo especificado. Dada uma distribuição de probabilidade e um conjunto de dados, a função de verossimilhança é igual a função densidade de probabilidade dos dados observados, sendo considerada como uma função de parâmetros da distribuição. Se existe um conjunto de valores de parâmetros para os quais a verossimilhança é máxima, então esses valores são ditos as estimativas de máxima-verossimilhança dos parâmetros envolvidos. Na prática, normalmente maximiza-se o logaritmo da verossimilhança ao invés da própria verossimilhança, pois a função logaritmo é uma função monotônica crescente, e conseqüentemente os valores dos parâmetros que maximizam a verossimilhança, também maximizarão a log-verossimilhança e vice-versa.

Desta forma, seja  $\{Y_x\}_{x=0,1,2,\dots,\omega}$  um conjunto de variáveis aleatórias independentes, correspondentes aos óbitos ocorridos para indivíduos com idade  $x$  num dado período.

Considerando homogeneidade e independência da população por idade e sexo, as variáveis  $Y_x$  têm uma distribuição binomial, ou seja:

$$Y_x \sim B(N_x, q_x)$$

Onde para todo  $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$ ,

$N_x$  = número de pessoas expostas ao risco com idade  $x$ .

$q_x$  = probabilidade de óbito de um indivíduo entre as idades  $x$  e  $x+1$ .

A função de densidade de  $Y_x = y_x$  é:

$$f(y_x) = \binom{N_x}{y_x} * q_x^{y_x} * (1 - q_x)^{N_x - y_x}$$

E a distribuição conjunta é:

$$f(y_0, y_1, y_2, \dots, y_\omega) \sim \prod_{x=0}^{\omega} \binom{N_x}{y_x} * q_x^{y_x} * (1 - q_x)^{N_x - y_x}$$

.

A log-verossimilhança conjunta é então:

$$\begin{aligned} \ell(q_0, q_1, q_2, \dots, q_\omega / y_0, y_1, y_2, \dots, y_\omega) &= \ln \left( \prod_{x=0}^{\omega} \binom{N_x}{y_x} * q_x^{y_x} * (1 - q_x)^{N_x - y_x} \right) = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left\{ \ln \binom{N_x}{y_x} + \ln(q_x^{y_x}) + \ln((1 - q_x)^{N_x - y_x}) \right\} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left\{ \ln \binom{N_x}{y_x} + y_x * \ln(q_x) + (N_x - y_x) \ln(1 - q_x) \right\} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left\{ \ln \binom{N_x}{y_x} + y_x * \ln(q_x) + N_x * \ln(1 - q_x) - y_x * \ln(1 - q_x) \right\} \Rightarrow \\ \ell(q_0, q_1, q_2, \dots, q_\omega / y_0, y_1, y_2, \dots, y_\omega) &= \sum_{x=0}^{\omega} \left\{ \ln \binom{N_x}{y_x} + y_x * \ln \left( \frac{q_x}{1 - q_x} \right) + N_x * \ln(1 - q_x) \right\} \end{aligned}$$

Se considerarmos que  $y_x$  não é correlacionado com seus vizinhos, o estimador de máxima verossimilhança de  $q_x$  é:  $\hat{q}_x = \frac{y_x}{N_x}$

Esses  $\hat{q}_x$  calculados vão dar uma idéia de qual forma funcional será a mais adequada para ajustar a curva de mortalidade.

No entanto, este enfoque não paramétrico não garante a monotonicidade por partes (característica de uma função de mortalidade). Uma opção é definir  $q_x$  como uma função de alguns parâmetros,  $q_x = f(x, \underline{\beta})$ , onde  $\underline{\beta}$  é um vetor de parâmetros.

Neste caso a log-verossimilhança pode ser denotada por:

$$\ell(\underline{\beta} / y_0, y_1, y_2, \dots, y_\omega) = \sum_x \left\{ \ln \binom{N_x}{y_x} + y_x * \ln \left( \frac{f(x, \underline{\beta})}{1 - f(x, \underline{\beta})} \right) + N_x * \ln(1 - f(x, \underline{\beta})) \right\}$$

A forma funcional mais simples (mas que neste caso seria uma aproximação grosseira) é uma função linear:

$$q_x = \beta_0 + \beta_1 x, \text{ onde o vetor de parâmetros seria } \underline{\beta} = (\beta_0; \beta_1).$$

Como já se viu, Gompertz sugere uma outra forma funcional (para o intervalo de idades adultas), uma exponencial,  $q_x = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$ .

O EMV para o vetor de parâmetros  $\underline{\beta}$  é, por definição, o vetor que maximiza a verossimilhança (ou a log-verossimilhança, o que é equivalente), ou seja,

$$\hat{\underline{\beta}} \ni \ell(\hat{\underline{\beta}} / y_0, y_1, y_2, \dots, y_\omega) = \max_{\underline{\beta}} \ell(\underline{\beta} / y_0, y_1, y_2, \dots, y_\omega)$$

### 3.2) Características do Modelo de Heligman & Pollard

*“Sugerimos uma lei de mortalidade que acreditamos descrever o modelo padrão de mortalidade por idade, de forma adequada para uma grande variedade de experiências. Apesar dessa ‘lei’ nem sempre fornecer um ajuste tão próximo para certas finalidades atuariais, ela consegue reproduzir as três características distintas da mortalidade: a adaptação da criança ao seu novo ambiente, o envelhecimento do corpo e a mortalidade por acidente. Além disso, ela permite comparações da mortalidade por idade e por sexo, tanto para países distintos como para o mesmo país ao longo do tempo. Essa curva é contínua e aplicável para toda a amplitude das idades, permite que a taxa de mortalidade ( $q_x$ ) só tome valores entre zero e a unidade, e tem relativamente poucos parâmetros, cada um com sua interpretação demográfica e que em conjunto são capazes de descrever plenamente o modelo padrão de mortalidade em questão.”<sup>66</sup>*

(Heligman & Pollard, 1980)

Heligman & Pollard (1980) propuseram originalmente um modelo funcional objetivando ajustar a razão  $q_x/p_x$  composto por 8 parâmetros ( $A, B, C, D, E, F, G$  e  $H$ ), que *a priori* conseguiria ajustar de forma satisfatória qualquer padrão de mortalidade existente. Nesse trabalho utiliza-se uma variante desse modelo proposto pelos autores, que apresenta um nono parâmetro ( $K$ ). Desta forma, a curva básica de três componentes e nove parâmetros utilizada na presente dissertação tem a seguinte característica:

$$q_x = \underbrace{A^{(x+B)^C}}_{(I)} + \underbrace{De^{-E(\ln(x) - \ln F)^2}}_{(II)} + \underbrace{\frac{GH^x}{(1 + KGH^x)}}_{(III)}$$

<sup>66</sup> Tradução do autor.



Essa curva básica é contínua e aplicável para toda idade  $x$ , tal que  $0 \leq x \leq \infty$ , e permite, para os valores adequados dos parâmetros, que  $q_x$  assumam apenas valores entre zero e um, como deve ser uma função de probabilidade. Apesar de ter-se que estimar nove parâmetros, cada um com sua interpretação demográfica, esse processo é muito mais prático do que se estimar individualmente cada um dos  $q_x$  nas  $\omega+1$  idades diferentes<sup>67</sup>. Esse modelo é suficientemente flexível para adequar-se a uma grande variedade de padrões de mortalidade, servindo tanto para homens quanto para mulheres, independente de cor ou classe social.

A fórmula matemática contém três componentes, cada uma representando uma fase distinta da mortalidade:

- (I) a primeira componente descreve a mortalidade infantil. Essa exponencial decrescente reflete a rápida queda da mortalidade durante as primeiras idades, tempo este em que a criança se adapta ao seu novo ambiente e ganha imunidade com relação às doenças do mundo pós-ventre materno. Essa primeira componente possui três parâmetros:  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

$$A^{(x+B)^C}$$

- **Parâmetro A** : regula o nível da mortalidade na idade zero
- **Parâmetro B** : determina uma translação na escala etária, responsável pela mortalidade infantil.
- **Parâmetro C** : mede o declínio da mortalidade na infância. Quanto maior o valor de  $C$ , maior será o declínio da mortalidade com o aumento na idade  $x$  da criança. **(funciona como se fosse a taxa na qual a criança vai se adaptando ao novo ambiente).**

---

<sup>67</sup>  $\omega$  (ômega) normalmente maior ou igual a 100 anos.

(II) a segunda componente descreve a mortalidade de adultos jovens<sup>68</sup>. Essa componente é similar a uma função log-normal e reflete a mortalidade masculina (principalmente) causada por acidentes e a mortalidade feminina causada por complicações no parto, ou seja, um adicional na curva de mortalidade básica, descrita pelas componentes (I) e (III). Esse “calombo” é encontrado em grande parte das populações e geralmente aparece entre as idades de 10 a 40 anos. Essa segunda componente possui três parâmetros:  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

$$De^{-E(\ln(x)-\ln F)^2}$$

- **Parâmetro  $D$**  : representa a severidade das causas externas. Mantendo-se  $E$  e  $F$  constantes, valores maiores de  $D$  correspondem a “calombos” maiores para a mortalidade dos adultos jovens (**determina a severidade das causas externas**).
- **Parâmetro  $E$**  : representa a amplitude do “calombo” entre as idades  $x$ . Valores menores do parâmetro  $E$  correspondem a um calombo mais concentrado e valores maiores a uma cúspide mais dilatada (**determina a dispersão do “calombo”**).
- **Parâmetro  $F$**  : indica a posição do “calombo”, trasladando e modificando a escala das idades (**determina a localização do “calombo”**).

(III) a terceira componente corresponde à mortalidade dos idosos. O numerador dessa componente é a conhecida exponencial de Gompertz. Sua função reflete o crescimento geométrico da mortalidade nas idades adultas, geralmente representando a mortalidade por senescência ou degeneração do corpo. Essa terceira componente possui três parâmetros:  $G$ ,  $H$  e  $K$ .

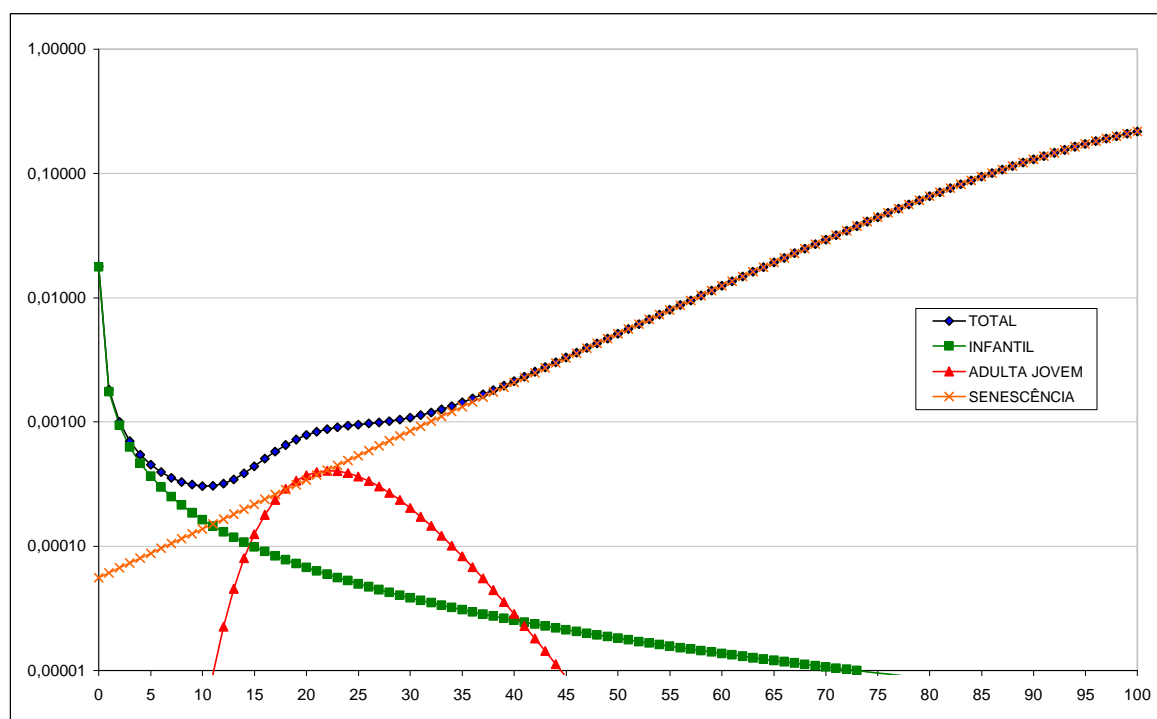
<sup>68</sup> Usualmente relacionada com causas externas e representada por um “calombo” (*accident hump*) na curva.

$$\frac{GH^x}{(1 + KGH^x)}$$

- **Parâmetro G** : representa o nível base da mortalidade por senescência, ou simplesmente uma translação na escala da idade **(funciona como a base para a mortalidade de idosos)**.
- **Parâmetro H** : representa a taxa de crescimento da mortalidade por senescência. Nas primeiras idades, o parâmetro  $H$  regula a inclinação da reta na escala logarítmica que assume o valor  $\ln(H)$ . Nas idades avançadas, o parâmetro regula as mudanças nas curvaturas, mais precisamente a região a partir da qual a função perde a sua característica de linearidade: quanto maior o  $H$ , mais cedo ocorre a inflexão da curva. **(funciona como a taxa de aumento da mortalidade de idosos)**.
- **Parâmetro K** : o parâmetro  $K$  tem dupla função: regula a curvatura nas idades mais avançadas e define a assíntota do limite superior da curva, igual ao inverso do parâmetro no caso deste ser positivo. Quanto maior o valor do  $K$ , mais côncava se torna a curva, ou seja, menores são os aumentos adicionais no logaritmo da mortalidade por ano de idade. Valores negativos do parâmetro implicam em curvas convexas com maiores ganhos por ano de idade acrescido e uma idade limite a partir da qual a mortalidade é um evento certo. **(funciona como um indicador de desaceleração da mortalidade nas idades avançadas)**.

No Anexo C apresenta-se uma análise de sensibilidade com relação aos nove parâmetros dessa variante do modelo de Heligman & Pollard. O gráfico 8 mostra o que seria um possível resultado para a função proposta pelos autores:

**Gráfico 8 - Probabilidade de óbito (em escala logarítmica) - Modelo de Heligman & Pollard - componentes e total**



Fonte: adaptado pelo autor de FIPECAFI (2006) "Um estudo sobre a mortalidade da população da CTEEP e da fundação CESP"

As constantes  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $D_s$ ,  $E_s$ ,  $F_s$ ,  $G_s$ ,  $H_s$  e  $K_s$  assumirão valores diferenciados segundo o sexo,  $s$ .

### 3.3) Características do Modelo de Lee-Carter

*“O novo método que propomos aqui é extrapolativo e não se preocupa especificamente em incorporar o conhecimento médico, comportamental e as influências sociais com relação às mudanças na mortalidade. Suas virtudes estão no fato do mesmo combinar um rico e parcimonioso modelo demográfico com métodos estatísticos de séries temporais, que são baseados em modelos padrões e tendências históricas com períodos de grande amplitude, remontando a 1900, e que fornece intervalos de confiança para suas previsões. Embora muitos métodos assumam um limite superior para a vida humana ou racionalizem de alguma outra forma a desaceleração dos ganhos na esperança de vida, o nosso método permite que as taxas específicas de mortalidade por idade a diminuam exponencialmente, sem qualquer limite; a desaceleração da esperança de vida segue sem qualquer pressuposto adicional.”*<sup>69</sup>

(Lee & Carter, 1992)

O princípio do método de Lee-Carter (1992) parte de uma decomposição matricial, transformando as taxas específicas de mortalidade em duas componentes:

- o nível de mortalidade (dependente do tempo), e
- um conjunto de parâmetros (independentes do tempo), que descreve a estrutura da mortalidade, ou seja, a posição relativa da mortalidade para idades específicas.

Para modelar e prever o nível da mortalidade ao longo do tempo, Lee & Carter propuseram aplicar junto à mortalidade observada, um método de análise de séries temporais, partindo do pressuposto de que para prever-se o “futuro”, o melhor guia é o “passado”. Conseqüentemente, uma modelagem acurada dos padrões observados no passado é base essencial para se estimarem as incertezas relacionadas às previsões. Com base no exposto, uma pergunta que se coloca é a seguinte: quanto

---

<sup>69</sup> Tradução do autor.

do passado (quantos anos atrás) fornece o melhor guia para quanto do futuro (quantos anos para frente)? (Booth *et al.*, 2005).

Em resumo, o Método de Lee-Carter para a previsão da mortalidade, combina um modelo demográfico de mortalidade com métodos de previsão e de séries temporais. Para a utilização do mesmo, utiliza-se de preferência o maior período de tempo disponível na base de dados.

Para o modelo de Lee-Carter escrevem-se as seguintes equações:

$$\ln(m_0(x, t)) = a_{(x)} + b_{(x)}k_{(t)} + e_{(x, t)} \quad \text{ou} \quad m_0(x, t) = e^{(a_{(x)} + b_{(x)}k_{(t)} + e_{(x, t)})}$$

Onde:

$m_0(x, t)$  = taxa central de mortalidade para a idade  $x$  no ano  $t$ .

$a_{(x)}$  = padrão médio da mortalidade por idade, ao longo dos anos,  
(**logaritmo do valor médio da força de mortalidade**).

$b_{(x)}$  = velocidade relativa de mudança da mortalidade para cada idade. Informa quais taxas declinam rapidamente e quais taxas declinam lentamente em resposta às mudanças no parâmetro  $k_{(t)}$ .  
(**proxy para a primeira derivada da taxa de mortalidade, a menos de uma constante**).

$k_{(t)}$  = indexador do nível de mortalidade no tempo  $t$ .  
(**usualmente modelado como um passeio aleatório**).

$e_{(x, t)}$  = erro aleatório para a idade  $x$  no ano  $t$ . Reflete as influências não capturadas pelo modelo.  
(**erro com média zero e variância  $\sigma_e^2$ , associado às estimativas**).

Essa equação será válida apenas para um conjunto apropriado de constantes por idade  $x$  ( $a_{(x)}$  e  $b_{(x)}$ ) e para um determinado índice de variação temporal  $k_{(t)}$ .

Os  $a_{(x)}$  são calculados como a média dos  $\ln(m_o(x,t))$  ao longo do tempo, ao passo que  $b_{(x)}$  e  $k_{(t)}$  são estimados por decomposição de valores singulares<sup>70</sup> (Trefethen and Baú, 1997 apud Booth et al. 2006).

O próximo passo é ajustar o valor de  $k_{(t)}$ , em função do total de mortes observadas,  $D_{(t)}$ . Esse ajuste dá um maior peso para as idades onde a mortalidade é mais elevada, desta forma contrabalançando em parte o efeito do uso dos logaritmos das taxas (Booth et al. 2006). Depois desse ajuste inicial, Lee & Carter modelam o  $k_{(t)}$  como um passeio aleatório com tendência (*random walk with drift*), da seguinte forma:

$$k_{(t)} = k_{(t-1)} + d + e_{(t)}$$

Onde:

$d$  = mudança média anual em  $K_{(t)}$ ;

$e_{(t)}$  = erros não correlacionados;

Segundo Booth et al. (2006), projeções para as taxas específicas de mortalidade são obtidas utilizando valores extrapolados de  $k_{(t)}$  e fixando  $a_{(x)}$  e  $b_{(x)}$  e nesse caso, as taxas calculadas para o último ano do período de tempo utilizado na pesquisa (*jump-off year*) serão taxas ajustadas.

Lee & Miller (2001), salientaram que o Método de Lee-Carter não consegue descrever um modelo linear de séries temporais ( $k_{(t)}$ ) como sendo um passeio aleatório com uma tendência em 100% dos casos. Contudo esse modelo foi julgado ser apropriado na grande maioria das situações. Mesmo quando um modelo mais complexo foi utilizado, os resultados foram apenas marginalmente diferentes daqueles em que se utilizou o passeio aleatório.

Combinando então o conceito proposto originalmente por Lee & Carter com aquele sugerido por Heligman & Pollard e descrito anteriormente, ter-se-á o modelo utilizado nessa dissertação. No Capítulo 5 apresenta-se uma descrição detalhada de algumas particularidades do modelo.

---

<sup>70</sup> SVD - *Singular Value Decomposition*.

## **CAPÍTULO 4 – BASE DE DADOS**

A investigação origina-se a partir do levantamento dos dados dos funcionários públicos civis do poder executivo do Estado de São Paulo.

### **4.1) Descrição e coleta dos dados**

Foram disponibilizados pela Companhia de Processamento de Dados do Estado de São Paulo - PRODESP informações de janeiro de 1985 a setembro de 2006. Esses dados continham 2.099.546 (dois milhões, noventa e nove mil, quinhentos e cinquenta e seis) linhas, correspondendo a 1.212.635 (um milhão, duzentos e doze mil, seiscentos e trinta e cinco) indivíduos diferentes, sendo que um mesmo indivíduo pode ter mais de uma matrícula no estado, como por exemplo no caso dos professores ou ter uma gratificação de chefia que é registrada em uma linha separada. Os dados cadastrais continham várias informações, dentre as quais:

- Matrícula;
- Data de nascimento;
- Data de Admissão;
- Sexo;
- Nível de Escolaridade;
- Escala de Vencimento;
- Cargo;
- Data de Aposentadoria [quando for o caso];
- Data de Desligamento [quando for o caso];
- Motivo de Desligamento [quando for o caso];

Obs: sempre que na citação das fontes das tabelas e gráficos falar-se em PRODESP, deve-se entender como os microdados do banco de pessoal da Companhia de Processamento de Dados do Estado de São Paulo.



A distribuição dos funcionários por sua situação de vínculo com o estado está disponibilizada na tabela 1. Analisando a tabela 1 percebe-se que quase 64% dos registros referem-se a funcionários contratados, enquanto que os estatutários representam pouco mais de 30% da base. Esse grande quantitativo de contratados, na sua grande maioria professores, deve-se ao fato de há anos o Estado de São Paulo não realizar concurso público para o preenchimento dessas vagas docentes. Como existe a necessidade, esses professores são contratados por um prazo determinado, podendo ser esse contrato renovado.

**Tabela 1 - Distribuição dos funcionários por situação de vínculo**

Situação de vínculo	Funcionários Públicos do Estado de São Paulo							
	Total	%	Homens			Mulheres		
			Total	Nível médio	Nível superior	Total	Nível médio	Nível superior
<b>Total</b>	<b>2.099.546</b>	<b>100,0</b>	<b>513.525</b>	<b>178.661</b>	<b>334.864</b>	<b>1.586.021</b>	<b>649.489</b>	<b>936.532</b>
Contratado	1.348.215	64,2	255.488	43.493	211.995	1.092.727	416.323	676.404
Estatutário	633.035	30,2	211.096	106.771	104.325	421.939	188.552	233.387
Celetista	48.608	2,3	16.611	10.036	6.575	31.997	22.086	9.911
Estável	42.250	2,0	15.189	9.846	5.343	27.061	15.056	12.005
Aluno	11.666	0,6	8.747	4.618	4.129	2.919	1.360	1.559
Extra Quadro	9.267	0,4	4.209	3.264	945	5.058	4.663	395
Comissionado	6.126	0,3	1.931	526	1.405	4.195	1.434	2.761
Temporário	379	0,0	254	107	147	125	15	110

Fonte: PRODESP

Como a intenção desse trabalho é estimar a tábua de mortalidade dos funcionários públicos do Estado de São Paulo, não importará se o funcionário é ativo ou inativo. Em contrapartida, um fato muito importante e que importará muito no estudo diz respeito ao sexo do indivíduo e seu grau de escolaridade, fatores esses que tem ligação direta com os níveis de mortalidade apresentados. Analisando a tabela 2, que traz a distribuição dos registros por sexo e nível de escolaridade, observa-se que a grande maioria das informações é referente às mulheres (75,5%) enquanto que os homens representam quase que  $\frac{1}{4}$  do total. Com relação à variável nível de escolaridade os números apresentam-se mais divididos. Temos 39,4% dos registros ligados a indivíduos que possuem até o antigo 2º grau (na verdade

agrupou-se os indivíduos analfabetos e os com 1º ou 2º graus, completos ou não) e 60,6% dos registros representando pessoas com curso superior.

**Tabela 2 - Distribuição % dos registros por nível de escolaridade, segmentado por sexo**

<b>Sexo</b>	<b>Funcionários Públicos do Estado de São Paulo (em %)</b>		
	<b>Total</b>	<b>Nível médio</b>	<b>Nível superior</b>
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>
Feminino	75,5	78,4	73,7
Masculino	24,5	21,6	26,3

Fonte: PRODESP

**Tabela 3 - Distribuição % dos registros por sexo, segmentado por nível de escolaridade**

<b>Sexo</b>	<b>Funcionários Públicos do Estado de São Paulo (em %)</b>		
	<b>Total</b>	<b>Nível médio</b>	<b>Nível superior</b>
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>39,4</b>	<b>60,6</b>
Feminino	100	41,0	59,0
Masculino	100	34,8	65,2

Fonte: PRODESP

Em uma primeira análise da base de dados encontraram-se algumas inconsistências, principalmente com relação ao não seqüenciamento de datas de nascimento, ingresso, provimento (entrada no cargo) e desligamento, mas que foram devidamente esclarecidas<sup>71</sup>.

De um modo geral as informações presentes na base de dados tinham boa qualidade e, após uma segunda análise as informações de 1990 a 2005 se mostraram mais adequadas para a realização das estimativas, por apresentarem uma maior regularidade para o cálculo das taxas.

<sup>71</sup> Dois fatores foram os responsáveis pelo não seqüenciamento observado: a PRODESP fazia um reaproveitamento dos registros e um mesmo servidor tinha a possibilidade de possuir múltiplos vínculos.

#### **4.2) Tratamento e análise dos dados**

Considera-se para cada ano calendário a exposição ao risco na idade específica<sup>72</sup>. Para cada indivíduo da população em risco com determinada idade e num dado ano calendário, foram consideradas sete situações diferentes:

- 1) admissão antes do ano e óbito e/ou desligamento depois do ano calendário;
- 2) admissão durante o ano e óbito e/ou desligamento depois do ano calendário  
(2a: admissão antes da data de aniversário e 2b: admissão depois da data de aniversário);
- 3) admissão antes do ano e óbito durante o ano calendário  
(3a: óbito antes da data de aniversário e 3b: óbito depois da data de aniversário);
- 4) admissão durante o ano e óbito durante o ano calendário  
(4a: admissão e óbito antes da data de aniversário, 4b: admissão e óbito depois da data de aniversário e 4c: data de aniversário entre admissão e óbito);
- 5) admissão antes do ano e desligamento durante o ano calendário (5a: desligamento antes da data de aniversário e 5b desligamento depois da data de aniversário);
- 6) admissão após o ano calendário; e
- 7) óbito e/ou desligamento antes do ano calendário.

O gráfico 9 apresenta o diagrama de Lexis o qual se insere perfeitamente na representação destas situações. Conforme citado anteriormente, esse diagrama é um esquema utilizado para representar fenômenos demográficos no tempo e facilitar a compreensão de taxas e outros indicadores. No exemplo do gráfico 9, todos os cálculos foram realizados para o ano calendário de 1994, lembrando que cada indivíduo representa uma reta. As retas no exemplo começam com a idade de admissão (representada por “-”) e terminam com o óbito (representado por “+”) ou a saída (representado por “o”) do indivíduo numa determinada idade. Em alguns dos casos essas idades de admissão e/ou saída/óbito ocorrem fora do gráfico, ou seja, o indivíduo foi admitido antes do primeiro instante de observação (1986 no exemplo) e

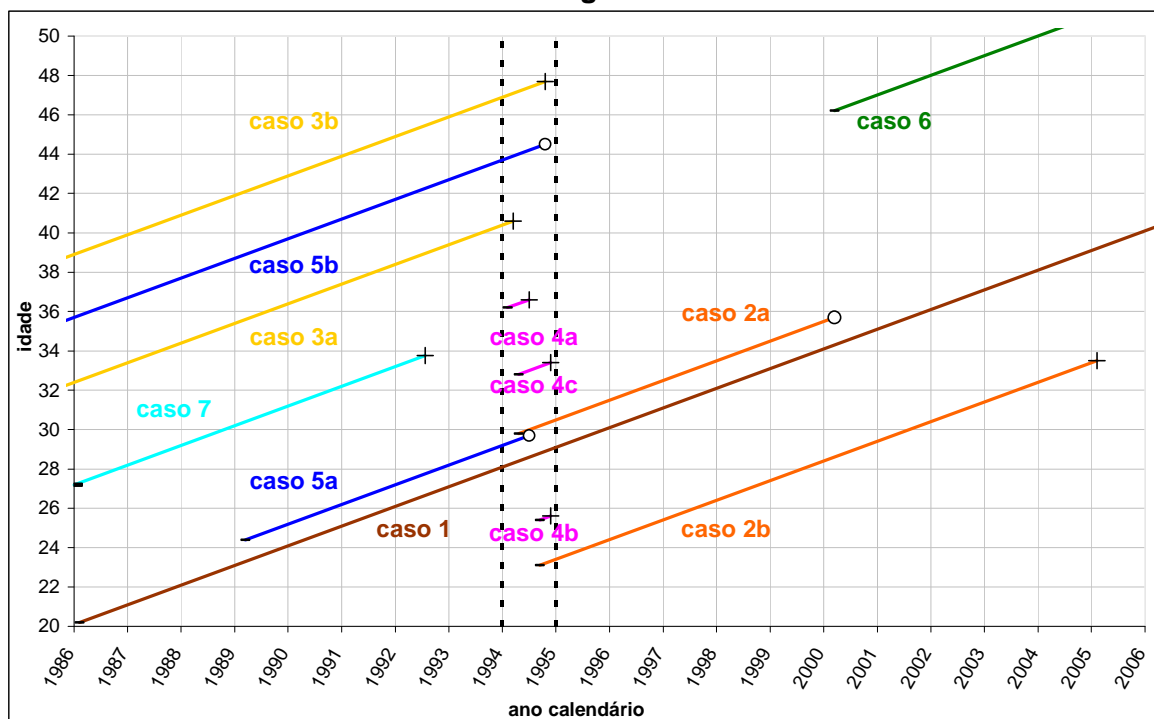
---

<sup>72</sup> Essa exposição das pessoas ao risco chama-se população em risco.

faleceu ou saiu do sistema depois do último instante de observação (a partir de 2006 inclusive, no exemplo).

Para cada ano calendário utilizado no estudo calcula-se o tempo de exposição ao risco relativo a cada um dos indivíduos, segundo um dos sete possíveis casos, para as idades no início e no final do ano. A exposição do servidor em cada idade pode ser igual a uma pessoa-ano ou pessoa-ano fracionada. Ter-se-ia a exposição de uma pessoa-ano em determinada idade, apenas no caso de alguém que tivesse nascido em 1º de janeiro e que tivesse sido admitido no plano antes do ano em questão e tivesse falecido ou saído do plano após o ano em questão. O caso mais comum seria o de indivíduos com outras datas de aniversário, correspondendo à exposição pessoa-ano fracionária em duas idades (a que tinha no começo do ano e a que tinha no final do ano) e com valores proporcionais ao tempo passado em cada uma das idades. Neste caso, a soma da exposição nessas duas idades seria obrigatoriamente igual a uma pessoa-ano.

**Gráfico 9 - Diagrama de Lexis**



Fonte: adaptado pelo autor de FIPECAFI (2006) "Um estudo sobre a mortalidade da população da CTEEP e da fundação CESP"

Como a intenção é de tão somente estimar uma tábua de mortalidade para a população de funcionários públicos desagregou-se por sexo e nível educacional (a literatura da área aponta estas duas co-variáveis como determinantes nos diferenciais de mortalidade) para o cálculo das taxas específicas por idade. Isto quer dizer que não se diferenciara a população ativa da inativa.

A tabela 4 apresenta a distribuição dos indivíduos expostos ao risco, por sexo e nível de escolaridade no final de 2005. Neste momento tinha-se aproximadamente 753.946 (setecentos e cinquenta e três mil, novecentos e quarenta e seis) pessoas, sendo 57,1% do total referente às mulheres e 42,9% aos homens. Com relação ao nível de escolaridade, 37,8% eram indivíduos com nível médio enquanto que a maioria (62,2%) eram indivíduos com nível superior.

**Tabela 4 - Distribuição dos indivíduos expostos ao risco por sexo e nível de escolaridade em dezembro 2005**

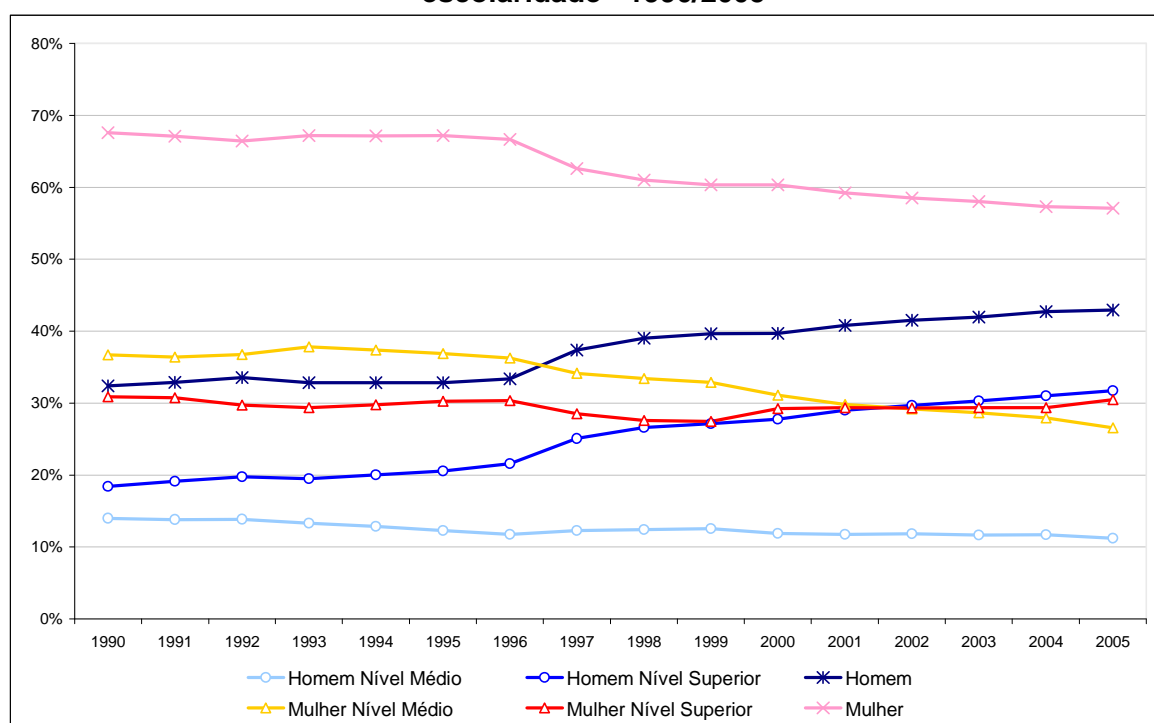
Sexo	Indivíduos expostos ao risco em 31/12/2005					
	Total	%	Nível médio	%	Nível superior	%
<b>Total</b>	<b>753.946</b>	<b>100</b>	<b>284.777</b>	<b>100</b>	<b>469.169</b>	<b>100</b>
%	100		37,8		62,2	
Feminino	430.170	57,1	200.288	70,3	229.882	49,0
%	100		46,6		53,4	
Masculino	323.776	42,9	84.489	29,7	239.287	51,0
%	100		26,1		73,9	

Fonte: PRODESP

O gráfico 10 apresenta a distribuição da exposição das pessoas-ano por sexo e nível de escolaridade entre os anos de 1990 até 2005, com as informações sempre posicionadas no final de cada um dos anos. Observa-se que exposição relativa da população feminina é substancialmente maior do que a masculina ao longo do período considerado, possuindo distribuição relativa percentual média de 62,7% e 37,3%, respectivamente, entre 1990 e 2005. O ano de maior exposição

feminina ao risco, com relação ao total, é o ano de 1990 (67,6%) com conseqüente menor exposição ao risco masculina (32,4%) com relação ao total. O ano onde acontece o oposto, ou seja, menor exposição ao risco (relativa) feminina (57,1%) com conseqüente maior exposição ao risco (relativa) masculina (42,9%) é o ano de 2005. A partir do ano de 1996 percebe-se claramente uma queda na exposição ao risco (relativa) feminina aliada a um crescimento mais acelerado na exposição ao risco masculina, com relação ao total. Esse aumento no caso masculino deve-se ao aumento da exposição ao risco (relativa) de homens de nível superior ocorrido depois de 1996, contrastado com uma diminuição (relativa) da exposição ao risco para as mulheres de nível médio, a partir do mesmo ano.

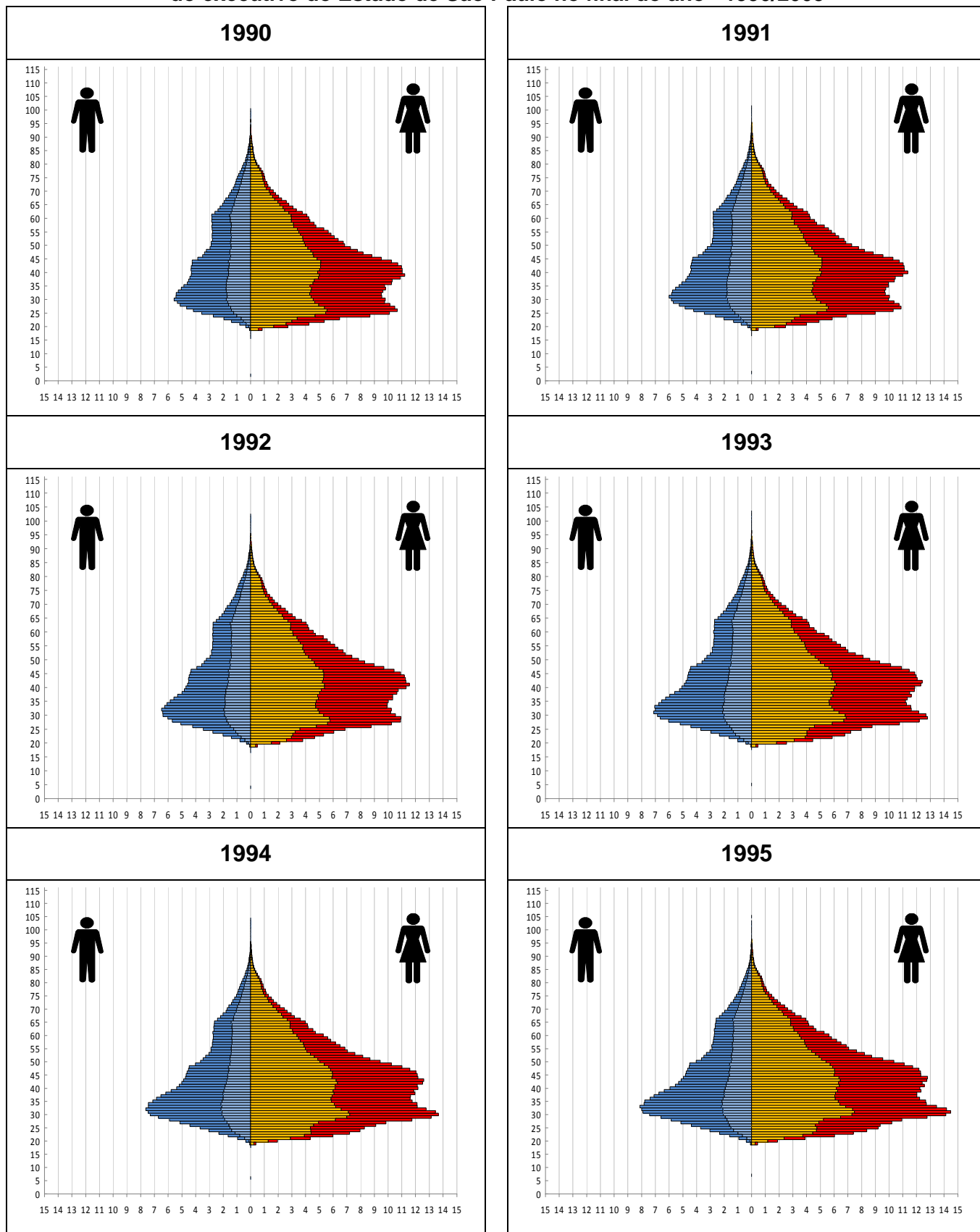
**Gráfico 10 - Distribuição relativa da exposição ao risco por sexo e nível de escolaridade - 1990/2005**



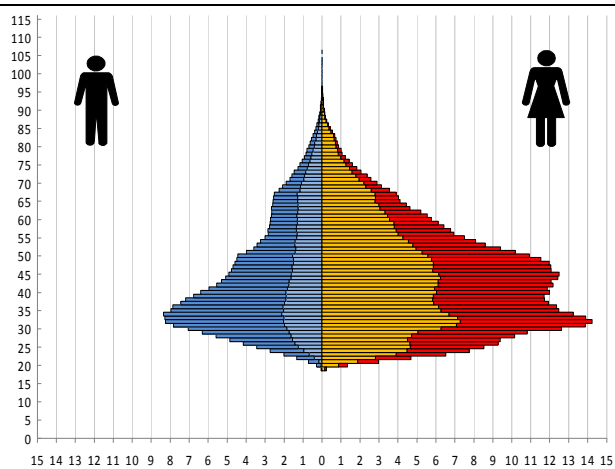
Fonte: PRODESP

Analisando as pirâmides etárias apresentadas no gráfico 11, pode-se também perceber a queda relativa das mulheres expostas ao risco em contrapartida ao aumento relativo dos homens expostos ao risco.

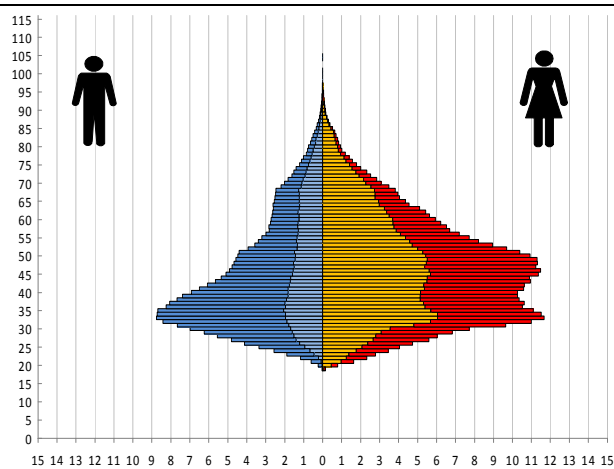
**Gráfico 11 - Distribuição por sexo e idade da população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo no final do ano - 1990/2005**



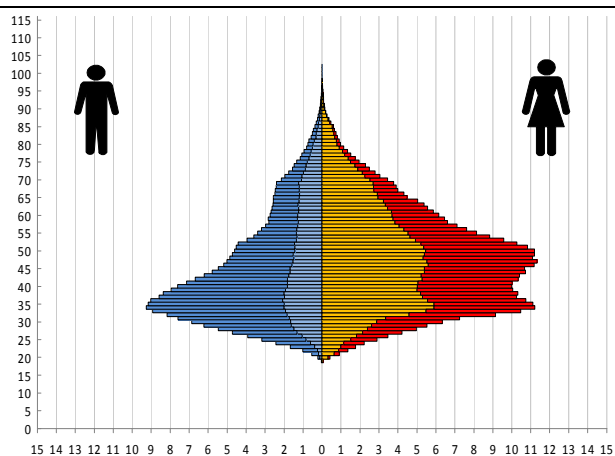
1996



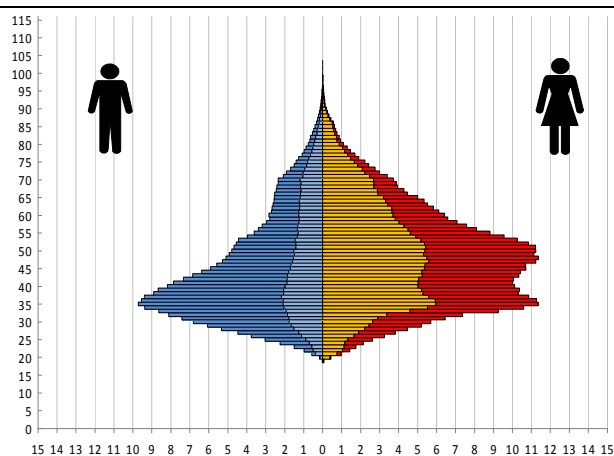
1997



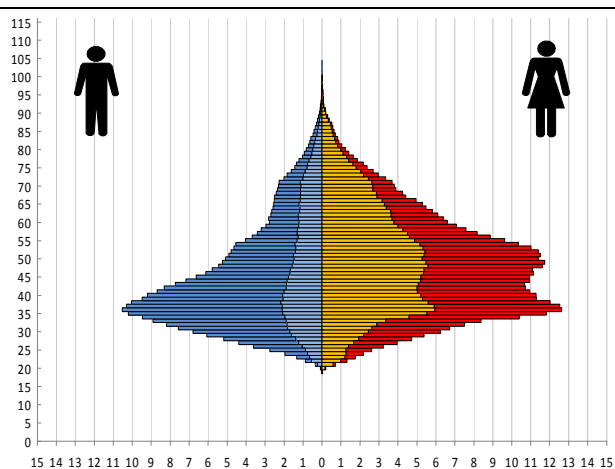
1998



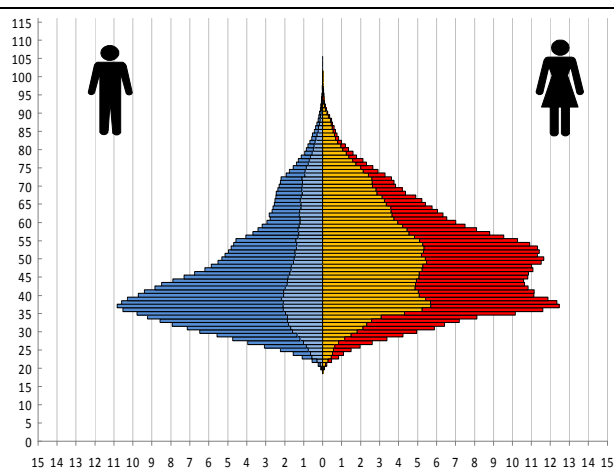
1999



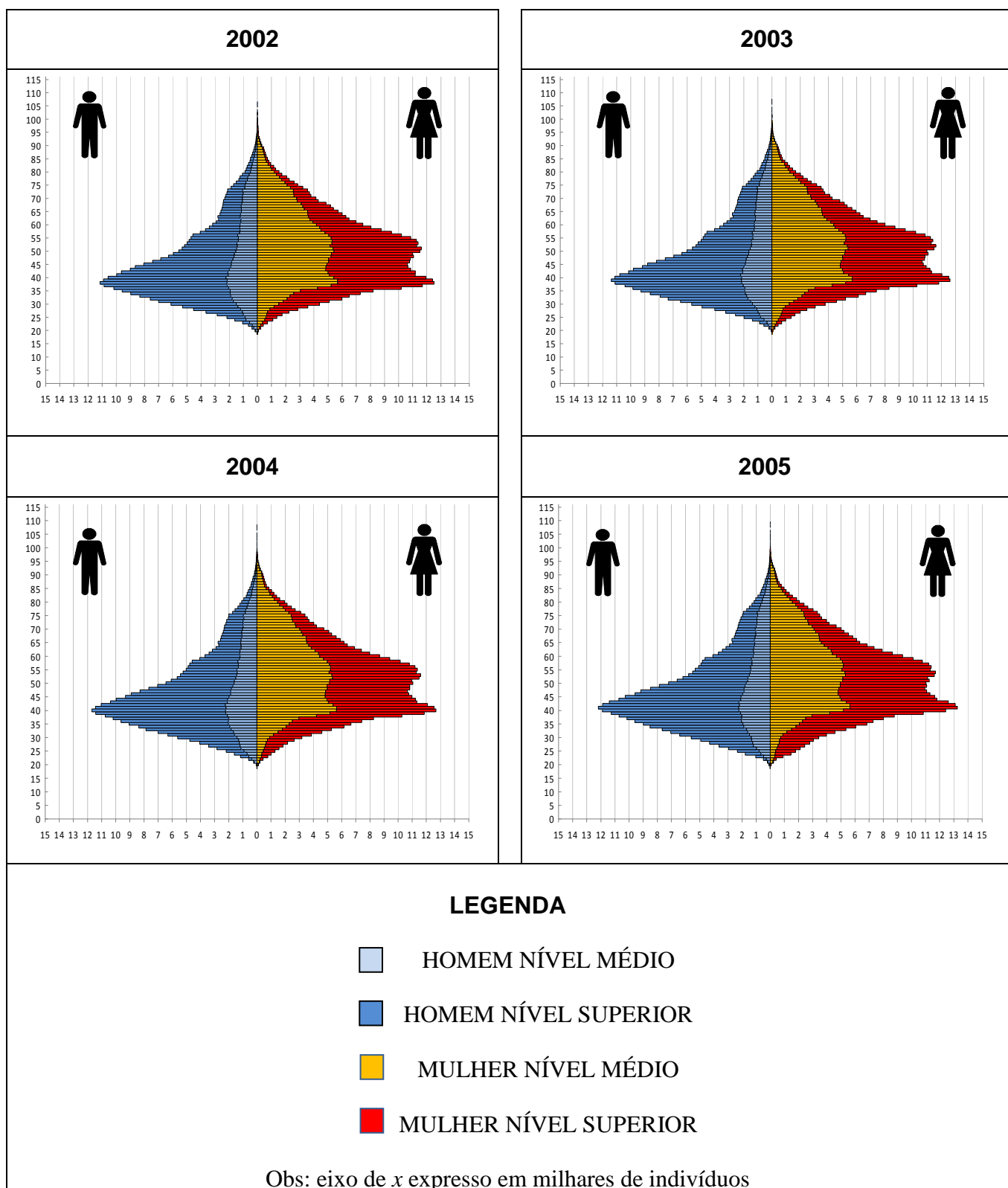
2000



2001





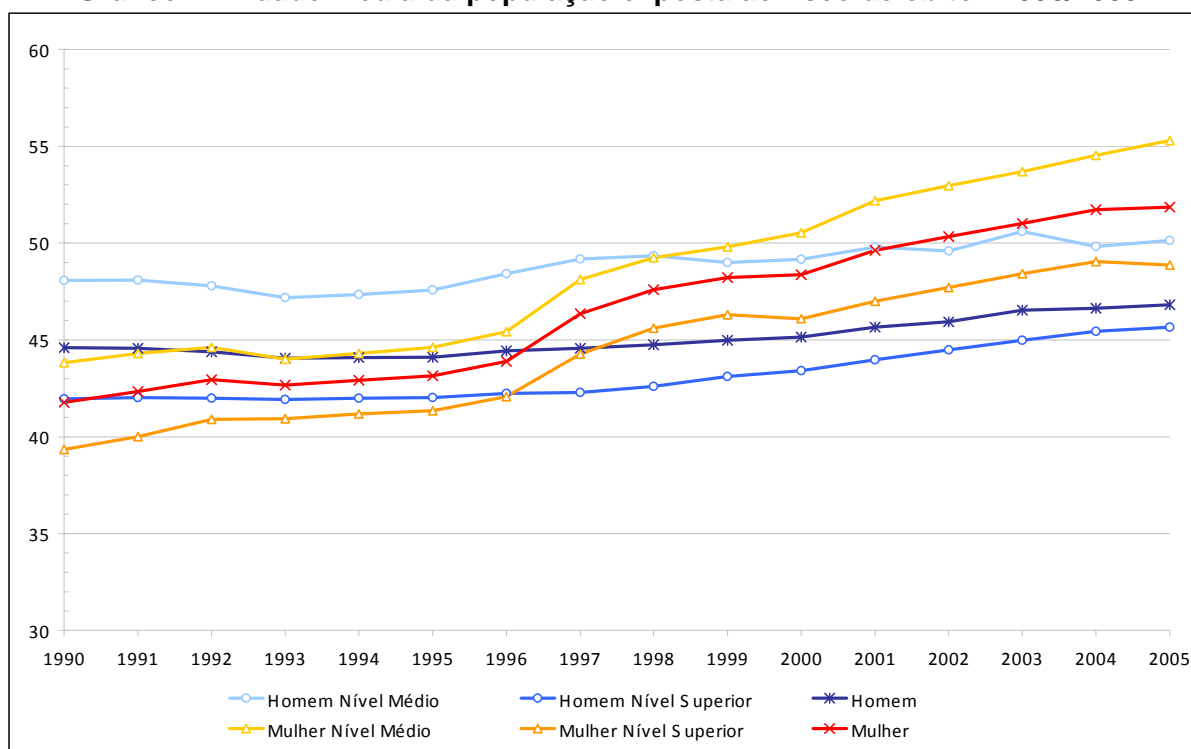


Fonte: PRODESP

O gráfico 12 apresenta a idade média destas populações no mesmo período de estudo. Nota-se que a idade média da população feminina é inferior à idade média da população masculina até o ano de 1996, a partir do qual ocorre uma

inversão, considerando as populações como um todo. Em 1990 os homens possuíam uma idade média de 44,6 anos contra 41,8 das mulheres, em 1997 (ano da inversão) a idade média masculina era ainda de 44,6 anos contra 46,4 anos das mulheres. Já em 2005 essas idades aumentaram para respectivamente 46,8 e 51,9 anos. Essa maior idade média das mulheres detectada a partir de 1997, deve-se parcialmente ao fato da maior longevidade feminina. Esse envelhecimento é notável também para cada um dos grupos em separado. Considerando os indivíduos com nível médio, o panorama é semelhante ao da população como um todo, ou seja, menor idade média feminina até determinado ano onde ocorre a inversão, neste caso no ano de 1999. A idade média das mulheres de nível médio em 1990 era de 43,8 anos contra 48,1 anos dos homens. Já em 2005 essas idades médias eram respectivamente de 55,3 anos e 50,1 anos. Considerando agora os indivíduos com nível superior acontece também o mesmo dos casos anteriores, sendo que o ano da inversão é o ano de 1997. A idade média das mulheres de nível superior em 1990 era de 39,4 anos contra 42,0 anos dos homens. Já em 2005 essas idades médias eram respectivamente de 48,9 anos e 45,6 anos.

**Gráfico 12 - Idade média da população exposta ao risco de óbito - 1990/2005**

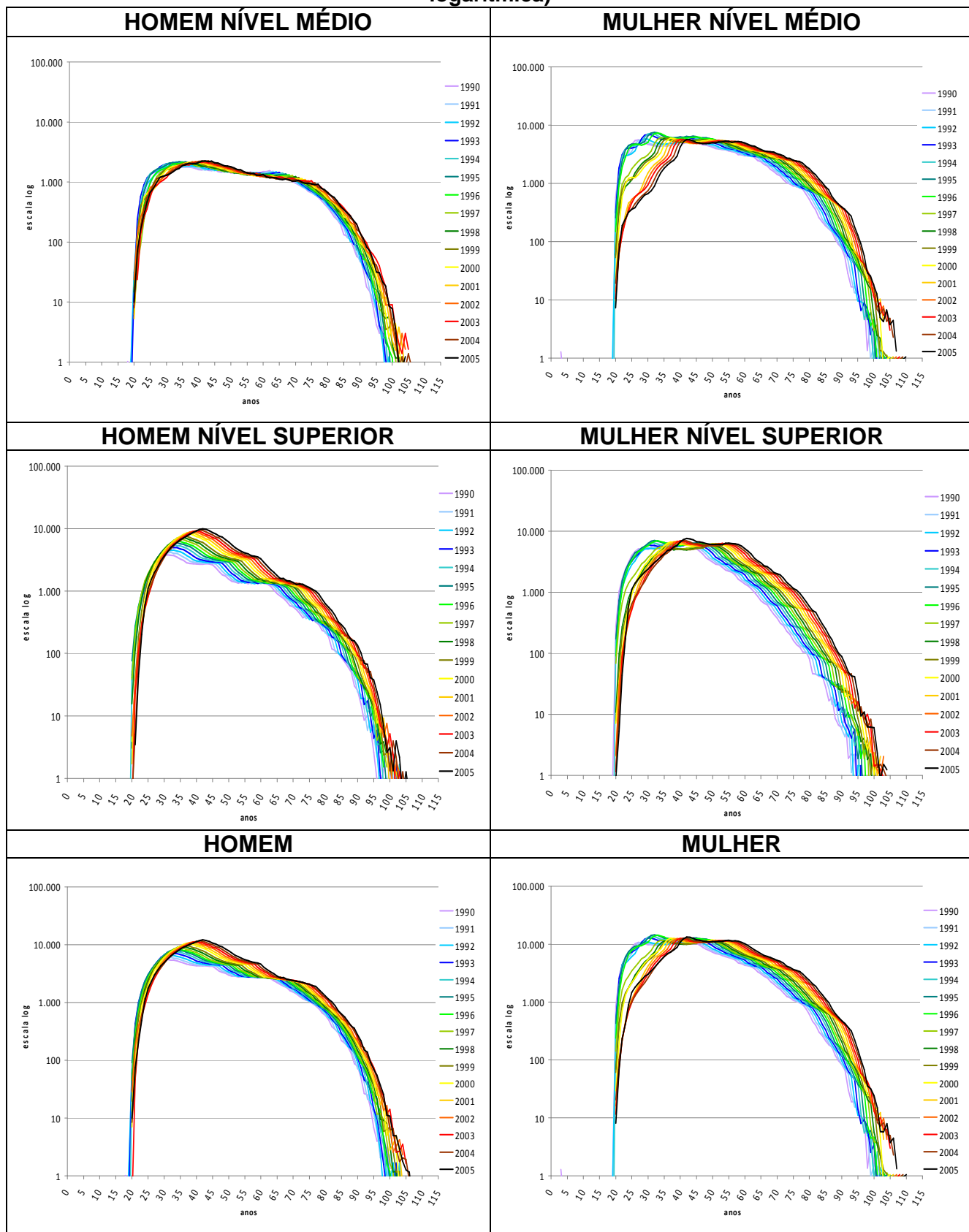


Fonte: PRODESP

O gráfico 13 apresenta para homens e mulheres, inclusive segmentando por nível de escolaridade, os expostos (pessoas ano) ao risco de morte (em escala logarítmica). Independentemente das diferenças em termos absolutos entre mulheres e homens, observa-se um comportamento semelhante para as distribuições de indivíduos de nível médio e superior. Pela já citada maior longevidade dos participantes do sexo feminino, observa-se também picos maiores nos gráficos das mulheres, em especial nas idades onde ocorrem a concessão e percepção dos benefícios. Vê-se também um claro deslocamento das curvas para “a direita”, do ano de 1990 até o ano de 2005, indicando o envelhecimento populacional ocorrido nesse íterim. Tanto a distribuição dos funcionários de nível médio quanto a dos funcionários de nível superior são unimodais.

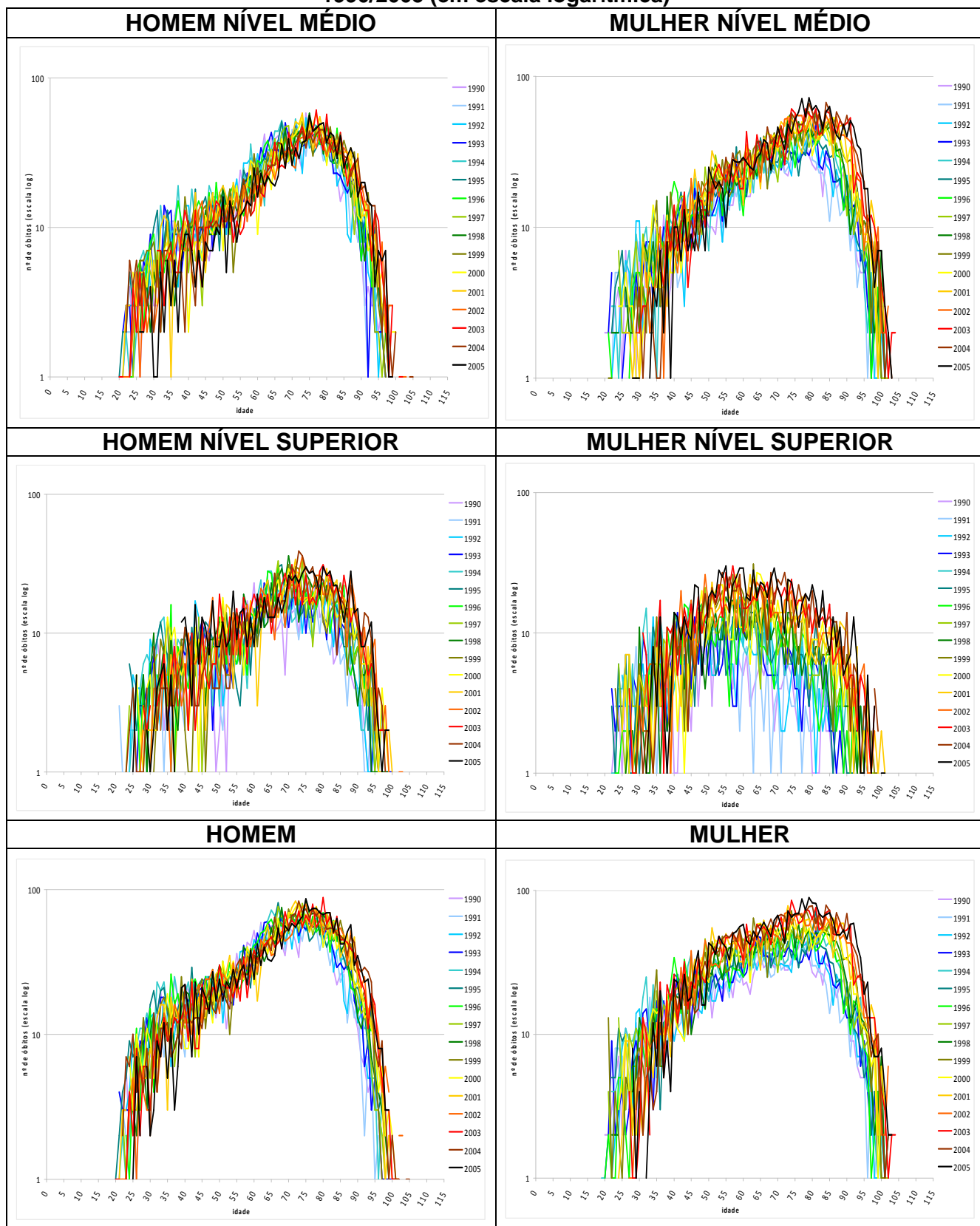
O gráfico 14 apresenta para homens e mulheres, segmentado também por nível de escolaridade, os óbitos (em escala logarítmica) ocorridos no período 1990-2005. As distribuições de indivíduos de nível médio e superior apresentam comportamentos semelhantes. Observa-se que as mulheres morrem com idades mais avançadas do que os homens, ratificando mais uma vez a maior longevidade dos participantes do sexo feminino. Destaca-se também um maior número de óbitos, independentemente das diferenças em termos absolutos dos grupos segmentados por sexo/escolaridade, para indivíduos com nível médio.

**Gráfico 13 - População exposta ao risco por idade individual - 1990/2005 (em escala logarítmica)**



Fonte: PRODESP

**Gráfico 14 - Número de óbitos na população exposta ao risco por idade individual - 1990/2005 (em escala logarítmica)**



Fonte: PRODESP

## CAPÍTULO 5 – APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esse capítulo apresenta a descrição dos modelos utilizados na presente dissertação, bem como os resultados alcançados.

Beltrão, Sugahara e Silva (2006) ajustaram pelo modelo de Heligman & Pollard (1980) uma função para a mortalidade dos funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo, mas diferentemente dos autores, na presente dissertação considera-se apenas o período da base de dados de 1990-2005 (os autores utilizaram o período completo disponibilizado pela PRODESP, de 1985-2006) onde as taxas específicas de mortalidade calculadas apresentavam uma maior regularidade e foi considerado o grupo etário de 20-95 anos (os autores utilizaram o grupo de 20-90 anos). Além disso, para uma variante do Modelo de Lee-Carter foi calculada a taxa de variação da mortalidade no tempo para os quatro grupos: homens nível médio, homens nível superior, mulheres nível médio e mulheres nível superior.

### 5.1) As Tábuas de Mortalidade ajustadas pelo Modelo de Heligman & Pollard para SP

Os cálculos são iniciados estimando-se as taxas específicas de mortalidade (probabilidades de morte) por idade, sexo e escolaridade, usando a seguinte fórmula:

$$q_{x,s,n} = \frac{Mortes_{(x,s,n)}}{Expostos_{(x,s,n)} + \frac{Mortes_{(x,s,n)}}{2}},$$

Onde:

$q_{x,s,n}$  = probabilidade de morte de um indivíduo da população, com idade “x”, sexo “s” e nível de escolaridade “n”;

**Mortes**<sub>(x,s,n)</sub> = número de mortes de indivíduos com idade “x”, sexo “s” e nível de escolaridade “n” na população coberta nos anos considerados; e  
**Expostos**<sub>(x,s,n)</sub> = número médio de indivíduos expostos ao risco com idade “x”, sexo “s” e nível de escolaridade “n” na população coberta nos anos considerados.

O gráfico 15 e o gráfico 16 apresentam (em escala logarítmica) as taxas específicas de mortalidade observadas e suavizadas<sup>73</sup>, desagregadas por sexo e por nível de escolaridade, que servirão de parâmetro inicial de trabalho. Como já mencionado, uma análise inicial aponta para a utilização dos dados das populações de 1990 até 2005, entre as idades de 20 e 95 anos. A PRODESP enviou uma base de dados contendo informações relativas aos pensionistas do sistema, mas numa segunda etapa como se optou por desagregar também a população além do sexo pela escolaridade, o modelo final não pôde incluir a população menor de idade já que no banco de dados de pensionistas não existe a informação sobre o indivíduo gerador do vínculo e sua escolaridade. Observando o gráfico 15 e o gráfico 16, nota-se claramente o comportamento usual de uma taxa de mortalidade:

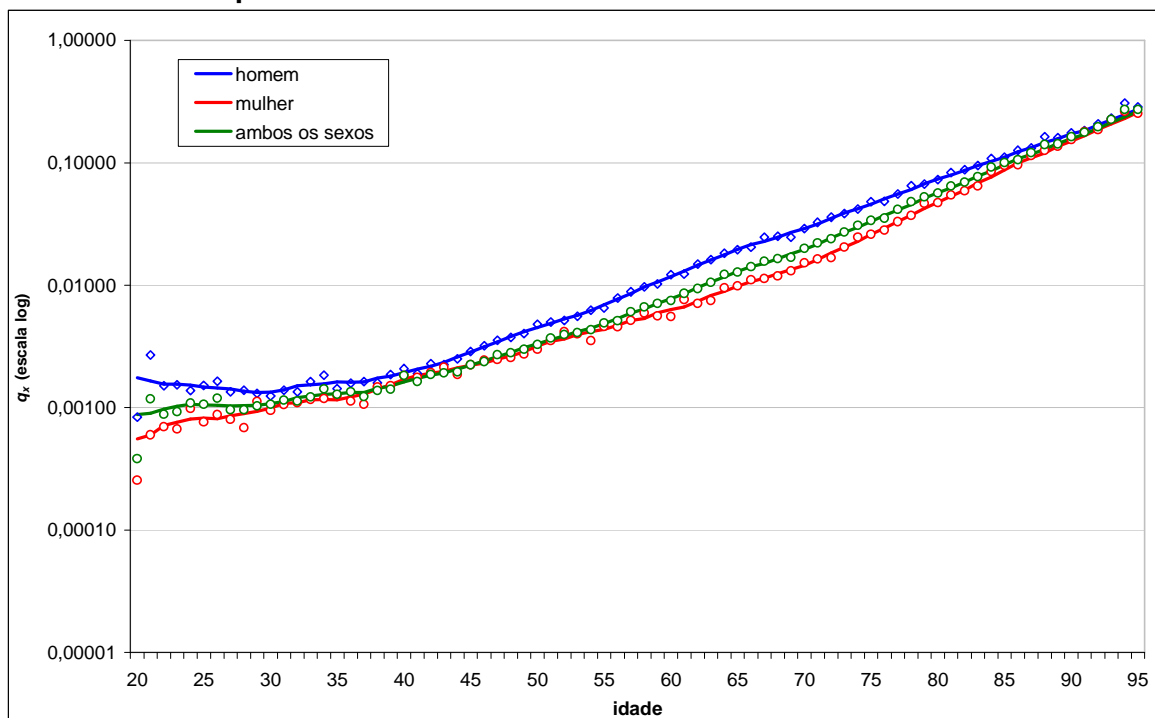
- em geral, valores mais altos para os homens;
- valores mais altos para aqueles com menor nível de escolaridade;
- no intervalo considerado (20 a 95 anos) valores crescentes como função da idade; e
- um possível calombo por causas externas entre os adultos jovens, principalmente para o sexo masculino.

Observa-se também no gráfico 16 uma maior diferença entre os níveis para os homens (comparando homens de nível superior com homens de médio) do que para as mulheres (comparando mulheres de nível superior com mulheres de nível médio).

---

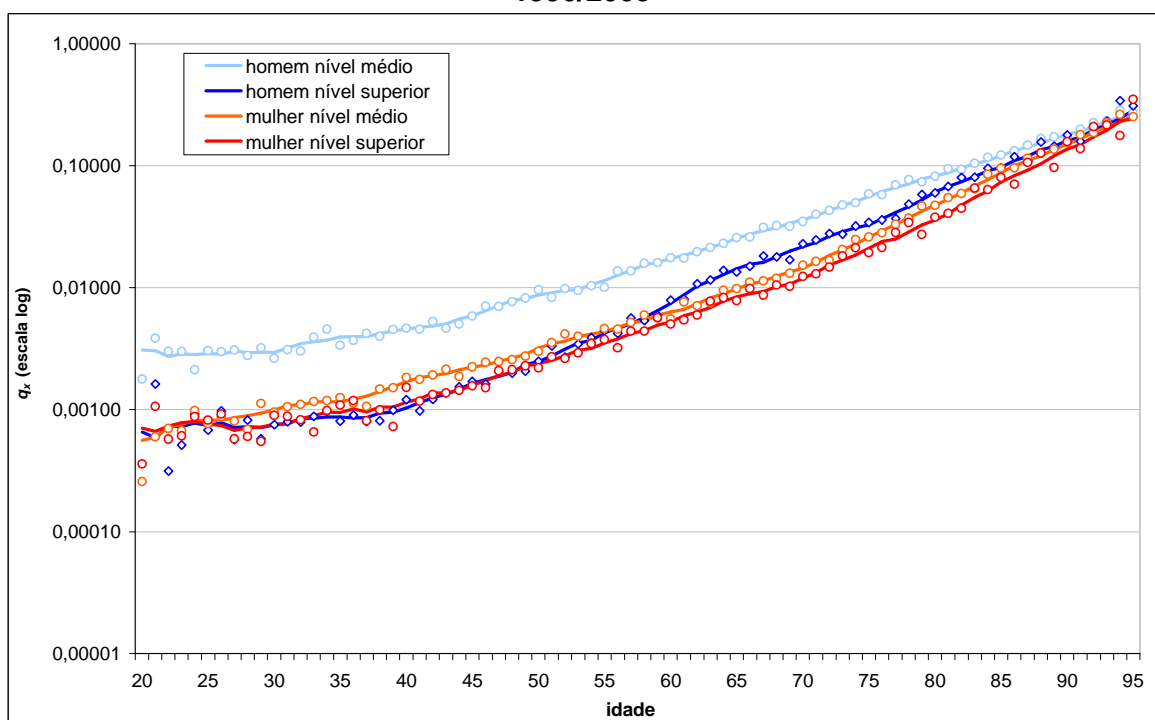
<sup>73</sup> Utilizou-se uma média móvel de cinco anos para a suavização das taxas.

**Gráfico 15 - Taxa específica de mortalidade (observada e suavizada) por sexo - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005**



Fonte: PRODESP

**Gráfico 16 - Taxa específica de mortalidade (observada e suavizada) por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005**



Fonte: PRODESP



Observando as taxas de mortalidade (brutas e suavizadas) apresentadas nesses dois gráficos anteriores, verificou-se que poder-se-ia ajustar uma função a essas probabilidades. A função que melhor pareceu se conformar aos dados foi a soma de duas exponenciais com uma função de Gompertz modificada, da seguinte forma:

$$q_{x,s,n} = A_{s,n} (x+B_{s,n})^{C_{s,n}} + D_{s,n} e^{-E_{s,n} (\ln x - \ln F_{s,n})^2} + \frac{G_{s,n} H_{s,n}^x}{(1 + K_{s,n} G_{s,n} H_{s,n}^x)}$$

Essa função ajusta-se tanto para os homens quanto para as mulheres, independente do nível de escolaridade. Os parâmetros  $A_{s,n}$ ,  $B_{s,n}$ ,  $C_{s,n}$ ,  $D_{s,n}$ ,  $E_{s,n}$ ,  $F_{s,n}$ ,  $G_{s,n}$ ,  $H_{s,n}$  e  $K_{s,n}$  assumem valores diferenciados segundo o sexo e escolaridade. Como visto, essa abordagem paramétrica foi sugerida originalmente por Heligman & Pollard (1980). Para esses autores a equação do modelo possui três componentes, correspondendo respectivamente, à mortalidade infantil (componente I), mortalidade por causas externas (componente II) e mortalidade por senescência (componente III). No Anexo C apresenta-se uma análise de sensibilidade dos parâmetros desse modelo.

Infelizmente como não se utilizou as informações da base de dados dos pensionistas pelo motivo previamente citado, são esparsas as informações de mortalidade com relação a essa primeira componente, a da mortalidade na infância, razão pela qual sua estimativa apresentaria uma menor precisão. A segunda componente, na sua forma exponencial, corresponde à mortalidade por causas externas. Esta causa de mortalidade afeta principalmente a população masculina de adultos jovens. A última componente corresponde à mortalidade por senescência e permite ajustar uma desaceleração (ou aceleração) da mortalidade para os indivíduos da quarta idade.

Com isso, o ajuste utilizado terá apenas as componentes II e III. A componente III foi ajustada na íntegra como apresentada na formulação de Heligman & Pollard (1980). Com relação à componente II, como na base de dados não se dispunha de muitas informações para as idades jovens, o ajuste dos parâmetros  $E_s$  e  $F_s$

apresentou um intervalo de confiança de grande amplitude. Como as diferenças entre um ajuste que considera a componente II na íntegra e outro que modela a mesma como uma constante são muito pequenas entre as idades de 20 a 40 anos e pelo fato de considerar-se apenas o intervalo de 20 a 95 anos, optou-se por realizar um ajuste da seguinte forma:

$$q_{x,s,n} = D_{s,n} + \frac{G_{s,n} H_{s,n}^x}{(1 + K_{s,n} G_{s,n} H_{s,n}^x)}$$

Salienta-se que essa função de ajuste não deve ser utilizada para as idades fora do intervalo de 20 a 95 anos.

Confirma-se a necessidade da utilização de uma curva com duas componentes já que é visível um certo calombo correspondente a mortalidade (por causas externas) dos adultos jovens (principalmente homens).

Pode-se fazer uma analogia da função adotada para o ajuste da mortalidade dos funcionários públicos de São Paulo com alguns modelos apresentados na literatura e descritos ao longo dessa dissertação como, por exemplo, o modelo de Makeham (1860), que modela a mortalidade como uma taxa constante para todas as idades, referente à questão da acidentabilidade, mais um fator relativo à mortalidade por senescência.

O fato dos dados disponíveis apresentarem informações muito escassas em idades infantis e jovens é compreensível, considerando o público alvo composto apenas por servidores públicos, que têm sua distribuição concentrada nas idades adultas. A razão de se terem também poucas informações com relação às idades acima de 95 anos é relativa ao fato de serem idades bem avançadas, alcançadas por poucos brasileiros.

Utilizou-se basicamente dois softwares nesse trabalho: para a análise dos dados foi utilizado o pacote estatístico SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*) e para a construção das tabelas e gráficos, o Excel da Microsoft. Para as

estimativas dos ajustes realizou-se uma regressão não linear utilizando a *procedure non-linear regression* do SPSS. Como o pacote não permite a definição de uma distribuição para os dados originais (supostos binomiais), a estimação propriamente dita foi realizada através de um processo iterativo. O processo iterativo consistiu na alternância de estimação dos parâmetros utilizando a *procedure* supracitada e a definição de pesos calculados como o inverso da variância estimada naquele passo, ou seja, para o  $i$ -ésimo passo calcula-se o peso ( $peso^{(i)}_{(x,s,n)}$ ), a partir da probabilidade de óbito estimada no passo anterior ( $q^{(i-1)}_{x,s,n}$ ), ou seja:

$$peso^{(i)}_{(x,s,n)} = \sqrt{\frac{Expostos_{(x,s,n)}}{q^{(i-1)}_{x,s,n} * (1 - q^{(i-1)}_{x,s,n})}}$$

Para o primeiro passo, utilizou-se como peso a raiz da população de expostos ao risco, supondo que as probabilidades seriam constantes para todas as idades. A convergência foi sempre rápida, no máximo em cinco iterações. O critério de parada foi obter uma diferença entre estimativas sucessivas menor do que  $10^{-10}$ .

Este processo iterativo é aquele implementado em todos os pacotes que ajustam modelos lineares generalizados<sup>74</sup>, dado que a não ser quando as informações são distribuídas como uma normal, não existe uma solução em forma fechada<sup>75</sup>. Quando se trabalha com populações muito grandes, comumente utiliza-se uma aproximação usando a distribuição de Poisson. Para a população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo, dado o diminuto tamanho da população principalmente nas idades mais avançadas, esta aproximação não seria adequada.

O gráfico 17 e o gráfico 18 apresentam os resultados dos ajustes utilizando-se o pacote SPSS bem como os valores observados. O gráfico 19 e o gráfico 20 apresentam os valores ajustados e o intervalo de confiança de 95% correspondente. Essas tábuas de mortalidade ajustadas, foram batizadas de RPPSP-98H, RPPSP-98M e RPPSP-98A, para homens, mulheres e ambos os sexos, respectivamente. A

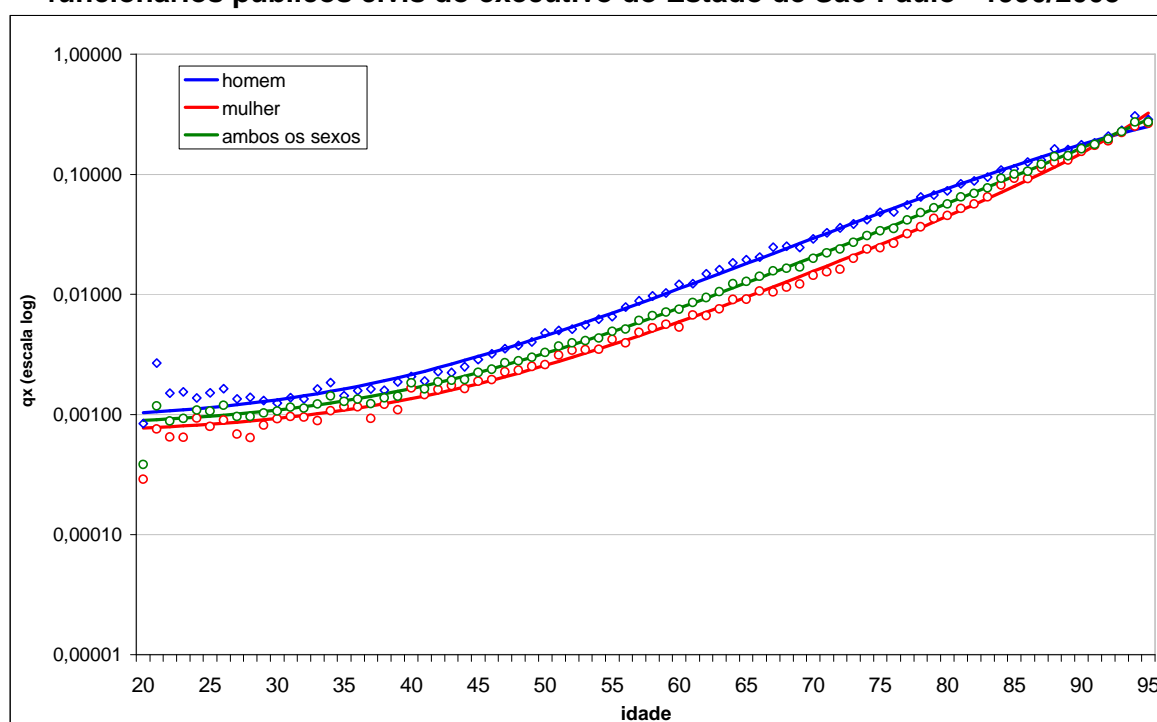
<sup>74</sup> Ver Dobson (2002) ou Maccullagh & Nelder (1983).

<sup>75</sup> Dados de mortalidade quase nunca são aproximadamente normais já que intrinsecamente apresentam uma distribuição binomial.

tábua RPPSP-98H apresentou uma expectativa de sobrevida aos 20 anos de 56,1 anos, enquanto que a tábua RPPSP-98M apresentou uma expectativa de sobrevida aos 20 anos de 61,5 anos e a RPPSP-98A apresentou uma expectativa de sobrevida aos 20 anos de 59,2 anos. O Anexo B apresenta as principais funções calculadas para as três tábuas de mortalidade criadas, incluindo a expectativa de sobrevida para todas as idades variando de 20 a 95 anos.

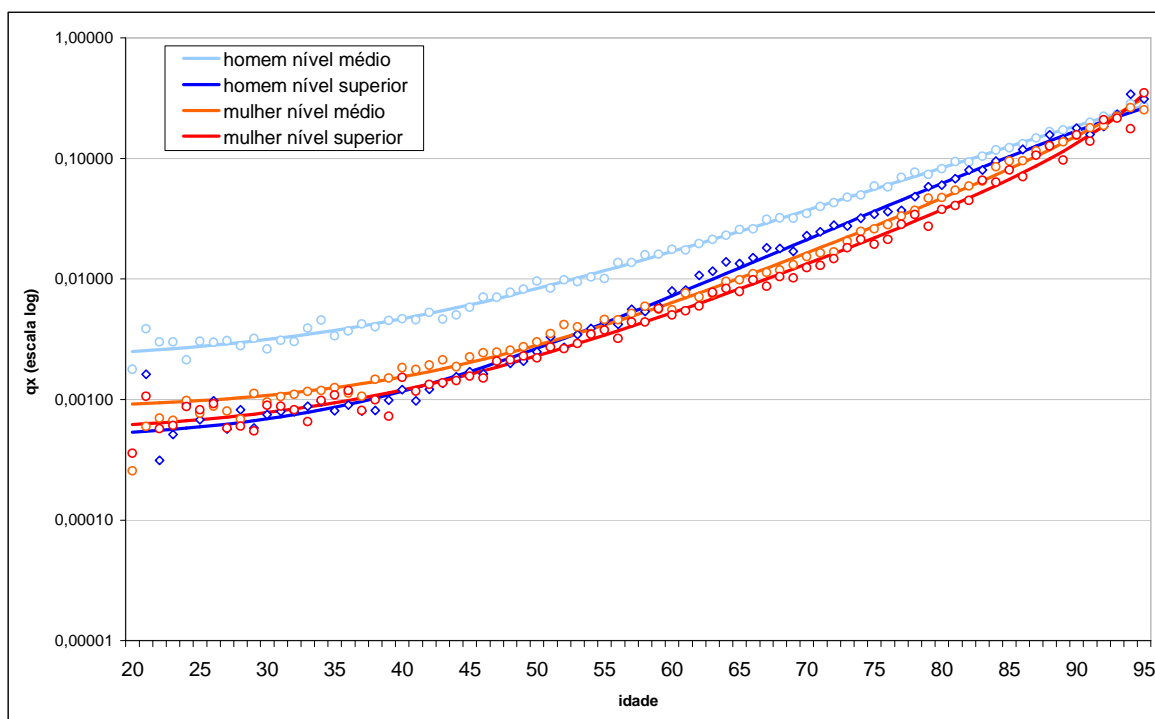
Em linhas gerais fica confirmado o comportamento observado nos dados brutos e suavizados: i) taxas para a população masculina quase sempre superiores às taxas para a população feminina; ii) tanto para homens quanto para mulheres, as taxas de nível médio são sempre mais altas do que as taxas de nível superior, com uma diferença maior para os homens, principalmente entre os adultos jovens; iii) nas idades acima de 92 anos, a ordenação entre homens e mulheres parece invertida, mas não estatisticamente significativa devido provavelmente à escassez de dados para essas populações nessas idades; e iv) taxas entre as mulheres de nível superior menores do que as taxas de homens de nível superior (nas idades abaixo de 42 anos, a ordenação parece invertida, mas não estatisticamente significativa).

**Gráfico 17 - Taxa específica de mortalidade (observada e ajustada) por sexo - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005**



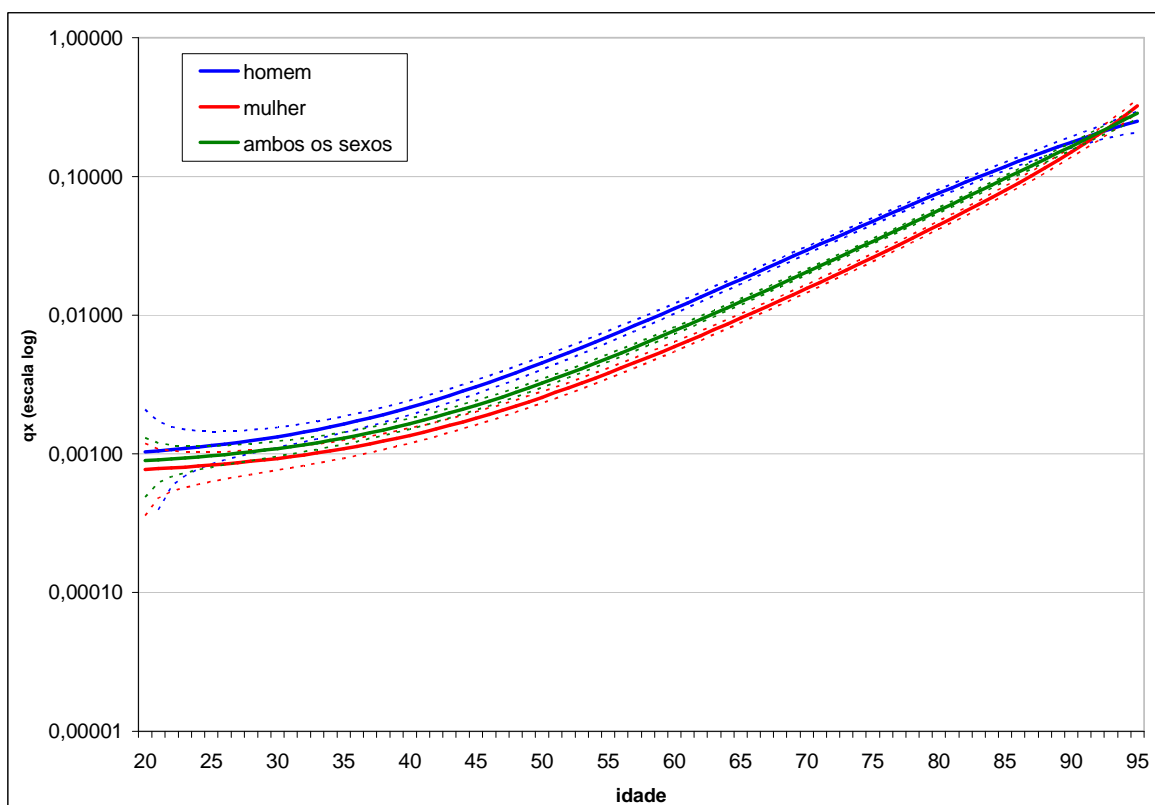
Fonte: PRODESP

**Gráfico 18 - Taxa específica de mortalidade (observada e ajustada) por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005**



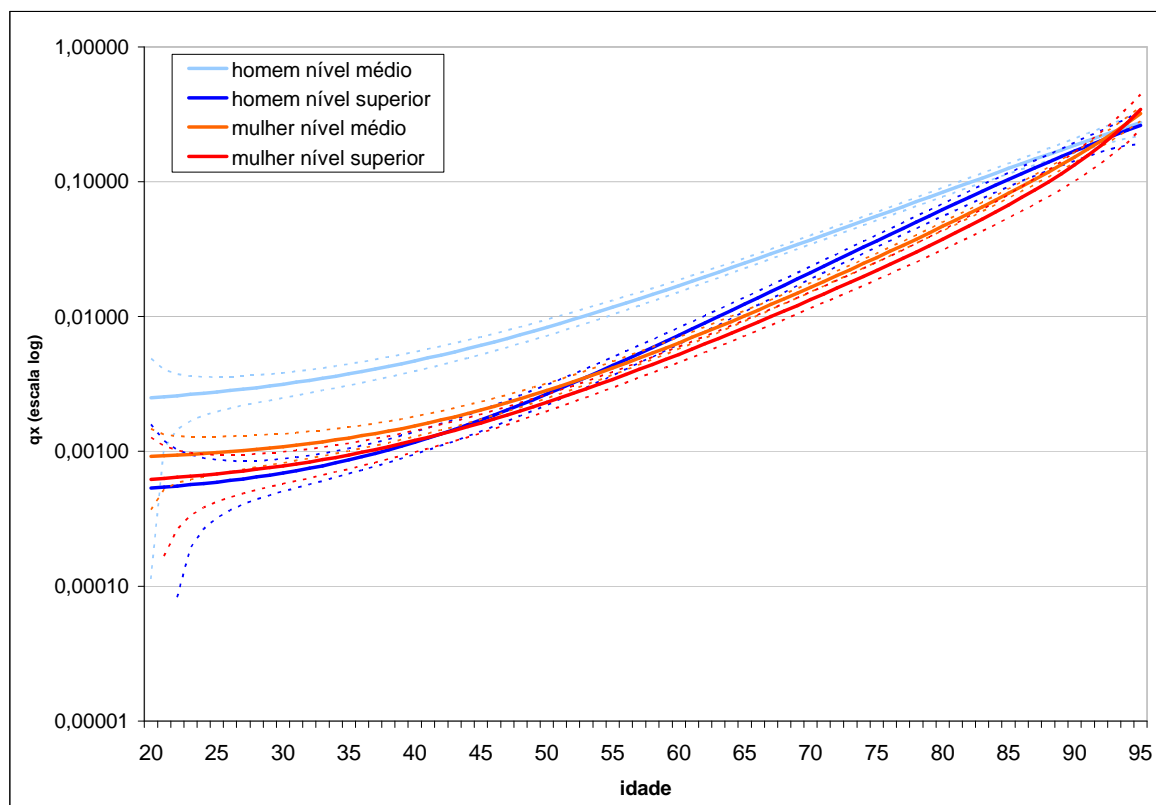
Fonte: PRODESP

**Gráfico 19 - Taxa específica de mortalidade (ajustada e intervalos de 95% de confiança) por sexo - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005**



Fonte: PRODESP

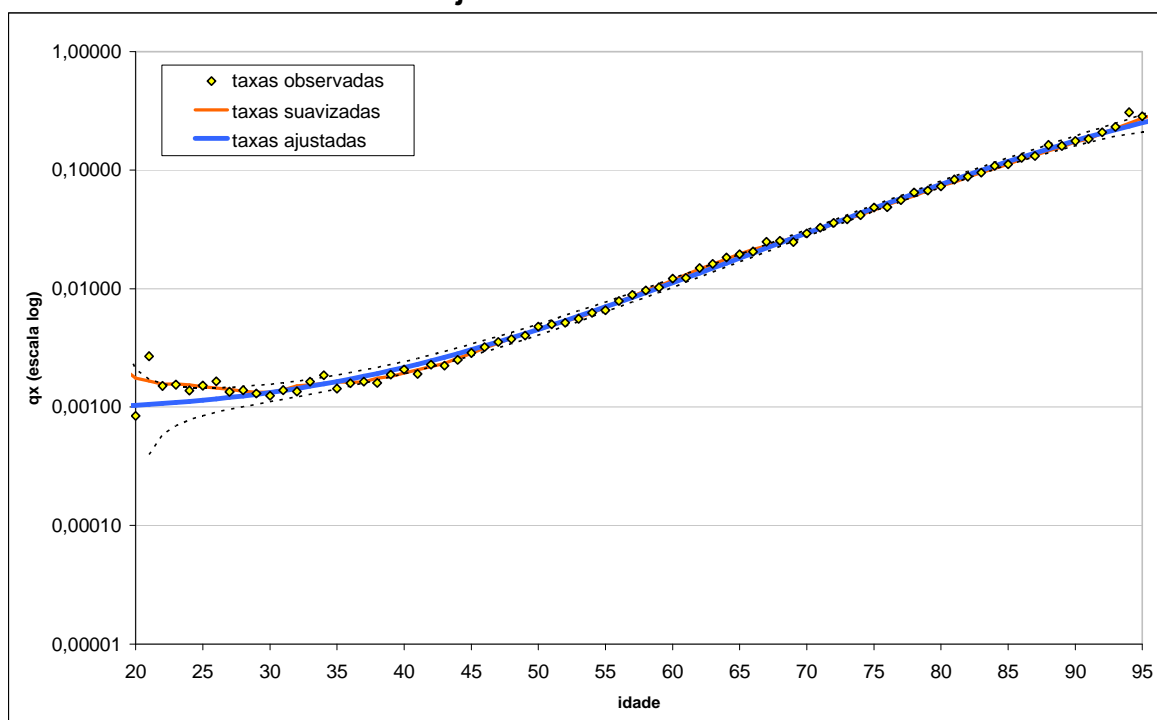
**Gráfico 20 - Taxa específica de mortalidade (ajustada e intervalos de 95% de confiança) por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005**



Fonte: PRODESP

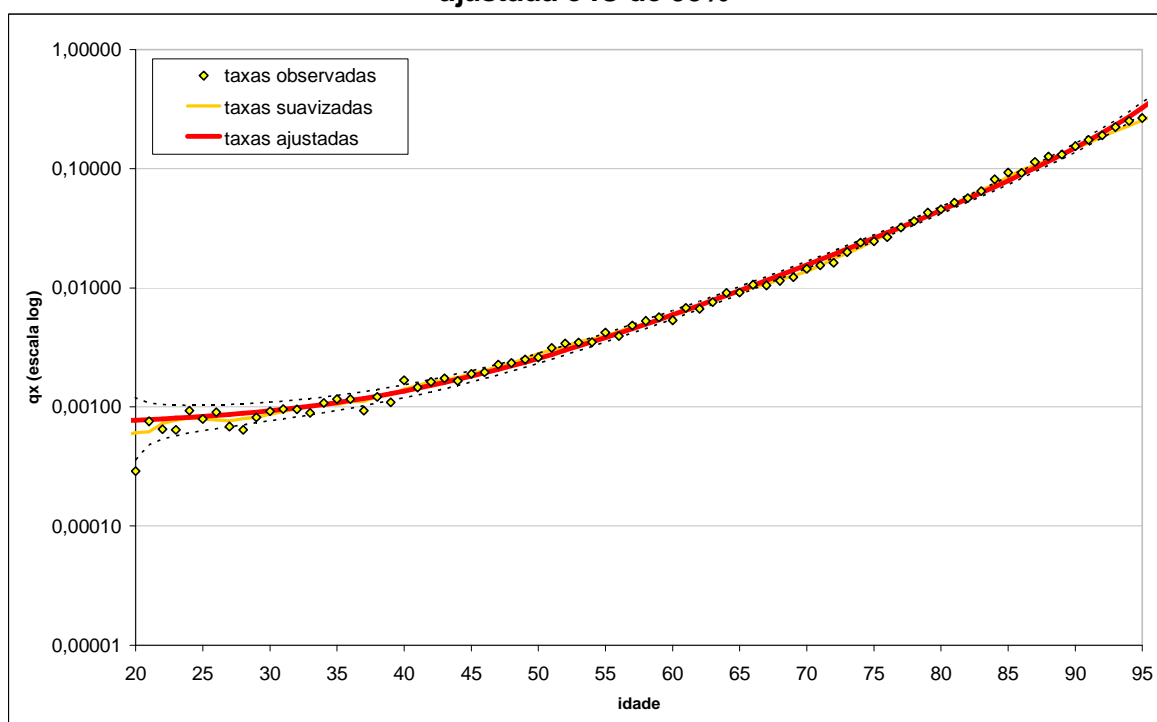
O gráfico 21, o gráfico 22 e o gráfico 23, apresentam, respectivamente, para homens, mulheres e ambos os sexos, os valores observados, suavizados, ajustados e os intervalos de confiança (IC) de 95% para o ajuste. Observa-se por estes gráficos que os valores observados para as taxas de mortalidade estão em sua grande maioria inseridos dentro dos intervalos de confiança calculados, fato este que corrobora a boa qualidade do ajuste feito. Para os homens, tem-se que 76,3% (58 em 76 pontos) dos valores observados encontram-se dentro do intervalo de confiança de 95% calculado para o ajuste. Para as mulheres e para ambos os sexos esses valores são respectivamente de 71,1% (54 em 76 pontos) e 85,5% (65 em 76 pontos).

**Gráfico 21 - Taxa de mortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - homens - observada, suavizada, ajustada e IC de 95%**



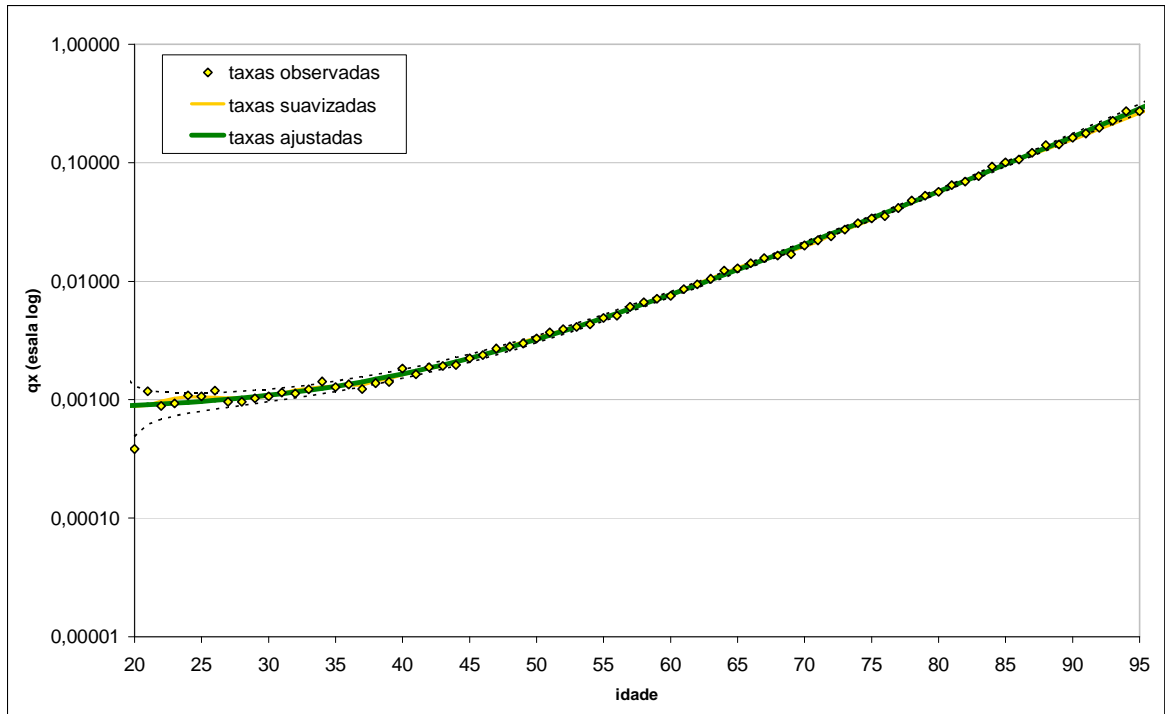
Fonte: PRODESP

**Gráfico 22 - Taxa de mortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - mulheres - observada, suavizada, ajustada e IC de 95%**



Fonte: PRODESP

**Gráfico 23 - Taxa de mortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - ambos os sexos - observada, suavizada, ajustada e IC de 95%**



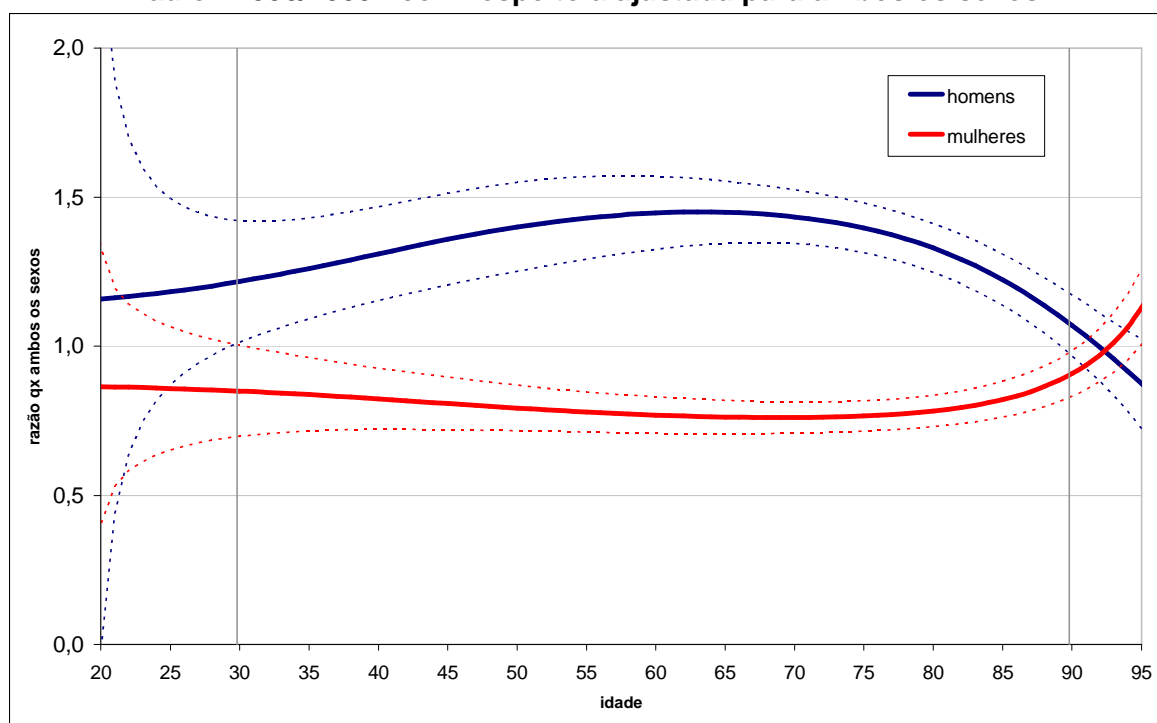
Fonte: PRODESP

O gráfico 24 apresenta a sobremortalidade das taxas ajustadas e o intervalo de confiança de 95% para homens e mulheres com respeito à taxa ajustada para ambos os sexos. Observa-se por meio deste gráfico que entre as idades de 30 a 90 anos (inclusive), idades entre as quais o limite inferior do intervalo de confiança masculino fica sempre acima do limite superior do intervalo de confiança feminino, confirma-se o comportamento observado nos dados brutos e suavizados, ou seja, taxas para a população masculina superiores às taxas para a população feminina. Para as idades abaixo de 30 e acima dos 90 anos não se pode dizer que uma taxa supera a outra, pois existe uma interseção entre os intervalos de confiança masculinos e femininos.

O gráfico 25, o gráfico 26 e o gráfico 27, apresentam, respectivamente, para homens, mulheres e ambos os sexos, a sobremortalidade observada, suavizada e intervalo de confiança de 95% com respeito às taxas ajustadas.

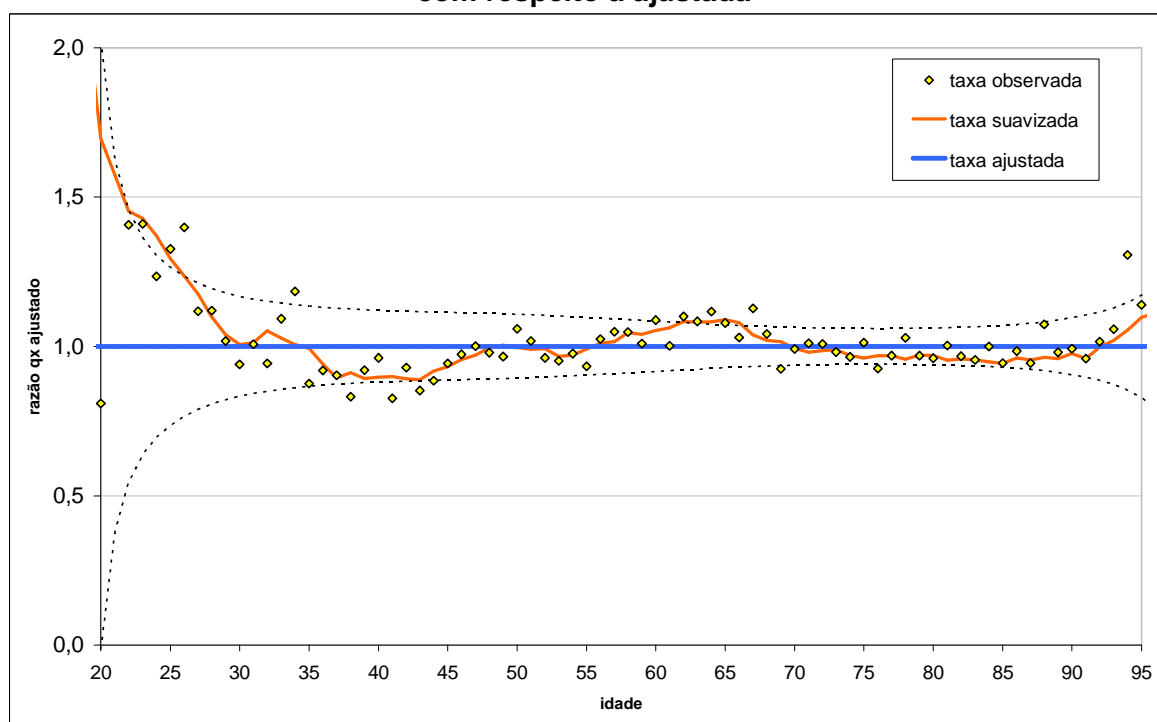


**Gráfico 24 - Sobremortalidade das taxas ajustadas e IC de 95% para homens e mulheres - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - com respeito à ajustada para ambos os sexos**



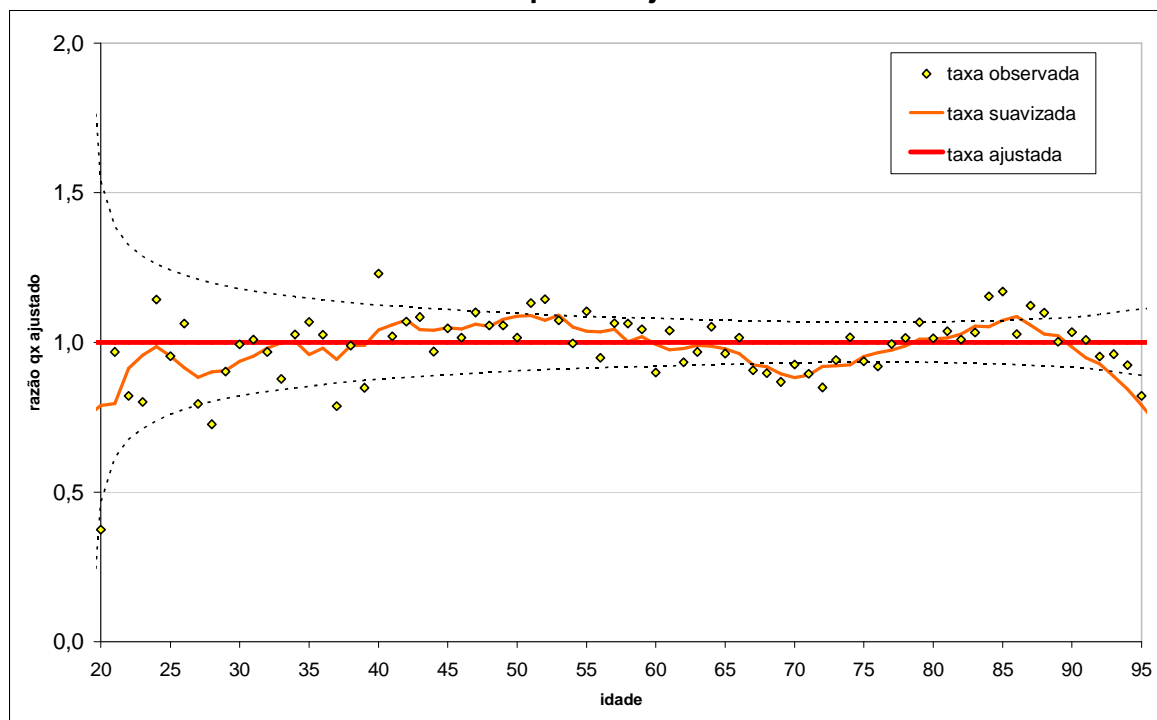
Fonte: PRODESP

**Gráfico 25 - Sobremortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - homens - observada, suavizada e IC de 95% - com respeito à ajustada**



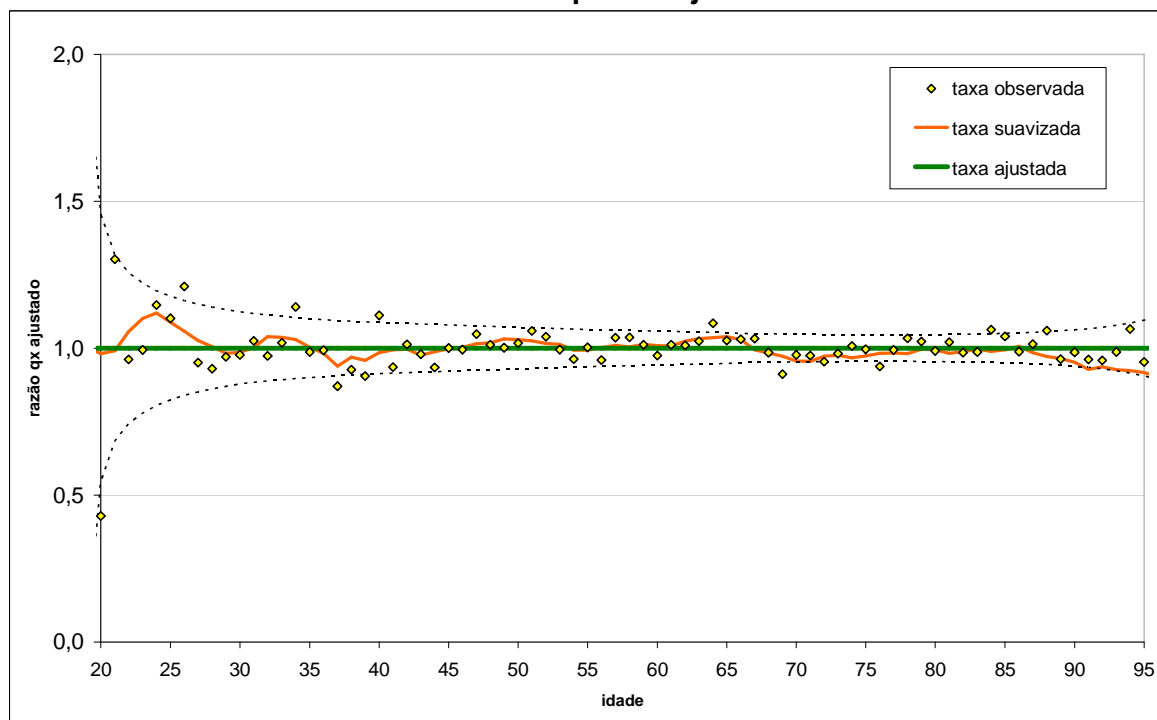
Fonte: PRODESP

**Gráfico 26 - Sobremortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - mulheres - observada, suavizada e IC de 95% - com respeito à ajustada**



Fonte: PRODESP

**Gráfico 27 - Sobremortalidade - população de servidores públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - 1990/2005 - ambos os sexos - observada, suavizada e IC de 95% - com respeito à ajustada**



Fonte: PRODESP

A tabela 5, a tabela 6 e a tabela 7 apresentam respectivamente para homens, mulheres e ambos os sexos, as estimativas e intervalos de 95% de confiança para os parâmetros  $D$ ,  $G$ ,  $H$  e  $K$  do modelo utilizado para o ajuste das taxas.

**Tabela 5 - Estimativas e intervalo de confiança dos parâmetros do modelo de Heligman & Pollard ajustado - homens**

<b>Homem Nível Médio</b>				
Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
$D$	0,002030501	0,000152521	0,001726456	0,002334546
$G$	0,000083328	0,000011444	0,000060516	0,000106141
$H$	1,090382854	0,002266509	1,085864652	1,094901056
$K$	0,443857401	0,325270310	-0,204557111	1,092271913
<b>Homem Nível Superior</b>				
Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
$D$	0,000462123	0,000055110	0,000352264	0,000571982
$G$	0,000007625	0,000001413	0,000004808	0,000010442
$H$	1,119965165	0,003133745	1,113718159	1,126212171
$K$	1,055798522	0,477588692	0,103742865	2,007854178
<b>Homem</b>				
Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
$D$	0,000877937	0,000073255	0,000731906	0,001023967
$G$	0,000019423	0,000002698	0,000014045	0,000024800
$H$	1,110496195	0,002344450	1,105822619	1,115169770
$K$	1,563845228	0,316375666	0,933161865	2,194528591

Fonte: PRODESP

**Tabela 6 - Estimativas e intervalo de confiança dos parâmetros do modelo de Heligman & Pollard ajustado - mulheres**

<b>Mulher Nível Médio</b>				
Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
$D$	0,000821290	0,000072379	0,000677006	0,000965575
$G$	0,000012517	0,000002158	0,000008216	0,000016818
$H$	1,106732493	0,002743657	1,101263112	1,112201873
$K$	-2,093951719	0,488039089	-3,066839862	-1,121063576
<b>Mulher Nível Superior</b>				
Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
$D$	0,000519817	0,000058344	0,000403510	0,000636123
$G$	0,000014591	0,000002807	0,000008996	0,000020186
$H$	1,100750550	0,003213820	1,094343918	1,107157183
$K$	-4,599388515	0,930002573	-6,453314762	-2,745462268
<b>Mulher</b>				
Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
$D$	0,000685436	0,000050527	0,000584713	0,000786159
$G$	0,000011305	0,000001585	0,000008145	0,000014465
$H$	1,107532609	0,002265831	1,103015757	1,112049462
$K$	-2,306906127	0,441470989	-3,186962459	-1,426849795

Fonte: PRODESP

**Tabela 7 - Estimativas e intervalo de confiança dos parâmetros do modelo de Heligman & Pollard ajustado - ambos os sexos**

Total				
Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
<i>D</i>	0,000786860	0,000030877	0,000725308	0,000848413
<i>G</i>	0,000013414	0,000001030	0,000011360	0,000015468
<i>H</i>	1,109702202	0,001256079	1,107198255	1,112206150
<i>K</i>	-0,282127375	0,202186097	-0,685177992	0,120923243

Fonte: PRODESP

Apesar do parâmetro *K* para homens de nível médio e para ambos os sexos ter sido não significativo (o zero pertence ao intervalo de confiança calculado) optou-se por apresentá-lo no intuito de manter-se o padrão dos outros grupos estimados.

### 5.1.1) Comparação com a Tábua de Mortalidade AT-49

No Anexo D apresenta-se algumas comparações das Tábuas RPPSP-98H, RPPSP-98M e RPPSP-98A ajustadas, com tábuas de mercado selecionadas. Como o Ministério da Previdência Social exige na Portaria MPS nº 4.992/99 que os cálculos atuariais dos Regimes Próprios de Previdência Social tenham a tábua AT-49 (*male*)<sup>76</sup> como balizador para os eventos de sobrevivência (limite máximo de taxa de mortalidade) e mortalidade (limite mínimo de taxa de mortalidade), a comparação com esta será privilegiada neste item.

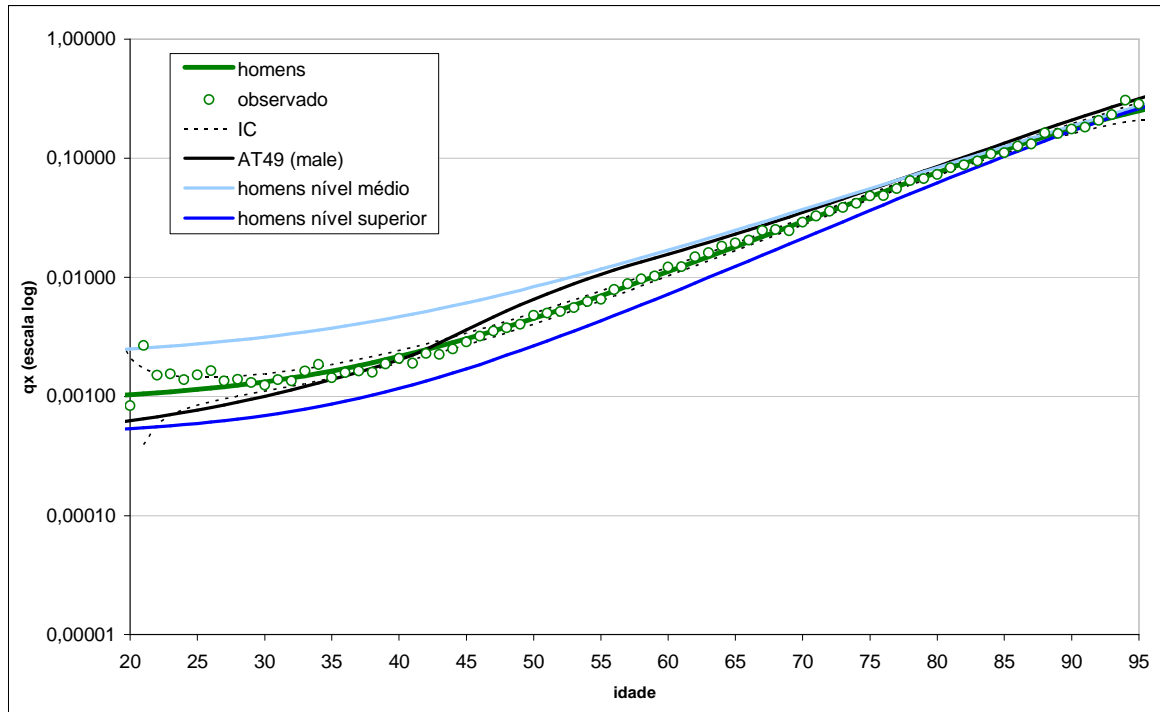
O gráfico 28 (homens), gráfico 29 (mulheres), gráfico 30 (mulheres) e Gráfico 31 (ambos os sexos) apresentam comparações das tábuas ajustadas com a tábua AT-49. Incluem-se nos três primeiros além das tábuas ajustadas por sexo, as tábuas ajustadas por sexo e nível educacional (médio e superior). É importante apresentar-se estas tábuas segmentadas por nível educacional, pois existe uma tendência da grande maioria das futuras vagas no serviço público serem preenchidas por pessoas com nível superior, ocasionando um constante aumento relativo desse grupo de indivíduos na população de funcionários públicos como um todo, em detrimento do grupo de indivíduos com nível médio. Nos gráficos apresentados, esse constante aumento da população com nível superior implicará em que as curvas calculadas

<sup>76</sup> Os indivíduos sobrevivem com a expectativa maior ou igual a da tábua AT-49 (*male*) e morrem com probabilidade maior ou igual a da tábua AT-49 (*male*).

por sexo, aproximar-se-ão cada vez mais das curvas calculadas por sexo e nível superior.

O gráfico 28 compara as taxas de mortalidade da tábua AT-49 (*male*) com as observadas e ajustadas para a população masculina. Como se pode observar, não existe uma boa aderência da tábua AT-49 (*male*) à população masculina dos funcionários públicos civis do Estado de São Paulo. As taxas da AT-49 (*male*) só ficam dentro do intervalo de confiança da tábua masculina ajustada para as idades de 20 a 23 anos (onde o intervalo de confiança é grande devido a escassez de dados) e para as idades de 37 a 43 anos. Entre as idades de 24 a 36 anos as taxas da AT-49 (*male*) estão abaixo do limite inferior do intervalo de confiança (em média ficam 7,0% abaixo deste limite). A partir da idade de 44 anos (inclusive) as taxas da AT-49 (*male*) ficam acima do limite superior do intervalo de confiança das taxas ajustadas (em média ficam 16,3% acima deste limite). O problema mais grave para o sistema previdenciário está justamente para essas idades maiores ou iguais a 44 anos. É óbvio pela observação do gráfico que as taxas da tábua em questão são maiores que as taxas de mortalidade observadas e ajustadas da população masculina. Utilizando a tábua AT-49 (*male*), o cálculo atuarial irá prever uma menor sobrevivência dos aposentados e pensionistas, acarretando uma subestimação dos custos do sistema, o que na realidade não deveria ocorrer. Aliado a este fato, mas com menor influência nos custos totais do sistema, será feita a previsão de que os participantes ativos com idades de 24 até 36 anos morrerão com uma probabilidade menor do que ela realmente acontece na prática, existindo uma subestimação da probabilidade de geração de pensionistas de funcionários ativos, ainda que a geração das pensões por questões biométricas dependa também dos padrões de nupcialidade e de parturição. Para as idades de 20 a 35 anos, ou seja, os adultos jovens, a tábua AT-49 (*male*) apresenta também uma defasagem quando comparada com os dados observados na população masculina. Essa diferença pode ser atribuída provavelmente à mortalidade por causas externas, principalmente por acidentes de trânsito e/ou homicídios.

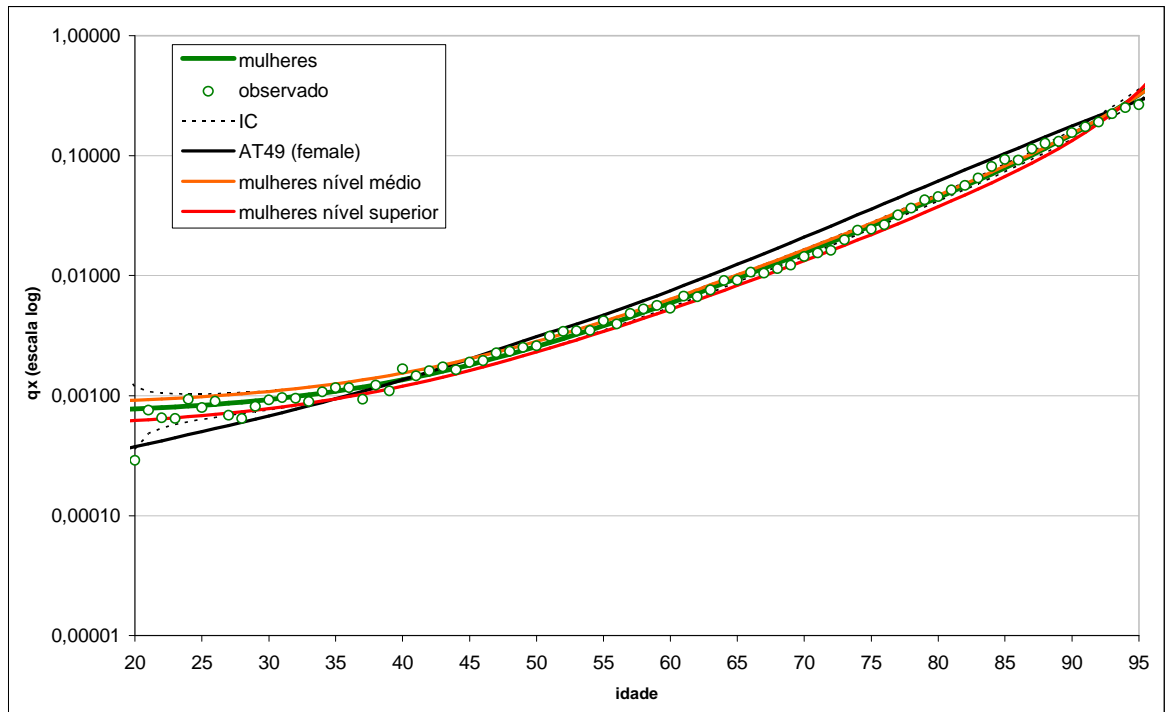
**Gráfico 28 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - homens - 1990/2005 e tábua AT-49 (*male*)**



Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (*male*).

O gráfico 29 compara as taxas de mortalidade da tábua AT-49 (*female*) com as observadas e ajustadas para a população feminina. Observa-se que a tábua AT-49 (*female*) encontra-se dentro do intervalo de confiança do ajuste na idade de 20 anos (onde o intervalo de confiança é grande devido à escassez de dados), entre as idades de 35 e 44 anos e para as idades de 92 a 95 anos. Para as idades de 21 a 34 anos, as taxas da AT-49 (*female*) ficam sempre abaixo do limite inferior do intervalo de confiança (em média ficam 14,2% abaixo deste limite). Para as idades de 45 a 91 anos, as taxas da AT-49 (*female*) ficam sempre acima do limite superior do intervalo de confiança do modelo ajustado (em média ficam 18,9% acima deste limite). Essas constatações acarretam os mesmos problemas encontrados para o caso masculino, ou seja, uma menor probabilidade de sobrevivência para os aposentados e pensionistas de 45 anos até 91 anos, acarretando valores subestimados para os fluxos de pagamentos atuais e futuros previstos no cálculo atuarial, e uma menor probabilidade de morte para os ativos de 21 a 34 anos e conseqüente subestimação da geração de pensionistas nessas idades.

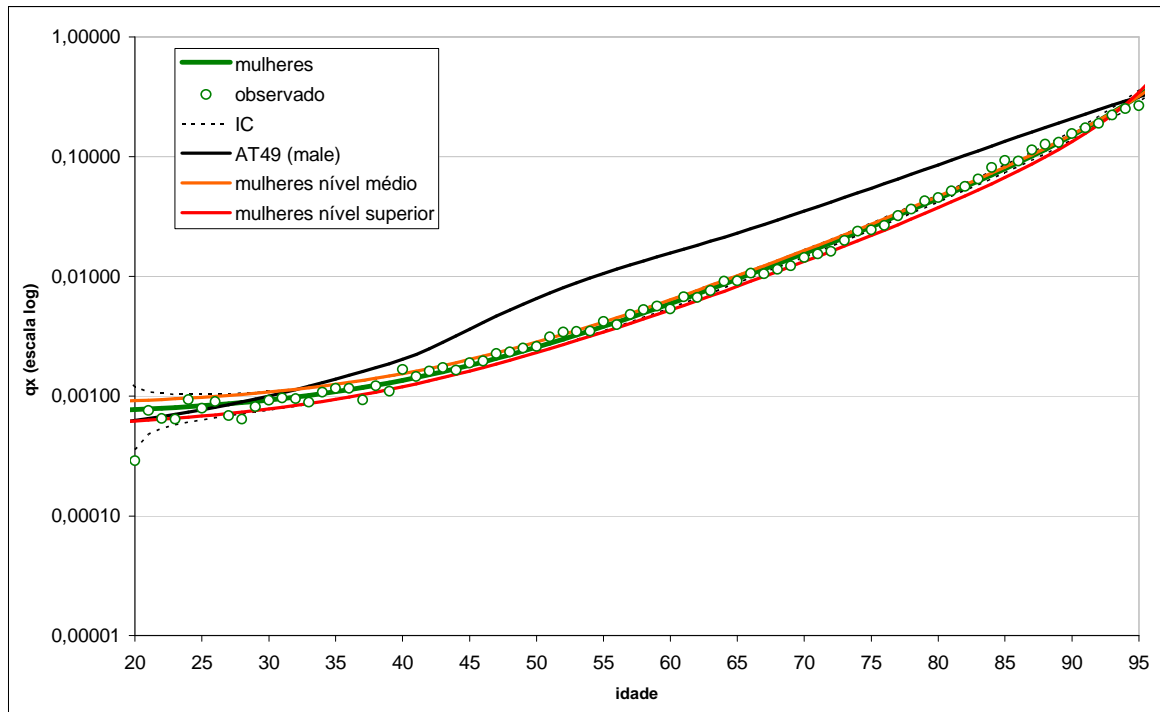
**Gráfico 29 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - mulheres - 1990/2005 e tábua AT-49 (*female*)**



Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (*female*).

O gráfico 30 compara as taxas de mortalidade da tábua AT-49 (*male*) com as observadas e ajustadas para a população feminina. Neste caso nota-se que a tábua AT-49 (*male*) superestima a mortalidade da população feminina dos 33 aos 93 anos. As taxas da AT-49 (*male*) no intervalo de 33 até 93 anos estão em média 86,4% acima do limite superior do intervalo de confiança de 95%, calculado para o ajuste. Esse fato subestima fortemente os gastos com as aposentadorias atuais e futuras.

**Gráfico 30 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - mulheres - 1990/2005 e tábua AT-49 (*male*)**

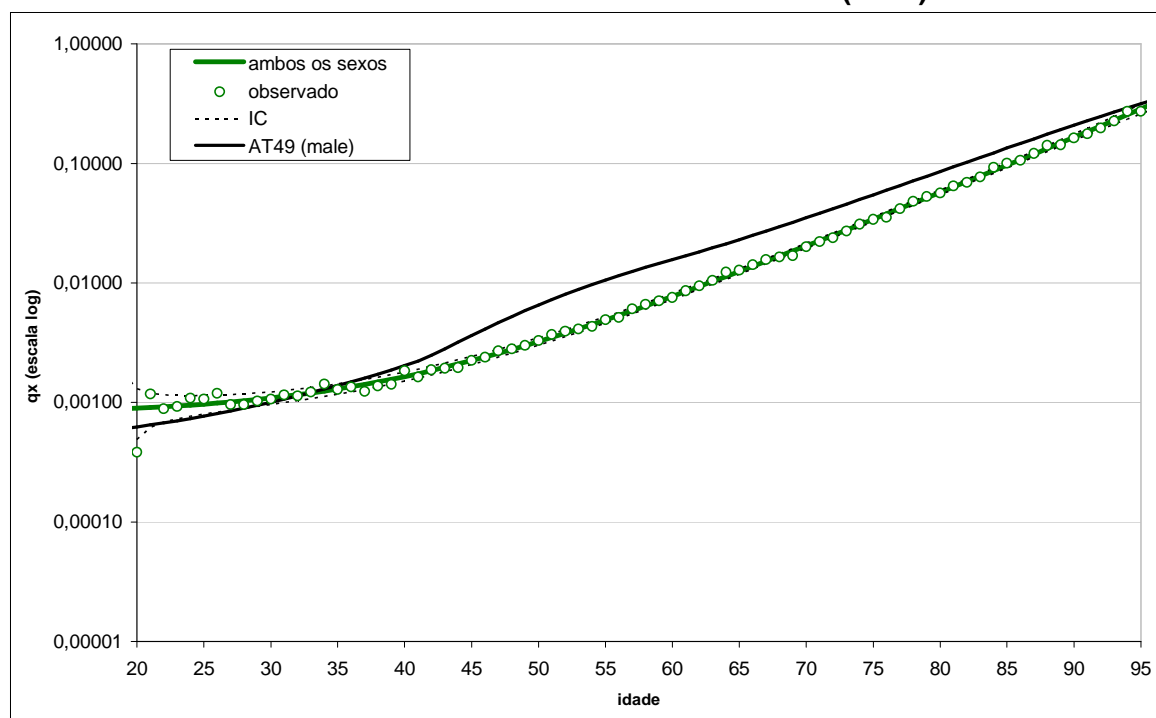


Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (*male*).

O gráfico 31 compara as taxas de mortalidade da tábua AT-49 (*male*) com as observadas e ajustadas para a população de ambos os sexos. Nesta situação nota-se que a tábua AT-49 (*male*) superestima a mortalidade da população de ambos os sexos a partir da idade de 35 anos (as taxas da AT-49 (*male*) no intervalo de 36 até 95 anos, estão em média 53,0% acima do limite superior do intervalo de confiança de 95%, calculado para o ajuste), o que como citado anteriormente acaba subestimando os gastos com as aposentadorias e pensões atuais e futuras. A AT-49 (*male*) só fica dentro do intervalo de confiança das taxas ajustadas para as duas primeiras idades (20 e 21 anos) e no intervalo de 28 até 35 anos. Dos 22 aos 26 anos as taxas da AT-49 (*male*) estão em média 2,8% abaixo do limite inferior do intervalo de confiança de 95%, calculado para o ajuste. Dentro deste intervalo, os participantes ativos morrerão com uma probabilidade menor do que ela realmente acontece na prática, existindo uma subestimação da probabilidade de geração de pensionistas de funcionários ativos.



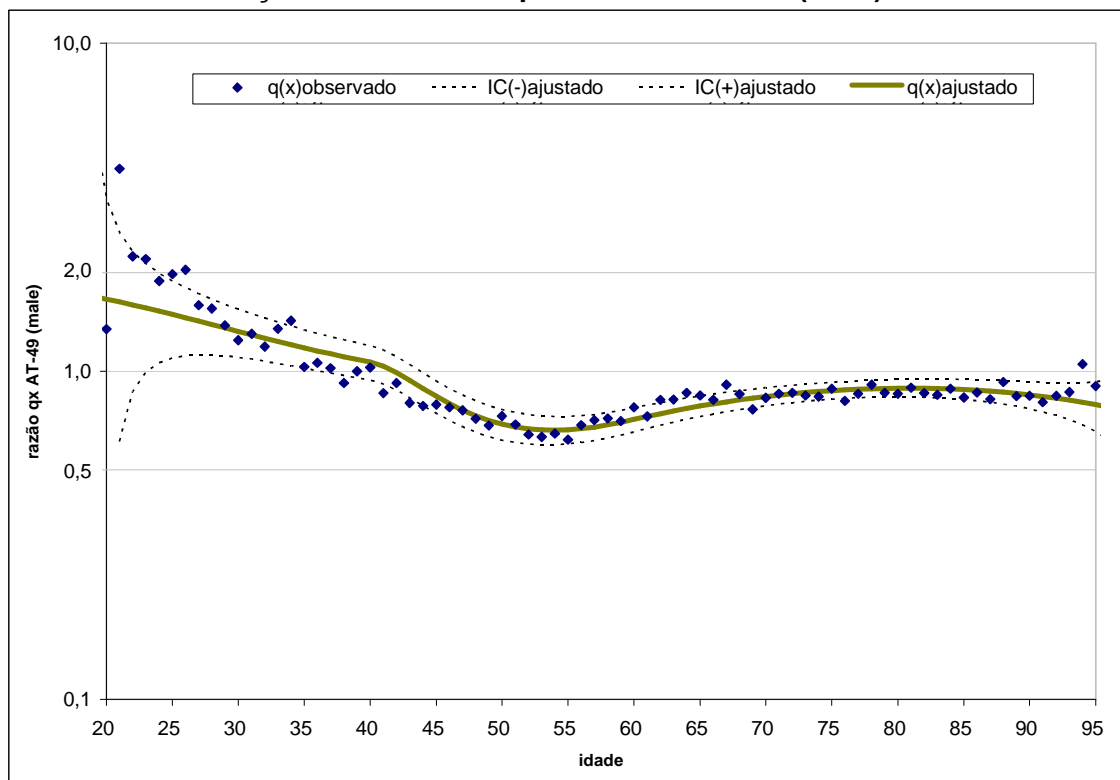
**Gráfico 31 - Probabilidade de óbito por idade ao óbito - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - observado, ajustado e intervalo de confiança - ambos os sexos - 1990/2005 e tábua AT-49 (male)**



Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (male).

O gráfico 32 apresenta a sobremortalidade das taxas observadas para a população masculina e a encontrada na AT-49 (male). A sobremortalidade é definida como a razão entre duas taxas, sendo que no caso foi utilizada a AT-49 (male) no denominador. Um valor igual a dois indica que as taxas da população são duas vezes maiores do que as da AT-49 (male) e um valor igual a zero vírgula cinco (meio) indica que as taxas da população são metade das taxas da AT-49 (male). No caso observa-se que as taxas observadas na população masculina não são muito próximas às taxas da AT-49 (male). Nas idades onde normalmente se dão as concessões dos benefícios de aposentadoria e pensão elas são inferiores. Este gráfico somente confirma as impressões das análises feitas anteriormente: a partir dos 42 anos (inclusive) para os homens e entre 41 e 93 anos para as mulheres, a sobremortalidade se situa sempre abaixo de um.

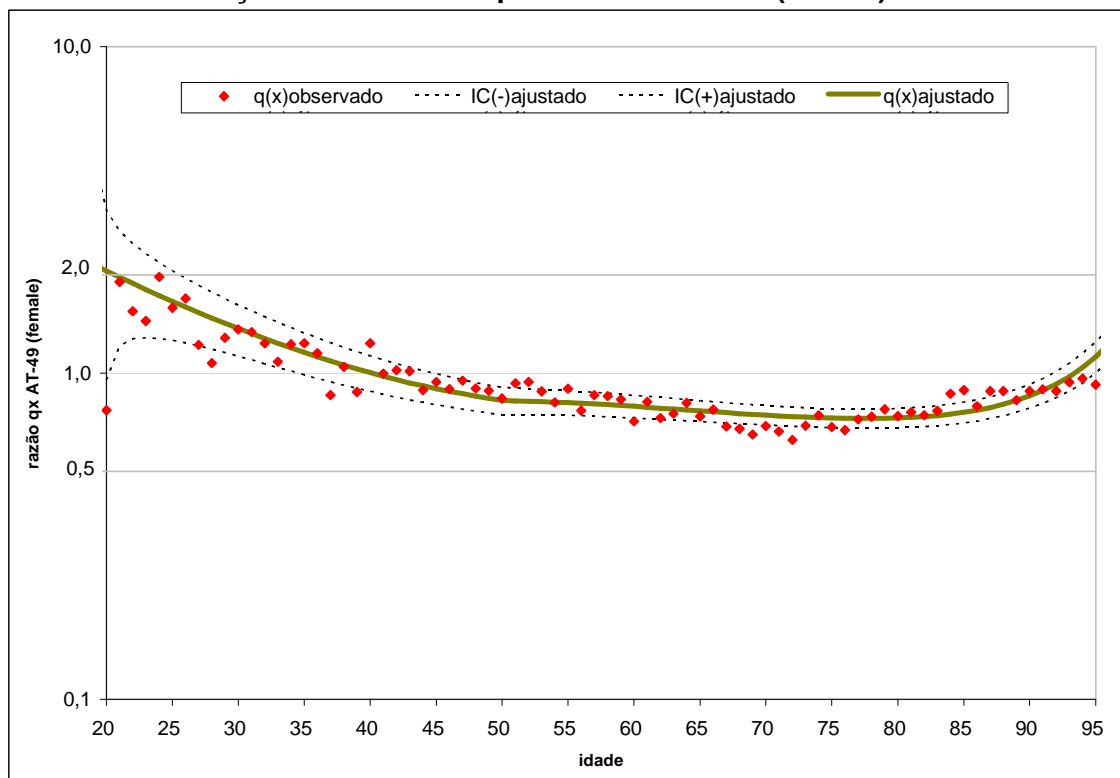
**Gráfico 32 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 (*male*) - homens**



Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (*male*).

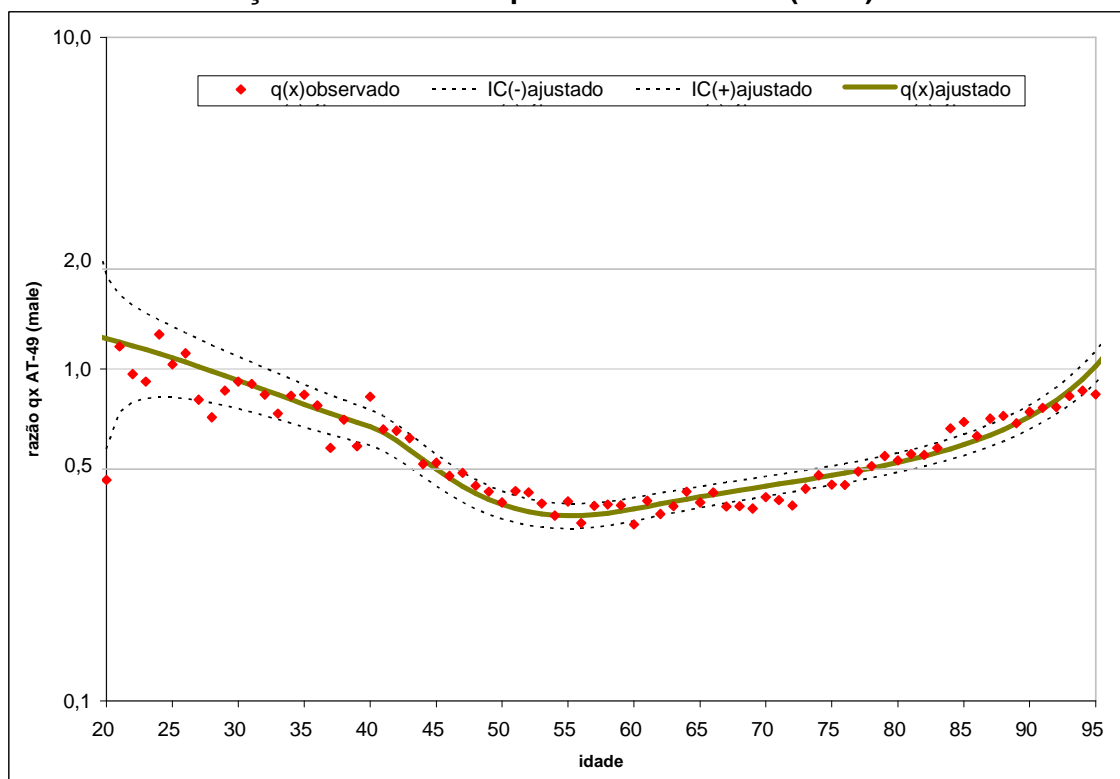
O gráfico 33 e o gráfico 34 apresentam, respectivamente, a sobremortalidade das taxas observadas para a população feminina e a encontrada na AT-49 (*female*) e AT-49 (*male*). Como foi observado para a população masculina, os gráficos confirmam as impressões das análises anteriores, sendo que para a AT-49 (*male*) (que normalmente é utilizada nos cálculos atuariais, independente do sexo do funcionário público) nas idades onde normalmente são concedidas as aposentadorias e pensões, as taxas para a tábua ajustada chegam a ser menos da metade (nas idades entre 45 e 77 anos) das taxas da AT-49 (*male*).

**Gráfico 33 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 (*female*) - mulheres**



Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (*female*).

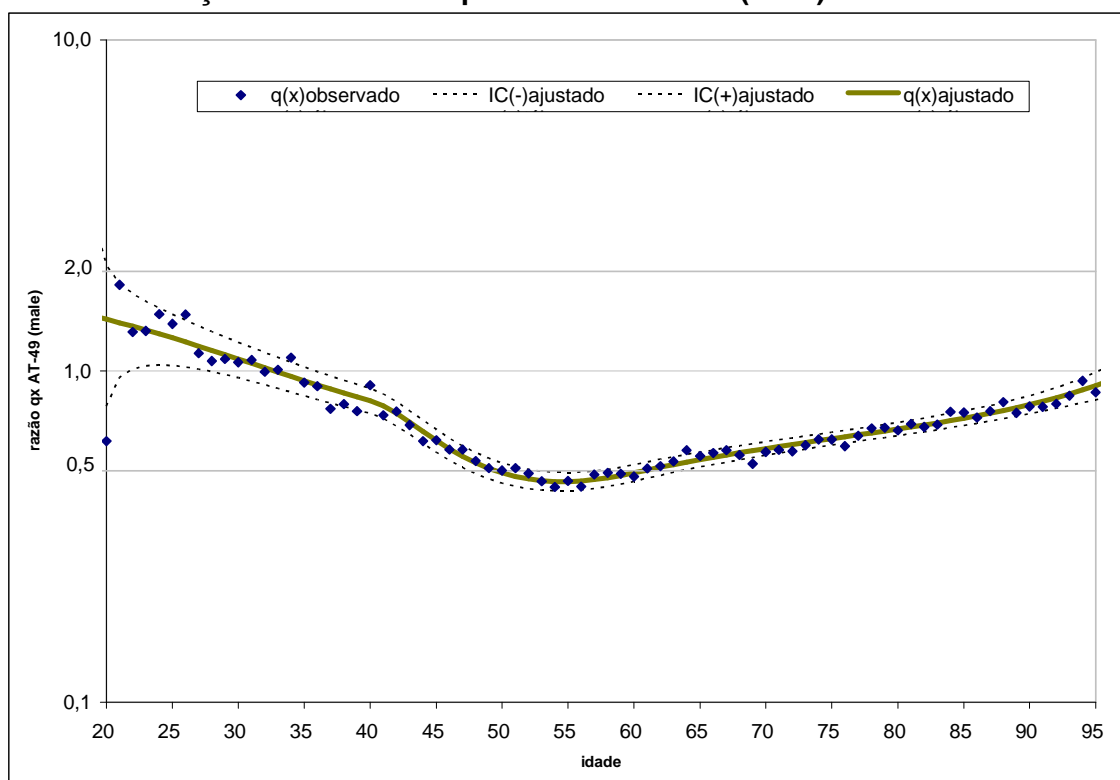
**Gráfico 34 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 (*male*) - mulheres**



Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (*male*).

O gráfico 35 apresenta a sobremortalidade das taxas observadas para a população de ambos os sexos e a encontrada na AT-49 (*male*). Vendo este gráfico, mais uma vez confirmam-se as impressões das análises feitas anteriormente, ou seja, que a AT-49 (*male*) superestima a mortalidade da população mais idosa. Ela é menor que um para as idades acima de 33 anos (inclusive) e chega a ser menos da metade para as idades entre 50 e 60 anos.

**Gráfico 35 - Sobremortalidade dos dados observados, valores ajustados e intervalo de confiança de 95% com respeito à tábua AT-49 (*male*) - ambos os sexos**



Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundo da tábua AT-49 (*male*).

## 5.2) O ajuste pelo Modelo de Lee-Carter

### 5.2.1) Modelagem utilizada e coeficientes calculados

Beltrão e Sugahara (2007) propuseram uma alteração no método de Lee-Carter e criaram uma variante do modelo original para estimar as taxas de variação da mortalidade para os funcionários públicos civis do poder executivo do governo

federal. Neste trabalho utilizou-se o mesmo modelo sugerido pelos autores, sendo agora aplicado para os funcionários públicos do Estado de São Paulo.

Conforme citado anteriormente, a equação proposta por Lee & Carter pode ser escrita como:

$$\ln(m_0(x, t)) = a_{(x)} + b_{(x)}k_{(t)} + e_{(x,t)}$$

Neste trabalho, a componente  $a_{(x)}$  (logaritmo do valor médio da força de mortalidade) da equação acima foi ajustada pela função  $q_{x,s}$  de Heligman & Pollard (descrita no item 5.1).

Para se modelar a taxa de variação  $b_{(x)}$ , foram testados alguns polinômios de graus 5, 6 e 7. Mostraram-se significativos e mais adequados os polinômios de 7º grau para o caso dos homens e os polinômios do 5º grau para o caso das mulheres, que garantem uma certa suavização nos ajustes. Com isso, os referidos polinômios possuem as seguintes características:

$$b_{(x)} = \alpha + \beta x^1 + \gamma x^2 + \delta x^3 + \zeta x^4 + \eta x^5 + \iota x^6 + \kappa x^7, \text{ para os homens}$$

$$b_{(x)} = \alpha + \beta x^1 + \gamma x^2 + \delta x^3 + \zeta x^4 + \eta x^5, \quad \text{para as mulheres}$$

Considerando que os dados utilizados representam um período de tempo muito parco (1990-2005), a componente  $k_{(t)}$  que indexa o nível de mortalidade no tempo não pode ser modelada como um passeio aleatório como sugerido originalmente por Lee & Carter (1992), tendo sido simplesmente substituída por “t”.

A tabela 8 e a Tabela 9 apresentam respectivamente para homens e mulheres, segmentados pelo nível de escolaridade, os valores dos coeficientes dos polinômios ajustados, bem como seus respectivos intervalos de confiança.

**Tabela 8 - Estimativas e intervalo de confiança dos coeficientes dos polinômios ajustados para as taxas de variação da mortalidade pelo modelo de Lee-Carter - homens**

Homem Nível Médio					
Grau	Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
0	$\alpha$	-0,016667277	8,36711E-06	-0,016683676	-0,016650877
1	$\beta$	0,134370447	0,000103698	0,134167202	0,134573691
2	$\chi$	-1,642596189	0,001111357	-1,64477441	-1,640417968
3	$\delta$	-1,854870081	0,005453441	-1,865558635	-1,844181527
4	$\zeta$	52,27180291	0,034156101	52,20485814	52,33874768
5	$\eta$	-65,67306515	0,092443785	-65,85425174	-65,49187855
6	$\iota$	-340,8164622	0,280567297	-341,3663643	-340,2665601
7	$\kappa$	634,823211	0,62577011	633,5967234	636,0496986
Homem Nível Superior					
Grau	Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
0	$\alpha$	-0,068757718	1,82433E-05	-0,068793475	-0,068721962
1	$\beta$	0,372769754	0,000263253	0,372253788	0,37328572
2	$\chi$	-0,568675181	0,002576653	-0,573725328	-0,563625034
3	$\delta$	-12,31394204	0,015362847	-12,34405267	-12,28383141
4	$\zeta$	40,01764426	0,083180414	39,85461362	40,1806749
5	$\eta$	78,12693199	0,274503675	77,5889146	78,66494938
6	$\iota$	-369,2241427	0,708992304	-370,6137422	-367,8345431
7	$\kappa$	280,3805852	1,785711867	276,8806538	283,8805166
Homem					
Grau	Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
0	$\alpha$	-0,05481425	5,1319E-06	-0,054824309	-0,054804192
1	$\beta$	0,246857518	6,91256E-05	0,246722035	0,246993002
2	$\chi$	-1,176352485	0,00070465	-1,177733573	-1,174971398
3	$\delta$	-4,76397244	0,003849844	-4,771517996	-4,756426884
4	$\zeta$	52,8651541	0,022286116	52,82147411	52,90883408
5	$\eta$	-46,66899498	0,067234812	-46,80077279	-46,53721718
6	$\iota$	-354,2130424	0,187043726	-354,5796414	-353,8464435
7	$\kappa$	603,5395467	0,444916228	602,6675269	604,4115664

Fonte: PRODESP.

**Tabela 9 - Estimativas e intervalo de confiança dos coeficientes dos polinômios ajustados para as taxas de variação da mortalidade pelo modelo de Lee-Carter - mulheres**

Mulher Nível Médio					
Grau	Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
0	$\alpha$	0,006083948	7,63072E-06	0,006068992	0,006098904
1	$\beta$	-0,060501638	8,76838E-05	-0,060673495	-0,060329781
2	$\chi$	-0,682737871	0,000584751	-0,683883962	-0,681591781
3	$\delta$	-0,853591747	0,003039757	-0,859549562	-0,847633932
4	$\zeta$	10,52997362	0,007626042	10,51502685	10,54492039
5	$\eta$	-12,84702052	0,0259837	-12,89794763	-12,7960934

Mulher Nível Superior					
Grau	Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
0	$\alpha$	0,009706748	9,26761E-06	0,009688583	0,009724912
1	$\beta$	-0,083213614	0,000127971	-0,083464432	-0,082962796
2	$\chi$	-0,401825236	0,00077762	-0,403349344	-0,400301128
3	$\delta$	0,855703498	0,005146142	0,845617244	0,865789753
4	$\zeta$	6,054427528	0,010736597	6,033384182	6,075470874
5	$\eta$	-17,22453901	0,045405406	-17,31353197	-17,13554604
Mulher					
Grau	Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC(-)	IC(+)
0	$\alpha$	0,006485939	3,22214E-06	0,006479623	0,006492254
1	$\beta$	-0,080303769	3,98201E-05	-0,080381815	-0,080225723
2	$\chi$	-0,650406093	0,000254791	-0,650905474	-0,649906711
3	$\delta$	-0,11903771	0,001439549	-0,121859173	-0,116216247
4	$\zeta$	8,396924581	0,003409108	8,390242853	8,403606309
5	$\eta$	-12,14827357	0,012369586	-12,17251751	-12,12402963

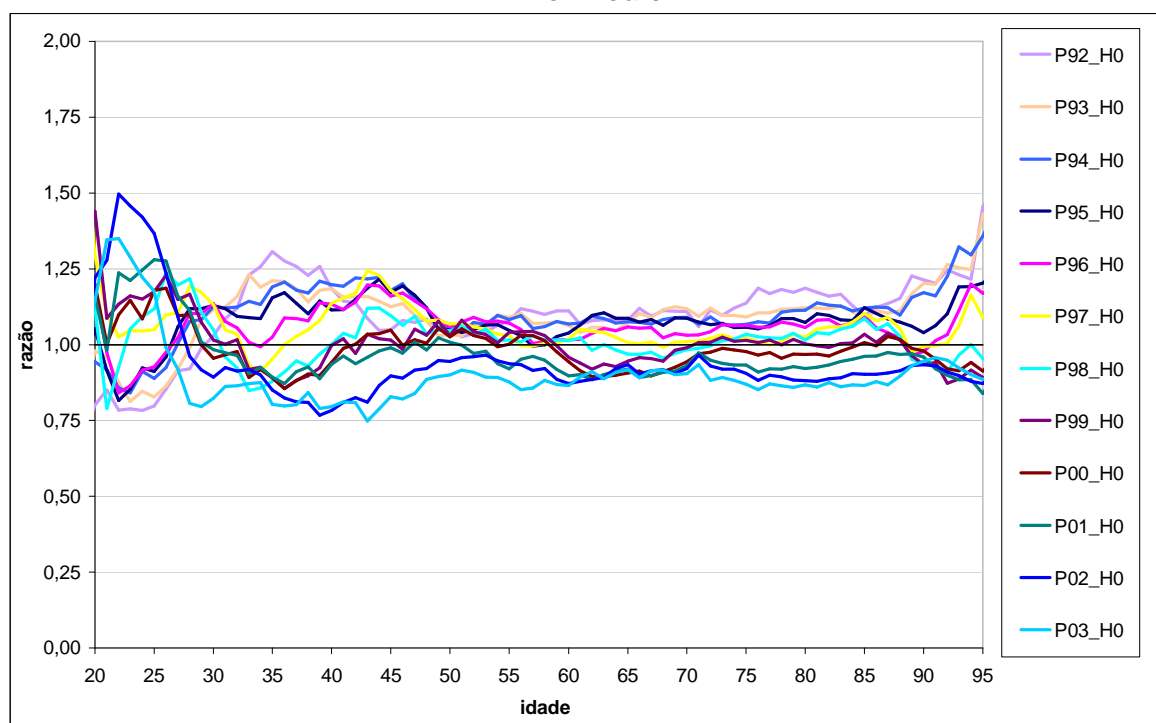
Fonte: PRODESP.

O gráfico 36, o gráfico 37, o gráfico 38 e o gráfico 39 apresentam respectivamente para homens de nível médio, homens de nível superior, mulheres de nível médio e mulheres de nível superior, a razão das taxas brutas de mortalidade suavizadas em 5 anos ( $n-2$ ,  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ ) e 5 idades ( $x-2$ ,  $x-1$ ,  $x$ ,  $x+1$ ,  $x+2$ ) e a média do período 1990-2005.

No trabalho realizado por Beltrão e Sugahara (2007), notava-se claramente um padrão de queda de mortalidade para cada um dos quatro grupos<sup>77</sup>, no período utilizado pelos autores (1993-2005). Como são poucos os dados de mortalidade relativos às idades abaixo de 25 anos e acima dos 90 anos (gerando um maior intervalo de confiança no cálculo das taxas para essas idades extremas) quando comparado com os dados para as idades entre 25 e 90 anos, a análise será focada apenas nas idades onde as informações são estatisticamente significativas. Pela análise do gráfico 36, gráfico 37, gráfico 38 e gráfico 39, observa-se que para os funcionários públicos do executivo do Estado de São Paulo, apenas os homens (de ambos os níveis educacionais) apresentam o referido padrão de queda da mortalidade para todas as idades dentro do intervalo estatisticamente significativo, tal qual ocorrido no trabalho de Beltrão e Sugahara (2007). Os grupos das mulheres de nível médio e mulheres de nível superior apresentam 1 *crossover* entre a razão dessas taxas no período de análise, indicando aumento da mortalidade até determinada idade e a partir da mesma, queda.

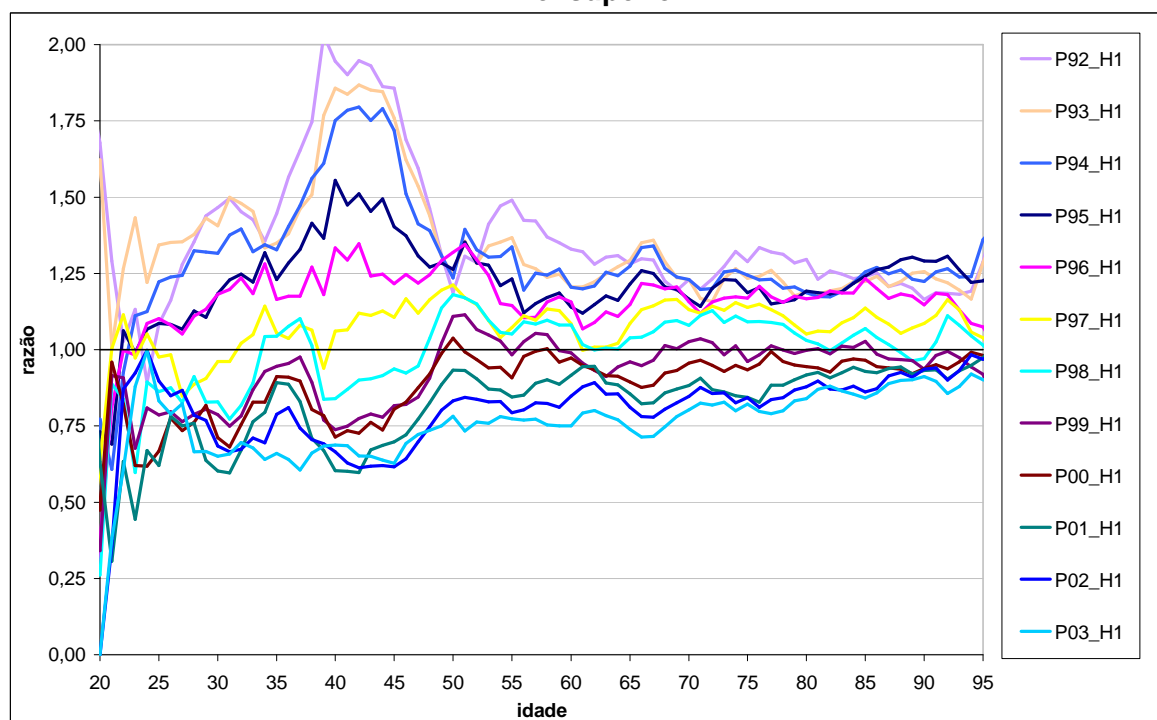
<sup>77</sup> Dois de sexo e dois de nível de escolaridade, com exceção das mulheres de nível superior e com idades acima dos 85 anos.

**Gráfico 36 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível médio**



Fonte: PRODESP.

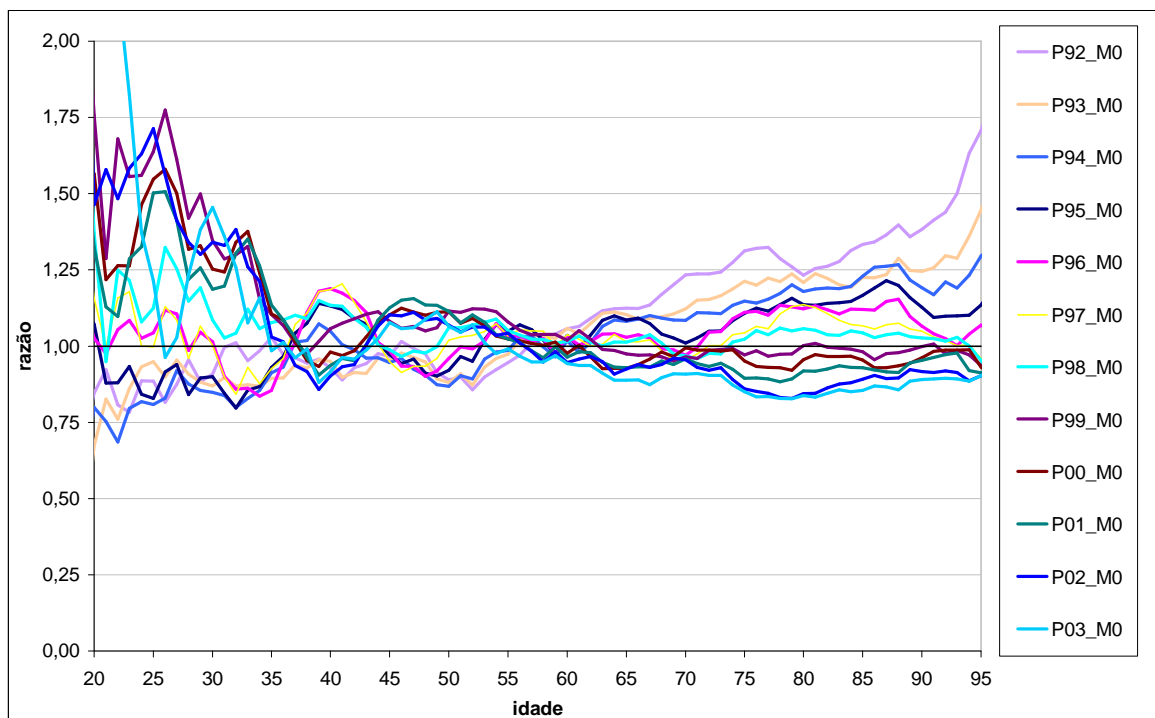
**Gráfico 37 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível superior**



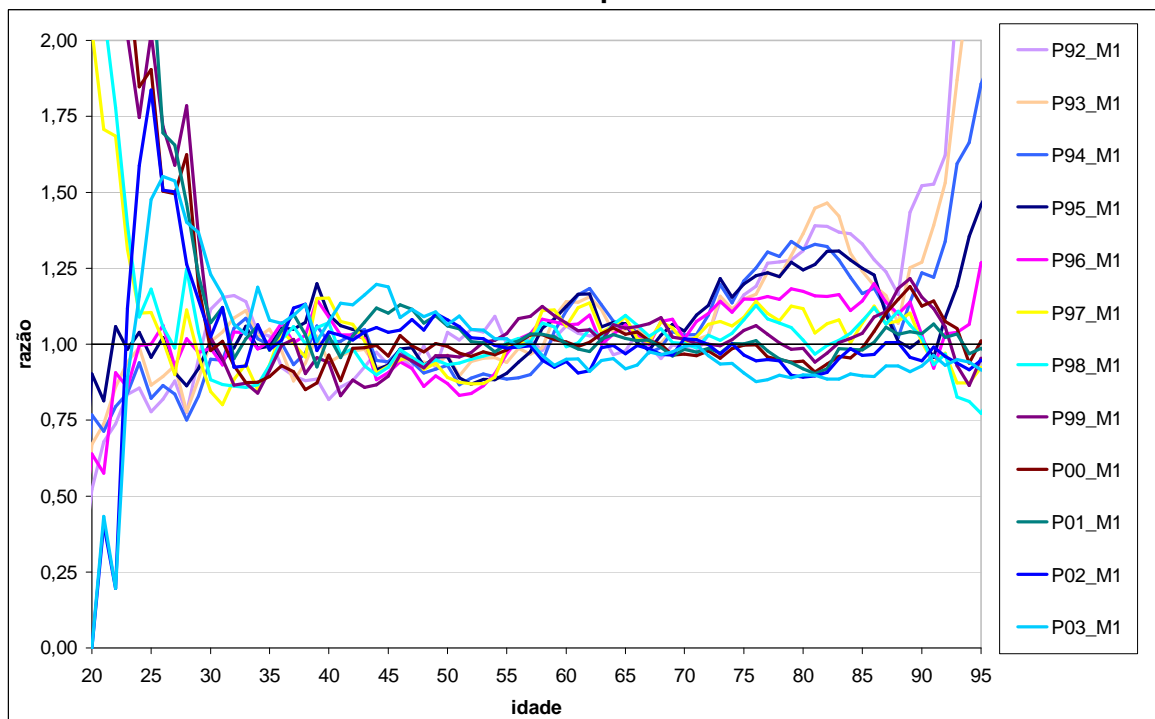
Fonte: PRODESP.



**Gráfico 38 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível médio**

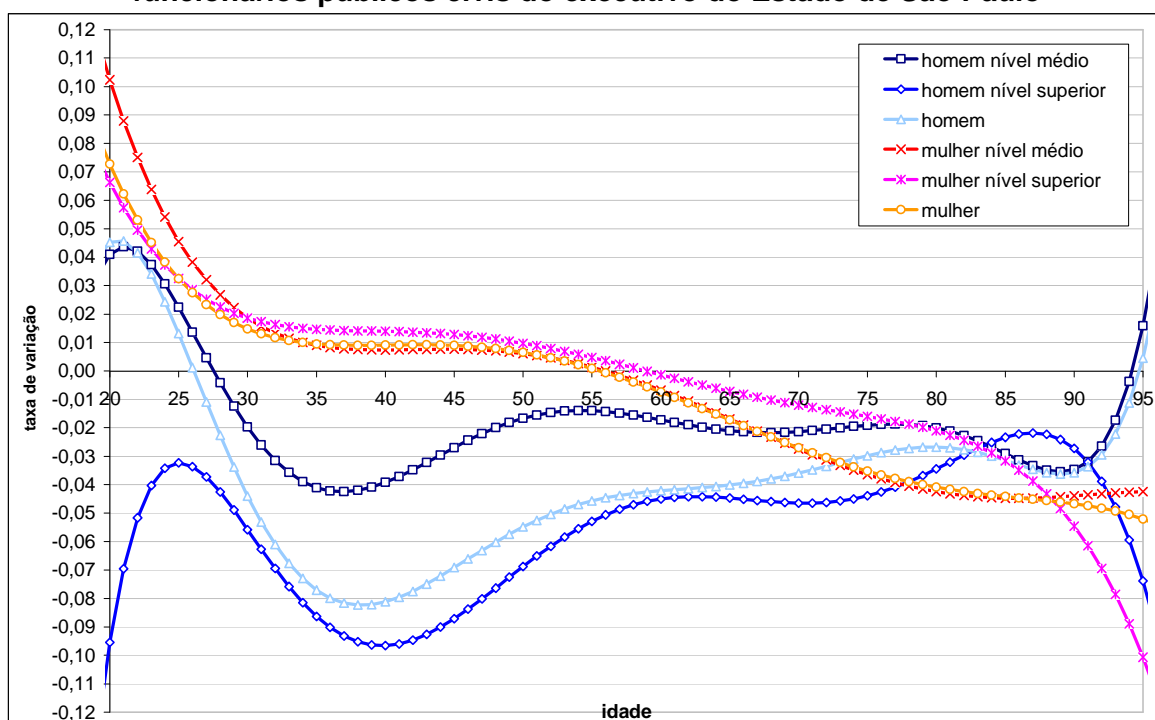


**Gráfico 39 - Razão das taxas brutas de mortalidade (suavizadas 5x5) e a média do período - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível superior**



O gráfico 40 apresenta as taxas de variação da mortalidade por sexo e nível de escolaridade para os funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo. Nesse gráfico ficam mais nítidas as mudanças de sinal nas taxas de variação da mortalidade para as mulheres de nível médio (aos 56 anos) e mulheres de nível superior (aos 59 anos). Como citado anteriormente, o grupo dos homens de nível médio e dos homens de nível superior apresentou taxas negativas de variação da mortalidade para todas as idades dentro do intervalo estatisticamente significativo (no gráfico 40 abaixo, observa-se que as linhas desses grupos encontram-se integralmente abaixo do eixo das abscissas).

**Gráfico 40 - Taxas de variação da mortalidade por sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo**



Fonte: PRODESP.

### 5.2.2) Análise de resíduos

Segundo Bussab e Morettin (2006, p.454), para verificar a adequabilidade de um modelo, necessita-se investigar se as suposições feitas para o desenvolvimento do mesmo estão sendo satisfeitas. Com esse objetivo, estudou-se o comportamento do modelo analisando as discrepâncias entre os valores observados e os valores ajustados pelo mesmo. A esse estudo dá-se o nome de “Análise de Resíduos”.

Nesse estudo, os resíduos foram calculados como sendo iguais ao coeficiente da razão entre as taxas observadas e as taxas ajustadas, da seguinte forma:

$$\hat{e}_{x,t} = \frac{q_x^{observado}}{q_{x,t}^{ajustado}}, \text{ e}$$

$$q_{x,t}^{ajustado} = a_{(x)} * \left( 1 + b_{(x)} * (t - t_{medio}) \right),$$

Onde:

$\hat{e}_{(x,t)}$  = resíduo calculado para a idade  $x$  no ano  $t$ .

$q_{(x,t)}^{ajustado}$  = probabilidade de morte ajustada para a idade  $x$  no ano  $t$ .

$a_{(x)}$  = padrão médio da mortalidade por idade, ajustada pelo modelo de Heligman & Pollard

$b_{(x)}$  = valor do polinômio que dá a velocidade relativa de mudança da mortalidade para cada idade  $x$  em função do período de análise.

$t$  = ano do estudo, variando de 1990 até 2005.

$t_{medio} = 97,5 \text{ anos}$

O gráfico 41, o gráfico 42, o gráfico 43 e o gráfico 44 apresentam respectivamente para homens de nível médio, homens de nível superior, mulheres de nível médio e mulheres de nível superior, os resíduos calculados pela razão das taxas observadas e as ajustadas no tempo. Para o resíduo calculado desta forma, o ajuste terá qualidade se quantidades iguais de pontos estiverem acima e abaixo da unidade, graficamente semelhantes a uma nuvem uniforme de pontos. Analisando os gráficos supracitados observa-se que acontece justamente o esperado para um bom ajuste. Tanto para os homens quanto para as mulheres, independente do nível de escolaridade, enxergam-se nuvens de pontos quase que espelhados na reta de razão igual a um, corroborando a qualidade do ajuste feito.

Como a variância do modelo é calculada como sendo<sup>78</sup>:

$$\frac{q_x * (1 - q_x)}{N_x}$$

Quanto maior o número de indivíduos expostos com idade  $x$ , menor será a variância calculada com relação aos resíduos do ajuste.

No gráfico 41, por exemplo, tinha-se um quantitativo maior de homens para as idades de 60 a 85 anos, do que para as idades abaixo de 60 e acima dos 85 anos. No gráfico 42, idem. No gráfico 43 tinha-se um quantitativo maior de mulheres para as idades de 55 a 85 anos, do que para as idades abaixo de 55 anos e acima dos 85 anos. No gráfico 44 tinha-se um quantitativo maior de mulheres para as idades de 40 a 85 anos, do que para as idades abaixo de 40 anos e acima dos 85 anos. Para uma melhor visualização acerca da medida da variância dos resíduos calculados, foram incluídas nesses mesmos gráficos as linhas tracejadas em preto, calculadas da seguinte forma:

$$1 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{(1 - q_{x,s}^{ajustado})}{Expostos_{(x,s)} * q_{x,s}^{ajustado}}}$$

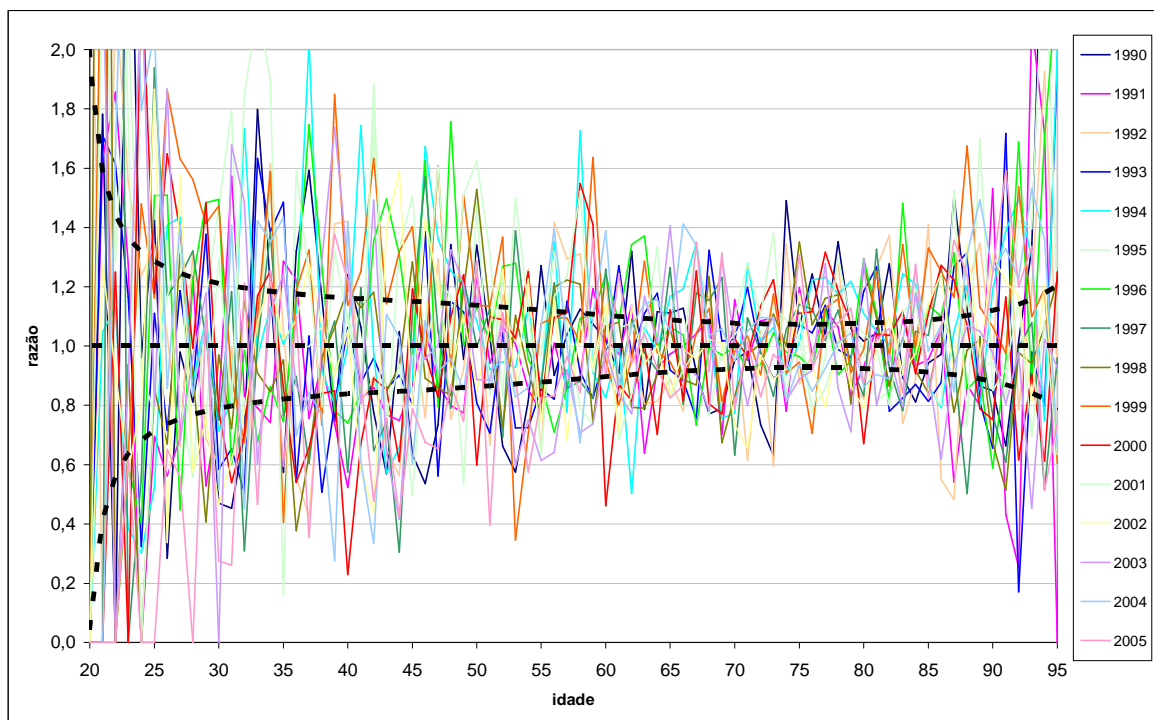
Onde:

$q_{x,s}$  = probabilidade de morte de um indivíduo da população, com idade “ $x$ ” e sexo “ $s$ ”,

$Expostos_{(x,s)}$  = número médio de indivíduos expostos ao risco com idade “ $x$ ” e sexo “ $s$ ” na população coberta nos anos considerados.

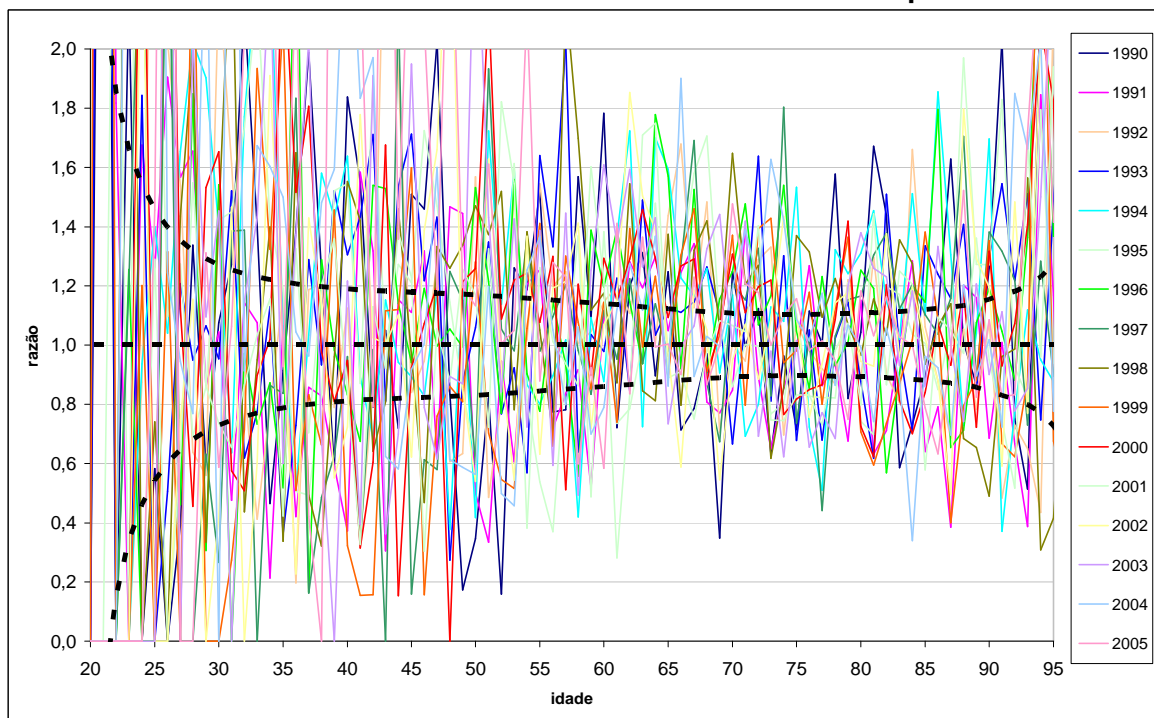
<sup>78</sup> A variância do modelo utilizado é a de uma distribuição binomial de probabilidade, ou seja,  $pq/n$ , sendo que consideramos  $p=q_x$  e  $q=1-q_x$  e  $n=N_x$  o tamanho da população, todos para a idade  $x$ .

**Gráfico 41 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível médio**



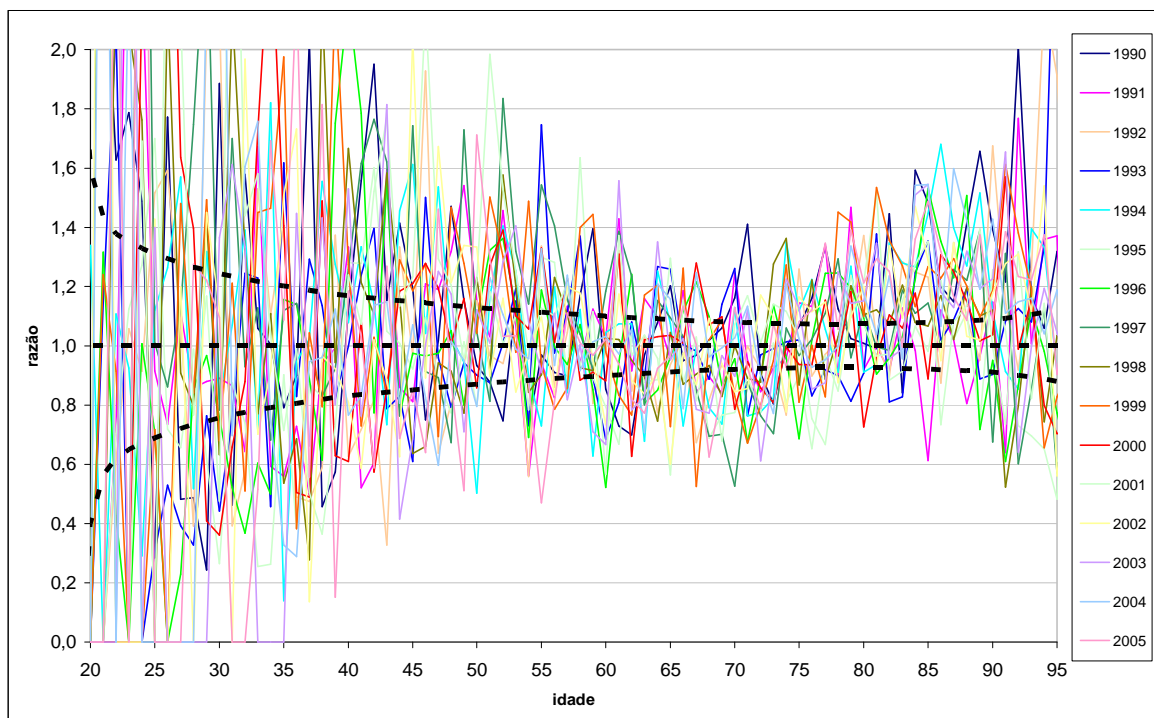
Fonte: PRODESP.

**Gráfico 42 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - homens nível superior**



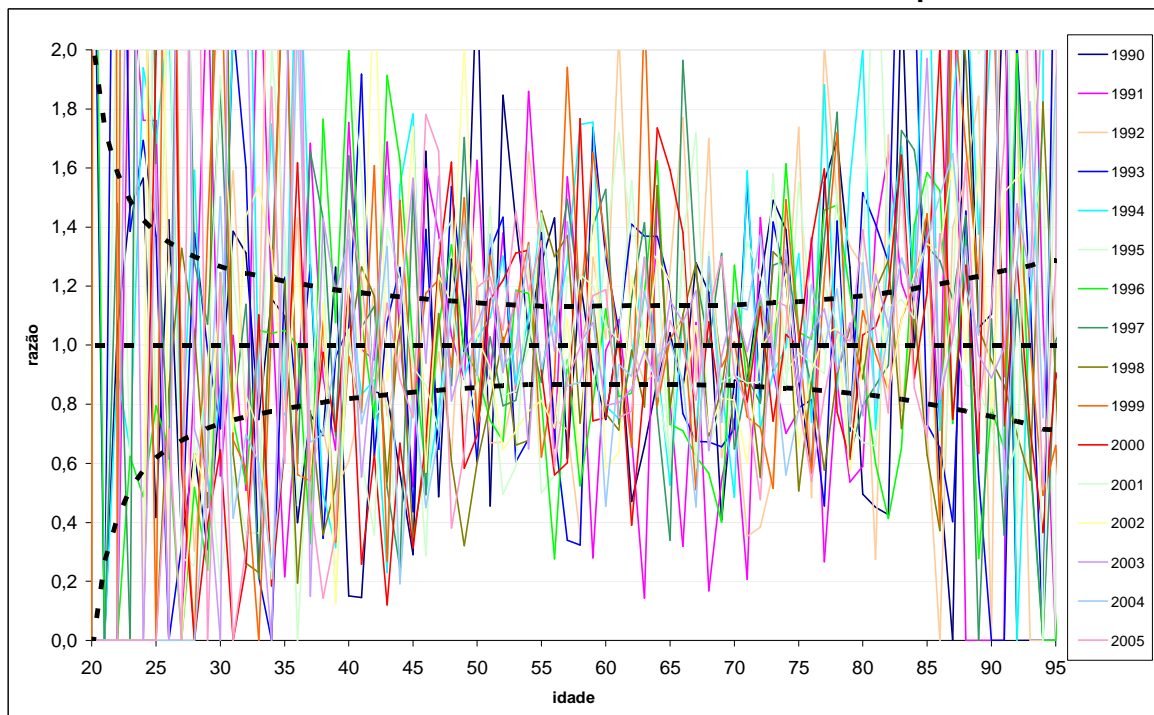
Fonte: PRODESP.

**Gráfico 43 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível médio**



Fonte: PRODESP.

**Gráfico 44 - Resíduos (razão) dos valores observados com relação aos ajustados para as taxas de mortalidade no período 1990/2005 - funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo - mulheres nível superior**



Fonte: PRODESP.

### 5.2.3) Considerações com relação ao aumento da mortalidade observado para as mulheres em São Paulo

A tabela 10 e a tabela 11 apresentam, respectivamente, as frequências absolutas e relativas em função do sexo-escolaridade pela situação de vínculo com o Estado de São Paulo, incluindo apenas os servidores que estavam ativos em dezembro de 2005. Analisando essas tabelas, percebe-se um percentual de contratados muito maior para as mulheres do que para os homens, indicando uma rotatividade (*turnover*) muito maior para o sexo feminino, quando comparado com o sexo masculino. Conforme citado anteriormente, a maioria desses contratos é de professores e tem prazo determinado, podendo ou não haver prorrogação. Na prática quando se incluem esses contratados para o cálculo das taxas de mortalidade e sua variação ao longo do tempo, consideram-se pessoas diferentes ou subconjuntos dessas pessoas, mas com contratos diferentes.

**Tabela 10 - Frequência absoluta da situação dos servidores ativos não-desligados (em dezembro de 2005) em relação ao vínculo com o Governo do Estado de São Paulo**

Situação de vínculo	Funcionários Públicos do Estado de São Paulo							
	Total	%	Homens			Mulheres		
			Total	Nível médio	Nível superior	Total	Nível médio	Nível superior
<b>Total</b>	<b>371.957</b>	<b>100,0</b>	<b>117.519</b>	<b>55.625</b>	<b>61.894</b>	<b>254.438</b>	<b>106.361</b>	<b>148.077</b>
Estatutário	211.087	56,8	80.279	41.731	38.548	130.808	51.648	79.160
Contratado	130.213	35,0	26.001	6.924	19.077	104.212	42.757	61.455
Estável	13.795	3,7	5.531	3.764	1.767	8.264	4.906	3.358
Comissionado	5.185	1,4	1.559	468	1.091	3.626	1.335	2.291
Celetista	11.302	3,0	3.905	2.592	1.313	7.397	5.652	1.745
Extra Quadro	166	0,0	103	79	24	63	52	11
Temporário	205	0,1	139	65	74	66	10	56
Aluno	4	0,0	2	2	0	2	1	1

Fonte: PRODESP.

**Tabela 11 - Frequência relativa (em relação à classe) da situação dos servidores ativos não-desligados (em dezembro de 2005) em relação ao vínculo com o Governo do Estado de São Paulo**

Situação de vínculo	Frequência % em relação à situação de vínculo			
	Homens		Mulheres	
	Nível médio	Nível superior	Nível médio	Nível superior
<b>Total</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>
Estatutário	75,0	62,3	48,6	53,5
Contratado	12,4	30,8	40,2	41,5
Estável	6,8	2,9	4,6	2,3
Comissionado	0,8	1,8	1,3	1,5
Celetista	4,7	2,1	5,3	1,2
Extra Quadro	0,1	0,0	0,0	0,0
Temporário	0,1	0,1	0,0	0,0
Aluno	0,0	0,0	0,0	0,0

Fonte: PRODESP.

Beltrão e Sugahara (2007) identificaram no caso dos servidores públicos federais, uma nítida queda da mortalidade para todos os quatro grupos de estudo (homens nível médio, homens nível superior, mulheres nível médio e mulheres nível superior) no período de análise. Os autores citam que no caso dos servidores públicos federais houve uma seleção positiva para a admissão desses indivíduos. Como de alguns anos para cá a classificação em um concurso público tem se tornado sinônimo de independência, estabilidade e tranquilidade para aquele que consiga tal feito, os concursos têm se mostrado cada vez mais competitivos e acirrados e apenas os melhores e mais bem preparados indivíduos conseguem passar. Esses melhores e mais bem preparados indivíduos são justamente aqueles que possuem mais tempo para estudar e tem de alguma forma seus estudos financiados, pertencendo às classes de maior escolaridade e poder aquisitivo, que possuem intrinsecamente uma menor mortalidade. Aliado a esse fato existe também a situação desses mesmos indivíduos, que possuem curso superior, passarem em concurso para cargos de nível médio, o que tende a causar uma diminuição do *gap* existente entre a mortalidade de indivíduos de nível médio e de indivíduos de nível superior quando se considera no cálculo das taxas a escolaridade do cargo e não do indivíduo. Essa seleção positiva de indivíduos, no caso da esfera federal, é a

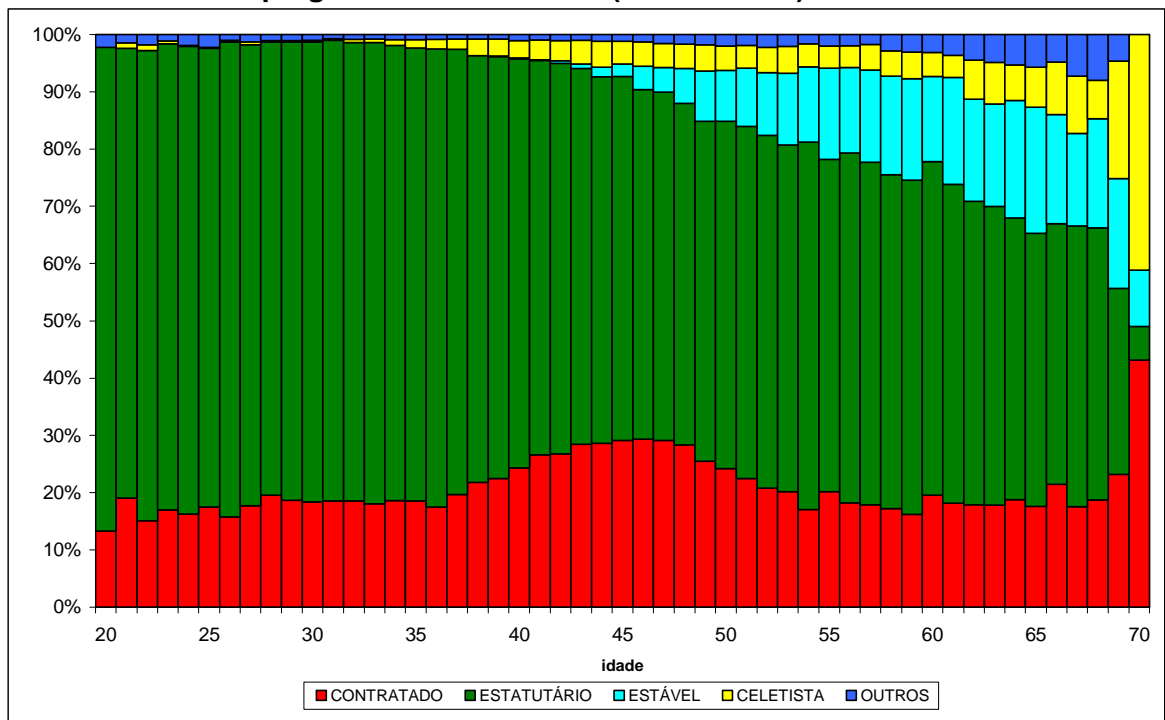


provável responsável pela queda de mortalidade observada por Beltrão e Sugahara (2007).

No caso dos funcionários públicos de São Paulo ocorre justamente o oposto *via-a-vis* os funcionários públicos federais. Muitos anos de ausência na realização de concurso público para preenchimento das vagas docentes com estatutários ocasionaram uma seleção negativa de indivíduos, já que o *status* de contratado constitui-se em um vínculo temporário e precário. Somente aqueles que não conseguem uma posição melhor no mercado de trabalho ou não conseguem passar em algum concurso público se sujeitam a essa indesejável e precária situação empregatícia de ter ou não o seu contrato renovado no final do período. Pessoas nesta situação provavelmente são indivíduos menos qualificados e com menores poder aquisitivo e nível educacional geral, apresentando maior mortalidade quando comparada aos seus antecessores.

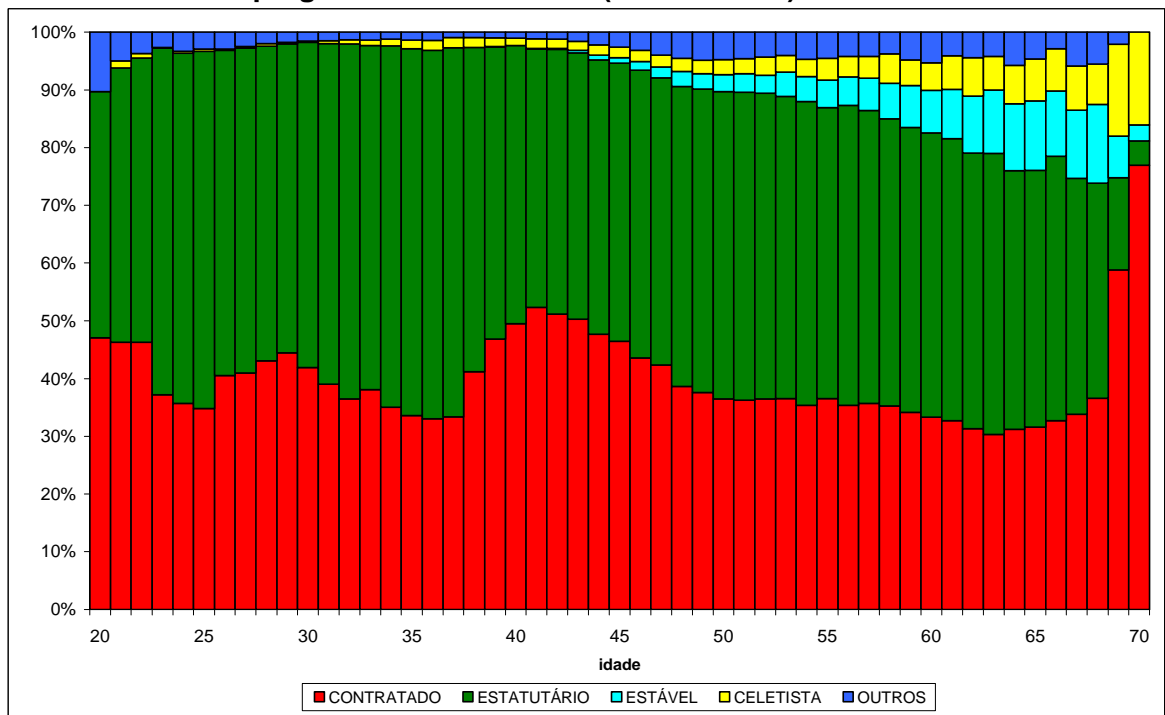
O gráfico 45 e o gráfico 46 apresentam para homens e mulheres, em geral, a distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em dezembro de 2005. A análise dos dados que geraram esses gráficos indica um percentual médio de contratados para as idades de 20 até 70 anos, no caso masculino, de 20,9% contra 40,0% para o caso feminino. Isso aponta para uma rotatividade relativa feminina, praticamente o dobro da masculina, tendo influência direta nos níveis de mortalidade observados.

**Gráfico 45 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - homens**



Fonte: PRODESP.

**Gráfico 46 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - mulheres**

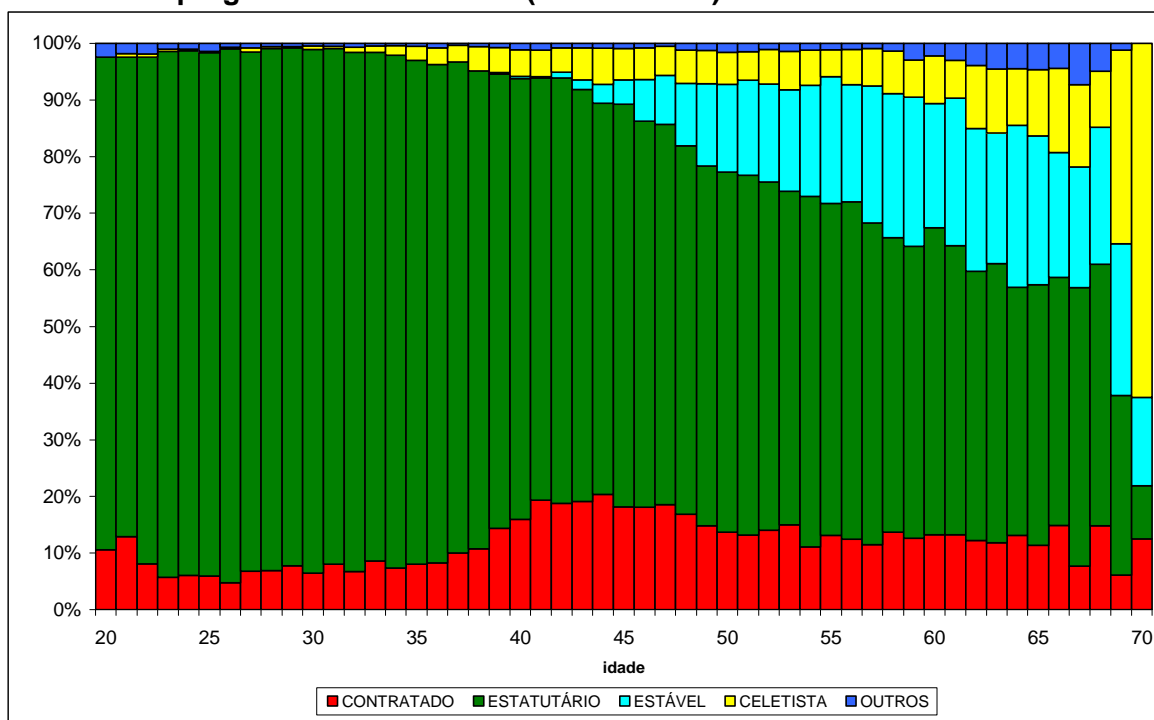


Fonte: PRODESP.

O gráfico 47, o gráfico 48, o gráfico 49 e o gráfico 50 apresentam a distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em dezembro de 2005 para respectivamente homens de nível médio, homens de nível superior, mulheres de nível médio e mulheres de nível superior. Esses gráficos confirmam a maior rotatividade (*turnover*) feminina, apresentando uma média (calculada dos 20 anos 70 anos) de indivíduos contratados de 38,8% para as mulheres de nível médio e 44,1% para as mulheres de nível superior. Os homens de nível médio apresentam uma média de indivíduos contratados de 11,9% contra 31,6% para os homens de nível superior.

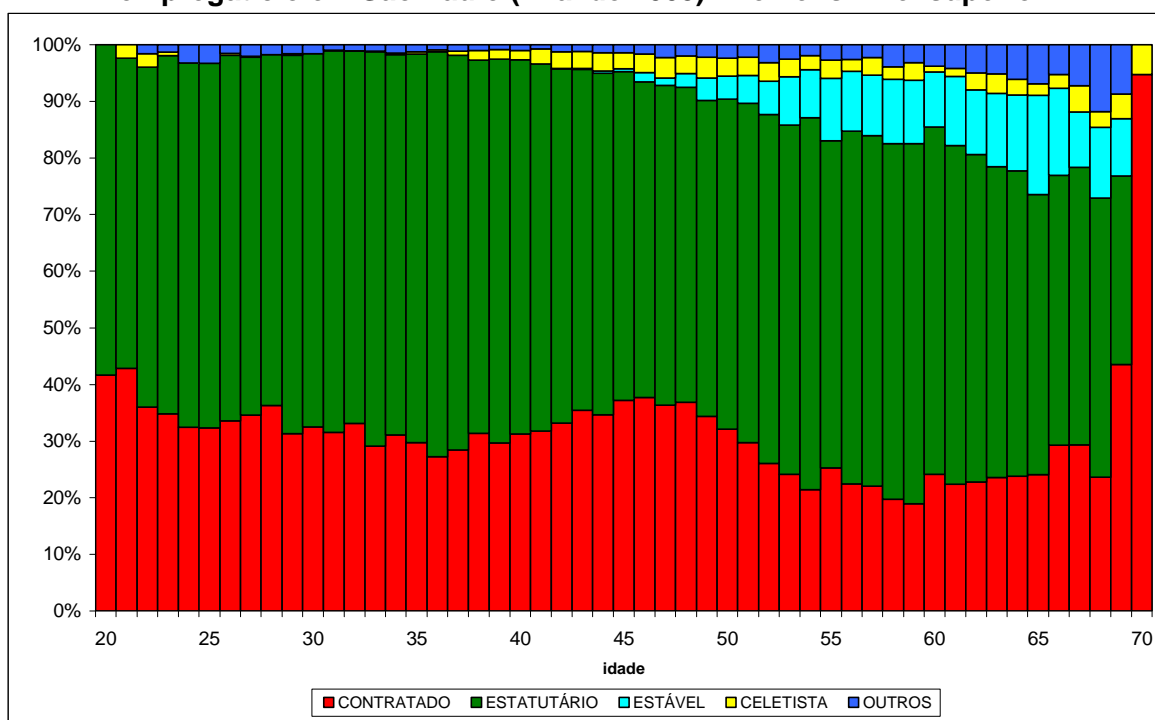
Esse maior *turnover* feminino corrobora a hipótese levantada da seleção negativa na contratação de pessoas para trabalhar no Governo do Estado de São Paulo, acarretando um aumento nas taxas de mortalidade para as mulheres de nível médio com 55 anos ou menos e para as mulheres de nível superior com 58 anos ou menos.

**Gráfico 47 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - homens nível médio**



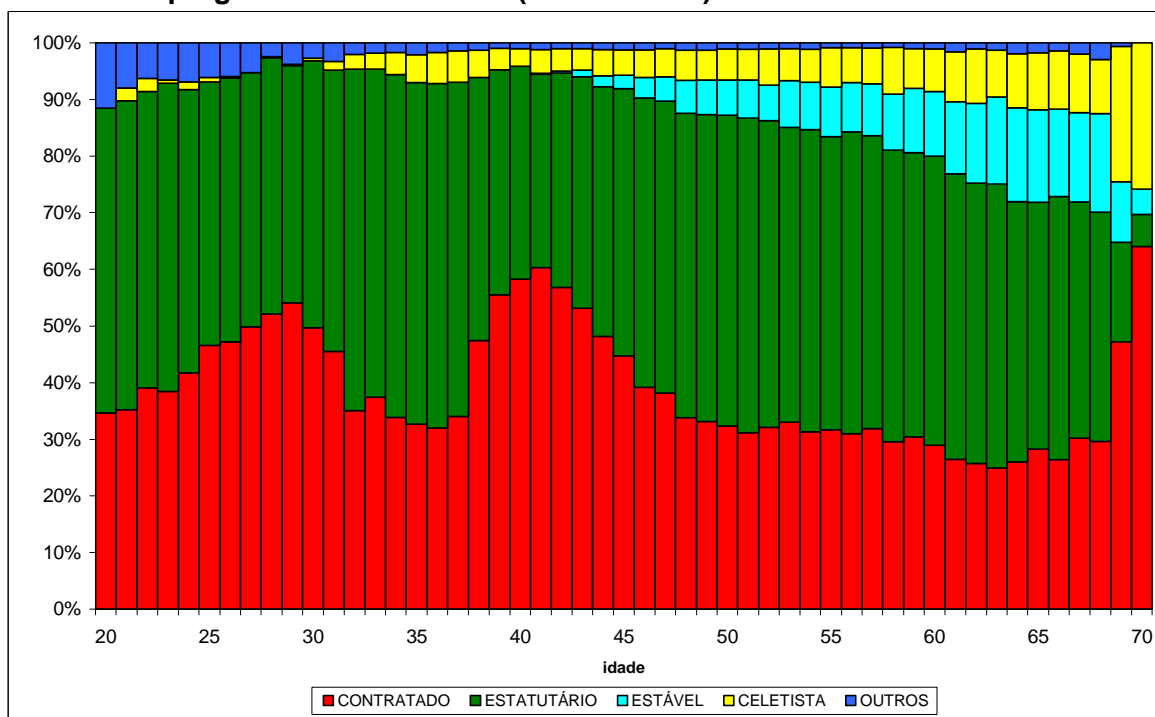
Fonte: PRODESP.

**Gráfico 48 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - homens nível superior**



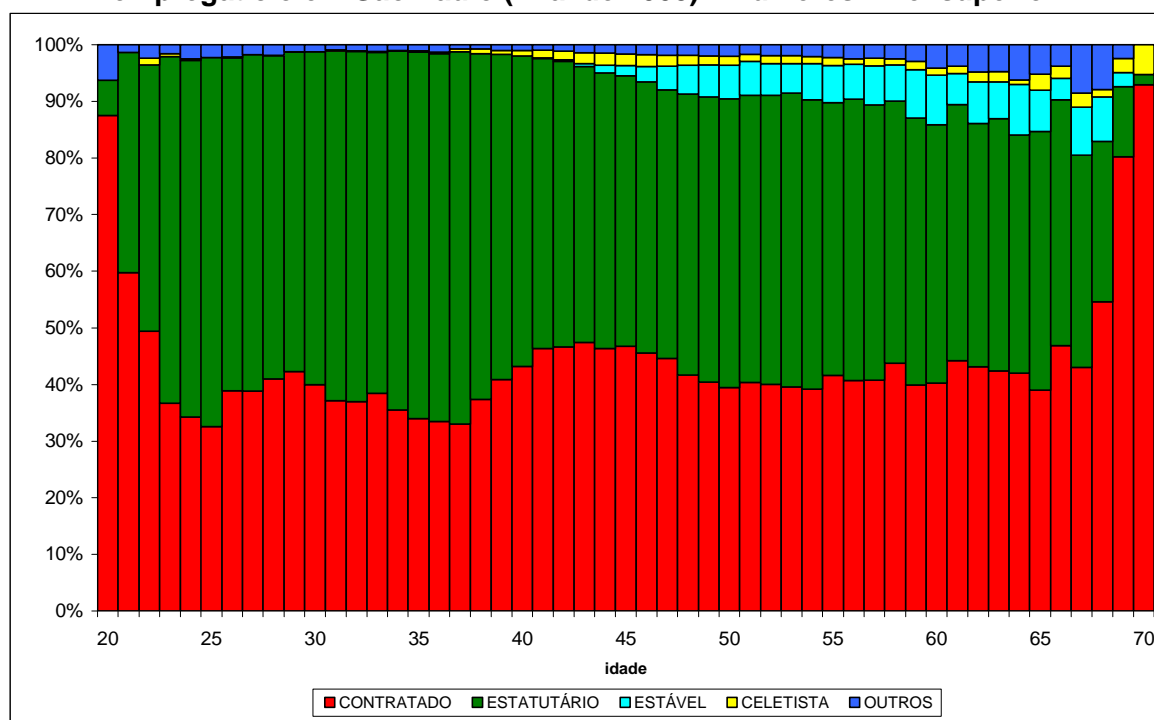
Fonte: PRODESP.

**Gráfico 49 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - mulheres nível médio**



Fonte: PRODESP.

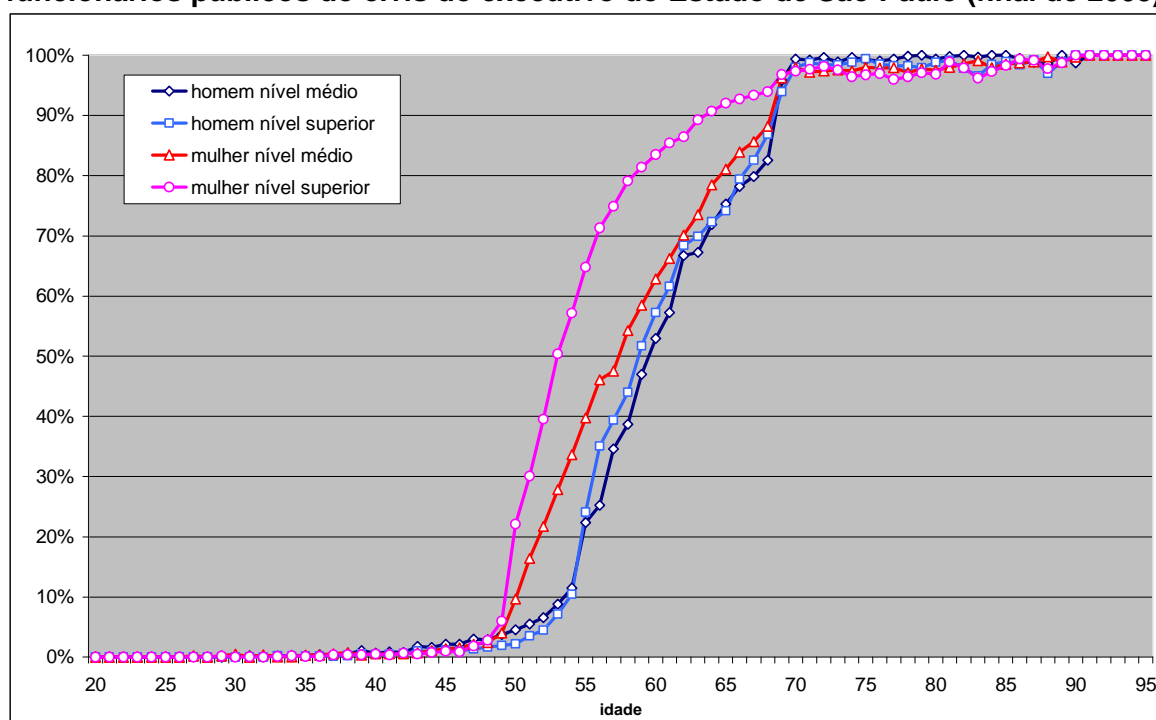
**Gráfico 50 - Distribuição relativa dos servidores ativos por idade e vínculo empregatício em São Paulo (final de 2005) - mulheres nível superior**



Fonte: PRODESP.

O gráfico 51 apresenta a distribuição percentual de aposentados, por idade, sexo e nível de escolaridade. Percebe-se que o aumento do percentual de aposentados por idade se dá antes para as mulheres, quando comparado aos homens, como já era de se esperar em função das elegibilidades vigentes, notadamente para as mulheres de nível superior. Esse fato reforça mais uma vez a idéia de uma maior rotatividade feminina comparada à masculina, pois as mulheres terão relativamente um grupo menor de pessoas com possibilidade de *turnover* (visto que uma vez aposentado o servidor, a probabilidade de *turnover* é igual a zero), e como para as mulheres já foi identificada uma maior rotatividade, esse fator tem influência ainda mais forte no cálculo de sua mortalidade.

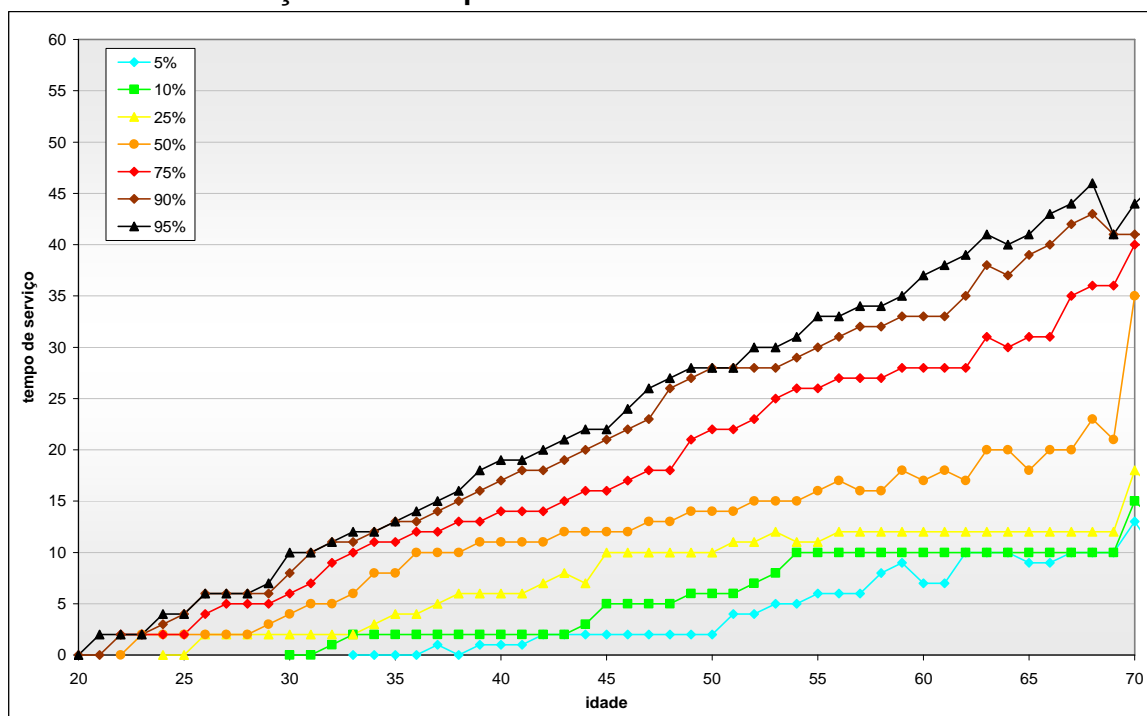
**Gráfico 51 - Percentual de aposentados, por idade, sexo e nível de escolaridade - funcionários públicos do civis do executivo do Estado de São Paulo (final de 2005)**



Fonte: PRODESP.

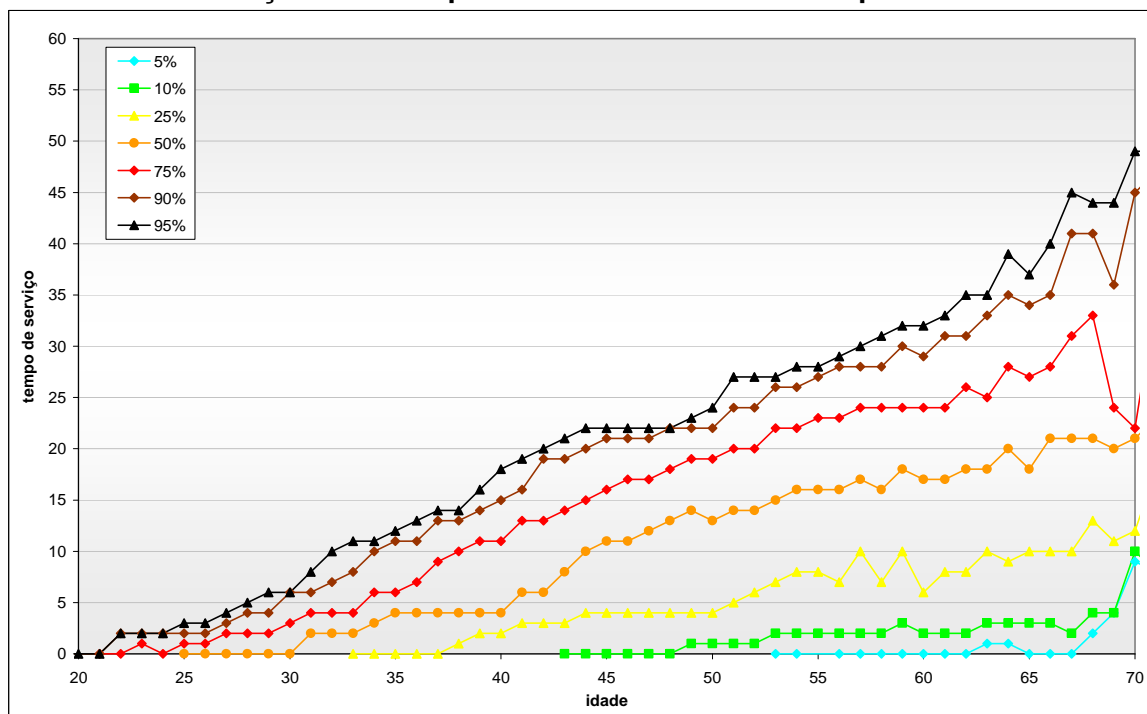
O gráfico 52, o gráfico 53, o gráfico 54 e o gráfico 55 apresentam respectivamente para homens de nível médio, homens de nível superior, mulheres de nível médio e mulheres de nível superior os percentis de 5%, 10%, 25%, 50%, 75%, 90% e 95% da distribuição do tempo de serviço no último cargo como função da idade para os servidores ativos em dezembro de 2005. Observando estes gráficos, percebe-se a existência de platôs em determinados grupos de idade, no caso feminino, para alguns dos percentis selecionados mais baixos, dentre os quais se destaca o percentil de 50%. Os platôs observados no percentil de 50%, entre as idades de 38 a 61 anos, para as mulheres de nível médio e entre as idades de 33 a 39 e 44 a 61 anos, para as mulheres de nível superior, reforçam a já identificada maior rotatividade feminina, pois para amplos intervalos etários têm-se indivíduos com tempos de serviço no último cargo, iguais. Este fenômeno não se evidencia para a população masculina.

**Gráfico 52 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - homens nível médio**



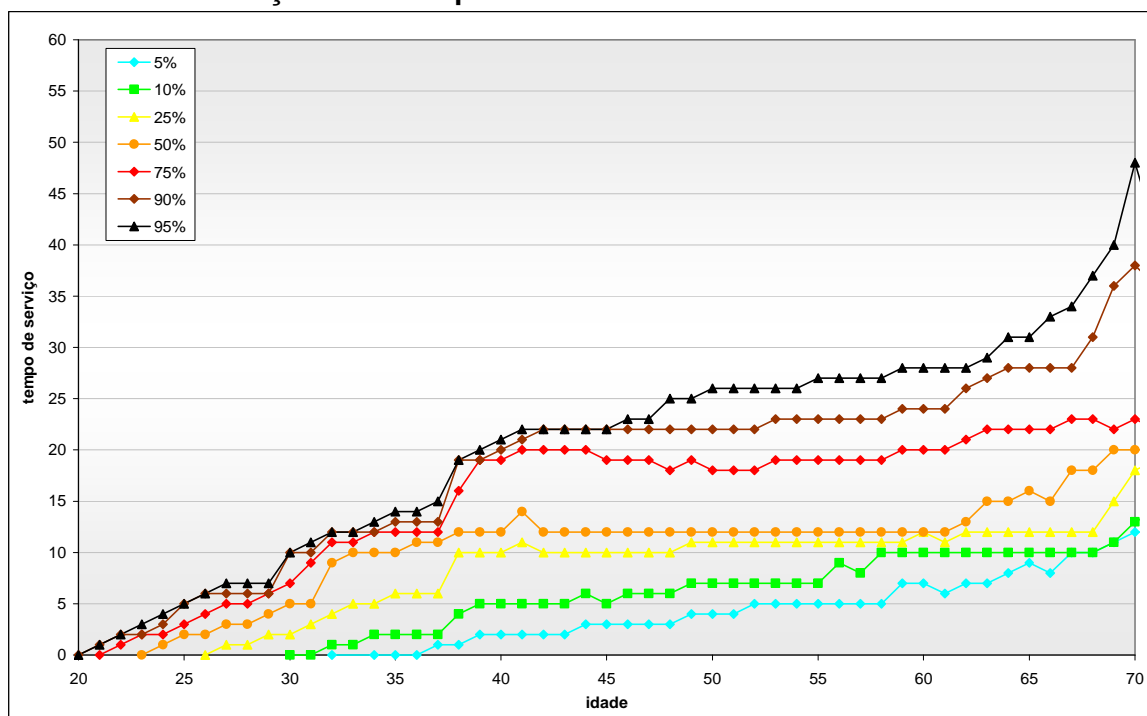
Fonte: PRODESP.

**Gráfico 53 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - homens nível superior**



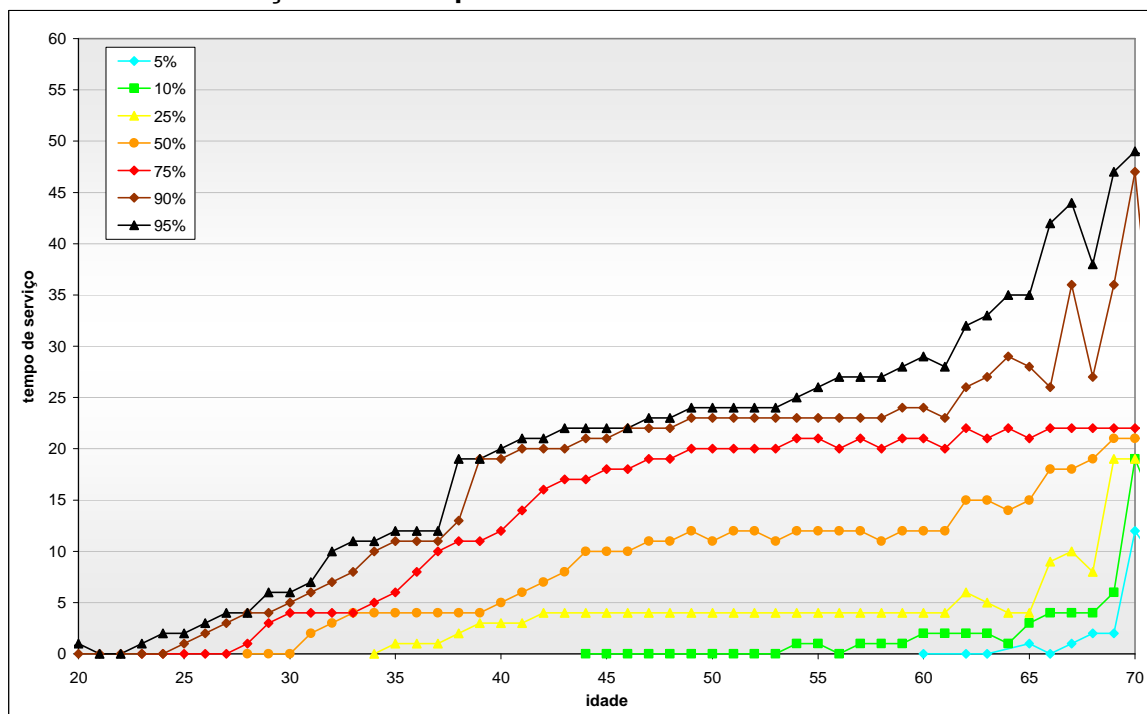
Fonte: PRODESP.

**Gráfico 54 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - mulheres nível médio**



Fonte: PRODESP.

**Gráfico 55 - Percentis selecionados de tempo de serviço no último cargo como função da idade para ativos - mulheres nível médio**



Fonte: PRODESP.



## **CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

Conforme citado no início deste trabalho, a construção das Tábuas de Mortalidade baseadas na experiência dos servidores públicos do Estado de São Paulo é uma tentativa de contribuir para o avanço da Previdência Social, um dos maiores benefícios oferecidos pelos Governos das esferas federal, estadual e municipal, a todos os servidores públicos. A população de funcionários públicos do Estado de São Paulo apresenta uma combinação de tamanho absoluto e abrangência história que permite um ajuste direto da sua experiência de mortalidade.

Em função das características específicas dos Regimes Próprios de Previdência Social, o cálculo atuarial deveria obrigatoriamente ser realizado com uma tábua de mortalidade que efetivamente refletisse as características da população em questão, pois através do mesmo serão determinados os verdadeiros montantes de recursos a serem capitalizados ao longo dos anos para o pagamento dos compromissos atuais e futuros do sistema, visto que esses fluxos de pagamentos estão intrinsecamente relacionados com a expectativa de sobrevivência de cada um de seus segurados e beneficiários.

Ratifica-se a certeza de que para a realização de um trabalho de construção de famílias modelo de tábuas de mortalidade para servidores públicos, o ideal seria obter as experiências de todas as 27 unidades da federação que deveriam, em princípio, apresentar uma gama ampla de níveis de mortalidade considerando-se a diversidade sócio-econômica do país. Obter-se-ia também um maior volume de informações em todas as idades, aumentando a significância estatística em todas as faixas etárias. Com isso, a pretensão não é esgotar o assunto nesse trabalho específico, mas sim, através da experiência de mortalidade dos funcionários públicos do Governo do Estado de São Paulo, ensaiar a construção de uma tábua de mortalidade de maior abrangência e aplicabilidade.

Neste trabalho optou-se por fazer um ajuste para as taxas de mortalidade diretamente das informações disponíveis, lembrando que as taxas estimadas para a

população de homens, mulheres e para ambos os sexos referem-se ao período 1990/2005 e só puderam ser estimadas para a população de 20 a 95 anos, pelas razões previamente citadas. Os  $q_x$  calculados para as tábuas ajustadas de homens, mulheres e ambos os sexos combinados, batizadas de RPPSP-98H, RPPSP98-M e RPPSP98-A, respectivamente, estão disponibilizados no Anexo A, juntamente com seus respectivos intervalos de 95% de confiança. A tábua RPPSP-98H apresentou uma expectativa de sobrevida aos 20 anos de 56,1 anos, enquanto que a tábua RPPSP-98M apresentou uma expectativa de sobrevida aos 20 anos de 61,5 anos e a RPPSP-98A apresentou uma expectativa de sobrevida aos 20 anos de 59,2 anos. O Anexo B apresenta as principais funções calculadas para as três tábuas de mortalidade ajustadas, incluindo a expectativa de sobrevida para as idades variando de 20 a 95 anos.

Pelas tabelas e gráficos comparativos apresentados no item 5.1.1, concluiu-se que a tábua de mortalidade AT-49 (*male*), que baliza os cálculos atuariais dos RPPS's, não seria a mais adequada às simulações dos gastos com os compromissos atuais e futuros do Regime Próprio de Previdência do Estado de São Paulo.

Em linhas gerais, o uso da AT-49 (*male*) para o cálculo dos fluxos de pagamentos atuais e futuros dos servidores do Estado de São Paulo vai superestimar a mortalidade, conseqüentemente subestimando seus gastos, podendo gerar desequilíbrios atuais e futuros em seu plano de benefícios oferecido. Lembrando os principais pontos do comparativo entre as tábuas ajustadas com a AT-49 (*male*):

- **Para os homens:** As taxas da AT-49 (*male*) só ficam dentro do intervalo de confiança da tábua masculina ajustada para as idades de 20 à 23 anos (onde o intervalo de confiança é grande devido a escassez de dados) e para as idades de 37 à 43 anos. Entre as idades de 24 à 36 anos as taxas da AT-49 (*male*) estão abaixo do limite inferior do intervalo de confiança (em média estão 7,0% abaixo), a partir da idade de 44 anos (inclusive) as taxas da AT-49 (*male*) ficam acima do limite superior do intervalo de confiança (em média estão 16,3% acima) das taxas ajustadas. O problema mais grave para o sistema previdenciário está

justamente para essas idades maiores ou iguais a 44 anos, onde neste caso, os cálculos atuariais serão realizados prevendo uma menor sobrevivência dos aposentados e pensionistas, o que na realidade não deve ocorrer. Aliado a este fato, será previsto que os participantes ativos com idades de 24 até 36 anos morrerão com uma probabilidade menor do que ela realmente acontece na prática, existindo uma subestimação da probabilidade de geração de pensionistas de funcionários ativos, ainda que a geração das pensões por questões biométricas dependa também dos padrões de nupcialidade e de parturição. Para as idades de 20 a 35 anos, ou seja, os adultos jovens, a tábua AT-49 (*male*) apresenta uma grande defasagem quando comparada com os dados observados na população masculina. Essa considerável diferença pode ser atribuída provavelmente à mortalidade por causas externas, principalmente por acidentes de trânsito e/ou homicídios.

- **Para as mulheres:** neste caso nota-se que a tábua AT-49 (*male*) superestima a mortalidade da população feminina dos 33 aos 93 anos, o que tipicamente subestima os gastos com as aposentadorias atuais e futuras.
- **Para ambos os sexos:** este caso é o que normalmente ocorre na prática quando da realização do cálculo atuarial. Nesta situação nota-se que a tábua AT-49 (*male*) superestima a mortalidade da população de ambos os sexos a partir da idade de 35 anos, o que como citado anteriormente acaba subestimando os gastos com as aposentadorias atuais e futuras, podendo causar desequilíbrios no sistema previdenciário. A AT-49 (*male*) só fica dentro do intervalo de confiança das taxas ajustadas para as duas primeiras idades (20 e 21 anos) e no intervalo de 28 até 35 anos.

Uma consideração importante que deve ser feita diz respeito ao *mix* de homens e mulheres na população em risco no final do ano de 2005. Os resultados para ambos os sexos carregam consigo a razão de sexo de 0,75 homens/mulher, ou seja, a taxa ponderada para ambos os sexos tem uma influência maior da população feminina do que da masculina, o que tende a geração de um viés no cálculo atuarial, quando o mesmo é realizado com a tábua AT-49 (*male*). Outro fato importante diz respeito também ao *mix* de nível de escolaridade na população. A demanda pelo

funcionalismo público qualificado tem aumentado progressivamente ao longo dos anos e a tendência é de que exista cada vez mais uma maior proporção de vagas de empregos públicos para pessoas com nível superior. Na prática, como já citado, as curvas de mortalidade ajustadas por sexo tendem a ficar cada vez mais próximas das curvas de mortalidade ajustadas por sexo e nível superior.

Nesse trabalho utilizou-se também uma variante do modelo de Lee-Carter (1992) proposta por Beltrão e Sugahara (2007), para avaliar-se a taxa de variação da mortalidade ao longo dos anos de estudo (1990-2005). Diferentemente dos resultados obtidos por Beltrão e Sugahara (2007), que aplicaram esse modelo aos dados de mortalidade dos funcionários públicos federais e observaram nos resultados uma queda nas taxas de mortalidade para todas as idades de 20-90 anos e para cada um dos quatro grupos (dois de sexo e dois de escolaridade), nesse trabalho o resultado de queda da mortalidade em todas as idades foi encontrado apenas para os homens, principalmente os de nível superior. A hipótese levantada pelos autores para o que ocorreu no funcionalismo público federal é a já citada seleção positiva existente nos concursos públicos federais, em que apenas os indivíduos com maior tempo para o estudo, de melhor nível sócio-econômico e que apresentam intrinsecamente uma menor mortalidade, conseguem ser aprovados.

Com relação aos funcionários públicos de São Paulo ocorre o oposto, ou seja, uma seleção negativa. Com relação às mulheres, independente do nível de escolaridade, observa-se um aumento das taxas de mortalidade até, em média, a idade de 55 anos. Como o Estado de São Paulo não promove concursos públicos para o preenchimento de vagas para docentes há anos, esses indivíduos acabam sendo contratados em um precário esquema de trabalho no qual não têm nenhuma garantia de que continuarão trabalhando por prazos maiores do que os determinados inicialmente. A base de dados utilizada nesse trabalho apresentou um grande percentual relativo de mulheres nesta situação, conforme disponibilizado no Capítulo 5. Chega-se então à conclusão de que, neste caso, trabalhou-se com pessoas distintas, que podem ou não estarem presentes na base de dados em um ano posterior (caso haja a renovação de seu contrato) que pelo fato de não conseguirem uma oportunidade melhor de emprego, sujeitam-se a essas precárias condições de trabalho. Essas pessoas por não possuírem estabilidade profissional,

não possuem as mesmas características dos funcionários públicos federais e apresentam uma maior mortalidade, principalmente nas idades mais jovens. Como foi apresentado também, essas mulheres possuem um *turnover* muito maior do que os homens, ratificado pela análise da distribuição percentual de aposentados por idade, em que se tem relativamente um percentual menor de mulheres com possibilidade de rotatividade por idade, visto que as mesmas aposentar-se-ão mais cedo, em função das elegibilidades vigentes.

Por fim, dentro da magnitude e da importância da Previdência Social na vida das pessoas, destaca-se a necessidade de uma adequação da legislação relativa aos Regimes Próprios de Previdência Social. O ideal é que essa legislação contemple a possibilidade de que as experiências próprias de mortalidade dos funcionários públicos estaduais possam ser incorporadas aos modelos atuariais que simulam seus compromissos, de forma a não subestimar ou mesmo superestimar os gastos atuais e futuros com o pagamento das aposentadorias e pensões de seus participantes. Paralelamente a isso, um contínuo estudo acerca da variação dessas taxas de mortalidade da população em questão deveria ser realizado, possibilitando a análise quanto às possíveis tendências futuras, objetivando a sonhada perenização do Equilíbrio Financeiro e Atuarial dos Sistemas Previdenciários Públicos.

### Referências Bibliográficas

1. **ALBUQUERQUE, Fernando Roberto P. C. e SENNA, Janaína Reis Xavier.** “Tábuas de Mortalidade por sexo e grupos de idade – Grandes Regiões e Unidades da Federação - 1980, 1991 e 2000” – Rio de Janeiro: IBGE – Coordenação de População e Indicadores Sociais, 2005.
2. **BELTRÃO, Kaizô Iwakami; SUGAHARA, Sonoe.** “*Differential Changes in Brazilian Public Servants’ Survival Rates*” – Trabalho apresentado na 3ª Conferência Brasileira de Modelagem Estatística em Seguros e Finanças – Maresias/SP – março de 2007.
3. \_\_\_\_\_. “Tábuas de Mortalidade: Um guia para os conceitos básicos”. Mimeo, documento desenvolvido pelos autores, 2002.
4. \_\_\_\_\_. “Tábua de mortalidade para os funcionários públicos civis federais do poder executivo por sexo e escolaridade: comparação com tábuas do mercado” - Rio de Janeiro: Escola Nacional de Ciências Estatísticas, 2002. Disponível em: <  
[http://www.ence.ibge.gov.br/publicacoes/textos\\_para\\_discussao/textos/texto\\_3.pdf](http://www.ence.ibge.gov.br/publicacoes/textos_para_discussao/textos/texto_3.pdf)>. Acesso em: 06/12/2007.
5. \_\_\_\_\_. “Estimativas de mortalidade para a população coberta pelos seguros privados.” Texto para Discussão 868, IPEA, Rio de Janeiro, março de 2002. 2002a Disponível em: <  
[http://www.ipea.gov.br/pub/td/2002/td\\_0868.pdf](http://www.ipea.gov.br/pub/td/2002/td_0868.pdf)>. Acesso em: 06/12/2007.
6. \_\_\_\_\_. “Taxas de Mortalidade no Setor de Seguros 1998-2000: Estimativas e Comparações com Tábuas de Mercado” - Rio de Janeiro: Fundação Escola Nacional de Seguros, 2005.
7. **BELTRÃO, Kaizô Iwakami; SUGAHARA, Sonoe, SILVA, Luciano Gonçalves de Castro e.** “FIPECAFI. Um estudo sobre a mortalidade da população da CTEEP e da fundação CESP”, Mimeo, relatório apresentado a CTEEP, fevereiro de 2006.
8. **BELTRÃO, Kaizô Iwakami; SOBRAL, Ana Paula B.; LEAL, André Amaral C. L; CONCEIÇÃO, Maria Cristina G.** “Mortalidade por sexo e idade dos funcionários do Banco do Brasil, 1940-1990”, RT 02/95. Rio de Janeiro, ENCE/IBGE, setembro de 1995.
9. **BENNETT, Neil G; HORIUCHI, Shiro.** “*Estimating the completeness of death registration in closed populations: current items.*” *Population Index*, Princeton, NJ, USA - vol. 47, pp. 207-222, 1981.

10. **BOOTH, Heather, HYNDMAN, Rob J., TICKLE, Leonie and JONG, Piet de.** *"Lee-Carter Mortality Forecasting: a Multi- Country Comparison of Variants and Extentions"*, 2006.
11. **BOOTH, Heather, TICKLE, Leonie and SMITH, Len.** *"Evaluation of the Variants of the Lee-Carter Method of Forecasting Mortality: A Multi- Country Comparison"*, 2005.
12. **BOOTH, Philip, CHADBURN, Robert, HABERMAN, Steven, JAMES, Dewi, KHORASANEE, Zaki, PLUMB, Robert H. and RICKAYZEN, Ben.** *"Modern Actuarial Theory and Practice" Second Edition* – Chapman & Hall / CRC, 2005.
13. **BOWERS, Newton L. , GERBER, Hans U. , HICKMAN, James C. , SONES, Donald A. and NESBIT, Cecil J.** *"Actuarial Mathematics"*, First Edition, published by SOA – Society of Actuaries, 1986.
14. **BRASS, William et al.** *"On the Scale of Mortality, Biological aspects of Demography"* (London, 1971)
15. \_\_\_\_\_. *"Methods for Estimating Fertility and Mortality from Limited and Defective Data"* Laboratories for Population Studies, Chapel Hill, North Carolina, 1975.
16. **BUSSAB, Wilton de O. e MORETTIN, Pedro A.** *"Estatística Básica"* – 5ª edição, 2006.
17. **CONDE, Newton Cezar.** *"Tábua de mortalidade destinada a entidades fechadas de previdência privada"* (Dissertação de Mestrado apresentada na PUC-SP, Pós-Graduação em Ciências Contábeis e Atuariais, São Paulo, maio de 1991).
18. **COURBAGE, Youssef, FARGUES, Philippe.** *"A method for deriving mortality estimates from incomplete vital statistics". Populations Studies (Camb) 1979; 33 (1):165-80.*
19. **DAW, R.H.** *"Smallpox and the double decrement table – A piece of Actuarial Pre-History"*, 1979. Disponível em: <http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/library/JIA-106/0299-0318.pdf>. Acesso em: 06/12/2007.
20. **DE MOIVRE, Abraham.** *"Annuities on Lives"*, London, 1725.
21. **Dicionário Aurélio Eletrônico – Século XXI, versão 3.0 de novembro de 1999.**
22. **DOBSON, Annette J.** *"An Introduction to Generalized Linear Models"* Second Edition London; New York: Chapman and Hall, 2002.
23. **EWBANK, D.C., LEON, J.C. e STOTO, M.A.** *"A reducible four-parameter system of model life tables"* Population Studies, v. 37:105-127, London, 1983.

24. **FERREIRA, Weber J.** “Coleção introdução à Ciência Atuarial”, Rio de Janeiro, IRB, 1985, 4v.
25. **FRIAS, Luiz Armando de Medeiros e LEITE, Valéria da Motta** “Estudo comparativo entre os padrões de mortalidade observados no Brasil e nos modelos de mortalidade propostos pelas Nações Unidas” – Encontro Brasileiro de Estudos Populacionais, Rio de Janeiro, 1974.
26. **GOLDSMITH, Theodore C., (2007)** “*The Evolution of Aging*” Second Edition, 2007. Disponível em: <[http://www.azinet.comagingAging\\_Book.pdf](http://www.azinet.comagingAging_Book.pdf)>. Acesso em: 06/12/2007.
27. \_\_\_\_\_. “*Aging Theories and Their Implications for Medicine*”, 2006. Disponível em: <[http://www.azinet.comaginganti-aging\\_medicine.pdf](http://www.azinet.comaginganti-aging_medicine.pdf)>. Acesso em: 06/12/2007.
28. **GOMPERTZ, B.** “*On the Nature of The Function Expressive of the Law of Human Mortality*”, Philosophical Transactions of the Royal Society, Part II, 1825.
29. **GRAUNT, John.** “*Natural and Political Observations made upon Bills of Mortality*”, London, 1662.
30. **HALLEY, Edmond.** “*An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind*”, London, 1693. Disponível em: <<http://www.pierre-marteau.com/editions/1693-mortality.html>>. Acesso em: 06/12/2007.
31. **HELIGMAN, Larry; POLLARD, J. H.** “*The age pattern of mortality*”. In: *Readings in Population Research Methodology*, v2, Chapter 7, pp. 97-104, 1980.
32. **HIGGINS, Tim.** “*Mathematical Models of Mortality*” - paper presented at the Workshop on Mortality Modelling and Forecasting - Australian National University - 13-14 February 2003.
33. **HINDE, Andrew.** “*Demographic Methods*”, London: Arnold, 304 p, 1998.
34. **HIMES, C.L., PRESTON, S.H. and CONDRAN, G.A.** “*A Relacional Model of Mortality at older Ages in Low Mortality Countries,*” *Population Index* 48:269-91, 1994.
35. **IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística** – Tábuas Completas de Mortalidade 2006. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida/2006/default.shtm>>. Acesso em: 06/12/2007
36. **IBGE - Tábuas Completas de Mortalidade.** “Em 2003, expectativa de vida do brasileiro subiu para 71,3 anos”, 2003. Disponível em: ≤



[http://www.ibge.com.br/home/presidencia/noticias/noticia\\_visualiza.php?id\\_noticia=266&id\\_pagina=1](http://www.ibge.com.br/home/presidencia/noticias/noticia_visualiza.php?id_noticia=266&id_pagina=1) >. Acesso em: 06/12/2007.

37. **IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.** “BRASIL, Tábuas - Modelo de Mortalidade e Populações Estáveis” Estudos e Pesquisas, V. 10. IBGE, Rio de Janeiro, 1981. 144 p.
38. **IYER, Subramaniam.** “*Actuarial Mathematics of Social Security Pensions*” - International Labour Office (December 1, 1999).
39. **JORDAN JR, Chester Wallace.** “*Life Contingencies*” - Second Edition - published by SOA – Society of Actuaries, 1975.
40. **KEYFITZ, Nathan, CASWELL, Hal.** “*Applied Mathematical Demography*” Third Edition – Springer, 2005.
41. **LEE, Ronald D. and MILLER, Timothy.** “*Evaluating the performance of Lee&Carter Method for forecasting mortality*”, 2001.
42. **LEE, Ronald D. and CARTER, Lawrence R.** “*Modeling and forecasting U.S. mortality*” - *Journal of the American Statistical Association*, 87, 659-671, 1992.
43. **LEXIS, Wilhem.** “*Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik*” Strasbourg: Trubner, 1875 (Introdução a Teoria da Estatística Demográfica).
44. **LI, Nan. and VAUPEL, James W. (1992)** “*Using the heterogeneity model and the Lee-Carter method to estimate mortality surfaces at old ages*”, 1992.
45. **MACCULLAGH, P., NELDER, J. A.** “*Generalized linear models*”. London: Chapman and Hall, 1983.
46. **MAKEHAM, William. M.** “*On the Law of Mortality and Construction of Annuity Tables*”, *Journal of the Institute of Actuaries*, 8:301 (1860).
47. **MARTINS, Fábio Garrido Leal.** “Metodologia de construção de tábuas biométricas seletas e finais a partir de modelos paramétricos e não-paramétricos” (Dissertação de Mestrado em Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007).
48. **MEDICINE ENCYCLOPÉDIA.** “*The Gompertz Equation and its relationship to mortality*”. Disponível em: <http://medicine.jrank.org/pages/1174/Mortality-Gompertz-Equation-its-relationship-mortality.html> >. Acesso em: 06/12/2007.
49. **MILNE, Joshua,** “*A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances on Lives and Survivorships*”, London, 1815.
50. **MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL** – Demonstrativo dos Resultados da Avaliação Atuarial 2007 de São Paulo. Disponível em:

- [http://www.previdencia.gov.br/sps/app/draa/draa\\_mostra.asp?tipo=2&codigo=10894](http://www.previdencia.gov.br/sps/app/draa/draa_mostra.asp?tipo=2&codigo=10894)>. Acesso em 06/12/2007.
51. **MORTARA, Giorgio.** Tábua de Sobrevivência, Conforme a Mortalidade do Período 1939-41, para o Distrito Federal e o Município de São Paulo. Rio de Janeiro, IBGE, 1944, 200 p.
52. **NAMBOODIRI, Krishnan.** *“A Primer of Population Dynamics”* New York, Plenum Press, 1996.
53. **NEWELL, Colin.** *“Methods and Models in Demography”*, 1988.
54. **OLIVEIRA, Juarez de Castro; ALBUQUERQUE, Fernando Roberto.** “Projeção da População do Brasil, Parte 1, Níveis e Padrões da Mortalidade no Brasil à Luz dos Resultados do Censo 2000”, 2002. Disponível em: [http://www.ibge.gov.br \(em downloads-> estatísticas -> tábuas completas de mortalidade-> textos metodológicos e de análise-> Documento Metodologico Novas Tabuas 2002.zip\)](http://www.ibge.gov.br (em downloads-> estatísticas -> tábuas completas de mortalidade-> textos metodológicos e de análise-> Documento Metodologico Novas Tabuas 2002.zip))>. Acesso em 06/12/2007.
55. **ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DE SAÚDE – OMS.** Classificação estatística internacional de doenças e problemas relacionados à saúde: 10ª revisão: CID-10, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1993. Disponível em <http://www.datasus.gov.br/cid10/webhelp/cid10.htm>>. Acesso em: 06/12/2007.
56. **ORTEGA, Antonio.** *“Tablas de mortalidad”*, Centro Latino Americano de Demografia, San Jose, Costa Rica, 1987.
57. **PAES, Neir Antunes.** “Uso de dois novos modelos de tábuas de vida representativos da mortalidade brasileira, à luz dos resultados preliminares do Censo 1991” - Anais do IX Encontro de Estudos Populacionais, Caxambu, 1994, v.1, p.175-198. Disponível em: <http://www.abep.nepo.unicamp.br/docs/anais/docwd/1994/T94V1A09.doc>>. Acesso em: 06/12/2007.
58. **POLLARD, J. H.** “Bias in Graduated Life Table Functions” In: *Readings in Population Research Methodology*, v2, Chapter 7, pp. 105-107, 1979.
59. **PRESTON, Samuel H., HEUVELINE, Patrick. and GUILLOT, Michel.** *“Demography – Measuring and Modeling Population Processes”*- Blackwell Publishing, 2001.
60. **PRESTON, Samuel; HILL, Kenneth.** *“Estimating the completeness of deaths registration.”* *Population Studies*, 34, nº 2, pp. 349-366, 1980.
61. **PRESTON, Samuel, COALE, Ansley J., TRUSSEL, James and WEINSTEIN, Maxine.** *“Estimating the completeness of reporting of adult deaths in population that are approximately stable”* *Population Studies*, vol.42, No. 2, pp. 179-202, 1980.

62. **RIBEIRO, Elizabeth F.; PIRES, Valéria R. R.** “Construção de tabela de mortalidade: experiência Banco do Brasil” (dissertação apresentada no curso de Pós-Graduação em Atuária, ENCE/IBGE, agosto 2001.)
63. **ROWLAND, Donald T.** “*Demographic Methods and Concepts*” Oxford University Press, 2003.
64. **SCOTT, Elaine A.** “*Simple Defined Benefit Plans: Methods of Actuarial Funding*”, 1989.
65. **SOA – Society of Actuaries.** “*The Complete Tables Database*”. Disponível em: <http://www.soa.org/professional-interests/technology/tech-table-manager.aspx>
66. **SPIEGEL, Murray R., SCHILLER, John J. e SRINIVASAN, R. Alu.** “Teoria e problemas de probabilidade e estatística” 2ª edição – Bookman, 2004 - (Coleção Schaum).
67. **SPURGEON, E. F., “Life contingencies”**, Institute of Actuaries, University Press, Cambridge, England, 1949.
68. **STATISTICS FINLAND – ecourse in Statistics – Module: Demography and Population Statistics, Lesson 2: History of Demography, Topic 2.7 - Peter Süßmilch - “The Godly Order”**. Disponível em: [http://www.stat.fi/tup/verkkokoulu/data/vt/02/07/index\\_en.html](http://www.stat.fi/tup/verkkokoulu/data/vt/02/07/index_en.html)  
**Topic 2.10 – “Alfred Lotka - population mathematician”**. Disponível em: [http://www.stat.fi/tup/verkkokoulu/data/vt/02/10/index\\_en.html](http://www.stat.fi/tup/verkkokoulu/data/vt/02/10/index_en.html)  
 Acesso em: 06/12/2007.
69. **TABEU, Ewa, WILLEKENS, Frans and POPPEL, Frans van,** “Parameterisation as a tool in analysing age, period and cohort effects on mortality: A case study of the Netherlands” in G. Wunsch et al (eds), *The Life Table – Modelling Survival and Death*, 141-169 – *European Studies of Population*, 2002.
70. **UNITED NATIONS.** “*Readings in Population Research Methodology: Mortality Research (vol 2)*”, 1993.
71. \_\_\_\_\_. “*Manual X – Indirect Techniques for Demographic Estimation*” - New York; 1983. (Population Studies, No 81). Disponível em: [http://www.un.org/esa/population/publications/Manual\\_X/Manual\\_X.htm](http://www.un.org/esa/population/publications/Manual_X/Manual_X.htm). Acesso em: 06/12/2007.
72. \_\_\_\_\_. “*Model life tables for developing countries*” New York; 1982. (Population Studies, No 77). Disponível em: [http://www.un.org/esa/population/publications/Model\\_Life\\_Tables/Model\\_Life\\_Tables.htm](http://www.un.org/esa/population/publications/Model_Life_Tables/Model_Life_Tables.htm). Acesso em: 06/12/2007.
73. **WACHTER, Kenneth W. e FINCH, Caleb E., Editors.** “*Between Zeus and the Salmon - The Biodemography of Longevity*”. Committee on Population -

Commission on Behavioral and Social Sciences and Education. National Research Council, National Academy Press, Washington, D.C., 1997.

74. **WEEKS, John R.** *"Population - An Introduction to Concepts and Issues" Ninth Edition* – 2005.
75. **WEINSTEIN, J. and PILLAI, V. K.** *"Demography – The Science of Population"*, 2001.
76. **WINKLEVOSS, Howard E.** *"Pension mathematics with numerical illustrations" Second edition. Pension Research Council of the Wharton School of the University of Pennsylvania*, 1993.
77. **TULJAPURKAR, Shripad and BOET, Carl.** *"Mortality Change and Forecasting: How Much and How Little do We Know?" North American Actuarial Journal*, volume 2, number 4, 1998.
78. **YAUKEY, David, ANDERTON, Douglas L. and LUNDQUIST, Jennifer Hickes.** *"Demography – The Study of Human Population"* third edition, 2007.
79. **ZABA, B.** *"The four-parameter logit life table system"*. *Population Studies*, v. 33(1):79-100. London, 1979.

### **Referências Legais**

1. **BRASIL, Constituição da República Federativa do Brasil**, de 05 de dezembro de 1988. Disponível em: <<http://www.senado.gov.br/sf/legislacao/>>.
2. **BRASIL, Emenda Constitucional nº 47**, de 05 de julho de 2005. Altera os arts. 37, 40, 195 e 201 da Constituição Federal, para dispor sobre a previdência social, e dá outras providências. Disponível em: <<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/30/2005/47.htm>>.
3. **BRASIL, Emenda Constitucional nº 41**, de 19 de dezembro de 2003. Modifica os arts. 37, 40, 42, 48, 96, 149 e 201 da Constituição Federal, revoga o inciso IX do § 3o do art. 142 da Constituição Federal e dispositivos da Emenda Constitucional nº 20, de 15 de dezembro de 1998, e dá outras providências. Disponível em: <<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/30/2003/41.htm>>.
4. **BRASIL, Emenda Constitucional nº 20**, de 15 de dezembro de 1998. Modifica o sistema de previdência social, estabelece normas de transição e dá outras providências. Disponível em: <<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/30/1998/20.htm>>.
5. **BRASIL, Lei Complementar nº 101**, de 04 de maio de 2000. Estabelece normas de finanças públicas voltadas para a responsabilidade na gestão fiscal e dá outras providências. Disponível em: <<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/43/2000/101.htm>>.
6. **BRASIL, Lei nº 10.887**, de 18 de junho de 2004. Dispõe sobre a aplicação de disposições da Emenda Constitucional nº 41, de 19 de dezembro de 2003, altera dispositivos das Leis nos 9.717, de 27 de novembro de 1998, 8.213, de 24 de julho de 1991, 9.532, de 10 de dezembro de 1997, e dá outras providências. Disponível em: <<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/42/2004/10887.htm>>.
7. **BRASIL, Lei nº 9.876**, de 26 de novembro de 1999. Dispõe sobre a contribuição previdenciária do contribuinte individual, o cálculo do benefício, altera dispositivos das Leis nos 8.212 e 8.213, ambas de 24 de julho de 1991, e dá outras providências. Disponível em: <<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/42/1999/9876.htm>>.

8. **BRASIL, Lei nº 9.796**, de 5 de maio de 1999. Dispõe sobre a compensação financeira entre o Regime Geral de Previdência Social e os regimes de previdência dos servidores da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, nos casos de contagem recíproca de tempo de contribuição para efeito de aposentadoria, e dá outras providências. Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/42/1999/9796.htm>.
9. **BRASIL, Lei nº 9.717**, de 27 de novembro de 1998 (alterada pela Lei nº 10.887, de 18 de junho de 2004). Dispõe sobre regras gerais para organização e o funcionamento dos regimes próprios de previdência social dos servidores públicos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, dos militares dos Estados e do Distrito Federal e dá outras providências. Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/42/1998/9717.htm>.
10. **BRASIL, Decreto nº 3.788**, de 11 de abril de 2001. Institui, no âmbito da Administração Pública Federal, o Certificado de Regularidade Previdenciária – CRP. Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/23/2001/3788.htm>.
11. **BRASIL, Decreto nº 3.266** de 29 de novembro de 1999. Atribui competência e fixa a periodicidade para a publicação da tábua completa de mortalidade de que trata o § 8º do art. 29 da Lei nº 8.213, de 24 de julho de 1991, com a redação dada pela Lei nº 9.876, de 26 de novembro de 1999.  
Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/23/1999/3266.htm>.
12. **BRASIL, Decreto nº 3.112**, de 06 de julho de 1999. Dispõe sobre a regulamentação da Lei nº 9.796, de 5 de maio de 1999, que versa sobre compensação financeira entre o Regime Geral de Previdência Social e os regimes próprios de previdência dos servidores da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, na contagem recíproca de tempo de contribuição para efeito de aposentadoria, e dá outras providências. Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/23/1999/3112.htm>.
13. **BRASIL, Portaria MPS nº 142**, de 11 de abril de 2007. Reajusta os benefícios mantidos pela previdência social, a partir de 1º de abril de 2007,

em três inteiros e trinta centésimos por cento. Disponível em:

<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/66/MPS/2007/142.htm>.

- 14. BRASIL, Portaria MPS nº 204**, de 10 de julho de 2008. Dispõe sobre a emissão do Certificado de Regularidade Previdenciária – CRP e dá outras providências. Disponível em:

<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/66/MPS/2008/204.htm>.

- 15. BRASIL, Portaria MPS nº 6.209**, de 16 de dezembro de 1999. Dispõe sobre a regulamentação da Lei nº 9.796. Disponível em:

<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/66/MPAS/1999/6209.htm>.

- 16. BRASIL, Portaria MPS nº 4.992**, de 05 de fevereiro de 1999 (alterada pelas Portarias nº 7.796, de 28 de agosto de 2000, nº 3.385, de 14 de setembro de 2001 e nº 1.317, de 17 de setembro de 2003.) Regulamenta a Lei nº 9.717.

Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/66/MPAS/1999/4992.htm>.

- 17. BRASIL, Portaria MPS nº 77**, de 11 de março de 2008. Dispõe sobre o reajuste dos benefícios pagos pelo Instituto Nacional do Seguro Social - INSS e dos demais valores constantes do Regulamento da Previdência Social - RPS. Disponível em:

<http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/65/MF-MPS/2008/77.htm>.

- 18. BRASIL, Resolução BACEN nº 3.506**, de 26 de outubro de 2007. Dispõe sobre as aplicações dos recursos dos regimes próprios de previdência social instituídos pela União, pelos Estados, pelo Distrito Federal ou por Municípios.

Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/72/BACEN/2007/3506.htm>.

**Anexo A – Tábuas de mortalidade RPPSP-98 ajustadas pelo modelo de Heligman & Pollard e seus respectivos intervalos de 95% de confiança**

A seguir apresenta-se as probabilidades de morte calculadas e seus intervalos de confiança de 95%, para homens, mulheres e ambos os sexos:

**Tabela A 1 -  $q_x$  e respectivos intervalos de confiança para as tábuas RPPSP-98**

IDADE	HOMENS			MULHERES			AMBOS OS SEXOS		
	$q_x$	IC-	IC+	$q_x$	IC-	IC+	$q_x$	IC-	IC+
20	0,001036	-0,000018	0,002090	0,000773	0,000358	0,001187	0,000894	0,000489	0,001300
21	0,001053	0,000395	0,001712	0,000782	0,000480	0,001084	0,000906	0,000620	0,001193
22	0,001073	0,000584	0,001562	0,000792	0,000536	0,001049	0,000919	0,000683	0,001155
23	0,001094	0,000697	0,001492	0,000804	0,000572	0,001036	0,000934	0,000727	0,001140
24	0,001118	0,000777	0,001459	0,000817	0,000603	0,001030	0,000950	0,000764	0,001136
25	0,001145	0,000842	0,001447	0,000831	0,000630	0,001031	0,000968	0,000797	0,001139
26	0,001174	0,000899	0,001449	0,000846	0,000656	0,001036	0,000988	0,000829	0,001147
27	0,001207	0,000952	0,001462	0,000864	0,000682	0,001045	0,001010	0,000860	0,001160
28	0,001243	0,001003	0,001483	0,000883	0,000708	0,001058	0,001034	0,000891	0,001178
29	0,001283	0,001054	0,001513	0,000904	0,000734	0,001074	0,001061	0,000923	0,001200
30	0,001328	0,001106	0,001550	0,000928	0,000762	0,001094	0,001092	0,000957	0,001226
31	0,001378	0,001160	0,001595	0,000954	0,000790	0,001117	0,001125	0,000993	0,001257
32	0,001433	0,001218	0,001649	0,000983	0,000821	0,001144	0,001162	0,001032	0,001292
33	0,001494	0,001279	0,001710	0,001015	0,000854	0,001175	0,001203	0,001073	0,001333
34	0,001563	0,001346	0,001779	0,001050	0,000890	0,001210	0,001249	0,001119	0,001379
35	0,001638	0,001418	0,001858	0,001089	0,000929	0,001250	0,001300	0,001169	0,001430
36	0,001722	0,001497	0,001947	0,001133	0,000972	0,001294	0,001356	0,001224	0,001488
37	0,001815	0,001584	0,002046	0,001181	0,001019	0,001343	0,001418	0,001284	0,001552
38	0,001918	0,001680	0,002157	0,001234	0,001071	0,001397	0,001487	0,001351	0,001624
39	0,002033	0,001785	0,002281	0,001293	0,001128	0,001458	0,001564	0,001425	0,001704
40	0,002161	0,001901	0,002420	0,001359	0,001191	0,001527	0,001650	0,001506	0,001793
41	0,002302	0,002030	0,002575	0,001431	0,001259	0,001604	0,001744	0,001596	0,001893
42	0,002459	0,002171	0,002747	0,001512	0,001334	0,001690	0,001849	0,001695	0,002004
43	0,002633	0,002328	0,002938	0,001601	0,001417	0,001785	0,001966	0,001805	0,002127
44	0,002827	0,002503	0,003150	0,001699	0,001509	0,001890	0,002095	0,001927	0,002264
45	0,003041	0,002697	0,003385	0,001809	0,001611	0,002006	0,002239	0,002063	0,002415
46	0,003279	0,002912	0,003647	0,001930	0,001724	0,002135	0,002398	0,002213	0,002583
47	0,003544	0,003151	0,003936	0,002064	0,001850	0,002278	0,002575	0,002381	0,002770
48	0,003837	0,003416	0,004257	0,002213	0,001989	0,002436	0,002772	0,002567	0,002977
49	0,004162	0,003711	0,004613	0,002377	0,002143	0,002612	0,002990	0,002773	0,003206
50	0,004523	0,004040	0,005006	0,002560	0,002314	0,002806	0,003231	0,003003	0,003460
51	0,004923	0,004405	0,005440	0,002763	0,002504	0,003022	0,003500	0,003257	0,003742
52	0,005367	0,004813	0,005920	0,002987	0,002714	0,003261	0,003798	0,003540	0,004055
53	0,005859	0,005267	0,006451	0,003236	0,002947	0,003526	0,004128	0,003855	0,004401
54	0,006405	0,005772	0,007037	0,003512	0,003204	0,003821	0,004495	0,004204	0,004786
55	0,007009	0,006334	0,007685	0,003819	0,003489	0,004148	0,004902	0,004591	0,005214
56	0,007680	0,006958	0,008401	0,004158	0,003806	0,004511	0,005354	0,005021	0,005687
57	0,008422	0,007651	0,009193	0,004535	0,004156	0,004914	0,005856	0,005499	0,006214



IDADE	HOMENS			MULHERES			AMBOS OS SEXOS		
	$q_x$	IC-	IC+	$q_x$	IC-	IC+	$q_x$	IC-	IC+
58	0,009245	0,008420	0,010070	0,004953	0,004545	0,005361	0,006413	0,006028	0,006798
59	0,010156	0,009274	0,011039	0,005417	0,004976	0,005858	0,007031	0,006617	0,007446
60	0,011165	0,010221	0,012109	0,005932	0,005456	0,006408	0,007718	0,007271	0,008164
61	0,012281	0,011275	0,013287	0,006504	0,005990	0,007017	0,008480	0,008000	0,008960
62	0,013516	0,012444	0,014588	0,007139	0,006585	0,007693	0,009326	0,008810	0,009842
63	0,014882	0,013739	0,016026	0,007844	0,007246	0,008443	0,010265	0,009710	0,010820
64	0,016392	0,015173	0,017612	0,008628	0,007981	0,009275	0,011308	0,010710	0,011906
65	0,018060	0,016759	0,019362	0,009499	0,008799	0,010200	0,012466	0,011822	0,013110
66	0,019903	0,018512	0,021293	0,010469	0,009711	0,011226	0,013752	0,013057	0,014446
67	0,021935	0,020445	0,023425	0,011547	0,010724	0,012370	0,015180	0,014429	0,015931
68	0,024177	0,022577	0,025778	0,012747	0,011852	0,013643	0,016766	0,015952	0,017580
69	0,026648	0,024927	0,028370	0,014085	0,013107	0,015062	0,018528	0,017644	0,019411
70	0,029369	0,027514	0,031223	0,015575	0,014507	0,016643	0,020485	0,019524	0,021445
71	0,032362	0,030356	0,034368	0,017237	0,016064	0,018410	0,022659	0,021609	0,023708
72	0,035652	0,033473	0,037830	0,019093	0,017803	0,020382	0,025075	0,023925	0,026224
73	0,039263	0,036891	0,041635	0,021165	0,019748	0,022583	0,027759	0,026500	0,029019
74	0,043224	0,040637	0,045811	0,023483	0,021919	0,025048	0,030743	0,029359	0,032127
75	0,047561	0,044729	0,050393	0,026079	0,024350	0,027807	0,034060	0,032535	0,035585
76	0,052305	0,049198	0,055412	0,028988	0,027070	0,030905	0,037749	0,036064	0,039434
77	0,057484	0,054057	0,060911	0,032253	0,030117	0,034388	0,041850	0,039980	0,043721
78	0,063130	0,059338	0,066922	0,035923	0,033534	0,038312	0,046413	0,044328	0,048498
79	0,069273	0,065068	0,073478	0,040056	0,037377	0,042735	0,051490	0,049161	0,053819
80	0,075943	0,071272	0,080615	0,044720	0,041696	0,047744	0,057141	0,054527	0,059754
81	0,083170	0,077958	0,088383	0,049994	0,046578	0,053410	0,063432	0,060493	0,066372
82	0,090982	0,085148	0,096816	0,055972	0,052088	0,059856	0,070440	0,067118	0,073762
83	0,099404	0,092871	0,105938	0,062769	0,058345	0,067193	0,078248	0,074488	0,082007
84	0,108459	0,101106	0,115813	0,070520	0,065458	0,075583	0,086952	0,082678	0,091226
85	0,118166	0,109852	0,126480	0,079394	0,073569	0,085218	0,096660	0,091777	0,101543
86	0,128539	0,119109	0,137969	0,089593	0,082853	0,096333	0,107494	0,101891	0,113098
87	0,139585	0,128852	0,150318	0,101374	0,093582	0,109166	0,119593	0,113158	0,126027
88	0,151306	0,138971	0,163642	0,115058	0,105988	0,124129	0,133112	0,125667	0,140558
89	0,163696	0,149316	0,178075	0,131056	0,120463	0,141649	0,148233	0,139556	0,156910
90	0,176739	0,159808	0,193670	0,149901	0,137405	0,162397	0,165158	0,154952	0,175364
91	0,190411	0,170434	0,210388	0,172299	0,157284	0,187314	0,184122	0,171980	0,196265
92	0,204679	0,181399	0,227958	0,199204	0,180839	0,217569	0,205396	0,190869	0,219923
93	0,219499	0,191438	0,247560	0,231940	0,209123	0,254757	0,229289	0,211521	0,247057
94	0,234818	0,200515	0,269122	0,272394	0,243842	0,300947	0,256162	0,234221	0,278103
95	0,250574	0,207697	0,293451	0,323361	0,287635	0,359087	0,286435	0,259101	0,313769

Fonte: PRODESP.

## **Anexo B – Funções calculadas para as tábuas de mortalidade ajustadas**

Uma tábua de mortalidade contém várias funções que são de uso freqüente em diversos problemas ligados à demografia. Neste anexo apresentam-se algumas das principais funções mais utilizadas, calculadas para as probabilidades de morte  $q_x$ , masculinas, femininas e para ambos os sexos da tábua **RPPSP-98**. Vamos considerar também que a tábua utilizada nesse anexo começará com 100.000 vidas no instante inicial, a partir do qual irão morrendo pessoas até o último sobrevivente. Este anexo tem como referências Ortega (1987) e Beltrão e Sugahara (2002, mimeo).

### **a) Número de Sobreviventes ( $\ell_x$ )**

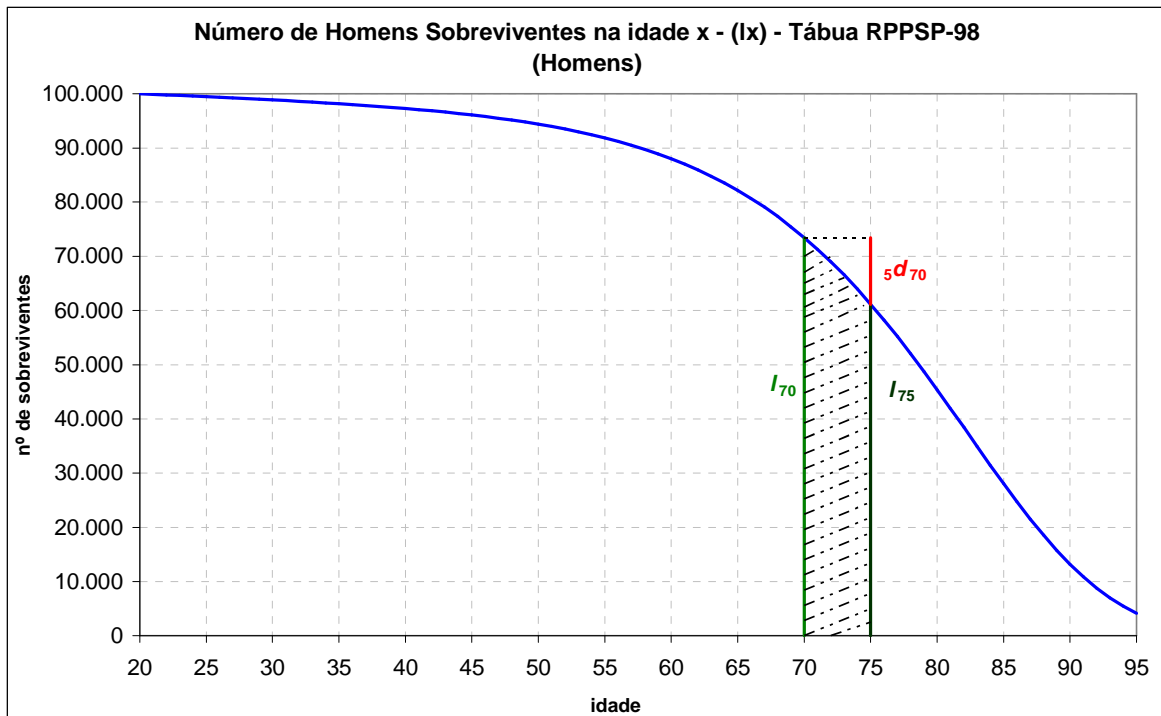
O número de sobreviventes é representado pela nomenclatura  $\ell_x$ , onde o  $x$  representa a idade do indivíduo e o  $\ell$  vem da palavra inglesa “*living*”, que significa vivos. Sempre que daqui para frente falar-se de um indivíduo com idade  $x$  a referência será para uma pessoa com idade exata  $x$ . Com isso o  $\ell_x$  representa o número de indivíduos que chegam com vida à idade exata  $x$ , de uma geração inicial de  $\ell_0$  indivíduos nascidos. O valor para o número de indivíduos  $\ell_0$  normalmente é fixado em 100.000 ou 1.000.000. O  $\ell_0$  é chamado de raiz da tábua de mortalidade. No exemplo apresentado no gráfico b 1 a raiz utilizada foi de 100.000 pessoas.

Uma vez fixada essa raiz, o valor função  $\ell_x$  depende tão somente da idade  $x$ . Todos os outros valores de  $\ell_x$  serão gerados pela diferença entre o número de indivíduos vivos com idade  $x$  e aqueles que morreram entre as idades  $x$  e  $x+n$ , sendo  $\ell_x$  uma função positiva e decrescente.

Designa-se como  $\omega$  (ômega), a idade na qual o número de sobreviventes é igual a zero. Normalmente o  $\omega$  toma valores próximos da idade de 100 anos.

O gráfico b 1 apresenta a função  $\ell_x$  calculada em função dos  ${}_nq_x$  da tábua de mortalidade **RPPSP-98H**. Note que destacou-se os valores de  $\ell_{70}$  e  $\ell_{75}$ .

**Gráfico B 1**



Fonte: PRODESP.

### b) Número de Óbitos entre as idades x e x+n ( ${}_nd_x$ )

A função  ${}_nd_x$  representa o número de mortes ocorridas a uma geração inicial de  $\ell_0$  nascimentos entre as idades x e x+n. Ou seja:

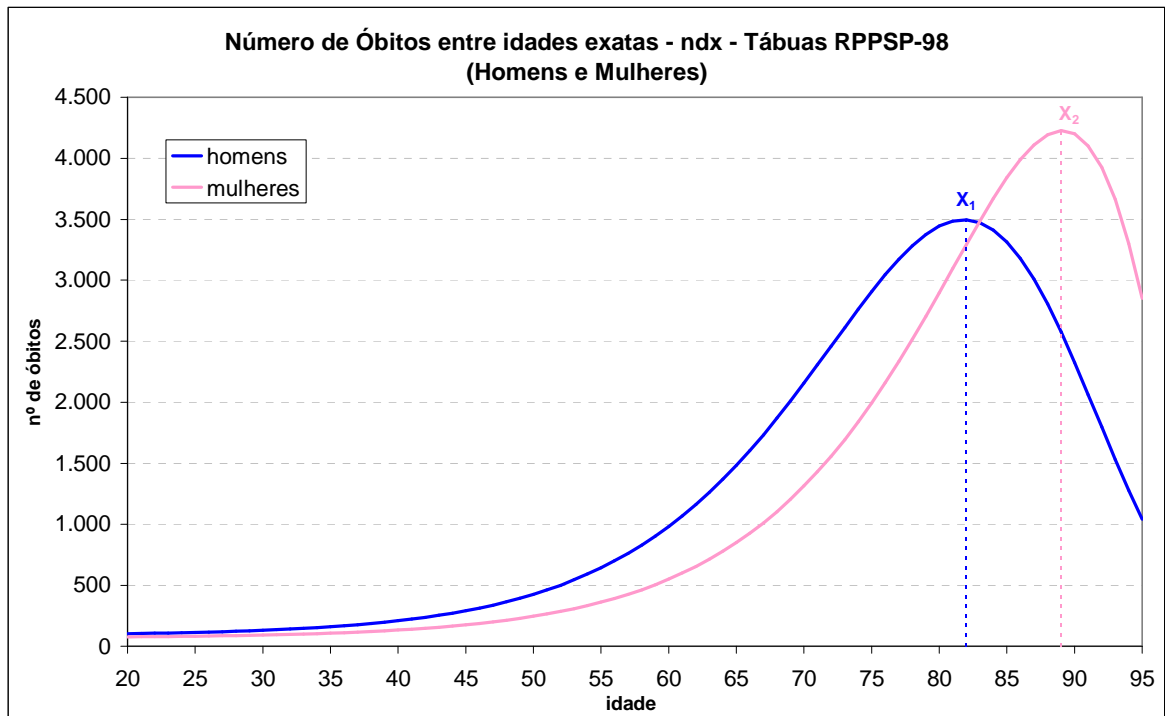
$${}_nd_x = \ell_x - \ell_{x+n}$$

Quando a amplitude  $\underline{n}$  do intervalo é igual a 1 o  ${}_nd_x$  é escrito da seguinte forma:

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

No gráfico b 1 destaca-se o número de mortes ocorridas  ${}_5d_{70}$  entre as idades de 70 e 75 anos, como função de  $\ell_{70}$  e  $\ell_{75}$ . No gráfico b 2 apresenta-se a curva de  ${}_nd_x$  para homens e mulheres em função das probabilidades de morte oriundas da tábua de mortalidade **RPPSP-98H** e **RPPSP-98M**.

**Gráfico B 2**



Fonte: PRODESP.

Das relações de  ${}_n d_x$  e  $d_x$ , pode-se perceber que para qualquer idade exata  $x$ , o número de pessoas  $\ell_x$ , deve ser igual ao somatório das mortes ocorridas em todas as idades maiores ou iguais a  $x$ . Ou seja:

$$\ell_x = \sum_{k=x}^{\omega} d_k, \text{ no caso discreto; e}$$

$$\ell_x = \int_x^{\omega} d_x, \text{ para o caso contínuo.}$$

Note que no gráfico b 2 destaca-se as “modas” para as mortes em idades adultas de homens ( $X_1$ ) e mulheres ( $X_2$ ). Essas idades são conhecidas como idades modais das mortes. Esta idade tende a aumentar à medida que a mortalidade diminui, tomando valores usualmente entre as idades de 65 e 90 anos. No exemplo essa idade é de  $X_1 = 82$  anos para os homens (com  $d_{82} = 3.496$  indivíduos) e de  $X_2 = 89$  anos para as mulheres (com  $d_{89} = 4.225$  indivíduos). A partir dessas idades modais o número de mortes diminui, não em função da queda da mortalidade, mas sim pelo fato de ter-se um número de sobreviventes  $\ell_x$  cada vez mais escasso.

### c) Probabilidade de Morte entre as idades $x$ e $x+n$ ( ${}_nq_x$ )

A função  ${}_nq_x$  representa a probabilidade de um indivíduo com idade exata  $x$  falecer nos próximos  $n$  anos, antes de completar  $x+n$  anos. Como  ${}_nq_x$  é uma probabilidade<sup>79</sup>, seus valores no gráfico variam de 0 a 1. Normalmente calcula-se  ${}_nq_x$  da seguinte forma:

$${}_nq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{{}_nd_x}{\ell_x}$$

Quando a amplitude do intervalo  $n$  é igual a 1, representamos  ${}_nq_x$  de forma simplificada:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x}.$$

Quando se considera a idade inicial  $x=0$  e toma-se uma amplitude de intervalo igual a  $n$ , calcula-se a probabilidade de morte do indivíduo antes do seu  $n$ -ésimo aniversário. Ou seja:

$${}_nq_0 = \frac{\ell_0 - \ell_{x+n}}{\ell_0} = \frac{{}_nd_0}{\ell_0}.$$

No caso particular da idade inicial  $x=0$  e considerando uma amplitude de intervalo  $n=1$  tem-se a taxa de mortalidade infantil  $q_0$ , onde:

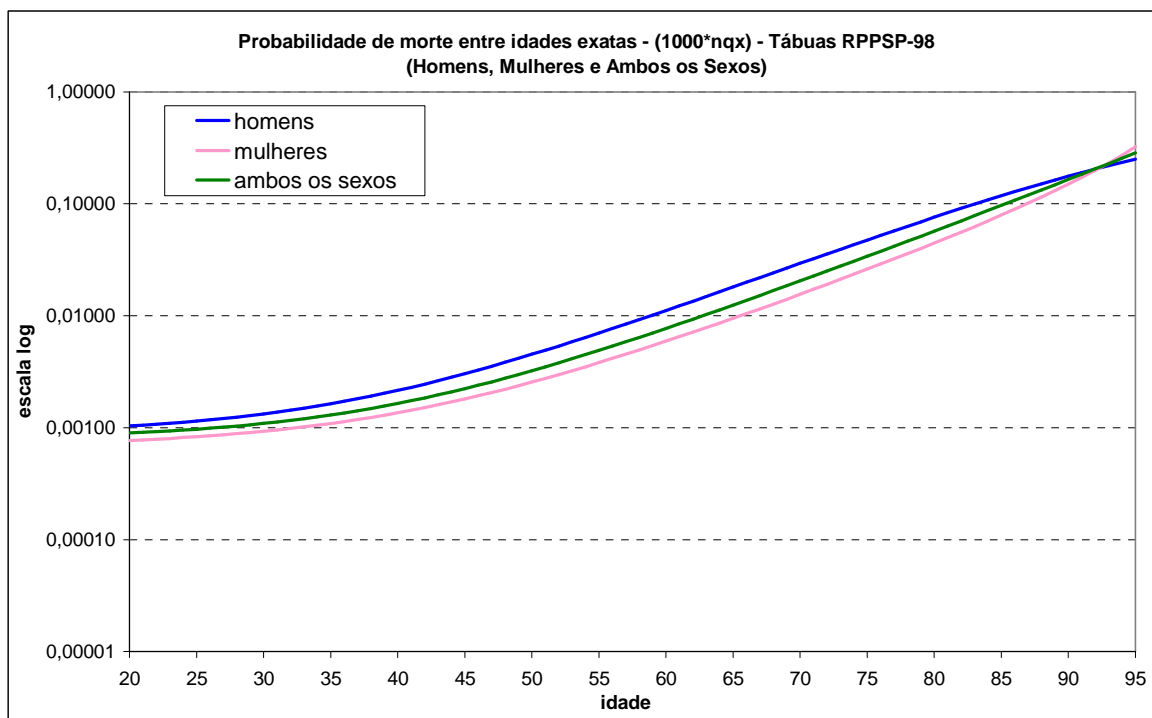
$$q_0 = \frac{\ell_0 - \ell_1}{\ell_0} = \frac{d_1}{\ell_0}.$$

O gráfico b 3 apresenta, em uma escala logarítmica, as probabilidades de morte  ${}_nq_x$  das tábuas **RPPSP-98H**, **RPPSP-98M** e **RPPSP-98A**.

---

<sup>79</sup> Uma relação entre os casos favoráveis ao acontecimento (mortes) e os casos possíveis (pessoas expostas ao risco), onde os casos favoráveis são partes dos possíveis.

**Gráfico B 3**



Fonte: PRODESP.

Pode-se claramente perceber que as taxas de mortalidade das mulheres são mais baixas que as taxas de mortalidade dos homens em todas as idades abaixo dos 92 anos. Observa-se um *crossover* das taxas masculinas e femininas na idade dos 93 anos, mas essa aparência é estatisticamente insignificante, quando se analisam os intervalos de confiança para essas probabilidades. Esse *crossover* provavelmente ocorreu devido à escassez dos dados para indivíduos, tanto do sexo masculino quanto do feminino nas idades acima dos 90 anos, e não porque a mortalidade feminina seja efetivamente maior que a masculina nessas idades.

#### **d) Probabilidade de Sobrevivência entre as idades $x$ e $x+n$ ( ${}_np_x$ )**

A função  ${}_np_x$  representa a probabilidade de um indivíduo com idade  $x$  sobreviver até completar  $x+n$  anos. As funções  ${}_np_x$  e  ${}_nq_x$  são complementares, ou seja, cada indivíduo com idade  $x$  sobrevive ou morre até completar a idade  $x+n$ , portanto a soma dessas probabilidades complementares deve obrigatoriamente ser igual a um.

Ou seja:

$${}_n p_x + {}_n q_x = 1$$

Normalmente calcula-se  ${}_n p_x$  da seguinte forma:

$${}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = 1 - {}_n q_x.$$

Quando a amplitude  $n$  do intervalo é igual a 1 tem-se uma simplificação de  ${}_n p_x$  para:

$$p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = 1 - q_x.$$

Quando se considera a idade  $x=0$ , calcula-se a probabilidade de morte do indivíduo antes do seu  $n$ -ésimo aniversário, ou seja:

$${}_n p_0 = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_0} = 1 - {}_n q_0.$$

Quando a amplitude  $n$  do intervalo é igual a 0, tem-se que:

$$\forall \text{ idade } x, \quad {}_0 p_x = 1$$

Quando a amplitude  $n$  do intervalo é igual a  $\omega-x$ , tem-se que  $\forall$  idade  $x$ :

$${}_{\omega-x} p_x = 0.$$

A função  ${}_n p_x$  possui propriedade cumulativa:

$${}_n p_x * {}_m p_{x+n} = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} * \frac{\ell_{x+n+m}}{\ell_{x+n}} = \frac{\ell_{x+n+m}}{\ell_x} = {}_{n+m} p_x$$

Essa propriedade cumulativa já não ocorre para a função  ${}_n q_x$ , pois:

$$q_0 * q_1 = \frac{d_0}{l_0} * \frac{d_1}{l_1} \neq {}_2 q_0$$

Para o cálculo de  ${}_2q_0$  devemos utilizar as probabilidades de sobrevivência:

$$(1 - q_0) * (1 - q_1) = p_0 * p_1 = {}_2p_0 \Rightarrow {}_2q_0 = 1 - {}_2p_0$$

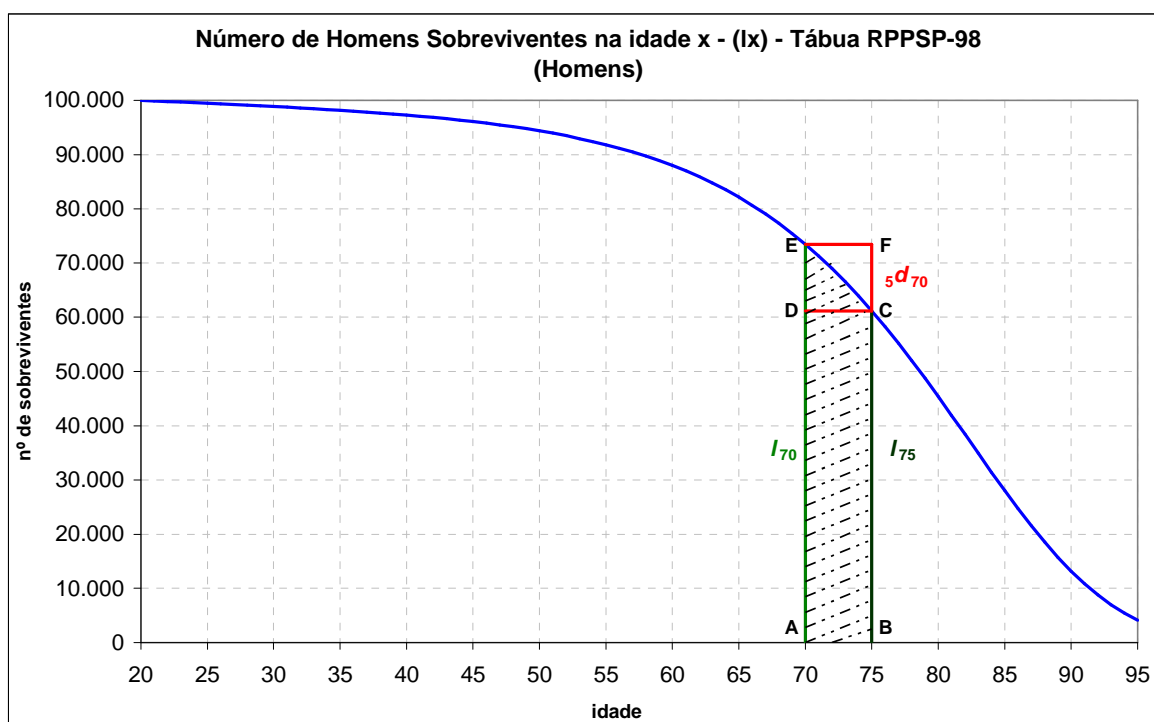
### e) Tempo vivido entre as idades $x$ e $x+n$ ( ${}_nL_x$ )

A função  ${}_nL_x$  representa o número de pessoas-ano vividos pela população com idade exata  $x$  nos  $n$  anos seguintes ao seu aniversário, ou seja, antes de completar  $x+n$  anos. Pode ser calculado a partir de:

$${}_nL_x = \int_x^{x+n} l_a da.$$

Ou seja, a integral da função  $l_x$ , entre quaisquer idades  $x$  e  $x+n$  equivale à área embaixo da curva, entre essas idades. Em termos demográficos esta superfície representa o número de anos vividos pela geração  $l_0$  entre as idades  $x$  e  $x+n$ . No gráfico b 4, destaca-se o valor  ${}_5L_{70}$ , que corresponde a área hachurada dentro de ABCE.

**Gráfico B 4**



Fonte: PRODESP.



Este tempo pode ser decomposto em tempo vivido pelas pessoas que sobreviveram até o final do intervalo e tempo vivido pelas pessoas que morreram dentro dele.

Com isso a área ABCD representa o tempo vivido dentro do intervalo  $x, x+n$  pelas  ${}_n\ell_{x+n}$  que chegaram com vida a idade  $x+n$  e pode ser calculado como:

$$n * \ell_{x+n}$$

Já a área CDE representa o tempo vivido dentro do intervalo  $x, x+n$  pelas  ${}_nd_x$  pessoas que faleceram dentro do mesmo. Supondo que cada uma destas pessoas vive em média  ${}_nf_x$  anos (chamado de fator de separação das mortes), o tempo vivido pelas  ${}_nd_x$  pessoas seria de:

$${}_nf_x * {}_nd_x$$

Em função disto pode-se estabelecer a seguinte igualdade:

$${}_nL_x = n * \ell_{x+n} + {}_nf_x * {}_nd_x$$

Para quase todas as idades  $x \geq 5$  anos e tamanho do intervalo  $n \leq 5$ , o valor da integral pode ser aproximado a partir da área do trapézio. Ou seja:

$${}_nL_x = \int_x^{x+n} \ell_a da \cong \frac{(\ell_x + \ell_{x+n})}{2} \times n.$$

À medida que a amplitude do intervalo de idades aumenta, o erro que se comete quando aplica-se a fórmula do trapézio tende a ser maior e a fórmula anterior não traz bom ajuste e portanto não poderá ser usada.

Como nas primeiras idades ( $x= 0, 1, 2, 3, 4$ ) as mortes são mais concentradas no começo do intervalo, a fórmula dos trapézios não proporciona bons resultados. Com isso, a relação mais utilizada para o cálculo do tempo vivido é:

$$L_x = f_x * \ell_x + (1 - f_x) * \ell_{x+1}$$

Onde:  $f_x$  é o fator de separação das mortes.

Ortega (1987, p. 30) sugere o fator de separação  $0,10 \leq f_0 \leq 0,35$ , dependendo do nível da mortalidade. Para as idades  $x=1, 2, 3$  e  $4$  os fatores de separação são normalmente próximos de  $0,5$ , que equivale aplicar a fórmula dos trapézios.

De outra forma, pode-se calcular o fator de separação no primeiro ano de vida  $f_0$ , como sendo:

$$f_0 = \frac{L_0 - \ell_1}{d_0}$$

Para o grupo aberto correspondente a  ${}_{\omega-x}L_x$  e idades superiores a 75 anos, Ortega (1987, p. 33) sugere as seguintes fórmulas para estimar esta grandeza:

$L_{x+}$	$(a + b * \ell_x) * \ell_x$
$L_{75+}$	$(5,731 + 0,0000654 * \ell_{75}) * \ell_{75}$
$L_{80+}$	$(4,769 + 0,0000536 * \ell_{80}) * \ell_{80}$
$L_{85+}$	$(3,862 + 0,0000466 * \ell_{85}) * \ell_{85}$

As tabelas das Nações Unidas para o grupo aberto de 85+ utilizam a fórmula:

$$L_{85+} = \ell_{85} \times \ln(\ell_{85})$$

Já as tábuas de mortalidade de Coale e Demeny (1966) estimam o grupo aberto 80+ com a seguinte fórmula:

$$L_{80+} = (3,725 + 0,0000625 * \ell_{80}) * \ell_{80}.$$

A tabela abaixo apresenta um comparativo entre as estimativas sugeridas por Ortega (1987), Nações Unidas e Coale e Demeny (1966) para os grupos abertos com idade  $x+$ , considerando o  $\ell_x$  das tábuas RPPSP-98H e RPPSP-98M.

	Homens			Mulheres		
	Ortega	ONU	Coale e Demeny	Ortega	ONU	Coale e Demeny
$L_{75+}$	594.979			821.513		
$L_{80+}$	326.613		297.569	534.244		503.965
$L_{85+}$	144.985	287.265		295.842	521.762	

Obs: tanto para Ortega, como para a ONU e Coale e Demeny o  $\ell_0 = 100.000$

Comparando a estimativa de Ortega com a de Coale e Demeny para o grupo  $L_{80+}$ , observa-se que no caso masculino tem-se um tempo vivido 9,76% maior para homens e 6,01% maior para mulheres.

Comparando agora a estimativa proposta pela ONU com a de Ortega para o grupo  $L_{85+}$ , observa-se que no caso masculino tem-se um tempo vivido 98,13% maior para homens e 76,37% maior para mulheres.

Como no caso do Estado de São Paulo calculam-se os  $q_x$  da idade de 20 a 95 anos pelas razões previamente expostas, para completar as funções apresentadas na tabela b 2, tabela b 3 e tabela b 4, calculou-se o  $L_{95+}$ , extrapolando linearmente os coeficientes propostos por Ortega (1987, p.33). Assim sendo, nosso  $L_{95+}$  calculado é:

$$L_{95+} = (1,984 + 0,0000270 * \ell_{95}) * \ell_{95}$$

Obs: chegou-se a fazer um ajuste quadrático para o coeficiente “b” da aproximação para  $L_x^+$  sugerida por Ortega, mas o resultado foi muito próximo do ajuste linear, razão pela qual se optou por fazer a aproximação considerando esse segundo.

#### f) Tempo vivido entre as idades $x$ e $\omega$ ( $T_\omega$ )

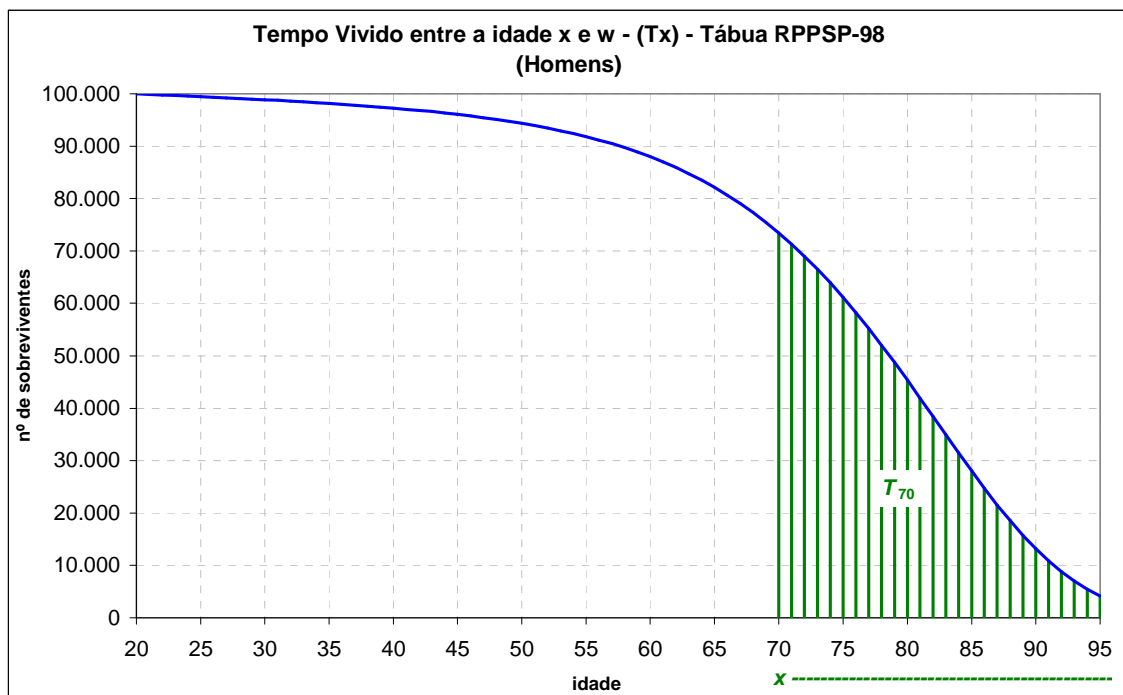
A função  $T_\omega$  representa o número total de anos vividos pela geração inicial  $\ell_0$ , entre as idades  $x$  e  $\omega$ , ou seja, entre a idade exata  $x$  até a extinção total do grupo. Pode ser calculado a partir de:

$$T_x = \sum_{a=x}^{\omega-1} L_a = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_{\omega-1} \text{ (no caso discreto), e}$$

$$T_x = \int_x^{x+1} \ell_a da + \int_{x+1}^{x+2} \ell_a da + \int_{x+2}^{x+3} \ell_a da + \dots = \int_x^{\omega} \ell_a da \text{ (no caso contínuo).}$$

Ou seja, a integral da função  $\ell_x$ , entre as idades  $x$  e  $\omega$  equivale à área embaixo da curva, entre essas idades. Em termos demográficos esta superfície representa o número de anos vividos pela geração  $\ell_0$  entre as idades  $x$  e  $\omega$ . No gráfico b 5, destaca-se o valor  $T_{70}$ , calculado para a tábua de mortalidade RPPSP-98H, que corresponde à área hachurada (em verde).

**Gráfico B 5**



Fonte: PRODESP.

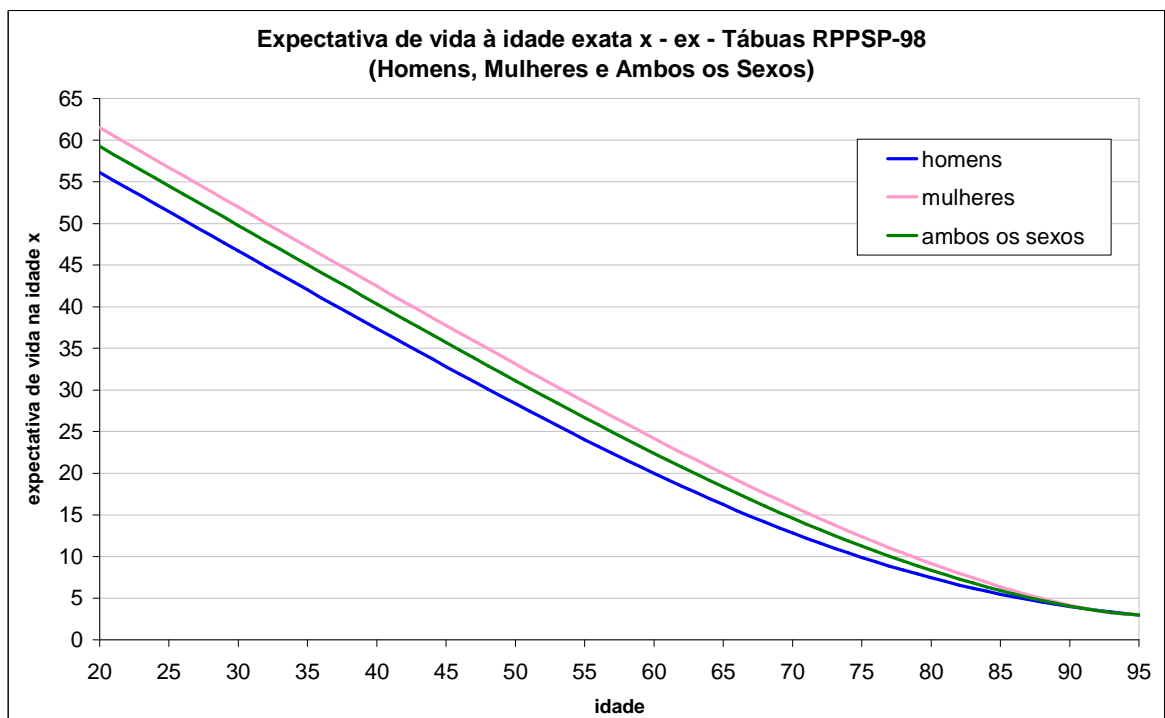
### g) Esperança de Vida na idade $x$ ( $e_x$ )

A função  $e_x$  representa o número de anos que em média vive uma pessoa desde a idade  $x$  até o final de sua vida, podendo também ser denominada de “vida média na idade  $x$ ”. Pode ser calculado como a razão dos números de anos vividos pela população a partir da idade  $x$  e a população na mesma idade, ou seja:

$$e_x^0 = \frac{T_x}{\ell_x} = \frac{\int_x^{\omega} \ell_a da}{\ell_x} = \frac{\sum_{a=x}^{\omega-1} L_a}{\ell_x}$$

No caso particular quando  $x=0$  tem-se a esperança de vida ao nascer  $e_0$ , que é uma medida resumo da mortalidade geral. A vantagem do cálculo dessa medida é que a mesma não sofre influência da estrutura etária da população. O gráfico b 6 apresenta a esperança de vida calculada para homens, mulheres e ambos os sexos, em função da tábua de mortalidade RPPSP-98.

**Gráfico B 6**



Fonte: PRODESP.

#### h) Fatores de separação à idade $x$ ( ${}_nf_x$ )

A função  ${}_nf_x$  representa o número de pessoas-ano vividos pela população com idade exata  $x$  nos  $n$  anos seguintes ao seu aniversário, mas que morreram antes de completar  $x+n$  anos. Pode ser calculado a partir de:

$${}_nf_x = \frac{{}_nL_x - n * \ell_x}{{}_nd_x}$$

Como as mortes não se distribuem de forma uniforme nas idades extremas (crianças e idosos), o cálculo desses fatores é de suma importância para as estimativas. Para as idades não extremas, normalmente esse fator é igual a zero vírgula cinco (meio), dada a regularidade existente na distribuição dos óbitos. Quando são construídos conjuntos de tábuas-modelo, normalmente faz-se uma determinação específica para  ${}_nf_x$ .

Coale & Demeny sugerem utilizar os seguintes fatores de separação:

$$\text{Para Homens: } f_0 = \begin{cases} 0,330 & {}_1q_0 \geq 0,1 \\ 0,0425 + 2,875 * {}_1q_0 & {}_1q_0 < 0,1 \end{cases}$$

$$\text{Para Mulheres: } f_0 = \begin{cases} 0,350 & {}_1q_0 \geq 0,1 \\ 0,05 + 3,0 * {}_1q_0 & {}_1q_0 < 0,1 \end{cases}$$

A partir desses fatores para  ${}_nf_x$ , constroem-se os valores da população com menos de um ano de idade, ou seja:

$${}_1L_0 = f_0 * \ell_0 + (1 - f_0) * \ell_1.$$

**i) Taxa instantânea de mortalidade por idade  $x$  ( $\mu_x$ )**

A função  $\mu_x$  representa o limite da razão da taxa de mortalidade quando o intervalo  $n$  tende a zero, ou seja:

$$\mu_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_nq_x}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_nd_x}{n \cdot \ell_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{n \cdot \ell_x} = -\frac{1}{\ell_x} \frac{d\ell_x}{dx} = -\frac{d\ln(\ell_x)}{dx}$$

A partir desta caracterização é possível, reciprocamente, definir  $\ell_x$  a partir da taxa instantânea de mortalidade. Tem-se que:

$$\frac{d\ell_x}{\ell_x} = -\mu_x dx$$

e integrando ambos os membros desta equação entre  $y$  e  $x$ ,  $y < x$ , segue que:

$$\ln(\ell_x) - \ln(\ell_y) = -\int_y^x \mu_a da \rightarrow \ell_x = \ell_y \exp\left\{-\int_y^x \mu_a da\right\}.$$

**Tabela B 1 - Resumo das funções da tábua de mortalidade**

Notação	Descrição
$\ell_x$	Número de pessoas com idade exata $x$ no grupo em observação
${}_nL_x$	Número de pessoas com idades entre $x$ (inclusive) e $x+n$ (exclusive) anos no grupo em observação
${}_nd_x$	Número de óbitos ocorridos no grupo em observação entre as idades $x$ (inclusive) e $x+n$ (exclusive) anos
${}_nq_x$	Probabilidade de morte no grupo em observação nas idades entre $x$ (inclusive) e $x+n$ (exclusive) anos, dado que sobreviveu até a idade exata $x$
${}_np_x$	Probabilidade de sobrevivência no grupo em observação entre as idades $x$ (inclusive) e $x+n$ (exclusive) anos, dado que sobreviveu até a idade exata $x$
$T_x$	Número de pessoas-anos vivido pela população em observação a partir da idade exata $x$
$e_x$	Número médio de anos vividos por um indivíduo da população em observação a partir da idade exata $x$ .
${}_nf_x$	Fator de separação
$\mu_x$	Taxa instantânea de mortalidade

Fonte: elaborado pelo autor.

### j) Funções Calculadas para a Tábua de Mortalidade RPPSP-98

A seguir, a tabela b 2, a tabela b 3 e a tabela b 4 apresentam respectivamente as funções calculadas para a tábua RPPSP-98 masculina, feminina e de ambos os sexos:

**Tabela B 2 - Funções calculadas para a tábua RPPSP-98H (homens)**

Idades Exatas (x)	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_nd_x$	$\ell_x$	${}_nL_x$	$T_x$	$e_x$
20	0,001036	0,998964	104	100.000	99.948	5.611.421	56,11
21	0,001053	0,998947	105	99.896	99.844	5.511.473	55,17
22	0,001073	0,998927	107	99.791	99.738	5.411.629	54,23
23	0,001094	0,998906	109	99.684	99.630	5.311.891	53,29
24	0,001118	0,998882	111	99.575	99.519	5.212.262	52,35
25	0,001145	0,998855	114	99.464	99.407	5.112.742	51,40
26	0,001174	0,998826	117	99.350	99.292	5.013.336	50,46
27	0,001207	0,998793	120	99.233	99.173	4.914.044	49,52
28	0,001243	0,998757	123	99.113	99.052	4.814.871	48,58
29	0,001283	0,998717	127	98.990	98.927	4.715.819	47,64
30	0,001328	0,998672	131	98.863	98.798	4.616.892	46,70
31	0,001378	0,998622	136	98.732	98.664	4.518.094	45,76
32	0,001433	0,998567	141	98.596	98.525	4.419.431	44,82
33	0,001494	0,998506	147	98.455	98.381	4.320.905	43,89
34	0,001563	0,998437	154	98.307	98.231	4.222.524	42,95
35	0,001638	0,998362	161	98.154	98.073	4.124.294	42,02
36	0,001722	0,998278	169	97.993	97.909	4.026.220	41,09
37	0,001815	0,998185	178	97.824	97.735	3.928.312	40,16
38	0,001918	0,998082	187	97.647	97.553	3.830.576	39,23
39	0,002033	0,997967	198	97.459	97.360	3.733.023	38,30
40	0,002161	0,997839	210	97.261	97.156	3.635.663	37,38
41	0,002302	0,997698	223	97.051	96.939	3.538.507	36,46
42	0,002459	0,997541	238	96.828	96.709	3.441.567	35,54
43	0,002633	0,997367	254	96.590	96.462	3.344.859	34,63
44	0,002827	0,997173	272	96.335	96.199	3.248.396	33,72
45	0,003041	0,996959	292	96.063	95.917	3.152.197	32,81
46	0,003279	0,996721	314	95.771	95.614	3.056.281	31,91
47	0,003544	0,996456	338	95.457	95.288	2.960.667	31,02
48	0,003837	0,996163	365	95.118	94.936	2.865.379	30,12
49	0,004162	0,995838	394	94.754	94.556	2.770.443	29,24
50	0,004523	0,995477	427	94.359	94.146	2.675.887	28,36
51	0,004923	0,995077	462	93.932	93.701	2.581.741	27,49
52	0,005367	0,994633	502	93.470	93.219	2.488.040	26,62
53	0,005859	0,994141	545	92.968	92.696	2.394.821	25,76
54	0,006405	0,993595	592	92.424	92.128	2.302.125	24,91
55	0,007009	0,992991	644	91.832	91.510	2.209.997	24,07
56	0,007680	0,992320	700	91.188	90.838	2.118.487	23,23



**Tabela B 2 - (continuação)**

Idades Exatas (x)	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_nd_x$	$\ell_x$	${}_nL_x$	$T_x$	$e_x$
57	0,008422	0,991578	762	90.488	90.107	2.027.649	22,41
58	0,009245	0,990755	830	89.726	89.311	1.937.542	21,59
59	0,010156	0,989844	903	88.896	88.445	1.848.232	20,79
60	0,011165	0,988835	982	87.993	87.502	1.759.787	20,00
61	0,012281	0,987719	1.069	87.011	86.477	1.672.285	19,22
62	0,013516	0,986484	1.162	85.942	85.361	1.585.808	18,45
63	0,014882	0,985118	1.262	84.781	84.150	1.500.447	17,70
64	0,016392	0,983608	1.369	83.519	82.834	1.416.297	16,96
65	0,018060	0,981940	1.484	82.150	81.408	1.333.463	16,23
66	0,019903	0,980097	1.605	80.666	79.863	1.252.055	15,52
67	0,021935	0,978065	1.734	79.061	78.194	1.172.191	14,83
68	0,024177	0,975823	1.870	77.326	76.392	1.093.998	14,15
69	0,026648	0,973352	2.011	75.457	74.452	1.017.606	13,49
70	0,029369	0,970631	2.157	73.446	72.368	943.155	12,84
71	0,032362	0,967638	2.307	71.289	70.136	870.787	12,21
72	0,035652	0,964348	2.459	68.982	67.752	800.651	11,61
73	0,039263	0,960737	2.612	66.523	65.217	732.899	11,02
74	0,043224	0,956776	2.762	63.911	62.530	667.682	10,45
75	0,047561	0,952439	2.908	61.148	59.694	605.153	9,90
76	0,052305	0,947695	3.046	58.240	56.717	545.459	9,37
77	0,057484	0,942516	3.173	55.194	53.607	488.742	8,86
78	0,063130	0,936870	3.284	52.021	50.379	435.134	8,36
79	0,069273	0,930727	3.376	48.737	47.049	384.755	7,89
80	0,075943	0,924057	3.445	45.361	43.638	337.706	7,44
81	0,083170	0,916830	3.486	41.916	40.173	294.068	7,02
82	0,090982	0,909018	3.496	38.430	36.682	253.895	6,61
83	0,099404	0,900596	3.473	34.933	33.197	217.214	6,22
84	0,108459	0,891541	3.412	31.461	29.755	184.017	5,85
85	0,118166	0,881834	3.314	28.049	26.391	154.262	5,50
86	0,128539	0,871461	3.179	24.734	23.145	127.871	5,17
87	0,139585	0,860415	3.009	21.555	20.051	104.726	4,86
88	0,151306	0,848694	2.806	18.546	17.143	84.676	4,57
89	0,163696	0,836304	2.577	15.740	14.452	67.533	4,29
90	0,176739	0,823261	2.326	13.163	12.000	53.081	4,03
91	0,190411	0,809589	2.063	10.837	9.805	41.081	3,79
92	0,204679	0,795321	1.796	8.773	7.876	31.275	3,56
93	0,219499	0,780501	1.532	6.978	6.212	23.400	3,35
94	0,234818	0,765182	1.279	5.446	4.807	17.188	3,16
95	0,250574	0,749426	1.044	4.167	3.645	12.381	2,97
95+	1,000000	0,000000	3.123	3.123	8.736	8.736	2,80

Fonte: PRODESP.

**Tabela B 3 - Funções calculadas para a tábua RPPSP-98M (mulheres)**

Idades Exatas (x)	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_nd_x$	$\ell_x$	${}_nL_x$	$T_x$	$e_x$
20	0,000773	0,999227	77	100.000	99.961	6.147.569	61,48
21	0,000782	0,999218	78	99.923	99.884	6.047.608	60,52
22	0,000792	0,999208	79	99.845	99.805	5.947.724	59,57
23	0,000804	0,999196	80	99.765	99.725	5.847.919	58,62
24	0,000817	0,999183	81	99.685	99.645	5.748.194	57,66
25	0,000831	0,999169	83	99.604	99.563	5.648.549	56,71
26	0,000846	0,999154	84	99.521	99.479	5.548.987	55,76
27	0,000864	0,999136	86	99.437	99.394	5.449.508	54,80
28	0,000883	0,999117	88	99.351	99.307	5.350.114	53,85
29	0,000904	0,999096	90	99.263	99.218	5.250.807	52,90
30	0,000928	0,999072	92	99.174	99.128	5.151.588	51,95
31	0,000954	0,999046	94	99.082	99.034	5.052.461	50,99
32	0,000983	0,999017	97	98.987	98.938	4.953.426	50,04
33	0,001015	0,998985	100	98.890	98.840	4.854.488	49,09
34	0,001050	0,998950	104	98.789	98.738	4.755.648	48,14
35	0,001089	0,998911	107	98.686	98.632	4.656.911	47,19
36	0,001133	0,998867	112	98.578	98.522	4.558.279	46,24
37	0,001181	0,998819	116	98.467	98.408	4.459.756	45,29
38	0,001234	0,998766	121	98.350	98.290	4.361.348	44,35
39	0,001293	0,998707	127	98.229	98.165	4.263.058	43,40
40	0,001359	0,998641	133	98.102	98.035	4.164.893	42,45
41	0,001431	0,998569	140	97.969	97.899	4.066.857	41,51
42	0,001512	0,998488	148	97.828	97.754	3.968.959	40,57
43	0,001601	0,998399	156	97.681	97.602	3.871.205	39,63
44	0,001699	0,998301	166	97.524	97.441	3.773.602	38,69
45	0,001809	0,998191	176	97.358	97.270	3.676.161	37,76
46	0,001930	0,998070	188	97.182	97.089	3.578.890	36,83
47	0,002064	0,997936	200	96.995	96.895	3.481.802	35,90
48	0,002213	0,997787	214	96.795	96.688	3.384.907	34,97
49	0,002377	0,997623	230	96.580	96.466	3.288.219	34,05
50	0,002560	0,997440	247	96.351	96.228	3.191.754	33,13
51	0,002763	0,997237	266	96.104	95.971	3.095.526	32,21
52	0,002987	0,997013	286	95.839	95.696	2.999.555	31,30
53	0,003236	0,996764	309	95.552	95.398	2.903.859	30,39
54	0,003512	0,996488	335	95.243	95.076	2.808.462	29,49
55	0,003819	0,996181	362	94.909	94.727	2.713.386	28,59
56	0,004158	0,995842	393	94.546	94.350	2.618.658	27,70

**Tabela B 3 - (continuação)**

Idades Exatas (x)	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_nd_x$	$\ell_x$	${}_nL_x$	$T_x$	$e_x$
57	0,004535	0,995465	427	94.153	93.940	2.524.309	26,81
58	0,004953	0,995047	464	93.726	93.494	2.430.369	25,93
59	0,005417	0,994583	505	93.262	93.009	2.336.875	25,06
60	0,005932	0,994068	550	92.757	92.481	2.243.866	24,19
61	0,006504	0,993496	600	92.206	91.907	2.151.385	23,33
62	0,007139	0,992861	654	91.607	91.280	2.059.478	22,48
63	0,007844	0,992156	713	90.953	90.596	1.968.198	21,64
64	0,008628	0,991372	779	90.239	89.850	1.877.602	20,81
65	0,009499	0,990501	850	89.461	89.036	1.787.752	19,98
66	0,010469	0,989531	928	88.611	88.147	1.698.716	19,17
67	0,011547	0,988453	1.012	87.683	87.177	1.610.569	18,37
68	0,012747	0,987253	1.105	86.671	86.118	1.523.392	17,58
69	0,014085	0,985915	1.205	85.566	84.963	1.437.274	16,80
70	0,015575	0,984425	1.314	84.361	83.704	1.352.311	16,03
71	0,017237	0,982763	1.431	83.047	82.331	1.268.607	15,28
72	0,019093	0,980907	1.558	81.615	80.836	1.186.276	14,53
73	0,021165	0,978835	1.694	80.057	79.210	1.105.439	13,81
74	0,023483	0,976517	1.840	78.363	77.443	1.026.229	13,10
75	0,026079	0,973921	1.996	76.523	75.525	948.787	12,40
76	0,028988	0,971012	2.160	74.527	73.447	873.262	11,72
77	0,032253	0,967747	2.334	72.367	71.200	799.815	11,05
78	0,035923	0,964077	2.516	70.033	68.775	728.616	10,40
79	0,040056	0,959944	2.704	67.517	66.165	659.841	9,77
80	0,044720	0,955280	2.898	64.812	63.363	593.677	9,16
81	0,049994	0,950006	3.095	61.914	60.366	530.313	8,57
82	0,055972	0,944028	3.292	58.819	57.172	469.947	7,99
83	0,062769	0,937231	3.485	55.526	53.784	412.775	7,43
84	0,070520	0,929480	3.670	52.041	50.206	358.991	6,90
85	0,079394	0,920606	3.840	48.371	46.451	308.785	6,38
86	0,089593	0,910407	3.990	44.531	42.536	262.334	5,89
87	0,101374	0,898626	4.110	40.541	38.486	219.798	5,42
88	0,115058	0,884942	4.192	36.431	34.335	181.312	4,98
89	0,131056	0,868944	4.225	32.240	30.127	146.977	4,56
90	0,149901	0,850099	4.199	28.014	25.915	116.850	4,17
91	0,172299	0,827701	4.103	23.815	21.763	90.935	3,82
92	0,199204	0,800796	3.927	19.712	17.748	69.172	3,51
93	0,231940	0,768060	3.661	15.785	13.954	51.423	3,26
94	0,272394	0,727606	3.302	12.124	10.473	37.469	3,09
95	0,323361	0,676639	2.852	8.821	7.395	26.996	3,06
95+	1,000000	0,000000	5.969	5.969	19.601	19.601	3,28

Fonte: PRODESP.

**Tabela B 4 - Funções calculadas para a tábua RPPSP-98A (ambos os sexos)**

Idades Exatas (x)	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_nd_x$	$\ell_x$	${}_nL_x$	$T_x$	$e_x$
20	0,000894	0,999106	89	100.000	99.955	5.923.758	59,24
21	0,000906	0,999094	91	99.911	99.865	5.823.803	58,29
22	0,000919	0,999081	92	99.820	99.774	5.723.937	57,34
23	0,000934	0,999066	93	99.728	99.682	5.624.163	56,39
24	0,000950	0,999050	95	99.635	99.588	5.524.482	55,45
25	0,000968	0,999032	96	99.540	99.492	5.424.894	54,50
26	0,000988	0,999012	98	99.444	99.395	5.325.402	53,55
27	0,001010	0,998990	100	99.346	99.296	5.226.007	52,60
28	0,001034	0,998966	103	99.246	99.194	5.126.711	51,66
29	0,001061	0,998939	105	99.143	99.090	5.027.517	50,71
30	0,001092	0,998908	108	99.038	98.984	4.928.426	49,76
31	0,001125	0,998875	111	98.930	98.874	4.829.443	48,82
32	0,001162	0,998838	115	98.818	98.761	4.730.569	47,87
33	0,001203	0,998797	119	98.703	98.644	4.631.808	46,93
34	0,001249	0,998751	123	98.585	98.523	4.533.164	45,98
35	0,001300	0,998700	128	98.462	98.398	4.434.640	45,04
36	0,001356	0,998644	133	98.334	98.267	4.336.243	44,10
37	0,001418	0,998582	139	98.200	98.131	4.237.976	43,16
38	0,001487	0,998513	146	98.061	97.988	4.139.845	42,22
39	0,001564	0,998436	153	97.915	97.839	4.041.857	41,28
40	0,001650	0,998350	161	97.762	97.681	3.944.018	40,34
41	0,001744	0,998256	170	97.601	97.516	3.846.337	39,41
42	0,001849	0,998151	180	97.430	97.340	3.748.821	38,48
43	0,001966	0,998034	191	97.250	97.155	3.651.481	37,55
44	0,002095	0,997905	203	97.059	96.957	3.554.326	36,62
45	0,002239	0,997761	217	96.856	96.747	3.457.369	35,70
46	0,002398	0,997602	232	96.639	96.523	3.360.622	34,78
47	0,002575	0,997425	248	96.407	96.283	3.264.099	33,86
48	0,002772	0,997228	267	96.159	96.026	3.167.816	32,94
49	0,002990	0,997010	287	95.892	95.749	3.071.790	32,03
50	0,003231	0,996769	309	95.606	95.451	2.976.041	31,13
51	0,003500	0,996500	334	95.297	95.130	2.880.590	30,23
52	0,003798	0,996202	361	94.963	94.783	2.785.460	29,33
53	0,004128	0,995872	391	94.603	94.407	2.690.677	28,44
54	0,004495	0,995505	423	94.212	94.000	2.596.270	27,56
55	0,004902	0,995098	460	93.789	93.559	2.502.270	26,68
56	0,005354	0,994646	500	93.329	93.079	2.408.711	25,81

**Tabela B 4 - (continuação)**

Idades Exatas (x)	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_nd_x$	$\ell_x$	${}_nL_x$	$T_x$	$e_x$
57	0,005856	0,994144	544	92.829	92.557	2.315.632	24,95
58	0,006413	0,993587	592	92.285	91.989	2.223.075	24,09
59	0,007031	0,992969	645	91.694	91.371	2.131.085	23,24
60	0,007718	0,992282	703	91.049	90.697	2.039.714	22,40
61	0,008480	0,991520	766	90.346	89.963	1.949.017	21,57
62	0,009326	0,990674	835	89.580	89.162	1.859.054	20,75
63	0,010265	0,989735	911	88.745	88.289	1.769.891	19,94
64	0,011308	0,988692	993	87.834	87.337	1.681.602	19,15
65	0,012466	0,987534	1.083	86.840	86.299	1.594.265	18,36
66	0,013752	0,986248	1.179	85.758	85.168	1.507.966	17,58
67	0,015180	0,984820	1.284	84.579	83.937	1.422.798	16,82
68	0,016766	0,983234	1.397	83.295	82.596	1.338.861	16,07
69	0,018528	0,981472	1.517	81.898	81.139	1.256.265	15,34
70	0,020485	0,979515	1.647	80.381	79.558	1.175.125	14,62
71	0,022659	0,977341	1.784	78.734	77.842	1.095.568	13,91
72	0,025075	0,974925	1.930	76.950	75.985	1.017.725	13,23
73	0,027759	0,972241	2.083	75.021	73.979	941.740	12,55
74	0,030743	0,969257	2.242	72.938	71.817	867.760	11,90
75	0,034060	0,965940	2.408	70.696	69.492	795.943	11,26
76	0,037749	0,962251	2.578	68.288	66.999	726.452	10,64
77	0,041850	0,958150	2.750	65.710	64.335	659.453	10,04
78	0,046413	0,953587	2.922	62.960	61.499	595.118	9,45
79	0,051490	0,948510	3.091	60.038	58.492	533.619	8,89
80	0,057141	0,942859	3.254	56.947	55.320	475.126	8,34
81	0,063432	0,936568	3.406	53.693	51.990	419.807	7,82
82	0,070440	0,929560	3.542	50.287	48.516	367.817	7,31
83	0,078248	0,921752	3.658	46.745	44.916	319.301	6,83
84	0,086952	0,913048	3.746	43.087	41.214	274.386	6,37
85	0,096660	0,903340	3.803	39.340	37.439	233.172	5,93
86	0,107494	0,892506	3.820	35.538	33.628	195.733	5,51
87	0,119593	0,880407	3.793	31.718	29.821	162.105	5,11
88	0,133112	0,866888	3.717	27.924	26.066	132.284	4,74
89	0,148233	0,851767	3.588	24.207	22.413	106.218	4,39
90	0,165158	0,834842	3.405	20.619	18.916	83.805	4,06
91	0,184122	0,815878	3.169	17.214	15.629	64.889	3,77
92	0,205396	0,794604	2.885	14.044	12.602	49.260	3,51
93	0,229289	0,770711	2.559	11.160	9.880	36.658	3,28
94	0,256162	0,743838	2.203	8.601	7.499	26.778	3,11
95	0,286435	0,713565	1.833	6.398	5.481	19.278	3,01
95+	1,000000	0,000000	4.565	4.565	13.797	13.797	3,02

Fonte: PRODESP.

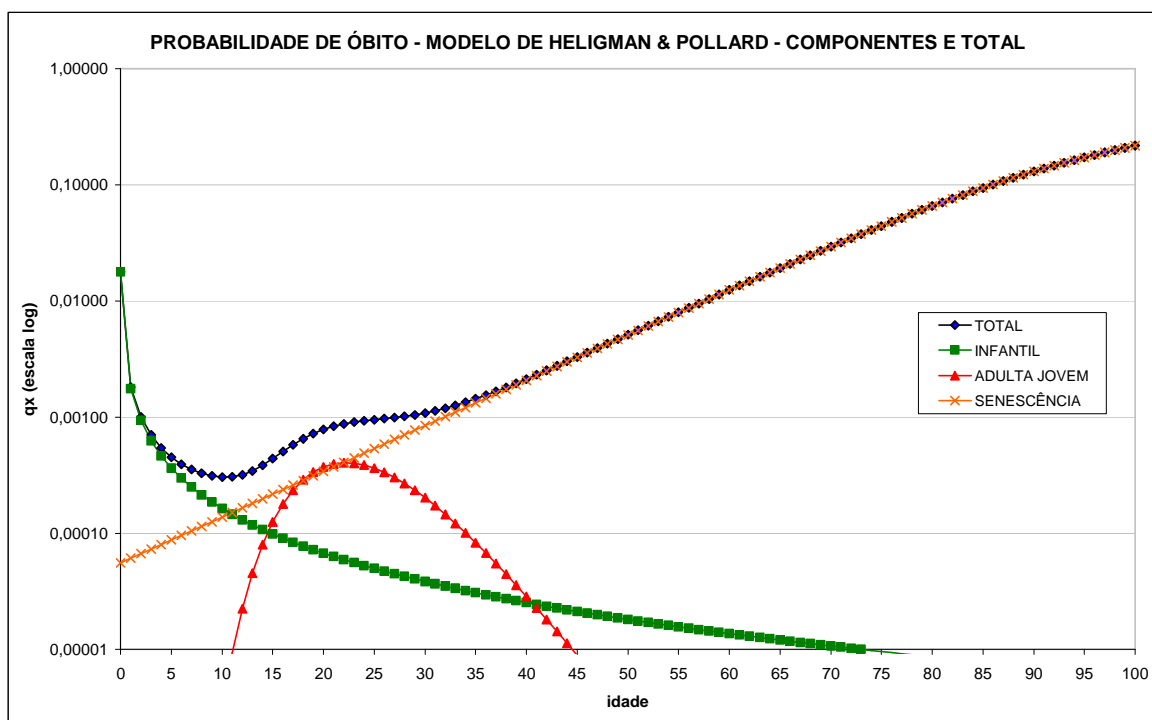
## Anexo C – Análise de sensibilidade dos parâmetros A, B, C, D, E, F, G, H, K, utilizados no Modelo de Heligman & Pollard que ajusta os dados de mortalidade

Nesse anexo, analisa-se a sensibilidade dos parâmetros utilizados na função proposta por Heligman & Pollard (1980) e foi replicado de Beltrão, Sugahara e Silva (2006). Para Heligman & Pollard a um modelo de mortalidade possui três componentes, correspondendo respectivamente, a mortalidade infantil, mortalidade por causas externas e mortalidade por senescência. Dentre os modelos sugeridos pelos autores, utilizou-se:

$$q_x = \underbrace{A^{(x+B)^C}}_{(I)} + \underbrace{De^{-E(\ln(x) - \ln F)^2}}_{(II)} + \underbrace{\frac{GH^x}{(1 + KGH^x)}}_{(III)}$$

O gráfico c 1 apresenta a probabilidade de óbito e as componentes do modelo proposto pelos autores. No que se segue analisa-se individualmente o papel de cada um dos nove parâmetros dessa equação.

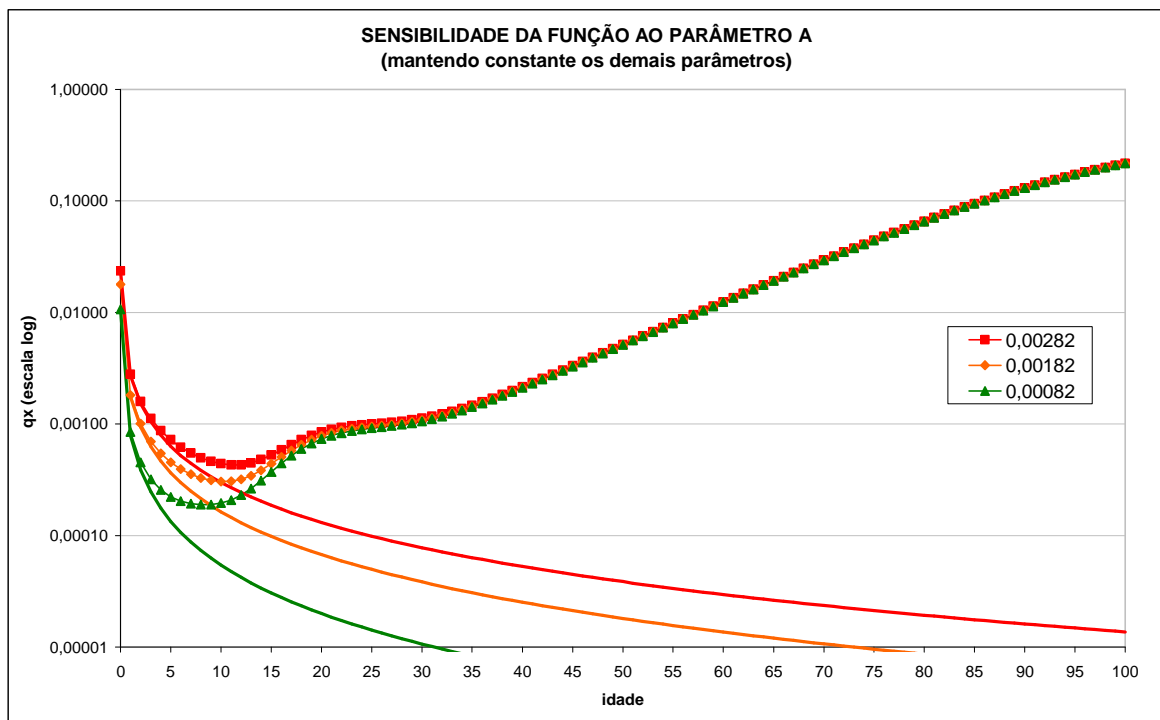
**Gráfico C 1**



Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

Os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  definem a primeira componente (I), a da mortalidade infantil. Estes parâmetros regulam os níveis iniciais da mortalidade infanto-juvenil (baixas idades) da mortalidade, afetando muito pouco os valores para as idades acima de 70 anos. A forma funcional dessa componente na escala logarítmica é, *grosso modo*, a de uma exponencial negativa. O gráfico c 2 apresenta a taxa de mortalidade, bem como o componente da mortalidade infantil, para três valores do parâmetro  $A$ : maiores valores de  $A$  correspondem a maiores valores iniciais (mortalidade na idade zero) e a uma queda mais lenta.

**Gráfico C 2**



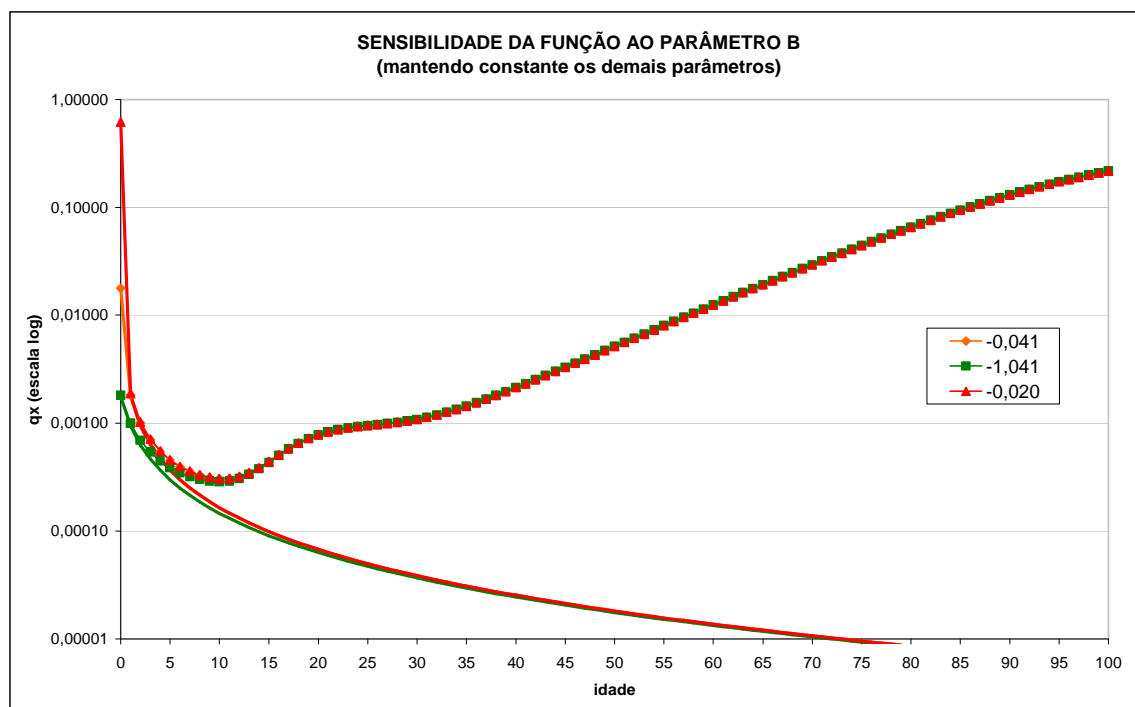
Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

O parâmetro  $B$  funciona como uma translação na escala, como se pode ver na equação seguinte na qual se decompõe uma translação de valor  $z$  entre o eixo das abscissas e o parâmetro  $B$ :

$$A^{(x+B)^C} = A^{((x+z)+(B-z))^C}$$

O gráfico c 3 apresenta a taxa de mortalidade, bem como a componente da mortalidade infantil, para três valores do parâmetro  $B$ .

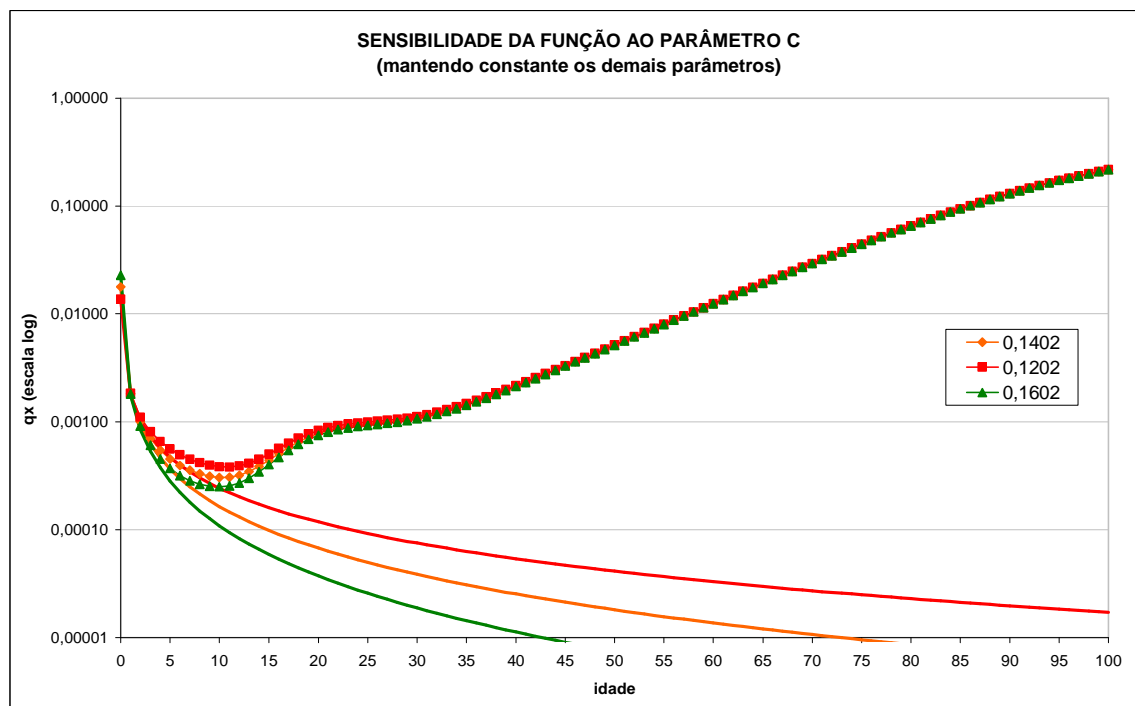
**Gráfico C 3**



Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

O gráfico c 4 apresenta a taxa de mortalidade, bem como a componente da mortalidade infantil, para três valores do parâmetro C. Maiores valores do parâmetro correspondem a valores iniciais maiores concomitante a uma queda mais rápida.

**Gráfico C 4**

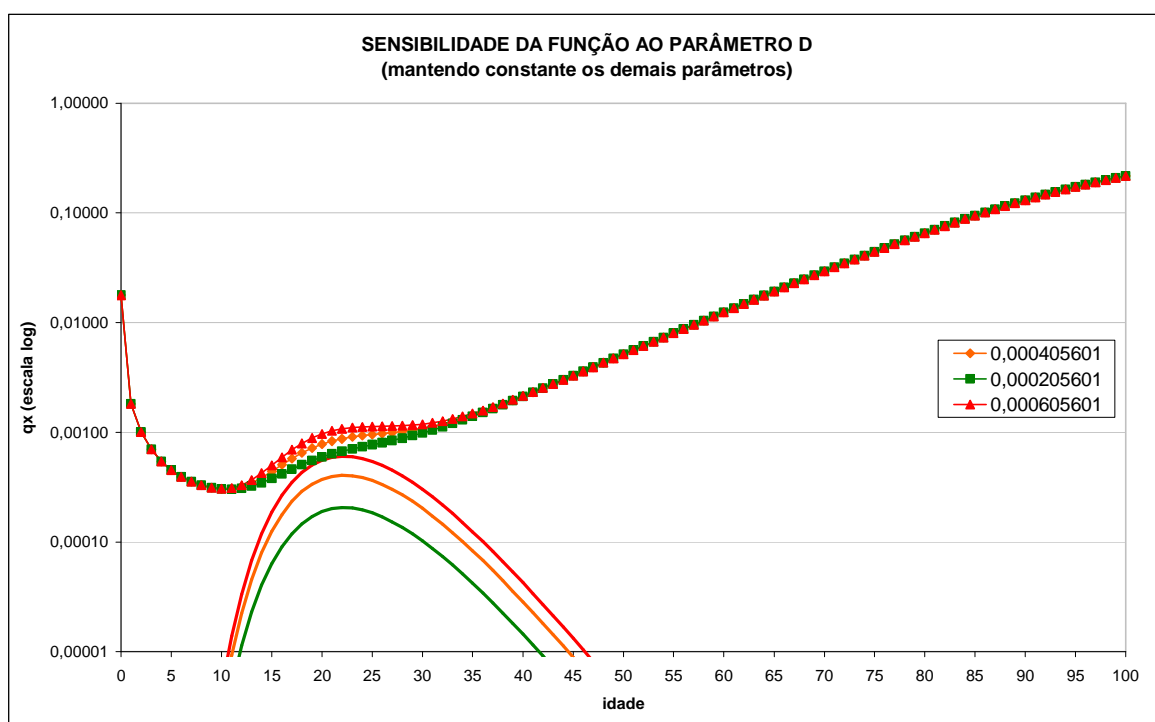


Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).



Os parâmetros  $D$ ,  $E$  e  $F$  representam a segunda componente do modelo (II) e regulam a mortalidade dos adultos jovens. O impacto destes parâmetros nas taxa de mortalidade nas idades mais jovens e mais velhas é irrisório como pode ser observado no gráfico c 5. A forma funcional na escala logarítmica é de uma parábola ligeiramente distorcida. Mais precisamente, o parâmetro  $D$  regula os níveis: tudo o mais constante, valores maiores de  $D$  correspondem a calombos maiores para a mortalidade dos adultos jovens.

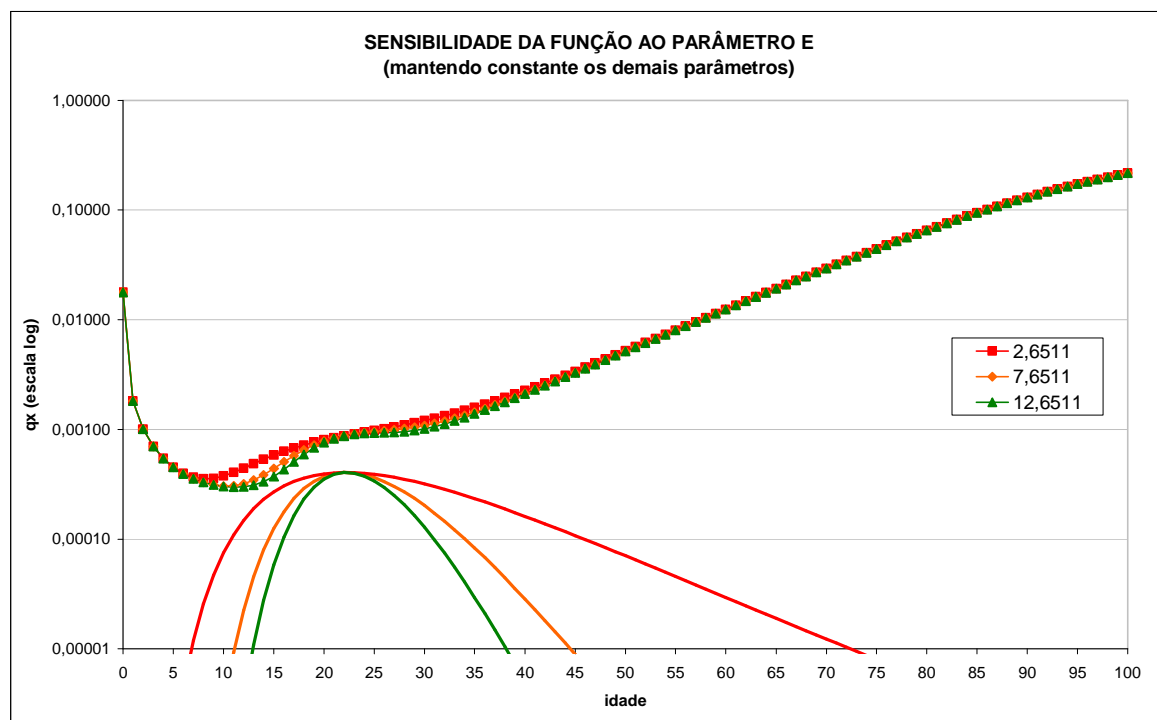
**Gráfico C 5**



Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

O parâmetro  $E$  regula a amplitude do calombo relativo à mortalidade dos adultos jovens: valores menores do parâmetro correspondem a um calombo mais concentrado (ver gráfico c 6) e valores maiores a uma cúspide mais dilatada.

**Gráfico C 6**



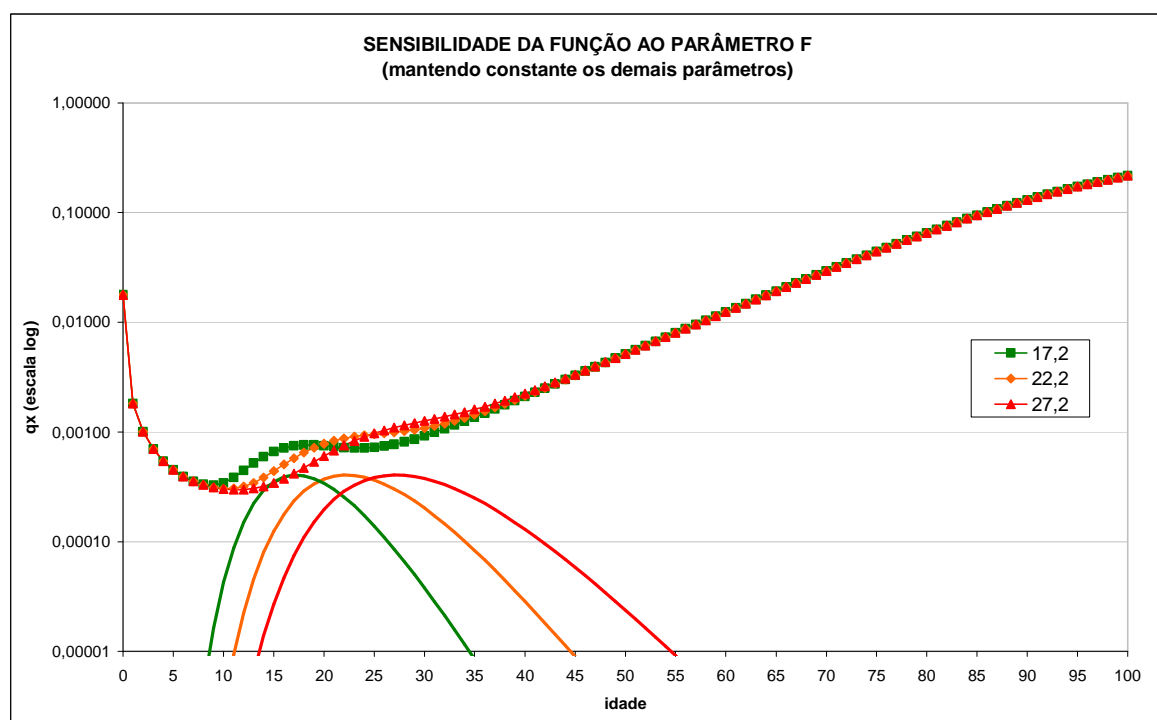
Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

O parâmetro  $F$  funciona simultaneamente transladando e modificando a escala das idades. O máximo da função ocorre na idade  $F$ , mas este parâmetro é também um fator multiplicativo na idade  $x$ , como se pode ver na equação seguinte:

$$De^{-E(\ln x - \ln F)^2} = De^{-E(\ln(x/F))^2}$$

O gráfico c 7 mostra o efeito da variação deste parâmetro na taxa de mortalidade.

**Gráfico C 7**



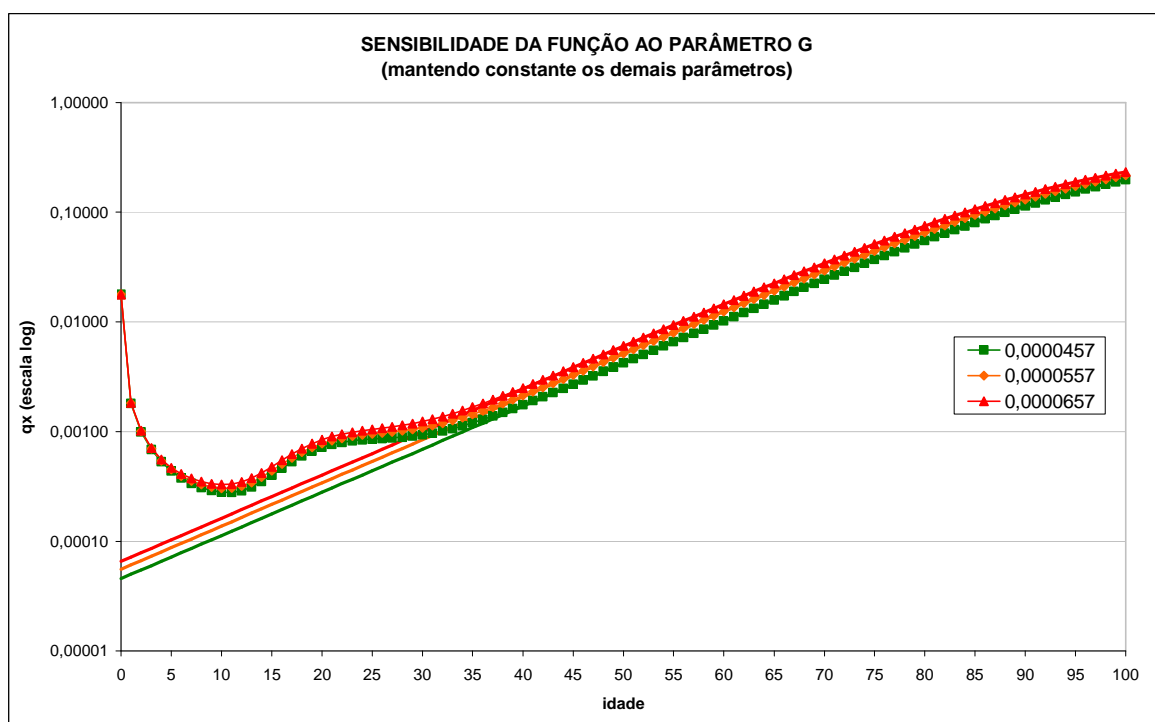
Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

Os parâmetros  $G$ ,  $H$  e  $K$  regulam a mortalidade por senescência. Considerando-se os valores usuais dos parâmetros (normalmente o do parâmetro  $G$ ), o valor de  $KGH^x$  para as pequenas idades é bem perto de zero e essa componente se comporta como o numerador, i.e., linear na escala logarítmica. Reescrevendo a equação acima como:

$$q_x = A^{(x+B)^c} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{(1 + KGH^x)} = A^{(x+B)^c} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{H^{x+\ln G}}{(1 + KH^{x+\ln G})}$$

o parâmetro  $G$  pode ser entendido simplesmente como uma translação na escala da idade (ver gráfico c 8)

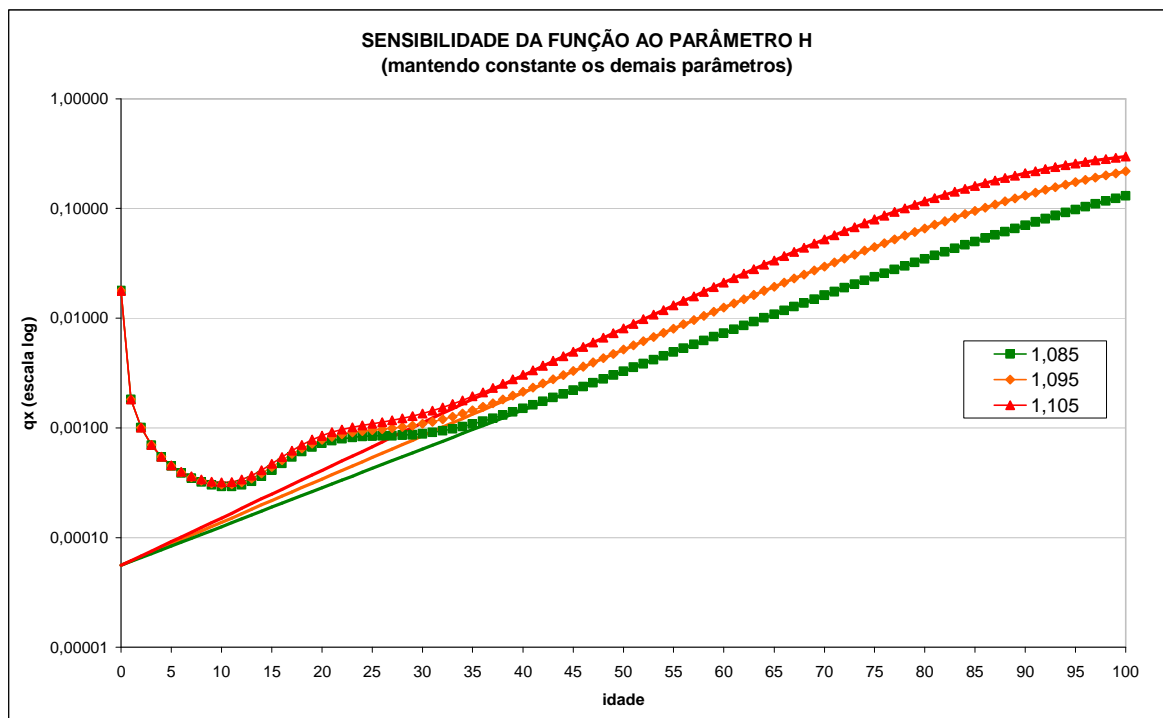
**Gráfico C 8**



Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

Nas primeiras idades, o parâmetro  $H$  regula a inclinação da reta na escala logarítmica que assume o valor  $\ln(H)$ . Nas idades avançadas, o parâmetro regula as mudanças nas curvaturas, mais precisamente a região a partir da qual a função perde a sua característica de linearidade: quanto maior o  $H$ , mais cedo ocorre a inflexão (ver gráfico c 9).

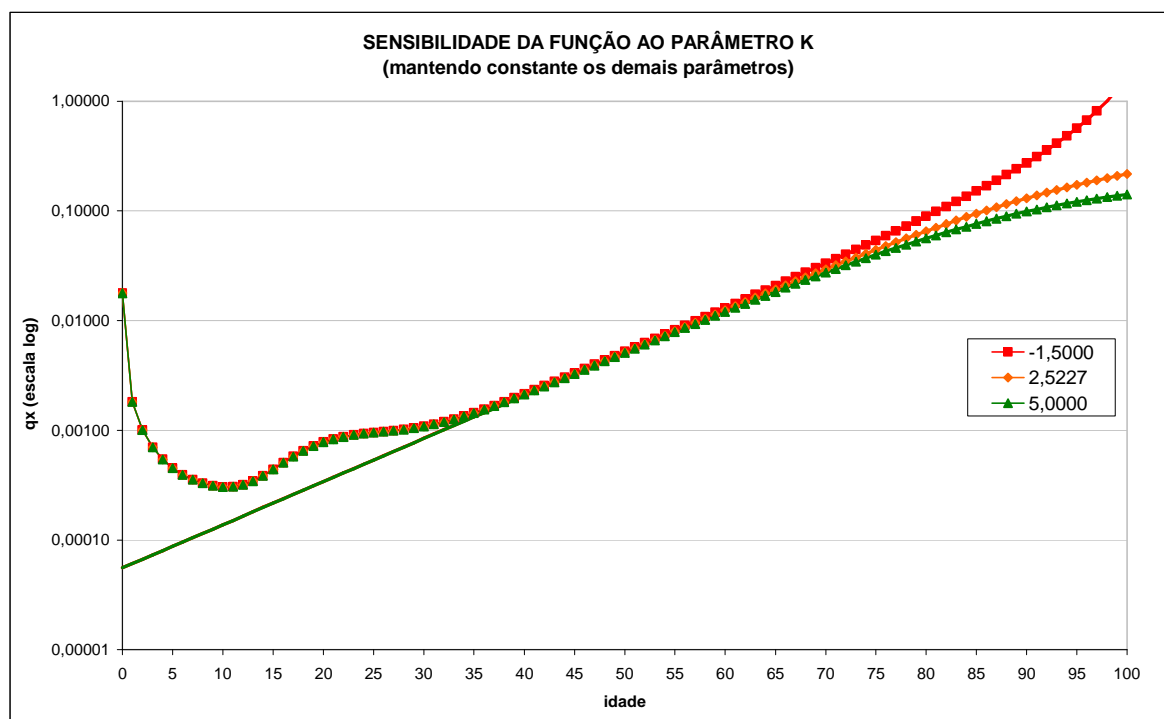
**Gráfico C 9**



Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

O parâmetro  $K$  tem uma dupla função: regula a curvatura nas idades mais avançadas e define a assíntota do limite superior da curva, igual ao inverso do parâmetro no caso deste ser positivo (ver gráfico c 10). Quanto maior o valor do  $K$ , mais côncava se torna a curva, ou seja, menores são os aumentos adicionais no logaritmo da mortalidade por ano de idade. Valores negativos do parâmetro implicam em curvas convexas com maiores ganhos por ano de idade acrescido e uma idade limite a partir da qual a mortalidade é um evento certo.

**Gráfico C 10**



Fonte: Beltrão, Sugahara e Silva (2006).

## **Anexo D – Comparações das tábuas ajustadas com tábuas de mercado**

Nesse anexo, fez-se uma comparação entre os dados brutos e as curvas de probabilidade ajustadas RPPSP-98H (para homens), RPPSP-98M (para mulheres) e RPPSP-98A (para ambos os sexos), com algumas das curvas utilizadas pelo mercado e disponibilizadas na página da *Society of Actuaries* (SOA) na internet, além de tábuas disponibilizadas pelo IBGE para a população como um todo e utilizadas para o cálculo do fator previdenciário. Este anexo foi uma adaptação feita de Beltrão e Sugahara (2005), Anexos G, I, J e K e de Beltrão, Sugahara e Silva (2006) Mimeo. Utilizou-se na comparação apenas curvas que contivessem taxas diferenciadas por sexo, ainda que a taxa feminina da Tábua AT-55 tivesse sido gerada simplesmente a partir de uma defasagem de cinco anos nas taxas masculinas.

A idéia primeira é disponibilizar comparações de tábuas correntemente empregadas em cálculos atuariais pelos mercados previdenciário e segurador brasileiro e a experiência da população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo.

Um detalhe importante que precisa mais uma vez ser salientado é o diferencial existente por sexo e nível de escolaridade, no que tange à mortalidade dos indivíduos. Os concursos públicos para provimento de vagas nas diferentes esferas de governo têm privilegiado o preenchimento de vagas para nível superior em detrimento do nível médio. Estudos desagregando por sexo e/ou escolaridade a população alvo, ainda que não façam sentido direto na concepção do cálculo atuarial segundo à Portaria MPS nº 4.992/99 (já que a tábua para um dado tipo de evento deve ser única para a população como um todo) podem ajudar numa análise de mudanças na composição do perfil sócio-econômico dos trabalhadores. Como o fator educação tende a ser cumulativo com o tempo, o ideal é que essas estimativas acerca da mortalidade dos indivíduos sejam revistas de tempos em tempos para que esse contínuo aumento na expectativa de vida das pessoas, por uma série de fatores, inclusive um maior nível educacional, seja sempre contemplado pelo modelo.

A tabela d 1 apresenta a lista das Tábuas de Mortalidade/Sobrevivência utilizadas no comparativo feito neste anexo

**Tabela D 1 - Tábuas Utilizadas no Comparativo com as Tábuas Ajustadas RPPSP**

<b>TÁBUA</b>	<b>SIGLA</b>	<b>ANO</b>
Annuity 1949 Mortality Table	AT-49	1949
Annuity 1955 Mortality Table	AT-55	1955
Annuity 1983 Mortality Table	AT-83	1983
Annuity 2000 Mortality Table	AT-2000	2000
Annuity 2000 Mortality Table “b”	AT-2000 b	2000
Commissioner’s 2001 Standard Ordinary Mortality Table	CSO-2001	2001
1971 Group Annuity Mortality Table	GAM-71	1971
1983 Group Annuity Mortality Table	GAM-83	1983
GKM70	GKM-70	1970
GKM80	GKM-80	1980
GKM95	GKM-95	1995
Tábua desenvolvida pelo IBGE para o Fator Previdenciário em 2000	IBGE-2000	2000
Tábua desenvolvida pelo IBGE para o Fator Previdenciário em 2006	IBGE-2006	2006
PE82	PE-82	1982

Fonte: elaborado pelo autor.

#### **a) Comparação – Figuras de mérito**

Apresentam-se a seguir, gráficos com comparações entre as tábuas selecionadas utilizadas pelo mercado e as estimadas pelo modelo proposto *vis-à-vis* os dados brutos das populações em risco, respectivamente para as populações masculina, feminina e de ambos os sexos. Como poderá ser observado, o grau de aderência aos dados brutos das diferentes tábuas utilizadas pelo mercado varia bastante com a idade e o sexo. Cumpre lembrar que a prática comum, no caso de seguros privados, não é a de utilizar a tábua com maior aderência, mas assumir um fator de carregamento (correspondente a um intervalo unilateral de confiança), para garantir a solvência e o lucro do sistema. Para a previdência privada fechada, um carregamento pode ser utilizado para fundos menores por causa da variância associada ao processo.



Para Regimes Próprios de Previdência Social – RPPS, a variância pode ser absorvida pelo sistema, mas num sistema de repartição a escolha adequada permite uma melhor avaliação dos gastos futuros, bem como um melhor planejamento da política de pessoal.

Para tentar resumir o resultado da análise de aderência, consideram-se sete intervalos etários: de adultos jovens, 20 a 30 anos e 30 a 40 anos; os de indivíduos de meia idade, 40 a 50 anos e 50 a 60 anos; os de terceira idade, 60 a 70 anos; e os de quarta idade, 70 a 80 anos e 80 a 90 anos. Nesta análise não serão considerados os valores estimados para idades abaixo de 20 anos e acima de 90 anos. Utilizaram-se duas figuras de mérito para mensurar esse grau de aderência:

- o erro quadrático médio; e
- a logverossimilhança.

O erro quadrático médio (EQM), para os dados brutos com relação a uma dada tábua, em princípio, mediria a variabilidade intrínseca dos dados utilizados para o ajuste (considerando-se que é uma população finita e, para algumas idades, bem pequena) supondo que a tábua fosse a que corretamente descrevesse a mortalidade da população. Esperar-se-ia que à tábua correta correspondesse um menor valor desta figura de mérito. Para uma dada tábua  $tb$ , com taxa de mortalidade  $q_{x,s}^{tb}$ , o EQM para o intervalo de idades  $(i,j)$ , seria definido como:

$$EQM(i, j) = \frac{1}{j - i + 1} \sum_{x=i}^j \left( q_{x,s} - q_{x,s}^{tb} \right)^2, \text{ onde } q_{x,s} \text{ corresponde à}$$

probabilidade de óbito para a idade  $x$  e sexo  $s$ , calculada a partir dos dados brutos, e  $q_{x,s}^{tb}$ , corresponde à probabilidade da tábua em questão para a mesma idade e sexo.

Na seqüência são apresentados para a população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo, gráficos com as informações dos erros quadráticos médios (EQM) por sexo e grupo etário, bem como as tabelas correspondentes. Para cada linha das tabelas (combinação sexo/tipo de cobertura),

a tábua com melhor aderência para o intervalo correspondente na coluna está numa célula com sombreado (em itálico verde), e a tábua com pior aderência está em negrito (vermelho). Consideram-se que diferenças menores que o erro quadrático médio entre os dados observados e a curva ajustada seriam consideradas não significativas e, portanto, aparecem também em sombreado (em itálico verde) os valores com distância ao mínimo menor do que esse erro quadrático médio. Aparecem também em negrito (vermelho), os valores com diferença ao máximo menor que esse erro.

A outra forma de verificar a qualidade do ajuste é calcular-se a logverossimilhança<sup>80</sup>,  $l(q_{x,s})$ . Considerando-se que a distribuição de óbitos para uma dada idade  $x$  e sexo  $s$  segue, como já mencionado, uma distribuição binomial  $B(N_{x,s}; q_{x,s})$ , onde  $N_{x,s}$  é a população (no caso, da de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo) com idade  $x$  e  $q_{x,s}$ , a probabilidade de óbito para a mesma população com um vetor de observações  $y$  (e valores  $y_{x,s}$  para a idade  $x$  e sexo  $s$ ) seria então:

$$f(y) = \prod_x \binom{N_{x,s}}{y_{x,s}} (q_{x,s})^{y_{x,s}} * (1 - q_{x,s})^{N_{x,s} - y_{x,s}}$$

e a logverossimilhança correspondente seria:

$$l(q_{x,s}) = \log f(y) = \sum_x \log \binom{N_{x,s}}{y_{x,s}} + y_{x,s} * \log(q_{x,s}) + (N_{x,s} - y_{x,s}) * \log(1 - q_{x,s})$$

Considerando-se que o primeiro termo do lado direito da última equação é independente da tábua utilizada, na procura pela função que maximize a verossimilhança é suficiente comparar os valores correspondentes aos outros dois termos.

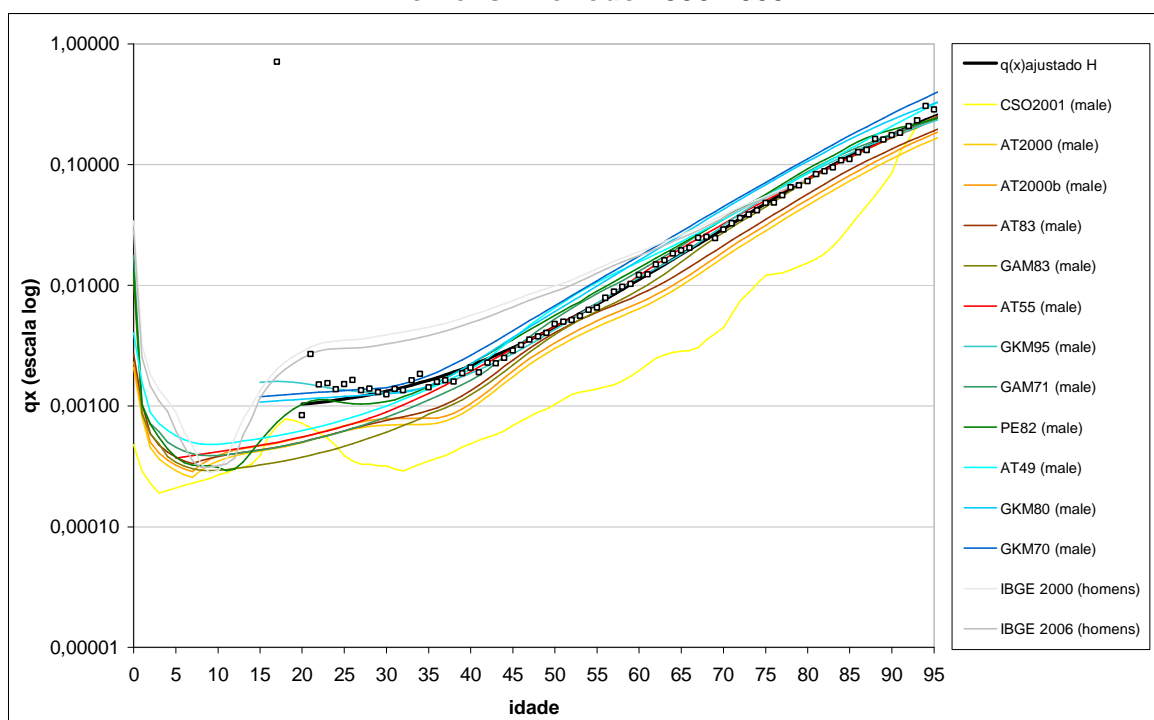
---

<sup>80</sup> Ou a verossimilhança. Considerando que a função logarítmica é monotônica crescente, a determinação dos máximos da verossimilhança ou da logverossimilhança são equivalentes.

São apresentados para análise os gráficos com os valores da logverossimilhança calculados (ignorando-se o primeiro termo) para cada combinação de sexo e grupo etário, bem como as tabelas correspondentes. Nessas tabelas também, para cada intervalo etário e tábua considerada, os valores são listados, e os máximos aparecem em células com sombreado (itálico verde), enquanto os mínimos aparecem em negrito (vermelho). Em se tratando de variáveis aleatórias, é comum que asserções sobre o máximo e o mínimo sejam feitas levando-se em conta um intervalo de confiança. Os valores que estão abaixo do máximo, porém no intervalo de confiança correspondente aparecem também com sombreado (itálico verde). Correspondentemente, os valores no intervalo de confiança associados ao mínimo aparecem grafados em negrito (vermelho).

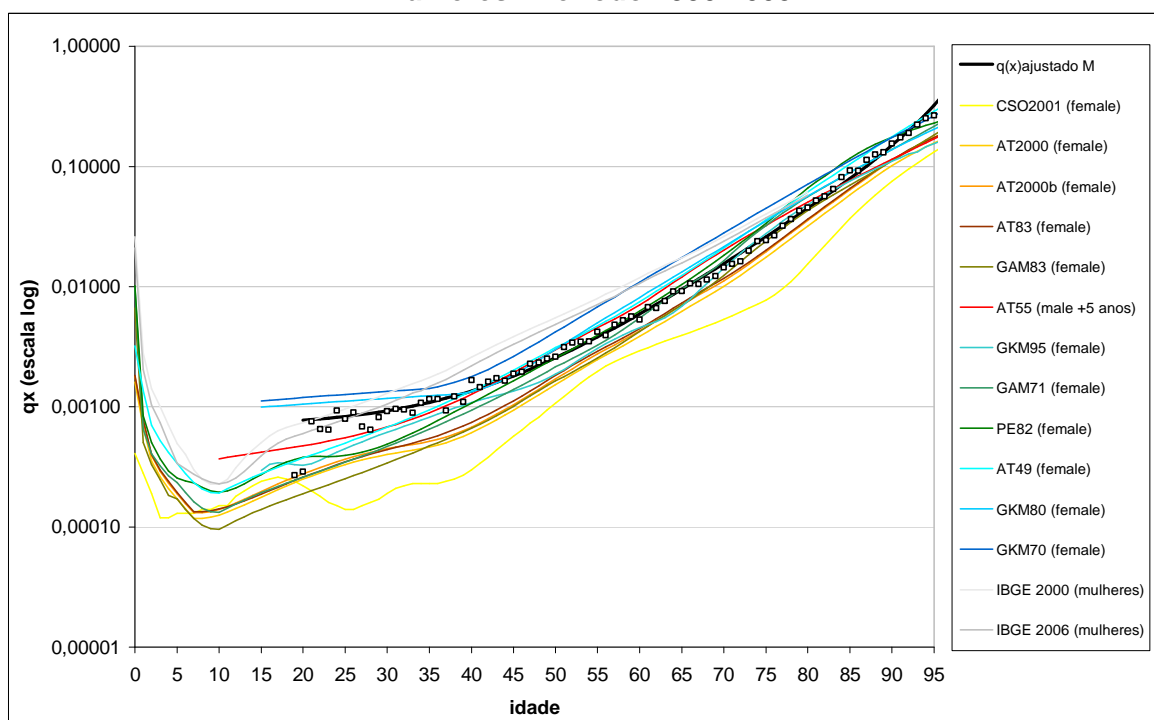
A vantagem da verossimilhança sobre o EQM é que a primeira figura de mérito leva em conta não só a distribuição estatística dos dados como também o perfil etário da população envolvida. O EQM poderia ser modificado para levar em conta o tamanho diferenciado de cada grupo etário bem como da probabilidade específica. O EQM pode ser considerado como uma medida que independe da distribuição etária da população e nos casos onde não existe esta informação é uma das poucas figuras de mérito que pode ser calculada. Como já mencionado, para se ter uma idéia global das tábuas ajustadas, das tábuas utilizadas pelo mercado e sua aderência aos dados (população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo), o gráfico d 1 apresenta os dados brutos, os valores das tábuas selecionadas e da tábua ajustada para os homens, gráfico d 2 apresenta as mesmas informações para as mulheres e o gráfico d 3 para ambos os sexos. O grau de aderência das diferentes tábuas utilizadas pelo mercado varia bastante com a idade e o sexo. Note que a população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo apresenta uma mortalidade observada extremamente elevada entre a população masculina jovem, experiência que não é duplicada em nenhuma das taxas sob análise, a não ser nas tábuas do IBGE, que descrevem a mortalidade da população brasileira como um todo.

**Gráfico D 1 - Probabilidade de óbito - Dados brutos, tábuas selecionadas (mercado) e ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Homens - Período 1990-2005**



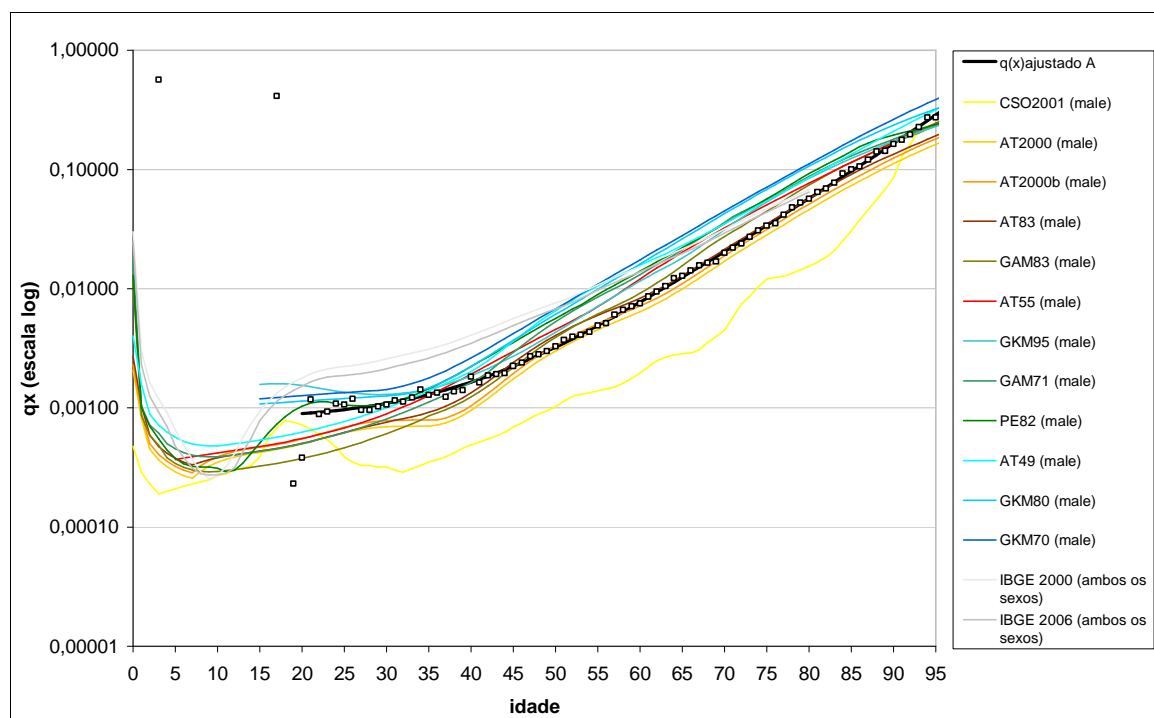
Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 2 - Probabilidade de óbito - Dados brutos, tábuas selecionadas (mercado) e ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Mulheres - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 3 - Probabilidade de óbito - Dados brutos, tábuas selecionadas (mercado) e ajustadas para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Ambos os Sexos - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

A tabela d 2 e o gráfico d 4, a tabela d 3 e o gráfico d 5, e a tabela d 4 e o gráfico d 6 apresentam, respectivamente, os erros quadráticos médios das tábuas do mercado e da tábua ajustada em relação aos valores observados para a população de homens, mulheres e ambos os sexos e para os grupos de idade selecionados (grupos decenais entre 20 e 90 anos), lembrando mais uma vez o caráter de variável aleatória desta estatística e seu intervalo de confiança associado.

Para alguns grupos etários, os valores encontrados do mínimo e do máximo para o EQM são muito próximos e não é possível estatisticamente fazer uma discriminação dos dois. Nestes casos, a coluna aparece toda em negrito (vermelho). Visualmente no gráfico os pontos referentes àquela faixa etária encontram-se muito próximos.

Analisando a tabela d 2 (homens) de forma global para todos os grupos decenais, observa-se que a tábua AT-55 e a GKM-95 apresentam a melhor situação em seis grupos etários. Se considerar-se que em dezembro de 2005 apenas 6,7%

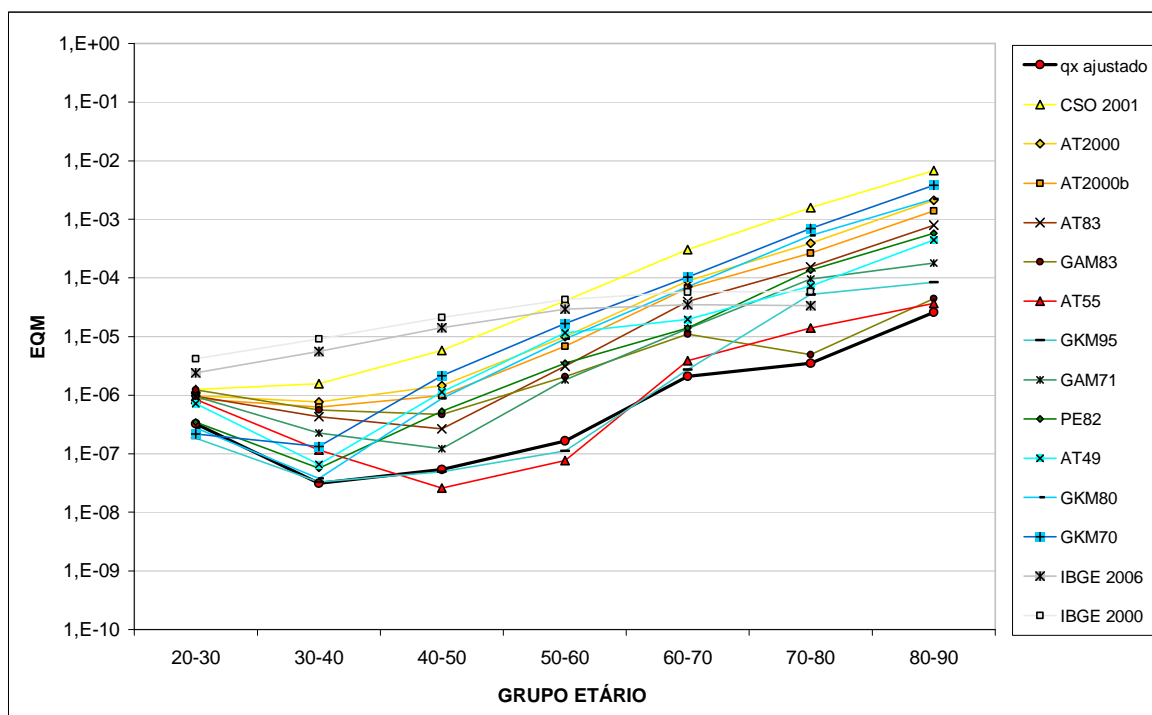
dos homens expostos ao risco tinham menos de 30 anos, a melhor opção seria a tábua AT-55. A pior situação é a da tábua IBGE-2000, seguida pela CSO-2001.

**Tabela D 2 - Erro Quadrático Médio - dados brutos da população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo com relação a tábuas selecionadas e ajustada - Homens**

TÁBUA	faixa etária						
	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
AT-2000	9,82E-07	7,63E-07	1,45E-06	9,95E-06	8,82E-05	3,90E-04	2,10E-03
AT-2000b	8,67E-07	6,26E-07	9,87E-07	6,84E-06	6,70E-05	2,66E-04	1,38E-03
AT-55	8,51E-07	1,17E-07	2,61E-08	7,69E-08	3,85E-06	1,40E-05	3,72E-05
AT-83	9,57E-07	4,26E-07	2,66E-07	3,12E-06	4,00E-05	1,53E-04	8,00E-04
GAM-71	9,50E-07	2,24E-07	1,22E-07	1,82E-06	1,36E-05	9,56E-05	1,78E-04
GAM-83	1,24E-06	5,60E-07	4,68E-07	2,07E-06	1,10E-05	4,88E-06	4,49E-05
GKM-70	2,17E-07	1,34E-07	2,15E-06	1,66E-05	1,02E-04	6,98E-04	3,83E-03
GKM-80	2,77E-07	3,79E-08	8,81E-07	9,14E-06	7,01E-05	5,31E-04	2,21E-03
GKM-95	1,84E-07	3,28E-08	4,94E-08	1,12E-07	2,75E-06	5,21E-05	8,38E-05
PE-82	3,46E-07	5,65E-08	5,34E-07	3,47E-06	1,40E-05	1,37E-04	5,83E-04
IBGE-2000	4,17E-06	9,12E-06	2,13E-05	4,31E-05	5,72E-05	5,86E-05	
CSO-2001	1,25E-06	1,58E-06	5,79E-06	4,08E-05	3,04E-04	1,57E-03	6,79E-03
AT-49	7,22E-07	6,57E-08	1,13E-06	1,15E-05	1,97E-05	7,20E-05	4,46E-04
IBGE-2006	2,41E-06	5,54E-06	1,41E-05	2,96E-05	3,53E-05	3,40E-05	
$q_x^{ajustado}$	3,23E-07	3,12E-08	5,36E-08	1,67E-07	2,11E-06	3,49E-06	2,59E-05

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 4 - Erro Quadrático Médio entre tábuas selecionadas e a tábua ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Homens - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

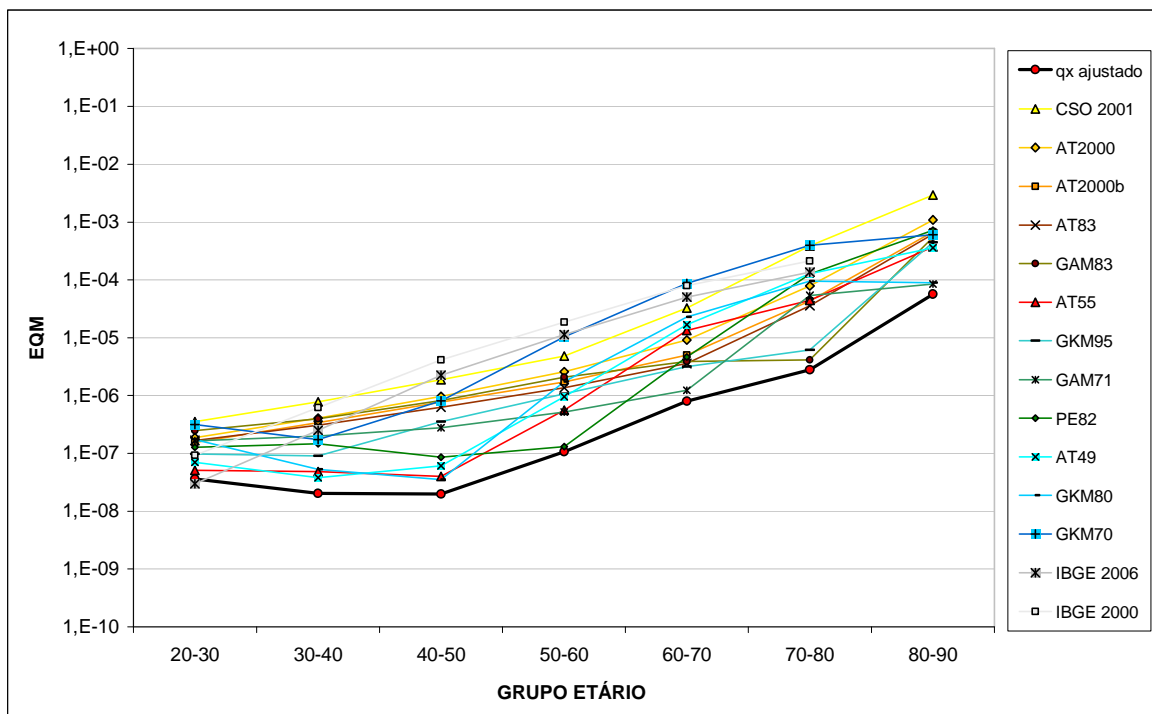
Analisando a tabela d 3 (mulheres) para todos os grupos decenais, observa-se que as tábuas AT-55, PE-82 e AT-49 representam a melhor situação em três grupos, cada uma delas. Para as idades acima dos 60 anos, onde normalmente ocorre a concessão dos benefícios de aposentadoria, a melhor tábua seria a GAM-71. No caso das mulheres não existe uma única tábua que poderia ser considerada a melhor, de uma forma global. A pior situação é a das tábuas CSO-2001 e GKM-70, seguidas da IBGE-2000.

**Tabela D 3 - Erro Quadrático Médio - dados brutos da população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo com relação a tábuas selecionadas e ajustada - Mulheres**

TÁBUA	faixa etária						
	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
AT-2000	1,85E-07	4,06E-07	9,73E-07	2,58E-06	9,10E-06	7,83E-05	1,09E-03
AT-2000b	1,56E-07	3,41E-07	7,65E-07	1,73E-06	4,99E-06	4,32E-05	6,81E-04
AT-55	5,12E-08	4,85E-08	3,99E-08	5,61E-07	1,34E-05	4,43E-05	3,70E-04
AT-83	1,68E-07	3,05E-07	6,24E-07	1,36E-06	3,58E-06	3,59E-05	6,20E-04
GAM-71	1,64E-07	1,99E-07	2,77E-07	5,14E-07	1,23E-06	5,38E-05	8,44E-05
GAM-83	2,47E-07	3,97E-07	8,21E-07	2,10E-06	3,86E-06	4,13E-06	5,47E-04
GKM-70	3,15E-07	1,74E-07	8,07E-07	1,03E-05	8,63E-05	3,98E-04	6,06E-04
GKM-80	1,73E-07	5,30E-08	3,50E-08	1,75E-06	2,29E-05	9,50E-05	8,82E-05
GKM-95	9,74E-08	9,02E-08	3,51E-07	1,07E-06	3,16E-06	6,14E-06	4,42E-04
PE-82	1,27E-07	1,48E-07	8,57E-08	1,32E-07	4,58E-06	1,25E-04	7,22E-04
IBGE-2000	9,26E-08	6,17E-07	4,13E-06	1,85E-05	7,85E-05	2,13E-04	
CSO-2001	3,51E-07	7,73E-07	1,88E-06	4,76E-06	3,28E-05	3,88E-04	2,92E-03
AT-49	7,00E-08	3,80E-08	6,12E-08	9,54E-07	1,68E-05	1,26E-04	3,59E-04
IBGE-2006	2,99E-08	2,49E-07	2,25E-06	1,14E-05	5,08E-05	1,35E-04	
$q_x^{ajustado}$	3,59E-08	2,02E-08	1,96E-08	1,07E-07	7,94E-07	2,80E-06	5,67E-05

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 5 - Erro Quadrático Médio entre tábuas selecionadas e a tábua ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Mulheres - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

Analisando a tabela d 4 (ambos os sexos) para todos os grupos decenais, observa-se que a tábua AT-83 representa a melhor situação em 2 grupos, normalmente onde ocorrem a concessão dos benefícios de aposentadoria (60 a 80 anos). Pior do que no caso das mulheres, para ambos os sexos também não existe nenhuma melhor tábua, analisando-se de uma forma global. A tábua de pior desempenho é a GKM-70, seguida da IBGE-2000.

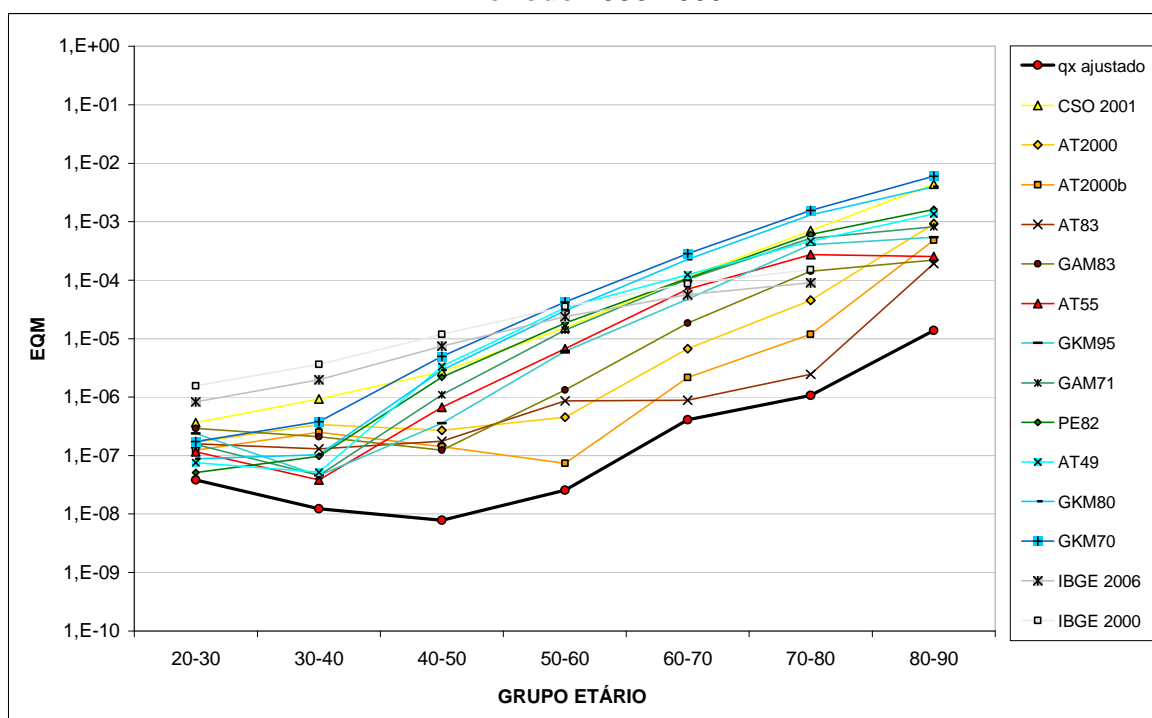


**Tabela D 4 - Erro Quadrático Médio - dados brutos da população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo com relação a tábuas selecionadas e ajustada - Ambos os Sexos**

	faixa etária						
TÁBUA	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
AT-2000	1,72E-07	3,37E-07	2,70E-07	4,53E-07	6,68E-06	4,56E-05	9,28E-04
AT-2000b	1,24E-07	2,49E-07	1,42E-07	7,41E-08	2,18E-06	1,18E-05	4,85E-04
AT-55	1,17E-07	3,83E-08	6,72E-07	6,74E-06	6,95E-05	2,75E-04	2,54E-04
AT-83	1,60E-07	1,32E-07	1,74E-07	8,66E-07	8,82E-07	2,46E-06	1,92E-04
GAM-71	1,56E-07	4,56E-08	1,10E-06	1,40E-05	1,03E-04	5,22E-04	8,27E-04
GAM-83	2,89E-07	2,10E-07	1,25E-07	1,33E-06	1,84E-05	1,41E-04	2,21E-04
GKM-70	1,73E-07	3,78E-07	4,97E-06	4,28E-05	2,84E-04	1,56E-03	6,03E-03
GKM-80	8,85E-08	1,04E-07	2,90E-06	3,01E-05	2,28E-04	1,30E-03	3,97E-03
GKM-95	2,37E-07	4,56E-08	3,55E-07	6,09E-06	4,75E-05	4,05E-04	5,42E-04
PE-82	5,16E-08	9,77E-08	2,22E-06	1,85E-05	1,08E-04	6,08E-04	1,61E-03
IBGE-2000	1,57E-06	3,62E-06	1,18E-05	3,55E-05	8,69E-05	1,51E-04	
CSO-2001	3,67E-07	9,27E-07	2,73E-06	1,52E-05	1,12E-04	7,05E-04	4,39E-03
AT-49	7,57E-08	5,19E-08	3,34E-06	3,38E-05	1,24E-04	4,64E-04	1,34E-03
IBGE-2006	8,27E-07	1,98E-06	7,43E-06	2,37E-05	5,62E-05	9,04E-05	
$q_x^{ajustado}$	3,81E-08	1,23E-08	7,89E-09	2,56E-08	4,09E-07	1,07E-06	1,39E-05

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 6 - Erro Quadrático Médio entre tábuas selecionadas e a tábua ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Ambos os Sexos - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

A tabela d 5 e o gráfico d 7, a tabela d 6 e o gráfico d 8, e a tabela d 7 e o gráfico d 9 apresentam, respectivamente, os valores para as logverossimilhanças calculadas para homens, mulheres e ambos os sexos da população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo.

Pelo menos na inspeção visual, a tábua ajustada aparece como uma das melhores, senão a melhor opção para quase todos os grupos etários de homens, mulheres e ambos os sexos, e a tábua CSO-2001 aparece como a opção de menor aderência em todos os casos.

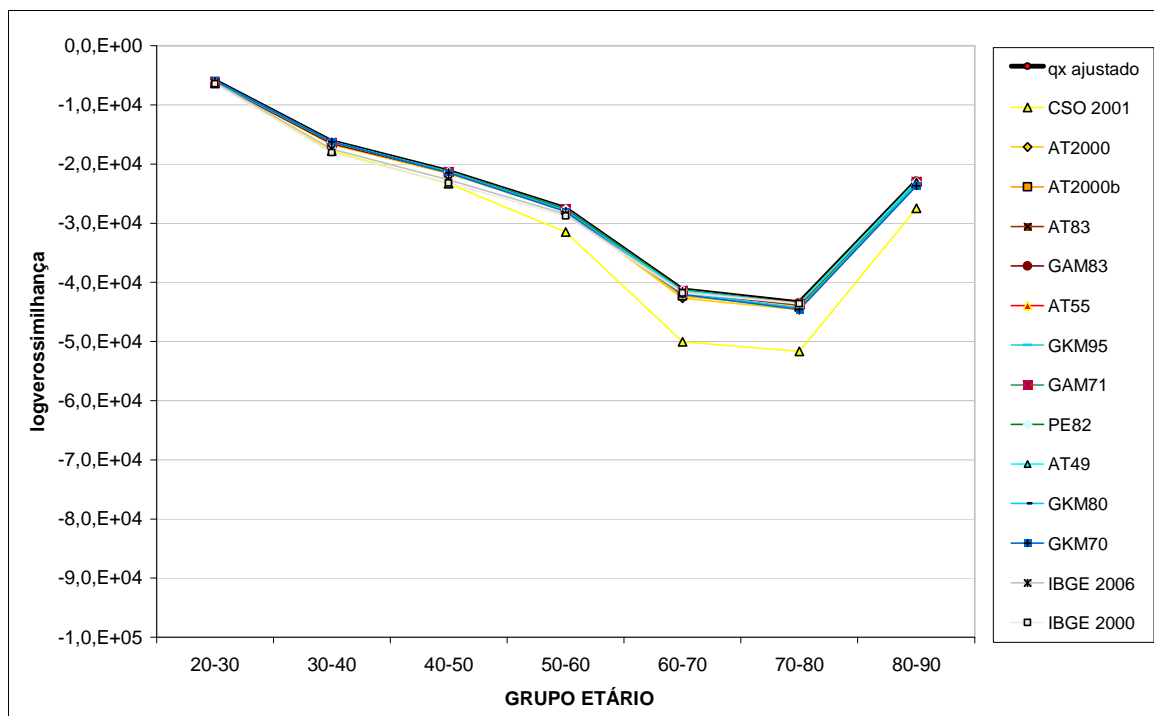
Analisando a tabela d 5 (homens) de forma global para todos os grupos decenais, observa-se que a tábua GKM-95 é a melhor em todos os sete grupos etários selecionados. A tábua AT-55 também é uma ótima opção (sendo a melhor em seis grupos etários), se considerarmos que em dezembro de 2005 apenas 3,6% das mulheres expostas ao risco tinham menos de 30 anos. A pior situação é a da tábua CSO-2001, seguida pela IBGE-2000.

**Tabela D 5 - Logverossimilhança - dados brutos com relação a tábuas selecionadas e ajustada - população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Homens - Período 1990-2005**

TÁBUA	Faixa Etária						
	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
AT-2000	-6,08E+03	-1,67E+04	-2,16E+04	-2,80E+04	-4,26E+04	-4,46E+04	-2,36E+04
AT-2000b	-6,04E+03	-1,66E+04	-2,15E+04	-2,78E+04	-4,23E+04	-4,42E+04	-2,33E+04
AT-55	-6,03E+03	-1,63E+04	-2,12E+04	-2,76E+04	-4,13E+04	-4,35E+04	-2,29E+04
AT-83	-6,07E+03	-1,65E+04	-2,13E+04	-2,77E+04	-4,18E+04	-4,38E+04	-2,31E+04
GAM-71	-6,06E+03	-1,64E+04	-2,12E+04	-2,76E+04	-4,14E+04	-4,36E+04	-2,30E+04
GAM-83	-6,19E+03	-1,66E+04	-2,13E+04	-2,76E+04	-4,14E+04	-4,34E+04	-2,29E+04
GKM-70	-5,89E+03	-1,63E+04	-2,15E+04	-2,80E+04	-4,20E+04	-4,46E+04	-2,37E+04
GKM-80	-5,90E+03	-1,62E+04	-2,13E+04	-2,78E+04	-4,18E+04	-4,43E+04	-2,34E+04
GKM-95	-5,89E+03	-1,62E+04	-2,12E+04	-2,76E+04	-4,13E+04	-4,35E+04	-2,29E+04
PE-82	-5,92E+03	-1,63E+04	-2,13E+04	-2,77E+04	-4,14E+04	-4,37E+04	-2,31E+04
IBGE-2000	-6,39E+03	-1,80E+04	-2,32E+04	-2,88E+04	-4,18E+04	-4,36E+04	
CSO-2001	-6,37E+03	-1,78E+04	-2,33E+04	-3,15E+04	-5,01E+04	-5,17E+04	-2,75E+04
AT-49	-5,99E+03	-1,63E+04	-2,13E+04	-2,79E+04	-4,14E+04	-4,36E+04	-2,30E+04
IBGE-2006	-6,21E+03	-1,74E+04	-2,27E+04	-2,85E+04	-4,16E+04	-4,35E+04	
$q_x^{ajustado}$	-5,91E+03	-1,62E+04	-2,12E+04	-2,76E+04	-4,13E+04	-4,34E+04	-2,29E+04

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 7 - Logverossimilhança das tábuas selecionadas e a ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo por grupos de idade - Homens - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

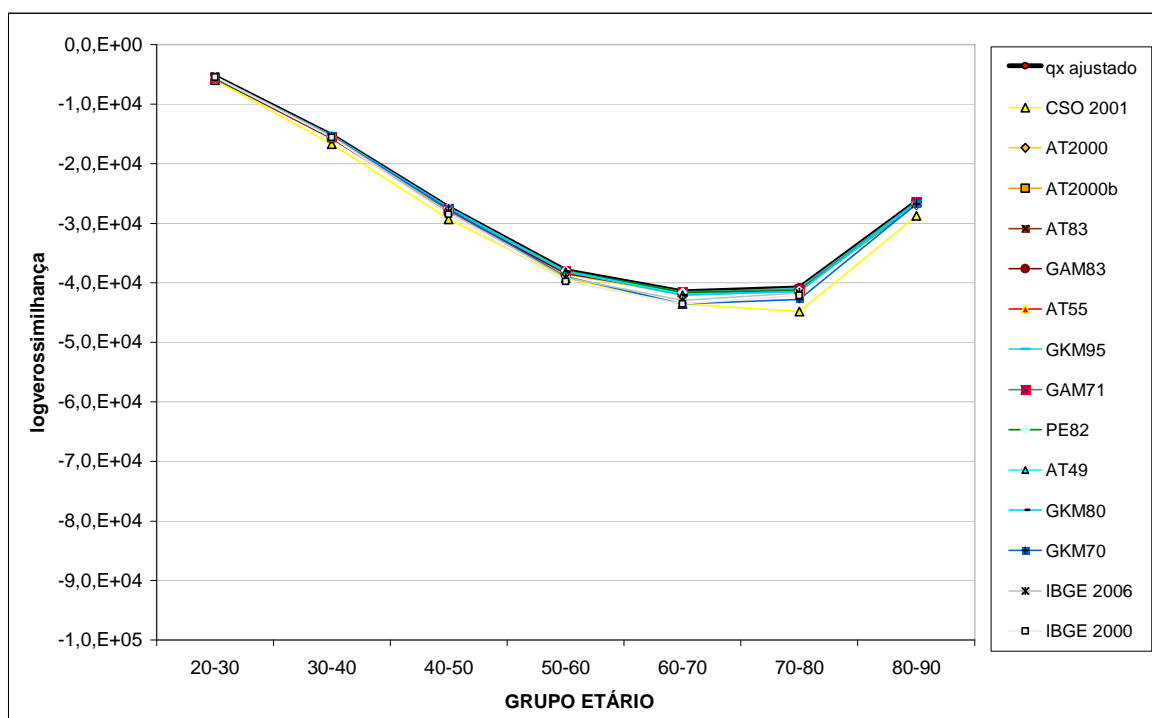
Analisando a tabela d 6 (mulheres) para todos os grupos decenais, observa-se que a tábua AT-55 se apresenta como melhor opção em quatro grupos selecionados. Para as idades acima dos 60 anos, a melhor tábua seria a GAM-71. A pior situação é a da tábua CSO-2001, seguida da IBGE-2000.

**Tabela D 6 - Logverossimilhança - dados brutos com relação a tábuas selecionadas e ajustada - população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Mulheres – Período 1990-2005**

TÁBUA	faixa etária						
	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
AT-2000	-5,56E+03	-1,58E+04	-2,81E+04	-3,86E+04	-4,20E+04	-4,14E+04	-2,69E+04
AT-2000b	-5,53E+03	-1,57E+04	-2,80E+04	-3,83E+04	-4,18E+04	-4,11E+04	-2,67E+04
AT-55	-5,42E+03	-1,53E+04	-2,74E+04	-3,80E+04	-4,19E+04	-4,12E+04	-2,65E+04
AT-83	-5,54E+03	-1,56E+04	-2,78E+04	-3,82E+04	-4,17E+04	-4,11E+04	-2,66E+04
GAM-71	-5,54E+03	-1,55E+04	-2,76E+04	-3,81E+04	-4,15E+04	-4,11E+04	-2,64E+04
GAM-83	-5,66E+03	-1,58E+04	-2,80E+04	-3,84E+04	-4,17E+04	-4,09E+04	-2,65E+04
GKM-70	-5,50E+03	-1,54E+04	-2,76E+04	-3,90E+04	-4,35E+04	-4,28E+04	-2,68E+04
GKM-80	-5,45E+03	-1,53E+04	-2,74E+04	-3,81E+04	-4,21E+04	-4,15E+04	-2,64E+04
GKM-95	-5,46E+03	-1,53E+04	-2,76E+04	-3,82E+04	-4,17E+04	-4,09E+04	-2,65E+04
PE-82	-5,50E+03	-1,54E+04	-2,74E+04	-3,80E+04	-4,16E+04	-4,14E+04	-2,68E+04
IBGE-2000	-5,44E+03	-1,56E+04	-2,85E+04	-3,98E+04	-4,35E+04	-4,21E+04	
CSO-2001	-5,92E+03	-1,68E+04	-2,93E+04	-3,93E+04	-4,35E+04	-4,48E+04	-2,88E+04
AT-49	-5,44E+03	-1,53E+04	-2,74E+04	-3,81E+04	-4,20E+04	-4,15E+04	-2,66E+04
IBGE-2006	-5,41E+03	-1,54E+04	-2,81E+04	-3,92E+04	-4,29E+04	-4,17E+04	
$q_x^{ajustado}$	-5,40E+03	-1,53E+04	-2,74E+04	-3,80E+04	-4,15E+04	-4,09E+04	-2,64E+04

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 8 - Logverossimilhança das tábuas selecionadas e a ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo por grupos de idade - Mulheres - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

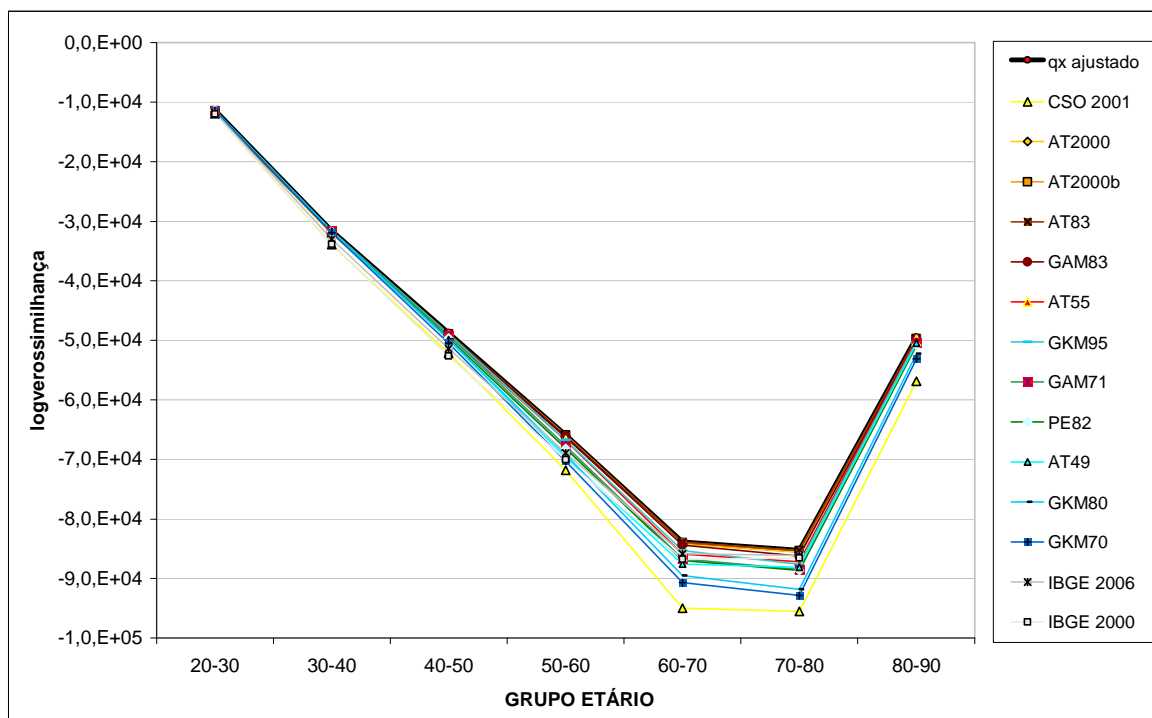
Analisando a tabela d 7 (ambos os sexos) para todos os grupos decenais, observa-se que a tábua AT-83 representa a melhor situação em cinco grupos, inclusive naqueles onde ocorrem a concessão dos benefícios de aposentadoria. As tábuas de pior desempenho são a CSO-2001, seguida da IBGE-2000.

**Tabela D 7 - Logverossimilhança - dados brutos com relação a tábuas selecionadas e ajustada - população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo - Ambos os Sexos - Período 1990-2005**

	Faixa Etária						
TÁBUA	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
AT-2000	-1,15E+04	-3,21E+04	-4,90E+04	-6,60E+04	-8,42E+04	-8,56E+04	-5,01E+04
AT-2000b	-1,14E+04	-3,20E+04	-4,89E+04	-6,59E+04	-8,40E+04	-8,53E+04	-4,97E+04
AT-55	-1,14E+04	-3,16E+04	-4,91E+04	-6,68E+04	-8,59E+04	-8,72E+04	-4,98E+04
AT-83	-1,15E+04	-3,18E+04	-4,89E+04	-6,61E+04	-8,39E+04	-8,53E+04	-4,96E+04
GAM-71	-1,15E+04	-3,16E+04	-4,92E+04	-6,77E+04	-8,67E+04	-8,85E+04	-5,04E+04
GAM-83	-1,16E+04	-3,19E+04	-4,88E+04	-6,62E+04	-8,44E+04	-8,62E+04	-4,98E+04
GKM-70	-1,14E+04	-3,19E+04	-5,05E+04	-7,03E+04	-9,07E+04	-9,28E+04	-5,31E+04
GKM-80	-1,14E+04	-3,17E+04	-4,98E+04	-6,92E+04	-8,95E+04	-9,18E+04	-5,23E+04
GKM-95	-1,14E+04	-3,16E+04	-4,89E+04	-6,67E+04	-8,53E+04	-8,77E+04	-5,01E+04
PE-82	-1,14E+04	-3,17E+04	-4,96E+04	-6,82E+04	-8,70E+04	-8,86E+04	-5,09E+04
IBGE-2000	-1,20E+04	-3,38E+04	-5,26E+04	-7,00E+04	-8,67E+04	-8,66E+04	
CSO-2001	-1,19E+04	-3,39E+04	-5,21E+04	-7,18E+04	-9,50E+04	-9,55E+04	-5,68E+04
AT-49	-1,14E+04	-3,16E+04	-4,99E+04	-6,97E+04	-8,76E+04	-8,81E+04	-5,05E+04
IBGE-2006	-1,17E+04	-3,30E+04	-5,14E+04	-6,89E+04	-8,59E+04	-8,61E+04	
$q_x^{ajustado}$	-1,14E+04	-3,16E+04	-4,88E+04	-6,59E+04	-8,39E+04	-8,53E+04	-4,95E+04

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Gráfico D 9 - Logverossimilhança das tábuas selecionadas e a ajustada para a população de funcionários públicos civis do Estado de São Paulo por grupos de idade - Ambos os Sexos - Período 1990-2005**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

A tabela d 8 apresenta as melhores tábuas de mortalidade por faixa etária (dentre as utilizadas neste comparativo), utilizando-se o critério da máxima verossimilhança, isto é, melhor aderência aos dados da população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo. Sabe-se que em função da legislação atual (ver Anexo 1 da Portaria MPS nº 4992 / 99) apenas uma tabela de mortalidade deve ser utilizada para todas as idades (tendo uma diferenciação apenas para os eventos de sobrevivência e morte), mas essa tabela é importante para ter-se uma noção de quais tábuas se adequariam melhor ao respectivo intervalo etário.

**Tabela D 8 - Logverossimilhança - dados brutos com relação a tábuas selecionadas - população de funcionários públicos do Estado de São Paulo - tábuas selecionadas segundo os maiores valores da função de verossimilhança**

FAIXA ETÁRIA	HOMENS	MULHERES	AMBOS
20-30	GKM-70 GKM-80 GKM-95 PE-82	AT-55 IBGE-2006	AT-49 GKM-80 PE-82
30-40	AT-49 AT-55 GKM-70 GKM-80 GKM-95 PE-82	AT-49 AT-55 GKM-80	AT-49 AT-55 GAM-71 GKM-95 PE-82
40-50	AT-55 GAM-71 GKM-95	AT-49 AT-55 GKM-80 PE-82	AT-2000b AT-83 GAM-83 GKM-95
50-60	AT-55 GAM-71 GAM-83 GKM-95	AT-49 AT-55 GAM-71 PE-82	AT-2000 AT-2000b AT-83 GAM-83
60-70	AT-55 GAM-71 GKM-95 PE-82	AT-83 GAM-71 PE-82	AT-2000 AT-2000b AT-83 GAM-83
70-80	AT-49 AT-55 GAM-83 GKM-95	GAM-83 GKM-95	AT-2000 AT-2000b AT-83
80-90	AT-49 AT-55 GAM-71 GAM-83	GAM-71 GKM-80	AT-83

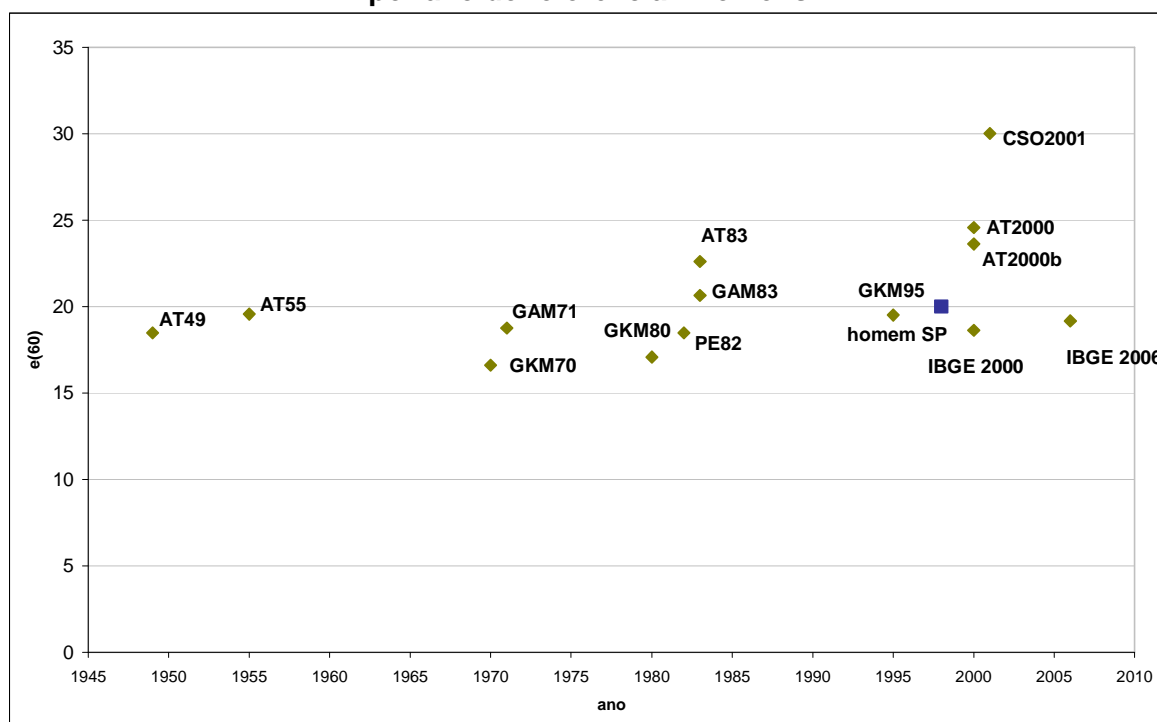
Fonte: elaborada pelo autor.

### **b) Comparação – Esperança de sobrevida a partir de determinada idade**

Freqüentemente não é possível utilizar-se de diferentes tábuas para cada segmento etário. Nesses casos, uma opção é utilizar uma estatística agregada que resuma a tabela de vida, por exemplo  $e_0$  (esperança de vida ao nascer) ou  $e_x$  (esperança de sobrevida a alguma idade  $x$ ). Se a escolha da tabela tem a ver com pagamento de benefícios a partir de uma certa idade, por exemplo 60 anos, uma opção seria utilizar como critério de proximidade da tabela, o valor de  $e_{60}$  (esperança de sobrevida aos 60 anos). Um outro critério tem a ver com o comportamento conservador a ser seguido: na constituição de reservas para pagamento posterior de um benefício é melhor que o erro seja para a constituição de uma reserva maior do

que menor. Sendo assim num mesmo período temporal, usualmente tábuas para benefícios de anuidades correspondem a taxas de mortalidade mais baixas e tábuas para cálculo de seguro de morte (com pagamento único) a mais altas. O gráfico d 10 apresenta esta estatística para as tábuas utilizadas nas comparações e para a população masculina. Para evidenciar que tábuas mais antigas não obrigatoriamente correspondem a uma esperança de sobrevida mais baixa, foi utilizado no eixo dos x o ano de referência da tábua. A tábua ajustada para a população masculina apresenta uma esperança de sobrevida aos 60 anos 8,2% maior do que a tábua AT-49 (*male*). A tabela d 9 apresenta para a população masculina, as esperanças de sobrevida para 20, 50 e 60 anos.

**Gráfico D 10 - Esperança de Vida aos 60 Anos ( $e_{60}$ ) de Idade para tábuas selecionadas por ano de referência - Homens**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.



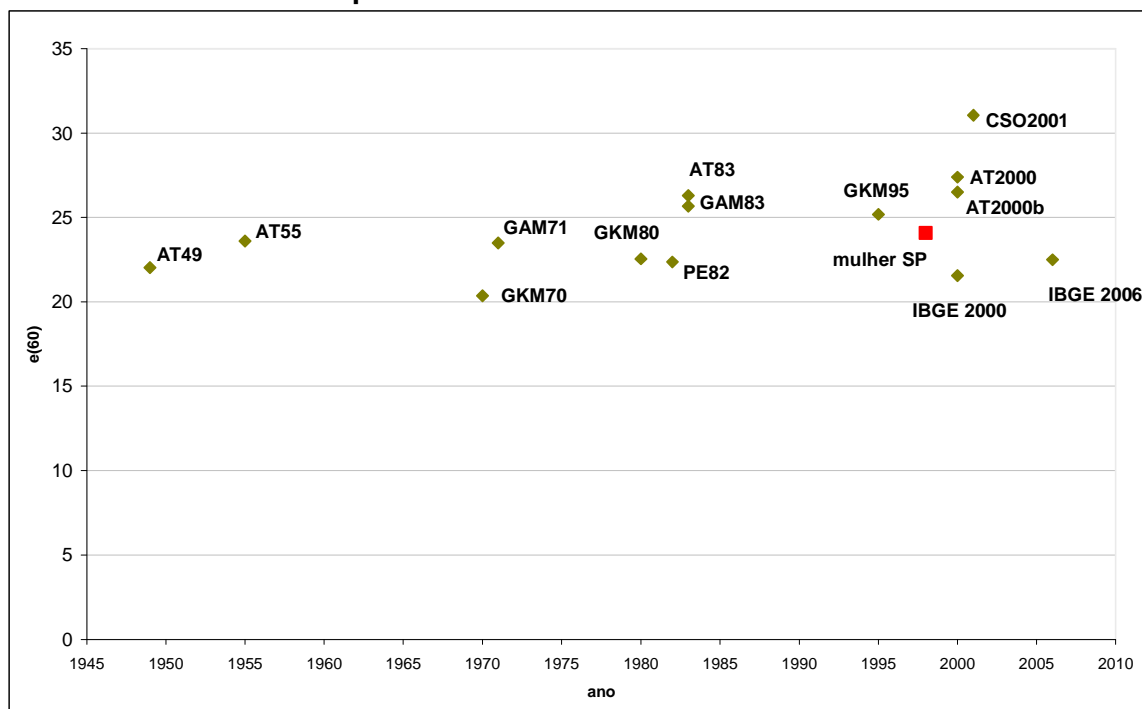
**Tabela D 9 - Tábuas selecionadas e esperança de sobrevida aos 20, 50 e 60 anos - Homens**

TÁBUA	$e_{20}$	$e_{50}$	$e_{60}$	ANO REF
CSO-2001	68,7	39,5	30,0	2001
AT-2000	62,0	33,3	24,6	2000
AT-2000b	60,8	32,3	23,6	2000
AT-83	59,5	31,1	22,6	1983
GAM-83	57,9	29,2	20,6	1983
AT-55	56,1	27,9	19,6	1955
RPPSP-98H	56,1	28,4	20,0	1998
GKM95	55,7	27,9	19,5	1995
GAM71	55,3	26,9	18,8	1971
PE82	54,4	26,5	18,5	1982
AT-49	54,2	26,2	18,5	1949
GKM80	52,9	25,1	17,1	1980
GKM70	52,0	24,5	16,6	1970
IBGE 2006	51,6	26,4	19,2	2006
IBGE 2000	50,3	25,7	18,6	2000

Fonte: PRODESP e  $q_x$  oriundos das tábuas.

O gráfico d 11 e a tabela d 10 apresentam as informações correspondentes para a população feminina. A tábua ajustada para a população feminina apresenta uma esperança de sobrevida aos 60 anos 9,9% maior que a da tábua AT-49 (*female*).

**Gráfico D 11 - Esperança de Vida aos 60 Anos ( $e_{60}$ ) de Idade para tábuas selecionadas por ano de referência - Mulheres**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

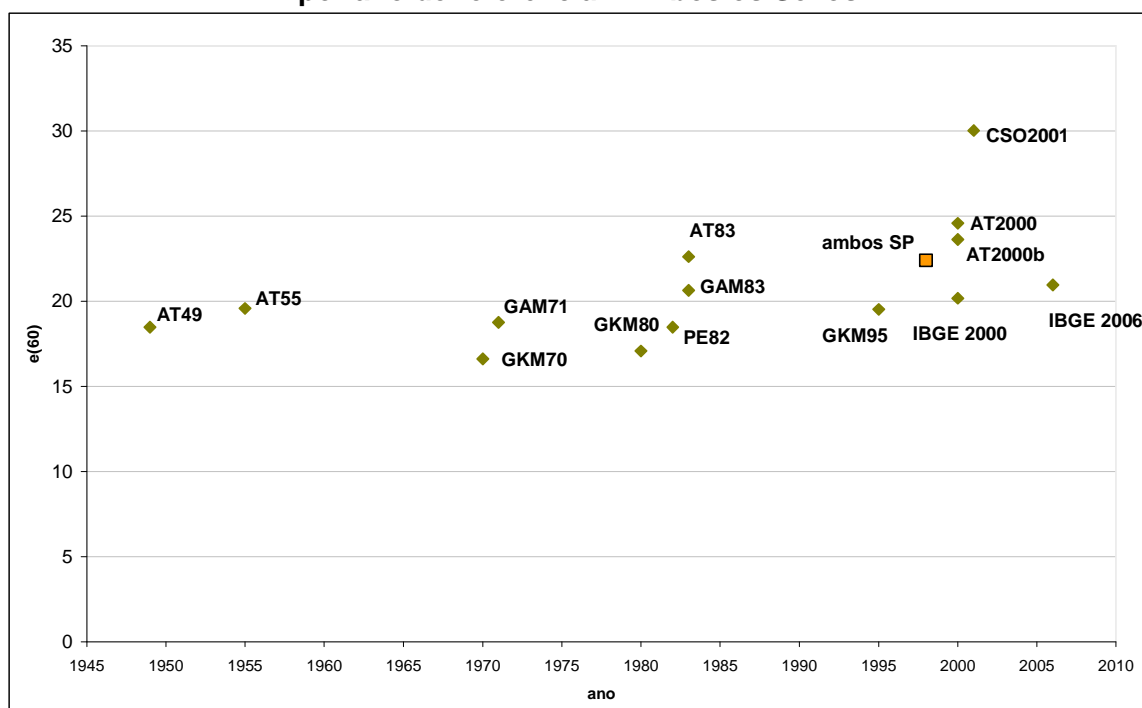
**Tabela D 10 - Tábuas selecionadas e esperança de sobrevida aos 20, 50 e 60 anos - Mulheres**

TÁBUA	$e_{20}$	$e_{50}$	$e_{60}$	ANO REF
CSO-2001	69,9	40,4	31,1	2001
AT-2000	65,8	36,6	27,4	2000
AT-2000b	64,8	35,7	26,5	2000
AT-83	64,5	35,4	26,3	1983
GAM-83	64,1	34,9	25,7	1983
GKM-95	63,2	34,3	25,2	1995
GAM-71	61,6	32,6	23,5	1971
RPPSP-98M	61,5	33,1	24,2	1998
AT-55	61,0	32,4	23,6	1955
PE-82	60,2	31,3	22,4	1982
AT-49	59,4	30,8	22,0	1949
GKM-80	59,4	31,3	22,5	1980
IBGE-2006	58,5	30,7	22,5	2006
IBGE-2000	57,1	29,6	21,6	2000
GKM-70	56,6	28,8	20,4	1970

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

O gráfico d 12 e a tabela d 11 apresentam as informações correspondentes para a população de ambos os sexos. A tábua ajustada para a população de ambos os sexos apresenta uma esperança de sobrevida aos 60 anos 21,2% maior que a da tábua AT-49 (*male*).

**Gráfico D 12 - Esperança de Vida aos 60 Anos ( $e_{60}$ ) de Idade para tábuas selecionadas por ano de referência - Ambos os Sexos**



Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

**Tabela D 11 - Tábuas selecionadas e esperança de sobrevivência aos 20, 50 e 60 anos - população de ambos os sexos**

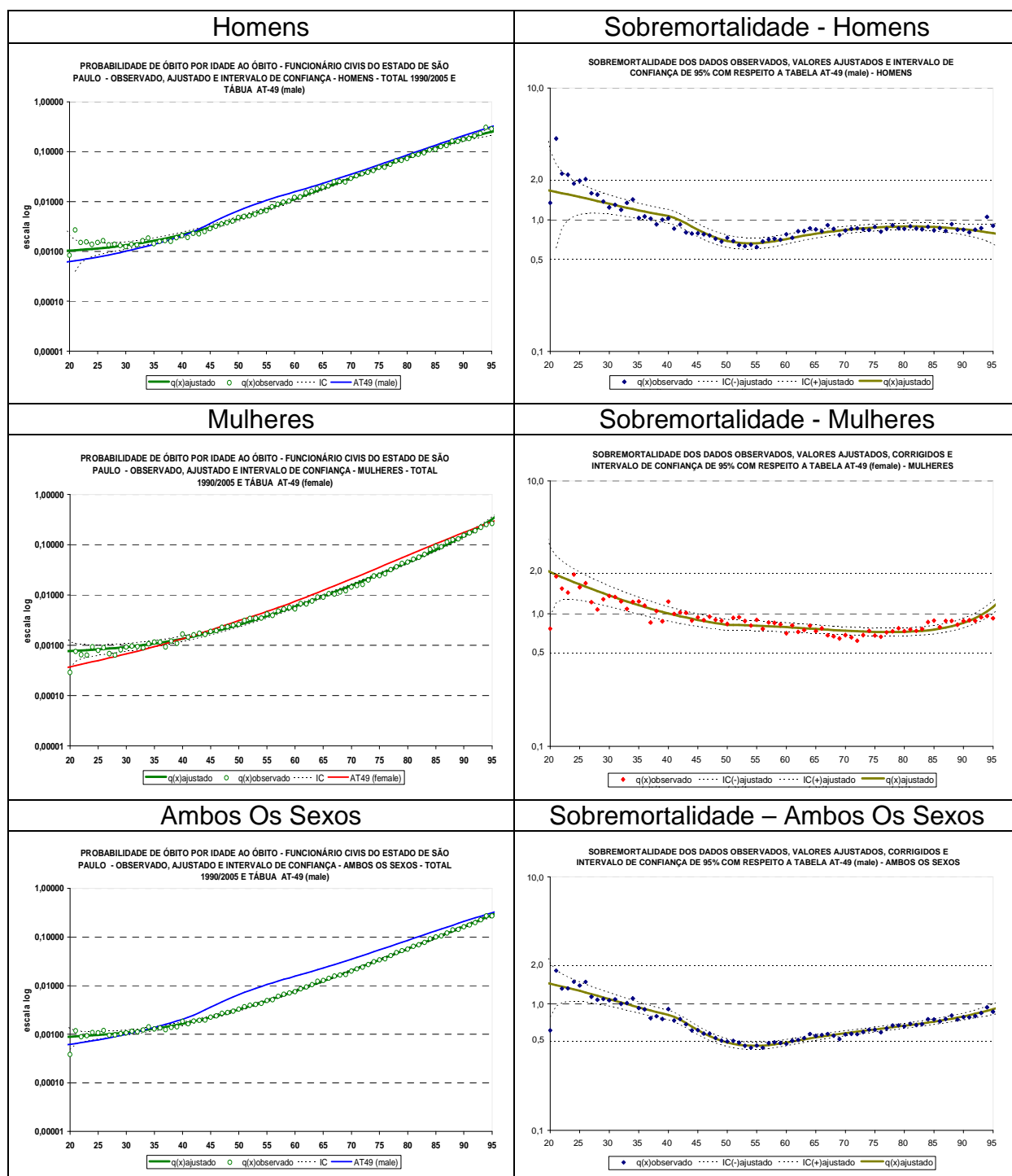
<b>TÁBUA</b>	<b><math>e_{20}</math></b>	<b><math>e_{50}</math></b>	<b><math>e_{60}</math></b>	<b>ANO REF</b>
CSO2001	68,7	39,5	30,0	2001
AT2000	62,0	33,3	24,6	2000
AT2000b	60,8	32,3	23,6	2000
AT83	59,5	31,1	22,6	1983
RPPSP-98A	59,2	31,1	22,4	1998
GAM83	57,9	29,2	20,6	1983
AT55	56,1	27,9	19,6	1955
GKM95	55,7	27,9	19,5	1995
GAM71	55,3	26,9	18,8	1971
IBGE2006	55,1	28,6	21,0	2006
PE82	54,4	26,5	18,5	1982
<b>AT-49</b>	<b>54,2</b>	<b>26,2</b>	<b>18,5</b>	<b>1949</b>
IBGE 2000	53,6	27,7	20,2	2000
GKM80	52,9	25,1	17,1	1980
GKM70	52,0	24,5	16,6	1970

Fonte: PRODESP, SOA e IBGE.

A seguir apresenta-se para todas as tábuas selecionadas, um conjunto de seis gráficos referentes à população de funcionários públicos civis do executivo do Estado de São Paulo. Esses gráficos têm o seguinte conteúdo:

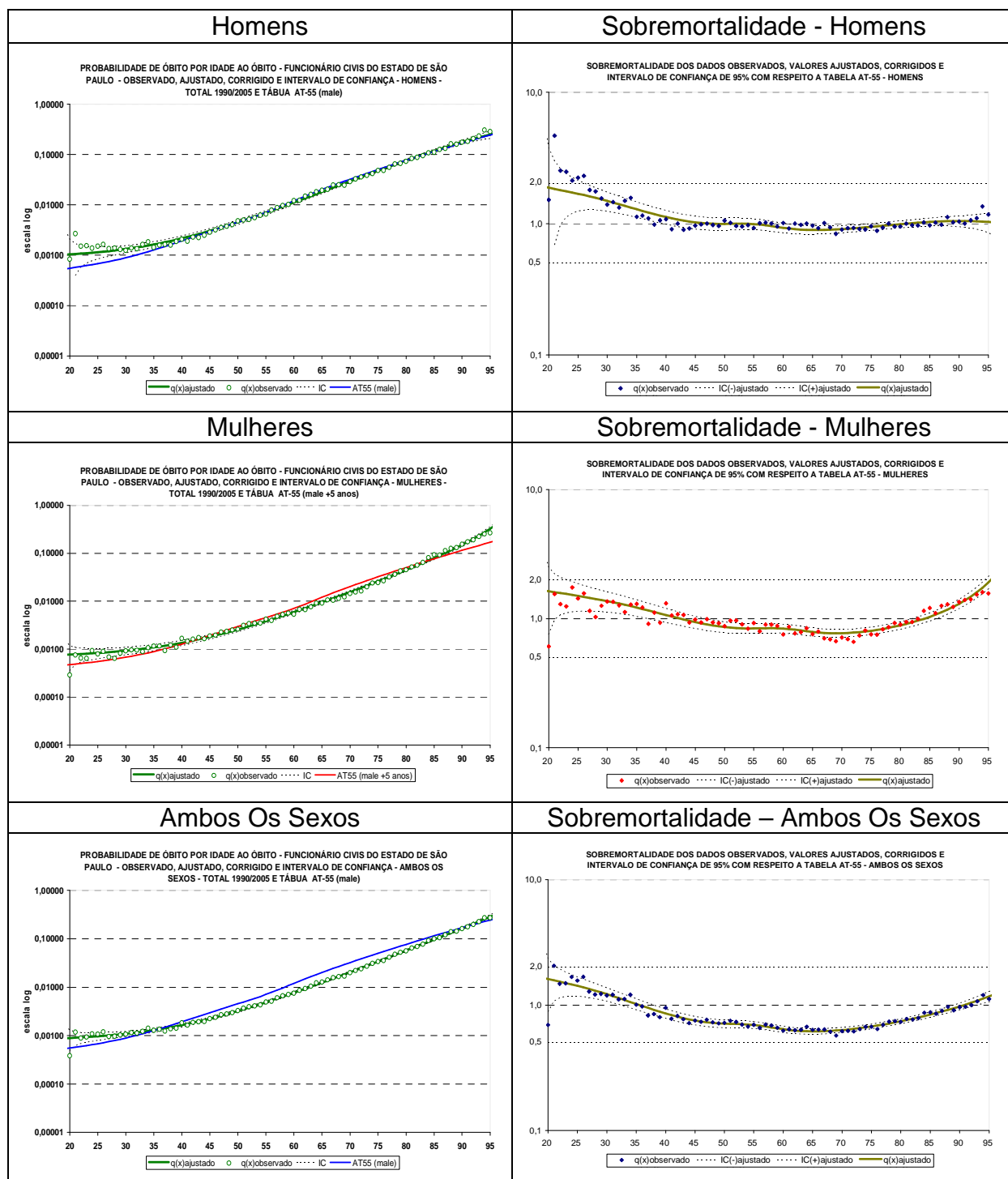
- O **primeiro gráfico** compara para os homens, as taxas específicas da tábua em questão com a taxa ajustada para a população em risco e seus intervalos de confiança e com a taxa bruta observada diretamente dos dados;
- O **segundo gráfico** apresenta para os homens, a sobremortalidade dos valores observados e ajustados, com respeito à tábua em questão, i.e., a razão entre as taxas específicas de mortalidade (observadas e ajustadas para os funcionários públicos civis) para uma dada idade e a taxa específica de mortalidade da tábua, bem como os intervalos de confiança de 95% correspondentes para esta população.
- O **terceiro e quarto gráficos** são similares ao primeiro e segundo, sendo que para a população feminina;
- O **quinto e sexto gráficos** são similares ao primeiro e segundo, sendo que para a população de ambos os sexos.

## Conjunto D 1 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a AT-49



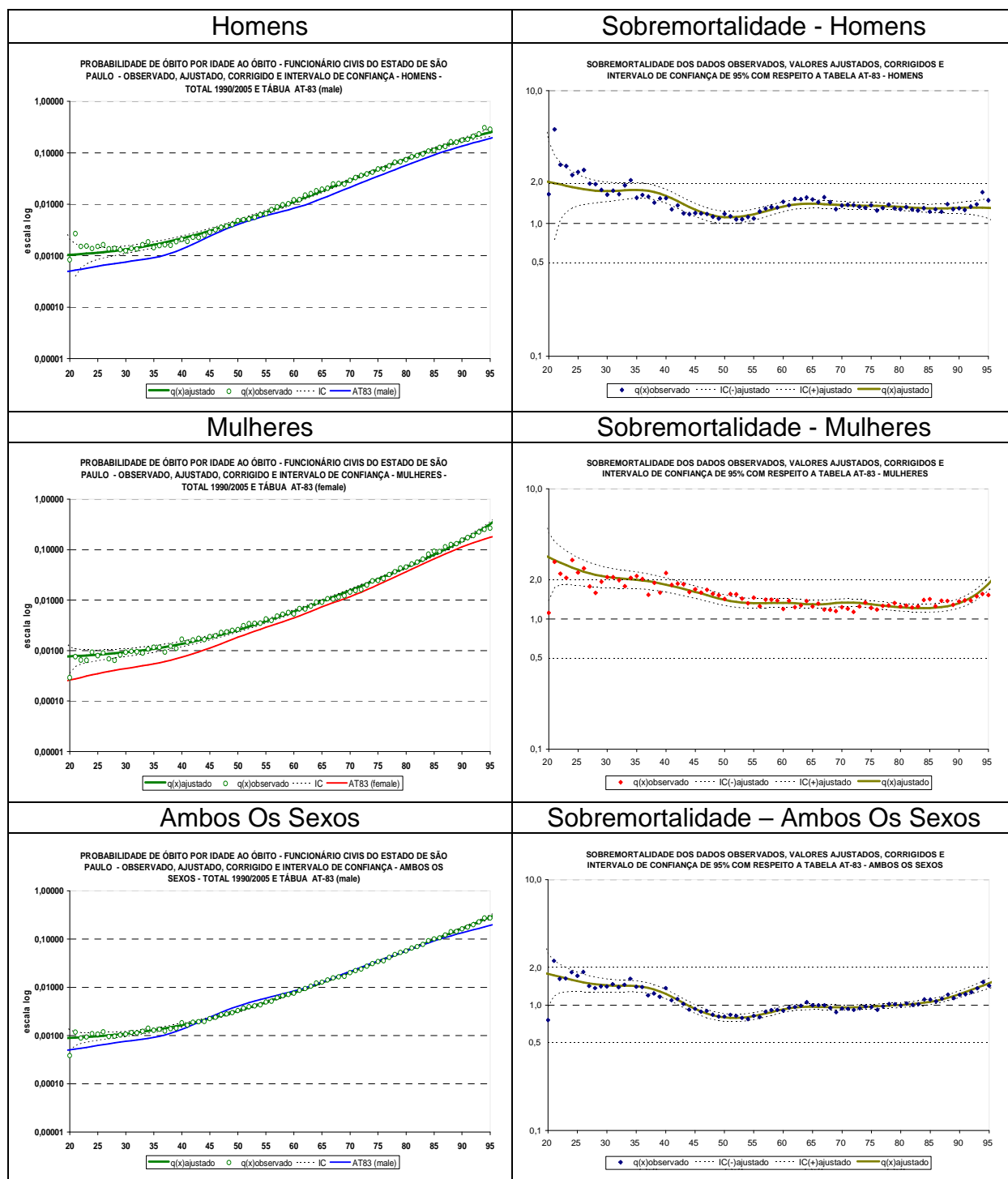
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 2 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a AT-55



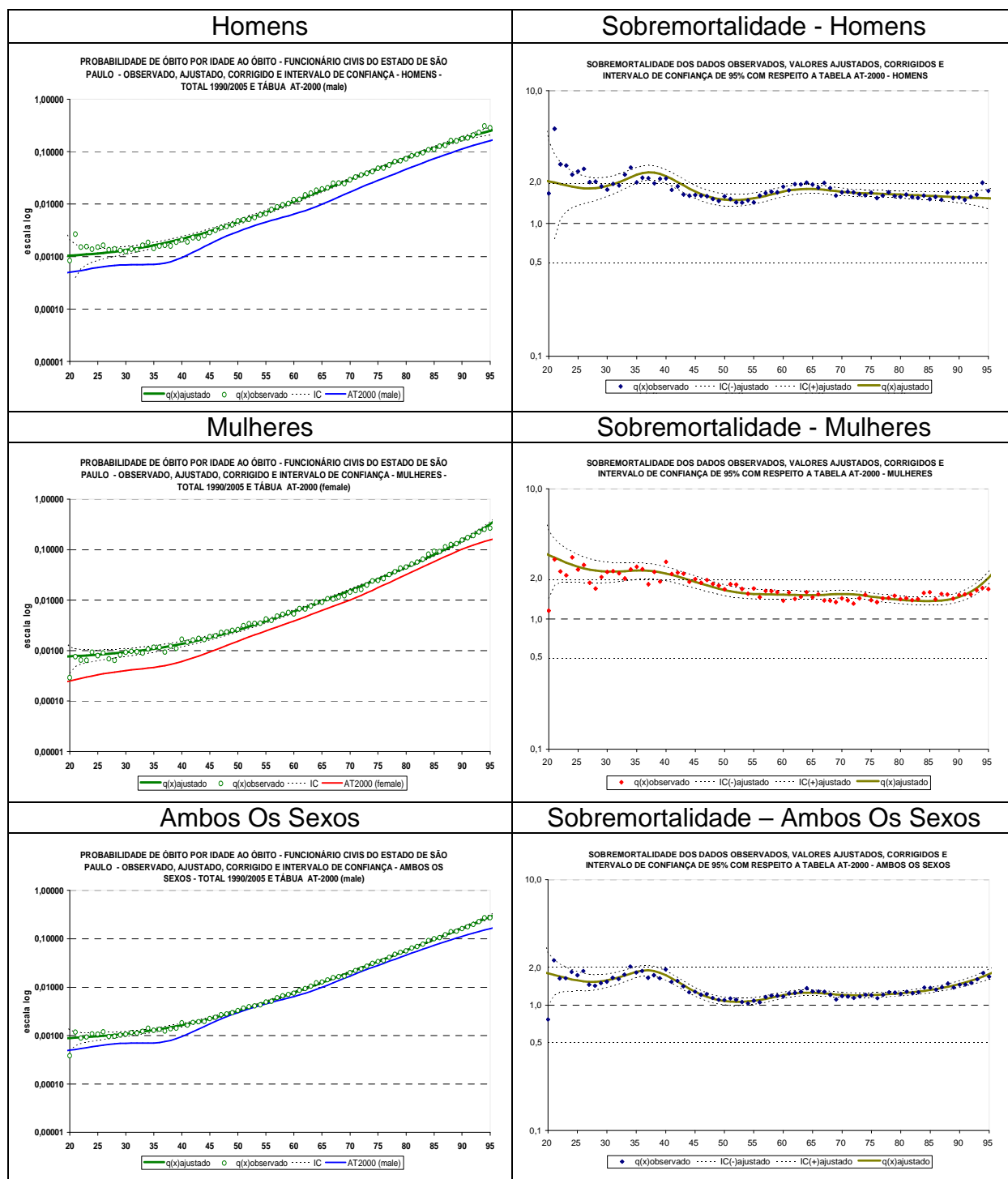
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 3 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a AT-83



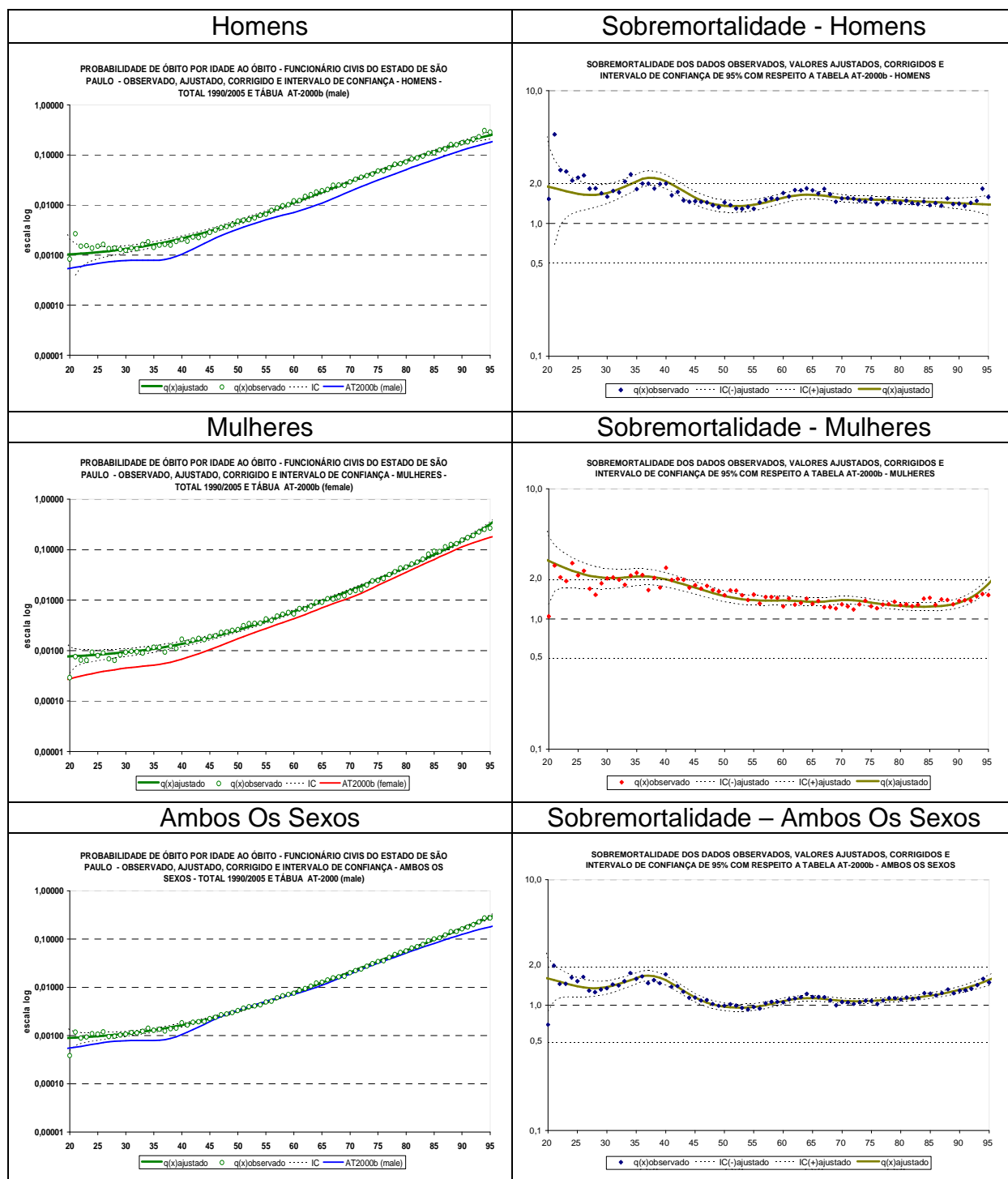
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 4 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a AT-2000



Fonte: PRODESP e SOA.

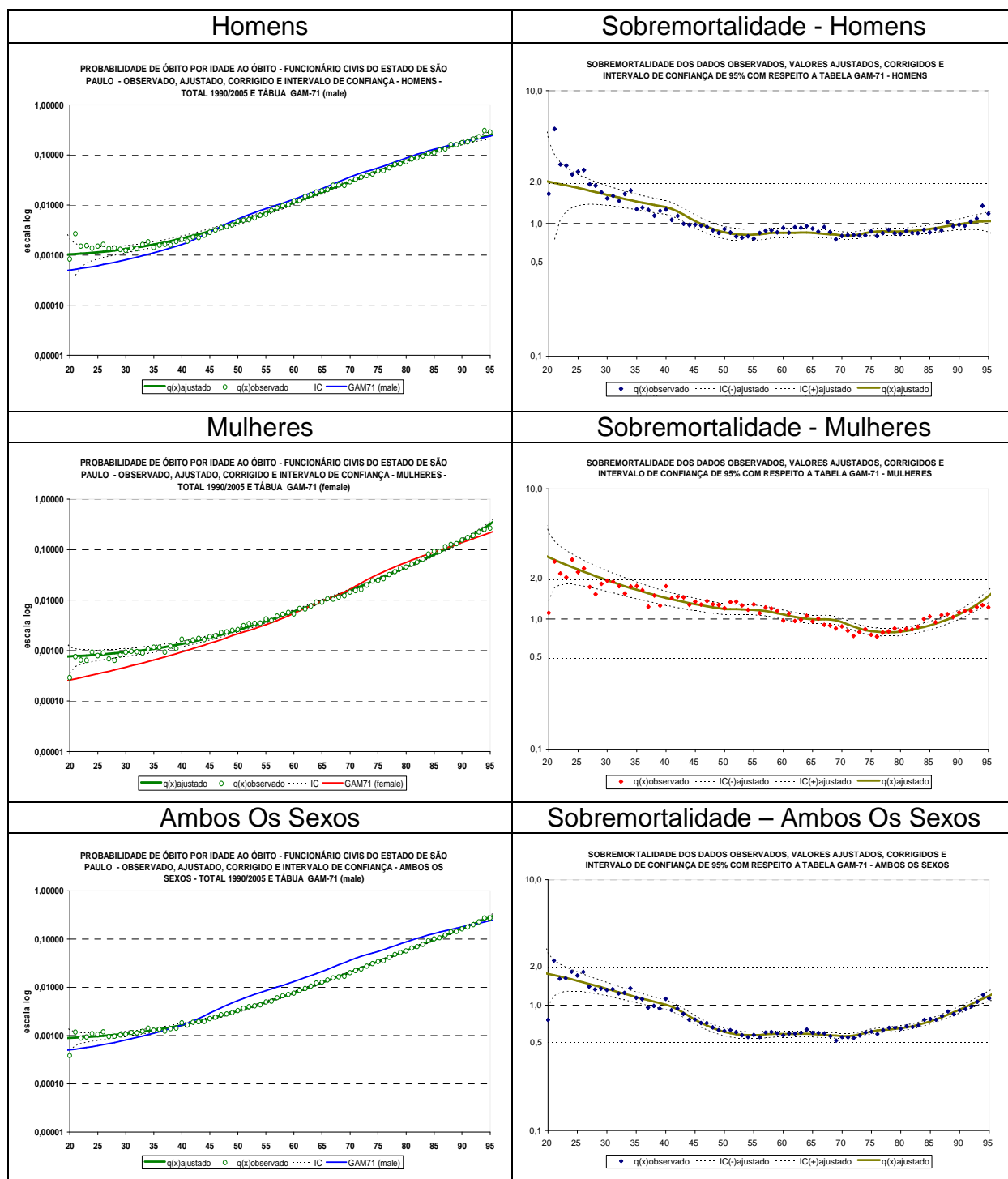
## Conjunto D 5 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a AT-2000b



Fonte: PRODESP e SOA.

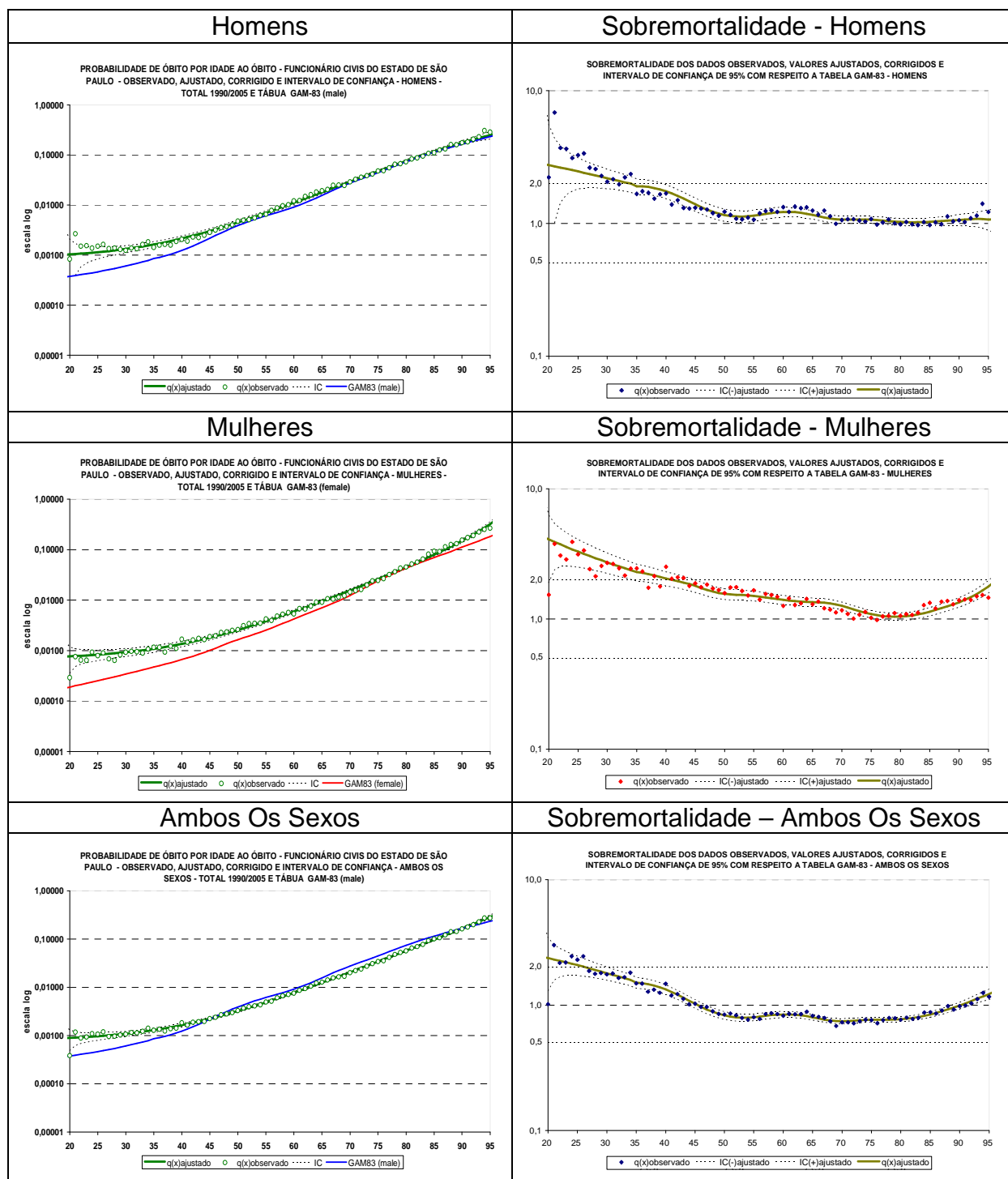


## Conjunto D 6 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a GAM-71



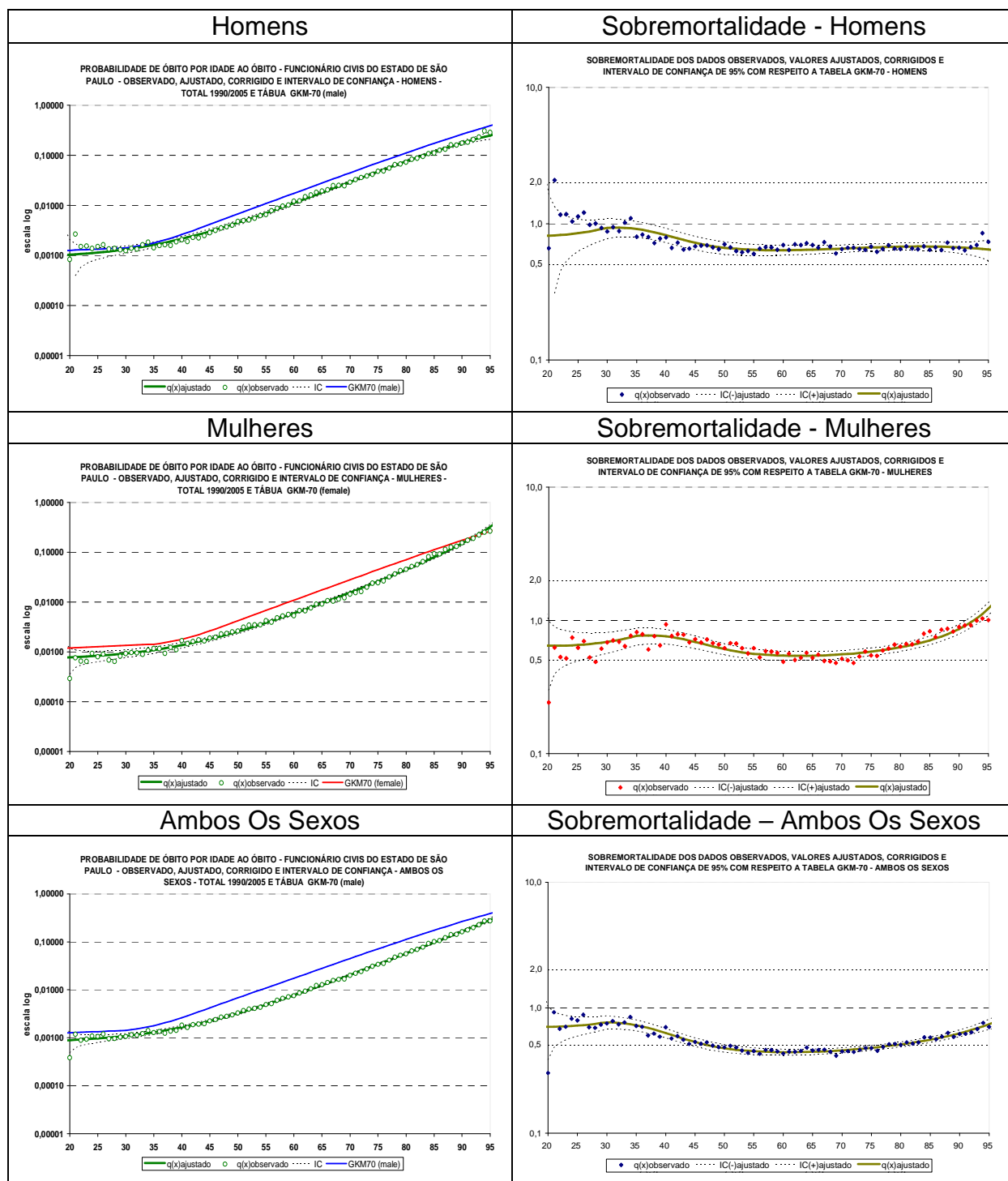
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 7 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a GAM-83



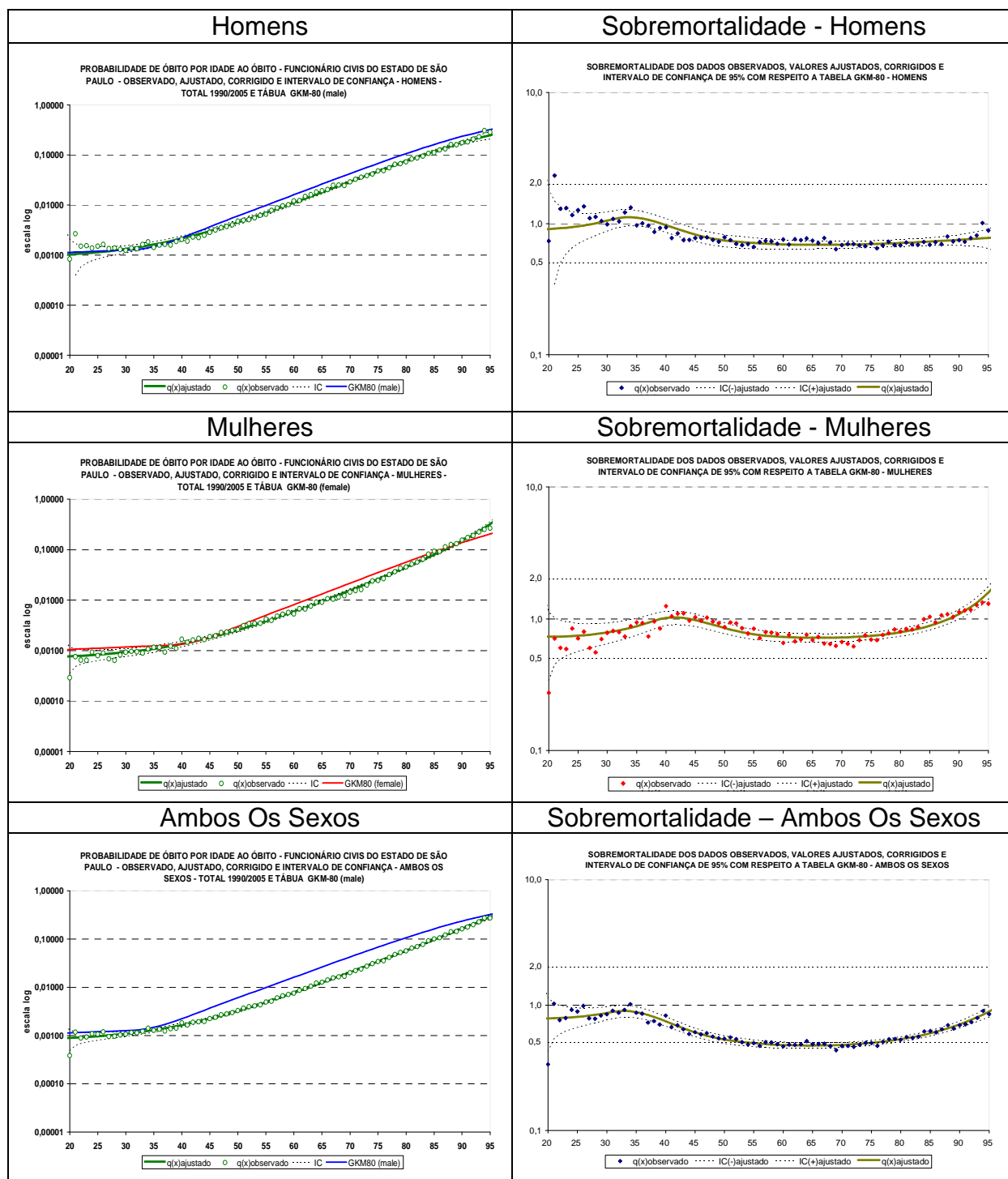
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 8 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a GKM-70



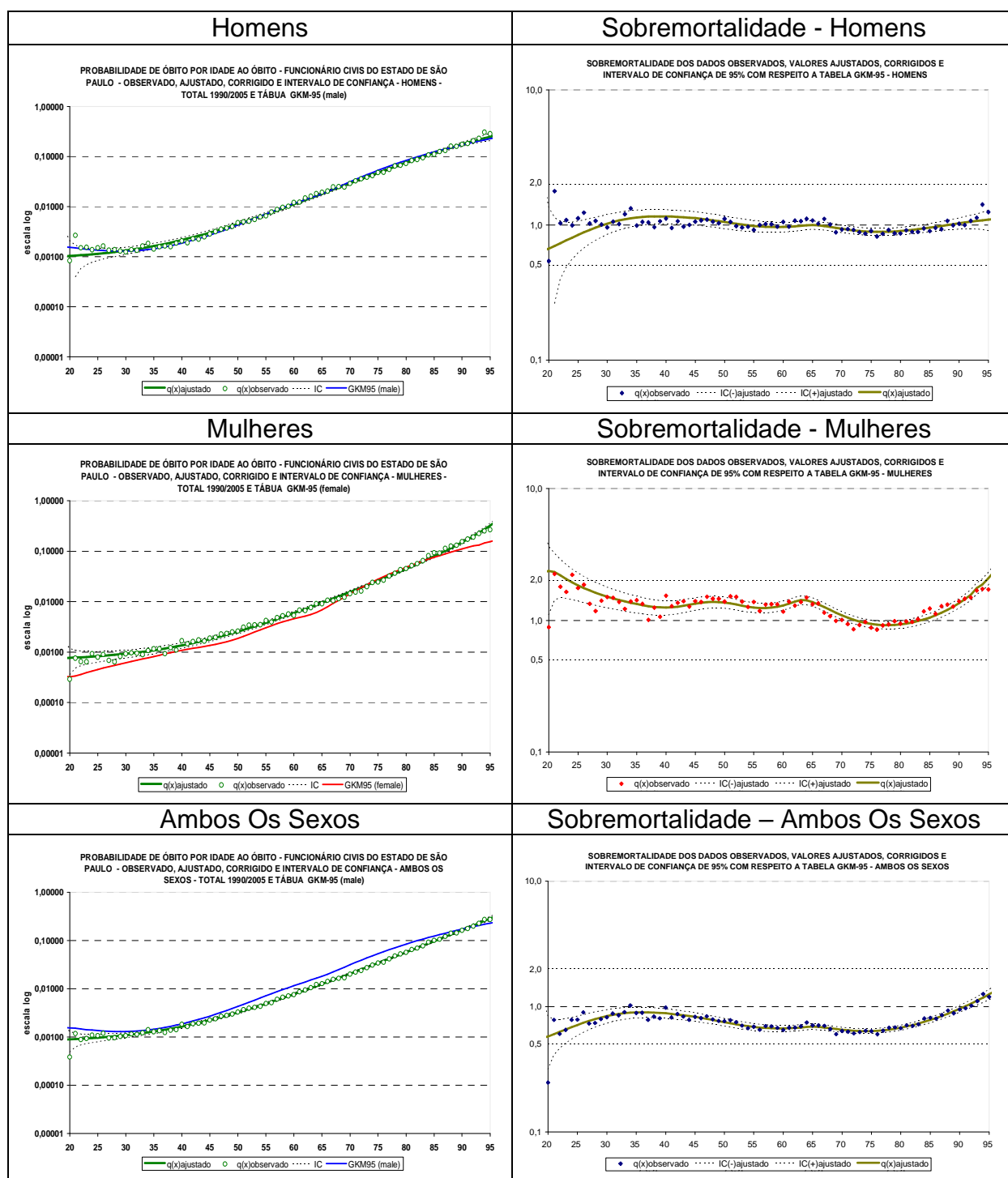
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 9 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a GKM-80



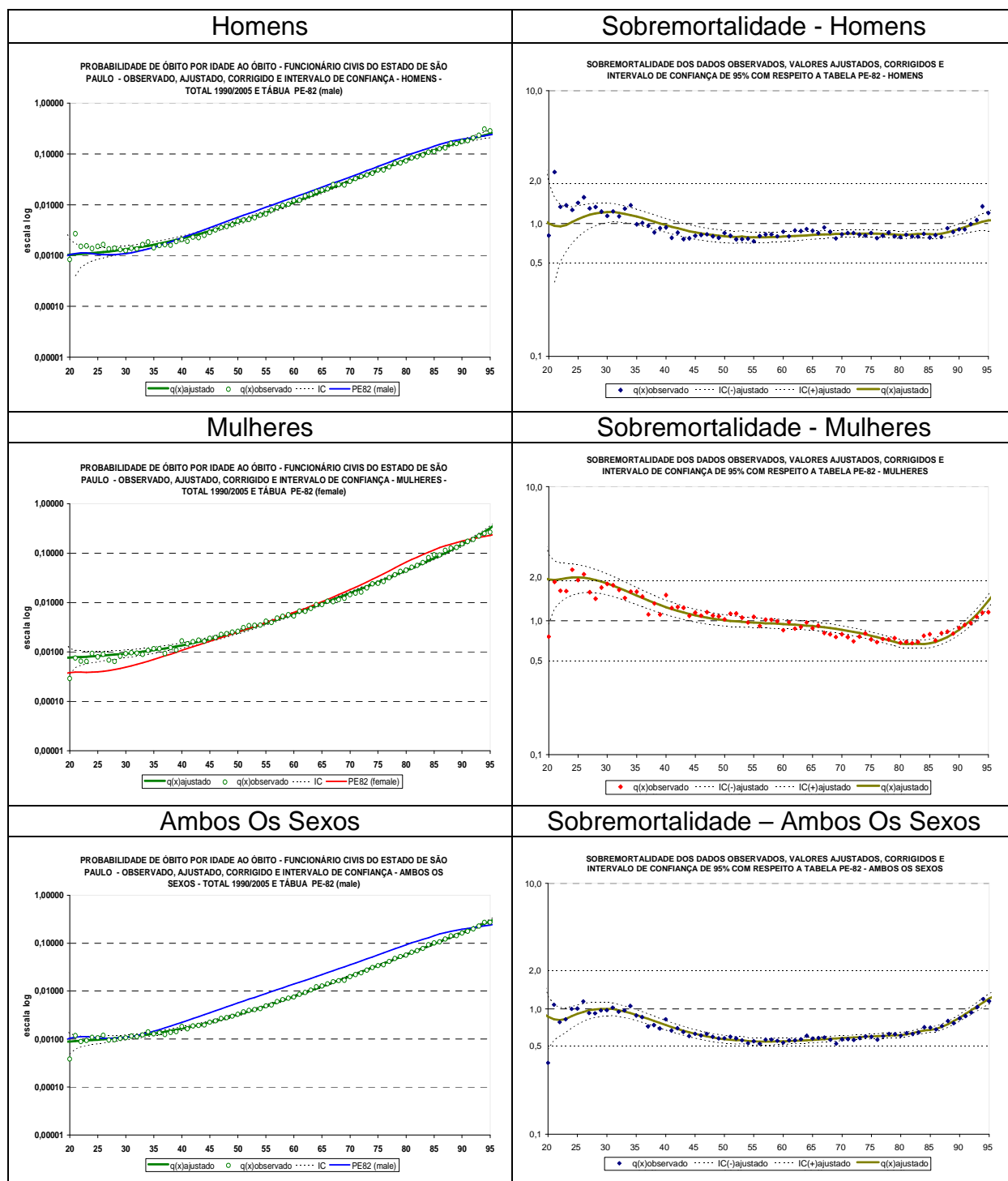
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 10 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a GKM-95



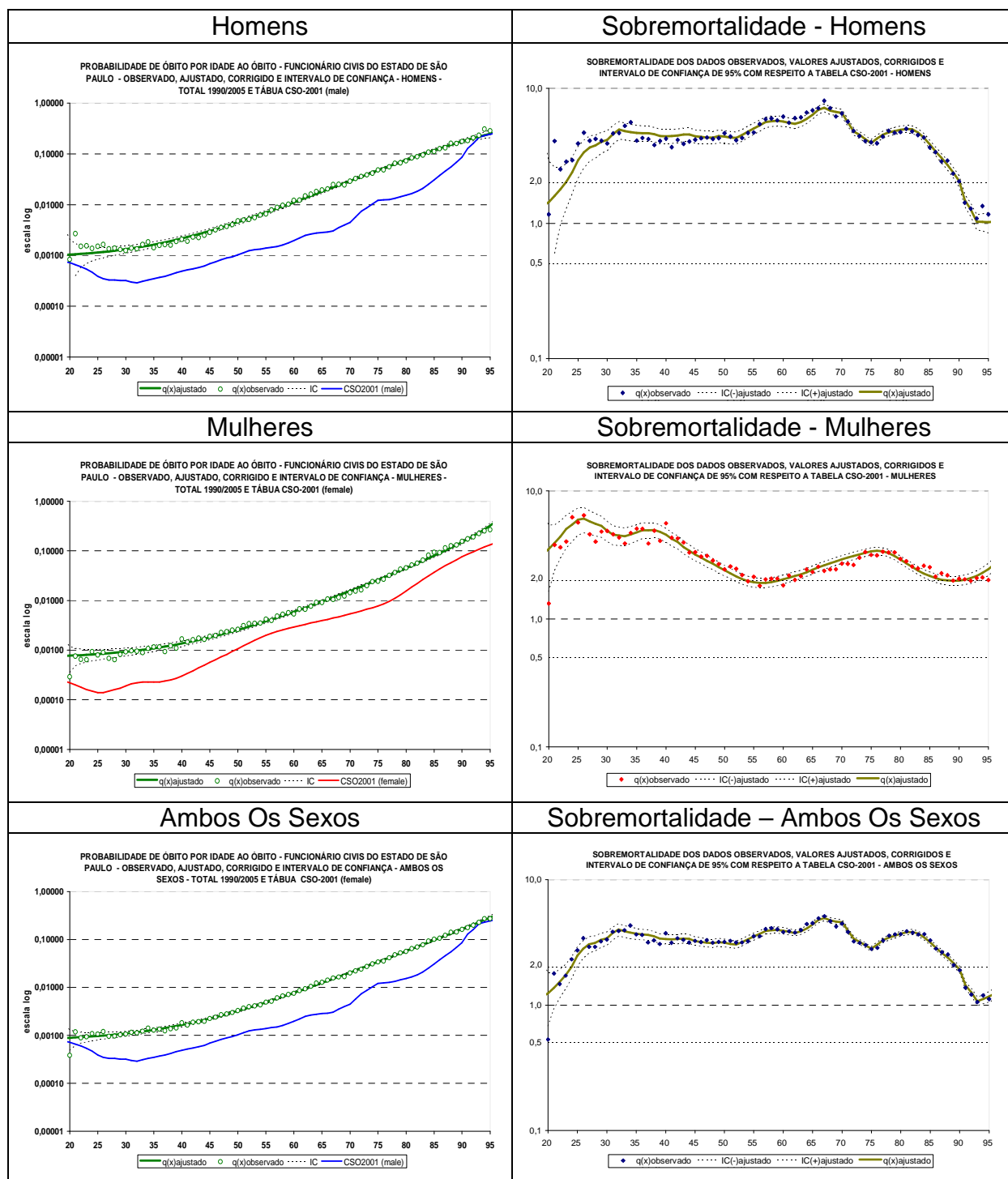
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 11 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a PE-82



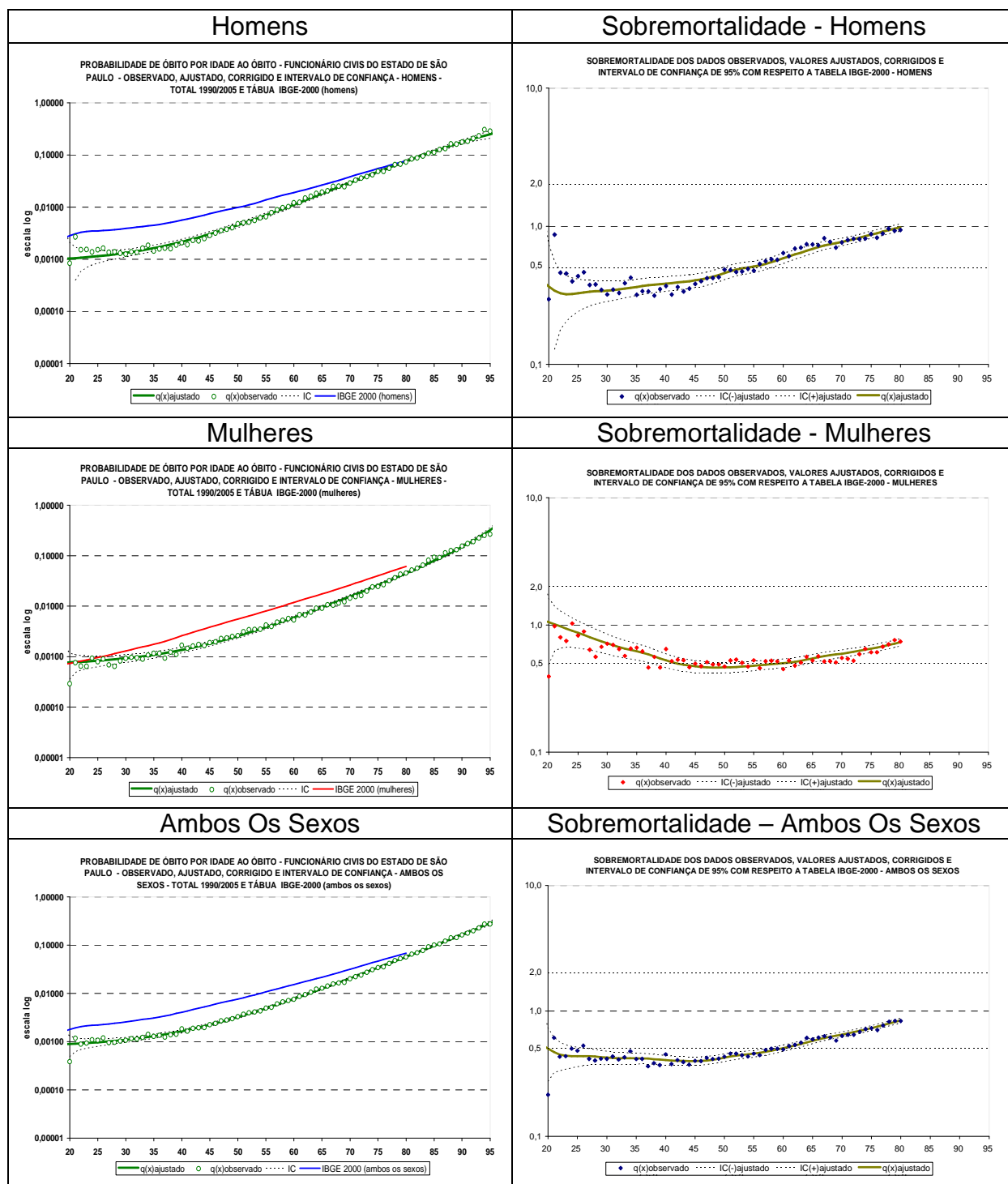
Fonte: PRODESP e SOA.

## Conjunto D 12 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a CSO-2001



Fonte: PRODESP e SOA.

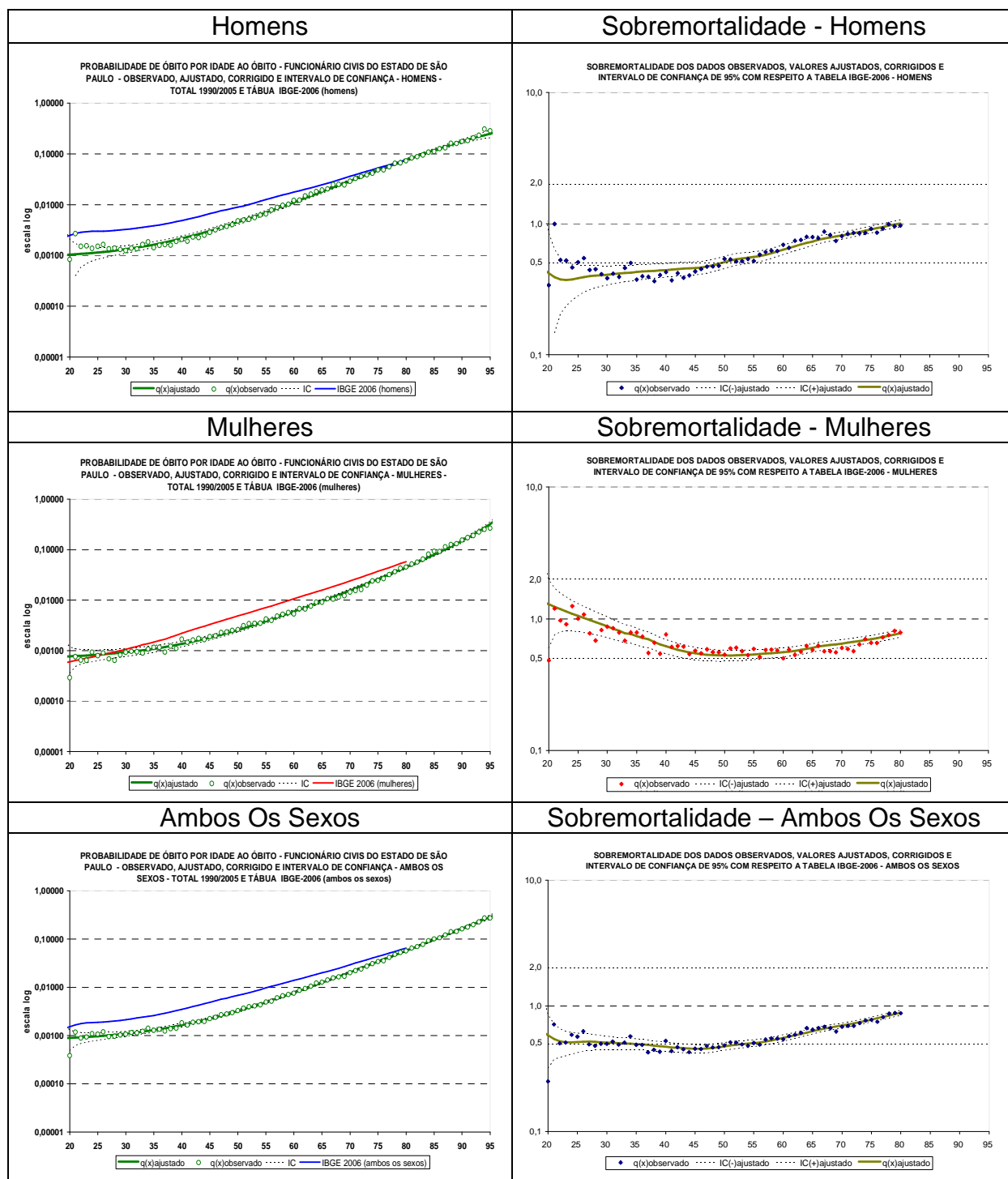
## Conjunto D 13 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a IBGE-2000



Fonte: PRODESP e IBGE.



## Conjunto D 14 - Taxas específicas de mortalidade – Comparação com a IBGE-2006



Fonte: PRODESP e IBGE.

## **Anexo E – Glossário de termos técnicos atuariais e siglas utilizadas**

**Anuidade:** série de pagamentos ou recebimentos sucessivos, efetuados no começo do período (antecipada) ou no fim de cada período (postecipada). Quando a série de pagamentos é anual denomina-se especificamente de anuidade.

**Aposentadoria Normal:** aposentadoria gerada por eventos que não invalidez. Convencionou-se chamar de aposentadoria normal, a voluntária por idade e/ou por tempo de contribuição e a aposentadoria compulsória.

**Atuário:** técnico especializado em matemática superior que atua no mercado econômico-financeiro, promovendo pesquisas e estabelecendo planos e políticas de investimentos e amortizações e, em seguro privado e social, calculando probabilidades de eventos, avaliando riscos e fixando prêmios, indenizações, benefícios e reservas matemáticas<sup>81</sup>.

**Avaliação Atuarial:** Estudo realizado pelo atuário, considerando o levantamento de dados estatísticos e biométricos da população em risco, as bases técnicas atuariais e o plano de benefícios oferecido. Em função dessas três bases o atuário avalia o valor dos compromissos e mensura os recursos necessários à garantia da solvência e equilíbrio do sistema.

**Bases Técnicas:** São as hipóteses ou premissas demográficas, biométricas, financeiras e econômicas, utilizados pelo atuário no bojo da avaliação atuarial e verossímeis às características e especificidades do conjunto de indivíduos expostos ao risco e ao plano (regulamento) de benefícios considerado.

**Benefício:** Valor pecuniário pago sob a forma de renda ou pecúlio ao participante do plano ou ao seu(s) pensionista(s).

**Benefício de Prestação Continuada:** Benefício de caráter previdenciário pago periodicamente, sob a forma de renda mensal ou anuidade, até a morte do participante ou de seu cônjuge, não incluindo a pensão para filhos.

---

<sup>81</sup> Definição de atuário constante no art1º do Decreto nº 66.408, de 3 de abril de 1970 que dispõe sobre a regulamentação do exercício da profissão de Atuário, de acordo com o Decreto-lei nº 806, de 4 de setembro de 1969.

**Benefício de Risco:** benefícios decorrentes dos eventos não previsíveis como a morte, invalidez ou doença, dentre outros. São exemplos de benefícios de risco: a Pensão por Morte, Aposentadoria por Invalidez e o Auxílio Doença.

**Benefício Programável:** benefícios decorrentes dos ditos eventos programados, ou seja, eventos em que a data de início é previsível e pode ser previamente calculada. A Aposentadoria Normal é um benefício programável.

**Crossover:** representa o momento em que as curvas se cruzam nos gráficos.

**Custo Normal:** corresponde ao somatório das parcelas necessárias para a formação das reservas para o pagamento dos benefícios de risco e das reservas para o pagamento dos benefícios programáveis. Em um plano equilibrado, o Custo Normal é aquele que será suficiente cobrar de patrocinadores e participantes para a composição das Reservas Matemáticas necessárias ao pagamento dos benefícios.

**Custo Suplementar:** corresponde ao financiamento, em um prazo determinado, da diferença entre o patrimônio constituído pelo plano previdenciário e o somatório das reservas necessárias para arcar com o pagamento dos benefícios de aposentadoria e pensão de cada servidor e/ou dependente. Quando é realizado o cálculo atuarial e encontra-se que as Reservas Matemáticas não estão completamente integralizadas, ou seja, existe o déficit técnico ou passivo atuarial, necessita-se inserir um Custo Suplementar no sistema para que o mesmo venha a equilibrar-se no tempo.

**Custo Total:** corresponde à soma do Custo Normal com o Custo Suplementar do sistema.

**Equilíbrio Financeiro e Atuarial (EFA):** acontece quando o patrimônio constituído pelo Sistema Previdenciário equivale à soma das Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos e Benefícios a Conceder, ou seja, o sistema possui os recursos acumulados necessários à garantia do cumprimento de suas obrigações.

**Evento Gerador:** é a ocorrência da morte ou invalidez do participante durante o período de cobertura ou sua sobrevivência até o cumprimento das condições de elegibilidade estabelecidas.

**Método de Financiamento:** forma de cálculo adotada para garantir o pagamento das obrigações assumidas pelo sistema.

**Passivo Atuarial:** acontece quando o patrimônio constituído pelo Regime Previdenciário é inferior ao montante das Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos e Benefícios a Conceder. Neste caso o sistema possui menos recursos acumulados do que os necessários para a garantia do cumprimento das obrigações. Também é chamado de Déficit Técnico ou Reserva Matemática a Amortizar.

**Plano de Benefícios:** conjunto dos benefícios previdenciários a que têm direito os participantes do Regime Previdenciário, nos termos da legislação vigente. Fazem parte do plano de benefícios dos servidores públicos: Aposentadoria Normal, Aposentadoria por Invalidez, Pensão por Morte, Salário Família, Salário Maternidade, Auxílio Doença e o Auxílio Reclusão, dentre outros.

**Plano de Benefício Definido (Plano BD):** é aquele em que o valor do benefício (ou uma fórmula de cálculo baseada nos salários de contribuição) é conhecido quando da adesão ao plano e a contribuição necessária para se garantir o pagamento desse benefício é desconhecida e será definida no cálculo atuarial. Um plano BD possui como principais características: é um plano mutualista, o valor do benefício é conhecido, mas o valor da contribuição é uma incógnita, a conta do plano é uma conta coletiva, o benefício independe das variações nas reservas geradas e os lucros ou prejuízos que porventura possam ocorrer são riscos coletivos.

**Plano de Contribuição Definida (Plano CD):** é aquele em que a contribuição é previamente determinada e o benefício alcançado será normalmente função do montante gerado por essa contribuição investida e capitalizada. Um plano CD possui como principais características: é um plano individualista, o valor da contribuição é conhecido, mas o valor do benefício é uma incógnita, cada participante possui na maior parte das vezes uma conta individual, o benefício é função das reservas geradas e os lucros ou prejuízos que porventura possam ocorrer são riscos assumidos individualmente.

**Plano de Custeio:** determina o nível das contribuições dos patrocinadores, participantes e dos assistidos, necessários à manutenção do equilíbrio do sistema.

**Premissas Atuariais:** são os parâmetros adotados pelo atuário e utilizados no cálculo atuarial, em concordância com os gestores do Regime Previdenciário. Essas premissas baseiam-se na legislação vigente e consideram as características

biométricas da massa de participantes, os objetivos pretendidos e os benefícios previdenciários oferecidos. São premissas atuariais: Regimes Financeiros, Métodos de Financiamento, Taxas de Juros, Tábuas de Mortalidade, Tábuas de Sobrevivência, Tábuas de Entrada em Invalidez, Tábuas de Mortalidade de Inválidos, Tábuas de Rotatividade, Composição do Grupo Familiar, Taxas de Crescimento de Salários, Taxas de Crescimento de Benefícios, dentre outras.

**Regime Financeiro de Capitalização (*Full Funding*):** Regime Financeiro em que as contribuições previdenciárias são determinadas de modo a gerar receitas que serão capitalizadas durante a vida laborativa dos participantes do Regime Previdenciário. Essa capitalização das contribuições deverá produzir montantes equivalentes aos valores atuais dos benefícios futuros a serem pagos aos participantes e seus beneficiários indicados. No Regime Financeiro de Capitalização existe a composição total de reservas para os eventos gerados no passado, no presente e no futuro.

**Regime Financeiro de Repartição de Capitais de Cobertura (*Terminal Funding*):** Regime Financeiro em que as contribuições previdenciárias pagas por todos os participantes do Regime Previdenciário, em um determinado período, deverão ser suficientes para gerar receitas que serão capitalizadas e formarão uma reserva que será capaz de arcar com benefícios decorrentes dos eventos ocorridos nesse mesmo período. No Regime Financeiro de Repartição de Capitais de Cobertura existe a composição parcial de reservas, ou seja, a reserva será composta apenas para os benefícios gerados naquele período.

**Regime Financeiro de Repartição Simples (*Pay as You Go*):** Regime Financeiro em que as contribuições previdenciárias pagas por todos os participantes do Regime Previdenciário, em um determinado período, deverão ser suficientes para pagar todos os benefícios decorrentes dos eventos ocorridos nesse mesmo período. No Regime Financeiro de Repartição Simples não existe a composição de reservas, ou seja, tudo o que é arrecadado no período é também gasto.

**Reserva Matemática:** corresponde à soma das Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos e a Conceder.

**Reserva Matemática de Benefícios Concedidos (RMBC):** é o recurso financeiro necessário à garantia de pagamento dos benefícios previdenciários aos assistidos

do plano, ou seja, àqueles que já estão recebendo suas aposentadorias e pensões. No método chamado de Prospectivo equivale à diferença entre o valor atual do fluxo de benefícios a ser pago ao participante já aposentado e/ou seu pensionista e o valor atual do fluxo de contribuições a ser realizado pelos mesmos.

**Reserva Matemática de Benefícios a Conceder (RMBAC):** é o recurso financeiro necessário à garantia do pagamento dos benefícios previdenciários aos servidores ativos do plano quando os mesmos estiverem aposentados e aos seus beneficiários quando de seu falecimento. No método chamado de Prospectivo equivale à diferença entre o valor atual dos compromissos futuros do Regime Previdenciário para com os participantes ativos e o valor atual das contribuições futuras vertidas para o mesmo participante quando ativo, quando aposentado, e depois de seu falecimento por seus pensionistas.

**Superávit Técnico:** acontece quando o patrimônio constituído pelo Regime Previdenciário é superior à soma das Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos e Benefícios a Conceder. Neste caso o sistema possui os recursos acumulados superiores aos necessários para garantir o cumprimento de suas obrigações.

**Tábua Biométrica:** tabela ordenada por idade com as respectivas probabilidades de morte por qualquer que seja a causa ou de morbidade ou de entrada em invalidez ou de mortalidade de inválidos, resultante da observação das ocorrências em grupos populacionais específicos.

**Taxa de Juros:** taxa utilizada para desconto no cálculo dos valores atuais ou presentes.

**Turnover (Rotatividade):** medida que indica as saídas, que não por morte, de indivíduos de um dado grupo.

**Valor Atual dos Benefícios Futuros (VABF):** valor presente do fluxo benefícios previdenciários a serem pagos aos participantes ativos, aposentados e pensionistas, descontado a uma certa taxa de juros.

**Valor Atual das Contribuições Futuras (VACF):** valor presente do fluxo de contribuições previdenciárias a serem pagos pelos patrocinadores, participantes ativos, aposentados e pensionistas, descontado a uma certa taxa de juros.

## **SIGLAS**

**CRP - Certificado de Regularidade Previdenciária**

**DOU - Diário Oficial da União**

**DRAA - Demonstrativo dos Resultados da Avaliação Atuarial**

**EAPC - Entidade Aberta de Previdência Complementar**

**EFPC - Entidade Fechada de Previdência Complementar**

**IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**

**INSS - Instituto Nacional do Seguro Social**

**MPS - Ministério da Previdência Social**

**RGPS - Regime Geral de Previdência Social**

**RPPS - Regime Próprio de Previdência Social**

**SUSEP - Superintendência de Seguros Privados**