

# Sinais e Sistemas

---

Simon Haykin  
Barry Van Veen



# Sinais e Sistemas

**Simon Haykin**  
*McMaster University*

**Barry Van Veen**  
*University of Wisconsin*

**Tradução:**  
José Carlos Barbosa dos Santos

**Consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição:**  
Anatólio Laschuk

Professor de Departamento de Engenharia Elétrica  
e do Pós-Graduação em Ciência da Computação da UFRGS



Porto Alegre, 2001

■ TRANSFORMADAS DE LAPLACE BILATERAIS DE  
SINAIS NÃO-NULOS PARA  $\tau \leq 0$

Sinal	Transformada Bilateral	RDC
$\delta(t - \tau), \tau \leq 0$	$e^{-s\tau}$	para todos $s$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}\{s\} < -a$

D.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Sinal	Transformada Unilateral	Transformada Bilateral	RDC
$x(t)$	$X(s)$	$X(s)$	$R_x$
$y(t)$	$Y(s)$	$Y(s)$	$R_y$
$ax(t) + by(t)$	$aX(s) + bY(s)$	$aX(s) + bY(s)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$x(t - \tau)$ se $x(t - \tau)u(t) = x(t - \tau)u(t - \tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	$e^{-s\tau}X(s)$	$R_x$
$e^{s_o t}x(t)$	$X(s - s_o)$	$X(s - s_o)$	$R_x - \text{Re}\{s_o\}$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R_x}{ a }$
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$X(s)Y(s)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	$R_x$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s) - x(0^+)$	$sX(s)$	No mínimo $R_x$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^+} x(\tau) d\tau + \frac{X(s)}{s}$	$\frac{X(s)}{s}$	No mínimo $R_x \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\}$

# PREFÁCIO

O estudo de sinais e sistemas é básico para a engenharia elétrica em todos os níveis. É um assunto extraordinariamente rico, com diversas aplicações. De fato, um completo entendimento dos sinais e sistemas é fundamental para a apreciação e aplicação apropriadas de outras partes da engenharia elétrica como, por exemplo, *processamento de sinais, sistemas de comunicação e sistemas de controle*.

Este livro oferece um tratamento moderno dos sinais e sistemas em nível introdutório. Sendo assim, ele se destina a ser usado em currículos de engenharia elétrica nos anos *sophomore*<sup>1</sup> ou *júnior*<sup>2</sup> e foi idealizado para preparar os alunos para disciplinas avançadas em sistemas de comunicação, sistemas de controle e processamento digital de sinais.

O texto trata de forma equilibrada e integrada das formas de tempos contínuo e discreto de sinais e sistemas, refletindo os papéis dos mesmos na prática da engenharia. Essas duas formas de sinais e sistemas são tratadas lado-a-lado. Esta abordagem tem a vantagem de ajudar o estudante a ver as similaridades e diferenças fundamentais entre as representações de tempo contínuo e tempo discreto. O tratamento real e integrado também prepara o aluno para o uso prático destes conceitos. Esta filosofia integrada é transportada para os capítulos do livro que tratam das aplicações de sinais e sistemas em sistemas de modulação, filtragem e realimentação.

Exemplos e exercícios com respostas são usados ao longo de todo o livro. Todos eles foram idealizados para ajudar a entender e dominar as questões consideradas. Cada capítulo, exceto o último, inclui um grande número de problemas, idealizados para testar o aluno com respeito à matéria coberta no capítulo. Cada capítulo inclui também uma lista de referências para leitura adicional e uma série de observações históricas.

Outro recurso do livro é a ênfase dada à realização de projetos. Em especial, os capítulos que tratam de aplicações incluem exemplos de projeto ilustrativos.

O MATLAB, sigla de MATrix LABoratory e um produto da The Math Works, Inc., surgiu como um poderoso ambiente para o estudo experimental de sinais e sistemas. Optamos por integrar o MATLAB no texto, incluindo uma seção intitulada “Explorando Conceitos com o MATLAB” em todos os capítulos, exceto no de encerramento. Ao fazermos esta escolha, fomos orientados pela convicção de que o MATLAB constitui uma base computacionalmente eficiente para um “Laboratório de Software” onde conceitos sejam explorados e projetos de sistema, testados. Consequentemente, colocamos a seção referente ao MATLAB antes da seção “Resumo,” permitindo estabelecer relações e desenvolvimentos com base no material discutido nas seções precedentes do capítulo pertinente. Esta abordagem também permite ao professor incorporar formalmente a exploração do MATLAB na sala de aula ou deixar que os alunos o façam por conta própria.

<sup>1</sup> *sophomore*: refere-se ao segundo ano do curso colegial ou universitário nos Estados Unidos; aluno não-graduado do segundo ano.

<sup>2</sup> *júnior*: estudante que cursa o penúltimo ano.

Cada seção “Explorando Conceitos com o MATLAB” foi idealizada para instruir o aluno na aplicação adequada dos comandos do MATLAB e desenvolver uma percepção adicional dos conceitos apresentados no capítulo. Presume-se um conhecimento anterior mínimo do MATLAB. O código MATLAB para todas as computações realizadas no livro, incluindo as do último capítulo, está disponível no Web site da Wiley: <http://www.mathworks.com/books>.

Há dez capítulos no livro, organizados da seguinte maneira:

- O Capítulo 1 se inicia motivando o leitor a entender o que são sinais e sistemas e como eles surgem nos sistemas de comunicação, sistemas de controle, sensoreamento remoto, processamento de sinais biomédicos e no sistema auditivo. Depois, descreve as diferentes classes de sinais, define certos sinais elementares e apresenta as noções básicas envolvidas na caracterização de sistemas.
- O Capítulo 2 apresenta um tratamento detalhado das representações de domínio de tempo de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI). Ele desenvolve a convolução a partir da representação de um sinal de entrada como uma superposição de impulsos. As noções de casualidade, memória, estabilidade e inversibilidade, brevemente introduzidas no Capítulo 1, são então revisitadas em termos da descrição da resposta ao impulso para sistemas LTI. A resposta de estado estacionário (*steady-state*) de um sistema LTI a uma entrada senoidal é usada para introduzir o conceito de resposta em freqüência. Representações com equação diferencial e equação de diferenças para sistemas lineares invariantes no tempo também são apresentadas. Em seguida, são introduzidas representações em diagramas de blocos correspondentes a sistemas LTI. O capítulo se encerra com uma discussão a respeito da descrição de estado variável dos sistemas LTI.
- O Capítulo 3 trata da representação de Fourier dos sinais. Em especial, as representações de Fourier de quatro classes fundamentais de sinais são completamente discutidas, de uma maneira uniforme:
  - Sinais periódicos de tempo discreto: a série de Fourier de tempo discreto
  - Sinais periódicos de tempo contínuo: a série de Fourier
  - Sinais não-periódicos de tempo discreto: a transformada de Fourier de tempo discreto
  - Sinais não-periódicos de tempo contínuo: a transformada de FourierUm recurso novo do capítulo é a maneira pela qual as similaridades entre estas quatro representações são exploradas e as diferenças entre elas, realçadas. O fato de as funções senoidais complexas serem autofunções (*eigenfunctions*) dos sistemas LTI é usado para motivar a representação de sinais em termos de funções senoidais complexas. A forma básica da representação de Fourier para cada classe de sinal é apresentada, e as quatro representações são desenvolvidas em seqüência. Em seguida, as propriedades de todas as quatro representações são estudadas lado a lado. Uma separação estrita entre as classes de sinais e as representações de Fourier correspondentes é mantida ao longo do capítulo. Nossa convicção é que um tratamento paralelo, ainda que separado, minimiza a confusão entre as representações e auxilia no posterior domínio da aplicação apropriada para cada um. A combinação de representações de Fourier ocorre naturalmente no contexto da análise e aplicações computacionais e é depois retomada no Capítulo 4.
- O Capítulo 4 apresenta um tratamento completo das aplicações das representações de Fourier no estudo dos sinais e sistemas LTI. São estabelecidos os vínculos entre as representações dos sistemas no domínio freqüência e no domínio tempo, apresentadas no Capítulo 2. Tanto a análise como as aplicações computacionais são então usadas para motivar a derivação das relações entre as quatro representações de Fourier e desenvolver a habilidade do estudante para aplicar estas ferramentas. As representações das transformadas de Fourier de tempo contínuo e de tempo discreto de sinais periódicos são apresentadas para possibilitar a análise de problemas nos quais haja uma mistura de sinais periódicos e não-periódicos como, por exemplo, a aplicação de uma entrada periódica a um sistema LTI. A representação da transformada de Fourier para sinais de tempo contínuo é então desenvolvida como uma ferramenta para analisar situações em que haja uma mistura de sinais de tempo contínuo e tempo discreto.

O processo de *amostragem*<sup>3</sup> e a reconstrução de sinais de tempo contínuo a partir de amostras são estudados em detalhes dentro deste contexto. Sistemas para processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo também são discutidos, incluindo as questões de superamostragem (*oversampling*), decimação e interpolação. O capítulo se encerra desenvolvendo relações entre a série de Fourier de tempo discreto e as transformadas de Fourier de tempo discreto e de tempo contínuo a fim de introduzir os aspectos computacionais da análise de Fourier de sinais.

- O Capítulo 5 apresenta um tratamento introdutório dos sistemas de modulação linear aplicados aos sistemas de comunicação. São descritas as razões práticas para usar a modulação. A modulação de amplitude e suas variantes – modulação de portadora de faixa lateral suprimida dupla, modulação de faixa lateral simples e modulação de faixa lateral vestigial – são discutidas. O capítulo também inclui uma discussão a respeito da modulação de amplitude de pulso e seu papel nas comunicações digitais para, novamente, realçar uma interação natural entre os sinais de tempo contínuo e tempo discreto. São discutidas as técnicas de divisão de freqüência e multiplexação de divisão de tempo. O capítulo se encerra com um tratamento dos retardos de fase e de grupo que surgem quando um sinal modulado é transmitido através de um canal linear.
- O Capítulo 6 discute a transformada de Laplace e seu uso para representações exponenciais complexas de sinais de tempo contínuo e a caracterização de sistemas. A propriedade de autofunção dos sistemas LTI e a existência de representações exponenciais complexas para sinais que não têm nenhuma representação de Fourier são usadas para motivar o estudo das transformadas de Laplace. A transformada de Laplace unilateral é estudada primeiro, e aplicada à solução de equações diferenciais que possuem condições iniciais para refletir o papel predominante da transformada de Laplace em aplicações de engenharia. A transformada de Laplace bilateral é introduzida a seguir, e é usada para estudar questões de causalidade, estabilidade, inversibilidade e a relação entre pólos e zeros e resposta em freqüência. As relações entre a descrição da função de transferência de sistemas LTI e as descrições de domínio de tempo introduzidas no Capítulo 2 são desenvolvidas.
- O Capítulo 7 é dedicado à transformada  $z$  e seu uso na representação exponencial complexa de sinais de tempo discreto e na caracterização de sistemas. Como no Capítulo 6, a transformada  $z$  é motivada como uma representação mais geral do que a da transformada de Fourier de tempo discreto. Coerentemente com o papel fundamental que ela representa como ferramenta de análise, iniciamos com a transformada  $z$  bilateral. São introduzidas as propriedades da transformada  $z$  e técnicas para inversão. Em seguida, a transformada  $z$  é usada para análise de sistemas transformados. As relações entre a função de transferência e descrições de domínio de tempo introduzidas no Capítulo 2 são desenvolvidas. As questões de inversibilidade, estabilidade, causalidade e a relação entre a resposta em freqüência e pólos e zeros são revisitadas. O uso da transformada  $z$  para derivar estruturas computacionais para implementar sistemas de tempo discreto em computadores é introduzido. Por fim, o uso da transformada  $z$  unilateral para resolver equações de diferenças é apresentado.
- O Capítulo 8 discute a caracterização e o projeto de filtros e equalizadores lineares. O problema da aproximação, com ênfase nas funções de Butterworth e uma breve menção das funções de Chebyshev, é introduzido. Métodos diretos e indiretos para projeto de tipos de filtros análogicos (isto é, tempo contínuo) e digitais (isto é, tempo discreto) são apresentados. O método de janelas para projeto de filtros digitais com resposta a impulso de duração finita e o método da transformada bilateral para projeto de filtros digitais com resposta a impulso de duração infinita são tratados em detalhes. O projeto de filtros constitui outra oportunidade para reforçar os vínculos entre os sistemas de tempo contínuo e tempo discreto. O texto recorre ao material apresentado no Capítulo 4 ao desenvolver um método para a equalização de um canal linear usando um filtro de tempo discreto com resposta a impulso finito.

<sup>3</sup> Amostragem (*sampling*): Criar uma representação digital de um sinal analógico. Para trabalhar com sinais reais no computador, os sinais analógicos são amostrados determinado número de vezes por segundo (freqüência) e convertidos em código digital. Usando uma média e diferentes algoritmos, as amostras podem ser geradas a partir das amostras existentes, criando mais informações digitais para sinais complexos, “suavizando a curva”, por assim dizer.

Os filtros e equalizadores constituem um veículo natural para desenvolver uma apreciação de como projetar sistemas necessários para atender as especificações de domínio de freqüência prescritas.

- O Capítulo 9 apresenta um tratamento introdutório das muitas facetas dos sistemas lineares com realimentação. As várias vantagens práticas da realimentação e o custo de sua aplicação são enfatizados. As aplicações de realimentação no projeto de amplificadores operacionais e nos sistemas de controle com realimentação são discutidas em detalhes. O problema da estabilidade, básico para o estudo dos sistemas com realimentação, é tratado detalhadamente ao considerar os seguintes métodos:
  - O método do lugar das raízes (*root-locus*), relacionado à resposta transitória do sistema de malha fechada.
  - Critério da estabilidade de Nyquist, relacionado com a resposta em freqüência de malha aberta do sistema.
- O critério da estabilidade de Nyquist é estudado usando-se tanto o lugar (locus) de Nyquist como o diagrama de Bode. O capítulo também inclui uma discussão dos subsistemas de dados amostrados para ilustrar a interação natural entre os sinais de tempo contínuo e tempo discreto que ocorre em aplicações de controle.
- O Capítulo 10, que é o capítulo final do livro, lança um olhar crítico sobre as limitações das representações de sinais e sistemas apresentadas nos capítulos anteriores. Ele realça outras ferramentas avançadas, a saber, análise de tempo-freqüência (a transformada de Fourier de tempo breve e as *wavelets*<sup>4</sup>) e caos, para a caracterização de sinais. Ele também realça as noções de não-linearidade e adaptatividade no estudo de sistemas. Ao fazer isto, o estudante toma consciência da natureza muito ampla do tema dos sinais e sistemas e é lembrado das limitações da pressuposição linear, invariante no tempo.

Ao organizar o livro, tentamos acompanhar o material teórico com aplicações apropriadas tiradas dos campos dos sistemas de comunicações, projeto de filtros e sistemas de controle. Isto foi feito para proporcionar uma fonte de motivação para o leitor.

O material deste livro pode ser usado para um ou dois semestres sobre sinais e sistemas. Uma seqüência de dois semestres cobriria a maioria, se não todos os tópicos do livro. O material para um curso de um semestre pode ser organizado de acordo com a preferência do professor. Tentamos manter a máxima flexibilidade didática na escolha e ordem dos tópicos, sujeita a nossa filosofia de realmente integrarmos os conceitos de tempo contínuo e tempo discreto. Algumas seções do livro incluem material que é considerado de natureza avançada; estas seções são marcadas com um asterisco. O material coberto nestas seções pode ser omitido, sem causar ruptura na continuidade da matéria apresentada no capítulo pertinente.

O livro se encerra com os seguintes apêndices:

- Identidades matemáticas selecionadas
- Expansões em frações parciais
- Tabelas de representações de Fourier e propriedades
- Tabelas de transformadas de Laplace e propriedades
- Tabelas de transformadas z e propriedades

Um conjunto consistente de notações é usado ao longo do livro. Com exceção de alguns lugares, as derivações de todas as fórmulas estão integradas no texto.

---

<sup>4</sup> Wavelet: pequena onda. <Mat.> Um forma de onda cuja freqüência e duração são limitadas. As transformadas *wavelet* constituem uma alternativa para a(s) transformada(s) mais tradicional(is) usadas para analisar formas de onda; por ex., o som. A transformada de Fourier converte um sinal numa série contínua de ondas senoidais, cada uma das quais tem uma freqüência e amplitude constantes e duração infinita. Em comparação, a maioria dos sinais do mundo real (como música ou imagens) tem uma duração finita e mudanças abruptas de freqüência.

## Agradecimentos

Ao escrevermos este livro ao longo de um período de quatro anos, beneficiamo-nos imensamente com as significativas sugestões e construtivas opiniões recebidas de muitos colegas e revisores:

- Professor Rajeev Agrawal, *University of Wisconsin*
- Professor Richard Baraniuk, *Rice University*
- Professor Jim Bucklew, *University of Wisconsin*
- Professor C. Sydney Burrus, *Rice University*
- Professor Dan Cobb, *University of Wisconsin*
- Professor Chris DeMarco, *University of Wisconsin*
- Professor John Gubner, *University of Wisconsin*
- Professor Yu Hu, *University of Wisconsin*
- Professor John Hung, *Auburn University*
- Professor Steve Jacobs, *University of Pittsburg*
- Dr. James F. Kaiser, *Bellcore*
- Professor Joseph Kahn, *University of California-Berkeley*
- Professor Ramdas Kumaresan, *University of Rhode Island*
- Professor Troung Nguyen, *Boston University*
- Professor Robert Nowak, *Michigan State University*
- Professor S. Passupathy, *University of Toronto*
- Professor John Platt, *McMaster University*
- Professor Naresh K. Sinha, *McMaster University*
- Professor Mike Thomson, *University of Texas-Pan America*
- Professor Anthony Vaz, *McMaster University*

Estendemos nossa gratidão a todos eles por nos ajudarem, cada um à sua maneira, a moldar o livro em sua forma final.

Barry Van Veen declara-se em dívida com seus colegas da University of Wisconsin e com o professor Willis Tomkins, chefe do Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, por permitir que ele ministrasse aulas de Sinais e Sistemas enquanto escrevia este livro.

Agradecemos a muitos alunos, tanto da McMaster como da Wisconsin, cujas sugestões e perguntas nos ajudaram ao longo dos anos a aprimorar e, em alguns casos, a repensar a apresentação do material deste livro. Em especial, somos gratos a Hugh Pasika, Eko Onggo Sanusi, Dan Sebald e Gil Raz por sua inestimável ajuda.

A idéia de escrever este livro surgiu quando Steve Elliott era o editor de Engenharia Elétrica da Wiley. Somos profundamente gratos a ele. Desejamos também expressar nossa gratidão a Charity Robey por levar a efeito as muitas revisões úteis do livro, a Bill Zobrist, o atual editor de Engenharia Elétrica da Wiley, por seu forte apoio, e a Katherine Hepburn, por sua criativa promoção do livro.

Por fim, Simon Haykin agradece à sua esposa, Nancy, e Barry Van Veen agradece à sua esposa, Kathy, e aos filhos, Emily e David, pelo apoio e compreensão dados no decorrer da longa elaboração deste livro.

Simon Haykin  
Barry Van Veen

# SUMÁRIO

<i>Notação</i> .....	xvi
----------------------	-----

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
-------------------	-------------------	-----------

1.1	O Que é Um Sinal? .....	21
1.2	O Que é Um Sistema? .....	22
1.3	Visão Geral de Sistemas Específicos .....	22
1.4	Classificação de Sinais .....	34
1.5	Operações Básicas em Sinais .....	40
1.6	Sinais Elementares .....	46
1.7	Sistemas Vistos como Interconexões de Operações .....	59
1.8	Propriedades dos Sistemas .....	61
1.9	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	71
1.10	Resumo .....	76
	Leitura Adicional .....	77
	Problemas .....	78

<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>REPRESENTAÇÕES EM DOMÍNIO DE TEMPO PARA SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO</b>	<b>85</b>
-------------------	---	-----------

2.1	Introdução .....	85
2.2	Convolução: Representação de Resposta ao Impulso para Sistemas LTI .....	86
2.3	Propriedades da Representação da Resposta ao Impulso para Sistemas LTI .....	108
2.4	Representações por Equações Diferenciais e de Diferenças para Sistemas LTI .....	120
2.5	Representações em Diagrama de Blocos .....	132
2.6	Descrições por Variáveis de Estado para Sistemas LTI .....	136
2.7	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	143
2.8	Resumo .....	151
	Leitura adicional .....	152
	Problemas .....	153

<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>REPRESENTAÇÕES DE FOURIER PARA SINAIS</b>	<b>163</b>
3.1	Introdução .....	163
3.2	Sinais Periódicos de Tempo Discreto: A Série de Fourier de Tempo Discreto .....	168
3.3	Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A Série de Fourier .....	178
3.4	Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto: A Transformada de Fourier de Tempo Discreto .....	188
3.5	Sinais Não-Periódicos de Tempo Contínuo: A Transformada de Fourier .....	196
3.6	Propriedades das Representações de Fourier .....	202
3.7	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	240
3.8	Resumo .....	244
	Leitura Adicional .....	245
	Problemas .....	246
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>APLICAÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES DE FOURIER</b>	<b>259</b>
4.1	Introdução .....	259
4.2	Resposta em Freqüência de Sistemas LTI .....	260
4.3	Representações com Transformada de Fourier para Sinais Periódicos ....	268
4.4	Convolução e Modulação com Classes Combinadas de Sinais .....	273
4.5	Representação por Transformada de Fourier para Sinais de Tempo Discreto .....	280
4.6	Amostragem .....	283
4.7	Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a Partir de Amostras .....	291
*4.8	Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo .....	300
4.9	Representações com Série de Fourier para Sinais Não-Periódicos de Duração Finita .....	309
*4.10	Aplicações Computacionais da Série de Fourier de Tempo Discreto .....	314
*4.11	Algoritmos Eficientes para Avaliar a DTFS .....	325
4.12	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	328
4.13	Resumo .....	332
	Leitura Adicional .....	333
	Problemas .....	333
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>APLICAÇÕES A SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO</b>	<b>345</b>
5.1	Introdução .....	345
5.2	Tipos de Modulação .....	345
5.3	Benefícios da Modulação .....	349
5.4	Modulação Completa de Amplitude .....	350

5.5	Modulação de Faixa Lateral Dupla e Portadora Suprimida .....	357
5.6	Multiplexação por Portadora em Quadratura .....	361
5.7	Outras Variantes da Modulação de Amplitude .....	362
5.8	Modulação de Amplitude de Pulso .....	366
5.9	Multiplexação .....	370
*5.10	Retardos de Fase e de Grupo .....	375
5.11	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	379
5.12	Resumo .....	387
	Leitura Adicional .....	388
	Problemas .....	390

## CAPÍTULO 6 REPRESENTAÇÃO DE SINAIS USANDO EXPONENCIAIS COMPLEXAS DE TEMPO CONTÍNUO: A TRANSFORMADA DE LAPLACE

395

6.1	Introdução .....	395
6.2	A Transformada de Laplace .....	396
6.3	A Transformada de Laplace Unilateral .....	401
6.4	Inversão da Transformada de Laplace .....	406
6.5	Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais .....	409
6.6	A Transformada de Laplace Bilateral .....	415
6.7	Análise de Sistemas com Transformadas .....	424
6.8	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	436
6.9	Resumo .....	439
	Leitura Adicional .....	440
	Problemas .....	440

## CAPÍTULO 7 REPRESENTAÇÃO DE SINAIS USANDO EXPONENCIAIS COMPLEXAS DE TEMPO DISCRETO: A TRANSFORMADA Z

445

7.1	Introdução .....	445
7.2	A Transformada z .....	445
*7.3	Propriedades da Região de Convergência .....	452
7.4	Propriedades da Transformada z .....	456
7.5	Inversão da Transformada z .....	460
7.6	Análise com Transformada de Sistemas LTI .....	466
7.7	Estruturas Computacionais para Implementar Sistemas de Tempo Discreto .....	476
7.8	A Transformada z Unilateral .....	480
7.9	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	483
7.10	Resumo .....	486
	Leitura Adicional .....	487
	Problemas .....	487

<b>CAPÍTULO 8</b>	<b>APLICAÇÃO A FILTROS E EQUALIZADORES</b>	<b>495</b>
8.1	Introdução .....	495
8.2	Condições para Transmissão sem Distorções .....	495
8.3	Filtros Passa-Baixas Ideais .....	497
8.4	Projeto de Filtros .....	503
8.5	Funções de Aproximação .....	504
8.6	Transformações de Freqüência .....	510
8.7	Filtros Passivos .....	512
8.8	Filtros Digitais .....	513
8.9	Filtros Digitais FIR .....	514
8.10	Filtros Digitais IIR .....	522
8.11	Distorção Linear .....	526
8.12	Equalização .....	527
8.13	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	530
8.14	Resumo .....	534
	Leitura Adicional .....	535
	Problemas .....	536
<b>CAPÍTULO 9</b>	<b>APLICAÇÃO EM SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO</b>	<b>539</b>
9.1	Introdução .....	539
9.2	Conceitos Básicos de Realimentação .....	540
9.3	Análise da Sensibilidade .....	542
9.4	Efeito da Realimentação sobre a Perturbação ou Ruído .....	544
9.5	Análise de Distorção .....	545
9.6	Custo da Realimentação .....	546
9.7	Amplificadores Operacionais .....	547
9.8	Sistemas de Controle .....	551
9.9	Resposta Transitória de Sistemas de Baixa Ordem .....	557
9.10	Especificações de Domínio de Tempo .....	560
9.11	O Problema da Estabilidade .....	562
9.12	Critério de Routh-Hurwitz .....	565
9.13	Método do Lugar das Raízes .....	568
9.14	Modelos de Ordem Reduzida .....	576
*9.15	Critério de Nyquist da Estabilidade .....	578
9.16	Diagrama de Bode .....	584
*9.17	Sistemas de Dados Amostrados .....	592
9.18	Projeto de Sistemas de Controle .....	601
9.19	Explorando Conceitos com o MATLAB .....	608
9.20	Resumo .....	613
	Leitura Adicional .....	614
	Problemas .....	614

**CAPÍTULO 10 EPÍLOGO****621**

10.1	Propriedades Físicas de Sinais da Vida Real .....	621
10.2	Análise de Tempo – Freqüência .....	624
10.3	Variantes do Modelo de “Sistema Linear Invariante no Tempo” .....	631
10.4	Observações Finais .....	637
	Leitura Adicional .....	637

**APÊNDICE A IDENTIDADES MATEMÁTICAS SELECIONADAS****639**

A.1	Trigonometria .....	639
A.2	Números Complexos .....	640
A.3	Série Geométrica .....	641
A.4	Integrais Definidas .....	641
A.5	Matrizes .....	642

**APÊNDICE B EXPANSÕES EM FRAÇÕES PARCIAIS****643**

B.1	Expansões em Frações Parciais para Representações de Tempo Contínuo .....	643
B.2	Expansões em Frações Parciais para Representações de Tempo Discreto .....	646

**APÊNDICE C TABELAS DE REPRESENTAÇÕES E PROPRIEDADES FOURIER****649**

C.1	Pares Básicos de Séries de Fourier de Tempo Discreto .....	649
C.2	Pares Básicos de Séries de Fourier .....	650
C.3	Pares Básicos de Transformadas de Fourier de Tempo Discreto .....	650
C.4	Pares Básicos de Transformadas de Fourier .....	651
C.5	Pares de Transformadas de Fourier para Sinais Periódicos .....	651
C.6	Pares de Transformadas de Fourier de Tempo Discreto para Sinais Periódicos .....	652
C.7	Propriedades das Representações de Fourier .....	653
C.8	Relacionando as Quatro Representações de Fourier .....	655
C.9	Relações de Amostragem e <i>Aliasing</i> .....	655

**APÊNDICE D TABELAS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE E PROPRIEDADES****657**

D.1	Transformadas de Laplace Básicas .....	657
D.2	Propriedades da Transformada de Laplace .....	658

**APÊNDICE E TABELAS DE TRANSFORMADAS Z E PROPRIEDADES****661**

E.1	Transformadas z Básicas .....	661
E.2	Propriedades da Transformada z .....	662

## Notação

- [.] indica uma variável independente de valor discreto, por exemplo,  $x[n]$
- (.) indica uma variável independente de valor contínuo, por exemplo,  $x(t)$
- » As funções em minúsculas denotam quantidades no domínio de tempo, por exemplo,  $x(t)$ ,  $w[n]$
- » As funções em maiúsculas denotam quantidades em domínio freqüência – ou de transformada
  - $X[k]$  coeficientes da série de Fourier de tempo discreto para  $x[n]$
  - $X[k]$  coeficientes da série de Fourier para  $x(t)$
  - $X(e^{j\Omega})$  transformada de Fourier de tempo discreto de  $x[n]$
  - $X(j\omega)$  transformada de Fourier de  $x(t)$
  - $X(s)$  transformada de Laplace de  $x(t)$
  - $X(z)$  transformada z de  $x[n]$
- » Símbolos em letra minúscula e em negrito denotam quantidades vetoriais, por exemplo,  $\mathbf{q}$
- » Símbolos em letra maiúscula e em negrito denotam quantidades matriciais, por exemplo,  $\mathbf{A}$
- » O subscrito  $\delta$  indica uma representação em tempo contínuo de um sinal de tempo discreto
  - $x_\delta(t)$  representação em tempo contínuo para  $x[n]$
  - $X_\delta(j\omega)$  transformada de Fourier de  $x_\delta(t)$
- » Tipo sem serifa indica variáveis ou comandos do MATLAB, por exemplo,
  - $x = \text{fft}(x, n)$
  - $0^\circ$  é definido como 1, por conveniência
  - $\text{arctg}$  refere-se à função de quatro quadrantes e produz um valor entre  $-\pi$  e  $\pi$  radianos.

## Símbolos

$ c $	magnitude ou módulo da quantidade complexa $c$
$\arg\{c\}$	ângulo de fase da quantidade complexa $c$
$\text{Re}\{c\}$	parte real de $c$
$\text{Im}\{c\}$	parte imaginária de $c$
$c^*$	conjugado complexo de $c$
$j$	raiz quadrada de $-1$
$i$	raiz quadrada de $-1$ usada pelo MATLAB
$\mathcal{T}$	intervalo de amostragem em segundos
$T$	período fundamental para sinal de tempo contínuo em segundos
$N$	período fundamental para sinal de tempo discreto em amostras
$\omega$	freqüência (angular) para sinal de tempo contínuo em radianos/segundo
$\Omega$	freqüência (angular) para sinal de tempo discreto em radianos
$\omega_o$	freqüência (angular) fundamental para sinal periódico de tempo contínuo em radianos/segundo

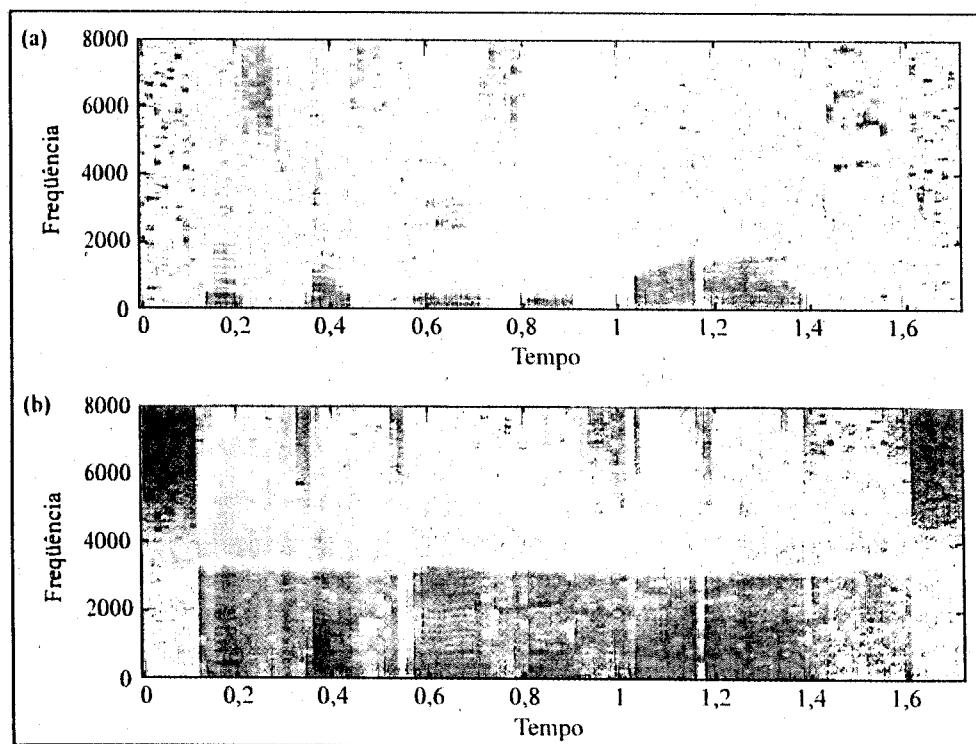
$\Omega_o$	frequência (angular) fundamental para sinal periódico de tempo discreto em radianos
$u(t), u[n]$	função degrau de amplitude unitária
$\delta[n], \delta(t)$	função impulso de força unitária
$H[\cdot]$	representação de um sistema como um operador $H$
$S^{\tau}[\cdot]$	deslocamento no tempo de $\tau$ unidades
$H^{-1}, h^{-1}$	o sobrescrito $-1$ denota sistema inverso
$*$	denota operação de convolução
$H(e^{j\Omega})$	resposta em frequência de um sistema de tempo discreto
$H(j\omega)$	resposta em frequência de um sistema de tempo contínuo
$h[n]$	resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto
$h(t)$	resposta ao impulso de um sistema de tempo contínuo
$y^{(n)}$	o sobrescrito $(n)$ denota resposta natural
$y^{(f)}$	o sobrescrito $(f)$ denota resposta forçada
$y^{(p)}$	o sobrescrito $(p)$ denota solução particular
$\xleftarrow{DTFS; \Omega_o}$	Par da série de Fourier de tempo discreto com frequência fundamental $\Omega_o$
$\xleftarrow{FS; \omega_o}$	Par da série de Fourier com frequência fundamental $\omega_o$
$\xleftarrow{DTFT}$	Par da transformada de Fourier de tempo discreto
$\xleftarrow{FT}$	Par da transformada de Fourier
$\xleftarrow{U}$	Par da transformada de Laplace
$\xleftarrow{U_u}$	Par da transformada de Laplace unilateral
$\xleftarrow{Z}$	Par da transformada $z$
$\xleftarrow{Z_u}$	Par da transformada $z$ unilateral
$sinc(u)$	$\sin(\pi u)/\pi u$
$\circledast$	convolução periódica de dois sinais periódicos
$\cap$	intersecção
$T(s)$	função de transferência de malha fechada
$F(s)$	diferença de retorno
$L(s)$	função de transferência de malha
$\epsilon_{ss}$	erro de estado estacionário ou permanente ( <i>steady-state</i> )
$K_p$	constante de erro de posição
$K_v$	constante de erro de velocidade
$K_a$	constante de erro de aceleração
P.O.	porcentagem de sobre-sinal ( <i>overshoot</i> )
$T_p$	tempo de pico
$T_r$	tempo de subida ( <i>rise time</i> )
$T_s$	tempo de acomodação ( <i>settling time</i> )
$X(\tau, j\omega)$	transformada de Fourier de tempo breve de $x(t)$
$W_x(\tau, a)$	transformada <i>wavelet</i> de $x(t)$

## Abreviações

A/D	analógico para digital (conversor)
AM	modulação de amplitude
BIBO	entrada limitada/saída limitada
CW	onda contínua
D/A	digital para analógico (conversor)
dB	decibel
GLD	grau de liberdade
DSB-SC	portadora de faixa lateral dupla suprimida
DTFS	série de Fourier de tempo discreto
DTFT	transformada de Fourier de tempo discreto
FDM	multiplexação por divisão de freqüência
FFT	transformada de Fourier rápida
FIR	resposta ao impulso de duração finita
FM	modulação de freqüência
FS	série de Fourier
FT	transformada de Fourier
Hz	hertz
IR	resposta ao impulso de duração infinita
LTI	(sistema) linear invariante no tempo
MRI	imagem de ressonância magnética
MSE	erro médio quadrático
PAM	modulação de amplitude de pulso
PIM	modulação de fase
QAM	modulação de quadratura-amplitude
RDC	região de convergência
rad	radiano(s)
s	segundo
SSB	modulação de faixa lateral única
STFT	transformada de Fourier de tempo breve
TDM	multiplexação por divisão de tempo
VSB	modulação de faixa lateral vestigial
WT	transformada <i>wavelet</i>



**FIGURA 1.6** Vista em perspectiva do Monte Shasta (Califórnia) derivada de um par de imagens de radar estéreo adquiridas da órbita terrestre com o Radar de Imageamento do Ônibus Espacial (SIR-B). (Cortesia do Jet Propulsion Laboratory).



**FIGURA 10.5** Espectrogramas de sinais de fala. (a) Versão com ruído do sinal de fala produzido por uma mulher dizendo a frase: "This was easy for us" ("Isto foi fácil para nós"). (b) Versão filtrada do sinal de fala.

De fato, a lista daquilo que constitui um sinal é quase interminável.

*Um sinal é formalmente definido como uma função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informações sobre a natureza de um fenômeno físico.* Quando a função depende de uma única variável, diz-se que o sinal é *unidimensional*. Um sinal de fala é um exemplo de sinal unidimensional cuja amplitude varia com o tempo, dependendo da palavra falada e de quem a fala. Quando a função depende de duas ou mais variáveis, diz-se que o sinal é *multidimensional*. Uma imagem é um exemplo de sinal multidimensional, com as coordenadas horizontal e vertical da imagem representando as duas dimensões.

## 1.2 O Que é Um Sistema?

Nos exemplos de sinais que mencionamos acima, há sempre um sistema associado à geração de cada sinal, e outro associado à extração da informação do sinal. Por exemplo, na comunicação oral, uma fonte sonora ou sinal excita o trato vocal, o qual representa um sistema. O processamento dos sinais da fala normalmente recorre ao uso de nossos ouvidos e aos caminhos auditivos em nosso cérebro. Na situação descrita aqui, os sistemas responsáveis pela produção e recepção dos sinais são de natureza biológica. Eles também poderiam ser executados usando sistemas eletrônicos que tentam simular ou imitar suas contrapartes biológicas. Por exemplo, o processamento de um sinal da fala pode ser executado por um sistema automático de reconhecimento da fala na forma de um programa de computador que reconhece palavras ou frases.

Não existe um propósito único para um sistema. Ao contrário, o propósito depende da aplicação de interesse. Num sistema de reconhecimento automático do locutor, a função do sistema é extrair informações de um sinal de fala que chega, com a finalidade de *reconhecer* ou *identificar* quem fala. Num sistema de comunicação, a função do sistema é *transportar* o contexto da informação de um sinal da mensagem através de um canal de comunicação e entregá-lo em um destino de maneira confiável. Num sistema de aterrissagem de avião, a exigência é manter a aeronave na linha central de uma pista de pouso.

*Um sistema é formalmente definido como uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função, produzindo, assim, novos sinais.* A interação entre um sistema e seus sinais associados é ilustrada esquematicamente na Figura 1.1. As descrições dos sinais de entrada e saída dependem, naturalmente, da aplicação pretendida do sistema:

- Num sistema de reconhecimento automático de quem fala, o sinal de entrada é um sinal de fala (voz), o sistema é um computador, e o sinal de saída é a identidade do locutor.
- Num sistema de comunicação, o sinal de entrada poderia ser um sinal de fala ou dados de computador, o sistema em si é composto da combinação de um transmissor, canal e receptor, e o sinal de saída é uma estimativa do sinal da mensagem original.
- Num sistema de aterrissagem de avião, o sinal de entrada é a posição desejada da aeronave em relação à pista de pouso, o sistema é a aeronave, e o sinal de saída é uma correção na posição lateral da aeronave.

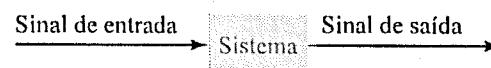


FIGURA 1.1 Representação em diagrama de blocos de um sistema.

## 1.3 Visão Geral de Sistemas Específicos

Ao descrevermos o que queremos dizer por sinais e sistemas nas seções precedentes, mencionamos diversas aplicações de sinais e sistemas. Nesta seção, ampliaremos nossa exposição a respeito de cinco desses sistemas de aplicações, a saber, sistemas de comunicações, sistemas de controle, sensoreamento remoto, processamento de sinais biomédicos e sistemas auditivos.

# 1

## INTRODUÇÃO



### 1.1 O Que é Um Sinal?

Os sinais, de uma forma ou de outra, constituem um ingrediente básico de nossa vida diária. Por exemplo, uma forma comum de comunicação humana se desenvolve através do uso de sinais da fala, seja na conversação frente a frente ou por um canal telefônico. Outra forma comum de comunicação humana é visual por natureza, com os sinais assumindo a forma de imagens de pessoas ou objetos que nos cercam.

Uma outra forma ainda de comunicação humana é através de correio eletrônico pela *Internet*. Além de correio, a Internet constitui um poderoso meio para pesquisar informações de interesse geral, publicidade, *telecommuting*<sup>1</sup>, educação e jogos. Todas estas formas de comunicação pela Internet envolvem o uso de sinais que transmitem informações de um tipo ou de outro. Outros exemplos da vida real em que surgem sinais que nos interessam serão discutidos em seguida.

Ao ouvir os batimentos cardíacos de um paciente e monitorar sua pressão sanguínea e temperatura, o médico é capaz de diagnosticar a presença ou ausência de uma enfermidade ou doença. Estas quantidades representam sinais que transmitem informações ao médico sobre o estado de saúde do paciente.

Ao ouvirmos a previsão do tempo no rádio, ouvimos referências às variações diárias de temperatura, umidade, e velocidade e direção dos ventos prevalecentes. Os sinais representados por estas quantidades nos ajudam, por exemplo, a formar uma opinião sobre a conveniência de permanecermos em casa ou sairmos para dar um passeio.

As flutuações diárias dos preços das ações e *commodities*<sup>2</sup> nos mercados internacionais, à sua maneira, representam sinais que transmitem informações sobre como as ações de uma companhia ou corporação em particular estão se saindo. Baseando-se nestas informações, decisões são tomadas sobre a conveniência de fazer novos investimentos ou vender as ações antigas.

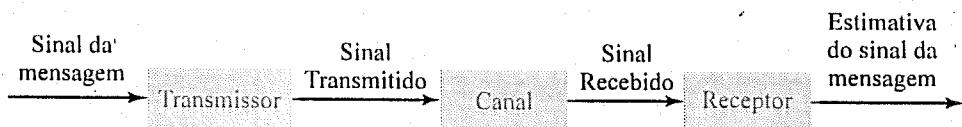
Uma sonda que explora o espaço exterior envia valiosas informações sobre um planeta distante a uma estação na Terra. A informação pode assumir a forma de imagens de radar que representam perfis da superfície do planeta, imagens em infravermelho que transmitem informações sobre quão quente é o planeta, ou imagens ópticas que revelam a presença de nuvens em torno do planeta. Estudando estas imagens, nosso conhecimento das características peculiares do planeta em questão é melhorado significativamente.

<sup>1</sup> *Telecommuting*: A prática de trabalhar em casa e comunicar-se com os colegas de trabalho por meio do telefone, tipicamente com um computador e modem. [Esta palavra é proveniente da fusão de *tele* + *commuting*, que significa viajar constantemente (usando trem, carro, ônibus etc.)].

<sup>2</sup> *Commodity*: artigo; mercadoria. [Nas relações comerciais internacionais, o termo designa um tipo particular de mercadoria em estado bruto ou produto primário de importância comercial, como o ferro, grãos, café etc.].

### SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO

Há três elementos básicos em todo sistema de comunicação, a saber, o *transmissor*, o *canal* e o *receptor*, conforme descrito na Figura 1.2. O transmissor está localizado num ponto do espaço, o receptor está localizado em algum outro ponto separado do transmissor, e o canal é o meio físico que os liga. Cada um destes três elementos pode ser visto como um sistema com sinais próprios associados. O propósito do transmissor é converter o sinal da mensagem produzido por uma fonte de informação para uma forma apropriada para ser transmitida por um canal. O sinal da mensagem poderia ser um sinal de fala, sinal de televisão (vídeo), ou dados de computador. O canal pode ser de fibra óptica, cabo coaxial, canal de satélite, ou canal de rádio móvel; cada um destes canais tem sua área de aplicação.



**FIGURA 1.2** Elementos de um sistema de comunicação. O transmissor modifica o sinal da mensagem para uma forma apropriada para ser transmitida por um canal. O receptor processa a saída do canal (isto é, o sinal recebido) para produzir uma estimativa do sinal da mensagem.

À medida que o sinal transmitido se propaga por um canal, ele é distorcido devido às características físicas deste canal. Além disso, ruído e sinais de interferência (que se originam de outras fontes) contaminam a saída do canal, fazendo com que o sinal recebido resulte em uma versão corrompida do sinal transmitido. A função do receptor é operar no sinal recebido a fim de reconstruir uma forma reconhecível (isto é, produzir uma estimativa) do sinal da mensagem original e entregá-lo ao usuário final. O papel de processamento de sinal do receptor é, dessa forma, o inverso do papel do transmissor; além disso, o receptor inverte os efeitos do canal.

Os detalhes das operações executadas no transmissor e no receptor dependem do tipo de sistema de comunicação que é considerado. O sistema de comunicação pode ser do tipo analógico ou digital. Em termos de processamento de sinal, o desenho de um *sistema de comunicação analógico* é relativamente simples. Especificamente, o transmissor consiste em um *modulador*, e o receptor consiste em um *demodulador*. *Modulação* é o processo de converter o sinal da mensagem para uma forma que seja compatível com as características de transmissão do canal. Comumente, o sinal transmitido é representado como uma variação de amplitude, fase ou freqüência de uma onda portadora senoidal. Deste modo, falamos de modulação de amplitude, fase ou freqüência, respectivamente. Correspondentemente, através do uso da demodulação de amplitude, demodulação de fase, ou demodulação de freqüência, uma estimativa do sinal da mensagem original é produzida na saída do receptor. Cada uma destas técnicas de modulação/demodulação analógica tem suas próprias vantagens e desvantagens.

Em contrapartida, um *sistema de comunicação digital* é consideravelmente mais complexo, como descrevemos aqui. Se o sinal da mensagem tiver a forma analógica, como nos sinais de fala e vídeo, o transmissor executará as seguintes operações para convertê-lo para a forma digital:

- *Amostragem*, a qual converte o sinal da mensagem em uma seqüência de números, com cada número representando a amplitude do sinal da mensagem em um instante de tempo particular.
- *Quantização*, a qual envolve representar cada número produzido pelo *amostrador* no nível mais próximo escolhido dentre um número finito de níveis de amplitude discreta. Por exemplo, podemos representar cada amostra como um número binário de 16 bits, caso em que há  $2^{16}$  níveis de amplitude. Depois da combinação de amostragem e quantização, obtemos uma representação do sinal da mensagem que é *discreta* tanto em termos de tempo como de amplitude.
- *Codificação*, cujo propósito é representar cada amostra quantizada por meio de uma palavra de código composta de um número finito de símbolos. Por exemplo, em um código binário os símbolos podem ser 1's e 0's.

Diferentemente das operações de amostragem e codificação, a quantização é completamente irreversível; ou seja, sempre se incorre numa perda de informação por sua aplicação. Porém, esta perda pode se tornar pequena, e não perceptível para todos os efeitos práticos, usando-se um quantizador com um número suficientemente grande de níveis de amplitude distintos. À medida que o número de níveis de amplitude discreta se eleva, o tamanho da palavra de código também deve elevar-se de maneira correspondente.

Se, entretanto, para começar, a fonte de informação for discreta, como é o caso de um computador digital, nenhuma das operações acima será necessária.

O transmissor pode envolver operações adicionais, a saber, compactação de dados e codificação de canal. O propósito da compactação de dados é remover informações redundantes do sinal da mensagem e assim prestar-se à utilização eficiente do canal ao reduzir o número de bits/amostra necessários para a transmissão. A codificação de canal, por outro lado, envolve a inserção de elementos redundantes (por exemplo, símbolos extras) na *palavra de código* de uma maneira controlada; isto é feito para oferecer proteção contra ruído e sinais de interferência captados durante o curso da transmissão através do canal. Finalmente, o sinal codificado é modulado numa onda portadora (usualmente, senoidal) para ser transmitido pelo canal.

No receptor, as operações acima são executadas em ordem inversa. Uma estimativa do sinal da mensagem original é assim produzida e entregue ao usuário final. Porém, como mencionamos anteriormente, a quantização é irreversível e, portanto, não tem nenhuma contraparte no receptor.

Torna-se claro a partir dessa discussão que o uso de comunicações digitais pode exigir uma quantidade considerável de circuitos eletrônicos. Este não é um problema significativo, uma vez que os componentes eletrônicos são relativamente baratos devido à crescente disponibilidade de circuitos integrados em escala muito alta — VLSI (*very-large-scale-integrated*) — na forma de *chips* de silício. De fato, com as contínuas melhorias na indústria de semicondutores, as comunicações digitais frequentemente são mais eficientes quanto ao custo do que as comunicações analógicas.

Há dois modos básicos de comunicações:

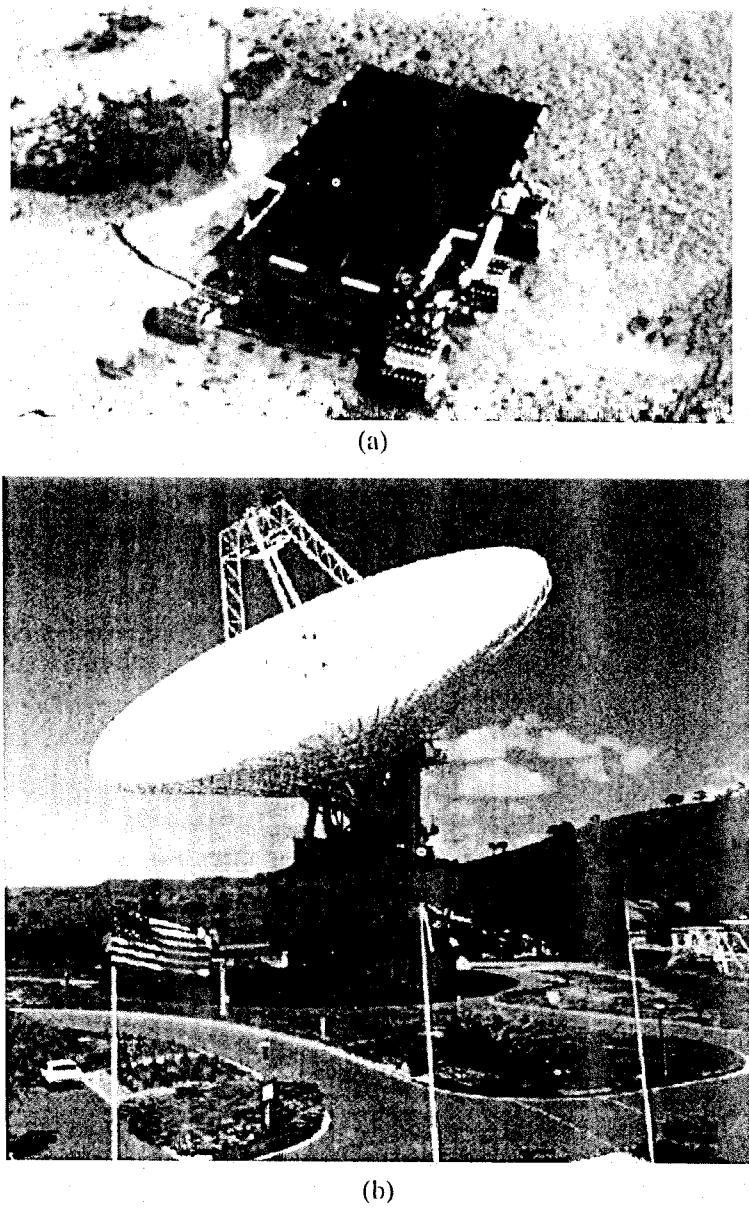
1. *Radiodifusão*<sup>3</sup>, a qual envolve o uso de um único transmissor potente e numerosos receptores que são relativamente baratos para construir. Aqui, os sinais que portam informações fluem numa única direção.
2. *Comunicação ponto a ponto*, na qual o processo de comunicação se desenvolve através de um enlace entre um único transmissor e um único receptor. Neste caso, normalmente há um fluxo bidirecional de sinais que portam informações. Há um transmissor e um receptor em cada extremidade do enlace.

O modo de radiodifusão de comunicação é exemplificado pelo rádio e televisão, que são partes integrantes de nossa vida diária. Por outro lado, o onipresente telefone fornece o meio para uma forma de comunicação ponto a ponto. Note, entretanto, que, neste caso, o enlace faz parte de uma rede telefônica altamente complexa, projetada para acomodar um grande número de usuários mediante demanda.

Outro exemplo de comunicação ponto a ponto é o enlace de *comunicações do espaço profundo* entre uma estação terrestre e um robô que explora a superfície de um planeta distante. Diferentemente da comunicação telefônica, a composição do sinal da mensagem depende da direção do processo de comunicação. O sinal da mensagem pode estar na forma de instruções geradas por computador transmitidas de uma estação na Terra, as quais comandam o robô para executar manobras específicas, ou o referido sinal pode conter informações valiosas sobre a composição química do solo do planeta, as quais são enviadas de volta à Terra para análise. Para comunicar-se de maneira confiável em distâncias tão grandes, é necessário usar comunicações digitais. A Figura 1.3(a) mostra uma fotografia do robô, chamado *Pathfinder*, que pousou em Marte em 4 de julho de 1997, um dia histórico para a National Aeronautics and Space Administration (NASA) na investigação científica do sistema solar.

<sup>3</sup>*Broadcasting*: Radiodifusão; a irradiação de informações para vários receptores simultaneamente.

A Figura 1.3(b) mostra uma fotografia da antena de 70 metros de alta precisão, localizada em Camberra, Austrália, a qual faz parte integrante da Deep Space Network (DSN) internacional da NASA. A DSN constitui o elo de comunicações bidirecionais vitais que orienta e controla naves exploradoras planetárias (não tripuladas) e traz de volta imagens e novas informações científicas coletadas por elas. O uso bem-sucedido da DSN para exploração planetária representa um triunfo da teoria e tecnologia da comunicação sobre os desafios apresentados pela inevitável presença de ruído.



**FIGURA 1.3** (a) Instantâneo do *Pathfinder* explorando a superfície de Marte. (b) A antena de 70 metros (230 pés) de diâmetro localizada em Camberra, Austrália. A superfície do refletor de 70 metros deve permanecer numa posição exata dentro de uma fração do comprimento de onda do sinal. (Cortesia do Jet Propulsion Laboratory.)

Infelizmente, todo sistema de comunicação sofre da presença de *ruído de canal* no sinal recebido. O ruído impõe graves limites à qualidade das mensagens recebidas. Devida à enorme distância entre nosso próprio planeta e Marte, por exemplo, a potência média do componente portador de informação do sinal recebido, em qualquer uma das extremidades do enlace, é relativamente pequena em comparação com a potência média do componente ruído. Uma operação confiável do enlace é obtida através do uso combinado de (1) *grandes antenas*, como parte da DSN e (2) *controle de erros*. Para uma antena refletora parabólica (isto é, o tipo de antena retratado na Figura 1.3(b), a *área efetiva* geralmente está entre 50% e 65% da área física da antena. A potência recebida disponível nos terminais

da antena é igual à área efetiva vezes a potência por área unitária portada pela onda eletromagnética incidente. Evidentemente, quanto maior a antena, maior será a potência do sinal recebido; daí, o uso de grandes antenas na DSN.

Voltando-nos, na continuação, para a questão do controle de erros, ele envolve o uso de um *codificador de canal* no transmissor e um *decodificador de canal* no receptor. O codificador de canal aceita bits de mensagens e adiciona *redundância* de acordo com uma regra prescrita, produzindo assim, dados codificados a uma taxa de bits mais elevada. Os bits de redundância são adicionados com a finalidade de proteção contra ruído de canal. O decodificador de canal explora a redundância para decidir quais bits de mensagens foram de fato enviados. A meta conjunta do codificador e decodificador de canal é minimizar o efeito do ruído; ou seja, o número de erros entre a entrada do codificador de canal (derivados da fonte de informação) e a saída do decodificador (entregue ao usuário pelo receptor) é, em média, minimizada.

### SISTEMAS DE CONTROLE

O *controle* de sistemas físicos é generalizado na aplicação de sinais e sistemas em nossa sociedade industrial. Como alguns exemplos específicos em que o controle é aplicado, mencionamos os pilotos automáticos de aviões, veículos de transporte coletivo, motores de automóveis, ferramentas de máquina, refinarias de petróleo, fábricas de papel, reatores nucleares, usinas elétricas e robôs. O objeto a ser controlado comumente é chamado *planta*; nesse contexto, uma aeronave é uma planta.

Pode haver muitos motivos para o uso de sistemas de controle. Do ponto de vista da engenharia, as duas mais importantes são a obtenção de uma resposta satisfatória e desempenho robusto, como descrevemos aqui:

- 1. Resposta.** Diz-se que uma planta produz uma resposta satisfatória se sua saída segue ou acompanha uma entrada de referência específica. O processo de manter a saída da planta próximo da entrada de referência é chamado *regulação*.
- 2. Robustez.** Diz-se que um sistema de controle é robusto se ele exibe boa regulação, apesar da presença de perturbações externas (por exemplo, turbulências que afetam o vôo de uma aeronave) e na presença de mudanças nos parâmetros da planta devido a condições ambientais variáveis.

A obtenção destas propriedades desejáveis normalmente exige o uso de *realimentação*, como ilustra a Figura 1.4. O sistema da Figura 1.4 contém os elementos abstratos de um sistema de controle e é chamado *sistema de controle de malha fechada* ou *sistema de controle com realimentação*.

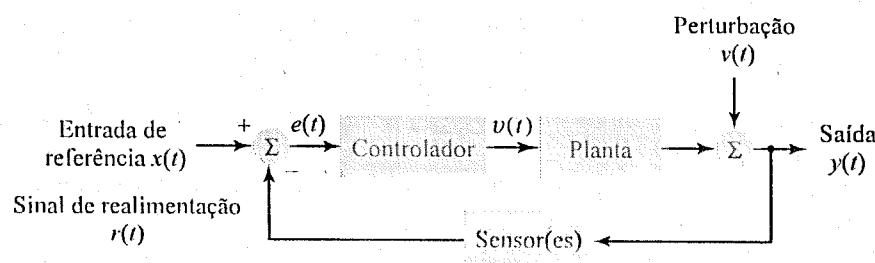


FIGURA 1.4 Diagrama de blocos de um sistema de controle com realimentação. O controlador impulsiona a planta, cuja saída perturbada impulsiona o(s) sensor(es). O sinal de realimentação resultante é subtraído da entrada de referência para produzir um sinal de erro  $e(t)$ , o qual, por sua vez, impulsiona o controlador. A malha de realimentação é, deste modo, fechada.

Por exemplo, em um sistema de aterrissagem de avião a planta é representada pelo corpo do avião e pelo atuador, os sensores são usados pelo piloto para determinar a posição lateral da aeronave, e o controlador é um computador digital.

Em todo caso, a planta é descrita por operações matemáticas que geram a saída  $y(t)$  em resposta à entrada de planta  $v(t)$  e à perturbação externa  $v(t)$ . O sensor incluído na malha de realimentação mede a saída de planta  $y(t)$  e a converte para outra forma, usualmente, elétrica. A saída de sensor  $r(t)$  constitui o sinal de realimentação. Ele é comparado com a entrada de referência  $x(t)$  para produzir uma diferença ou sinal de erro  $e(t)$ . Este último sinal é aplicado a um *controlador*, o qual, por sua vez,

gera o sinal atuante  $v(t)$  que realiza a ação de controle na planta. Um sistema de controle com uma única entrada de planta e única saída, como ilustra a Figura 1.4, é chamado *sistema de entrada única/saída única (SISO – single-input/single-output)*. Quando o número de entradas de planta e/ou o número de saídas de planta for mais de um, o sistema será chamado *sistema de múltiplas entradas/múltiplas saídas (MIMO – multiple-input/multiple-output)*.

Em qualquer um dos casos, o controlador pode estar na forma de um computador digital ou microprocessador, em cujo caso falamos de *sistema de controle digital*. O uso de sistemas de controle digitais está se tornando cada vez mais comum devido à flexibilidade e elevado grau de precisão proporcionados pelo uso de um computador digital como o controlador. Por causa de sua própria natureza, o uso de um sistema de controle digital envolve as operações de amostragem, quantização e codificação que foram descritas anteriormente.

A Figura 1.5 mostra a fotografia do lançamento de um ônibus espacial da NASA (National Aeronautics and Space Administration), que recorre ao uso de um computador digital para seu controle.

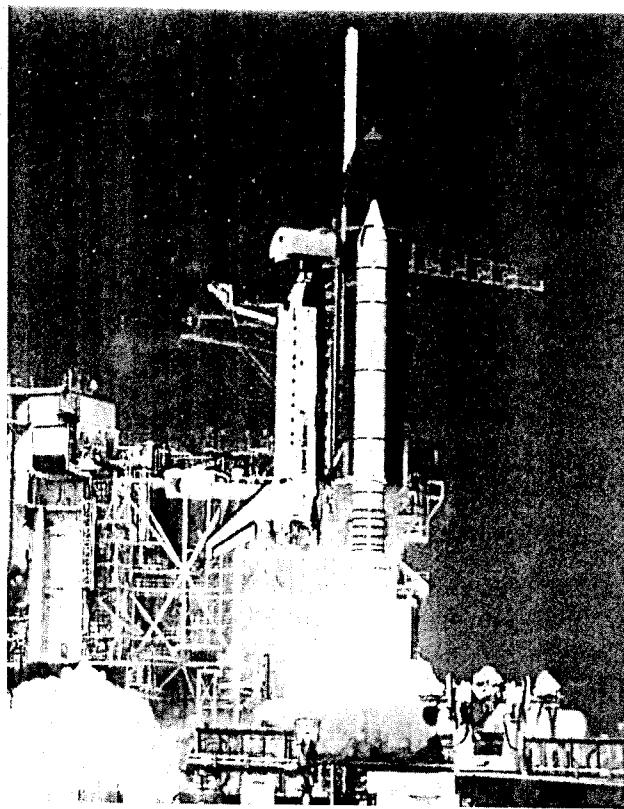


FIGURA 1.5 Lançamento do ônibus espacial da NASA. (Cortesia da NASA.)

### SENSOREAMENTO REMOTO

*Sensoreamento remoto* é definido como o processo de adquirir informações sobre um objeto de interesse sem estar em contato físico com ele. Basicamente, a aquisição de informações é realizada *detectando-se e medindo-se as mudanças que o objeto impõe ao campo circunvizinho*. O campo pode ser eletromagnético, acústico, magnético ou gravitacional, dependendo da aplicação de interesse. A aquisição de informações pode ser realizada de maneira *passiva*, ouvindo-se o campo (sinal) que é emitido naturalmente pelo objeto e processando-o; ou de maneira *ativa*, iluminando-se intencionalmente o objeto com um campo (sinal) bem-definido e processando-se o eco (isto é, o sinal retornado) do objeto.

A definição de sensoreamento remoto apresentada acima é bastante ampla, em termos de que se aplica a todo campo possível. Na prática, entretanto, o termo “sensoreamento remoto” comumente é usado no contexto dos campos eletromagnéticos, com as técnicas usadas para aquisição de informações cobrindo o espectro eletromagnético inteiro. É com esta forma especializada de sensoreamento remoto que nos preocupamos aqui.

O escopo do sensoamento remoto se expandiu muito a partir da década de 60 devido ao advento dos satélites e sondas planetárias como plataformas espaciais para os sensores, e a disponibilidade de sofisticadas técnicas de processamento de sinais digitais para extrair informações dos dados coletados pelos sensores. Em especial, sensores que estão em satélites que orbitam a Terra fornecem informações altamente valiosas sobre padrões globais de tempo e dinâmica das nuvens, cobertura de vegetação superficial e suas variações sazonais e temperaturas da superfície do oceano. O importante é que eles o fazem de uma maneira confiável e em base contínua. Nos estudos planetários, sensores mantidos no espaço nos têm fornecido imagens de alta resolução de superfícies planetárias; as imagens, por sua vez, têm desvendado para nós novos tipos de fenômenos físicos, alguns similares e outros completamente diferentes daqueles aos quais estamos familiarizados em nosso planeta Terra.

O espectro eletromagnético se estende das ondas de rádio de baixa freqüência às regiões de microondas, submilimétricas, infravermelho, visíveis, ultravioleta, raios X e raios-gama do espectro. Infelizmente, um único sensor sozinho pode cobrir somente uma pequena parte do espectro eletromagnético, sendo o mecanismo responsável pela interação onda-matéria influenciado por um número limitado de propriedades físicas do objeto de interesse. Se, entretanto, tivermos de realizar um estudo detalhado de uma superfície planetária ou atmosfera, o uso simultâneo de *múltiplos sensores* cobrindo uma grande parte do espectro eletromagnético será necessário. Por exemplo, para estudarmos uma superfície planetária, podemos necessitar de um conjunto de sensores que cobrem faixas selecionadas, da seguinte maneira:

- ▶ Sensores de *radar* para fornecerem informações sobre as propriedades físicas da superfície do planeta que está em estudo (por exemplo, topografia, aspereza, umidade e constante dielétrica).
- ▶ Sensores *infravermelhos* para medir as propriedades térmicas próximas à superfície do planeta.
- ▶ Sensores *visíveis* e *próximos do infravermelho* para fornecer informações sobre a composição química da superfície do planeta.
- ▶ Sensores de *raios X* para fornecer informações sobre materiais radioativos contidos no planeta.

Os dados coletados por estes sensores altamente distintos são, então, processados em um computador para gerar um conjunto de imagens que podem ser usadas coletivamente para aumentar o conhecimento de um cientista que estuda a superfície planetária.

Entre os sensores eletromagnéticos mencionados acima, um tipo especial de radar como, por exemplo, o radar de abertura sintética (*synthetic aperture radar – SAR*), destaca-se como um sistema de imagens único no campo do sensoamento remoto. Ele oferece os seguintes recursos atraentes:

- ▶ Operação satisfatória dia e noite e sob todas as condições de tempo.
- ▶ Capacidade de imagens de alta resolução que é independente da altitude do sensor ou do comprimento de onda.

A realização de uma imagem de alta resolução com radar exige o uso de uma antena com uma grande abertura. A partir de uma perspectiva prática, entretanto, há um limite físico para o tamanho de uma antena que pode ser acomodada como uma plataforma aerotransportada ou mantida no espaço. Em um sistema SAR, uma abertura de antena grande é sintetizada por meio de processamento de sinais; daí o nome “radar de abertura sintética.” A idéia fundamental por trás do SAR é que um conjunto de elementos de antena igualmente espaçados ao longo de uma linha reta é equivalente a uma única antena que se move ao longo da linha do conjunto a uma velocidade uniforme. Isto é verdadeiro desde que satisfaça a seguinte exigência: os sinais recebidos pela antena única em pontos igualmente espaçados ao longo da linha do conjunto sejam *coerentemente* registrados; ou seja, as relações de amplitude e fase entre os sinais recebidos sejam mantidas. Um registro coerente assegura que os sinais recebidos da única antena correspondem aos sinais recebidos dos elementos individuais de um conjunto de antenas equivalente. Para obter uma imagem de alta resolução dos sinais de uma antena única, operações de processamento de sinal altamente sofisticadas são necessárias. Uma operação central no processamento de sinais é a *transformada de Fourier*, a qual é implementada eficientemente em um computador digital usando-se um algoritmo conhecido como *algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform)*. A análise de sinais de Fourier é um dos principais pontos de foco deste livro.

A fotografia da Figura 1.6 mostra uma vista em perspectiva do Monte Shasta (Califórnia), a qual foi derivada de um par estéreo de imagens SAR adquiridas de uma órbita da Terra com o radar de imagemamento do ônibus espacial (Shuttle Imaging Radar – SIR-B). A versão em cores desta fotografia aparece na foto colorida.



**FIGURA 1.6** Vista em perspectiva do Monte Shasta (Califórnia) derivada de um par de imagens de radar estéreo adquiridas de órbita com o radar de imagemamento do ônibus espacial (Shuttle Imaging Radar – SIR-B). (Cortesia do Jet Propulsion Laboratory.) Veja página colorida.

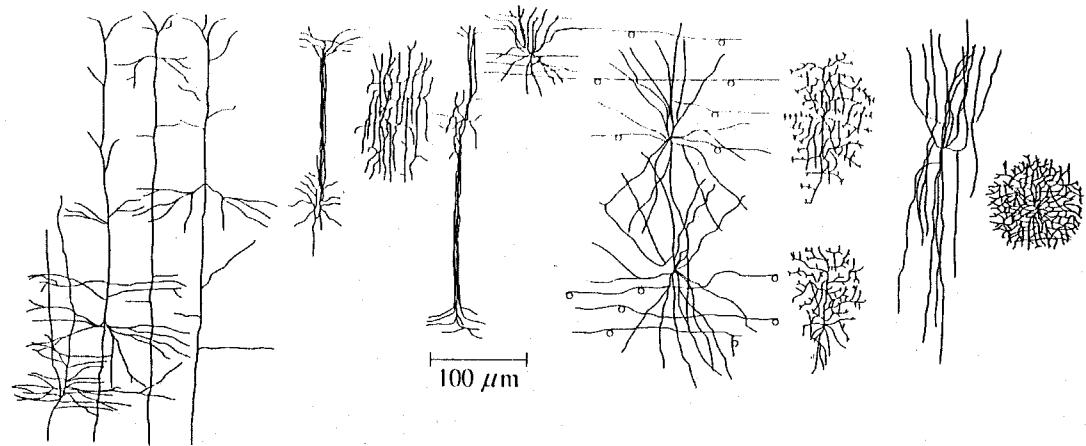
### ■ PROCESSAMENTO DE SINAIS BIOMÉDICOS

A meta do processamento de sinais biomédicos é extrair informações de um sinal biológico que nos ajude a melhorar ainda mais nossa compreensão dos mecanismos básicos da função biológica e nos auxilie no diagnóstico ou tratamento de uma condição médica. A geração de muitos *sinais biológicos* encontrados no corpo humano vem da atividade elétrica de grandes grupos de células nervosas ou células musculares. As células nervosas do cérebro comumente são chamadas *neurônios*. A Figura 1.7 mostra os tipos morfológicos de neurônios identificáveis no córtex cerebral de um macaco, baseados em estudos do córtex sensorial e motor somático primário. Esta figura ilustra as muitas formas e tamanhos diferentes de neurônios que existem.

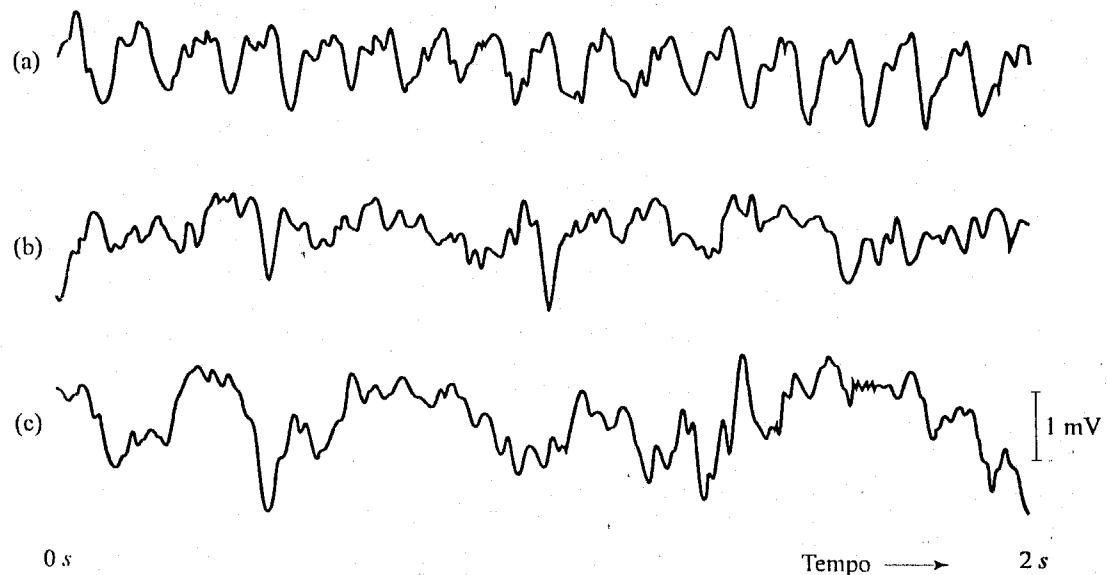
Independentemente da origem do sinal, o processamento de sinais biomédicos inicia-se com um registro temporal do evento biológico de interesse. Por exemplo, a atividade elétrica do coração é representada por um registro denominado *eletrocardiograma* (ECG). O ECG representa as mudanças no potencial (tensão) devido aos processos eletroquímicos envolvidos na formação e dispersão espacial das excitações elétricas nas células do coração. Consequentemente, inferências detalhadas a respeito do coração podem ser feitas a partir do ECG.

Outro exemplo importante de sinal biológico é o *eletroencefalograma* (EEG). O EEG é um registro das flutuações na atividade elétrica de grandes grupos de neurônios no cérebro.

Especificamente, o EEG mede o campo elétrico associado com a corrente que flui através de um grupo de neurônios. Para registrar o EEG (ou o ECG) no mínimo dois eletrodos são necessários. Um eletrodo ativo é colocado sobre o local particular da atividade neuronal no qual se tem interesse, e um eletrodo de referência é colocado a alguma distância remota deste local; o EEG é medido como a tensão ou diferença de potencial entre os eletrodos ativo e de referência. A Figura 1.8 mostra três exemplos de sinais de EEG registrados do hipocampo de um rato.



**FIGURA 1.7** Tipos morfológicos de células nervosas (neurônios) identificáveis no córtex cerebral de um macaco, baseados em estudos do córtex sensorial e motor somático primário. (Reproduzido de E.R. Kandel, J. H. Schwartz e T. M. Jessel, *Principles of Neural Science*, 3<sup>a</sup> edição, 1991; cortesia da Appleton and Lange.)



**FIGURA 1.8** Os traços mostrados em (a), (b) e (c) são três exemplos de sinais de EEG gravados do hipocampo de um rato. Estudos neurobiológicos sugerem que o hipocampo desempenha um papel fundamental em certos aspectos da aprendizagem ou memória.

Uma importante questão de preocupação no processamento de sinais biomédicos — no contexto do ECG, EEG ou algum outro sinal biológico — é a detecção e supressão de artefatos. Um *artefato* refere-se à parte do sinal produzida por eventos que são estranhos ao evento biológico de interesse. Surgeem artefatos num sinal biológico em diferentes etapas do processamento, e de muitas maneiras diferentes, como resumimos aqui:

- *Artefatos instrumentais*, gerados pelo uso de um instrumento. Um exemplo de artefato instrumental é a interferência de 60 Hz captada pelos instrumentos de gravação das tomadas da rede elétrica.
- *Artefatos biológicos*, nos quais um sinal biológico contamina ou interfere em outro. Um exemplo de artefato biológico é o deslocamento do potencial elétrico que pode ser observado no EEG devido à atividade cardíaca.
- *Artefatos de análise*, os quais podem surgir no decorrer do processamento do sinal biológico para produzir uma estimativa do evento de interesse.

Os artefatos de análise são, de certa forma, controláveis. Por exemplo, erros de arredondamento devidos à quantização de amostras de sinais, que surgem da utilização de processamento digital de sinais, podem se tornar imperceptíveis para todos os propósitos práticos ao tornar o número de níveis discretos de amplitude no quantizador muito grande.

E os artefatos instrumentais e biológicos? Um método comum de reduzir seus efeitos é através do uso da *filtragem*. Um *filtro* é um *sistema* que executa uma operação desejada em um sinal ou sinais. Ele passa sinais que contêm freqüências de uma faixa de freqüência, denominada faixa de passagem do filtro, e remove sinais que contêm freqüências de outras faixas de freqüência. Supondo que possuíssemos um conhecimento *a priori* do sinal que nos interessa, poderíamos estimar a faixa de freqüências dentro da qual os componentes significativos do sinal desejado estão localizados. Então, quando se projeta um filtro, cuja faixa de passagem corresponde às freqüências do sinal desejado, os artefatos que possuem componentes de freqüência fora desta faixa de passagem são removidos pelo filtro. A pressuposição feita aqui é que o sinal desejado e os artefatos que o contaminam ocupam essencialmente faixas de freqüências que não se sobrepõem. Entretanto, se as faixas de freqüência se sobrepuarem umas às outras, o problema de filtragem se tornará mais difícil e exigirá uma solução que está além do escopo deste livro.

## ■ SISTEMA AUDITIVO

Em nosso último exemplo de sistema, voltamo-nos ao *sistema auditivo* dos mamíferos, cuja função é discriminar e reconhecer sons complexos, baseando-se em seu conteúdo de freqüência.

O som é produzido por vibrações como, por exemplo, os movimentos das cordas vocais ou das cordas de um violino. Estas vibrações resultam na compressão e rarefação (isto é, maior ou menor pressão) do ar circunvizinho. A perturbação assim produzida se irradia para fora da fonte de som como uma *onda acústica* com altos e baixos de pressão.

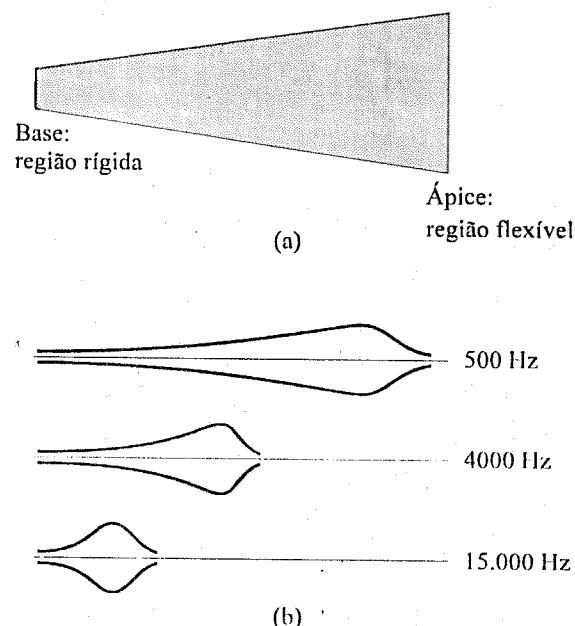
O ouvido, que é o órgão da audição, responde às ondas acústicas que recebe. Ele tem três partes principais, com suas funções resumidas a seguir:

- O *ouvido externo* auxilia na coleta de sons.
- O *ouvido médio* proporciona um casamento de impedâncias acústicas entre o ar e os fluidos da cóclea, transmitindo, assim, as vibrações da *membrana timpânica* (tímpano) devidas aos sons que chegam ao ouvido interno de maneira eficiente.
- O *ouvido interno* converte as vibrações mecânicas do ouvido médio em um sinal “eletroquímico” ou “neural” para ser transmitido ao cérebro.

O ouvido interno consiste num tubo ósseo de formato espiralado, cheio de fluido, chamado *cóclea*. As vibrações induzidas pelo som da membrana timpânica são transmitidas para a *janela oval* da cóclea através de uma cadeia de ossos, chamada *ossículos*. A ação de alavanca dos ossículos fornece alguma amplificação das vibrações mecânicas da membrana timpânica. A cóclea se afila em seu tamanho como um cone na direção do topo, de forma que há uma janela oval na *base* e um *ápice* no topo. Pelo meio da cóclea se estende a *membrana basilar*, a qual se torna mais larga à medida que a cóclea se torna mais estreita.

O movimento vibratório da membrana timpânica é transmitido como uma *onda que se move* ao longo do comprimento da membrana basilar, iniciando-se da janela oval até o ápice na extremidade posterior da cóclea. A onda que se propaga ao longo da membrana basilar assemelha-se muito à ação de sacudir uma corda que, presa numa extremidade, faz com que uma onda se propague ao longo da corda desde a extremidade que foi sacudida até a extremidade fixa. Como ilustra a Figura 1.9, a onda chega ao pico de sua amplitude numa localização específica ao longo da membrana basilar, dependendo da freqüência do som que chega. Dessa forma, não obstante a própria onda viajar ao longo da membrana basilar, o envelope da onda é “estacionário” para determinada freqüência. Os deslocamentos dos picos relativos a freqüências elevadas ocorrem na direção da base (onde a membrana basilar é mais estreita e mais rígida). Os deslocamentos dos picos para baixas freqüências ocorrem na direção do ápice (onde a membrana basilar é mais larga e mais flexível). Ou seja, à medida que a onda se propaga ao longo da membrana basilar, um fenômeno de *ressonância* se desenvolve, com a extremidade da membrana basilar na base da cóclea que ressoa a aproximadamente 20.000 Hz, e sua outra extremidade

no ápice da cóclea ressoando aproximadamente a 20 Hz; a freqüência de ressonância da membrana basilar *decrece* gradualmente com a distância do ápice. Conseqüentemente, diz-se que o eixo espacial da cóclea é *tonotopicamente ordenado*, porque cada localização está associada a uma freqüência de ressonância ou tom particulares.



**FIGURA 1.9** (a) Neste diagrama, a membrana basilar na cóclea é descrita como se estivesse desenrolada e estendida; a “base” e o “ápice” referem-se à cóclea, mas as observações “região rígida” e “região flexível” referem-se à membrana basilar. (b) Este diagrama ilustra as ondas que percorrem ao longo da membrana basilar, mostrando seus envelopes induzidos pelo som que chega em três diferentes freqüências.

A membrana basilar é um *meio dispersivo*, em termos de que as freqüências mais elevadas se propagam mais lentamente do que as freqüências mais baixas. Num meio dispersivo, distinguimos duas diferentes velocidades, a saber, *velocidade de fase* e *velocidade de grupo*. A velocidade de fase é a velocidade na qual uma crista ou vale da onda se propaga ao longo da membrana basilar. A velocidade de grupo é a velocidade na qual o envelope da onda e sua energia se propagam.

As vibrações mecânicas da membrana basilar são transduzidas em sinais eletroquímicos pelas células ciliares que repousam de forma ordenada na membrana basilar. Há dois tipos principais de células ciliares: *células ciliares internas* e *células ciliares externas*, sendo estas últimas, de longe, o tipo bem mais numeroso. As células ciliares externas são elementos que têm *motilidade*. Ou seja, eles são capazes de alterar seu tamanho e talvez outras características mecânicas, o que se acredita ser responsável pelo efeito *não linear* compressivo visto nas vibrações da membrana basilar. Há também evidências de que as células ciliares externas contribuem para o aguçamento das curvas de ressonância desde a membrana basilar até a parte superior do sistema. Porém, as células ciliares internas são os principais lugares de *transdução auditiva*. Especificamente, cada neurônio auditivo tem uma sinapse com uma célula ciliar interna numa posição particular da membrana basilar. Os neurônios que têm sinapses com células ciliares internas próximas à base da membrana basilar são encontrados na periferia do feixe nervoso auditivo, e há uma progressão ordenada em direção a sinapses na extremidade do ápice da membrana basilar com movimentos na direção do centro do feixe. A organização tonotópica da membrana basilar é, por conseguinte, anatomicamente preservada no nervo auditivo. As células ciliares internas também realizam *retificação* e *compressão*. O sinal mecânico é retificado aproximadamente em meia onda, respondendo assim ao movimento da membrana basilar numa única direção. Além disso, o sinal mecânico é comprimido não linearmente, de forma que uma grande variedade das intensidades de som recebidas é reduzida a uma faixa tratável de potencial eletroquímico. Os sinais eletroquímicos assim produzidos são transportados para o cérebro, onde são adicionalmente processados para se tornarem nossas sensações de audição.

Em suma, temos na cóclea um exemplo maravilhoso de sistema biológico que opera como um *banco de filtros* ajustados para diferentes freqüências e que usa um processamento não linear para reduzir a faixa dinâmica. Isto nos possibilita discriminar e reconhecer sons complexos, apesar das enormes diferenças de níveis de intensidade que podem surgir na prática.

### ■ PROCESSAMENTO DE SINAL ANALÓGICO VERSUS DIGITAL

As operações de processamento de sinal envolvidas na construção de sistemas de comunicação, sistemas de controle, sistemas de sensoreamento remoto e instrumentos para processamento de sinais biológicos, entre as muitas aplicações de processamento de sinal, podem ser implementadas de duas maneiras fundamentalmente diferentes: (1) abordagem analógica ou de tempo contínuo e (2) abordagem digital ou de tempo discreto. A abordagem analógica ao processamento de sinal foi predominante durante muitos anos e permanece como uma opção viável para muitas aplicações. Como o nome implica, o *processamento analógico de sinal* recorre ao uso de elementos de circuito analógicos como, por exemplo, resistores, capacitores, indutores, amplificadores transistorizados e diodos. O *processamento digital de sinal*, por outro lado, recorre a três elementos de computador digitais básicos: somadores e multiplicadores (para operações aritméticas) e memória (para armazenamento).

O principal atributo da abordagem analógica é a capacidade natural de resolver equações diferenciais que descrevem sistemas físicos, sem ter de lançar mão de soluções aproximadas para elas. Estas soluções também são obtidas em *tempo real*, independentemente da faixa de freqüência do sinal de entrada, uma vez que os mecanismos subjacentes responsáveis pelas operações da abordagem analógica são todos físicos por natureza. Em contrapartida, a abordagem digital recorre a computações numéricas para suas operações. O tempo necessário para executar estas computações determina se a abordagem digital é capaz de operar em tempo real, ou seja, manter-se a par das mudanças no sinal de entrada. Em outras palavras, a abordagem analógica tem a garantia de operação em tempo real, mas não há essa garantia para a abordagem digital.

Porém, a abordagem digital tem as seguintes vantagens importantes sobre o processamento de sinal analógico:

- *Flexibilidade*, pela qual a mesma máquina digital (hardware) pode ser usada para implementar diferentes versões de uma operação de processamento de sinal de interesse (por exemplo, filtragem) simplesmente fazendo-se modificações no software (programa) lido na máquina. Por outro lado, no caso de uma máquina analógica, o sistema tem de ser reprojeto todas as vezes que as especificações de processamento de sinal são modificadas.
- *Repetitividade*, a qual se refere ao fato de que uma operação de processamento de sinal prescrita (por exemplo, controle de um robô) pode ser repetida de maneira exata muitas vezes quando ela é implementada por meios digitais. Em contrapartida, os sistemas analógicos sofrem variações de parâmetros, as quais podem surgir devido a mudanças na tensão da fonte de energia ou na temperatura ambiente.

Para determinada operação de processamento de sinal, entretanto, usualmente descobrimos que o uso de uma abordagem digital exige uma maior complexidade de circuito do que a abordagem analógica. Esta era uma questão de grande preocupação no passado, mas não o é mais. Conforme afirmamos anteriormente, a sempre crescente disponibilidade de circuitos VLSI na forma de *chips* de silício tornou os componentes eletrônicos digitais relativamente baratos. Conseqüentemente, agora somos capazes de construir processadores de sinal digitais que são mais eficientes em termos de custo, em relação a suas contrapartes digitais numa ampla variedade de freqüências que inclui tanto sinais da fala como de vídeo.

Na análise final, entretanto, a escolha de uma abordagem analógica ou digital para a solução de um problema de processamento de sinal somente pode ser determinada pela aplicação de interesse, pelos recursos disponíveis e pelo custo envolvido na construção do sistema. Deve-se notar também que a grande maioria dos sistemas construídos, na prática, são "mistas" por natureza, combinando os recursos desejáveis tanto da abordagem analógica como da digital ao processamento de sinal.

## 1.4 Classificação de Sinais

Neste livro, limitaremos nossa atenção aos sinais unidimensionais definidos como funções de tempo de valor único. “Valor único” significa que para cada instante de tempo há um valor único da função. Este valor pode ser um número real, neste caso falamos de *sinal de valor real*, ou pode ser um número complexo, no qual falamos de *sinal de valor complexo*. Em qualquer, a variável independente, ou seja, o tempo, tem valor real.

O método mais útil de representação de sinal para determinada situação gira em torno do tipo particular de sinal que é considerado. Podemos identificar cinco métodos de classificação de sinais baseados em diferentes recursos:

### 1. Sinais de tempo contínuo e tempo discreto

Uma maneira de classificar sinais baseia-se na maneira como são definidos como uma função do tempo. Neste contexto, diz-se que um sinal  $x(t)$  é um *sinal de tempo contínuo* se ele for definido para todo tempo  $t$ . A Figura 1.10 representa um exemplo de sinal de tempo contínuo cuja amplitude ou valor varia continuamente com o tempo. Os sinais de tempo contínuo surgem naturalmente quando uma forma de onda física como, por exemplo, uma onda acústica ou onda luminosa é convertida em um sinal elétrico. A conversão é efetuada por meio de um *transdutor*; exemplos incluem o microfone, o qual converte variações de pressão sonora em variações de tensão ou corrente correspondentes, e a fotocélula, que faz o mesmo com variações de intensidade luminosa.

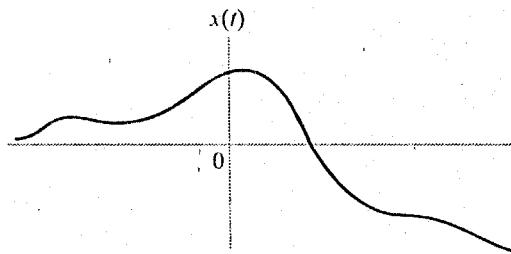


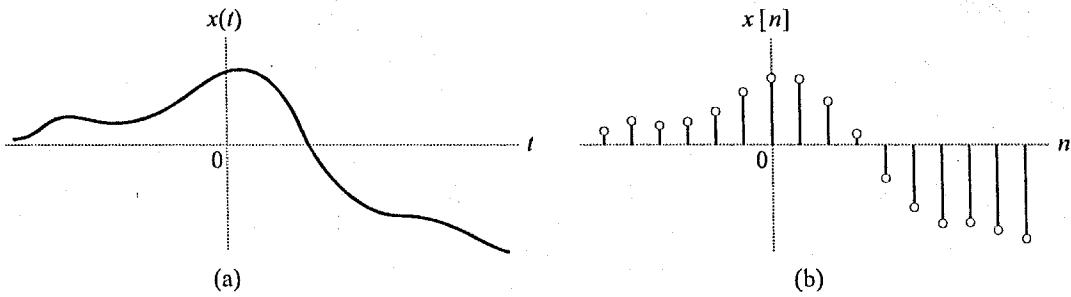
FIGURA 1.10 Sinal de tempo contínuo.

Por outro lado, um *sinal de tempo discreto* é definido somente em instantes isolados de tempo. Dessa forma, a variável independente, neste caso, tem somente valores discretos, os quais no geral são uniformemente espaçados. Um sinal de tempo discreto freqüentemente é derivado de um sinal de tempo contínuo fazendo-se uma amostragem do mesmo a uma taxa uniforme. Digamos que  $\tilde{T}$  denote o período de amostragem e  $n$  denote um número inteiro que possa assumir valores positivos e negativos. A amostragem de um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  no instante  $t = n\tilde{T}$  produz uma amostra de valor  $x(n\tilde{T})$ . Por conveniência de apresentação, escrevemos

$$x[n] = x(n\tilde{T}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

Dessa forma, um sinal de tempo discreto é representado pelos números da seqüência ...,  $x[-2]$ ,  $x[-1]$ ,  $x[0]$ ,  $x[1]$ ,  $x[2]$ , ..., os quais podem assumir um *continuum*<sup>4</sup> de valores. Essa seqüência de números é chamada *série temporal*, escrita como  $\{x[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  ou simplesmente  $x[n]$ . Esta última notação é usada em todo este livro. A Figura 1.11 ilustra a relação entre um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  e o sinal de tempo discreto  $x[n]$  dele derivado, como é ilustrado acima.

<sup>4</sup>Continuum (lat.): quantidade contínua.



**FIGURA 1.11** (a) Sinal de tempo contínuo  $x(t)$ . (b) Representação de  $x(t)$  como um sinal de tempo discreto  $x[n]$ .

Ao longo deste livro, usamos o símbolo  $t$  para denotar tempo para um sinal de tempo contínuo, e o símbolo  $n$  para denotar tempo para um sinal de tempo discreto. Similarmente, são usados parênteses  $(\cdot)$  para denotar quantidades com valores contínuos, enquanto colchetes  $[\cdot]$  são usados para denotar quantidades com valores discretos.

## 2. Sinais pares e ímpares

Diz-se que um sinal de tempo contínuo é um *sinal par* se ele satisfizer a condição

$$x(-t) = x(t) \quad \text{para todo } t \quad (1.2)$$

Diz-se que o sinal  $x(t)$  é um *sinal ímpar* se ele satisfizer a condição

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{para todo } t \quad (1.3)$$

Em outras palavras, os sinais pares são *simétricos* em relação ao eixo vertical ou origem de tempo, enquanto que os sinais ímpares são *antissimétricos* (assimétricos) em relação à origem de tempo. Observações similares se aplicam aos sinais de tempo discreto.

**EXEMPLO 1.1** Desenvolva a decomposição par/ímpar de um sinal geral  $x(t)$  aplicando as definições das equações (1.2) e (1.3).

**Solução:** Digamos que o sinal  $x(t)$  seja expresso como a soma de dois componentes  $x_p(t)$  e  $x_i(t)$  da seguinte maneira:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

Defina  $x_p(t)$  para que seja par e  $x_i(t)$  para que seja ímpar; ou seja

$$x_p(-t) = x_p(t)$$

e

$$x_i(-t) = -x_i(t)$$

Colocando  $t = -t$  na expressão para  $x(t)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} x(-t) &= x_p(-t) + x_i(-t) \\ &= x_p(t) - x_i(t) \end{aligned}$$

Resolvendo para  $x_p(t)$  e  $x_i(t)$ , obtemos assim

$$x_p(t) = \frac{1}{2} \left( x(t) + x(-t) \right)$$

e

$$x_i(t) = \frac{1}{2} \left( x(t) - x(-t) \right)$$

As definições acima de sinais pares e ímpares pressupõem que os sinais têm valores reais. Deve-se ter cuidado, entretanto, quando o sinal de interesse tem valor complexo. Neste caso, podemos falar de simetria conjugada. Diz-se que um sinal de valor complexo  $x(t)$  é *conjugado simétrico* se ele satisfizer a condição

$$x(-t) = x^*(t) \quad (1.4)$$

em que o asterisco denota conjugado complexo. Façamos

$$x(t) = a(t) + jb(t)$$

em que  $a(t)$  seja a parte real de  $x(t)$ ,  $b(t)$ , a parte imaginária, e  $j$ , a raiz quadrada de  $-1$ . O conjugado complexo de  $x(t)$  é

$$x^*(t) = a(t) - jb(t)$$

Das equações (1.2) a (1.4), segue-se, portanto, que um sinal de valor complexo  $x(t)$  é conjugado simétrico se sua parte real for par e sua parte imaginária for ímpar. Uma observação similar se aplica a um sinal de tempo discreto.

► **EXERCÍCIO 1.1** Considere o par de sinais mostrados na Figura 1.12. Qual destes dois sinais é par, e qual é ímpar?

**Resposta:**  $x_1(t)$  é par, e  $x_2(t)$  é ímpar.

► **EXERCÍCIO 1.2** Os sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  mostrados nas Figuras 1.12(a) e (b) constituem as partes real e imaginária de um sinal de valor complexo  $x(t)$ . Qual forma de simetria  $x(t)$  tem?

**Resposta:**  $x(t)$  é conjugado simétrico.

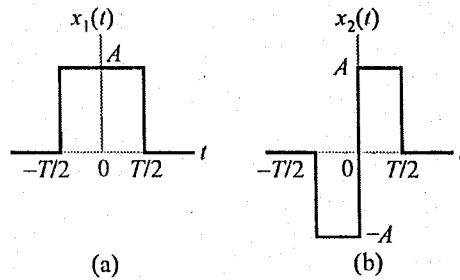


FIGURA 1.12 (a) Um exemplo de sinal de tempo contínuo. (b) Outro exemplo de sinal de tempo contínuo.

### 3. Sinais periódicos, sinais não periódicos.

Um sinal periódico  $x(t)$  é uma função que satisfaz a condição

$$x(t) = x(t + T) \quad \text{para todo } t \quad (1.5)$$

em que  $T$  é uma constante positiva. Evidentemente, se esta condição for satisfeita para, digamos,  $T = T_0$ , ela também será satisfeita para  $T = 2T_0, 3T_0, 4T_0, \dots$ . O menor valor de  $T$  que satisfaz a equação (1.5) é chamado *período fundamental* de  $x(t)$ . Conseqüentemente, o período fundamental  $T$  define a duração de um ciclo completo de  $x(t)$ . O recíproco do período fundamental  $T$  é chamado *frequência fundamental* do sinal periódico  $x(t)$ ; ela descreve quão freqüentemente o sinal periódico  $x(t)$  se repete. Dessa forma, escrevemos formalmente

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.6)$$

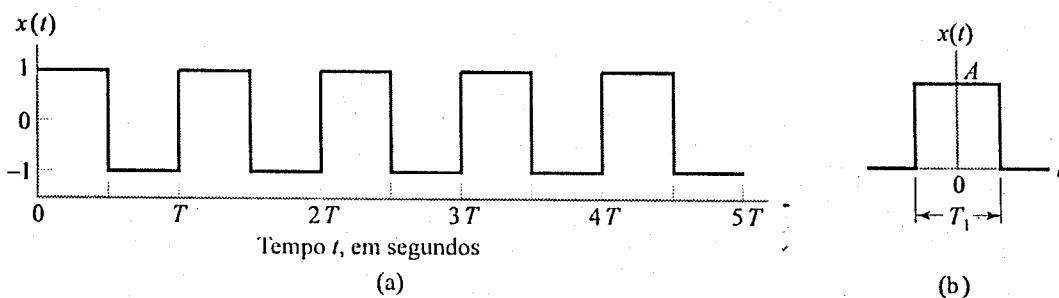
A frequência  $f$  é medida em hertz (Hz) ou ciclos por segundo. A *frequência angular*, medida em radianos por segundo, é definida por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.7)$$

uma vez que há  $2\pi$  radianos num ciclo completo. Para simplificarmos a Terminologia,  $\omega$  muitas vezes é chamado simplesmente de frequência.

Qualquer sinal  $x(t)$  para o qual não haja nenhum valor de  $T$  para satisfazer a condição da equação (1.5) é chamado de *sinal aperiódico* ou *não-periódico*.

As Figuras 1.13(a) e (b) apresentam exemplos de sinais periódicos e não-periódicos, respectivamente. O sinal periódico mostrado aqui representa uma onda quadrada de amplitude  $A = 1$  e período  $T$ , e o sinal não-periódico representa um pulso retangular de amplitude  $A$  e duração  $T_1$ .



**FIGURA 1.13** (a) Onda quadrada com amplitude  $A = 1$ , e período  $T = 0,2\text{s}$ . (b) Pulso retangular de amplitude  $A$  e duração  $T_1$ .

► **EXERCÍCIO 1.3** A Figura 1.14 mostra uma onda triangular. Qual é a freqüência fundamental desta onda? Expressse a freqüência fundamental em unidades de Hz ou rad/s.

**Resposta:** 5 Hz, ou  $10\pi$  rad/s.

A classificação de sinais em sinais periódicos e não-periódicos apresentada até agora se aplica a sinais de tempo contínuo. Consideraremos a seguir o caso de sinais de tempo discreto. Diz-se que um sinal de tempo discreto  $x[n]$  é periódico se ele satisfizer a condição

$$x[n] = x[n + N] \text{ para todos os números inteiros } n \quad (1.8)$$

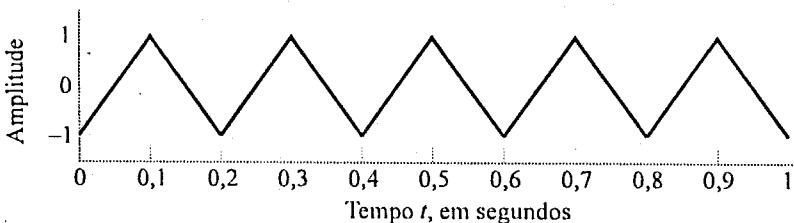
em que  $N$  é um número inteiro positivo. O menor valor do número inteiro  $N$  para o qual a equação (1.8) é satisfeita é chamado período fundamental do sinal de tempo discreto  $x[n]$ . A freqüência angular fundamental ou, simplesmente, freqüência fundamental de  $x[n]$  é definida por

$$\Omega = \frac{2\pi}{N} \quad (1.9)$$

a qual é medida em radianos.

As diferenças entre as equações de definição (1.5) e (1.8) devem ser cuidadosamente observadas. A equação (1.5) se aplica a um sinal de tempo contínuo periódico, cujo período fundamental  $T$  tem qualquer valor positivo. Por outro lado, a equação (1.8) se aplica a um sinal de tempo discreto, cujo período fundamental  $N$  pode assumir somente um valor positivo inteiro.

Dois exemplos de sinais de tempo discretos são mostrados nas Figuras 1.15 e 1.16; o sinal da Figura 1.15 é periódico, enquanto que o da Figura 1.16 é aperiódico.



**FIGURA 1.14** Onda triangular alternando entre -1 e +1 com período fundamental de 0,2 segundos.

► **EXERCÍCIO 1.4** Qual é a freqüência fundamental da onda quadrada de tempo discreto mostrada na Figura 1.15?

**Resposta:**  $\pi/4$  radianos.

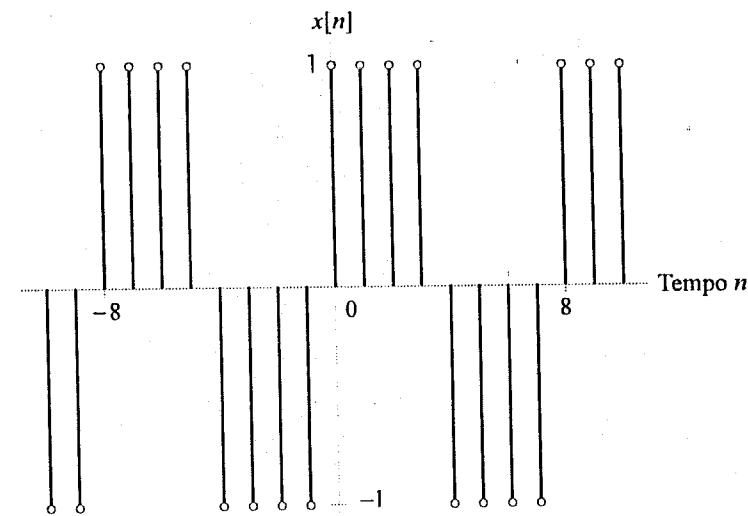


FIGURA 1.15 Onda quadrada de tempo discreto alternando entre  $-1$  e  $+1$ .

#### 4. Sinais determinísticos, sinais aleatórios.

Um *sinal determinístico* é um sinal sobre o qual não existe nenhuma incerteza com respeito a seu valor em qualquer tempo. Conseqüentemente, consideramos que os sinais determinísticos podem ser modelados como funções de tempo completamente especificadas. A onda quadrada mostrada na Figura 1.13(a) e o pulso retangular mostrado na Figura 1.13(b) são exemplos de sinais determinísticos, acontecendo o mesmo com os sinais mostrados nas Figuras 1.15 e 1.16.

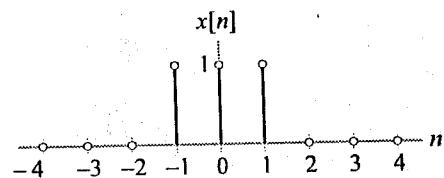


FIGURA 1.16 Sinal de tempo discreto aperiódico consistindo de três amostras diferentes de zero.

Por outro lado, um *sinal aleatório* é um sinal sobre o qual há incerteza antes de sua ocorrência real. Esse tipo de sinal pode ser visto como pertencente a um conjunto (*ensemble*) ou grupo de sinais, tendo cada sinal do conjunto uma forma de onda diferente. O conjunto de cada sinal dentro do conjunto tem certa probabilidade de ocorrência. O conjunto desses sinais é chamado *processo aleatório*. O *ruido* gerado no amplificador de um receptor de rádio ou televisão é um exemplo de sinal aleatório. O sinal de EEG, exemplificado pela forma de onda mostrada na Figura 1.8, é outro exemplo de sinal aleatório.

#### 5. Sinais de energia, sinais de potência.

Em sistemas elétricos, um sinal pode representar uma tensão ou uma corrente. Considere uma tensão  $v(t)$  desenvolvida através de um resistor  $R$ , produzindo uma corrente  $i(t)$ . A *potência instantânea* dissipada no resistor é definida por

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (1.10)$$

ou, de modo equivalente,

$$p(t) = R i^2(t) \quad (1.11)$$

Em ambos os casos, a potência instantânea  $p(t)$  é proporcional à amplitude elevada ao quadrado do sinal. Além do mais, para uma resistência  $R$  de 1 ohm, vemos que as equações (1.10) e (1.11)

assumem a mesma forma matemática. Conseqüentemente, na análise de sinais costuma-se definir potência em termos de um resistor de 1 ohm, de forma que, independentemente se o sinal  $x(t)$  representa uma tensão ou uma corrente, podemos expressar a potência instantânea do sinal como

$$p(t) = x^2(t) \quad (1.12)$$

Baseando-se nesta convenção, definimos a *energia total* do sinal de tempo contínuo  $x(t)$  como

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \end{aligned} \quad (1.13)$$

e sua *potência média* como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.14)$$

A partir da equação (1.14) vemos prontamente que a potência média de um sinal periódico  $x(t)$  de período fundamental  $T$  é dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.15)$$

A raiz quadrada da potência média  $P$  é chamada de valor médio quadrático (*rms – root mean-square*) do sinal  $x(t)$ .

No caso de um sinal de tempo discreto  $x[n]$ , as integrais nas equações (1.13) e (1.14) são substituídas pelas somas correspondentes. Dessa forma, a energia total de  $x[n]$  é definida por

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] \quad (1.16)$$

e sua potência média é definida por

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x^2[n] \quad (1.17)$$

Aqui, vemos novamente a partir da equação (1.17) que a potência média em um sinal periódico  $x[n]$  com período fundamental  $N$  é dada por

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

Um sinal é chamado de *sinal de energia* se e somente se a energia total do sinal satisfizer a condição

$$0 < E < \infty$$

Por outro lado, ele é chamado de *sinal de potência* se e somente se a potência média do sinal satisfizer a condição

$$0 < P < \infty$$

As classificações de energia e potência de sinais são mutuamente exclusivas. Em especial, um sinal de energia tem potência média zero, enquanto que um sinal de potência tem energia infinita. É interessante observar também que sinais periódicos e sinais aleatórios normalmente são vistos como sinais de potência, enquanto que os sinais que são tanto determinísticos como não-periódicos são sinais de energia.

#### ► EXERCÍCIO 1.5

- (a) Qual é a energia total do pulso retangular mostrado na Figura 1.13(b)?
- (b) Qual é a potência média da onda quadrada mostrada na Figura 1.13(a)?

**Resposta:** (a)  $A^2 T_1$ . (b) 1.

► EXERCÍCIO 1.6 Qual é a potência média da onda triangular mostrada na Figura 1.14?

*Resposta:* 1/3.

► EXERCÍCIO 1.7 Qual é a energia total do sinal de tempo discreto mostrado na Figura 1.16?

*Resposta:* 3.

► EXERCÍCIO 1.8 Qual é a potência média do sinal periódico de tempo discreto mostrado na Figura 1.15?

*Resposta:* 1.

## 1.5 Operações Básicas em Sinais

Uma questão fundamental de importância no estudo de sinais e sistemas é o uso de sistemas para processar ou manipular sinais. Esta questão normalmente envolve uma combinação de algumas operações básicas. Em especial, podemos identificar duas classes de operações, como descrevemos aqui.

### 1. Operações executadas nas variáveis dependentes

*Mudança de escala de amplitude.* Digamos que  $x(t)$  denote um sinal de tempo contínuo. O sinal  $y(t)$  resultante da mudança de escala de amplitude aplicada a  $x(t)$  é definido por

$$y(t) = cx(t) \quad (1.18)$$

em que  $c$  é o fator de mudança de escala. De acordo com a equação (1.18), o valor de  $y(t)$  é obtido multiplicando-se o valor correspondente de  $x(t)$  pelo escalar  $c$ . Um exemplo físico de um dispositivo que executa mudança de escala de amplitude é um *amplificador* eletrônico. Um resistor também executa mudança de escala de amplitude quando  $x(t)$  é uma corrente,  $c$  é a resistência e  $y(t)$  é a tensão de saída.

De uma maneira semelhante à equação (1.18), para sinais de tempo discreto, escrevemos

$$y[n] = cx[n]$$

*Adição.* Digamos que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  denotem um par de sinais de tempo contínuo. O sinal  $y(t)$  obtido pela adição de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  é definido por

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1.19)$$

Um exemplo físico de dispositivo que adiciona sinais é o *misturador* de áudio, o qual combina sinais de música e de voz.

De uma maneira semelhante à equação (1.19), para sinais de tempo discreto, escrevemos

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

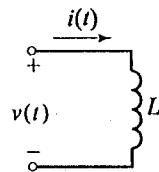
*Multiplicação.* Digamos que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  denotem um par de sinais de tempo contínuo. O sinal  $y(t)$  resultante da multiplicação de  $x_1(t)$  por  $x_2(t)$  é definido por

$$y(t) = x_1(t)x_2(t) \quad (1.20)$$

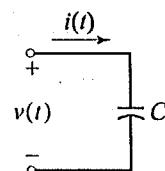
Ou seja, para cada tempo  $t$  prescrito, o valor de  $y(t)$  é dado pelo produto dos valores correspondentes de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . Um exemplo físico de  $y(t)$  é um *sinal de rádio AM*, no qual  $x_1(t)$  consiste em um sinal de rádio mais um componente dc (*direct current* – corrente contínua), e  $x_2(t)$  consiste em um sinal senoidal chamado onda portadora.

De uma maneira semelhante à equação (1.20), para sinais de tempo discreto, escrevemos

$$y[n] = x_1[n]x_2[n]$$



**FIGURA 1.17** Indutor com a tensão  $v(t)$  em seus terminais induzindo a corrente  $i(t)$ .



**FIGURA 1.18** Capacitor com a corrente  $i(t)$  induzindo a tensão  $v(t)$  em seus terminais.

*Diferenciação.* Digamos que  $x(t)$  denote um sinal de tempo contínuo. A derivada de  $x(t)$  com respeito ao tempo é definida por

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (1.21)$$

Por exemplo, um *indutor* realiza diferenciação. Digamos que  $i(t)$  denote uma corrente que flui através de um indutor de indutância  $L$ , como mostra a Figura 1.17. A tensão  $v(t)$  desenvolvida no indutor é definida por

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (1.22)$$

*Integração.* Digamos que  $x(t)$  denote um sinal de tempo contínuo. A integral de  $x(t)$  com respeito ao tempo  $t$  é definida por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (1.23)$$

em que  $\tau$  é a variável de integração. Por exemplo, um capacitor realiza integração. Digamos que  $i(t)$  denote a corrente que flui através de um capacitor de capacidade  $C$ , como mostra a Figura 1.18. A tensão  $v(t)$  desenvolvida através do capacitor é definida por

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (1.24)$$

## 2. Operações realizadas na variável independente

*Mudança de escala de tempo.* Digamos que  $x(t)$  denote um sinal de tempo contínuo. O sinal  $y(t)$  obtido pela mudança de escala da variável independente, tempo  $t$ , por um fator  $a$ , é definido por

$$y(t) = x(at)$$

Se  $a > 1$ , o sinal  $y(t)$  é uma versão *comprimida* de  $x(t)$ . Se, por outro lado,  $0 < a < 1$ , o sinal  $y(t)$  é uma versão *expandida* (estendida) de  $x(t)$ . Estas duas operações são ilustradas na Figura 1.19.

No caso de tempo discreto, escrevemos

$$y[n] = x[kn], \quad k > 0$$

o qual é definido somente para valores inteiros de  $k$ . Se  $k > 1$ , então alguns valores do sinal de tempo discreto  $y[n]$  são perdidos, como ilustra a Figura 1.20 para  $k = 2$ .

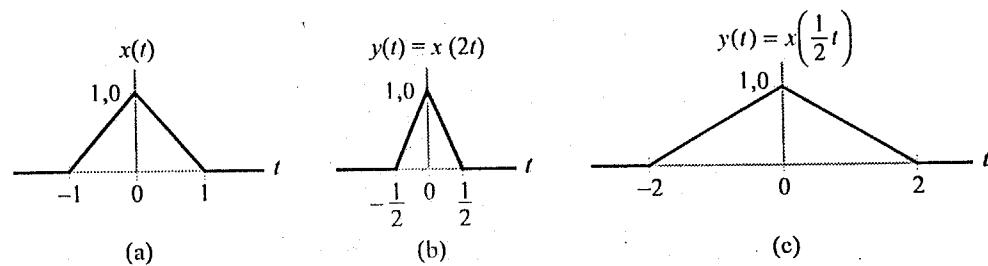


FIGURA 1.19 Operação de mudança de escala de tempo: (a) sinal de tempo contínuo  $x(t)$ , (b) versão comprimida de  $x(t)$  por um fator de 2, e (c) versão expandida de  $x(t)$  por um fator de 2.

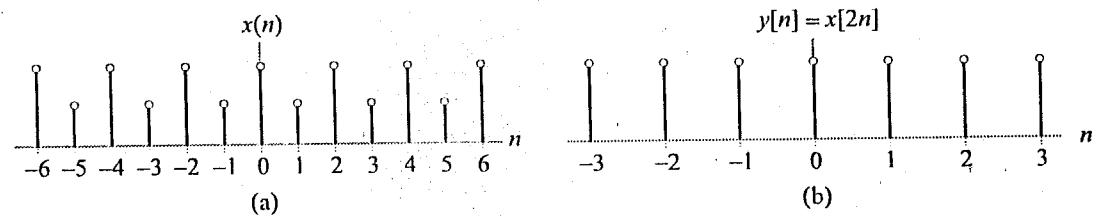


FIGURA 1.20 Efeito da mudança de escala de tempo em um sinal de tempo discreto: (a) sinal de tempo discreto  $x[n]$ , e (b) versão comprimida de  $x[n]$  por um fator de 2, com alguns valores do  $x[n]$  original perdidos em consequência da compressão.

*Reflexão.* Digamos que  $x(t)$  denote um sinal de tempo contínuo. Digamos que  $y(t)$  denote o sinal observado substituindo-se o tempo  $t$  por  $-t$ , como é mostrado por

$$y(t) = x(-t)$$

O sinal  $y(t)$  representa uma versão refletida de  $x(t)$  em relação ao eixo de amplitude.

Os dois casos seguintes são de especial interesse:

- » Sinais pares, para os quais temos  $x(-t) = x(t)$  para todo  $t$ ; ou seja, um sinal par é o mesmo que sua versão refletida.
- » Sinais ímpares, para os quais temos  $x(-t) = -x(t)$  para todo  $t$ ; ou seja, um sinal ímpar é o negativo de sua versão refletida.

Observações similares se aplicam aos sinais de tempo discreto.

**EXEMPLO 1.2** Considere o pulso triangular  $x(t)$  mostrado na Figura 1.21(a). Encontre a versão refletida de  $x(t)$  em relação ao eixo de amplitude.

**Solução:** Substituindo-se a variável independente  $t$  em  $x(t)$  por  $-t$ , obtemos o resultado  $y(t) = x(-t)$  mostrado na Figura 1.21(b).

Note que para este exemplo, temos

$$x(t) = 0 \text{ para } t < -T_1 \text{ e } t > T_2$$

Correspondentemente, descobrimos que

$$y(t) = 0 \text{ para } t > -T_1 \text{ e } t < -T_2$$

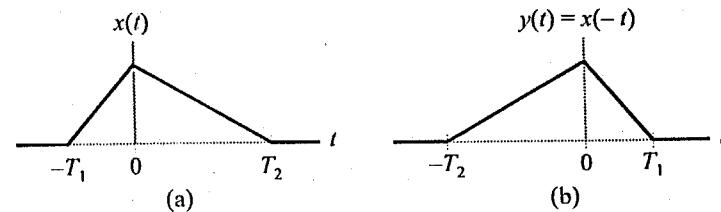


FIGURA 1.21 Operação de reflexão: (a) sinal de tempo contínuo  $x(t)$  e (b) versão de  $x(t)$  refletido em torno da origem.

► **EXERCÍCIO 1.9** O sinal de tempo discreto  $x[n]$  é definido por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -1, & n = -1 \\ 0, & n = 0 \text{ e } |n| > 1 \end{cases}$$

Encontre o sinal composto  $y[n]$  definido em termos de  $x[n]$  por

$$y[n] = x[n] + x[-n]$$

*Resposta:*  $y[n] = 0$  para todos os valores inteiros de  $n$ .

► **EXERCÍCIO 1.10** Repita o Exercício 1.9 para

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -1 \text{ e } n = 1 \\ 0, & n = 0 \text{ e } |n| > 1 \end{cases}$$

*Resposta:*  $y[n] = \begin{cases} 2, & n = -1 \text{ e } n = 1 \\ 0, & n = 0 \text{ e } |n| > 1 \end{cases}$

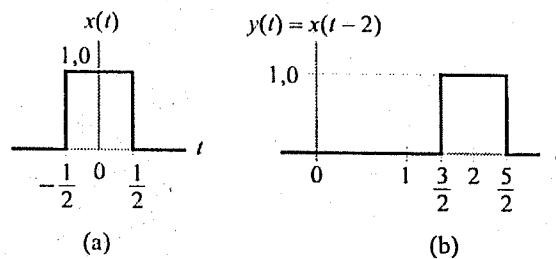
*Deslocamento no tempo.* Digamos que  $x(t)$  denote um sinal de tempo contínuo. A versão de  $x(t)$  deslocado no tempo é definida por

$$y(t) = x(t - t_0)$$

em que  $t_0$  é o deslocamento de tempo. Se  $t_0 > 0$ , a forma de onda que representa  $x(t)$  é deslocada intata para a direita, em relação ao eixo de tempo. Se  $t_0 < 0$ , ela é deslocada para a esquerda.

**EXEMPLO 1.3** A Figura 1.22(a) mostra um pulso retangular  $x(t)$  de amplitude unitária e duração unitária. Encontre  $y(t) = x(t - 2)$ .

*Solução:* Neste exemplo, o deslocamento no tempo  $t_0$  é igual a 2 unidades de tempo. Desta modo, ao deslocarmos  $x(t)$  para a direita 2 unidades de tempo, obtemos o pulso retangular  $y(t)$  mostrado na Figura 1.22(b). O pulso  $y(t)$  tem exatamente a mesma forma que o pulso original  $x(t)$ ; ele é simplesmente deslocado ao longo do eixo de tempo.



**FIGURA 1.22** Operação de deslocamento no tempo: (a) sinal de tempo contínuo na forma de um pulso retangular de amplitude 1,0 e duração 1,0, simétrico em relação à origem; e (b) versão de  $x(t)$  deslocado no tempo 2 unidades de tempo.

No caso de um sinal de tempo discreto  $x[n]$ , definimos sua versão de deslocamento no tempo da seguinte maneira:

$$y[n] = x[n - m]$$

em que o deslocamento  $m$  deve ser um número inteiro; ele pode ser positivo ou negativo.

► Exercício 1.11 O sinal de tempo discreto  $x[n]$  é definido por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1, 2 \\ -1, & n = -1, -2 \\ 0, & n = 0 \text{ e } |n| > 2 \end{cases}$$

Encontre o sinal  $y[n] = x[n + 3]$  deslocado no tempo.

*Resposta:*  $y[n] = \begin{cases} 1, & n = -4, -5 \\ -1, & n = -3, n < -5, \text{ e } n > -1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$

### ■ REGRA DE PRECEDÊNCIA PARA DESLOCAMENTO NO TEMPO E MUDANÇA DE ESCALA DE TEMPO

Digamos que  $y(t)$  denote um sinal de tempo contínuo que é derivado de outro sinal de tempo contínuo  $x(t)$  através de uma combinação de deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo, como descrevemos aqui:

$$y(t) = x(at - b) \quad (1.25)$$

Esta relação entre  $y(t)$  e  $x(t)$  satisfaz as seguintes condições:

$$y(0) = x(-b) \quad (1.26)$$

e

$$y\left(\frac{b}{a}\right) = x(0) \quad (1.27)$$

as quais permitem verificações úteis em  $y(t)$  em termos de valores correspondentes de  $x(t)$ .

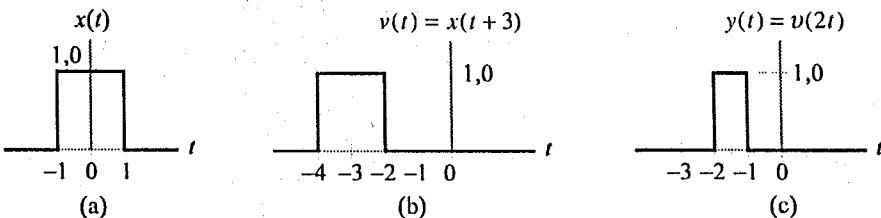
Para obtermos corretamente  $y(t)$  a partir de  $x(t)$ , as operações de deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo devem ser executadas na ordem correta. A ordem apropriada baseia-se no fato de que a operação de mudança de escala sempre substitui  $t$  por  $at$ , enquanto a operação de deslocamento no tempo sempre substitui  $t$  por  $t - b$ . Deste modo, a operação de deslocamento no tempo é executada primeiro em  $x(t)$ , resultando em um sinal intermediário  $v(t)$  definido por

$$v(t) = x(t - b)$$

O deslocamento no tempo substituiu  $t$  em  $x(t)$  por  $t - b$ . Em seguida, a operação de mudança de escala de tempo é executada em  $v(t)$ . Esta substitui  $t$  por  $at$ , resultando na saída desejada

$$\begin{aligned} y(t) &= v(at) \\ &= x(at - b) \end{aligned}$$

Para ilustrarmos como a operação descrita na equação 1.25 pode surgir numa situação da vida real, considere um sinal de voz registrado num gravador de fita. Se a fita for executada numa velocidade mais rápida do que a velocidade de gravação original, obteremos uma compressão (isto é  $a > 1$ ). Se, por outro lado, a fita for executada numa velocidade mais lenta do que a velocidade de gravação original, obteremos uma expansão (isto é,  $a < 1$ ). A constante  $b$ , supostamente positiva, é responsável por um retardamento na execução da fita.



**FIGURA 1.23** A ordem apropriada na qual as operações de mudança de escala de tempo e deslocamento no tempo devem ser aplicadas para o caso de um sinal de tempo contínuo. (a) Pulso retangular  $x(t)$  de amplitude 1,0 e duração 2,0, simétrico em relação à origem. (b) Pulso intermediário  $v(t)$ , representando a versão de  $x(t)$  deslocado no tempo. (c) Sinal desejado  $y(t)$ , resultante da compressão de  $v(t)$  por um fator de 2.

**EXEMPLO 1.4** Considere o pulso retangular  $x(t)$  de amplitude unitária e duração de 2 unidades de tempo descrito na Figura 1.23(a). Encontre  $y(t) = x(2t + 3)$ .

**Solução:** Neste exemplo, temos  $a = 2$  e  $b = -3$ . Conseqüentemente, deslocar o pulso de tempo  $x(t)$  para a esquerda 3 unidades de tempo em relação ao eixo de tempo fornece o pulso intermediário  $v(t)$  mostrado na Figura 1.23(b). Finalmente, mudando a escala da variável independente  $t$  em  $v(t)$  por  $a = 2$ , obtemos a solução  $y(t)$  mostrada na Figura 1.23(c).

Note que a solução apresentada na Figura 1.23(c) satisfaz ambas as condições definidas nas equações (1.26) e (1.27).

Suponhamos a seguir que, intencionalmente, não seguimos a regra de precedência; ou seja, aplicamos primeiro a mudança de escala de tempo, seguida do deslocamento no tempo. Para o sinal  $x(t)$  dado, mostrado na Figura 1.24(a), as formas de onda resultantes da aplicação destas operações são mostradas nas Figuras 1.24(b) e (c), respectivamente. O sinal  $y(t)$  assim obtido não consegue satisfazer a condição da equação (1.27).

Este exemplo ilustra claramente que se  $y(t)$  é definido em termos de  $x(t)$  pela equação (1.25), então  $y(t)$  somente pode ser obtido corretamente de  $x(t)$  seguindo a regra de precedência para deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo.

Observações semelhantes se aplicam ao caso de sinais de tempo discreto.

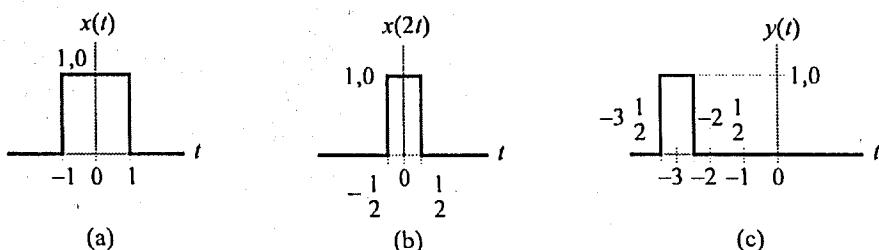
**EXEMPLO 1.5** Um sinal de tempo discreto  $x[n]$  é definido por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1, 2 \\ -1, & n = -1, -2 \\ 0, & n = 0 \text{ e } |n| > 2 \end{cases}$$

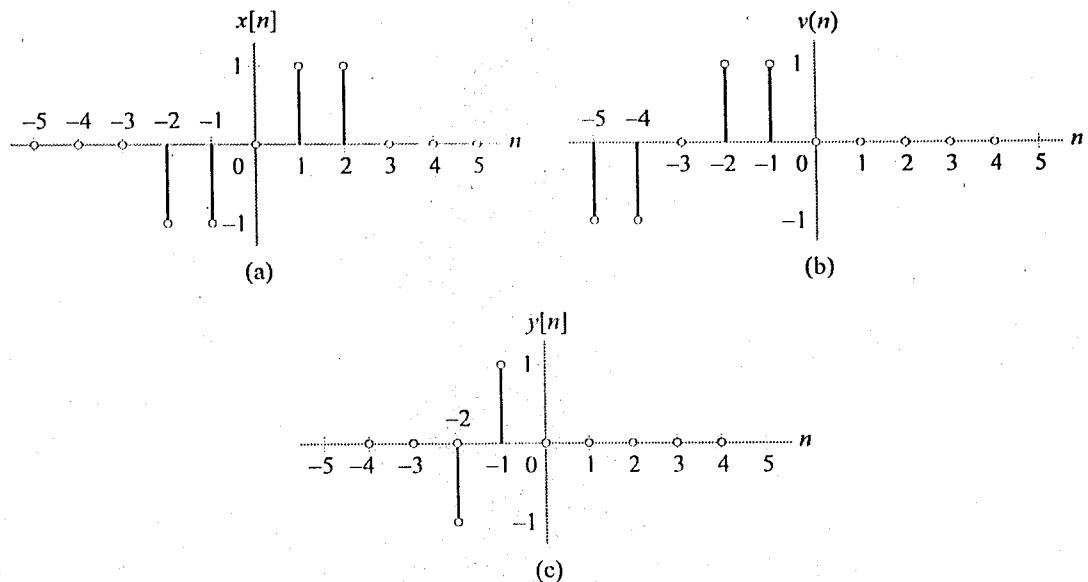
Encontre  $y[n] = x[2n + 3]$

**Solução:** O sinal  $x[n]$  é exibido na Figura 1.25(a). Deslocar  $x[n]$  no tempo 3 unidades para a esquerda produzirá o sinal intermediário  $v[n]$  mostrado na Figura 1.25(b). Finalmente, fazendo a mudança de escala de  $n$  em  $v[n]$  por 2, obtemos a solução  $y[n]$  mostrada na Figura 1.25(c).

Note que, em consequência da compressão executada ao partir de  $v[n]$  para  $y[n] = v[2n]$ , as amostras de  $v[n]$  em  $n = -5$  e  $n = -1$  (isto é, aqueles contidos no sinal original em  $n = -2$  e  $n = 2$ ) são perdidas.



**FIGURA 1.24** A maneira incorreta de aplicar a regra de precedência. (a) Sinal  $x(t)$ . (b) Sinal  $x(2t)$  de tempo com escala mudada. (c) Sinal  $y(t)$  obtido deslocando-se  $x(2t)$  três unidades de tempo.



**FIGURA 1.25** A ordem apropriada de aplicação das operações de mudança de escala de tempo e deslocamento no tempo para o caso de um sinal de tempo discreto. (a) Sinal de tempo discreto  $x[n]$ , antissimétrico em relação à origem. (b) Sinal intermediário  $v[n]$  obtido deslocando-se  $x[n]$  para a esquerda em 3 amostras. (c) Sinal de tempo discreto  $y[n]$  resultante da compressão de  $v[n]$  por um fator de 2, com o resultado de que duas amostras do  $x[n]$  original são perdidas.

► EXERCÍCIO 1.12 Considere um sinal de tempo discreto  $x[n]$  definido por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$$

Encontre  $y[n] = x[3n - 2]$ .

$$Resposta: \quad y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 1.6 Sinais Elementares

Há diversos sinais elementares que se destacam proeminente no estudo dos sinais e sistemas. A lista de sinais elementares inclui os sinais exponenciais e senoidais, a função degrau, a função impulso e a função rampa. Estes sinais elementares servem como blocos de construção para a construção de sinais mais complexos. Eles também são importantes em si mesmos, em termos de que podem ser usados para modelar muitos sinais físicos que ocorrem na natureza. Em seguida, descreveremos os sinais elementares acima mencionados, um a um.

## SINAIS EXPONENCIAIS

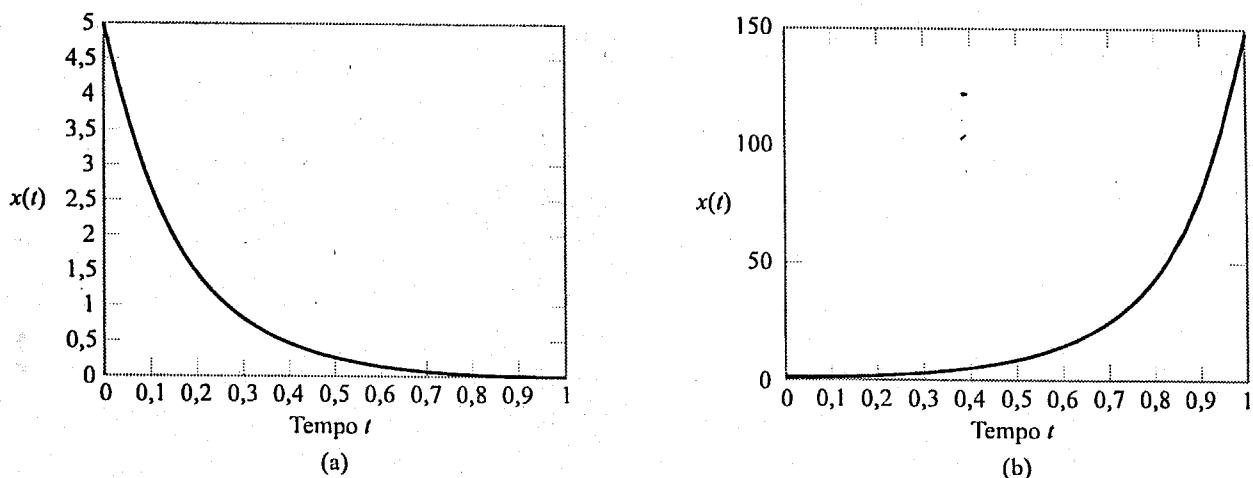
Um sinal exponencial real, em sua forma mais geral, é escrito como

$$x(t) \equiv Be^{at} \quad (1.28)$$

em que tanto  $B$  como  $a$  são parâmetros reais. O parâmetro  $B$  é a amplitude do sinal exponencial medido no instante  $t = 0$ . Dependendo de se o outro parâmetro  $a$  é positivo ou negativo, podemos identificar dois casos especiais:

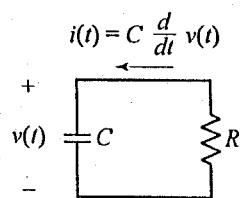
- Exponencial decrescente, para a qual  $a < 0$
- Exponencial crescente, para a qual  $a > 0$

Estas duas formas de sinal exponencial são ilustradas na Figura 1.26. A Parte(a) da figura foi gerada usando-se  $a = -6$  e  $B = 5$ . A Parte (b) da Figura foi gerada usando-se  $a = 5$  e  $B = 1$ . Se  $a = 0$ , o sinal  $x(t)$  se reduz a um sinal dc igual à constante  $B$ .



**FIGURA 1.26** (a) Forma exponencial decrescente de sinal de tempo contínuo. (b) Forma exponencial crescente de sinal de tempo contínuo.

Para obter um exemplo físico de sinal exponencial, considere um capacitor “com fuga”, como descreve a Figura 1.27. O capacitor tem capacidade  $C$ , e a perda é representada pela resistência *shunt*<sup>5</sup>  $R$ . O capacitor é carregado conectando-se uma bateria a ele, que é depois removida no tempo  $t = 0$ . Digamos que  $V_0$  denote o valor inicial da tensão desenvolvida no capacitor.



**FIGURA 1.27** Capacitor *com “fuga”*, com a perda representada pela resistência *shunt*  $R$ .

Da Figura 1.27, vemos prontamente que a operação do capacitor, para  $t \geq 0$ , é descrita por

$$RC \frac{d}{dt} v(t) + v(t) = 0 \quad (1.29)$$

em que  $v(t)$  é a tensão medida no capacitor no instante  $t$ . A equação (1.29) é uma *equação diferencial de primeira ordem*. Sua solução é dada por

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad (1.30)$$

em que o termo produto  $RC$  desempenha o papel de *constante de tempo*. A equação (1.30) mostra que a tensão no capacitor decresce exponencialmente com o tempo a uma taxa determinada pela constante de tempo  $RC$ . Quanto maior o resistor  $R$  (isto é, quanto menos fuga tiver o capacitor), menor será a taxa de decréscimo de  $v(t)$  com o tempo.

<sup>5</sup> *Shunt*: desvio; circuito secundário.

A discussão até agora permaneceu no contexto de tempo contínuo. Em termos de tempo discreto, é uma prática comum escrevermos um sinal exponencial real como

$$x[n] = Br^n \quad (1.31)$$

A natureza exponencial deste sinal é prontamente confirmada definindo-se

$$r = e^\alpha$$

para algum  $\alpha$ . A Figura 1.28 ilustra as formas decrescente e crescente de um sinal exponencial de tempo discreto correspondente a  $0 < r < 1$  e  $r > 1$ , respectivamente. É neste ponto que o caso dos sinais exponenciais de tempo discreto é distintamente diferente dos sinais exponenciais de tempo contínuo. Note também que quando  $r < 0$ , um sinal exponencial de tempo discreto assume sinais (+, -) que se alternam.

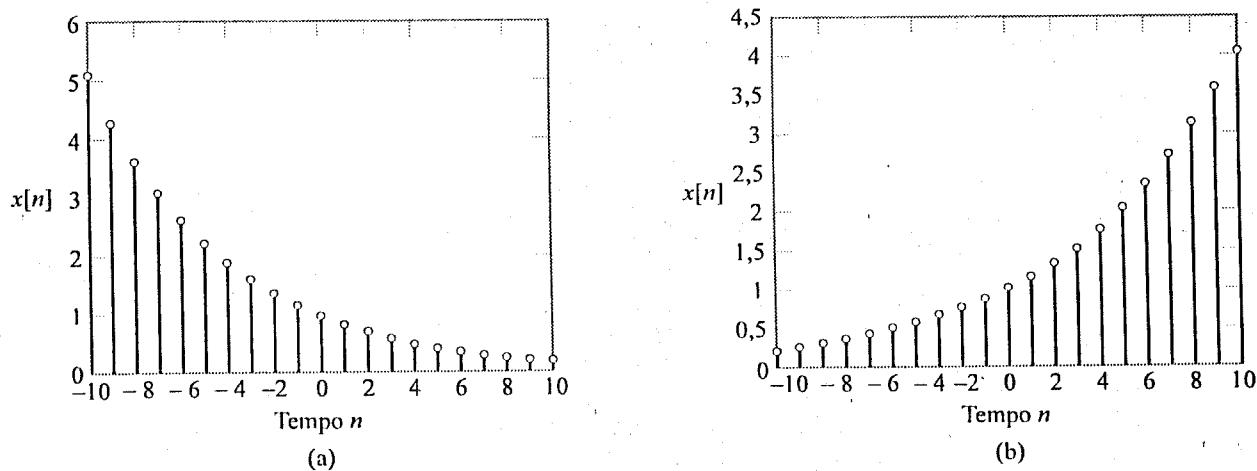


FIGURA 1.28 (a) Forma exponencial decrescente de sinal de tempo discreto. (b) Forma exponencial crescente de sinal de tempo discreto.

Os sinais exponenciais mostrados nas Figuras 1.26 e 1.28 têm todos valores reais. É possível que, um sinal exponencial tenha valor complexo. As formas matemáticas de sinais exponenciais complexos são as mesmas que as mostradas nas equações (1.28) e (1.31), com algumas diferenças, conforme explicamos aqui. No caso do tempo contínuo, o parâmetro  $B$  ou o parâmetro  $a$  ou ambos na equação (1.28) assumem valores complexos. Similarmente, no caso de tempo discreto, o parâmetro  $B$  ou o parâmetro  $r$  ou ambos na equação (1.31) assumem valores complexos. Dois exemplos comumente encontrados de sinais exponenciais complexos são  $e^{j\omega t}$  e  $e^{j\Omega n}$ .

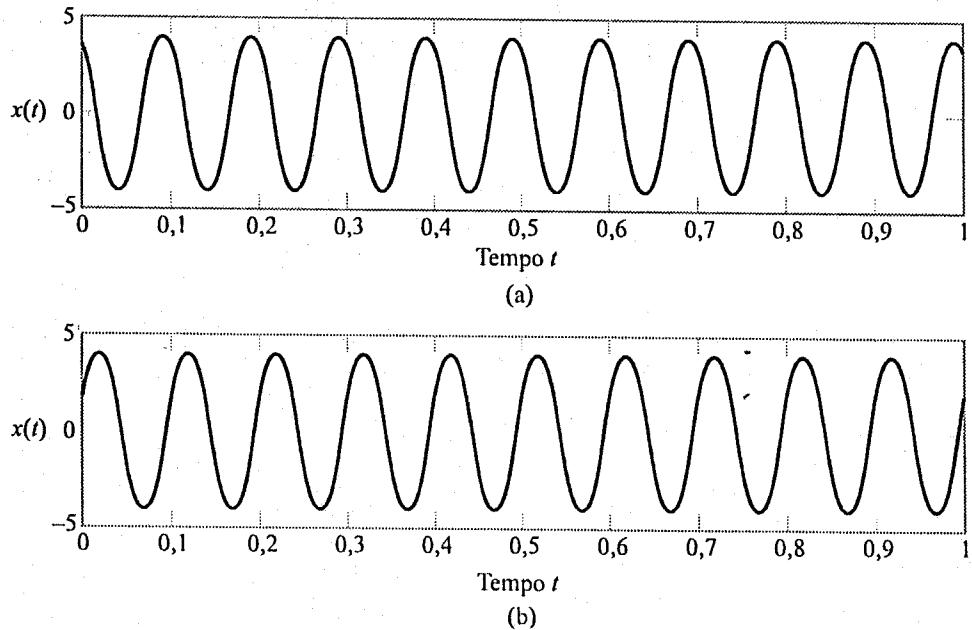
### SINAIS SENOIDAIS

A versão de tempo contínuo de um sinal senoidal, em sua forma mais geral, pode ser escrita como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.32)$$

em que  $A$  é a amplitude,  $\omega$  é a freqüência em radianos por segundo, e  $\phi$  é o ângulo de fase em radianos. A Figura 1.29(a) apresenta a forma de onda de um sinal senoidal para  $A = 4$  e  $\phi = +\pi/6$ . Um sinal senoidal é um exemplo de sinal periódico, cujo período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



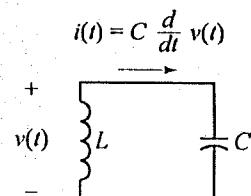
**FIGURA 1.29** (a) Sinal senoidal  $A \cos(\omega t + \phi)$  com fase  $\phi = +\pi/6$  radianos. (b) Sinal senoidal  $A \sin(\omega t + \phi)$  com fase  $\phi = +\pi/6$  radianos.

Podemos provar imediatamente esta propriedade de um sinal senoidal usando a equação (1.32) para escrevermos

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A \cos(\omega(t+T) + \phi) \\ &= A \cos(\omega t + \omega T + \phi) \\ &= A \cos(\omega t + 2\pi + \phi) \\ &= A \cos(\omega t + \phi) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

que satisfaz a condição de definição da equação (1.5) para um sinal periódico.

Para ilustrarmos a geração de um sinal senoidal, consideremos o circuito da Figura 1.30, que consiste em um indutor e capacitor conectados em paralelo.



**FIGURA 1.30** Circuito  $LC$  paralelo, supondo que o indutor  $L$  e o capacitor  $C$  são ambos ideais.

Presume-se que as perdas em ambos os componentes do circuito sejam bastante pequenas para que eles sejam considerados “ideais.” A tensão presente no capacitor no tempo  $t = 0$  é igual a  $V_0$ . A operação do circuito da Figura 1.30 para  $t \geq 0$  é descrita por

$$LC \frac{d^2}{dt^2} v(t) + v(t) = 0 \quad (1.33)$$

em que  $v(t)$  é a tensão no capacitor no tempo  $t$ ,  $C$  é sua capacidade, e  $L$  é a indutância do indutor. A equação (1.33) é uma *equação diferencial de segunda ordem*. Sua solução é dada por

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_0 t), \quad t \geq 0 \quad (1.34)$$

em que  $\omega_0$  é a freqüência natural de oscilação angular do circuito:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.35)$$

A equação (1.34) descreve um sinal senoidal de amplitude  $A = V_0$ , a freqüência  $\omega = \omega_0$  e o ângulo de fase  $\phi = 0$ .

Considere a seguir a versão de tempo discreto de um sinal senoidal, escrita como

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \phi) \quad (1.36)$$

O período de um sinal de tempo discreto periódico é medido em amostras. Deste modo, para que  $x[n]$  seja periódico com um período, digamos, de  $N$  amostras, ele deve satisfazer a condição da equação (1.8) para todo número inteiro  $n$  e algum número inteiro  $N$ . Substituindo  $n$  na equação (1.36) por  $n + N$ , obtemos

$$x[n + N] = A \cos(\Omega n + \Omega N + \phi)$$

Para que a condição da equação (1.8) seja satisfeita, em geral, exigimos que

$$\Omega N = 2\pi m \text{ radianos}$$

ou

$$\Omega = \frac{2\pi m}{N} \text{ radianos/ciclo, } m, N \text{ inteiros} \quad (1.37)$$

O ponto importante a ser notado aqui é que, diferentemente dos sinais senoidais de tempo contínuo, nem todos os sistemas senoidais de tempo discreto com valores arbitrários de  $\Omega$  são periódicos. Especificamente, para que o sinal senoidal de tempo discreto descrito na equação (1.36) seja periódico, a freqüência angular  $\Omega$  deve ser um múltiplo na forma de razão de  $2\pi$ , como indica a equação (1.37). A Figura 1.31 ilustra um sinal senoidal de tempo discreto para  $A = 1$ ,  $\phi = 0$  e  $N = 12$ .

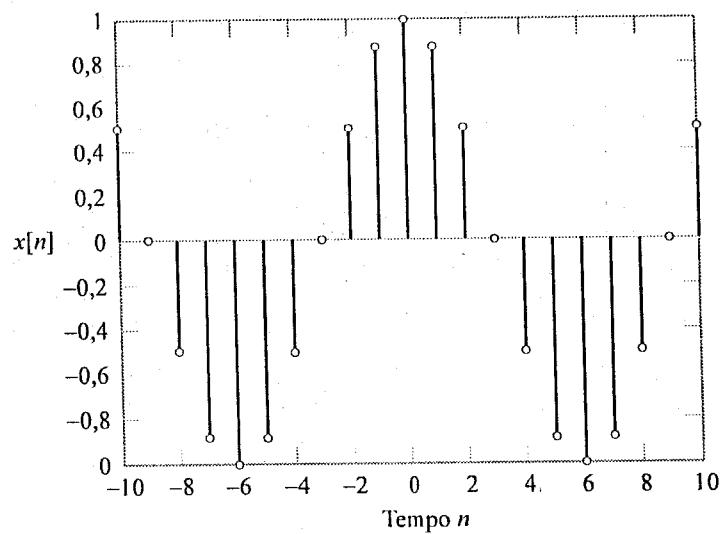


FIGURA 1.31 Sinal senoidal de tempo discreto.

**EXEMPLO 1.6** Um par de sinais senoidais com uma frequência angular comum é definida por

$$x_1[n] = \sin[5\pi n]$$

e

$$x_2[n] = \sqrt{3} \cos[5\pi n]$$

- (a) Especifique a condição que o período  $N$  de ambos  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$  devem satisfazer para que eles sejam periódicos.
- (b) Avalie a amplitude e o ângulo de fase do sinal senoidal composto

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

*Solução:*

- (a) A frequência angular tanto de  $x_1[n]$  como de  $x_2[n]$  é

$$\Omega = 5\pi \text{ radianos/ciclo}$$

Resolvendo a equação (1.37) para o período  $N$ , obteremos

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi m}{\Omega} \\ &= \frac{2\pi m}{5\pi} \\ &= \frac{2m}{5} \end{aligned}$$

Para que  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$  sejam periódicos, o período  $N$  dos mesmos deve ser um número inteiro. Isto pode ser satisfeito apenas para  $m = 5, 10, 15, \dots$ , o que resulta em  $N = 2, 4, 6, \dots$

- (b) Queremos expressar  $y[n]$  na forma

$$y[n] = A \cos(\Omega n + \phi)$$

Lembre-se da identidade trigonométrica

$$A \cos(\Omega n + \phi) = A \cos(\Omega n) \cos(\phi) - A \sin(\Omega n) \sin(\phi)$$

Identificando  $\Omega = 5\pi$ , vemos que o lado direito desta identidade tem a mesma forma que  $x_1[n] + x_2[n]$ . Portanto, podemos escrever

$$A \sin(\phi) = -1 \quad \text{e} \quad \cos(\phi) = \sqrt{3}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\phi) &= \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{\text{amplitude de } x_1[n]}{\text{amplitude de } x_2[n]} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a partir daí, descobrimos que  $\phi = -\pi/6$  radianos. Similarmente, a amplitude  $A$  é dada por

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\text{amplitude de } x_1[n])^2 + (\text{amplitude de } x_2[n])^2} \\ &= \sqrt{1+3} = 2 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, podemos expressar  $y[n]$  como

$$y[n] = 2 \cos(5\pi n - \pi/6)$$

► EXERCÍCIO 1.13 Considere os seguintes sinais senoidais:

- (a)  $x[n] = 5 \operatorname{sen}[2n]$
- (b)  $x[n] = 5 \cos[0,2\pi n]$
- (c)  $x[n] = 5 \cos[6\pi n]$
- (d)  $x[n] = 5 \operatorname{sen}[6\pi n/35]$

Determine se cada  $x(n)$  é periódico, e se for, encontre seu período fundamental.

*Resposta:* (a) Não periódico. (b) Periódico, período fundamental = 10. (c) Periódico, período fundamental = 1. (d) Periódico, período fundamental = 35. ◀

► EXERCÍCIO 1.14 Encontre as menores freqüências angulares para as quais os sinais senoidais de tempo discreto com os seguintes períodos fundamentais são periódicos: (a)  $N = 8$ , (b)  $N = 32$ , (c)  $N = 64$ , (d)  $N = 128$ .

*Resposta:* (a)  $\Omega = \pi/4$ . (b)  $\Omega = \pi/16$ . (c)  $\Omega = \pi/32$ . (d)  $\Omega = \pi/64$ . ◀

### ■ RELAÇÃO ENTRE SINAIS SENOIDAIS E EXPONENCIAIS COMPLEXOS

Considere o sinal exponencial complexo  $e^{j\theta}$ . Usando a *identidade de Euler*, podemos expandir este termo como

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta \quad (1.38)$$

Este resultado indica que podemos expressar o sinal senoidal de tempo contínuo da equação (1.32) como a parte real do sinal exponencial complexo  $Be^{j\omega t}$ , em que  $B$  é, em si mesmo, uma quantidade complexa definida por

$$B = Ae^{j\phi} \quad (1.39)$$

Ou seja, podemos escrever

$$A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{Be^{j\omega t}\} \quad (1.40)$$

em que  $\operatorname{Re}\{\cdot\}$  denota a parte real da quantidade complexa escrita entre chaves. Podemos provar prontamente esta relação observando que

$$\begin{aligned} Be^{j\omega t} &= Ae^{j\phi}e^{j\omega t} \\ &= Ae^{j(\omega t + \phi)} \\ &= A \cos(\omega t + \phi) + jA \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

a partir do quê, segue-se a equação (1.40) imediatamente. O sinal senoidal da equação (1.32) é definido em termos de uma função co-seno. Logicamente, podemos definir um sinal senoidal de tempo contínuo em termos de uma função seno, conforme é mostrado por

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (1.41)$$

a qual é representada pela parte imaginária do sinal exponencial complexo  $Be^{j\omega t}$ . Ou seja, podemos escrever,

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \operatorname{Im}\{Be^{j\omega t}\} \quad (1.42)$$

em que  $B$  é definido pela equação (1.39), e  $\operatorname{Im}\{\cdot\}$  denota a parte imaginária da quantidade complexa escrita entre chaves. A parte senoidal da equação (1.41) difere daquela da equação (1.32) por um deslocamento de fase igual a  $90^\circ$ . Ou seja, o sinal senoidal  $A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$  vem atrás do sinal senoidal  $A \cos(\omega t + \phi)$ , como ilustra a Figura 1.29(b) para  $\phi = \pi/6$ .

Similarmente, no caso de tempo discreto, podemos escrever

$$A \cos(\Omega n + \phi) = \operatorname{Re}\{Be^{j\Omega n}\} \quad (1.43)$$

e

$$A \sin(\Omega n + \phi) = \operatorname{Im}\{Be^{j\Omega n}\} \quad (1.44)$$

em que  $B$  é definido em termos de  $A$  e  $\phi$  em termos da equação (1.39). A Figura 1.32 mostra a representação bidimensional do sinal exponencial complexo  $e^{j\Omega n}$  para  $\Omega = \pi/4$  e  $n = 0, 1, \dots, 7$ . A projeção de cada valor no eixo real é  $\cos(\Omega n)$ , enquanto a projeção no eixo imaginário é  $\sin(\Omega n)$ .

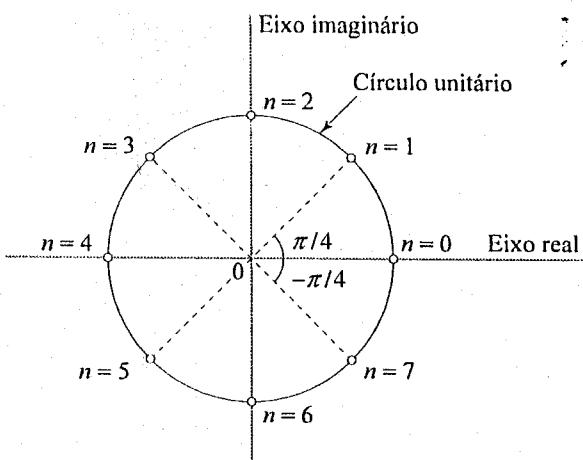


FIGURA 1.32 Plano complexo, mostrando oito pontos uniformemente distribuídos no círculo unitário.

### SINAL SENOIDAL EXPONENCIALMENTE AMORTECIDO

A multiplicação de um sinal senoidal por um sinal exponencial decrescente de valor real resulta em um novo sinal, denominado sinal senoidal exponencialmente amortecido. Especificamente, multiplicar o sinal exponencial de tempo contínuo  $A \sin(\omega t + \phi)$  pelo exponencial  $e^{-\alpha t}$  resulta no sinal senoidal exponencialmente amortecido.

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi), \quad \alpha > 0 \quad (1.45)$$

A Figura 1.33 mostra a forma de onda do sinal correspondente a  $A = 60$ ,  $\alpha = 6$  e  $\phi = 0$ . Para o tempo crescente  $t$ , a amplitude da oscilação senoidal decresce de maneira exponencial, aproximando-se de zero no tempo infinito.

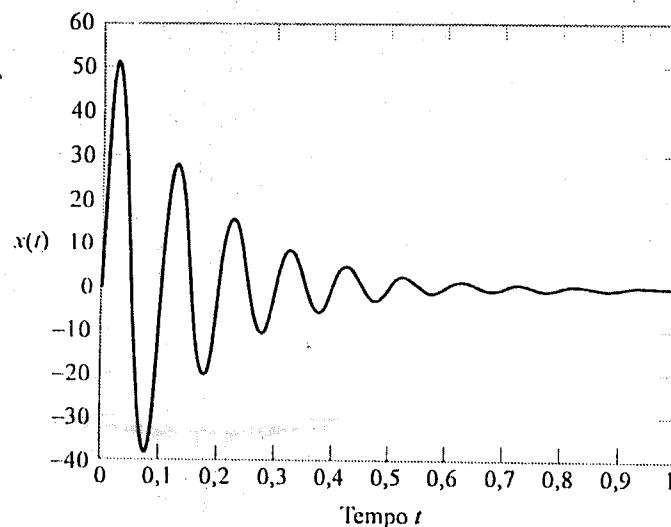


FIGURA 1.33 Sinal senoidal exponencialmente amortecido  $e^{\alpha t} \sin \omega t$ , com  $\alpha > 0$ .

Para ilustrar a geração de um sinal senoidal exponencialmente amortecido, consideremos o circuito paralelo da Figura 1.34, que consiste em um capacitor de capacidade  $C$ , um indutor de inductância  $L$ , e um resistor de resistência  $R$ . A resistência  $R$  representa o efeito combinado das perdas associadas com o indutor e o capacitor. Digamos que  $V_0$  denote a tensão presente no capacitor no tempo  $t = 0$ . A operação do circuito da Figura 1.34 é descrita por

$$C \frac{d}{dt} v(t) + \frac{1}{R} v(t) + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = 0 \quad (1.46)$$

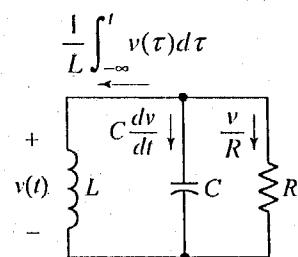


FIGURA 1.34 Circuito  $LCR$  paralelo, com indutor  $L$ , capacitor  $C$  e resistor  $R$ , todos presumidos ideais.

em que  $v(t)$  é a tensão no capacitor no tempo  $t \geq 0$ . A equação (1.46) é uma *equação íntegro-diferencial*. Sua solução é dada por

$$v(t) = V_0 e^{-t/2CR} \cos(\omega_0 t) \quad (1.47)$$

em que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2}} \quad (1.48)$$

Na equação (1.48), presume-se que  $4CR^2 > L$ . Comparando a equação (1.47) com a (1.45), temos  $A = V_0$ ,  $\alpha = 1/2CR$ ,  $\omega = \omega_0$  e  $\phi = \pi/2$ .

Os circuitos das Figuras 1.27, 1.30 e 1.34 serviriam como exemplos em que um sinal exponencial, um sinal senoidal e um sinal senoidal exponencialmente amortecido, respectivamente, surgiram naturalmente como soluções para problemas físicos. As operações destes circuitos são descritas pelas equações diferenciais (1.29), (1.33) e (1.46), cujas soluções foram simplesmente enunciadas. Métodos para resolver estas equações diferenciais serão apresentados nos capítulos subsequentes.

Retornando ao assunto em que estávamos, a versão de tempo discreto do sinal senoidal exponencialmente amortecido da equação (1.45) é descrita por

$$x[n] = Br^n \sin[\Omega n + \phi] \quad (1.49)$$

Para que o sinal da equação (1.49) decresça com o tempo, o parâmetro  $r$  deve situar-se na faixa  $0 < |r| < 1$ .

► **EXERCÍCIO 1.15** É possível que um sinal senoidal exponencialmente amortecido de qualquer tipo seja periódico?

*Resposta:* Não.

### ■ FUNÇÃO DEGRAU

A versão de tempo discreto da função degrau, comumente denotada por  $u[n]$ , é definida por

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

a qual é ilustrada na Figura 1.35.

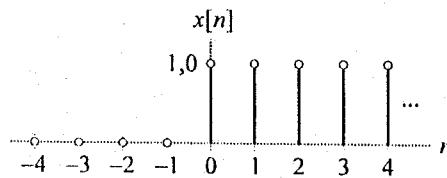


FIGURA 1.35 Versão de tempo discreto de função degrau de amplitude unitária.

A versão de tempo contínuo da função degrau, comumente denotada por  $u(t)$ , é definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

A Figura 1.36 apresenta um gráfico da função degrau  $u(t)$ . Diz-se que ela apresenta uma descontinuidade em  $t = 0$ , uma vez que o valor  $u(t)$  se modifica instantaneamente de 0 para 1 quando  $t = 0$ .

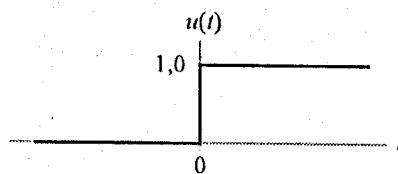


FIGURA 1.36 Versão de tempo contínuo de função degrau de amplitude unitária.

A função degrau  $u(t)$  é um sinal particularmente simples de aplicar. Eletricamente, uma bateria ou uma fonte dc é aplicada em  $t = 0$  fechando-se uma chave, por exemplo. Como sinal de teste, ela é útil porque a saída de um sistema, devido a uma entrada de degrau, revela muita coisa sobre a rapidez com que o sistema responde a uma mudança abrupta no sinal de entrada. Uma observação similar se aplica a  $u[n]$  no contexto de um sistema de tempo discreto.

A função degrau  $u(t)$  também pode ser usada para construir outras formas de onda descontínuas, conforme é ilustrado no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 1.7** Considere o pulso retangular  $x(t)$  mostrado na Figura 1.37(a). Este pulso tem uma amplitude  $A$  e duração  $T$ . Expressse  $x(t)$  como uma soma ponderada de duas funções degrau.

*Solução:* O pulso retangular  $x(t)$  pode ser escrito em termos matemáticos da seguinte forma:

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq |t| < T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad (1.52)$$

em que  $|t|$  denota o módulo ou magnitude do tempo  $t$ . O pulso retangular  $x(t)$  é representado como a diferença entre duas funções degrau deslocadas no tempo, como ilustra a Figura 1.37(b). Baseando-se nesta figura, podemos expressar  $x(t)$  como

$$x(t) = Au\left(t + \frac{T}{2}\right) - Au\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (1.53)$$

em que  $u(t)$  é a função degrau. Para a finalidade de ilustração, definimos  $T = 1s$  na Figura 1.37.

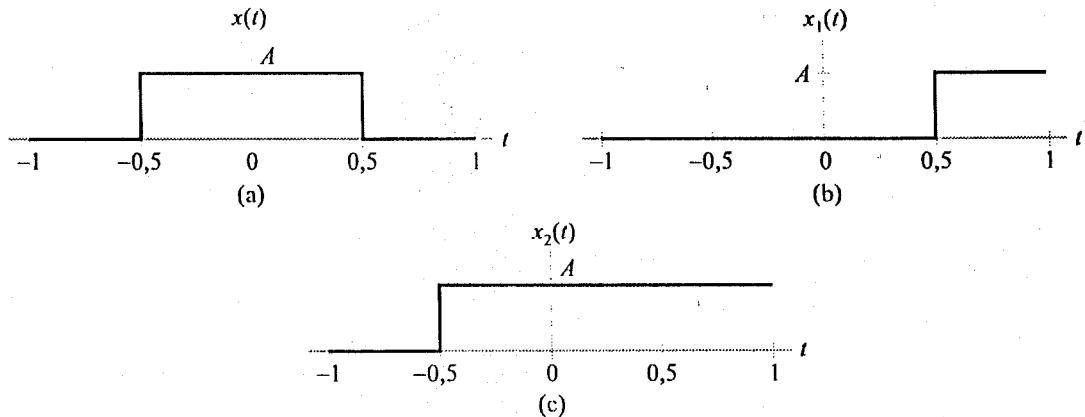


FIGURA 1.37 (a) Pulso retangular  $x(t)$  de amplitude  $A$  e duração  $T = 1$  s simétrico em relação à origem. (b) Representação de  $x(t)$  como a superposição de duas funções degrau de amplitude  $A$ , com uma função degrau deslocada para a esquerda de  $T/2$  e a outra deslocada para a direita de  $T/2$ ; estes dois sinais deslocados são denotados por  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente.

► EXERCÍCIO 1.16 Um sinal de tempo discreto  $x(n)$  é definido por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Usando  $u[n]$ , descreva  $x[n]$  como a superposição de duas funções degrau.

*Resposta:*  $x[n] = u[n] - u[n-10]$ .

### ■ FUNÇÃO IMPULSO

A versão de tempo discreto do impulso, comumente denominada por  $\delta[n]$ , é definida por

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

a qual é ilustrada na Figura 1.38.

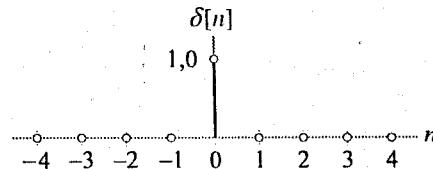


FIGURA 1.38 Forma de impulso de tempo discreto.

A versão de tempo contínuo do impulso unitário, comumente denominado por  $\delta(t)$ , é definida pelo seguinte par de relações:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0 \quad (1.55)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.56)$$

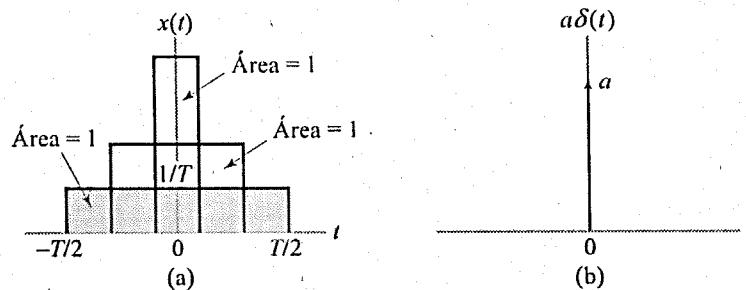
A equação (1.55) diz que o impulso  $\delta(t)$  é zero em qualquer lugar, exceto na origem. A equação (1.56) diz que a área total sob o impulso unitário é unitária. O impulso  $\delta(t)$  também é denominado *função delta de Dirac*. Note que o impulso  $\delta(t)$  é a derivada da função degrau  $u(t)$  com respeito ao tempo  $t$ . Inversamente, a função degrau  $u(t)$  é a integral do impulso  $\delta(t)$  com respeito ao tempo  $t$ .

Uma descrição gráfica do impulso  $\delta[n]$  para o tempo discreto é direta, como mostra a Figura 1.38. Em contrapartida, a visualização do impulso unitário  $\delta(t)$  para o tempo contínuo requer uma atenção mais detalhada. Uma maneira de visualizar  $\delta(t)$  é vê-la como a forma limite de um pulso retangular de área unitária, como ilustra a Figura 1.39(a). Especificamente, a duração do pulso é diminuída e sua amplitude é aumentada, de tal forma que a área sob o pulso é mantida constante na unidade.

À medida que a duração diminui, o pulso retangular se aproxima melhor do impulso. De fato, podemos generalizar este resultado declarando que

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} g_T(t) \quad (1.57)$$

em que  $g_T(t)$  é qualquer pulso que seja uma função par de tempo  $t$ , com duração  $T$  e área unitária. A área sob o pulso define a *força* do impulso. Dessa forma, quando falamos de função de impulso  $\delta(t)$ , estamos dizendo de fato que sua força é unitária. O símbolo gráfico para um impulso é descrito na Figura 1.39(b). A força do impulso é denotada pelo rótulo próximo à seta.



**FIGURA 1.39** (a) Evolução de um pulso retangular de área unitária para um impulso de força unitária. (b) Símbolo gráfico correspondente a um impulso de força  $a$ .

A partir da equação de definição (1.55), segue imediatamente que o impulso unitário  $\delta(t)$  é uma função par do tempo  $t$ , conforme é mostrado por

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.58)$$

Entretanto, para que o impulso unitário  $\delta(t)$  tenha significado matemático, ele tem de aparecer como um fator no integrando de uma integral com respeito ao tempo, e, então, estritamente falando, somente quando o outro fator do integrando for uma função contínua do tempo na qual o impulso ocorre. Admitamos que  $x(t)$  seja essa função, e consideremos o produto de  $x(t)$  com a função delta  $\delta(t - t_0)$  deslocada no tempo. Levando em conta as duas equações de definição (1.55) e (1.56), podemos expressar a integral deste produto da seguinte maneira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (1.59)$$

A operação indicada no primeiro membro da equação (1.59) “peneira” o valor  $x(t_0)$  da função  $x(t)$  no tempo  $t = t_0$ . Conseqüentemente, a equação (1.59) é chamada *propriedade de peneiramento* do impulso unitário. Esta propriedade às vezes é usada como a definição de um impulso unitário; com efeito, ela incorpora as equações (1.55) e (1.56) numa única relação.

Outra propriedade útil do impulso unitário  $\delta(t)$  é a *propriedade de mudança de escala de tempo*, descrita por

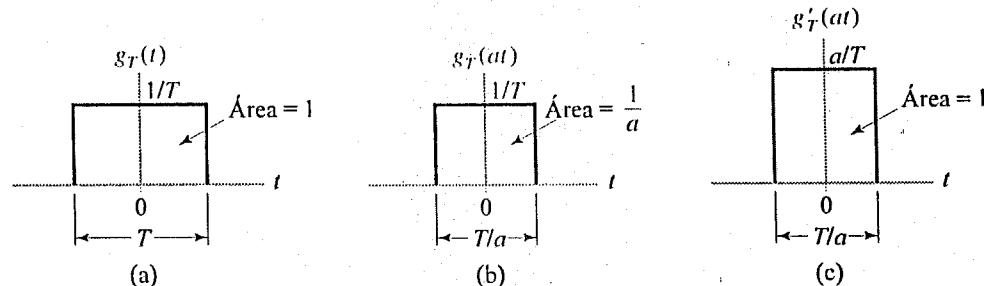
$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t), \quad a > 0 \quad (1.60)$$

Para provarmos esta propriedade, substituímos  $t$  na equação (1.57) por  $at$  e, deste modo, escrevemos

$$\delta(at) = \lim_{T \rightarrow 0} g_T(at) \quad (1.61)$$

Para representar a função  $g_T(t)$ , usamos o pulso retangular mostrado na Figura 1.40(a), o qual tem a duração  $T$ , amplitude  $1/T$  e, portanto, área unitária. Correspondentemente, a função com mudança de escala de tempo  $g_T(at)$  é mostrada na Figura 1.40(b) para  $a > 1$ .

A amplitude de  $g_T(at)$  permanece inalterada pela operação de mudança de escala de tempo. Portanto, para restabelecer a área sob este pulso à unidade, a amplitude de  $g_T(at)$  é mudada em escala com o mesmo fator  $a$  do tempo, como indica a Figura 1.40(c).



**FIGURA 1.40** Passos envolvidos para provar a propriedade de mudança de escala de tempo do impulso unitário. (a) Pulso retangular  $g_T(t)$  de amplitude  $1/T$  e duração  $T$ , simétrico em relação à origem. (b) Pulso  $g_T(at)$  comprimido por um fator  $a$ . (c) Mudança de escala de amplitude do pulso comprimido, restabelecendo-o à área unitária.

A função de tempo na Figura 1.40(c) é denotada por  $g'_T(at)$ ; ela é relacionada a  $g_T(at)$  por

$$g'_T(at) = ag_T(at) \quad (1.62)$$

Substituindo a equação (1.62) em (1.61), obtemos

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow 0} g'_T(at) \quad (1.63)$$

Uma vez que, pelo desenho, a área sob a função  $g'_T(at)$  é a unidade, segue-se que

$$\delta(t) = \lim_{t \rightarrow 0} g'_T(at) \quad (1.64)$$

Conseqüentemente, o uso da equação (1.64) na (1.63) resulta na propriedade de mudança de escala de tempo descrita na equação (1.60).

Depois de definirmos o que é um impulso unitário e descrevermos suas propriedades, há mais uma questão que precisa ser encaminhada. Qual é o uso prático de um impulso unitário? Não podemos gerar uma função de impulso física, uma vez que isso corresponderia a um sinal de amplitude infinita em  $t = 0$  e que é zero em todas as demais partes. Porém, a função de impulso serve a um propósito matemático ao fornecer uma aproximação para um sinal físico de duração extremamente breve e elevada amplitude. A resposta de um sistema a esse tipo de entrada revela muitas coisas sobre o caráter do sistema. Por exemplo, consideremos o circuito *LCR* paralelo da Figura 1.34, presumindo que esteja em repouso inicialmente. Suponhamos agora que um sinal de tensão que se aproxima de uma função de impulso seja aplicado ao circuito no tempo  $t = 0$ . A corrente que atravessa um indutor não pode modificar-se instantaneamente, mas a tensão que atravessa um capacitor, pode. Segue-se, portanto, que a tensão no capacitor se eleva de repente a um valor, digamos, igual a  $V_0$  no tempo  $t = 0^+$ . Aqui,  $t = 0^+$  refere-se ao instante de tempo em que a energia no sinal de entrada cessa. A partir daí, o circuito opera sem entradas adicionais. O valor resultante da tensão  $v(t)$  no capacitor é definida pela equação (1.47). A resposta  $v(t)$  é chamada *resposta natural* ou *transitória* do circuito, cuja avaliação é facilitada pela aplicação de uma função impulso como sinal de teste.

### ■ FUNÇÃO RAMPA

A função impulso  $\delta(t)$  é a derivada da função degrau  $u(t)$  com respeito ao tempo. Pelo mesmo raciocínio, a integral da função degrau  $u(t)$  é uma função rampa de inclinação unitária. Este último sinal de teste comumente é denotado por  $r(t)$ , o qual é formalmente definido da seguinte maneira:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

De maneira equivalente, podemos escrever

$$r(t) = tu(t) \quad (1.66)$$

A função rampa  $r(t)$  é mostrada graficamente na Figura 1.41.

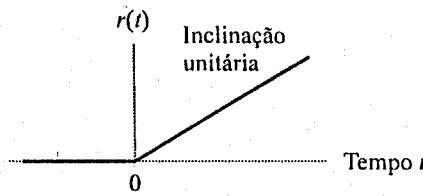


FIGURA 1.41 Função rampa de inclinação unitária.

Em termos mecânicos, uma função rampa pode ser visualizada da seguinte maneira. Se um sistema tiver como entrada o deslocamento angular de um eixo com rotação constante, então a velocidade angular deste eixo corresponde à função de grau que, integrada no tempo, gera uma rampa, ou deslocamento angular. Como um sinal de teste, a função rampa nos possibilita avaliar como um sistema de tempo contínuo reagiria a um sinal que cresce linearmente com o tempo.

A versão de tempo discreto da função rampa é definida por

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.67)$$

ou, de maneira equivalente,

$$r[n] = nu[n] \quad (1.68)$$

Ela é ilustrada na Figura 1.42.

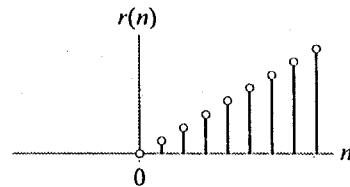


FIGURA 1.42 Versão de tempo discreto da função rampa.

## 1.7 Sistemas Vistos como Interconexões de Operações

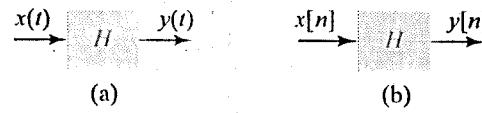
Em termos matemáticos, um sistema pode ser visto como uma *interconexão de operações* que transforma um sinal de entrada num sinal de saída com propriedades diferentes das do sinal de entrada. Os sinais podem ser da variedade tempo contínuo ou tempo discreto, ou uma combinação de ambos. Digamos que o operador  $H$  global denote a ação de um sistema. Então, a aplicação de um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  à entrada do sistema produz o sinal de saída descrito por

$$y(t) = H\{x(t)\} \quad (1.69)$$

A Figura 1.43(a) mostra uma representação em diagrama de blocos da equação (1.69). De maneira correspondente, para o caso de tempo discreto podemos escrever

$$y[n] = H\{x[n]\} \quad (1.70)$$

em que os sinais de tempo discreto  $x[n]$  e  $y[n]$  denotam os sinais de entrada e saída, respectivamente, como descreve a Figura 1.43(b).



**FIGURA 1.43** Representação em diagrama de blocos do operador  $H$  para (a) tempo contínuo e (b) tempo discreto.

**EXEMPLO 1.8** Considere um sistema de tempo discreto cujo sinal de saída  $y[n]$  seja a média dos três valores mais recentes do sinal de entrada  $x[n]$ , como é mostrado por

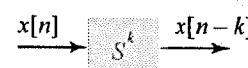
$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

Esse sistema é chamado *sistema de média móvel* por duas razões. Primeiro,  $y[n]$  é a média dos valores de amostra  $x[n]$ ,  $x[n-1]$  e  $x[n-2]$ . Segundo, o valor de  $y[n]$  se modifica à medida que  $n$  se move ao longo do eixo de tempo discreto. Formule o operador  $H$  correspondente a este sistema; daí, desenvolva uma representação em diagrama de blocos para ele.

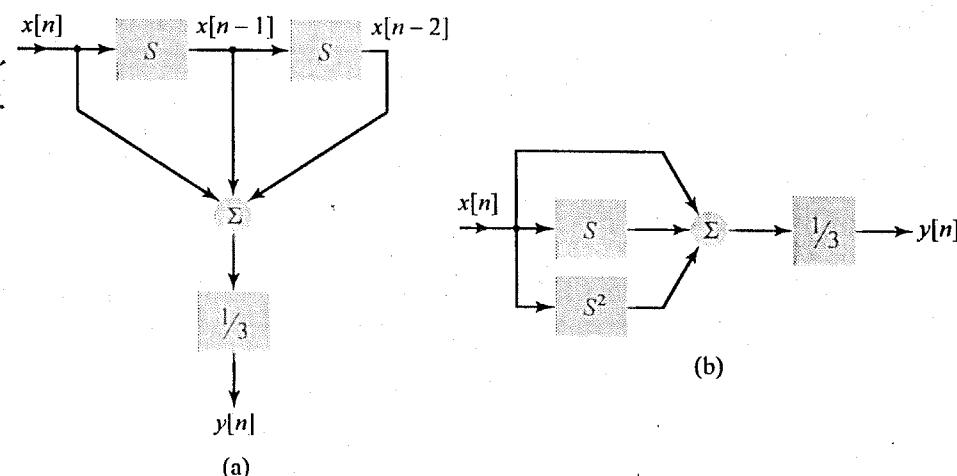
**Solução:** Digamos que o operador  $S^k$  denote um sistema que desloque (*shift*) no tempo a entrada  $x[n]$  de  $k$  unidades de tempo para produzir uma saída igual a  $x[n-k]$ , conforme descreve a Figura 1.44. Conseqüentemente, podemos definir o operador global  $H$  para o sistema de média móvel como

$$H = \frac{1}{3}(1 + S + S^2)$$

Duas diferentes implementações do operador  $H$  (isto é, o sistema de média móvel) que falam por si mesmas são apresentadas na Figura 1.45. A implementação mostrada na parte (a) da figura usa a conexão em *cascata* de dois deslocadores de tempo unitários idênticos, a saber,  $S^1 = S$ . Por outro lado, a implementação mostrada na parte (b) da figura mostra dois deslocadores de tempo diferentes,  $S$  e  $S^2$ , conectados em *paralelo*. Em ambos os casos, o sistema de média móvel é composto de uma interconexão de três blocos funcionais, a saber, dois deslocadores de tempo, um somador e um multiplicador por escalar.



**FIGURA 1.44** Operador  $S^k$  de deslocamento de tempo discreto que opera sobre o sinal de tempo discreto  $x[n]$  para produzir  $x[n-k]$ .



**FIGURA 1.45** Duas implementações diferentes (mas equivalentes) do sistema de média móvel: (a) forma de implementação em cascata e (b) forma de implementação paralela.

► **EXERCÍCIO 1.17** Expresse o operador que descreva a relação de entrada-saída

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$$

em termos do operador  $S$  de deslocamento no tempo.

**Resposta:**  $H = \frac{1}{3}(S^{-1} + 1 + S^1)$ .

Nos sistemas interconectados mostrados nas Figuras 1.45(a) e (b), o sinal flui através de cada um deles somente no sentido direto ou para a frente. Outra maneira possível de combinar sistemas é através do uso de conexões de *realimentação*. A Figura 1.4 mostra um exemplo de *sistema com realimentação*, que é caracterizado por dois caminhos. O caminho direto envolve a conexão em cascata do controlador e da planta. O caminho de realimentação se torna possível através do uso de um sensor conectado à saída do sistema numa extremidade e à entrada, na outra. O uso da realimentação tem muitos benefícios desejáveis e faz surgir problemas próprios que exigem atenção especial; o tema da realimentação será discutido no capítulo 9.

## 1.8 Propriedades dos Sistemas

As propriedades de um sistema descrevem as características do operador  $H$  que representam o sistema. A seguir, estudaremos algumas das propriedades mais básicas dos sistemas.

### ■ ESTABILIDADE

Diz-se que um sistema é do tipo *entrada limitada-saída limitada* (BIBO – *bounded input/bounded output*) estável se e somente se toda entrada limitada resultar em uma saída limitada. A saída desse sistema não diverge se a entrada não divergir.

Para colocar a condição para a estabilidade BIBO em uma base formal, considere um sistema de tempo contínuo cuja relação de entrada-saída está de acordo com a descrição da equação (1.69). O operador  $H$  é BIBO estável se o sinal de saída  $y(t)$  satisfizer a condição

$$|y(t)| \leq M_y < \infty \quad \text{para todos } t$$

sempre que os sinais de entrada  $x(t)$  satisfizerem a condição

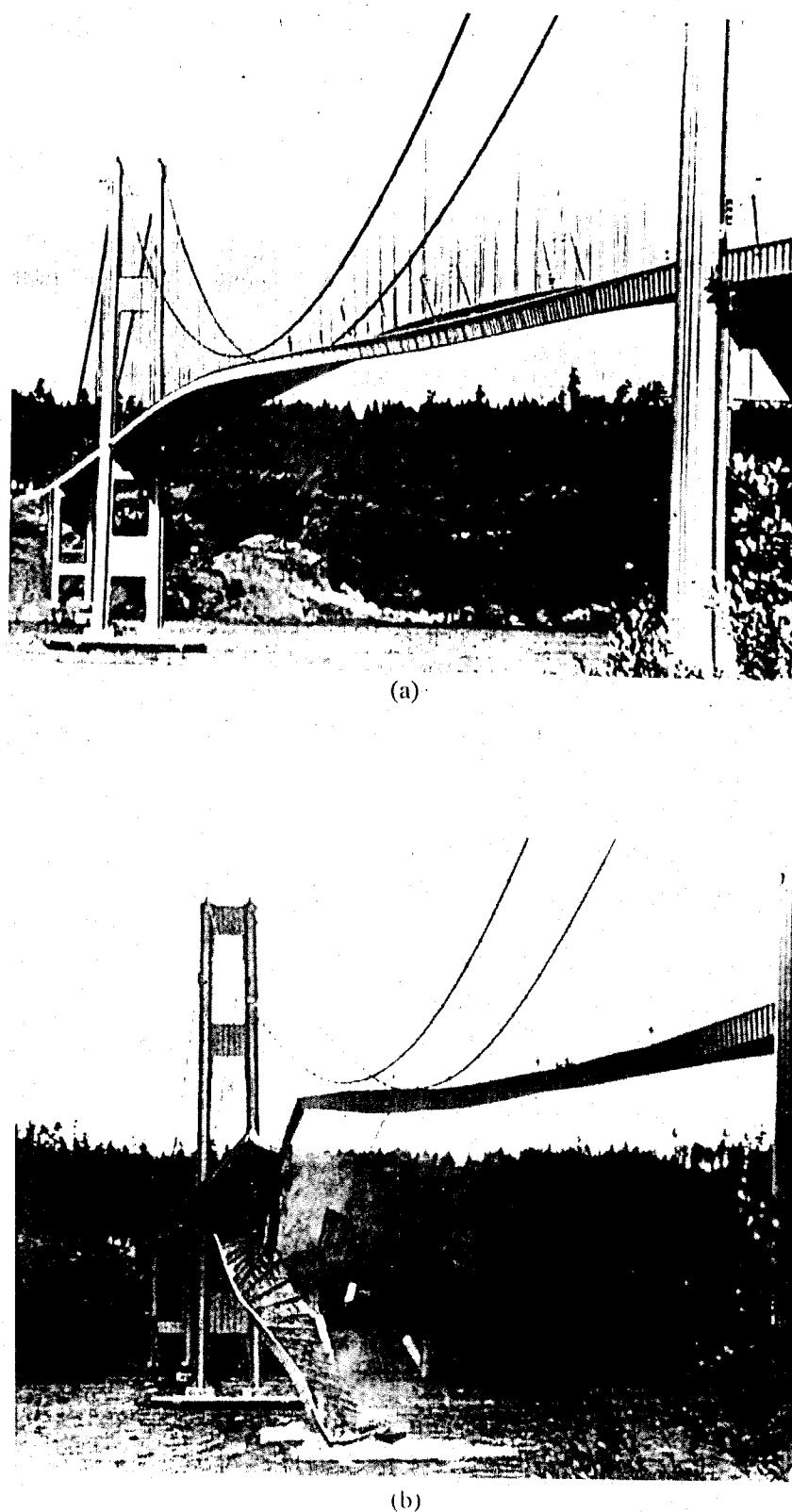
$$|x(t)| \leq M_x < \infty \quad \text{para todos } t$$

Tanto  $M_x$  como  $M_y$  representam números positivos finitos. Podemos descrever a condição para a estabilidade BIBO de um sistema de tempo discreto de maneira semelhante.

Da perspectiva da engenharia, é importante que um sistema de interesse permaneça estável sob todas as condições operacionais possíveis. Somente então é que o sistema terá a garantia de produzir uma saída limitada para uma entrada limitada. Sistemas instáveis normalmente devem ser evitados, a menos que se possa encontrar algum mecanismo para estabilizá-los.

Um exemplo famoso de sistema instável foi a primeira ponte suspensa de Tacoma Narrows, que desabou no dia 7 de novembro de 1940, aproximadamente às 11 h da manhã, devido a vibrações induzidas pelo vento. Situada no desfiladeiro de Tacoma, em Puget Sound, próximo à cidade de Tacoma, em Washington, a ponte havia sido aberta ao tráfego alguns meses antes de desabar; veja na Figura 1.46 as fotografias tiradas imediatamente antes do desabamento da ponte e logo depois.





**FIGURA 1.46** Fotos dramáticas mostrando o desabamento da ponte suspensa em Tacoma Narrows no dia 7 de Novembro de 1940. (a) Fotografia mostrando o movimento de torção do centro da ponte logo antes de desabar, (b) Alguns minutos depois que o primeiro pedaço de concreto caiu, esta segunda fotografia foi tirada mostrando uma seção de 183 m da ponte se rompendo do vão suspenso e girando de cima para baixo, enquanto se espalhava em Puget Sound, Washington. Observe o carro no canto superior direito da fotografia. (Cortesia da Smithsonian Institution.)



**EXEMPLO 1.9** Mostre que o sistema de média móvel descrito no Exemplo 1.8 é BIBO estável.

*Solução:* Suponhamos que

$$|x[n]| < M_x < \infty \text{ para todos } n$$

Usando a relação de entrada-saída dada

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) \right| \\ &\leq \frac{1}{3}(|x[n]| + |x[n-1]| + |x[n-2]|) \\ &\leq \frac{1}{3}(M_x + M_x + M_x) \\ &= M_x \end{aligned}$$

Portanto, o valor absoluto do sinal de saída  $y[n]$  sempre é menor do que o valor máximo absoluto do sinal de entrada  $x[n]$  para todo  $n$ , mostrando que o sistema de média móvel é estável.

► **Exercício 1.18** Mostre que o sistema de média móvel descrito pela relação de entrada-saída

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$$

é BIBO estável.

**EXEMPLO 1.10** Considere um sistema de tempo discreto cuja relação de entrada-saída seja definida por

$$y[n] = r^n x[n]$$

em que  $r > 1$ . Mostre que este sistema é instável.

*Solução:* Suponhamos que o sinal de entrada  $x[n]$  satisfaça a condição

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \text{ para todo } n$$

Encontramos, então, que

$$\begin{aligned} |y[n]| &= |r^n x[n]| \\ &= |r^n| \cdot |x[n]| \end{aligned}$$

Com  $r > 1$ , o fator de multiplicação  $r^n$  diverge com  $n$  crescente. Consequentemente, a condição de que o sinal de entrada seja limitado não é suficiente para garantir um sinal de saída limitado e, dessa forma, o sistema é instável. Para provar a estabilidade, precisamos estabelecer que todas as entradas limitadas produzem uma saída limitada.

## ■ MEMÓRIA

Diz-se que um sistema possui *memória* se sua saída depender de valores passados do sinal de entrada. A extensão temporal de valores passados, dos quais a saída depende, define quanto longe a memória do sistema se estende no passado. Em contrapartida, diz-se que um sistema é *sem memória* se seu sinal de saída depender somente do valor presente do sinal de entrada.

Por exemplo, um resistor é *sem memória*, uma vez que a corrente  $i(t)$  que flui através dele em resposta à tensão aplicada  $v(t)$  é definida por

$$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

em que  $R$  é a resistência do resistor. Por outro lado, um indutor tem memória, uma vez que a corrente  $i(t)$ , que flui através dele, está relacionada à tensão  $v(t)$  aplicada, da seguinte maneira:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

em que  $L$  é a indutância do indutor. Ou seja, diferentemente de um resistor, a corrente que flui através de um indutor no tempo  $t$  depende de todos os valores passados da tensão  $v(t)$ ; a memória de um indutor se estende no passado infinito.

O sistema de média móvel do Exemplo 1.8 descrito pela relação de entrada-saída

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

tem memória, uma vez que o valor do sinal de saída  $y[n]$  no tempo  $n$  depende do valor atual e dos dois valores passados do sinal de entrada  $x[n]$ . Por outro lado, um sistema descrito pela relação de entrada-saída

$$y[n] = x^2[n]$$

é sem memória, uma vez que o valor do sinal de saída  $y[n]$  no tempo  $n$  depende somente do valor atual do sinal de entrada  $x[n]$ .

► **EXERCÍCIO 1.19** Quão longe a memória do sistema de média móvel descrito na relação de entrada-saída

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

se estende no passado?

**Resposta:** Duas unidades de tempo.

► **EXERCÍCIO 1.20** A relação de entrada-saída de um diodo semicondutor é representada por

$$i(t) = a_0 + a_1 v(t) + a_2 v^2(t) + a_3 v^3(t) + \dots$$

em que  $v(t)$  é a tensão aplicada,  $i(t)$  é a corrente que flui através do diodo, e  $a_0, a_1, a_3, \dots$  são constantes. Este diodo tem memória?

**Resposta:** Não.

► **EXERCÍCIO 1.21** A relação de entrada-saída de um capacitor é descrita por

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Qual é sua memória?

**Resposta:** A memória se estende do tempo  $t$  ao passado infinito.

## ■ CAUSALIDADE

Diz-se que um sistema é *causal* se o valor atual do sinal de saída depender somente dos valores presentes e/ou passados do sinal de entrada. Em contrapartida, o sinal de saída de um sistema *não causal* depende dos valores futuros do sinal de entrada.

Por exemplo, o sistema de média móvel descrito por

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

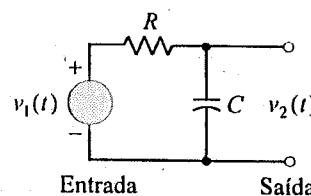
é causal. Por outro lado, o sistema de média móvel descrito por

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$$

é não-causal, uma vez que o sinal de saída  $y[n]$  depende de um valor futuro do sinal de entrada, a saber,  $x[n+1]$ .

► **EXERCÍCIO 1.22** Considere o circuito *RC* mostrado na Figura 1.47. Ele é causal ou não-causal?

**Resposta:** Causal.



**FIGURA 1.47** Circuito *RC* série acionado a partir de uma fonte de tensão ideal  $v_1(t)$ , produzindo a tensão de saída  $v_2(t)$ .

► **EXERCÍCIO 1.23** Suponhamos que  $k$  no operador da Figura 1.44 seja substituído por  $-k$ . O sistema resultante é causal ou não-causal para  $k$  positivo?

**Resposta:** Não-causal.

### ■ INVERTIBILIDADE

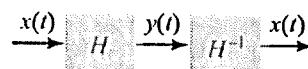
Diz-se que um sistema é *invertível* se a entrada do sistema puder ser recuperada da saída do sistema. Podemos ver o conjunto de operações necessárias para recuperar a entrada como um segundo sistema conectado em cascata com o sistema dado, de tal forma que o sinal de saída do segundo sistema é igual ao sinal de entrada aplicado ao sistema dado. Para colocar a noção de invertibilidade em uma base formal, admitamos que o operador  $H$  represente um sistema de tempo contínuo, com o sinal de entrada  $x(t)$  produzindo o sinal de saída  $y(t)$ . Admitamos que o sinal de saída  $y(t)$  seja aplicado a um segundo sistema de tempo contínuo, representado pelo operador  $H^{-1}$ , como ilustra a Figura 1.48. O sinal de saída do segundo sistema é definido por

$$\begin{aligned} H^{-1}\{y(t)\} &= H^{-1}\{H\{x(t)\}\} \\ &= H^{-1}H\{x(t)\} \end{aligned}$$

em que temos de usar o fato em que dois operadores  $H$  e  $H^{-1}$  conectados em cascata sejam equivalentes a um único operador  $H^{-1}H$ . Para que este sinal de saída se iguale ao sinal de entrada original  $x(t)$ , é necessário que

$$H^{-1}H = I \quad (1.71)$$

em que  $I$  denota o *operador identidade*. A saída do sistema descrito pelo operador identidade é exatamente igual à entrada. A equação (1.71) é a condição que o novo operador  $H^{-1}$  deve satisfazer em relação ao operador  $H$  dado para que o sinal de entrada original  $x(t)$  seja recuperado de  $y(t)$ . O operador  $H^{-1}$  é chamado *operador inverso*, e o sistema associado é chamado *sistema inverso*. Note que  $H^{-1}$  não é o recíproco do operador  $H$ ; ao contrário, o uso do sobrescrito  $-1$  pretende ser simplesmente um sinal que indica “inverso.” Em geral, o problema de encontrar o inverso de determinado sistema é difícil. De qualquer forma, um sistema não é invertível, a menos que distintas entradas aplicadas ao sistema produzam distintas saídas. Ou seja, deve haver uma correspondência biunívoca entre os sinais de entrada e saída para que o sistema seja invertível. Condições idênticas devem valer para que um sistema de tempo discreto seja invertível.



**FIGURA 1.48** A noção de invertibilidade de sistema. O segundo operador  $H^{-1}$  é o inverso do primeiro operador  $H$ . Consequentemente, a entrada  $x(t)$  é passada através da conexão em cascata de  $H$  e  $H^{-1}$  completamente inalterado.

O problema da invertibilidade é de especial importância no projeto de sistemas de comunicação. Conforme foi observado na Seção 1.3, quando um sinal transmitido se propaga através de um canal de comunicação, ele se torna distorcido devido às características físicas do canal. Um método amplamente usado de compensar esta distorção é incluir no receptor uma rede chamada *equalizador*, o qual é conectado em cascata com o canal, de maneira similar ao que descrevemos na Figura 1.48. Projetando-se o equalizador para que seja o inverso do canal, o sinal transmitido é restabelecido à sua forma original, supondo condições ideais.

**EXEMPLO 1.11** Considere o sistema de deslocamento no tempo descrito pela relação de entrada-saída

$$y(t) = x(t - t_0) = S^{t_0} \{x(t)\}$$

em que o operador  $S^{t_0}$  representa um deslocamento de  $t_0$  segundos no tempo. Encontre o inverso deste sistema.

**Solução:** Para este exemplo, o inverso de um deslocamento de  $t_0$  segundos no tempo é um deslocamento de  $-t_0$  segundos no tempo que pode ser representado pelo operador  $S^{-t_0}$ . Deste modo, aplicando  $S^{-t_0}$  ao sinal de saída do sistema de deslocamento no tempo dado, obtemos

$$\begin{aligned} S^{-t_0} \{y(t)\} &= S^{-t_0} \{S^{t_0} \{x(t)\}\} \\ &= S^{-t_0} S^{t_0} \{x(t)\} \end{aligned}$$

Para que este sinal de saída se iguale ao sinal de entrada original  $x(t)$ , é necessário que

$$S^{-t_0} S^{t_0} = I$$

que está plenamente de acordo com a condição de invertibilidade descrita na equação (1.71).

► **Exercício 1.24** Um indutor é descrito pela relação de entrada-saída

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Encontre a operação que representa o sistema inverso.

**Resposta:**  $L \frac{d}{dt}$

**EXEMPLO 1.12** Mostre que um sistema de lei quadrática descrito pela relação de entrada-saída

$$y(t) = x^2(t)$$

não é invertível.

**Solução:** Notamos que o sistema de lei quadrática viola a condição necessária para invertibilidade, a qual postula que entradas distintas devem produzir saídas distintas. Especificamente, as entradas distintas  $x(t)$  e  $-x(t)$  produzem a mesma saída  $y(t)$ . Consequentemente, o sistema de lei quadrática não é invertível.

## ■ INVARIÂNCIA NO TEMPO

Diz-se que um sistema é *invariante no tempo* se um retardo de tempo ou avanço de tempo do sinal de entrada levar a um deslocamento de tempo idêntico no sinal de saída. Isto implica que um sistema invariante no tempo reage de maneira idêntica, não importa quando o sinal de entrada seja aplicado. Dizendo com outras palavras, as características de um sistema invariante no tempo não se modificam com o tempo. Caso contrário, diz-se que o sistema é *variante no tempo*.

Considere um sistema de tempo contínuo cuja relação de entrada-saída é descrita pela equação (1.69), reproduzida aqui por conveniência de representação:

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

Suponhamos que o sinal de entrada  $x(t)$  seja deslocado no tempo  $t_0$  segundos, resultando na nova entrada  $x(t - t_0)$ . Esta operação pode ser descrita escrevendo-se

$$x(t - t_0) = S^{t_0} \{x(t)\}$$

em que o operador  $S^{t_0}$  representa um deslocamento no tempo igual a  $t_0$  segundos. Digamos que  $y_i(t)$  denote o sinal de saída do sistema produzido em resposta à entrada de  $x(t - t_0)$  deslocada no tempo. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned} y_i(t) &= H\{x(t - t_0)\} \\ &= H\{S^{t_0}\{x(t)\}\} \\ &= HS^{t_0}\{x(t)\} \end{aligned} \quad (1.72)$$

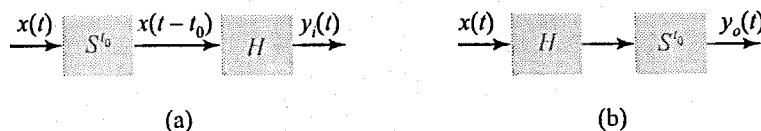
a qual é representada pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 1.49(a). Suponhamos agora que  $y_o(t)$  represente a saída do sistema original deslocada no tempo  $t_0$  segundos, conforme é mostrado por

$$\begin{aligned} y_o(t) &= S^{t_0}\{y(t)\} \\ &= S^{t_0}\{H\{x(t)\}\} \\ &= S^{t_0}H\{x(t)\} \end{aligned} \quad (1.73)$$

a qual é representada pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 1.49(b). O sistema é invariante no tempo se as saídas  $y_i(t)$  definidas nas equações (1.72) e (1.73) forem iguais para qualquer sinal de entrada idêntico  $x(t)$ . Portanto, é necessário que

$$HS^{t_0} = S^{t_0}H \quad (1.74)$$

Ou seja, para que um sistema descrito pelo operador  $H$  seja invariante no tempo, o operador de sistema  $H$  e o operador de deslocamento no tempo  $S^{t_0}$  devem *permutar-se* entre si para todo  $t_0$ . Uma relação similar deve valer para que um sistema de tempo discreto seja invariante no tempo.



**FIGURA 1.49** A noção de invariância no tempo. (a) Operador de deslocamento no tempo  $S^{t_0}$  precedendo o operador  $H$ . (b) Operador de deslocamento no tempo  $S^{t_0}$  depois do operador  $H$ . Estas duas situações são equivalentes, desde que  $H$  seja invariante no tempo.

**EXEMPLO 1.13** Use a tensão  $v(t)$  num indutor para representar o sinal de entrada  $x(t)$ , e a corrente  $i(t)$  que flui através dele para representar o sinal de saída  $y(t)$ . Dessa forma, o indutor é descrito pela relação de entrada-saída

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

em que  $L$  é a indutância. Mostre que o indutor, assim descrito, é invariante no tempo.

**Solução:** Admitamos que a entrada  $x(t)$  seja deslocada de  $t_0$  segundos, produzindo  $x(t - t_0)$ . A resposta  $y_i(t)$  do indutor para  $x(t - t_0)$  é

$$y_i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau$$

Em seguida, admitamos que  $y_o(t)$  denote a saída original do indutor deslocada de  $t_0$  segundos, como é mostrado por

$$\begin{aligned} y_o(t) &= y(t - t_0) \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Não obstante à primeira vista  $y_i(t)$  e  $y_o(t)$  parecerem diferentes, mas são de fato iguais, como é mostrado por uma simples mudança na variável de integração. Admitamos que

$$\tau = t - t_0$$

Para uma constante  $t_0$ , temos  $d\tau = d\tau'$ . Conseqüentemente, mudando os limites de integração, a expressão para  $y_i(t)$  pode ser reescrita como

$$y_i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau') d\tau'$$

a qual, em termos matemáticos, é idêntica a  $y_o(t)$ . Segue-se, portanto, que um indutor comum é invariante no tempo.

**EXEMPLO 1.14** Um termistor tem uma resistência que varia com o tempo devido a mudanças de temperatura. Digamos que  $R(t)$  denote a resistência do termistor, expressa como uma função do tempo. Associando o sinal de entrada  $x(t)$  com a tensão aplicada no termistor, e o sinal de saída  $y(t)$  com a corrente que flui através dele, podemos expressar a relação de entrada-saída do termistor como

$$y(t) = \frac{x(t)}{R(t)}$$

Mostre que o termistor assim descrito é variante com o tempo.

**Solução:** Digamos que  $y_i(t)$  denote a resposta do termistor produzida por uma versão de  $x(t - t_0)$  deslocada no tempo do sinal de entrada original. Podemos, então, escrever

$$y_i(t) = \frac{x(t - t_0)}{R(t)}$$

Em seguida, admitamos que  $y_o(t)$  denote a saída original do termistor deslocada no tempo de  $t_0$ , como é mostrado por

$$\begin{aligned} y_o(t) &= y(t - t_0) \\ &= \frac{x(t - t_0)}{R(t - t_0)} \end{aligned}$$

Vemos agora que, de maneira geral, uma vez  $R(t) \neq R(t - t_0)$  para todo  $t_0 \neq 0$ , então

$$y_o(t) \neq y_i(t) \text{ para } t_0 \neq 0$$

Conseqüentemente, um termistor é variante no tempo, o que é intuitivamente satisfatório.

► **EXERCÍCIO 1.25** Um sistema de tempo discreto descrito pela relação de entrada-saída

$$y(n) = r^n x(n)$$

é invariante no tempo?

**Resposta:** Não.

### ■ LINEARIDADE

Diz-se que um sistema é *linear* se ele satisfizer o *princípio da superposição*. Ou seja, a resposta de um sistema linear a uma soma ponderada de sinais de entrada é igual à mesma soma ponderada de sinais de saída, sendo cada sinal de saída associado a um sinal de entrada particular que age no sistema independentemente de todos os outros sinais de entrada. Um sistema que viole o princípio da superposição é dito *não-linear*.

Digamos que o operador  $H$  represente um sistema de tempo contínuo. Admitamos que o sinal aplicado à entrada do sistema seja definido pela soma ponderada

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \quad (1.75)$$

em que  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$  denotem um conjunto de sinais de entrada, e  $a_1, a_2, \dots, a_N$  denotem os fatores de ponderação correspondentes. O sinal de saída resultante é escrito como

$$\begin{aligned} y(t) &= H\{x(t)\} \\ &= H\left\{\sum_{i=1}^N a_i x_i(t)\right\} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Se o sistema for linear, podemos (de acordo com o princípio da superposição) expressar o sinal de saída  $y(t)$  do sistema como

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t) \quad (1.77)$$

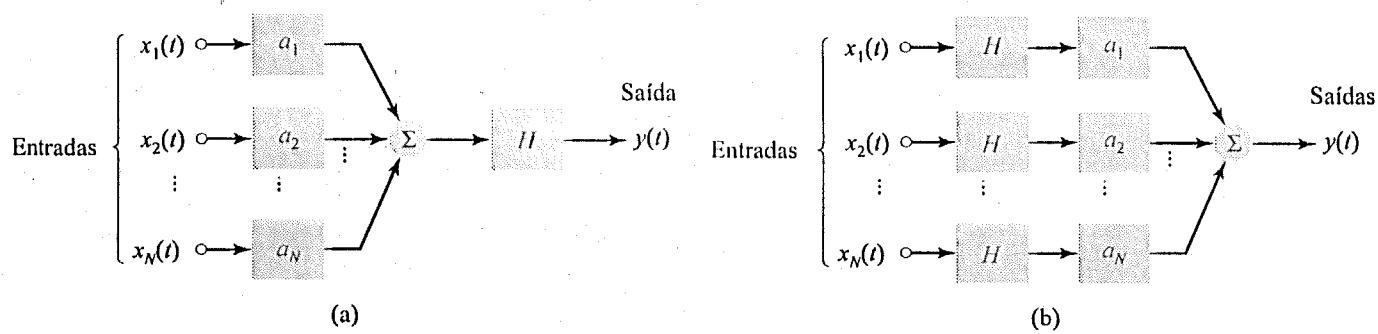
em que  $y_i(t)$  é a saída do sistema em resposta à entrada  $x_i(t)$  que age sozinha; ou seja,

$$y_i(t) = H\{x_i(t)\} \quad (1.78)$$

A soma ponderada da equação (1.77), descrevendo o sinal de saída  $y(t)$ , tem a mesma forma matemática que a da equação (1.75), que descreve o sinal de entrada  $x(t)$ . Substituindo a equação (1.78) na equação (1.77), obtemos

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i H\{x_i(t)\} \quad (1.79)$$

Para escrevermos a equação (1.79) na mesma forma que a equação (1.76), a operação de sistema descrita por  $H$  deve *comutar-se* com a adição e mudança de escala de amplitude da equação (1.79), como descreve a Figura 1.50. De fato, as equações (1.78) e (1.79), vistas em conjunto, representam um enunciado matemático do princípio da superposição. Para um sistema de tempo discreto linear, o princípio da superposição é descrito de maneira similar.



**FIGURA 1.50** A propriedade da linearidade de um sistema. (a) A operação combinada de mudança de escala de amplitude e adição precede o operador  $H$  para entradas múltiplas. (b) O operador  $H$  precede a mudança de escala de amplitude para cada entrada; as saídas resultantes são somadas para produzir a saída global  $y(t)$ . Se estas duas configurações produzirem a mesma saída  $y(t)$ , o operador  $H$  será linear.

**EXEMPLO 1.15** Considere um sistema de tempo discreto descrito pela relação de entrada-saída

$$y[n] = nx[n]$$

Mostre que este sistema é linear.

**Solução:** Digamos que o sinal de entrada  $x[n]$  seja expresso como a soma ponderada

$$x[n] = \sum_{i=1}^N a_i x_i[n]$$

Podemos, então, expressar o sinal de saída resultante do sistema como

$$\begin{aligned} y[n] &= n \sum_{i=1}^N a_i x_i[n] \\ &= \sum_{i=1}^N a_i n x_i[n] \\ &= \sum_{i=1}^N a_i y_i[n] \end{aligned}$$

em que

$$y_i[n] = nx_i[n]$$

é a saída devida a cada entrada que age independentemente. Dessa forma, podemos ver que o sistema fornecido satisfaz o princípio da superposição e, portanto, é linear.

**EXEMPLO 1.16** Considere, a seguir, o sistema de tempo contínuo descrito pela relação de entrada-saída

$$y(t) = x(t)x(t-1)$$

Mostre que este sistema é não-linear.

**Solução:** Digamos que o sinal de entrada  $x(t)$  seja expresso como a soma ponderada

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t)$$

Correspondentemente, o sinal de saída do sistema é dado pela dupla adição

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \sum_{j=1}^N a_j x_j(t-1) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j x_i(t) x_j(t-1) \end{aligned}$$

A forma desta equação é radicalmente diferente daquela que descreve o sinal de entrada  $x(t)$ . Ou seja, aqui, não podemos escrever  $y(t) = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t)$ . Dessa forma, o sistema viola o princípio da superposição e, portanto, é não-linear.

► **EXERCÍCIO 1.26** Mostre que o sistema de média móvel descrito por

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

é um sistema linear.

► **EXERCÍCIO 1.27** É possível que um sistema linear seja não-causal?

**Resposta:** Sim.

► **EXERCÍCIO 1.28** O limitador é um dispositivo sem memória, cuja saída  $y$  está relacionada à entrada  $x$  por

$$y = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

O limitador é linear?

**Resposta:** Não.

## 1.9 Explorando Conceitos com o MATLAB

O objeto básico usado pelo MATLAB é uma matriz numérica retangular com elementos possivelmente complexos. Os tipos de objetos de dados encontrados no estudo dos sinais e sistemas se adaptam bem às representações por matrizes. Nesta seção, usamos o MATLAB para explorar a geração dos sinais elementares descritos nas seções anteriores. A exploração de sistemas e sinais mais avançados será protelada para os capítulos subsequentes.

A MATLAB Signal Processing Toolbox tem uma grande variedade de funções para gerar sinais, a maioria das quais exige que comecemos com a representação vetorial do tempo  $t$  ou  $n$ . Para gerar um vetor  $t$  de valores de tempo com um *intervalo de amostragem*  $\mathcal{T}$  de 1 ms no intervalo de 0 a 1s, por exemplo, usamos o comando:

```
t = 0:.001:1;
```

Isto corresponde a 1000 amostras de tempo para cada segundo ou uma *taxa de amostragem* de 1000 Hz. Para gerar um vetor  $n$  de valores de tempo para sinais de tempo discreto, digamos, de  $n = 0$  a  $n = 1000$ , usamos o comando:

```
n = 0:1000;
```

Dados  $t$  ou  $n$ , podemos então prosseguir para gerar o sinal de interesse.

No MATLAB, um sinal de tempo discreto é representado *exatamente*, porque os valores do sinal são descritos como os elementos de um vetor. Por outro lado, o MATLAB fornece somente uma *aproximação* para um sinal de tempo contínuo. A aproximação consiste num vetor cujos elementos individuais são amostras do sinal de tempo contínuo subjacente. Quando usarmos esta abordagem de aproximação, é importante que escolhamos um intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$  suficientemente pequeno a fim de garantirmos que as amostras capturem todos os detalhes do sinal.

Nesta seção, consideraremos a geração tanto dos sinais de tempo contínuo como de tempo discreto de vários tipos.

### SINAIS PERIÓDICOS

É uma questão fácil a geração de sinais periódicos como, por exemplo, ondas quadradas e ondas triangulares usando o MATLAB. Consideremos primeiro a geração de uma onda quadrada de amplitude  $A$ , freqüência fundamental  $w_0$  (medida em radianos por segundo), e *ciclo de trabalho*  $\rho$ . Ou seja,  $\rho$  é a fração de cada período para a qual o sinal é positivo. Para gerar esse sinal, usamos o comando básico:

```
A *square(w0*t + rho);
```

A onda quadrada mostrada na Figura 1.13(a) foi assim gerada, usando-se o seguinte conjunto de comandos completo:

```
>> A = 1;
>> w0 = 10*pi;
>> rho = 0.5;
>> t = 0:.001:1;
>> sq = A*square(w0*t + rho);
>> plot(t, sq)
```

No segundo comando,  $\pi$  é uma função do MATLAB interna que retorna o número de ponto flutuante mais próximo de  $\pi$ . O último comando é usado para visualizar a onda quadrada. O comando `plot` desenha linhas que conectam os valores sucessivos do sinal e, dessa forma, dá a aparência de um sinal de tempo contínuo.

Considere, em seguida, a geração de uma onda triangular de amplitude A, freqüência fundamental  $\omega_0$  (medida em radianos por segundo), e largura W. Admitamos que o período da onda triangular seja T, com o primeiro valor máximo ocorrendo em  $t = WT$ . O comando básico para gerar este segundo sinal periódico é

```
A*sawtooth(w0*t + w);
```

Dessa forma, para gerar a onda triangular simétrica mostrada na Figura 1.14, usamos os seguintes comandos:

```
>> A = 1;
>> w0 = 10*pi;
>> W = 0.5;
>> t = 0:0.001:1;
>> tri = A*sawtooth(w0*t + w);
>> plot(t, tri)
```

Conforme mencionamos anteriormente, um sinal gerado no MATLAB tem natureza inherentemente de tempo discreto. Para visualizá-lo, podemos usar o comando `stem`. Especificamente, `stem(n, x)` descreve os dados contidos no vetor `x` como um sinal de tempo discreto nos valores de tempo definidos por `n`. Os vetores `n` e `x` devem ter, é claro, dimensões compatíveis.

Considere por exemplo, a onda quadrada de tempo discreto mostrada na Figura 1.15. Este sinal é gerado usando-se os seguintes comandos:

```
>> A = 1;
>> omega = pi/4;
>> rho = 0.5;
>> n = -10:10;
>> x = A*square(omega*n + rho);
>> stem(n, x)
```

► EXERCÍCIO 1.29 Use o MATLAB para gerar a onda triangular descrita na Figura 1.14. ◀

## ■ SINAIS EXPONENCIAIS

Voltando-nos para os sinais exponenciais, temos os decrescentes e os crescentes. O comando MATLAB para gerar um exponencial decrescente é

```
B*exp(-a*t);
```

Para gerar um exponencial crescente, usamos o comando

```
B*exp(a*t);
```

Em ambos os casos, o parâmetro exponencial a é positivo. Os comandos seguintes foram usados para gerar o sinal exponencial decrescente mostrado na Figura 1.26(a):

```
>> B = 5;
>> a = 6;
>> t = 0:.001:1;
>> x = B*exp(-a*t); % exponencial decrescente
>> plot(t, x)
```

O sinal exponencial crescente da Figura 1.26(b) foi gerado usando-se os comandos

```
>> B = 1;
>> a = 5;
>> t = 0:0.001:1;
>> x = B*exp(a*t); % exponencial crescente
>> plot(t, x)
```

Considere a seguir a seqüência exponencial definida na equação (1.31). A forma crescente deste sinal exponencial é mostrada na Figura 1.28(b). Esta figura foi gerada usando-se os seguintes comandos:

```
>> B = 1;
>> r = 0.85;
>> n = -10:10;
>> x = B*r.^n; % exponencial decrescente
>> stem(n, x)
```

Note que, neste exemplo, a base  $r$  é um escalar, mas o expoente é um vetor; daí, o uso do sinal  $.^$  para denotar *potências elemento por elemento*.

► **EXERCÍCIO 1.30** Usamos o MATLAB para gerar a seqüência exponencial decrescente descrita na Figura 1.28(a).

### ■ SINAIS SENOIDAIS

O MATLAB também contém funções trigonométricas que podem ser usadas para gerar sinais senoidais. Um sinal co-seno de amplitude  $A$ , freqüência  $w_0$  (medida em radianos por segundo) e ângulo de fase  $\phi$  (em radianos) é obtido usando-se o comando

```
A*cos(w0*t + phi);
```

Alternativamente, podemos usar a função seno para gerar um sinal senoidal usando o comando

```
A*sin(w0*t + phi);
```

Estes dois comandos foram usados como a base para gerar os sinais senoidais mostrados na Figura 1.29. Especificamente, para o sinal co-seno mostrado na Figura 1.29(a), usamos os seguintes comandos:

```
>> A = 4;
>> w0 = 20*pi;
>> phi = pi/6;
>> t = 0:.001:1;
>> cosine = A*cos(w0*t + phi);
>> plot(t, cosine)
```

► **EXERCÍCIO 1.31** Use o MATLAB para gerar o sinal seno mostrado na Figura 1.29(b).

Considere em seguida o sinal senoidal de tempo discreto descrito na equação (1.36). Este sinal periódico está traçado na Figura 1.31. A figura foi gerada usando-se os seguintes comandos:

```
>> A = 1;
>> omega = 2*pi/12; % freqüência angular
>> phi = 0;
>> n = -10:10;
>> y = A*cos(omega*n);
>> stem(n, y)
```

### ■ SINAIS SENOIDAIS EXPOENCIALMENTE AMORTECIDOS

Em todos os comandos de geração de sinais descritos anteriormente, geramos a amplitude desejada multiplicando um escalar,  $A$ , por um vetor que representa um sinal de amplitude unitária (por exemplo  $\sin(w_0*t + \phi)$ ). Esta operação é descrita usando-se um asterisco. Em seguida, consideraremos a geração de um sinal que requer *multiplicação elemento a elemento* de dois vetores.

Suponha que multipliquemos um sinal senoidal por um sinal exponencial para produzir um sinal senoidal exponencialmente amortecido. Sendo cada componente de sinal representado por um vetor, a geração desse sinal produto exige a multiplicação de um vetor por outro vetor numa base de elemento a elemento. O MATLAB representa a multiplicação de elemento a elemento usando um ponto seguido de um asterisco. Dessa forma, o comando para gerar o sinal senoidal exponencialmente amortecido

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \exp(-at)$$

é o seguinte

```
A*sin(w0*t + phi).*exp(-a*t);
```

Para um exponencial decrescente,  $a$  é positivo. Este comando foi usado na geração da forma de onda mostrada na Figura 1.33. O conjunto completo de comandos é o seguinte:

```
>> A = 60;
>> w0 = 20*pi;
>> phi = 0;
>> a = 6;
>> t = 0:0.001:1;
>> expsin = A*sin(w0*t + phi).*exp(-a*t);
>> plot(t, expsin)
```

Considere em seguida a seqüência senoidal exponencialmente amortecida descrita na Figura 1.51. Esta seqüência é obtida multiplicando-se a seqüência senoidal  $x[n]$  da Figura 1.31 pela seqüência exponencial decrescente  $y[n]$  da Figura 1.28(a). Ambas as seqüências são definidas para  $n = -10:10$ . Dessa forma, usando  $z[n]$  para denotar esta seqüência produto, podemos usar os seguintes comandos para gerá-la e visualizá-la:

```
>> z = x.*y; % multiplicação elemento a elemento
>> stem(n, z)
```

Note que não há necessidade de incluir a definição de  $n$  na geração de  $z$ , uma vez que ela já foi inclusa nos comandos tanto para  $x$  como para  $y$ .

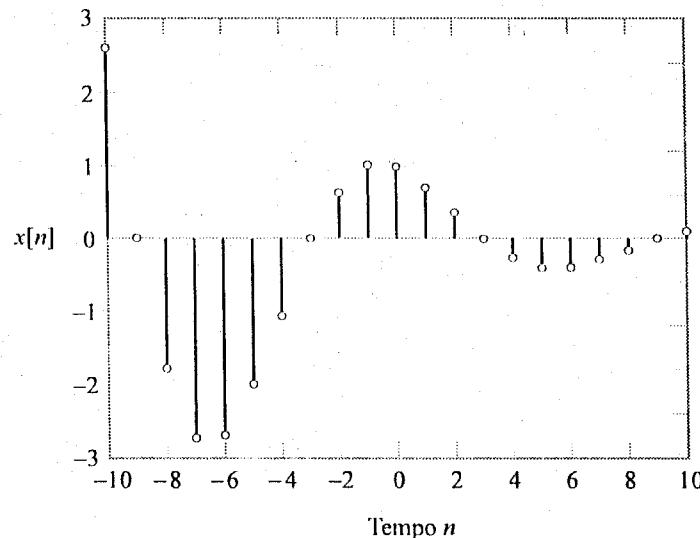


FIGURA 1.51 Seqüência senoidal exponencialmente amortecida.

► **EXERCÍCIO 1.32** Use o MATLAB para gerar um sinal definido como o produto do sinal exponencial crescente da Figura 1.28(b) e do sinal senoidal da Figura 1.31.

### ■ FUNÇÕES DEGRAU, IMPULSO E RAMPA

No MATLAB, `ones (M, N)` é uma matriz  $M$  por  $N$  de uns, e `zeros (M, N)` é uma matriz  $M$  por  $N$  de zeros. Podemos usar estas duas matrizes para gerar dois sinais comumente usados, da seguinte maneira:

- ▶ *Função degrau:* uma função degrau de amplitude unitária é gerada escrevendo-se

```
u = [zeros(1, 50), ones(1, 50)];
```

- ▶ *Impulso de tempo discreto:* um impulso de tempo discreto de amplitude unitária é gerado escrevendo-se

```
delta = [zeros(1, 49), 1, zeros(1, 49)];
```

Para gerar uma seqüência de rampa, simplesmente escrevemos

```
ramp = n;
```

Na Figura 1.37, ilustramos como um par de funções degrau deslocadas no tempo, uma em relação à outra, podem ser usadas para produzir um pulso retangular. Levando em conta o procedimento lá ilustrado, podemos formular o seguinte conjunto de comandos para gerar um pulso retangular centralizado na origem:

```
t = -1:1/500:1;
u1 = [zeros(1, 250), ones(1, 751)];
u2 = [zeros(1, 751), ones(1, 250)];
u = u1 - u2;
```

O primeiro comando define o tempo decorrido de  $-1$  segundo a  $1$  segundo em incrementos de  $2$  milisegundos. O segundo comando gera uma função degrau  $u1$  de amplitude unitária, iniciando no instante  $t = -0,5$  segundo. O terceiro comando gera uma segunda função degrau  $u2$ , iniciando no instante  $t = 0,5$  segundo. O quarto comando subtrai  $u2$  de  $u1$  para produzir um pulso retangular de amplitude unitária e duração unitária centralizada na origem.

### ■ FUNÇÃO DEFINIDA PELO USUÁRIO

Um recurso importante do MATLAB é que ele nos permite criar nossos próprios *arquivos M* ou sub-rotinas. Existem dois tipos de arquivo M, a saber, *scripts* e funções. Os *scripts* ou *arquivos de script*, automatizam seqüências longas de comandos. Por outro lado, as *funções*, ou *arquivos de função*, proporcionam extensibilidade ao MATLAB ao permitirem que adicionemos novas funções. Quaisquer variáveis usadas em arquivos de função não permanecem na memória. Por este motivo, as variáveis de entrada e saída devem ser declaradas explicitamente.

Dessa forma, podemos dizer que um arquivo M de funções é uma entidade separada, caracterizada da seguinte maneira:

1. Ela se inicia com uma declaração que define o nome da função, seus argumentos de entrada e seus argumentos de saída.
2. Ela também inclui instruções adicionais que computam os valores a serem retornados.
3. As entradas podem ser escalares, vetores ou matrizes.

Considere, por exemplo, a geração do pulso retangular descrita na Figura 1.37 usando um arquivo M. Este pulso tem amplitude unitária e duração unitária. Para gerá-lo, criamos um arquivo chamado `rect.m` que contém as seguintes instruções:

```
function g = rect(x)
g = zeros(size(x));
set1 = find(abs(x) <= 0.5);
g(set1) = ones(size(set1));
```

Nas três últimas instruções do arquivo M, incluímos duas funções úteis:

- ▶ A função `size` retorna um vetor de dois elementos que contém as dimensões das linhas e colunas de uma matriz.
- ▶ A função `find` retorna os índices de um vetor ou matriz que satisfazem uma condição de relação prescrita. Para o exemplo apresentado, `find(abs(x) <= T)` retorna os índices do vetor `x` onde o valor absoluto de `x` é menor ou igual a `T`.

A nova função `rect.m` pode ser usada como uma outra função MATLAB. Em especial, podemos usá-la para gerar um pulso retangular, da seguinte maneira:

```
t = -1:1/500:1;
plot(t, rect(0.5))
```

## 1.10 Resumo

Neste capítulo, apresentamos uma visão geral dos sinais e sistemas, definindo qual será o panorama para o restante do livro. Um tema particular que se destaca na discussão aqui apresentada é que os sinais podem ser da variedade tempo contínuo ou tempo discreto, o mesmo acontecendo com os sistemas, conforme resumimos aqui:

- ▶ Um sinal de tempo contínuo é definido para todos os valores de tempo. Em comparação, um sinal de tempo discreto é definido somente em instantes de tempo discretos.
- ▶ Um sistema de tempo contínuo é descrito por um operador que modifica um sinal de entrada de tempo contínuo num sinal de saída de tempo contínuo. Em comparação, um sistema de tempo discreto é descrito por um operador que modifica um sinal de entrada de tempo discreto num sinal de saída de tempo discreto.

Na prática, muitos sistemas combinam componentes de tempo contínuo e tempo discreto. A análise dos sistemas *mistas* é uma parte importante do material apresentado nos capítulos 4, 5, 8 e 9.

Ao discutirmos as várias propriedades dos sinais e sistemas, tomamos o especial cuidado de tratar estas duas classes de sinais e sistemas lado a lado. Ao fazer isto, ganha-se muito ao enfatizar as similaridades e diferenças entre os sinais/sistemas de tempo contínuo e suas contrapartes de tempo discreto. Os últimos capítulos também seguem esta prática, quando apropriada.

Outro ponto digno de nota é que, no estudo dos sistemas, especial atenção é dada à análise dos sistemas *lineares invariantes no tempo*. Linearidade significa que o sistema obedece ao princípio da superposição. Invariância no tempo significa que as características do sistema não se modificam com o tempo. Ao invocar estas duas propriedades, a análise de sistemas torna-se matematicamente tratável. De fato, um rico conjunto de ferramentas foi desenvolvido para a análise de sistemas lineares invariantes no tempo, a qual fornece motivação direta para grande parte do material sobre análise de sistemas apresentado aqui.

Neste capítulo, exploramos também o uso do MATLAB para a geração de formas de onda elementares, representando as variedades de tempo contínuo e de tempo discreto. O MATLAB constitui um poderoso ambiente para explorar conceitos e testar projetos de sistemas, conforme será ilustrado nos capítulos subsequentes.

**LEITURA ADICIONAL**

1. Para uma leitura interessante sobre sinais, sua representação e uso em sistemas de comunicação, leia o livro:
  - » Pierce, J. R. e A. M. Noll, *Signals: The Science of Telecommunications* (Scientific American Library, 1990)
2. Para obter exemplos de sistemas de controle, veja o capítulo 1 do livro:
  - » Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, sétima edição (Prentice-Hall, 1955)
  - e os capítulos 1 e 2 do livro
  - » Phillips, C. I. e R. D. Harbor, *Realimentação Control Systems*, terceira edição (Prentice-Hall, 1996)
3. Para obter uma discussão geral sobre sensoreamento remoto, leia o livro:
  - » Hord, R. M., *Remote Sensing: Methods and Applications* (Wiley, 1996)Para obter material sobre o uso de radar aerotransportado para sensoreamento remoto, leia o livro:
  - » Elachi, C., *Introduction to the Physics and Techniques of Remote Sensing* (Wiley, 1987)Para obter uma descrição detalhada do radar de abertura sintética e do papel do processamento de sinais em sua implementação, leia o livro:
  - » Curlander, J.C. e R. N. McDonough, *Synthetic Aperture Radar: Systems and Signal Processing* (Wiley, 1991)
4. Para ver uma coleção de ensaios sobre processamento de sinais biológicos, leia o livro:
  - » Weitkunat, R., editor, *Digital Biosignal Processing* (Elsevier, 1991)
5. Para obter uma discussão detalhada do sistema auditivo, leia os seguintes:
  - » Dallos, P., A. N. Popper e R. R. Fay, editores, *The Cochlea* (Springer-Verlag, 1996)
  - » Hawkins, H. L. e T. McMullen, editores, *Auditory Computation* (Springer-Verlag, 1996)
  - » Kelly, J. P. "Hearing." Em E. R. Kandel, J. H. Schwartz e T. M. Jessell, *Principles of Neural Science*, terceira edição (Elsevier, 1991)A cóclea proporcionou uma fonte de motivação para a construção de uma versão eletrônica dela, usando circuitos integrados de silício. Essa implementação artificial às vezes é chamada "cóclea de silício." Para obter uma discussão a respeito da cóclea de silício, veja
  - » Lyon, R. F. e C. Mead, "Electronic Cochlea." Em C. Mead, *Analog VLSI and Neural Systems* (Addison-Wesley, 1989)
6. Para obter um relato sobre a história lendária da primeira ponte suspensa de Tacoma Narrows, veja o relatório:
  - » Smith, D., "A Case Study and Analysis of the Tacoma Narrows Bridge Failure," 99.497 Engineering Project, Department of Mechanical Engineering, Carleton University, 29 de março de 1974 (supervisionado pelo Professor G. Kardos)
7. Para obter um tratamento em livro-texto do MATLAB, veja
  - » Etter, D.M., *Engineering Problem Solving with MATLAB* (Prentice-Hall, 1993)

## PROBLEMAS

- 1.1** Encontre os componentes par e ímpar de cada um dos seguintes sinais:

- $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t)$
- $x(t) = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 9t^4$
- $x(t) = 1 + t\cos(t) + t^2\sin(t) + t^3\sin(t)\cos(t)$
- $x(t) = (1+t^3)\cos^3(10t)$

- 1.2** Determine se os seguintes sinais são periódicos. Se forem periódicos, encontre o período fundamental.

- $x(t) = (\cos(2\pi t))^2$
- $x(t) = \sum_{k=-5}^5 w(t-2k)$  para  $w(t)$  descrito na Figura P1.2b.
- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(t-3k)$  para  $w(t)$  descrito na Figura P1.2b.
- $x[n] = (-1)^n$
- $x[n] = (-1)^{n^2}$
- $x[n]$  descrito na Figura P1.2f.
- $x(t)$  descrito na Figura P1.2g.
- $x[n] = \cos(2n)$
- $x[n] = \cos(2\pi n)$

- 1.3** O sinal senoidal

$$x(t) = 3 \cos(200t + \pi/6)$$

é passado através de um dispositivo de lei quadrática definido pela relação de entrada-saída

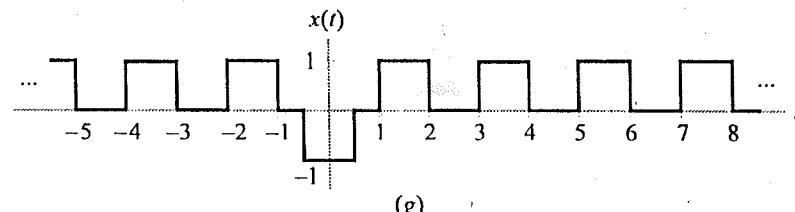
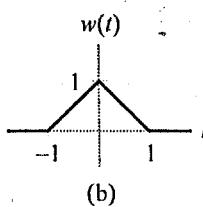
$$y(t) = x^2(t)$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$$

mostre que a saída  $y(t)$  consiste em um componente dc e em um componente senoidal

- Especifique o componente dc.
- Especifique a amplitude e a freqüência do componente senoidal na saída  $y(t)$ .



- 1.4** Categorize cada um dos seguintes sinais como um sinal de energia ou potência e encontre a energia ou potência do sinal.

- $x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 10-n, & 5 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $x(t) = 5 \cos(\pi t) + \sin(5\pi t), -\infty < t < \infty$
- $x(t) = \begin{cases} 5 \cos(\pi t), & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $x(t) = \begin{cases} 5 \cos(\pi t), & -0,5 \leq t \leq 0,5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $x[n] = \begin{cases} \sin(\pi/2n), & -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & n \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- 1.5** Considere o sinal senoidal

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

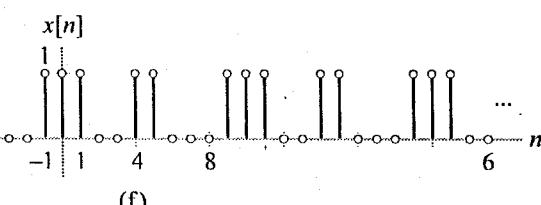
Determine a potência média de  $x(t)$ .

- 1.6** A freqüência angular  $\Omega$  do sinal senoidal

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \phi)$$

satisfaz a condição para que  $x[n]$  seja periódico.

Determine a potência média de  $x[n]$ .



(g)

FIGURA P1.2

- 1.7 O pulso de co-seno elevado  $x(t)$  mostrado na Figura P1.7 é definido como

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\cos(\omega t) + 1], & -\pi/\omega \leq t \leq \pi/\omega \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a energia total de  $x(t)$ .

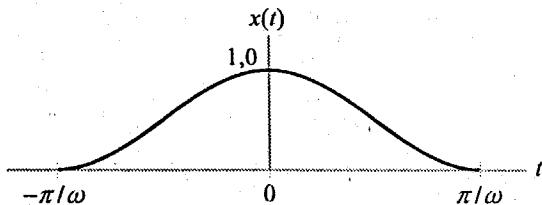


FIGURA P1.7

- 1.8 O pulso trapezoidal  $x(t)$  mostrado na Figura P1.8 é definido por

$$x(t) = \begin{cases} 5-t, & 4 \leq t \leq 5 \\ 1, & -4 \leq t \leq 4 \\ t+5, & -5 \leq t \leq -4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a energia total de  $x(t)$ .

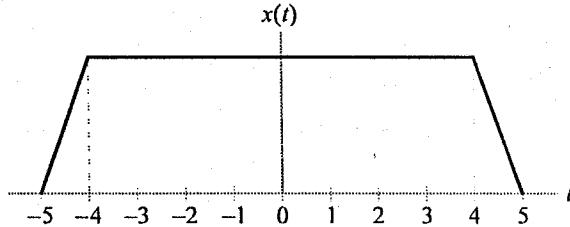


FIGURA P1.8

- 1.9 O pulso trapezoidal  $x(t)$  da Figura P1.8 é aplicado a um diferenciador, definido por

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

- (a) Determine a saída resultante  $y(t)$  do diferenciador.  
 (b) Determine a energia total de  $y(t)$ .

- 1.10 Um pulso retangular  $x(t)$  é definido por

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O pulso  $x(t)$  é aplicado a um integrador definido por

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Encontre a energia total da saída  $y(t)$ .

- 1.11 O pulso trapezoidal  $x(t)$  da Figura P1.8 sofre mudança de escala no tempo, produzindo

$$y(t) = x(at)$$

Esboce  $y(t)$  para (a)  $a = 5$  e (b)  $a = 0,2$ .

- 1.12 Um sinal de pulso triangular  $x(t)$  é descrito na Figura P1.12. Esboce cada um dos sinais derivados de  $x(t)$ :

- (a)  $x(3t)$
- (b)  $x(3t+2)$
- (c)  $x(-2t-1)$
- (d)  $x(2(t+2))$
- (e)  $x(2(t-2))$
- (f)  $x(3t)+x(3t+2)$

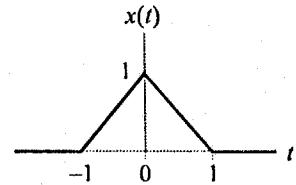


FIGURA P1.12

- 1.13 Esboce o pulso trapezoidal  $y(t)$  que está relacionado ao da Figura P1.8, da seguinte maneira:

$$y(t) = x(10t-5)$$

- 1.14 Digamos que  $x(t)$  e  $y(t)$  sejam dados nas Figuras P1.14(a) e (b), respectivamente. Esboce cuidadosamente os seguintes sinais:

- (a)  $x(t)y(t-1)$
- (b)  $x(t-1)y(-t)$
- (c)  $x(t+1)y(t-2)$
- (d)  $x(t)y(-1-t)$
- (e)  $x(t)y(2-t)$
- (f)  $x(2t)y(\frac{1}{2}t+1)$
- (g)  $x(4-t)y(t)$

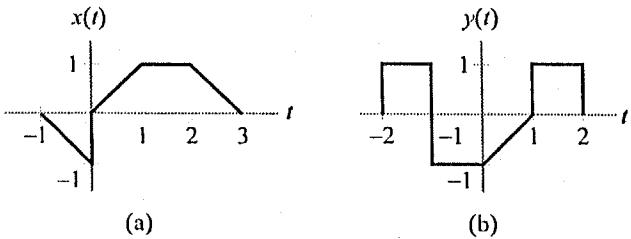


FIGURA P1.14

- 1.15** A Figura P1.15(a) mostra um sinal  $x(t)$  em formato de escada que pode ser visto como a superposição de quatro pulsos retangulares. Iniciando pelo pulso retangular  $g(t)$  mostrado na Figura P1.15(b), construa esta forma de onda e expresse  $x(t)$  em termos de  $g(t)$ .

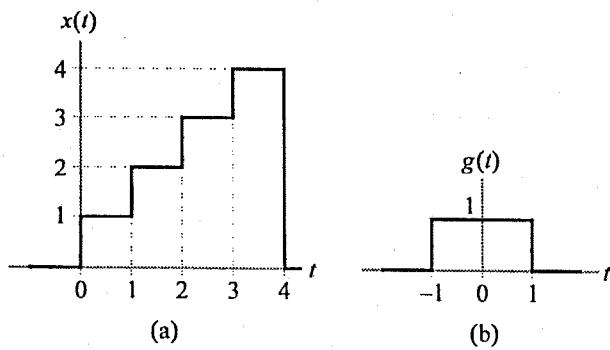


FIGURA P1.15

- 1.16** Esboce a forma de onda dos seguintes sinais:

- $x(t) = u(t) - u(t-2)$
- $x(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)$
- $x(t) = -u(t+3) + 2u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$
- $y(t) = r(t+1) - r(t) + r(t-2)$
- $y(t) = r(t+2) - r(t+1) - r(t-1) + r(t-2)$

- 1.17** A Figura 1.17 mostra um pulso  $x(t)$  que pode ser visto como a superposição de três pulsos retangulares. Iniciando pelo pulso retangular  $g(t)$  da Figura P1.17(b), construa esta forma de onda e expresse  $x(t)$  em termos de  $g(t)$ .

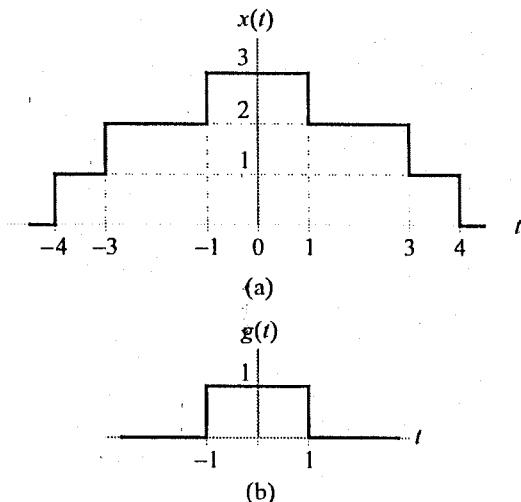


FIGURA P1.17

- 1.18** Digamos que  $x[n]$  e  $y[n]$  sejam dados nas Figuras P1.18(a) e (b), respectivamente. Esboce cuidadosamente os seguintes sinais:

- $x[2n]$
- $x[3n-1]$
- $y[1-n]$
- $y[2-2n]$
- $x[n-2] + y[n+2]$
- $x[2n] + y[n-4]$
- $x[n+2]y[n-2]$
- $x[3-n]y[n]$
- $x[-n]y[-n]$
- $x[n]y[-2-n]$
- $x[n+2]y[6-n]$

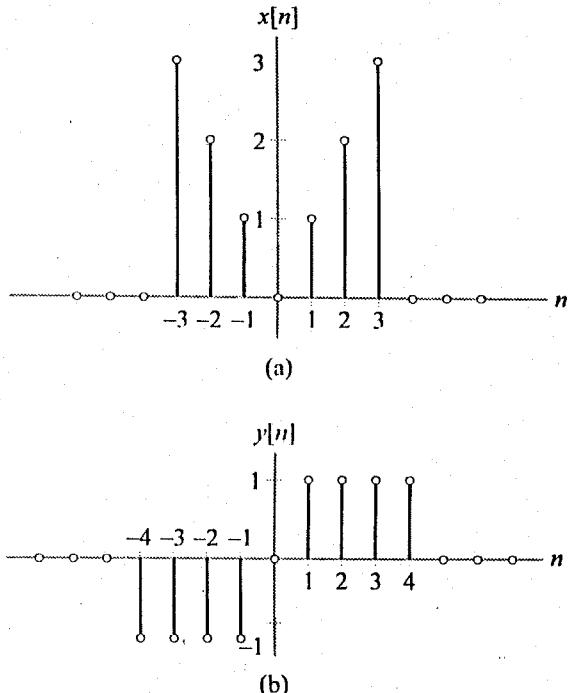


FIGURA P1.18

- 1.19** Considere o sinal senoidal

$$x[n] = 10 \cos\left(\frac{4\pi}{31}n + \frac{\pi}{5}\right)$$

Determine o período fundamental de  $x(n)$ .

- 1.20** O sinal senoidal  $x[n]$  tem o período fundamental  $N = 10$  amostras. Determine a menor freqüência angular  $\Omega$  para a qual  $x[n]$  é periódico.

- 1.21** Determine se os seguintes sinais são periódicos. Se o forem, encontre o período fundamental.

- $x[n] = \cos(\frac{8}{15}\pi n)$
- $x[n] = \cos(\frac{7}{15}\pi n)$
- $x(t) = \cos(2t) + \sin(3t)$
- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - 2k)$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n - 3k] + \delta[n - k^2]\}$
- $x(t) = \cos(t)u(t)$
- $x(t) = v(t) + v(-t)$ , em que  $v(t) = \cos(t)u(t)$
- $x(t) = v(t) + v(-t)$ , em que  $v(t) = \sin(t)u(t)$
- $x[n] = \cos(\frac{1}{5}\pi n)\sin(\frac{1}{3}\pi n)$

- 1.22** Um sinal senoidal complexo  $x(t)$  tem os seguintes componentes:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{x(t)\} &= x_R(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ \operatorname{Im}\{x(t)\} &= x_I(t) = A \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

A amplitude de  $x(t)$  é definida pela raiz quadrada de  $x_R^2(t) + x_I^2(t)$ . Mostre que esta amplitude se iguala a  $A$ , independentemente do ângulo de fase  $\phi$ .

- 1.23** Considere o sinal exponencial de valor complexo

$$x(t) = Ae^{\alpha t + j\omega t}, \quad \alpha > 0$$

Avalie os componentes real e imaginário de  $x(t)$ .

- 1.24** Considere o sinal de tempo contínuo

$$x(t) = \begin{cases} t/T + 0,5, & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 1, & t \geq T/2 \\ 0, & t < -T/2 \end{cases}$$

que é aplicado a um diferenciador. Mostre que a saída do diferenciador aproxima o impulso unitário  $\delta(t)$  quando  $T$  se aproxima de zero.

- 1.25** Neste problema, exploramos o que acontece quando um impulso unitário é aplicado a um diferenciador. Considere um pulso triangular  $x(t)$  de duração  $T$  e amplitude  $1/2T$ , como descreve a Figura P1.25. A área sob o pulso é a unidade. Conseqüentemente, quando a duração  $T$  se aproxima de zero, o pulso triangular se aproxima de um impulso unitário.

- Suponha que o pulso triangular  $x(t)$  seja aplicado a um diferenciador. Determine a saída  $y(t)$  do diferenciador.
- O que acontece à saída de diferenciador  $y(t)$  quando  $T$  se aproxima de zero? Use a definição de um impulso unitário  $\delta(t)$  para expressar sua resposta.

- (c) Qual é a área total sob a saída de diferenciador  $y(t)$  para todo  $T$ ? Justifique sua resposta.

Baseado em seus resultados nas partes de (a) a (c), descreva, em termos sucintos, o resultado de diferenciar um impulso unitário.

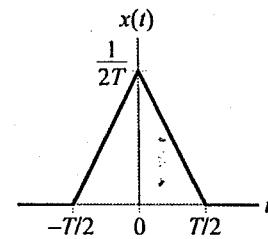


FIGURA P1.25

- 1.26** A derivada da função impulso  $\delta(t)$  é chamada duplo (doublet). Ela é denotada por  $\delta'(t)$ . Mostre que  $\delta'(t)$  satisfaz a propriedade de peneiramento

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = f'(t_0)$$

em que

$$f'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=t_0}$$

Suponha que a função  $f(t)$  tenha uma derivada contínua no instante  $t = t_0$ .

- 1.27** Um sistema consiste em diversos subsistemas conectados, como mostra a Figura P1.27. Encontre o operador  $H$  que relaciona  $x(t)$  a  $y(t)$  para os operadores de subsistema dados por:

$$\begin{aligned}H_1: y_1(t) &= x_1(t)x_1(t-1) \\ H_2: y_2(t) &= |x_2(t)| \\ H_3: y_3(t) &= 1 + 2x_3(t) \\ H_4: y_4(t) &= \cos(x_4(t))\end{aligned}$$

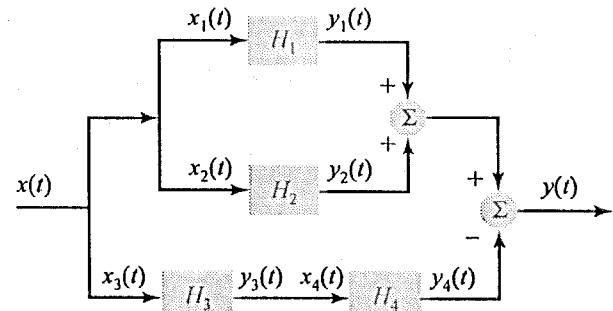
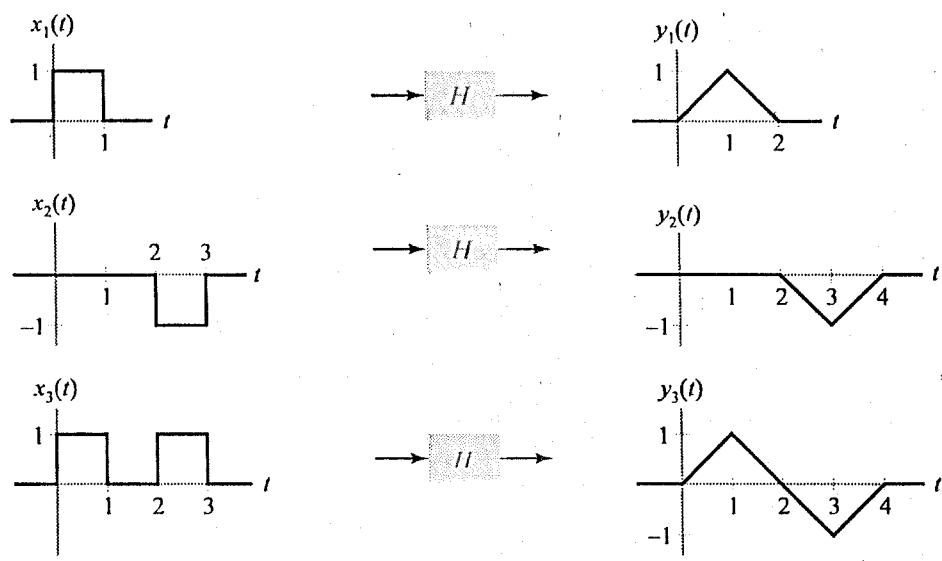
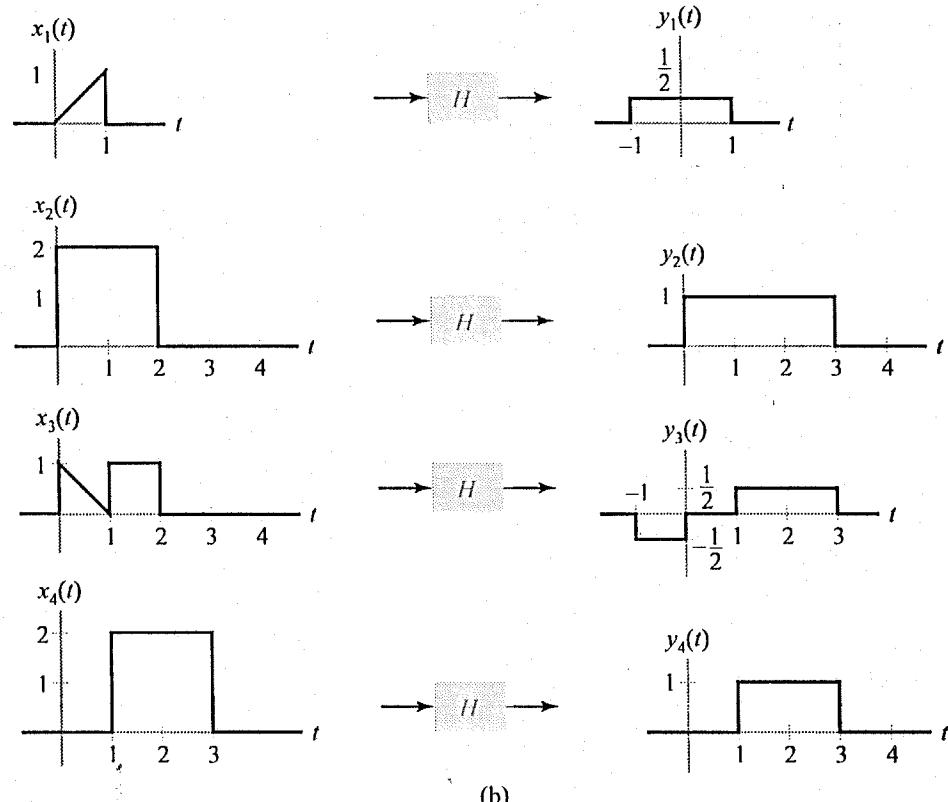


FIGURA P1.27



(a)



(b)

FIGURA P1.39

- 1.28** Os sistemas dados a seguir têm a entrada  $x(t)$  ou  $x[n]$  e saída  $y(t)$  ou  $y[n]$ , respectivamente. Determine se cada um deles é (i) sem memória, (ii) estável, (iii) causal, (iv) linear e (v) invariante no tempo.

- $y(t) = \cos(x(t))$
- $y[n] = 2x[n]u[n]$
- $y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t/2} x(\tau) d\tau$
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k+2]$
- $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$
- $y[n] = \cos(2\pi x[n+1]) + x[n]$
- $y(t) = \frac{d}{dt} \{e^{-t} x(t)\}$
- $y(t) = x(2-t)$
- $y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$
- $y(t) = x(t/2)$
- $y[n] = 2x[2^n]$

- 1.29** A saída de um sistema de tempo discreto está relacionada à sua entrada  $x[n]$  da seguinte maneira:

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + a_3 x[n-3]$$

Digamos que o operador  $S^k$  denota um sistema que desloca a entrada  $x[n]$  de  $k$  unidades de tempo para produzir  $x[n-k]$ . Formule o operador  $H$  para o sistema que relaciona  $y[n]$  a  $x[n]$ . Então, desenvolva uma representação em diagrama de blocos para  $H$ , usando (a) implementação em cascata e (b) implementação paralela.

- 1.30** Mostre que o sistema descrito no Problema 1.29 é BIBO estável para todo  $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$ .

- 1.31** Quão longe a memória do sistema de tempo discreto descrito no Problema 1.29 se estende no passado?

- 1.32** É possível que um sistema não-causal possua memória? Justifique sua resposta.

- 1.33** O sinal de saída  $y[n]$  de um sistema de tempo discreto está relacionado ao seu sinal de entrada  $x[n]$  da seguinte maneira:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

Admitamos que o operador  $S$  denote um sistema que desloca sua entrada de uma unidade de tempo.

- Formule o operador  $H$  para o sistema que relaciona  $y[n]$  a  $x[n]$ .
- O operador  $H^{-1}$  denota um sistema de tempo discreto que é o inverso deste sistema. Como  $H^{-1}$  é definido?

- 1.34** Mostre que o sistema de tempo discreto descrito no Problema 1.29 é invariante no tempo, independentemente dos coeficientes  $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$ .

- 1.35** É possível que um sistema variante no tempo seja linear? Justifique sua resposta.

- 1.36** Mostre que um dispositivo de elevação à potência  $N$  definido pela relação de entrada-saída

$$y(t) = x^N(t), N \text{ é um número inteiro e } N \neq 0, 1$$

não-linear.

- 1.37** Um sistema linear invariante no tempo pode ser causal ou não-causal. Dê um exemplo correspondente a cada uma destas duas possibilidades.

- 1.38** A Figura 1.50 mostra duas configurações de sistemas equivalentes sob a condição de que o operador de sistema  $H$  é linear. Qual destas duas configurações é mais simples de implementar? Justifique sua resposta.

- 1.39** Um sistema  $H$  tem seus pares de entrada-saída fornecidos. Determine se o sistema pode ser sem memória, causal, linear e invariante no tempo para (a) os sinais descritos na Figura P1.39(a) e (b) para os sinais descritos na Figura P1.39(b). Para todos os casos, justifique suas respostas.

- 1.40** Um sistema linear  $H$  tem os pares de entrada-saída descritos na Figura P1.40(a). Determine o seguinte, explicando suas respostas:

- O sistema é causal?
- Este sistema é invariante no tempo?
- Este sistema é sem memória?
- Encontre a saída para a entrada descrita na Figura P1.40(b).

- 1.41** Um sistema de tempo discreto é tanto linear como invariante no tempo. Suponha que a saída devido a uma entrada  $x[n] = \delta[n]$  seja dada na Figura P1.41(a).

- Encontre a saída devido a uma entrada  $x[n] = \delta[n-1]$ .
- Encontre a saída devido a uma entrada  $x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-2]$ .
- Encontre a saída devido à entrada descrita na Figura P1.41(b).

### ► Experiências com Computador

- 1.42** Escreva um conjunto de comandos do MATLAB para aproximar as seguintes formas de onda periódicas de tempo contínuo.

- Onda quadrada de amplitude igual a 5 volts, freqüência fundamental 20 Hz e ciclo de trabalho 0,6.
- Onda dente de serra de amplitude igual a 5 volts e freqüência fundamental 20 Hz.

Então, plote cinco ciclos de cada uma destas duas formas de onda.

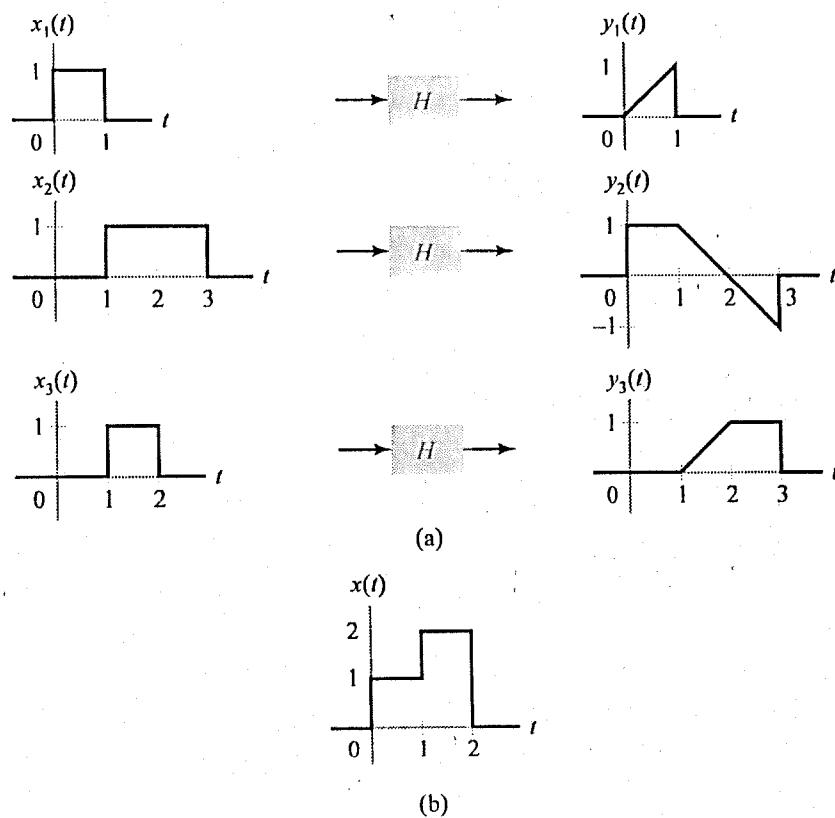


FIGURA P1.40

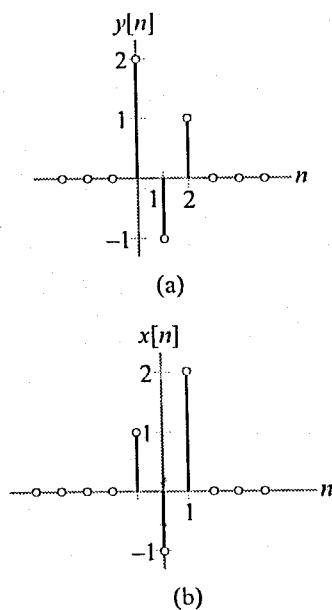


FIGURA P1.41

- 1.43 (a) A solução para uma equação diferencial linear é dada por

$$x(t) = 10e^{-t} - 5e^{-0.5t}$$

Usando o MATLAB, plote  $x(t)$  contra  $t$  para  $t = 0:0.01:5$ .

- (b) Repita o problema para

$$x(t) = 10e^{-t} + 5e^{-0.5t}$$

- 1.44 Um sinal senoidal exponencialmente amortecido é definido por

$$x(t) = 20 \sin(2\pi \times 1000t - \pi/3) \exp(-at)$$

em que o parâmetro exponencial  $a$  é variável; ele assume o seguinte conjunto de valores:  $a = 500, 750, 1000$ . Usando o MATLAB, investigue o efeito de se variar  $a$  no sinal  $x(t)$  para  $-2 \leq t \leq 2$  milisegundos.

- 1.45 Uma seqüência de co-seno elevado é definida por

$$w[n] = \begin{cases} \cos(2\pi Fn), & -1/2F \leq n \leq 1/2F \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Use o MATLAB para plotar  $w[n]$  contra  $n$  para  $F = 0,1$ .

- 1.46 Um pulso retangular  $x(t)$  é definido por

$$x(t) = \begin{cases} 10, & 0 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Gere  $x(t)$  usando:

- (a) Um par de funções degrau deslocadas no tempo.  
(b) Um arquivo M.

# 2

## REPRESENTAÇÕES EM DOMÍNIO DE TEMPO PARA SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO



### 2.1 *Introdução*

Neste capítulo, consideraremos diversos métodos para descrever a relação entre a entrada e saída de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI – *Linear Time Invariant*). Aqui, o foco está nas descrições de sistemas que relacionam o sinal de saída ao de entrada, quando ambos os sinais são representados como funções de tempo; por isso, a terminologia “domínio de tempo” no título do capítulo. Métodos para relacionar saída e entrada de sistemas para domínios que não são de tempo serão apresentados nos capítulos posteriores. As descrições desenvolvidas neste capítulo são úteis para analisar e prever o comportamento de sistemas LTI e para implementar sistemas de tempo discreto em um computador.

Iniciamos caracterizando um sistema LTI em termos de sua resposta ao impulso. A resposta ao impulso é a saída de sistema associada com uma entrada ao impulso. Dada esta resposta, determinamos a saída devido a uma entrada arbitrária, expressando esta entrada como uma superposição ponderada de impulsos deslocados no tempo. De acordo com a linearidade e invariância no tempo, a saída deve ser uma superposição ponderada das respostas ao impulso deslocadas no tempo. O termo “convolução” é usado para descrever o procedimento para determinar a saída a partir da entrada e a resposta ao impulso.

O segundo método considerado para caracterizar o comportamento da entrada-saída de sistemas LTI é a equação diferencial linear ou de diferenças de coeficientes constantes. Equações diferenciais são usadas para representar sistemas de tempo contínuo, enquanto que as equações de diferenças representam sistemas de tempo discreto. Concentraremos-nos em caracterizar soluções de equações diferenciais e de diferenças com o objetivo de desenvolvermos *insight* no comportamento de sistemas.

A terceira representação de sistemas que discutiremos é o diagrama de blocos que representa o sistema como uma interconexão de três operações elementares: multiplicação por escalar, adição e, ou um deslocamento no tempo para sistemas de tempo discreto, ou integração para sistemas de tempo contínuo.

A representação de domínio de tempo finita discutida neste capítulo é a descrição por variáveis de estado. A descrição por variáveis de estado é uma série de equações diferenciais ou de diferenças de primeira ordem adequadas às quais representam o comportamento do “estado” do sistema e uma equação que relaciona o estado com a saída. O estado é um conjunto de variáveis associadas com armazenamento de energia ou dispositivos de memória do sistema.

Todas estas quatro representações de sistemas em domínio de tempo são equivalentes em termos de que saídas idênticas resultam de uma entrada dada. Porém, cada uma relaciona a entrada e a saída de uma maneira diferente. Diferentes representações oferecem diferentes visualizações do sistema, sendo que cada uma oferece diferentes percepções sobre o comportamento do sistema. Cada representação tem vantagens e desvantagens para analisar e implementar sistemas.

Entender como as diferentes representações se relacionam e determinar qual delas oferece a solução mais profunda e direta para um problema particular são habilidades importantes a serem desenvolvidas.

## 2.2 Convolução: Representação de Resposta ao Impulso para Sistemas LTI

A *resposta ao impulso* é a saída de um sistema LTI devido a uma entrada de impulso aplicada no instante  $t = 0$  ou  $n = 0$ . A resposta ao impulso caracteriza de maneira completa o comportamento de qualquer sistema LTI. Isto pode parecer surpreendente, mas é uma propriedade básica de todos os sistemas LTI. A resposta ao impulso freqüentemente é determinada pelo conhecimento da configuração e dinâmica do sistema ou, no caso de um sistema desconhecido, pode ser medida aplicando-se um impulso aproximado à entrada do sistema. A geração de uma seqüência de impulsos de tempo discreto para testar um sistema desconhecido é fácil de ser feita. No caso de tempo contínuo, um impulso real de largura zero e amplitude infinita não pode ser gerado de fato e, normalmente, é fisicamente aproximado como um pulso de grande amplitude e largura estreita. Dessa forma, a resposta ao impulso pode ser interpretada como o comportamento do sistema em resposta a uma entrada de amplitude elevada e duração extremamente breve.

Se a entrada em um sistema linear for expressa como uma superposição ponderada de impulsos deslocados no tempo, a saída será uma superposição ponderada da resposta do sistema a cada impulso deslocado no tempo. Se o sistema também for invariante no tempo, a resposta do sistema a um impulso deslocado no tempo será uma versão deslocada no tempo da resposta do sistema a um impulso. Por isso, a saída de um sistema LTI é dada por uma superposição ponderada de respostas ao impulso deslocadas no tempo. Esta superposição ponderada é chamada *soma de convolução*, para os sistemas de tempo discreto, e *integral de convolução*, para sistemas de tempo contínuo.

Iniciamos considerando o caso de tempo discreto. Primeiro, um sinal arbitrário é expresso como uma superposição ponderada de impulsos de tempo ponderado. A soma de convolução é, então, obtida aplicando-se um sinal representado desta maneira em um sistema LTI. Um procedimento similar é usado para obter a integral de convolução para sistemas de tempo contínuo no final desta seção.

### A SOMA DE CONVOLUÇÃO

Considere o produto de um sinal  $x[n]$  e a seqüência de impulsos  $\delta[n]$ , escrita como

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

Generalize esta relação para o produto de  $x[n]$  e uma seqüência de impulsos deslocados no tempo para obter

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$

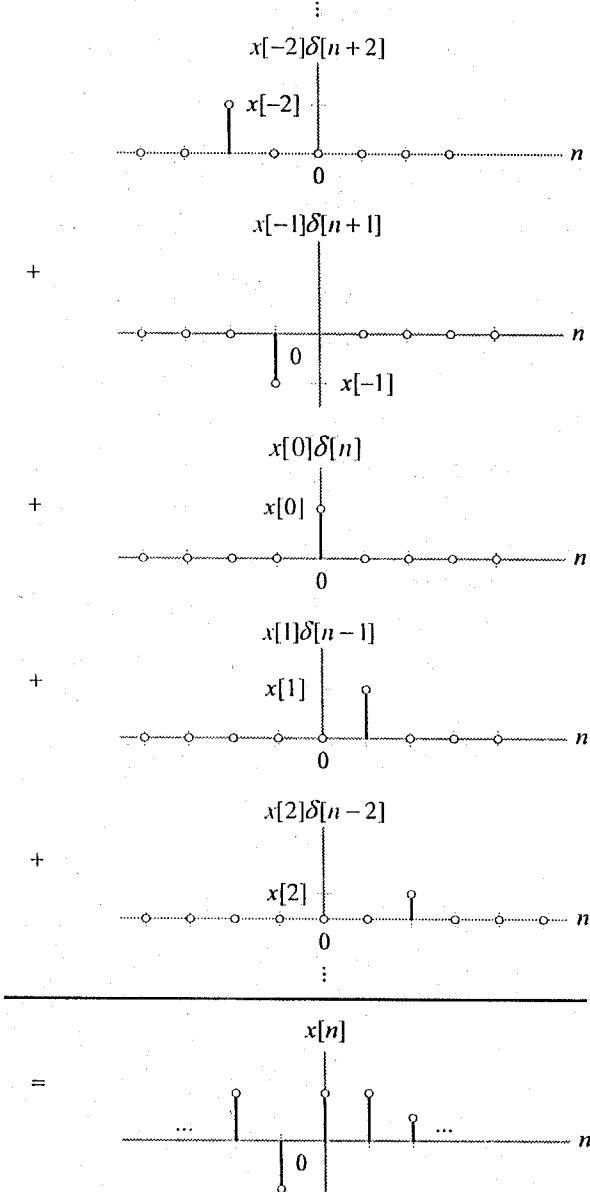
Nesta expressão,  $n$  representa o índice de tempo; consequentemente,  $x[n]$  denota um sinal, enquanto que  $x[k]$  representa o valor do sinal  $x[n]$  no instante  $k$ . Vemos que a multiplicação de um sinal por um impulso deslocado no tempo resulta em um impulso deslocado no tempo com amplitude dada pelo valor do sinal no instante em que o impulso ocorre. Esta propriedade nos permite expressar  $x[n]$  como a seguinte soma ponderada de impulsos deslocados no tempo:

$$\begin{aligned} x[n] &= \dots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ &\quad + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots \end{aligned}$$

Podemos reescrever esta representação para  $x[n]$  de forma concisa como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{2.1}$$

Uma ilustração gráfica da equação (2.1) é dada na Figura 2.1.



**FIGURA 2.1** Exemplo gráfico ilustrando a representação de um sinal  $x[n]$  como uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo.

Digamos que o operador  $H$  denote o sistema ao qual a entrada  $x[n]$  é aplicada. Então, usar a equação (2.1) para representar a entrada  $x[n]$  para o sistema resultará na saída

$$y[n] = H \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\}$$

Usamos agora a propriedade de linearidade para intercambiar o operador de sistema  $H$  com o somatório e os valores de sinal  $x[k]$  para obtermos

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] H\{\delta[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que  $h_k[n] = H\{\delta[n-k]\}$  é a resposta do sistema a um impulso deslocado no tempo. Se pressupormos ainda que o sistema é invariante no tempo, um deslocamento no tempo na entrada resultará em um deslocamento no tempo da saída. Isto implica que a saída devido a um impulso deslocado no tempo é uma versão deslocada no tempo da entrada devida ao impulso; ou seja,  $h_k[n] = h_0[n-k]$ . Admitindo

que  $h[n] = h_0[n]$  seja a resposta ao impulso do sistema  $H$  do tipo LTI, a equação (2.2) é reescrita como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.3)$$

Dessa forma, a saída de um sistema LTI é dada pela soma ponderada de respostas ao impulso deslocadas no tempo. Esta é uma consequência direta de expressarmos a entrada como uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo. A soma na equação (2.3) é chamada *soma de convolução* e é denotada pelo símbolo  $*$ ; ou seja,

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

O processo de convolução é ilustrado na Figura 2.2. A Figura 2.2(a) descreve a resposta ao impulso de um sistema LTI arbitrário. Na Figura 2.2(b), a entrada é representada como uma soma de impulsos ponderados e deslocados no tempo,  $p_k[n] = x[k]\delta[n-k]$ . A saída do sistema associada com cada entrada  $p_k[n]$  é

$$v_k[n] = x[k]h[n-k]$$

Aqui,  $v_k[n]$  é obtido deslocando-se, no tempo, a resposta ao impulso de  $k$  unidades e multiplicando-se por  $x[k]$ . A saída  $y[n]$  em resposta à entrada  $x[n]$  é obtida somando-se todas as seqüências  $v_k[n]$ :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[n]$$

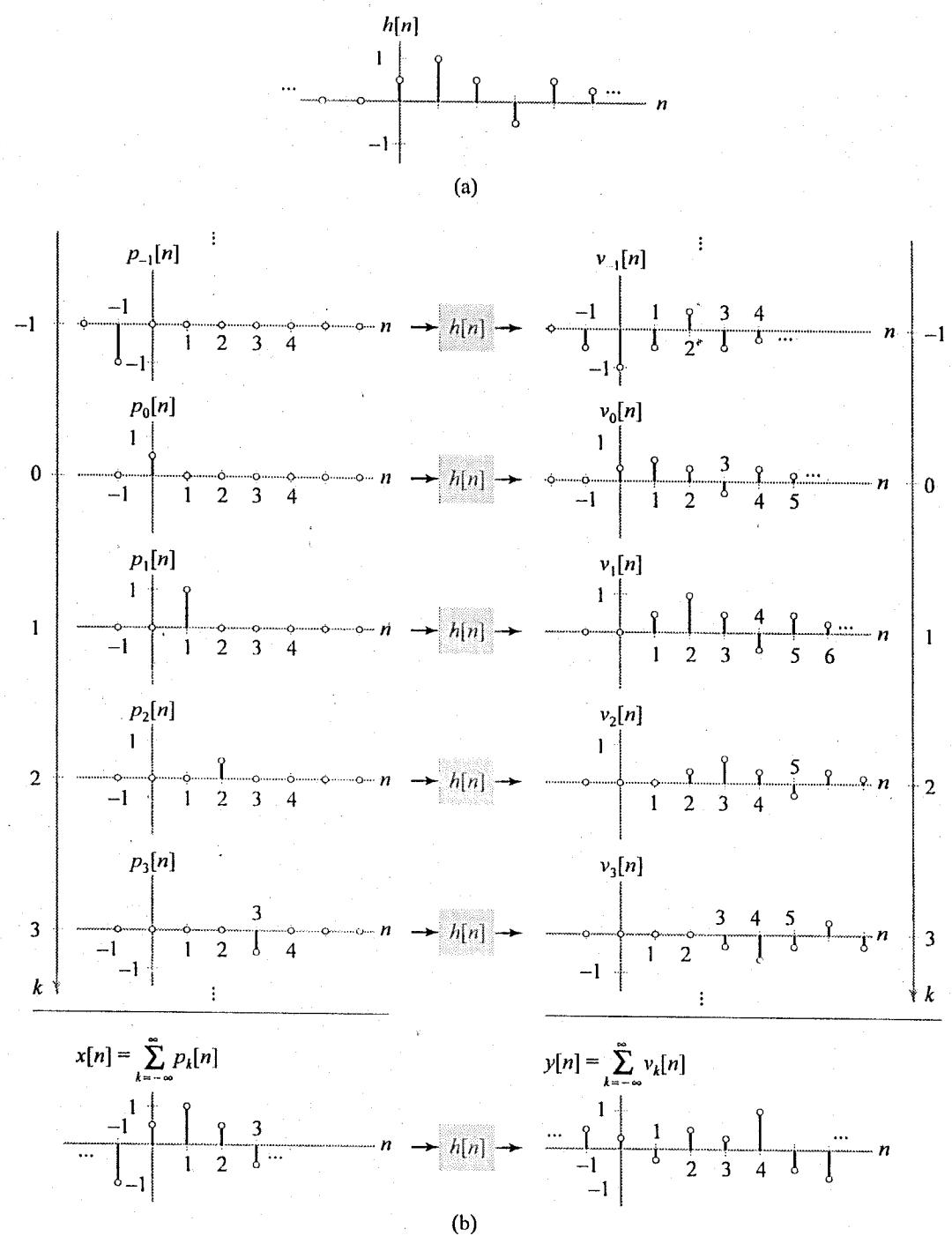
Ou seja, para cada valor de  $n$ , somamos os valores ao longo do eixo  $k$  indicados no lado direito da Figura 2.2(b). O exemplo seguinte ilustra este processo.

**EXEMPLO 2.1** Suponha que um sistema  $H$  do tipo LTI tenha a resposta ao impulso

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 1 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a saída deste sistema em resposta à entrada

$$x[n] = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ -2, & n = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



**FIGURA 2.2** Ilustração da soma de convolução. (a) Resposta ao impulso de um sistema. (b) A decomposição da entrada  $x[n]$  em uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo resulta em uma saída  $y[n]$  dada por uma soma ponderada de respostas ao impulso deslocadas no tempo. Aqui,  $p_k[n]$  é a entrada de impulso ponderada (por  $x[k]$ ) e deslocada no tempo (de  $k$ ), e  $v_k[n]$  é a saída da resposta ao impulso ponderada e deslocada no tempo. A dependência que tanto  $p_k[n]$  como  $v_k[n]$  têm de  $k$  é descrita pelo eixo  $k$  mostrado nos lados esquerdo e direito da figura. A saída é obtida somando-se  $v_k[n]$  para todos os valores de  $k$ .

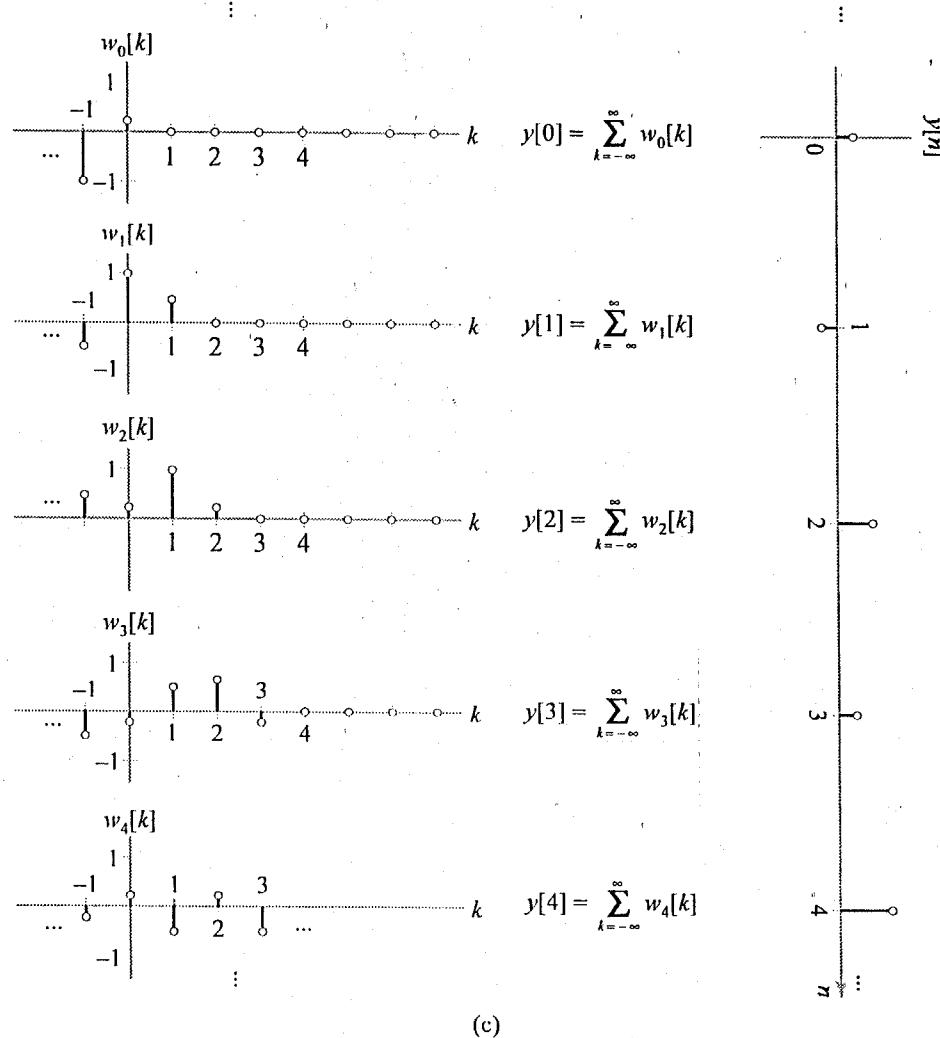


FIGURA 2.2 (c) Os sinais  $w_n[k]$  usados para computar a saída no instante  $n$  para diversos valores de  $n$ . Aqui, redesenharmos o lado direito da Figura 2.2(b) de modo que o eixo  $k$  seja horizontal. A saída é obtida para  $n=n_0$  somando-se  $w_{n_0}[k]$  para todos os valores de  $k$ .

*Solução:* Primeiramente, escreva  $x[n]$  como a soma ponderada de impulsos deslocados no tempo

$$x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

Aqui,  $p_0[n] = 2\delta[n]$ ,  $p_1 = 3\delta[n-1]$  e  $p_2[n] = -2\delta[n-2]$ . Todos os outros  $p_k[n]$  deslocados no tempo são iguais a zero porque a saída é zero para  $n < 0$  e  $n > 2$ . Uma vez que uma entrada de impulso ponderada, deslocada no tempo,  $a\delta[n-k]$ , resulta em uma saída de resposta ao impulso ponderada, deslocada no tempo,  $ah[n-k]$ , a saída do sistema pode ser escrita como

$$y[n] = 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]$$

Aqui,  $v_0[n] = 2h[n]$ ,  $v_1[n] = 3h[n-1]$ ,  $v_2[n] = -2h[n-2]$  e todos os outros  $v_k[n] = 0$ . A soma de todas as respostas ao impulso ponderadas e deslocadas no tempo para  $k$  resulta em

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n \leq -2 \\ 2, & n = -1 \\ 7, & n = 0 \\ 6, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ -2, & n = 3 \\ 0, & n \geq 4 \end{cases}$$

No Exemplo 2.1, encontramos todos os  $v_k[n]$  e depois somamos para todos os valores de  $k$  para determinarmos  $y[n]$ . Esta abordagem ilustra os princípios que fundamentam a convolução, sendo muito eficaz quando a entrada tem curta duração, de forma que somente um pequeno número de sinais  $v_k[n]$  precisa ser determinado. Quando a entrada tem uma duração longa, um número muito grande, possivelmente infinito, de sinais  $v_k[n]$  precisa ser avaliado antes que  $y[n]$  possa ser encontrado, e este procedimento pode ser incômodo.

Uma abordagem alternativa para avaliar a soma de convolução é obtida através de uma leve mudança de perspectiva. Considere avaliar a saída num instante fixo  $n_o$

$$y[n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[n_o]$$

Ou seja, somamos ao longo do eixo  $k$  ou vertical no lado direito da Figura 2.2(b) num instante fixo  $n = n_o$ . Suponha que definimos um sinal que representa os valores em  $n = n_o$  como uma função da variável independente  $k$ ,  $w_{n_o}[k] = v_k[n_o]$ . A saída agora será obtida somando-se à variável independente  $k$ :

$$y[n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{n_o}[k]$$

Observe que, aqui, somente precisamos determinar um sinal,  $w_{n_o}[k]$ , para avaliar a saída em  $n = n_o$ . A Figura 2.2(c) descreve  $w_{n_o}[k]$  para diversos valores diferentes de  $n_o$  e a saídas correspondentes. Aqui, o eixo horizontal corresponde a  $k$ , e o eixo vertical, a  $n$ . Podemos visualizar  $v_k[n]$  como representante da  $k$ -ésima linha no lado direito da Figura 2.2(b), enquanto que  $w_n[k]$  representa a  $n$ -ésima coluna. na Figura 2.2(c),  $w_n[k]$  é a  $n$ -ésima linha, enquanto que  $v_k[n]$  é a  $k$ -ésima coluna.

Definimos a seqüência intermediária  $w_n[k] = x[k]h[n-k]$  como o produto de  $x[k]$  e  $h[n-k]$ . Aqui,  $k$  é a variável independente e  $n$  é tratado como uma constante. Assim,  $h[n-k] = h[-(k-n)]$  é uma versão refletida e deslocada no tempo (de  $-n$ ) de  $h[k]$ . O deslocamento de tempo  $n$  determina o tempo em que avaliamos a saída do sistema, uma vez que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_n[k] \quad (2.4)$$

Observe que somente precisamos determinar um sinal,  $w_n[k]$ , para cada tempo em que desejamos avaliar a saída.

#### EXEMPLO 2.2 Um sistema LTI tem a resposta ao impulso

$$h[n] = (\frac{3}{4})^n u[n]$$

Use a equação (2.4) para determinar a saída do sistema nos tempos  $n = -5$ ,  $n = 5$ , e  $n = 10$  quando a entrada for  $x[n] = u[n]$ .

*Solução:* Aqui, a resposta ao impulso é à entrada têm durações infinitas, de forma que o procedimento seguido no Exemplo 2.1 exigiria determinar um número infinito de sinais  $v_k[n]$ . Usando a equação (2.4), formamos somente um sinal,  $w_n[k]$ , para cada  $n$  de interesse. A Figura 2.3(a) descreve  $x[k]$ , enquanto a Figura 2.3(b) descreve a resposta ao impulso refletida e deslocada no tempo  $h[n-k]$ . Vemos que

$$h[n-k] = \begin{cases} (\frac{3}{4})^{n-k}, & k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As Figuras 2.3(c), (d) e (e) descrevem o produto  $w_n[k]$  para  $n = -5$ ,  $n = 5$  e  $n = 10$ , respectivamente. Temos

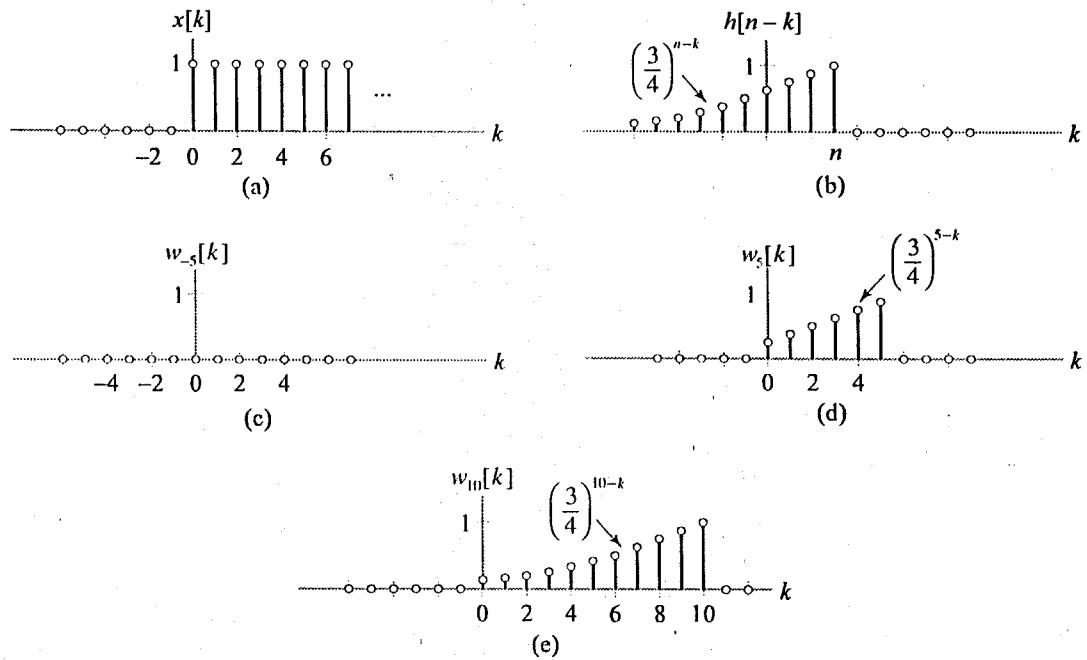
$$w_{-5}[k] = 0$$

e, dessa forma, a equação (2.4) resulta em  $y[-5] = 0$ . Para  $n = 5$ , temos

$$w_5[k] = \begin{cases} (\frac{3}{4})^{5-k}, & 0 \leq k \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, assim, a equação (2.4) resulta em

$$y[5] = \sum_{k=0}^5 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$$



**FIGURA 2.3** Avaliação da equação (2.4) no Exemplo 2.2. (a) O sinal de entrada  $x[k]$  descrito como uma função de  $k$ . (b) A resposta ao impulso refletida e deslocada no tempo,  $h[n - k]$ , como uma função de  $k$ . (c) O sinal produto  $w_{-5}[k]$ , usado para avaliar  $y[-5]$ . (d) O sinal produto  $w_5[k]$ , usado para avaliar  $y[5]$ . (e) O sinal produto  $w_{10}[k]$ , usado para avaliar  $y[10]$ .

Fatore  $(\frac{3}{4})^5$  da soma e aplique a fórmula para a soma de uma série geométrica finita para obter

$$\begin{aligned} y[5] &= \left(\frac{3}{4}\right)^5 \sum_{k=0}^5 \left(\frac{4}{3}\right)^k \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^5 \frac{1 - (\frac{4}{3})^6}{1 - (\frac{4}{3})} \end{aligned}$$

Por fim, para  $n = 10$ , vemos que

$$w_{10}[k] = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}, & 0 \leq k \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a equação (2.4) fornecerá

$$\begin{aligned} y[10] &= \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{4}{3}\right)^k \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \frac{1 - (\frac{4}{3})^{11}}{1 - (\frac{4}{3})} \end{aligned}$$

Observe que neste exemplo,  $w_n[k]$  tem somente duas formas funcionais diferentes. Para  $n < 0$ , temos  $w_n[k] = 0$ , uma vez que não há nenhuma sobreposição entre a parte diferente de zero de  $x[k]$  e  $h[n - k]$ . Quando  $n \geq 0$ , as partes diferentes de zero de  $x[k]$  e  $h[n - k]$  se sobrepõem ao intervalo  $0 \leq k \leq n$ , e podemos escrever

$$w_n[k] = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Conseqüentemente, podemos determinar a saída para um  $n$  arbitrário usando a forma funcional apropriada para  $w_n[k]$  na equação (2.4).

Este exemplo sugere que, em geral, podemos determinar  $y[n]$  para todo  $n$  sem avaliarmos a equação (2.4) para um número infinito de deslocamentos distintos no tempo  $n$ . Isto é realizado identificando-se os intervalos de  $n$  nos quais  $w_n[k]$  tem a mesma forma funcional. Depois, precisamos somente avaliar a equação (2.4) usando o  $w_n[k]$  associado com cada intervalo. Muitas vezes, é muito útil traçarmos graficamente tanto  $x[k]$  como  $h[n - k]$  quando determinamos  $w_n[k]$  e identificamos os intervalos apropriados de deslocamentos no tempo. Este procedimento será, agora, resumido:

1. Trace graficamente  $x[k]$  e  $h[n - k]$  como uma função da variável independente  $k$ . Para determinar  $h[n - k]$ , primeiramente reflita  $h[k]$  em torno de  $k = 0$  para obter  $h[-k]$  e depois desloque  $h[-k]$  de  $-n$  no tempo.
2. Inicie com o deslocamento de tempo  $n$  grande e negativo.
3. Escreva a forma funcional para  $w_n[k]$ .
4. Aumente o deslocamento no tempo  $n$  até que a forma funcional para  $w_n[k]$  se modifique. O valor de  $n$ , no qual ocorre a modificação, define o fim do intervalo corrente e o início de um novo intervalo.
5. Admitamos que  $n$  esteja no novo intervalo. Repita os passos 3 e 4 até que todos os intervalos de deslocamentos no tempo  $n$  e as formas funcionais correspondentes para  $w_n[k]$  sejam identificados. Isto usualmente implica aumentar  $n$  até um número positivo muito grande.
6. Para cada intervalo de deslocamentos no tempo  $n$ , some todos os valores do  $w_n[k]$  correspondente para obter  $y[n]$  nesse intervalo.

O efeito de variar  $n$  de  $-\infty$  a  $\infty$  é deslizar  $h[-k]$  além de  $x[k]$ , da esquerda para a direita. As transições nos intervalos de  $n$ , identificadas no passo 4, geralmente ocorrem quando um ponto de mudança na representação correspondente a  $h[-k]$  passa por um ponto de mudança na representação correspondente a  $x[k]$ . Alternativamente, podemos somar todos os valores em  $w_n[k]$  quando cada intervalo de deslocamentos no tempo é identificado, ou seja, depois do passo 4, ao invés de esperarmos até que todos os intervalos sejam identificados. Os exemplos seguintes ilustram este procedimento para avaliar a soma de convolução.

**EXEMPLO 2.3** Um sistema LTI tem a resposta ao impulso dada por

$$h[n] = u[n] - u[n - 10]$$

e descrita na Figura 2.4(a). Determine a saída deste sistema quando a entrada for o pulso retangular definido como

$$x[n] = u[n - 2] - u[n - 7]$$

e mostrado na Figura 2.4(b).

**Solução:** Primeiramente, traçamos graficamente  $x[k]$  e  $h[n - k]$ , tratando  $n$  como uma constante e  $k$  como a variável independente, como é descrito nas Figuras 2.4(c) e (d). Identificamos agora, os intervalos de deslocamentos no tempo  $n$  nos quais o sinal produto  $w_n[k]$  tem a mesma forma funcional. Iniciamos com o  $n$  grande e negativo, em cujo caso  $w_n[k] = 0$  porque não há nenhuma sobreposição nas partes diferentes de zero de  $x[k]$  e  $h[n - k]$ . Aumentando  $n$ , vemos que  $w_n[k] = 0$  desde que  $n < 2$ . Consequentemente, o primeiro intervalo de deslocamentos no tempo é  $n < 2$ .

Quando  $n = 2$ , a borda direita de  $h[n - k]$  passa pela borda esquerda de  $x[k]$  e ocorre uma transição na forma funcional correspondente a  $w_n[k]$ . Para  $n \geq 2$ ,

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & 2 \leq k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta forma funcional é correta até  $n > 6$  e é descrita na Figura 2.4(e). Quando  $n > 6$ , a borda direita de  $h[n - k]$  passa pela borda direita de  $x[k]$ , de maneira que a forma de  $w_n[k]$  se modifica. Consequentemente, nosso segundo intervalo de deslocamentos no tempo é de  $2 \leq n \leq 6$ .

Para  $n > 6$ , a forma funcional de  $w_n[k]$  é dada por

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & 2 \leq k \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

conforme é descrito na Figura 2.4(f). Esta forma vale até  $n - 9 = 2$ , ou  $n = 11$ , uma vez que, nesse valor de  $n$ , a borda esquerda de  $h[n - k]$  passa pela borda esquerda de  $x[k]$ . Conseqüentemente, nosso terceiro intervalo de deslocamentos no tempo é  $6 < n \leq 11$ .

Em seguida, para  $n > 11$ , a forma funcional correspondente a  $w_n[k]$  é dada por

$$w_n[k] = \begin{cases} 1, & n - 9 \leq k \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

conforme descreve a Figura 2.4(g). Esta forma é válida até  $n - 9 = 6$ , ou  $n = 15$ , uma vez que para  $n > 15$ , a borda esquerda de  $h[n - k]$  se situa à direita de  $x[k]$ , e a forma funcional de  $w_n[k]$  novamente se modifica. Conseqüentemente, nosso quarto intervalo de deslocamentos no tempo é  $11 < n \leq 15$ .

Para todos os valores de  $n > 15$ , vemos que  $w_n[k] = 0$ . Dessa forma, o último intervalo de deslocamentos no tempo neste problema é  $n > 15$ .

A saída do sistema em cada intervalo de  $n$  é obtida somando-se os valores do  $w_n[k]$  correspondente, de acordo com a equação (2.4). Iniciando com  $n < 2$ , obtemos  $y[n] = 0$ . Em seguida, para  $2 \leq n \leq 6$ , obtemos

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=2}^n 1 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

No terceiro intervalo,  $6 < n \leq 11$ , a equação (2.4) fornece

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=n-9}^6 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Para  $11 < n \leq 15$ , a equação (2.4) fornece

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=n-9}^{16-n} 1 \\ &= 16 - n \end{aligned}$$

Por fim, para  $n > 15$ , vemos que  $y[n] = 0$ . A Figura 2.4(h) descreve a saída  $y[n]$  obtida combinando-se os resultados em cada intervalo.

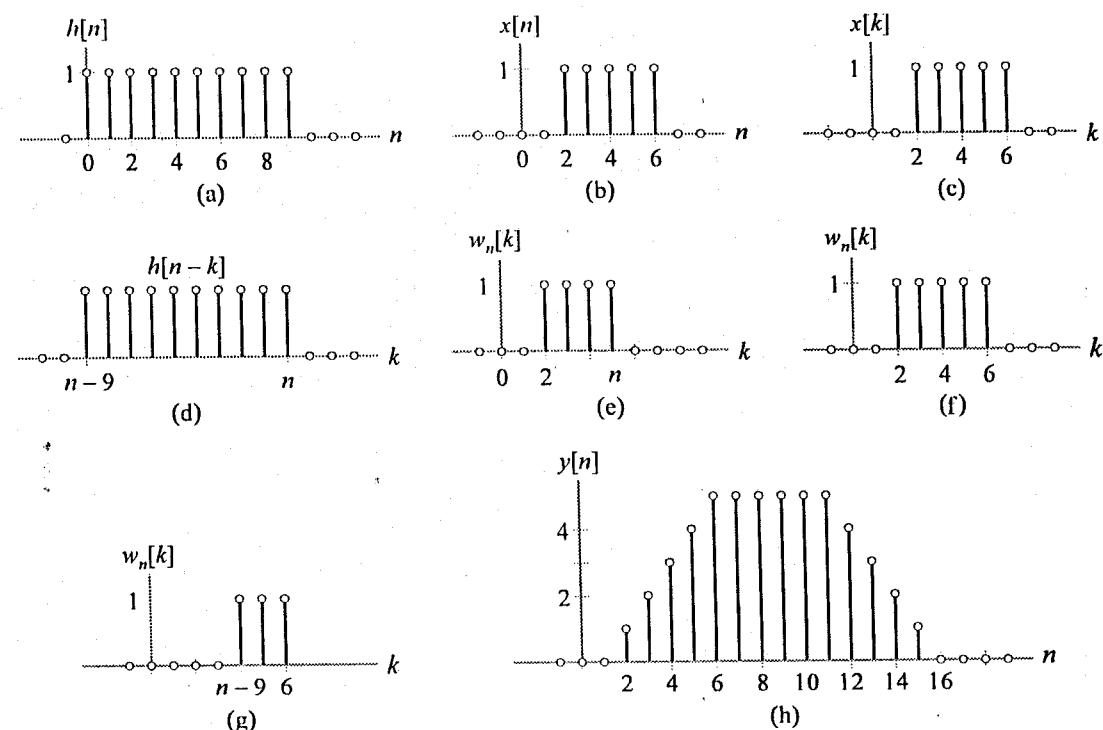


FIGURA 2.4 Avaliação da soma de convolução correspondente ao Exemplo 2.3. (a) A resposta ao impulso do sistema  $h[n]$ . (b) O sinal de entrada  $x[n]$ . (c) A entrada descrita como uma função de  $k$ . (d) A resposta ao impulso  $h[n - k]$  refletida e deslocada no tempo descrita como uma função de  $k$ . (e) O sinal produto  $w_n[k]$  correspondente ao intervalo de deslocamentos no tempo  $2 \leq n \leq 6$ . (f) O sinal produto  $w_n[k]$  correspondente ao intervalo de deslocamentos no tempo  $6 \leq n \leq 11$ . (g) O sinal produto  $w_n[k]$  correspondente ao intervalo de deslocamentos no tempo  $12 < n \leq 15$ . (h) A saída  $y[n]$ .

**EXEMPLO 2.4** Admitamos que a entrada  $x[n]$  para um sistema H do tipo LTI seja dada por

$$x[n] = \alpha^n \{u[n] - u[n-10]\}$$

e que a resposta ao impulso do sistema seja dada por

$$h[n] = \beta^n u[n]$$

em que  $0 < \beta < 1$ . Encontre a saída deste sistema.

**Solução:** Primeiramente, traçamos graficamente  $x[k]$  e  $h[n-k]$ , tratando  $n$  como uma constante e  $k$  como a variável independente, como descrevem as Figuras 2.5(a) e (b). Vemos que

$$x[k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$h[n-k] = \begin{cases} \beta^{n-k}, & k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Identificamos agora, os intervalos de deslocamentos no tempo  $n$ , nos quais a forma funcional de  $w_n[k]$  é a mesma. Iniciamos considerando  $n$  grande e negativo. Vemos que, para  $n < 0$ ,  $w_n[k] = 0$ , uma vez que não há nenhum valor  $k$  tal que  $x[k]$  e  $h[n-k]$  sejam ambos diferentes de zero. Conseqüentemente, o primeiro intervalo é  $n < 0$ .

Quando  $n = 0$ , a borda direita de  $h[n-k]$  passa pela borda esquerda de  $x[k]$ , de maneira que ocorre uma transição na forma de  $w_n[k]$  para  $n \geq 0$ ,

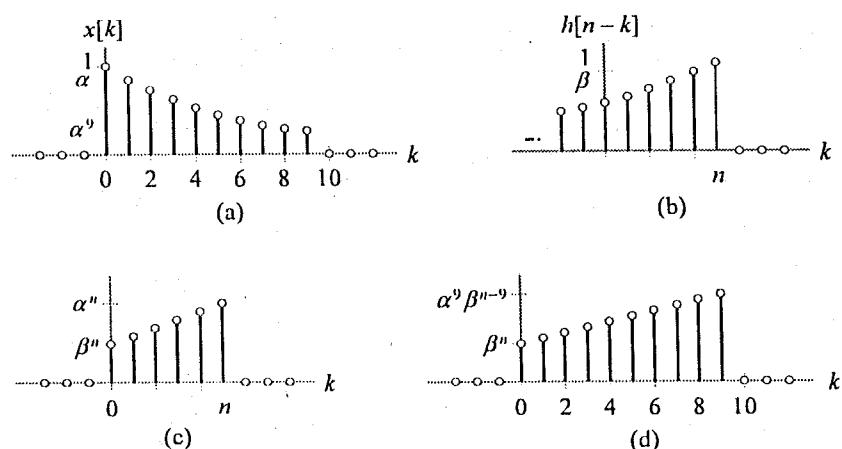
$$w_n[k] = \begin{cases} \alpha^k \beta^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta forma é correta, desde que  $0 \leq n \leq 9$ , e é descrita na Figura 2.5(c). Quando  $n = 9$ , a borda direita de  $h[n-k]$  passa pela borda direita de  $x[k]$ , de maneira que  $w_n[k]$  se modifica novamente.

Agora, para  $n > 9$ , temos uma terceira forma para  $w_n[k]$ ,

$$w_n[k] = \begin{cases} \alpha^k \beta^{n-k}, & 0 \leq k \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 2.5(d) descreve este  $w_n[k]$  para o terceiro e último intervalo neste problema,  $n > 9$ . Determinamos agora a saída  $y[n]$  para cada um destes três conjuntos de deslocamentos no tempo somando  $w_n[k]$  para todo  $k$ .



**FIGURA 2.5** Avaliação da soma de convolução correspondente ao Exemplo 2.4. (a) O sinal de entrada  $x[k]$  descrito como uma função de  $k$ . (b) Resposta ao impulso refletida e deslocada no tempo,  $h[n-k]$ . (c) O sinal produto  $w_n[k]$  para  $0 \leq n \leq 9$ . (d) O sinal produto  $w_n[k]$  para  $n > 9$ .

Iniciando com o primeiro intervalo,  $n < 0$ , temos  $w_n[k] = 0$  e, dessa forma,  $y[n] = 0$ . Para o segundo intervalo,  $0 \leq n \leq 9$ , temos

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k}$$

Aqui, o índice do somatório limita-se de  $k = 0$  a  $n$  porque estes são os únicos tempos  $k$  para os quais  $w_n[k]$  é diferente de zero. Combinando os termos elevados à  $k$ -ésima potência, obtemos

$$y[n] = \beta^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

Em seguida, aplicamos a fórmula para somar uma série geométrica de  $(n+1)$  termos para obter

$$y[n] = \beta^n \frac{1 - (\alpha/\beta)^{n+1}}{1 - \alpha/\beta}$$

Agora, considerando o terceiro intervalo,  $n \geq 10$ , temos

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^9 \alpha^k \beta^{n-k} \\ &= \beta^n \sum_{k=0}^9 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \\ &= \beta^n \frac{1 - (\alpha/\beta)^{10}}{1 - \alpha/\beta} \end{aligned}$$

em que, novamente, o índice do somatório limita-se de  $k = 0$  a 9 porque estes são os únicos tempos para os quais  $w_n[k]$  é diferente de zero. A última igualdade também vem da fórmula para uma série geométrica finita. Combinando as soluções correspondentes a cada intervalo de deslocamentos, obtemos a saída do sistema como

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \beta^n \frac{1 - (\alpha/\beta)^{n+1}}{1 - \alpha/\beta}, & 0 \leq n \leq 9 \\ \beta^n \frac{1 - (\alpha/\beta)^{10}}{1 - \alpha/\beta}, & n > 9 \end{cases}$$

► **EXERCÍCIO 2.1** Repita a convolução do Exemplo 2.1 avaliando diretamente a soma de convolução.

*Resposta:* Veja o Exemplo 2.1.

► **EXERCÍCIO 2.2** Admitamos que a entrada de um sistema LTI com resposta ao impulso  $h[n] = \alpha^n \{u[n-2] - u[n-13]\}$  seja  $x[n] = 2\{u[n+2] - u[n-12]\}$ . Encontre a saída  $y[n]$ .

*Resposta:*

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2\alpha^{n+2} \frac{1 - (\alpha)^{-1-n}}{1 - \alpha^{-1}}, & 0 \leq n \leq 10 \\ 2\alpha^{12} \frac{1 - (\alpha)^{-11}}{1 - \alpha^{-1}}, & 11 \leq n \leq 13 \\ 2\alpha^{12} \frac{1 - (\alpha)^{n-24}}{1 - \alpha^{-1}}, & 14 \leq n \leq 23 \\ 0, & n \geq 24 \end{cases}$$

► **Exercício 2.3** Suponha que a entrada  $x[n]$  e a resposta ao impulso  $h[n]$  de um sistema  $H$  do tipo LTI sejam dadas por

$$\begin{aligned}x[n] &= -u[n] + 2u[n-3] - u[n-6] \\h[n] &= u[n+1] - u[n-10]\end{aligned}$$

Encontre a saída deste sistema,  $y[n]$ .

*Resposta:*

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ -(n+2), & -1 \leq n \leq 1 \\ n-4, & 2 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \\ n-9, & 10 \leq n \leq 11 \\ 15-n, & 12 \leq n \leq 14 \\ 0, & n > 14 \end{cases}$$

O Exemplo 2.5 usa a soma de convolução para obter uma equação que diretamente relaciona a entrada à saída de um sistema que possui uma resposta com duração finita ao impulso.

**EXEMPLO 2.5** Considere um sistema LTI com resposta ao impulso

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

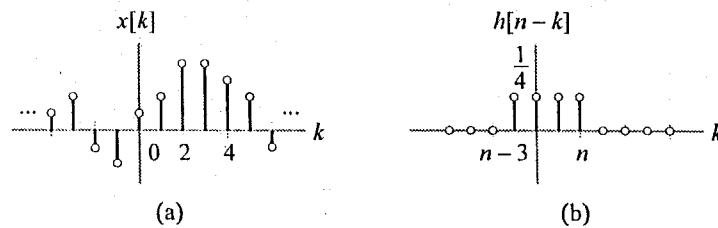
Encontre uma expressão que relate diretamente uma entrada arbitrária  $x[n]$  à saída deste sistema,  $y[n]$ .

*Solução:* As Figuras 2.6(a) e (b) descrevem uma entrada arbitrária  $x[k]$  e a resposta ao impulso refletida, deslocada no tempo,  $h[n-k]$ . Para qualquer deslocamento no tempo  $n$ , obtemos

$$w_n[k] = \begin{cases} \frac{1}{4}x[k], & n-3 \leq k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Somar  $w_n[k]$  para todos  $k$  resultará na saída

$$y[n] = \frac{1}{4}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3])$$



**FIGURA 2.6** Avaliação da soma de convolução correspondente ao Exemplo 2.5. (a) Um sinal de entrada arbitrário descrito como uma função de  $k$ . (b) Resposta ao impulso refletida e deslocada no tempo,  $h[n-k]$ .

A saída do sistema no Exemplo 2.5, é a média aritmética das quatro entradas mais recentes. No capítulo 1, tal sistema foi denominado sistema de média móvel.

O efeito de obter a média nesse sistema é a suavização das flutuações de curta duração nos dados de saída. Esses sistemas muitas vezes são usados para identificar tendências nos dados.

**EXEMPLO 2.6** Aplique os dados da temperatura média de janeiro, apresentados na Figura 2.7, aos seguintes sistemas de média móvel:

$$(a) h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq n \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$(b) h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$(c) h[n] = \begin{cases} \frac{1}{8}, & 0 \leq n \leq 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

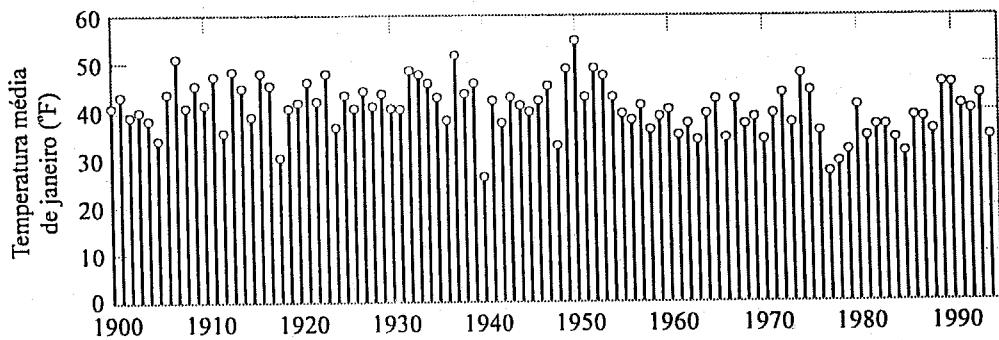


FIGURA 2.7 Temperatura média de janeiro de 1900 a 1994.

**Solução:** No caso (a), a saída é a média das duas entradas mais recentes, no caso (b) as quatro entradas mais recentes, e no caso (c) as oito entradas mais recentes. A saída do sistema para os casos (a), (b) e (c) é descrita nas Figuras 2.8(a), (b) e (c), respectivamente. À medida que a duração da resposta ao impulso aumenta, o grau de suavização introduzido pelo sistema se eleva porque a saída é computada como uma média de um número maior de entradas. Presume-se que a entrada no sistema antes de 1900 seja zero, de forma que a saída próximo a 1900 envolve uma média com alguns dos valores iguais a zero. Isto leva a baixos valores da saída, fenômeno este que é mais evidente no caso (c).

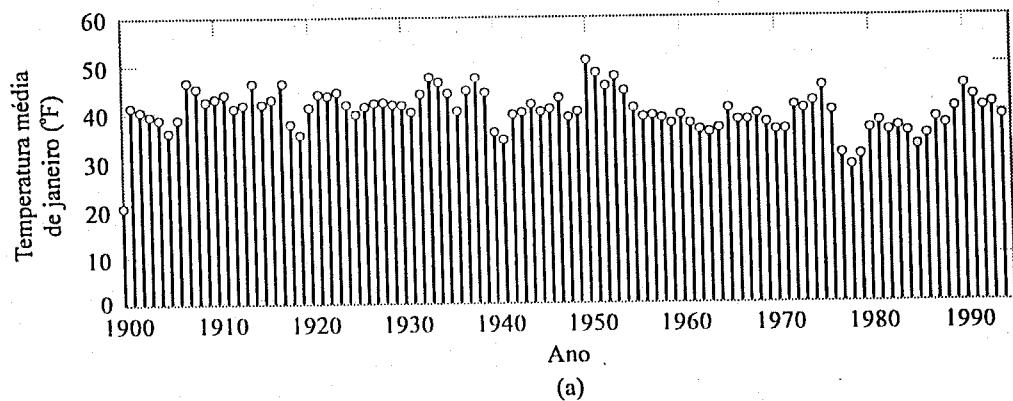
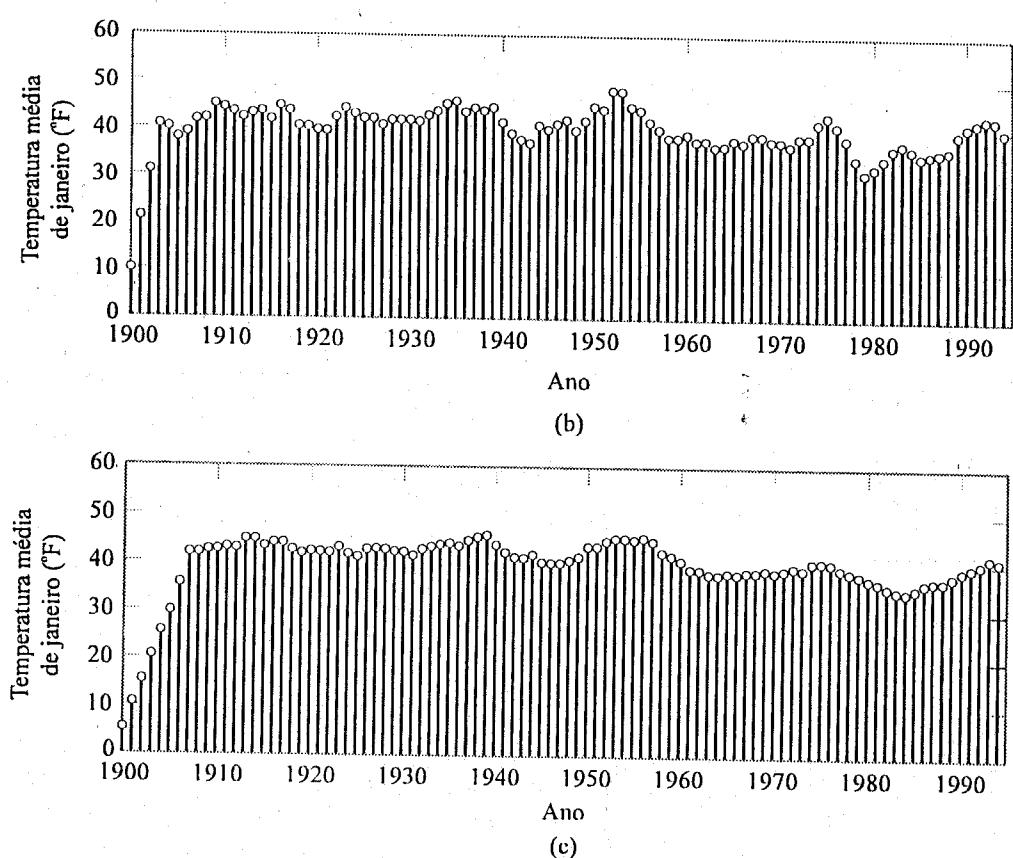


FIGURA 2.8 Resultado da passagem de dados da temperatura média de janeiro por diversos sistemas de média móvel. (a) Saída de sistema de média móvel de dois pontos.



**FIGURA 2.8** (continuação). (b) Saída de sistema de média móvel de quatro pontos. (c) Saída de sistema de média móvel de oito pontos.

Em geral, a saída de qualquer sistema de tempo discreto com uma resposta ao impulso de duração finita é dada por uma soma ponderada dos valores de sinal de entrada. Essas somas ponderadas podem ser facilmente implementadas num computador para processar sinais de tempo discreto. O efeito do sistema sobre o sinal depende dos pesos ou valores da resposta ao impulso do sistema. Os pesos normalmente são escolhidos para aumentar certo aspecto dos dados como, por exemplo, uma tendência subjacente, ou para comunicar certa característica particular. Estas questões serão discutidas ao longo dos capítulos posteriores deste livro.

### A INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

A saída de um sistema LTI de tempo contínuo também pode ser determinada unicamente a partir do conhecimento que se tem da entrada e da resposta ao impulso do sistema. A abordagem e o resultado são análogos ao caso de tempo discreto. Primeiramente, expressamos o sinal de entrada como uma superposição ponderada de impulsos deslocados no tempo. Aqui, a superposição é uma integral em vez de uma soma, devido à natureza contínua da entrada.

Então, aplicamos esta entrada em um sistema LTI para escrevermos a saída como uma superposição ponderada de respostas ao impulso deslocadas no tempo, que é uma expressão denominada integral de convolução.

A soma de convolução foi derivada expressando-se o sinal de entrada  $x[n]$  como uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo, como é mostrado por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

Similarmente, podemos expressar um sinal de tempo contínuo como a superposição ponderada de impulsos deslocados no tempo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Aqui, a superposição é uma integral, e os deslocamentos no tempo são dados pela variável contínua  $\tau$ . Os pesos  $x(\tau) d\tau$  são derivados do valor do sinal  $x(t)$  no instante em que cada impulso ocorre,  $\tau$ . A equação (2.5) é uma expressão da propriedade de peneiramento da função impulso.

Defina a resposta ao impulso  $h(t) = H\{\delta(t)\}$  como a saída do sistema em resposta à entrada do impulso. Se o sistema for invariante no tempo,  $H\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau)$ . Ou seja, uma entrada de impulso deslocada no tempo gera uma saída de resposta ao impulso deslocada no tempo. Considere agora a saída do sistema em resposta a uma entrada geral expressa como a superposição ponderada da Equação (2.5), como é mostrado por

$$y(t) = H \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\}$$

Usando a propriedade de linearidade do sistema, obtemos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H\{\delta(t - \tau)\} d\tau$$

e, como o sistema é invariante no tempo, temos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Conseqüentemente, a saída de um sistema LTI em resposta a uma entrada que tem a forma da equação (2.5) pode ser expressa como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

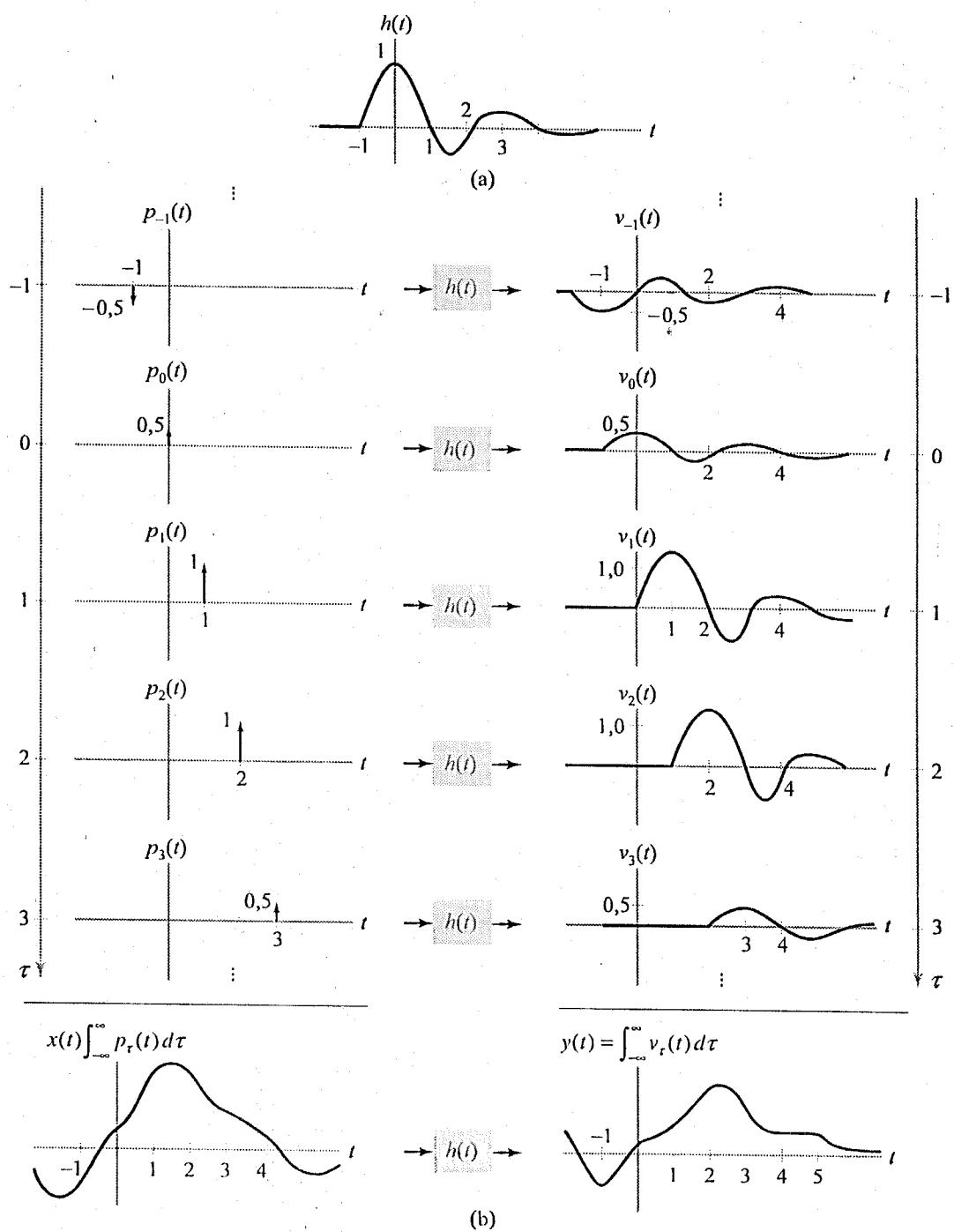
A saída  $y(t)$  é dada como uma superposição ponderada de respostas ao impulso deslocadas de  $t$  no tempo. Os pesos são  $x(\tau) d\tau$ . A equação (2.6) é chamada *integral de convolução* e, como antes, é denotada pelo símbolo  $*$ ; ou seja,

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

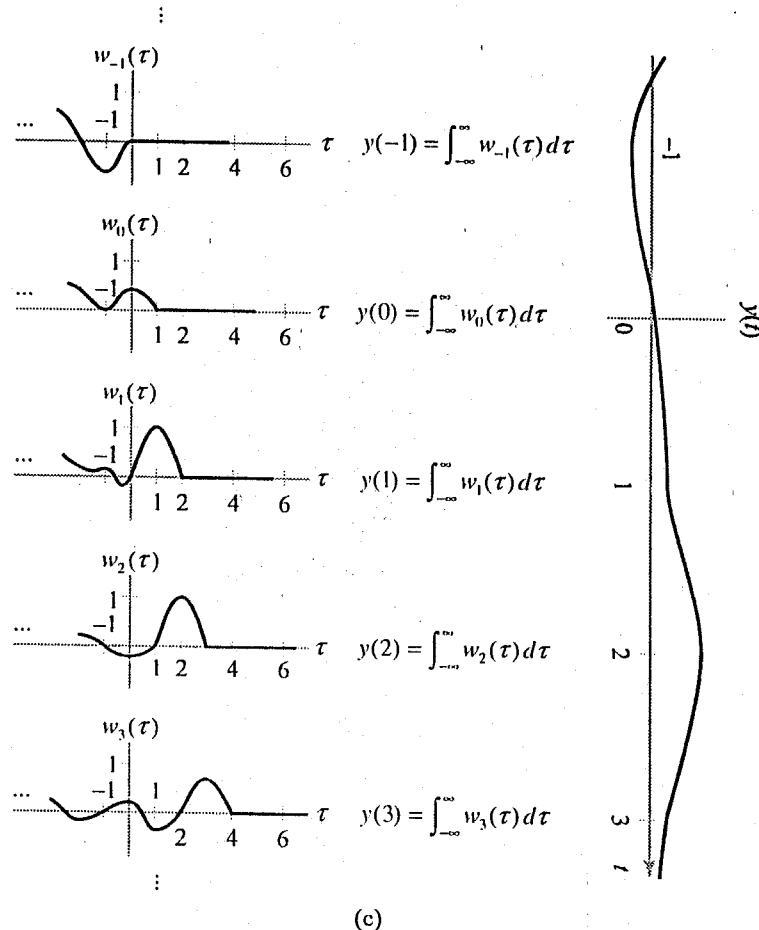
O processo de convolução é ilustrado na Figura 2.9. A Figura 2.9(a) descreve a resposta ao impulso de um sistema. Na Figura 2.9(b), a entrada neste sistema, é representada como uma integral de impulsos ponderados e deslocados no tempo,  $p_\tau(t) = x(\tau) \delta(t - \tau)$ . Estes impulsos ponderados e deslocados no tempo são descritos para diversos valores de  $\tau$  no lado esquerdo da Figura 2.9. A saída associada com cada entrada  $p_\tau(t)$  é uma resposta ao impulso ponderada e deslocada no tempo

$$v_\tau(t) = x(\tau) h(t - \tau)$$

O lado direito da Figura 2.9(b) descreve  $v_\tau(t)$  para diversos valores de  $\tau$ . Note que  $v_\tau(t)$  é uma função de duas variáveis independentes,  $\tau$  e  $t$ . No lado direito da Figura 2.9(b), a variação com  $t$  é mostrada no eixo horizontal, enquanto que a variação com  $\tau$  ocorre verticalmente,



**FIGURA 2.9** Ilustração da integral de convolução. (a) Resposta ao impulso de um sistema de tempo contínuo. (b) Decomposição de  $x(t)$  em uma integral ponderada de impulsos deslocados no tempo resulta em uma saída  $y(t)$  dada por uma integral ponderada de respostas ao impulso deslocadas no tempo. Aqui,  $p_{\tau}(t)$  é a entrada de impulso ponderada (por  $x(\tau)$ ) e deslocada no tempo (de  $\tau$ ), e  $v_{\tau}(t)$  é a saída da resposta ao impulso ponderada e deslocada no tempo. Tanto  $p_{\tau}(t)$  como  $v_{\tau}(t)$  são descritos somente nos valores inteiros de  $\tau$ . A dependência que tanto  $p_{\tau}(t)$  como  $v_{\tau}(t)$  têm de  $\tau$  é descrita pelo eixo  $\tau$  mostrado nos lados esquerdo e direito da figura. A saída é obtida integrando-se  $v_{\tau}(t)$  em  $\tau$ .



**FIGURA 2.9 (c)** Os sinais  $w_i(\tau)$  usados para computar a saída no instante  $t$  correspondem às fatias verticais de  $v_\tau(t)$ . Aqui, redesenharmos o lado direito da Figura 2.9(b) a fim de que o eixo  $\tau$  seja horizontal. A saída é obtida para  $t = t_o$  integrando-se  $w_i(\tau)$  em  $\tau$ .

como mostrado pelo eixo vertical no lado direito. A saída de sistema no instante  $t = t_o$  é obtida integrando-se em  $\tau$ , como é mostrado por

$$y(t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} v_\tau(t_o) d\tau$$

Ou seja, integramos ao longo do eixo vertical ou  $\tau$  no lado direito da Figura 2.9(b) no tempo fixo,  $t = t_o$ .

Defina um sinal  $w_{t_o}(\tau)$  para representar a variação de  $v_\tau(t)$  ao longo do eixo  $\tau$  para um instante fixo  $t = t_o$ . Isto implica  $w_{t_o}(\tau) = v_\tau(t_o)$ . Exemplos deste sinal para diversos valores de  $t_o$  são apresentados na Figura 2.9(c). A saída de sistema correspondente agora é obtida integrando-se  $w_{t_o}(\tau)$  em  $\tau$ , de  $-\infty$  a  $\infty$ . Observe que o eixo horizontal na Figura 2.9(b) é  $t$ , e o eixo vertical é  $\tau$ . Na Figura 2.9(c), de fato, redesenharmos o lado direito da Figura 2.9(b), tendo  $\tau$  como eixo horizontal e  $t$  como o eixo vertical.

Definimos o sinal intermediário  $w_t(\tau) = x(\tau)h(t - \tau)$  como o produto de  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$ . Nesta definição,  $\tau$  é a variável independente, e  $t$  é tratado como uma constante. Isto é indicado explicitamente escrevendo-se  $t$  como um subscrito e  $\tau$  dentro dos parênteses de  $w_t(\tau)$ . Consequentemente,  $h(t - \tau) = h(-(t - \tau))$  é uma versão refletida e deslocada no tempo (em  $-t$ ) de  $h(\tau)$ . O deslocamento no tempo  $t$  determina o instante em que avaliamos a saída do sistema, já que a equação (2.6) se torna

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_t(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

A saída de sistema no instante  $t$  é a área sob o sinal  $w_i(\tau)$ .

Em geral, a forma funcional para  $w_i(\tau)$  dependerá do valor de  $t$ . Como no caso de tempo discreto, podemos evitar avaliar a equação (2.7) para um número infinito de valores de  $t$  ao identificarmos intervalos de  $t$  para os quais  $w_i(\tau)$  tem a mesma forma funcional. Então, somente precisamos avaliar a equação (2.7) usando o  $w_i(\tau)$  associado com cada intervalo. Muitas vezes, é muito útil traçar graficamente tanto  $x(\tau)$  como  $h(t - \tau)$  quando determinamos  $w_i(\tau)$  e identificamos o intervalo apropriado de deslocamentos no tempo. Este procedimento é resumido da seguinte maneira:

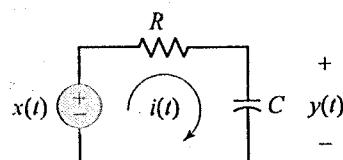
1. Trace  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  como uma função da variável independente  $\tau$ . Para obter  $h(t - \tau)$ , refletir  $h(\tau)$  em torno de  $\tau = 0$  para obter  $h(-\tau)$  e depois desloque  $h(-t)$  no tempo de  $-t$ .
2. Inicie com o deslocamento no tempo  $t$  grande e negativo.
3. Escreva a forma funcional para  $w_i(\tau)$ .
4. Aumente o deslocamento de tempo  $t$  até que a forma funcional para  $w_i(\tau)$  se modifique. O valor  $t$ , no qual a mudança ocorre, define o fim do intervalo corrente e o início de um novo intervalo.
5. Admitamos que  $t$  esteja no novo intervalo. Repita os passos 3 e 4 até que todos os intervalos de deslocamentos de tempo  $t$  e as formas funcionais correspondentes para  $w_i(\tau)$  sejam identificados. Isto normalmente implica aumentar  $t$  até um valor grande e positivo.
6. Para cada intervalo de deslocamentos de tempo  $t$ , integre  $w_i(\tau)$  de  $\tau = -\infty$  a  $\tau = \infty$  para obter  $y(t)$  nesse intervalo.

O efeito de aumentar  $t$  desde um valor negativo grande até um valor positivo grande é deslizar  $h(t - \tau)$  além de  $x(\tau)$  da esquerda para a direita. As transições nos intervalos de  $t$  associados com a mesma forma de  $w_i(\tau)$  geralmente ocorrem quando uma transição em  $h(-\tau)$  cruza uma transição em  $x(\tau)$ . Alternativamente, podemos integrar  $w_i(\tau)$  quando cada intervalo de deslocamentos de tempo é identificado, ou seja, depois do passo 4, ao invés de esperarmos até que todos os intervalos sejam identificados. Os exemplos seguintes ilustram este procedimento para avaliar a integral de convolução.

**EXEMPLO 2.7** Considere o circuito  $RC$  apresentado na Figura 2.10 e suponha que a constante de tempo do circuito seja  $RC = 1$  s. Determine a tensão no capacitor,  $y(t)$ , resultante de uma tensão de entrada  $x(t) = e^{-3t} \{u(t) - u(t - 2)\}$ .

*Solução:* O circuito é linear e invariante no tempo, de forma que a saída é a convolução da entrada e da resposta ao impulso. Ou seja,  $y(t) = x(t) * h(t)$ . A resposta ao impulso deste circuito é

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$



**FIGURA 2.10** Sistema circuito  $RC$  com a fonte de tensão  $x(t)$  como entrada e a tensão medida no capacitor,  $y(t)$ , como saída.

Para avaliar a integral de convolução, primeiramente trace graficamente  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  como uma função da variável independente  $\tau$ , enquanto trata  $t$  como uma constante. Vemos na Figuras 2.11(a) e (b) que

$$x(\tau) = \begin{cases} e^{-3\tau}, & 0 < \tau < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-(t-\tau)}, & \tau < t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Identificamos agora os intervalos de deslocamentos no tempo  $t$  para os quais a forma funcional de  $w_t(\tau)$  não se modifica. Inicie com  $t$  grande e negativo. Desde que  $t < 0$ , temos  $w_t(\tau) = 0$  uma vez que não existem valores de  $\tau$  para os quais tanto  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  sejam, ambos, diferentes de zero. Conseqüentemente, o primeiro intervalo de deslocamentos de tempo é  $t < 0$ .

Note que em  $t = 0$  a borda direita de  $h(t - \tau)$  intercepta a borda esquerda de  $x(\tau)$ . Para  $t > 0$

$$w_t(\tau) = \begin{cases} e^{-t-2\tau}, & 0 < \tau < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta forma de  $w_t(\tau)$  é apresentada na Figura 2.11(c). Ela não se modifica até  $t > 2$ , em cujo ponto a borda direita de  $h(t - \tau)$  cruza a borda direita de  $x(\tau)$ . O segundo intervalo de deslocamentos de tempo  $t$  é, deste modo,  $0 \leq t < 2$ .

Para  $t > 2$ , temos uma terceira forma para  $w_t(\tau)$ , a qual é escrita como

$$w_t(\tau) = \begin{cases} e^{-t-2\tau}, & 0 < \tau < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 2.11(d) descreve  $w_t(\tau)$  para este terceiro intervalo de deslocamentos de tempo,  $t \geq 2$ .

Determinamos agora a saída  $y(t)$  para cada um destes três intervalos de deslocamentos de tempo, integrando  $w_t(\tau)$  de  $\tau = -\infty$  a  $\tau = \infty$ . Iniciando pelo primeiro intervalo,  $t \leq 0$ , temos  $w_t(\tau) = 0$  e, dessa forma,  $y(t) = 0$ . Para o segundo intervalo,  $0 \leq t < 2$ , temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-t-2\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \right\}_0^t \\ &= \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}) \end{aligned}$$

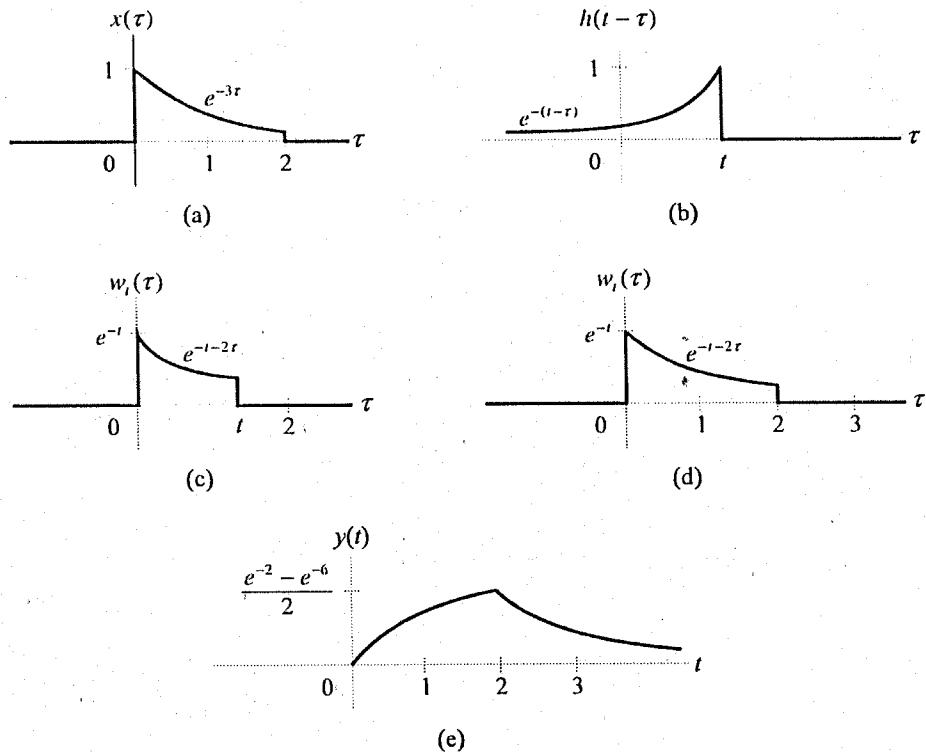
Para o terceiro intervalo,  $t \geq 2$ , temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^2 e^{-t-2\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \right\}_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-4}) e^{-t} \end{aligned}$$

Combinando as soluções correspondentes a cada intervalo de deslocamentos no tempo resulta na saída

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) e^{-t}, & 0 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} (1 - e^{-4}) e^{-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

como é descrito na Figura 2.11(e).



**FIGURA 2.11** Avaliação da integral de convolução correspondente ao Exemplo 2.7. (a) A entrada descrita como uma função de  $\tau$ . (b) Resposta ao impulso refletida e deslocada no tempo,  $h(t - \tau)$ . (c) O sinal produto  $w_t(\tau)$  para  $0 \leq t < 2$ . (d) O sinal produto  $w_t(\tau)$  para  $t \geq 2$ . (e) Saída de sistema  $y(t)$ .

**EXEMPLO 2.8** Suponha que a entrada  $x(t)$  e a resposta ao impulso  $h(t)$  de um sistema LTI sejam dadas por

$$\begin{aligned}x(t) &= 2u(t-1) - 2u(t-3) \\h(t) &= u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)\end{aligned}$$

Encontre a saída deste sistema.

**Solução:** As representações gráficas para  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  são dadas nas Figuras 2.12(a) e (b). A partir delas, podemos determinar os intervalos de deslocamentos de tempo  $t$  nos quais a forma funcional de  $w_t(\tau)$  é a mesma. Inicie com  $t$  grande e negativo. Para  $t + 1 < 1$  ou  $t < 0$ , a borda direita de  $h(t - \tau)$  está à esquerda da parte diferente de zero de  $x(\tau)$  e, consequentemente,  $w_t(\tau) = 0$ .

Para  $t > 0$ , a borda direita de  $h(t - \tau)$  se sobrepõe à parte diferente de zero de  $x(\tau)$ , e temos

$$w_t(\tau) = \begin{cases} 2, & 1 < \tau < t+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A forma para  $w_t(\tau)$  se mantém, desde que  $t + 1 < 3$ , ou  $t < 2$ , e é descrita na Figura 2.12(c).

Para  $t > 2$ , a borda direita de  $h(t - \tau)$  está à direita da parte diferente de zero de  $x(\tau)$ . Neste caso, temos

$$w_t(\tau) = \begin{cases} -2, & 1 < \tau < t-1 \\ 2, & t-1 < \tau < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta forma para  $w_t(\tau)$  se mantém, desde que  $t - 1 < 3$ , ou  $t < 4$ , e é descrita na Figura 2.12(d).

Para  $t > 4$ , a borda mais à esquerda de  $h(t - \tau)$  está dentro da parte diferente de zero de  $x(\tau)$ , e temos

$$w_t(\tau) = \begin{cases} -2, & t-3 < \tau < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta forma para  $w_t(\tau)$  é descrita na Figura 2.12(e) e se mantém desde que  $t - 3 < 3$ , ou  $t < 6$ .

Para  $t > 6$ , nenhuma parte diferente de zero de  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  se sobrepõe e, consequentemente,  $w_t(\tau) = 0$ .

A saída de sistema  $y(t)$  é obtida integrando-se  $w_t(\tau)$  de  $\tau = -\infty$  a  $\tau = \infty$  para cada intervalo de deslocamentos de tempo identificados acima. Iniciando com  $t < 0$ , temos  $y(t) = 0$ , uma vez que  $w_t(\tau) = 0$ . Para  $0 \leq t < 2$ , temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_1^{t+1} 2 d\tau \\ &= 2t \end{aligned}$$

No intervalo seguinte,  $2 \leq t < 4$ , temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_1^{t-1} -2 d\tau + \int_{t-1}^3 2 d\tau \\ &= -4t + 12 \end{aligned}$$

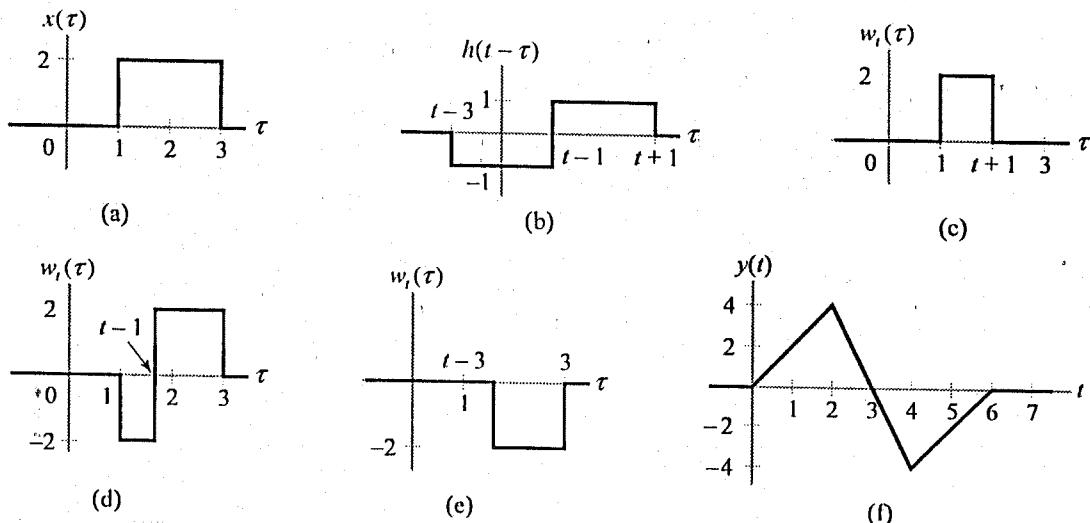
Agora, considerando  $4 \leq t < 6$ , a saída é

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-3}^3 -2 d\tau \\ &= 2t - 12 \end{aligned}$$

Por fim, para  $t > 6$ , temos  $y(t) = 0$ , uma vez que  $w_t(\tau) = 0$ . Combinar as saídas correspondentes a cada intervalo de deslocamentos de tempo produz o resultado

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t, & 0 \leq t < 2 \\ -4t + 12, & 2 \leq t < 4 \\ 2t - 12, & 4 \leq t < 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

conforme descreve a Figura 2.12(f).



**FIGURA 2.12** Avaliação da integral de convolução correspondente ao Exemplo 2.8. (a) A entrada descrita como uma função de  $\tau$ . (b) Resposta ao impulso refletida e deslocada no tempo,  $h(t - \tau)$ . (c) O sinal produto  $w_t(\tau)$  para  $0 \leq t < 2$ . (d) O sinal produto  $w_t(\tau)$  para  $2 \leq t < 4$ . (e) O sinal produto  $w_t(\tau)$  para  $4 \leq t < 6$ . (f) Saída de sistema  $y(t)$ .

► **EXERCÍCIO 2.4** Digamos que a resposta ao impulso de um sistema LTI seja  $h(t) = e^{-2(t+1)}u(t+1)$ . Encontre a saída  $y(t)$  se a entrada for  $x(t) = e^{-|t|}$ .

**Resposta:** Para  $t < -1$ ,

$$w_t(\tau) = \begin{cases} e^{-2(\tau+1)}e^{3\tau}, & -\infty < \tau < t+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{t+1}$$

Para  $t > -1$ ,

$$w_t(\tau) = \begin{cases} e^{-2(t+1)}e^{3\tau}, & -\infty < \tau < 0 \\ e^{-2(t+1)}e^{\tau}, & 0 < \tau < t+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y(t) = e^{-(t+1)} - \frac{2}{3}e^{-2(t+1)}$$

► **EXERCÍCIO 2.5** Digamos que a resposta ao impulso de um sistema LTI seja dada por  $y(t) = u(t-1) - u(t-4)$ . Encontre a saída deste sistema em resposta à entrada  $x(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$ .

**Resposta:**

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \\ 2t-3, & 2 \leq t < 3 \\ 3, & 3 \leq t < 4 \\ 7-t, & 4 \leq t < 5 \\ 12-2t, & 5 \leq t < 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

A integral de convolução descreve o comportamento de um sistema de tempo contínuo. A resposta ao impulso do sistema pode proporcionar *insight* sobre a natureza do sistema. Desenvolveremos esta percepção na próxima seção e nos capítulos subsequentes. Para vislumbrarmos parte da percepção fornecida pela resposta ao impulso, considere o seguinte exemplo.

**EXEMPLO 2.9** Admitamos que a resposta ao impulso de um sistema LTI seja  $h(t) = \delta(t-a)$ . Determine a saída deste sistema em resposta a uma entrada  $x(t)$ .

**Solução:** Obtenha, primeiramente,  $h(t-\tau)$ . Reflita  $h(\tau) = \delta(\tau-a)$  em torno de  $\tau=0$ , o que fornecerá  $h(-\tau) = \delta(\tau+a)$ , uma vez que a função impulso tem simetria par. Agora, desloque a variável independente  $\tau$  de  $-t$  para obter  $h(t-\tau) = \delta(\tau-(t-a))$ . Substitua esta expressão em  $h(t-\tau)$  na integral de convolução da equação (2.6) e use a propriedade de peneiramento da função impulso para obter

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-(t-a)) d\tau$$

$$= x(t-a)$$

Observe que o sistema identidade é representado por  $a=0$ , uma vez que, neste caso, a saída é igual à entrada. Quando  $a \neq 0$ , o sistema desloca no tempo a entrada. Se  $a$  for positivo, a entrada será retardada, e se  $a$  for negativo, a entrada será adiantada. Conseqüentemente, a localização da resposta ao impulso em relação a origem de tempo, determinará a quantidade de retardo introduzida pelo sistema.

## 2.3 Propriedades da Representação da Resposta ao Impulso para Sistemas LTI

A resposta ao impulso caracteriza de maneira completa o comportamento da entrada-saída de um sistema LTI. Consequentemente, as propriedades de um sistema como, por exemplo, memória, causalidade e estabilidade, estão relacionadas à sua resposta ao impulso. Além disso, a resposta ao impulso de uma interconexão de sistemas LTI está relacionada à resposta ao impulso dos sistemas constituintes. Nesta seção, examinaremos a resposta ao impulso de sistemas interconectados e relacionaremos resposta ao impulso com as propriedades do sistema. Estas relações nos dizem como a resposta ao impulso caracteriza o comportamento do sistema. Os resultados para sistemas de tempo contínuo e discreto são obtidos usando-se abordagens quase idênticas; deste modo, derivaremos para um caso e simplesmente apresentaremos os resultados correspondentes aos demais.

### CONEXÃO PARALELA DE SISTEMAS

Consideremos dois sistemas LTI com respostas ao impulso  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  conectados em paralelo, como ilustra a Figura 2.13(a). A saída desta conexão de sistemas,  $y(t)$ , é a soma das saídas de cada sistema

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

Substitua a representação por integral em cada convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_2(t-\tau) d\tau$$

e combine as integrais para obter

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\{h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau)\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

em que  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ . Identificamos  $h(t)$  como a resposta ao impulso da conexão paralela de dois sistemas. Este sistema equivalente é descrito na Figura 2.13(b). A resposta ao impulso de dois sistemas conectados em paralelo é a soma das respostas individuais ao impulso.

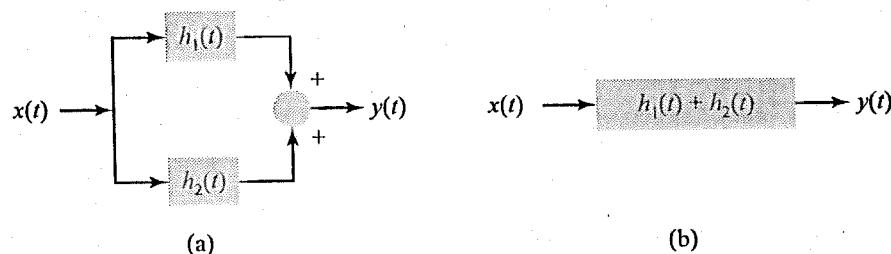


FIGURA 2.13 Interconexão de dois sistemas. (a) Conexão paralela de dois sistemas. (b) Sistema equivalente.

Matematicamente, isto implica que a convolução possui a *propriedade distributiva*:

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} \quad (2.8)$$

Resultados idênticos são válidos para o caso de tempo discreto:

$$x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} \quad (2.9)$$

### ■ CONEXÃO EM CASCATA DE SISTEMAS

Consideremos agora a conexão em cascata de dois sistemas LTI ilustradas na Figura 2.14(a). Admitamos que  $z(t)$  seja a saída do primeiro sistema e a entrada para o segundo sistema na conexão em cascata. A saída  $y(t)$  é expressa em termos de  $z(t)$  como

$$y(t) = z(t) * h_2(t) \quad (2.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)h_2(t-\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Porém,  $z(\tau)$  é a saída do primeiro sistema e é expressa em termos da entrada  $x(\tau)$  como

$$\begin{aligned} z(\tau) &= x(\tau) * h_1(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)h_1(\tau-v) dv \end{aligned} \quad (2.12)$$

Aqui,  $v$  é usado como a variável de integração na integral de convolução. Substituindo a equação (2.12) em  $z(\tau)$  na equação (2.11), obtemos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)h_1(\tau-v)h_2(t-\tau) dv d\tau$$

Agora, realizamos a mudança de variável  $\eta = \tau - v$  e permutamos as integrais para obtermos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta)h_2(t-v-\eta) d\eta \right] dv \quad (2.13)$$

A integral interna é identificada como a convolução de  $h_1(t)$  com  $h_2(t)$  avaliada em  $t-v$ . Ou seja, se definirmos  $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta)h_2(t-v-\eta) d\eta = h(t-v)$$

A substituição desta relação na equação (2.13) produzirá

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)h(t-v) dv \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Conseqüentemente, a resposta ao impulso de dois sistemas LTI conectados em cascata é a convolução das respostas ao impulso individuais. A conexão em cascata é equivalente em termos de entrada-saída ao sistema único representado pela resposta ao impulso  $h(t)$ , como mostra a Figura 2.14(b).

A substituição de  $z(t) = x(t) * h_1(t)$  na expressão de  $y(t)$  dada na equação (2.10) e  $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$  na expressão alternativa para  $y(t)$  dada na equação (2.14) estabelece que a convolução possui a propriedade associativa.

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \quad (2.15)$$

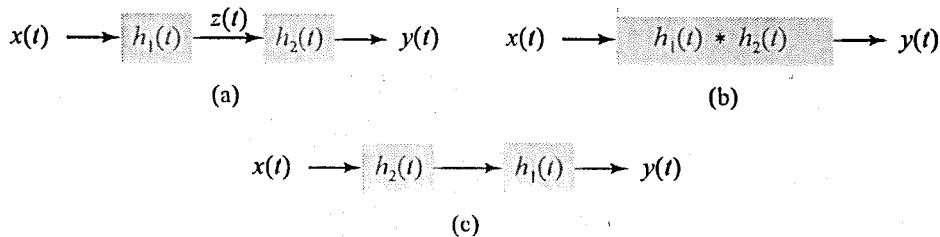
Uma segunda propriedade importante para a conexão em cascata de sistemas trata da ordenação dos sistemas. Escreva  $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$  como a integral

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t-\tau) d\tau$$

e efetue a mudança de variável  $v = t - \tau$  para obter

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-v)h_2(v) dv \\ &= h_2(t) * h_1(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Conseqüentemente, a convolução de  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  pode ser executada em qualquer ordem. Isto corresponde a permutar a ordem dos sistemas na conexão em cascata, como mostra a Figura 2.14(c).



**FIGURA 2.14** Interconexão de dois sistemas. (a) Conexão em cascata de dois sistemas. (b) Sistema equivalente. (c) Sistema equivalente: ordem do sistema trocada.

Uma vez que

$$x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} = x(t) * \{h_2(t) * h_1(t)\}$$

concluímos que a saída de uma combinação de sistemas LTI em cascata independe da ordem em que os sistemas são conectados. Matematicamente, dizemos que a operação de convolução possui a *propriedade comutativa*

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) \quad (2.17)$$

A propriedade comutativa muitas vezes é usada para simplificar a avaliação ou interpretação da integral de convolução.

Os sistemas de tempo discreto e a convolução têm propriedades idênticas às suas contrapartes de tempo contínuo. A resposta ao impulso de uma conexão em cascata de sistemas LTI é dada pela convolução das respostas ao impulso individuais, e a saída de uma combinação em cascata de sistemas LTI independe da ordem em que os sistemas estão conectados. A convolução de tempo discreto é associativa

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} \quad (2.18)$$

e comutativa

$$h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n] \quad (2.19)$$

O exemplo seguinte demonstra o uso das propriedades de convolução para encontrar um sistema simples que é equivalente, em termos de entrada-saída, a um sistema interconectado.

**EXEMPLO 2.10** Considere a interconexão dos sistemas LTI descritos na Figura 2.15. A resposta ao impulso de cada sistema é dada por

$$\begin{aligned} h_1[n] &= u[n] \\ h_2[n] &= u[n+2] - u[n] \\ h_3[n] &= \delta[n-2] \\ h_4[n] &= \alpha^n u[n] \end{aligned}$$

Encontre a resposta ao impulso do sistema global,  $h[n]$ .

**Solução:** Primeiramente, derivamos a expressão para a resposta ao impulso global em termos da resposta ao impulso de cada sistema. Inicie com a combinação paralela de  $h_1[n]$  e  $h_2[n]$ . O sistema equivalente tem resposta ao impulso  $h_{12}[n] = h_1[n] + h_2[n]$ . Este sistema está disposto em série com  $h_3[n]$ , assim o sistema equivalente para o ramo superior tem resposta ao impulso  $h_{123}[n] = h_{12}[n] * h_3[n]$ . Substituindo em  $h_{12}[n]$ , temos  $h_{123}[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]$ . O ramo superior está disposto em paralelo com o ramo inferior, caracterizado por  $h_4[n]$ ; conseqüentemente, a resposta ao impulso global é  $h[n] = h_{123}[n] - h_4[n]$ . Substituir em  $h_{123}[n]$  produzirá

$$h[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] - h_4[n]$$

Agora, substituímos as formas específicas de  $h_1[n]$  e  $h_2[n]$  para obtermos

$$\begin{aligned} h_{12}[n] &= u[n] + u[n+2] - u[n] \\ &= u[n+2] \end{aligned}$$

A convolução de  $h_{12}[n]$  com  $h_3[n]$  resulta em

$$\begin{aligned} h_{123}[n] &= u[n+2] * \delta[n-2] \\ &= u[n] \end{aligned}$$

Por fim, obtemos a resposta ao impulso global somando  $h_{123}[n]$  e  $h_4[n]$

$$h[n] = \{1 - \alpha^n\} u[n]$$

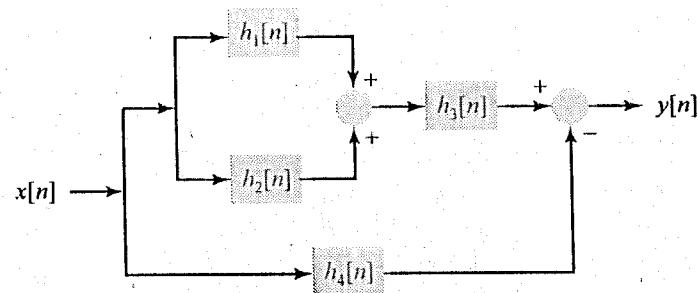


FIGURA 2.15 Interconexão de sistemas correspondente ao Exemplo 2.10.

Interconexões de sistemas ocorrem naturalmente na análise. Muitas vezes, é mais fácil dividir um sistema complexo em subsistemas mais simples, analisar cada um, e depois estudar o sistema inteiro como uma interconexão de subsistemas do que analisar o sistema global diretamente. Este é um exemplo da abordagem “dividir para conquistar” à resolução de problemas; o que é possível devido às pressuposições de linearidade e invariância no tempo. As interconexões de sistemas também são úteis na implementação de sistemas, uma vez que estes são equivalentes em termos de entrada-saída e não, necessariamente, em outros termos. Por exemplo, a complexidade computacional de dois sistemas equivalentes em termos de entrada-saída para processar dados em um computador pode diferir de maneira significativa. O fato de muitas interconexões diferentes de sistemas LTI serem equivalentes em termos de entrada-saída pode ser explorado para otimizar alguns outros critérios de implementação como, por exemplo, a computação.

### SISTEMAS SEM MEMÓRIA

Lembre-se de que a saída de um sistema sem memória depende somente da entrada atual. Explorando-se a propriedade comutativa da convolução, a saída de um sistema LTI de tempo discreto pode ser expressa como

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \end{aligned}$$

Para que este sistema seja sem memória,  $y[n]$  deve depender somente de  $x[n]$  e não de  $x[n-k]$  para  $k \neq 0$ . Esta condição implica que  $h[k] = 0$  para  $k \neq 0$ . Conseqüentemente, um sistema LTI de tempo discreto é sem memória se, e somente se,  $h[k] = c\delta[k]$ , em que  $c$  é uma constante arbitrária.

Escrevendo a saída de um sistema de tempo contínuo como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

vemos que, de maneira análoga ao caso de tempo discreto, um sistema de tempo contínuo é sem memória se, e somente se,  $h(\tau) = c\delta(\tau)$  em que  $c$  é uma constante arbitrária.

A condição da ausência de memória impõe fortes restrições na forma da resposta ao impulso. Todos os sistemas LTI sem memória realizam multiplicação escalar com a entrada.

### ■ SISTEMAS CAUSAIS

A saída de um sistema causal depende somente dos valores passados ou presentes da entrada. Novamente, escrevemos a soma de convolução como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Os valores passados e atuais da entrada,  $x[n]$ ,  $x[n-1]$ ,  $x[n-2]$ , ..., são associados com índices  $k \geq 0$  na soma de convolução, enquanto os valores futuros da entrada são associados com índices  $k < 0$ . Para que  $y[n]$  dependa somente dos valores passados e atuais da entrada, impomos que  $h[k] = 0$  para  $k < 0$ . Conseqüentemente, para um sistema causal,  $h[k] = 0$  para  $k < 0$ , e a soma de convolução é reescrita como

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

A condição de causalidade para um sistema de tempo contínuo segue-se de maneira análoga a partir da integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

Um sistema de tempo contínuo causal tem uma resposta ao impulso que satisfaz  $h(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ . A saída de um sistema causal é, desse modo, expressa como a integral de convolução

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

A condição de causalidade é satisfeita intuitivamente. Lembre-se de que a resposta ao impulso é a saída de um sistema em resposta a uma entrada de impulso aplicada no instante  $t = 0$ . Os sistemas causais são não-antecipativos: ou seja, não podem gerar uma saída antes que a entrada seja aplicada. Exigir que a resposta ao impulso seja igual a zero para um tempo negativo equivale a dizer que o sistema não pode responder antes da aplicação do impulso.

### ■ SISTEMAS ESTÁVEIS

Lembre-se do capítulo 1, que um sistema é (BIBO) estável com entrada limitada-saída limitada se a saída tiver a garantia de ser limitada para toda entrada limitada. Formalmente, se a entrada em um sistema de tempo discreto estável satisfizer  $|x[n]| \leq M_x < \infty$ , a saída deve satisfazer  $|y[n]| \leq M_y < \infty$ . Derivaremos condições em  $h[n]$  que garantem a estabilidade do sistema ao limitar a soma de convolução. O módulo da saída é dada por

$$\begin{aligned} |y[n]| &= |h[n] * x[n]| \\ &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \end{aligned}$$

Procuramos um limite superior em  $|y[n]|$  que seja uma função do limite superior em  $|x[n]|$  e da resposta ao impulso. Uma vez que o módulo de uma soma de números é menor ou igual à soma dos módulos, ou seja,  $|a+b| \leq |a| + |b|$ , podemos escrever

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$$

Além disso, o módulo de um produto é igual ao produto dos módulos, ou seja,  $|ab| = |a||b|$ , e, deste modo, temos

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

Se supormos que a entrada é limitada,  $|x[n]| \leq M_x < \infty$ , então  $|x[n-k]| < M_x$  e

$$|y[n]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad (2.20)$$

Conseqüentemente, a saída é limitada,  $|y[n]| < \infty$ , desde que a resposta ao impulso do sistema seja absolutamente somável. Concluímos que a resposta ao impulso de um sistema estável satisfaz o limite

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Nossa derivação até aqui estabeleceu a somabilidade absoluta da resposta ao impulso como uma condição suficiente para a estabilidade BIBO. O leitor é solicitado a mostrar que esta também é uma condição necessária para a estabilidade BIBO no Problema 2.13.

Um conjunto similar de passos pode ser usado para estabelecer que um sistema de tempo contínuo seja BIBO estável se, e somente se, a resposta ao impulso for absolutamente integrável, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

**EXEMPLO 2.11** Um sistema de tempo discreto tem a resposta ao impulso

$$h[n] = a^n u[n+2]$$

Este é um sistema BIBO estável, causal ou sem memória?

**Solução:** A estabilidade é determinada verificando-se se a resposta ao impulso é absolutamente somável, conforme é mostrado por

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| &= \sum_{k=-2}^{\infty} |a^n| \\ &= |a^{-2}| + |a^{-1}| + \sum_{k=0}^{\infty} |a|^n \end{aligned}$$

A soma geométrica infinita na segunda linha converge somente se  $|a| < 1$ . Conseqüentemente, o sistema é estável, desde que  $0 < |a| < 1$ . O sistema não é causal, uma vez que a resposta ao impulso  $h[n]$  é diferente de zero para  $n = -1, -2$ . O sistema é com memória porque  $h[n]$  é diferente de zero para alguns valores  $n \neq 0$ .

► **Exercício 2.6** Determine as condições de  $a$  tais que o sistema de tempo contínuo com resposta ao impulso  $h(t) = e^{at} u(t)$  seja estável, causal e sem memória.

**Resposta:** O sistema é estável desde que  $a < 0$ , causal para todo  $a$ , e não haja nenhum  $a$  para o qual o sistema seja sem memória.

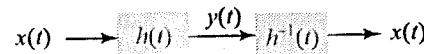
Enfatizamos que um sistema pode ser instável, não obstante a resposta ao impulso ter valor finito. Por exemplo, a resposta ao impulso  $h[n] = u[n]$  nunca é maior do que um, mas ela não é absolutamente somável e, dessa forma, o sistema é instável. Para demonstrar isto, use a soma de convolução para expressar a saída deste sistema em termos da entrada, como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

*Não obstante, a saída, limitada para algumas entradas limitadas  $x[n]$ , não é limitada para todo  $x[n]$  limitado. Em especial, a entrada constante  $x[n] = c$  resulta claramente em uma saída ilimitada.*

### ■ SISTEMAS INVERTÍVEIS E DESCONVOLUÇÃO

Um sistema é *invertível* se a entrada no sistema puder ser recuperada da saída. Isso implica a existência de um sistema inverso que toma a saída do sistema original como sua entrada e produz a entrada do sistema original. Limitar-nos-emos aqui à consideração dos sistemas inversos que são LTI. A Figura 2.16 descreve a cascata de um sistema LTI que tem resposta ao impulso  $h(t)$  com um sistema inverso LTI, cuja resposta ao impulso é denotada por  $h^{-1}(t)$ .



**FIGURA 2.16** Cascata de um sistema LTI de resposta  $h(t)$  ao impulso com um sistema inverso de resposta  $h^{-1}(t)$  ao impulso.

O processo para recuperar  $x(t)$  de  $h(t) * x(t)$  é denominado *desconvolução*, uma vez que ele corresponde a inverter ou desfazer a operação de convolução. Um sistema inverso tem saída  $x(t)$  em resposta à entrada  $y(t) = h(t) * x(t)$  e, dessa forma, resolve o problema da desconvolução. A desconvolução e os sistemas inversos desempenham um papel importante em muitos problemas de processamento de sinais e sistemas. Um problema comum é o de inverter ou “equalizar” a distorção introduzida por um sistema não-ideal. Por exemplo, considere o uso de um modem de alta velocidade para comunicar-se por meio de linhas telefônicas. A distorção introduzida pela rede telefônica impõe graves restrições à taxa em que as informações podem ser transmitidas; desta forma, um equalizador é incorporado ao modem. O equalizador inverte a distorção da rede telefônica e permite que taxas de dados muito mais elevadas sejam atingidas. Neste caso, o equalizador representa um sistema inverso para a rede telefônica. Discutiremos a equalização mais detalhadamente nos capítulos 5 e 8.

A relação entre a resposta ao impulso de um sistema,  $h(t)$ , e o sistema inverso correspondente,  $h^{-1}(t)$ , é facilmente derivada. A resposta ao impulso da conexão em cascata da Figura 2.16 é a convolução de  $h(t)$  e  $h^{-1}(t)$ . É necessário que a saída da cascata seja igual à entrada, ou

$$x(t) * (h(t) * h^{-1}(t)) = x(t)$$

Isto implica que

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t) \quad (2.21)$$

Similarmente, a resposta ao impulso de um sistema inverso LTI de tempo discreto,  $h^{-1}[n]$ , deve satisfazer

$$h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n] \quad (2.22)$$

Em muitas aplicações de equalização, um sistema inverso exato pode ser difícil de encontrar ou implementar. A determinação de uma solução aproximada para a equação (2.21) ou a equação (2.22) muitas vezes é suficiente nesses casos. O exemplo seguinte ilustra um caso em que um sistema inverso exato é obtido resolvendo-se diretamente a equação (2.22).

**EXEMPLO 2.12** Considere projetar um sistema inverso de tempo discreto para eliminar a distorção associada com um eco indesejável num problema de transmissão de dados. Suponha que o eco seja representado como atenuação por uma constante  $a$  e um retardo correspondente a uma unidade de tempo na sequência de entrada. Daí, o sinal recebido distorcido,  $y[n]$ , ser expresso em termos do sinal transmitido  $x[n]$  como

$$y[n] = x[n] + ax[n-1]$$

Encontre um sistema inverso causal que recupere  $x[n]$  de  $y[n]$ . Verifique se este sistema inverso é estável.

**Solução:** Primeiramente, identificamos a resposta ao impulso do sistema que relaciona  $y[n]$  e  $x[n]$ . Escrevendo a soma de convolução como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

identificamos

$$h[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ a, & k = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

como a resposta ao impulso do sistema que modela a transmissão direta mais o eco. O sistema inverso  $h^{-1}[n]$  deve satisfazer  $h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n]$ . Substituindo  $h[n]$ , desejamos encontrar a  $h^{-1}[n]$  que satisfaça a equação

$$h^{-1}[n] + ah^{-1}[n-1] = \delta[n] \quad (2.23)$$

Considere resolver esta equação para diversos valores diferentes de  $n$ . Para  $n < 0$ , devemos ter  $h^{-1}[n] = 0$  a fim de obtermos um sistema inverso causal. Para  $n = 0$ ,  $\delta[n] = 1$  e a equação (2.23) implica que

$$h^{-1}[0] + ah^{-1}[-1] = 1$$

de forma que  $h^{-1}[0] = 1$ . Para  $n > 0$ ,  $\delta[n] = 0$  e a equação (2.23) implica que

$$h^{-1}[n] + ah^{-1}[n-1] = 0$$

ou  $h^{-1}[n] = -ah^{-1}[n-1]$ . Uma vez que  $h^{-1}[0] = 1$ , temos  $h^{-1}[1] = -a$ ,  $h^{-1}[2] = a^2$ ,  $h^{-1}[3] = -a^3$  e assim por diante. Conseqüentemente, o sistema inverso tem a resposta ao impulso

$$h^{-1}[n] = (-a)^n u[n]$$

Para verificar a estabilidade, determinamos se  $h^{-1}[n]$  é absolutamente somável, conforme é mostrado por

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h^{-1}[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k$$

Esta série geométrica converge e, consequentemente, o sistema é estável, desde que  $|a| < 1$ . Isto implica que o sistema inverso é estável se o eco atenuar o sinal transmitido  $x[n]$ , mas é instável se o eco amplificar  $x[n]$ .

Em geral, a obtenção de um sistema inverso, resolvendo diretamente a equação (2.21) ou a equação (2.22), é difícil. Além disso, nem todo sistema LTI tem uma inversão estável e causal. Os métodos desenvolvidos nos capítulos posteriores oferecem um *insight* adicional sobre a existência e determinação de diversos sistemas.

### ■ RESPOSTA AO DEGRAU

A resposta de um sistema LTI a um degrau caracteriza como o sistema responde a mudanças repentinas na entrada. A *resposta ao degrau* é facilmente expressa em termos da resposta ao impulso usando-se a convolução, supondo-se que a entrada seja uma função degrau. Admitamos que um sistema de tempo discreto tenha a resposta ao impulso  $h[n]$  e denote a resposta ao degrau como  $s[n]$ . Teremos

$$\begin{aligned} s[n] &= h[n] * u[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] \end{aligned}$$

Agora, desde que  $u[n-k] = 0$  para  $k > n$  e  $u[n-k] = 1$  para  $k \leq n$ , temos

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

Ou seja, a resposta ao degrau é a soma corrente da resposta ao impulso. Similarmente, a resposta ao degrau,  $s(t)$ , para um sistema de tempo contínuo é expressa como a integral corrente da resposta ao impulso

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

Note que podemos inverter estas relações para expressar a resposta ao impulso, em termos da resposta ao degrau, como

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

e

$$h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

**EXEMPLO 2.13** Encontre a resposta ao degrau do circuito  $RC$  descrito na Figura 2.10 que tem a resposta ao impulso

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

*Solução:* Aplique a equação (2.24) para obter

$$s(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} u(\tau) d\tau$$

Agora, simplifique a integral obtendo

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\tau/RC} d\tau, & t > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t/RC}, & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

► **EXERCÍCIO 2.7** Encontre a resposta ao degrau de um sistema de tempo discreto com resposta ao impulso

$$h[n] = (-a)^n u[n]$$

supondo que  $|a| < 1$ .

**Resposta:**

$$s[n] = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 + a} u[n]$$

### ■ RESPOSTA SENOIDAL EM ESTADO ESTACIONÁRIO

Sinais de entrada senoidais freqüentemente são usados para caracterizar a resposta de um sistema. Aqui, examinaremos a relação entre a resposta ao impulso e a resposta em estado estacionário ou permanente de um sistema LTI com uma entrada senoidal complexa.

Esta relação é facilmente estabelecida usando-se convolução e um sinal de entrada senoidal complexo. Considere a saída de um sistema de tempo discreto com resposta  $h[n]$  ao impulso e entrada senoidal complexa de amplitude unitária  $x[n] = e^{j\Omega n}$ , dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)} \end{aligned}$$

Fatore  $e^{j\Omega n}$  na soma para obter

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k} \\ &= H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} \end{aligned}$$

onde definimos

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k} \quad (2.25)$$

Conseqüentemente, a saída do sistema é uma senóide complexa que tem a mesma freqüência que a entrada multiplicada pelo número complexo  $H(e^{j\Omega})$ . Esta relação é descrita na Figura 2.17. A quantidade  $H(e^{j\Omega})$  não é uma função do tempo,  $n$ , mas é somente uma função da freqüência,  $\Omega$ , e é denominada *resposta em freqüência* do sistema de tempo discreto.

$$e^{j\Omega n} \longrightarrow h[n] \longrightarrow H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$

**FIGURA 2.17** Uma entrada senoidal complexa em um sistema LTI resulta em uma saída senoidal complexa com a mesma freqüência, multiplicada pela resposta em freqüência do sistema.

Resultados similares são obtidas para sistemas de tempo contínuo. Admitamos que a resposta ao impulso de um sistema seja  $h(t)$  e a entrada seja  $x(t) = e^{j\omega t}$ . A integral de convolução fornece a saída como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= H(j\omega) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde definimos

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.27)$$

A saída do sistema é uma senóide complexa que tem a mesma freqüência que a entrada multiplicada pela constante complexa  $H(j\omega)$ .  $H(j\omega)$  é uma função somente de freqüência,  $\omega$ , e não de tempo,  $t$ . Ela é denominada *resposta em freqüência* do sistema de tempo contínuo.

Uma interpretação intuitiva da resposta senoidal em estado estacionário é obtida escrevendo-se o número complexo  $H(j\omega)$  na forma polar. Lembre que se  $c = a + jb$  for um número complexo, podemos escrever  $c$  na forma polar como  $c = |c|e^{j\arg\{c\}}$ , em que  $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\arg\{c\} = \arctg(b/a)$ . Portanto, temos  $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$ . Aqui,  $|H(j\omega)|$  se denomina *resposta em módulo ou magnitude* e  $\arg\{H(j\omega)\}$  se denomina *resposta em fase* do sistema.

Substituindo esta forma polar na equação (2.26), a saída  $y(t)$  será expressa como

$$y(t) = |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg\{H(j\omega)\})}$$

O sistema modifica a amplitude da entrada por  $|H(j\omega)|$  e a fase por  $\arg\{H(j\omega)\}$ . A resposta senoidal em estado estacionário tem uma interpretação similar à da senóides de valor real. Escreva

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{A}{2} e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \phi)} \end{aligned}$$

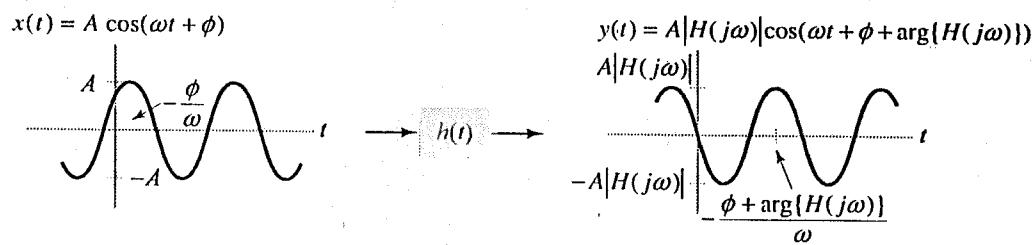
e use a linearidade para obter a saída como

$$y(t) = |H(j\omega)| \frac{A}{2} e^{j(\omega t + \phi + \arg\{H(j\omega)\})} + |H(-j\omega)| \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \phi - \arg\{H(-j\omega)\})}$$

Supondo que  $h(t)$  tenha valor real, a equação (2.27) implica que  $H(j\omega)$  possui simetria conjugada, ou seja,  $H^*(j\omega) = H(-j\omega)$ . Isto implica que  $|H(j\omega)|$  é uma função par de  $\omega$ , enquanto  $\arg\{H(j\omega)\}$  é ímpar. Explorando e simplificando, estas condições de simetria resultam em

$$y(t) = |H(j\omega)| A \cos(\omega t + \phi + \arg\{H(j\omega)\})$$

Como acontece com uma entrada senoidal complexa, o sistema modifica a amplitude da senóide de entrada por  $|H(j\omega)|$  e a fase por  $\arg\{H(j\omega)\}$ . Esta modificação é ilustrada na Figura 2.18.



**FIGURA 2.18** Uma entrada senoidal em um sistema LTI resulta em uma saída senoidal que tem a mesma freqüência, com a amplitude e fase modificadas pela resposta em freqüência do sistema.

Resultados similares são obtidos para sistemas de tempo discreto usando-se a forma polar para  $H(e^{j\Omega})$ . Especificamente, se  $x[n] = e^{j\Omega n}$  for a entrada, então

$$y[n] = |H(e^{j\Omega})| e^{j(\Omega n + \arg\{H(e^{j\Omega})\})}$$

Além disso, se  $x[n] = A \cos(\Omega n + \phi)$  for a entrada num sistema de tempo discreto com resposta ao impulso de valor real, então

$$y[n] = |H(e^{j\Omega})| A \cos(\Omega n + \phi + \arg\{H(e^{j\Omega})\})$$

Mais uma vez, o sistema multiplica a amplitude da entrada senoidal por  $|H(e^{j\Omega})|$  e sua fase por  $\arg\{H(e^{j\Omega})\}$ .

A resposta em freqüência caracteriza a resposta em estado estacionário do sistema para entradas senoidais como uma função da freqüência da senóide. Dizemos que esta é uma resposta em estado estacionário porque se presume que a senóide de entrada exista em todos os instantes de tempo e, dessa forma, o sistema está em condição de equilíbrio ou de estado estacionário. A resposta em freqüência fornece uma grande quantidade de informação sobre o sistema e é útil tanto para entendermos como para analisarmos sistemas, tópicos que serão explorados em profundidade nos capítulos posteriores. Ela é facilmente medida com um oscilador senoidal e com um osciloscópio, usando-se este último para medir a amplitude e a mudança de fase entre as senóides de entrada e saída correspondentes a diferentes freqüências de oscilador.

É uma prática padrão representar a resposta em freqüência graficamente, exibindo separadamente as resposta em módulo e em fase como funções da freqüência, como é ilustrado nos exemplos seguintes.

**EXEMPLO 2.14** As respostas ao impulso de dois sistemas de tempo discreto são dadas por

$$h_1[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n - 1])$$

$$h_2[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n - 1])$$

Encontre a resposta em freqüência de cada sistema e trace graficamente as respostas em módulo.

*Solução:* Substitua  $h_1[n]$  na equação (2.25) para obter

$$H_1(e^{j\Omega}) = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{2}$$

a qual pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} H_1(e^{j\Omega}) &= e^{-j\Omega/2} \frac{e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}}{2} \\ &= e^{-j\Omega/2} \cos(\Omega/2) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a resposta em módulo é expressa como

$$|H_1(e^{j\Omega})| = |\cos(\Omega/2)|$$

e a resposta em fase é expressa como

$$\arg\{H_1(e^{j\Omega})\} = \begin{cases} -\Omega/2 & \text{para } \cos(\Omega/2) > 0 \\ -\Omega/2 - \pi & \text{para } \cos(\Omega/2) < 0 \end{cases}$$

Similarmente, a resposta em frequência do segundo sistema é dada por

$$\begin{aligned} H_2(e^{j\Omega}) &= \frac{1 - e^{-j\Omega}}{2} \\ &= j e^{-j\Omega/2} \frac{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{2j} \\ &= j e^{-j\Omega/2} \operatorname{sen}(\Omega/2) \end{aligned}$$

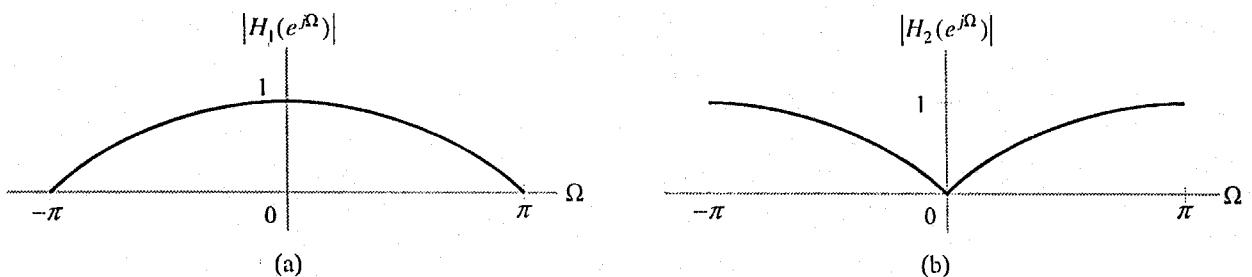
Neste caso, a resposta em módulo é expressa como

$$|H_2(e^{j\Omega})| = |\operatorname{sen}(\Omega/2)|$$

e a resposta em fase é expressa como

$$\arg\{H_2(e^{j\Omega})\} = \begin{cases} -\Omega/2 + \pi/2 & \text{para } \operatorname{sen}(\Omega/2) > 0 \\ -\Omega/2 - \pi/2 & \text{para } \operatorname{sen}(\Omega/2) < 0 \end{cases}$$

As Figuras 2.19(a) e (b) descrevem a resposta em módulo de cada sistema no intervalo  $-\pi < \Omega \leq \pi$ . Este intervalo é escolhido porque corresponde à faixa de freqüências para as quais a senóide complexa  $e^{j\Omega n}$  é uma função única da freqüência. A soma de convolução indica que  $h_1[n]$  faz a média de entradas sucessivas, enquanto que  $h_2[n]$  faz a diferença de sucessivas entradas. Deste modo, esperamos que  $h_1[n]$  passe sinais de baixa freqüência enquanto atenua altas freqüências. Esta característica é refletida pela resposta em módulo. Em comparação, a operação de diferença implementada por  $h_2[n]$  tem o efeito de atenuar baixas freqüências e passar freqüências elevadas, conforme é indicado por sua resposta em módulo.



**FIGURA 2.19** As respostas em módulo de dois sistemas de tempo discreto simples. (a) Um sistema que faz a média de sucessivas entradas tende a atenuar freqüências elevadas. (b) Um sistema que faz a diferença de sucessivas entradas tende a atenuar baixas freqüências.

**EXEMPLO 2.15** A resposta ao impulso do sistema que relaciona a tensão de entrada com a tensão no capacitor na Figura 2.10 é dada por

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Encontre uma expressão para a resposta em freqüência e trace graficamente a resposta em módulo e a resposta em fase.

**Solução:** Substituir  $h(t)$  na equação (2.27) resulta em

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau/RC} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+1/RC)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{RC} \frac{-1}{(j\omega+1/RC)} e^{-(j\omega+1/RC)\tau} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{RC} \frac{-1}{(j\omega+1/RC)} (0 - 1) \\ &= \frac{1/RC}{j\omega+1/RC} \end{aligned}$$

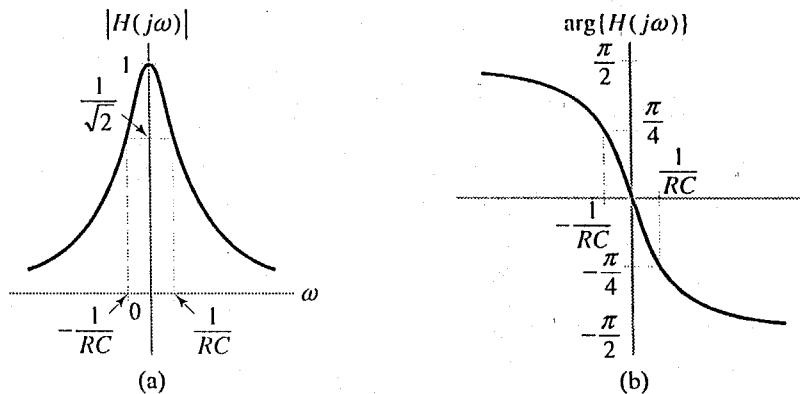
A resposta em módulo é

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

enquanto que a resposta em fase é

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\arctg(\omega RC)$$

A resposta em módulo e a resposta em fase são apresentadas nas Figuras 2.20(a) e (b), respectivamente. A resposta em módulo indica que o circuito  $RC$  tende a atenuar senóides de alta freqüência. Isto está de acordo com nossa intuição da análise do circuito. O circuito não pode responder a mudanças rápidas na tensão de entrada. As senóides de alta freqüência também experimentam um deslocamento de fase de  $\pi/2$  radianos. As senóides de baixa freqüência são passadas pelo circuito com um ganho muito mais elevado e experimentam relativamente pouco deslocamento de fase.



**FIGURA 2.20** Resposta em freqüência do circuito  $RC$  da Figura 2.10. (a) Resposta em módulo. (b) Resposta em fase.

► **EXERCÍCIO 2.8** Encontre uma expressão para a resposta em freqüência do sistema de tempo discreto com resposta ao impulso

$$h[n] = (-a)^n u[n]$$

supondo que  $|a| < 1$ .

*Resposta:*

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 + ae^{-j\Omega}}$$

## 2.4 Representações por Equações Diferenciais e de Diferenças para Sistemas LTI

As equações de diferenças e diferenciais de coeficientes constantes lineares fornecem outra representação das características de entrada-saída de sistemas LTI. As equações de diferenças são usadas para representar sistemas de tempo discreto, enquanto as equações diferenciais representam sistemas de tempo contínuo. A forma geral de uma equação diferencial de coeficientes constantes lineares é

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (2.28)$$

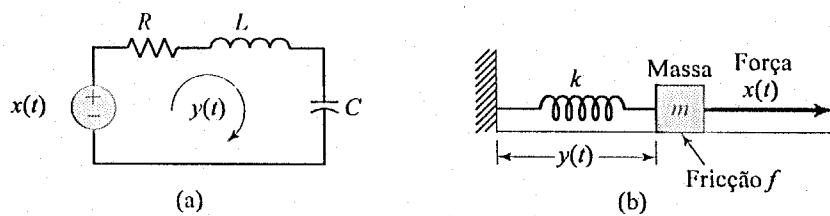
Aqui,  $x(t)$  é a entrada no sistema, e  $y(t)$  é a saída. Uma equação linear de diferenças com coeficientes constantes tem uma forma similar, com as derivadas substituídas pelos valores retardados da entrada  $x[n]$  e da saída  $y[n]$ , como é mostrado por

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.29)$$

O número inteiro  $N$  é chamado *ordem* da equação diferencial ou de diferenças e corresponde à derivada mais elevada ou memória máxima que envolve a saída do sistema, respectivamente. A ordem representa o número de dispositivos de armazenamento de energia no sistema.

Como um exemplo de equação diferencial que descreve o comportamento de um sistema físico, considere o circuito *RLC* descrito na Figura 2.21(a). Suponha que a entrada seja a fonte de tensão  $x(t)$  e a saída seja a corrente em torno da malha,  $y(t)$ . Somando as quedas de tensão em torno da malha resulta em

$$Ry(t) + L \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = x(t)$$



**FIGURA 2.21** Exemplos de sistemas descritos por equações diferenciais. (a) Circuito *RLC*. (b) Sistema mola-massa-amortecedor.

Diferenciando ambos os lados desta equação com respeito a  $t$  dá

$$\frac{1}{C} y(t) + R \frac{dy(t)}{dt} + L \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Esta equação diferencial descreve a relação entre a corrente  $y(t)$  e a tensão  $x(t)$  no circuito. Neste exemplo, a ordem é  $N = 2$ , e notamos que o circuito contém dois dispositivos de armazenamento de energia: um capacitor e um indutor.

Sistemas mecânicos também podem ser descritos em termos de equações diferenciais usando as leis de Newton. No sistema descrito na Figura 2.21(b), a força aplicada,  $x(t)$ , é a entrada, e a posição da massa,  $y(t)$ , é a saída. A força associada com a mola é diretamente proporcional à posição, a força, devido à fricção, é diretamente proporcional à velocidade, e a força devida à massa é proporcional à aceleração. Equacionando as forças na massa resulta em

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + f \frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = x(t)$$

Esta equação diferencial relaciona a posição com a força aplicada. O sistema contém dois mecanismos de armazenamento de energia, uma mola e uma massa, e a ordem é  $N = 2$ .

Um exemplo de uma equação de diferenças de segunda ordem é

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] \quad (2.30)$$

Esta equação de diferenças poderia representar a relação entre os sinais de entrada e saída de um sistema que processa dados em um computador. Neste exemplo, a ordem é  $N = 2$  porque a equação de diferenças envolve  $y[n-2]$ , implicando uma memória máxima na saída do sistema igual a 2. A memória em um sistema de tempo discreto é análoga ao armazenamento de energia em um sistema de tempo contínuo.

As equações de diferenças são facilmente reorganizadas para se obter fórmulas recursivas para computar a saída corrente do sistema a partir do sinal de entrada e das saídas passadas. Reescreva a equação (2.29) de forma que  $y[n]$  esteja sozinho no lado esquerdo, como é mostrado por

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

Esta equação indica como obter  $y[n]$  a partir da entrada e dos valores passados da saída. Essas equações freqüentemente são usadas para implementar sistemas de tempo discreto em um computador. Considere computar  $y[n]$  para  $n \geq 0$  a partir de  $x[n]$  para o exemplo de equação de diferenças de segunda ordem dada na equação (2.30). Temos

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2]$$

Iniciando com  $n = 0$ , podemos determinar a saída avaliando a seqüência das equações

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] + 2x[-1] - y[-1] - \frac{1}{4}y[-2] \\ y[1] &= x[1] + 2x[0] - y[0] - \frac{1}{4}y[-1] \end{aligned}$$

$$y[2] = x[2] + 2x[1] - y[1] - \frac{1}{4}y[0]$$

$$y[3] = x[3] + 2x[2] - y[2] - \frac{1}{4}y[1]$$

⋮

Em cada equação, a saída corrente é computada a partir da entrada e dos valores passados da saída. Para iniciarmos este processo no instante  $n = 0$ , devemos conhecer os dois valores passados mais recentes da saída, a saber,  $y[-1]$  e  $y[-2]$ . Estes valores são conhecidos como *condições iniciais*. Esta técnica para encontrar a saída de um sistema é muito útil para a computação, mas não fornece muito *insight* sobre a relação entre a descrição por equação de diferenças e as características do sistema.

As condições iniciais resumem todas as informações sobre o passado do sistema que são necessárias para determinar as saídas futuras. Nenhuma informação adicional sobre a saída ou entrada passadas é necessária. Note que, em geral, o número de condições iniciais necessárias para determinar a saída é igual à ordem do sistema. Condições iniciais também são necessárias para resolver equações diferenciais. Neste caso, as condições iniciais são os valores das primeiras  $N$  derivadas da saída

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

avaliados no instante  $t_0$ , depois do qual desejamos determinar  $y(t)$ . As condições iniciais em uma descrição por equação diferencial para um sistema LTI estão diretamente relacionadas com os valores iniciais dos dispositivos de armazenamento de energia do sistema como, por exemplo, tensões iniciais dos capacitores e correntes iniciais dos indutores. Como no caso de tempo discreto, as condições iniciais resumem todas as informações sobre o passado do sistema que podem ter impacto sobre saídas futuras. Conseqüentemente, as condições iniciais também representam a “memória” de sistemas de tempo contínuo.

**EXEMPLO 2.16** Um sistema é descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - 1,143y[n-1] + 0,4128y[n-2] = 0,0675x[n] + 0,1349x[n-1] + 0,0675x[n-2]$$

Escreva uma fórmula recursiva para computar a saída atual a partir das saídas passadas e entradas presentes. Determine a resposta ao degrau do sistema, a saída do sistema quando a entrada for zero e as condições iniciais forem  $y[-1] = 1$ ,  $y[-2] = 2$ , e a saída em resposta às entradas senoidais  $x_1[n] = \cos(\frac{1}{10}\pi n)$ ,  $x_2[n] = \cos(\frac{1}{5}\pi n)$ , e  $x_3[n] = \cos(\frac{7}{10}\pi n)$ , supondo condições iniciais iguais a zero. Por fim, encontre a saída do sistema se a entrada for correspondente aos dados de temperatura média de janeiro descritos na Figura 2.22(f).

**Solução:** Reescrevemos a equação de diferenças conforme é mostrado por

$$y[n] = 1,143y[n-1] - 0,4128y[n-2] + 0,0675x[n] + 0,1349x[n-1] + 0,0675x[n-2]$$

Esta equação é avaliada de maneira recursiva para determinar a saída do sistema a partir da entrada e das condições iniciais  $y[-1]$  e  $y[-2]$ .

A resposta ao degrau do sistema é avaliada supondo-se a entrada como um degrau,  $x[n] = u[n]$ , e o sistema inicialmente em repouso, de forma que as condições iniciais são iguais a zero. A Figura 2.22(a) descreve os 50 primeiros valores da resposta ao degrau.

Este sistema responde a um degrau subindo inicialmente para um valor ligeiramente maior do que a amplitude de entrada e decrescendo depois para o valor da entrada em aproximadamente  $n = 13$ . Para um  $n$  suficientemente grande, podemos considerar o degrau como sendo uma entrada dc ou constante. Como a amplitude de saída é igual à amplitude de entrada, vemos que este sistema tem ganho unitário para entradas constantes.

A resposta do sistema às condições iniciais  $y[-1] = 1$ ,  $y[-2] = 2$  e entrada zero é mostrada na Figura 2.22(b). Não obstante a natureza recursiva da equação de diferenças sugerir que as condições iniciais afetam todos os valores futuros da saída, vemos que a parte significativa da saída devida às condições iniciais perdura até aproximadamente  $n = 13$ .

As saídas devidas às entradas senoidais  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  e  $x_3[n]$  são descritas nas Figuras 2.22(c), (d) e (e), respectivamente. Uma vez que estamos distantes das condições iniciais e entramos numa condição de estado estacionário, vemos que a saída do sistema é uma senóide que tem a mesma freqüência que a entrada. Lembre-se que a razão da saída em estado estacionário em relação à amplitude da senóide de entrada é a resposta em módulo do sistema. A resposta em módulo na freqüência  $\frac{1}{10}\pi$  é a unidade, é aproximadamente 0,7 na freqüência  $\frac{1}{5}\pi$  e está próxima de zero na freqüência  $\frac{7}{10}\pi$ . Estes resultados sugerem que a resposta em módulo deste sistema decresce à medida que a freqüência se eleva; ou seja, o sistema atenua os componentes da entrada que variam rapidamente, enquanto deixa passar com ganho unitário aqueles que variam lentamente. Esta característica é evidente na saída do sistema em resposta à entrada da temperatura média de janeiro mostrada na Figura 2.22(g). Vemos que a saída inicialmente sobe gradualmente da mesma maneira que a resposta ao degrau. Esta é uma consequência de presumir que a entrada seja zero antes de 1900. Por volta de 1906, o sistema tem um efeito de suavização, uma vez que ele atenua flutuações rápidas na entrada e passa termos constantes com ganho zero.

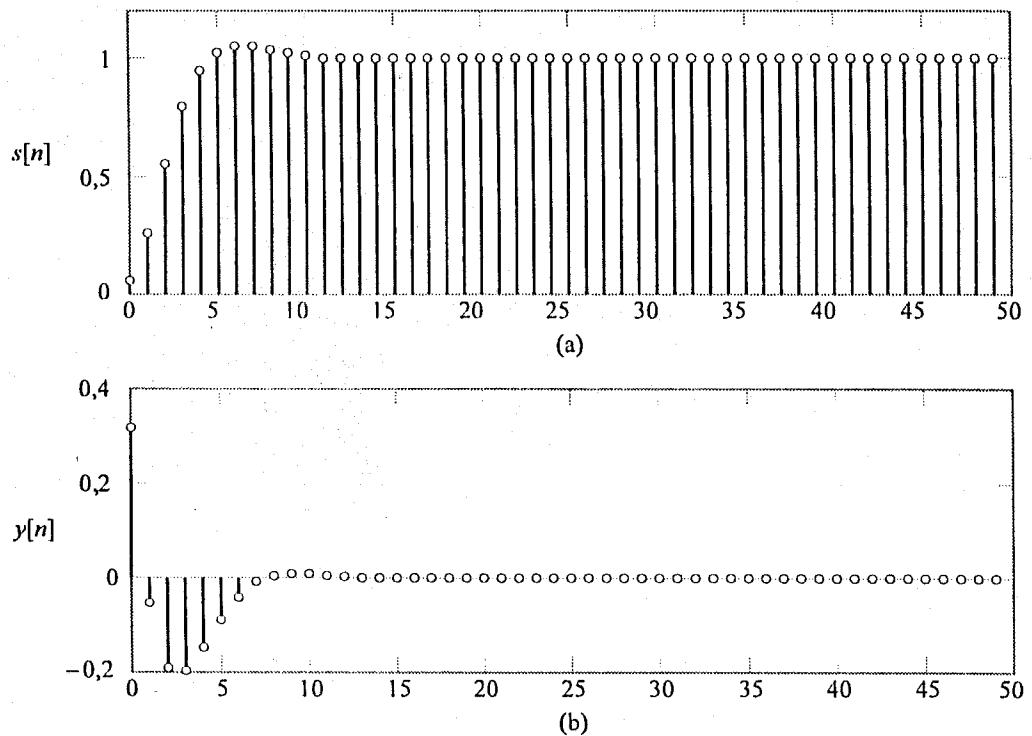
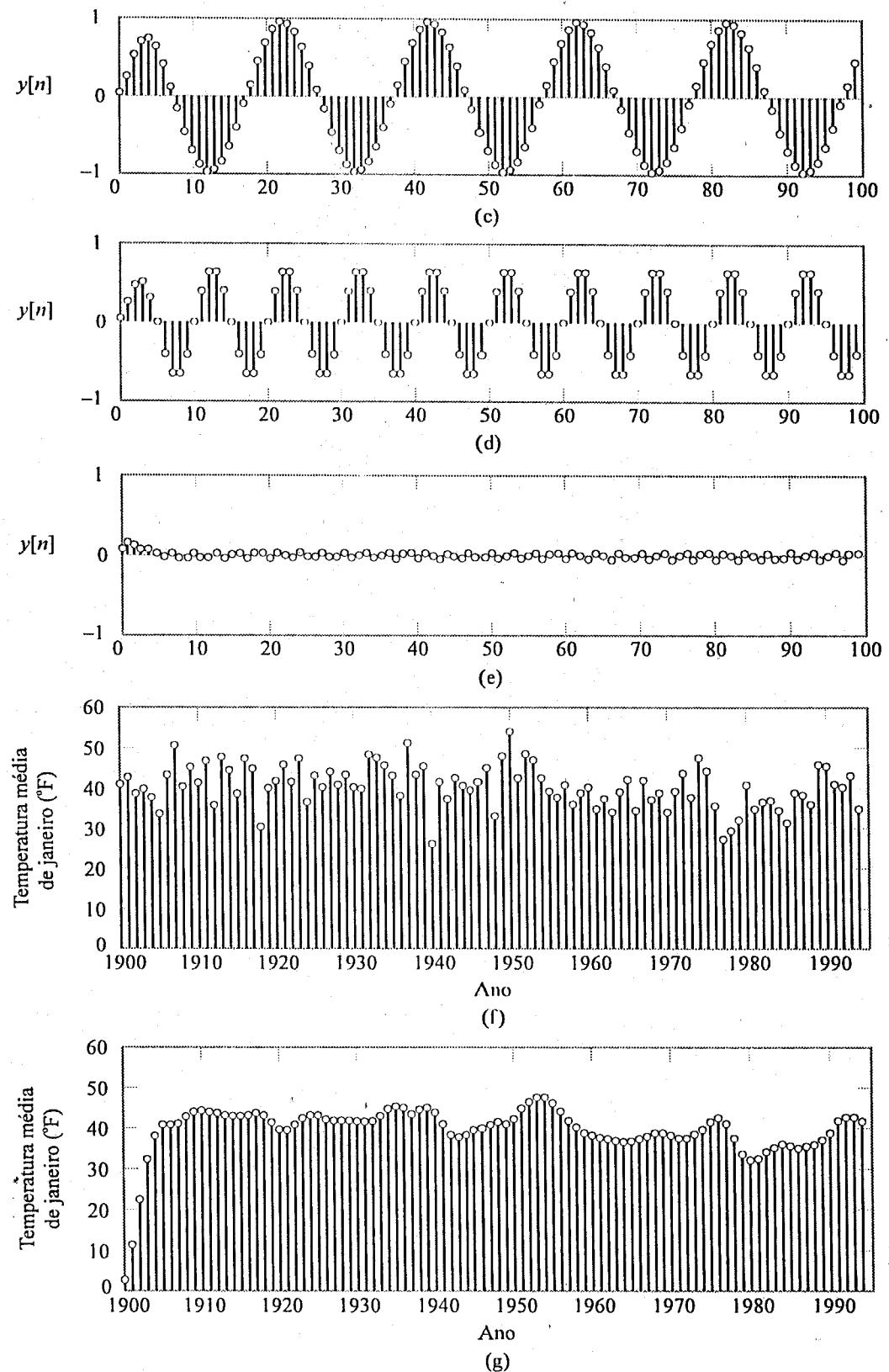


FIGURA 2.22 Ilustração da solução para o Exemplo 2.16. (a) Resposta ao degrau do sistema. (b) Saída devida a condições iniciais diferentes de zero com entrada zero.



**FIGURA 2.22** (c) Saída devido a  $x_1[n] = \cos(\frac{1}{10}\pi n)$ . (d) Saída devido a  $x_2[n] = \cos(\frac{1}{5}\pi n)$ . (e) Saída devido a  $x_3[n] = \cos(\frac{7}{10}\pi n)$ . (f) Sinal de entrada que consiste em dados da temperatura média de janeiro. (g) Saída associada com dados da temperatura média de janeiro.

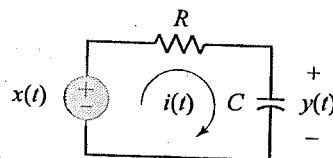


FIGURA 2.23 Circuito RC.

► **EXERCÍCIO 2.9** Escreva uma equação diferencial que descreva a relação entre a tensão de entrada  $x(t)$  e a tensão  $y(t)$  no capacitor da Figura 2.23.

**Resposta:**

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

### ■ RESOLVENDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E DE DIFERENÇAS

Revisaremos brevemente um método para resolver equações diferenciais e de diferenças. Ele fornece uma caracterização geral de soluções que proporciona um *insight* do comportamento do sistema.

É conveniente expressar a saída de um sistema descrito por uma equação diferencial ou de diferenças como uma soma de dois componentes: um, associado somente com as condições iniciais, e o outro, devido somente à entrada. Denominaremos o componente da saída associado com as condições iniciais *resposta natural* do sistema e o denotaremos como  $y^{(n)}$ . O componente da saída devido somente à entrada é denominado *resposta forçada* do sistema e será denominado  $y^{(f)}$ . A resposta natural é a saída do sistema para entrada zero, enquanto a resposta forçada é a saída do sistema, supondo condições iniciais nulas. Diz-se que um sistema com condições iniciais nulas está em repouso, uma vez que não há nenhuma energia armazenada ou memória no sistema. A resposta natural descreve a maneira pela qual o sistema dissipá qualquer energia ou memória do passado representadas pelas condições iniciais diferentes de zero. A resposta forçada descreve o comportamento do sistema, que é “forçado” pela entrada quando o sistema está em repouso.

#### A Resposta Natural

A resposta natural é a saída do sistema quando a entrada é zero. Conseqüentemente, para um sistema de tempo contínuo, a resposta natural,  $y^{(n)}(t)$ , é a solução para a equação homogênea.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y^{(n)}(t) = 0$$

A resposta natural para um sistema de tempo contínuo tem a forma

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{r_i t} \quad (2.31)$$

em que  $r_i$  são as  $N$  raízes da equação característica do sistema

$$\sum_{k=0}^N a_k r^k = 0 \quad (2.32)$$

A substituição da equação (2.31) na equação homogênea estabelece que  $y^{(n)}(t)$  é a solução para qualquer conjunto de constantes  $c_i$ .

Em tempo discreto, a resposta natural  $y^{(n)}[n]$  é a solução para a equação homogênea

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(n)}[n-k] = 0$$

Ela tem a forma

$$y^{(n)}[n] = \sum_{i=1}^N c_i r_i^n \quad (2.33)$$

em que  $r_i$  são as  $N$  raízes da equação característica do sistema de tempo discreto

$$\sum_{k=0}^N a_k r^{N-k} = 0 \quad (2.34)$$

Mais uma vez, a substituição da equação 2.33 na equação homogênea estabelece que  $y^{(n)}[n]$  é uma solução. Em ambos os casos, os  $c_i$  são determinados de forma que a solução  $y^{(n)}$  satisfaça as condições iniciais. Note que as equações características de tempo contínuo e de tempo discreto diferem.

A forma da resposta natural se modifica ligeiramente quando a equação característica descrita pela equação 2.32 ou pela equação 2.34 tiver raízes repetidas. Se a raiz  $r_i$  for repetida  $p$  vezes, então incluímos  $p$  termos distintos nas soluções das equações (2.31) e (2.33) associadas com  $r_i$ . Elas envolvem as  $p$  funções

$$e^{r_i t}, te^{r_i t}, \dots, t^{p-1} e^{r_i t}$$

e

$$r_j^n, nr_j^n, \dots, n^{p-1} r_j^n$$

respectivamente.

A natureza de cada termo na resposta natural depende de se as raízes  $r_i$  são reais, imaginárias ou complexas. Raízes reais levam a exponenciais reais, raízes imaginárias levam a senóides, e raízes complexas levam a senóides exponencialmente amortecidas.

**EXEMPLO 2.17** Considere o circuito  $RL$  descrito na Figura 2.24 como um sistema cuja entrada é a tensão aplicada  $x(t)$  e a saída, a corrente  $y(t)$ . Encontre uma equação diferencial que descreva este sistema e determine a resposta natural do sistema para  $t > 0$  supondo que a corrente que atravessa o indutor no instante  $t = 0$  seja  $y(0) = 2$  A.

*Solução:* Somando as tensões em torno da malha resultará na equação diferencial

$$Ry(t) + L \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

A resposta natural é a solução da equação homogênea:

$$Ry(t) + L \frac{dy(t)}{dt} = 0$$

A solução é dada pela equação (2.31) para  $N = 1$ ,

$$y^{(n)}(t) = c_1 e^{r_1 t} A$$

em que  $r_1$  é a raiz da equação

$$R + Lr = 0$$

Conseqüentemente,  $r_1 = -R/L$ . O coeficiente  $c_1$  é determinado de forma que a resposta satisfaça a condição inicial  $y(0) = 2$ . Isto implica que  $c_1 = 2$  e que a resposta natural deste sistema é

$$y^{(n)}(t) = 2e^{-(R/L)t} A, t \geq 0$$

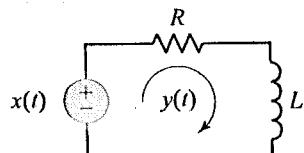


FIGURA 2.24 Circuito  $RL$ .

► **Exercício 2.10** Determine a forma da resposta natural correspondente ao sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] + 2x[n-2]$$

**Resposta:**

$$y^{(n)}[n] = c_1 \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\right)^n$$

► **Exercício 2.11** Determine a forma da resposta natural para o circuito RLC descrito na Figura 2.21(a) como uma função de  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Indique as condições em  $R$ ,  $L$  e  $C$  a fim de que a resposta natural consista de exponenciais reais, senóides complexas e senóides exponencialmente amortecidas.

**Resposta:** para  $R^2 \neq 4L/C$ ,

$$y^{(n)}(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

em que

$$r_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}, \quad r_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

Para  $R^2 = 4L/C$ ,

$$y^{(n)}(t) = c_1 e^{-(R/2L)t} + c_2 t e^{-(R/2L)t}$$

Para exponenciais reais  $R^2 > 4L/C$ , para senóides complexas  $R = 0$  e para senóides exponencialmente amortecidas  $R^2 < 4L/C$ .

### A Resposta Forçada

A resposta forçada é a solução para a equação diferencial ou de diferenças correspondente à entrada dada, supondo-se que as condições iniciais sejam zero. Ela consiste na soma de dois componentes: um termo que tem a mesma forma que a resposta natural, e uma solução particular.

A solução particular é denotada como  $y^{(p)}$  e representa qualquer solução para a equação diferencial ou de diferenças para a entrada dada. Normalmente, ela é obtida supondo-se que a saída do sistema tenha a mesma forma geral que a entrada. Por exemplo, se a entrada em um sistema de tempo discreto for  $x[n] = \alpha^n$ , então supomos que a saída tenha a forma  $y^{(p)}[n] = c\alpha^n$  e encontramos a constante  $c$  de forma que  $y^{(p)}[n]$  seja uma solução para a equação de diferenças do sistema. Se a entrada for  $x[n] = A \cos(\Omega n + \phi)$ , então supomos uma resposta senoidal geral que tem a forma  $y^{(p)}[n] = c_1 \cos(\Omega n) + c_2 \sin(\Omega n)$ , em que  $c_1$  e  $c_2$  são determinados a fim de que  $y^{(p)}[n]$  satisfaça a equação de diferenças do sistema.

**TABELA 2.1 Forma de uma Solução Particular Correspondente a Diversas Entradas Comuns**

Tempo Contínuo		Tempo Discreto	
Entrada	Solução Particular	Entrada	Solução Particular
$1$	$c$	$1$	$c$
$e^{-at}$	$ce^{-at}$	$\alpha^n$	$c\alpha^n$
$\cos(\omega t + \phi)$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$	$\cos(\Omega n + \phi)$	$c_1 \cos(\Omega n) + c_2 \sin(\Omega n)$

Supor que uma saída tem a mesma forma de uma entrada está de acordo com a nossa expectativa de que a saída do sistema esteja diretamente relacionada à entrada.

A forma da solução particular associada com sinais de entrada comuns é dada na Tabela 2.1. Tabelas mais extensivas são apresentadas em livros dedicados à solução de equações diferenciais e de diferenças como, por exemplo, aqueles listados no fim deste capítulo. O procedimento para identificar uma solução particular é ilustrado no exemplo a seguir.

**EXEMPLO 2.18** Considere o circuito  $RL$  do Exemplo 2.17 e descrito na Figura 2.24. Encontre uma solução particular para este sistema com uma entrada  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  V.

**Solução:** A equação diferencial que descreve este sistema foi obtida no Exemplo 2.17 como

$$Ry(t) + L \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Supomos uma solução particular da forma  $y^{(p)}(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$ . Substituir  $y(t)$  na equação diferencial por  $y^{(p)}(t)$  e  $x(t)$  por  $\cos(\omega_0 t)$  resulta em

$$Rc_1 \cos(\omega_0 t) + Rc_2 \sin(\omega_0 t) - L\omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t) + L\omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t)$$

os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são obtidos igualando-se separadamente os coeficientes de  $\cos(\omega_0 t)$  e  $\sin(\omega_0 t)$ . Isto resulta em um sistema de duas equações com duas incógnitas, como é mostrado por

$$\begin{aligned} Rc_1 + L\omega_0 c_2 &= 1 \\ -L\omega_0 c_1 + Rc_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvê-las para  $c_1$  e para  $c_2$  resulta em

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{R}{R^2 + L^2 \omega_0^2} \\ c_2 &= \frac{L\omega_0}{R^2 + L^2 \omega_0^2} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a solução particular é

$$y^{(p)}(t) = \frac{R}{R^2 + L^2 \omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{L\omega_0}{R^2 + L^2 \omega_0^2} \sin(\omega_0 t) \quad \Delta$$

Esta abordagem para encontrar uma solução particular é modificada quando a entrada tem a mesma forma que um dos componentes da resposta natural. Neste caso, devemos supor uma solução particular que seja independente de todos os termos da resposta natural a fim de se obter a resposta forçada do sistema.

Isto é realizado de maneira análoga ao procedimento utilizado para gerar componentes de resposta natural independentes quando há raízes repetidas na equação característica. Especificamente, multiplicamos a forma da solução particular pela menor potência de  $t$  ou  $n$  que dê um componente de resposta não incluído na resposta natural. Por exemplo, se a resposta natural contiver os termos  $e^{-at}$  e  $te^{-at}$  devidos a uma raiz de segunda ordem em  $-a$ , e se a entrada for  $x(t) = e^{-at}$ , então supomos uma solução particular da forma  $y^{(p)}(t) = ct^2 e^{-at}$ .

A resposta forçada do sistema é obtida somando-se a solução particular com a forma da resposta natural e encontrando-se os coeficientes não especificados na resposta natural, de forma que a resposta combinada satisfaça condições iniciais iguais a zero. Supondo que a entrada seja aplicada no instante  $t = 0$  ou  $n = 0$ , teremos o seguinte procedimento:

1. Encontre a forma da resposta natural  $y^{(n)}$  a partir das raízes da equação característica.
2. Encontre uma solução particular  $y^{(p)}$  supondo que ela tenha a mesma forma que a entrada ainda independente de todos os termos na resposta natural.
3. Determine os coeficientes na resposta natural de forma que a resposta forçada  $y^{(f)} = y^{(p)} + y^{(n)}$  tenha condições iniciais iguais a zero em  $t = 0$  ou  $n = 0$ . A resposta forçada é válida para  $t \geq 0$  ou  $n \geq 0$ .

No caso de tempo discreto, as condições iniciais iguais a zero,  $y^{(f)}[-N], \dots, y^{(f)}[-1]$ , devem ser transladas para tempos  $n \geq 0$ , uma vez que a resposta forçada é válida somente para tempos  $n \geq 0$ . Isto é realizado usando-se a forma recursiva da equação de diferenças, a entrada, e as condições em repouso  $y^{(f)}[-N], \dots, y^{(f)}[-1] = 0$  para obter as condições iniciais transladas  $y^{(f)}[0], y^{(f)}[1], \dots, y^{(f)}[N-1]$ . Estas são, então, usadas para determinar os coeficientes desconhecidos no componente de resposta natural de  $y^{(f)}[n]$ .

**EXEMPLO 2.19** Encontre a resposta forçada do circuito  $RL$  descrito na Figura 2.24 para uma entrada  $x(t) = \cos(t)$  V, supondo valores normalizados  $R = 1 \Omega$  e  $L = 1 \text{ H}$ .

*Solução:* A forma da resposta natural foi obtida no Exemplo 2.17 como

$$y^{(n)}(t) = ce^{-(R/L)t} \quad \text{A}$$

Uma solução particular foi obtida no Exemplo 2.18 para esta entrada como

$$y^{(p)}(t) = \frac{R}{R^2 + L^2} \cos(t) + \frac{L}{R^2 + L^2} \sin(t) \quad \text{A}$$

onde usamos  $\omega_0 = 1$ . Substituindo  $R = 1 \Omega$  e  $L = 1 \text{ H}$ , a resposta forçada para  $t \geq 0$  será

$$y^{(f)}(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \quad \text{A}$$

O coeficiente  $c$  agora é determinado a partir da condição inicial  $y(0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= ce^{-0} + \frac{1}{2} \cos 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \\ &= c + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e, desse modo, descobrimos que  $c = -\frac{1}{2}$ .

► **EXERCÍCIO 2.12** Um sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$$

tem o sinal de saída  $x[n] = u[n]$ . Encontre a resposta forçada do sistema. Sugestão: Use  $y[n] = \frac{1}{4}y[n-2] + 2x[n] + x[n-1]$  com  $x[n] = u[n]$  e  $y^{(f)}[-2] = 0, y^{(f)}[-1] = 0$ , para determinar  $y^{(f)}[0]$  e  $y^{(f)}[1]$ .

*Resposta:*

$$y[n] = (-2(\frac{1}{2})^n + 4) u[n]$$

### A Resposta Completa

A resposta completa do sistema é a soma da resposta natural e da resposta forçada. Se não houver necessidade de obter separadamente a resposta natural e a forçada, então a resposta completa do sistema poderá ser obtida diretamente repetindo-se o procedimento dos três passos para determinar a resposta forçada, usando-se as condições iniciais reais em vez de condições iniciais zero. Isto é ilustrado no exemplo a seguir.

**EXEMPLO 2.20** Encontre a corrente que atravessa o circuito  $RL$  descrito na Figura 2.24 para uma tensão aplicada  $x(t) = \cos(t)$  V, supondo valores normalizados  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  e que a condição inicial seja  $y(0) = 2 \text{ A}$ .

*Solução:* A forma da resposta forçada foi obtida no Exemplo 2.19 como

$$y(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \quad \text{A}$$

Obtemos a resposta completa do sistema procurando a solução para  $c$  de forma que a condição inicial  $y(0) = 2$  seja satisfeita. Isto implica

$$2 = c + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0)$$

ou  $c = \frac{3}{2}$ . Consequentemente,

$$y(t) = \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \quad A, t \geq 0$$

Note que isto corresponde à soma das respostas natural e forçada. No Exemplo 2.17, obtivemos

$$y^{(n)}(t) = 2e^{-t} \quad A, t \geq 0$$

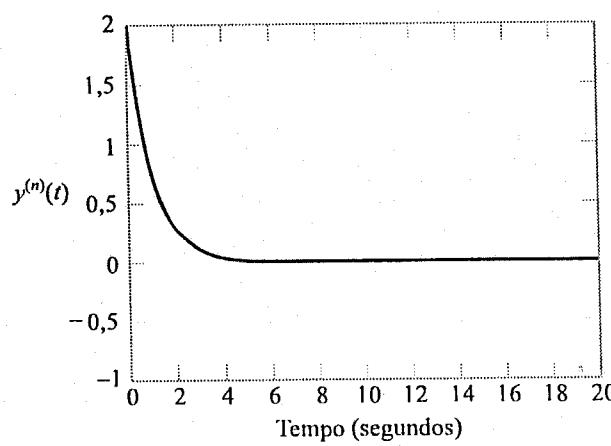
enquanto no Exemplo 2.19 obtivemos

$$y^{(f)}(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \quad A, t \geq 0$$

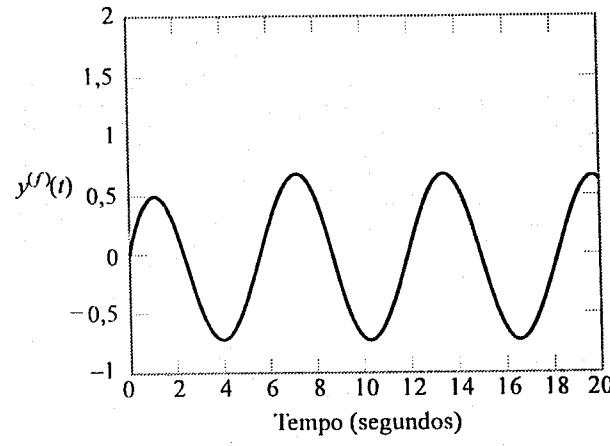
A soma,  $y(t) = y^{(n)}(t) + y^{(f)}(t)$ , é dada por

$$y(t) = \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \quad A, t \geq 0$$

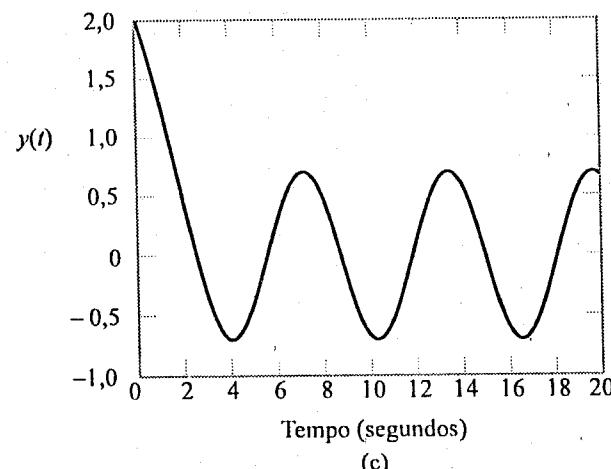
e é exatamente igual à resposta que obtivemos resolvendo diretamente para a resposta completa. A Figura 2.25 descreve as respostas natural, forçada e completa do sistema.



(a)



(b)



(c)

**FIGURA 2.25** Resposta do circuito  $RL$  descrito na Figura 2.24 para a entrada  $x(t) = \cos(t)$  V quando  $y(0) = 2$  A. (Veja o Exemplo 2.20.) (a) Resposta natural. (b) Resposta forçada. (c) Resposta completa.

► **EXERCÍCIO 2.13** Encontre a resposta do circuito  $RC$  descrito na Figura 2.23 para  $x(t) = u(t)$ , supondo que a tensão inicial no capacitor seja  $y(0) = -1$  V.

**Resposta:**

$$y(t) = (1 - 2e^{-t/RC}) \quad V, t \geq 0$$

### A Resposta ao Impulso

O método descrito até aqui para resolver equações diferenciais e de diferenças não pode ser usado para encontrar a resposta ao impulso diretamente. Entretanto, a resposta ao impulso é facilmente determinada encontrando-se primeiro a resposta ao degrau e depois explorando-se a relação entre a resposta ao impulso e ao degrau.

A definição da resposta ao degrau supõe que o sistema esteja em repouso, de forma que ela representa a resposta forçada do sistema a uma entrada em degrau. Para um sistema de tempo contínuo, a resposta ao impulso,  $h(t)$ , está relacionada à resposta ao degrau,  $s(t)$ , como  $h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$ . Para um sistema de tempo discreto, temos  $h[n] = s[n] - s[n-1]$ . Dessa forma, a resposta ao impulso é obtida por diferenciação ou por diferença na resposta ao degrau. As operações de diferenciação e de diferença eliminam o termo constante associado com a solução particular na resposta ao degrau e modificam somente as constantes associadas com os termos exponenciais no componente de resposta natural. Isto implica que a resposta ao impulso é somente uma função dos termos na resposta natural.

### CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS DESCritos POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E DE DIFERENÇAS

A resposta forçada de um sistema LTI descrito por uma equação diferencial ou de diferenças é linear com respeito à entrada. Se  $y_1^{(f)}$  for a resposta forçada associada com uma entrada  $x_1$  e  $y_2^{(f)}$  for a resposta forçada associada com uma entrada  $x_2$ , então a entrada  $\alpha x_1 + \beta x_2$  gerará uma resposta forçada dada por  $\alpha y_1^{(f)} + \beta y_2^{(f)}$ .

Similarmente, a resposta natural é linear com respeito às condições iniciais. Se  $y_1^{(n)}$  for a resposta natural associada com a condição inicial  $I_1$  e  $y_2^{(n)}$  for a resposta natural associada com a condição inicial  $I_2$ , então a condição inicial  $\alpha I_1 + \beta I_2$  resultará em uma resposta natural  $\alpha y_1^{(n)} + \beta y_2^{(n)}$ . A resposta forçada também é invariante no tempo. Um deslocamento no tempo na entrada resulta em um deslocamento no tempo na saída, uma vez que o sistema está inicialmente em repouso. Em geral, a resposta completa de um sistema descrito por uma equação diferencial ou de diferenças não é invariante no tempo, uma vez que a condição inicial resultará em um termo de saída que não se move com um deslocamento no tempo da entrada. Por fim, observamos que a resposta forçada também é causal. Uma vez que o sistema está inicialmente em repouso, a saída não se inicia antes do instante em que a entrada é aplicada ao sistema.

A resposta forçada depende tanto da entrada como das raízes da equação característica, já que ela envolve tanto a forma básica da resposta natural como uma solução particular para a equação diferencial ou de diferenças. A forma básica da resposta natural depende inteiramente das raízes da equação característica. A resposta ao impulso do sistema também depende das raízes da equação característica, uma vez que ela contém os termos idênticos em relação à resposta natural. Dessa forma, as raízes da equação característica fornece informações consideráveis sobre o comportamento do sistema.

Por exemplo, as características de estabilidade de um sistema estão diretamente relacionadas com as raízes da equação característica do sistema. Para ver isto, observe que a saída de um sistema estável em resposta a uma entrada zero deve ser limitada para qualquer conjunto de condições iniciais. Isto decorre da definição de estabilidade BIBO e implica que a resposta natural do sistema deve ser limitada. Dessa forma, cada termo da resposta natural deve ser limitado. No caso de tempo discreto, podemos ter  $|r_i^n|$  limitado, ou  $|r_i| < 1$ . Quando  $|r_i| = 1$ , a resposta natural não decai, e diz-se que o sistema está à beira da instabilidade. Para sistemas de tempo contínuo, impomos que  $|e^{r_i t}|$  seja limitado, o que implica que  $Re\{r_i\} < 0$ . Aqui, novamente, quando  $Re\{r_i\} = 0$ , diz-se que o sistema está à beira da instabilidade. Estes resultados implicam um sistema de tempo discreto instável se qualquer raiz da equação característica tiver um módulo maior do que a unidade, e um sistema de tempo contínuo instável se a parte real de qualquer raiz da equação característica for positiva.

Esta discussão estabelece as raízes da equação característica que indicam quando um sistema é instável. Nos capítulos posteriores, estabeleceremos que um sistema causal de tempo discreto é estável se, e somente se, todas as raízes da equação característica tiverem uma módulo menor do que a unidade, e que um sistema causal de tempo contínuo é estável se, e somente se, as partes reais de todas

as raízes da equação característica forem negativas. Estas condições de estabilidade implicam que a resposta natural de um sistema chega a zero quando o tempo se aproxima do infinito, uma vez que cada termo da resposta natural é um exponencial decrescente. Este “decrecer até zero” é coerente com nosso conceito intuitivo de comportamento de entrada zero do sistema. Esperamos uma saída zero quando a entrada é zero. As condições originais representam qualquer energia presente no sistema; em um sistema estável com entrada zero, esta energia, por fim, se dissipar, e a saída se aproxima de zero.

O tempo de resposta de um sistema também é determinado pelas raízes da equação característica. Assim que a resposta natural decresce até zero, o comportamento do sistema passa a ser regido somente pela solução particular — a qual tem a mesma forma que a entrada. Assim, o componente de resposta natural descreve o comportamento transitório do sistema: ou seja, ele descreve a transição de sua condição inicial para uma condição de equilíbrio determinada pela entrada. Consequentemente, o tempo de resposta transitório de um sistema é determinado pelo tempo que a resposta natural toma para decrescer até zero. Lembre-se de que a resposta natural contém termos que têm a forma  $r_i^n$  para um sistema de tempo discreto e  $e^{r_i t}$  para um sistema de tempo contínuo. O tempo de resposta transitório de um sistema de tempo discreto é, portanto, proporcional ao módulo da maior raiz da equação característica, enquanto o do sistema de tempo contínuo é determinado pela raiz cujo componente real está mais próximo de zero. Para que se possa ter um sistema de tempo contínuo com um tempo de resposta rápido, todas as raízes da equação característica devem ter partes reais grandes e negativas.

A resposta ao impulso do sistema pode ser determinada diretamente da descrição da equação diferencial ou de diferenças de um sistema, não obstante ser muito mais fácil obter a resposta ao impulso indiretamente usando-se os métodos descritos nos capítulos posteriores. Note que não há nenhuma provisão de condições iniciais quando se usa a resposta ao impulso; ela se aplica somente a sistemas que estão inicialmente em repouso ou quando a entrada é conhecida durante o tempo todo. As descrições de sistemas por equações diferenciais e de diferenças são mais flexíveis neste sentido, uma vez que se aplicam a sistemas que estão ou em repouso ou com condições iniciais diferentes de zero.

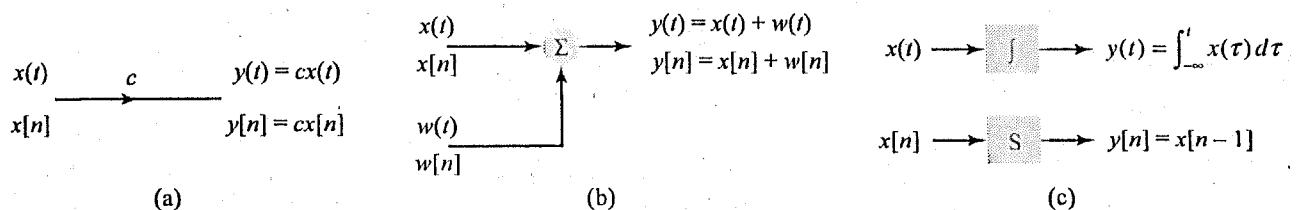
## 2.5 Representações em Diagrama de Blocos

Nesta seção, examinaremos as representações em diagrama de blocos para sistemas LTI descritos por equações diferenciais e de diferenças. Um *diagrama de blocos* é uma interconexão de operações elementares que agem no sinal de entrada. O diagrama de blocos é uma representação mais detalhada do sistema do que a resposta ao impulso ou descrições em equações diferenciais e de diferenças, uma vez que ele descreve como as computações ou operações internas do sistema são organizadas. A resposta ao impulso e as descrições por equações diferenciais ou de diferenças representam somente o comportamento de entrada-saída de um sistema. Mostraremos agora que um sistema com determinada característica de entrada-saída pode ser representado com diferentes diagramas de blocos. Cada representação em diagrama de blocos descreve um conjunto diferente de computações internas usadas para determinar a saída do sistema.

As representações em diagramas de blocos consistem em uma interconexão de três operações elementares com sinais:

1. Multiplicação por escalar:  $y(t) = cx(t)$  ou  $y[n] = cx[n]$ , onde  $c$  é um escalar.
2. Adição:  $y(t) = x(t) + w(t)$  ou  $y[n] = x[n] + w[n]$ .
3. Integração para sistemas de tempo contínuo:  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ , ou um deslocamento no tempo para sistemas de tempo discreto:  $y[n] = x[n - 1]$ .

A Figura 2.26 descreve os símbolos de diagramas de blocos usados para representar cada uma destas operações. Para expressar um sistema de tempo contínuo em termos de integração, converteremos a equação diferencial em uma equação integral. A operação de integração normalmente é usada em diagramas de blocos para sistemas de tempo contínuo em vez de diferenciação porque os integradores são mais facilmente construídos a partir de componentes analógicos do que os diferenciadores. Além disso, os integradores suavizam o ruído no sistema, enquanto os diferenciadores acentuam-no.



**FIGURA 2.26** Símbolos para operações elementares em descrições por diagramas de blocos para sistemas. (a) Multiplicação por escalar. (b) Adição. (c) Integração para sistemas de tempo contínuo e deslocamento no tempo para sistemas de tempo discreto.

A equação integral ou de diferenças correspondente ao comportamento do sistema é obtida expressando-se, na forma de equação, a seqüência de operações representadas pelo diagrama de blocos.

Inicie com o caso de tempo discreto. Um sistema de tempo discreto é apresentado na Figura 2.27. Considere escrever uma equação correspondente à parte do sistema que está dentro da caixa tracejada. A saída do primeiro deslocamento de tempo é  $x[n-1]$ . O segundo deslocamento de tempo tem a saída  $x[n-2]$ . As multiplicações por escalares e somas implicam que

$$w[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (2.35)$$

Agora podemos escrever uma expressão para  $y[n]$  em termos de  $w[n]$ . O diagrama de blocos indica que

$$y[n] = w[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] \quad (2.36)$$

A saída deste sistema pode ser expressa como uma função da entrada  $y[n]$  substituindo-se a equação (2.35) em  $w[n]$  na equação (2.36). Temos

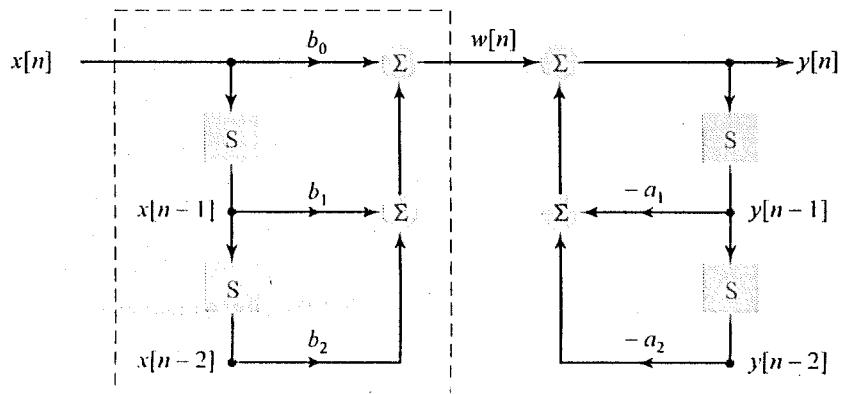
$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

ou

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (2.37)$$

Dessa forma, o diagrama de blocos da Figura 2.27 descreve um sistema cuja característica de entrada-saída é representada por uma equação de diferenças de segunda ordem.

Note que o diagrama de blocos representa explicitamente a operação envolvida na computação da saída a partir da entrada e nos diz como simular o sistema no computador. As operações de multiplicação por escalares e adição são facilmente avaliadas usando-se um computador. As saídas das operações de deslocamento de tempo correspondem a posições de memória no computador. Para computar a saída atual a partir da entrada atual precisamos ter guardado os valores passados da entrada e da saída na memória. Para iniciar uma simulação computadorizada em um tempo especificado, precisamos conhecer a entrada e os dois valores passados da saída, os quais são as condições iniciais necessárias para resolver diretamente a equação de diferenças.



**FIGURA 2.27** Representação em diagrama de blocos para um sistema de tempo discreto descrito por uma equação de diferenças de segunda ordem

► EXERCÍCIO 2.14 Determine a equação de diferenças correspondente à descrição em diagrama de blocos do sistema descrito na Figura 2.28.

*Resposta:*

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-3] = x[n] + 2x[n-2]$$

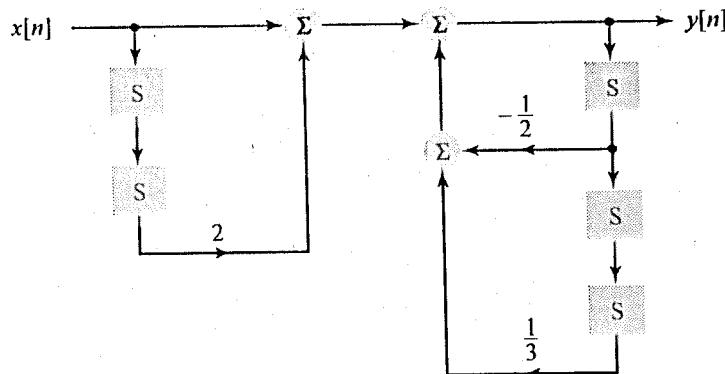


FIGURA 2.28 Representação em diagrama de blocos correspondente ao Exercício 2.14.

A descrição em diagrama de blocos de um sistema não é única. Ilustramos isto desenvolvendo uma segunda descrição em diagrama de blocos correspondente ao sistema descrito pela equação de diferenças de segunda ordem, dada pela equação (2.37). Podemos visualizar o sistema da Figura 2.27 como uma cascata de dois sistemas: um, com a entrada  $x[n]$  e saída  $w[n]$ , descritas pela equação (2.35), e um segundo com entrada  $w[n]$  e saída  $y[n]$ , descritas pela equação (2.36). Uma vez que estes são sistemas LTI, podemos permutar sua ordem sem mudar o comportamento de entrada-saída da cascata. Permute a ordem deles e denote a saída do novo primeiro sistema como  $f[n]$ . Esta saída é obtida da equação (2.36) e da entrada  $x[n]$ , como é mostrado por

$$f[n] = -a_1 f[n-1] - a_2 f[n-2] + x[n] \quad (2.38)$$

O sinal  $f[n]$  também é a entrada para o segundo sistema. A saída do segundo sistema,  $y[n]$ , é obtida da equação (2.35) como

$$y[n] = b_0 f[n] + b_1 f[n-1] + b_2 f[n-2] \quad (2.39)$$

Ambos os sistemas envolvem versões deslocadas no tempo de  $f[n]$ . Como consequência, somente um conjunto de deslocamentos no tempo é necessário no diagrama de blocos para este sistema. Podemos representar o sistema descrito pelas equações (2.38) e (2.39) como o diagrama de blocos ilustrado na Figura 2.29.

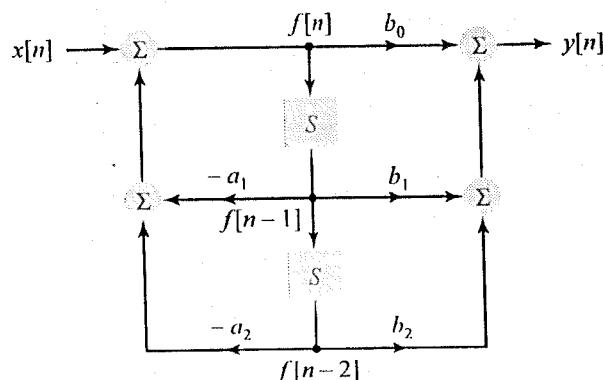


FIGURA 2.29 Representação alternativa em diagrama de blocos de um sistema descrito pela equação de diferenças de segunda ordem.

Os diagramas de blocos das Figuras 2.27 e 2.29 representam diferentes implementações de um sistema com o comportamento de entrada-saída descrito pela equação (2.37). O sistema da Figura 2.27 é denominado implementação “forma direta I.” O sistema da Figura 2.29 é denominado implementação “forma direta II.”

A implementação de forma direta II usa a memória mais eficientemente, uma vez que, para este exemplo, ela exige somente duas posições de memória, em comparação com as quatro exigidas pela forma direta I.

Há muitas implementações diferentes para um sistema cujo comportamento de entrada-saída é descrito por uma equação de diferenças. Elas são obtidas manipulando-se ou a equação de diferenças ou os elementos de uma representação em diagrama de blocos. Embora estes diferentes sistemas sejam equivalentes do ponto de vista de entrada-saída, de maneira geral eles diferem com respeito a outros critérios como, por exemplo, exigências de memória, número de computações necessárias por valor de saída, ou precisão numérica.

Resultados análogos são válidos para sistemas de tempo contínuo. Podemos simplesmente substituir as operações de deslocamento de tempo das Figuras 2.27 e 2.29 por diferenciação de tempo para obtermos representações em diagramas de blocos de sistemas descritos por equações diferenciais. Porém, para descrever o sistema de tempo contínuo em termos da operação de integração com maior facilidade de ser implementada, devemos primeiramente reescrever a descrição em equação diferencial

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (2.40)$$

como uma equação integral.

Definimos a operação de integração de maneira recursiva para simplificar a notação. Admitamos que  $v^{(0)}(t) = v(t)$  seja um sinal arbitrário e definamos

$$v^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^t v^{(n-1)}(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Conseqüentemente,  $v^{(n)}(t)$  é a integral  $n$ -upla de  $v(t)$  com respeito ao tempo. Esta definição integra em relação a todos os valores passados de tempo. Podemos reescrever isto em termos de uma condição inicial no integrador como

$$v^{(n)}(t) = \int_0^t v^{(n-1)}(\tau) d\tau + v^{(n)}(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se supormos condições iniciais zero, a integração e a diferenciação são operações inversas; ou seja,

$$\frac{d}{dt} v^{(n)}(t) = v^{(n-1)}(t), \quad t > 0 \text{ e } n = 1, 2, 3, \dots$$

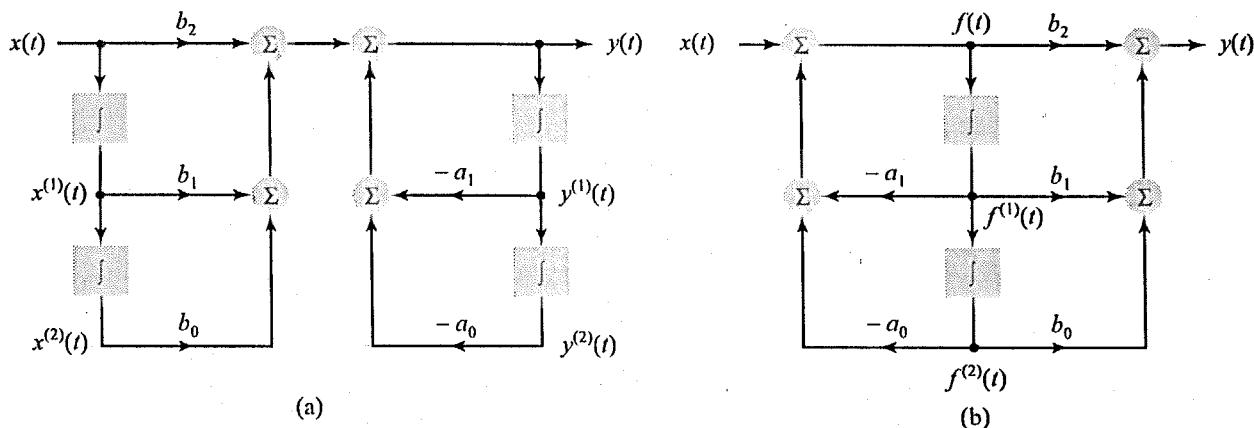
Conseqüentemente, se  $N \geq M$  e integrarmos a equação (2.40)  $N$  vezes, obteremos a descrição do sistema por equação integral:

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x^{(N-k)}(t) \quad (2.41)$$

Para um sistema de segunda ordem com  $a_2 = 1$ , a equação (2.41) pode ser escrita como

$$y(t) = -a_1 y^{(1)}(t) - a_0 y^{(2)}(t) + b_2 x(t) + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x^{(2)}(t) \quad (2.42)$$

As implementações de forma direta I e forma direta II deste sistema são apresentadas nas Figuras 2.30(a) e (b). É solicitado ao leitor mostrar que estes diagramas de blocos implementam a equação integral do Problema 2.25. Note que a implementação de forma direta II usa um número menor de integradores do que a implementação de forma direta I.



**FIGURA 2.30** Representações em diagramas de blocos correspondentes ao sistema de tempo contínuo descrito por uma equação integral de segunda ordem. (a) Forma direta I. (b) Forma direta II.

As representações em diagrama de blocos de sistemas de tempo contínuo podem ser usadas para especificar simulações computadorizadas analógicas de sistemas. Nessas simulações, os sinais são representados como tensões, resistores são usados para implementar multiplicação por escalar, e os integradores são construídos usando-se amplificadores operacionais, resistores e capacitores.

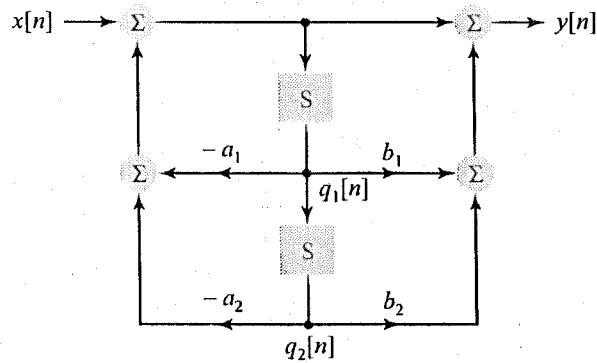
As condições iniciais são especificadas como tensões iniciais nos integradores. As simulações computadorizadas analógicas são muito mais trabalhosas do que as digitais e sofrem de flutuação, entretanto é comum simular sistemas de tempo contínuo em computadores digitais usando-se aproximações numéricas tanto para as operações de integração como de diferenciação.

## 2.6 Descrições por Variáveis de Estado para Sistemas LTI

A descrição por variáveis de estado para um sistema LTI consiste em uma série de equações diferenciais ou de diferenças de primeira ordem associadas que descrevem como o estado do sistema evolui e uma equação que relaciona a saída do sistema com variáveis de estado e entrada atuais. Estas equações são escritas na forma matricial. O *estado* de um sistema pode ser definido como um conjunto mínimo de sinais que representam a memória do passado inteiro do sistema. Ou seja, dado somente o valor do estado em um ponto do tempo  $n_0$  (ou  $t_0$ ) e a entrada para os tempos  $n \geq n_0$  (ou  $t \geq t_0$ ), podemos determinar a saída de todos os tempos  $n \geq n_0$  (ou  $t \geq t_0$ ). Veremos que a seleção de sinais que compreendem o estado de um sistema não é único e que há muitas descrições por variáveis de estado possíveis correspondentes a um sistema com determinada característica de entrada-saída. A capacidade de representar um sistema com diferentes descrições por variáveis de estado é um atributo poderoso que encontra aplicação em métodos avançados de análise de sistemas de controle e de implementação de sistemas de tempo discreto.

### ■ À DESCRIÇÃO POR VARIÁVEIS DE ESTADO

Desenvolveremos a descrição geral por variáveis de estado iniciando com a implementação da forma direta II de um sistema LTI de segunda ordem descrito na Figura 2.31. Para determinar a saída do sistema para  $n \geq n_0$ , devemos conhecer a saída para  $n \geq n_0$  e as saídas das operações de deslocamento de tempo rotuladas como  $q_1[n]$  e  $q_2[n]$  no instante  $n = n_0$ . Isto sugere que podemos escolher  $q_1[n]$  e  $q_2[n]$  como o estado do sistema. Note que, como  $q_1[n]$  e  $q_2[n]$  são as saídas das operações de deslocamento de tempo, o valor seguinte do estado,  $q_1[n+1]$  e  $q_2[n+1]$ , devem corresponder às variáveis na entrada para as operações de deslocamento de tempo.



**FIGURA 2.31** Representação em forma direta II de um sistema de tempo discreto de segunda ordem que ilustra as variáveis de estado  $q_1[n]$  e  $q_2[n]$ .

O diagrama de blocos indica que o valor seguinte do estado é obtido do estado atual e da entrada por meio das equações

$$q_1[n+1] = -a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n] + x[n] \quad (2.43)$$

$$q_2[n+1] = q_1[n] \quad (2.44)$$

O diagrama de blocos também indica que a saída do sistema é expressa em termos da entrada e do estado como

$$y[n] = x[n] - a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n] + b_1 q_1[n] + b_2 q_2[n]$$

ou

$$y[n] = (b_1 - a_1) q_1[n] + (b_2 - a_2) q_2[n] + x[n] \quad (2.45)$$

Escrevemos as equações (2.43) e (2.44) na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n] \quad (2.46)$$

enquanto a equação (2.45) é expressa como

$$y[n] = [b_1 - a_1 \quad b_2 - a_2] \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + [1] x[n] \quad (2.47)$$

Se definirmos o vetor estado como o vetor coluna

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}$$

poderemos reescrever as equações (2.46) e (2.47) como

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A} \mathbf{q}[n] + \mathbf{b} x[n] \quad (2.48)$$

$$y[n] = \mathbf{c} \mathbf{q}[n] + D x[n] \quad (2.49)$$

em que a matriz  $\mathbf{A}$ , os vetores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , e o escalar  $D$  são dados por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [b_1 - a_1 \quad b_2 - a_2], \quad D = [1]$$

As equações (2.48) e (2.49) são a forma geral de uma descrição por variáveis de estado correspondente a um sistema de tempo discreto. A matriz  $\mathbf{A}$ , os vetores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , e o escalar  $D$  representam uma outra descrição do sistema.

Sistemas que têm estruturas internas diferentes serão representados por diferentes  $A$ ,  $b$ ,  $c$  e  $D$ . A descrição por variáveis de estado é a única representação de sistema analítica capaz de especificar a estrutura interna do sistema. Dessa forma, a descrição por variáveis de estado é usada em qualquer problema em que a estrutura de sistema interna precise ser considerada.

Se as características de entrada-saída do sistema forem descritas por uma equação de diferenças de  $N$ -ésima ordem, então o vetor estado  $q[n]$  é  $N$  por 1,  $A$  é  $N$  por  $N$ ,  $b$  é  $N$  por 1, e  $c$  é 1 por  $N$ . Lembre-se de que a solução da equação de diferenças exige  $N$  condições iniciais. As  $N$  condições iniciais representam a memória do passado do sistema, como acontece com o vetor estado  $N$ -dimensional. Além disso, um sistema de  $N$ -ésima ordem contém pelo menos  $N$  operações de deslocamento de tempo em sua representação em diagrama de blocos. Se o diagrama de blocos de um sistema tiver um número mínimo de deslocamentos de tempo, a escolha natural para os estados são as saídas dos retardos unitários, uma vez que estes incorporam a memória do sistema. Esta escolha é ilustrada no exemplo a seguir.

**EXEMPLO 2.21** Encontre a descrição por variáveis de estado correspondente ao sistema de segunda ordem descrito na Figura 2.32, escolhendo as variáveis de estado para serem as saídas dos retardos unitários.

*Solução:* O diagrama de blocos indica que os estados são atualizados de acordo com as equações:

$$q_1[n+1] = \alpha q_1[n] + \delta_1 x[n]$$

$$q_2[n+1] = \gamma q_1[n] + \beta q_2[n] + \delta_2 x[n]$$

e a saída é dada por

$$y[n] = \eta_1 q_1[n] + \eta_2 q_2[n]$$

Estas equações são expressas nas formas de variáveis de estado das equações (2.48) e (2.49) se definirmos

$$q[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}$$

c

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$c = [\eta_1 \quad \eta_2], \quad D = [0]$$

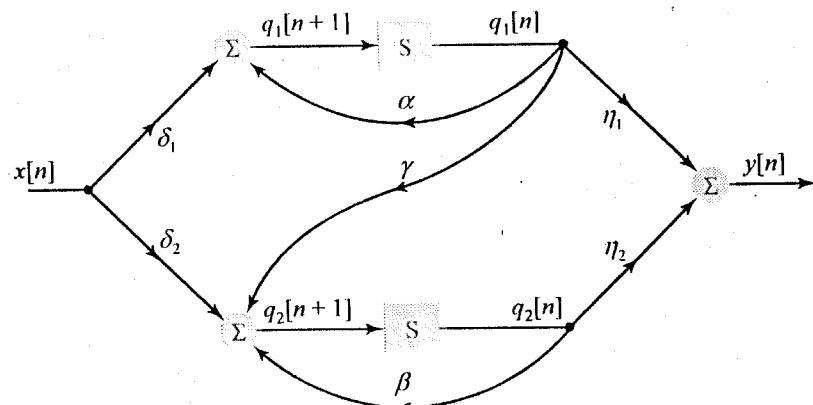


FIGURA 2.32 Diagrama de blocos do sistema correspondente ao Exemplo 2.21.

► **EXERCÍCIO 2.15** Encontre a descrição por variáveis de estado correspondente ao diagrama de blocos da Figura 2.33. Escolha as variáveis de estado de modo a serem as saídas dos retardos unitários,  $q_1[n]$  e  $q_2[n]$ , conforme indica a Figura.

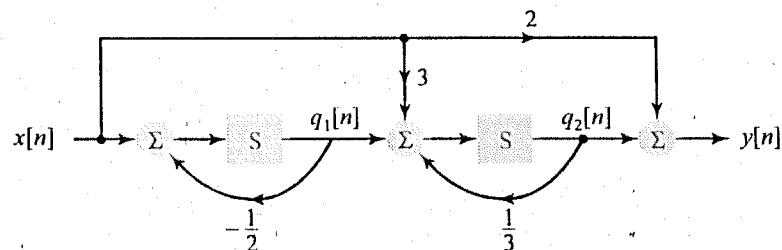


FIGURA 2.33 Diagrama de blocos do sistema correspondente ao Exercício 2.15.

**Resposta:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, & \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= [0 \quad 1], & D &= [2] \end{aligned}$$

A descrição por variáveis de estado para sistemas de tempo contínuo é análoga à dos sistemas de tempo discreto, com exceção de que a equação de estado dada pela equação (2.48) é expressa em termos de uma derivada. Deste modo, escrevemos

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t) \quad (2.50)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t) + Dx(t) \quad (2.51)$$

Novamente, a matriz  $\mathbf{A}$ , os vetores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , e o escalar  $D$  descrevem a estrutura interna do sistema.

A memória de um sistema de tempo contínuo está contida nos dispositivos de armazenamento de energia do sistema. Conseqüentemente, as variáveis de estado normalmente são escolhidas como as quantidades físicas associadas com os dispositivos de armazenamento de energia. Por exemplo, nos sistemas elétricos, os dispositivos de armazenamento de energia são capacitores e indutores. Podemos escolher variáveis de estado que correspondam à tensão nos capacitores ou à corrente que atravessa os indutores. Em um sistema mecânico, os dispositivos de armazenamento de energia são molas e massas. As variáveis de estado podem ser escolhidas como o deslocamento da mola ou a velocidade da massa. Em uma representação em diagrama de blocos, os dispositivos de armazenamento de energia são integradores. As equações de variável de estado representadas pelas equações (2.50) e (2.51) são obtidas das equações que relacionam o comportamento dos dispositivos de armazenamento de energia com a entrada e saída. Este procedimento é ilustrado nos exemplos seguintes.

**EXEMPLO 2.22** Considere o circuito elétrico descrito na Figura 2.34. Derive uma descrição por variáveis de estado para este sistema, se a entrada for a tensão  $x(t)$  aplicada e a saída for a corrente no resistor rotulado como  $y(t)$ .

**Solução:** Escolha as variáveis de estado como a tensão em cada capacitor. Somar as quedas de tensão em torno da malha que envolve  $x(t)$ ,  $R_1$  e  $C_1$  dá

$$x(t) = y(t)R_1 + q_1(t)$$

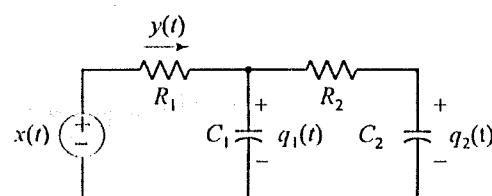


FIGURA 2.34 Diagrama de circuito do sistema correspondente ao Exemplo 2.22.

ou

$$y(t) = -\frac{1}{R_1} q_1(t) + \frac{1}{R_1} x(t) \quad (2.52)$$

Esta equação representa a saída como uma função das variáveis de estado e da saída. Admitamos que  $i_2(t)$  seja a corrente em  $R_2$ . Somando as quedas de tensão em torno da malha que envolve  $C_1$ ,  $R_2$  e  $C_2$ , obtemos

$$q_1(t) = R_2 i_2(t) + q_2(t)$$

ou

$$i_2(t) = \frac{1}{R_2} q_1(t) - \frac{1}{R_2} q_2(t) \quad (2.53)$$

Porém, sabemos também que

$$i_2(t) = C_2 \frac{d}{dt} q_2(t)$$

Substituímos a equação (2.53) em  $i_2(t)$  para obter

$$\frac{d}{dt} q_2(t) = \frac{1}{C_2 R_2} q_1(t) - \frac{1}{C_2 R_2} q_2(t) \quad (2.54)$$

Por fim, precisamos de uma equação de estado para  $q_1(t)$ . Isto é obtido aplicando-se a lei das correntes de Kirchhoff ao nó entre  $R_1$  e  $R_2$ . Admitindo que  $i_1(t)$  seja a corrente que percorre  $C_1$ , temos

$$y(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Substituímos agora a equação (2.52) em  $y(t)$ , a equação (2.53) em  $i_2(t)$ ,

$$i_1(t) = C_1 \frac{d}{dt} q_1(t)$$

em  $i_1(t)$ , e reorganizamos para obter

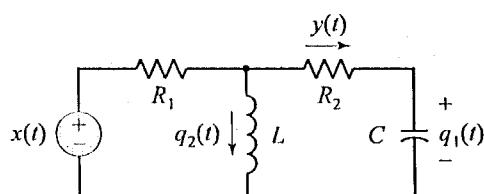
$$\frac{d}{dt} q_1(t) = -\left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} \right) q_1(t) + \frac{1}{C_1 R_2} q_2(t) + \frac{1}{C_1 R_1} x(t) \quad (2.55)$$

A descrição por variáveis de estado agora é obtida das equações (2.52), (2.54) e (2.55) como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} \right) & \frac{1}{C_1 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ R_1 \end{bmatrix}$$

► **EXERCÍCIO 2.16** Encontre a descrição por variáveis de estado correspondente ao circuito descrito na Figura 2.35. Escolha as variáveis de estado  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  como a tensão no capacitor e a corrente que percorre o indutor, respectivamente.



**FIGURA 2.35** Diagrama de circuito do sistema correspondente ao Exercício 2.16.

**Resposta:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -R_1 \\ \frac{1}{(R_1 + R_2)C} & \frac{(R_1 + R_2)C}{R_1 R_2} \\ \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} & \frac{(R_1 + R_2)L}{R_1 R_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \\ \frac{1}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 & -R_1 \\ \frac{-1}{R_1 + R_2} & \frac{-R_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ R_1 + R_2 \end{bmatrix}$$

Em uma representação em diagrama de blocos de um sistema de tempo contínuo, as variáveis de estado correspondem às saídas dos integradores. Dessa forma, a entrada para o integrador é a derivada da variável de estado correspondente. A descrição por variáveis de estado é obtida escrevendo-se equações que correspondem às operações no diagrama de blocos. Este procedimento é ilustrado no exemplo a seguir.

**EXEMPLO 2.23** Determine a descrição por variáveis de estado correspondente ao diagrama de blocos da Figura 2.36. A escolha das variáveis de estado é indicada no diagrama.

**Solução:** O diagrama de blocos indica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_1(t) &= 2q_1(t) - q_2(t) + x(t) \\ \frac{d}{dt} q_2(t) &= q_1(t) \\ y(t) &= 3q_1(t) + q_2(t) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a descrição por variáveis de estado é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [3 \ 1], \quad D = [0]$$

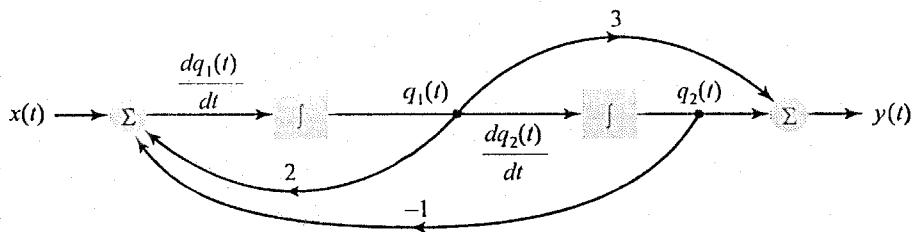


FIGURA 2.36 Diagrama de blocos do sistema correspondente ao Exemplo 2.23.

### ■ TRANSFORMAÇÕES DE ESTADO

Afirmamos que não há uma única descrição por variáveis de estado para um sistema com determinada característica de entrada-saída. Diferentes descrições por variáveis de estado podem ser obtidas transformando-se as variáveis de estado.

Esta transformação é realizada definindo-se um novo conjunto de variáveis de estado que são uma soma ponderada das variáveis de estado originais. Isto muda a forma de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $D$ , mas não muda as características de entrada-saída do sistema. Para ilustrar isso, considere o Exemplo 2.23. Defina novos estados  $q'_1(t) = q_1(t)$  e  $q'_2(t) = q_2(t)$ . Aqui, simplesmente permutamos as variáveis de estado:  $q'_2(t)$  é a saída do primeiro integrador e  $q'_1(t)$  é a saída do segundo integrador. Não mudamos a estrutura do diagrama de blocos; deste modo, evidentemente, a característica de entrada-saída do

sistema permanece a mesma. A descrição por variáveis de estado é diferente, entretanto, uma vez que agora temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}' &= [1 \ 3], \quad D' = [0] \end{aligned}$$

O exemplo do parágrafo anterior emprega uma transformação particularmente simples do estado original. Em geral, podemos definir um novo vetor estado como uma transformação do vetor estado original, ou  $\mathbf{q}' = \mathbf{T}\mathbf{q}$ . Definimos  $\mathbf{T}$  como a matriz de transformação de estado. Aqui, abandonamos o índice de tempo ( $t$ ) ou  $[n]$  a fim de tratarmos, simultaneamente, tanto o caso de tempo contínuo como o de tempo discreto. Para que o novo estado represente a memória inteira do sistema, a relação entre  $\mathbf{q}'$  e  $\mathbf{q}$  deve ser biunívoca. Isto implica que  $\mathbf{T}$  deve ser uma matriz não-singular, ou que exista a matriz inversa  $\mathbf{T}^{-1}$ . Conseqüentemente,  $\mathbf{q} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}'$ . A descrição por variáveis de estado original é

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b}x \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}\mathbf{q} + \mathbf{D}x \end{aligned}$$

em que o ponto sobre  $\mathbf{q}$  denota diferenciação em tempo contínuo ou avanço de tempo em tempo discreto. A nova descrição por variáveis de estado  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}'$  e  $D'$  é derivada observando-se que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}' &= \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{T}\mathbf{b}x \\ &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}' + \mathbf{T}\mathbf{b}x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{c}\mathbf{q} + \mathbf{D}x \\ &= \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}' + \mathbf{D}x \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se definirmos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{b}' &= \mathbf{T}\mathbf{b} \\ \mathbf{c}' &= \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1} & D' &= D \end{aligned} \tag{2.56}$$

então

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}' &= \mathbf{A}'\mathbf{q}' + \mathbf{b}'x \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}'\mathbf{q}' + D'x \end{aligned}$$

é a nova descrição por variáveis de estado.

**EXEMPLO 2.24** Um sistema de tempo discreto tem a descrição por variáveis de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= \frac{1}{2} [1 \ 1], \quad D = [2] \end{aligned}$$

Encontre a descrição por variáveis de estado  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}'$  e  $D'$  correspondente aos novos estados  $q'_1[n] = -\frac{1}{2}q_1[n] + \frac{1}{2}q_2[n]$  e  $q'_2[n] = \frac{1}{2}q_1[n] + \frac{1}{2}q_2[n]$ .

**Solução:** Escreva o novo vetor estado como  $\mathbf{q}' = \mathbf{T}\mathbf{q}$ , em que

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é não-singular, e sua inversa é

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, substituir  $T$  e  $T^{-1}$  na equação (2.56) resulta em

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}, & b' &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ c' &= [0 \quad 1], & D' &= [2] \end{aligned}$$

Note que esta escolha de  $T$  resulta em  $A'$  ser uma matriz diagonal e, dessa forma, separa a atualização de estado em duas equações de diferenças de primeira ordem desvinculadas, como é mostrado por

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= -\frac{1}{2}q_1[n] + x[n] \\ q_2[n+1] &= \frac{3}{10}q_2[n] + 3x[n] \end{aligned}$$

A forma desvinculada da descrição por variáveis de estado é especialmente útil para analisar sistemas por causa de sua estrutura simples.

► **Exercício 2.17** Um sistema de tempo contínuo tem a descrição por variáveis de estado

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ c &= [0 \quad 2], & D &= [1] \end{aligned}$$

Encontre a descrição por variáveis de estado  $A'$ ,  $b'$ ,  $c'$  e  $D'$  correspondentes aos novos estados  $q'_1(t) = 2q_1(t) + q_2(t)$  e  $q'_2(t) = q_1(t) - q_2(t)$ .

**Resposta:**

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, & b' &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c' &= \frac{1}{3} [2 \quad -4], & D' &= [1] \end{aligned}$$

Note que cada transformação  $T$  não singular gera uma descrição por variáveis de estado para um sistema com determinado comportamento de entrada-saída. A capacidade de transformar a descrição por variáveis de estado sem mudar as características de entrada-saída do sistema é uma ferramenta poderosa. Ela é usada para analisar sistemas e identificar implementações de sistemas que otimizam alguns critérios de desempenho não diretamente relacionados ao comportamento de entrada-saída como, por exemplo, os efeitos numéricos do arredondamento em uma implementação de sistema baseada em computador.

## 2.7 Explorando Conceitos com o MATLAB

Os computadores digitais são idealmente apropriados para implementar descrições em domínio de tempo de sistemas de tempo discreto, porque os computadores armazenam e manipulam naturalmente sequências de números. Por exemplo, a soma de convolução descreve a relação entre a entrada e a saída de um sistema de tempo discreto e é facilmente avaliada com um computador como a soma de produtos de números. Em comparação, os sistemas de tempo contínuo são descritos em termos de funções contínuas, as quais não são representadas ou manipuladas facilmente num computador digital. Por exemplo, a saída de um sistema de tempo contínuo é descrita pela integral de convolução. A avaliação da integral de convolução com um computador requer o uso ou de técnicas de integração numérica ou de manipulação simbólica, as quais estão além do escopo deste livro. Conseqüentemente, nossa exploração com o MATLAB se concentra nos sistemas de tempo discreto.

Uma segunda limitação na exploração de sinais e sistemas é imposta pela capacidade finita de memória ou armazenamento e pelos tempos de computação maiores de zero inerentes a todos os computadores digitais. Conseqüentemente, somente podemos manipular sinais de duração finita. Por exemplo, se a resposta ao impulso de um sistema tiver duração infinita e a entrada tiver duração infinita, a soma de convolução envolverá somar um número infinito de produtos. Evidentemente,

mesmo que pudéssemos armazenar os sinais de tamanho infinito no computador, a soma infinita poderia não ser computada em uma quantidade finita de tempo. Apesar desta limitação, o comportamento de um sistema em resposta a um sinal de tamanho infinito muitas vezes pode ser deduzido de sua resposta a um sinal de tamanho fixo cuidadosamente escolhido.

Tanto a MATLAB Signal Processing Toolbox como a Control System Toolbox são usadas nesta seção.

## ■ CONVOLUÇÃO

Lembre-se de que a soma de convolução expressa a saída de um sistema de tempo discreto em termos da entrada e da resposta ao impulso do sistema. O MATLAB tem uma função chamada `conv` que avalia a convolução de sinais de tempo discreto de duração finita. Se  $x$  e  $h$  forem vetores que representam sinais, o comando  $y = \text{conv}(x, h)$  do MATLAB gera um vetor  $y$  que representa a convolução dos sinais representados por  $x$  e  $h$ . O número de elementos em  $y$  é dado pela soma do número de elementos em  $x$  e  $h$  menos um. Note que devemos conhecer a origem de tempo dos sinais representados por  $x$  e  $h$  a fim de determinarmos a origem de tempo de sua convolução. Em geral, se o primeiro elemento de  $x$  corresponder ao tempo  $n = k_x$ , e o primeiro elemento de  $h$ , ao tempo  $n = k_h$ , o primeiro elemento de  $y$  corresponderá a  $n = k_x + k_h$ .

Para ilustrar isso, considere repetir o Exemplo 2.1 usando o MATLAB. Aqui, o primeiro valor diferente de zero da resposta ao impulso ocorre no instante  $n = -1$  e o primeiro elemento da entrada  $x$  ocorre no instante  $n = 0$ . Avaliamos esta convolução no MATLAB da seguinte maneira:

```
>> h = [1, 2, 1];
>> x = [2, 3, -2];
>> y = conv(x,h)
y =
    2    7    6   -1   -2
```

O primeiro elemento do vetor  $y$  corresponde ao tempo  $n = 0 + (-1) = -1$ .

No Exemplo 2.3, usamos um cálculo manual para determinar a saída de um sistema com resposta ao impulso dada por

$$h[n] = u[n] - u[n-10]$$

e a entrada

$$x[n] = u[n-2] - u[n-7]$$

Podemos usar o comando `conv` do MATLAB para realizar a convolução da seguinte maneira. Neste caso, a resposta ao impulso consiste em dez uns (1) consecutivos que se iniciam no instante  $n = 0$ , e a entrada consiste em cinco uns (1) consecutivos que se iniciam no instante  $n = 2$ . Estes sinais podem ser definidos no MATLAB usando-se os comandos

```
>> h = ones(1,10);
>> x = ones(1,5);
```

A saída é obtida e traçada graficamente usando-se os comandos

```
>> n = 2:15;
>> y = conv(x,h);
>> stem(n,y); xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude')
```

Aqui, o primeiro elemento do vetor  $y$  corresponde ao instante  $n = 2 + 0 = 2$ , conforme descreve a Figura 2.37.

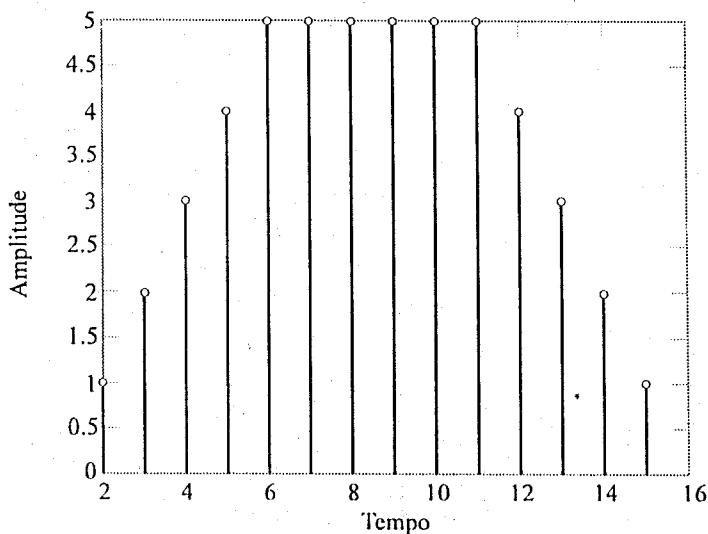


FIGURA 2.37 Soma de convolução computada usando-se o MATLAB.

EXERCÍCIO 2.18 Use o MATLAB para resolver o Exercício 2.2 para  $\alpha = 0,9$ . Ou seja, encontre a saída do sistema com entrada  $x[n] = 2\{u[n+2] - u[n-12]\}$  e a resposta ao impulso  $h[n] = 0,9^n\{u[n-2] - u[n-13]\}$ .

**Resposta:** Veja a Figura 2.38.

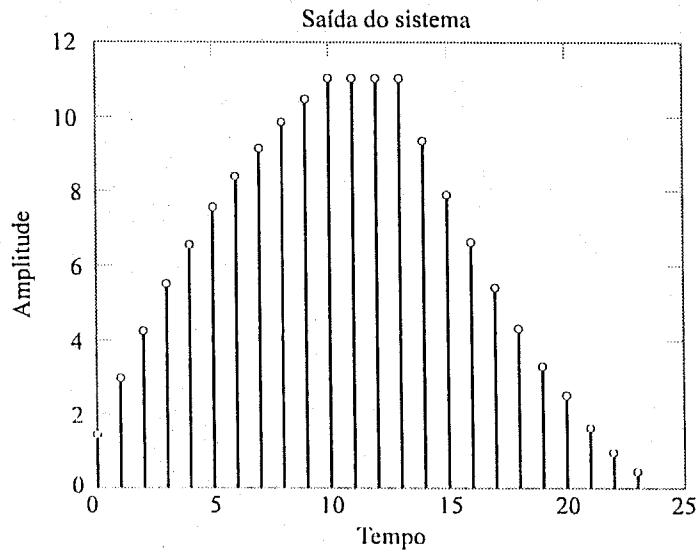


FIGURA 2.38 Solução para o Exercício 2.18.

### ■ RESPOSTAS AO DEGRAU E À SENÓIDE EM ESTADO ESTACIONÁRIO

A resposta ao degrau é a saída de um sistema em resposta a uma entrada em degrau e, em geral, tem duração infinita. Porém, podemos avaliar os primeiros valores  $p$  da resposta ao degrau usando a função `conv`, se a resposta ao impulso do sistema for igual a zero para os tempos  $n < k_h$  ao fazer a convolução dos primeiros valores  $p$  de  $h[n]$  com um degrau de duração finita de tamanho  $p$ . Ou seja, construímos um vetor  $h$  a partir dos  $p$  primeiros valores diferentes de zero da resposta ao impulso, definimos o degrau  $u = \text{ones}(1, p)$  e avaliamos  $s = \text{conv}(u, h)$ . O primeiro elemento de  $s$  corresponde ao tempo  $k_h$  e os  $p$  primeiros valores de  $s$  representam os  $p$  primeiros valores da resposta ao degrau. Os valores restantes de  $s$  não correspondem à resposta ao degrau, mas são um artefato da convolução dos sinais de duração finita.

Por exemplo, podemos determinar os 50 primeiros valores da resposta ao degrau do sistema com a resposta ao impulso dada no Exercício 2.7.

$$h[n] = (-a)^n u[n]$$

com  $a = 0,9$ , usando os comandos do MATLAB

```
>> h = (-0.9).^(0:49);
>> u = ones(1,50);
>> s = conv(u,h);
```

O vetor  $s$  tem 99 valores, dos quais os 50 primeiros representam a resposta ao degrau e são descritos na Figura 2.39. Esta figura é obtida usando-se o comando do MATLAB `stem([0:49], s(1:50))`.

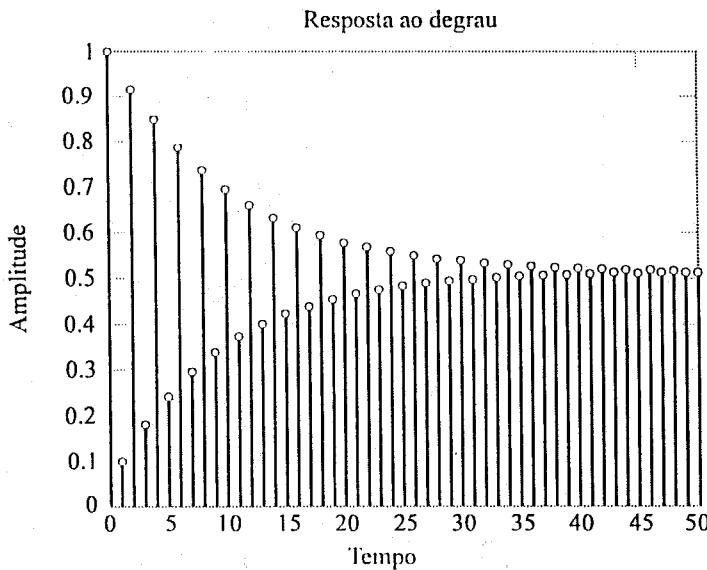


FIGURA 2.39 Resposta ao degrau computada usando-se o MATLAB.

A resposta senoidal em estado estacionário de um sistema de tempo discreto é dada pela mudança de amplitude e fase experimentadas pelo sinal de entrada senoidal complexo de duração infinita  $x[n] = e^{j\Omega n}$ .

A resposta senoidal em estado estacionário de um sistema com resposta ao impulso de duração finita pode ser determinada usando-se uma senóide de duração finita, desde que a senóide seja suficientemente longa para impulsionar o sistema até uma condição de estado estacionário. Para mostrar isto, suponhamos  $h[n] = 0$  para  $n < n_1$  e  $n > n_2$ , e admitamos que a entrada do sistema seja a senóide de duração finita  $v[n] = e^{j\Omega n}(u[n] - u[n - n_v])$ . Podemos escrever a saída do sistema como

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * v[n] \\ &= \sum_{k=n_1}^{n_2} h[k] e^{j\Omega(n-k)}, \quad n_2 \leq n < n_1 + n_v \\ &= h[n] * e^{j\Omega n}, \quad n_2 \leq n < n_1 + n_v \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a saída do sistema em resposta a uma entrada senoidal de duração finita corresponde à resposta senoidal em estado estacionário no intervalo  $n_2 \leq n < n_1 + n_v$ . O módulo e a resposta em fase do sistema podem ser determinadas de  $y[n]$ ,  $n_2 \leq n < n_1 + n_v$ , observando-se que

$$y[n] = |H(e^{j\Omega})| e^{j(\Omega n + \arg(H(e^{j\Omega}))}), \quad n_2 \leq n < n_1 + n_v$$

Tomamos o módulo e a fase de  $y[n]$  para obter

$$|y[n]| = |H(e^{j\Omega})|, \quad n_2 \leq n < n_1 + n_v$$

e

$$\arg\{y[n]\} - \Omega n = \arg\{H(e^{j\Omega})\}, \quad n_2 \leq n < n_1 + n_v$$

Podemos usar esta abordagem para avaliar a resposta senoidal em estado estacionário de um dos sistemas dados no Exemplo 2.14. Considere o sistema com resposta ao impulso

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ -\frac{1}{2}, & n = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determinaremos a resposta em freqüência e 50 valores da resposta senoidal em estado estacionário deste sistema para as freqüências de entrada  $\Omega = \frac{1}{4}\pi$  e  $\frac{3}{4}\pi$ .

Aqui,  $n_1 = 0$  e  $n_2 = 1$ ; deste modo, para obtermos 50 valores da resposta senoidal em estado estacionário, necessitamos que  $n_v \geq 51$ . As respostas senoidais em estado estacionário são obtidas pelos comandos do MATLAB

```
>> Omega1 = pi/4; Omega2 = 3*pi/4;
>> v1 = exp(j*Omega1*[0:50]);
>> v2 = exp(j*Omega2*[0:50]);
>> h = [0.5, -0.5];
>> y1 = conv(v1,h); y2 = conv(v2,h);
```

As Figuras 2.40(a) e (b) descrevem os componentes real e imaginário de  $y_1$ , respectivamente, e eles podem ser obtidos com os comandos

```
>> subplot(2,1,1)
>> stem([0:51],real(y1))
>> xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude');
>> title('Real(y1)')
>> subplot(2,1,2)
>> stem([0:51],imag(y1))
>> xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude');
>> title('Imag(y1)')
```

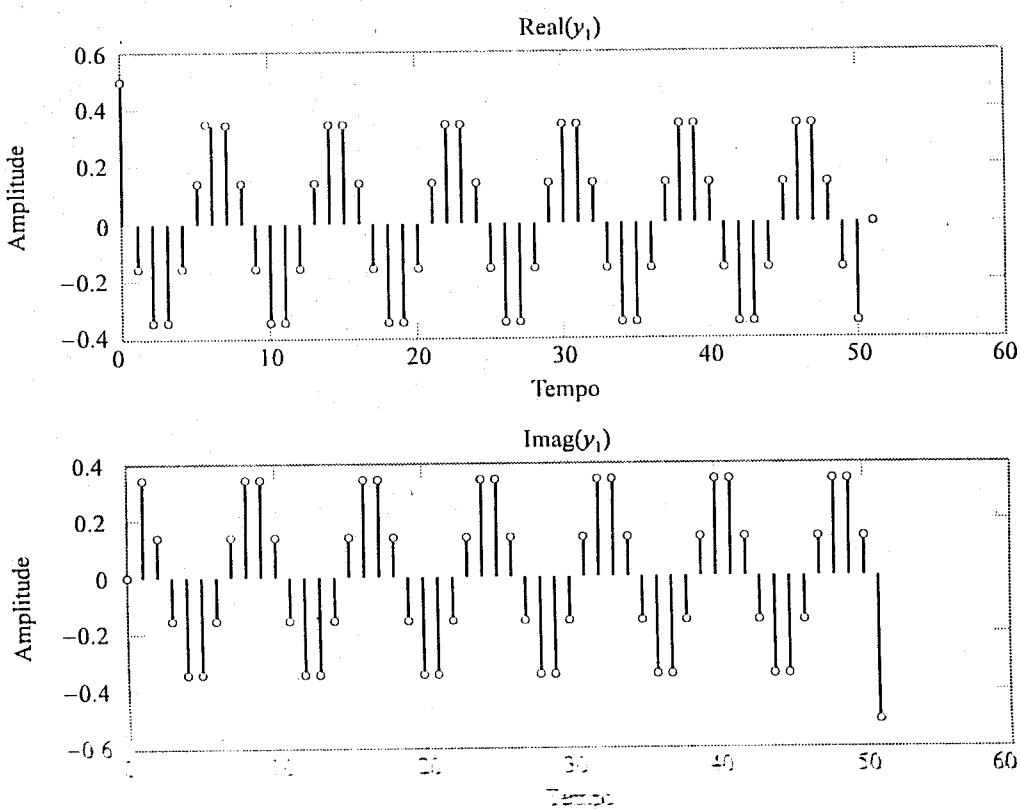


FIGURA 2.40 Resposta senoidal em estado estacionário computada usando MATLAB. Os valores nos instantes 1 a 50 representam a resposta senoidal em estado estacionário.

A resposta senoidal em estado estacionário é representada pelos valores que têm os índices de tempo 1 a 50.

Agora podemos obter as respostas em módulo e em fase de qualquer elemento dos vetores  $y1$  e  $y2$ , exceto do primeiro ou do último. Usando o quinto elemento, utilizamos os comandos

```
>> H1mag = abs(y1(5))
H1mag =
    0.3287
>> H2mag = abs(y2(5))
H2mag =
    0.9239
>> H1phs = angle(y1(5)) - omega1*5
H1phs =
   -5.8905
>> H2phs = angle(y2(5)) - omega2*5
H2phs =
  -14.5299
```

A resposta em fase é medida em radianos. Note que o comando `angle` sempre retorna um valor entre  $-\pi$  e  $\pi$  radianos. Conseqüentemente, medir a fase com o comando `angle(y1(n)) - omega1*n` pode resultar em respostas que diferem em múltiplos inteiros de  $2\pi$  quando valores diferentes de  $n$  são usados.

► **EXERCÍCIO 2.19** Avalie a resposta em freqüência e 50 valores da resposta senoidal em estado estacionário do sistema com a resposta ao impulso

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

na freqüência  $\Omega = \frac{1}{3}\pi$ .

**Resposta:** A resposta em estado estacionário é dada pelos valores com índices de tempo 3 a 52 na Figura 2.41. Usando o quarto elemento da resposta em estado estacionário resultará em  $|H(e^{j\pi/3})| = 0,4330$  e  $\arg\{H(e^{j\pi/3})\} = -1,5708$  radianos.

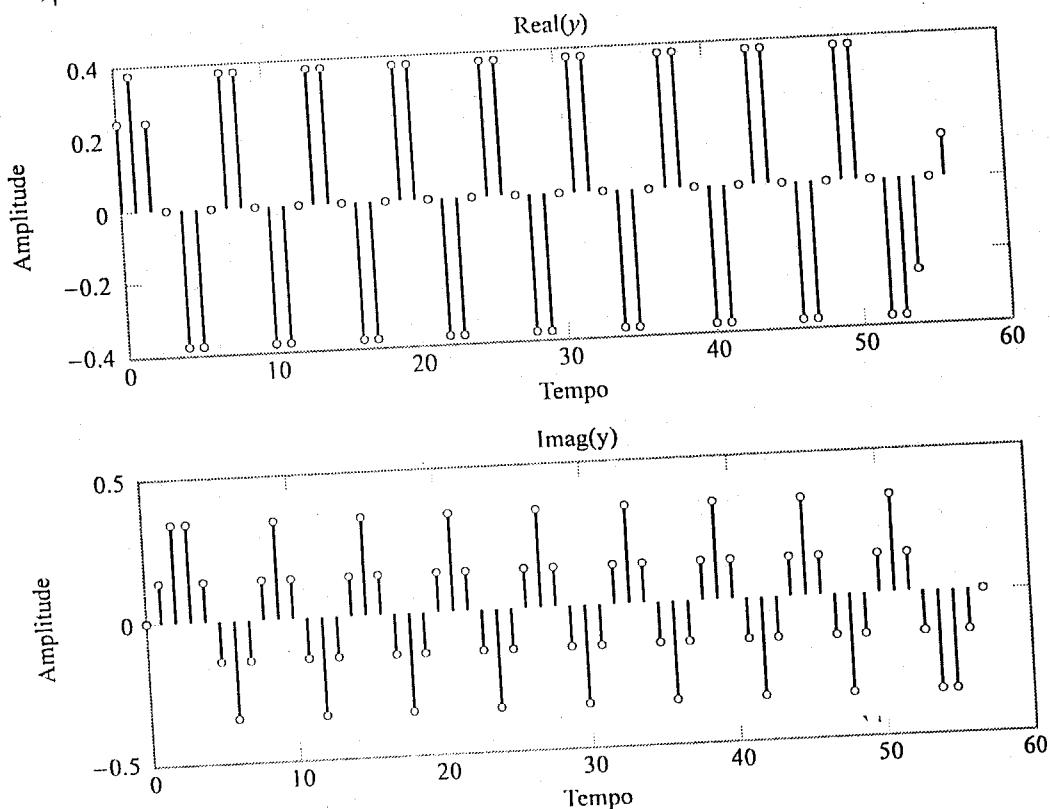


FIGURA 2.41 Resposta senoidal em estado estacionário correspondente ao Exercício 2.19.

### ■ SIMULANDO EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Na Seção 2.4, expressamos a descrição em equação de diferenças de um sistema em uma forma recursiva que permitia que a saída do sistema fosse computada a partir do sinal de entrada e das saídas passadas. O comando `filter` realiza uma função similar. Defina os vetores  $a = [a_0, a_1, \dots, a_N]$  e  $b = [b_0, b_1, \dots, b_M]$  que representam os coeficientes da equação de diferenças dada pela equação (2.29). Se  $x$  for um vetor que representa o sinal de entrada, então o comando  $y = filter(b, a, x)$  resulta em um vetor  $y$  que representa a saída do sistema para condições iniciais nulas. O número de valores de entrada em  $y$  corresponde ao número dos valores de entrada em  $x$ . Condições iniciais diferentes de zero são incorporadas usando-se a sintaxe de comando alternativa  $y = filter(b, a, x, zi)$ , em que  $zi$  representa as condições iniciais exigidas por `filter`. As condições usadas por `filter` não são os valores passados da saída, uma vez que `filter` usa uma forma modificada da equação de diferenças para determinar a saída. Estas condições iniciais são obtidas do conhecimento das saídas passadas usando-se o comando  $zi = filtic(b, a, yi)$ , em que  $yi$  é um vetor que contém as condições iniciais na ordem  $[y(-1), y(-2), \dots, y(-N)]$ .

Ilustramos o uso do comando `filter` revisitando o Exemplo 2.16. O sistema de interesse é descrito pela equação de diferenças

$$\begin{aligned} y[n] - 1,143y[n-1] + 0,4128y[n-2] &= 0,0675x[n] \\ &\quad + 0,1349x[n-1] + 0,0675x[n-2] \end{aligned} \quad (2.57)$$

Determinamos a saída em resposta à entrada nula e condições iniciais  $y[-1] = 1, y[-2] = 2$  usando os comandos

```
>> a = [1, -1.143, 0.4128];
>> b = [0.0675, 0.1349, 0.0675];
>> x = zeros(1, 50);
>> zi = filtic(b,a,[1, 2]);
>> y = filter(b,a,x,zi);
```

O resultado é apresentado na Figura 2.22(b). Determinamos a resposta do sistema a uma entrada que consiste em dados de temperatura média de janeiro com os comandos

```
>> load Jantemp;
>> filttemp = filter(b,a,Jantemp);
```

Aqui, supomos que os dados de temperatura média de janeiro estão no arquivo `Jantemp.mat`. O resultado é apresentado na Figura 2.22(g).

► **EXERCÍCIO 2.20** Use `filter` para determinar os 50 primeiros valores da resposta ao degrau do sistema descrito pela equação (2.57) e os 100 primeiros valores da resposta à entrada  $x[n] = \cos(\frac{1}{5}\pi n)$  supondo condições iniciais nulas.

**Resposta:** Veja as Figuras 2.22(a) e (d).

O comando  $[h, t] = impz(b, a, n)$  avalia  $n$  valores da resposta ao impulso de um sistema descrito por uma equação de diferenças. Os coeficientes da equação de diferenças estão contidos nos vetores  $b$  e  $a$  no que se refere a `filter`. O vetor  $h$  contém os valores da resposta ao impulso e  $t$  contém os índices de tempo correspondentes.

### ■ DESCRIÇÕES POR VARIÁVEIS DE ESTADO

A MATLAB Control System Toolbox contém numerosas rotinas para manipular descrições por variáveis de estado. Um recurso chave da Control System Toolbox é o uso de objetos LTI, os quais são estruturas de dados personalizadas que possibilitam a manipulação de descrições de sistemas LTI como simples variáveis MATLAB simples. Se  $a, b, c$  e  $d$  forem matrizes MATLAB que representam as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  na descrição por variáveis de estado, então o comando  $sys = ss(a, b, c, d, -1)$  produz um objeto `sys` do tipo LTI que representa o sistema de tempo discreto na forma de variáveis de estado. Note que o sistema de tempo contínuo é obtido omitindo-se o  $-1$ , ou seja, usando-

se  $\text{sys} = \text{ss}(a, b, c, d)$ . Os objetos LTI que correspondem a outras representações de sistema são discutidos nas Seções 6.9 e 7.10.

Os sistemas são manipulados no MATLAB por operações em seus objetos LTI. Por exemplo, se  $\text{sys1}$  e  $\text{sys2}$  forem objetos que representam dois sistemas na forma de variáveis de estado, então  $\text{sys} = \text{sys1} + \text{sys2}$  produz a descrição por variáveis de estado correspondente à combinação paralela de  $\text{sys1}$  e  $\text{sys2}$ , enquanto que  $\text{sys} = \text{sys1} * \text{sys2}$  representa a combinação em cascata.

A função  $\text{lsim}$  simula a saída do sistema em resposta a uma entrada especificada. Para um sistema de tempo discreto, o comando tem a forma  $y = \text{lsim}(\text{sys}, x)$ , em que  $x$  é um vetor que contém a entrada e  $y$  representa a saída. O comando  $h = \text{impulse}(\text{sys}, N)$  coloca os primeiros  $N$  valores da resposta ao impulso em  $h$ . Ambos também podem ser usados para sistemas de tempo contínuo, não obstante a sintaxe de comando se modificar ligeiramente. No caso de tempo contínuo, métodos numéricos são usados para aproximar a resposta do sistema de tempo contínuo.

Lembre-se de que não existe uma descrição por variáveis de estado única para determinado sistema. Diferentes descrições por variáveis de estado para o mesmo sistema são obtidas transformando-se o estado. As transformações de estado podem ser computadas no MATLAB usando-se a rotina  $\text{ss2ss}$ . A transformação de estado é idêntica tanto para sistemas de tempo contínuo como discreto, de forma que o mesmo comando é usado para transformar qualquer um dos tipos de sistema. O comando tem a forma  $\text{sysT} = \text{ss2ss}(\text{sys}, T)$ , em que  $\text{sys}$  representa a descrição por variáveis de estado,  $T$  é a matriz de transformação de estado e  $\text{sysT}$  representa a descrição por variáveis de estado transformada.

Use  $\text{ss2ss}$  para transformar a descrição por variáveis de estado do Exemplo 2.24

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ c &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [2] \end{aligned}$$

empregando a matriz de transformação de estado

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os comandos seguintes produzem o resultado desejado:

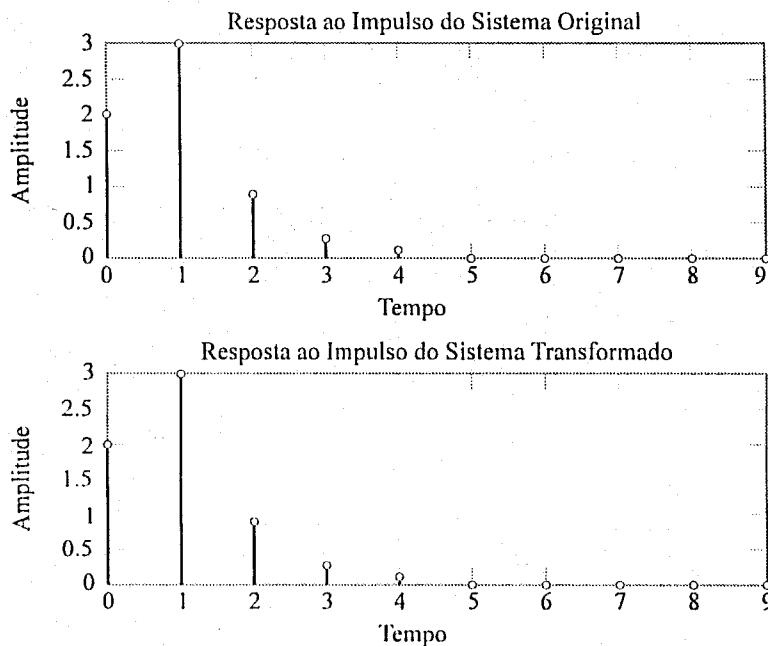
```
>> a = [-0.1, 0.4; 0.4, -0.1]; b = [2; 4];
>> c = [0.5, 0.5]; d = 2;
>> sys = ss(a,b,c,d,-1); % define the state-space object sys
>> T = 0.5*[1, 1; 1, 1];
>> sysT = ss2ss(sys,T)
a =
      x1      x2
x1  -0.50000      0
      x2      0  0.30000
b =
      u1
x1  1.00000
x2  3.00000
c =
      x1      x2
y1      0  1.00000
d =
      u1
y1  2.00000
```

Sampling time: unspecified  
Discrete-time system.

Este resultado está de acordo com o Exemplo 2.24. Podemos verificar que os dois sistemas representados por `sys` e `sysT` têm características de entrada-saída idênticas ao compararmos suas respostas ao impulso por meio dos seguintes comandos:

```
>> h = impulse(sys,10); hT = impulse(sysT,10);
>> subplot(2,1,1)
>> stem([0:9],h)
>> title('Resposta ao Impulso do Sistema Original');
>> xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude')
>> subplot(2,1,2)
>> stem([0:9],hT)
>> title('Resposta ao Impulso do Sistema Transformado');
>> xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude')
```

A Figura 2.42 descreve os 10 primeiros valores das respostas ao impulso dos sistemas original e transformado, produzidos por esta seqüência de comandos. Podemos verificar que os sistemas original e transformado têm respostas ao impulso idênticas (numericamente) ao computar o erro  $\text{err} = h - hT$ .



**FIGURA 2.42** Respostas ao impulso associadas com as descrições por variáveis de estado original e transformada, computadas usando-se o MATLAB.

► **EXERCÍCIO 2.21** Resolva o Exercício 2.17 usando o MATLAB. ▲

## 2.8 Resumo

Existem muitos métodos diferentes para descrever a ação de um sistema LTI sobre um sinal de entrada. Neste capítulo, examinamos quatro diferentes descrições de sistemas LTI: a resposta ao impulso, a equação de diferenças e diferencial, o diagrama de blocos e as descrições por variáveis de estado. Todas as quatro são equivalentes em termos de entrada-saída; para determinada entrada, cada descrição produzirá saída idêntica. Entretanto, descrições diferentes oferecem *insights* diferentes sobre as características do sistema, usando diferentes técnicas para obter a saída a partir da entrada. Dessa forma, cada descrição tem suas próprias vantagens e desvantagens para resolver um problema de sistema particular.

A resposta ao impulso é a saída de um sistema quando a entrada é um impulso. A saída de um sistema linear invariante no tempo, em resposta a uma entrada arbitrária, é expressa em termos da

resposta ao impulso como uma operação de convolução. Propriedades de sistema como, por exemplo, causalidade e estabilidade, estão diretamente relacionadas à resposta ao impulso. Esta também fornece um quadro estrutural conveniente para analisar as interconexões de sistemas. A entrada deve ser conhecida em todos os instantes para determinarmos a saída de um sistema usando a resposta ao impulso e a convolução.

A entrada e a saída de um sistema LTI também podem ser relacionadas usando-se uma equação diferencial ou de diferenças. As equações diferenciais freqüentemente partem diretamente dos princípios físicos que definem o comportamento e a interação de componentes em sistemas de tempo contínuo. A ordem de uma equação diferencial reflete o número máximo de dispositivos de armazenamento de energia no sistema, enquanto a ordem de uma equação de diferenças representa a memória máxima de saídas passadas do sistema. Em comparação com as descrições de resposta ao impulso, a saída de um sistema a partir de determinado ponto do tempo em diante pode ser determinada sem o conhecimento de todas as entradas passadas, desde que as condições iniciais sejam conhecidas. Condições iniciais são os valores iniciais do armazenamento de energia ou memória do sistema e resumem o efeito de todas as entradas passadas até o tempo inicial de interesse.

A solução para uma equação diferencial ou de diferenças pode ser decomposta em uma resposta natural e em uma forçada. A resposta natural descreve o comportamento do sistema devido às condições iniciais, já a forçada descreve o comportamento do sistema em resposta à entrada sozinha.

O diagrama de blocos representa o sistema como uma interconexão de operações elementares sobre sinais. A maneira pela qual estas operações estão interconectadas define a estrutura interna do sistema. Diferentes diagramas de blocos podem representar sistemas com características de entrada-saída idênticas.

A descrição por variáveis de estado é uma série de equações diferenciais ou de diferenças de primeira ordem associadas que representam o comportamento do sistema, as quais são escritas na forma matricial. Ela consiste em duas equações: uma que descreve como o estado do sistema evolui e outra que relaciona a saída ao estado. O estado representa a memória inteira do passado do sistema. O número de estados corresponde ao número de dispositivos de armazenamento de energia ou memória máxima de saídas passadas presentes no sistema. A escolha do estado não é única; um número infinito de diferentes descrições por variáveis de estado pode ser usado para representar sistemas com a mesma característica de entrada-saída. A descrição por variáveis de estado pode ser usada para representar a estrutura interna de um sistema físico, fornecendo, dessa forma, uma caracterização de sistemas mais detalhada do que a resposta ao impulso ou equações diferenciais (de diferenças).

## LEITURA ADICIONAL

1. Um resumo conciso e muitos problemas trabalhados para grande parte do material apresentado neste e nos capítulos posteriores pode ser encontrado em:  
 ➤ Hsu, H. P., *Signals and Systems*, Schaum's Outline Series (McGraw-Hill, 1995)
2. As notações  $H(e^{j\Omega})$  e  $H(j\omega)$  para a resposta senoidal em estado estacionário de um sistema de tempo discreto e de um sistema de tempo contínuo, respectivamente, podem parecer não natural à primeira vista. De fato, as notações alternativas  $H(\Omega)$  e  $H(\omega)$  são usadas, às vezes, na prática da engenharia. Porém, nossa notação é mais comumente usada, uma vez que permite que a resposta senoidal em estado permanente seja definida naturalmente em termos da transformada z (Capítulo 7) e da transformada de Laplace (Capítulo 6).
3. Um tratamento geral das equações diferenciais é dado em:  
 ➤ Boyce, W. E. e R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, sexta edição (Wiley, 1977)
4. O papel das equações de diferenças e os diagramas de blocos para sistemas de tempo discreto no processamento de sinais são descritos em:  
 ➤ Proakis, J. G. e D. G. Manolakis, *Introduction to Digital Signal Processing* (Macmillan, 1988)  
 ➤ Oppenheim, A. V. e R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing* (Prentice Hall, 1989)

5. O papel das equações diferenciais, descrições por diagramas de blocos e descrições por variáveis de estado em sistemas de controle é descrito em:
- » Dorf, R. C. e R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, sétima edição (Addison-Wesley, 1995).
  - » Phillips, C. L. e R. D. Harbor, *Feedback Control Systems*, terceira edição (Prentice-Hall, 1996)
6. As descrições por variáveis de estado em sistemas de controle são descritas em:
- » Chen, C. T., *Linear System Theory and Design* (Holt, Rinehart e Winston, 1984)
  - » B. Friedland, *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods* (McGraw-Hill, 1986)
- Um tratamento cuidadoso e também avançado das descrições por variáveis de estado no contexto do processamento de sinais é apresentado em:
- » Roberts, R. A. e C. T. Mullis, *Digital Signal Processing* (Addison-Wesley, 1987)

## PROBLEMAS

- 2.1 Um sistema LTI de tempo discreto tem a resposta ao impulso  $h[n]$  descrita na Figura P2.1(a). Use linearidade e invariância no tempo para determinar a saída de sistema  $y[n]$ , se a entrada  $x[n]$  for:

- $x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1]$
- $x[n] = u[n] - u[n-3]$
- $x[n]$  como é dado na Figura P2.1(b)

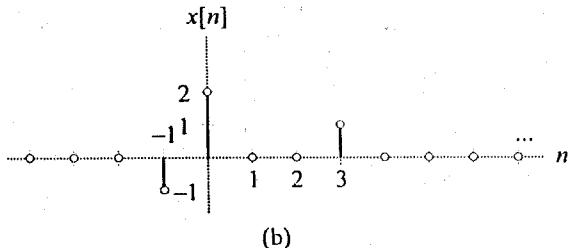
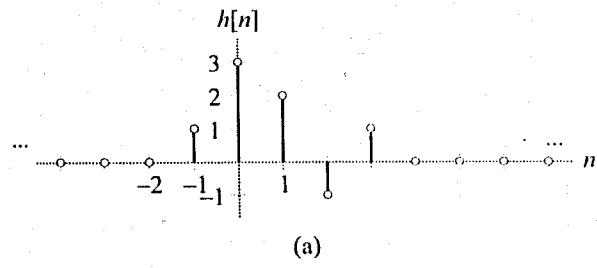


FIGURA P2.1

- 2.2 Avalie as somas de convolução de tempo discreto dadas abaixo:

- $y[n] = u[n] * u[n-3]$
- $y[n] = 2^n u[-n+2] * u[n-3]$
- $y[n] = (\frac{1}{2})^n u[n-2] * u[n]$
- $y[n] = \cos(\frac{1}{2}\pi n)u[n] * u[n-1]$
- $y[n] = \cos(\frac{1}{2}\pi n) * 2^n u[-n+2]$
- $y[n] = \cos(\frac{1}{2}\pi n) * (\frac{1}{2})^n u[n-2]$
- $y[n] = \beta^n u[n] * u[n-3], |\beta| < 1$
- $y[n] = \beta^n u[n] * \alpha^n u[n], |\beta| < 1, |\alpha| < 1$

- $y[n] = (u[n+10] - 2u[n+5] + u[n-6]) * u[n-2]$
- $y[n] = (u[n+10] - 2u[n+5] + u[n-6]) * \beta^n u[n], |\beta| < 1$
- $y[n] = (u[n+10] - 2u[n+5] + u[n-6]) * \cos(\frac{1}{2}\pi n)$
- $y[n] = u[n] * \sum_{p=0}^{\infty} \delta[n-2p]$
- $y[n] = \beta^n u[n] * \sum_{p=0}^{\infty} \delta[n-2p], |\beta| < 1$
- $y[n] = u[n-2] * h[n], \text{ em que } h[n] = \begin{cases} \gamma^n, & n < 0, |\gamma| > 1 \\ \eta^n, & n \geq 0, |\eta| < 1 \end{cases}$
- $y[n] = (\frac{1}{2})^n u[n+2] * h[n], \text{ em que } h[n] \text{ é definido na parte (n)}$

- 2.3 Considere os sinais de tempo discreto da Figura P2.3. Avalie as somas de convolução indicadas abaixo:

- $m[n] = x[n] * z[n]$
- $m[n] = x[n] * y[n]$
- $m[n] = x[n] * f[n]$
- $m[n] = x[n] * g[n]$
- $m[n] = y[n] * z[n]$
- $m[n] = y[n] * g[n]$
- $m[n] = y[n] * w[n]$
- $m[n] = y[n] * f[n]$
- $m[n] = z[n] * g[n]$
- $m[n] = w[n] * g[n]$
- $m[n] = f[n] * g[n]$

- 2.4 Um sistema LTI tem resposta ao impulso  $h(t)$  descrita na Figura P2.4. Use linearidade e invariância no tempo para determinar a saída de sistema  $y(t)$ , se a entrada  $x(t)$  for

- $x(t) = 2\delta(t+1) - \delta(t-1)$
- $x(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)$
- $x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \delta(t-2p)$

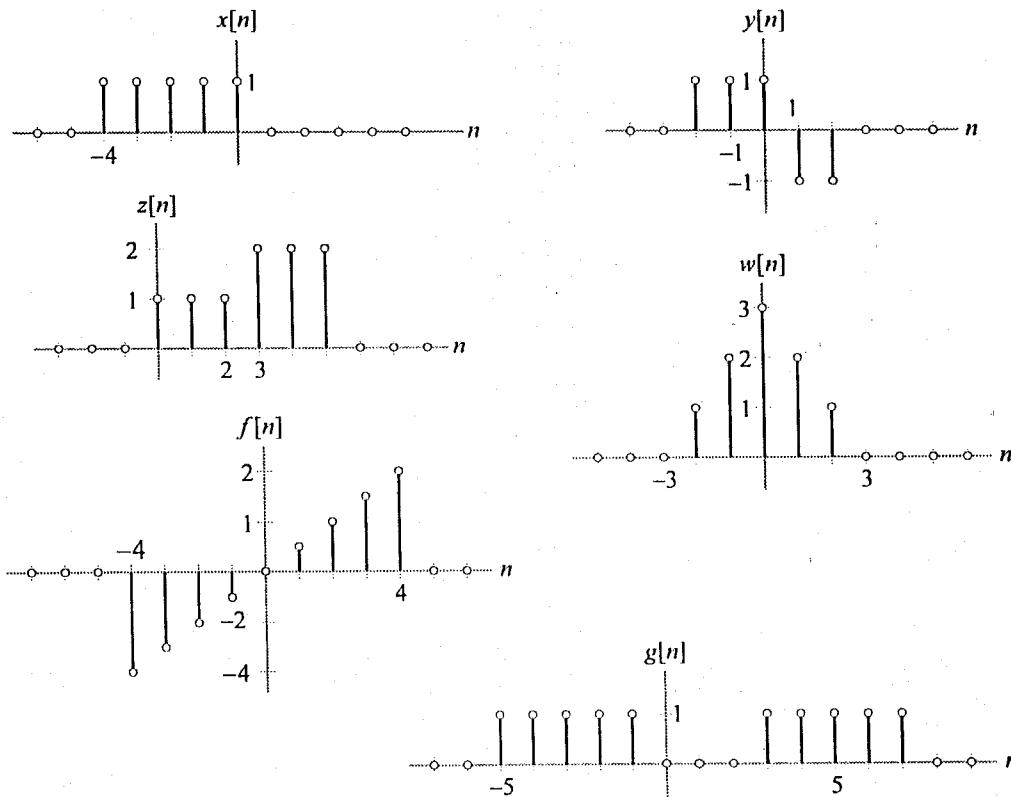


FIGURA P2.3

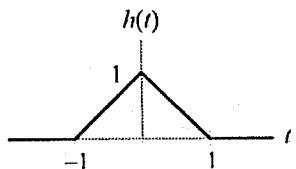


FIGURA P2.4

**2.5** Avalie as integrais de convolução de tempo contínuo apresentadas abaixo:

- $y(t) = u(t+1) * u(t-2)$
- $y(t) = e^{-2t}u(t) * u(t+2)$
- $y(t) = \cos(\pi t)(u(t+1)-u(t-3)) * u(t)$
- $y(t) = (u(t+2)-u(t-1)) * u(-t+2)$
- $y(t) = (tu(t)+(10-2t)u(t-5)-(10-t)u(t-10)) * u(t)$
- $y(t) = (t+2t^2)(u(t+1)-u(t-1)) * 2u(t+2)$
- $y(t) = \cos(\pi t)(u(t+1)-u(t-3)) * (u(t+2)-u(t-1))$
- $y(t) = \cos(\pi t)(u(t+1)-u(t-3)) * e^{-2t}u(t)$
- $y(t) = (2\delta(t)+\delta(t-5)) * u(t+1)$
- $y(t) = (\delta(t+2)+\delta(t-5)) * (tu(t)+(10-2t)u(t-5)-(10-t)u(t-10))$
- $y(t) = e^{-\gamma t}u(t) * (u(t+2)-u(t-2))$
- $y(t) = e^{-\gamma t}u(t) * \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p \delta(t-p)$
- $y(t) = (2\delta(t)+\delta(t-5)) * \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p \delta(t-p)$
- $y(t) = e^{-\gamma t}u(t) * e^{\beta t}u(-t) \quad \gamma > 0, \beta > 0$

(o)  $y(t) = u(t-1) * h(t)$ , em que  $h(t) =$

$$\begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-3t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

**2.6** Considere os sinais de tempo contínuo descritos na Figura P2.6 e avalie as integrais de convolução indicadas abaixo:

- $m(t) = x(t) * y(t)$
- $m(t) = x(t) * z(t)$
- $m(t) = x(t) * f(t)$
- $m(t) = x(t) * b(t)$
- $m(t) = x(t) * a(t)$
- $m(t) = y(t) * z(t)$
- $m(t) = y(t) * w(t)$
- $m(t) = y(t) * g(t)$
- $m(t) = y(t) * c(t)$
- $m(t) = z(t) * f(t)$
- $m(t) = z(t) * g(t)$
- $m(t) = z(t) * b(t)$
- $m(t) = w(t) * g(t)$
- $m(t) = w(t) * a(t)$
- $m(t) = f(t) * g(t)$
- $m(t) = f(t) * c(t)$
- $m(t) = f(t) * d(t)$
- $m(t) = x(t) * d(t)$

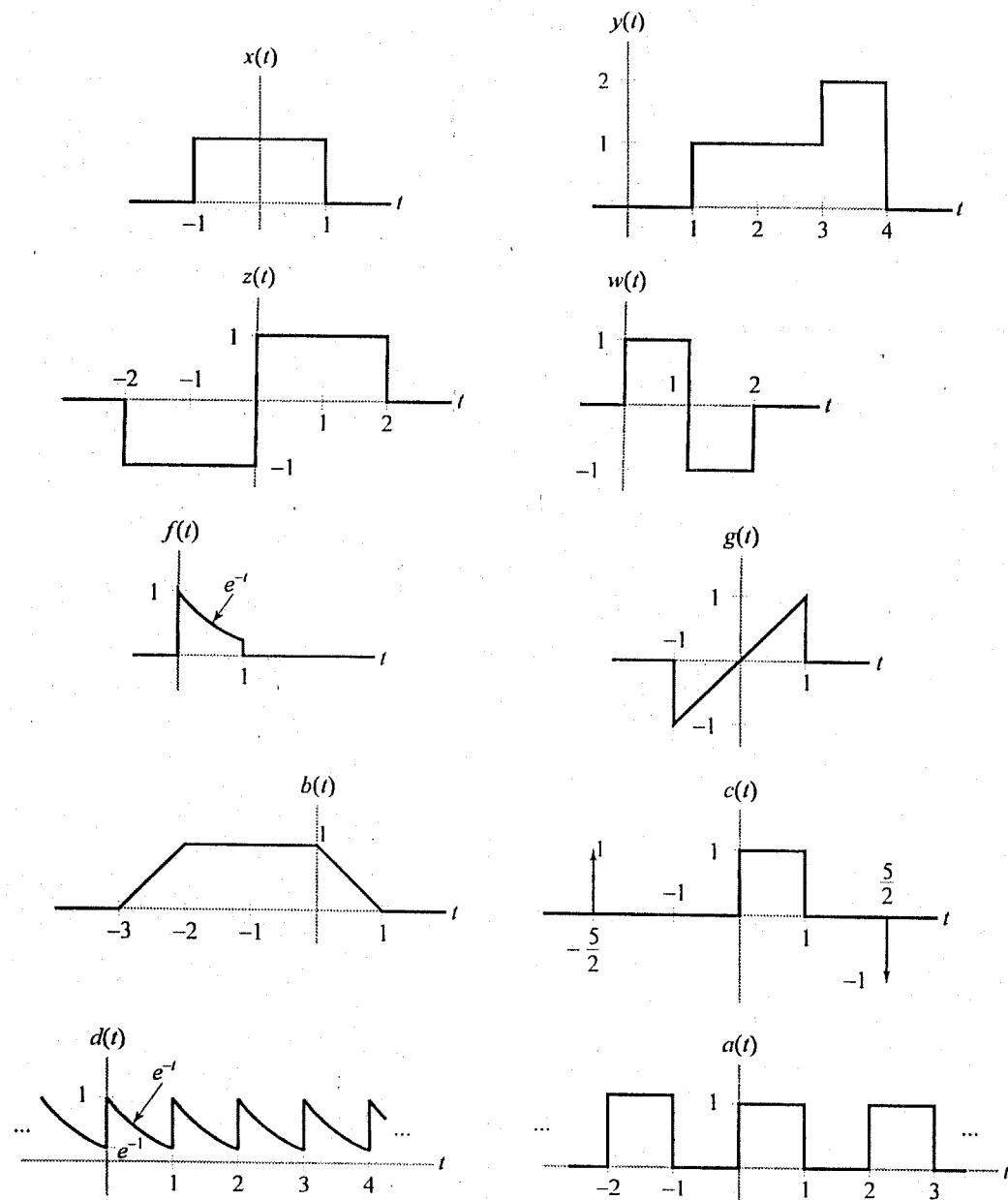


FIGURA P2.6

- 2.7 Use a definição da soma de convolução para provar as seguintes propriedades:

- Distributiva:  $x[n] * (h[n] + g[n]) = x[n] * h[n] + x[n] * g[n]$
- Associativa:  $x[n] * (h[n] + g[n]) = (x[n] * h[n]) * g[n]$
- Comutativa:  $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

- 2.8 Um sistema LTI tem a resposta ao impulso descrita na Figura P2.8.

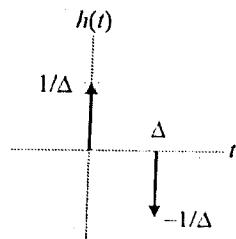


FIGURA P2.8

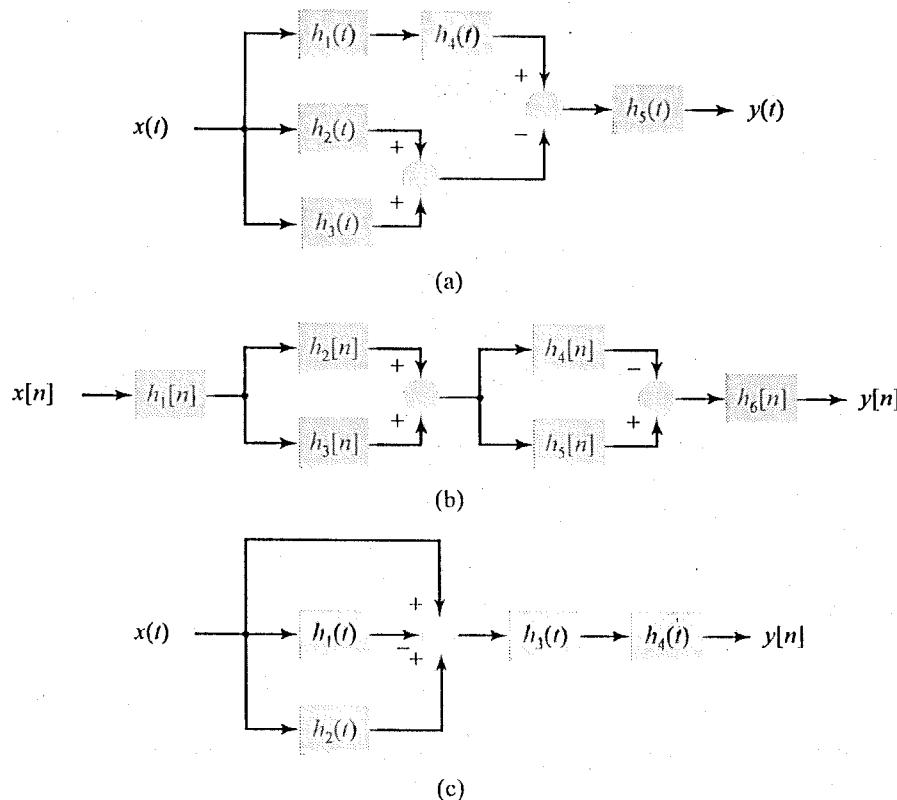


FIGURA P2.9

- (a) Expresse a saída de sistema  $y(t)$  como uma função da entrada  $x(t)$ .  
 (b) Identifique a operação matemática executada por este sistema no limite quando  $\Delta \rightarrow 0$ .  
 (c) Admitamos que  $g(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} h(t)$ . Use os resultados de (b) para expressar a saída de um sistema LTI com resposta ao impulso
- $$h^n(t) = g(t) * \underbrace{g(t) * \cdots * g(t)}_{n \text{ vezes}}$$
- como uma função da entrada  $x(t)$ .
- 2.9** Encontre a expressão para a resposta ao impulso que relaciona a entrada  $x[n]$  ou  $x(t)$  à saída  $y[n]$  ou  $y(t)$  em termos da resposta ao impulso de cada subsistema para os sistemas LTI descritos na
- (a) Figura P2.9(a)  
 (b) Figura P2.9(b)  
 (c) Figura P2.9(c)

- 2.10** Admitamos que  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ ,  $h_3(t)$  e  $h_4(t)$  sejam respostas ao impulso de sistemas LTI. Construa um sistema com resposta ao impulso  $h(t)$  usando  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ ,  $h_3(t)$  e  $h_4(t)$  como subsistemas. Desenhe a interconexão de sistemas necessária para obter:
- (a)  $h(t) = h_1(t) + \{h_2(t) + h_3(t)\} * h_4(t)$   
 (b)  $h(t) = h_1(t) * h_2(t) + h_3(t) * h_4(t)$   
 (c)  $h(t) = h_1(t) * \{h_2(t) + h_3(t) + h_4(t)\}$

**2.11** Uma interconexão de sistemas LTI é descrita na Figura P2.11. As respostas ao impulso são  $h_1[n] = (\frac{1}{2})^n(u[n+2] - u[n-3])$ ,  $h_2[n] = \delta[n]$ , e  $h_3[n] = u[n-1]$ . Admitamos que a resposta ao impulso do sistema global de  $x[n]$  até  $y[n]$  seja denotada como  $h[n]$ .

- (a) Expresse  $h[n]$  em termos de  $h_1[n]$ ,  $h_2[n]$  e  $h_3[n]$ .  
 (b) Avalie  $h[n]$  usando os resultados de (a).

Nas partes (c)-(e) determine se o sistema correspondente a cada resposta ao impulso é (i) estável, (ii) causal e (iii) sem memória.

- (c)  $h_1[n]$   
 (d)  $h_2[n]$   
 (e)  $h_3[n]$

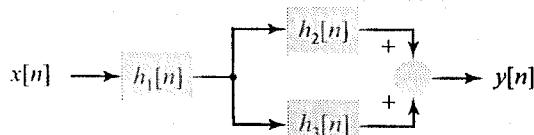


FIGURA P2.11

- 2.12** Para cada resposta ao impulso listada abaixo, determine se o sistema correspondente é (i) sem memória, (ii) causal e (iii) estável.
- (a)  $h(t) = e^{-2|t|}$   
 (b)  $h(t) = e^{2t}u(t-1)$   
 (c)  $h(t) = u(t+1) - 2u(t-1)$   
 (d)  $h(t) = 3\delta(t)$

- (e)  $h(t) = \cos(\pi t)u(t)$
- (f)  $h[n] = 2^n u[-n]$
- (g)  $h[n] = e^{2n} u[n-1]$
- (h)  $h[n] = \cos(\frac{1}{8}\pi n)\{u[n] - u[n-10]\}$
- (i)  $h[n] = 2u[n] - 2u[n-1]$
- (j)  $h[n] = \sin(\frac{1}{2}\pi n)$
- (k)  $h[n] = \delta[n] + \sin(\pi n)$

**\*2.13** Prove que a somabilidade absoluta da resposta ao impulso é uma condição necessária para a estabilidade de um sistema de tempo discreto. Sugestão: Encontre uma entrada limitada  $x[n]$  tal que a saída em algum instante  $n_o$  satisfaça  $|y[n_o]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$ .

**2.14** Avalie a resposta ao degrau para os sistemas LTI representados pelas seguintes respostas ao impulso:

- (a)  $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$
- (b)  $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$
- (c)  $h[n] = (-1)^n \{u[n+2] - u[n-3]\}$
- (d)  $h[n] = u[n]$
- (e)  $h(t) = e^{-|t|}$
- (f)  $h(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$
- (g)  $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$
- (h)  $h(t) = tu(t)$

**2.15** Avalie a resposta em freqüência para os sistemas LTI representados pelas seguintes respostas ao impulso:

- (a)  $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$
- (b)  $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$
- (c)  $h[n] = (-1)^n \{u[n+2] - u[n-3]\}$
- (d)  $h[n] = (0,9)^n e^{j(\pi/2)n} u[n]$
- (e)  $h(t) = e^{-|t|}$
- (f)  $h(t) = -\delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1)$
- (g)  $h(t) = \cos(\pi t)\{u(t+3) - u(t-3)\}$
- (h)  $h(t) = e^{2t} u(-t)$

**2.16** Escreva uma descrição em equação diferencial que relate a saída à entrada dos seguintes circuitos elétricos:

- (a) Figura P2.16(a)
- (b) Figura P2.16(b)

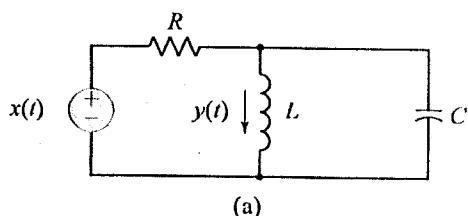


FIGURA P2.16 (a)

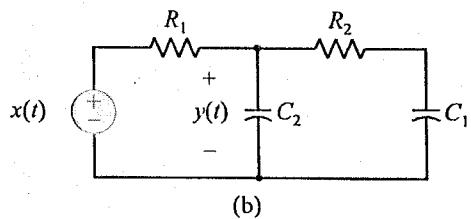


FIGURA P2.16 (b)

**2.17** Determine a resposta natural para os sistemas descritos pelas seguintes equações diferenciais:

- (a)  $5 \frac{d}{dt} y(t) + 10y(t) = 2x(t), y(0) = 3$
- (b)  $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 6y(t) = 2x(t) + \frac{d}{dt} x(t), y(0) = 2, \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0} = 1$
- (c)  $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = x(t) + \frac{d}{dt} x(t), y(0) = 0, \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0} = 1$
- (d)  $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \frac{d}{dt} x(t), y(0) = 1, \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0} = 1$
- (e)  $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4y(t) = 3 \frac{d}{dt} x(t), y(0) = -1, \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0} = 1$
- (f)  $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt} x(t), y(0) = 1, \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0} = 0$

**2.18** Determine a resposta natural para os sistemas descritos pelas seguintes equações de diferenças:

- (a)  $y[n] - \alpha y[n-1] = 2x[n], y[-1] = 3$
- (b)  $y[n] - \frac{9}{16} y[n-2] = x[n-1], y[-1] = 1, y[-2] = -1$
- (c)  $y[n] = -\frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] + x[n-1], y[-1] = 0, y[-2] = 1$
- (d)  $y[n] + \frac{9}{16} y[n-2] = x[n-1], y[-1] = 1, y[-2] = -1$
- (e)  $y[n] + y[n-1] + \frac{1}{2} y[n-2] = x[n] + 2x[n-1], y[-1] = -1, y[-2] = 1$

- 2.19** Determine a resposta forçada para os sistemas descritos pelas seguintes equações diferenciais para as entradas dadas:

(a)  $5\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$

(i)  $x(t) = 2u(t)$

(ii)  $x(t) = e^{-t}u(t)$

(iii)  $x(t) = \cos(3t)u(t)$

(b)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = 2x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$

(i)  $x(t) = -2u(t)$

(ii)  $x(t) = 2e^{-t}u(t)$

(iii)  $x(t) = \sin(3t)u(t)$

(iv)  $x(t) = 5e^{-2t}u(t)$

(c)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$

(i)  $x(t) = 5u(t)$

(ii)  $x(t) = e^{2t}u(t)$

(iii)  $x(t) = (\cos(t) + \sin(t))u(t)$

(iv)  $x(t) = e^{-t}u(t)$

(d)  $5\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

(i)  $x(t) = e^{-3t}u(t)$

(ii)  $x(t) = 2e^{-t}u(t)$

(iii)  $x(t) = 2\sin(t)u(t)$

- 2.20** Determine a resposta forçada para os sistemas descritos pelas seguintes equações de diferenças para as entradas dadas:

(a)  $y[n] - \frac{2}{5}y[n-1] = 2x[n]$

(i)  $x[n] = 2u[n]$

(ii)  $x[n] = -(\frac{1}{2})^n u[n]$

(iii)  $x[n] = \cos(\frac{1}{5}\pi n)u[n]$

(b)  $y[n] - \frac{9}{16}y[n-2] = x[n-1]$

(i)  $x[n] = u[n]$

(ii)  $x[n] = -(\frac{1}{2})^n u[n]$

(iii)  $x[n] = (\frac{3}{4})^n u[n]$

(c)  $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

(i)  $x[n] = -2u[n]$

(ii)  $x[n] = (\frac{1}{8})^n u[n]$

(iii)  $x[n] = e^{j(\pi/4)n}u[n]$

(iv)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(d)  $y[n] + y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$

(i)  $x[n] = u[n]$

(ii)  $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$

- 2.21** Determine a saída do sistema descrito pelas seguintes equações diferenciais com entrada e condições iniciais conforme especificado:

(a)  $\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t), \quad y(0) = 1, \quad x(t) = u(t)$

(b)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t), \quad y(0) = 0,$   
 $\left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0} = 1, \quad x(t) = e^{-2t}u(t)$

(c)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2x(t), \quad y(0) = -1,$   
 $\left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0} = 1, \quad x(t) = \cos(t)u(t)$

(d)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = 3\frac{d}{dt}x(t), \quad y(0) = -1,$   
 $\left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0} = 1, \quad x(t) = 2e^{-t}u(t)$

- 2.22** Determine a saída dos sistemas descritos pelas seguintes equações de diferenças com entrada e condições iniciais conforme especificado:

(a)  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 3, \quad x[n] = 2(-\frac{1}{2})^n u[n]$

(b)  $y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n-1], \quad y[-1] = 1, \quad y[-2] = 0, \quad x[n] = u[n]$

(c)  $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1], \quad y[-1] = 2, \quad y[-2] = -1, \quad x[n] = 2^n u[n]$

(d)  $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n], \quad y[-1] = 1, \quad y[-2] = -1, \quad x[n] = 2u[n]$

- 2.23** Encontre as descrições por equação de diferenças para os quatro sistemas descritos na Figura P2.23.

- 2.24** Desenhe as implementações de forma direta I e forma direta II para as seguintes equações de diferenças:

(a)  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n]$

(b)  $y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

(c)  $y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$

(d)  $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - y[n-3] = 3x[n-1] + 2x[n-2]$

- 2.25** Mostre que as implementações de forma direta I e II, descritas na Figura 2.27, implementam a equação integral de segunda ordem dada pela equação (2.42).

- 2.26** Converta as seguintes equações diferenciais em equações integrais e desenhe as implementações de forma direta I e forma direta II dos sistemas correspondentes:

(a)  $\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$

(b)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

(c)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = 3\frac{d}{dt}x(t)$

(d)  $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t)$

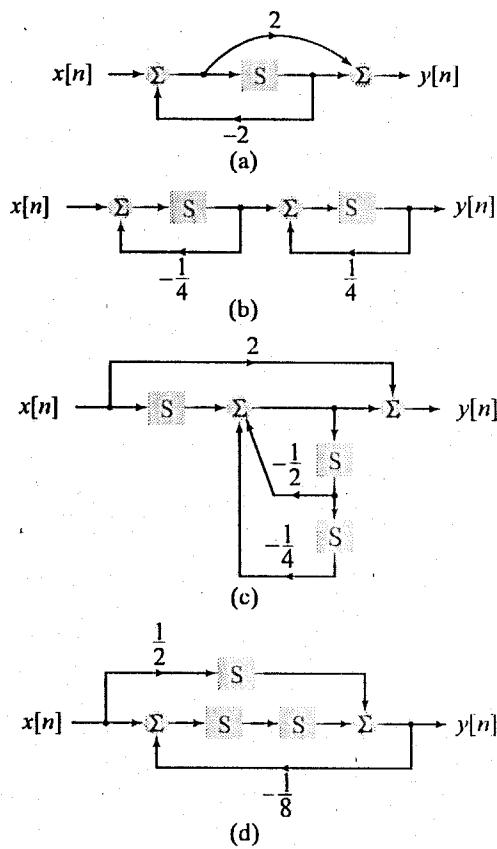


FIGURA P2.23

**2.27** Encontre descrições por equação diferencial para os três sistemas descritos na Figura P2.27.

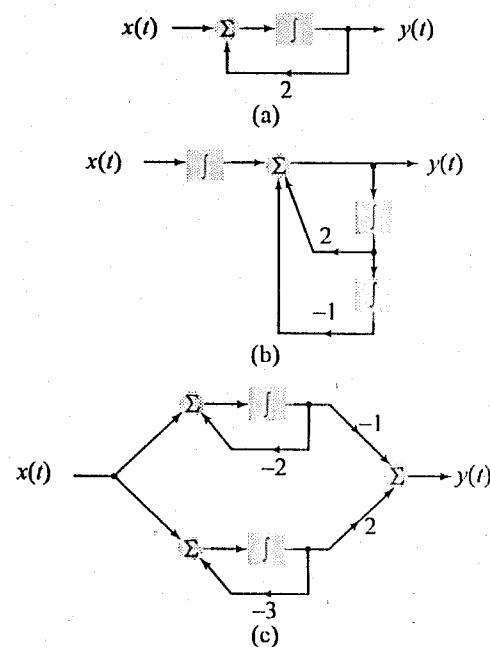


FIGURA P2.27

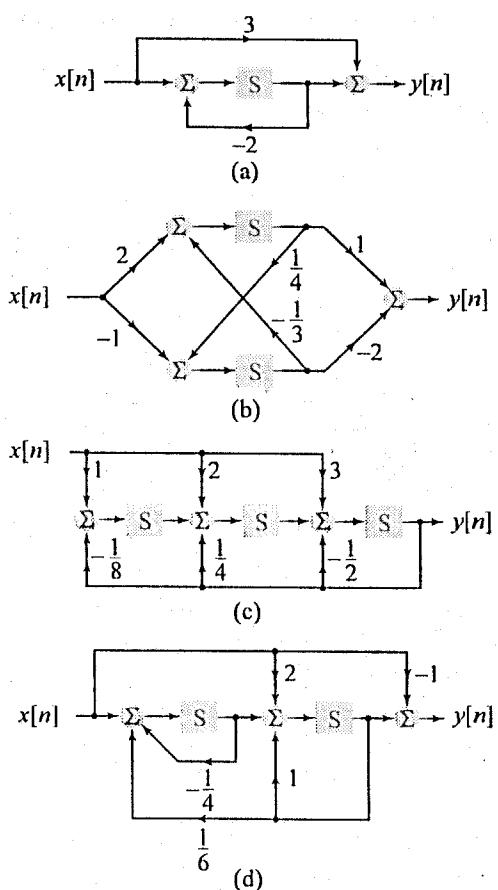


FIGURA P2.28

**2.28** Determine uma descrição por variáveis de estado para cada um dos quatro sistemas de tempo discreto descritos na Figura P2.28.

**2.29** Desenhe representações de sistema por diagramas de blocos para as seguintes descrições por variáveis de estado de tempo discreto.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, c = [1 \quad -1], D = [0]$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, c = [1 \quad -1], D = [0]$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [1 \quad 0], D = [1]$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, c = [1 \quad -1], D = [0]$

**2.30** Determine uma descrição por variáveis de estado para os cinco sistemas de tempo contínuo descritos na Figura P2.30.

**2.31** Desenhe representações de sistema por diagrama de blocos para as seguintes descrições por variáveis de estado de tempo contínuo:

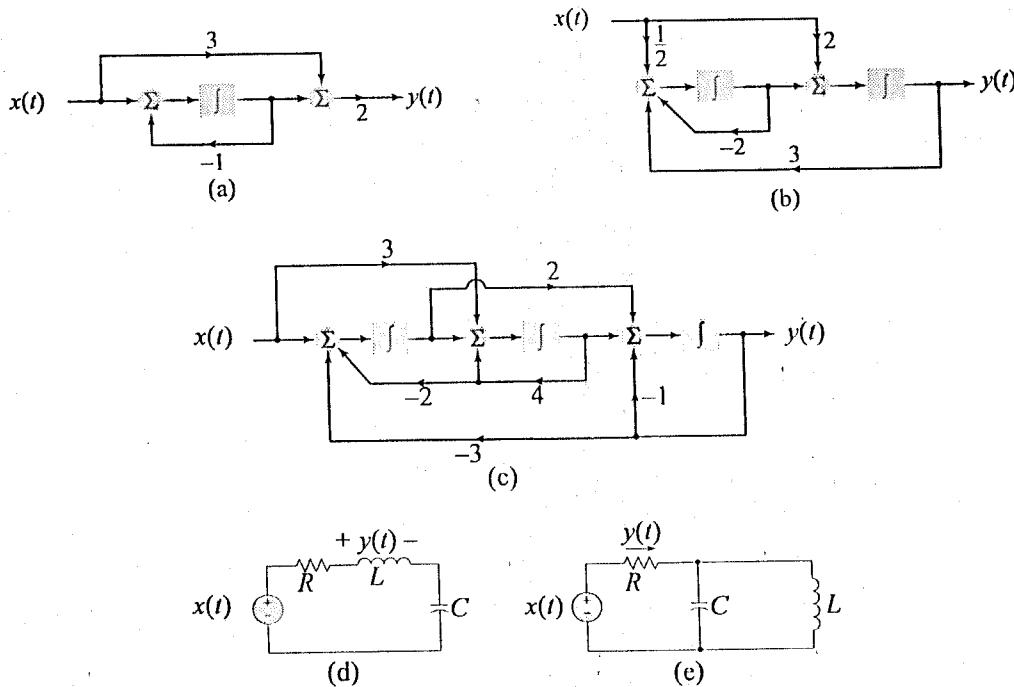


FIGURA P2.30

- (a)  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $c = [1 \quad 1]$ ,  $D = [0]$   
 (b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $c = [0 \quad -1]$ ,  $D = [0]$   
 (c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $c = [1 \quad 0]$ ,  $D = [0]$   
 (d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $c = [1 \quad 1]$ ,  $D = [0]$

2.32 Admitamos que um sistema de tempo discreto tenha as descrições por variáveis de estado

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -1], \quad D = [0]$$

- (a) Defina novos estados  $q'_1[n] = 2 q_1[n]$ ,  $q'_2[n] = 3 q_2[n]$ . Encontre a nova descrição por variáveis de estado  $A'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $D'$ .  
 (b) Defina novos estados  $q'_1[n] = 3 q_2[n]$ ,  $q'_2[n] = 2 q_1[n]$ . Encontre a nova descrição por variáveis de estado  $A'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $D'$ .  
 (c) Defina novos estados  $q'_1[n] = q_1[n] + q_2[n]$ ,  $q'_2[n] = q_1[n] - q_2[n]$ . Encontre a nova descrição por variáveis de estado,  $A'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $D'$ .

- 2.33 Considere o sistema de tempo contínuo descrito na Figura P2.33.  
 (a) Encontre a descrição por variáveis de estado para este sistema, supondo que os estados  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  sejam conforme o rotulado.

- (b) Defina novos estados  $q'_1(t) = q_1(t) - q_2(t)$ ,  $q'_2(t) = 2 q_1(t)$ . Encontre a nova descrição por variáveis de estado  $A'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $D'$ .  
 (c) Desenhe um diagrama de blocos correspondente à nova descrição por variáveis de estado em (b).  
 (d) Defina novos estados  $q'_1(t) = (1/b_1) q_1(t)$ ,  $q'_2(t) = b_2 q_1(t) - b_1 q_2(t)$ . Encontre a nova descrição por variáveis de estado  $A'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $D'$ .  
 (e) Desenhe um diagrama de blocos correspondente à nova descrição por variáveis de estado em (d).

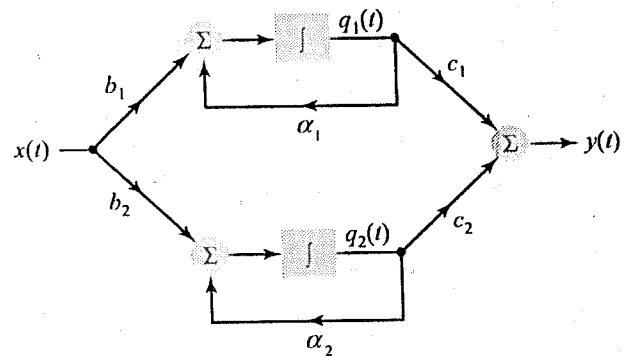


FIGURA P2.33

- \*2.34 Podemos desenvolver a integral de convolução usando a linearidade, invariância no tempo e a forma limitante de uma aproximação por degraus de escada para o sinal de entrada. Defina  $g_\Delta(t)$  como o pulso retangular de área unitária descrito na Figura P2.34(a).

- (a) Uma aproximação por degrau de escada para um sinal  $x(t)$  é descrita na Figura P2.34(b). Expressse  $\tilde{x}(t)$  como uma soma ponderada de pulsos deslocados  $g_\Delta(t)$ . A qualidade da aproximação melhora à medida que  $\Delta$  decresce?
- (b) Admitamos que a resposta de um sistema LTI a uma entrada  $g_\Delta(t)$  seja  $h_\Delta(t)$ . Se a entrada deste sistema for  $\tilde{x}(t)$ , encontre uma expressão para a saída deste sistema em termos de  $h_\Delta(t)$ .
- (c) No limite, quando  $\Delta$  tende a zero,  $g_\Delta(t)$  satisfaz as propriedades de um impulso, e podemos interpretar  $h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} h_\Delta(t)$  como a resposta ao impulso do sistema. Mostre que a expressão para a saída de sistema derivada em (b) reduz-se a  $x(t) * h(t)$  no limite quando  $\Delta$  tende a zero.

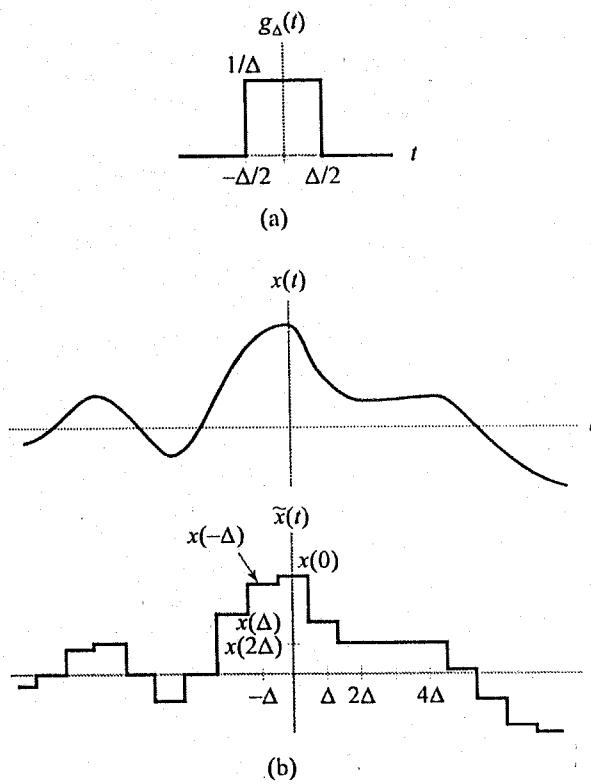


FIGURA P2.34

\*2.35 Neste problema, usamos linearidade, invariância no tempo e representação de um impulso como a forma limitante de um pulso para obter a resposta ao impulso de um circuito  $RC$  simples. A tensão no capacitor,  $y(t)$ , no circuito  $RC$  da Figura P2.35(a), em resposta a uma tensão aplicada  $x(t) = u(t)$ , é dada por

$$s(t) = \{1 - e^{-t/RC}\}u(t)$$

(Veja os Exercícios 2.8 e 2.12.) Desejamos encontrar a resposta ao impulso do sistema que relaciona a tensão de entrada  $x(t)$  à tensão no capacitor  $y(t)$ .

- (a) Escreva a entrada de pulso  $x(t) = g_\Delta(t)$  descrita na Figura P2.35(b) como a soma ponderada de funções degrau.
- (b) Use a linearidade, a invariância no tempo e o conhecimento da resposta ao degrau deste circuito para expressar a saída do circuito em resposta à entrada  $x(t) = g_\Delta(t)$ , em termos de  $s(t)$ .
- (c) No limite quando  $\Delta \rightarrow 0$ , a entrada de pulso  $g_\Delta(t)$  se aproxima de um impulso. Obtenha a resposta ao impulso do circuito, tomando o limite quando  $\Delta \rightarrow 0$  da saída obtida em (b). Sugestão: Use a definição da derivada

$$\frac{d}{dt} z(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{z\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - z\left(t - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta}$$

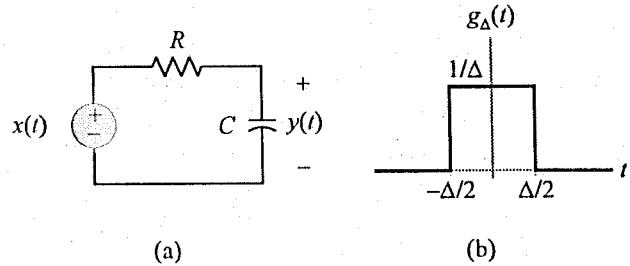


FIGURA P2.35

\*2.36 A correlação cruzada entre dois sinais reais  $x(t)$  e  $y(t)$  é definida como

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau-t) d\tau$$

Esta é a área sob o produto de  $x(t)$  com uma versão deslocada de  $y(t)$ . Note que a variável independente  $\tau - t$  é o negativo da encontrada na definição de convolução. A autocorrelação,  $r_{xx}(t)$ , de um sinal  $x(t)$  é obtida substituindo-se  $y(t)$  por  $x(t)$ .

- (a) Mostre que  $r_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$ .
- (b) Derive um procedimento passo a passo para avaliar a correlação cruzada, análogo ao utilizado para avaliar a integral de convolução dada na Seção 2.2.
- (c) Avalie a correlação cruzada entre os seguintes sinais:
- (i)  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $y(t) = e^{-3t}u(t)$
  - (ii)  $x(t) = \cos(\pi t)[u(t+2) - u(t-2)]$ ,  $y(t) = \cos(2\pi t)[u(t+2) - u(t-2)]$
  - (iii)  $x(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$ ,  $y(t) = u(t+1) - u(t)$
  - (iv)  $x(t) = u(t-a) - u(t-a-1)$ ,  $y(t) = -u(t) - u(t-1)$

- (d) Avalie a autocorrelação dos seguintes sinais:
- $x(t) = e^{-t} u(t)$
  - $x(t) = \cos(\pi t)[u(t+2) - u(t-2)]$
  - $x(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$
  - $x(t) = u(t-a) - u(t-a-1)$
- (e) Mostre que  $r_{xy}(t) = r_{yx}(-t)$ .
- (f) Mostre que  $r_{xx}(t) = r_{xx}(-t)$ .

### ► Experiências no Computador

- 2.37 Repita o Problema 2.3 usando o comando `conv` do MATLAB.
- 2.38 Use o MATLAB para repetir o Exemplo 2.6.
- 2.39 Use o MATLAB para avaliar os 20 primeiros valores da resposta ao degrau correspondentes aos sistemas do Problema 2.14(a)-(d).
- 2.40 Considere os três sistemas de média móvel definidos no Exemplo 2.6.
- Use o MATLAB para avaliar e plotar 50 valores da resposta senoidal em estado estacionário nas freqüências  $\Omega = \pi/3$  e  $\Omega = 2\pi/3$  para cada sistema.
  - Use os resultados de (a) para determinar as respostas em módulo e em fase de cada sistema nas freqüências  $\Omega = \pi/3$  e  $\Omega = 2\pi/3$ .
  - Obtenha uma expressão de forma fechada para a resposta em módulo de cada sistema e plote-a em  $-\pi < \Omega \leq \pi$ , usando o MATLAB.
- 2.41 Considere os dois sistemas que têm respostas ao impulso
- $$h_1[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- $$h_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = 0, 2 \\ -\frac{1}{4}, & n = 1, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- Use o comando `conv` do MATLAB para plotar os 20 primeiros valores da resposta ao degrau.
  - Obtenha uma expressão de forma fechada para a resposta em módulo e plote-a em  $-\pi < \Omega \leq \pi$ , usando o MATLAB.
- 2.42 Use os comandos `filter` e `filtic` do MATLAB para repetir o Exemplo 2.16.
- 2.43 Use os comandos `filter` e `filtic` do MATLAB para determinar os 50 primeiros valores de saída do Problema 2.22.
- 2.44 A resposta em módulo de um sistema descrito por uma equação de diferenças pode ser obtida da saída  $y[n]$  aplicando-se uma entrada  $x[n] = e^{j\Omega n}u[n]$  para um sistema que está inicialmente em repouso. Assim que a resposta natural do sistema tiver caído para um valor desprezível,  $y[n]$  dever-se-á somente à entrada, e temos  $y[n] \approx H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$ .
  - Determine o valor  $n_o$  para o qual cada termo da resposta natural do sistema do Exemplo 2.16 seja um fator de 1000 menor do que seu valor no instante  $n = 0$ .
  - Mostre que  $|H(e^{j\Omega})| = |y[n_o]|$ .
  - Use os resultados em (a) e (b) para determinar experimentalmente a resposta em módulo deste sistema com o comando `filter` do MATLAB. Plote a resposta em módulo para as freqüências de entrada na faixa  $-\pi < \Omega \leq \pi$ .
- 2.45 Use o comando `impz` do MATLAB para determinar os 30 primeiros valores da resposta ao impulso para os sistemas descritos no Problema 2.22.
- 2.46 Use o comando `ss2ss` do MATLAB para resolver o Problema 2.32.
- 2.47 Um sistema tem a descrição por variáveis de estado
- $$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -1], \quad D = [0]$$
- Use os comandos `lsim` e `impulse` do MATLAB para determinar os 30 primeiros valores das respostas ao degrau e ao impulso deste sistema.
  - Defina novos estados  $q_1[n] = q_1[n] + q_2[n]$  e  $q_2[n] = 2q_1[n] - q_2[n]$ . Repita a parte (a) correspondente ao sistema transformado.

# 3

## REPRESENTAÇÕES DE FOURIER PARA SINAIS

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, consideraremos a representação de um sinal como uma superposição ponderada de senóides complexas. Se esse sinal for aplicado a um sistema linear, a saída do sistema será uma superposição ponderada das respostas do sistema a cada senóide complexa. Uma aplicação similar da propriedade de linearidade foi explorada no capítulo anterior para desenvolvermos a integral e a soma de convolução. No Capítulo 2, o sinal de entrada foi expresso como uma superposição ponderada de impulsos deslocados no tempo; a saída foi dada por uma superposição ponderada de versões deslocadas no tempo da resposta ao impulso do sistema. A expressão para a saída que resultou de expressarmos sinais em termos de impulsos, foi denominada “convolução.” Ao expressar sinais em termos de senóides, obteremos uma expressão alternativa para o comportamento de entrada e saída de um sistema LTI.

A representação de sinais como uma superposição de senóides complexas não somente leva a uma expressão útil da saída de sistema como também fornece uma caracterização muito criteriosa dos sinais e sistemas. O foco deste capítulo é a representação de sinais usando senóides complexas e as propriedades dessas representações. As aplicações destas representações para a análise de sistemas e sinais são enfatizadas no capítulo seguinte.

O estudo de sinais e sistemas, usando representações senoidais, é denominado análise de Fourier em homenagem a Joseph Fourier (1768 – 1830) por sua contribuição à teoria de representação de funções como superposições ponderadas de senóides. Os métodos de Fourier têm aplicação difundida indo além dos sinais e sistemas; eles são usados em todos os ramos da engenharia e da ciência.

#### ■ SENÓIDES COMPLEXAS E SISTEMAS LTI

A resposta senoidal em estado estacionário de um sistema LTI foi introduzida na Seção 2.3. Mostramos que uma entrada de senóide complexa em um sistema LTI gera uma saída igual à entrada senoidal multiplicada pela resposta em frequência do sistema. Ou seja, em tempo discreto, a entrada  $x[n] = e^{j\Omega n}$  resulta na saída

$$y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$

em que a resposta em frequência  $H(e^{j\Omega})$  é definida em termos da resposta no impulso  $h[n]$  como

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k}$$

Em tempo contínuo, a entrada  $x(t) = e^{j\omega t}$  resulta na saída

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

em que a resposta em freqüência  $H(j\omega)$  é definida em termos da resposta ao impulso  $h(t)$  como

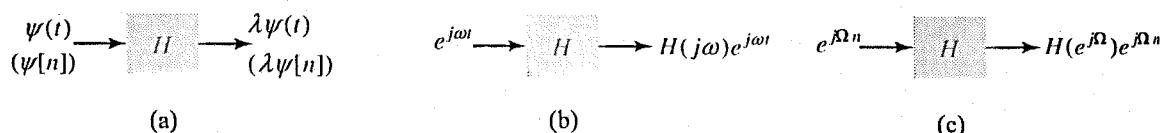
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Dizemos que a senóide complexa  $\psi(t) = e^{j\omega t}$  é uma *autofunção* do sistema  $H$  associado com o *autovalor*  $\lambda = H(j\omega)$  porque ela satisfaz um problema de autovalor descrito por

$$H\{\psi(t)\} = \lambda\psi(t)$$

Esta autorelação está ilustrada na Figura 3.1. O efeito do sistema em um sinal de entrada de autofunção é o de multiplicação por escalar — a saída é dada pelo produto da entrada e de um número complexo. Esta autorrelação própria é análoga ao problema de autovalor matricial mais familiar. Se  $\mathbf{e}_k$  for um autovetor de uma matriz  $\mathbf{A}$  com autovalor  $\lambda_k$ , teremos

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$$



**FIGURA 3.1** Ilustração da propriedade de autofunção de sistemas lineares. A ação do sistema sobre uma entrada de autofunção é de multiplicação pelo autovalor correspondente. (a) Autofunção geral  $\psi(t)$  ou  $\psi[n]$  e autovalor  $\lambda$ . (b) Autofunção senóide complexa  $e^{j\omega t}$  e autovalor  $H(j\omega)$ . Autofunção senóide complexa  $e^{j\Omega n}$  e autovalor  $H(e^{j\Omega})$ .

Multiplicar  $\mathbf{e}_k$  pela matriz  $\mathbf{A}$  é equivalente a multiplicar  $\mathbf{e}_k$  pelo escalar  $\lambda_k$ .

Sinais que são autofunções de sistemas desempenham um papel importante na teoria dos sistemas. Representando sinais arbitrários como superposições ponderadas de autofunções, transformamos a operação de convolução em uma de multiplicação. Para ver isto, considere expressar a entrada em um sistema LTI como a soma ponderada de  $M$  senóides complexas

$$x(t) = \sum_{k=1}^M a_k e^{j\omega_k t}$$

Se  $e^{j\omega_k t}$  for uma autofunção do sistema com autovalor  $H(j\omega_k)$ , então cada termo da entrada,  $a_k e^{j\omega_k t}$ , produz um termo de saída,  $a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$ . Conseqüentemente, expressamos a saída do sistema como

$$y(t) = \sum_{k=1}^M a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

A saída é uma soma ponderada de  $M$  senóides complexas, sendo os pesos,  $a_k$ , modificados pela resposta em freqüência do sistema,  $H(j\omega_k)$ . A operação de convolução,  $h(t) * x(t)$ , torna-se uma multiplicação,  $a_k H(j\omega_k)$ , porque  $x(t)$  é expresso como uma soma de autofunções. A relação análoga vale no caso de tempo discreto.

Esta propriedade é uma motivação poderosa para representarmos sinais como superposições ponderadas de senóides complexas. Além disso, os pesos fornecem uma interpretação alternativa dos sinais. Ao invés de descrever o comportamento do sinal como uma função de tempo, os pesos descrevem o sinal como uma função da freqüência.

A noção geral de descrevermos sinais complicados como uma função da freqüência é comumente encontrado na música. Por exemplo, a partitura musical de uma orquestra contém partes para instrumentos que possuem diferentes faixas de freqüência como, por exemplo, um baixo de cordas, o qual produz uma freqüência muito baixa, e um pícolo, que produz um som de freqüência muito elevada. O som que percebemos quando ouvimos uma orquestra representa a superposição de sons gerados por cada instrumento. Similarmente, a partitura para um coral contém as partes correspondentes ao baixo, ao tenor, ao alto e à soprano, cada um dos quais contribui para uma faixa de freqüência diferente no som global. As representações de sinais desenvolvidas neste capítulo podem ser vistas analogamente: o peso associado com uma senóide de determinada freqüência representa a contribuição dessa senóide para o sinal global. Uma visualização do domínio de freqüência dos sinais é muito informativa, conforme veremos no que se segue.

### ■ REPRESENTAÇÕES DE FOURIER PARA QUATRO CLASSES DE SINAIS

Há quatro representações de Fourier distintas, cada uma aplicável a uma classe diferente de sinais. Estas quatro classes são definidas pelas propriedades de periodicidade de um sinal, mostrando se ele é de tempo contínuo ou discreto. Os sinais periódicos têm representações como séries de Fourier. A série de Fourier (FS) (Fourier Series) se aplica a sinais periódicos de tempo contínuo, e a série de Fourier de tempo discreto (DTFS) (Discrete Time Fourier Series) se aplica a sinais periódicos de tempo discreto. Sinais não-periódicos têm representações pela transformada de Fourier. Se o sinal for de tempo contínuo e não-periódico, a representação denominar-se-a transformada de Fourier (FT) (Fourier Transform). Se o sinal for de tempo discreto e não-periódico, será usada a transformada de Fourier de tempo discreto (DTFT) (Discrete Time Fourier Transform). A Tabela 3.1 ilustra a relação entre as propriedades de tempo de um sinal e a representação de Fourier apropriada. A DTFS muitas vezes é chamada de transformada de Fourier discreta ou DFT; porém, esta terminologia não reflete corretamente a natureza de série da DTFS e, muitas vezes, acarreta confusão com a DTFT, por isso adotamos a terminologia mais descritiva, DTFS.

**TABELA 3.1 Relação Entre Propriedades de Tempo de um Sinal e a Representação de Fourier Apropriada**

Propriedade de Tempo	Periódica	Não Periódica
C o n t í n u o	Série de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
D i s c r e t o	Série de Fourier de Tempo Discreto (DTFS)	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

### Sinais Periódicos: Representações da Série de Fourier

Considere representar um sinal periódico como uma superposição ponderada de senóides complexas. Uma vez que a superposição ponderada deve ter o mesmo período que o sinal, cada senóide da superposição deve ter o mesmo período que o sinal. Isto implica que a freqüência de cada senóide deve ser um múltiplo inteiro da freqüência fundamental do sinal. Se  $x[n]$  for um sinal de tempo discreto de período fundamental  $N$ , então procuraremos representar  $x[n]$  pela DFTS

$$\hat{x}[n] = \sum_k A[k] e^{jk\Omega_0 n} \quad (3.1)$$

em que  $\Omega_0 = 2\pi/N$  é a freqüência fundamental, de  $x[n]$ . A freqüência da  $k$ -ésimo senóide na superposição é  $k\Omega_0$ . Similarmente, se  $x(t)$  for um sinal de tempo contínuo de período fundamental  $T$ , representaremos  $x(t)$  pela FS

$$\hat{x}[n] = \sum_k A[k] e^{jk\omega_0 t} \quad (3.2)$$

em que  $\omega_0 = 2\pi/T$  é a freqüência fundamental de  $x(t)$ . Aqui, a freqüência da  $k$ -ésima senóide é  $k\omega_0$ . Tanto na equação (3.1) como (3.2),  $A[k]$  é o peso aplicado à  $k$ -ésima senóide complexa e o circunflexo ^ denota valor aproximado, uma vez que ainda não supomos que ou  $x[n]$  ou  $x(t)$  podem ser representados exatamente por uma série desta forma.

Quantos termos e pesos devemos usar em cada soma? Iniciando com a DTFS descrita na equação (3.1), a resposta para esta pergunta torna-se evidente se nos lembarmos de que senóides complexas com freqüências distintas nem sempre são distintas. Em especial, as senóides complexas  $e^{jk\omega_0 n}$  são  $N$  periódicas no índice de freqüência  $k$ . Temos

$$\begin{aligned} e^{j(N+k)\Omega_0 n} &= e^{jN\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n} \\ &= e^{j2\pi n} e^{jk\Omega_0 n} \\ &= e^{jk\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Dessa forma, há somente  $N$  senóides complexas distintas da forma  $e^{jk\Omega_0 n}$ . Um conjunto único de  $N$  senóides complexas distintas é obtido admitindo-se que o índice de freqüência  $k$  assuma quaisquer  $N$  valores consecutivos. Por isso, podemos reescrever a equação (3.1) como

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n} \quad (3.3)$$

em que a notação  $k = \langle N \rangle$  implica admitir que  $k$  varie ao longo de quaisquer  $N$  valores consecutivos. O conjunto de  $N$  valores consecutivos ao longo dos quais  $k$  varia é arbitrário e normalmente é escolhido para simplificar o problema de explorando simetrias no sinal  $x[n]$ . As escolhas comuns são  $k = 0$  a  $N - 1$  e, para  $N$  par,  $k = -N/2$  a  $N/2 - 1$ .

Para determinar os pesos ou coeficientes  $A[k]$ , minimizaremos o erro médio quadrático (MSE\*) entre o sinal e sua representação em série. A construção da representação em série garante que tanto o sinal como a representação sejam periódicos, com o mesmo período. Conseqüentemente, o MSE é a média da diferença elevada ao quadrado entre o sinal e sua representação em qualquer período. No caso de tempo discreto, somente  $N$  valores consecutivos de  $\hat{x}[n]$  e  $x[n]$  são necessários, uma vez que ambos têm período  $N$ . Temos

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n] - \hat{x}[n]|^2 \quad (3.4)$$

onde, novamente, usamos a notação  $n = \langle N \rangle$  para indicar o somatório ao longo de quaisquer  $N$  valores consecutivos. Deixamos o intervalo para avaliar o MSE sem ser especificado, uma vez que mais tarde se demonstrará ser conveniente escolher intervalos diferentes em diferentes problemas.

Em comparação com o caso de tempo discreto, as senóides complexas de tempo contínuo  $e^{jk\omega_0 t}$

\* Nota de R.T.: MSE de Mean Square Error.

com freqüências distintas  $k\omega_o$  são sempre distintas. Conseqüentemente, há potencialmente um número infinito de termos distintos na série da equação (3.2) e aproximamos  $x(t)$  como

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k]e^{j k \omega_o t} \quad (3.5)$$

Procuramos os coeficientes  $A[k]$ , de forma que  $\hat{x}(t)$  seja uma boa aproximação de  $x(t)$ .

### Sinais Não-Periódicos: Representações da Transformada de Fourier

Em comparação com o caso de sinal periódico, não há restrições quanto ao período das senóides usadas para representar sinais não-periódicos. Por isso, as representações da transformada de Fourier empregam senóides complexas que têm um *continuum* de freqüências. O sinal é representado como uma integral ponderada de senóides complexas em que a variável de integração é a freqüência da senóide. Senóides de tempo discreto são usadas para representar sinais de tempo discreto na DTFT, enquanto senóides de tempo contínuo são usadas para representar sinais de tempo contínuo na FT. Senóides de tempo contínuo com freqüências distintas são distintas, de forma que a FT envolve freqüências senoidais de  $-\infty$  a  $\infty$ . As senóides de tempo discreto são únicas somente ao longo de um intervalo de freqüência  $2\pi$ , uma vez que senóides de tempo discreto com freqüências separadas por um múltiplo inteiro de  $2\pi$  são idênticas. Conseqüentemente, a DTFT envolve freqüências senoidais dentro de um intervalo de  $2\pi$ .

As quatro seções seguintes deste capítulo desenvolvem, em seqüência, a DTFS, FS, DTFT e FT. O restante deste capítulo explora as propriedades destas quatro representações. Todas as quatro representações baseiam-se em funções básicas senoidais complexas, tendo assim, propriedades análogas.

### ■ ORTOGONALIDADE DE SENÓIDES COMPLEXAS

A ortogonalidade das senóides complexas desempenha um papel fundamental nas representações de Fourier. Dizemos que dois sinais são *ortogonais* se seus *produtos internos* forem zero. Para sinais periódicos de tempo discreto, o produto interno é definido como a soma de valores em seu produto. Se  $\phi_k[n]$  e  $\phi_m[n]$  forem dois sinais com período  $N$ , o produto interno será

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_k[n]\phi_m^*[n]$$

Note que o produto interno é definido usando-se conjugados complexos quando os sinais têm valores complexos. Se  $I_{k,m} = 0$  para  $k \neq m$ , então  $\phi_k[n]$  e  $\phi_m[n]$  são ortogonais. De forma correspondente, para sinais de tempo contínuo com período  $T$ , o produto interno é definido em termos de uma integral, conforme é mostrado por

$$I_{k,m} = \int_{\langle T \rangle} \phi_k(t)\phi_m^*(t) dt$$

em que a notação  $\langle T \rangle$  implica integração em qualquer intervalo de tamanho  $T$ . Como no tempo discreto, se  $I_{k,m} = 0$  para  $k \neq m$ , então podemos dizer que  $\phi_k(t)$  e  $\phi_m(t)$  são ortogonais.

Iniciando com o caso de tempo discreto, admitamos que  $\phi_k[n] = e^{j k \Omega_o n}$  seja uma senóide complexa com freqüência  $k\Omega_o$ . Escolhendo o intervalo  $n = 0$  até  $n = N - 1$ , o produto interno é dado por

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_o n}$$

Supondo que  $k$  e  $m$  se restrinjam ao mesmo intervalo de  $N$  valores consecutivos, esta é uma série geométrica finita, cuja soma depende de se  $k = m$  ou  $k \neq m$ , conforme é mostrado por

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_o n} = \begin{cases} N, & k = m \\ \frac{1 - e^{-jk2\pi}}{1 - e^{-j\Omega_o}}, & k \neq m \end{cases}$$

Usamos agora  $e^{-jk2\pi} = 1$  para obter

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_o n} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (3.6)$$

Este resultado indica que senóides complexas com freqüências separadas por um múltiplo inteiro da freqüência fundamental são ortogonais. Usaremos este resultado para derivar a representação por DTFS.

Senóides complexas de tempo contínuo com freqüências separadas por um múltiplo inteiro da freqüência fundamental também são ortogonais. Admitindo que  $\phi_k(t) = e^{jk\omega_o t}$ , o produto interno entre  $e^{jk\omega_o t}$  e  $e^{jm\omega_o t}$  é expresso como

$$I_{k,m} = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_o t} dt$$

Esta integral assume dois valores, dependendo do valor  $k - m$ , conforme é mostrado por

$$\int_0^T e^{j(k-m)\omega_o t} dt = \begin{cases} T, & k = m \\ \left[ \frac{1}{j(k-m)\omega_o} e^{j(k-m)\omega_o t} \right]_0^T, & k \neq m \end{cases}$$

Usando o fato de que  $e^{j(k-m)\omega_o T} = e^{j(k-m)2\pi} = 1$ , obtemos

$$\int_0^T e^{j(k-m)\omega_o t} dt = \begin{cases} T, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (3.7)$$

Esta propriedade é fundamental para determinar os coeficientes da FS.

## 3.2 Sinais Periódicos de Tempo Discreto: A Série de Fourier de Tempo Discreto

### \* ■ DERIVAÇÃO

A DTFS representa um sinal de tempo discreto  $x[n]$  com período  $N$  como a série da equação (3.3)

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_o n}$$

em que  $\Omega_o = 2\pi/N$ .

Para escolher os coeficientes  $A[k]$  da DTFS, minimizaremos agora o MSE definido na equação (3.4), reescrevendo

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n] - \hat{x}[n]|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left| x[n] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_o n} \right|^2 \end{aligned}$$

A minimização do MSE é instrutiva, não obstante envolver uma manipulação algébrica tediosa. O resultado final é uma expressão para  $A[k]$  em termos de  $x[n]$ . Além disso, ao examinarmos o valor mínimo do MSE, somos capazes de estabelecer a exatidão com a qual  $\hat{x}[n]$  aproxima  $x[n]$ .

O módulo elevado ao quadrado de um número complexo  $c$  é dado por  $|c|^2 = cc^*$ . Expandindo o módulo da soma elevado ao quadrado, usando  $|a+b|^2 = (a+b)(a+b)^*$ ,

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left\{ \left( x[n] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k]e^{jk\Omega_o n} \right) \left( x[n] - \sum_{m=\langle N \rangle} A[m]e^{jm\Omega_o n} \right)^* \right\}$$

é produzido.

Multiplique agora cada termo para obter

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 - \sum_{m=\langle N \rangle} A^*[m] \left( \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jm\Omega_o n} \right) \\ &\quad - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] \left( \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^*[n]e^{jk\Omega_o n} \right) \\ &\quad + \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} A^*[m]A[k] \left( \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-m)\Omega_o n} \right) \end{aligned}$$

Defina

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk\Omega_o n} \quad (3.8)$$

e aplique a propriedade de ortogonalidade de senóides complexas de tempo discreto, equação (3.6), ao último termo do MSE. Conseqüentemente, podemos escrever o MSE como

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 - \sum_{k=\langle N \rangle} A^*[k]X[k] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k]X^*[k] + \sum_{k=\langle N \rangle} |A[k]|^2$$

Use agora a técnica de “completar o quadrado” para escrever o MSE como um quadrado perfeito nos coeficientes  $A[k]$  da DTFS. Adicione e subtraia  $\sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2$  no lado direito do MSE, de forma que ele possa ser escrito como

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 + \sum_{k=\langle N \rangle} (|A[k]|^2 - A^*[k]X[k] - A[k]X^*[k] + |X[k]|^2) \\ &\quad - \sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2 \end{aligned}$$

Reescreva a soma do meio como um quadrado para obter

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 + \sum_{k=\langle N \rangle} |A[k] - X[k]|^2 - \sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2 \quad (3.9)$$

A dependência que o MSE tem dos coeficientes desconhecidos  $A[k]$  da DTFS se reduz ao termo do meio da equação (3.9), e este termo é sempre não-negativo. Conseqüentemente, o MSE é minimizado forçando o termo do meio a tender a zero com a opção

$$A[k] = X[k]$$

Estes coeficientes minimizam o MSE entre  $\hat{x}[n]$  e  $x[n]$ .

Note que  $X[k]$  tem período  $N$  em  $k$ , uma vez que

$$\begin{aligned} X[k+N] &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-j(k+N)\Omega_o n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk\Omega_o n}e^{-jN\Omega_o n} \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $e^{-jN\Omega_o n} = e^{-j2\pi n} = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} X[k+N] &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= X[k] \end{aligned}$$

a qual estabelece que  $X[k]$  tem período  $N$ .

O valor do MSE mínimo determina quão bem  $\hat{x}[n]$  se aproxima de  $x[n]$ . Determinamos o MSE mínimo substituindo  $A[k] = X[k]$  na equação (3.9) para obter

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 - \sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2 \quad (3.10)$$

Em seguida, substituímos a equação (3.8) no segundo termo da equação (3.10) para obter

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N^2} \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} x[n] x^*[m] e^{j(m-n)\Omega_o k}$$

Permute a ordem do somatório para escrever

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} x[n] x^*[m] \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} e^{j(m-n)\Omega_o k} \quad (3.11)$$

A equação (3.11) é simplificada, lembrando que  $e^{jm\Omega_o k}$  e  $e^{jn\Omega_o k}$  são ortogonais. Referindo-nos à equação (3.6), temos

$$\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} e^{j(m-n)\Omega_o k} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Isto reduz a soma dupla em  $m$  e  $n$  no lado direito da equação (3.11) à soma simples

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2$$

Substituir este resultado na equação (3.10) dará  $MSE = 0$ . Ou seja, se os coeficientes da DTFS são dados pela equação (3.8), então o MSE entre  $\hat{x}[n]$  e  $x[n]$  é zero. Uma vez que o MSE é zero, o erro é zero para cada valor de  $n$  e, dessa forma,  $\hat{x}[n] = x[n]$ .

## ■ A REPRESENTAÇÃO POR DTFS

A representação por DTFS para  $x[n]$  é dada por

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{j k \Omega_o n} \quad (3.12)$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_o n} \quad (3.13)$$

em que  $x[n]$  tem período fundamental  $N$  e  $\Omega_o = 2\pi/N$ . Dizemos que  $x[n]$  e  $X[k]$  são um par de DTFS e denotamos esta relação como

$$x[n] \xrightarrow{DTFS; \Omega_o} X[k]$$

A partir dos  $N$  valores de  $X[k]$  podemos determinar  $x[n]$  usando a equação (3.12), e a partir de  $N$  valores de  $x[n]$  podemos determinar  $X[k]$  usando a equação (3.13). Tanto  $X[k]$  como  $x[n]$  fornecem uma descrição completa do sinal. Veremos que em alguns problemas é vantajoso representarmos o sinal usando seus valores de tempo  $x[n]$ , enquanto em outros os coeficientes  $X[k]$  da DTFS fornecem uma descrição mais conveniente do sinal.

A representação pelos coeficientes da DTFS também é conhecida como representação de domínio de freqüência, porque cada coeficiente da DTFS é associado com uma senóide complexa de freqüência diferente.

Antes de apresentarmos diversos exemplos que ilustram a DTFS, lembramos ao leitor que os valores iniciais dos índices  $k$  e  $n$  nas equações (3.12) e (3.13) são arbitrários, porque tanto  $x[n]$  como  $X[k]$  tem período  $N$ . A faixa para os índices pode, deste modo, ser escolhida para simplificar o problema que se tem à frente.

**EXEMPLO 3.1** Encontre a representação por DTFS para

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n + \phi\right)$$

**Solução:** O período fundamental de  $x[n]$  é  $N = 16$ . Conseqüentemente,  $\Omega_0 = 2\pi/16$ . Poderíamos determinar os coeficientes da DTFS usando a equação (3.13); entretanto, neste caso, é mais fácil encontrá-los por meio de inspeção. Escreva

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{e^{j[(\pi/8)n+\phi]} + e^{-j[(\pi/8)n+\phi]}}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-j\phi} e^{-j(\pi/8)n} + \frac{1}{2} e^{j\phi} e^{j(\pi/8)n} \end{aligned} \quad (3.14)$$

e compare isto com a DTFS da equação (3.12), escrita usando-se um índice inicial  $k = -7$

$$x[n] = \sum_{k=-7}^8 X[k] e^{jk(\pi/8)n} \quad (3.15)$$

Igualando os termos da equação (3.14) e equação (3.15), tendo freqüências iguais,  $k\pi/8$ , resulta em

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } 2\pi/16} X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-j\phi}, & k = -1 \\ \frac{1}{2} e^{j\phi}, & k = 1 \\ 0, & -7 \leq k \leq 8 \text{ e } k \neq \pm 1 \end{cases}$$

Uma vez que  $X[k]$  tem período  $N = 16$ , temos  $X[15] = X[31] = \dots = \frac{1}{2} e^{-j\phi}$  e similarmente  $X[17] = X[33] = \dots = \frac{1}{2} e^{j\phi}$  com todos os outros valores de  $X[k]$  iguais a zero. As representações gráficas do módulo e da fase de  $X[k]$  são apresentadas na Figura 3.2.

Em geral, é mais fácil determinar os coeficientes da DTFS por inspeção quando o sinal consistir em uma soma de senóides.

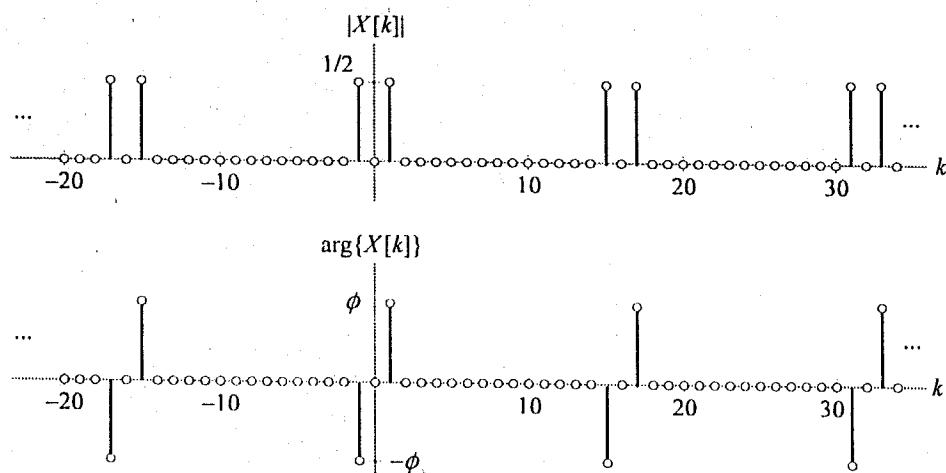


FIGURA 3.2 Módulo e fase dos coeficientes da DTFS para o Exemplo 3.1.

O módulo ou magnitude de  $X[k]$ ,  $|X[k]|$ , é conhecido como *espectro de magnitude\** de  $x[n]$ . Similarmente, a fase de  $X[k]$ ,  $\arg\{X[k]\}$ , é conhecida como o *espectro de fase* de  $x[n]$ . No exemplo anterior, todos os componentes de  $x[n]$  estão concentrados em duas freqüências,  $\Omega_o (k=1)$  e  $-\Omega_o (k=-1)$ .

► **EXERCÍCIO 3.1** Determine os coeficientes da DTFS por inspeção para o sinal

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{1}{12}\pi n + \frac{3\pi}{8}\right)$$

*Resposta:*

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } 2\pi/24} X[k] = \begin{cases} -\frac{e^{-j(3\pi/8)}}{2j}, & k = -1 \\ 1, & k = 0 \\ \frac{e^{j(3\pi/8)}}{2j}, & k = 1 \\ 0 & \text{caso contrário para } -11 \leq k \leq 12 \end{cases}$$

O exemplo seguinte avalia diretamente a equação (3.13) para determinar os coeficientes da DTFS.

**EXEMPLO 3.2** Encontre os coeficientes da DTFS para a onda quadrada com período  $N$  descrita na Figura 3.3.

*Solução:* O período é  $N$ , de forma que  $\Omega_o = 2\pi/N$ . É conveniente, neste caso, avaliar a equação (3.13) nos índices de  $n = -M$  até  $n = N - M - 1$ . Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^{N-M-1} x[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^M e^{-jk\Omega_o n} \end{aligned}$$

Execute a mudança de variável no índice do somatório,  $m = n + M$ , para obter

$$X[k] = \frac{1}{N} e^{jk\Omega_o M} \sum_{m=0}^{2M} e^{-jk\Omega_o m}$$

A soma da série geométrica produzirá

$$X[k] = \frac{e^{jk\Omega_o M}}{N} \left( \frac{1 - e^{-jk\Omega_o (2M+1)}}{1 - e^{-jk\Omega_o}} \right), \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

a qual pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{N} \left( \frac{e^{jk\Omega_o (2M+1)/2}}{e^{jk\Omega_o /2}} \right) \left( \frac{1 - e^{-jk\Omega_o (2M+1)}}{1 - e^{-jk\Omega_o}} \right), \\ &= \frac{1}{N} \left( \frac{e^{jk\Omega_o (2M+1)/2} - e^{-jk\Omega_o (2M+1)/2}}{e^{jk\Omega_o /2} - e^{-jk\Omega_o /2}} \right), \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{aligned}$$

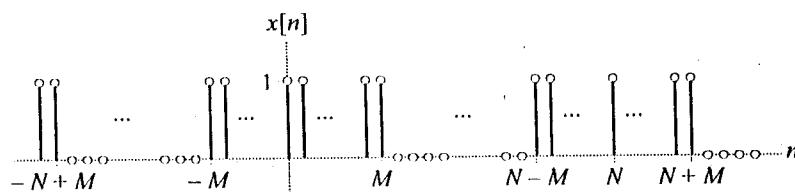


FIGURA 3.3 Onda quadrada correspondente ao Exemplo 3.2.

\* N. de R.T.: Quando não há risco de ambigüidade, pode-se usar simplesmente espectro.

Neste ponto, podemos dividir o numerador e o denominador por  $2j$  para expressar  $X[k]$  como uma razão de duas funções seno, como é mostrado por

$$X[k] = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\Omega_o}{2} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\Omega_o}{2}\right)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

Uma expressão alternativa para  $X[k]$  é obtida substituindo-se  $\Omega_o = 2\pi/N$ , produzindo

$$X[k] = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{N} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

A técnica usada aqui para escrever a expressão da soma geométrica finita para  $X[k]$ , como uma razão de funções seno, envolve tornar simétricos tanto o numerador  $1 - e^{-jk\Omega_o(2M+1)}$  como o denominador  $1 - e^{-jk\Omega_o}$ , com a potência apropriada de  $e^{jk\Omega_o}$ . Agora, para  $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ , temos

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M 1 \\ &= \frac{2M+1}{N} \end{aligned}$$

e a expressão para  $X[k]$  é

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{N} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{2M+1}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

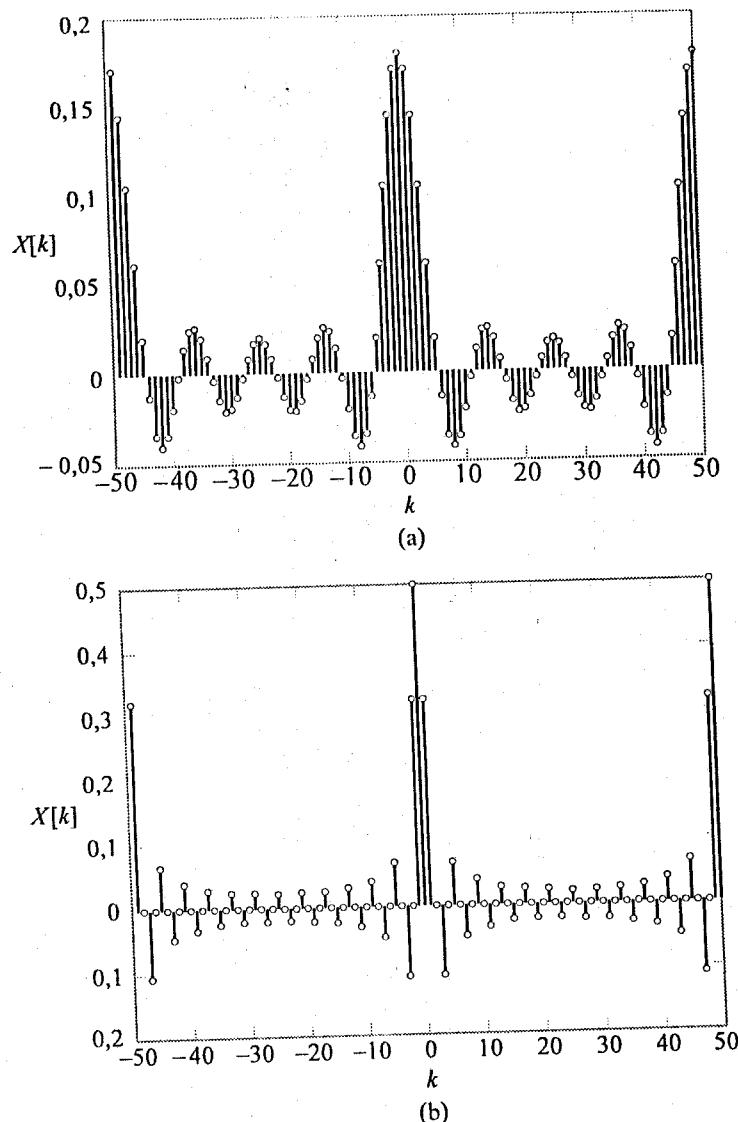
Usando a regra de L'Hopital, é fácil demonstrarmos que

$$\lim_{k \rightarrow 0, \pm N, \pm 2N, \dots} \left( \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{N} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)} \right) = \frac{2M+1}{N}$$

Por este motivo, é comum escrever a expressão correspondente a  $X[k]$  como

$$X[k] = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{N} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)}$$

Nesta forma, entende-se que o valor  $X[k]$  para  $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$  é obtido do limite quando  $k \rightarrow 0$ . Uma plotagem de dois períodos de  $X[k]$  como uma função de  $k$  é apresentado na Figura 3.4, para  $M = 4$  e  $N = 12$ , supondo que  $\Omega_o = 2\pi/N$ . Note que neste exemplo,  $X[k]$  é real; consequentemente, o espectro de magnitude é o valor absoluto de  $X[k]$  e o espectro de fase é 0 quando  $X[k]$  é positivo e  $\pi$  quando  $X[k]$  é negativo.



**FIGURA 3.4** Os coeficientes da DTFS correspondentes a uma onda quadrada. (a)  $M = 4$  e (b)  $M = 12$ .

3.3. Determine os coeficientes da DTFS para o sinal periódico descrito na Figura 3.5.

Bennett et al.

$$x[n] \xleftarrow{DTFS; 2\pi/6} X[k] = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cos k \frac{\pi}{3}$$

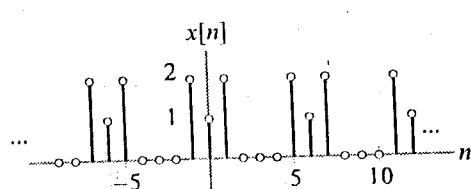


FIGURA 3.5 Sinal  $x[n]$  correspondente ao Exercício 3.2.

Cada termo na DTFS da equação (3.12) associado com um coeficiente diferente de zero  $X[k]$  contribui para a representação do sinal. Examinaremos agora esta representação, considerando a contribuição de cada termo para a onda quadrada do Exemplo 3.2. Neste exemplo, os coeficientes da DTFS têm simetria par,  $X[k] = X[-k]$ , e podemos reescrever a DTFS da equação (3.12) como uma série que envolve co-senos harmonicamente relacionados. As condições gerais sob as quais os coeficientes da DTFS têm simetria par ou ímpar, serão discutidas na Seção 3.6. Suponha, por

conveniência, que  $N$  seja par a fim de que  $N/2$  seja inteiro, admita que  $k$  varie de  $-N/2 + 1$  a  $N/2$  e, dessa forma, escreva

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} X[k] e^{jk\Omega_o n} \\ &= X[0] + \sum_{m=1}^{N/2-1} (X[m] e^{jm\Omega_o n} + X[-m] e^{-jm\Omega_o n}) + X[N/2] e^{j(N/2)\Omega_o n} \end{aligned}$$

Agora, explore  $X[m] = X[-m]$  e  $N\Omega_o = 2\pi$  para obter

$$\begin{aligned} x[n] &= X[0] + \sum_{m=1}^{N/2-1} 2X[m] \left( \frac{e^{jm\Omega_o n} + e^{-jm\Omega_o n}}{2} \right) + X[N/2] e^{j\pi n} \\ &= X[0] + \sum_{m=1}^{N/2-1} 2X[m] \cos(m\Omega_o n) + X[N/2] \cos(\pi n) \end{aligned}$$

onde também usamos  $e^{j\pi n} = \cos(\pi n)$ . Se definirmos o novo conjunto de coeficientes

$$B[k] = \begin{cases} X[k], & k = 0, N/2 \\ 2X[k], & k = 1, 2, \dots, N/2 - 1 \end{cases}$$

poderemos escrever a DTFS em termos de uma série de co-senos harmónicamente relacionados como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} B[k] \cos(k\Omega_o n)$$

**EXEMPLO 3.3** Defina uma aproximação de soma parcial para  $x[n]$  como

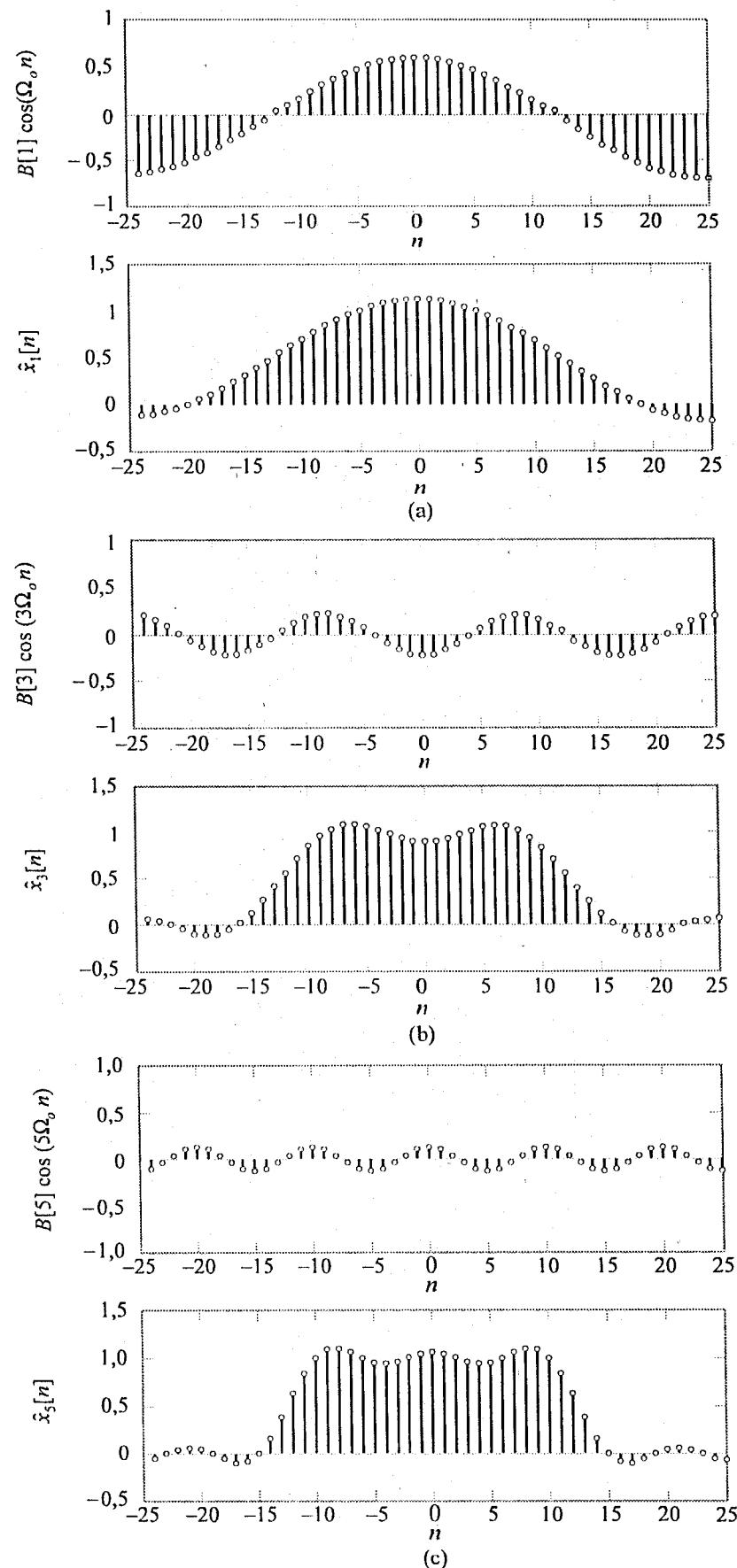
$$\hat{x}_J[n] = \sum_{k=0}^J B[k] \cos(k\Omega_o n)$$

em que  $J \leq N/2$ . Esta aproximação contém os primeiros  $2J + 1$  termos centralizados em  $k = 0$  na equação (3.12). Avalie um período do  $J$ -ésimo termo da soma e  $\hat{x}_J[n]$  para  $J = 1, 3, 5, 23$  e  $25$ , supondo que  $N = 50$  e  $M = 12$  para a onda quadrada do Exemplo 3.2.

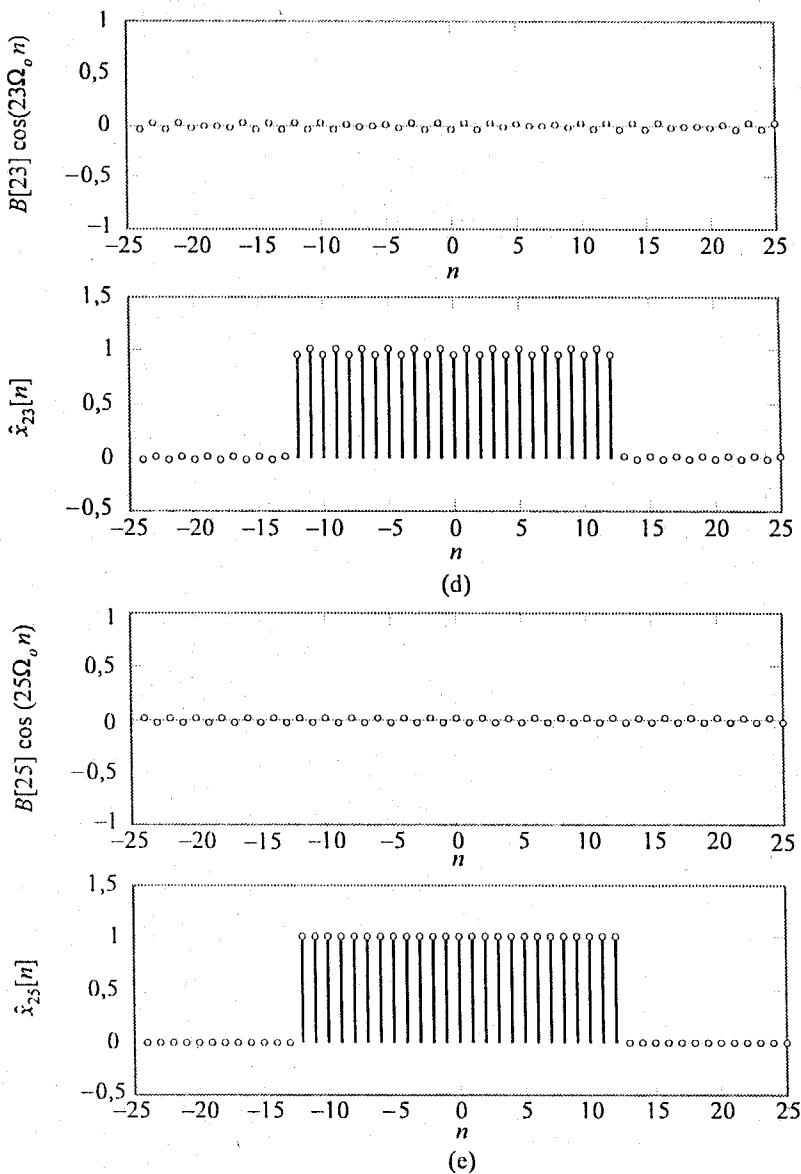
**Solução:** A Figura 3.6 descreve o  $J$ -ésimo termo da soma,  $B[J] \cos(J\Omega_o n)$  e um período de  $\hat{x}_J[n]$  para os valores especificados de  $J$ . Somente valores ímpares de  $J$  são considerados porque os coeficientes indexados pares  $B[k]$  são iguais a zero. Note que a aproximação melhora à medida que  $J$  aumenta, com representação exata de  $x[n]$  quando  $J = N/2 = 25$ . Em geral, os coeficientes  $B[k]$  associados com valores de  $k$  próximos de zero representam as características do sinal de baixa freqüência ou que variam lentamente, enquanto os coeficientes associados com os valores de  $k$  próximos de  $\pm N/2$  representam as características do sinal de alta freqüência ou que variam rapidamente.

A DTFS é a única representação de Fourier que pode ser avaliada e manipulada numericamente em um computador. Isso ocorre porque tanto a representação do sinal no domínio de tempo,  $x[n]$ , como a no domínio de freqüência,  $X[k]$ , são caracterizadas exatamente por um conjunto finito de números  $N$ . A capacidade da DTFS ser tratada em computador é de grande importância. A DTFS encontra extenso uso na análise de sinais numéricos e na implementação de sistemas, sendo muitas vezes usada para aproximar numericamente as outras três representações de Fourier.

Estas questões serão exploradas no próximo capítulo.



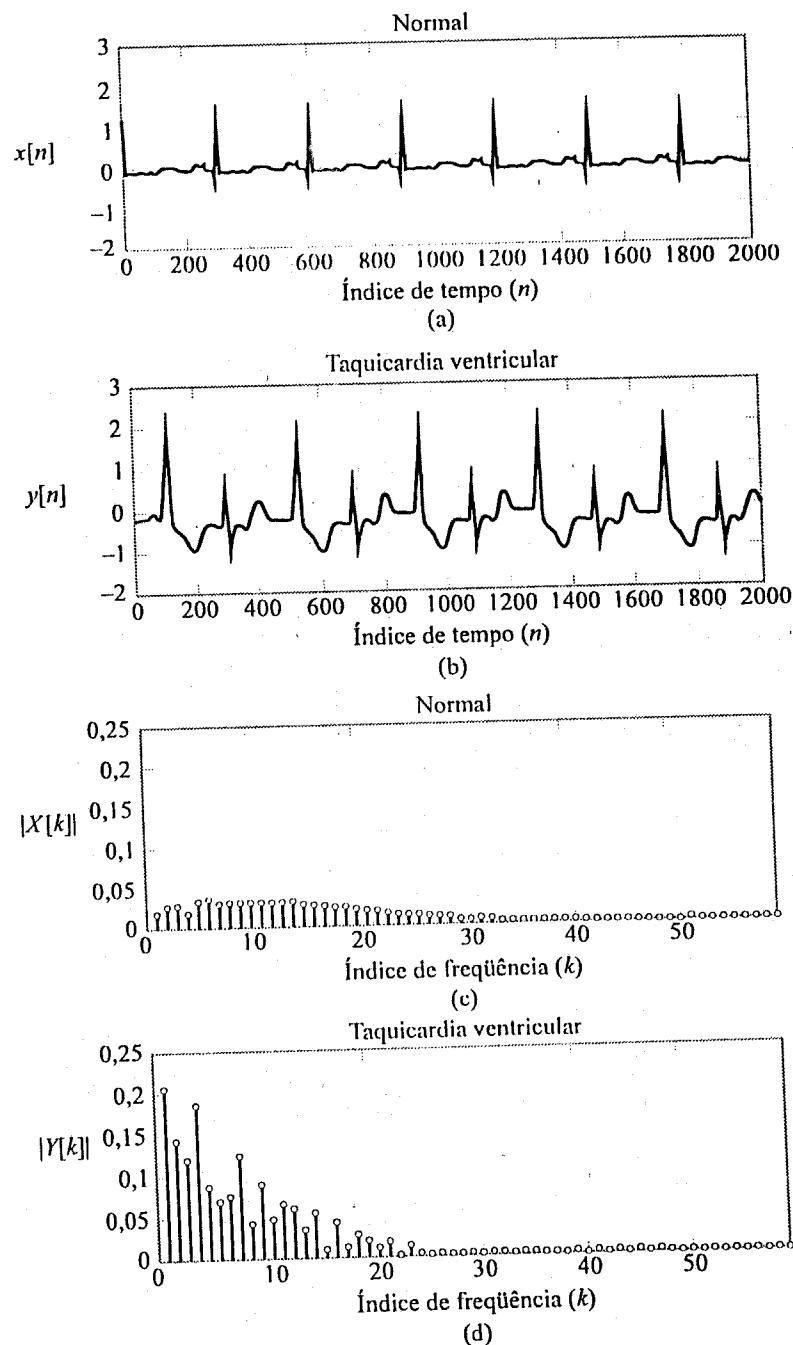
**FIGURA 3.6** Termos individuais da expansão da DTFS correspondentes a uma onda quadrada (paineel superior), e as representações de soma parcial correspondentes  $\hat{x}_J[n]$  (paineel inferior). O termo  $J = 0$  é  $\hat{x}_0[n] = \frac{1}{2}$  e não é mostrado. (a)  $J = 1$ . (b)  $J = 3$ . (c)  $J = 5$ .

FIGURA 3.6 (continuação) (d)  $J = 23$ . (e)  $J = 25$ .

**EXEMPLO 3.4** Neste exemplo, avaliamos as representações por DTFS de duas formas de ondas diferentes de eletrocardiograma (ECG). As Figuras 3.7(a) e (b) descrevem o ECG de um coração normal e um que enfrenta taquicardia ventricular, respectivamente. Estas sequências são desenhadas como funções contínuas devido à dificuldade de descrever todos os 2.000 valores em cada caso. Ambas parecem quase periódicas, com variações muito leves na amplitude e na duração de cada período. A DTFS de um período de cada ECG pode ser computada numericamente. O período do ECG normal é  $N = 305$ , enquanto o período do ECG da taquicardia ventricular é  $N = 421$ . Um período de cada forma de onda está disponível. Avalie os coeficientes da DTFS correspondente a cada um e trace graficamente o espectro de magnitude dos mesmos.

**Solução:** O espectro de magnitude dos 60 primeiros coeficientes da DTFS é descrito nas Figuras 3.7(c) e (d). Os coeficientes com índices mais elevados são muito pequenos e, dessa forma, não são mostrados.

As formas de onda de tempo diferem, o mesmo acontece com os coeficientes da DTFS. O ECG normal é dominado por um pico agudo ou característica impulsiva. Lembre-se de que os coeficientes da DTFS de um impulso unitário têm módulo constante. Os coeficientes da DTFS do ECG normal são aproximadamente constantes, exibindo um decréscimo gradual de amplitude à medida que a frequência se eleva. Eles também têm uma magnitude bastante pequena, uma vez que há relativamente pouca potência no sinal impulsivo. Em comparação, o ECG da taquicardia ventricular não é tão impulsivo, mas tem características mais suaves. Consequentemente, os coeficientes da DTFS têm uma faixa dinâmica maior, com os coeficientes de baixa frequência dominando. O ECG da taquicardia ventricular têm potência maior do que o ECG normal e, dessa forma, os coeficientes da DTFS têm amplitudes maiores.



**FIGURA 3.7** Eletrocardiogramas correspondentes a dois batimentos cardíacos diferentes e os 60 primeiros coeficientes de seus espectros de magnitude. (a) Batimento cardíaco normal. (b) Taquicardia ventricular. (c) Espectro de magnitude correspondente ao batimento cardíaco normal. (d) Espectro de magnitude correspondente a taquicardia ventricular.

### 3.3 Sinais Periódicos de Tempo Contínuo: A Série de Fourier

#### \* ■ DERIVAÇÃO

Iniciamos nossa derivação da FS aproximando um sinal  $x(t)$  que tem período fundamental  $T$  usando a série da equação (3.5):

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k]e^{jk\omega_0 t} \quad (3.16)$$

em que  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Usaremos agora a propriedade de ortogonalidade, equação (3.7), para encontrar os coeficientes da FS. Iniciamos supondo que podemos encontrar os coeficientes  $A[k]$  de forma que  $x(t) = \hat{x}(t)$ . Se  $x(t) = \hat{x}(t)$ , então

$$\int_{\langle T \rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} \hat{x}(t)e^{-jm\omega_0 t} dt$$

Substitua a expressão da série em  $\hat{x}(t)$  nesta igualdade para obter a expressão

$$\begin{aligned} \int_{\langle T \rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt &= \int_{\langle T \rangle} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k]e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] \int_{\langle T \rangle} e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

A propriedade de ortogonalidade da equação (3.7) implica que a integral do lado direito é igual a zero, exceto para  $k = m$ , e, deste modo, temos

$$\int_{\langle T \rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = A[m]T$$

Concluímos que, se  $x(t) = \hat{x}(t)$ , então o  $m$ -ésimo coeficiente é dado por

$$A[m] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt \quad (3.17)$$

O Problema 3.32 estabelece que este valor também minimiza o MSE entre  $x(t)$  e o termo  $2J + 1$ , com aproximação truncada

$$\hat{x}_J(t) = \sum_{k=-J}^J A[k]e^{jk\omega_0 t}$$

Suponha que escolhamos os coeficientes de acordo com a equação (3.17). Em quais condições a série infinita da equação (3.16) converge de fato para  $x(t)$ ? Uma análise detalhada desta questão está além do escopo deste livro. Entretanto, podemos estabelecer diversos resultados. Primeiro, se  $x(t)$  for integrável ao quadrado, ou seja,

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$$

então o MSE entre  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$  será zero. Este é um resultado útil que se aplica a uma classe muito ampla de sinais encontrados na prática da engenharia. Note que, em comparação com o caso de tempo discreto, o MSE zero não implica que  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$  sejam iguais ponto a ponto (em cada valor de  $t$ ); simplesmente implica que há energia nula em sua diferença.

A convergência ponto a ponto é garantida em todos os valores de  $t$ , exceto aqueles que correspondem a descontinuidades, se as condições de Dirichlet forem satisfeitas:

- »  $x(t)$  é limitado.
- »  $x(t)$  tem um número finito de máximos e mínimos locais num período.
- »  $x(t)$  tem um número finito de descontinuidades num período.

Se um sinal  $x(t)$  satisfizer as condições de Dirichlet e não for contínuo, então a representação por FS da equação (3.16) convergirá para o ponto médio de  $x(t)$  em cada descontinuidade.

## A REPRESENTAÇÃO POR FS

Podemos escrever a FS como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \quad (3.18)$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.19)$$

em que  $x(t)$  tem período fundamental  $T$  e  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Dizemos que  $x(t)$  e  $X[k]$  são um par de FS e denotamos esta relação como

$$x(t) \xleftarrow{FS; \omega_0} X[k]$$

A partir dos coeficientes  $X[k]$  da FS, podemos determinar  $x(t)$  usando a equação (3.18), e a partir de  $x(t)$  podemos determinar  $X[k]$  usando a equação (3.19). Veremos mais tarde que, em alguns problemas, é vantajoso representar o sinal no domínio de tempo como  $x(t)$ , enquanto em outros, os coeficientes  $X[k]$  da FS oferecem uma descrição mais conveniente. A representação pelos coeficientes da FS também é conhecida como uma representação de domínio de frequência porque cada coeficiente da FS é associado com uma senóide complexa de uma frequência diferente. Os exemplos seguintes ilustram a determinação da representação por FS.

**EXEMPLO 3.5** Determine a representação por FS para o sinal

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Solução:** O período fundamental de  $x(t)$  é  $T = 4$ . Consequentemente,  $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$  e procuramos expressar  $x(t)$  como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk(\pi/2)t}$$

Uma abordagem para encontrar  $X[k]$  é usar a equação (3.19). Porém, neste caso,  $x(t)$  é expresso em termos de senóides, de forma que é mais fácil obter  $X[k]$  por inspeção. Escreva

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3 \frac{e^{j(\pi/2)t + \pi/4} + e^{-j(\pi/2)t + \pi/4}}{2} \\ &= \frac{3}{2} e^{-j\pi/4} e^{-j(\pi/2)t} + \frac{3}{2} e^{j\pi/4} e^{j(\pi/2)t} \end{aligned}$$

Esta última expressão está na forma da série de Fourier. Deste modo, podemos identificar

$$X[k] = \begin{cases} \frac{3}{2} e^{-j\pi/4}, & k = -1 \\ \frac{3}{2} e^{j\pi/4}, & k = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O módulo e a fase de  $X[k]$  são descritos na Figura 3.8.

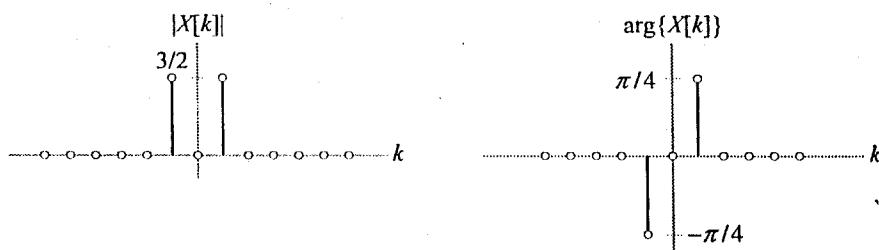


FIGURA 3.8 Espectros de magnitude e fase correspondentes ao Exemplo 3.5.

► EXERCÍCIO 3.3 Determine a representação por FS para

$$x(t) = 2 \operatorname{sen}(2\pi t - 3) + \operatorname{sen}(6\pi t)$$

*Resposta:*

$$x(t) \xleftarrow{\text{FS; } 2\pi} X[k] = \begin{cases} j/2, & k = -3 \\ je^{j3}, & k = -1 \\ -je^{-j3}, & k = 1 \\ -j/2 & k = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como na DTFS, o módulo de  $X[k]$  é conhecido como espectro de magnitude de  $x(t)$ , enquanto a fase de  $X[k]$  é conhecida como espectro de fase de  $x(t)$ . No exemplo anterior, toda a potência em  $x(t)$  está concentrada em duas freqüências,  $\omega_o$  e  $-\omega_o$ . No exemplo seguinte, a potência em  $x(t)$  está distribuída entre muitas freqüências.

EXEMPLO 3.6 Determine a representação por FS correspondente à onda quadrada da Figura 3.9.

*Solução:* O período é  $T$ , de forma que  $\omega_o = 2\pi/T$ . Neste problema, é conveniente usar a fórmula de integral, equação 3.19, para determinar os coeficientes da FS. Integraremos no período  $t = -T/2$  a  $t = T/2$  para explorarmos a simetria par de  $x(t)$  e obtermos  $k \neq 0$

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T_s}^{T_s} e^{-jk\omega_o t} dt \\ &= \frac{-1}{Tjk\omega_o} e^{-jk\omega_o t} \Big|_{-T_s}^{T_s}, \\ &= \frac{2}{Tk\omega_o} \left( \frac{e^{jk\omega_o T_s} - e^{-jk\omega_o T_s}}{2j} \right), \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_o T_s)}{Tk\omega_o}, \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

Para  $k = 0$ , temos

$$\begin{aligned} X[0] &= \frac{1}{T} \int_{-T_s}^{T_s} dt \\ &= \frac{2T_s}{T} \end{aligned}$$

Com o uso da regra de L'Hopital é imediato mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_o T_s)}{Tk\omega_o} = \frac{2T_s}{T}$$

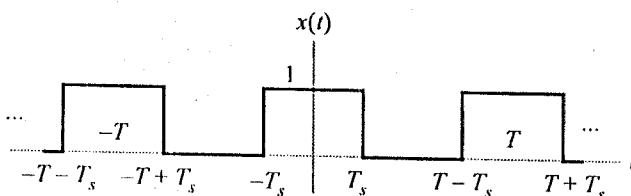


FIGURA 3.9 Onda quadrada correspondente ao Exemplo 3.6.

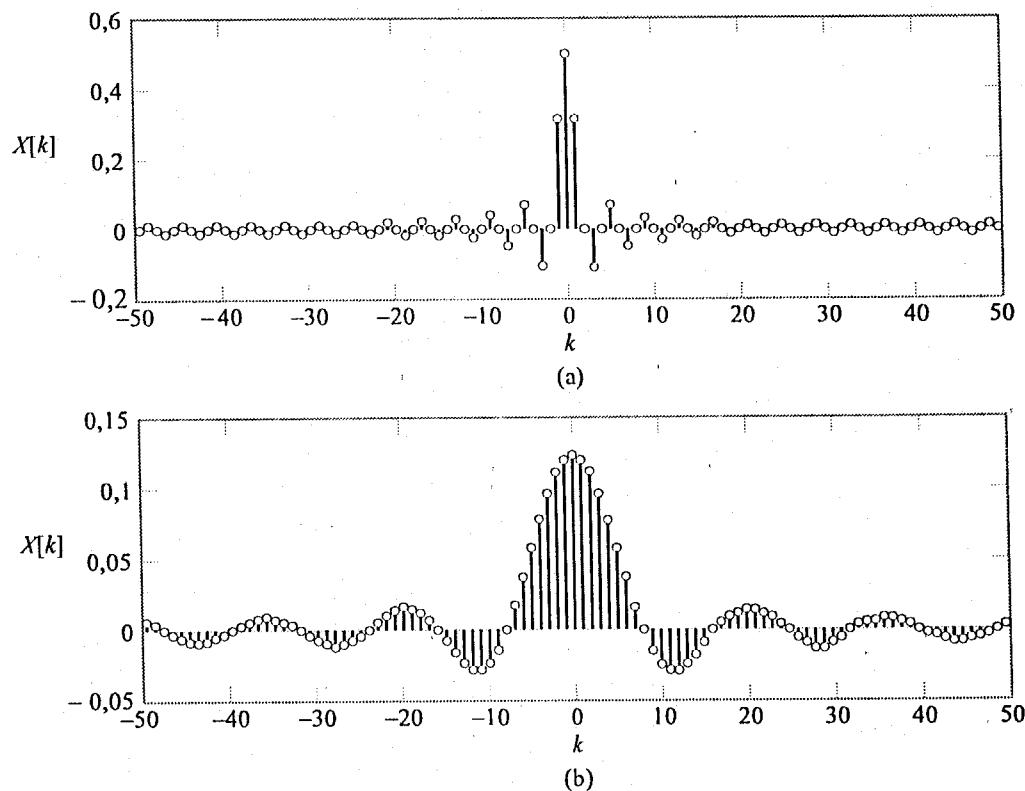
e, dessa forma, escrevemos

$$X[k] = \frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_a T_s)}{Tk\omega_a}$$

com o entendimento de que  $X[0]$  é obtido como um limite. Neste problema,  $X[k]$  tem valor real. Substituindo  $\omega_a = 2\pi/T$  dá  $X[k]$  como uma função da razão  $T_s/T$ , como é mostrado por

$$X[k] = \frac{2 \operatorname{sen}\left(k \frac{2\pi T_s}{T}\right)}{k 2\pi} \quad (3.20)$$

A Figura 3.10 descreve  $X[k]$ ,  $-50 \leq k \leq 50$ , para  $T_s/T = \frac{1}{4}$  e  $T_s/T = \frac{1}{16}$ . Observe que, quando  $T_s/T$  decresce, o sinal torna-se mais concentrado no tempo dentro de cada período, enquanto a representação por FS torna-se menos concentrada em termos de frequência. Exploraremos mais amplamente a relação inversa entre concentrações no domínio de tempo e de frequência dos sinais mais completamente nas seções seguintes.



**FIGURA 3.10** Os coeficientes da FS,  $X[k]$ ,  $-50 \leq k \leq 50$ , correspondentes a duas ondas quadradas.  
(a)  $T_s/T = \frac{1}{4}$  e (b)  $T_s/T = \frac{1}{16}$ .

A forma funcional  $\operatorname{sen}(\pi u)/\pi u$  ocorre de maneira tão freqüente na análise de Fourier que damos a ela um nome especial:

$$\operatorname{sinc}(u) = \frac{\operatorname{sen}(\pi u)}{\pi u} \quad (3.21)$$

Um gráfico de  $\operatorname{sinc}(u)$  é apresentado na Figura 3.11. O máximo da função sinc é a unidade em  $u = 0$ , sendo que os cruzamentos por zero ocorrem nos valores inteiros de  $u$ , e o módulo decresce com  $1/u$ . A parte da função sinc entre os cruzamentos por zero para  $u = \pm 1$  é conhecida como *lóbulo principal* da função sinc. As ondulações menores fora do lóbulo principal são denominadas *lóbulos laterais*. Os coeficientes da FS da equação (3.20) são expressos usando-se a notação da função sinc como

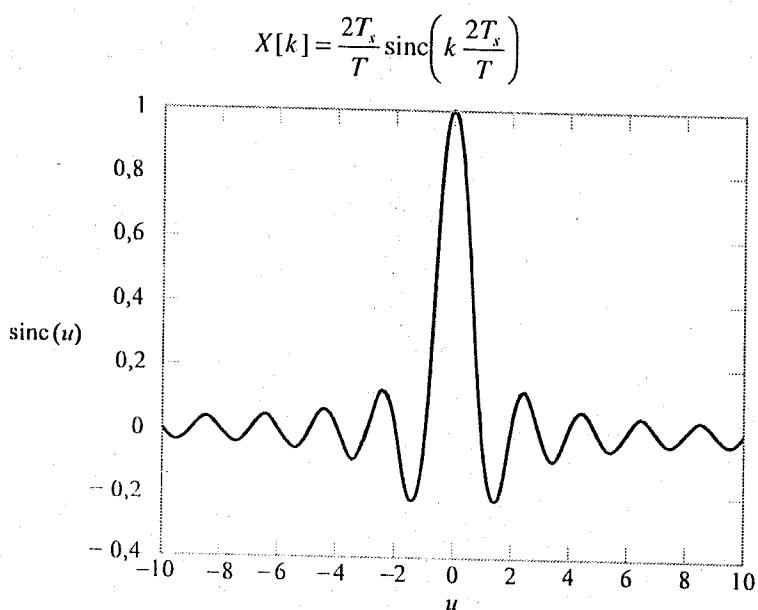


FIGURA 3.11 Função sinc.

Cada termo da FS da equação (3.18) associado com um coeficiente  $X[k]$  diferente de zero contribui para a representação do sinal. A onda quadrada do exemplo anterior fornece uma ilustração conveniente de como os termos individuais da FS contribuem para a representação de  $x(t)$ . Como acontece com a representação de onda quadrada por DTFS, exploramos a simetria par de  $X[k]$  para escrever a FS como uma soma de co-senos harmonicamente relacionados. Uma vez que  $X[k] = X[-k]$ , temos

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j k \omega_o t} \\ &= X[0] + \sum_{m=1}^{\infty} (X[m] e^{j m \omega_o t} + X[-m] e^{-j m \omega_o t}) \\ &= X[0] + \sum_{m=1}^{\infty} 2 X[m] \frac{e^{j m \omega_o t} + e^{-j m \omega_o t}}{2} \\ &= X[0] + \sum_{m=1}^{\infty} 2 X[m] \cos(m \omega_o t) \end{aligned}$$

Se definirmos  $B[0] = X[0]$  e  $B[k] = 2X[k]$ ,  $k \neq 0$ , então

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B[k] \cos(k \omega_o t)$$

**EXEMPLO 3.7** Definimos a aproximação por soma parcial para a representação da FS da onda quadrada conforme é mostrado por

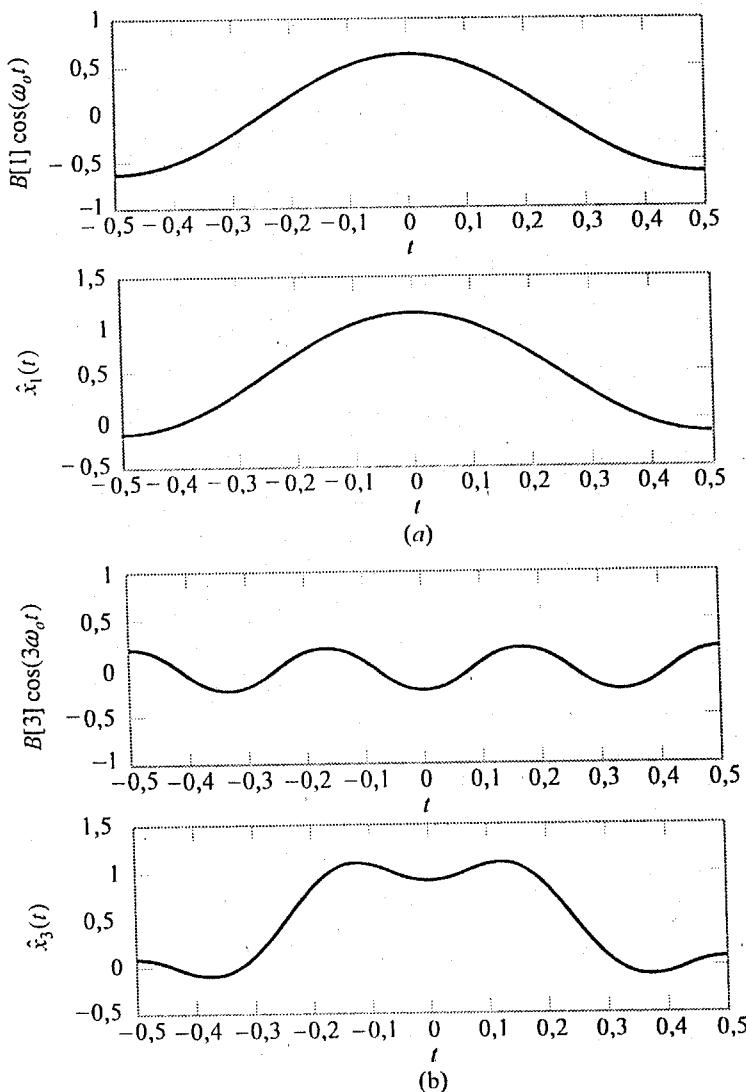
$$\hat{x}_j(t) = \sum_{k=0}^j B[k] \cos(k \omega_o t)$$

Suponha que  $T = 1$  e  $T_s/T = \frac{1}{4}$ . Note que neste caso, temos

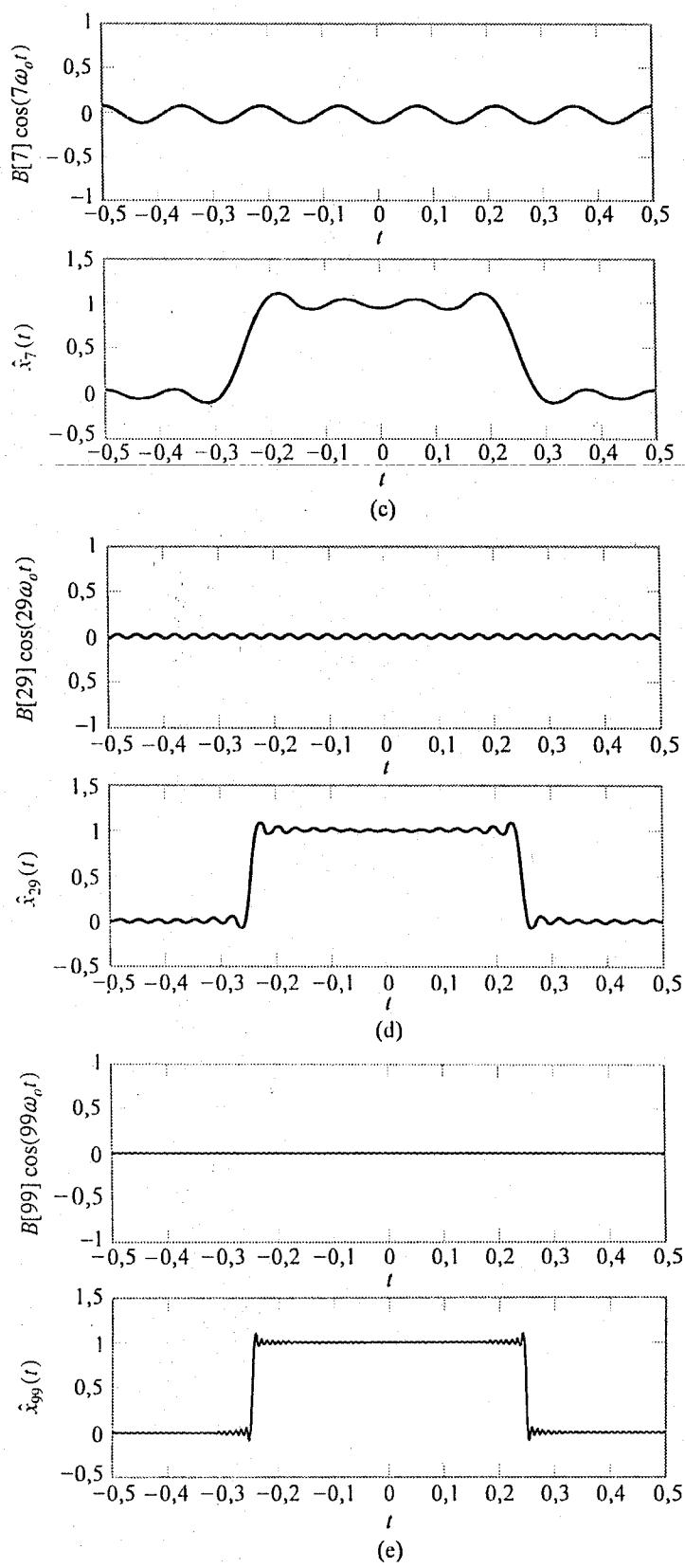
$$B[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{2(-1)^{(k-1)/2}}{\pi}, & k \text{ ímpar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases}$$

desse modo, os coeficientes ímpares são não zero. Descreva um período de  $j$ -ésimo termo dessa soma é  $\hat{x}_j(t)$  para  $j = 1, 3, 7, 25$  e  $99$ .

**Solução:** Os termos individuais e as aproximações por soma parcial são descritos na Figura 3.12. O comportamento da aproximação por soma parcial nas proximidades das descontinuidades da onda quadrada em  $t = \pm \frac{1}{4}$  é de especial interesse. Notamos que toda aproximação por soma parcial passa pelo valor médio ( $1/2$ ) da descontinuidade, conforme enunciámos em nossa discussão sobre convergência. Em cada lado da descontinuidade a aproximação exibe ondulações. À medida que  $J$  se eleva, a altura máxima das ondulações parece não mudar. De fato, pode-se mostrar, em relação a qualquer  $J$  finito, que a ondulação máxima corresponde a 9% da descontinuidade. Esta ondulação próxima às descontinuidades nas aproximações de FS por soma parcial é denominada *fenômeno de Gibbs*, em homenagem ao físico matemático J. Willard Gibbs pela explicação deste fenômeno em 1899. A onda quadrada satisfaz as condições de Dirichlet e, deste modo, sabemos que a aproximação de FS, no final, converge para a onda quadrada, para todos os valores de  $t$ , exceto nas descontinuidades. Porém, para  $J$  finito, a ondulação está sempre presente. À medida que  $J$  aumenta, a ondulação nas aproximações por soma parcial torna-se cada vez mais concentrada, próximo às descontinuidades. Conseqüentemente, para qualquer  $J$  dado, a exatidão da aproximação de soma parcial é melhor em tempos distantes das descontinuidades e pior próximo às descontinuidades.



**FIGURA 3.12** Termos individuais na expansão por FS para uma onda quadrada (painel superior) e as aproximações por soma parcial correspondentes  $\hat{x}_J(t)$  (painel inferior). O termo  $J = 0$  é  $\hat{x}_0(t) = \frac{1}{2}$  e não é mostrado. (a)  $J = 1$ . (b)  $J = 3$ .

FIGURA 3.12 (continuação) (c)  $J = 7$ . (d)  $J = 29$ . (e)  $J = 99$ .

► **EXERCÍCIO 3.4** Encontre a representação por FS da onda dente-de-serra descrita na Figura 3.13.  
*Sugestão:* Use integração por partes.

*Resposta:* Integre  $t$  a partir de  $-\frac{1}{2}$  até 1 na equação (3.19) para obter

$$x[n] \xrightarrow{FS: 4\pi/3} X[k] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k=0 \\ \frac{-2}{3jk\omega_o} \left( e^{-jk\omega_o} + \frac{1}{2} e^{j\frac{k\omega_o}{2}} \right) + \frac{2}{3k^2\omega_o^2} \left( e^{-jk\omega_o} + e^{j\frac{k\omega_o}{2}} \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

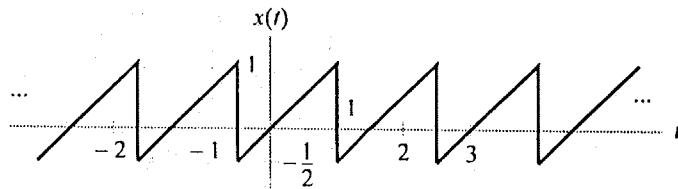


FIGURA 3.13 Sinal periódico correspondente ao Exercício 3.4.

O exemplo seguinte explora a linearidade e a representação por FS da onda quadrada para determinar a saída de um sistema LTI.

**EXEMPLO 3.8** Aqui, desejamos encontrar a representação por FS para a saída,  $y(t)$ , do circuito  $RC$  descrito na Figura 3.14 em resposta à entrada de onda quadrada descrita na Figura 3.9, supondo  $T_s/T = \frac{1}{4}$ ,  $T = 1$  s, e  $RC = 0,1$  s.

**Solução:** Se a entrada em um sistema LTI for expressa como uma soma ponderada de senóides, a saída também será uma soma ponderada de senóides. O  $k$ -ésimo peso na soma da saída é dado pelo produto do  $k$ -ésimo peso da soma da entrada e a resposta em freqüência do sistema avaliada na freqüência da  $k$ -ésima senóide.

Conseqüentemente, se

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$$

então a saída  $y(t)$  será

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_o) X[k] e^{jk\omega_o t}$$

em que  $H(j\omega)$  é a resposta em freqüência do sistema. Dessa forma,

$$y(t) \xrightarrow{FS: \omega_o} Y[k] = H(jk\omega_o) X[k]$$

A resposta em freqüência do circuito  $RC$  foi computada no Exemplo 2.15 como

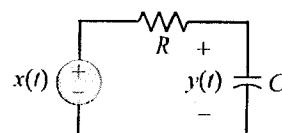
$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

e os coeficientes da FS para a onda quadrada são dados na equação (3.20). Substituindo  $H(jk\omega_o)$ , com  $RC = 0,1$  s,  $\omega_o = 2\pi$ , e usando  $T_s/T = \frac{1}{4}$  dá

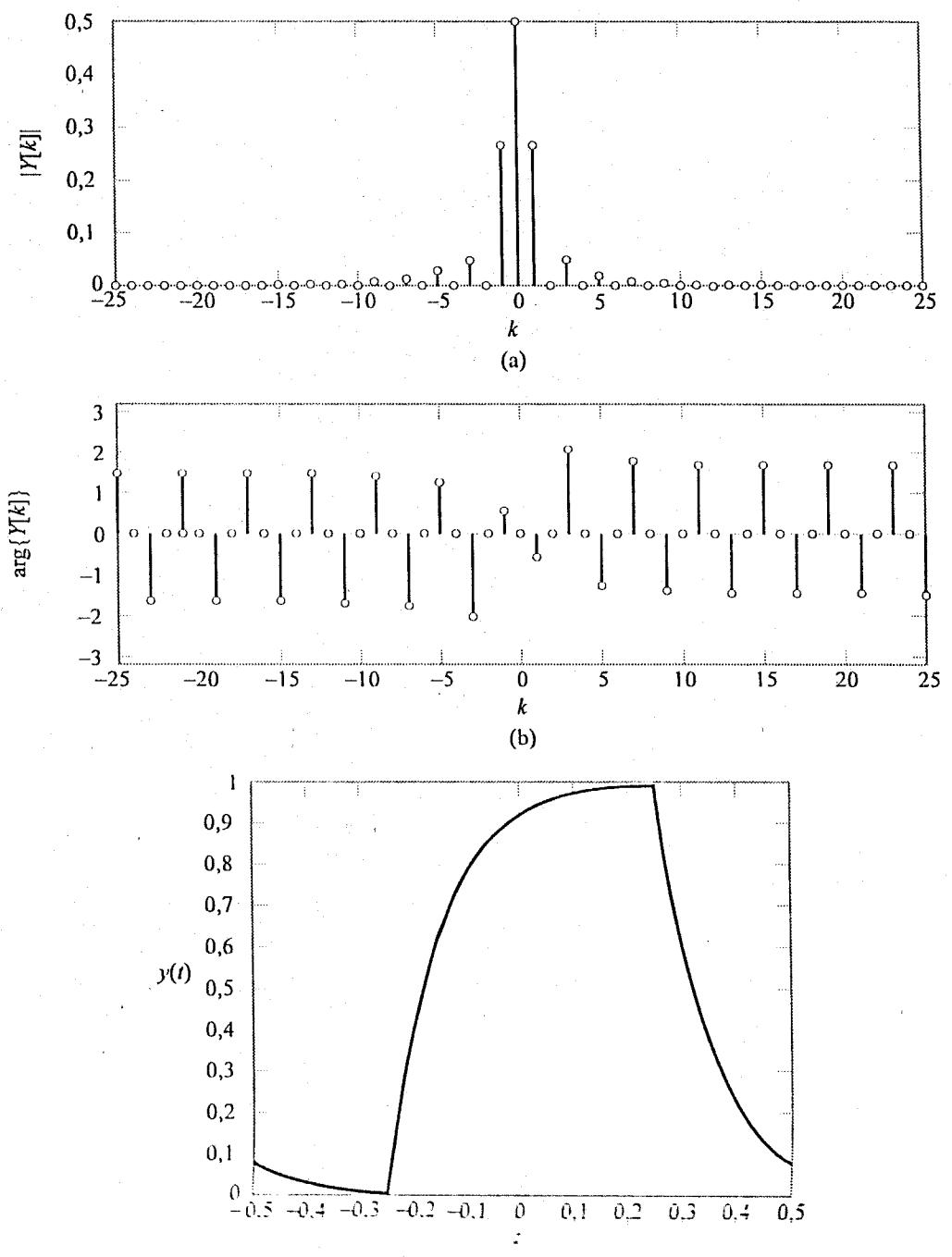
$$Y[k] = \frac{10}{j2\pi k + 10} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

O espectro de magnitude  $|Y[k]|$  tende a zero em proporção a  $1/k^2$ , à medida que  $k$  cresce; deste modo, uma representação razoavelmente exata de  $y(t)$  pode ser determinada usando-se um número modesto de termos na FS. Determine  $y(t)$  usando

$$y(t) \approx \sum_{k=-100}^{100} Y[k] e^{jk\omega_o t}$$

FIGURA 3.14 Circuito  $RC$  correspondente ao Exemplo 3.8.

O módulo e a fase de  $Y[k]$  para  $-25 \leq k \leq 25$  são descritas nas Figuras 3.15(a) e (b), respectivamente. Comparando  $Y[k]$  com  $X[k]$ , como descreve a Figura 3.10(a), vemos que o circuito atenua a amplitude de  $X[k]$  quando  $|k| \geq 1$ . O grau de atenuação aumenta à medida que a freqüência,  $k\omega_o$ , se eleva. O circuito também introduz um deslocamento de fase que depende da freqüência. Um período da forma de onda de tempo  $y(t)$  é mostrado na Figura 3.15(c). Este resultado coincide com nossa intuição da análise de circuitos. Quando a entrada sofre um chaveamento de 0 para 1, a carga no capacitor aumenta e a tensão exibe uma elevação exponencial. Quando a entrada sofre um chaveamento de 1 para 0, o capacitor se descarrega e a tensão exibe um decaimento exponencial.



**FIGURA 3.15** Os coeficientes da FS,  $X[k]$ ,  $-25 \leq k \leq 25$ , para a saída do circuito RC em resposta a uma entrada de onda quadrada. (a) Espectro de magnitude. (b) Espectro de fase. (c) Um período da saída,  $y(t)$ .

### 3.4 Sinais Não-Periódicos de Tempo Discreto: A Transformada de Fourier de Tempo Discreto

#### \* ■ DERIVAÇÃO

Uma derivação rigorosa da DTFT é complexa; deste modo, empregamos uma abordagem intuitiva. Desenvolvemos a DTFT a partir da DTFS, descrevendo um sinal não-periódico como o limite de um sinal periódico cujo período,  $N$ , aproxima-se do infinito. Para que esta abordagem seja significativa, supomos que o sinal não-periódico seja representado por um período simples do sinal periódico que está centralizado na origem, e que o limite, quando  $N$  se aproxima do infinito, é tomado de maneira simétrica. Admitamos que  $\tilde{x}[n]$  seja um sinal periódico com período  $N = 2M + 1$ . Defina o sinal não-periódico de duração finita  $x[n]$  como um período de  $\tilde{x}[n]$ , como é mostrado por

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & -M \leq n \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$

Esta relação é ilustrada na Figura 3.16. Observe que, a medida que  $M$  se eleva, as réplicas periódicas de  $x[n]$  que estão presentes em  $\tilde{x}[n]$  se movem cada vez mais para longe da origem. Por fim, quando  $M \rightarrow \infty$ , estas réplicas são removidas ao infinito. Dessa forma, podemos escrever

$$x[n] = \lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{x}[n] \quad (3.22)$$

Inicie com a representação por DTFS do sinal periódico  $\tilde{x}[n]$ . Temos o par de DTFS

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} X[k] e^{jk\Omega_o n} \quad (3.23)$$

$$X[k] = \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \tilde{x}[n] e^{-j k \Omega_o n} \quad (3.24)$$

Uma vez que  $\tilde{x}[n] = x[n]$  para  $-M \leq n \leq M$ , podemos reescrever a equação (3.24) em termos de  $x[n]$  como

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_o n} \end{aligned}$$

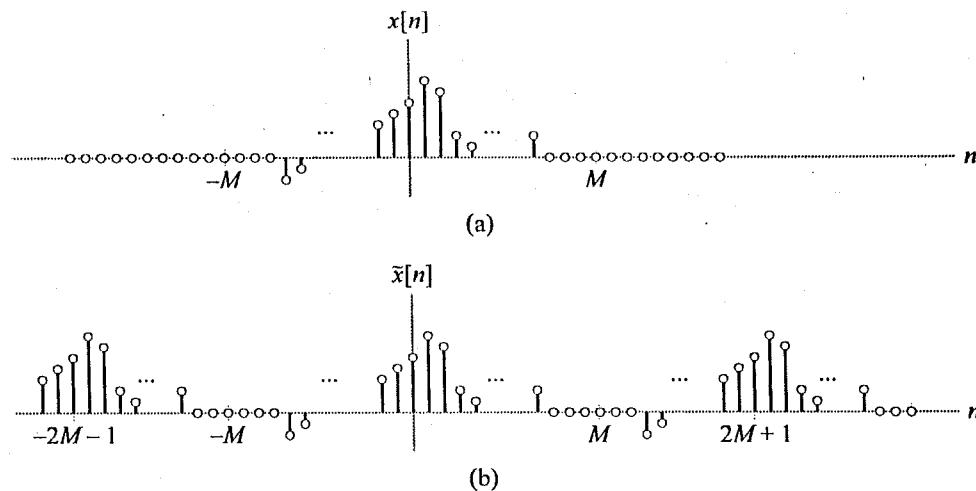


FIGURA 3.16 Aproximação de um sinal não-periódico com um sinal periódico. (a) Sinal não-periódico  $x[n]$ . (b) Aproximação periódica  $\tilde{x}[n]$ .

em que a segunda linha parte do fato de que  $x[n] = 0$  para  $|n| > M$ . Definimos agora uma função contínua de freqüência,  $X(e^{j\Omega})$ , cujas amostras em  $k\Omega_o$  são iguais aos coeficientes da DTFS normalizados por  $2M+1$ . Ou seja,

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \quad (3.25)$$

de forma que  $X[k] = X(e^{jk\Omega_o})/(2M+1)$ . Substituímos esta definição de  $X[k]$  na equação (3.23) para obtermos

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\Omega_o}) e^{jk\Omega_o n}$$

Usando a relação  $\Omega_o = 2\pi/(2M+1)$ , escrevemos

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\Omega_o}) e^{jk\Omega_o n} \Omega_o \quad (3.26)$$

Neste ponto, invocamos o fato de que  $x[n]$  é o valor limite de  $\tilde{x}[n]$  quando  $M \rightarrow \infty$ . Porém, consideremos primeiro o efeito de  $M \rightarrow \infty$  sobre a freqüência fundamental,  $\Omega_o$ . À medida que  $M$  se eleva,  $\Omega_o$  decresce e o espaçamento entre os harmônicos da DTFS diminui. Este decréscimo no espaçamento harmônico é ilustrado na Figura 3.17, descrevendo  $X(e^{jk\Omega_o})$  para valores crescentes de  $M$ . Note que  $X(e^{j\Omega})$  tem período em  $\Omega$ . Isto vem da equação (3.25) e da periodicidade de  $2\pi$  de  $e^{-jn\Omega}$ . Combinando a equação (3.22) com a equação (3.26), temos

$$x[n] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\Omega_o}) e^{jk\Omega_o n} \Omega_o \quad (3.27)$$

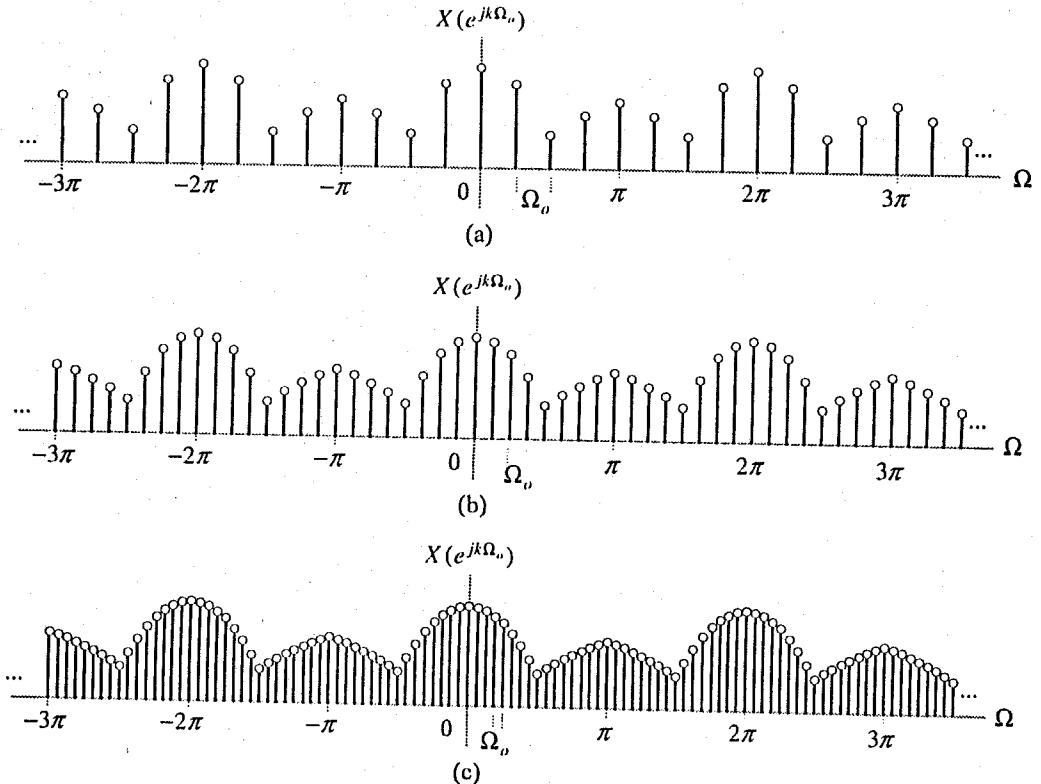


FIGURA 3.17 Exemplo de espectros  $X(e^{jk\Omega_o})$  para valores crescentes de  $M$ .  $M$  se eleva de (a) para (c) de forma que  $\Omega_o$  decresce.

Na equação (3.27) estamos somando valores de uma função  $X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$  avaliados em  $k\Omega_n$ , multiplicados pela largura entre amostras,  $\Omega_n$ . Esta é a aproximação pela regra retangular para uma integral. Tomando o limite e lembrando que  $\Omega = k\Omega_n$ , de forma que  $d\Omega = \Omega_n$ , a soma na equação (3.27) passa para a integral

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$$

Os limites da integral são obtidos observando-se que  $\lim_{M \rightarrow \infty} M\Omega_n = \pi$ . Dessa forma, expressamos  $x[n]$  como uma superposição ponderada de senóides de tempo discreto. Neste caso, a superposição é uma integral e a ponderação em cada senóide é  $(\frac{1}{2}\pi)X(e^{j\Omega})d\Omega$ .

### A REPRESENTAÇÃO POR DTFT

A representação por DTFT é expressa como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega \quad (3.28)$$

em que

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (3.29)$$

Dizemos que  $X(e^{j\Omega})$  e  $x[n]$  são um par de DTFT e escrevemos

$$x[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$$

A transformada  $X(e^{j\Omega})$  descreve o sinal  $x[n]$  como uma função de freqüência senoidal  $\Omega$  e é denominada representação no domínio de freqüência de  $x[n]$ . Dizemos que a equação (3.29) é a DTFT de  $x[n]$ , uma vez que ela converte o sinal no domínio de tempo para sua representação no domínio de freqüência. A equação (3.28) denomina-se a DTFT inversa, uma vez que ela converte a representação do domínio de freqüência de volta ao domínio de tempo.

Ao derivar a DTFT, supomos que  $x[n]$  tenha duração finita. Podemos aplicar estes resultados a sinais de duração infinita, mas precisamos então considerar as condições sob as quais a soma infinita na equação (3.29) converge. Se  $x[n]$  for absolutamente somável, ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

então a soma na equação (3.29) convergirá uniformemente para uma função contínua de  $\Omega$ . Se  $x[n]$  não for absolutamente somável, mas tiver energia finita, ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

então pode-se mostrar que a soma na equação (3.29) converge num sentido de erro médio quadrático, mas não converge ponto a ponto.

Muitos sinais físicos encontrados na prática da engenharia satisfazem estas condições. Entretanto, diversos sinais não periódicos comuns, como por exemplo, o degrau unitário,  $u[n]$ , não. Em alguns destes casos, podemos definir um par de transformadas que se comporta como uma DTFT ao incluir impulsos na transformada. Isto nos possibilita usar a DTFT como uma ferramenta de resolução de problemas, ainda que, estritamente falando, ela não convirja. Um exemplo disto será apresentado posteriormente nesta seção; outros, serão apresentados no Capítulo 4.

Consideraremos agora diversos exemplos que ilustram a determinação da DTFT para sinais comuns.

**EXEMPLO 3.9 Seqüência exponencial.** Encontre a DTFT da seqüência  $x[n] = \alpha^n u[n]$ .

**Solução:** Usando a equação (3.29), temos

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

Esta soma diverge para  $|\alpha| \geq 1$ . Para  $|\alpha| < 1$ , temos a série geométrica convergente:

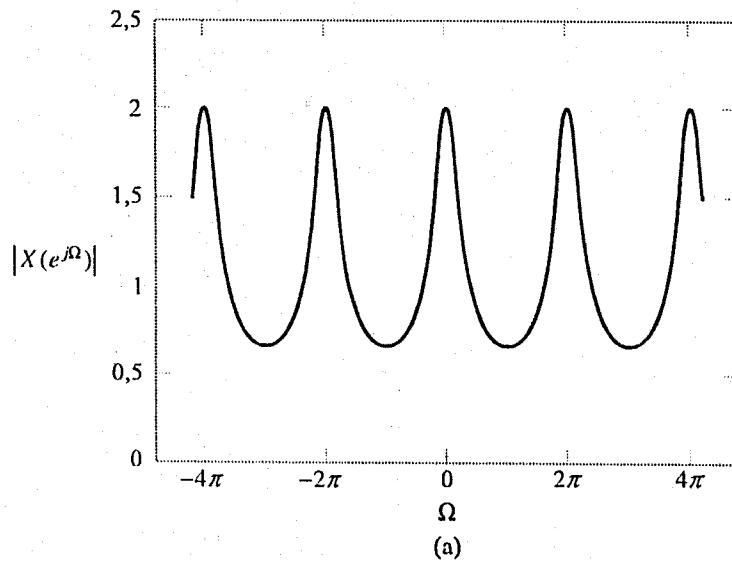
$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}, \quad |\alpha| < 1 \end{aligned}$$

Se  $\alpha$  tiver valor real, podemos escrever o módulo e a fase de  $X(e^{j\Omega})$  como

$$\begin{aligned} |X(e^{j\Omega})| &= \frac{1}{((1 - \alpha \cos \Omega)^2 + \alpha^2 \sin^2 \Omega)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 + 1 - 2\alpha \cos \Omega)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\arg\{X(e^{j\Omega})\} = -\arctg\left(\frac{\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}\right)$$

O módulo e a fase de  $X(e^{j\Omega})$  são descritos graficamente na Figura 3.18 para  $\alpha = 0,5$ . Observe que ambas têm período igual a  $2\pi$ .



(a)

FIGURA 3.18 A DTFT de  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ . (a) Espectro de magnitude.

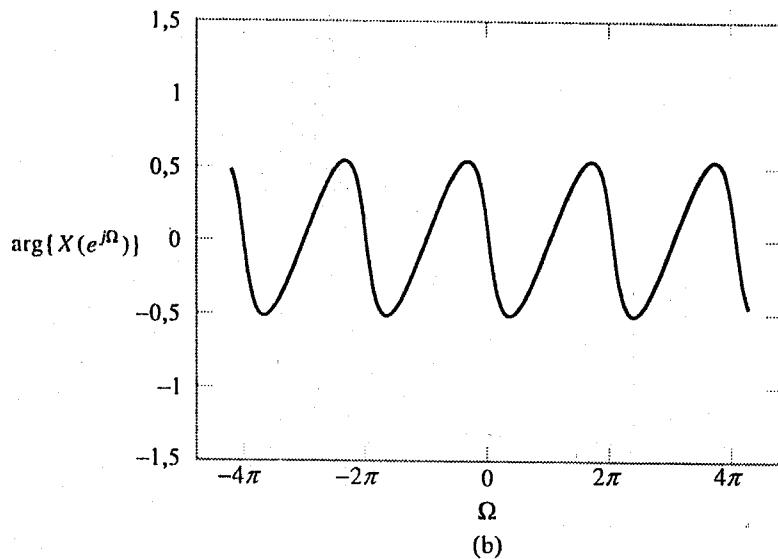


FIGURA 3.18 (continuação). (b) Espectro de fase.

Como em outras representações de Fourier, o espectro de magnitude de um sinal é o módulo de  $X(e^{j\Omega})$  descritos como uma função de  $\Omega$ . O espectro de fase é a fase de  $X(e^{j\Omega})$ .

► EXERCÍCIO 3.5 Encontre a DTFT de  $x[n] = 2(3)^n u[-n]$ .

*Resposta:*

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{2}{1 - e^{j\Omega}/3}$$

EXEMPLO 3.10 Púlsio retangular. Admitamos que

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$

conforme descreve a Figura 3.19(a). Encontre a DTFT de  $x[n]$ .

*Solução:* Substitua  $x[n]$  na equação (3.29) para obter

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^M 1 e^{-j\Omega n}$$

Execute agora a mudança de variável,  $m = n + M$ , obtendo

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\Omega(m-M)} \\ &= e^{j\Omega M} \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\Omega m} \\ &= \begin{cases} e^{j\Omega M} \frac{1 - e^{-j\Omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}, & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ 2M + 1, & \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

A expressão para  $X(e^{j\Omega})$ , quando  $\Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , pode ser simplificada fazendo-se a simetria das potências da exponencial no numerador e denominador, como é mostrado por

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= e^{j\Omega M} \frac{e^{-j\Omega(2M+1)/2} (e^{j\Omega(2M+1)/2} - e^{-j\Omega(2M+1)/2})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}(2M+1)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \end{aligned}$$

Observe que a regra de L'Hopital resulta em

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots} \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}(2M+1)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = 2M+1$$

Conseqüentemente, ao invés de escrevermos  $X(e^{j\Omega})$  como duas formas dependentes do valor de  $\Omega$ , simplesmente escrevemos

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}(2M+1)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

com o entendimento de que  $X(e^{j\Omega})$ , para  $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , é obtido como um limite. Neste exemplo,  $X(e^{j\Omega})$  é puramente real. Um gráfico de  $X(e^{j\Omega})$  como uma função de  $\Omega$  é dada na Figura 3.19(b). Vemos que à medida que  $M$  cresce, o intervalo de tempo de  $x[n]$  cresce enquanto a energia de  $X(e^{j\Omega})$  se torna mais concentrada próximo a  $\Omega = 0$ .

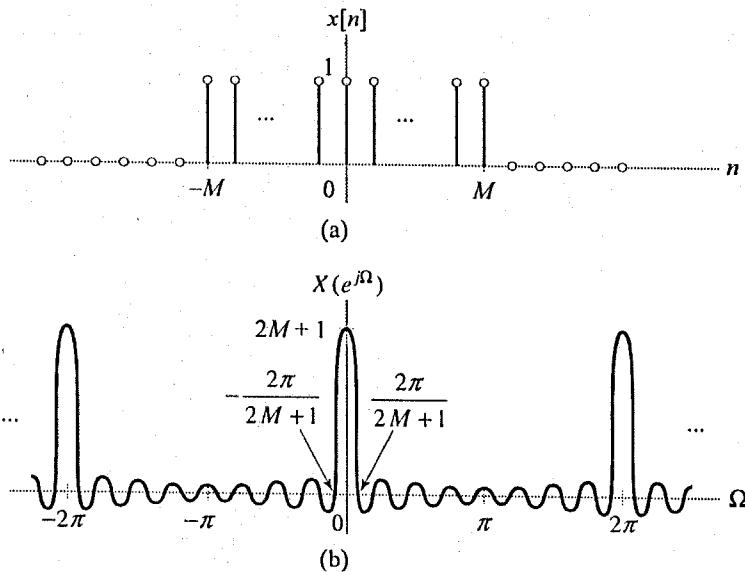


FIGURA 3.19 (a) Pulso retangular no tempo. (b) DTFT.

**EXEMPLO 3.11** *Função sinc de Tempo Discreto.* Encontre a DTFT inversa de

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

conforme descreve a Figura 3.20(a).

**Solução:** Primeiramente, note que  $X(e^{j\Omega})$  é especificado somente para  $-\pi < \Omega < \pi$ . Isto é tudo que é necessário, uma vez que  $X(e^{j\Omega})$  tem sempre período  $2\pi$ , e a DTFT inversa depende somente dos valores no intervalo  $-\pi < \Omega < \pi$ . Substituir  $X(e^{j\Omega})$  na equação (3.28) resulta em

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi n j} e^{j\Omega n} \Big|_{-W}^W, \quad n \neq 0 \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin(Wn), \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

Para  $n = 0$ , o integrando é a unidade, e temos  $x[0] = W/\pi$ . Usando a regra de L'Hopital, é fácil mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\pi n} \sin(Wn) = \frac{W}{\pi}$$

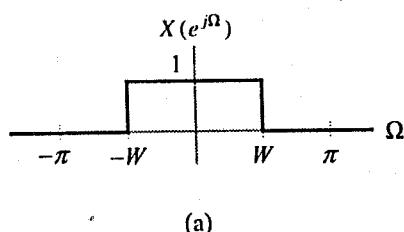
e, dessa forma, normalmente escrevemos,

$$x[n] = \frac{1}{\pi n} \sin(Wn)$$

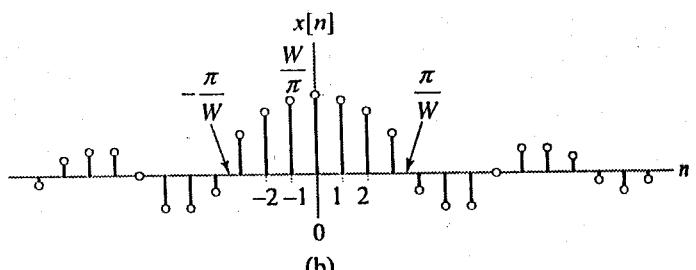
como a DTFT inversa de  $X(e^{j\Omega})$  com o entendimento de que o valor em  $n = 0$  é obtido como o limite. Também podemos escrever

$$x[n] = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$$

usando a notação da função sinc definida na equação (3.21). Um gráfico que descreve  $x[n]$  é dado na Figura 3.20(b).



(a)



(b)

**FIGURA 3.20** (a) Espectro retangular  $X(e^{j\Omega})$ . (b) DTFT inversa de  $X(e^{j\Omega})$ .

**EXEMPLO 3.12** O impulso. Encontre a DTFT de  $x[n] = \delta[n]$ .

**Solução:** Para  $x[n] = \delta[n]$ , temos

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\delta[n] \xleftarrow{\text{DTFT}} 1$$

Este par de DTFT é descrito na Figura 3.21.

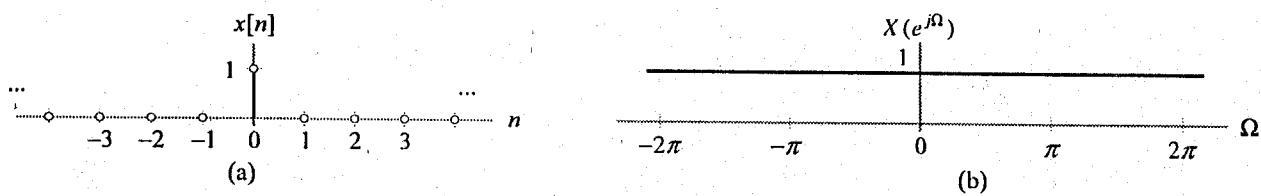


FIGURA 3.21 (a) Impulso em tempo. (b) DTFT.

**EXEMPLO 3.13** Encontre a DTFT inversa de  $X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega)$ ,  $-\pi < \Omega \leq \pi$ .

**Solução:** Por definição,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Use a propriedade de peneiramento da função impulso para obter  $x[n] = \frac{1}{2}\pi$  e, dessa forma, escreva

$$\frac{1}{2\pi} \xleftarrow{\text{DTFT}} \delta(\Omega), \quad -\pi < \Omega \leq \pi$$

Neste exemplo, definimos novamente somente um período de  $X(e^{j\Omega})$ . Podemos definir alternativamente  $X(e^{j\Omega})$  para todos  $\Omega$  escrevendo-o como uma soma infinita de funções delta deslocadas por múltiplos inteiros de  $2\pi$ .

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$$

Ambas as definições são comuns. Este par de DTFT é descrito na Figura 3.22.

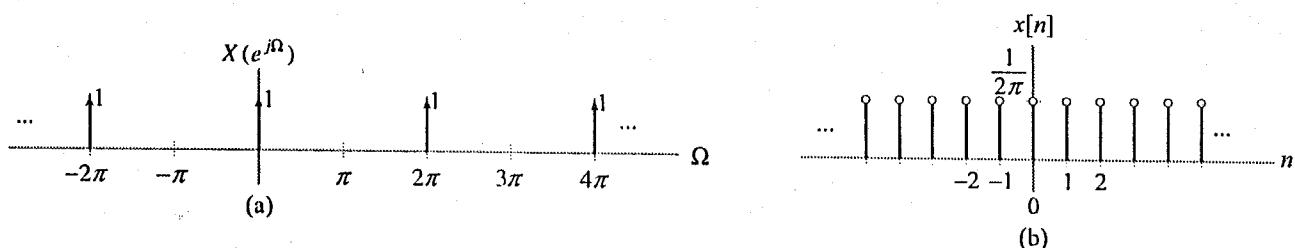


FIGURA 3.22 (a) Impulso em freqüência. (b) DTFT inversa.

Este último exemplo apresenta um dilema interessante. A DTFT de  $x[n] = 1/2\pi$  não converge, uma vez que ela não é um sinal somável ao quadrado; contudo,  $x[n]$  é uma DTFT inversa válida. Esta é uma consequência direta de permitir impulsos em  $X(e^{j\Omega})$ . Trataremos  $x[n]$  e  $X(e^{j\Omega})$  como um par DTFT, apesar desta aparente incerteza, porque eles satisfazem de fato todas as propriedades de um par DTFT. Na verdade, podemos expandir muito a classe de sinais que podem ser representados pela

DTFT, se permitirmos impulsos na transformada. Estritamente falando, as DTFT's destes sinais não existem, uma vez que a soma na equação (3.29) não converge. Porém, como neste exemplo, podemos identificar pares de transformada usando a transformada inversa da equação (3.28) e, dessa forma, usar a DTFT como uma ferramenta de resolução de problemas. Exemplos adicionais que ilustram o uso de impulsos na DTFT serão apresentados no Capítulo 4.

► **EXERCÍCIO 3.6** Encontre a DTFT inversa de

$$X(e^{j\Omega}) = 2 \cos(2\Omega)$$

*Resposta:*

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

► **EXERCÍCIO 3.7** Encontre a DTFT de

$$x[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

*Resposta:*

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1 - 2^{10} e^{-j10\Omega}}{1 - 2e^{-j\Omega}}$$

### 3.5 Sinais Não-Periódicos de Tempo

#### Contínuo: A Transformada de Fourier

A transformada de Fourier (FT) é usada para representar um sinal não-periódico de tempo contínuo como uma superposição de senóides complexas. Apresentaremos simplesmente a FT nesta seção. Uma interpretação da FT como a forma limite da FS é desenvolvida no Problema 3.34. Lembre-se da Seção 3.1, que a natureza contínua não-periódica de um sinal de tempo implica que a superposição de senóides complexas envolve um *continuum* de freqüências que variam de  $-\infty$  a  $\infty$ . Dessa forma, a representação FT de um sinal de tempo envolve uma integral de freqüência, como é mostrado por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.30)$$

em que

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.31)$$

Na equação (3.30), expressamos  $x(t)$  como uma superposição ponderada de senóides. A superposição é uma integral e o peso de cada senóide é  $(1/2\pi)X(j\omega) d\omega$ . Dizemos que  $x(t)$  e  $X(j\omega)$  são um par de FT e escrevemos

$$x(t) \xleftarrow{FT} X(j\omega)$$

A transformada  $X(j\omega)$  descreve o sinal  $x(t)$  como uma função da freqüência senoidal  $\omega$  e é denominada representação de domínio de freqüência para  $x(t)$ . A equação (3.31) é denominada FT de  $x(t)$ , uma vez que converte o sinal de domínio de tempo em sua representação de domínio de freqüência. A equação (3.30) é denominada FT inversa, uma vez que converte a representação no domínio de freqüência de  $X(j\omega)$  de volta ao domínio de tempo.

As integrais das equações (3.30) e (3.31) podem não convergir para todas as funções  $x(t)$  e  $X(j\omega)$ . Uma análise da convergência está além do escopo deste livro; deste modo, simplesmente apresentamos diversas condições de convergência do sinal no domínio de tempo  $x(t)$ . Defina

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

em que  $X(j\omega)$  é dado em termos de  $x(t)$  pela equação (3.31). Pode-se mostrar que o MSE entre  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$ , dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

é zero se  $x(t)$  for integrável ao quadrado; ou seja, se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Um MSE igual a zero não implica convergência ponto a ponto, ou  $x(t) = \hat{x}(t)$  em todos os valores de  $t$ , mas que, ao contrário, há energia nula em sua diferença.

A convergência ponto a ponto é garantida em todos os valores de  $t$ , exceto naqueles correspondentes a descontinuidades, se  $x(t)$  satisfizer as condições de Dirichlet para sinais não periódicos:

- $x(t)$  é absolutamente integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- $x(t)$  tem um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades locais em qualquer intervalo finito.
- O tamanho de cada descontinuidade é finito.

Quase todos os sinais físicos encontrados na prática da engenharia satisfazem a segunda e a terceira condições. Entretanto, muitos sinais comuns, como o degrau unitário, não são integráveis absolutamente ou ao quadrado. Em alguns destes casos, podemos definir um par de transformadas que satisfaz as propriedades da FT por meio do uso de impulsos. Desta maneira, ainda podemos usar a FT como uma ferramenta de resolução de problemas, não obstante a FT não convergir para esses sinais num sentido estrito.

Os exemplos seguintes ilustram a determinação da FT e da FT inversa para diversos sinais comuns.

**EXEMPLO 3.14 Exponencial real.** Encontre a FT de  $x(t) = e^{-at} u(t)$ .

**Solução:** A FT não converge para  $a \leq 0$ , uma vez que  $x(t)$  não é absolutamente integrável, como é mostrado por

$$\int_0^{\infty} e^{-at} dt = \infty, \quad a \leq 0$$

Para  $a > 0$ , temos

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Convertendo para a forma polar, o módulo e a fase de  $X(j\omega)$  são dados por

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg(X(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

e são descritas na Figura 3.23.

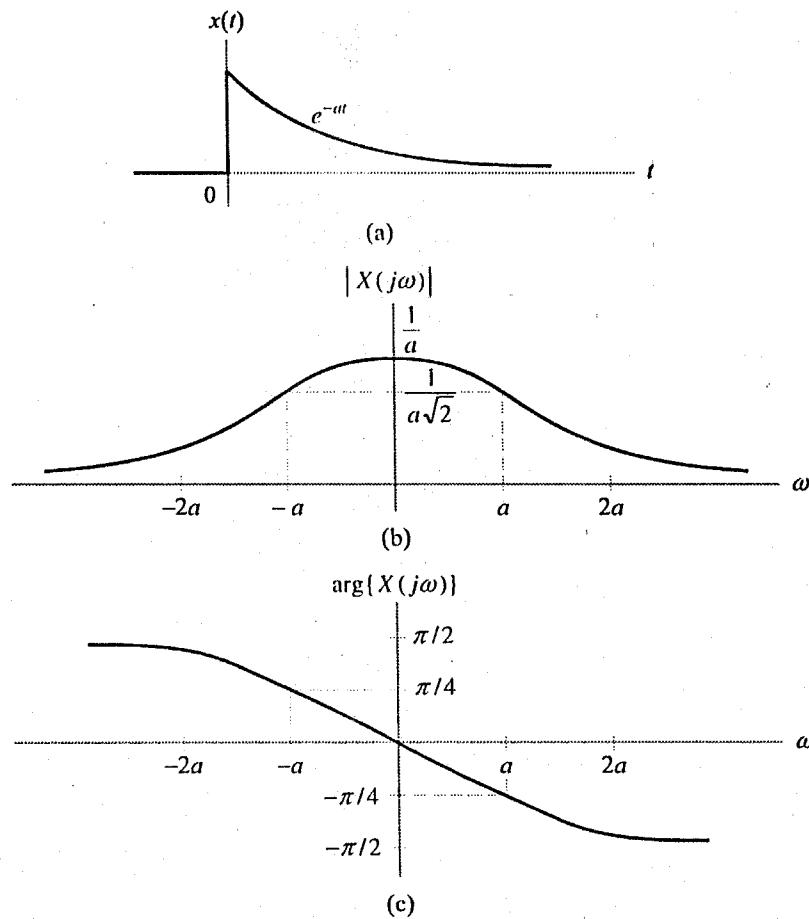


FIGURA 3.23 (a) Sinal exponencial real. (b) Espectro de magnitude. (c) Espectro de fase.

Como anteriormente, o módulo de  $X(j\omega)$  é denominada espectro de magnitude, e a fase de  $X(j\omega)$  é denominada espectro de fase do sinal.

► **EXERCÍCIO 3.8** Encontre a FT de  $x(t) = e^{at}u(-t)$  supondo  $a > 0$ .

**Resposta:**  $X(j\omega) = -1/(j\omega - a)$ .

**EXEMPLO 3.15** *Pulso retangular.* Considere o pulso retangular descrito na Figura 3.24(a) e definido como

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq t \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Encontre a FT de  $x(t)$ .

**Solução:** O pulso retangular  $x(t)$  é absolutamente integrável, desde que  $T < \infty$ . Para  $\omega \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^{T} \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T), \quad \omega \neq 0 \end{aligned}$$

Para  $\omega = 0$ , a integral se simplifica para  $2T$ . Usando a regra de L'Hopital, é imediato mostrar que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = 2T$$

Dessa forma, escreveremos para todos  $\omega$ ,

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T)$$

com o entendimento de que o valor em  $\omega = 0$  é obtido avaliando-se um limite. Neste caso,  $X(j\omega)$  é real. Ele é descrito na Figura 3.24(b). O espectro de magnitude é

$$|X(j\omega)| = 2 \left| \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \right|$$

e o espectro de fase é

$$\arg\{X(j\omega)\} = \begin{cases} 0, & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} > 0 \\ \pi, & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} < 0 \end{cases}$$

Podemos escrever  $X(j\omega)$  usando a notação da função sinc como

$$X(j\omega) = 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

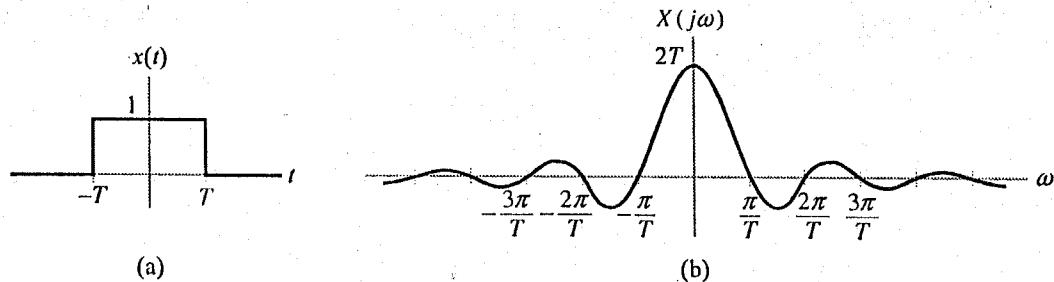


FIGURA 3.24 (a) Pulso retangular no tempo. (b) FT.

Este exemplo ilustra uma propriedade muito importante da transformada de Fourier. Considere o efeito de mudar  $T$ . À medida que  $T$  cresce,  $x(t)$  torna-se menos concentrado nas proximidades da origem do tempo, enquanto que  $X(j\omega)$  torna-se mais concentrado nas proximidades da origem de freqüência. Inversamente, à medida que  $T$  decresce,  $x(t)$  torna-se mais concentrado nas proximidades da origem de tempo, enquanto que  $X(j\omega)$  torna-se menos concentrado nas proximidades da origem de freqüência. Em certo sentido, a “largura” de  $x(t)$  está inversamente relacionada com a “largura” de  $X(j\omega)$ . Como um princípio geral, veremos que os sinais concentrados num domínio estão dispersos em outro domínio.

**EXEMPLO 3.16** A função sinc. Encontre a FT inversa do espectro retangular descrito na Figura 3.25(a) e dada por

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & -W \leq \omega \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

*Solução:* Usando a equação (3.30) para a FT inversa, para  $t \neq 0$ , dá

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2j\pi t} e^{j\omega t} \Big|_{-W}^W \\ &= \frac{1}{\pi t} \sin(Wt) \\ &= \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right), \quad t \neq 0 \end{aligned}$$

Quando  $t = 0$ , a integral se reduz a  $W/\pi$ . Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t} \sin(Wt) = \frac{W}{\pi}$$

escrevemos para todos  $t$

$$x(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(Wt)$$

com o entendimento de que o valor em  $t = 0$  é obtido como um limite. A Figura 3.25(b) descreve  $x(t)$ .

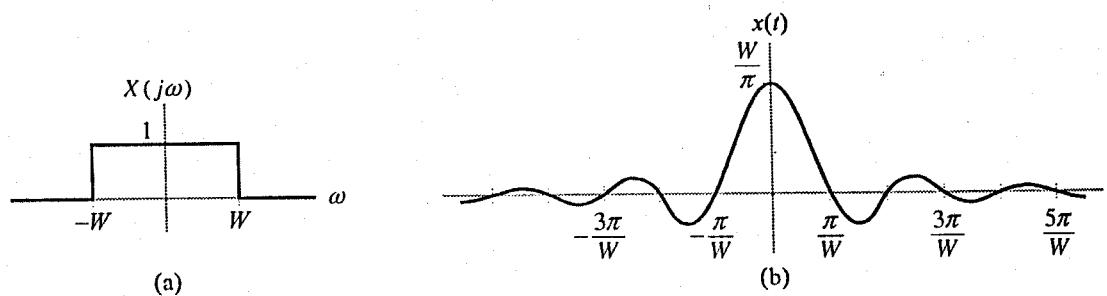


FIGURA 3.25 (a) Pulso retangular em freqüência. (b) FT inversa.

Observe novamente a relação inversa entre a concentração do sinal nas proximidades da origem nos domínios de freqüência e tempo. À medida que  $W$  cresce, a representação no domínio de freqüência torna-se menos concentrada nas proximidades de  $\omega = 0$ , enquanto que a representação no domínio de tempo torna-se mais concentrada nas proximidades de  $t = 0$ . Outra observação interessante pode ser feita considerando-se este exemplo e o anterior. No exemplo anterior, um pulso retangular no domínio de tempo é transformado numa função sinc de freqüência. Neste exemplo, uma função sinc de tempo é transformada numa função retangular de freqüência. Esta "dualidade" é uma consequência da similaridade entre a transformada direta da equação (3.31) e a transformada inversa da equação (3.30) e será estudada com mais detalhes na Seção 3.6. Os dois exemplos seguintes também exibem esta propriedade.

**EXEMPLO 3.17 O Impulso.** Encontre a FT de  $x(t) = \delta(t)$ .

*Solução:* Este  $x(t)$  não satisfaz as condições de Dirichlet, uma vez que o impulso  $\delta(t)$  somente é definido dentro de uma integral. Tentamos, apesar deste problema em potencial, continuar a usar a equação (3.31) para escrever

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

A segunda linha segue-se da propriedade de peneiramento da função impulso. Consequentemente,

$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

e o impulso contém contribuições unitárias das senóides complexas de todas as freqüências, de  $\omega = -\infty$  a  $\omega = \infty$ .

**EXEMPLO 3.18 Sinal DC.** Encontre a FT inversa de  $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ .

**Solução:** Aqui, novamente, podemos esperar irregularidades de convergência, uma vez que  $X(j\omega)$  tem uma descontinuidade infinita na origem. Usando a equação (3.30), encontramos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, identificamos

$$1 \xleftarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$

como um par FT. Isto implica que o conteúdo de frequência de um sinal dc está inteiramente concentrado em  $\omega = 0$ , o que é intuitivamente satisfatório.

Embora a convergência da FT não possa ser garantida nos dois exemplos anteriores, os pares de transformadas satisfazem as propriedades de um par FT e são, dessa forma, úteis para análise. Em ambos os casos, os pares de transformadas são consequências das propriedades da função impulso. Ao permitir o uso de funções impulso, expandimos muito a classe de sinais que são representáveis pela FT e, dessa forma, aumentamos a capacidade da FT como uma ferramenta de resolução de problemas. No Capítulo 4 usaremos impulsos para obter representações por FT para sinais tanto periódicos como de tempo discreto.

► **EXERCÍCIO 3.9** Encontre a FT inversa de

$$X(j\omega) = \begin{cases} 2\cos\omega, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}$$

**Resposta:**

$$x(t) = \frac{\sin(\pi(t+1))}{\pi(t+1)} + \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$$

► **EXERCÍCIO 3.10** Encontre a FT do sinal de tempo descrito na Figura 3.26 e dado por

$$x(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

**Sugestão:** Use integração por partes

**Resposta:**

$$X(j\omega) = j\frac{2}{\omega}\cos\omega - j\frac{2}{\omega^2}\sin\omega$$

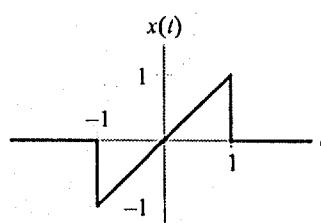


FIGURA 3.26 Sinal de domínio de tempo correspondente ao Exercício 3.10.

### 3.6 Propriedades das Representações de Fourier

As quatro representações de Fourier discutidas neste capítulo estão resumidas na Tabela 3.2. Esta tabela fornece uma referência conveniente tanto para a definição de cada transformada como para a identificação da classe de sinais aos quais cada uma se aplica. Todas as quatro representações de Fourier baseiam-se na senóide complexa. Conseqüentemente, todas compartilham de um conjunto comum de propriedades que partem das características de senóides complexas. Esta seção examinará as propriedades das representações de Fourier. Em muitos casos, derivamos uma propriedade para uma representação e simplesmente a enunciamos para as outras representações. O leitor será solicitado a provar algumas destas propriedades na seção de problemas deste capítulo. Uma tabela abrangente de todas as propriedades é dada no Apêndice C.

TABELA 3.2 As Quatro Representações de Fourier

Dominio de Tempo	Periódico	Não periódico	
C o n t i n u o	<p>Série de Fourier</p> $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_o t}$ $X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)e^{-jk\omega_o t} dt$ <p><math>x(t)</math> tem período <math>T</math></p> $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$	<p>Transformada de Fourier</p> $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$	N ão per i ó d i c o
D i s c r e t o	<p>Série de Fourier de Tempo Discreto</p> $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k]e^{jk\Omega_o n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk\Omega_o n}$ <p><math>x[n]</math> e <math>X[k]</math> têm período <math>N</math></p> $\Omega_o = \frac{2\pi}{N}$	<p>Transformada de Fourier de Tempo Discreto</p> $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ <p><math>X(e^{j\Omega})</math> tem período <math>2\pi</math></p>	P er i ó d i c o
	Discreto	Contínuo	Dominio de Freqüência

#### ■ PROPRIEDADES DA PERIODICIDADE

As margens da Tabela 3.2 resumem as propriedades da periodicidade das quatro representações, denotando as características de domínio de tempo nos lados superior e esquerdo, com as características de domínio de freqüência correspondentes nos lados inferior e direito.

Sinais periódicos de tempo contínuo ou discreto têm uma representação por série de Fourier. Numa série de Fourier, o sinal é representado como uma soma ponderada de senóides complexas que têm o mesmo período que o sinal. Um conjunto discreto de freqüências está envolvido na série; por isso, a representação no domínio de freqüência envolve um conjunto discreto de pesos ou coeficientes. Em comparação, para sinais não periódicos, tanto a representação com transformada de Fourier de tempo contínuo como de tempo discreto envolvem integrais ponderadas de senóides complexas ao

longo de um *continuum* de freqüências. Por isso, a representação no domínio de freqüência para sinais não periódicos é uma função contínua de freqüência. Sinais que são periódicos no tempo têm representações discretas no domínio de freqüência, enquanto que os sinais de tempo não periódicos têm representações contínuas no domínio de freqüência. Esta é a correspondência indicada nas partes superior e inferior da Tabela 3.2.

Observamos também que as representações de Fourier para sinais de tempo discreto, ou DTFS ou DTFT, são funções periódicas da freqüência. Isto ocorre porque as senóides complexas de tempo discreto usadas para representar sinais de tempo discreto são funções da freqüência com período  $2\pi$ ; ou seja, senóides de tempo discreto cujas freqüências diferem em múltiplos inteiros de  $2\pi$  são idênticas. Em comparação, as representações de Fourier para sinais de tempo contínuo envolvem superposições de senóides de tempo contínuo. Senóides de tempo contínuo com freqüências distintas são sempre distintas; dessa forma, as representações no domínio de freqüência para sinais de tempo contínuo são não periódicas.

**TABELA 3.3 Propriedades de Periodicidade das Representações de Fourier**

Propriedade no Domínio de Tempo	Propriedade no Domínio de Freqüência
Contínua	Não periódica
Discreta	Periódica
Periódica	Discreta
Não periódica	Contínua

Resumindo, sinais de tempo discreto têm representações periódicas no domínio de freqüência, enquanto que os sinais de tempo contínuo têm representações não periódicas no domínio de freqüência. Esta é a correspondência indicada nos lados esquerdo e direito da Tabela 3.2.

Em geral, representações que são contínuas num domínio, ou de tempo ou de freqüência, são não periódicas no outro domínio. Inversamente, representações que são discretas num domínio, ou de tempo ou de freqüência, são periódicas no outro domínio. Estas relações são indicadas na Tabela 3.3.

### ■ LINEARIDADE

Mostrar que todas as quatro representações de Fourier envolvem operações lineares é um exercício imediato. Especificamente, elas satisfazem a propriedade da linearidade

$$\begin{aligned} z(t) &= ax(t) + by(t) \xrightarrow{FT} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega) \\ z(t) &= ax(t) + by(t) \xrightarrow{FS; \omega_n} Z[k] = aX[k] + bY[k] \\ z[n] &= ax[n] + by[n] \xrightarrow{DTFT} Z(e^{j\Omega}) = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega}) \\ z[n] &= ax[n] + by[n] \xrightarrow{DTFS; \Omega_n} Z[k] = aX[k] + bY[k] \end{aligned}$$

Nas relações acima, supomos que os símbolos em maiúsculas denotem a representação Fourier do símbolo em minúsculas correspondentes. Além disso, nos casos de FS e DTFS, presume-se que os sinais que estão sendo somados têm o mesmo período fundamental.

**EXEMPLO 3.19** Suponhamos que  $z(t)$  seja o sinal periódico descrito na Figura 3.27(a). Use a propriedade da linearidade e os resultados do Exemplo 3.6 para determinar os coeficientes  $Z[k]$  da FS.

**Solução:** Escreva  $z(t)$  como a soma de sinais

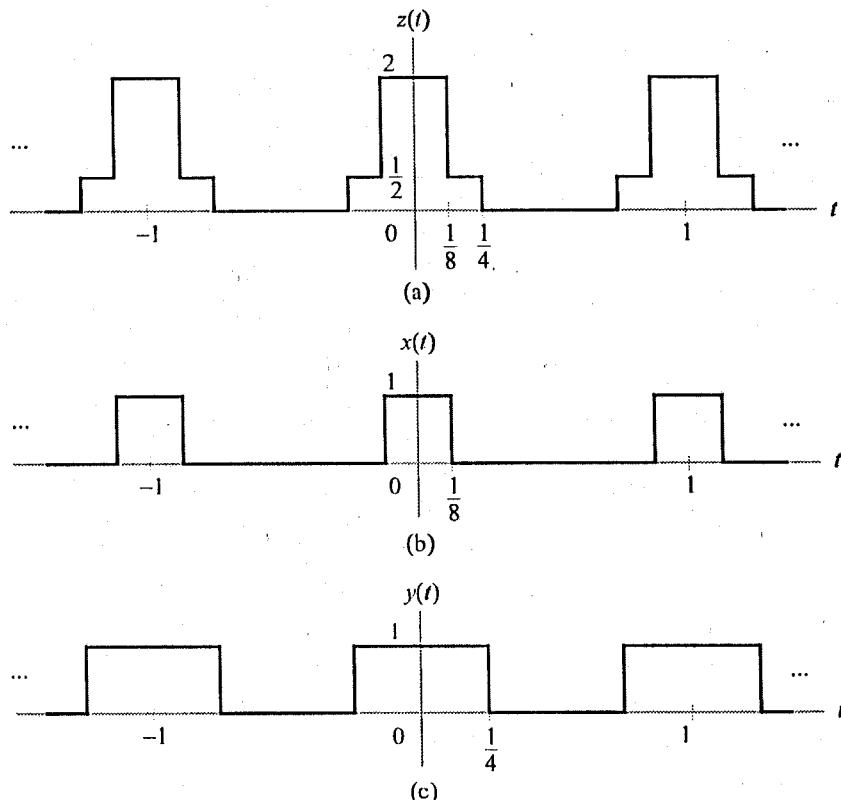
$$z(t) = \frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t)$$

em que  $x(t)$  e  $y(t)$  são descritos nas Figuras 3.27(b) e (c), respectivamente. Do Exemplo 3.6, temos

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftarrow{FS; 2\pi} X[k] = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \\ y(t) &\xleftarrow{FS; 2\pi} Y[k] = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

A propriedade de linearidade implica que

$$z(t) \xleftarrow{FS; 2\pi} Z[k] = \frac{3}{2k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)$$



**FIGURA 3.27** Representação do sinal periódico  $z(t)$  como uma soma ponderada de ondas quadradas periódicas:  $z(t) = \frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t)$ . (a)  $z(t)$ . (b)  $x(t)$ . (c)  $y(t)$ .

A propriedade de linearidade também é a base do método de frações parciais para determinarmos a FT inversa das representações de domínio de freqüência  $X(j\omega)$  dadas por uma razão de polinômios em  $j\omega$ . Admitamos que

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{b_M(j\omega)^M + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \\ &= \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \end{aligned}$$

Representações de domínio de freqüência desta forma ocorrem freqüentemente na análise de sistemas que são descritos por meio de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. A idéia é escrever  $X(j\omega)$  como uma soma de termos para os quais a FT inversa é conhecida. Podemos realizar isto usando uma expansão em frações parciais de  $X(j\omega)$ .

Supomos que  $M < N$ . Se  $M \geq N$ , podemos usar divisão longa para expressar  $X(j\omega)$  na forma

$$X(j\omega) = \sum_{k=0}^{M-N} f_k(j\omega)^k + \frac{\tilde{B}(j\omega)}{A(j\omega)}$$

O polinômio  $\tilde{B}(j\omega)$  do numerador agora tem ordem um menor do que a do denominador, e a expansão em frações parciais é aplicada para determinar a transformada de Fourier inversa de  $\frac{\tilde{B}(j\omega)}{A(j\omega)}$ . A transformada de Fourier inversa dos termos na soma são obtidas do par  $\delta(t) \xrightarrow{FT} 1$  e da propriedade de diferenciação, a qual será apresentada posteriormente nesta seção.

Admitamos que as raízes do polinômio do denominador em  $(j\omega)$  sejam  $d_k, k = 1, 2, \dots, N$ . Estas raízes são encontradas substituindo-se  $j\omega$  por uma variável genérica  $u$  e determinando-se as raízes do polinômio.

$$u^N + a_{N-1}u^{N-1} + \dots + a_1u + a_0 = 0$$

Podemos então escrever

$$X(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k}{\prod_{k=1}^N (j\omega - d_k)}$$

Supondo que todas as raízes  $d_k, k = 1, 2, \dots, N$  sejam distintas, podemos expressar  $X(j\omega)$  como a soma

$$X(j\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{j\omega - d_k}$$

em que os coeficientes  $C_k, k = 1, 2, \dots, N$  são determinados ou resolvendo-se um sistema de equações lineares ou pelo método dos resíduos. Estes métodos e a expansão para raízes repetidas estão revisados no Apêndice B. No Exemplo 3.14, derivamos o par de FT

$$e^{dt} u(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega - d} \quad \text{para } d < 0$$

O leitor pode verificar se este par é válido mesmo que  $d$  seja complexo, desde que  $\operatorname{Re}\{d\} < 0$ . Supondo que a parte real de cada  $d_k, k = 1, 2, \dots, N$  seja negativa, usamos a linearidade para escrever

$$x(t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{d_k t} u(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{j\omega - d_k}$$

O exemplo seguinte ilustra esta técnica.

#### EXEMPLO 3.20 Encontre a FT inversa de

$$X(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}$$

*Solução:* Primeiramente, encontre a expansão em frações parciais de  $X(j\omega)$ . As raízes do polinômio do denominador são  $d_1 = -2$  e  $d_2 = -3$ . Por isso, escrevemos  $X(j\omega)$  como a soma

$$\frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} = \frac{C_1}{j\omega + 2} + \frac{C_2}{j\omega + 3}$$

Podemos resolver  $C_1$  e  $C_2$  usando o método dos resíduos, como é mostrado por

$$\begin{aligned} C_1 &= (j\omega + 2) \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} \Big|_{j\omega=-2} \\ &= \frac{j\omega + 1}{j\omega + 3} \Big|_{j\omega=-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= (j\omega + 3) \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} \Big|_{j\omega=-3} \\ &= \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2} \Big|_{j\omega=-3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dessa forma, a expansão em frações parciais de  $X(j\omega)$  é

$$X(j\omega) = \frac{-1}{j\omega + 2} + \frac{2}{j\omega + 3}$$

Agora, usando a linearidade, obtemos

$$X(j\omega) \xrightarrow{\text{FT}} x(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

► **EXERCÍCIO 3.11** Use a expansão em frações parciais e a linearidade para determinar a FT inversa de

$$X(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

**Resposta:**

$$x(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

Expansões em frações parciais e linearidade também são usadas para determinar a DTFT inversa de representações em domínio de freqüência dadas como uma razão de polinômios em  $e^{-j\Omega}$ . Admitamos que

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{b_M e^{-j\Omega M} + \dots + b_1 e^{-j\Omega} + b_0}{a_N e^{-j\Omega N} + a_{N-1} e^{-j\Omega(N-1)} + \dots + a_1 e^{-j\Omega} + 1}$$

Representações desta forma ocorrem freqüentemente no estudo de sistemas descritos por meio de equações lineares de diferenças de coeficientes constantes. Observe que o termo constante no polinômio do denominador foi normalizado para a unidade. Como anteriormente, reescrevemos  $X(e^{j\Omega})$  como a soma de termos cuja DTFT inversa é conhecida usando-se uma expansão em frações parciais. Fatoramos o polinômio do denominador como

$$a_N e^{-j\Omega N} + a_{N-1} e^{-j\Omega(N-1)} + \dots + a_1 e^{-j\Omega} + 1 = \prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\Omega})$$

Expansões em frações parciais baseadas nesta fatoração estão revisadas no Apêndice B. Neste caso, os  $d_k$  são raízes do polinômio

$$u^N + a_1 u^{N-1} + a_2 u^{N-2} + \dots + a_{N-1} u + a_N = 0$$

Supondo  $M < N$ , podemos expressar  $X(e^{j\Omega})$  como a soma

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - d_k e^{-j\Omega}}$$

Esta forma novamente supõe que todos os  $d_k$  sejam distintos. Expansões para raízes repetidas serão tratadas no Apêndice B. Uma vez que

$$(d_k)^n u[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-d_k e^{-j\Omega}}$$

a propriedade de linearidade implica

$$x[n] = \sum_{k=1}^N C_k (d_k)^n u[n]$$

**EXEMPLO 3.21** Encontre a DTFT inversa de

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j\Omega^2}}$$

**Solução:** As raízes do polinômio

$$u^2 + \frac{1}{6}u - \frac{1}{6} = 0$$

são  $d_1 = -\frac{1}{2}$  e  $d_2 = \frac{1}{3}$ . Procuramos coeficientes  $C_1$  e  $C_2$ , de forma que

$$\frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j\Omega^2}} = \frac{C_1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{C_2}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

Usando o método dos resíduos, obtemos

$$\begin{aligned} C_1 &= (1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}) \left. \frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j\Omega^2}} \right|_{e^{-j\Omega} = -2} \\ &= \left. \frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \right|_{e^{-j\Omega} = -2} \\ &= 4 \\ C_2 &= (1 + \frac{1}{3}e^{-j\Omega}) \left. \frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j\Omega^2}} \right|_{e^{-j\Omega} = 3} \\ &= \left. \frac{-\frac{5}{6}e^{-j\Omega} + 5}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \right|_{e^{-j\Omega} = 3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$x[n] = 4(-\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{3})^n u[n]$$

## ■ PROPRIEDADES DE SIMETRIA – SINAIS REAIS E IMAGINÁRIOS

Desenvolvemos as propriedades de simetria usando a FT. Os resultados para as outras três representações de Fourier podem ser obtidos de maneira análogo e são apenas enunciados.

Primeiramente, suponha que  $x(t)$  seja real. Isto implica que  $x(t) = x^*(t)$ . Considere  $X^*(j\omega)$ , definido por

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$

Agora podemos substituir  $x(t)$  em  $x^*(t)$ , uma vez que  $x(t)$  é real, obtendo

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t} dt \\ &= X(-j\omega) \end{aligned}$$

Isto mostra que  $X(j\omega)$  é um complexo conjugado simétrico, ou  $X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ . Tomar as partes real e imaginária desta expressão resulta em  $\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}$  e  $\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}$ . Em palavras, se  $x(t)$  tiver valor real, a parte real da transformada será uma função par da freqüência, enquanto a parte imaginária é uma função ímpar da freqüência. Isto também implica que o espectro de magnitude é uma função par, enquanto o espectro de fase é uma função ímpar. As condições de simetria de todas as quatro representações de Fourier para sinais de valores reais são indicadas na Tabela 3.4.

**TABELA 3.4 Propriedades de Simetria das Representações de Fourier para Sinais de Tempo com Valores Reais**

	<i>Forma Complexa</i>	<i>Forma Retangular</i>	<i>Forma Polar</i>
FT	$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$	$\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}$	$ X(j\omega)  =  X(-j\omega) $ $\arg\{X(j\omega)\} = -\arg\{X(-j\omega)\}$
FS	$X^*[k] = X[-k]$	$\operatorname{Re}\{X[k]\} = \operatorname{Re}\{X[-k]\}$ $\operatorname{Im}\{X[k]\} = -\operatorname{Im}\{X[-k]\}$	$ X[k]  =  X[-k] $ $\arg\{X[k]\} = -\arg\{X[-k]\}$
DTFT	$X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega})$	$\operatorname{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = \operatorname{Re}\{X(e^{-j\Omega})\}$ $\operatorname{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = -\operatorname{Im}\{X(e^{-j\Omega})\}$	$ X(e^{j\Omega})  =  X(e^{-j\Omega}) $ $\arg\{X(e^{j\Omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\Omega})\}$
DTFS	$X^*[k] = X[-k]$	$\operatorname{Re}\{X[k]\} = \operatorname{Re}\{X[-k]\}$ $\operatorname{Im}\{X[k]\} = -\operatorname{Im}\{X[-k]\}$	$ X[k]  =  X[-k] $ $\arg\{X[k]\} = -\arg\{X[-k]\}$

Em cada caso, a parte real da representação de Fourier tem simetria par e a parte imaginária tem simetria ímpar. Conseqüentemente, o espectro de magnitude tem simetria par e o espectro de fase tem simetria ímpar. Observe que a propriedade de simetria conjugada da DTFS também pode ser escrita como  $X^*[k] = X[N-k]$ , porque os coeficientes da DTFS tem período N, satisfazendo  $X[k] = X[N+k]$ .

Suponhamos agora que  $x(t)$  seja puramente imaginário, de forma que  $x(t) = -x^*(t)$ . Neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t} dt \\ &= -X(-j\omega) \end{aligned}$$

Examinando as partes real e imaginária desta relação resulta  $\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = -\operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}$  e  $\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = \operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}$ . Ou seja, se  $x(t)$  for puramente imaginário, a parte real da FT terá simetria ímpar e a parte imaginária terá simetria par. As relações de simetria correspondentes para todas as quatro representações de Fourier são dadas na Tabela 3.5. Observe que os espectros de magnitude e fase têm a mesma simetria, como é dado na Tabela 3.4.

**TABELA 3.5 Propriedades de Simetria das Representações de Fourier para Sinais de Tempo com Valores Imaginários**

	<i>Forma Complexa</i>	<i>Forma Retangular</i>
FT	$X^*(j\omega) = -X(-j\omega)$	$\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = -\operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = \operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}$
FS	$X^*[k] = -X[-k]$	$\operatorname{Re}\{X[k]\} = -\operatorname{Re}\{X[-k]\}$ $\operatorname{Im}\{X[k]\} = \operatorname{Im}\{X[-k]\}$
DTFT	$X^*(e^{j\Omega}) = -X(e^{-j\Omega})$	$\operatorname{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = -\operatorname{Re}\{X(e^{-j\Omega})\}$ $\operatorname{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = \operatorname{Im}\{X(e^{-j\Omega})\}$
DTFS	$X^*[k] = -X[-k]$	$\operatorname{Re}\{X[k]\} = -\operatorname{Re}\{X[-k]\}$ $\operatorname{Im}\{X[k]\} = \operatorname{Im}\{X[-k]\}$

### ■ PROPRIEDADES DE SIMETRIA – SINAIS PARES E ÍMPARES

Suponhamos que  $x(t)$  tenha valor real e tenha simetria par. Estas condições implicam que  $x^*(t) = x(t)$  e que  $x(-t) = x(t)$ , respectivamente. Usando estas relações, podemos escrever

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)} dt \end{aligned}$$

Executamos agora a mudança de variável  $\tau = -t$  para obter

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= X(j\omega) \end{aligned}$$

A única maneira pela qual a condição  $X^*(j\omega) = X(j\omega)$  vale é quando a parte imaginária de  $X(j\omega)$  seja zero. Conseqüentemente, se  $x(t)$  for real e par,  $X(j\omega)$  será real. Similarmente, podemos mostrar que se  $x(t)$  for real e ímpar, então  $X^*(j\omega) = -X(j\omega)$  e  $X(j\omega)$  será imaginário.

Relações de simetria idênticas valem para todas as quatro representações de Fourier. Se o sinal de tempo for real e par, a representação de domínio de freqüência também será real. Se o sinal de tempo for real e ímpar, então a representação de domínio de freqüência será imaginária. Note que, desde que supomos sinais de tempo de valores reais ao derivar estas propriedades de simetria, podemos combinar os resultados desta subseção com os da subseção anterior. Ou seja, sinais de tempo reais e pares têm representações reais e pares no domínio de freqüência e sinais de tempo reais e ímpares têm representações imaginárias e ímpares no domínio de freqüência.

### ■ PROPRIEDADES DE DESLOCAMENTO NO TEMPO

Nesta seção, consideraremos o efeito de um deslocamento no tempo na representação de Fourier. Como anteriormente, derivamos o resultado para a FT e mostramos os resultados para as outras três representações,

Admitamos que  $z(t) = x(t - t_0)$  seja uma versão deslocada no tempo de  $x(t)$ . A meta é relacionar a FT de  $z(t)$  com a FT de  $x(t)$ . Temos

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Executamos agora a mudança de variável  $\tau = t - t_o$ , obtendo

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_o)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_o} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

O resultado do deslocamento no tempo por  $t_o$  é multiplicar a transformada por  $e^{-j\omega t_o}$ . Note que  $|Z(j\omega)| = |X(j\omega)|$  e  $\arg\{Z(j\omega)\} = \arg\{X(j\omega)\} - \omega t_o$ . Por isso, um deslocamento no tempo deixa o espectro de magnitude inalterado e introduz um deslocamento de fase que é uma função linear da freqüência. A inclinação deste termo de fase linear é igual ao deslocamento no tempo. Uma propriedade similar vale para as outras três representações de Fourier, conforme indica a Tabela 3.6.

**TABELA 3.6 Propriedades de Deslocamento no Tempo das Representações de Fourier**

$$\begin{array}{l} x(t - t_o) \xleftarrow{FT} e^{-j\omega t_o} X(j\omega) \\ x(t - t_o) \xleftarrow{FS; \omega_o} e^{-j\omega_o t_o} X[k] \\ x[n - n_o] \xleftarrow{DTFT} e^{-jk\Omega_o n_o} X(e^{j\Omega}) \\ x[n - n_o] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} e^{-jk\Omega_o n_o} X[k] \end{array}$$

Estas propriedades são uma consequência direta das propriedades de deslocamento no tempo das senóides complexas usadas em representações de Fourier. Deslocar uma senóide complexa no tempo resulta numa senóide complexa da mesma freqüência cuja fase é deslocada pelo produto do deslocamento no tempo vezes a freqüência da senóide.

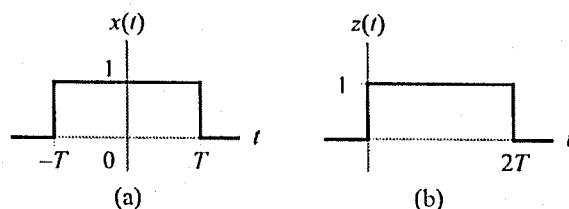
**EXEMPLO 3.22** Use a FT do pulso retangular  $x(t)$  descrito na Figura 3.28(a) para determinar a FT do pulso retangular deslocado no tempo,  $z(t)$ , da Figura 3.28(b).

*Solução:* Primeiramente, note que  $z(t) = x(t - T)$ ; deste modo, a propriedade de deslocamento no tempo implica que  $Z(j\omega) = e^{-j\omega T} X(j\omega)$ . No exemplo 3.15, obtivemos

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega T)$$

Dessa forma, temos

$$Z(j\omega) = e^{-j\omega T} \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega T)$$



**FIGURA 3.28** Aplicação da propriedade de deslocamento no tempo para o Exemplo 3.22.

► **EXERCÍCIO 3.12** Use a DTFS da onda quadrada periódica descrita na Figura 3.29(a) como obtida no Exemplo 3.2 para determinar a DTFS da onda quadrada periódica descrita na Figura 3.29(b).

**Resposta:**

$$Z[k] = e^{-jk(6\pi/7)} \frac{\sin\left(k \frac{5\pi}{7}\right)}{7 \sin\left(k \frac{\pi}{7}\right)}$$

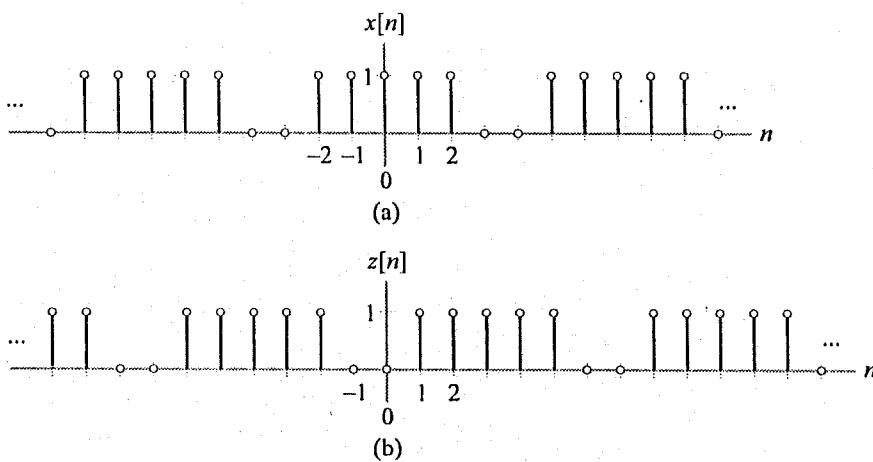


FIGURA 3.29 Ondas quadradas original e deslocada no tempo correspondentes ao Exercício 3.12.

### ■ PROPRIEDADES DE DESLOCAMENTO EM FREQÜÊNCIA

Na subseção anterior, consideramos o efeito de um deslocamento no tempo na representação em domínio de freqüência. Nesta seção, consideraremos o efeito de um deslocamento em freqüência no sinal de domínio de tempo. Suponhamos que  $x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$ . O problema é expressar a FT inversa de  $Z(j\omega) = X(j(\omega - \gamma))$  em termos de  $x(t)$ . Admitamos que  $z(t) \xrightarrow{FT} Z(j\omega)$ . Pela definição de FT, temos

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \gamma)) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Execute a substituição de variáveis  $\eta = \omega - \gamma$ , obtendo

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j(\eta+\gamma)t} d\eta \\ &= e^{j\gamma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j\eta t} d\eta \\ &= e^{j\gamma t} x(t) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, um deslocamento de freqüência corresponde à multiplicação no domínio de tempo por uma senóide complexa cuja freqüência é igual ao deslocamento.

Esta propriedade é uma consequência das propriedades de deslocamento em freqüência da senóide complexa. Um deslocamento em freqüência de uma senóide complexa é equivalente à multiplicação da senóide complexa original por uma outra senóide complexa cuja freqüência é igual ao deslocamento. Uma vez que todas as representações de Fourier baseiam-se em senóides complexas, todas elas compartilham desta propriedade, conforme resume a Tabela 3.7. Note que o deslocamento em freqüência deve ter um valor inteiro em ambos os casos da série de Fourier. Isto leva à multiplicação por uma senóide complexa cuja freqüência é um múltiplo inteiro da freqüência fundamental. A outra observação é que a propriedade de deslocamento em freqüência é a “dual” da propriedade de

deslocamento no tempo. Podemos resumir ambas as propriedades estabelecendo que um deslocamento num domínio, ou de freqüência ou de tempo, leva a uma multiplicação por uma senóide complexa no outro domínio.

**TABELA 3.7 Propriedades de Deslocamento em Freqüência das Representações de Fourier**

$$\begin{aligned} e^{j\gamma} x(t) &\xleftarrow{\text{FT}} X(j(\omega - \gamma)) \\ e^{jk_o \omega_o t} x(t) &\xleftarrow{\text{FS; } \omega_o} X[k - k_o] \\ e^{j\Gamma n} x[n] &\xleftarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\Omega - \Gamma)}) \\ e^{jk_o \Omega_o n} x[n] &\xleftarrow{\text{DTFS; } \Omega_o} X[k - k_o] \end{aligned}$$

**EXEMPLO 3.23** Use a propriedade de deslocamento em freqüência para determinar a FT do pulso senoidal complexo.

$$z(t) = \begin{cases} e^{j10t}, & |t| \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

*Solução:* Podemos expressar  $z(t)$  como o produto de uma senoidal complexa,  $e^{j10t}$  por um pulso retangular.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Usando os resultados do Exemplo 3.15, escrevemos

$$x(t) \xleftarrow{\text{FT}} X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega\pi)$$

e usando a propriedade de deslocamento em freqüência

$$e^{j10t} x(t) \xleftarrow{\text{FT}} X(j(\omega - 10))$$

obtemos

$$z(t) \xleftarrow{\text{FT}} \frac{2}{\omega - 10} \sin((\omega - 10)\pi)$$

► **EXERCÍCIO 3.13** Use a propriedade de deslocamento em freqüência para encontrar a DTFT inversa de

$$Z(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{j(\Omega + \pi/4)}}$$

Suponhamos que  $|\alpha| < 1$ .

*Resposta:*

$$z[n] = e^{-j(\pi/4)n} \alpha^n u[n]$$

### ■ PROPRIEDADES DE MUDANÇA DE ESCALA

Consideremos agora o efeito de mudar de escala da variável tempo na representação em domínio de freqüência de um sinal. Iniciando com a FT, admitamos que  $z(t) = x(at)$ . Por definição, temos

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Realize a substituição  $\tau = at$  para obter

$$Z(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

Estas duas integrais podem ser combinadas na integral simples

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Conseqüentemente, a mudança de escala do sinal no tempo introduz uma mudança de escala inversa na representação de domínio de freqüência e uma mudança de escala na amplitude.

Este efeito pode ser experimentado executando-se um som gravado, numa velocidade diferente daquela em que ele foi gravado. Se executarmos o som numa velocidade mais rápida, correspondente a  $a > 1$ , comprimimos o sinal de tempo. A mudança de escala inversa no domínio de freqüência expande a representação de Fourier numa faixa de freqüência mais ampla e explica o aumento na altura (freqüência) percebida do som. Inversamente, executar o som numa velocidade mais lenta corresponde a expandir o sinal de tempo, uma vez que  $0 < a < 1$ . A mudança de escala inversa no domínio de freqüência comprime a representação de Fourier e explica o decréscimo na altura percebida do som.

**EXEMPLO 3.24** Admitamos que  $x(t)$  seja o pulso retangular

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Use a FT de  $x(t)$  e a propriedade de mudança de escala para encontrar a FT do pulso retangular alterado

$$y(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

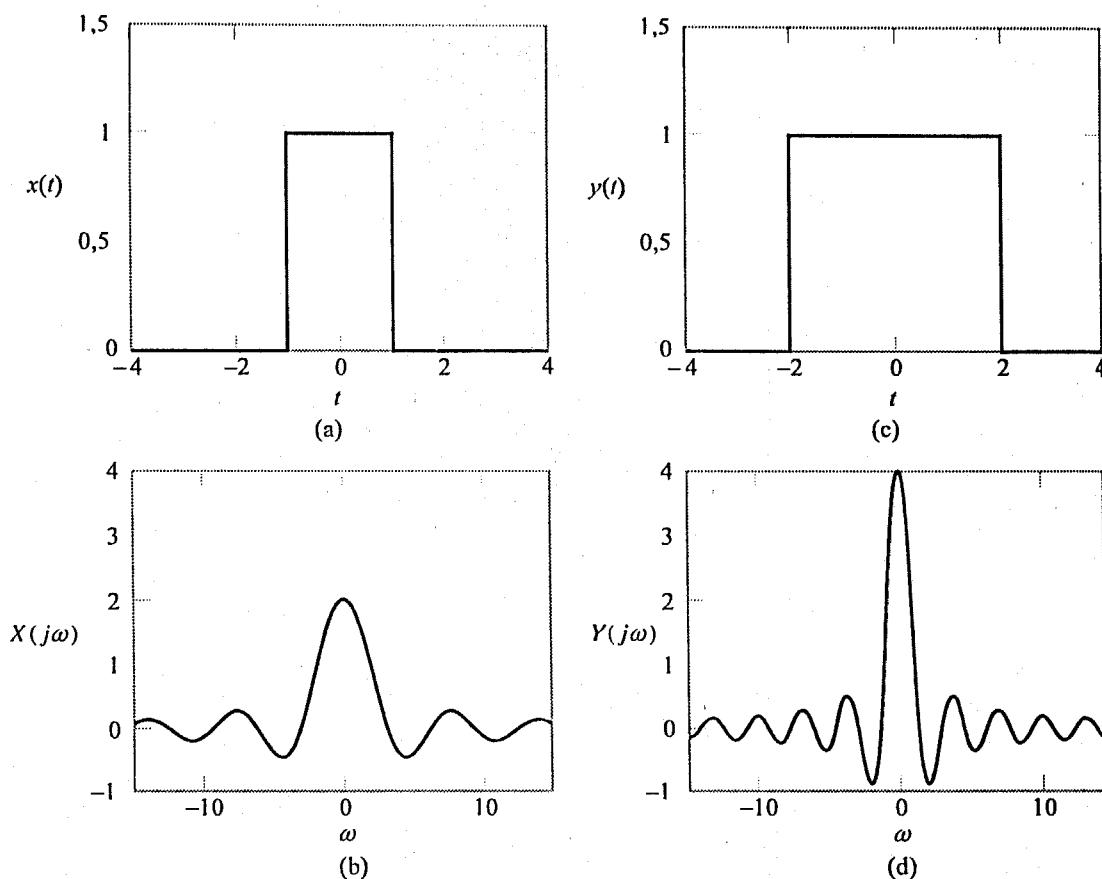
**Solução:** Substituir  $T = 1$  no resultado do Exemplo 3.15 dá

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega)$$

Observe que  $y(t) = x(\frac{1}{2}t)$ . Conseqüentemente, a aplicação da propriedade da mudança de escala na equação (3.32) com  $a = \frac{1}{2}$  dá

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= 2X(j2\omega) \\ &= \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(2\omega) \end{aligned}$$

Esta resposta também pode ser obtida substituindo-se  $T = 2$  no resultado do Exemplo 3.15. A Figura 3.30 ilustra a mudança de escala entre tempo e freqüência que ocorre neste exemplo.



**FIGURA 3.30** Ilustração da propriedade de mudança de escala da FT. (a) Sinal de tempo original. (b) FT original. (c) Sinal de tempo alterado  $y(t) = x(\frac{1}{2}t)$ . (d) FT alterada  $Y(j\omega) = 2X(j2\omega)$ .

Se  $x(t)$  for um sinal periódico,  $z(t) = x(at)$  também será periódico e a FS será a representação de Fourier apropriada. Por conveniência, supomos que  $a$  seja positivo. Neste caso, a mudança de escala modifica o período fundamental do sinal. Se  $x(t)$  tiver período fundamental  $T$ , então  $z(t)$  terá período fundamental  $T/a$ .

Conseqüentemente, se a freqüência fundamental de  $x(t)$  for  $\omega_o$ , a freqüência fundamental de  $z(t)$  será  $a\omega_o$ . Por definição, os coeficientes da FS para  $z(t)$  são dados por

$$Z[k] = \frac{a}{T} \int_{(T/a)} z(t) e^{-jka\omega_o t} dt$$

Substituindo  $x(at)$  em  $z(t)$  e realizando a mudança de variável como no caso da FT, obtemos

$$x(at) = z(t) \xrightarrow{FS: a\omega_o} Z[k] = X[k], \quad a > 0$$

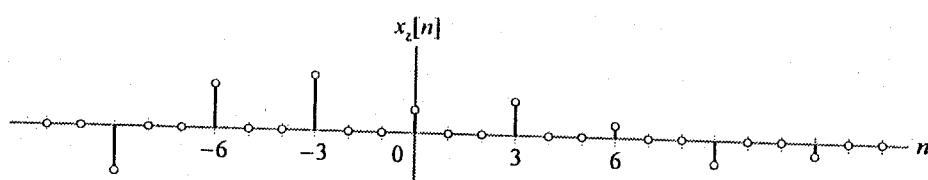
Ou seja, os coeficientes da FS de  $x(t)$  e  $x(at)$  são idênticos; a operação de mudança de escala simplesmente muda o espaçamento harmônico de  $\omega_o$  para  $a\omega_o$ .

A operação de mudança de escala tem um caráter ligeiramente diferente no tempo discreto do que no tempo contínuo. Primeiramente,  $z[n] = x[pn]$  é definido somente para valores inteiros de  $p$ . Segundo, se  $|p| > 1$ , então a operação de mudança de escala descarta informações, uma vez que ela retém somente cada  $p$ -ésimo valor de  $x[n]$ . Esta perda de informação impede que expressemos a DTFT ou a DTFS de  $z[n]$  em termos da DTFT ou DTFS de  $x[n]$  de maneira similar aos resultados de tempo contínuo derivados acima.

Para prosseguir, definimos uma seqüência que é zero, exceto em múltiplos inteiros do parâmetro de mudança de escala  $p$ . Ou seja, admitamos que

$$x_z[n] = 0, \text{ a menos que } \frac{n}{p} \text{ seja inteiro}$$

Um exemplo dessa seqüência é dado na Figura 3.31 para  $p = 3$ .



**FIGURA 3.31** Exemplo de sinal que é zero, exceto em múltiplos do parâmetro de mudança de escala  $p = 3$ .

Se  $x_z[n]$  for não periódico, então a seqüência mudada em escala  $z[n] = x_z[pn]$  também será não periódica e a DTFT será a representação apropriada. Partindo da definição da DTFT, podemos mostrar que

$$Z(e^{j\Omega}) = X_z(e^{j\Omega/p})$$

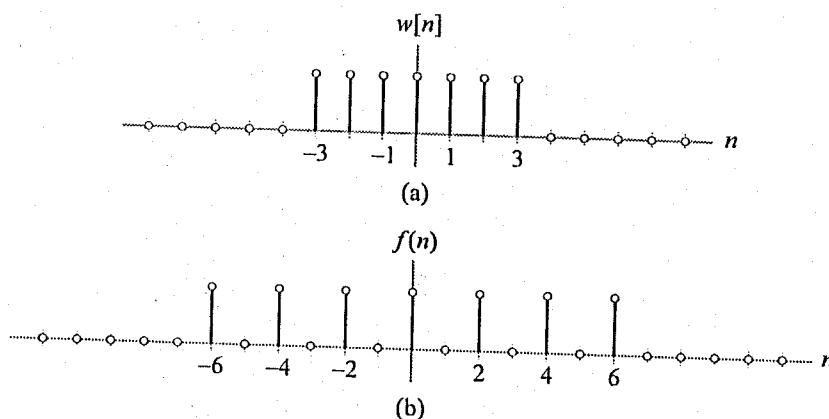
No caso especial de uma reflexão  $p = -1$ , a suposição de zeros nos valores intermediários no sinal de tempo é desnecessária, e temos

$$x[-n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\Omega})$$

► **EXERCÍCIO 3.14** Use a DTFT do sinal  $w[n]$  descrito na Figura 3.32(a) e a propriedade de mudança de escala para determinar a DTFT do sinal  $f[n]$  descrito na Figura 3.32(b).

**Resposta:**

$$F(e^{j\Omega}) = \frac{\sin(7\Omega)}{\sin(\Omega)}$$



**FIGURA 3.32** Exercício 3.14. (a)  $w[n]$ . (b)  $f[n]$ .

Se  $x_z[n]$  for periódico, com período fundamental  $N$ , então  $z[n] = x_z[pn]$  terá período fundamental  $N/p$ . Por conveniência, supomos que  $p$  seja positivo. Observe que  $N$  é sempre um múltiplo inteiro de  $p$  como consequência da definição de  $x_z[n]$  e, dessa forma, o período fundamental de  $z[n]$  sempre será um número inteiro.

Admitamos que  $\Omega_o$  seja a freqüência fundamental de  $x_z[n]$ . Neste caso, teremos

$$x_z[pn] = z[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } p\Omega_o} Z[k] = pX_z[k], \quad p > 0$$

A operação de mudança de escala altera o espaçamento harmônico de  $\Omega_o$  para  $p\Omega_o$  e multiplica os coeficientes da DTFS por  $p$ .

## ■ DIFERENCIACÃO E INTEGRAÇÃO

Diferenciação e integração são operações que se aplicam a funções contínuas. Consequentemente, podemos considerar o efeito da diferenciação e integração com respeito ao tempo para um sinal de tempo contínuo, ou com respeito à freqüência na FT ou DTFT, uma vez que elas são funções contínuas de freqüência. Derivamos as propriedades de integração e diferenciação para diversos destes casos. As operações análogas com valores discretos de se avaliar diferenças e somatório são muito menos comumente usadas e serão discutidas somente de maneira breve.

### *Diferenciação no Tempo*

Consideremos o efeito de diferenciar um sinal não periódico  $x(t)$ . Primeiramente, lembre-se que  $x(t)$  e sua FT,  $X(j\omega)$ , são relacionados por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

A diferenciação de ambos os lados desta equação produz

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

o que implica que

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftarrow{FT} j\omega X(j\omega)$$

Isto é, a diferenciação no tempo corresponde a multiplicar por  $j\omega$  no domínio de freqüência. Esta operação acentua os componentes de alta freqüência do sinal. Observe que a diferenciação destrói qualquer componente dc de  $x(t)$  e, consequentemente, a FT do sinal diferenciado em  $\omega = 0$  é igual a zero.

**EXEMPLO 3.25** A propriedade de diferenciação implica que

$$\frac{d}{dt} (e^{-at} u(t)) \xleftarrow{FT} \frac{j\omega}{a + j\omega}$$

Verifique este resultado diferenciando e encontrando a FT diretamente.

*Solução:* Usando a regra do produto para diferenciação, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-at} u(t)) &= -ae^{-at} u(t) + e^{-at} \delta(t) \\ &= -ae^{-at} u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

Tomando a FT de cada termo e usando a linearidade, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-at} u(t)) &\xleftarrow{FT} \frac{-a}{a + j\omega} + 1 \\ &= \frac{j\omega}{a + j\omega} \end{aligned}$$

Se  $x(t)$  for um sinal periódico, teremos a representação por FS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

A diferenciação de ambos os lados desta equação dá

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]jk\omega_o e^{jk\omega_o t}$$

e, dessa forma, concluímos

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} jk\omega_o X[k]$$

Novamente, a diferenciação força o valor médio do sinal diferenciado a ser zero; por isso, o coeficiente da FS para  $k = 0$  é zero.

**EXEMPLO 3.26** Use a propriedade de diferenciação para encontrar a representação por FS correspondente à onda triangular descrita na Figura 3.33(a).

*Solução:* Defina um forma de onda

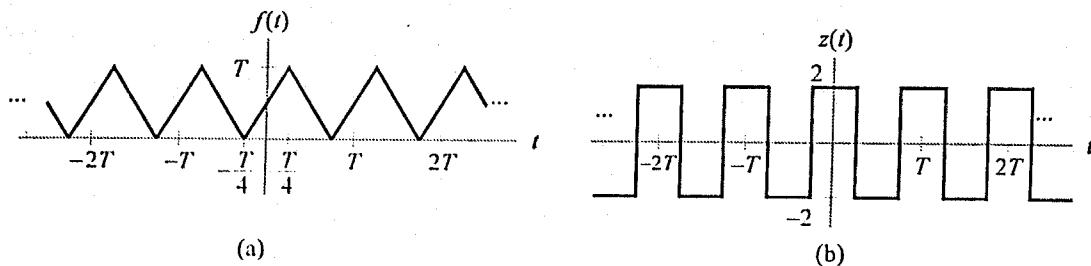
$$z(t) = \frac{d}{dt}f(t)$$

A Figura 3.33(b) ilustra  $z(t)$ . Os coeficientes da FS de uma onda quadrada periódica foram derivados no Exemplo 3.6. O sinal  $z(t)$  corresponde à onda quadrada  $x(t)$  do Exemplo 3.6, desde que subtraímos um termo constante de duas unidades, mudemos a escala da amplitude de  $z(t)$  por um fator de 4, e definamos  $T_s/T = \frac{1}{4}$ . Ou seja,  $z(t) = 4x(t) - 2$ . Dessa forma,  $Z[k] = 4X[k] - 2\delta[k]$ , e podemos escrever

$$z(t) \xrightarrow{FS; \omega_o} Z[k] = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{4 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}$$

A propriedade da diferenciação implica que  $Z[k] = jk\omega_o F[k]$ . Conseqüentemente, podemos determinar  $F[k]$  a partir de  $Z[k]$  já que  $F[k] = (1/jk\omega_o)Z[k]$ , exceto para  $k = 0$ . A quantidade  $F[0]$  é o valor médio de  $x(t)$  e é determinada pela inspeção da Figura 3.33(a) para ser  $T/2 = \pi/\omega_o$ . Portanto,

$$f(t) \xrightarrow{FS; \omega_o} F[k] = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_o}, & k = 0 \\ \frac{4 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{jk^2\pi\omega_o}, & k \neq 0 \end{cases}$$



**FIGURA 3.33** Sinais correspondentes ao Exemplo 3.26. (a) Onda triangular  $f(t)$ . (b) A derivada de  $f(t)$  é a onda quadrada  $z(t)$ .

### Diferenciação em Freqüência

Considere em seguida o efeito de diferenciar a representação em domínio de freqüência de um sinal. Iniciando com a FT,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

diferenciamos ambos os lados desta equação com respeito a  $\omega$ , e obtemos

$$\frac{d}{d\omega} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt$$

o que implica

$$-jtx(t) \xleftarrow{FT} \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

A diferenciação em freqüência corresponde à multiplicação no tempo por  $-jt$ .

**EXEMPLO 3.27** Use as propriedades de diferenciação no tempo e diferenciação em freqüência para determinar a FT do pulso gaussiano, definido por  $g(t) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-t^2/2}$  e descrito na Figura 3.34.

*Solução:* Notamos que a derivada de  $g(t)$  com respeito ao tempo é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t) &= \frac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \\ &= -tg(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

A propriedade de diferenciação no tempo diz que

$$\frac{d}{dt} g(t) \xleftarrow{FT} j\omega G(j\omega)$$

e, dessa forma, a equação (3.33) implica que

$$-tg(t) \xleftarrow{FT} j\omega G(j\omega) \quad (3.34)$$

A propriedade de diferenciação em freqüência, conforme é mostrado por

$$-jtg(t) \xleftarrow{FT} \frac{d}{d\omega} G(j\omega)$$

indica que

$$-tg(t) \xleftarrow{FT} \frac{1}{j} \frac{d}{d\omega} G(j\omega) \quad (3.35)$$

Desde que os lados esquerdos das equações (3.34) e (3.35) são iguais, os lados direitos também devem ser iguais e, dessa forma

$$\frac{d}{d\omega} G(j\omega) = -\omega G(j\omega)$$

Esta é uma descrição por equação diferencial de  $G(j\omega)$  que tem a mesma forma que a descrição por equação diferencial de  $g(t)$  na equação (3.33). Isto implica que a forma funcional de  $G(j\omega)$  é a mesma que a de  $g(t)$  e, dessa forma,

$$G(j\omega) = ce^{-\omega^2/2}$$

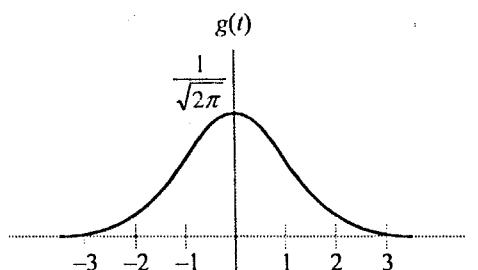


FIGURA 3.34 Pulso gaussiano  $g(t)$ .

A constante  $c$  é determinada observando-se (veja o Apêndice A.4) que

$$\begin{aligned} G(j0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Isto indica que  $c = 1$ , e podemos concluir que um pulso gaussiano é sua própria transformada de Fourier, conforme é mostrado por

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \xleftrightarrow{FT} e^{-\omega^2/2}$$

► **EXERCÍCIO 3.15** Use a propriedade da diferenciação em freqüência para encontrara a FT de

$$x(t) = te^{-at} u(t)$$

**Resposta:**

$$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

A operação de diferenciação não se aplica a quantidades com valores discretos e, dessa forma, uma propriedade de diferenciação no domínio de freqüência para a FS ou DTFS não existe. Entretanto, uma propriedade de diferenciação no domínio de freqüência existe de fato para a DTFT. Por definição,

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

A diferenciação de ambos os lados desta expressão em relação à freqüência leva à propriedade

$$-jn x[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega})$$

### Integração

A operação de integração se aplica somente a variáveis independentes contínuas. Conseqüentemente, podemos integrar com respeito ao tempo tanto na FT como na FS, e com respeito à freqüência na FT e na DTFT. Aqui, limitaremos nossa consideração à integração de sinais não periódicos com respeito ao tempo. Defina

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Ou seja, o valor de  $y$  no instante  $t$  é a integral de  $x$  em todo o tempo antes de  $t$ . Observe que

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

de forma que a propriedade de diferenciação sugeriria

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) \quad (3.36)$$

Esta relação é indeterminada em  $\omega = 0$ , uma consequência da operação de diferenciação destruir qualquer componente dc de  $y(t)$  e implicar que  $X(j0)$  deva ser igual a zero. Por isso, a equação (3.36) se aplica somente a sinais com valor médio nulo, ou seja,  $X(j0) = 0$ .

Em geral, desejamos aplicar a propriedade de integração a sinais que não têm valor médio nulo. Porém, se o valor médio de  $x(\tau)$  não for nulo, é possível que  $y(t)$  não seja integrável ao quadrado e, consequentemente, a FT de  $y(t)$  não convirja. Podemos contornar este problema incluindo impulsos na transformada. Sabemos que a equação (3.36) vale para qualquer  $\omega$  exceto possivelmente para  $\omega = 0$ . O valor em  $\omega = 0$  é modificado adicionando-se um termo  $c\delta(\omega)$ , em que a constante  $c$  depende do valor médio de  $x(\tau)$ . O resultado correto é obtido definindo-se  $c = \pi X(j0)$ . Isto resulta na propriedade de integração:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0)\delta(\omega) \quad (3.37)$$

onde fica subentendido que o primeiro termo no lado direito é zero em  $\omega = 0$ . A integração pode ser vista como uma operação de obtenção da média e, dessa forma, tende a suavizar sinais no tempo. Esta suavização no tempo corresponde a atenuar os componentes de alta freqüência do sinal, conforme indica a equação (3.37) pelo termo  $\omega$  no denominador.

Podemos demonstrar esta propriedade derivando a FT do degrau unitário. O degrau unitário pode ser expresso como a integral da função impulso

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Uma vez que  $\delta(t) \xleftarrow{FT} 1$ , a equação (3.37) sugere que

$$u(t) \xleftarrow{FT} U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Verifiquemos este resultado derivando independentemente  $U(j\omega)$ . Primeiramente, expresse o degrau unitário como a soma de duas funções

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

em que a função *signum* (sinal),  $\operatorname{sgn}(t)$ , é definida como

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Esta representação é ilustrada na Figura 3.35. Usando os resultados do Exemplo 3.18, temos  $\frac{1}{2} \xleftarrow{FT} \pi\delta(\omega)$ . A transformada de  $\operatorname{sgn}(t)$  é derivada usando-se a propriedade de diferenciação. Admitamos que  $\operatorname{sgn}(t) \xleftarrow{FT} S(j\omega)$ . Teremos

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

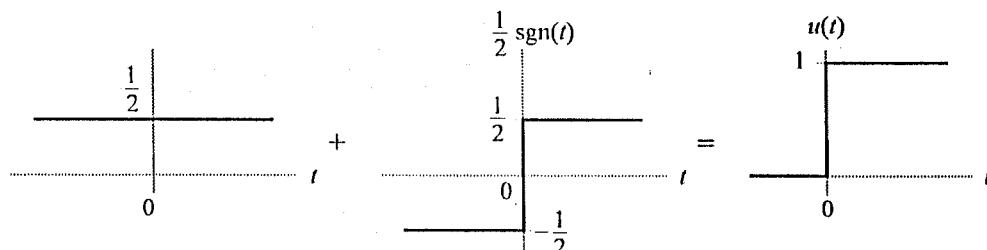


FIGURA 3.35 Representação da função degrau como a soma de uma constante e uma função signum.

Conseqüentemente,

$$j\omega S(j\omega) = 2$$

Sabemos que  $S(j0) = 0$  porque  $\text{sgn}(t)$  é uma função ímpar e, dessa forma, tem valor médio nulo. Este dado remove a indeterminação em  $\omega = 0$  associada com a propriedade de diferenciação, e concluímos que

$$S(j\omega) = \begin{cases} 2/j\omega, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

É comum escrevermos isto como  $S(j\omega) = 2/j\omega$ , com o entendimento de que  $S(j0) = 0$ . Agora usamos a linearidade para obter a FT de  $u(t)$  como

$$u(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Isto concorda exatamente com a transformada da função degrau obtida usando-se a propriedade de integração.

### *Somatório e Diferença*

O análogo em tempo discreto da integração é o somatório: ou seja, definimos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

O análogo em tempo discreto da diferenciação é a diferença. A operação de diferença recupera  $x[n]$  de  $y[n]$ , conforme é mostrado por

$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$

Isto resulta na propriedade de diferença, supondo que  $x[k]$  seja não periódico, conforme é mostrado por

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega}) = (1 - e^{-j\Omega})Y(e^{j\Omega})$$

Podemos inverter esta equação para expressar  $Y(e^{j\Omega})$  como uma função de  $X(e^{j\Omega})$ ; entretanto, não podemos determinar  $Y(e^{j\Omega})$ . Como acontece com a propriedade da integração, podemos adicionar um impulso para obter um valor médio diferente de zero em  $x[k]$  e obtermos a propriedade de somatório como

$$y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\Omega}) = \frac{X(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(e^{j0})\delta(\Omega), \quad -\pi < \Omega \leq \pi$$

em que se presume que o primeiro termo  $Y(e^{j\Omega})$  é igual a zero para  $\Omega = 0$ . A quantidade  $Y(e^{j\Omega})$  tem período  $2\pi$ , e, dessa forma, podemos expressar alternativamente esta propriedade para todos os valores de  $\Omega$  como

$$y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\Omega}) = \frac{X(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$$

A Tabela 3.8 resume as propriedades de diferenciação, integração e somatório das representações de Fourier.

**TABELA 3.8 Propriedades de Diferenciação, Integração e Somatório Comumente Usadas**

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{FT} j\omega X(j\omega) \\
 & \frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{FS; \omega_n} jk\omega X[k] \\
 & -jtx(t) \xrightarrow{FT} \frac{d}{d\omega} X(j\omega) \\
 & -jnx[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega}) \\
 & \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0)\delta(\omega) \\
 & \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{DTFT} \frac{X(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)
 \end{aligned}$$

**EXEMPLO 3.28** Este exemplo ilustra o uso de múltiplas propriedades da representação de Fourier. Encontre  $x(t)$  se

$$X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{e^{j2\omega}}{1 + j\omega/3} \right\}$$

**Solução:** Identificamos três diferentes propriedades que podem ser úteis para encontrar  $x(t)$ : diferenciação em frequência, deslocamento no tempo e mudança de escala. Estas, devem ser aplicadas na ordem apropriada para obtermos o resultado correto. Use o par de transformadas

$$s(t) = e^{-t} u(t) \xrightarrow{FT} S(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

para expressar  $X(j\omega)$  como

$$X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left\{ e^{j2\omega} S\left(j \frac{\omega}{3}\right) \right\}$$

Executando a propriedade mais interna primeiro, mudamos de escala, depois deslocamos no tempo e, por fim, aplicamos a propriedade de diferenciação. Se definirmos  $Y(j\omega) = S(j\omega/3)$ , a propriedade de mudança de escala dará

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 3s(3t) \\
 &= 3e^{-3t} u(3t) \\
 &= 3e^{-3t} u(t)
 \end{aligned}$$

Definimos agora  $W(j\omega) = e^{j2\omega} Y(j\omega)$  e aplicamos a propriedade de deslocamento no tempo para obter

$$\begin{aligned}
 w(t) &= y(t+2) \\
 &= 3e^{-3(t+2)} u(t+2)
 \end{aligned}$$

Por fim, desde que

$$X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} W(j\omega)$$

a propriedade de diferenciação produz

$$\begin{aligned}
 x(t) &= tw(t) \\
 &= 3te^{-3(t+2)} u(t+2)
 \end{aligned}$$

► EXERCÍCIO 3.16 Mostre que a DTFT de

$$x[n] = n e^{j(\pi/8)n} \alpha^{n-3} u[n-3]$$

é

$$X(e^{j\Omega}) = j \frac{d}{d\Omega} \left\{ \frac{e^{-j3(\Omega-\pi/8)}}{1 - \alpha e^{-j(\Omega-\pi/8)}} \right\}$$

### ■ PROPRIEDADES DE CONVOLUÇÃO E MODULAÇÃO

Duas das propriedades mais importantes das representações de Fourier são as propriedades de convolução e modulação. Uma forma importante de *modulação* refere-se à multiplicação de dois sinais; um dos sinais muda ou “modula” a amplitude do outro. Mostraremos que a convolução no domínio de tempo é transformada em modulação no domínio de freqüência, e que a modulação no domínio de tempo é transformada em convolução no domínio de freqüência. Conseqüentemente, podemos analisar o comportamento de entrada e saída de um sistema linear no domínio de freqüência usando multiplicação de transformadas ao invés de fazer a convolução dos sinais de tempo. Isto pode simplificar significativamente a análise do sistema e proporciona considerável *insight* sobre o comportamento do sistema. Tanto a propriedade de convolução como a de modulação são uma consequência de senóides complexas serem autofunções de sistemas LTI. Apresentaremos agora estas propriedades, correspondentes a cada uma das quatro representações de Fourier, iniciando com sinais não periódicos.

#### *Convolução Não Periódica*

Considere a convolução de dois sinais de tempo contínuo não periódicos  $x(t)$  e  $h(t)$ . Defina

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Expresse agora  $x(t-\tau)$  em termos de sua FT, conforme é mostrado por

$$x(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

Substitua esta expressão na integral de convolução para obter

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Reconhecemos a integral interna em  $\tau$  como a FT de  $h(\tau)$ , ou  $H(j\omega)$ . Daí,  $y(t)$  pode ser reescrito como

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

de forma que  $y(t)$  é a FT inversa de  $H(j\omega)X(j\omega)$ . Concluímos que a convolução de sinais no tempo corresponde à multiplicação de transformadas no domínio de freqüência, como é descrito por

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (3.38)$$

Os exemplos seguintes ilustram aplicações desta propriedade.

**EXEMPLO 3.29** Admitamos que  $x(t) = (1/\pi t) \operatorname{sen}(2\pi t)$  e  $h(t) = (1/\pi t) \operatorname{sen}(2\pi t)$ . Encontre  $y(t) = x(t) * h(t)$ .

**Solução:** Este problema é extremamente difícil de resolver no domínio de tempo. Porém, é simples de resolver no domínio de freqüência usando-se a propriedade da convolução. Temos

$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$h(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desde que  $y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\text{FT}} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$ , temos

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e concluímos que  $y(t) = (1/\pi t) \operatorname{sen}(\pi t)$ .

**EXEMPLO 3.30** Use a propriedade de convolução para encontrar  $x(t)$ , em que

$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = \frac{4}{\omega^2} \operatorname{sen}^2(\omega)$$

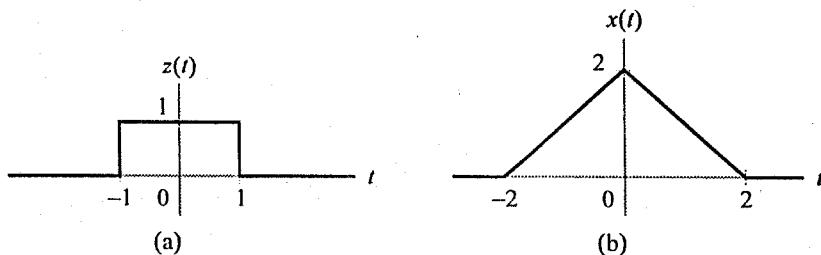
**Solução:** Podemos escrever  $X(j\omega)$  como o produto  $Z(j\omega)Z(j\omega)$ , em que

$$Z(j\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega)$$

A propriedade de convolução afirma que  $z(t) * z(t) \xrightarrow{\text{FT}} Z(j\omega)Z(j\omega)$ , de forma que  $x(t) = z(t) * z(t)$ . Temos

$$z(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \xrightarrow{\text{FT}} Z(j\omega)$$

conforme é descrito na Figura 3.36(a). Realizar a convolução de  $z(t)$  consigo mesma resulta na forma de onda triangular descrita na Figura 3.36(b) como a solução para  $x(t)$ .



**FIGURA 3.36** Sinais do Exemplo 3.30. (a) Pulso retangular  $z(t)$ . (b) A convolução de  $z(t)$  consigo mesma resulta em  $x(t)$ .

► **EXERCÍCIO 3.17** Admitamos que a entrada num sistema com resposta ao impulso  $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$  seja  $x(t) = 3e^{-t}u(t)$ . Use a propriedade de convolução para encontrar a saída do sistema,  $y(t)$ .

**Resposta:**

$$y(t) = 6e^{-t}u(t) - 6e^{-2t}u(t)$$

Uma propriedade similar vale para a convolução de sinais não periódicos de tempo discreto. Se  $x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega})$  e  $h[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\Omega})$ , então

$$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) \quad (3.39)$$

A prova deste resultado se compara de perto com a do caso de tempo contínuo.

**EXEMPLO 3.31** Reconsideremos o problema tratado no Exemplo 2.12. Neste problema, um sinal distorcido recebido,  $y[n]$ , é expresso em termos de um sinal transmitido,  $x[n]$ , como

$$y[n] = x[n] + ax[n-1], \quad |a| < 1$$

Encontre a resposta ao impulso de um sistema inverso que recupere  $x[n]$  de  $y[n]$ .

**Solução:** No Exemplo 2.12, resolvemos este problema usando convolução. Nós o resolveremos agora no domínio de freqüência usando a propriedade de convolução. Escrevemos a saída como a convolução da entrada com a resposta ao impulso do sistema como  $y[n] = x[n] * h[n]$ , em que a resposta ao impulso  $h[n]$  é dada por

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a, & n = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A resposta ao impulso de um sistema inverso,  $h^{-1}[n]$ , deve satisfazer

$$h^{-1}[n] * h[n] = \delta[n]$$

Tomando a DTFT de ambos os lados desta equação e usando a propriedade de convolução resulta em

$$H^{-1}(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) = 1$$

o que implica que a resposta em freqüência do sistema inverso é dada por

$$H^{-1}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{H(e^{j\Omega})}$$

A substituição de  $h[n]$  na definição da DTFT produz

$$h[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\Omega}) = 1 + ae^{-j\Omega}$$

Conseqüentemente,

$$H^{-1}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 + ae^{-j\Omega}}$$

Tomar a DTFT inversa de  $H^{-1}(e^{j\Omega})$  produz a resposta ao impulso do sistema inverso

$$h^{-1}[n] = (-a)^n u[n]$$

► **EXERCÍCIO 3.18** Admitamos que a resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto seja dada por  $h[n] = (1/\pi n) \operatorname{sen}((\pi/4)n)$ . Encontre a saída  $y[n]$  em resposta à entrada (a)  $x[n] = (1/\pi n) \operatorname{sen}((\pi/8)n)$ , e (b)  $x[n] = (1/\pi n) \operatorname{sen}((\pi/2)n)$ .

**Resposta:**

$$(a) \quad y[n] = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}n\right)$$

$$(b) \quad y[n] = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

### Modulação

Se  $x(t)$  e  $z(t)$  forem sinais não periódicos, desejamos expressar a FT do produto  $y(t) = x(t)z(t)$  em termos da FT de  $x(t)$  e  $z(t)$ . Represente  $x(t)$  e  $z(t)$  em termos de suas FTs como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) e^{j\nu t} d\nu$$

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\eta) e^{j\eta t} d\eta$$

O termo produto,  $y(t)$ , pode então ser escrito na forma

$$y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(jv) Z(j\eta) e^{j(\eta+v)t} d\eta dv$$

Executamos agora uma mudança de variável em  $\eta = \omega - v$ , para obter

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jv) Z(j(\omega - v)) dv e^{j\omega t} d\omega$$

A integral interna em  $v$  representa a convolução de  $Z(j\omega)$  e  $X(j\omega)$ , enquanto a integral externa em  $\omega$  está na forma da representação de Fourier para  $y(t)$ . Conseqüentemente, identificamos esta convolução, mudada em escala por  $1/2\pi$ , como  $Y(j\omega)$ , mostrada por

$$y(t) = x(t)z(t) \xleftarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega) \quad (3.40)$$

em que

$$X(j\omega) * Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jv) Z(j(\omega - v)) dv$$

A multiplicação no domínio de tempo leva à convolução no domínio de freqüência.

Similarmente, se  $x[n]$  e  $z[n]$  forem sinais não periódicos de tempo discreto, a DTFT do produto  $y[n] = x[n]z[n]$  será dada pela convolução de  $X(e^{j\Omega})$  e  $Z(e^{j\Omega})$ , não obstante a definição de convolução modificar-se ligeiramente porque  $X(e^{j\Omega})$  e  $Z(e^{j\Omega})$  são periódicos. Especificamente,

$$y[n] = x[n]z[n] \xleftarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast Z(e^{j\Omega}) \quad (3.41)$$

em que o símbolo  $\circledast$  denota convolução periódica. A diferença entre convolução periódica e não periódica é que a integração numa convolução periódica é executada ao longo de um único período do sinal envolvido, ao passo que no caso não periódico ela é executada ao longo do intervalo inteiro. Aqui,  $X(e^{j\Omega})$  e  $Z(e^{j\Omega})$  têm período  $2\pi$ ; deste modo, avaliamos a convolução ao longo de um intervalo de  $2\pi$ , como é mostrado por

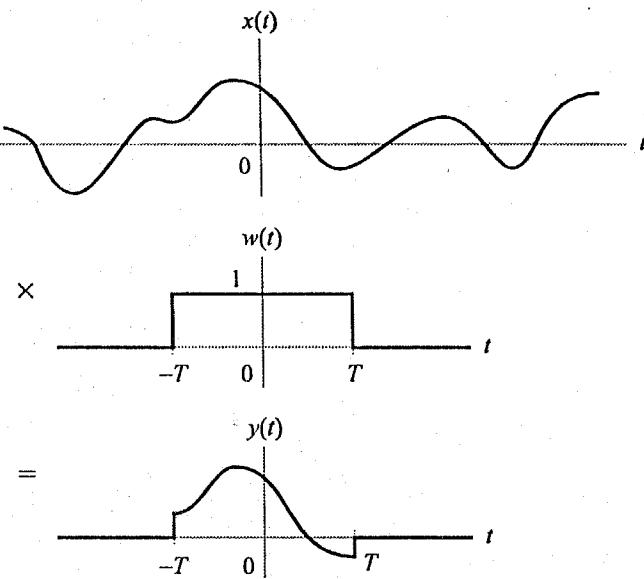
$$X(e^{j\Omega}) \circledast Z(e^{j\Omega}) = \int_{(2\pi)} X(e^{j\theta}) Z(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

Uma aplicação importante da propriedade de modulação é entender os efeitos do truncamento de um sinal em sua representação de freqüência de domínio. O processo de truncar um sinal também é conhecido como ajanelamento (*windowing*), uma vez que corresponde a visualizar o sinal através de uma janela. A parte de um sinal que não é visível através da janela é truncado. A operação de ajanelamento é representada matematicamente multiplicando-se o sinal, digamos,  $x(t)$ , por uma função janela  $w(t)$  que é igual a zero fora da faixa de tempo de interesse. Denotando o sinal resultante do ajanelamento por  $y(t)$ , temos  $y(t) = x(t)w(t)$ . Esta operação é ilustrada na Figura 3.37 para uma função janela que trunca  $x(t)$  no intervalo de tempo  $-T < t < T$ . A FT de  $y(t)$  relaciona-se com as FTs de  $x(t)$  e  $w(t)$  através da propriedade de modulação:

$$y(t) \xleftarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * W(j\omega)$$

Se  $w(t)$  for a janela retangular descrita na Figura 3.37, então

$$W(j\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega T)$$

FIGURA 3.37 Truncamento de um sinal usando uma função janela  $w(t)$ .

A Figura 3.38 ilustra o efeito de se ajanelar com uma janela retangular no domínio de freqüência. O efeito geral da janela é suavizar detalhes em  $X(j\omega)$  e introduzir oscilações próximo das descontinuidades em  $X(j\omega)$ . A suavização é uma consequência da largura  $2\pi/T$  do lóbulo principal de  $W(j\omega)$ , ao passo que as oscilações são devidas às oscilações nos lóbulos laterais de  $W(j\omega)$ . O exemplo seguinte ilustra o efeito da operação de se ajanelar a resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto ideal.

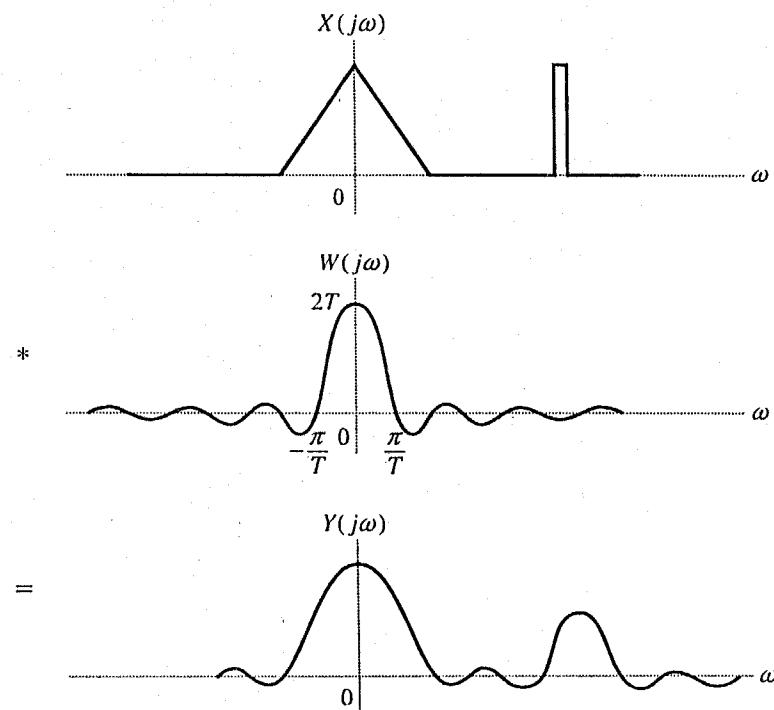


FIGURA 3.38 Convolução de FTs de sinal e de janela resultantes do truncamento no tempo.

**EXEMPLO 3.32** A resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  de um sistema de tempo discreto ideal é descrita na Figura 3.39(a). Descreva a resposta em freqüência de um sistema cuja resposta ao impulso é a resposta ideal ao impulso truncada no intervalo  $-M \leq n \leq M$ .

**Solução:** A resposta ideal ao impulso é a DTFT inversa de  $H(e^{j\Omega})$ , conforme é mostrado por

$$h[n] = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Esta resposta tem extensão infinita. Admitamos que  $h_t[n]$  seja a resposta ao impulso truncada,

$$h_t[n] = \begin{cases} h[n], & |n| \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos expressar  $h_t[n]$  como o produto de  $h[n]$  por uma função janela  $w[n]$ ,  $h_t[n] = h[n]w[n]$ , em que

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Admitimos  $h_t[n] \xleftarrow{\text{DTFT}} H_t(e^{j\Omega})$ , e usamos a propriedade de modulação para obter

$$H_t(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})W(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

Escolhemos o intervalo  $2\pi$  de integração para que seja  $-\pi < \theta < \pi$ . Usamos agora

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\theta| < \pi \end{cases}$$

e

$$W(e^{j(\Omega-\theta)}) = \frac{\operatorname{sen}\left((\Omega-\theta)\frac{2M+1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\theta}{2}\right)}$$

para obtermos

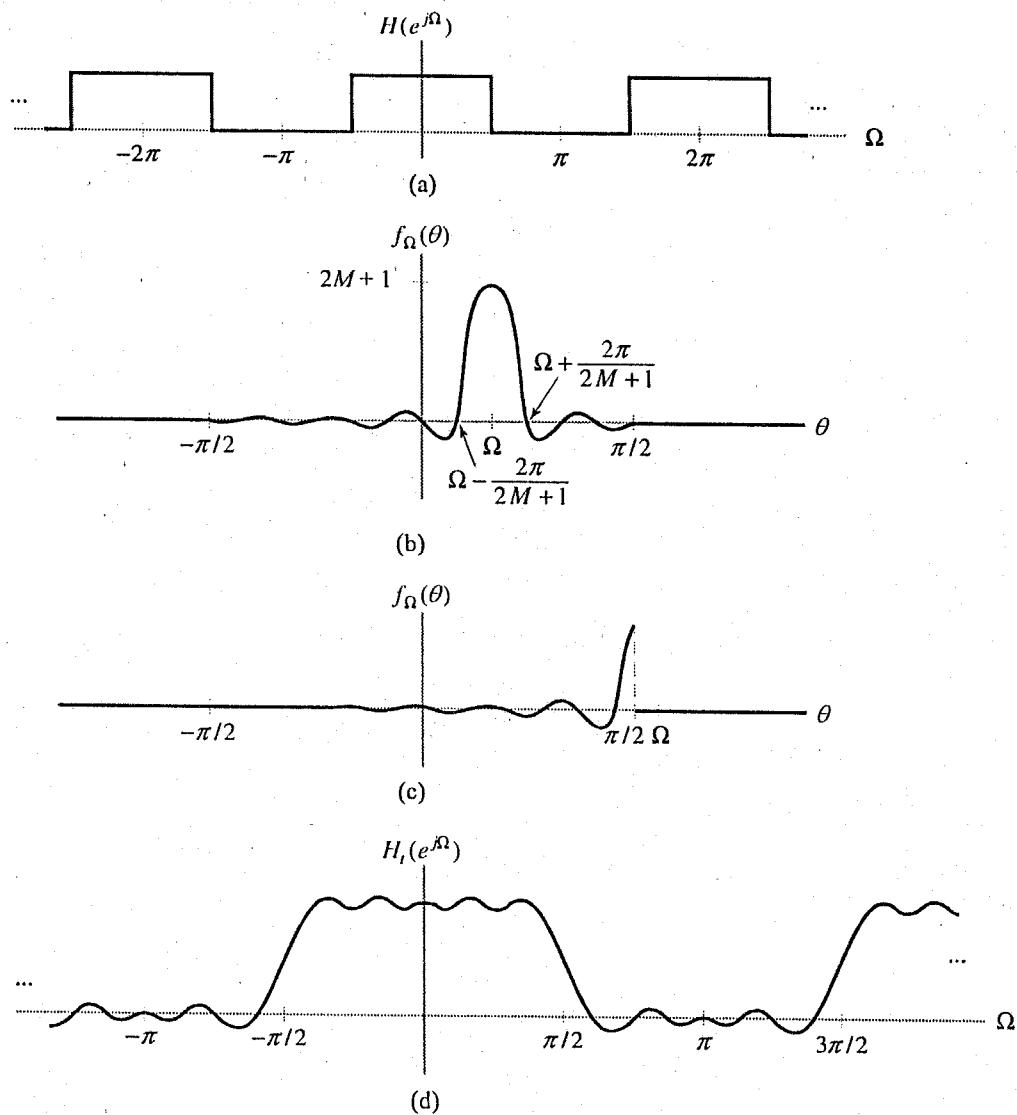
$$H_t(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\Omega(\theta) d\theta$$

onde definimos

$$f_\Omega(\theta) = \begin{cases} W(e^{j(\Omega-\theta)}), & |\theta| < \pi/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 3.39(b) descreve  $f_\Omega(\theta)$  para  $\Omega < \pi/2$ .  $H_t(e^{j\Omega})$  é a área sob  $f_\Omega(\theta)$  entre  $\theta = -\pi/2$  e  $\theta = \pi/2$ . Para visualizar o comportamento de  $H_t(e^{j\Omega})$ , considere a área sob  $f_\Omega(\theta)$  quando  $\Omega$  cresce, iniciando em  $\Omega = 0$ . À medida que  $\Omega$  cresce, as pequenas oscilações em  $f_\Omega(\theta)$  ultrapassam o limite em  $\theta = \pi/2$ . Quando uma oscilação positiva ultrapassa o limite, a área líquida sob  $f_\Omega(\theta)$  decresce; a área líquida se eleva quando uma oscilação negativa ultrapassa essa fronteira. As oscilações também ultrapassam a fronteira em  $\theta = -\pi/2$ . Entretanto, elas são menores do que as do lado direito porque estão mais distantes de  $\Omega$  e, dessa forma, têm um efeito muito menor. O efeito das oscilações em  $f_\Omega(\theta)$  que ultrapassam a fronteira em  $\theta = \pi/2$  é introduzir oscilações em  $H_t(e^{j\Omega})$ . Estas crescem em tamanho à medida que  $\Omega$  cresce. Quando  $\Omega$  se aproxima de  $\pi/2$ , a área sob  $f_\Omega(\theta)$  decresce rapidamente porque o lóbulo principal passa por  $\theta = \pi/2$ . A Figura 3.39(c) descreve  $f_\Omega(\theta)$  para  $\Omega$  ligeiramente maior do que  $\pi/2$ . À medida que  $\Omega$  continua a crescer, as oscilações à esquerda do lóbulo principal passam pela fronteira em  $\theta = \pi/2$ , provocando oscilações adicionais na área sob  $f_\Omega(\theta)$ . Porém, agora a área líquida oscila próximo a zero porque o lóbulo principal de  $f_\Omega(\theta)$  não está mais incluído.

Dessa forma,  $H_t(e^{j\Omega})$  assume a forma descrita na Figura 3.39(d). O truncamento da resposta ideal ao impulso introduz ondulações na resposta em freqüência e amplia as transições em  $\Omega = \pm\pi/2$ . Estes efeitos se diminuem à medida que  $M$  cresce, uma vez que, então, o lóbulo principal de  $W(e^{j\Omega})$  torna-se mais estreito e as oscilações decaem mais rapidamente.

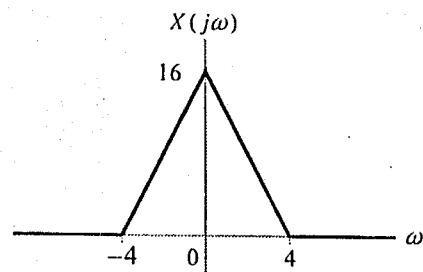


**FIGURA 3.39** Efeito do truncamento da resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto. (a) Resposta em frequência de um sistema ideal. (b)  $f_\Omega(\theta)$  para  $\Omega$  próximo de zero. (c)  $f_\Omega(\theta)$  para  $\Omega$  ligeiramente maior do que  $\pi/2$ . (d) Resposta em frequência de um sistema com resposta ao impulso truncada.

► **EXERCÍCIO 3.19** Use a propriedade de modulação para encontrar a FT de

$$x(t) = \frac{4}{\pi^2 t^2} \sin^2(2t)$$

**Resposta:** Veja a Figura 3.40. ▲



**FIGURA 3.40** Solução para o Exercício 3.19

### Convolução e Modulação para Sinais que São Periódicos no Tempo

Esta subseção trata das propriedades de convolução e modulação para sinais que são funções periódicas do tempo. A convolução de sinais periódicos não ocorre naturalmente no contexto do cálculo das relações de entrada e saída de sinais, uma vez que qualquer sistema com uma resposta ao impulso periódica é instável. Porém, a convolução de sinais periódicos é uma ferramenta útil de análise e manipulação de sinais. Já encontramos um exemplo de convolução periódica na propriedade da modulação da DTFT.

Defina a convolução periódica de dois sinais de tempo contínuo  $x(t)$  e  $z(t)$ , tendo cada um o período  $T$  como

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \circledast z(t) \\ &= \int_{(T)} x(\tau)z(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Aqui, novamente, o símbolo  $\circledast$  denota que a integração é executada durante um único período dos sinais envolvidos.  $y(t)$  também é periódico, com período  $T$ ; consequentemente, a FS é a representação apropriada para todos os três sinais,  $x(t)$ ,  $z(t)$  e  $y(t)$ .

A substituição da representação por FS em  $z(t)$  na integração de convolução leva à propriedade

$$y(t) = x(t) \circledast z(t) \xleftarrow{FS: 2\pi/T} Y[k] = TX[k]Z[k] \quad (3.42)$$

Novamente, vemos que a convolução no tempo transforma-se na multiplicação das representações em domínio de freqüência. Esta propriedade explica a origem do fenômeno de Gibbs que foi observado no Exemplo 3.7. Uma aproximação por soma parcial para a representação por FS de  $x(t)$  pode ser obtida usando-se os coeficientes  $Y[k]$  da FS dados pelo produto de  $X[k]$  por uma função  $Z[k]$  que seja igual a 1 para  $-J \leq k \leq J$  e zero, caso contrário. No domínio de tempo,  $y(t)$  é a convolução periódica de  $x(t)$  e  $z(t)$ , em que

$$z(t) = \frac{\sin\left(t \frac{2J+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

O sinal  $z(t)$  corresponde exatamente ao  $X(e^{j\Omega})$  descrito na Figura 3.19(b) se substituirmos  $\Omega$  por  $t$  e  $M$  por  $J$ . A convolução periódica de  $x(t)$  e  $z(t)$  é a área sob as versões deslocadas de  $z(t)$  em  $|t| < \frac{1}{2}$ . As ondulações na aproximação de soma parcial de  $x(t)$  são uma consequência das variações nesta área, associadas com o deslocamento dos lóbulos laterais de  $z(t)$  para dentro e para fora do intervalo  $|t| < \frac{1}{2}$ .

A convolução de tempo discreto de duas seqüências  $x[n]$  e  $z[n]$  com período  $N$  é definida como

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] \circledast z[n] \\ &= \sum_{k=(N)} x[k]z[n-k] \end{aligned}$$

Esta é a convolução periódica de  $x[n]$  e  $z[n]$ . O sinal  $y[n]$  tem período  $N$ , de forma que a DTFS é a representação apropriada de todos os três sinais,  $x[n]$ ,  $z[n]$  e  $y[n]$ . A substituição da representação por DTFS em  $z[n]$  resulta na propriedade

$$y[n] = x[n] \circledast z[n] \xleftarrow{DTFS: 2\pi/N} Y[k] = NX[k]Z[k] \quad (3.43)$$

A convolução de sinais de tempo é transformada na multiplicação dos coeficientes da DTFS.

A propriedade de modulação de sinais periódicos também é análoga à de sinais não-periódicos. A multiplicação de sinais de tempo periódicos também corresponde à convolução das representações de Fourier. Especificamente, em tempo contínuo, temos

$$y(t) = x(t)z(t) \xleftarrow{FS: 2\pi/T} Y[k] = X[k] * Z[k] \quad (3.44)$$

em que

$$X[k] * Z[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Z[k-m]$$

é a convolução não periódica dos coeficientes da FS. Todos os três sinais em domínio de tempo têm um período fundamental comum,  $T$ . Em tempo discreto

$$y[n] = x[n]z[n] \xrightarrow{DTFS: 2\pi/N} Y[k] = X[k] \oplus Z[k] \quad (3.45)$$

em que

$$X[k] \oplus Z[k] = \sum_{m=0}^{N-1} X[m]Z[k-m]$$

é a convolução periódica dos coeficientes da DTFS. Novamente, todos os três sinais em domínio de tempo têm um período fundamental comum,  $N$ .

**EXEMPLO 3.33** Avalie a convolução periódica do sinal senoidal

$$x(t) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t)$$

com a onda quadrada,  $z(t)$ , com período  $T$  descrita na Figura 3.41.

**Solução:** Tanto  $x(t)$  como  $z(t)$  têm período fundamental  $T = 1$ . Admitamos que  $y(t) = x(t) \otimes z(t)$ . A propriedade de convolução indica que  $y(t) \xrightarrow{FS: 2\pi} Y[k] = X[k]Z[k]$ . A representação por FS para  $x(t)$  tem coeficientes

$$X[k] = \begin{cases} 1, & k = \pm 1 \\ 1/2, & k = 2 \\ -1/2, & k = -2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os coeficientes da FS para  $z(t)$  podem ser obtidos do Exemplo 3.6 como

$$Z[k] = \frac{2 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k2\pi}$$

Conseqüentemente, os coeficientes da FS para  $y(t)$  são

$$Y[k] = \begin{cases} 1/\pi, & k = \pm 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

o que implica

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \cos(2\pi t)$$

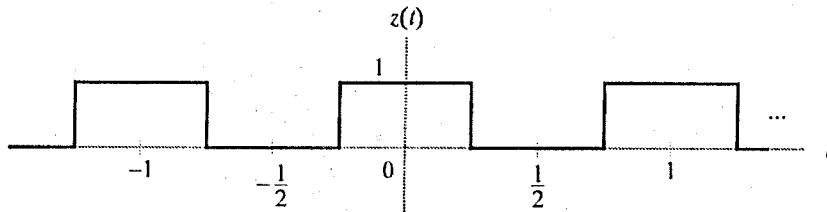


FIGURA 3.41 Onda quadrada do Exemplo 3.33.

As propriedades de convolução e modulação estão resumidas na Tabela 3.9 para todas as quatro representações de Fourier. Em geral, a convolução num domínio corresponde à multiplicação ou modulação no outro domínio. A convolução periódica é usada para sinais periódicos, e a convolução não periódica é usada para sinais não periódicos.

Ainda não consideramos diversos casos importantes de convolução e modulação que ocorrem quando há uma associação de classes de sinais. Os exemplos incluem a modulação de um sinal não periódico com um sinal periódico e a convolução de um sinal periódico e um não periódico, como o que ocorre quando se aplica um sinal periódico a um sistema linear. As propriedades derivadas aqui podem ser aplicadas a estes casos se usarmos a representação de transformada de Fourier para sinais periódicos. Esta representação será desenvolvida no Capítulo 4.

**TABELA 3.9 Propriedades de Convolução e Modulação**

Convolução	Modulação
$x(t) * z(t) \xleftarrow{FT} X(j\omega)Z(j\omega)$	$x(t)z(t) \xleftarrow{FT} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$
$x(t) \oplus z(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} TX[k]Z[k]$	$x(t)z(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} X[k] * Z[k]$
$x[n] * z[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})Z(e^{j\Omega})$	$x[n]z[n] \xleftarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \oplus Z(e^{j\Omega})$
$x[n] \oplus z[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} NX[k]Z[k]$	$x[n]z[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} X[k] \oplus Z[k]$

**EXEMPLO 3.34** Encontre a FT do sinal

$$x(t) = \frac{d}{dt} \{(e^{-3t}u(t)) * (e^{-2t}u(t-2))\}$$

*Solução:* Primeiramente, dividimos o problema numa série de problemas mais simples. Digamos que  $w(t) = e^{-3t}u(t)$  e  $v(t) = e^{-2t}u(t-2)$ , de forma que podemos escrever

$$x(t) = \frac{d}{dt} \{w(t) * v(t)\}$$

Conseqüentemente, aplicando as propriedades da diferenciação e da convolução, obtemos

$$X(j\omega) = j\omega W(j\omega)V(j\omega)$$

O par de transformadas

$$e^{-at}u(t) \xleftarrow{FT} \frac{1}{a+j\omega}$$

Implica

$$W(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$$

Usamos o mesmo par de transformadas e a propriedade de deslocamento de tempo para encontrar  $V(j\omega)$  escrevendo primeiro

$$v(t) = e^{-4}e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

Dessa forma

$$V(j\omega) = \frac{e^{-4}e^{-j2\omega}}{2+j\omega}$$

e

$$X(j\omega) = e^{-4} \frac{j\omega e^{-j2\omega}}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

► EXERCÍCIO 3.20 Encontre  $x[n]$ 

$$X(e^{j\Omega}) = \left( \frac{e^{-j3\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \right) \otimes \left( \frac{\sin(21\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right)$$

**Resposta:**

$$x[n] = 2\pi(-\frac{1}{2})^{n-3}(u[n-3] - u[n-11])$$

## ■ RELAÇÕES DE PARSEVAL

As relações de Parseval afirmam que a energia ou potência na representação de domínio de tempo de um sinal é igual à energia ou potência na representação de domínio de freqüência. Conseqüentemente, a energia ou potência é conservada na representação de Fourier. Derivaremos este resultado para a FT e simplesmente o enunciamos para os outros três estados.

A energia num sinal não periódico de tempo contínuo é

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

em que se supõe que  $x(t)$  pode ter um valor complexo, em geral. Note que  $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$  e que  $x^*(t)$  é expresso em termos de sua FT  $X(j\omega)$  como

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega$$

Substitua isto na expressão para  $E_x$  para obter

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega dt$$

Agora permute a ordem de integração

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right\} d\omega$$

Observando que o termo entre chaves é a FT de  $x(t)$ , obtemos

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)X(j\omega) d\omega$$

e, deste modo, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.46)$$

Conseqüentemente, a energia na representação em domínio de tempo é igual à energia na representação de domínio de freqüência normalizada por  $2\pi$ . A quantidade  $|X(j\omega)|^2$  é denominada *espectro de energia* do sinal. A equação 3.46 também é chamada teorema da energia de Rayleigh.

Resultados análogos valem para as outras três representações de Fourier, conforme está resumido na Tabela 3.10. A energia ou potência na representação de domínio de tempo é igual à energia ou potência na representação de domínio de freqüência. A energia é usada para sinais de domínio de tempo não periódicos, enquanto que a potência se aplica a sinais de domínio de tempo periódicos. Lembre-se que a potência é definida como a integral ou soma do módulo elevada ao quadrado ao longo de um período normalizado pela duração do período. O espectro de potência ou energia de um sinal é definido como o quadrado do espectro de magnitude. Eles indicam como a potência ou energia no sinal é distribuída como uma função da freqüência.

**TABELA 3.10 Relações de Parseval para as Quatro Representações de Fourier**

Representação	Relação de Parseval
FT	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2 d\omega$
FS	$\frac{1}{T} \int_{(T)}  x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  X[k] ^2$
DTFT	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)}  X(e^{j\Omega}) ^2 d\Omega$
DTFS	$\frac{1}{N} \sum_{n=(N)}  x[n] ^2 = \sum_{k=(N)}  X[k] ^2$

**EXEMPLO 3.35** Use o teorema de Parseval para avaliar

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(Wn)}{\pi^2 n^2}$$

*Solução:* Digamos que

$$x[n] = \frac{\sin(Wn)}{\pi n}$$

de forma que  $\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$ . Pelo teorema de Parseval, temos

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

Uma vez que

$$x[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W 1 d\Omega \\ &= \frac{W}{\pi} \end{aligned}$$

Note que o cálculo direto de  $\chi$  é muito difícil.

► **EXERCÍCIO 3.21** Use o teorema de Parseval para avaliar

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{|j\omega + 2|^2} d\omega$$

*Resposta:*

$$\chi = \pi$$

### DUALIDADE

Ao longo deste capítulo, observamos uma simetria consistente entre as representações em domínio de tempo e domínio de freqüência dos sinais. Por exemplo, um pulso retangular contínuo, ou em tempo ou em freqüência, corresponde a uma função sinc ou de freqüência ou de tempo, como ilustra a Figura 3.42. Um impulso no tempo transforma-se em uma constante na freqüência, enquanto que uma constante no tempo transforma-se num impulso na freqüência. Também observamos simetrias nas propriedades das representações de Fourier: a convolução num domínio corresponde a modulação em outro domínio; a diferenciação num domínio corresponde a multiplicação pela variável independente no outro domínio, e assim por diante. Estas simetrias são uma consequência da simetria nas definições das representações de domínio de tempo e freqüência. Se formos cuidadosos, poderemos permutar tempo e freqüência. Esta propriedade de permutabilidade é chamada *dualidade*.

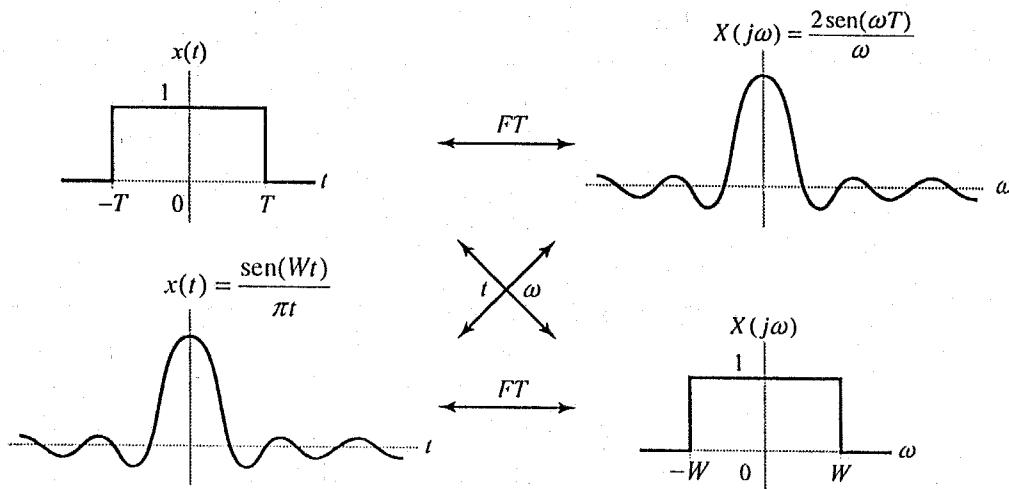


FIGURA 3.42 Dualidade de pulsos retangulares e funções sinc

Inicie com a FT, e lembre-se que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

A diferença entre a expressão de  $x(t)$  e a expressão para  $X(j\omega)$  é o fator  $2\pi$  e a troca de sinal na senóide complexa. Ambas podem ser expressas em termos da equação geral

$$y(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\eta) e^{jv\eta} d\eta \quad (3.47)$$

Se escolhermos  $v = t$  e  $\eta = \omega$ , então a equação 3.47 implica que

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Portanto, concluímos que

$$y(t) \xleftrightarrow{FT} z(\omega) \quad (3.48)$$

Inversamente, se trocarmos os papéis de tempo e freqüência fazendo,  $v = -\omega$  e  $\eta = t$ , então a equação (3.47) implica que

$$y(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt$$

e temos

$$z(t) \xleftarrow{FT} 2\pi y(-\omega) \quad (3.49)$$

As relações das equações (3.48) e (3.49) implicam uma certa simetria entre os papéis de tempo e freqüência. Especificamente, se nos for dado um par FT,

$$f(t) \xleftarrow{FT} F(j\omega) \quad (3.50)$$

poderemos trocar os papéis de tempo e freqüência para obtermos o novo par FT

$$F(jt) \xleftarrow{FT} 2\pi f(-\omega) \quad (3.51)$$

A notação  $F(jt)$  implica a avaliação de  $F(j\omega)$  da equação (3.50) com a freqüência  $\omega$  substituída pelo tempo  $t$ , enquanto que  $f(-\omega)$  significa que podemos avaliar  $f(t)$  como uma função de freqüência refletida  $-\omega$ . A relação de dualidade descrita nas equações (3.50) e (3.51) é ilustrada na Figura 3.43.

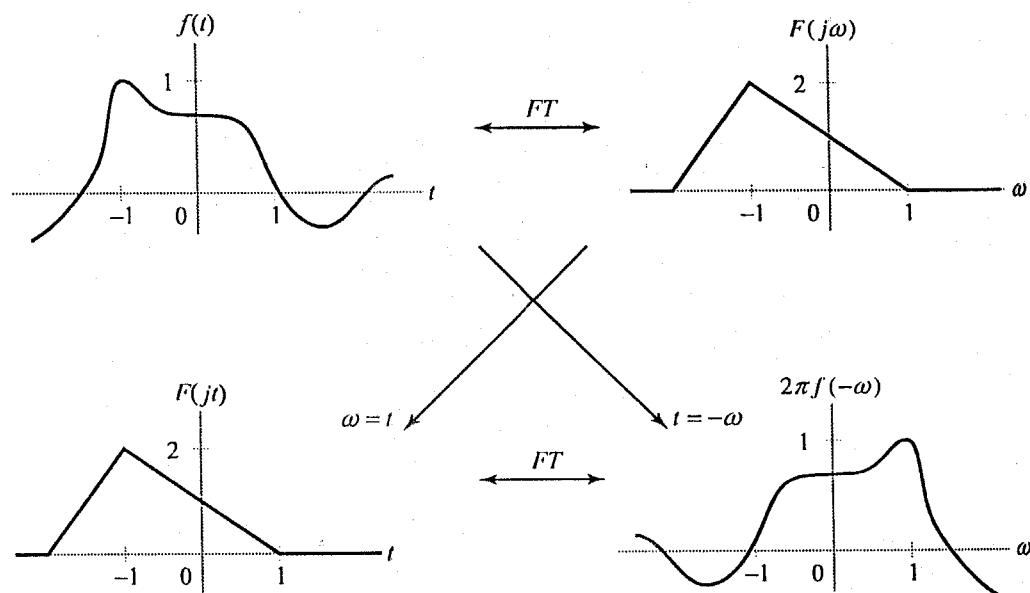


FIGURA 3.43 A propriedade da dualidade da FT.

**EXEMPLO 3.36** Use a dualidade para avaliar a FT de

$$x(t) = \frac{1}{1+jt}$$

*Solução:* Reconheça primeiro que

$$f(t) = e^{-t}u(t) \xleftarrow{FT} F(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

Substituindo  $\omega$  por  $t$ , obtemos

$$F(jt) = \frac{1}{1+jt}$$

Conseqüentemente, expressamos  $x(t)$  como  $F(jt)$  e, usando a propriedade da dualidade,

$$F(jt) \xleftarrow{FT} 2\pi f(-\omega)$$

a qual indica que

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= 2\pi f(-\omega) \\ &= 2\pi e^{\omega} u(-\omega) \end{aligned}$$

► **Exercício 3.22** Use a dualidade para avaliar a FT inversa da função degrau em freqüência  $X(j\omega) = u(\omega)$ .

**Resposta:**

$$x(t) = \frac{-1}{2\pi jt} + \frac{\delta(-t)}{2}$$

A FT permanece inteiramente dentro de sua classe de sinais; ela associa uma função não periódica de tempo contínuo com uma função não periódica de freqüência contínua. A DTFS também permanece inteiramente dentro de sua classe de sinais, uma vez que funções periódicas discretas estão associadas a funções periódicas discretas. A DTFS possui uma propriedade de dualidade análoga à da FT. Lembre-se que

$$x[n] = \sum_{k=(N)} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

e

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Aqui, a diferença entre as formas das transformadas direta e inversa é o fator  $N$  e a troca de sinal das freqüências senoidais complexas. A propriedade de dualidade da DTFS é enunciada da seguinte maneira. Se

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } 2\pi/N} X[k] \quad (3.52)$$

então

$$X[n] \xleftarrow{\text{DTFS; } 2\pi/N} \frac{1}{N} x[-k] \quad (3.53)$$

Aqui,  $n$  é o índice de tempo e  $k$  é o índice de freqüência. A notação  $X[n]$  implica avaliação de  $X[k]$  na equação (3.52) como uma função do índice de tempo  $n$ , enquanto que  $x[-k]$  significa que avaliamos  $x[n]$  na equação (3.52) como uma função do índice de freqüência  $-k$ .

A DTFT e a FS não permanecem dentro de suas classes de sinais. A FS associa uma função periódica contínua com uma função não periódica discreta. Inversamente, a DTFT cria uma correspondência de uma função não periódica discreta com uma função periódica contínua. Compare a expansão por FS de um sinal de tempo contínuo periódico,  $z(t)$ , como é mostrado por

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z[k] e^{jk\omega_0 t}$$

e a DTFT de um sinal de tempo discreto não periódico  $x[n]$ , como é mostrado por

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\Omega}$$

Se forçarmos  $z(t)$  a ter o mesmo período que  $X(e^{j\Omega})$ ,  $2\pi$ , então  $\omega_0 = 1$  e veremos que  $\Omega$  na DTFT corresponde a  $t$  na FS, enquanto que o  $n$  na DTFT corresponde a  $-k$  na FS. Similarmente, a expressão para os coeficientes da FS se compara à expressão para a representação por DTFT de  $x[n]$ , como mostramos agora:

$$Z[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} z(t) e^{-jkt} dt$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

Os papéis de  $\Omega$  e  $n$  na DTFT novamente correspondem aos de  $t$  e  $-k$  na FS. Aqui, a propriedade de dualidade está entre a FS e a DTFT. Se

$$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) \quad (3.54)$$

então

$$X(e^{j\Omega}) \xrightarrow{FS:1} x[-k] \quad (3.55)$$

**EXEMPLO 3.37** Use a propriedade de dualidade FS-DTFT e os resultados do Exemplo 3.26 para determinar a DTFT inversa do espectro triangular  $Y(e^{j\Omega})$  descrito na Figura 3.44(a).

**Solução:** Defina uma função de tempo  $z(t) = Y(e^{jt})$ . A propriedade da dualidade da equação (3.55) implica que, se  $z(t) \xrightarrow{FS:1} Z[k]$ , então  $y[n] = Z[-n]$ . Com isto, procuramos os coeficientes da FS,  $Z[k]$ , associados com  $z(t)$ .  $z(t)$  é uma versão deslocada no tempo da onda triangular  $f(t)$ , considerada no Exemplo 3.26, supondo  $T = 2\pi$ . Especificamente,  $z(t) = f(t + \pi/2)$ . Usando a propriedade de deslocamento no tempo, temos

$$\begin{aligned} Z[k] &= e^{jk\pi/2} F[k] \\ &= \begin{cases} \pi, & k = 0 \\ e^{j(k-1)\pi/2} \frac{4 \sin(k\pi/2)}{\pi k^2}, & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, usando  $y[n] = Z[-n]$ , temos

$$y[n] = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ e^{-j(n+1)\pi/2} \frac{-4 \sin(n\pi/2)}{\pi n^2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

A Figura 3.44(b) ilustra  $y[n]$ .

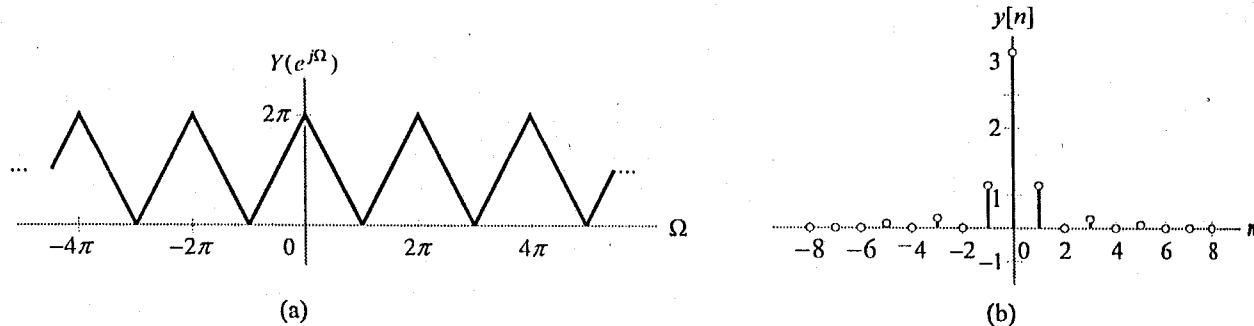


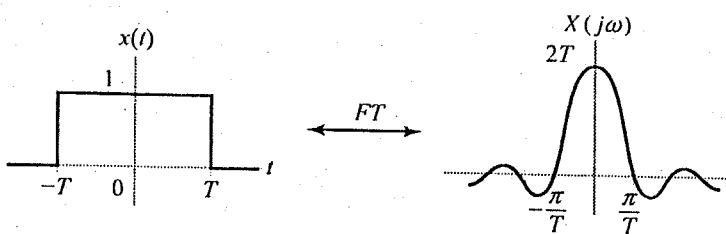
FIGURA 3.44 Exemplo 3.37. (a) Espectro triangular  $Y(e^{j\Omega})$ . (b) DTFT inversa de  $Y(e^{j\Omega})$ .

### O PRODUTO TEMPO – LARGURA DE FAIXA

Observamos uma relação inversa entre a extensão de tempo e freqüência de um sinal. Por exemplo, lembre-se que

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

Conforme é descrito na Figura 3.45, o sinal  $x(t)$  tem extensão de tempo  $2T$ . Sua FT,  $X(j\omega)$  tem, de fato, extensão de freqüência infinita, mas tem a maior parte de sua energia contida no intervalo associado com o lóbulo principal da função sinc,  $|\omega| < \pi/T$ . À medida que  $T$  decresce, a extensão de tempo do sinal diminui, enquanto a extensão da freqüência cresce. Na realidade, o produto da extensão de tempo pela largura do lóbulo principal é uma constante.



**FIGURA 3.45** Pulso retangular ilustrando a relação inversa entre as extensões de tempo e freqüência de um sinal.

A natureza geral da relação inversa entre a extensão de tempo e freqüência é demonstrada pela propriedade de mudança de escala. A compressão de um sinal no tempo leva à expansão no domínio de freqüência, e vice-versa. Esta relação inversa pode ser formalmente estabelecida em termos do produto tempo – largura de faixa do sinal.

A *largura de faixa (bandwidth)* de um sinal refere-se ao conteúdo significativo de freqüência do sinal para freqüências positivas. É difícil definir largura de faixa, especialmente para sinais que têm extensão de freqüência infinita, porque o sentido do termo “significativo” não é matematicamente preciso. Apesar desta dificuldade, existem diversas definições para largura de faixa que são de uso comum. Uma dessas definições se aplica a sinais que têm uma representação de domínio de freqüência caracterizada por um lóbulo principal delimitado por nulos. Se um sinal for passa-baixas, ou seja, o lóbulo principal está centralizado na origem, a largura de faixa será definida como a metade da largura do lóbulo principal. Usando esta definição, o sinal descrito na Figura 3.45 tem largura de faixa  $\pi/T$ . Se o sinal for *passa-faixa*, significando que o lóbulo principal está centralizado em  $\pm\omega_c$ , então a largura de faixa será igual à largura do lóbulo principal. Outra definição comumente usada para largura de faixa baseia-se na freqüência em que o espectro de magnitude é  $1/\sqrt{2}$  vezes seu valor de pico. Observe que uma dificuldade similar é encontrada precisamente ao definirmos a extensão de tempo ou a duração de um sinal.

As definições acima para largura de faixa e duração não se adaptam bem para avaliação analítica. Podemos descrever analiticamente a relação inversa entre a duração e a largura de faixa de sinais arbitrários definindo medidas, baseadas em médias quadráticas, da duração e largura de faixa efetivas. Definiremos formalmente a duração de um sinal  $x(t)$  como

$$T_d = \left[ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \right]^{1/2} \quad (3.56)$$

e a largura de faixa (*bandwidth*) como

$$B_w = \left[ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2} \quad (3.57)$$

Estas definições supõem que  $x(t)$  esteja centralizado próximo à origem e que ele seja passa-baixas. A interpretação de  $T_d$  como uma duração efetiva segue-se do exame da equação (3.56). A integral no numerador é o segundo momento do sinal nas proximidades da origem. O integrando pondera o quadrado do valor de  $x(t)$  em cada instante de tempo pelo quadrado de sua distância de  $t = 0$ . Conseqüentemente, se  $x(t)$  for grande para valores grandes de  $t$ , então a duração será maior do que se  $x(t)$  for grande para valores pequenos de  $t$ . Esta integral é normalizada pela energia total em  $x(t)$ . Uma interpretação semelhante se aplica a  $B_w$ . Note que, embora as definições baseadas em médias quadráticas ofereçam certa “tratabilidade” analítica, elas não são facilmente medidas a partir de determinado sinal e seu espectro de magnitude.

O produto tempo-largura de faixa para qualquer sinal limitado por baixo, conforme é mostrado por

$$T_d B_w \geq \frac{1}{2} \quad (3.58)$$

Este limite indica que não podemos diminuir simultaneamente a duração e a largura de faixa de um sinal. Os pulsos gaussianos são os únicos sinais que satisfazem esta relação com igualdade. A equação (3.58) também é conhecida como *princípio da incerteza* pela sua aplicação na física moderna, a qual afirma que a posição exata e o momento exato de um elétron não podem ser determinados simultaneamente. Este resultado se generaliza para definições alternativas de largura de faixa e duração. O produto da largura de faixa pela duração é sempre limitada por baixo em uma constante, sendo que o valor desta constante depende das definições de largura de faixa e duração.

Resultados análogos podem ser derivados para as outras representações de Fourier.

## 3.7 Explorando Conceitos com o MATLAB

### A DTFS

A DTFS é a única representação de Fourier que tem valores discretos tanto no tempo como em freqüência e, consequentemente, é adequada para implementação direta no MATLAB. Enquanto que as equações (3.12) e (3.13) são facilmente implementadas como arquivos M, os comandos MATLAB internos **fft** e **ifft** também podem ser usados para avaliar a DTFS. Dado um vetor **x** de tamanho **N** que representa um período de um sinal com período **N**,  $x[n]$ , o comando

```
>> X = fft(x)/N
```

produz um vetor **X** de tamanho **N** que contém os coeficientes da DTFS,  $X[k]$ . O MATLAB supõe que os somatórios nas equações (3.12) e (3.13) vão de 0 a  $N - 1$ , de forma que os primeiros elementos de **x** e **X** correspondem a  $x[0]$  e  $X[0]$ , respectivamente, enquanto os últimos elementos correspondem a  $x[N - 1]$  e  $X[N - 1]$ . Note que a divisão por **N** é necessária porque **fft** avalia a soma na equação (3.13) sem dividir por **N**. Similarmente, dados os coeficientes da DTFS num vetor **X**, o comando

```
>> x = ifft(X)*N
```

produz um vetor **x** que representa um período para a forma de onda de tempo. Observe que **ifft** deve ser multiplicado por **N** para avaliar a equação (3.12). Tanto **fft** como **ifft** são computadas usando-se um algoritmo eficiente numericamente ou *rápido* denominado *transformada rápida de Fourier*. O desenvolvimento deste algoritmo será discutido na seção 4.11.

Considere usar o MATLAB para resolver o Exercício 3.1 para os coeficientes da DTFS. O sinal é

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right)$$

Este sinal tem período 24, de forma que definimos um período e avaliamos os coeficientes da DTFS usando os comandos

```
>> x = ones(1,24) + sin([0:23]*pi/12 + 3*pi/8);
>> X = fft(x)/24
X =
Columns 1 through 4
1.0000 0.4619 - 0.1913i 0.0000 + 0.0000i
- 0.0000 + 0.0000i
Columns 5 through 8
0.0000 = 0.0000i - 0.0000 - 0.0000i 0.0000 - 0.0000i
- 0.0000 - 0.0000i
Columns 9 through 12
- 0.0000 - 0.0000i - 0.0000 - 0.0000i - 0.0000 - 0.0000i
0.0000 - 0.0000i
Columns 13 through 16
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i - 0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0000i
Columns 17 through 20
```

```

-0.0000 - 0.0000i -0.0000 - 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i
Columns 21 through 24
-0.0000 + 0.0000i -0.0000 - 0.0000i 0.0000 - 0.0000i
0.4619 + 0.1913i

```

Note que o MATLAB usa  $i$  para denotar a raiz quadrada de  $-1$ . Consequentemente, concluímos que

$$X[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0,4619 - j0,1913, & k = 1 \\ 0,4619 + j0,1913, & k = 23 \\ 0, & \text{caso contrário em } 0 \leq k \leq 23 \end{cases}$$

o que corresponde à resposta do Exercício 3.1 expressa na forma retangular. Podemos reconstruir o sinal no domínio de tempo usando `ifft` e avaliar os quatro primeiros valores do sinal reconstruído usando os comandos

```

>> xrecon = ifft (X)^24;
>> xrecon(1:4);
ans =
1.9239 - 0.0000i 1.9914 + 0.0000i 1.9914 + 0.0000i
1.9239 - 0.0000i

```

Note que o sinal reconstruído tem um componente imaginário, embora pequeno, não obstante o sinal original ser puramente real. O componente imaginário é um artefato de erros de arredondamento numérico nas computações realizadas por `fft` e `ifft` e pode ser ignorado.

► **EXERCÍCIO 3.23** Repita o Exercício 3.2 usando o MATLAB.

A aproximação por soma parcial usada no Exemplo 3.3 é facilmente avaliada usando-se o MATLAB, da seguinte maneira:

```

>> k = 1:24;
>> n = -24:25;
>> B(1) = 25/50; %coeff for k = 0
>> B(2:25) = 2*sin(k*pi*25/50)./(50*sin(k*pi/50));
>> B(26) = sin(25*pi*25/50)/(50*sin(25*pi/50));
>> xJhat(1,:) = B(1)*cos(n*0*pi/25); %term in sum for k = 0
%accumulate partial sums
>> for k = 2:26
xJhat(k,:) = xJhat(k-1,:)+B(k)*cos(n*(k-1)*pi/25);
end

```

Este conjunto de comandos produz uma matriz `xJhat` cuja  $(J+1)$ -ésima linha corresponde a  $\hat{x}_J[n]$ .

### ■ A FS

A aproximação por soma parcial para a FS do Exemplo 3.7 é avaliada de maneira análoga à da DTFS com uma consideração adicional importante. O sinal  $\hat{x}_J(t)$  e os co-senos da aproximação por soma parcial são funções contínuas do tempo. Uma vez que o MATLAB representa estas funções como vetores que consistem de pontos discretos, devemos usar amostras espaçadas de maneira suficientemente próximas para capturarmos os detalhes de  $\hat{x}_J(t)$ . Isto é assegurado fazendo-se a amostragem das funções de maneira suficientemente próxima a fim de que o termo de freqüência mais elevada na soma,  $\cos(J_{max}\omega_n t)$ , seja bem aproximado pelo sinal amostrado,  $\cos(J_{max}\omega_n n\Delta)$ . O co-seno amostrado fornece uma aproximação visualmente agradável para o co-seno contínuo usando-se o comando plot do MATLAB se houver amostras na ordem de 20 por período. Usando 20 amostras por período, obtemos  $\Delta = T/20J_{max}$ . Note que o número total de amostras num período é então  $20J_{max}$ . Supondo  $J_{max} = 99$  e  $T = 1$ , computamos as somas parciais, dados  $B[k]$ , usando os comandos:

```
>> t = [-(10^*Jmax-1):10^*Jmax*Delta;
>> xJhat(1,:) = B(1)*cos(t*0*2*pi/T);
>> for k = 2:100
    xJhat(k,:) = xJhat(k-1,:) + B(k)*cos(t*(k-1)*2*pi/T);
end
```

Uma vez que as linhas de xJhat representam amostras de uma função de valor contínuo, nós as exibimos usando plot ao invés de stem. Por exemplo, a soma parcial para  $J = 5$  é exibida com o comando plot(t,xJhat(6,:)).

### ■ PRODUTO TEMPO – LARGURA DE FAIXA

O comando fft pode ser usado para avaliar a DTFS e explorar a propriedade do produto tempo – largura de faixa para sinais periódicos de tempo discreto. Uma vez que a DTFS se aplica a sinais que são periódicos tanto em termos de tempo como de freqüência, definimos tanto a duração como a largura de faixa baseando-se na extensão do sinal dentro de um período. Por exemplo, considere a onda quadrada de período  $N$  estudada no Exemplo 3.2. Um período do sinal de domínio de tempo é definido como

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e os coeficientes da DTFS são dados por

$$X[k] = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{N}(2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)}$$

Se definirmos a duração de tempo  $T_d$  como a parte diferente de zero de um período, então  $T_d = 2M + 1$ . Se definirmos adicionalmente a largura de faixa  $B_w$  como a largura do lóbulo principal de  $X[k]$  ao longo de um período, teremos  $B_w \approx 2N/(2M+1)$  e veremos que o produto tempo – largura de faixa para a onda quadrada é independente de  $M$ :  $T_d B_w \approx 2N$ .

O conjunto seguinte de comandos MATLAB pode ser usado para verificar este resultado:

```
>> x = [ones(1,M+1), zeros(1,N-2*M-1), ones(1,M)];
>> X = fft(x)/N;
>> k = [-N/2+1:N/2]; %frequency index for N even
>> stem(k,real(fftshift(X)))
```

Aqui, definimos um período de uma onda quadrada par no intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ , encontramos os

coeficientes da DTFS usando o comando `fft`, e os exibimos usando `stem`. O comando `fftshift` permuta as metades esquerda e direita do vetor  $X$ , de forma que o índice de frequência zero está no centro do vetor. Ou seja, os índices de frequência são mudados de 0 a  $N - 1$  para  $-N/2 + 1$  a  $N/2$  (supondo que  $N$  seja par). O comando `real` é usado para suprimir quaisquer componentes imaginários pequenos resultantes de arredondamento numérico. Então, determinamos a largura de faixa efetiva contando o número de coeficientes da DTFS no lóbulo principal. Uma das experiências no computador avalia o produto tempo – largura de faixa desta maneira.

As definições formais de duração e largura de faixa dadas nas equações (3.56) e (3.57) podem ser generalizadas para sinais periódicos de tempo discreto substituindo-se as integrais por somas ao longo de um período, da seguinte maneira:

$$T_d = \left[ \frac{\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} n^2 |x[n]|^2}{\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} |x[n]|^2} \right]^{1/2} \quad (3.59)$$

$$B_w = \left[ \frac{\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} k^2 |X[k]|^2}{\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} |X[k]|^2} \right]^{1/2} \quad (3.60)$$

Aqui, supomos que  $N$  seja ímpar e que a maior parte da energia em  $x[n]$  e  $X[k]$  esteja centralizada na origem.

A função MATLAB seguinte avalia o produto  $T_d B_w$  baseando-se nas equações (3.59) e (3.60):

```
function TBP = TdBw(x)
% Compute the Time-Bandwidth product using the DTFS
% One period must be Less than 1025 points
N=1025;
M = (N - max(size(x)))/2;
xc = [zeros(1,M),x,zeros(1,M)]; %center pulse within a period
n = [-(N-1)/2:(N-1)/2];
n2 = n.*n;
Td = sqrt((xc.*xc)*n2'/(xc*xc'));
X = fftshift(fft(xc)/N); %evaluates DTFS and centers
Bw = sqrt(real((X.*conj(X)*n2'/(X*X')));
TBP = Td*Bw;
```

Esta função supõe que o tamanho do sinal de entrada  $x$  seja ímpar e centralize  $x$  dentro de um período de 1025 pontos antes de computar  $T_d$  e  $B_w$ . Note que  $.*$  é usado para executar o produto elemento por elemento. A operação  $*$  computa o produto interno quando colocada entre um vetor linha e um vetor coluna, e o apóstrofo  $'$  indica transposição conjugada complexa. Consequentemente, o comando  $X*X'$  executa o produto interno de  $X$  com o complexo conjugado de  $X$ , ou seja, a soma do módulo ao quadrado de cada elemento de  $X$ .

Podemos usar a função `TdBw` para avaliar o produto tempo – largura de faixa para três pares de pulsos retangulares, de co-senos elevados e gaussianos, da seguinte maneira:

```
>> x = ones(1,101); % pulso retangular com 101 pontos
>> TdBw(x)
ans =
788.0303
>> x = ones(1,301); % pulso retangular com 301 pontos
>> TdBw(x)
ans =
1.3604e+03
>> x = 0.5*ones(1,101) + cos(2*pi*[-50:50]/101);
% co-seno elevado com 101 pontos
```

```

>> TdBw(x)
ans =
277.7327
>> x = 0.5*ones(1,301) + cos(2*pi*[-150:150]/301);
% co-seno elevado com 301 pontos
>> TdBw(x)
ans =
443.0992
>> n = [-500:500];
>> x = exp(-0.001*(n.*n)); % pulso gaussiano estreito
>> TdBw(x)
ans =
81.5669
>> x = exp(-0.0001*(n.*n)); % pulso gaussiano largo
>> TdBw(x)
ans =
81.5669

```

Note que os trens de pulsos gaussianos tem o menor produto tempo – largura de faixa. Além disso, o produto tempo – largura de faixa é idêntico para os trens de pulsos gaussianos tanto estreitos como largos. Estas observações oferecem uma evidência de que o produto tempo – largura de faixa para sinais de tempo discreto periódicos é limitado inferiormente pelo produto correspondente de um trem de pulsos gaussianos. Este resultado não seria muito surpreendente, visto que os pulsos gaussianos atingem o limite inferior para sinais não periódicos de tempo contínuo. A questão será revisitada como uma experiência de computador no Capítulo 4.

### 3.8 Resumo

Neste capítulo, desenvolvemos técnicas para representar sinais como superposições ponderadas de senóides complexas. Os pesos são uma função das freqüências senoidais complexas e fornecem uma descrição no domínio de freqüência do sinal. Há quatro representações distintas aplicáveis às quatro diferentes classes de sinais:

- A DTFS se aplica a sinais de período  $N$  de tempo discreto e representa o sinal como uma soma ponderada de  $N$  senóides complexas de tempo discreto cujas freqüências são múltiplos inteiros da freqüência fundamental do sinal. Esta representação em domínio de freqüência é uma função discreta e de período  $N$  da freqüência. A DTFS é a única representação de Fourier que pode ser computada numericamente.
- A FS se aplica a sinais periódicos de tempo contínuo. Ela representa o sinal como uma soma ponderada de um número infinito de senóides complexas de tempo contínuo cujas freqüências são múltiplos inteiros da freqüência fundamental do sinal. Aqui, a representação no domínio de freqüência é uma função discreta e não periódica da freqüência.
- A DTFT representa sinais de tempo discreto não periódicos como uma integral ponderada de senóides complexas de tempo discreto cujas freqüências variam continuamente ao longo de um intervalo de  $2\pi$ . Esta representação no domínio de freqüência é uma função contínua e com período  $2\pi$  da freqüência.
- A FT representa sinais de tempo contínuo não periódicos como uma integral ponderada de senóides complexas de tempo contínuo cujas freqüências variam continuamente de  $-\infty$  a  $\infty$ . Aqui, a representação no domínio de freqüência é uma função contínua e não periódica da freqüência.

As propriedades de representação de Fourier relacionam o efeito de uma ação sobre o sinal de domínio de tempo com a correspondente mudança na representação de domínio de freqüência. Elas são uma consequência das propriedades de senóides complexas. Uma vez que todas as quatro representações empregam senóides complexas, todas as quatro compartilham de propriedades semelhantes. As propriedades fornecem *insight* sobre a natureza das representações de sinais tanto no

domínio de tempo como no domínio de freqüência. Elas também oferecem um conjunto poderoso de ferramentas para manipular sinais tanto no domínio de tempo como no de freqüência. Muitas vezes é muito mais simples usar as propriedades para determinar uma representação de sinal no domínio de tempo ou freqüência do que usar a equação de definição.

O domínio de freqüência oferece uma perspectiva alternativa dos sinais e dos sistemas com os quais interagem. Certas características de sinais são mais facilmente identificadas no domínio de freqüência do que no domínio de tempo e vice-versa. Além disso, alguns problemas de sistemas são resolvidos mais facilmente no domínio de freqüência do que no domínio de tempo e vice-versa. Tanto as representações no domínio de tempo como de freqüência têm suas próprias vantagens e desvantagens. Onde uma pode se sobressair, a outra pode ser muito complicada de se usar. Determinar qual domínio é o mais vantajoso para resolver um problema particular é uma habilidade importante a ser desenvolvida, e isto somente pode ser feito através da experiência. O próximo capítulo oferece um ponto de partida nesta jornada, examinando aplicações das representações de Fourier em problemas de sinais e sistemas.

## LEITURA ADICIONAL

1. Joseph Fourier estudou o fluxo do calor no início do século dezenove. Entender o fluxo do calor era um problema de significado tanto prático como científico na época, e exigia a resolução de uma equação diferencial parcial chamada equação do calor. Fourier desenvolveu uma técnica para resolver equações diferenciais parciais baseada na suposição de que a solução era uma soma ponderada de senóides harmonicamente relacionadas com coeficientes desconhecidos, a qual agora chamamos série de Fourier. O trabalho inicial de Fourier sobre condução do calor foi submetido como um artigo científico, à Academia de Ciências de Paris em 1807 e rejeitado depois da revisão feita por Lagrange, Laplace e Legendre. Fourier persistiu no desenvolvimento de suas idéias apesar de ser criticado pela falta de rigor por seus contemporâneos. Por fim, em 1822, ele publicou um livro contendo grande parte de seu trabalho, *Theorie analytique de la chaleur*, o qual agora é considerado um dos clássicos da matemática.
2. A DTFS é mais freqüentemente citada na literatura como transformada discreta de Fourier ou DFT. Adotamos a terminologia DTFS neste texto porque ela é mais descritiva e tem menos probabilidade de acarretar confusão com a DTFT. O leitor deve estar ciente de que provavelmente encontrará a terminologia DTF em outros textos e referências.
3. Um tratamento geral das transformadas de Fourier é apresentado em:
  - » Bracewell, R. N., *The Fourier Transform and Its Applications*, segunda edição (McGraw-Hill, 1978).
  - » Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications* (McGraw-Hill, 1962)
4. Um tratamento introdutório da FS, FT e DTFS é apresentado em:
  - » Morrison, N., *Introduction to Fourier Analysis* (Wiley, 1994)
5. O papel da FS e da FT na resolução da equação do calor, da equação da onda e da equação do potencial é descrito em:
  - » Powers, D. L., *Boundary Value Problems*, segunda edição (Academic Press, 1979)
6. O princípio da incerteza, equação (3.58), é provado em:
  - » Bracewell, R. N., *The Fourier Transform and Its Applications*, segunda edição (McGraw-Hill, 1978)

## PROBLEMAS

- 3.1 Use a equação de definição dos coeficientes da DTFS para avaliar a representação da DTFS dos seguintes sinais. Esboce os espectros de magnitude e fase.

(a)  $x[n] = \cos\left(\frac{6\pi}{13}n + \frac{\pi}{6}\right)$

(b)  $x[n] = \sin\left(\frac{4\pi}{21}n\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{21}n\right) + 1$

(c)  $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - 2m] + \delta[n + 3m]$

(d)  $x[n]$  conforme é descrito na Figura P3.1(a)

(e)  $x[n]$  conforme é descrito na Figura P3.1(b)

(f)  $x[n]$  conforme é descrito na Figura P3.1(c)

- 3.2 Use a definição da DTFS para determinar os sinais de tempo representados pelos seguintes coeficientes da DTFS.

(a)  $X[k] = \cos\left(\frac{6\pi}{17}k\right)$

(b)  $X[k] = \cos\left(\frac{10\pi}{21}k\right) + j \sin\left(\frac{4\pi}{21}k\right)$

(c)  $X[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[k - 2m] - 2\delta[k + 3m]$

(d)  $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.2(a)

(e)  $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.2(b)

(f)  $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.2(c)

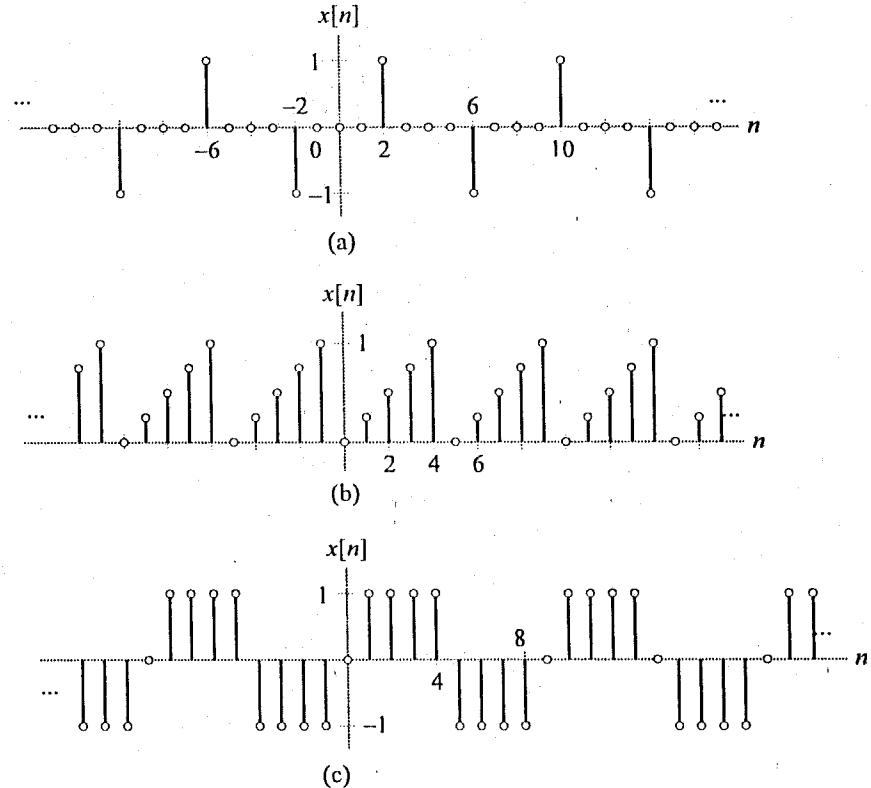


FIGURA P3.1

FIG  
3.3

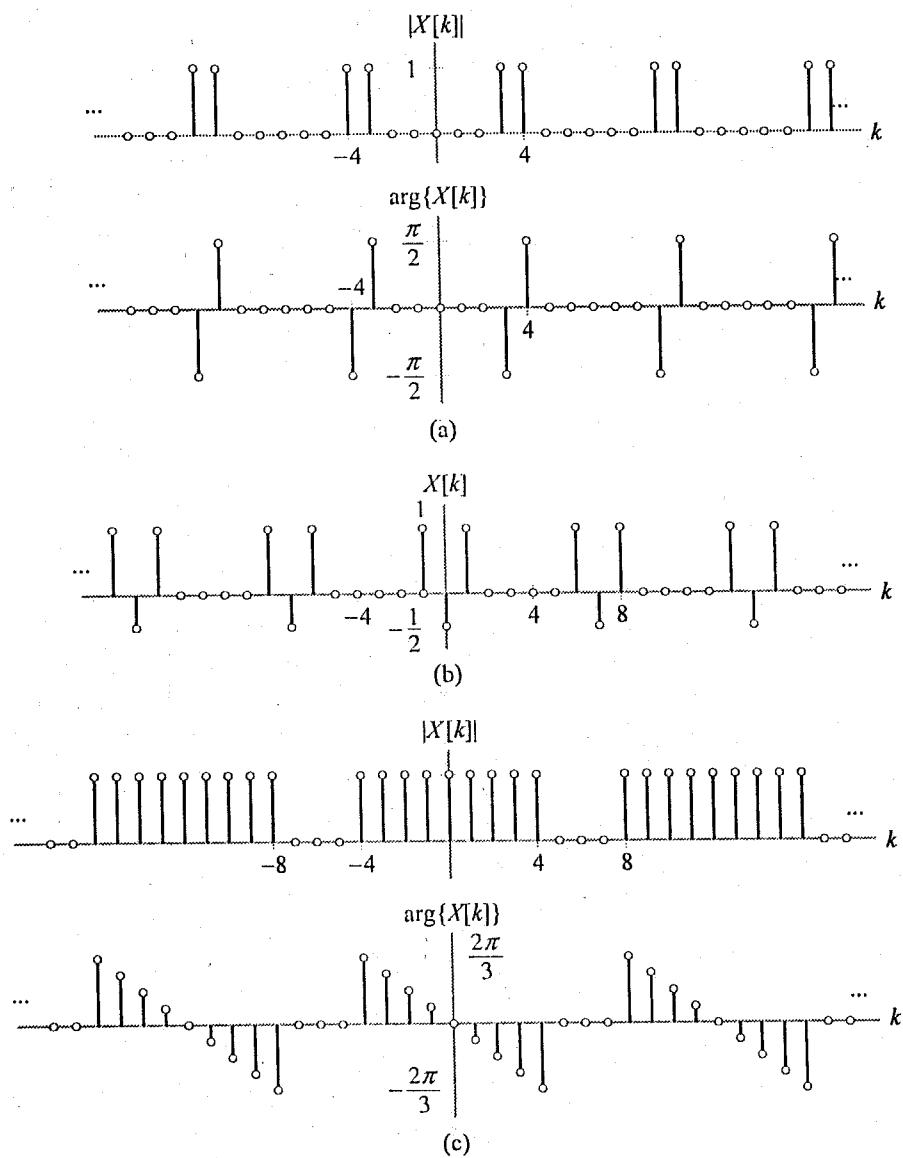


FIGURA P3.2

- 3.3 Use a equação de definição dos coeficientes da FS para avaliar a representação por FS dos sinais seguintes. Esboce os espectros de magnitude e fase.
- $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(3\pi t)$
  - $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{1}{2}m) + \delta(t - \frac{3}{2}m)$
  - $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi/3)m} \delta(t - 2m)$
  - $x(t)$  como descrito na Figura P3.3(a)
  - $x(t)$  como descrito na Figura P3.3(b)
  - $x(t)$  como descrito na Figura P3.3(c)
- 3.4 Use a definição da FS para determinar os sinais de tempo representados pelos seguintes coeficientes de FS.
- $X[k] = j\delta[k-1] - j\delta[k+1] + \delta[k-3] + \delta[k+3]$ ,  $\omega_o = \pi$
  - $X[k] = j\delta[k-1] - j\delta[k+1] + \delta[k-3] + \delta[k+3]$ ,  $\omega_o = 3\pi$
  - $X[k] = (-\frac{1}{2})^{|k|}$ ,  $\omega_o = 1$
  - $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.4(a),  $\omega_o = \pi$
  - $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.4(b),  $\omega_o = 2\pi$
  - $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.4(c),  $\omega_o = \pi$

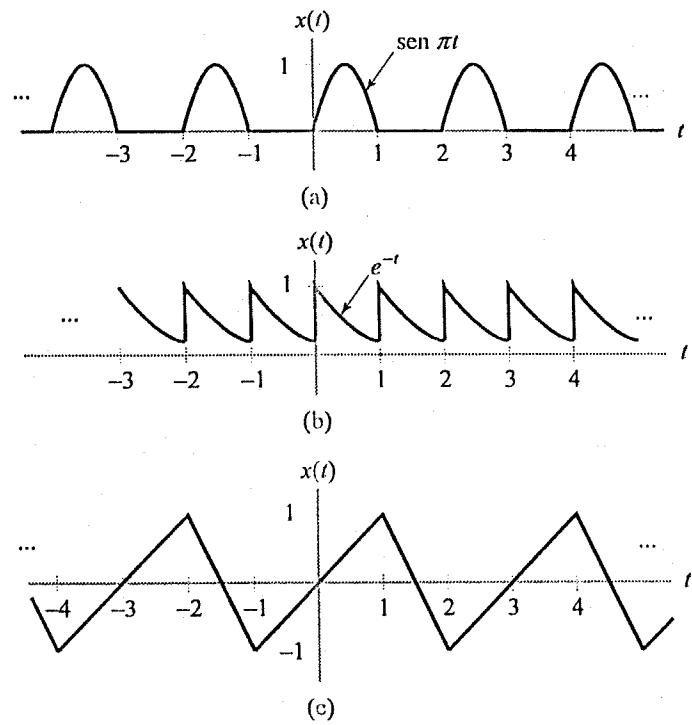


FIGURA P3.3

3.5 Use a equação de definição da DTFT para obter as representações de domínio de freqüência dos sinais seguintes. Esboce os espectros de magnitude e fase.

(a)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n - 4]$

(b)  $x[n] = a^{|n|}, |a| < 1$

(c)  $x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N} n\right), & |n| \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

(d)  $x[n] = \delta[6 - 3n]$ .

(e)  $x[n]$  conforme é descrito na Figura P3.5(a)

(f)  $x[n]$  conforme é descrito na Figura P3.5(b)

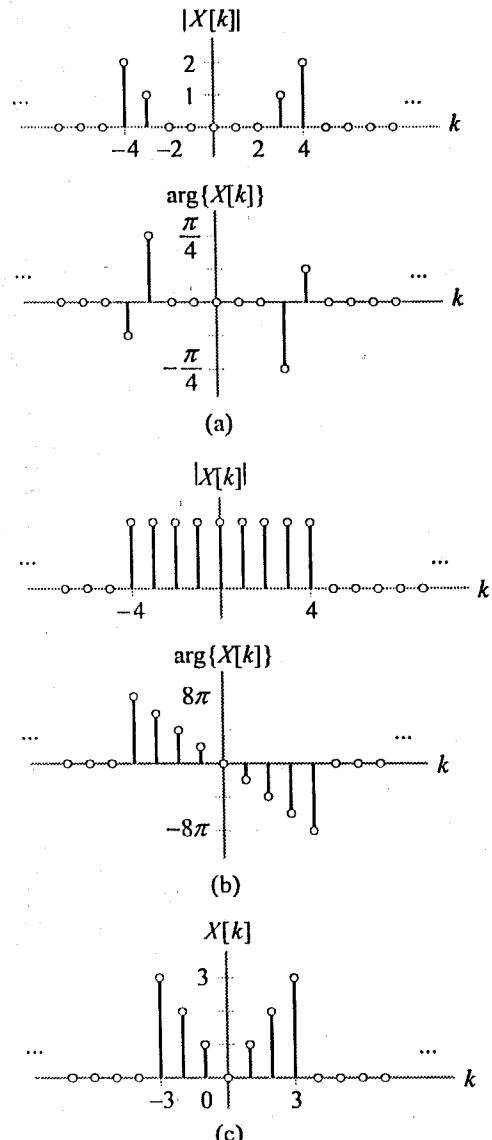


FIGURA P3.4

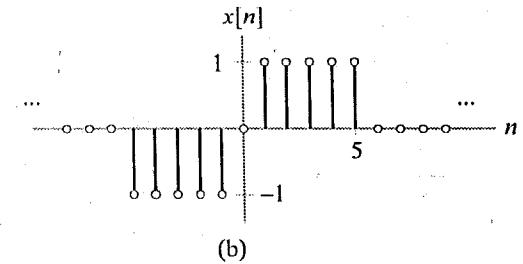
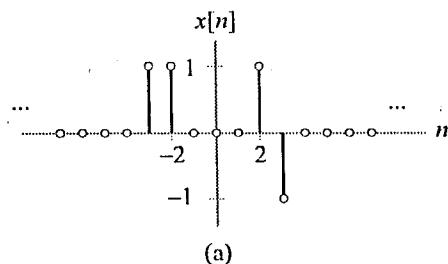


FIGURA P3.5

- 3.6 Use a equação que descreve a representação por DTFT para determinar os sinais no domínio de tempo correspondentes às seguintes DTFTs.

(a)  $X(e^{j\Omega}) = \cos(\Omega) + j \sin(\Omega)$

(b)  $X(e^{j\Omega}) = \sin(\Omega) + \cos(\Omega/2)$

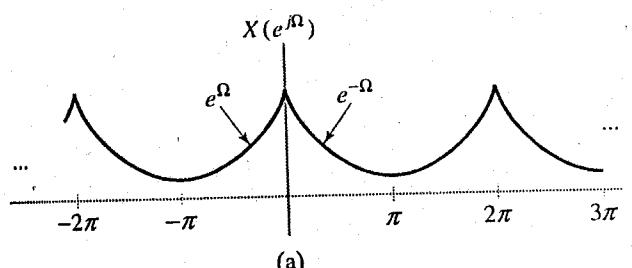
(c)  $|X(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1, & \pi/2 < |\Omega| < \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$$\arg\{X(e^{j\Omega})\} = -4\Omega$$

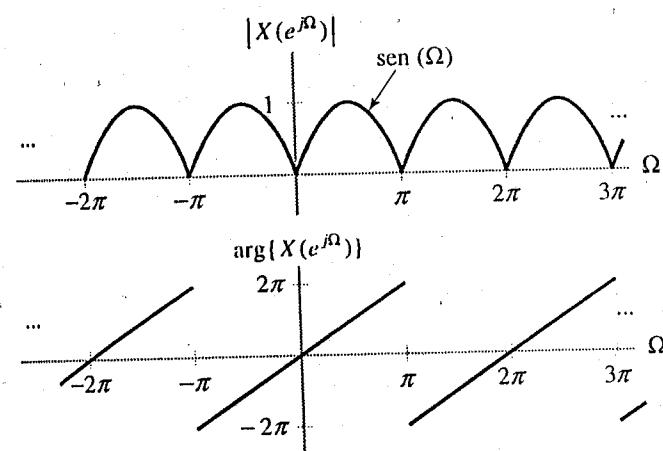
(d)  $X(e^{j\Omega})$  conforme é descrito na Figura P3.6(a)

(e)  $X(e^{j\Omega})$  conforme é descrito na Figura P3.6(b)

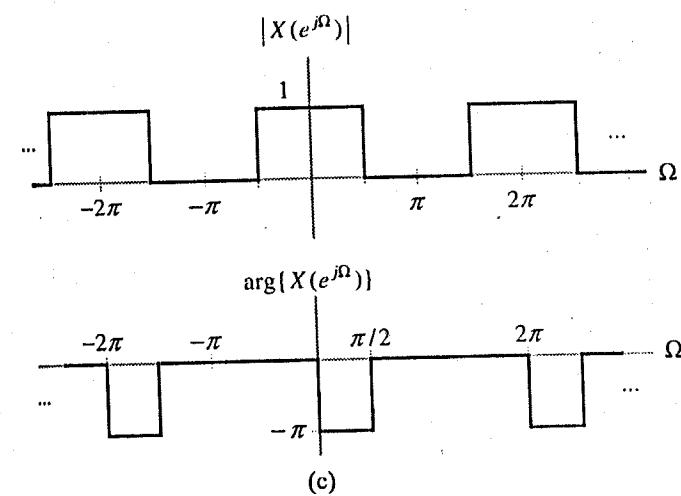
(f)  $X(e^{j\Omega})$  conforme é descrito na Figura P3.6(c)



(a)



(b)



(c)

FIGURA P3.6

- 3.7 Use a equação de definição da FT para obter as representações no domínio de freqüência dos sinais seguintes. Esboce os espectros de magnitude e fase.

(a)  $x(t) = e^{-3t} u(t-1)$

(b)  $x(t) = e^{-|t|}$

(c)  $x(t) = te^{-2t} u(t)$

(d)  $x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t-m), |a| < 1$

(e)  $x(t)$  conforme é descrito na Figura P3.7(a)

(f)  $x(t)$  conforme é descrito na Figura P3.7(b)

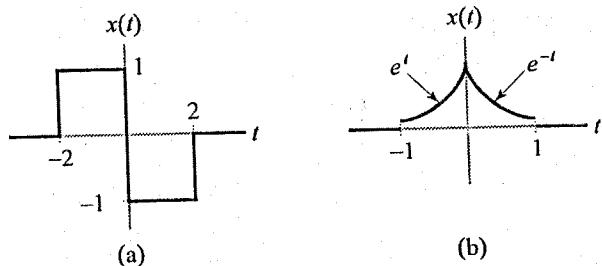


FIGURA P3.7

- 3.8 Use a equação que descreve a representação por FT para determinar os sinais no domínio de tempo correspondentes às seguintes FTs.

(a)  $X(j\omega) = \begin{cases} \cos(\omega), & |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

(b)  $X(j\omega) = e^{-2\omega} u(\omega)$

(c)  $X(j\omega) = e^{-|\omega|}$

(d)  $X(j\omega)$  conforme é descrito na Figura P3.8(a)

(e)  $X(j\omega)$  conforme é descrito na Figura P3.8(b)

(f)  $X(j\omega)$  conforme é descrito na Figura P3.8(c)

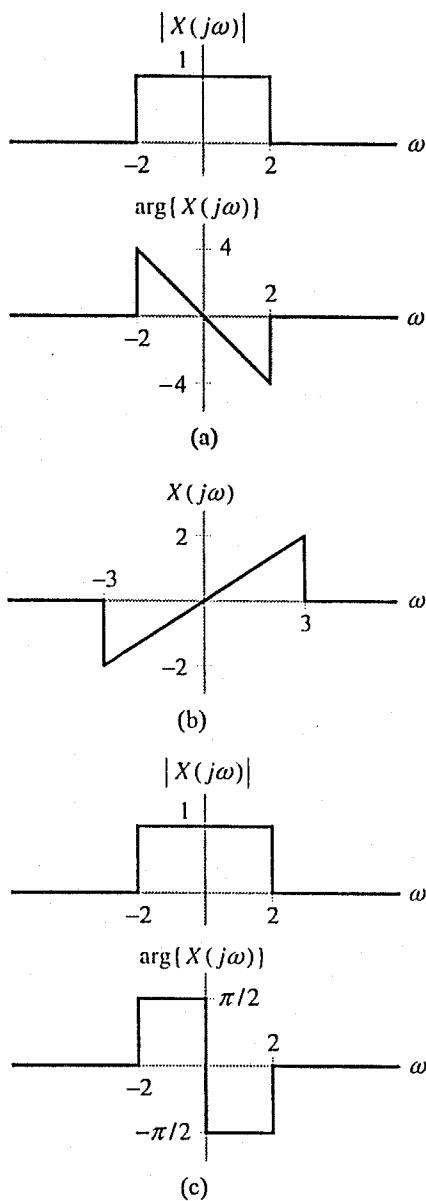


FIGURA P3.8

- 3.9 Determine a representação de Fourier apropriada para os seguintes sinais no domínio de tempo usando as seguintes equações.

(a)  $x(t) = e^{-3t} \cos(\pi t)u(t)$

(b)  $x[n] =$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right), & |n| < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(c)  $x[n]$  conforme é descrito na Figura P3.9(a)

(d)  $x(t) = e^{1+it}u(-t+2)$

(e)  $x(t) = |\sin(2\pi t)|$

(f)  $x[n]$  conforme é descrito na Figura P3.9(b)

(g)  $x(t)$  conforme é descrito na Figura P3.9(c)

- 3.10 As seguintes são representações de domínio de frequência para sinais. Determine o sinal de domínio de tempo correspondente a cada uma

(a)  $X[k] = \begin{cases} e^{-jk\pi}, & |k| < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

O período fundamental do sinal de domínio de tempo é  $T = 1$

(b)  $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.10(a)

(c)  $X(j\omega) =$

$$\begin{cases} \cos(\omega/2) + j \sin(\omega/2), & |\omega| < \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(d)  $X(j\omega)$  conforme é descrito na Figura P3.10(b)

(e)  $X(e^{j\Omega})$  conforme é descrito na Figura P3.10(c)

(f)  $X[k]$  conforme é descrito na Figura P3.10(d)

(g)  $X(e^{j\Omega}) = |\sin(\Omega)|$

- 3.11 Use expansões em frações parciais para determinar a FT inversa dos seguintes sinais:

(a)  $X(j\omega) = \frac{5j\omega + 12}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}$

(b)  $X(j\omega) = \frac{4}{-\omega^2 + 4j\omega + 3}$

(c)  $X(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$

(d)  $X(j\omega) = \frac{-(j\omega)^2 - 4j\omega - 6}{[(j\omega)^2 + 3j\omega + 2](j\omega + 4)}$

(e)  $X(j\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 12j\omega + 14}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 5}$

(f)  $X(j\omega) = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega + 2)^2}$

- 3.12 Use expansões em frações parciais para determinar a DTFT inversa dos seguintes sinais:

(a)  $X(e^{j\Omega}) = \frac{3 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{-\frac{1}{16}e^{-j2\Omega} + 1}$

(b)  $X(e^{j\Omega}) = \frac{3 - \frac{5}{4}e^{-j\Omega}}{\frac{1}{8}e^{-j2\Omega} - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + 1}$

(c)  $X(e^{j\Omega}) = \frac{6}{e^{-j2\Omega} - 5e^{-j\Omega} + 6}$

(d)  $X(e^{j\Omega}) = \frac{6 - 2e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}{(-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + 1)(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$

(e)  $X(e^{j\Omega}) = \frac{6 - \frac{2}{3}e^{-j\Omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}}{-\frac{1}{6}e^{-j2\Omega} + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} + 1}$

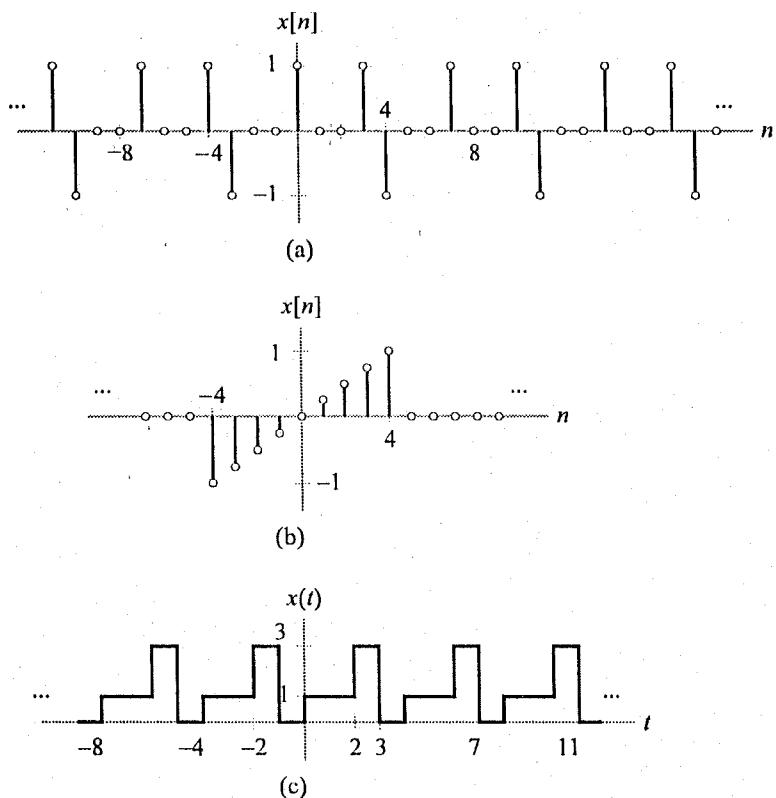


FIGURA P3.9

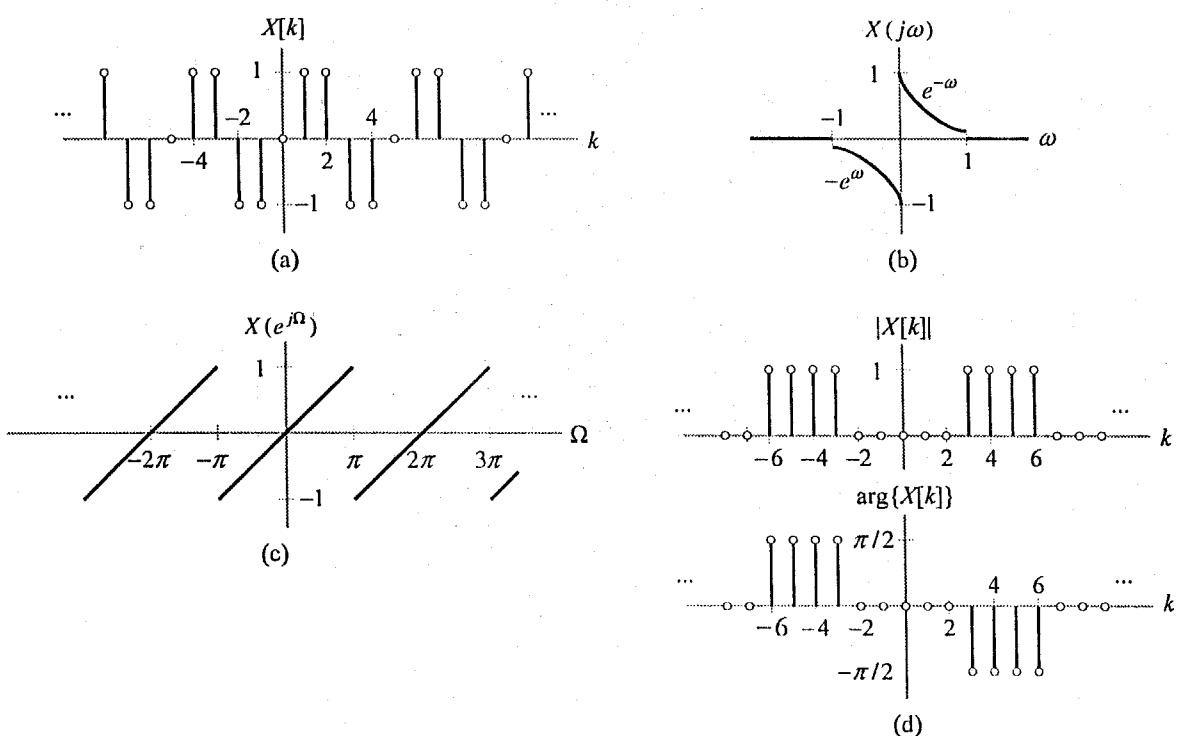


FIGURA P 3.10

- 3.13 Use as tabelas de transformadas e propriedades para encontrar as FTs dos seguintes sinais:

$$(a) \quad x(t) = \sin(\pi t)e^{-2t}u(t)$$

$$(b) \quad x(t) = e^{-3|t-2|}$$

$$(c) \quad x(t) = \left[ \frac{2 \sin(\pi t)}{\pi t} \right] \left[ \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \right]$$

$$(d) \quad x(t) = \frac{d}{dt}(te^{-2t} \sin(t)u(t))$$

$$(e) \quad x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} d\tau$$

$$(f) \quad x(t) = e^{-2t+1}u\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

$$(g) \quad x(t) = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\sin(t)}{\pi t} \right) * \left( \frac{\sin(2t)}{\pi t} \right) \right]$$

- 3.14 Use as tabelas de transformadas e propriedades para encontrar as FTs inversas dos seguintes sinais:

$$(a) \quad X(j\omega) = \frac{j\omega}{(2+j\omega)^2}$$

$$(b) \quad X(j\omega) = \frac{4 \sin(2\omega-2)}{2\omega-2} + \frac{4 \sin(2\omega+2)}{2\omega+2}$$

$$(c) \quad X(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} + 2\pi\delta(\omega)$$

$$(d) \quad X(j\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[ 4 \cos(3\omega) \frac{\sin(2\omega)}{\omega} \right]$$

$$(e) \quad X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega(j\omega+1)}$$

$$(f) \quad X(j\omega) = \text{Im} \left\{ e^{-j3\omega} \frac{1}{j\omega+2} \right\}$$

$$(g) \quad X(j\omega) = \frac{4 \sin^2(\omega)}{\omega^2}$$

- 3.15 Use as tabelas de transformadas e propriedades para encontrar as DTFTs dos seguintes sinais:

$$(a) \quad x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n-2]$$

$$(b) \quad x[n] = (n-2)(u[n-5]-u[n-6])$$

$$(c) \quad x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$$

$$(d) \quad x[n] = \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} \right] * \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-2)\right)}{\pi(n-2)} \right]$$

$$(e) \quad x[n] = \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n} \right]$$

- 3.16 Use as tabelas de transformadas e propriedades para encontrar as DTFTs inversas dos seguintes sinais:

$$(a) \quad X(e^{j\Omega}) = \cos(2\Omega) + 1$$

$$(b) \quad X(e^{j\Omega}) = \left[ \frac{\sin(\frac{15}{2}\Omega)}{\sin(\Omega/2)} \right] \oplus \left[ e^{-j3\Omega} \frac{\sin(\frac{7}{2}\Omega)}{\sin(\Omega/2)} \right]$$

$$(c) \quad X(e^{j\Omega}) = \cos(\Omega) \left[ \frac{\sin(\frac{3}{2}\Omega)}{\sin(\Omega/2)} \right]$$

$$(d) \quad X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & \pi/4 < |\Omega| < 3\pi/4 \\ 0, & \text{caso contrário para } |\Omega| < \pi \end{cases}$$

$$(e) \quad X(e^{j\Omega}) = e^{-j(4\Omega+\pi/2)} \frac{d}{d\Omega} \left[ \frac{2}{1 + \frac{1}{4}e^{-j(\Omega-\pi/8)}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{4}e^{-j(\Omega+\pi/8)}} \right]$$

- 3.17 Use o par de FTs

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega}$$

e as propriedades da FT para avaliar as representações em domínio de freqüência dos sinais descritos na Figura P3.17(a)-(i).

- 3.18 Temos  $x[n] = n(-\frac{1}{2})^n u[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega})$ . Sem avaliar  $X(e^{j\Omega})$ , encontre  $y[n]$  se  $Y(e^{j\Omega})$  for dado por

$$(a) \quad Y(e^{j\Omega}) = e^{j3\Omega} X(e^{j\Omega})$$

$$(b) \quad Y(e^{j\Omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\Omega})\}$$

$$(c) \quad Y(e^{j\Omega}) = \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega})$$

$$(d) \quad Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \oplus X(e^{j(\Omega-\pi)})$$

$$(e) \quad Y(e^{j\Omega}) = \frac{d}{d\Omega} [e^{j2\Omega} (e^{j\Omega})]$$

$$(f) \quad Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + X(e^{-j\Omega})$$

$$(g) \quad Y(e^{j\Omega}) = \frac{d}{d\Omega} \{ e^{-j2\Omega} [X(e^{j(\Omega+\pi/4)}) - X(e^{j(\Omega-\pi/4)})] \}$$

- 3.19 Um sinal periódico tem a representação por FS  $x(t) \xrightarrow{\text{FS}; \pi} X[k] = -k 2^{-|k|}$ . Sem determinar  $x(t)$ , encontre a representação por FS ( $Y[k]$  e  $\omega_p$ ) se  $y(t)$  for dado por:

$$(a) \quad y(t) = x(2t)$$

$$(b) \quad y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$(c) \quad y(t) = x(t - \frac{1}{4})$$

$$(d) \quad y(t) = \text{Re}\{x(t)\}$$

$$(e) \quad y(t) = \cos(2\pi t)x(t)$$

$$(f) \quad y(t) = x(t) \oplus x(t - \frac{1}{2})$$

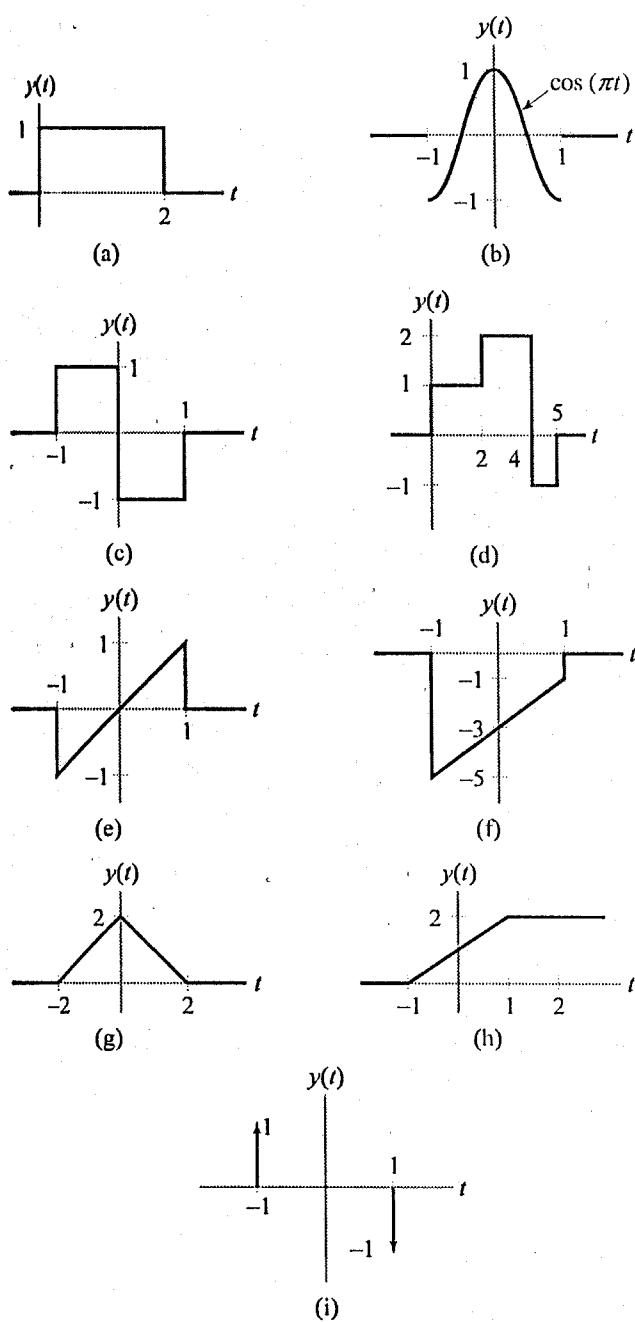


FIGURA P3.17

3.20 Dado

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{11\pi}{20}n\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{20}n\right)} \xrightarrow{DTFS; \pi/10} X[k]$$

avalie o sinal no domínio de tempo  $y[n]$  com os seguintes coeficientes da DTFS usando somente propriedades da DTFS.

- (a)  $Y[k] = X[k-5] + X[k+5]$
- (b)  $Y[k] = \cos(k\pi/5)X[k]$
- (c)  $Y[k] = X[k] \oplus X[k]$
- (d)  $Y[k] = \operatorname{Re}\{X[k]\}$

3.21 Avalie as seguintes quantidades:

- (a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}|^2} d\Omega$
- (b)  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k\pi/4)}{k^2}$
- (c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(\omega^2 + 1)^2} d\omega$
- (d)  $\sum_{k=0}^{19} \frac{\sin^2\left(\frac{11\pi}{20}k\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{20}k\right)}$
- (e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi t^2} dt$

3.22 Use a propriedade de dualidade das representações de Fourier para avaliar o seguinte:

- (a)  $x(t) \xrightarrow{FT} e^{-2\omega}u(\omega)$
- (b)  $\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{FT} X(j\omega)$
- (c)  $\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{20}n\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{20}n\right)} \xrightarrow{DTFS; \pi/10} X[k]$

3.23 Para o sinal  $x(t)$  mostrado na Figura P3.23, avalie as quantidades seguintes sem computar explicitamente  $X(j\omega)$ :

- (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$
- (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$
- (c)  $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j2\omega} d\omega$
- (d)  $\arg\{X(j\omega)\}$
- (e)  $X(j0)$

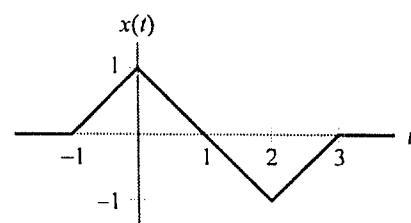


FIGURA P3.23

- 3.24 Admitamos que  $x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$ , em que  $X(e^{j\Omega})$  é descrito na Figura P3.24. Avalie o seguinte, sem computar  $x[n]$  explicitamente.

- (a)  $x[0]$
- (b)  $\arg[x[n]]$
- (c)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$
- (d)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$
- (e)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j(\pi/4)n}$

- 3.25 Prove as seguintes propriedades:

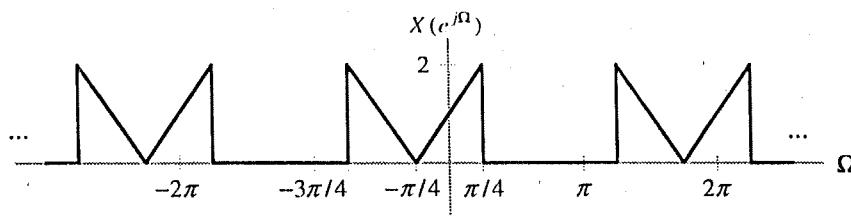
- (a) As propriedades de simetria da FS para:
  - (i) Sinais de tempo com valores reais
  - (ii) Sinais de tempo reais e pares
- (b) A propriedade de deslocamento no tempo da DTFT.
- (c) A propriedade de deslocamento em freqüência da DTFS.
- (d) Linearidade para a FT.
- (e) A propriedade de convolução da DTFT.
- (f) A propriedade de modulação da DTFT.
- (g) A propriedade de convolução da DTFS.
- (h) A propriedade de modulação da FS.
- (i) A relação de Parseval para a FS.

- 3.26 Neste problema, mostramos que os pulsos gaussianos atingem o limite inferior no produto tempo – largura de faixa. *Sugestão:* Use as integrais absolutas do Apêndice A.4.

- (a) Admitamos que  $x(t) = e^{-t^2/2}$ . Encontre a duração efetiva,  $T_d$  e a largura de faixa,  $B_w$ , e avalie o produto tempo – largura de faixa.
- (b) Admitamos que  $x(t) = e^{-t^2/2a^2}$ . Encontre a duração efetiva,  $T_d$  e a largura de faixa,  $B_w$ , e avalie o produto tempo – largura de faixa. O que acontece com  $T_d$ ,  $B_w$  e  $T_d B_w$  quando  $a$  cresce?

- 3.27 Admitamos que

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Use o princípio da incerteza para impor um limite na largura de faixa efetiva dos seguintes sinais:

- (a)  $x(t)$
- (b)  $x(t) * x(t)$

- 3.28 Mostre que o produto tempo – largura de faixa,  $T_d B_w$ , de um sinal  $x(t)$  é invariante à mudança de escala. Ou seja, use a definição de  $T_d$  e  $B_w$  para mostrar que  $x(t)$  e  $x(at)$  tem o mesmo produto tempo – largura de faixa.

- 3.29 A forma da representação por FS apresentada neste capítulo,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$$

é denominada forma exponencial da FS. Neste problema, exploramos diversas maneiras alternativas, ainda que equivalentes, de expressar a representação por FS para sinais periódicos de valor real.

- (a) Forma trigonométrica
  - (i) Mostre que a FS para um sinal de valor real  $x(t)$  pode ser escrita como
  - $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_o t) + b_k \sin(k\omega_o t)$
  - em que  $a_k$  e  $b_k$  são coeficientes de valor real.
  - (ii) Expressse  $a_k$  e  $b_k$  em termos de  $X[k]$ . Expressse também  $X[k]$  em termos de  $a_k$  e  $b_k$ .
  - (iii) Mostre que

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \cos k\omega_o t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \sin k\omega_o t dt$$

- (iv) Mostre que  $b_k = 0$  se  $x(t)$  é par e  $a_k = 0$  se  $x(t)$  é ímpar.

- (b) Forma polar

- (i) Mostre que a FS para o sinal de valor real  $x(t)$  pode ser escrita como

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_o t + \theta_k)$$

FIGURA P3.24

em que  $c_k$  é o módulo (positivo) e  $\theta_k$  é a fase da  $k$ -ésima harmônica.

- (ii) Expressse  $c_k$  e  $\theta_k$  como funções de  $X[k]$ .
- (iii) Expressse  $c_k$  e  $\theta_k$  como funções de  $a_k$  e  $b_k$  a partir de (a).

\*3.30 Diz-se que um sinal com período fundamental  $T$  possui simetria de meia-onda se ele satisfizer  $x(t) = -x(t - T/2)$ . Ou seja, metade de um período do sinal é o negativo da outra metade. Mostre que os coeficientes da FS associados com harmônicas pares,  $X[2k]$ , são nulos para todos os sinais com simetria de meia-onda.

\*3.31 Neste problema, exploramos uma representação matricial da DTFS. A DTFS expressa os  $N$  valores de domínio de tempo de um sinal  $x[n]$  com período  $N$  como uma função de  $N$  valores de domínio de freqüência,  $X[k]$ . Defina os vetores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que a representação por DTFS

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_o n},$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

pode ser escrita na forma matricial como  $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{X}$ , em que  $\mathbf{V}$  é uma matriz  $N$  por  $N$ . Encontre os elementos de  $\mathbf{V}$ .

- (b) Mostre que a expressão para os coeficientes da DTFS

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_o n},$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

pode ser escrita na forma de vetor matricial como  $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{W}$  é uma matriz  $N$  por  $N$ . Encontre os elementos de  $\mathbf{W}$ .

- (c) A expressão  $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{X}$  implica que  $\mathbf{X} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ , desde que  $\mathbf{V}$  seja uma matriz não singular. Comparando esta equação com os resultados de (b), concluímos que  $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$ . Mostre que isto é verdadeiro, fazendo  $\mathbf{WV} = \mathbf{I}$  em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Sugestão: Use as definições de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  determinadas em (a) e (b) para obter uma expressão para o elemento na  $l$ -ésima linha e  $m$ -ésima coluna de  $\mathbf{WV}$ .

\*3.32 Neste problema, encontramos os coeficientes  $X[k]$  da FS minimizando o erro médio quadrático (MSE) entre o sinal  $x(t)$  e sua aproximação por FS. Defina o termo  $J$  da FS

$$\hat{x}_J(t) = \sum_{k=-J}^J A[k] e^{jk\omega_o t}$$

e o MSE do termo  $J$  como a diferença quadrática média ao longo de um período

$$MSE_J = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t) - \hat{x}_J(t)|^2 dt$$

- (a) Substitua a representação com série em  $\hat{x}_J(t)$  e expanda o módulo ao quadrado usando a identidade  $|a+b|^2 = (a+b)(a^*+b^*)$  para obter

$$\begin{aligned} MSE_J &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt \\ &\quad - \sum_{k=-J}^J A^*[k] \left( \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt \right) \\ &\quad - \sum_{k=-J}^J A[k] \left( \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk\omega_o t} dt \right) \\ &\quad + \sum_{m=-J}^J \sum_{k=-J}^J A^*[k] A[m] \left( \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{-jk\omega_o t} e^{jm\omega_o t} dt \right) \end{aligned}$$

- (b) Defina

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt$$

e use a ortogonalidade de  $e^{jk\omega_o t}$  e  $e^{jm\omega_o t}$  para mostrar que

$$\begin{aligned} MSE_J &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-J}^J A^*[k] X[k] \\ &\quad - \sum_{k=-J}^J A[k] X^*[k] + \sum_{k=-J}^J |A[k]|^2 \end{aligned}$$

- (c) Use a técnica de completar o quadrado para mostrar que

$$\begin{aligned} MSE_J &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt \\ &\quad + \sum_{k=-J}^J |A[k] - X[k]|^2 - \sum_{k=-J}^J |X[k]|^2 \end{aligned}$$

- (d) Encontre o valor de  $A[k]$  que minimiza o  $MSE_J$ .
- (e) Expressse o  $MSE_J$  mínimo como uma função de  $x(t)$  e  $X[k]$ . O que acontece com o  $MSE_J$  quando  $J$  cresce?

- \*3.33 *Série de Fourier Generalizada.* O conceito da série de Fourier pode ser generalizada para somas de sinais que não sejam senóides complexas. Ou seja, dado um sinal  $x(t)$ , podemos aproximar  $x(t)$  num intervalo  $[t_1, t_2]$  como uma soma ponderada de  $N$  funções  $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)$ :

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_k \phi_k(t)$$

Vamos supor que estas  $N$  funções sejam mutuamente ortogonais em  $[t_1, t_2]$ . Isto significa que

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_k(t) \phi_l^*(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ f_k, & k = l \end{cases}$$

em que  $f_k$  é uma certa constante. O MSE, usando-se esta aproximação é

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) - \sum_{k=0}^{N-1} c_k \phi_k(t) \right|^2 dt$$

- (a) Mostre que o MSE é minimizado escolhendo-se  $c_k = (1/f_k) \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_k^*(t) dt$ . Sugestão: Generalize os passos esboçados no Problema 3.32(a) - (d) para este problema.

- (b) Mostre que o MSE é nulo se

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{N-1} f_k |c_k|^2$$

Se esta relação valer para todos  $x(t)$  numa dada classe de funções, diz-se então que as funções básicas  $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)$  são completas" para essa classe.

- (c) As funções de Walsh são um conjunto de funções ortogonais que são úteis para a representação de sinais em  $[0, 1]$ . Determine o  $c_k$  e o MSE obtidos aproximando-se os sinais seguintes com as seis primeiras funções de Walsh apresentadas na Figura P3.33. Esboce o sinal e a aproximação por função de Walsh.

$$(i) \quad x(t) = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0, & 0 < t < \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < t < 1 \end{cases}$$

$$(ii) \quad x(t) = \sin(\pi t)$$

- (d) Os polinômios de Legendre são outro conjunto de funções ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$ . Elas são obtidas da equação de diferença

$$\phi_k(t) = \frac{2k-1}{k} t \phi_{k-1}(t) - \frac{k-1}{k} \phi_{k-2}(t)$$

usando as funções iniciais  $\phi_0(t) = 1$  e  $\phi_1(t) = t$ . Determine o  $c_k$  e o MSE obtidos aproximando os sinais seguintes com os seis primeiros polinômios de Legendre.

$$(i) \quad x(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & -1 < t < 0, \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

$$(ii) \quad x(t) = \sin(\pi t)$$

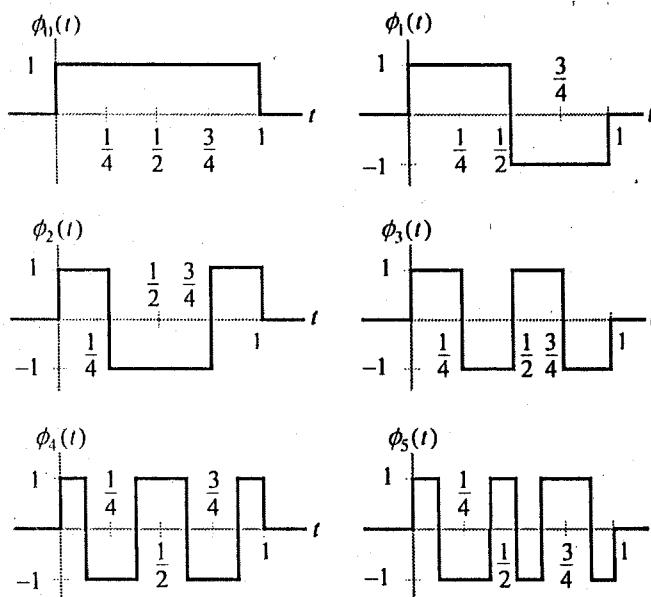


FIGURA P3.33

- \*3.34 Podemos derivar a FT da FS descrevendo um sinal não periódico como a forma limite de um sinal periódico cujo período,  $T$ , tende ao infinito. Para fazer esta aproximação, supomos que existe a FS da versão periódica do sinal, que o sinal não periódico é nulo para  $|t| > T/2$ , e que o limite quando  $T$  tende ao infinito é tomado de maneira simétrica. Defina o sinal não-periódico de duração finita  $x(t)$  como um período do sinal periódico  $\tilde{x}(t)$  de período  $T$

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

- (a) Trace graficamente um exemplo de  $x(t)$  e  $\tilde{x}(t)$  para demonstrar que quando  $T$  cresce, as réplicas periódicas de  $x(t)$  em  $\tilde{x}(t)$  são deslocadas cada vez mais para longe da origem. Por fim, quando  $T$  se aproxima do infinito, estas réplicas são removidas para o infinito. Dessa forma, escrevemos

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t)$$

- (b) A representação por FS do sinal periódico  $\tilde{x}(t)$  é

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_o t} dt$$

Mostre que  $X[k] = \frac{1}{T} X(jk\omega_o)$ , em que

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- (c) Substitua esta definição de  $X[k]$  na expressão para  $\tilde{x}(t)$  em (b) e mostre que

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o) e^{jk\omega_o t} \omega_o$$

- (d) Use a expressão limite para  $x(t)$  em (a) e defina  $\omega \approx k\omega_0$  para expressar a forma limite da soma em (c) como a integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

### ► Experiências no Computador

**3.35** Use o MATLAB para repetir o Exemplo 3.3 para  $N = 50$  e (a)  $M = 12$ , (b)  $M = 5$ , e (c)  $M = 20$ .

**3.36** Use o comando MATLAB fft para repetir o Problema 3.1.

**3.37** Use o comando MATLAB ifft para repetir o Problema 3.2.

**3.38** Use o comando MATLAB fft para repetir o Exemplo 3.4.

**3.39** Use o MATLAB para repetir o Exemplo 3.7. Avalie o sobre-sinal para  $J = 29, 59$  e  $99$ .

**3.40** Admitamos que  $x(t)$  seja a onda triangular descrita na Figura P3.40.

- (a) Encontre os coeficientes da FS,  $X[k]$ .  
 (b) Mostre que a representação por FS para  $x(t)$  pode ser expressa na forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B[k] \cos(k\omega_0 t)$$

- (c) Defina o termo  $J$  da aproximação por soma parcial para  $x(t)$  quando

$$\hat{x}_J(t) = \sum_{k=0}^J B[k] \cos(k\omega_0 t)$$

Use o MATLAB para avaliar e plotar um período do  $J$ -ésimo termo desta soma e  $\hat{x}_J(t)$  para  $J = 1, 3, 7, 29$  e  $99$ .

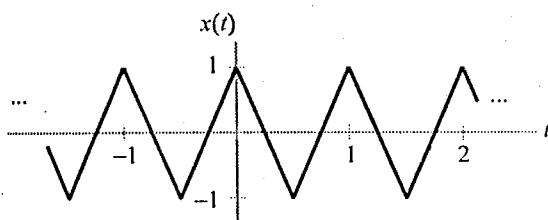


FIGURA P3.40

**3.41** Repita o Problema 3.40 para o trem de impulsos dado por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

- 3.42** Use o MATLAB para repetir o Exemplo 3.8 usando os seguintes valores para a constante de tempo:

- (a)  $RC = 0,01$  s.  
 (b)  $RC = 0,1$  s.  
 (c)  $RC = 1$  s.

**3.43** Avalie a resposta em freqüência do filtro truncado do Exemplo 3.32. Você pode fazer isto no MATLAB escrevendo um arquivo M para avaliar

$$H_t(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^M h[n] e^{-j\Omega n}$$

para um número grande ( $> 1.000$ ) de valores de  $\Omega$  no intervalo  $-\pi < \Omega \leq \pi$ . Plote o módulo da resposta em freqüência em dB ( $20 \log_{10} |H_t(e^{j\Omega})|$ ) para os seguintes valores de  $M$ :

- (a)  $M = 4$   
 (b)  $M = 10$   
 (c)  $M = 25$   
 (d)  $M = 50$

Discuta o efeito de se aumentar  $M$  sobre a exatidão com a qual  $H_t(e^{j\Omega})$  aproxima  $H(e^{j\Omega})$ .

**3.44** Use o MATLAB para verificar se o produto tempo-largura de faixa de uma onda quadrada de tempo discreto é aproximadamente independente do número de valores diferentes de zero em cada período quando a duração é definida como o número de valores diferentes de zero na onda quadrada e a largura de faixa é definida como a largura do lóbulo principal. Defina um período da onda quadrada como

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < M \\ 0, & M \leq n \leq 999 \end{cases}$$

Avalie a largura de faixa usando primeiro os comandos fft e abs para obter o espectro de magnitude e depois conte o número de coeficientes da DTFS no lóbulo principal para  $M = 10, 20, 40, 50, 100$  e  $200$ .

**3.45** Use a função MATLAB Tdbw introduzida na seção 3.7 para avaliar e traçar graficamente o produto tempo-largura de faixa como uma função da duração para as seguintes classes de sinais:

- (a) Trens de pulsos retangulares. Faça com que o pulso num único período seja de tamanho  $M$  e varie  $M$  de  $51$  a  $701$  em degraus de  $50$ .  
 (b) Trens de pulso de co-seno elevado. Faça com que o pulso num único período seja de tamanho  $M$  e varie  $M$  de  $51$  a  $701$  em degraus de  $50$ .  
 (c) Trens de pulso gaussiano. Faça com que  $x[n] = e^{-an^2}$ ,  $-500 \leq n \leq 500$ , represente o pulso gaussiano num único período. Varie a duração de pulso admitindo que  $a$  assuma os seguintes valores:  $0,00005, 0,0001, 0,0002, 0,0005, 0,001, 0,002$  e  $0,005$ .

# 4

## APLICAÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES DE FOURIER



### 4.1 *Introdução*

No capítulo anterior, desenvolvemos representações de Fourier para quatro classes de sinais distintas: a série de Fourier de tempo discreto (DTFS) para sinais periódicos de tempo discreto, a série de Fourier (FS) para sinais periódicos de tempo contínuo, a transformada de Fourier de tempo discreto (DTFT) para sinais não periódicos de tempo discreto, e a transformada de Fourier (FT) para sinais não periódicos de tempo contínuo. Concentraremos agora nas aplicações destas representações de Fourier. As duas aplicações mais comuns são (1) análise da interação entre sinais e sistemas, e (2) avaliação numérica das propriedades do sinal ou do comportamento do sistema. A FT e a DTFT são as mais comumente usadas para aplicações envolvendo análise, enquanto que a DTFS é a principal representação usada para aplicações computacionais. A primeira, e maior, parte deste capítulo é dedicada à apresentação das aplicações de análise; as aplicações computacionais serão discutidas brevemente no final do capítulo.

Um aspecto importante da aplicação das representações de Fourier é lidar com situações em que há uma combinação de classes de sinais. Por exemplo, se aplicarmos um sinal periódico a um sistema estável, a representação por convolução da saída do sistema envolverá uma combinação de classes de sinais não periódicos (resposta ao impulso) e periódicos (entrada). Um sistema que faz amostragem de sinais de tempo contínuo envolve tanto sinais de tempo contínuo como de tempo discreto. Para usarmos os métodos de Fourier para analisar essas interações, devemos construir pontes entre as representações de Fourier para diferentes classes de sinais. Estabeleceremos estas relações neste capítulo. Especificamente, desenvolvemos representações por FT e DTFT para sinais periódicos de tempo contínuo e discreto, respectivamente. Podemos usar então a FT para analisar aplicações de tempo contínuo que envolvem uma combinação de sinais periódicos e não periódicos. Similarmente, a DTFT pode ser usada para analisar combinações de sinais periódicos e não periódicos de tempo discreto. Por fim, desenvolvemos uma representação por FT para sinais de tempo discreto para tratar de problemas que envolvem combinações de sinais de tempo contínuo e discreto.

Iniciamos este capítulo relacionando a descrição com resposta em freqüência de um sistema LTI com as descrições em domínio de tempo apresentadas no Capítulo 2. Revisitaremos então a convolução e a modulação, considerando aplicações em que sinais periódicos e não periódicos interagem usando representações por FT e DTFT para sinais periódicos. Em seguida, analisaremos o processo de amostragem de sinais e reconstrução de sinais de tempo contínuo a partir de amostras, usando a representação por FT para sinais discretos. Estas questões são de importância fundamental quando quer que um computador seja usado para manipular sinais de tempo contínuo. Computadores são usados para manipular sinais em sistemas de comunicação (Capítulo 5), para o propósito de filtragem (Capítulo 8) e controle (Capítulo 9). Nossa análise revela as limitações associadas com o processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo e sugere um sistema prático que as minimiza.

Lembre-se que a DTFS é a única representação de Fourier que pode ser avaliada de maneira exata num computador. Conseqüentemente, ela encontra extenso uso em algoritmos numéricos para processamento de sinais. Concluímos este capítulo examinando duas utilizações comuns da DTFS: aproximação numérica da FT e implementação eficiente da convolução em tempo discreto. Em ambas, é essencial uma clara compreensão da relação entre as representações de Fourier para diferentes classes de sinais para que se possa obter uma interpretação correta dos sinais.

No decurso da aplicação das representações de Fourier, descobrimos as relações entre todas as quatro. Um cuidadoso entendimento destas relações é um primeiro passo crítico no uso dos métodos de Fourier para resolver problemas que envolvem sinais e sistemas.

## 4.2 Resposta em Freqüência de Sistemas LTI

Nesta seção, usaremos a FT e a DTFT para explorar as relações entre as descrições de sistemas no domínio de tempo introduzidas no Capítulo 2 e a correspondente resposta em freqüência do sistema. A resposta em freqüência fornece uma caracterização útil e intuitiva do comportamento de entrada-saída do sistema. Isto ocorre porque a convolução no domínio de tempo se transforma em multiplicação no domínio de freqüência: a saída de um sistema é obtida simplesmente multiplicando-se a representação de Fourier da entrada com a resposta em freqüência do sistema. É fácil visualizar e interpretar a operação de multiplicação de duas funções no domínio de freqüência. Iniciamos a discussão examinando a relação entre a resposta em freqüência e a resposta ao impulso, e depois continuamos para deduzir as relações entre a resposta em freqüência e a equação diferencial/de diferença e as representações por descrição de variáveis de estado.

### ■ RESPOSTA AO IMPULSO

Estabelecemos no capitulo anterior que a resposta ao impulso e a resposta em freqüência de um sistema de tempo contínuo ou discreto constituem um par FT ou DTFT, respectivamente. Lembre-se que a resposta ao impulso  $h(t)$  de um sistema de entrada limitada, saída limitada (BIBO) é absolutamente integrável, conforme é definido por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Deste modo, as condições de Dirichlet são satisfeitas e a FT de  $h(t)$  existe se  $h(t)$  tiver um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades locais sendo cada descontinuidade de tamanho finito. Estas condições são satisfeitas por muitos sistemas físicos. Similarmente, um sistema estável de tempo discreto tem uma resposta ao impulso absolutamente somável, como é definido por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Esta condição é suficiente para garantir a existência da DTFT. Concluímos que a resposta em freqüência existe para sistemas estáveis.

A propriedade de convolução relaciona a entrada e saída de um sistema da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \\ y[n] &= x[n] * h(t) \xrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

A multiplicação que ocorre na representação de domínio de freqüência suscita o surgimento da noção de *filtragem*. O sistema filtra o sinal de entrada, apresentando uma resposta diferente aos componentes de entrada de diferentes freqüências. Frequentemente, descrevemos os sistemas em termos do tipo de filtragem que eles executam no sinal de entrada. Um *filtro passa-baixas* atenua os componentes de alta freqüência da entrada e deixa passar os componentes de freqüência mais baixa. Um *filtro passa-altas* atenua as baixas freqüências e deixa passar as freqüências elevadas. Um *filtro passa-faixa* deixa passar sinais dentro de certa faixa de freqüência e atenua os sinais fora desta faixa. As Figuras 4.1(a) - (c) ilustram filtros passa-baixas, passa-altas e de passagem de faixa *ideais*,

respectivamente, correspondendo tanto a sistemas de tempo contínuo como discreto. Note que a caracterização do filtro de tempo discreto baseia-se em seu comportamento na faixa de freqüência  $-\pi < \Omega \leq \pi$  porque sua resposta em freqüência tem período  $2\pi$ . Conseqüentemente, um filtro passa-altas de tempo discreto deixa passar freqüências próximas a  $\pi$  e atenua freqüências próximas a zero.

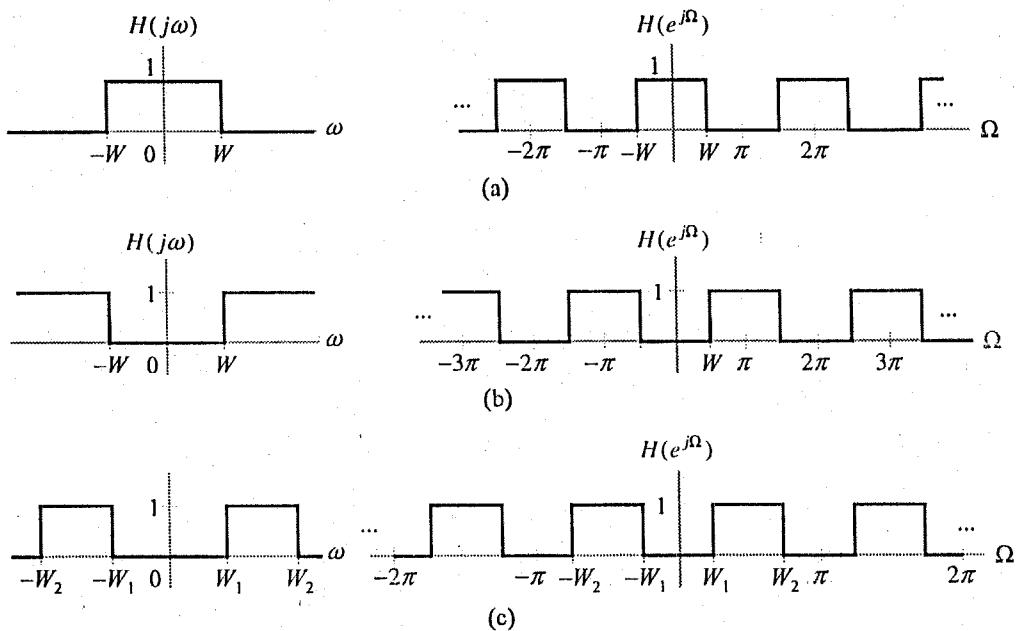


FIGURA 4.1 Resposta em freqüência de filtros ideais de tempo contínuo e discreto. (a) Característica passa-baixas. (b) Característica passa-altas. (c) Característica passa-faixa.

A *faixa de passagem* de um filtro é a faixa das freqüências que são passadas pelo sistema, ao passo que *faixa de rejeição* refere-se à faixa das freqüências que são atenuadas pelo sistema. É impossível construir um sistema prático que tenha as características descontínuas de resposta em freqüência dos sistemas ideais descritos na Figura 4.1. Os filtros reais sempre têm uma transição gradual da faixa de passagem para a faixa de rejeição. A faixa de freqüências ao longo das quais isto ocorre é conhecida como *faixa de transição*. Além disso, os filtros reais não têm ganho nulo ao longo da faixa de rejeição inteira, mas, ao contrário, têm um ganho muito pequeno em relação ao da faixa de passagem. Em geral, filtros com transições agudas da faixa de passagem para a faixa de rejeição são mais difíceis de implementar. Um tratamento detalhado dos filtros será protelado para o Capítulo 8.

A resposta em módulo de um filtro comumente é descrita em unidades de decibéis, ou dB, definidas como

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \text{ ou } 20 \log_{10} |H(e^{j\Omega})|$$

A resposta em módulo na faixa de rejeição normalmente é muito menor do que na faixa de passagem e os detalhes da resposta na faixa de rejeição são difíceis de visualizar numa escala linear.

Usando unidades de dB, exibimos a resposta em módulo numa escala logarítmica e podemos examinar os detalhes da resposta tanto na faixa de passagem como na faixa de rejeição. Note que o ganho unitário corresponde a 0 dB. Conseqüentemente, a resposta em módulo na faixa de passagem do filtro normalmente está próxima de 0 dB. A margem da faixa de passagem comumente é definida pelas freqüências para as quais a resposta é -3 dB. Nestas freqüências, a resposta em módulo é  $1/\sqrt{2}$ . Uma vez que o espectro de energia da saída do filtro é dado por

$$|Y(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2$$

vemos que o ponto de -3dB corresponde às freqüências nas quais o filtro deixa passar somente  $\frac{1}{2}$  da potência de entrada. Freqüentemente, elas são denominadas freqüências de *corte* do filtro.

**EXEMPLO 4.1** A resposta ao impulso do circuito  $RC$  da Figura 4.2(a) foi obtida como

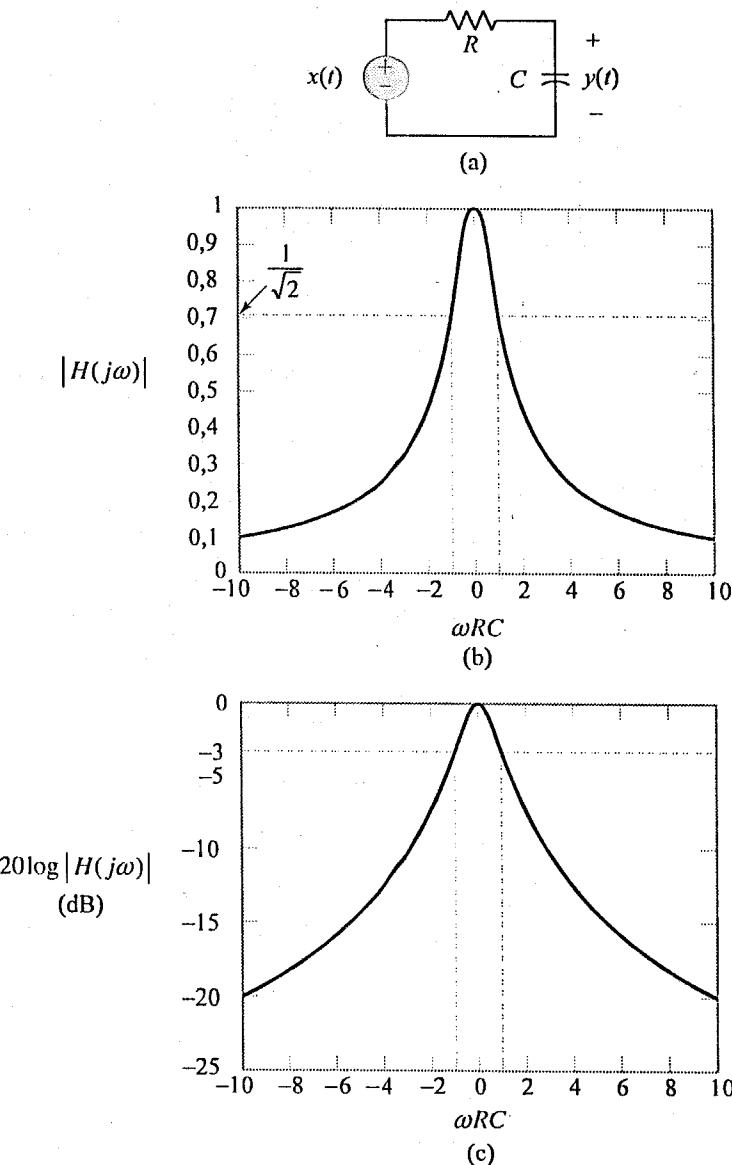
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Trace graficamente a resposta em módulo deste sistema numa escala linear e em dB, e caracterize este sistema como um filtro.

*Solução:* A resposta em frequência deste sistema é

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

A Figura 4.2(b) descreve a resposta em módulo,  $|H(j\omega)|$ . A Figura 4.2(c) ilustra a resposta em módulo em dB. Este sistema tem ganho unitário em baixas freqüências e tende a atenuar as freqüências altas. Conseqüentemente, ele possui uma característica de filtragem passa-baixas. Vemos que a freqüência de corte é  $\omega_c = 1/RC$ , uma vez que a resposta em módulo é  $-3$  dB em  $\omega_c$ . Portanto, a faixa de passagem do filtro vai de 0 a  $1/RC$ .



**FIGURA 4.2** (a) Circuito  $RC$  com entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$ . (b) Resposta em módulo do circuito  $RC$ . (c) Resposta em módulo do circuito  $RC$  em dB.

A propriedade da convolução implica que a resposta em freqüência de um sistema pode ser expressa como a razão entre a FT ou DTFT da saída e a da entrada. Especificamente, para um sistema de tempo contínuo, podemos escrever

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (4.1)$$

e para um sistema de tempo discreto

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} \quad (4.2)$$

Ambas as expressões têm a forma indeterminada 0/0 nas freqüências em que  $X(j\omega)$  ou  $X(e^{j\Omega})$  é nulo. Consequentemente, se os espectros de entrada forem diferentes de zero em todas as freqüências, poderemos determinar a resposta em freqüência de um sistema a partir do conhecimento dos espectros de entrada e saída.

Note que se  $H(j\omega)$  e  $H(e^{j\Omega})$  forem diferentes de zero, as equações (4.1) e (4.2) também implicarão que podemos recuperar a entrada do sistema a partir da saída como

$$X(j\omega) = H^{-1}(j\omega)Y(j\omega)$$

e

$$X(e^{j\Omega}) = H^{-1}(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$$

em que  $H^{-1}(j\omega) = 1/H(j\omega)$  e  $H^{-1}(e^{j\Omega}) = 1/H(e^{j\Omega})$  são as respostas em freqüência dos respectivos sistemas inversos. Um sistema inverso também é conhecido como *equalizador* e o processo de recuperar a entrada a partir da saída é conhecido como *equalização*. Na prática, muitas vezes é difícil ou impossível de construir um sistema inverso exato; neste modo, é usado um inverso aproximado. Por exemplo, um canal de comunicação pode introduzir um retardo de tempo além de distorcer os espectros de módulo e os de fase do sinal. Um equalizador exato teria de introduzir um avanço de tempo, o que implica que ele é não causal e não pode ser implementado. Porém, podemos optar por construir um equalizador aproximado, que compense toda a distorção, exceto o retardo de tempo. Uma introdução para o projeto de equalizadores será apresentada no Capítulo 8.

**EXEMPLO 4.2** A saída de um sistema em resposta a uma entrada  $x(t) = e^{-2t}u(t)$  é  $y(t) = e^{-t}u(t)$ . Encontre a resposta em freqüência e a resposta ao impulso deste sistema.

*Solução:* Tome a FT de  $x(t)$  e  $y(t)$ , obtendo

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

e

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Agora use a definição

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

para obter a resposta em freqüência do sistema

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1}$$

a qual pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \left( \frac{j\omega + 1}{j\omega + 1} \right) + \frac{1}{j\omega + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{j\omega + 1} \end{aligned}$$

Tome a FT inversa de cada termo para obter a resposta ao impulso do sistema:

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

### ■ DESCRIÇÕES POR EQUAÇÃO DIFERENCIAL E DE DIFERENÇAS

Por definição, a resposta em freqüência é a mudança de amplitude e fase que o sistema impõe a uma senóide complexa. Presume-se que a senóide existe para todos os tempos; ela não tem um ponto inicial ou final. Isto implica que a resposta em freqüência é a resposta em estado estacionário do sistema a uma senóide. Em contraste com as descrições por equação diferencial ou de diferenças de um sistema, a descrição por resposta em freqüência não pode representar condições iniciais; ela somente pode descrever um sistema numa condição de estado estacionário.

A representação por equação diferencial de um sistema de tempo contínuo é

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

Tome a FT de ambos os lados desta equação e aplique repetidamente a propriedade de diferenciação

$$\frac{d}{dt} g(t) \xleftarrow{\text{FT}} j\omega G(j\omega)$$

para obter

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

Reorganize esta equação como a razão da FT entre a saída e a da entrada, obtendo

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

Conseqüentemente, a equação (4.1) implica que a resposta em freqüência do sistema é

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (4.3)$$

A resposta em freqüência de um sistema descrito por uma equação diferencial linear de coeficientes constantes é uma razão de dois polinômios em  $j\omega$ . Note que podemos inverter este processo e determinar uma descrição por equação diferencial do sistema a partir da resposta em freqüência, desde que a resposta em freqüência seja expressa como uma razão de polinômios em  $j\omega$ .

A representação por equação de diferenças de um sistema de tempo discreto tem a forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Tome a DTFT de ambos os lados desta equação, usando a propriedade de deslocamento no tempo

$$g[n-k] \xleftarrow{\text{DTFT}} e^{-jk\Omega} G(e^{j\Omega})$$

para obter

$$\sum_{k=0}^N a_k (e^{-j\Omega})^k Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M b_k (e^{-j\Omega})^k X(e^{j\Omega})$$

Reescreva esta equação como a razão

$$\frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (e^{-j\Omega})^k}{\sum_{k=0}^N a_k (e^{-j\Omega})^k}$$

Identificando esta razão com a equação (4.2), temos

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (e^{-j\Omega})^k}{\sum_{k=0}^N a_k (e^{-j\Omega})^k} \quad (4.4)$$

No caso de tempo discreto, a resposta em freqüência é uma razão de polinômios em  $e^{-j\Omega}$ . Dada uma resposta em freqüência que tenha a forma descrita na equação (4.4), podemos inverter nossa derivação para determinar uma descrição por equação de diferenças para o sistema, se o desejarmos.

**EXEMPLO 4.3** Encontre a resposta em freqüência e a resposta em módulo do sistema descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx}{dt} + x(t)$$

**Solução:** Aqui, temos  $N = 2, M = 1$ . Substituindo os coeficientes desta equação diferencial na equação (4.3), obtemos a resposta em freqüência

$$H(j\omega) = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

A resposta ao impulso é dada pela FT inversa de  $H(j\omega)$ . Reescreva  $H(j\omega)$  usando a expansão em frações parciais:

$$\frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 2}$$

Resolvendo  $A$  e  $B$ , obtemos  $A = -1$  e  $B = 3$ . Conseqüentemente,

$$H(j\omega) = \frac{-1}{j\omega + 1} + \frac{3}{j\omega + 2}$$

A FT inversa fornece a resposta ao impulso

$$h(t) = 3e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t)$$

**EXEMPLO 4.4** O sistema mecânico descrito na Figura 4.3(a) tem a força aplicada  $x(t)$  como sua entrada e a posição  $y(t)$  como sua saída. A relação entre  $x(t)$  e  $y(t)$  é regida pela equação diferencial

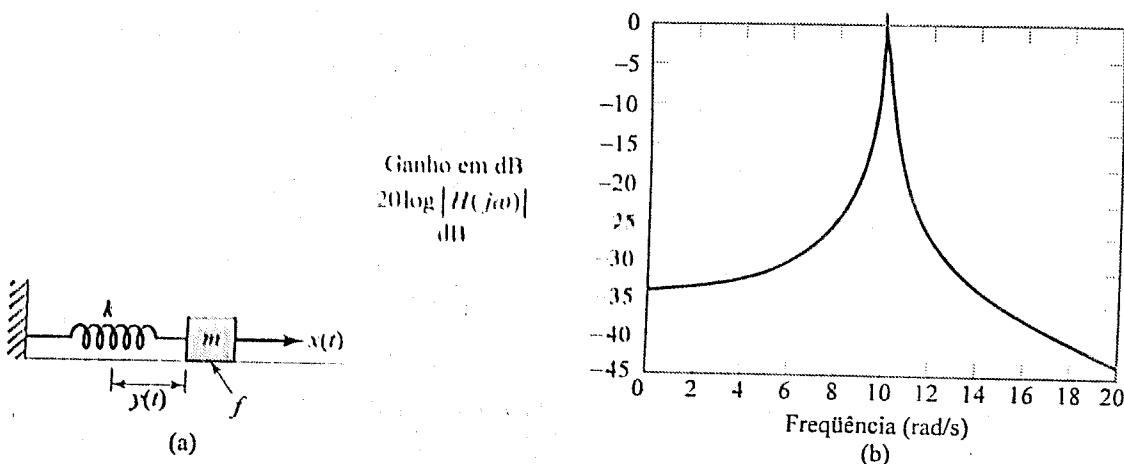
$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) + f\frac{dy}{dt} + ky(t) = x(t)$$

Encontre a resposta em freqüência deste sistema e trace graficamente a resposta em módulo em dB para  $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $f = 0,1 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ , e  $k = 50 \text{ N/m}$ .

**Solução:** A aplicação da equação (4.3) resulta em

$$H(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + f j\omega + k}$$

A Figura 4.3(b) descreve a resposta em módulo em dB para os valores especificados de  $m$ ,  $f$  e  $k$ . Este sistema tende a atenuar freqüências tanto abaixo quanto acima de 10 rad/s. Conseqüentemente, ela tem uma característica de filtragem passa-faixa muito estreita e responde eficientemente a componentes de freqüência de entrada próximos a 10 rad/s.



**FIGURA 4.3** (a) Sistema mecânico com entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$ . (b) Resposta em módulo do sistema.

► EXERCÍCIO 4.1 Encontre a resposta em freqüência e a resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto descrito pela equação das diferenças

$$y[n-2] + 5y[n-1] + 6y[n] = 8x[n-1] + 18x[n]$$

*Resposta:*

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{8e^{-j\Omega} + 18}{(e^{-j\Omega})^2 + 5e^{-j\Omega} + 6}$$

$$h[n] = 2(-\frac{1}{3})^n u[n] + (-\frac{1}{2})^n u[n]$$

► EXERCÍCIO 4.2 Escreva a equação diferencial que relaciona a entrada e a saída do circuito *RC* descrito na Figura 4.2(a). Use os resultados desta subseção para identificar a resposta em freqüência e a resposta ao impulso a partir da equação diferencial.

*Resposta:* Veja o Exemplo 4.1.

### ■ DESCRIÇÃO POR VARIÁVEIS DE ESTADO

A descrição por variáveis de estado de um sistema de tempo contínuo é

$$\frac{d}{dt} q(t) = \Lambda q(t) + b x(t) \quad (4.5)$$

$$y(t) = c q(t) + D x(t) \quad (4.6)$$

Determinaremos a resposta em freqüência em termos de ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{D}$ ) tomando a FT de ambos os lados destas equações usando a propriedade de diferenciação. Iniciando com a equação (4.5), temos

$$j\omega q(j\omega) = \mathbf{A}q(j\omega) + \mathbf{b}X(j\omega) \quad (4.7)$$

em que definimos a FT do vetor estado como o vetor que contém a FT de cada variável de estado. Ou seja,

$$q(j\omega) = \begin{bmatrix} Q_1(j\omega) \\ Q_2(j\omega) \\ \vdots \\ Q_N(j\omega) \end{bmatrix}$$

em que a  $i$ -ésima entrada em  $q(j\omega)$  é a FT da  $i$ -ésima variável de estado,  $q_i(t) \xrightarrow{\text{FT}} Q_i(j\omega)$ . Podemos reescrever a equação (4.7) como

$$j\omega q(j\omega) - \mathbf{A}q(j\omega) = \mathbf{b}X(j\omega)$$

$$(j\omega I - \mathbf{A})q(j\omega) = \mathbf{b}X(j\omega)$$

e, dessa forma, escrevermos

$$q(j\omega) = (j\omega I - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X(j\omega) \quad (4.8)$$

Aqui,  $I$  é a matriz identidade  $N$  por  $N$ . Tome agora a FT da equação (4.6) para obter

$$Y(j\omega) = \mathbf{c}q(j\omega) + \mathbf{D}X(j\omega)$$

e substitua usando a equação (4.8) para obter

$$Y(j\omega) = (\mathbf{c}(j\omega I - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{D})X(j\omega) \quad (4.9)$$

Desde que, por definição,

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

portanto, concluímos que

$$H(j\omega) = \mathbf{c}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D \quad (4.10)$$

é a expressão para a resposta em freqüência definida em termos da descrição por variáveis de estado ( $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, D$ ).

Podemos derivar a resposta em freqüência de um sistema de tempo discreto em termos de ( $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, D$ ) definindo um conjunto análogo de passos e usando a propriedade do deslocamento no tempo em lugar propriedade da diferenciação. O resultado é

$$H(e^{j\Omega}) = \mathbf{c}(e^{j\Omega}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D \quad (4.11)$$

**EXEMPLO 4.5** Determine a resposta em freqüência do sistema de tempo contínuo com descrição por variáveis de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= [3 \quad 1], & D &= [0] \end{aligned}$$

**Solução:** A resposta em freqüência é determinada substituindo-se ( $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, D$ ) na equação (4.10). Inicie, avaliando  $(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ . Para este exemplo, temos

$$\begin{aligned} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} j\omega - 2 & 1 \\ -1 & j\omega \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(j\omega)^2 - 2j\omega + 1} \begin{bmatrix} j\omega & -1 \\ 1 & j\omega - 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substitua agora  $\mathbf{c}$ ,  $(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $D$  na equação (4.10) para obter

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= [3 \quad 1] \frac{1}{(j\omega)^2 - 2j\omega + 1} \begin{bmatrix} j\omega & -1 \\ 1 & j\omega - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{(j\omega)^2 - 2j\omega + 1} [3j\omega + 1 \quad j\omega - 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3j\omega + 1}{(j\omega)^2 - 2j\omega + 1} \end{aligned}$$

► **EXERCÍCIO 4.3** Encontre a resposta em freqüência de um sistema de tempo discreto com descrição por variáveis de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= [0 \quad 2], & D &= [1] \end{aligned}$$

**Resposta:**

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{(e^{j\Omega})^2 + 5e^{j\Omega} + 8}{(e^{j\Omega})^2 + 3e^{j\Omega} + 2}$$

No capítulo 2, observamos que pode haver muitas descrições com variáveis de estado para um sistema com determinada característica de entrada-saída. Estas diferentes descrições por variáveis de estado são obtidas transformando-se o vetor estado do sistema com uma matriz não singular  $T$ . Uma vez que a resposta em freqüência de um sistema é uma descrição de entrada-saída, ela também deve ser invariante a transformações do vetor estado. Provaremos agora esta importante propriedade de um sistema LTI.

Admitamos que

$$H(j\omega) = \mathbf{c}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D$$

seja a resposta em freqüência de um sistema de tempo contínuo com descrição por variáveis de estado ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $D$ ). Transforme agora o vetor estado com uma matriz não singular  $\mathbf{T}$  para obter uma nova descrição por variáveis de estado ( $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}'$ ,  $D'$ ). A resposta em freqüência do sistema transformado é

$$H'(j\omega) = \mathbf{c}'(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{b}' + D'$$

No capítulo 2 estabelecemos que  $\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{b}' = \mathbf{T}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}' = \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}$ , e  $D' = D$ . Substitua estas relações na expressão para  $H'(j\omega)$  para obter

$$H'(j\omega) = \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} + D$$

Escreva  $\mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}$  e a substitua na equação acima para obter

$$\begin{aligned} H'(j\omega) &= \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}(j\omega\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} + D \\ &= \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} + D \end{aligned}$$

Use agora a identidade do inverso de um produto de matrizes invertíveis  $(\mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{H})^{-1} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^{-1}$  para escrever

$$\begin{aligned} H'(j\omega) &= \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} + D \\ &= \mathbf{c}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que  $H'(j\omega) = H(j\omega)$  e concluímos que a resposta em freqüência de um sistema LTI é invariante a transformações de seu vetor estado. Um resultado análogo vale para sistemas de tempo discreto.

### 4.3 Representações com Transformada de Fourier para Sinais Periódicos

Lembre-se que a FS e a DTFS foram derivadas como representações de Fourier para sinais periódicos. Estritamente falando, nem a FT nem a DTFT converge para sinais periódicos. Porém, ao incorporar impulsos na FT e DTFT de maneira apropriada, podemos desenvolver representações de FT e DTFT para sinais periódicos. Estas representações satisfazem as propriedades esperadas da FT e DTFT. Por isso, podemos usar estas representações e as propriedades da FT ou DTFT para analisar problemas que envolvem combinações de sinais periódicos e não periódicos. Nossa derivação também indica a relação entre as representações por série de Fourier e as representações por transformada de Fourier. Iniciamos com o caso de tempo contínuo.

#### ■ RELACIONANDO A FT COM A FS

A representação por FS de um sinal periódico  $x(t)$  é

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} \quad (4.12)$$

em que  $\omega_0$  é a freqüência fundamental de  $x(t)$ . Agora, observe que a FT inversa de um impulso deslocado em freqüência,  $\delta(\omega - k\omega_0)$ , é uma senóide complexa com freqüência  $k\omega_0$ , como é mostrado por

$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4.13)$$

Não obstante  $e^{jk\omega_0 t}$  ser uma função periódica e, deste modo, não possuir uma FT convergente, obtemos este par FT como uma consequência da propriedade de peneiramento da função impulso.

Substitua o par FT da equação (4.13) na representação por FS da equação (4.12) e use a propriedade de linearidade da FT para obter

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4.14)$$

Conseqüentemente, a FT de um sinal periódico é uma série de impulsos espaçados pela freqüência fundamental  $\omega_0$ . O  $k$ -ésimo impulso tem força  $2\pi X[k]$ , em que  $X[k]$  é o  $k$ -ésimo coeficiente da FS. A Figura 4.4 ilustra esta relação. Ao longo deste capítulo denotamos a força de impulsos nas figuras pela altura dos mesmos, como é indicado pelos rótulos no eixo vertical. Isto é feito unicamente por conveniência ao apresentar o grande número de impulsos que ocorrem. Usando esta convenção, vemos que a forma de  $X(j\omega)$  é idêntica à de  $X[k]$ .

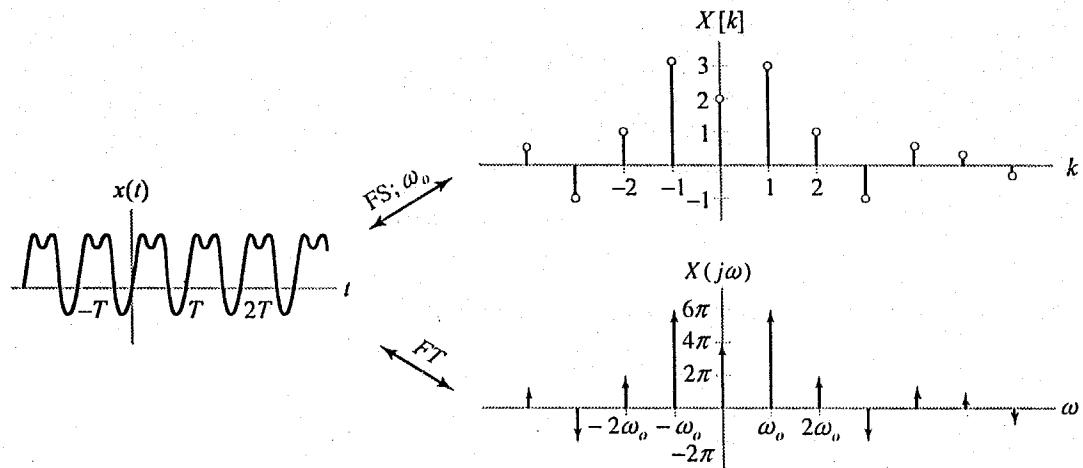


FIGURA 4.4 Representações por FS e FT de um sinal periódico de tempo contínuo.

A equação (4.14) também indica como converter entre as representações por FT e FS de sinais periódicos. A FT é obtida a partir da FS colocando-se impulsos em múltiplos inteiros de  $\omega_0$  e ponderando-os com  $2\pi$  vezes o coeficiente correspondente da FS. Dada uma FT que consiste em impulsos que são uniformemente espaçados em  $\omega$ , obtemos os coeficientes da FS dividindo as forças dos impulsos por  $2\pi$ . A freqüência fundamental corresponde ao intervalo entre os impulsos.

**EXEMPLO 4.6** Encontre a representação por FT para  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

*Solução:* A representação por FS para  $x(t)$  é

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FS, \omega_0} X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \\ 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

Substituir estes coeficientes na equação (4.14) resulta em

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Este par é descrito graficamente na Figura 4.5.

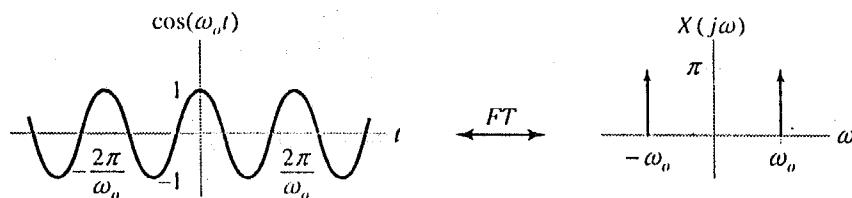


FIGURA 4.5 FT de uma função co-seno.

## EXEMPLO 4.7 Encontre a FT do trem de impulsos

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

*Solução:* Notamos que  $p(t)$  é periódico, com período fundamental  $T$ , de forma que  $\omega_0 = 2\pi/T$  e os coeficientes da FS são dados por

$$\begin{aligned} P[k] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Substituímos estes valores na equação (4.14) para obter

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Conseqüentemente, a FT de um trem de impulsos é outro trem de impulsos. O intervalo entre os impulsos em frequência está inversamente relacionado com o intervalo entre os impulsos em tempo. Este par FT é descrito na Figura 4.6.

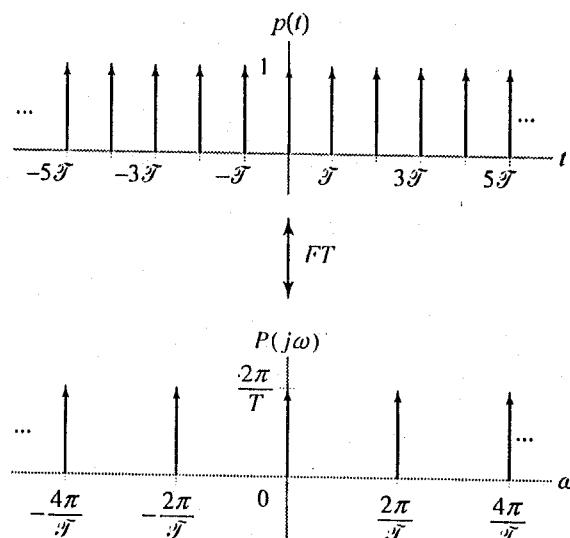


FIGURA 4.6 Um trem de impulsos e sua FT.

► EXERCÍCIO 4.4 Determine a representação por FT para a onda quadrada periódica descrita na Figura 4.7.

*Resposta:*

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k} \delta\left(\omega - k \frac{\pi}{2}\right)$$

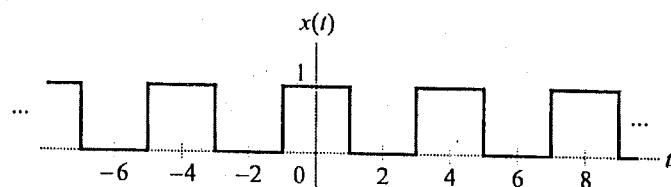


FIGURA 4.7 Onda quadrada correspondente ao Exercício 4.4.

### ■ RELACIONANDO A DTFT COM A DTFS

O método para derivar a DTFT de um sinal periódico de tempo discreto se compara com o do caso de tempo contínuo. A expressão da DTFS para um sinal  $x[n]$  com período  $N$  é

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_o n} \quad (4.15)$$

Como no caso da FS, a observação chave é que a DTFT inversa de um impulso deslocado em freqüência é uma senóide complexa de tempo discreto. A DTFT é uma função de freqüência com período  $2\pi$ , deste modo, podemos expressar um impulso deslocado em freqüência tanto expressando um período

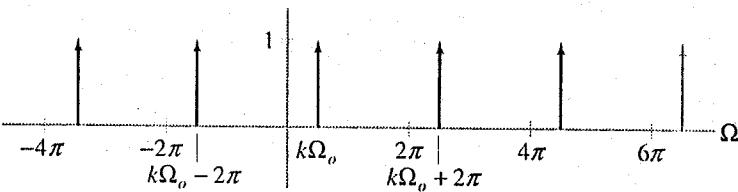
$$\delta(\Omega - k\Omega_o), \quad -\pi < \Omega \leq \pi, \quad -\pi < k\Omega_o \leq \pi$$

ou usando uma série infinita de impulsos deslocados e separados entre si por um intervalo de  $2\pi$  para obter a função com período  $2\pi$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o - m2\pi) \quad (4.16)$$

a qual é descrita na Figura 4.8. A DTFT inversa da equação (4.16) é avaliada usando-se a propriedade de peneiramento da função impulso. Temos

$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_o n} \xleftarrow{\text{DTFT}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o - m2\pi) \quad (4.17)$$



**FIGURA 4.8** Série infinita de impulsos deslocados em freqüência com período  $2\pi$  na freqüência  $\Omega$ .

Conseqüentemente, identificamos a senóide complexa e o impulso deslocado em freqüência como um par DTFT. Esta relação é uma consequência direta das propriedades das funções impulso.

Use a linearidade e substitua a equação (4.17) na equação (4.15) para obter a DTFT do sinal periódico  $x[n]$  como

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_o n} \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o - m2\pi)$$

Uma vez que  $X[k]$  tem período  $N$  e  $N\Omega_o = 2\pi$ , podemos reescrever a DTFT de  $x[n]$  como

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_o n} \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_o) \quad (4.18)$$

Deste modo, a representação por DTFT de um sinal periódico é uma série de impulsos espaçados pela freqüência fundamental  $\Omega_o$ . O  $k$ -ésimo impulso tem força  $2\pi X[k]$ , em que  $X[k]$  é o  $k$ -ésimo coeficiente da DTFS de  $x[n]$ . A Figura 4.9 descreve tanto a representação por DTFS como a por DTFT de um sinal periódico de tempo discreto. Aqui, novamente, vemos que o  $X[k]$  da DTFS e o correspondente  $X(e^{j\Omega})$  da DTFT são similares.

A equação (4.18) estabelece a relação entre a DTFS e a DTFT. Dados os coeficientes da DTFS e a freqüência fundamental  $\Omega_o$ , obtemos a representação por DTFT colocando impulsos em múltiplos inteiros de  $\Omega_o$  e ponderando-os por  $2\pi$  vezes o coeficiente correspondente da DTFS. Invertemos este processo para obter os coeficientes da DTFS a partir da representação por DTFT. Se a DTFT consistir em impulsos que sejam uniformemente espaçados em  $\Omega$ , então obteremos coeficientes da DTFS dividindo as forças dos impulsos por  $2\pi$ . A freqüência fundamental é o intervalo entre os impulsos.

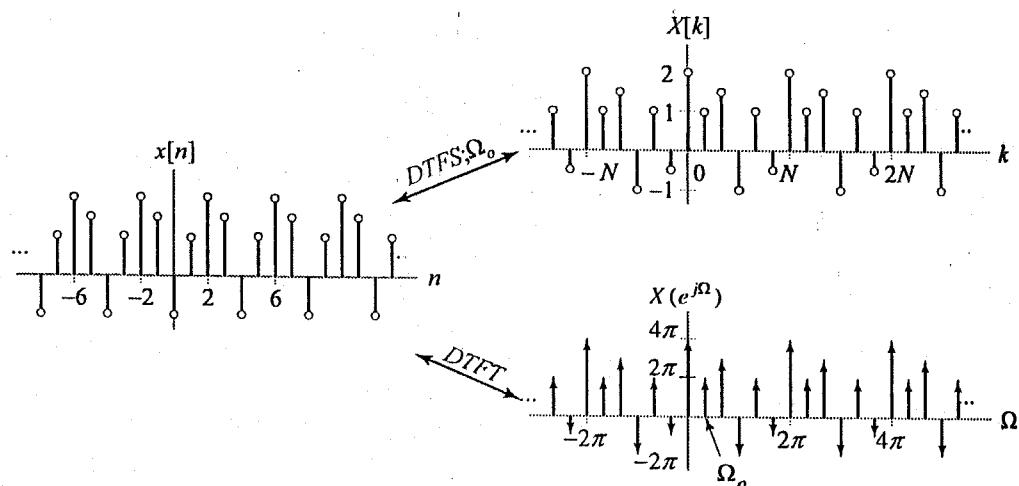


FIGURA 4.9 Representações por DTFS e DTFT de um sinal periódico de tempo discreto.

**EXEMPLO 4.8** Determine a DTFT inversa da representação em domínio de frequência descrita na Figura 4.10.

**Solução:** Expresse um período de  $X(e^{j\Omega})$  como

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2j} \delta(\Omega - \Omega_1) - \frac{1}{2j} \delta(\Omega + \Omega_1), \quad -\pi < \Omega \leq \pi$$

Tome agora a DTFT inversa de cada impulso deslocado em freqüência para obter

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2j} (e^{j\Omega_1 n} - e^{-j\Omega_1 n}) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sin(\Omega_1 n) \end{aligned}$$

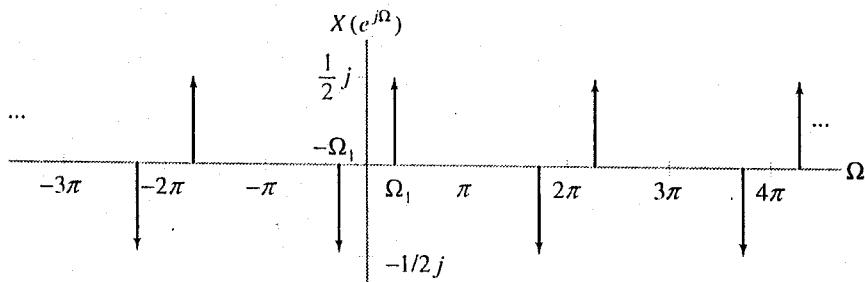


FIGURA 4.10 DTFT do sinal periódico do Exemplo 4.8.

► **EXERCÍCIO 4.5** Encontre as representações por DTFS e DTFT para o sinal periódico

$$x[n] = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

**Resposta:** DTFS:  $\Omega_o = 2\pi/16$

$$X[k] = \begin{cases} -2/j, & k = -4 \\ e^{-j\pi/3}, & k = -3 \\ e^{j\pi/3}, & k = 3 \\ 2/j, & k = 4 \\ 0, & \text{caso contrário } -7 \leq k \leq 8 \end{cases}$$

DTFT: um período

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) = & -\frac{4\pi}{j}\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi e^{-j\pi/3}\delta\left(\Omega + \frac{3\pi}{8}\right) \\ & + 2\pi e^{j\pi/3}\delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{8}\right) + \frac{4\pi}{j}\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right), \quad \pi < \Omega \leq \pi \end{aligned}$$

## 4.4 Convolução e Modulação com Classes Combinadas de Sinais

Nesta seção, usamos as representações por FT e DTFT de sinais periódicos para analisar problemas que envolvem combinações de sinais periódicos e não periódicos. É comum haver uma combinação de sinais periódicos e não periódicos em problemas de convolução e modulação. Por exemplo, se um sinal periódico for aplicado a um filtro estável, a saída será expressa como a convolução do sinal de entrada periódico e a resposta ao impulso não periódica. A ferramenta que usamos para analisar problemas que envolvem combinações de classes de sinais periódicos e não periódicos de tempo contínuo é a FT. A DTFT se aplica a combinações de classes de sinais periódicos e não periódicos de tempo discreto. Esta análise é possível, uma vez que agora temos representações por FT e DTFT tanto para sinais periódicos como não periódicos. Iniciamos, examinando a convolução de sinais periódicos e não periódicos, e depois nos concentraremos em aplicações de modulação.

### ■ CONVOLUÇÃO DE SINAIS PERIÓDICO E NÃO-PERIÓDICO

Na Seção 3.6, estabelecemos que a convolução no domínio de tempo corresponde à multiplicação no domínio de freqüência: ou seja,

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Esta propriedade pode ser aplicada a problemas em que um dos sinais em domínio de tempo, digamos,  $x(t)$ , é periódico usando a sua representação por FS. Lembre-se que a FT de um sinal periódico  $x(t)$  é

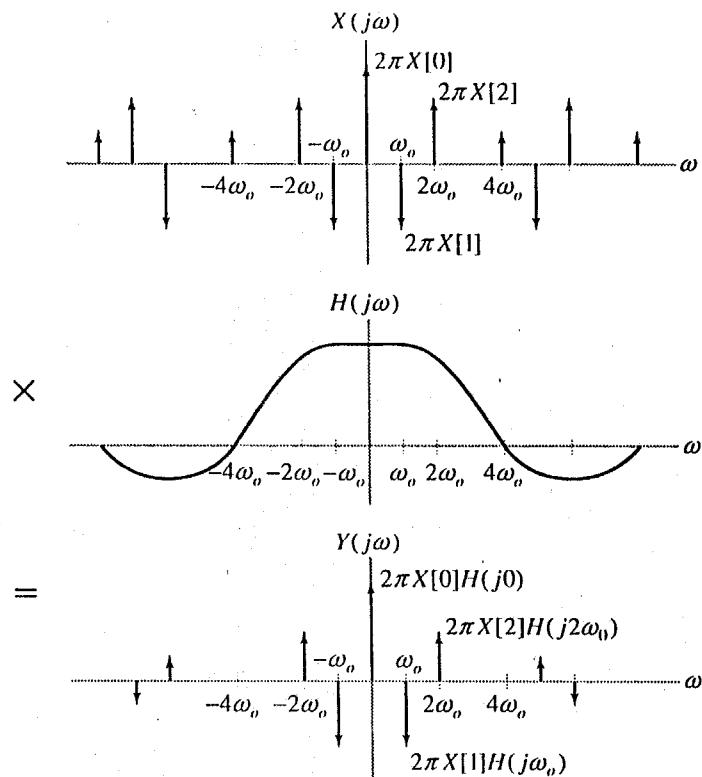
$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_o)$$

em que  $X[k]$  são os coeficientes da FS. Substitua esta representação na propriedade da convolução para obter

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_o)H(j\omega) \quad (4.19)$$

$$\xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_o)X[k]\delta(\omega - k\omega_o) \quad (4.20)$$

em que, na última linha, usamos a propriedade de peneiramento da função impulso. A Figura 4.11 ilustra a multiplicação de  $X(j\omega)$  por  $H(j\omega)$  que ocorre na equação (4.20). A força do  $k$ -ésimo impulso é ajustada pelo valor de  $H(j\omega)$  avaliado na freqüência onde ele está localizado, ou seja,  $H(jk\omega_o)$ . A forma de  $Y(j\omega)$  corresponde a um sinal periódico. Conseqüentemente,  $y(t)$  é periódico, com o mesmo período de  $x(t)$ . A aplicação mais comum desta propriedade está na determinação da saída de um filtro com resposta  $h(t)$  ao impulso e entrada periódica  $x(t)$ .



**FIGURA 4.11** Propriedade da convolução para uma combinação de sinais periódico e não-periódico.

**EXEMPLO 4.9** Admitamos que a entrada num sistema com resposta ao impulso  $h(t) = (1/\pi t) \operatorname{sen}(\pi t)$  seja a onda quadrada periódica descrita na Figura 4.7. Use a propriedade da convolução para encontrar a saída deste sistema.

*Solução:* A resposta em freqüência do sistema é

$$h(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A FT do sinal de entrada periódico foi obtida no Exercício 4.4 e é dada por

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k} \delta\left(\omega - k \frac{\pi}{2}\right)$$

A FT da saída do sistema é  $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ . Este produto é descrito na Figura 4.12, onde vemos que

$$Y(j\omega) = 2\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta(\omega) + 2\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

De fato, o sistema descrito por  $H(j\omega)$  age como um filtro passa-baixas, passando os componentes de freqüência discrete em  $-\pi/2$ ,  $0$  e  $\pi/2$ , enquanto suprime todos os outros. Tomar a FT inversa de  $Y(j\omega)$  resulta na saída

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(t \frac{\pi}{2}\right)$$

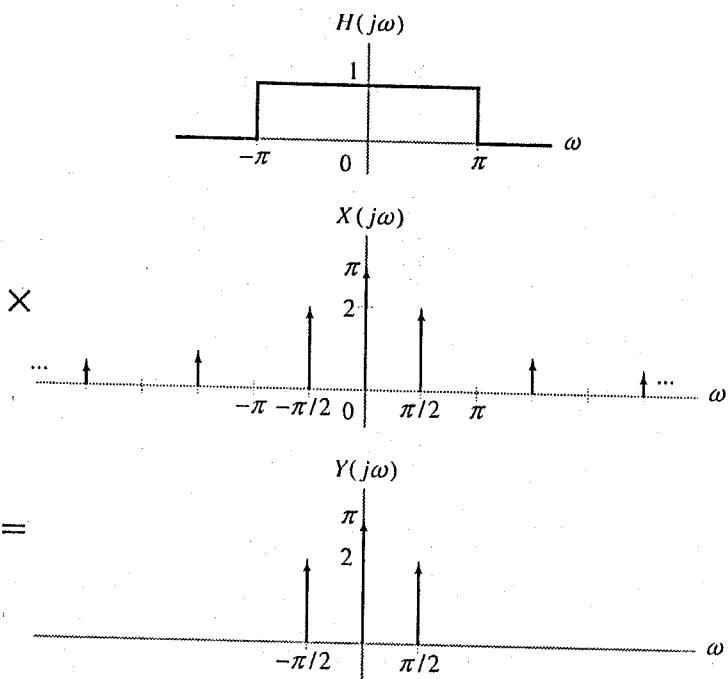


FIGURA 4.12 Aplicação da propriedade de convolução no Exemplo 4.9.

Um resultado análogo é obtido no caso de tempo discreto. A propriedade de convolução é

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$$

Podemos usar esta propriedade quando  $x[n]$  é periódico, substituindo a representação por DTFT dada na equação (4.18) para sinais periódicos,

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\Omega - k\Omega_o)$$

e assim obter

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(e^{jk\Omega_o})X[k]\delta(\Omega - k\Omega_o) \quad (4.21)$$

A forma de  $Y(e^{j\Omega})$  indica que  $y[n]$  também é periódico, com o mesmo período de  $x[n]$ . Esta propriedade encontra aplicação na avaliação do comportamento de entrada e saída de sistemas LTI.

► **EXERCÍCIO 4.6** Admitamos que a resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto seja

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Determine a saída deste sistema em resposta à entrada

$$x[n] = 3 + \cos(\pi n + \pi/3)$$

*Resposta:*

$$y[n] = 6 + \frac{2}{3} \cos(\pi n + \pi/3)$$

### ■ MODULAÇÃO DE SINAIS PERIÓDICOS E NÃO-PERIÓDICOS

Considere agora a propriedade da modulação da FT descrita por

$$y(t) = g(t)x(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * X(j\omega)$$

Podemos usar esta propriedade mesmo que  $x(t)$  seja periódico, empregando sua representação por FT. Substituir a equação (4.14) em  $X(j\omega)$  resulta em

$$y(t) = g(t)x(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = G(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_o)$$

A propriedade de peneiramento da função impulso implica que a convolução de qualquer função com um impulso deslocado resulta numa versão deslocada da função original. Conseqüentemente, temos

$$y(t) = g(t)x(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]G(j(\omega - k\omega_o)) \quad (4.22)$$

A modulação de  $g(t)$  com a função periódica  $x(t)$  resulta numa FT que consiste numa soma ponderada de versões deslocadas de  $G(j\omega)$ . Este resultado é ilustrado na Figura 4.13. Note que a forma de  $Y(j\omega)$  corresponde à FT de um sinal não periódico. O produto de sinais periódico e não-periódico é não-periódico.

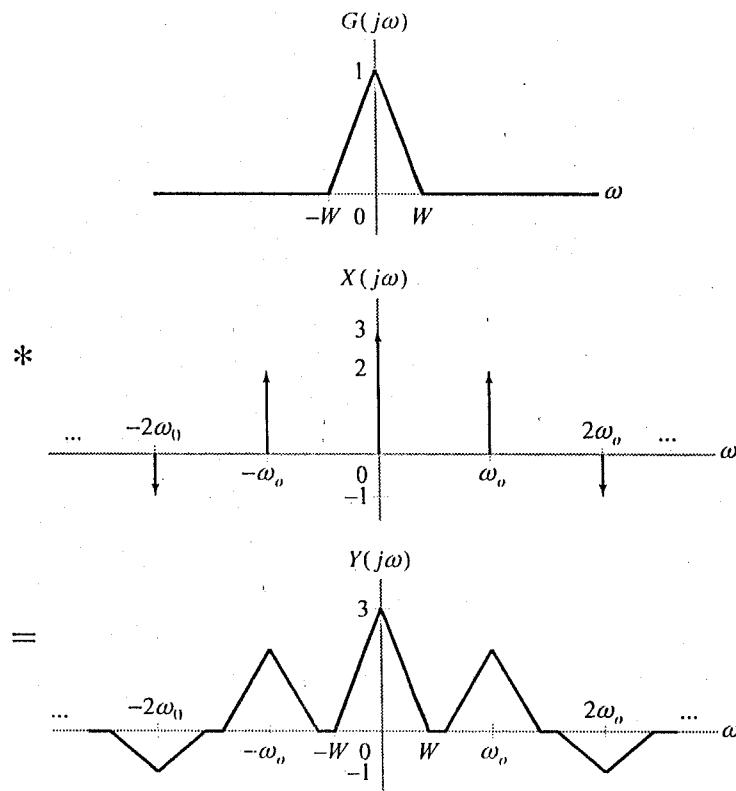


FIGURA 4.13 Propriedade de modulação para a combinação de um sinal periódico com um não-periódico.

**EXEMPLO 4.10** Considere um sistema com saída  $y(t) = g(t)x(t)$ . Suponha que  $x(t)$  seja a onda quadrada descrita na Figura 4.7. (a) Encontre  $Y(j\omega)$  em termos de  $G(j\omega)$ . (b) Esboce  $Y(j\omega)$  se  $g(t) = \cos(t/2)$ .

**Solução:** A onda quadrada tem a representação por FS

$$x(t) \xleftarrow{\text{FS; } \pi/2} X[k] = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

(a) Substituir este resultado na equação (4.22) resultará em

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} G\left(j\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(b) Aqui, temos

$$G(j\omega) = \pi\delta(\omega - \frac{1}{2}) + \pi\delta(\omega + \frac{1}{2})$$

e, deste modo,  $Y(j\omega)$  pode ser expresso como

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} \left[ \delta\left(\omega - \frac{1}{2} - k\frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2} - k\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

A Figura 4.14 descreve os termos que constituem  $Y(j\omega)$  na soma próximo a  $k=0$ .

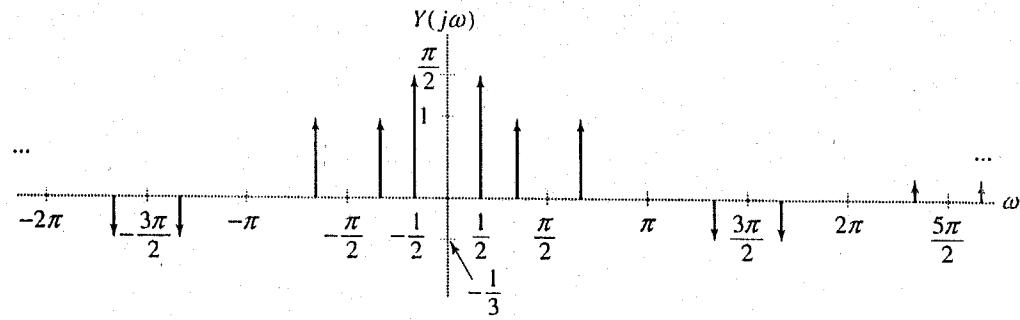


FIGURA 4.14 Solução do Exemplo 4.10(b).

► **EXERCÍCIO 4.7** Use a propriedade de modulação para determinar a resposta em freqüência de um sistema com resposta ao impulso

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cos(3\pi t)$$

**Resposta:**

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2\pi < |\omega| < 4\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A propriedade de modulação em tempo discreto é

$$y[n] = x[n]g[n] \xleftarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast G(e^{j\Omega})$$

Se  $x[n]$  for periódico, esta propriedade ainda será aplicável, desde que usemos a representação por DTFT para  $x[n]$ , dada na equação (4.18), como é mostrado por

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\Omega - k\Omega_o)$$

em que  $X[k]$  são os coeficientes da DTFS. Substitua  $X(e^{j\Omega})$  na definição de convolução periódica para obter

$$Y(e^{j\Omega}) = \int_{(2\pi)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\theta - k\Omega_n) G(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

Em qualquer intervalo  $2\pi$  de  $\theta$  há exatamente  $N$  impulsos da forma  $\delta(\theta - k\Omega_n)$ . Isto ocorre porque  $\Omega_n = 2\pi/N$ . Conseqüentemente, podemos reduzir a soma infinita a  $N$  valores consecutivos quaisquer de  $k$ . Permutando a soma e a integral dá

$$Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=(-N)}^{N} X[k] \int_{(2\pi)} \delta(\theta - k\Omega_n) G(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

Agora, aplique a propriedade de peneiraamento da função impulso para avaliar a integral e obter

$$y[n] = x[n]g[n] \xleftarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=(-N)}^{N} X[k] G(e^{j(\Omega-k\Omega_n)}) \quad (4.23)$$

A modulação de  $g[n]$  com a seqüência periódica  $x[n]$  resulta numa DTFT que consiste numa soma ponderada de versões deslocadas de  $G(e^{j\Omega})$ . Observe que  $y[n]$  é não periódico, uma vez que o produto de um sinal periódico por um sinal não periódico é não periódico. Conseqüentemente, a forma de  $Y(e^{j\Omega})$  corresponde a um sinal não periódico.

**EXEMPLO 4.11** Considere o seguinte sinal:

$$x[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{16}n\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{16}n\right)$$

Use a propriedade de modulação para avaliar o efeito de computar a DTFT usando somente os  $2M+1$  valores  $x[n]$ ,  $|n| \leq M$ .

*Solução:* A DTFT de  $x[n]$  é

$$X(e^{j\Omega}) = \pi\delta\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right), \quad -\pi < \Omega \leq \pi$$

$X(e^{j\Omega})$  consiste de impulsos em  $\pm 7\pi/16$  e  $\pm 9\pi/16$ . Defina agora um sinal  $y[n] = x[n]\omega[n]$ , em que  $\omega[n]$  é a função janela

$$\omega[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$

Esta função janela seleciona os  $2M+1$  valores de  $x[n]$  centralizados em  $n=0$ . A comparação das DTFTs de  $y[n]$  e  $x[n]$  leva a usarmos somente  $2M+1$  valores. A propriedade de modulação implica que

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} (W(e^{j(\Omega+9\pi/16)}) + W(e^{j(\Omega+7\pi/16)}) + W(e^{j(\Omega-7\pi/16)}) + W(e^{j(\Omega-9\pi/16)}))$$

em que

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{\sin\left(\Omega \frac{(2M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Vemos que o ajanelamento introduz réplicas de  $W(e^{j\Omega})$  nas freqüências  $7\pi/16$  e  $9\pi/16$  ao invés dos impulsos que estão presentes em  $X(e^{j\Omega})$ . Podemos ver isto como um espalhamento ou alargamento dos impulsos originais. A energia em  $Y(e^{j\Omega})$  agora está espalhada ao longo de uma faixa centralizada nas freqüências dos co-senos. A extensão do espalhamento depende da largura do lóbulo principal de  $W(e^{j\Omega})$ , a qual é dada por  $4\pi/(2M+1)$  (veja a Figura 3.19).

As Figuras 4.15(a)-(c) descrevem  $Y(e^{j\Omega})$  para diversos valores decrescentes de  $M$ . Quando  $M$  é suficientemente grande para que a largura do lóbulo principal de  $W(e^{j\Omega})$  seja pequeno em relação à separação entre as freqüências  $7\pi/16$  e  $9\pi/16$ , então  $Y(e^{j\Omega})$  será uma aproximação razoavelmente boa para  $X(e^{j\Omega})$ . Este caso é descrito na Figura 4.15(a) usando  $M=80$ . Porém, quando  $M$  decresce e a largura do lóbulo principal se torna quase a mesma que a separação entre as freqüências  $7\pi/16$  e  $9\pi/16$ , então os picos associados com cada versão deslocada individual de  $W(e^{j\Omega})$  começam a se sobrepor e a se fundir num único pico. Isto é ilustrado nas Figuras 4.15(b) e (c) usando valores  $M=12$  e  $M=8$ , respectivamente.

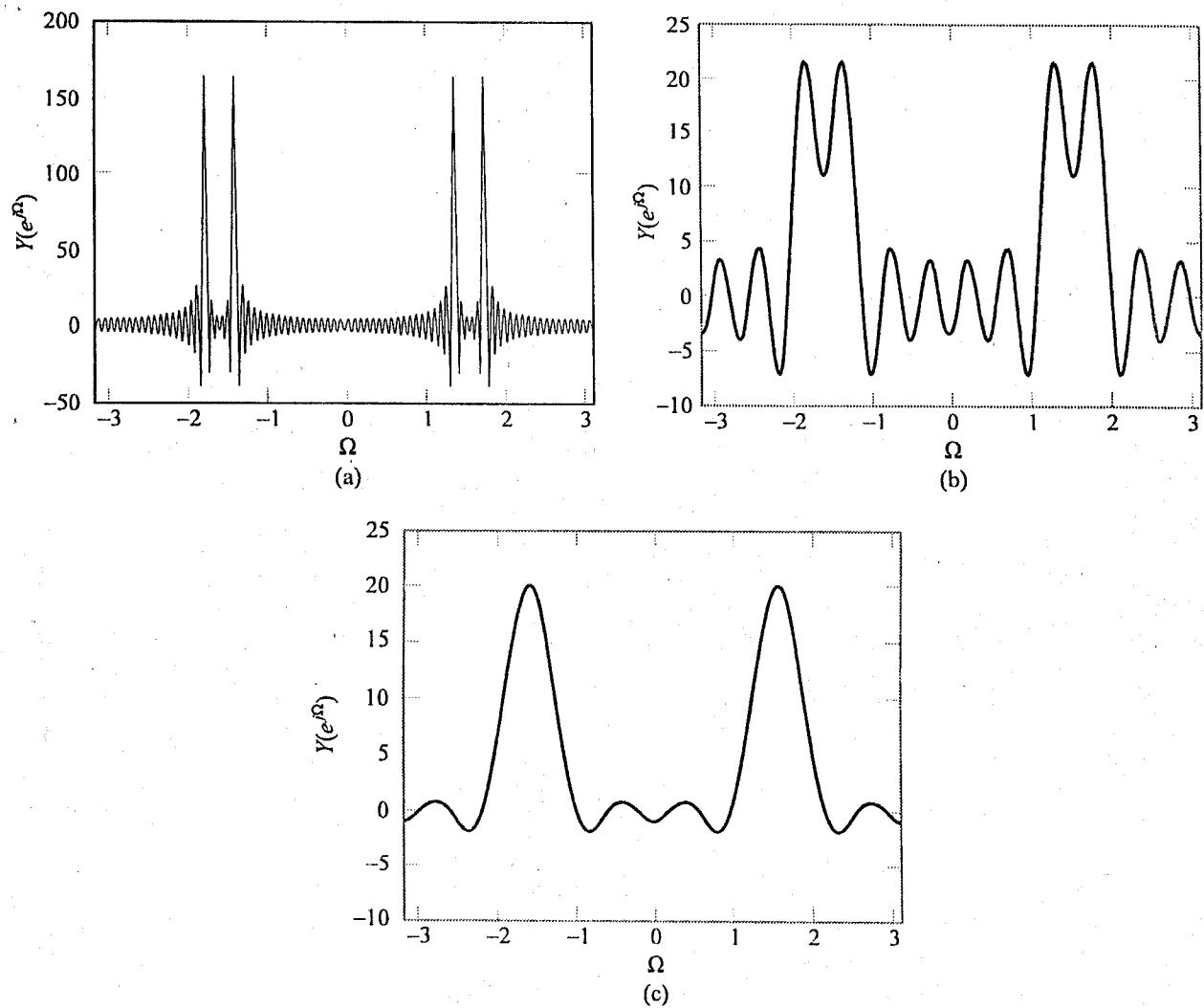


FIGURA 4.15 Efeito do ajanelamento de um registro de dados,  $Y(e^{j\Omega})$  para diferentes valores de  $M$  supondo que  $\Omega_1 = 7\pi/16$  e  $\Omega_2 = 9\pi/16$  (a)  $M = 80$ , (b)  $M = 12$ , (c)  $M = 8$ .

O problema de identificar sinais senoidais de freqüências diferentes em dados é muito importante e ocorre freqüentemente na análise de sinais. O exemplo precedente ilustra que nossa capacidade de distinguir senóides distintas é limitada pelo tamanho do registro de dados. Se o número de pontos de dados disponíveis for pequeno em relação à separação de freqüências, a DTFT será incapaz de distinguir a presença de duas senóides distintas. Na prática, sempre nos limitamos a registros de dados de tamanho finito em qualquer aplicação de análise de sinais. Dessa forma, é importante saber reconhecer os efeitos do ajanelamento.

► **EXERCÍCIO 4.8** Considere o sistema descrito na Figura 4.16(a). Determine uma expressão para  $Y(e^{j\Omega})$ , a DTFT da saída,  $y[n]$  e esboce  $Y(e^{j\Omega})$  supondo que  $X(e^{j\Omega})$  seja dado na Figura 4.16(b).

**Resposta:**

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega-\pi)})$$

Veja o esboço na Figura 4.16(c). ◀

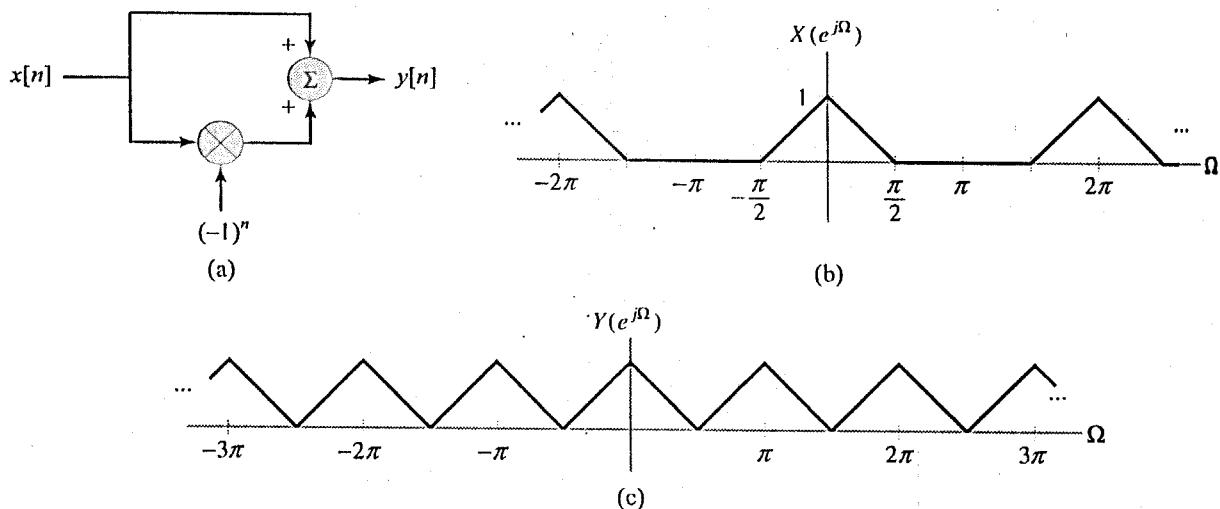


FIGURA 4.16 Exercício 4.8. (a) Sistema. (b) Espectro de entrada. (c) Espectro de saída.

## 4.5 Representação por Transformada de Fourier para Sinais de Tempo Discreto

Nesta seção, derivamos uma representação por FT para sinais de tempo discreto incorporando impulsos na descrição do sinal de maneira apropriada. Esta representação satisfaz todas as propriedades da FT e, dessa forma, transforma a FT numa ferramenta poderosa para analisar problemas que envolvem combinações de sinais de tempo discreto e contínuo. Nossa derivação também mostra a relação entre a FT e a DTFT. Combinar os resultados desta seção com as representações por transformada de Fourier para sinais periódicos derivados na Seção 4.3 possibilitará que a FT seja usada como uma ferramenta de análise para qualquer uma das quatro classes de sinais.

Iniciamos a discussão estabelecendo uma correspondência entre a freqüência de tempo contínuo  $\omega$  e a freqüência de tempo discreto  $\Omega$ . Defina senóides complexas  $x(t) = e^{j\omega t}$  e  $g[n] = e^{j\Omega n}$ . Uma conexão entre as freqüências destas senóides é estabelecida ao exigir que  $g[n]$  se associe com  $x(t)$ . Suponhamos que forcemos que  $g[n]$  seja igual às amostras de  $x(t)$  tomadas em intervalos de  $\bar{T}$ , ou seja,  $g[n] = x(n\bar{T})$ . Isto implica que

$$e^{j\Omega n} = e^{j\omega \bar{T}n}$$

e podemos definir  $\Omega = \omega\bar{T}$ . Em palavras, a freqüência de tempo discreto  $\Omega$  corresponde à freqüência de tempo contínuo  $\omega$  multiplicada pelo intervalo de amostragem  $\bar{T}$ .

### RELACIONANDO A FT COM A DTFT

Considere agora a DTFT de um sinal de tempo discreto arbitrário  $x[n]$ . Temos

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (4.24)$$

Procuramos um par FT  $x_\delta(t) \xleftrightarrow{FT} X_\delta(j\omega)$  que corresponda ao par DTFT  $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$ . Substituímos  $\Omega = \omega\bar{T}$  na equação (4.24) para obter a função de freqüência de tempo contínuo  $\omega$ :

$$\begin{aligned} X_\delta(j\omega) &= X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\omega\bar{T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega\bar{T}n} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tome a FT inversa de  $X_\delta(j\omega)$  usando a linearidade e o par FT

$$\delta(t - nT) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega nT}$$

para obter a descrição de sinal de tempo contínuo

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \quad (4.26)$$

Conseqüentemente,

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \xleftrightarrow{FT} X_\delta(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega nT} \quad (4.27)$$

em que  $x_\delta(t)$  é um sinal de tempo contínuo que corresponde a  $x[n]$ , e a transformada de Fourier  $X_\delta(j\omega)$  corresponde à transformada de Fourier de tempo discreto  $X(e^{j\Omega})$ . Referimo-nos à equação (4.26) como a representação de tempo contínuo de  $x[n]$ . Esta representação tem um intervalo de amostragem  $T$  associado que determina a relação entre as freqüências de tempo contínuo e discreto:  $\Omega = \omega T$ . A Figura 4.17 ilustra as relações entre o sinal  $x[n]$  e  $x_\delta(t)$  e as representações de Fourier correspondentes  $X(e^{j\Omega})$  e  $X_\delta(j\omega)$ .

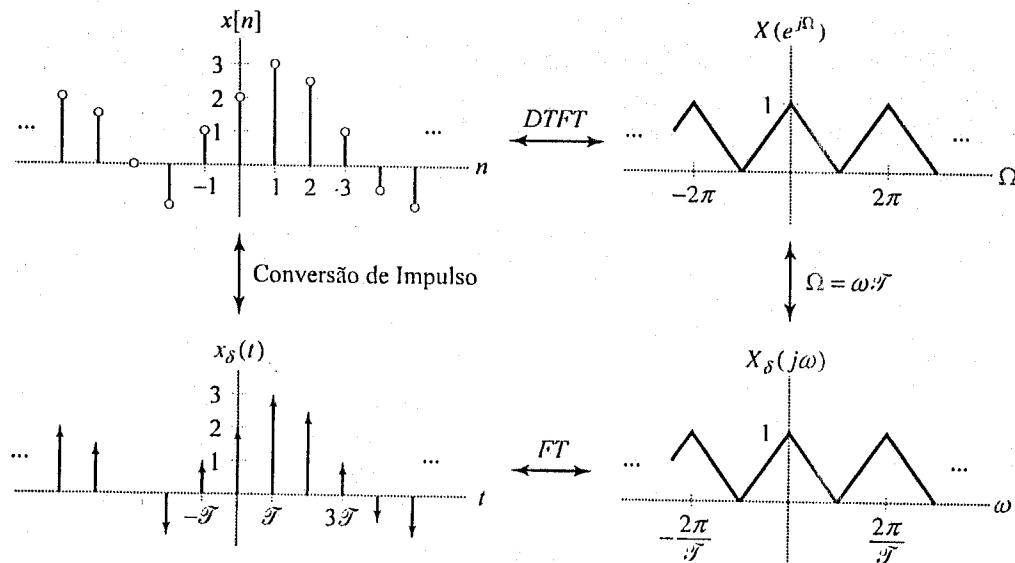


FIGURA 4.17 Relação entre as representações de FT e DTFT de um sinal de tempo discreto.

A DTFT  $X(e^{j\Omega})$  tem período  $2\pi$  em  $\Omega$ , enquanto a FT  $X_\delta(j\omega)$  tem período  $2\pi/T$  em  $\omega$ . O sinal de tempo discreto tem valores  $x[n]$ , enquanto o sinal de tempo contínuo correspondente consiste numa série de impulsos separados por  $T$ , sendo que o  $n$ -ésimo impulso possui força  $x[n]$ .

**EXEMPLO 4.12** Determine o par FT associado com um sinal cuja DTFT seja

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

*Solução:* Tome a DTFT inversa para obter

$$x[n] = a^n u[n]$$

Use agora a equação (4.26) para definir o sinal de tempo contínuo

$$x_\delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta(t - nT)$$

Substituindo  $\Omega = \omega T$  dá

$$x_\delta(t) \xleftrightarrow{FT} X_\delta(j\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T}}$$

Note os muitos paralelos entre a representação em tempo contínuo de um sinal de tempo discreto dada na equação (4.26) e a representação por FT de um sinal periódico dada na equação (4.14). A representação por FT é obtida a partir dos coeficientes da FS introduzindo-se impulsos nos múltiplos inteiros da freqüência fundamental  $\omega_o$ , com a força do  $k$ -ésimo impulso determinado pelo  $k$ -ésimo coeficiente da FS. A representação  $X[k]$  por FS tem valor discreto, enquanto a representação por FT correspondente  $X(j\omega)$  é contínua em freqüência. Aqui,  $x[n]$  tem valores discretos, enquanto  $x_\delta(t)$  é contínuo. O parâmetro  $\mathcal{T}$  determina a separação entre os impulsos em  $x_\delta(t)$  exatamente como acontece com  $\omega_o$  em  $X(j\omega)$ . Estes paralelos entre  $x_\delta(t)$  e  $X(j\omega)$  são uma consequência direta da propriedade da dualidade FS-DTFT discutida na Seção 3.6. A dualidade afirma que os papéis do tempo e da freqüência na análise de Fourier são intercambiáveis. Aqui,  $x_\delta(t)$  é um sinal de tempo contínuo cuja FT é uma função da freqüência com período  $2\pi/\mathcal{T}$ , enquanto  $X(j\omega)$  é um sinal de freqüência contínua cuja FT inversa é uma função do tempo com período  $2\pi/\omega_o$ .

### ■ RELACIONANDO A FT COM A DTFS

Na Seção 4.3, derivamos a representação por FT de um sinal periódico de tempo contínuo. Anteriormente, nesta seção, mostramos como representar um sinal não periódico de tempo discreto com a FT. O último caso, a representação de um sinal periódico de tempo discreto com a FT, é obtido combinando-se a representação por DTFT de um sinal periódico de tempo discreto derivada na Seção 4.3 com os resultados da subseção anterior. Assim que isto tiver sido realizado, poderemos usar a FT para representar qualquer uma das quatro classes de sinais.

Lembre-se que a representação por DTFT de um sinal  $x[n]$  com período  $N$  é dada na equação (4.18) como

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X[k] \delta(\Omega - k\Omega_o)$$

em que  $X[k]$  são os coeficientes da DTFS. Realize a substituição  $\Omega = \omega\mathcal{T}$  para obter a representação por FT

$$\begin{aligned} X_\delta(j\omega) &= X(e^{j\omega\mathcal{T}}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X[k] \delta(\omega\mathcal{T} - k\Omega_o) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X[k] \delta\left(\mathcal{T}\left(\omega - k\frac{\Omega_o}{\mathcal{T}}\right)\right) \end{aligned}$$

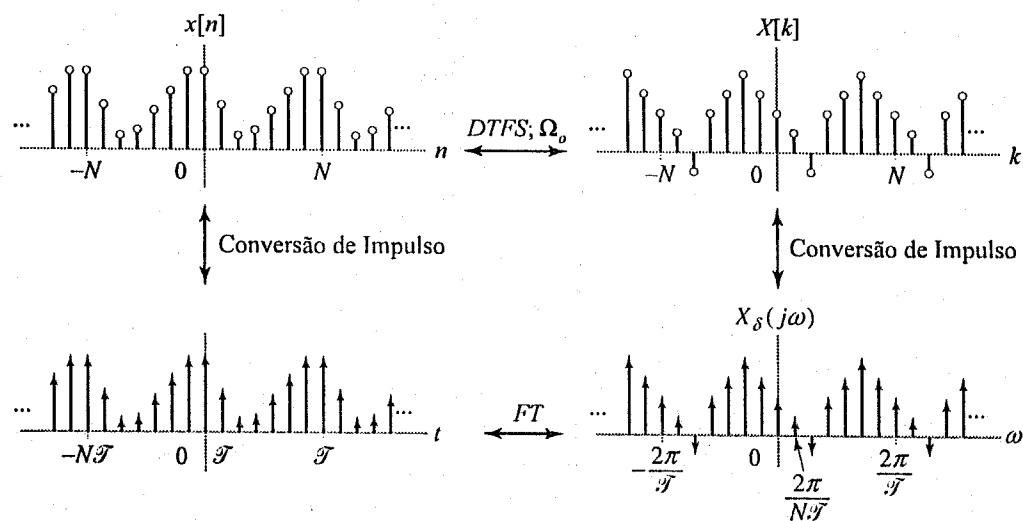
Use agora a propriedade de mudança de escala da função impulso,  $\delta(av) = (1/a)\delta(v)$  deduzida no Capítulo 1 para reescrever  $X_\delta(j\omega)$  como

$$X_\delta(j\omega) = \frac{2\pi}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta\left(\omega - k\frac{\Omega_o}{\mathcal{T}}\right) \quad (4.28)$$

Lembre-se que  $X[k]$  é uma função com período  $N$ . Isto implica que  $X_\delta(j\omega)$  é periódico com período  $N\Omega_o/\mathcal{T} = 2\pi/\mathcal{T}$ . O sinal  $x_\delta(t)$  correspondente a esta FT é mais facilmente obtido substituindo-se o sinal periódico  $x[n]$  na equação (4.26), ou seja,

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - n\mathcal{T}) \quad (4.29)$$

Note que o período  $N$  de  $x[n]$  implica que  $x_\delta(t)$  também é periódico, com período fundamental  $N\mathcal{T}$ . Por isso, tanto  $x_\delta(t)$  como  $X_\delta(j\omega)$  são trens de impulsos com período  $N$ , como é descrito na Figura 4.18.



**FIGURA 4.18** Relação entre as representações por FT e DTFS de um sinal periódico de tempo discreto.

► **EXERCÍCIO 4.9** Determine o par FT associado com o sinal periódico de tempo discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$$

*Resposta:*

$$\begin{aligned} x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \delta(t-nT) &\xrightarrow{\text{FT}} X_\delta(j\omega) = \frac{\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{N} - m\frac{2\pi}{T}\right) \\ &+ \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} - m\frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

◀

## 4.6 Amostragem

Nesta seção, usamos a representação por FT de sinais de tempo discreto para analisar os efeitos de amostrar uniformemente um sinal. A operação de amostragem gera um sinal de tempo discreto a partir de um sinal de tempo contínuo. A amostragem de sinais de tempo contínuo muitas vezes é executada para manipular o sinal com um computador ou microprocessador. Essas manipulações são comuns em sistemas de comunicação, controle e processamento de sinais. Mostraremos como a DTFT do sinal amostrado está relacionada com a FT do sinal de tempo contínuo. A amostragem também é executada freqüentemente em sinais de tempo discreto para mudar a taxa efetiva de dados, uma operação que é denominada *subamostragem*. Neste caso, o processo de amostragem descarta valores do sinal. Examinamos o impacto da subamostragem comparando a DTFT do sinal amostrado com a DTFT do sinal original.

### ■ AMOSTRANDO SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

Admitamos que  $x(t)$  seja um sinal de tempo contínuo. Definimos um sinal de tempo discreto  $x[n]$  que é igual às “amostras” de  $x(t)$  em múltiplos inteiros de um intervalo de amostragem  $T$ , ou seja,  $x[n] = x(nT)$ . O efeito da amostragem é avaliado relacionando-se a DTFT de  $x[n]$  com a FT de  $x(t)$ . Nossa ferramenta para explorar esta relação é a representação por FT de sinais de tempo discreto.

Inicie com a representação em tempo contínuo do sinal de tempo discreto  $x[n]$  dado na equação (4.26).

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t-nT)$$

Agora, substitua  $x[nT]$  em  $x[n]$  para obter

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

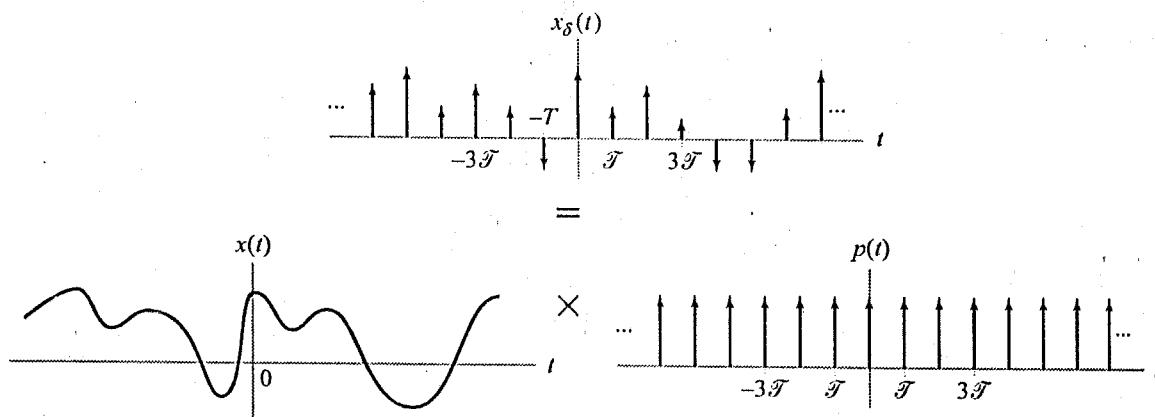
Uma vez que  $x(t)\delta(t-nT) = x(nT)\delta(t-nT)$ , podemos reescrever  $x_\delta(t)$  como um produto de funções de tempo

$$x_\delta(t) = x(t)p(t) \quad (4.30)$$

em que

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (4.31)$$

Conseqüentemente, a equação (4.30) implica que podemos representar matematicamente o sinal amostrado como o produto do sinal de tempo contínuo original por um trem de impulsos, como descreve a Figura 4.19. Esta representação comumente é denominada *amostragem por impulsos*.



**FIGURA 4.19** Representação matemática da amostragem como o produto de um sinal dado de tempo por um trem de impulsos.

O efeito da amostragem é determinado relacionando-se a FT de  $x_\delta(t)$  com a FT de  $x(t)$ . Uma vez que a multiplicação no domínio de tempo corresponde à convolução no domínio de freqüência, temos

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

Substituindo o valor de  $P(j\omega)$  determinado no Exemplo 4.7 nesta relação e lembrando que  $\omega_s$  corresponde a  $\omega_s$  aqui, obtemos

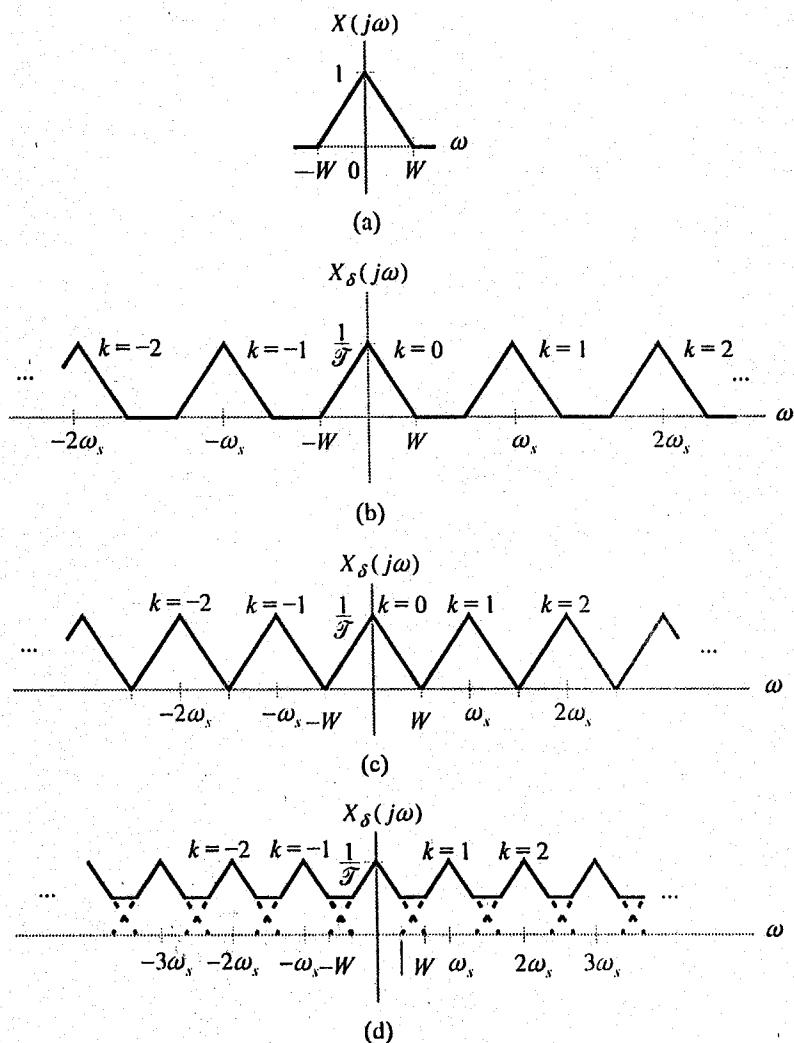
$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\omega}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

em que  $\omega_s = 2\pi/T$  é a freqüência de amostragem. Faça agora a convolução de  $X(j\omega)$  com cada um dos impulsos deslocados para obter

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad (4.32)$$

A FT do sinal amostrado é dada por uma soma infinita de versões deslocadas da FT do sinal original. As versões deslocadas são espaçadas em múltiplos inteiros de  $\omega_s$ . As versões deslocadas de  $X(j\omega)$  podem se sobrepor umas às outras se  $\omega_s$  não for suficientemente grande em comparação com a extensão de freqüência de  $X(j\omega)$ . Este efeito é demonstrado na Figura 4.20, ilustrando a equação (4.32) para diversos valores diferentes de  $T$ . Assume que o conteúdo de freqüência do sinal  $x(t)$  se situe dentro da faixa de freqüência  $-W < \omega < W$  para propósitos de ilustração. Nas figuras 4.20(b)-(d) descrevemos os casos  $\omega_s = 3W$ ,  $\omega_s = 2W$  e  $\omega_s = \frac{3}{2}W$ , respectivamente. As réplicas deslocadas de  $X(j\omega)$  associadas com o  $k$ -ésimo termo na equação (4.32) estão rotulados. Observe que quando  $T$  cresce e  $\omega_s$  diminui, as réplicas deslocadas de  $X(j\omega)$  aproximam-se entre si. Elas se sobrepõem umas às outras quando  $\omega_s < 2W$ .

A superposição nas réplicas deslocadas do espectro original é denominada *aliasing*, que se refere ao fenômeno de um componente de alta freqüência assumir a identidade de um de baixa freqüência. O *aliasing* distorce o espectro do sinal de tempo contínuo original. Este efeito é ilustrado na Figura 4.20(d). A superposição entre as réplicas de  $X(j\omega)$  em  $k = 0$  e  $k = 1$  ocorre em freqüências entre  $\omega_s - W$  e  $W$ . Estas réplicas se somam e, deste modo, a forma básica do espectro varia desde porções de um triângulo até uma constante. O espectro do sinal amostrado deixa de ter uma correspondência biunívoca com o do sinal de tempo contínuo original. Isto significa que não podemos usar o espectro do sinal amostrado para analisar o sinal de tempo contínuo, e que não podemos reconstruir de forma única o sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras.



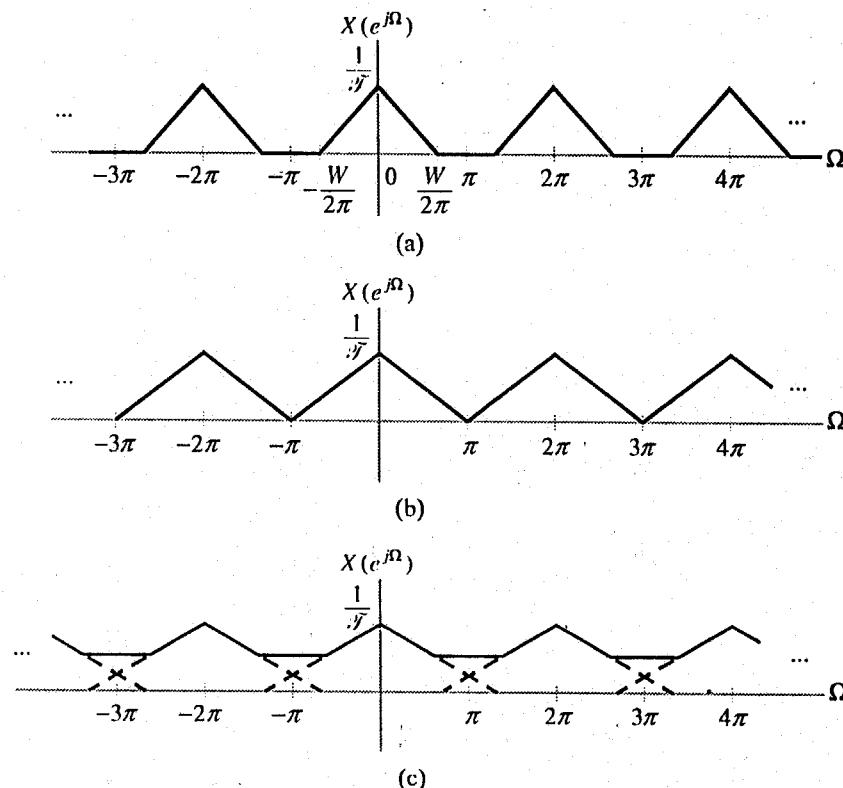
**FIGURA 4.20** FT de um sinal amostrado para diferentes freqüências de amostragem. (a) Espectro do sinal de tempo contínuo. (b) Espectro do sinal amostrado quando  $\omega_s = 3W$ . (c) Espectro de um sinal amostrado quando  $\omega_s = 2W$ . (d) Espectro do sinal amostrado quando  $\omega_s = \frac{3}{2}W$ .

O problema da reconstrução será tratado na próxima seção. Como ilustra a Figura 4.20, impede-se o *aliasing* escolhendo o intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$  de forma que  $\omega_s > 2W$ , em que  $W$  é o componente de freqüência mais elevada no sinal. Isto implica que devemos satisfazer a condição  $\mathcal{T} < \pi/W$ .

A DTFT do sinal amostrado é obtida de  $X_\delta(j\omega)$  usando-se a relação  $\Omega = \omega\mathcal{T}$ , ou seja,

$$x[n] \xleftarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega}) = X_\delta(j\omega)|_{\omega=\Omega/\mathcal{T}}$$

Esta mudança de escala da variável independente implica que  $\omega = \omega_s$  corresponde a  $\Omega = 2\pi$ . As Figuras 4.21(a)-(c) ilustram as DTFTs dos sinais amostrados correspondentes às FTs das Figuras 4.20(b)-(d). Note que a forma é a mesma em cada caso; a única diferença é uma mudança de escala do eixo de frequência. As FTs têm período  $\omega_s$ , enquanto que as DTFTs têm período  $2\pi$ .



**FIGURA 4.21** DTFTs correspondentes às FTs descritas nas Figuras 4.20(b) – (d). (a)  $\omega_s = 3W$ . (b)  $\omega_s = 2W$ . (c)  $\omega_s = \frac{3}{2}W$ .

**EXEMPLO 4.13** Considere o efeito de extraír amostras do sinal senoidal

$$x(t) = \cos(\pi t)$$

Determine a FT do sinal amostrado para os seguintes intervalos de amostragem: (a)  $\mathcal{T} = \frac{1}{4}$ , (b)  $\mathcal{T} = 1$  e (c)  $\mathcal{T} = \frac{3}{2}$ .

**Solução:** Use a equação (4.32) para cada valor de  $\mathcal{T}$ . Em especial, observe que

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = \pi\delta(\omega + \pi) + \pi\delta(\omega - \pi)$$

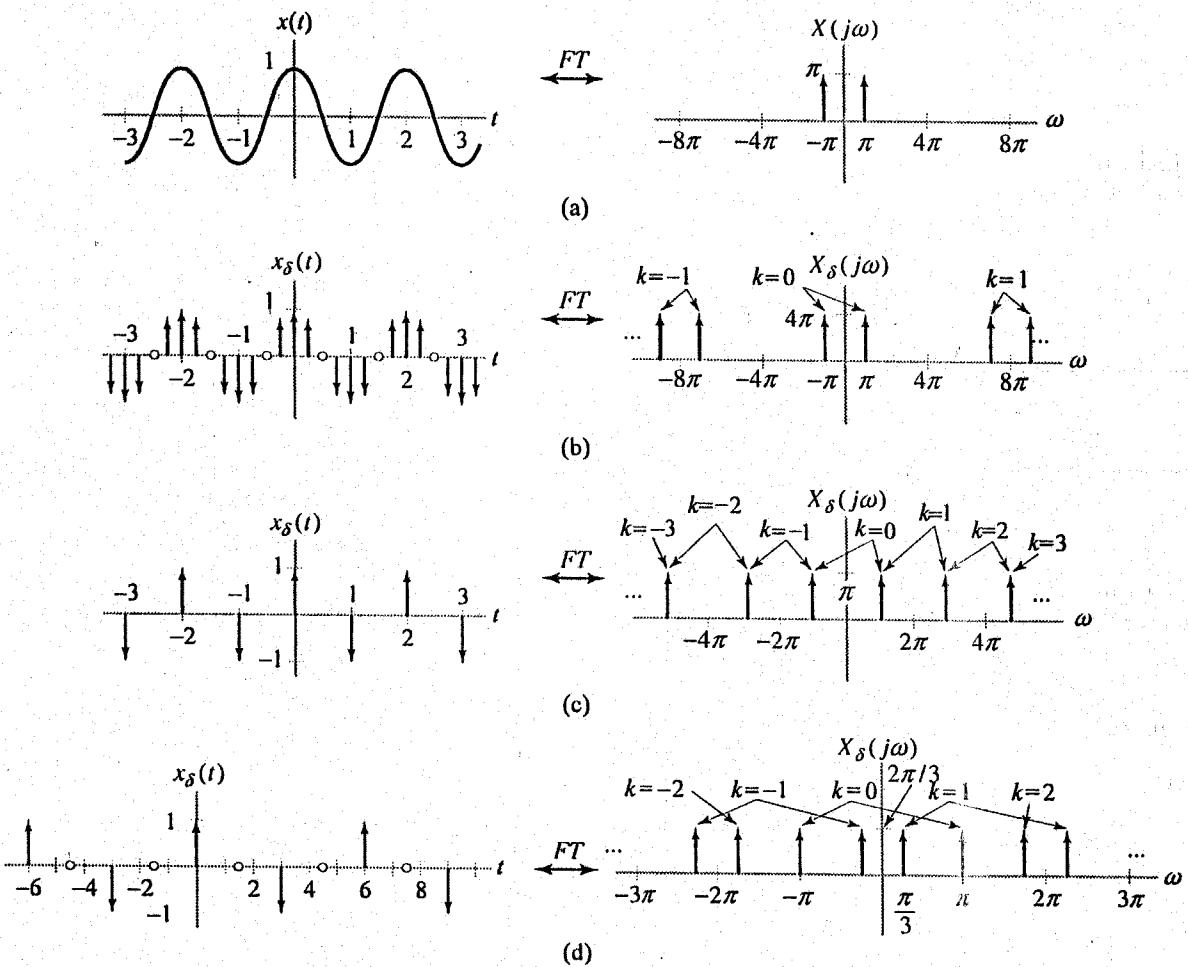
A substituição de  $X(j\omega)$  na equação (4.32) resulta em

$$X_\delta(j\omega) = \frac{\pi}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \pi - k\omega_s) + \delta(\omega - \pi - k\omega_s)$$

Conseqüentemente,  $X_\delta(j\omega)$  consiste em pares de impulsos centralizados em múltiplos inteiros da frequência de amostragem,  $\omega_s$ . A frequência de amostragem é diferente em cada caso. Usando  $\omega_s = 2\pi/\mathcal{T}$  resulta em (a)  $\omega_s = 8\pi$ , (b)  $\omega_s = 2\pi$  e (c)  $\omega_s = 4\pi/3$ , respectivamente. Os sinais de tempo contínuo amostrados e suas FTs são descritos na Figura 4.22.

No caso (a), os impulsos formam pares em torno de a múltiplos de  $8\pi$ , como descreve a Figura 4.22(b). À medida que  $\mathcal{T}$  cresce e  $\omega_s$  decresce, pares de impulsos associados com diferentes valores de  $k$  se aproximam mais entre si. No caso (b), impulsos associados com índices  $k$  adjacentes se sobrepõem uns aos outros, como ilustra a Figura 4.22(c). Isto corresponde a um intervalo de amostragem de meio período. Há uma ambigüidade aqui, uma vez que não podemos determinar de maneira única o original a partir de  $x_\delta(t)$  ou  $X_\delta(j\omega)$ .

Por exemplo, tanto  $x_1(t) = \cos(\pi t)$  e  $x_2(t) = e^{j\pi t}$  resultam na mesma sequência  $x[n] = (-1)^n$  para  $\mathcal{T} = 1$ . No caso (c), mostrado na Figura 4.22(d), os pares de impulsos associados com cada índice  $k$  estão intercalados, neste caso, também temos uma ambigüidade. Tanto o sinal original  $x(t)$  como o sinal  $x_1(t) = \cos((\pi/3)t)$  são consistentes com o sinal amostrado,  $x_\delta(t)$ , e o espectro  $X_\delta(j\omega)$ . A amostragem fez com que a senóide original com freqüência  $\pi$  aparecesse como uma nova senóide de freqüência  $\pi/3$ .



**FIGURA 4.22** Efeito de amostrar uma senóide em diferentes taxas. (a) Sinal original e FT. (b) Sinal amostrado e a FT para  $\mathcal{T} = \frac{1}{4}$ . (c) Sinal amostrado e a FT para  $\mathcal{T} = 1$ . (d) Sinal amostrado e a FT para  $\mathcal{T} = \frac{3}{2}$ .

► **EXERCÍCIO 4.10** Desenhe a FT de uma versão amostrada do sinal de tempo contínuo que possui a FT descrita na Figura 4.23(a) para (a)  $\mathcal{T} = \frac{1}{2}$  e (b)  $\mathcal{T} = 2$ .

**Resposta:** Veja as Figuras 4.23(b) e (c).

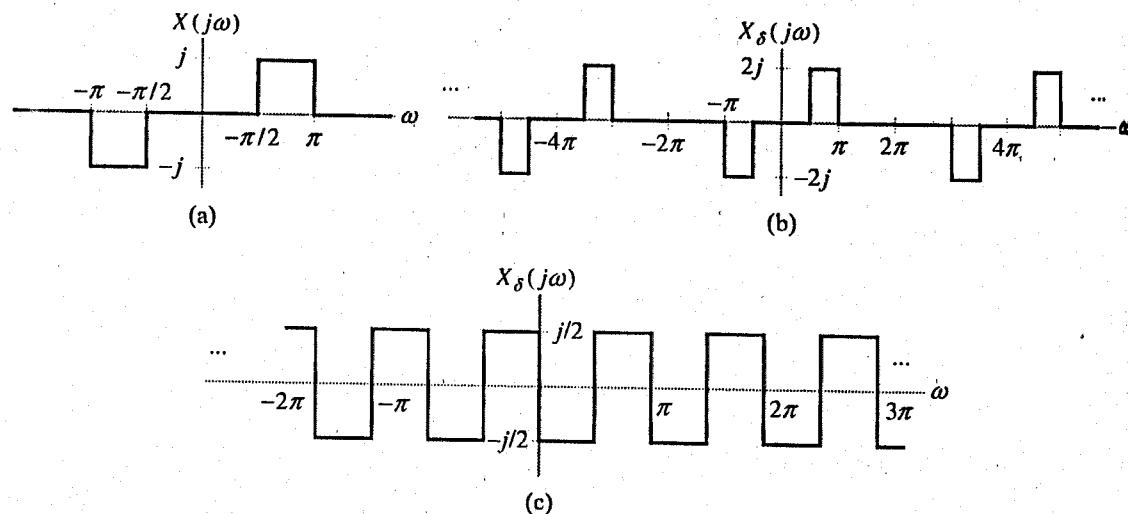


FIGURA 4.23 (a) Espectro do sinal original do Exercício 4.10. (b) Espectro do sinal amostrado para  $T = 1$ . (c) Espectro do sinal amostrado para  $T = 2$ .

### \*■ SUBAMOSTRAGEM: AMOSTRAGEM DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO

A FT também é muito útil para analisar o efeito da amostragem de um sinal de tempo discreto, ou **subamostragem**. Admitamos que  $y[n] = x[qn]$  seja uma versão subamostrada de  $x[n]$ . É necessário que  $q$  seja um número inteiro positivo para que esta operação seja significativa.

Nossa meta é relacionar a DTFT de  $y[n]$  com a DTFT de  $x[n]$ . Conseguimos isto usando a FT para representar  $x[n]$  como uma versão amostrada de um sinal  $x(t)$  de tempo contínuo. Então, expressamos  $y[n]$  como uma versão amostrada do mesmo sinal de tempo contínuo subjacente,  $x(t)$ , obtido usando-se um intervalo de amostragem  $q$  vezes o do associado com  $x[n]$ .

Use a equação (4.26) para representar  $x[n]$  como o sinal de tempo contínuo amostrado por impulso com intervalo de amostragem  $T$  e, dessa forma, escrever

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT)$$

Suponhamos que  $x[n]$  sejam as amostras de um sinal de tempo contínuo,  $x(t)$ , obtido em múltiplos inteiros de  $T$ . Ou seja,  $x[n] = x(nT)$ . Admitamos que  $x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$  e apliquemos a equação (4.32) para obter

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Uma vez que  $y[n]$  é formado usando-se cada  $q$ -ésima amostra de  $x[n]$ , também podemos expressar  $y[n]$  como uma versão amostrada de  $x(t)$ . Temos

$$\begin{aligned} y[n] &= x[qn] \\ &= x(nqT) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a taxa de amostragem efetiva para  $y[n]$  é  $T' = qT$ . A aplicação da equação (4.32) em  $y[n]$  resulta em

$$y_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT') \xrightarrow{FT} Y_\delta(j\omega) = \frac{1}{T'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega'_s))$$

Substituindo  $T' = qT$  e  $\omega'_s = \omega_s/q$  no membro direito deste par resulta em

$$Y_\delta(j\omega) = \frac{1}{qT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - \frac{k}{q}\omega_s\right)\right) \quad (4.33)$$

Expressamos tanto  $X_\delta(j\omega)$  e  $Y_\delta(j\omega)$  como funções de  $X(j\omega)$ . Porém,  $X(j\omega)$  é desconhecido, uma vez que conhecemos apenas  $x[n]$  e não conhecemos  $x(t)$ . Conseqüentemente, manipularemos ainda mais a expressão para  $Y_\delta(j\omega)$  para expressarmos  $Y_\delta(j\omega)$  como uma função de  $X_\delta(j\omega)$ , a FT de  $x[n]$ . Iniciamos, escrevendo  $k/q$  na equação (4.33) como uma fração própria e, dessa forma, definimos

$$\frac{k}{q} = l + \frac{m}{q}$$

em que  $l$  é a parte inteira de  $k/q$  e  $m$  é o resto. Permitindo que  $k$  varie de  $-\infty$  a  $\infty$  corresponde a fazer  $l$  variar de  $-\infty$  a  $\infty$  e  $m$  de 0 a  $q-1$ . Conseqüentemente, podemos reescrever a equação (4.33) como a soma dupla

$$Y_\delta(j\omega) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \left\{ \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - l\omega_s - \frac{m}{q}\omega_s\right)\right) \right\}$$

Considerando que o termo entre chaves corresponde a  $X_\delta(j(\omega - (m/q)\omega_s))$ , reescrevemos  $Y_\delta(j\omega)$  como

$$Y_\delta(j\omega) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X_\delta\left(j\left(\omega - \frac{m}{q}\omega_s\right)\right) \quad (4.34)$$

a qual representa uma soma de versões deslocadas de  $X_\delta(j\omega)$  normalizada com  $q$ .

Neste ponto, convertemos da representação com FT para com a DTFT de volta a fim de expressarmos  $Y(e^{j\Omega})$  como uma função de  $X(e^{j\Omega})$ . O intervalo de amostragem associado com  $Y_\delta(j\omega)$  é  $\mathcal{T}'$ . Usando a relação  $\Omega = \omega\mathcal{T}'$  na equação (4.34), temos

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= Y_\delta(j\omega)|_{\omega=\Omega/\mathcal{T}'} \\ &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X_\delta\left(j\left(\frac{\Omega}{q\mathcal{T}'} - \frac{m}{q}\omega_s\right)\right) \end{aligned}$$

Agora substituímos  $\mathcal{T}' = q\mathcal{T}$  para obter

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X_\delta\left(j\left(\frac{\Omega}{q\mathcal{T}} - \frac{m}{q}\omega_s\right)\right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X_\delta\left(\frac{j}{\mathcal{T}}\left(\frac{\Omega}{q} - \frac{m}{q}2\pi\right)\right) \end{aligned}$$

O intervalo de amostragem associado com  $X_\delta(j\omega)$  é  $\mathcal{T}$  e, assim,  $X(e^{j\Omega}) = X_\delta(j\Omega/\mathcal{T})$ . Conseqüentemente, podemos substituir  $X(e^{j(\Omega/q - m2\pi/q)})$  em  $X_\delta((j/\mathcal{T})(\Omega/q - m2\pi/q))$  e obtemos

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X(e^{j(\Omega/q - m2\pi/q)}) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X(e^{j(\Omega - m2\pi)/q}) \quad (4.35) \end{aligned}$$

Esta equação indica que  $Y(e^{j\Omega})$  é obtido somando-se versões mudadas em escala da DTFT  $X_q(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega/q})$  que são deslocadas com múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Podemos escrever este resultado explicitamente como

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X_q(e^{j(\Omega/q - m2\pi)})$$

A Figura 4.24 ilustra a relação entre  $Y(e^{j\Omega})$  e  $X(e^{j\Omega})$  descrita na equação (4.35). A Figura 4.24(a) descreve  $X(e^{j\Omega})$ . As figuras 4.24(b) – (d) mostram os termos individuais do somatório na equação (4.35) correspondentes a  $m = 0$ ,  $m = 1$  e  $m = q-1$ .

Na Figura 4.24(e) descrevemos  $Y(e^{j\Omega})$  supondo que  $W < \pi/q$ , enquanto a Figura 4.24(f) mostra  $Y(e^{j\Omega})$  supondo que  $W > \pi/q$ . Neste último caso há uma superposição entre as versões mudadas em escala e deslocadas de  $X(e^{j\Omega})$  envolvidas na equação (4.35), e ocorre *aliasing*. Concluímos que o aliasing pode ser evitado se  $W$ , o componente de freqüência mais elevada de  $X(e^{j\Omega})$ , for menor que  $\pi/q$ .

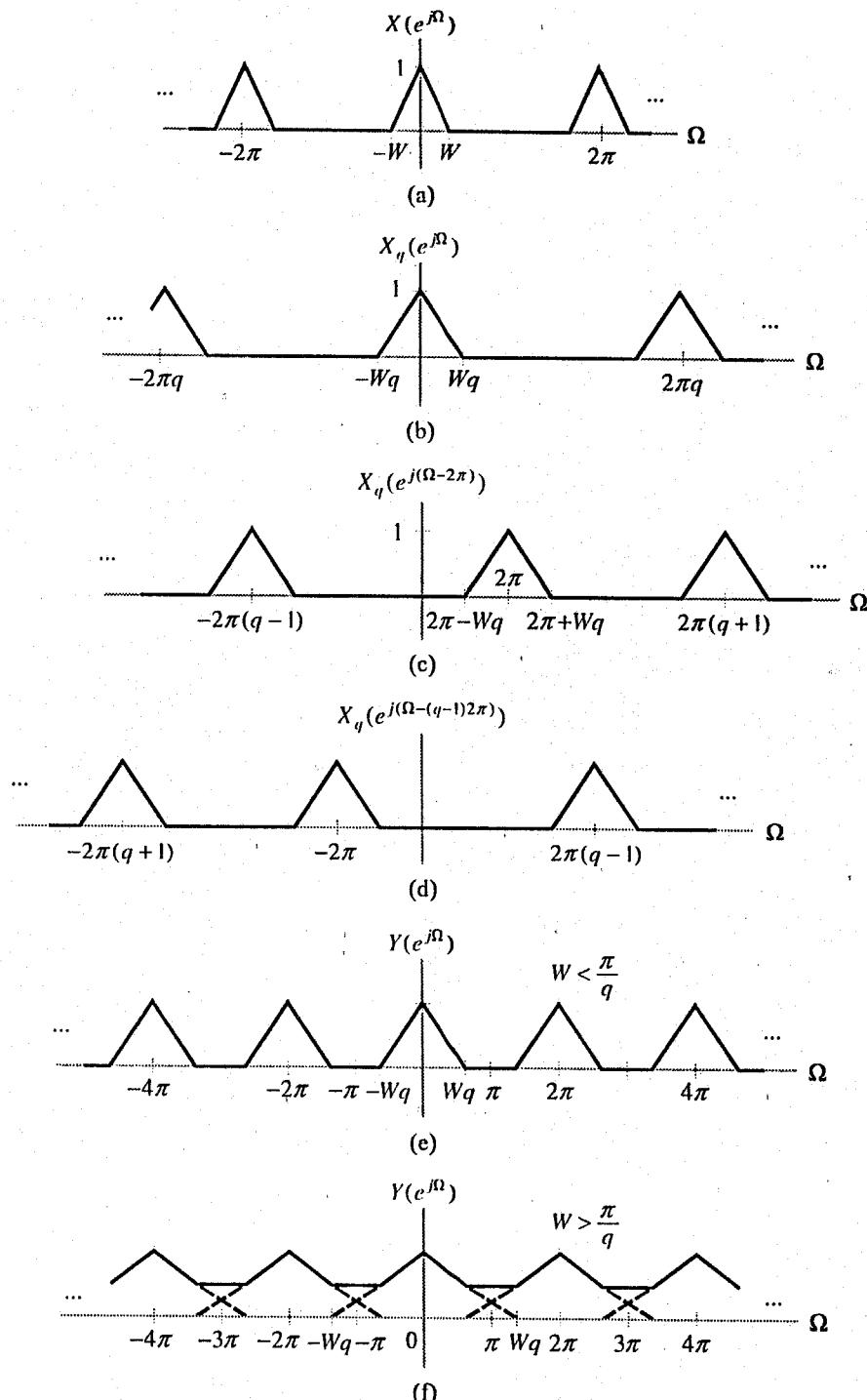


FIGURA 4.24 Efeito da subamostragem na DTFT. (a) Espectro do sinal original. (b) Termo  $m = 0$ ,  $X_q(e^{j\Omega})$ , na equação (4.35). (c) Termo  $m = 1$  na equação (4.35). (d) Termo  $m = q - 1$  na equação (4.35) (e)  $Y(e^{j\Omega})$  supondo que  $W < \pi/q$ . (f)  $Y(e^{j\Omega})$  supondo que  $W > \pi/q$ .

► **EXERCÍCIO 4.11** Descreva a DTFT do sinal subamostrado  $y[n] = x[qn]$  para  $q = 2$  e  $q = 5$  supondo

$$x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

**Resposta:** Veja as Figuras 4.25(a) e (b).

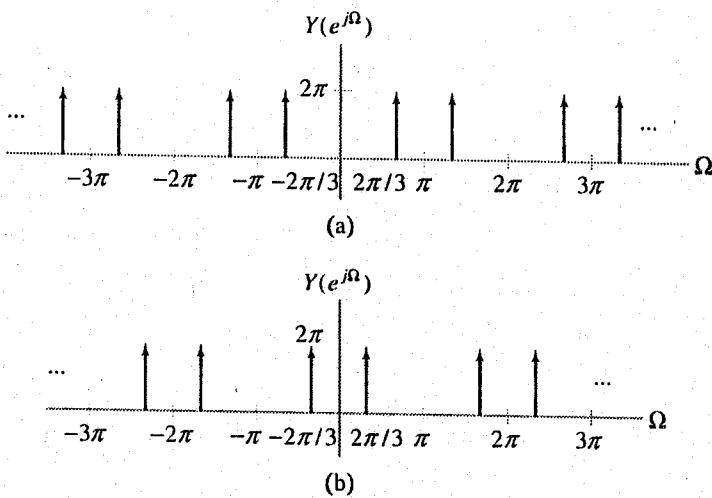


FIGURA 4.25 Solução para o Exercício 4.11. (a)  $q = 2$ . (b)  $q = 5$ .

## 4.7 Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo a Partir de Amostras

O problema de se reconstruir um sinal de tempo contínuo a partir de amostras envolve uma combinação de sinais de tempo contínuo e discreto. Como ilustra o diagrama de bloco da Figura 4.26, um sistema que executa esta operação tem um sinal de entrada de tempo discreto e um sinal de saída de tempo contínuo. A FT é uma ferramenta ideal para analisar este problema de reconstrução, uma vez que ela pode ser usada para representar tanto sinais de tempo contínuo como de tempo discreto. Nesta seção, consideraremos primeiro as condições que devem ser satisfeitas a fim de reconstruirmos de maneira única um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras. Supondo que estas condições sejam satisfeitas, estabeleceremos um método para reconstrução perfeita.

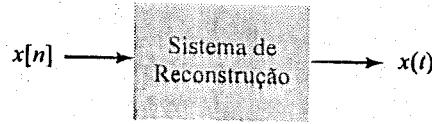


FIGURA 4.26 Diagrama de bloco ilustrando a conversão de um sinal de tempo discreto para um sinal de tempo contínuo.

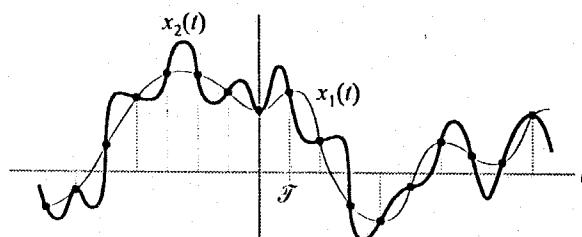
Infelizmente, a abordagem de reconstrução ideal não pode ser implementada em nenhum sistema prático. Conseqüentemente, a seção se encerra com uma análise de técnicas práticas de reconstrução e suas limitações.

### ■ TEOREMA DA AMOSTRAGEM

Nossa discussão a respeito da amostragem indicou que as amostras de um sinal nem sempre determinam de maneira única o sinal de tempo contínuo correspondente. Por exemplo, se amostrarmos

uma senóide com intervalos de um período, o sinal amostrado terá a aparência de uma constante e não poderemos determinar se o sinal original era uma constante ou a senóide. A Figura 4.27 ilustra este problema descrevendo dois diferentes sinais de tempo contínuo que têm o mesmo conjunto de amostras. Tereímos

$$x[n] = x_1(nT) = x_2(nT)$$



**FIGURA 4.27** Dois sinais de tempo contínuo,  $x_1(t)$  (linha tracejada) e  $x_2(t)$  (linha sólida), que têm o mesmo conjunto de amostras.

As amostras não nos dizem nada a respeito do comportamento do sinal entre os tempos de amostras. Para determinar como o sinal se comporta entre as amostras, devemos especificar restrições adicionais para o sinal de tempo contínuo. Um desses conjuntos de restrições que é muito útil na prática envolve exigir que o sinal faça transições suaves de uma amostra para outra. A suavidade, ou a taxa com a qual o sinal no domínio de tempo muda, está diretamente relacionada com a freqüência máxima presente no sinal. Conseqüentemente, restringir a suavidade no domínio de tempo corresponde a limitar a largura de faixa do sinal.

Há uma correspondência biunívoca entre as representações de domínio de tempo e de domínio de freqüência de um sinal. Dessa forma, também podemos ver o problema de reconstruirmos o sinal de tempo contínuo no domínio de freqüência. Para reconstruirmos de maneira única um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras deve haver uma correspondência única entre as FTs do sinal de tempo contínuo e o de sinal amostrado. Estas FTs se relacionam unicamente se o processo de amostragem não introduzir *aliasing*. O *aliasing* distorce o espectro do sinal original, como descobrimos na seção anterior, e destrói a relação biunívoca entre as FTs do sinal de tempo contínuo e amostrado. Isto sugere que uma condição para a correspondência única entre o sinal de tempo contínuo e suas amostras é equivalente à condição para o impedimento do *aliasing*. Esta exigência é formalmente estabelecida da seguinte maneira:

**Teorema da Amostragem** Admitamos que  $x(t) \xleftarrow{\text{FT}} X(j\omega)$  represente um sinal de faixa limitada, de forma que  $X(j\omega) = 0$  para  $|\omega| > \omega_m$ . Se  $\omega_s > 2\omega_m$ , em que  $\omega_s = 2\pi/T$  é a freqüência de amostragem, então  $x(t)$  é determinado de maneira única por suas amostras  $x(nT)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A freqüência mínima de amostragem,  $2\omega_m$ , muitas vezes é denominada *taxa de amostragem de Nyquist* ou *taxa de Nyquist*. A freqüência de amostragem real,  $\omega_s$ , comumente é chamada *freqüência de Nyquist* quando se discute a FT tanto do sinal de tempo contínuo como do amostrado. Observamos que em muitos problemas, é mais conveniente avaliar o teorema da amostragem usando a freqüência expressa em unidades de hertz. Se  $f_m = \omega_m/2\pi$  for a mais alta freqüência presente no sinal e  $f_s$  denotar a freqüência de amostragem, ambas expressas em unidades de hertz, então o teorema da amostragem afirma que  $f_s > 2f_m$ , em que  $f_s = 1/T$ . De modo equivalente, devemos ter  $T < 1/2f_m$  para satisfazer as condições do teorema da amostragem.

**EXEMPLO 4.14** Suponhamos que  $x(t) = \sin(10\pi t)/\pi t$ . Determine condições no intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$  de forma que  $x(t)$  seja representado de maneira única pela seqüência de tempo discreto  $x[n] = x(n\mathcal{T})$ .

**Solução:** Para aplicar o teorema da amostragem, primeiramente devemos determinar a freqüência máxima,  $\omega_m$ , presente em  $x(t)$ . Tomando a FT, temos

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 10\pi \\ 0, & |\omega| > 10\pi \end{cases}$$

como descreve a Figura 4.28. Temos  $\omega_m = 10\pi$ . Consequentemente, é necessário que

$$\frac{2\pi}{\mathcal{T}} > 20\pi$$

ou

$$\mathcal{T} < \frac{1}{10}$$

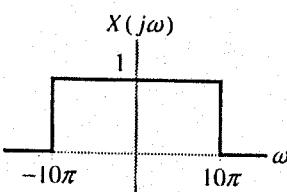


FIGURA 4.28 FT de sinal de tempo contínuo correspondente ao Exemplo 4.14.

► **EXERCÍCIO 4.12** Determine as condições no intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$  de forma que  $x(t) = \cos(2\pi t) \sin(\pi t)/\pi t + 3 \sin(6\pi t) \sin(2\pi t)/\pi t$  seja representado de maneira única pela seqüência de tempo discreto  $x[n] = x(n\mathcal{T})$ .

**Resposta:**  $\mathcal{T} < \frac{1}{8}$ .

Muitas vezes estamos interessados somente nos componentes de freqüência mais baixa de um sinal e gostaríamos de extrair amostras do sinal numa taxa  $\omega_s$ , menor do que o dobro da freqüência mais elevada presente. Uma taxa de amostragem reduzida pode ser usada se o sinal for passado através de um filtro passa-baixas de tempo contínuo antes da amostragem. Idealmente, este filtro deixa passar componentes de freqüência abaixo de  $\omega_s/2$  sem distorção, e suprime quaisquer componentes de freqüência acima de  $\omega_s/2$ . Esse filtro impede o *aliasing* e, dessa forma, é denominado *filtro anti-aliasing*. Um filtro *anti-aliasing* prático faz gradualmente a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição gradualmente. Para compensar a faixa de transição do filtro, a faixa de passagem comumente é escolhida para incluir a freqüência de sinal máxima desejada, e a freqüência de amostragem,  $\omega_s$ , é escolhida de forma que  $\omega_s/2$  esteja na faixa de rejeição do filtro *anti-aliasing*.

Esta questão será discutida com mais detalhes na Seção 4.8. Um filtro *anti-aliasing* normalmente é usado mesmo que o sinal no qual se tem interesse seja limitado em faixa para menos de  $\omega_s/2$  para impedir o *aliasing* associado com a presença de uma medição ou ruído eletrônico.

### ■ RECONSTRUÇÃO IDEAL

O teorema da amostragem indica quanto rápido você deve extrair amostras de um sinal para que as amostras representem de maneira única o sinal de tempo contínuo. Consideraremos agora o problema de reconstruir o sinal de tempo contínuo a partir destas amostras. Este problema é resolvido mais facilmente no domínio de freqüência usando-se a FT. Lembre-se que se  $x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$ , então a representação com FT para o sinal amostrado será dada pela equação (4.32), reproduzida aqui como

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$

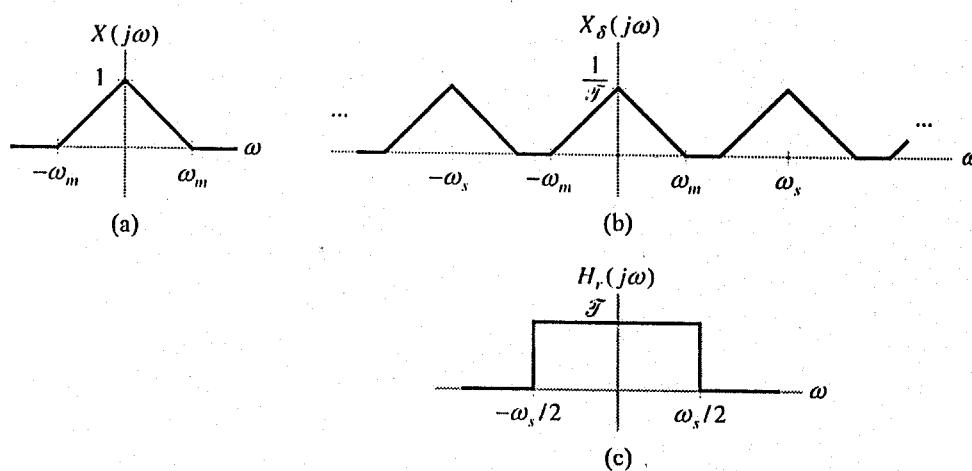
As Figuras 4.29(a) e (b) descrevem  $X(j\omega)$  e  $X_\delta(j\omega)$ , respectivamente, supondo que as condições do teorema da amostragem sejam satisfeitas.

O objetivo da reconstrução é aplicar uma certa operação a  $X_\delta(j\omega)$  que a converta de volta em  $X(j\omega)$ . Qualquer dessas operações deve eliminar as réplicas de  $X(j\omega)$  que aparecem em  $k\omega_s$ . Isto é realizado multiplicando-se  $X_\delta(j\omega)$  por  $H_r(j\omega)$ , em que

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} \mathcal{T}, & |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} \quad (4.36)$$

como descreve a Figura 4.29(c). Temos agora

$$X(j\omega) = X_\delta(j\omega)H_r(j\omega) \quad (4.37)$$



**FIGURA 4.29** Reconstrução ideal. (a) Espectro do sinal original. (b) Espectro do sinal amostrado. (c) Resposta em freqüência do filtro de reconstrução.

Note que a multiplicação por  $H_r(j\omega)$  não recuperará  $X(j\omega)$  de  $X_\delta(j\omega)$  se as condições do teorema da amostragem não forem satisfeitas e ocorrer *aliasing*.

A multiplicação no domínio de freqüência transforma-se em convolução no domínio de tempo e, deste modo, a equação (4.37) implica que

$$x(t) = x_\delta(t) * h_r(t)$$

em que  $h_r(t) \xleftarrow{FT} H_r(j\omega)$ . Substituindo  $x_\delta(t)$  nesta relação resulta em

$$\begin{aligned} x(t) &= h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT) \end{aligned}$$

Usamos agora

$$h_r(t) = \frac{T \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)}{\pi t}$$

para obter

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t-nT)\right) \quad (4.38)$$

No domínio de tempo, reconstruímos  $x(t)$  como uma soma ponderada de funções sinc deslocadas pelo intervalo de amostragem. Os pesos correspondem aos valores da seqüência de tempo discreto. Esta operação de reconstrução é ilustrada na Figura 4.30. O valor de  $x(t)$  em  $t = nT$  é dado por  $x[n]$  porque todas as funções sinc deslocadas cruzam zero em  $nT$ , exceto a  $n$ -ésima, e seu valor é  $x[n]$ . O valor de  $x(t)$  presente entre múltiplos inteiros de  $T$  é determinado a partir de todos os valores da seqüência  $x[n]$ .

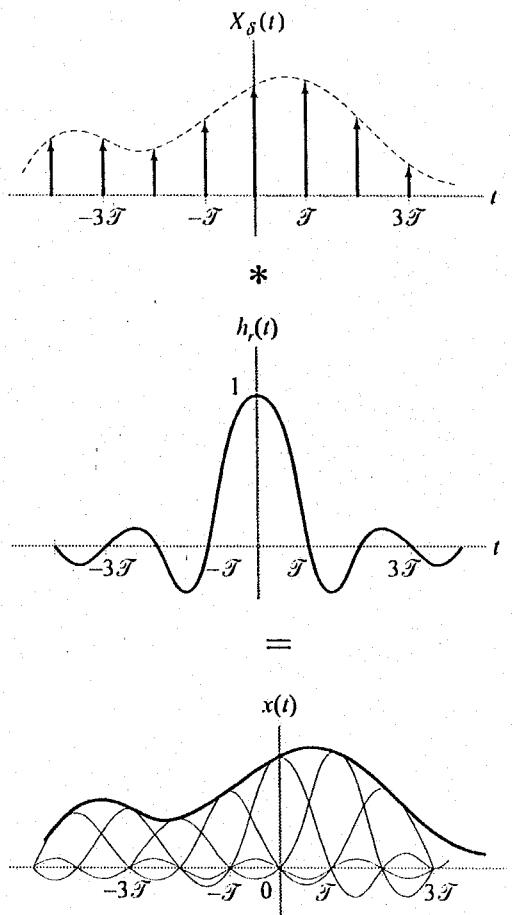


FIGURA 4.30 Reconstrução ideal no domínio de tempo.

A operação descrita na equação (4.38) comumente é chamada *interpolação ideal limitada em faixa*, uma vez que ela indica como interpolar entre as amostras de um sinal limitado em faixa. Na prática, esta equação não pode ser implementada. Primeiro, ela representa um sistema não causal. A saída,  $x(t)$ , depende dos valores passados e futuros da entrada,  $x[n]$ . Segundo, a influência de cada amostra se estende ao longo de um intervalo infinito de tempo porque  $h_r(t)$  tem duração de tempo finita.

### ■ RECONSTRUÇÃO PRÁTICA – O RETENTOR DE ORDEM ZERO

A reconstrução prática de sinais de tempo contínuo muitas vezes é implementada com um dispositivo conhecido como *retentor de ordem zero*\*<sup>1</sup>, o qual mantém ou retém o valor  $x[n]$  durante  $T$  segundos, como descreve a Figura 4.31. Isto provoca transições abruptas em  $x_n(t)$  em múltiplos inteiros de  $T$  e produz uma aproximação em degraus de escada para o sinal de tempo contínuo. Novamente, a FT constitui um meio para analisar a qualidade desta aproximação.

\* N. de R.T.: Também conhecido como extrapolarizador de ordem zero.

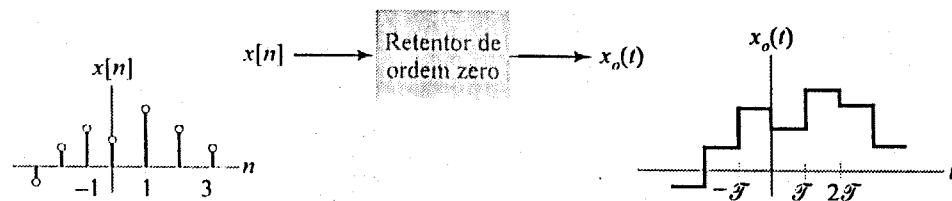


FIGURA 4.31 Retentor de ordem zero.

O retentor de ordem zero é representado matematicamente como uma soma ponderada de pulsos retangulares deslocados em múltiplos inteiros do intervalo de amostragem. Admitamos que

$$h_o(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

como descreve a Figura 4.32. A saída do retentor de ordem zero é expressa em termos de  $h_o(t)$  como

$$x_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_o(t-nT) \quad (4.39)$$

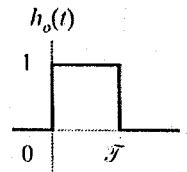


FIGURA 4.32 Pulso retangular usado para analisar a retenção de ordem zero.

Reconhecemos a equação (4.39) como sendo a convolução do sinal amostrado  $x_\delta(t)$  com  $h_o(t)$ , como é mostrado por

$$\begin{aligned} x_o(t) &= h_o(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT) \\ &= h_o(t) * x_\delta(t) \end{aligned}$$

Tome agora a FT de  $x_o(t)$  usando a propriedade de convolução – multiplicação da FT para obter

$$X_o(j\omega) = H_o(j\omega)X_\delta(j\omega)$$

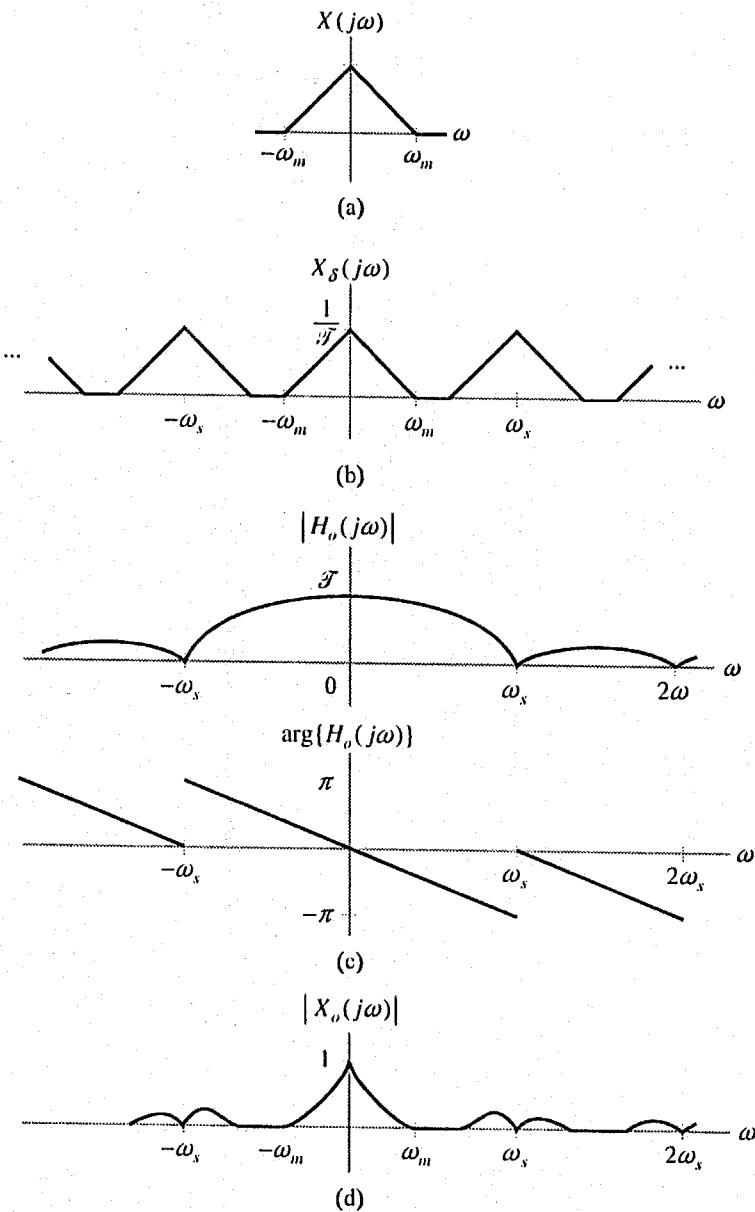
em que

$$h_o(t) \xleftarrow{\text{FT}} H_o(j\omega) = 2e^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}$$

A Figura 4.33 descreve os efeitos da retenção de ordem zero no domínio de freqüência, supondo que  $T$  seja escolhido para satisfazer o teorema da amostragem. Comparando  $X_o(j\omega)$  com  $X(j\omega)$ , vemos que a retenção de ordem zero introduz três formas de modificação:

1. Um desfasamento linear correspondente a um retardamento de tempo de  $T/2$  segundos.
2. A parte de  $X_\delta(j\omega)$  entre  $-\omega_m$  e  $\omega_m$  é distorcida pela curvatura do lóbulo principal de  $H_o(j\omega)$ .
3. Versões distorcidas e atenuadas de  $X(j\omega)$  permanecem centralizadas em múltiplos diferentes de zero de  $\omega_s$ .

Ao reter cada valor  $x[n]$  durante  $T$  segundos, introduzimos um deslocamento no tempo de  $T/2$  segundos em  $x_o(t)$ . Esta é a fonte de modificação 1. As transições abruptas em  $x_o(t)$  associadas com a aproximação em degraus de escada sugereem a presença de componentes de alta freqüência e são coerentes com a modificação 3. Tanto a modificação 1 como a 2 são reduzidas aumentando-se  $\omega_s$  ou, de maneira equivalente, diminuindo-se  $T$ .



**FIGURA 4.33** Efeito da retenção de ordem zero no domínio de freqüência. (a) Espectro do sinal original de tempo contínuo. (b) FT do sinal amostrado. (c) Módulo e fase de  $H_o(j\omega)$ . (d) Espectro de módulo do sinal reconstruído usando-se a retenção de ordem zero.

Em algumas aplicações, as modificações associadas com a retenção de ordem zero podem ser aceitáveis. Em outras, um processamento adicional de  $x_o(t)$  pode ser desejável para reduzir a distorção associada com as modificações 2 e 3. Geralmente, um retardo de  $\mathcal{T}/2$  segundos não tem nenhuma consequência real. A segunda e terceira modificações listadas acima são eliminadas passando-se  $x_o(t)$  por um filtro de compensação de tempo contínuo com resposta em freqüência

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega\mathcal{T}}{2\sin(\omega\mathcal{T}/2)}, & |\omega| \leq \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_s - \omega_m \end{cases}$$

Esta resposta em freqüência é descrita na Figura 4.34. Em  $|\omega| \leq \omega_m$ , o filtro de compensação inverte a distorção introduzida pela curvatura do lóbulo principal de  $H_o(j\omega)$ . Em  $|\omega| > \omega_s - \omega_m$ ,  $H_c(j\omega)$  remove a energia de  $X_o(j\omega)$  centralizada em múltiplos diferentes de zero de  $\omega_s$ . O valor de

$H_c(j\omega)$  não interfere na faixa de frequência  $\omega_m < |\omega| < \omega_s - \omega_m$ , uma vez que  $X_o(j\omega)$  é nulo.  $H_c(j\omega)$  muitas vezes é denominado *filtro antiimagem* porque ele elimina as “imagens” distorcidas de  $X(j\omega)$  presentes nos múltiplos diferentes de zero de  $\omega_s$ . Um diagrama de blocos representando o processo compensado de reconstrução com retenção de ordem zero é mostrado na Figura 4.35. O filtro antiimagem suaviza as descontinuidades dos degraus em  $x_o(t)$ .

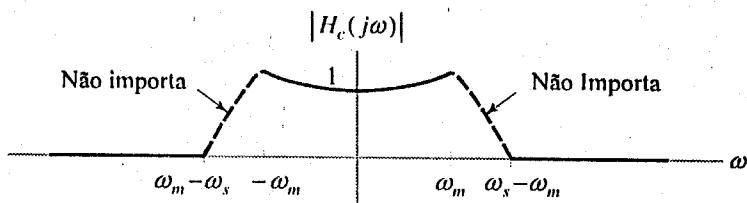


FIGURA 4.34 Resposta em frequência de um filtro de compensação para eliminar parte da distorção introduzida pelo retentor de ordem zero.

Surgem diversas questões práticas no projeto e construção de um filtro antiimagem. Não podemos obter um filtro antiimagem causal que tenha fase nula. Conseqüentemente, um filtro prático introduzirá certa distorção de fase.

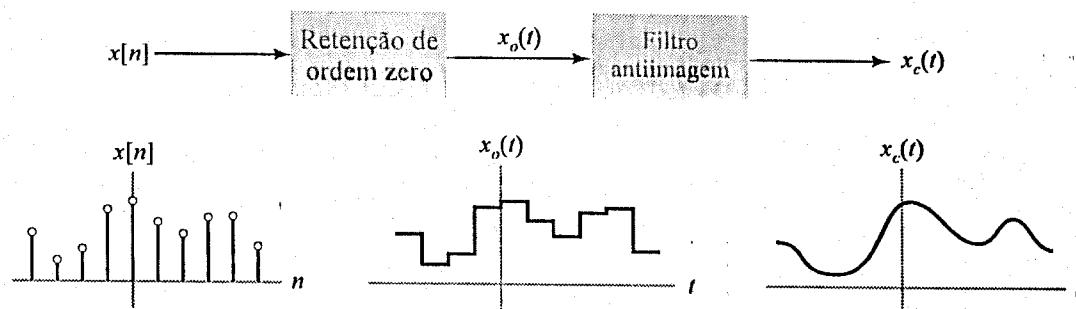


FIGURA 4.35 Diagrama de blocos de um sistema prático de reconstrução.

Em muitos casos, a fase linear na faixa de passagem,  $|\omega| \leq \omega_m$ , é aceitável, uma vez que a distorção de fase linear corresponde a um retardo de tempo adicional. A dificuldade de aproximar  $|H_c(j\omega)|$  depende da separação entre  $\omega_m$  e  $\omega_s - \omega_m$ . Se esta distância,  $\omega_s - 2\omega_m$ , for grande, a curvatura do lóbulo principal de  $H_o(j\omega)$  será muito pequena, e uma aproximação muito boa será obtida simplesmente fazendo  $|H_c(j\omega)| = 1$ . Em segundo lugar, a região  $\omega_m < \omega < \omega_s - \omega_m$  é usada para fazer a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição. Se  $\omega_s - 2\omega_m$  for grande, a faixa de transição do filtro será grande. Filtros com faixa de transição grandes são muito mais fáceis de projetar do que aqueles com faixas de transição pequenas. Conseqüentemente, as exigências para um filtro anti-imagem são grandemente reduzidas escolhendo-se  $\omega_s$  suficientemente pequeno de forma que  $\omega_s \gg 2\omega_m$ . Uma discussão mais detalhada do projeto de filtros será apresentada no Capítulo 8.

Em esquemas práticos de reconstrução é comum aumentar a taxa de amostragem efetiva do sinal de tempo discreto antes da retenção de ordem zero. Esta técnica é conhecida como *superamostragem*. Ela é feita para relaxar as exigências sobre o filtro antiimagem, como é ilustrado no exemplo seguinte. Não obstante isto aumentar a complexidade do hardware de tempo discreto, normalmente ela produz uma diminuição no custo global do sistema para determinado nível de qualidade de reconstrução.

**EXEMPLO 4.15** Neste exemplo, exploramos os benefícios da superamostragem num *cd – player* de áudio. A frequência de sinal mínima é 20 kHz porque nos lembramos do Capítulo 1 que o ouvido é sensível a frequências até 20 kHz. Considere dois casos: (a) taxa de amostragem básica de  $1/\bar{T}_1 = 44,1$  kHz; (b) superamostragem de 8 vezes para uma taxa de amostragem efetiva de  $1/\bar{T}_2 = 352,8$  kHz. Em cada caso, determine as restrições para a resposta em módulo de um filtro antiimagem de forma que a resposta em módulo global do sistema de reconstrução com retenção de ordem zero esteja entre 0,99 e 1,01 na faixa de passagem do sinal e menor que  $10^{-3}$  para as imagens do espectro de sinais que estejam localizadas em múltiplos da freqüência de amostragem.

**Solução:** Neste exemplo, é conveniente expressar a freqüência em unidades de hertz ao invés de radianos por segundo. Isto é indicado explicitamente substituindo-se  $\omega$  por  $f$  e representando-se as respostas em freqüência  $H_o(j\omega)$  e  $H_c(j\omega)$  como  $H'_o(jf)$  e  $H'_c(jf)$ . A resposta completa em módulo do retentor de ordem zero seguido do filtro antiimagem  $|H'_c(jf)|$  é  $|H'_o(jf)| |H'_c(jf)|$ . Nossa meta é encontrar a faixa aceitável de  $|H'_c(jf)|$  de forma que o produto  $|H'_o(jf)| |H'_c(jf)|$  satisfaça as restrições da resposta. As Figuras 4.36(a) e (b) descrevem  $|H'_o(jf)|$  supondo taxas de amostragem de 44,1 kHz e 352,8 kHz, respectivamente. As linhas tracejadas em cada figura denotam a faixa de passagem do sinal e suas imagens. Na taxa de amostragem menor, vemos que o sinal e suas imagens ocupam a maior parte do espectro; eles estão separados por 4,1 kHz. No caso de superamostragem de 8 vezes, o sinal e suas imagens ocupam uma parte muito pequena do espectro; eles estão separados por 312,8 kHz.

A restrição para a faixa de passagem é  $0,99 < |H'_o(jf)| |H'_c(jf)| < 1,01$ , o que implica

$$\frac{0,99}{|H'_o(jf)|} < |H'_c(jf)| < \frac{1,01}{|H'_o(jf)|}, \quad -20 \text{ kHz} < f < 20 \text{ kHz}$$

A Figura 4.36(c) descreve essas restrições para ambos os casos. Aqui, multiplicamos  $|H'_c(jf)|$  pelos intervalos de amostragem  $\bar{T}_1$  e  $\bar{T}_2$  de forma que ambos os casos podem ser exibidos na mesma escala. Note que o caso (a) requer uma substancial curvatura em  $|H'_c(jf)|$  para eliminar a distorção da faixa de passagem introduzida pelo lóbulo principal de  $H'_o(jf)$ . Na borda da faixa de passagem, os limites são

$$1,4257 < \bar{T}_1 |H'_c(jf_m)| < 1,4545, \quad f_m = 20 \text{ kHz}$$

para o caso (a) e

$$0,9953 < \bar{T}_2 |H'_c(jf_m)| < 1,0154, \quad f_m = 20 \text{ kHz}$$

para o caso (b).

A restrição de rejeição da imagem implica que  $|H'_o(jf)| |H'_c(jf)| < 0,001$  para todas as freqüências nas quais as imagens estejam presentes. Esta condição é bastante simplificada considerando-se somente as freqüências em que  $|H'_o(jf)|$  é máximo. O valor máximo de  $|H'_o(jf)|$  nas faixas de freqüência da imagem ocorre na menor freqüência da primeira imagem: 24,1 kHz no caso (a) e 332,8 kHz no caso (b). Os valores de  $|H'_o(jf)| / \bar{T}_1$  e  $|H'_o(jf)| / \bar{T}_2$  nestas freqüências são 0,5763 e 0,0598, respectivamente. Isto implica os limites

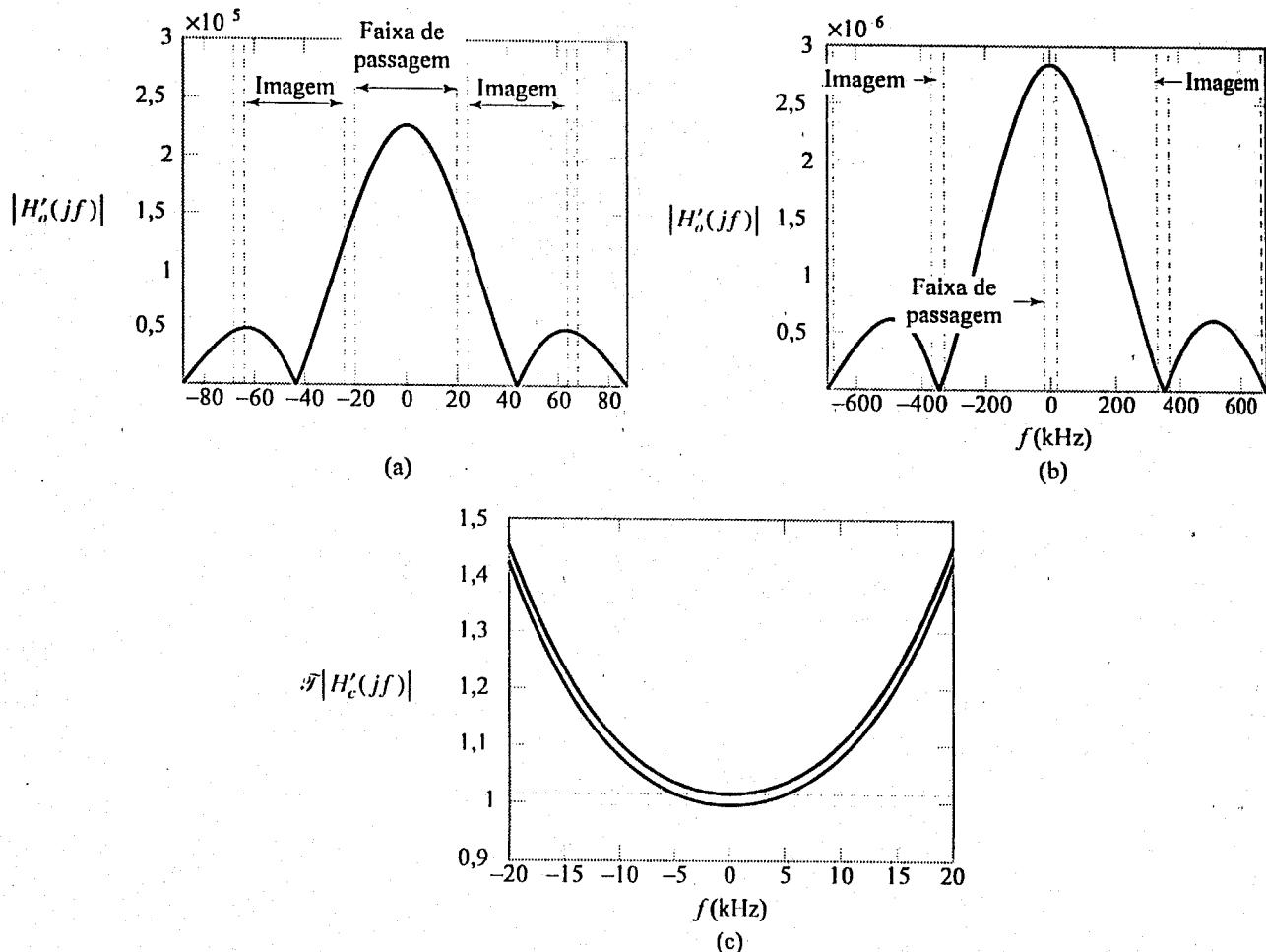
$$\bar{T}_1 |H'_c(jf)| < 0,0017, \quad f > 24,1 \text{ kHz}$$

e

$$\bar{T}_2 |H'_c(jf)| < 0,0167, \quad f > 332,8 \text{ kHz}$$

para os casos (a) e (b), respectivamente.

Conseqüentemente, o filtro antiimagem para o caso (a) deve mostrar uma transição de um valor igual a  $1,4257/\bar{T}_1$  para  $0,0017/\bar{T}_1$  ao longo de um intervalo de 4,1 kHz. Em comparação, com superpostagem de 8 vezes, o filtro deve mostrar uma transição de  $0,9953/\bar{T}_2$  ao longo de um intervalo de freqüência de 312,8 kHz. Dessa forma, a superamostragem não somente aumenta a largura de transição com um fator de quase 80 como também relaxa a restrição da atenuação da faixa de rejeição com um fator de mais de 10.



**FIGURA 4.36** Projeto de filtro anti-imagem com e sem superamostragem. (a) Módulo de  $H'_o(jf)$  para uma taxa de amostragem de 44,1 kHz. As linhas tracejadas denotam a faixa de passagem e as imagens. (b) Módulo de  $H'_o(jf)$  para superamostragem de 8 vezes (taxa de amostragem igual a 352,8 kHz). As linhas tracejadas denotam a faixa de passagem e imagens do sinal. (c) Restrições normalizadas para a resposta na faixa de passagem do filtro antiimagem. As linhas sólidas supõem uma taxa de amostragem de 44,1 kHz; as linhas tracejadas supõem superpostagem de 8 vezes. A resposta do filtro normalizado deve situar-se entre cada par de linhas.

## \*4.8 Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo

Nesta seção, usamos métodos de Fourier para discutir e analisar um sistema típico para processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo. Há diversas vantagens em processar um sinal de tempo contínuo com um sistema de tempo discreto. Estas vantagens resultam do poder e flexibilidade dos dispositivos de computação de tempo discreto. Primeiro, uma classe ampla de manipulações de sinais é mais facilmente realizada usando-se as operações aritméticas de um computador do que usando-se componentes analógicos. Segundo, a implementação de um sistema num computador envolve somente escrever um conjunto de instruções ou programa para que o computador execute. Terceiro, o sistema de tempo discreto é facilmente mudado modificando-se o programa. Muitas vezes, o sistema pode ser modificado em tempo real para otimizar algum critério associado com o sinal processado. Contudo, outra vantagem do processamento em tempo discreto é a dependência direta que a escala dinâmica e a proporção sinal – ruído têm do número de bits usados para representar o sinal de tempo discreto. Estas vantagens levaram à proliferação de dispositivos de computação projetados especificamente para processamento de sinais em tempo discreto.

Um sistema mínimo para processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo deve conter um dispositivo de amostragem e um dispositivo de computação para implementar o sistema de tempo discreto. Se o sinal processado precisar ser convertido de volta para tempo contínuo, a reconstrução também será necessária. Sistemas mais sofisticados também podem utilizar superamostragem, decimação e interpolação. *Decimação* e *interpolação* são métodos para mudar a taxa de amostragem efetiva de um sinal de tempo discreto. A decimação reduz a taxa de amostragem efetiva, enquanto a interpolação aumenta a taxa de amostragem efetiva. O uso criterioso destes métodos pode reduzir o custo do sistema global. Iniciamos com uma análise de um sistema básico para processar sinais de tempo contínuo. Concluímos, revisitando a superamostragem e examinando o papel da interpolação e decimação em sistemas que processam sinais de tempo contínuo.

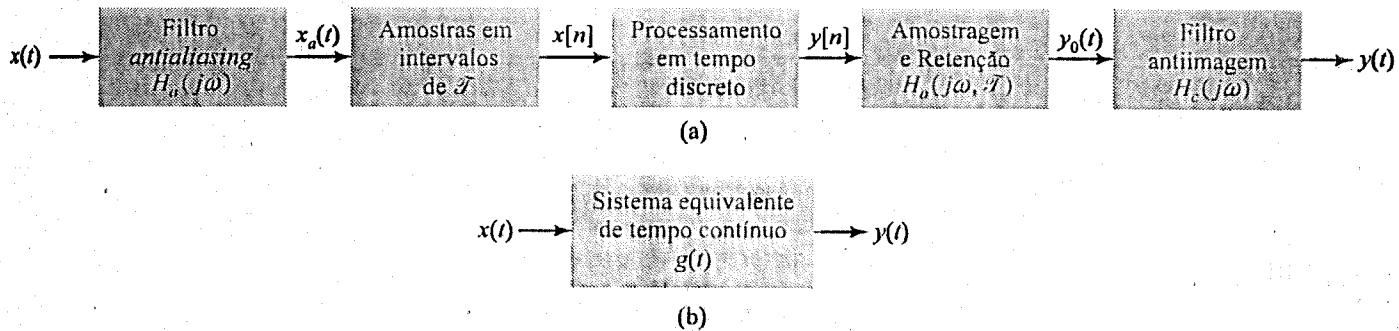
### SISTEMA BÁSICO DE PROCESSAMENTO DE SINAIS EM TEMPO DISCRETO

Um sistema típico para processar sinais de tempo contínuo em tempo discreto é ilustrado na Figura 4.37(a). Um sinal de tempo contínuo é passado primeiro por um filtro *antialiasing* passabaias e depois é amostrado em intervalos de  $\mathcal{T}$  para convertê-lo em um sinal de tempo discreto.

O sinal amostrado é então processado por um sistema de tempo discreto para dar algum efeito desejado ao sinal. Por exemplo, o sistema de tempo discreto pode representar um filtro projetado para ter uma resposta específica em freqüência, como em um equalizador. Depois do processamento, o sinal é convertido de volta para o formato de tempo contínuo. Um dispositivo retentor de ordem zero converte o sinal de tempo discreto de volta para tempo contínuo, e um filtro antiimagem remove a distorção introduzida pelo retentor de ordem zero.

Esta combinação de operações pode ser reduzida a um filtro de tempo contínuo equivalente usando-se a FT como uma ferramenta de análise. A idéia é encontrar um sistema de tempo contínuo  $g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(j\omega)$  de tal forma que  $Y(j\omega) = G(j\omega) X(j\omega)$ , como descreve a Figura 4.37(b). Conseqüentemente,  $G(j\omega)$  tem o mesmo efeito sobre a entrada que o sistema da Figura 4.37(a). Supomos nesta análise que a operação de processamento em tempo discreto seja representada por um sistema de tempo discreto com resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$ . Lembre-se que  $\Omega = \omega\mathcal{T}$ , em que  $\mathcal{T}$  é o intervalo de amostragem, de forma que o sistema de tempo discreto tem uma resposta em freqüência de tempo contínuo  $H(e^{j\omega\cdot\mathcal{T}})$ . Além disso, a resposta em freqüência associada com o dispositivo de retenção de ordem zero é

$$H_a(j\omega, \mathcal{T}) = 2e^{-j\omega\cdot\mathcal{T}/2} \frac{\sin\left(\omega\frac{\mathcal{T}}{2}\right)}{\omega}$$



**FIGURA 4.37** Diagrama de blocos para processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo. (a) Um sistema básico. (b) Sistema equivalente em tempo contínuo.

A primeira operação aplicada a  $x(t)$  é o filtro *antialiasing* em tempo contínuo, cuja saída tem a FT dada por

$$X_a(j\omega) = H_a(j\omega) X(j\omega)$$

Depois da amostragem, a equação (4.32) indica que a representação por FT para  $x[n]$  é

$$\begin{aligned} X_\delta(j\omega) &= \frac{1}{j\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - k\omega_s)) \\ &= \frac{1}{j\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j(\omega - k\omega_s)) X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned} \quad (4.40)$$

em que  $\omega_s = 2\pi/\mathcal{T}$  é a freqüência de amostragem. O sistema de tempo discreto modifica  $X_\delta(j\omega)$  com  $H(e^{j\omega\mathcal{T}})$ , produzindo

$$Y_\delta(j\omega) = \frac{1}{j\mathcal{T}} H(e^{j\omega\mathcal{T}}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j(\omega - k\omega_s)) X(j(\omega - k\omega_s))$$

O processo de reconstrução modifica  $Y_\delta(j\omega)$  multiplicando-o por  $H_o(j\omega, \mathcal{T})H_c(j\omega)$  e, dessa forma, podemos escrever

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\mathcal{T}} H_o(j\omega, \mathcal{T}) H_c(j\omega) H(e^{j\omega\mathcal{T}}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j(\omega - k\omega_s)) X(j(\omega - k\omega_s))$$

Supondo que não ocorra *aliasing*, o filtro antiimagem  $H_c(j\omega)$  elimina os componentes de freqüência acima de  $\omega_s/2$  e, deste modo, elimina todos os termos da soma infinita, exceto o termo com  $k = 0$ . Portanto, teremos,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\mathcal{T}} H_o(j\omega, \mathcal{T}) H_c(j\omega) H(e^{j\omega\mathcal{T}}) H_a(j\omega) X(j\omega)$$

Esta expressão indica que o sistema global é equivalente a um sistema LTI de tempo contínuo que tem a resposta em freqüência

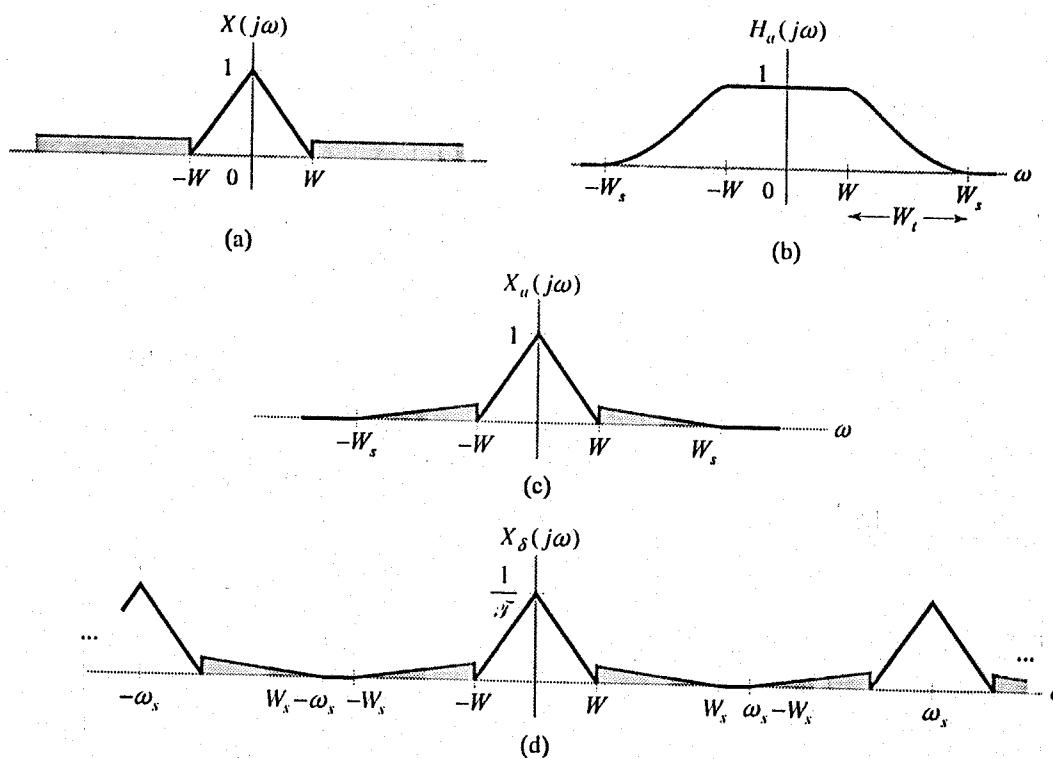
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\mathcal{T}} H_o(j\omega, \mathcal{T}) H_c(j\omega) H(e^{j\omega\mathcal{T}}) H_a(j\omega) \quad (4.41)$$

Note que esta correspondência com um sistema LTI de tempo contínuo supõe a ausência de *aliasing*.

## SUPERAMOSTRAGEM

Na Seção 4.7, notamos que aumentar a taxa de amostragem efetiva associada com um sinal de tempo discreto antes de usar um retentor de ordem zero para converter o sinal de tempo discreto de volta para tempo contínuo relaxa as exigências impostas ao filtro antiimagem. Similarmente, as exigências impostas ao filtro *antialiasing* se relaxam se a taxa de amostragem for escolhida em um nível significativamente maior do que a taxa de Nyquist. Isto permite uma faixa de transição ampla no filtro *antialiasing*.

Um filtro *antialiasing* impede o *aliasing* ao limitar a largura de faixa do sinal antes da amostragem. Embora o sinal no qual se tem interesse possa ter a freqüência máxima  $W$ , em geral, o sinal de tempo contínuo terá energia em freqüências mais elevadas devido à presença de ruído e de outras características não ideais. Essa situação é ilustrada na Figura 4.38(a). A área sombreada do espectro representa a energia em freqüências acima da freqüência de sinal máxima; referir-nos-emos a este componente como *ruído*. O filtro *antialiasing* é escolhido para impedir que este ruído apareça por *aliasing* na faixa na qual se tem interesse. A resposta em módulo de um filtro *antialiasing* prático não pode ir abruptamente de ganho unitário para zero na freqüência  $W$ , mas, ao contrário, vai gradativamente da faixa de passagem para a faixa de rejeição ao longo de uma faixa de freqüências, como descreve a Figura 4.38(b). Aqui, a faixa de rejeição do filtro inicia-se em  $W_s$ , e  $W_t = W_s - W$  denota a largura da faixa de transição. O espectro do sinal filtrado  $X_a(j\omega)$  tem agora a freqüência máxima  $W_s$ , como descreve a Figura 4.38(c). Este sinal é amostrado à taxa  $\omega_s$ , resultando no espectro  $X_\delta(j\omega)$  descrito na Figura 4.38(d). Desenhamos  $X_\delta(j\omega)$  supondo que  $\omega_s$  seja suficientemente grande para impedir *aliasing*. À medida que  $\omega_s$  decresce, réplicas do espectro de sinal original começam a sobrepor-se, e ocorre *aliasing*.



**FIGURA 4.38** Efeito da superamostragem nas especificações do filtro *antialiasing*. (a) Espectro do sinal original. (b) Módulo da resposta em freqüência do filtro *antialiasing*. (c) Espectro do sinal na saída do filtro *antialiasing*. (d) Espectro da saída do filtro *antialiasing* depois da amostragem. O gráfico descreve o caso  $\omega_s > 2W_s$ .

Para impedir que o ruído tenha *aliasing* consigo mesmo, impomos que  $\omega_s - W_s > W_s$  ou  $\omega_s > 2W_s$ , conforme é previsto pelo teorema da amostragem. Entretanto, devido ao processamento em tempo discreto subsequente, muitas vezes não nos importamos se o ruído faz *aliasing* consigo mesmo, mas, em vez disso, desejamos impedir que o ruído apareça por *aliasing* na faixa de sinal  $-W < \omega < W$ . Isto implica que devemos ter

$$\omega_s - W_s > W$$

Substituindo  $W_s = W_t + W$  nesta desigualdade, podemos escrever

$$\omega_s - (W_t + W) > W$$

Reorganizando os termos para obtermos a relação entre a faixa de transição do *filtro antialiasing* e a freqüência de amostragem, temos

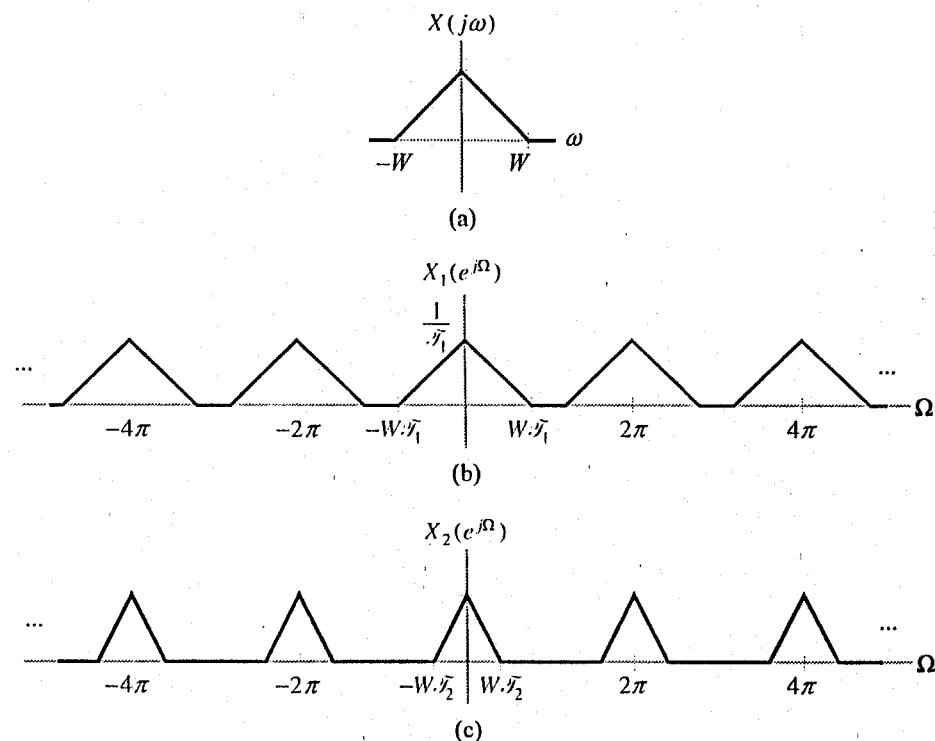
$$W_t < \omega_s - 2W$$

Conseqüentemente, a faixa de transição do filtro *antialiasing* deve ser menor do que a freqüência de amostragem menos duas vezes o componente de freqüência do sinal mais elevado no qual se tem interesse. Filtros com faixas de transição pequenas são difíceis de projetar, e são caros. Por meio de superamostragem, ou escolhendo  $\omega_s >> 2W$ , podemos relaxar muito as exigências impostas à faixa de transição do filtro de *aliasing* e, consequentemente, reduzir sua complexidade e custo.

Tanto na amostragem como na reconstrução, as dificuldades de implementar filtros analógicos práticos sugerem o uso da taxa de amostragem mais elevada possível. Porém, se este conjunto de dados for processado com um sistema de tempo discreto, como descreve a Figura 4.37(a), então taxas de amostragem elevadas acarretarão um aumento no custo do sistema de tempo discreto. O custo mais elevado ocorre porque os sistemas de tempo discreto devem executar as computações a uma taxa mais elevada. Este conflito na taxa de amostragem será aliviado se pudermos mudar a taxa de amostragem de tal forma que uma taxa elevada seja usada para amostragem e reconstrução, e uma taxa menor seja usada para processamento em tempo discreto. A decimação e interpolação oferecem essa capacidade, conforme discutiremos em seguida.

### ■ DECIMAÇÃO

Iniciamos a discussão considerando as DTFTs obtidas amostrando-se o mesmo sinal de tempo contínuo com intervalos diferentes,  $\tilde{T}_1$  e  $\tilde{T}_2$ . Admitamos que os sinais amostrados sejam denotados como  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ . Suponhamos que  $\tilde{T}_1 = q\tilde{T}_2$ , em que  $q$  é um número inteiro, e que aliasing não ocorra em nenhuma das taxas de amostragem. A Figura 4.39 descreve a FT de um sinal de tempo contínuo representativo e as DTFTs  $X_1(e^{j\Omega})$  e  $X_2(e^{j\Omega})$  associadas com os intervalos de amostragem  $\tilde{T}_1$  e  $\tilde{T}_2$ . A decimação corresponde a mudar  $X_2(e^{j\Omega})$  para  $X_1(e^{j\Omega})$ . Uma maneira de fazer isto é converter a seqüência de tempo discreto de volta para sinal de tempo contínuo e depois refazer a amostragem. Essa abordagem está sujeita à distorção introduzida na operação de reconstrução. Podemos evitar este problema usando métodos que operam diretamente nos sinais de tempo discreto para mudar a taxa de amostragem.



**FIGURA 4.39** Efeito de mudar a taxa de amostragem. (a) FT do sinal de tempo contínuo subjacente. (b) DTFT dos dados amostrados com intervalo de amostragem  $\tilde{T}_1$ . (c) DTFT dos dados amostrados com intervalo de amostragem  $\tilde{T}_2$ .

A subamostragem é a chave para reduzir a taxa de amostragem. Se o intervalo de amostragem for  $\tilde{T}_2$  e desejarmos aumentá-lo para  $\tilde{T}_1 = q\tilde{T}_2$ , podemos realizar isto escolhendo toda  $q$ -ésima amostra da seqüência  $x_2[n]$ , ou seja, definimos  $g[n] = x_2[qn]$ . A equação (4.35) indica que a relação entre  $G(e^{j\Omega})$  e  $X_2(e^{j\Omega})$  é

$$G(e^{j\Omega}) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} X_2(e^{j(\Omega - m2\pi)/q})$$

Ou seja,  $G(e^{j\Omega})$  é uma soma de versões deslocadas de  $X_2(e^{j\Omega/q})$ . A mudança de escala espalha  $X_2(e^{j\Omega})$  com o fator  $q$ . O deslocamento destas versões com escalas diferentes de  $X_2(e^{j\Omega})$  resulta em  $G(e^{j\Omega})$ , como é descrito na Figura 4.40.

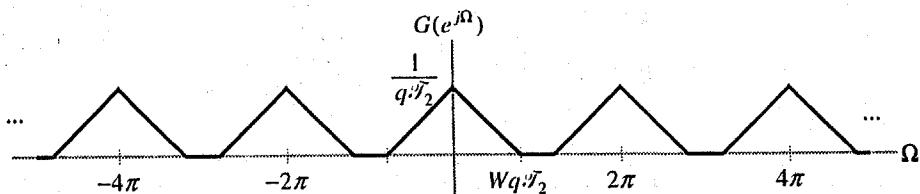


FIGURA 4.40 Espectro resultante da subamostragem de  $X_2(e^{j\Omega})$  ilustrada na Figura 4.39 com um fator de  $q$ .

Identificando  $T_1 = qT_2$ , vemos que  $G(e^{j\Omega})$  corresponde a  $X_1(e^{j\Omega})$  da Figura 4.39(b). Conseqüentemente, a subamostragem por  $q$  muda a taxa de amostragem efetiva por  $q$ .

Esta análise supõe que o componente de freqüência máxima de  $X_2(e^{j\Omega})$  satisfaz  $WT_2 < \pi/q$  de forma que não ocorre *aliasing* como uma consequência do processo de subamostragem. Esta suposição raramente é satisfeita na prática; mesmo que o sinal no qual se tem interesse seja limitado à faixa desta maneira, freqüentemente haverá ruído ou outros componentes presentes em freqüências mais elevadas. Por exemplo, se for usada a superamostragem para se obter  $x_2[n]$ , então o ruído que atravessou a faixa de transição do *antialiasing* estará presente em freqüências acima de  $\pi/q$ . Se extraímos subamostras de  $x_2[n]$  diretamente, este ruído terá um *alias* nas freqüências  $|\Omega| < WT_1$  e distorcerá o sinal no qual se tem interesse. Este problema de *aliasing* é contornado aplicando-se um filtro passa-baixas de tempo discreto a  $x_2[n]$  antes de se fazer a subamostragem.

A Figura 4.41(a) descreve um sistema de decimação que inclui um filtro passa-baixas de tempo discreto. O sinal de entrada  $x[n]$  com a DTFT mostrada na Figura 4.41(b) corresponde ao sinal superamostrado, cuja FT é descrita na Figura 4.38(d). As regiões sombreadas indicam energia do ruído. O filtro passa-baixas mostrado na Figura 4.41(c) remove a maior parte do ruído ao produzir o sinal de saída descrito na Figura 4.41(d). Depois da subamostragem, o ruído não tem *alias* na faixa de sinal, como ilustra a Figura 4.41(e). Note que este procedimento é eficiente somente se o filtro de tempo discreto tiver uma transição rápida da faixa de passagem para a faixa de rejeição. Felizmente, um filtro de tempo discreto com uma faixa de transição estreita é muito mais fácil de projetar e implementar do que um filtro de tempo contínuo comparável.

A decimação também é conhecida como *downsampling* (amostragem para baixo). Freqüentemente denotada por uma seta que aponta para baixo, seguida do fator de decimação, como ilustra o diagrama de blocos da Figura 4.42.

## ■ INTERPOLAÇÃO

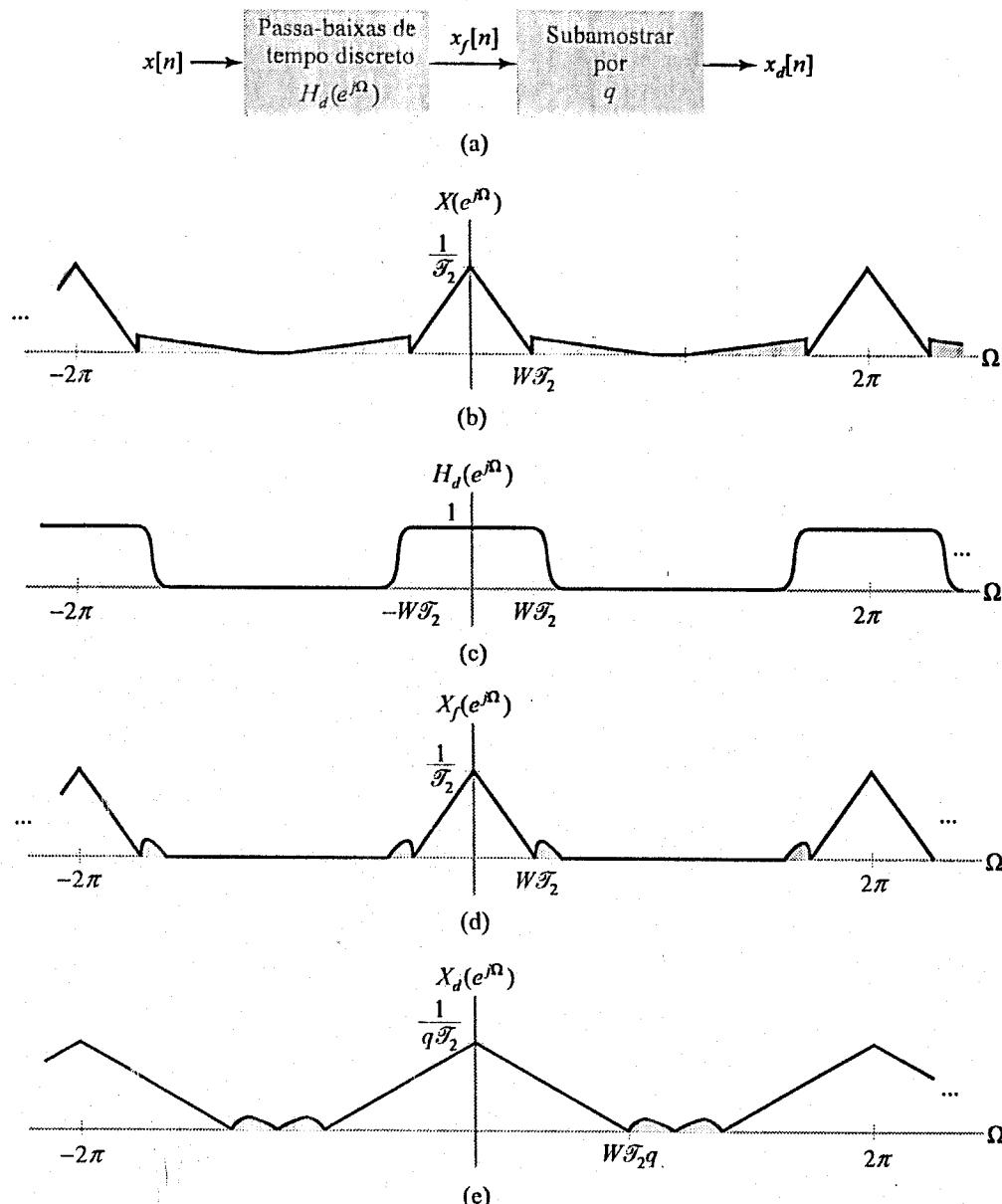
Interpolação é o processo de aumentar a taxa de amostragem, e ela exige que, de certo modo, “interpolemos” ou atribuamos valores entre as amostras do sinal. No domínio de freqüência, procuramos converter o  $X_1(e^{j\Omega})$  da Figura 4.39(b) no  $X_2(e^{j\Omega})$  da Figura 4.39(c). Vamos supor que estejamos aumentando a taxa de amostragem por um fator inteiro, ou seja,  $T_1 = qT_2$ .

A propriedade de mudança de escala da DTFT apresentada na Seção 3.6 é a chave para desenvolvermos um procedimento de interpolação. Suponhamos que  $x_1[n]$  seja a seqüência a ser interpolada pelo fator  $q$ . Defina a nova seqüência  $x_2[n]$  da seguinte maneira:

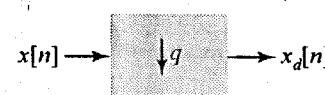
$$x_2[n] = \begin{cases} x_1\left[\frac{n}{q}\right], & \frac{n}{q} \text{ inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.42)$$

Com esta definição, temos  $x_2[n] = x_1[qn]$ , e a propriedade de mudança de escala da DTFT implica que

$$X_2(e^{j\Omega}) = X_1(e^{jq\Omega})$$

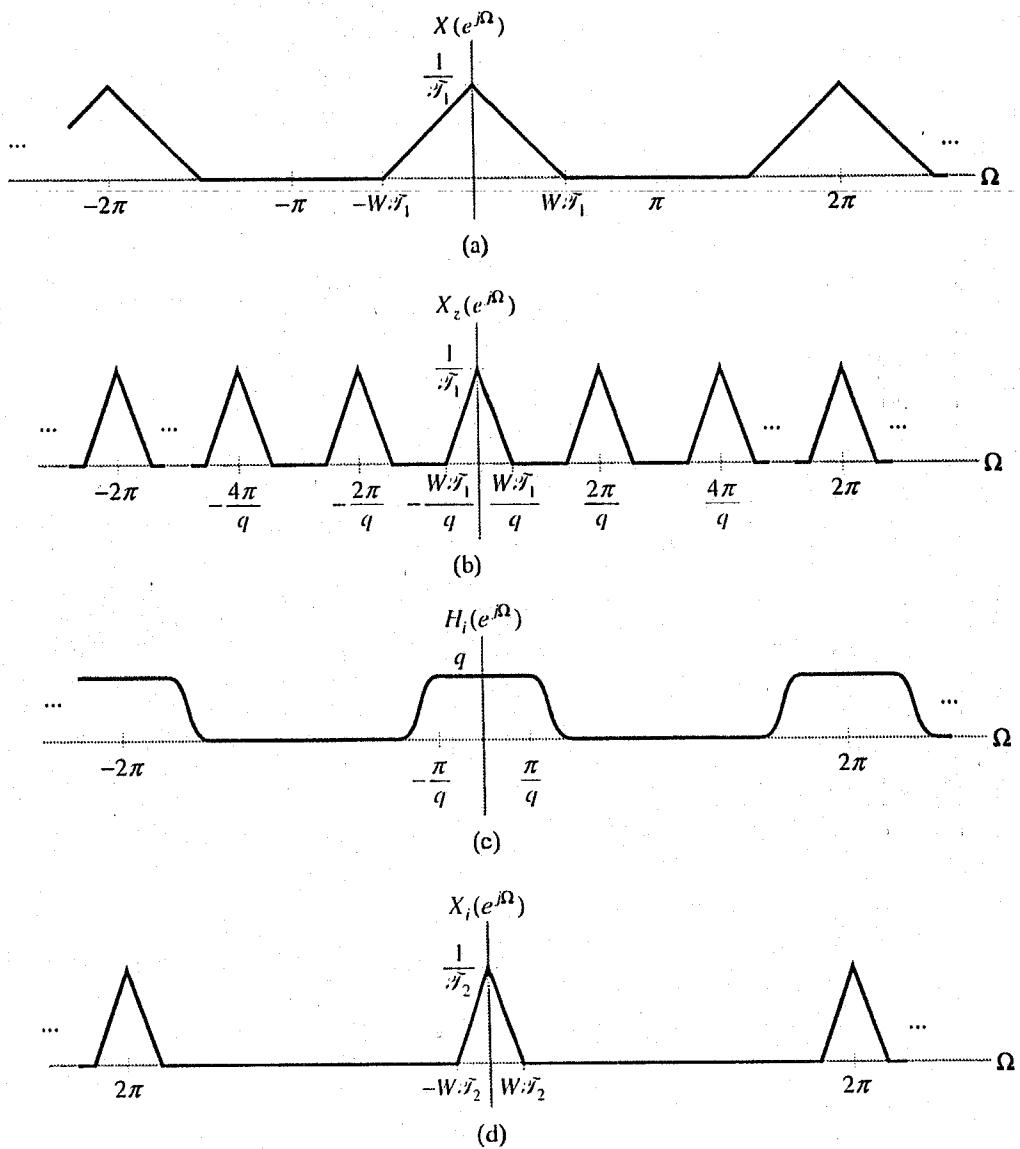


**FIGURA 4.41** Interpretação no domínio de freqüência da decimação. (a) Diagrama de blocos de um sistema de decimação. (b) Espectro superamostrado do sinal de entrada. O ruído é descrito como as partes sombreadas do espectro. (c) Resposta em freqüência do filtro. (d) Espectro de saída de filtro. (e) Espectro depois da subamostragem.



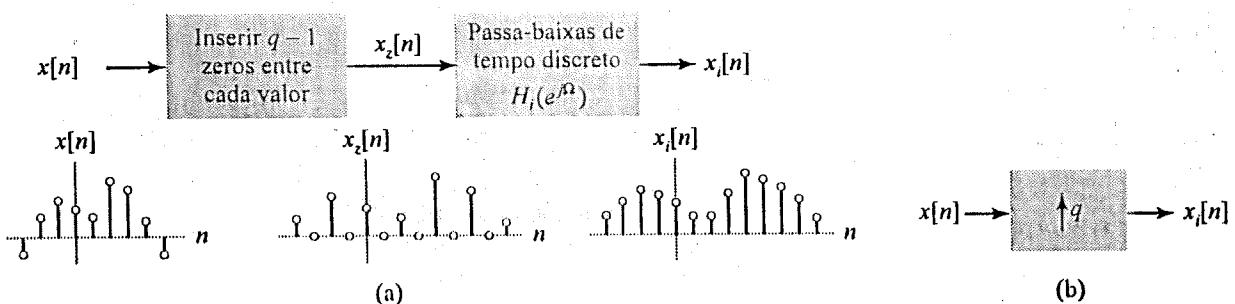
**FIGURA 4.42** Símbolo de decimação por um fator de  $q$ .

Ou seja,  $X_z(e^{j\Omega})$  é uma versão em escala diferente de  $X_1(e^{j\Omega})$ , como ilustram as Figuras 4.43(a) e (b). Identificando  $\tilde{\mathcal{F}}_2 = \tilde{\mathcal{F}}_1/q$  descobrimos que  $X_z(e^{j\Omega})$  corresponde a  $X_2(e^{j\Omega})$  da Figura 4.39(c), exceto para as réplicas do espectro em  $\pm 2\pi/q, \pm 4\pi/q, \dots, \pm (q-1)2\pi/q$ . Estas, podem ser removidas passando-se o sinal  $x_z[n]$  através de um filtro passa-baixas cuja resposta em freqüência é descrita na Figura 4.43(c). A faixa de passagem deste filtro é definida por  $|\Omega| < W\tilde{\mathcal{F}}_2$  e a faixa de transição deve situar-se na região  $W\tilde{\mathcal{F}}_2 < |\Omega| < 2\pi/q - W\tilde{\mathcal{F}}_2$ . O ganho  $q$  da faixa de passagem é escolhido a fim de que o sinal interpolado tenha a amplitude correta. A Figura 4.43(d) ilustra o espectro da saída do filtro,  $X_f(e^{j\Omega})$ .



**FIGURA 4.43** Interpretação da interpolação no domínio de freqüência. (a) Espectro da seqüência original. (b) Espectro depois da inserção de  $q - 1$  zeros entre cada valor da seqüência original. (c) Resposta em freqüência de um filtro para remover réplicas indesejáveis em  $\pm 2\pi/q, \pm 4\pi/q, \dots, \pm(q - 1)2\pi/q$ . (d) Espectro da seqüência interpolada.

Conseqüentemente, a interpolação com fator  $q$  é realizada inserindo-se  $q - 1$  zeros entre cada amostra de  $x_i[n]$  e depois fazendo filtragem passa-baixas. Um diagrama de blocos que ilustra este procedimento é descrito na Figura 4.44(a). Por este motivo é que a interpolação também é conhecida como *upsampling* (amostragem para cima); ela é denotada por uma seta que aponta para cima seguida de um fator de interpolação, conforme está descrito no diagrama de blocos da Figura 4.44(b).



**FIGURA 4.44** (a) Diagrama de blocos de um sistema de interpolação com os sinais ilustrados supondo que  $q = 2$ . (b) Símbolo que denota interpolação por um fator de  $q$ .

Este procedimento de interpolação tem uma interpretação no domínio de tempo que é análoga à do processo de reconstrução de sinal em tempo contínuo. Admitamos que  $h_i[n] \xleftarrow{DTFT} H_i(e^{j\Omega})$  seja a resposta ao impulso do filtro passa-baixas. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} x_i[n] &= x_z[n] * h_i[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z[k] h_i[n-k] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Suponhamos agora que  $H_i(e^{j\Omega})$  seja um filtro passa-baixas ideal com faixa de transição de largura nula. Ou seja

$$H_i(e^{j\Omega}) = \begin{cases} q, & |\Omega| < \pi/q \\ 0, & \pi/q < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

Tomando a DTFT inversa de  $H_i(e^{j\Omega})$ , obtemos

$$h_i[n] = q \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}n\right)}{\pi n}$$

Substituir  $h_i[n]$  na equação (4.43) produzirá

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z[k] \frac{q \sin\left(\frac{\pi}{q}(n-k)\right)}{\pi(n-k)}$$

Agora a equação (4.42) indica que  $x_z[k] = 0$ , a menos que  $k = qm$ , em que  $m$  é um número inteiro. Reescreva  $x_i[n]$  usando somente os termos diferentes de zero na soma

$$x_i[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_z[qm] \frac{q \sin\left(\frac{\pi}{q}(n-qm)\right)}{\pi(n-qm)}$$

Substituímos agora  $x[m] = x_z[qm]$  e usamos a notação da função sinc para obter

$$x_i[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{q}(n-qm)\right) \quad (4.44)$$

A seqüência interpolada é dada pela soma ponderada de funções sinc de tempo discreto deslocadas. A equação (4.44) é a versão de tempo discreto da equação (4.38).

Um sistema de processamento de sinais em tempo discreto que inclui decimação e interpolação é descrito na Figura 4.45. Considere o efeito das operações de decimação e interpolação. Iniciando com a decimação, temos

$$X_d^f(j\omega) = H_d(e^{j\omega\bar{\tau}_1}) X_d(j\omega)$$

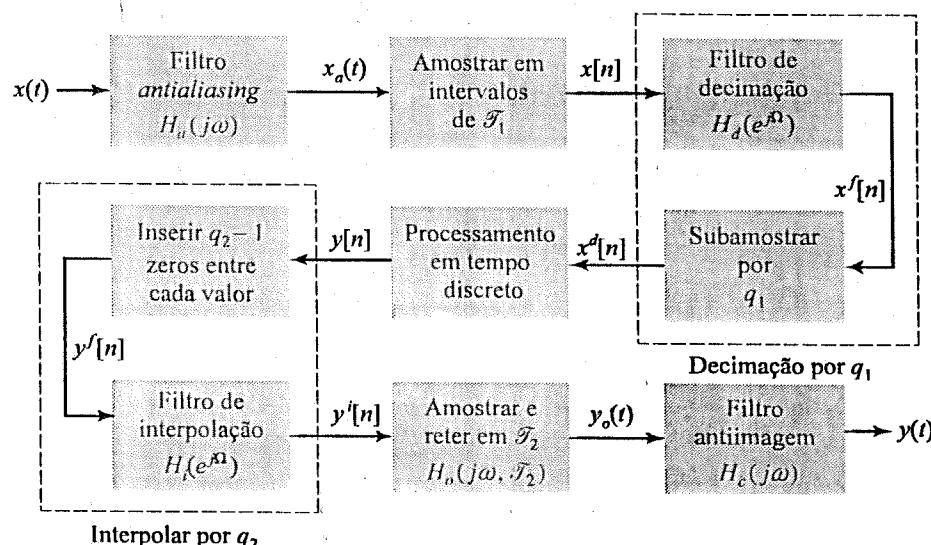


FIGURA 4.45 Diagrama de blocos de um sistema para processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo que inclui decimação e interpolação.

A equação (4.34) implica que o efeito da operação de subamostragem é

$$X_{\delta}^d(j\omega) = \frac{1}{q_1} \sum_{m=0}^{q_1-1} X_{\delta}^f\left(j\left(\omega - \frac{m}{q_1}\omega_s\right)\right)$$

Substitua em  $X_{\delta}^f(j\omega)$  para obter

$$\begin{aligned} X_{\delta}^d(j\omega) &= \frac{1}{q_1} \sum_{m=0}^{q_1-1} H_d(e^{j(\omega-m\omega_s/q_1)\tilde{\tau}_1}) X_{\delta}\left(j\left(\omega - \frac{m}{q_1}\omega_s\right)\right) \\ &= \frac{1}{q_1} \sum_{m=0}^{q_1-1} H_d(e^{j(\omega\tilde{\tau}_1-m2\pi/q_1)}) X_{\delta}\left(j\left(\omega - \frac{m}{q_1}\omega_s\right)\right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

A operação de interpolação relaciona  $Y_{\delta}(j\omega)$  e  $Y_{\delta}^f(j\omega)$  da seguinte maneira. Primeiro, a inserção de  $q_2-1$  zeros entre cada valor de  $y[n]$  corresponde à mudança de escala no domínio de freqüência, ou seja,

$$Y_f(j\omega) = Y_{\delta}(jq_2\omega)$$

O filtro de interpolação opera na taxa de amostragem mais elevada,  $2\pi/\tilde{\tau}_2$ , de forma que o mapeamento entre as freqüências em tempo discreto e contínuo é  $\Omega = \omega\tilde{\tau}_2$ . Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} Y_i(j\omega) &= H_i(e^{j\omega\tilde{\tau}_2}) Y_f(j\omega) \\ &= H_i(e^{j\omega\tilde{\tau}_2}) Y_{\delta}(jq_2\omega) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Apesar da expressão para a resposta em freqüência do filtro de tempo contínuo equivalente ser demasiadamente complexa para fornecer muita introspecção quando a interpolação e a decimação estão presentes, podemos usar as equações (4.45) e (4.46) juntamente com a equação (4.40),  $Y_{\delta}(j\omega) = H(e^{j\omega q_1 \tilde{\tau}_1}) X_{\delta}^d(j\omega)$ , e  $Y(j\omega) = H_o(j\omega\tilde{\tau}_2) H_c(j\omega) Y_{\delta}^f(j\omega)$  para deduzir a operação equivalente de filtragem em tempo contínuo representada pelo sistema da Figura 4.45.

## 4.9 Representações com Série de Fourier para Sinais Não-Periódicos de Duração Finita

A DTFS e a FS são as representações de Fourier para sinais periódicos. Nesta seção, exploramos o uso delas para representar sinais não periódicos de duração finita. A principal motivação para fazermos isto é a computação numérica de representações de Fourier. Lembre-se que a DTFS é a única representação de Fourier que pode ser avaliada numericamente. Como resultado, freqüentemente aplicamos a DTFS a sinais de Fourier que não são periódicos. É importante entender as implicações de aplicar uma representação periódica a sinais não periódicos. Um benefício secundário é a compreensão adicional a respeito da relação entre a transformada de Fourier e as correspondentes representações da série de Fourier. Iniciamos nossa discussão com o caso de tempo discreto.

### ■ RELACIONANDO A DTFS COM A DTFT

Admitamos que  $x[n]$  seja um sinal de duração finita de tamanho  $N$ , ou seja,

$$x[n] = 0, \quad n < 0 \text{ ou } n \geq M$$

A DTFT deste sinal é

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-jn\Omega}$$

Suponhamos agora que calculemos  $N \geq M$  coeficientes da DTFS usando  $x[n]$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ . Temos  $\Omega_o = 2\pi/N$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_o n} \quad (4.47)$$

Uma vez que  $x[n] = 0$  para  $n \geq M$ , temos

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-jk\Omega_o n}$$

A comparação de  $\tilde{X}[k]$  com  $X(e^{j\Omega})$  revela que

$$\tilde{X}[k] = \left. \frac{1}{N} X(e^{j\Omega}) \right|_{\Omega=k\Omega_o} \quad (4.48)$$

Conseqüentemente, os coeficientes da DTFS são amostras da DTFT divididas por  $N$  e avaliadas em intervalos de  $2\pi/N$ . Podemos escrever a DTFS de  $x[n]$  como  $(1/N)X(e^{jk\Omega_o})$ .

Suponhamos agora que convertamos os coeficientes da DTFS da equação (4.48) de volta num sinal de domínio de tempo  $\tilde{x}[n]$  usando a expansão da DTFS

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-N}^N \tilde{X}[k] e^{jk\Omega_o n} \quad (4.49)$$

As senóides complexas da equação (4.49) são todas de período  $N$ , de forma que  $\tilde{x}[n]$  é um sinal com período  $N$ . Um período de  $\tilde{x}[n]$  é obtido vendo que as equações (4.49) e (4.47) são inversas uma da outra. Conseqüentemente,

$$\tilde{x}[n] = x[n], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Isto implica que os coeficientes da DTFS de  $x[n]$  correspondem aos coeficientes da DTFS de um sinal periodicamente estendido,  $\tilde{x}[n]$ . Em outras palavras, o *efeito de se amostrar a DTFT de um sinal não periódico de duração finita é estender periodicamente o sinal no domínio de tempo*. Ou seja,

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+mN] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} \tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_o})$$

A Figura 4.46 ilustra estas relações tanto no domínio de tempo como no de freqüência. Elas são o dual em relação a amostragem no tempo. Lembre-se que a amostragem de um sinal no tempo gera no domínio de freqüência réplicas deslocadas do espectro do sinal original.

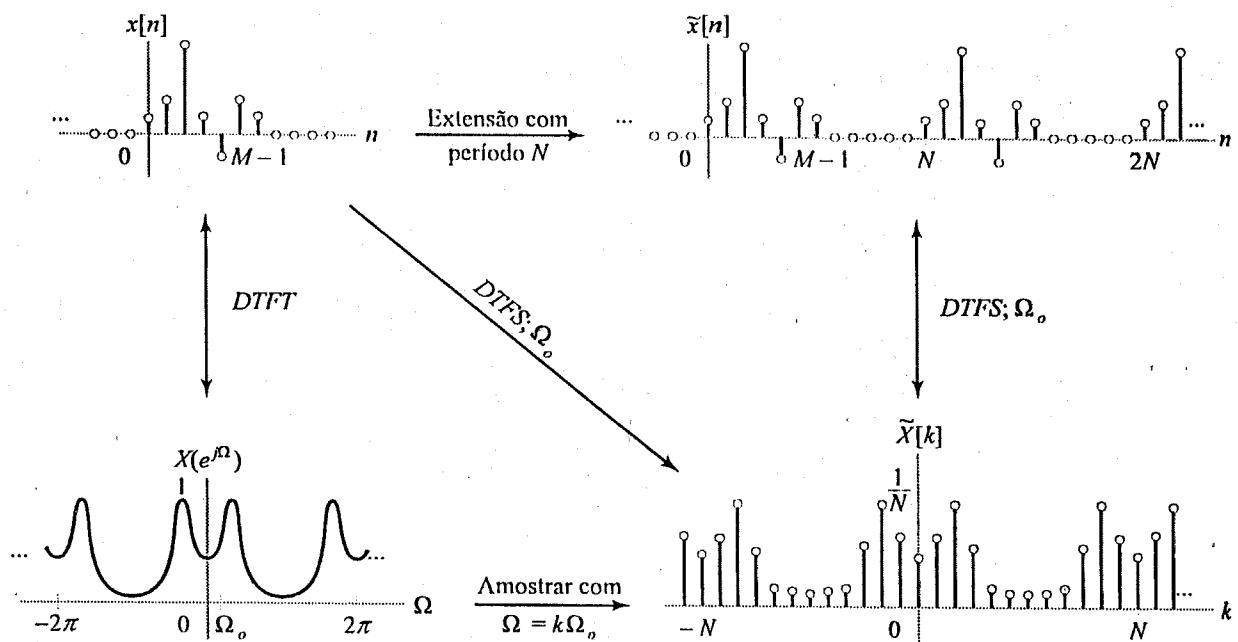


FIGURA 4.46 DTFS de um sinal não-periódico de duração finita.

Aqui, amostramos em freqüência. Isto gera réplicas deslocadas do sinal de tempo original na representação de domínio de tempo. Para evitar superposição ou "aliasing" destas réplicas deslocadas no tempo, necessitamos que o intervalo de amostragem de freqüência  $\Omega_o$  seja menor ou igual a  $2\pi/M$ . Basicamente, este resultado corresponde ao teorema da amostragem aplicado no domínio de freqüência.

**EXEMPLO 4.16** Considere o sinal

$$x[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right), & 0 \leq n \leq 31 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Deduza tanto a DTFT,  $X(e^{j\Omega})$ , como a DTFS,  $X[k]$ , supondo que  $N > 31$ . Calcule e trace graficamente  $|X(e^{j\Omega})|$  e  $N|X[k]|$  para  $N = 32, 60$  e  $120$ .

**Solução:** Primeiro, calculamos a DTFT. Escreva  $x[n] = g[n]\omega[n]$ , em que  $g[n] = \cos\left(\frac{3}{8}\pi n\right)$  e  $\omega[n]$  é a função janela

$$\omega[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 31 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos

$$G(e^{j\Omega}) = \pi\delta\left(\Omega + \frac{3\pi}{8}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{8}\right), \quad -\pi < \Omega \leq \pi$$

como um período  $2\pi$  de  $G(e^{j\Omega})$  e

$$W(e^{j\Omega}) = e^{-j(31/2)\Omega} \frac{\sin(16\Omega)}{\sin(\Omega/2)}$$

A propriedade da modulação implica que  $X(e^{j\Omega}) = (1/2\pi)G(e^{j\Omega}) \otimes W(e^{j\Omega})$ ; para o problema em questão, esta propriedade produz

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{e^{-j(31/2)(\Omega+3\pi/8)}}{2} \frac{\sin\left(16\left(\Omega + \frac{3\pi}{8}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{3\pi}{8}\right)\right)} + \frac{e^{-j(31/2)(\Omega-3\pi/8)}}{2} \frac{\sin\left(16\left(\Omega - \frac{3\pi}{8}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\Omega - \frac{3\pi}{8}\right)\right)}$$

Admitamos que  $\Omega_o = 2\pi/N$ , de forma que os  $N$  coeficientes da DTFS são

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{31} \cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right) e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{31} e^{-j(k\Omega_o + 3\pi/8)n} + \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{31} e^{-j(k\Omega_o - 3\pi/8)n} \end{aligned}$$

Somando cada série geométrica resulta

$$X[k] = \frac{1}{2N} \frac{1 - e^{-j(k\Omega_o + 3\pi/8)32}}{1 - e^{-j(k\Omega_o + 3\pi/8)}} + \frac{1}{2N} \frac{1 - e^{-j(k\Omega_o - 3\pi/8)32}}{1 - e^{-j(k\Omega_o - 3\pi/8)}}$$

a qual reescrivemos como

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \left( \frac{e^{-j(k\Omega_o + 3\pi/8)16}}{2Ne^{-j(k\Omega_o + 3\pi/8)/2}} \right) \frac{e^{j(k\Omega_o + 3\pi/8)16} - e^{j(k\Omega_o + 3\pi/8)16}}{e^{j(k\Omega_o + 3\pi/8)/2} - e^{-j(k\Omega_o + 3\pi/8)/2}} \\
 &\quad + \left( \frac{e^{-j(k\Omega_o - 3\pi/8)16}}{2Ne^{-j(k\Omega_o - 3\pi/8)/2}} \right) \frac{e^{j(k\Omega_o - 3\pi/8)16} - e^{j(k\Omega_o - 3\pi/8)16}}{e^{j(k\Omega_o - 3\pi/8)/2} - e^{-j(k\Omega_o - 3\pi/8)/2}} \\
 &= \left( \frac{e^{-j(31/2)(k\Omega_o + 3\pi/8)}}{2N} \right) \frac{\sin\left(16\left(k\Omega_o + \frac{3\pi}{8}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(k\Omega_o + \frac{3\pi}{8}\right)\right)} \\
 &\quad + \left( \frac{e^{-j(31/2)(k\Omega_o - 3\pi/8)}}{2N} \right) \frac{\sin\left(16\left(k\Omega_o - \frac{3\pi}{8}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(k\Omega_o - \frac{3\pi}{8}\right)\right)}
 \end{aligned}$$

A comparação de  $X[k]$  com  $X(e^{j\Omega})$  indica que a equação (4.48) vale para este exemplo.

As Figuras 4.47(a)–(c) descrevem  $|X(e^{j\Omega})|$  como a linha tracejada, e  $N|X[k]|$  como as hastes verticais para  $N = 32, 60$  e  $120$ . À medida que  $N$  cresce,  $X[k]$  amostra  $X(e^{j\Omega})$  mais densamente, e a forma dos coeficientes da DTFS se assemelha à DTFT subjacente de forma mais próxima.

Em muitas aplicações, somente  $M$  valores de um sinal  $x[n]$  estão disponíveis, e não temos nenhum conhecimento do comportamento do sinal fora deste conjunto de  $M$  valores. A DTFS fornece amostras da DTFT desta seqüência de tamanho  $M$ . A prática de escolher  $N > M$  quando se avalia a DTFS é conhecida como *preenchimento com zeros* (*zero-padding*), uma vez que ela pode ser vista como algo que aumenta ou preenche os  $M$  valores disponíveis de  $x[n]$  com  $N - M$  zeros. Enfatizamos que o preenchimento com zeros não anula nenhuma das limitações associadas com o conhecimento de somente  $M$  valores de  $x[n]$ ; ele simplesmente amostra a DTFT subjacente de tamanho  $M$  de forma mais densa, como é ilustrado no exemplo anterior.

► EXERCÍCIO 4.13 Use a DTFT do sinal periódico de duração finita

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 31 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para encontrar os coeficientes da DTFS do sinal  $\tilde{x}[n]$  de período 64 onde em um período tem-se

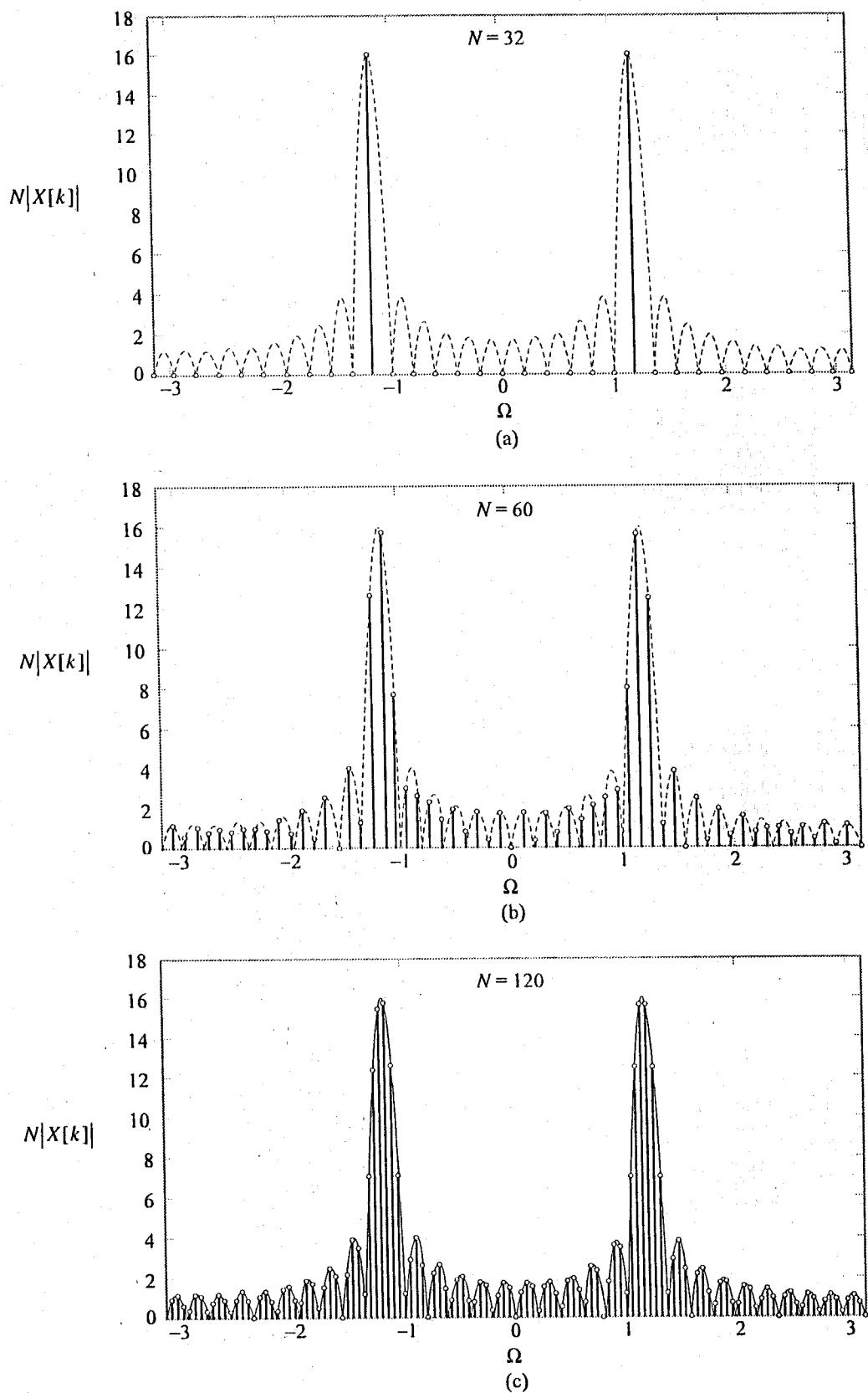
$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 31 \\ 0, & 32 \leq n \leq 63 \end{cases}$$

*Resposta:*

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } \pi/32} \tilde{X}[k]$$

em que

$$\tilde{X}[k] = e^{-jk31\pi/64} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{64}\right)}$$



**FIGURA 4.47** DTFT e DTFS de tamanho  $N$  de um co-seno de 32 pontos. A linha tracejada denota  $|X(e^{j\Omega})|$ ; as linhas verticais representam  $N|X[k]|$ . (a)  $N = 32$ . (b)  $N = 60$ . (c)  $N = 120$ .

O erro potencial introduzido pela amostragem se deve ao *aliasing*. Admitamos que  $x[n] \xrightarrow{FT} X_\delta(j\omega)$  em que  $x[n] = x(nT)$  são as amostras de  $x(t)$ . A equação (4.32) indica que

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad (4.50)$$

em que  $\omega_s = 2\pi/T$ . Suponhamos que queremos aproximar  $X(j\omega)$  no intervalo  $-\omega_a < \omega < \omega_a$  e que  $x(t)$  é limitado em faixa com freqüência máxima  $\omega_m$ , em que  $\omega_m \geq \omega_a$ . O *aliasing* na faixa  $-\omega_a < \omega < \omega_a$  é evitado escolhendo-se  $T$  de forma que  $\omega_s > \omega_m + \omega_a$ , como ilustra a Figura 4.49. Ou seja, necessitamos que

$$T < \frac{2\pi}{\omega_m + \omega_a} \quad (4.51)$$

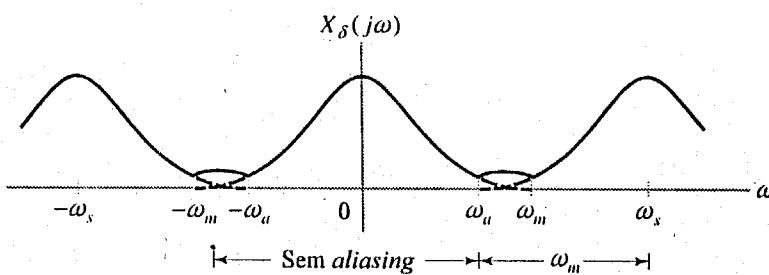


FIGURA 4.49 Efeito do *aliasing*.

A operação de janelamento de tamanho  $M$  corresponde à convolução periódica

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast W(e^{j\Omega})$$

em que  $x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$  e  $W(e^{j\Omega})$  é a resposta em freqüência da janela. Podemos reescrever esta convolução periódica em termos da freqüência de tempo contínuo  $\omega$  realizando a mudança de variável  $\Omega = \omega T$  na integral de convolução. Dessa forma, temos

$$Y_\delta(j\omega) = \frac{1}{\omega_s} X_\delta(j\omega) \circledast W_\delta(j\omega) \quad (4.52)$$

Aqui,  $X_\delta(j\omega)$  é dado na equação (4.50),  $y[n] \xrightarrow{FT} Y_\delta(j\omega)$  e  $w[n] \xrightarrow{FT} W_\delta(j\omega)$ . Tanto  $X_\delta(j\omega)$  como  $W_\delta(j\omega)$  têm o mesmo período,  $\omega_s$ ; consequentemente, a convolução periódica é executada ao longo de um intervalo de tamanho  $\omega_s$ . Uma vez que

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos

$$W_\delta(j\omega) = e^{-j\omega T(M-1)/2} \frac{\sin\left(M \frac{\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \quad (4.53)$$

Uma plotagem de um período de  $|W_\delta(j\omega)|$  é dado na Figura 4.50. O efeito da convolução é espalhar o espectro de  $X_\delta(j\omega)$ . Este espalhamento limita nossa capacidade de resolver detalhes no espectro. O grau de espalhamento depende da largura do lóbulo principal de  $W_\delta(j\omega)$ . É difícil quantificar com precisão a perda de resolução resultante do ajanelamento. Desde que não podemos resolver detalhes no espectro que estejam mais próximos do que a largura de um lóbulo principal, definimos *resolução* como a largura  $\omega_s/M$  do lóbulo principal. Consequentemente, para obter uma resolução especificada  $W_s$ , necessitamos que

### ■ RELACIONANDO A FS COM A FT

A relação entre os coeficientes da FS e a FT de um sinal não periódico de duração finita é análoga ao caso de tempo discreto discutido antes. Admitamos que  $x(t)$  tenha duração  $T_o$  de forma que

$$x(t) = 0, \quad t < 0, \text{ ou } t > T_o$$

Construa um sinal periódico  $\tilde{x}(t)$  com  $T \geq T_o$  estendendo  $x(t)$  periodicamente, como é mostrado por

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + mT)$$

Os coeficientes da FS de  $\tilde{x}(t)$  são

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_o t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T_o} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt\end{aligned}$$

A FT de  $x(t)$  é definida por

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Conseqüentemente, comparando  $\tilde{X}[k]$  com  $X(j\omega)$ , concluímos que

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_o}$$

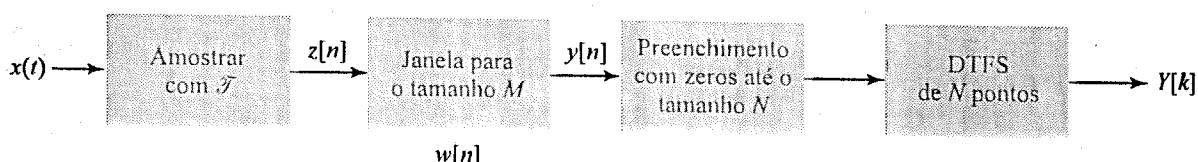
Os coeficientes da FS são amostras da FT normalizadas com  $T$ .

## \*4.10 Aplicações Computacionais da Série de Fourier de Tempo Discreto

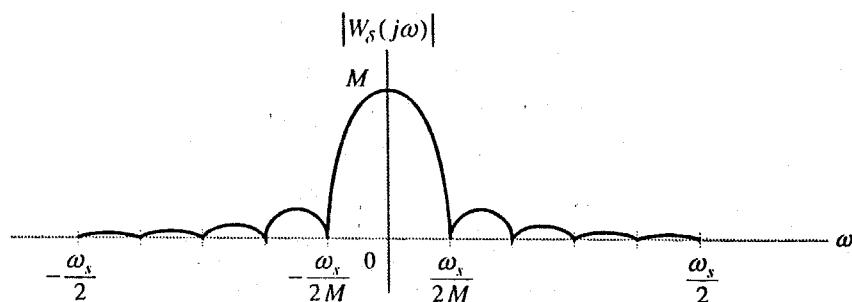
A DTFS envolve um número finito de coeficientes de valor discreto tanto nos domínios de freqüência como de tempo. Todas as outras representações de Fourier são contínuas tanto no domínio de tempo como no de freqüência. Conseqüentemente, a DTFS é a única representação de Fourier que pode ser calculada num computador, e ela é amplamente aplicada como uma ferramenta computacional para manipular sinais. Iniciamos esta seção examinando duas aplicações comuns da DTFS: aproximar a FT e computar a convolução em tempo discreto. Em ambas, as características da DTFS desempenham um papel fundamental na interpretação correta dos resultados.

### ■ APROXIMANDO A FT

A FT aplica-se a sinais não periódicos de tempo contínuo. Os coeficientes da DTFS são computados usando-se  $N$  valores de um sinal de tempo discreto. Para usar a DTFS para aproximar a FT, devemos amostrar sinal de tempo contínuo e reter, no máximo,  $N$  amostras. Supomos que o intervalo de amostragem é  $\mathcal{T}$  e que  $M < N$  amostras do sinal de tempo contínuo são guardadas. A Figura 4.48 descreve esta seqüência de passos. O problema em questão é determinar quão bem os coeficientes  $Y[k]$  da DTFS aproximam  $X(j\omega)$ , que é a FT de  $x(t)$ . Tanto a operação de amostragem como a de janelamento são fontes potenciais de erros na aproximação.



**FIGURA 4.48** Diagrama de blocos que descreve a seqüência de operações envolvidas na aproximação da FT com a DTFS.

FIGURA 4.50 Resposta em módulo de uma janela de  $M$  pontos.

$$M \geq \frac{\omega_s}{\omega_r} \quad (4.54)$$

Substituindo  $\omega_s$ , podemos reescrever isto explicitamente como

$$M\mathcal{T} \geq \frac{2\pi}{\omega_r}$$

Reconhecendo que  $M\mathcal{T}$  é o tempo total ao longo do qual amostramos  $x(t)$ , vemos que este intervalo de tempo deve ultrapassar  $2\pi/\omega_r$ .

A DTFS  $y[n] \xleftarrow{\text{DTFS; } 2\pi/N} Y[k]$  amostra a DTFT  $Y(e^{j\Omega})$  em intervalos de  $2\pi/N$ . Ou seja,  $Y[k] = (1/N)Y(e^{jk2\pi/N})$ . Em termos da freqüência de tempo contínuo,  $\omega$ , as amostras são espaçadas em intervalos de  $2\pi/N\mathcal{T} = \omega_s/N$ , e, deste modo,

$$Y[k] = \frac{1}{N} Y_\delta \left( jk \frac{\omega_s}{N} \right) \quad (4.55)$$

Se o intervalo de amostragem desejado for no mínimo  $\Delta\omega$ , necessitamos então que

$$N \geq \frac{\omega_s}{\Delta\omega} \quad (4.56)$$

Conseqüentemente, se não ocorrer *aliasing*, e  $M$  for escolhido suficientemente grande para evitar a perda de resolução devido ao janelamento, a aproximação com DTFS estará relacionada com o espectro de sinal original de acordo com

$$Y[k] \approx \frac{1}{N\mathcal{T}} X \left( jk \frac{\omega_s}{N} \right)$$

O exemplo seguinte ilustra o uso das diretrizes dadas nas equações (4.51), (4.54) e (4.56) para aproximar a FT com a DTFS.

**EXEMPLO 4.17** Use a DTFS para aproximar a FT do sinal

$$x(t) = e^{-t/10} u(t)(\cos(10t) + \cos(12t))$$

Suponhamos que a faixa de freqüência de interesse seja  $-20 < \omega < 20$  e o intervalo de amostragem desejado seja  $\Delta\omega = \pi/20$ . Compare a aproximação por DTFS com a FT subjacente para resoluções de (a)  $\omega_r = 2\pi$ , (b)  $\omega_r = 2\pi/5$  e (c)  $\omega_r = 2\pi/25$ .

**Solução:** Primeiramente, avalie a FT de  $x(t)$ . Admitamos que  $f(t) = e^{-t/10}u(t)$  e  $g(t) = \cos(10t) + \cos(12t)$  de forma que  $\hat{x}(t) = f(t)g(t)$ . Use

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{10}}$$

$$G(j\omega) = \pi\delta(\omega + 10) + \pi\delta(\omega - 10) + \pi\delta(\omega + 12) + \pi\delta(\omega - 12)$$

e a propriedade da modulação para obter

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{j(\omega+10)+\frac{1}{10}} + \frac{1}{j(\omega-10)+\frac{1}{10}} + \frac{1}{j(\omega+12)+\frac{1}{10}} + \frac{1}{j(\omega-12)+\frac{1}{10}} \right)$$

Agora, coloque o primeiro e os dois últimos termos de  $X(j\omega)$  sobre denominadores comuns:

$$X(j\omega) = \frac{\frac{1}{10} + j\omega}{(\frac{1}{10} + j\omega)^2 + 10^2} + \frac{\frac{1}{10} + j\omega}{(\frac{1}{10} + j\omega)^2 + 12^2} \quad (4.57)$$

A freqüência máxima de interesse é dada como 20, de forma que  $\omega_a = 20$ . Para usarmos a equação (4.51) para encontrar o intervalo de amostragem, devemos determinar também  $\omega_m$ , a mais alta freqüência presente em  $x(t)$ . Embora  $X(j\omega)$  na equação (4.57) não seja estritamente limitado em faixa, para  $\omega \gg 12$  o espectro de magnitude  $|X(j\omega)|$  decresce proporcionalmente a  $1/\omega$ . Vamos supor que  $X(j\omega)$  seja efetivamente limitado em faixa para  $\omega_m = 500$ , uma vez que  $|X(j500)|$  é mais do que um fator de 10 menor que  $|X(j20)|$ , a mais elevada freqüência de interesse e a mais próxima freqüência na qual ocorre *aliasing*. Isto não impedirá o *aliasing* em  $-20 < \omega < 20$ , mas garantirá que o efeito do *aliasing* nesta região seja pequeno para todos os efeitos práticos. Necessitamos que

$$\begin{aligned} \bar{T} &< \frac{2\pi}{520} \\ &\approx 0,0121 \end{aligned}$$

Para satisfazer esta exigência, escolhemos  $\bar{T} = 0,01$ .

Dado  $\bar{T}$ , o número de amostras,  $M$ , é determinado usando-se a equação (4.54):

$$M \geq \frac{200\pi}{\omega_r}$$

Conseqüentemente, para (a),  $\omega_r = 2\pi$ , escolhemos  $M = 100$ ; para (b)  $\omega_r = 2\pi/5$ , escolhemos  $M = 500$ ; e para (c)  $\omega_r = 2\pi/25$ , escolhemos  $M = 2500$ .

Finalmente, o tamanho da DTFS,  $N$ , deve satisfazer a equação (4.56), como é mostrado por

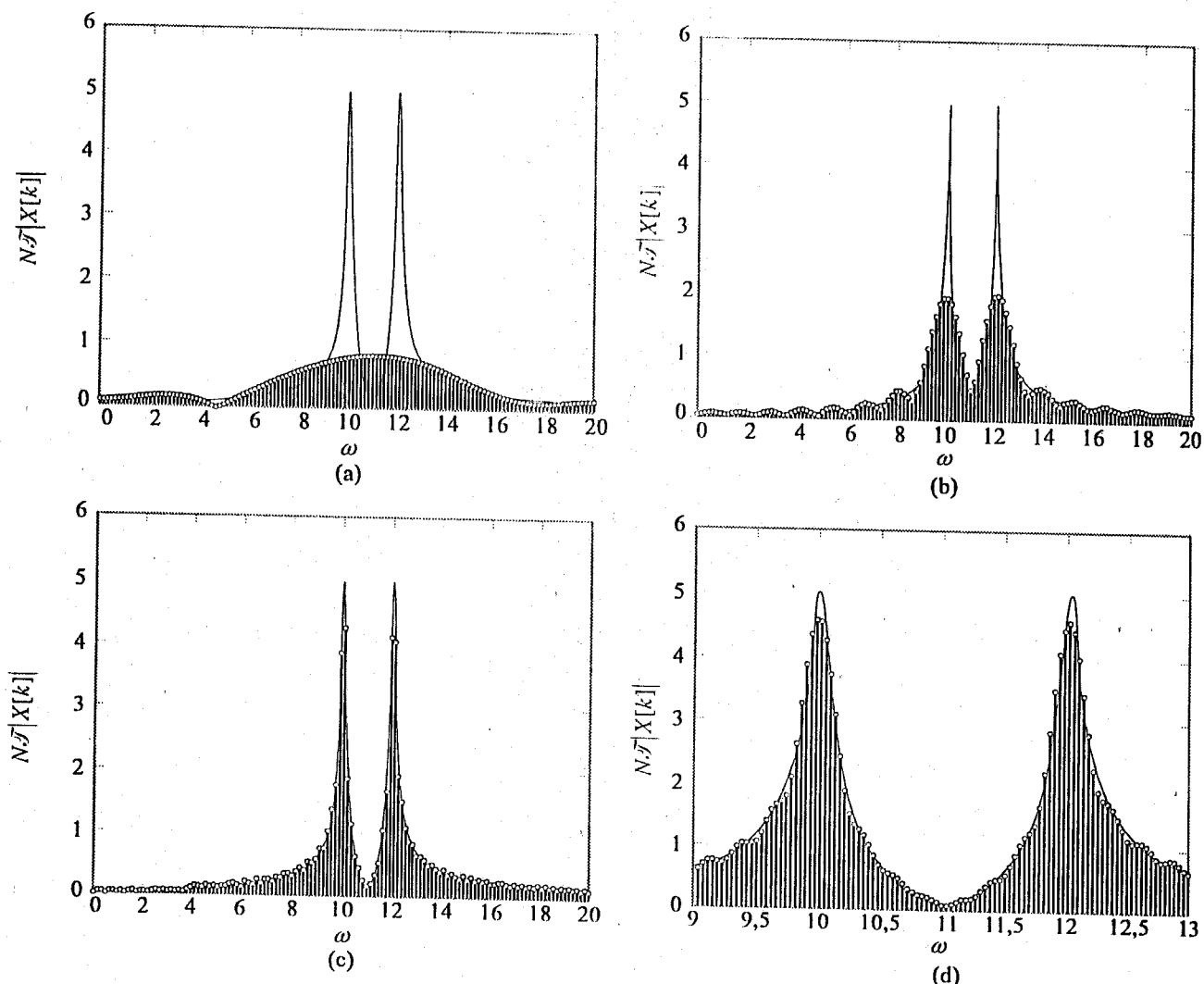
$$N \geq \frac{200\pi}{\Delta\omega}$$

A substituição de  $\Delta\omega = \pi/20$  resulta em  $N \geq 4000$  e, deste modo, escolhemos  $N = 4000$ .

Computamos os coeficientes  $Y[k]$  da DTFS usando estes valores de  $\bar{T}, M$  e  $N$ . A Figura 4.51 compara a FT com a aproximação com DTFS. A linha sólida em cada representação gráfica é  $|X(j\omega)|$  e as hastes representam a aproximação por DTFS,  $N\bar{T}|Y[k]|$ . Tanto  $|X(j\omega)|$  como  $|Y[k]|$  têm simetria par porque  $x(t)$  é real, de forma que somente precisamos descrever o intervalo  $0 < \omega < 20$ . A Figura 4.50(a) descreve  $M = 100$ , (b) descreve  $M = 500$  e (c) descreve  $M = 2500$ .

À medida que  $M$  cresce e a resolução  $\omega_r$  decresce, a qualidade da aproximação melhora. No caso de  $M = 100$ , a resolução ( $2\pi \approx 6$ ) é maior do que a separação entre os dois picos e não podemos distinguir a presença de picos separados. As únicas partes do espectro que são razoavelmente bem aproximadas são as seções suaves distantes dos picos. Quando  $M = 500$ , a resolução ( $2\pi/5 \approx 1,25$ ) é menor do que a separação entre os picos, e picos distintos são evidentes, não obstante cada pico ainda estar borrado. À medida que nos afastamos dos picos a qualidade da aproximação melhora. No caso (c), a resolução ( $2\pi/25 \approx 0,25$ ) é muito menor do que a separação dos picos e uma aproximação muito melhor é obtida ao longo da faixa inteira de freqüência.

Parece que os valores em cada pico ainda não estão representados acuradamente no caso (c). Isto poderia ser devido ao limite de resolução imposto por  $M$ , ou porque não amostramos a DTFS em intervalos suficientemente pequenos. Na Figura 4.51(d), aumentamos  $N$  para 16.000 ao mesmo tempo que mantemos  $M = 2500$ . A região do espectro próxima dos picos,  $9 < \omega < 13$ , é descrita. Aumentar  $N$  por um fator de 4 reduz o intervalo de freqüência de amostragem por um fator de 4. Vemos que ainda há certo erro na representação de cada valor de pico, ainda que menor do que o sugerido pela Figura 4.51(c).



**FIGURA 4.51** Aproximação com DTFS da FT de  $x(t) = e^{-1/10}u(t)(\cos(10t) + \cos(12t))$ . A linha sólida é a FT  $|X(j\omega)|$ , as hastes verticais denotam a aproximação com DTFS  $N\tilde{J}[Y[k]]$ . Tanto  $|X(j\omega)|$  como  $N\tilde{J}[Y[k]]$  têm simetria par, de forma que somente  $0 < \omega < 20$  é exibido. (a)  $M = 100, N = 4000$ . (b)  $M = 500, N = 4000$ . (c)  $M = 2500, N = 4000$ . (d)  $M = 2500, N = 16000$  para  $9 < \omega < 13$ .

A qualidade da aproximação com DTFS da FT melhora à medida que  $\mathcal{T}$  decresce,  $M\mathcal{T}$  cresce e  $N$  cresce. Porém, considerações práticas como, por exemplo, limitações de memória e custo de hardware geralmente limitam a faixa dentro da qual podemos escolher estes parâmetros e forçar compromissos. Por exemplo, se a memória for limitada, poderemos aumentar  $M\mathcal{T}$  para obter uma resolução melhor somente se aumentarmos  $\mathcal{T}$  e reduzirmos a faixa de frequência dentro da qual a aproximação é válida.

Lembre-se que a FT de sinais periódicos contém funções de impulso de valor contínuo cujas áreas são proporcionais ao valor dos coeficientes correspondentes da FS. A natureza da aproximação por DTFS da FT de um sinal periódico difere ligeiramente do caso não periódico porque os coeficientes da DTFS têm valores discretos, e dessa forma, não são bem adequados para aproximar impulsos que têm valores contínuos. Neste caso, os coeficientes da DTFS são proporcionais à área sob os impulsos na FT.

Para ilustrarmos isto, considere usar a DTFS para aproximar a FT de uma senóide complexa com amplitude  $a$ ,  $x(t) = ae^{j\omega_0 t}$ . Temos

$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = 2\pi a \delta(\omega - \omega_0)$$

A substituição de  $X(j\omega)$  na equação (4.50) produz

$$X_\delta(j\omega) = \frac{2\pi}{\mathcal{T}} a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - k\omega_s)$$

Reconhecendo  $\omega_s = 2\pi/\tilde{T}$  e substituindo  $X_\delta(j\omega)$  na equação (4.52) resulta na FT da senóide complexa amostrada e ajanelada

$$Y_\delta(j\omega) = aW_\delta(j(\omega - \omega_o)) \quad (4.58)$$

em que  $W_\delta(j\omega)$  é dado pela equação (4.53).

A aplicação da equação (4.55) indica que os coeficientes da DTFS associados com a senóide complexa amostrada e ajanelada são dados por

$$Y[k] = \frac{a}{N} W_\delta\left(j\left(k \frac{\omega_s}{N} - \omega_o\right)\right) \quad (4.59)$$

Conseqüentemente, a aproximação com DTFS da FT de uma senóide complexa consiste em amostras da FT da resposta em frequência da janela centralizada em  $\omega_o$ , com amplitude proporcional a  $a$ .

Se escolhermos  $N = M$  (sem preenchimento com zeros) e a frequência da senóide complexa satisfizer  $\omega_o = m\omega_s/M$ , então a DTFS amostrará  $W_\delta(j(\omega - \omega_o))$  no pico de seu lóbulo principal e em seus cruzamentos por zero. Conseqüentemente, temos

$$Y[k] = \begin{cases} a, & k = m \\ 0, & \text{caso contrário para } 0 \leq k \leq M-1 \end{cases}$$

Neste caso especial, o impulso de valor contínuo com valor  $2\pi a$  na FT é aproximado por um impulso de valor discreto de amplitude  $a$ .

Um sinal periódico arbitrário é representado pela FS como uma soma ponderada de senóides complexas harmonicamente relacionadas; deste modo, em geral, a aproximação por DTFS da FT consiste em amostras de uma soma ponderada de respostas em frequência de janelas deslocadas. O exemplo seguinte ilustra este efeito.

**EXEMPLO 4.18** Use a DTFS para aproximar a FT do sinal periódico

$$x(t) = \cos(2\pi(0,4)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(0,45)t)$$

Suponhamos que a faixa de frequência que nos interessa seja  $-10\pi < \omega < 10\pi$  e que o intervalo de amostragem desejado seja  $\Delta\omega = 2\pi/M$ . Avalie a aproximação por DTFS para a resolução de (a)  $\omega_r = \pi/2$  e (b)  $\omega_r = \pi/100$ .

**Solução:** Primeiramente, observe que a FT de  $x(t)$  é dada por

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega + 0,8\pi) + \pi\delta(\omega - 0,8\pi) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + 0,9\pi) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega - 0,9\pi)$$

A frequência máxima que nos interessa é dada por  $\omega_a = 10\pi$  e esta é muito maior do que a frequência mais elevada em  $X(j\omega)$ ; deste modo, o aliasing não nos preocupa e escolhemos  $\omega_s = 2\omega_a$ . Isto resulta em  $\tilde{T} = 0,1$ . O número de amostras,  $M$ , é determinado substituindo-se  $\omega_s$  na equação (4.54);

$$M \geq \frac{20\pi}{\omega_r}$$

Para obter a resolução especificada no caso (a), necessitamos de que  $M \geq 40$  amostras, enquanto que no caso (b) escolhemos  $M \geq 2000$  amostras. Escolheremos  $M = 40$  para o caso (a) e  $M = 2000$  para o caso (b). O intervalo de amostragem desejado em frequência indica que  $N = M$  e, dessa forma, não há nenhum preenchimento com zeros.

O sinal é uma soma ponderada de senóides complexas; neste modo, a FT subjacente,  $Y_\delta(j\omega)$ , a qual será amostrada pela DTFS, é uma soma ponderada de respostas em frequência de janelas deslocadas dada por

$$Y_\delta(j\omega) = \frac{1}{2}W_\delta(j(\omega + 0,8\pi)) + \frac{1}{2}W_\delta(j(\omega - 0,8\pi)) + \frac{1}{4}W_\delta(j(\omega - 0,9\pi)) + \frac{1}{4}W_\delta(j(\omega + 0,9\pi))$$

No caso (a),  $W_\delta(j\omega)$  é dado por

$$W_\delta(j\omega) = e^{-j\omega 39/20} \frac{\sin(2\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{20}\right)}$$

No caso (b), ele é dado por

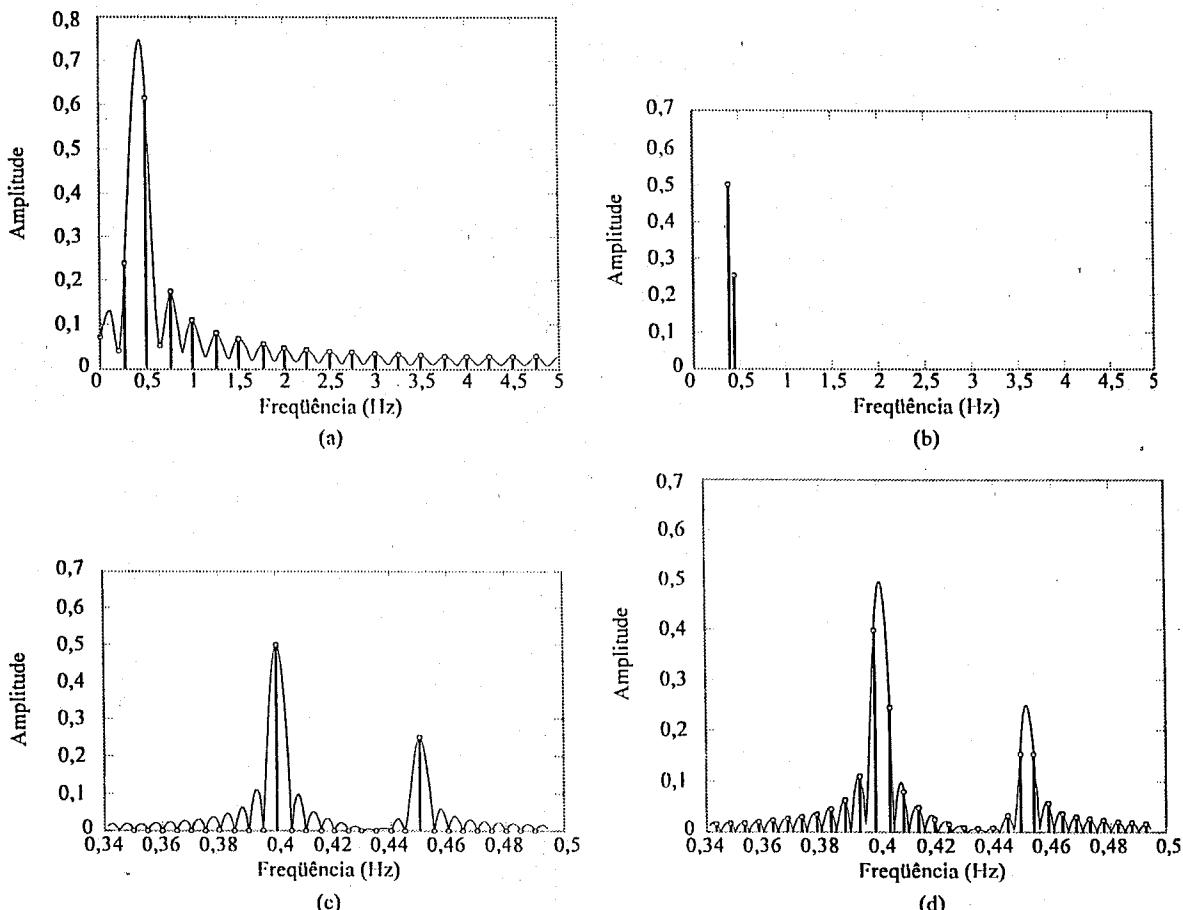
$$W_{\delta}(j\omega) = e^{-j\omega 1999/20} \frac{\sin(100\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{20}\right)}$$

As hastes verticais na Figura 4.52(a) descrevem  $|Y[k]|$  para  $M = 40$ , enquanto a linha sólida descreve  $(1/M)|Y_{\delta}(j\omega)|$  para freqüências positivas. Optamos por rotular o eixo em unidades de Hz ao invés de rad/s por conveniência. Neste caso, a resolução mínima de  $\omega_r = \pi/2$  rad/s ou 0,25 Hz é cinco vezes maior do que a separação entre os dois componentes senoidais. Conseqüentemente, não podemos identificar a presença de duas senoides tanto em  $|Y[k]|$  ou  $(1/M)|Y_{\delta}(j\omega)|$ .

A Figura 4.52(b) ilustra  $|Y[k]|$  para  $M = 2000$ . Detemo-nos na faixa de freqüência que contém as senoides da Figura 4.52(c), que descreve  $|Y[k]|$  com as hastes e  $(1/M)|Y_{\delta}(j\omega)|$  com a linha sólida. Neste caso, a resolução mínima é um fator 10 vezes menor do que a separação entre os dois componentes senoidais, e vemos claramente a presença de duas senoides.

O intervalo na qual a DTFS amostra  $Y_{\delta}(j\omega)$  é  $2\pi/200$  rad/s ou 0,005 Hz. A freqüência de cada senóide é um múltiplo inteiro do intervalo de amostragem, de forma que  $Y[k]$  amostra  $Y_{\delta}(j\omega)$  uma vez no pico de cada lóbulo principal, e com que o restante das amostras ocorrendo nos cruzamentos por zero. Conseqüentemente, a amplitude de cada componente se reflete corretamente em  $|Y[k]|$ .

A Figura 4.52(d) descreve  $|Y[k]|$  e  $(1/M)|Y_{\delta}(j\omega)|$  supondo  $M = 2010$ . Isto resulta numa resolução ligeiramente melhor do que para  $M = 2000$ . Porém, neste caso, a freqüência de cada senóide não é um múltiplo inteiro do intervalo em que a DTFS amostra de  $Y_{\delta}(j\omega)$ . Conseqüentemente,  $Y_{\delta}(j\omega)$  não é amostrado no pico de cada lóbulo principal e nos cruzamentos por zero. Embora a resolução seja suficiente para revelar a presença de dois componentes, não mais podemos determinar a amplitude de cada componente diretamente a partir de  $|Y[k]|$ .



**FIGURA 4.52** Aproximação com DTFS da FT de  $x(t) = \cos(2\pi(0,4)t) + \left|\frac{1}{2}\right| \cos(2\pi(0,45)t)$ . As hastes denotam  $|Y[k]|$  enquanto a linha sólida denota  $(1/M)|Y_{\delta}(j\omega)|$ . O eixo de freqüência é exibido em unidades de hertz por conveniência, e somente freqüências positivas são ilustradas. (a)  $M = 40$ . (b)  $M = 2000$ . (c) Comportamento nas vizinhanças das freqüências senoidais para  $M = 2000$ . (d) Comportamento nas vizinhanças das freqüências senoidais para  $M = 2010$ .

### ■ COMPUTANDO A CONVOLUÇÃO DE TEMPO DISCRETO COM UMA SEQÜÊNCIA DE TAMANHO FINITO

A DTFS pode ser usada para computar eficientemente a saída de um sistema caracterizado por uma resposta ao impulso de tamanho finito. Sistemas de tempo discreto com respostas ao impulso de tamanho finito freqüentemente são usados para filtrar sinais e são denominados filtros com resposta ao impulso de duração finita (FIR). A saída do filtro relaciona-se com a entrada através da soma de convolução. Ao invés de computar diretamente a soma de convolução, a DTFS pode ser usada para computar a saída executando uma multiplicação no domínio de freqüência. Se um algoritmo rápido for usado para avaliar a DTFS (veja a próxima seção), esta abordagem oferecerá significativas economias de computação. Embora direta em termos conceituais, deve-se tomar cuidado porque estamos usando convolução periódica para computar a convolução ordinária ou linear: a saída do filtro é dada pela convolução linear da resposta ao impulso com a entrada, mas a multiplicação dos coeficientes da DTFS corresponde a uma convolução periódica.

Admitamos que  $h[n]$  seja uma resposta ao impulso de tamanho  $M$ ; ou seja, suponhamos que  $h[n] = 0$  para  $n < 0, n \geq M$ . A saída do sistema  $y[n]$  relaciona-se com a entrada  $x[n]$  através da soma de convolução

$$\begin{aligned} Y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \end{aligned} \quad (4.60)$$

O objetivo é avaliar esta soma usando um conjunto de convoluções periódicas computadas através da DTFS.

Consideremos a convolução periódica de  $N$  pontos de  $h[n]$  com  $N$  valores consecutivos da seqüência de entrada  $x[n]$  e suponhamos que  $N > M$ . Admitamos que  $\tilde{x}[n]$  e  $\tilde{h}[n]$  sejam versões periódicas de  $N$  pontos de  $x[n]$  e  $h[n]$ , respectivamente,

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= x[n], \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ \tilde{x}[n+mN] &= x[n], \quad \text{para todo número inteiro } m, 0 \leq n \leq N-1 \\ \tilde{h}[n] &= h[n], \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ \tilde{h}[n+mN] &= h[n], \quad \text{para todo número inteiro } m, 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

A convolução periódica entre  $\tilde{h}[n]$  e  $\tilde{x}[n]$  é

$$\begin{aligned} \tilde{y}[n] &= \tilde{h}[n] \oplus \tilde{x}[n] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}[k]\tilde{x}[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}[k]\tilde{x}[n-k] \end{aligned} \quad (4.61)$$

Usando a relação entre  $h[n]$  e  $\tilde{h}[n]$  para reescrever a equação (4.61), temos

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\tilde{x}[n-k] \quad (4.62)$$

Agora, desde que  $\tilde{x}[n] = x[n], 0 \leq n \leq N-1$ , sabemos que

$$x[n-k] = x[n-k], \quad 0 \leq n-k \leq N-1$$

No somatório da equação (4.62),  $k$  varia de 0 a  $M-1$  e, deste modo, a condição  $0 \leq n-k \leq N-1$  é sempre satisfeita, desde que  $M-1 \leq n \leq N-1$ . Substituindo  $x[n-k] = \tilde{x}[n-k], M-1 \leq n \leq N-1$ , na equação (4.62), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{y}[n] &= \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k], \quad M-1 \leq n \leq N-1 \\ &= y[n], \quad M-1 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a convolução periódica é igual à convolução linear em  $L = N - M + 1$  valores de  $n$ .

Podemos obter valores de  $y[n]$  diferentes daqueles do intervalo  $M - 1 \leq n \leq N - 1$  deslocando  $x[n]$  antes de definirmos  $\tilde{x}[n]$ . Admitamos que

$$\tilde{x}_p[n] = x[n + pL], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

$$\tilde{x}_p[n + mN] = \tilde{x}_p[n], \quad \text{para todo número inteiro } m, 0 \leq n \leq N - 1$$

e definamos

$$\tilde{y}_p[n] = \tilde{h}[n] * \tilde{x}_p[n]$$

Neste caso, teremos

$$\tilde{y}_p[n] = y[n + pL], \quad M - 1 \leq n \leq N - 1$$

Ou seja, os últimos  $L$  valores num período de  $\tilde{y}_p[n]$  correspondem a  $y[n]$  para  $M - 1 + pL \leq n \leq N - 1 + pL$ . Cada vez que incrementarmos  $p$ , a convolução periódica de  $N$  pontos nos dá  $L$  novos valores da convolução linear.

A relação entre a convolução linear e periódica leva ao procedimento seguinte, chamado *método sobrepor e guardar (overlap and save)*, para avaliar uma convolução linear com a DTFS. Supomos que desejamos computar  $y[n] = h[n] * x[n]$  para  $n \geq 0$  e que  $h[n] = 0, n < 0, n > M - 1$ .

#### *Método Sobrepor e Guardar para Implementar a Convolução*

1. Compute os  $N$  coeficientes  $H[k]$  da DTFS :  $h[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } 2\pi/N} H[k]$ .
2. Faça  $p = 0$  e  $L = N - M + 1$ .
3. Defina  $\tilde{x}_p[n] = x[n - (M - 1) + pL], 0 \leq n \leq N - 1$ .
4. Compute os  $N$  coeficientes  $\tilde{X}_p[k]$  da DTFS :  $\tilde{x}_p[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } 2\pi/N} \tilde{X}_p[k]$ .
5. Compute o produto  $\tilde{Y}_p[k] = NH[k]\tilde{X}_p[k]$ .
6. Compute o sinal de tempo  $\tilde{y}_p[n]$  a partir dos coeficientes  $\tilde{Y}_p[n]$  da DTFS :  
 $\tilde{y}_p[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } 2\pi/N} \tilde{Y}_p[k]$ .
7. Guarde os  $L$  pontos de saída:  $y[n + pL] = \tilde{y}_p[n + M - 1], 0 \leq n \leq L - 1$ .
8. Faça  $p = p + 1$  e retorne à etapa 3.

Este algoritmo de sobrepor e guardar para computar convoluções é assim chamado porque há uma sobreposição nos blocos de entrada  $x_p[n]$  e uma parte da saída  $y_p[n]$  é guardada. Outros algoritmos para avaliar a convolução linear usando convolução circular também podem ser deduzidos. Eles são conhecidos coletivamente como *algoritmos rápidos de convolução* porque exigem significativamente menos computação do que o cálculo direto da convolução quando um algoritmo rápido é usado para computar as relações necessárias da DTFS. A economia exata depende de  $M$  e  $N$ .

**EXEMPLO 4.19** Use convolução periódica e a DTFS para determinar a saída  $y[n]$  do sistema com resposta ao impulso

$$h[n] = \left( \frac{-15}{16} \right)^n (u[n] - u[n - 50])$$

em resposta à saída

$$x[n] = 0.9^n \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)(u[n] - u[n - 42])$$

**Solução:** A saída é a convolução linear de  $h[n]$  e  $x[n]$ . Tanto  $h[n]$  como  $x[n]$  têm uma duração finita. A convolução linear de dois sinais de tamanho finito é um sinal de tamanho finito, cujo tamanho é a soma dos tamanhos de  $x[n]$  e  $h[n]$ . Tanto  $x[n]$  como  $h[n]$  são nulos para  $n < 0$ , de forma que  $y[n]$  é nulo para  $n < 0$  e  $n \geq 50 + 42$ . Nossa meta é usar a DTFS para determinar  $y[n]$ ,  $0 \leq n \leq 91$ . Sabemos que a convolução periódica é igual à convolução linear em  $L = N - M + 1$  valores. Aqui,  $M = 50$  e desejamos  $L \geq 92$  para determinar os 92 valores diferentes de zero de  $y[n]$ . Portanto, escolhemos  $N = 141$  para o tamanho da DTFS a fim de que todos os valores que nos interessam sejam determinados com uma passagem pelo procedimento de sobrepor e guardar.

Na etapa 1, usamos o computador para avaliar  $H[k]$  a partir de  $h[n]$ , em que

$$h[n] \xrightarrow{DTFS; 2\pi/141} H[k]$$

O módulo de  $H[k]$  é descrito na Figura 4.53(a). Agora, faça  $p = 0$  e  $L = 92$  para concluir a etapa 2. Na etapa 3, definimos  $\tilde{x}_0[n]$  como uma versão periódica deslocada de  $x[n]$ . Temos

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0[n] &= x[n - 49] \\ &= 0.9^{n-49} \cos\left(\frac{\pi}{8}(n-49)\right)(u[n-49] - u[n-91]), \quad 0 \leq n \leq 140 \\ &= \begin{cases} 0.9^{n-49} \cos\left(\frac{\pi}{8}(n-49)\right), & 49 \leq n \leq 90 \\ 0, & 0 \leq n \leq 48 \text{ e } 91 \leq n \leq 140 \end{cases} \end{aligned}$$

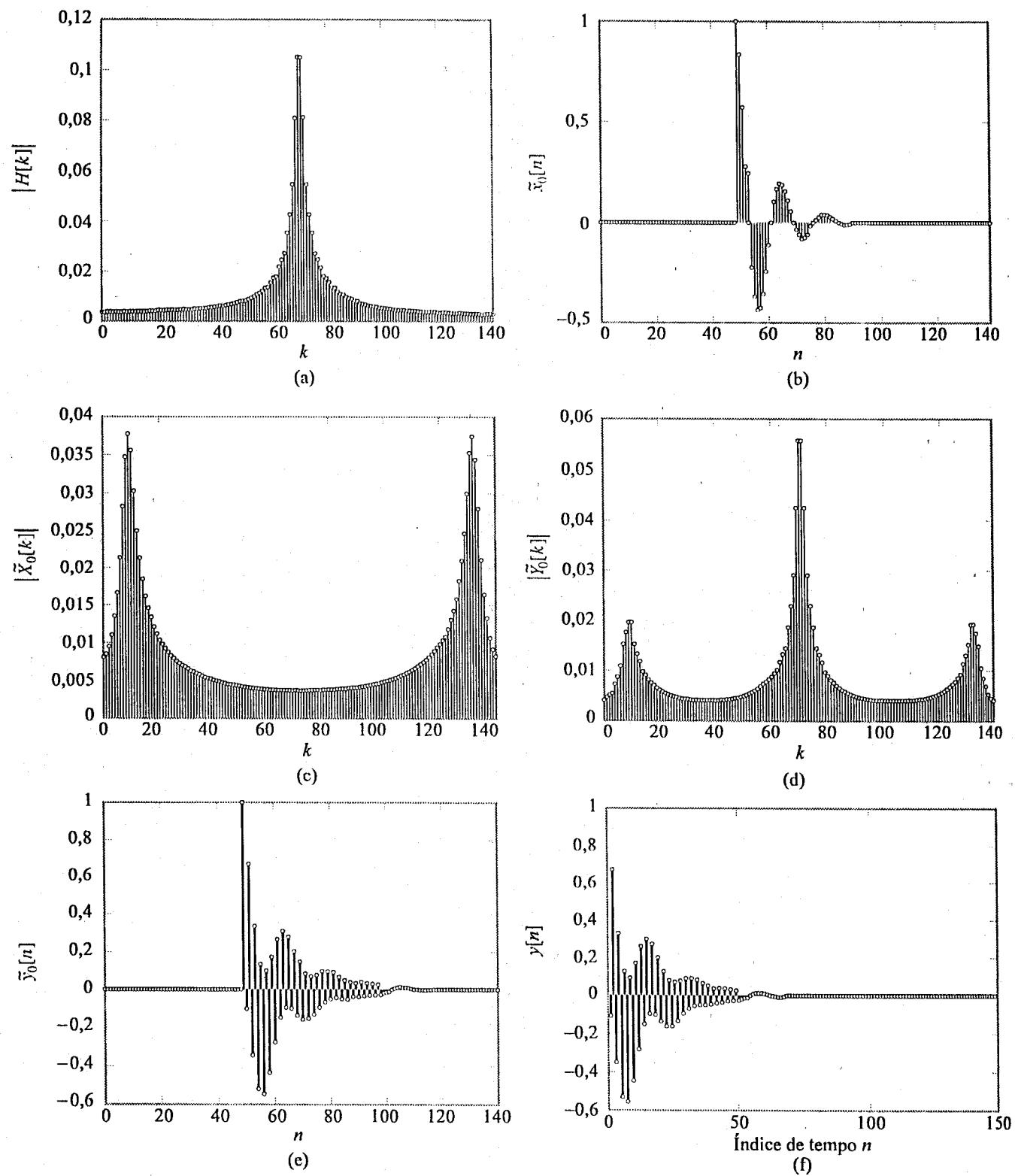
como um período de  $\tilde{x}_0[n]$ . Este sinal é descrito na Figura 4.53(b). Conclua a etapa 4 usando o computador para calcular  $\tilde{X}_0[k]$  descrito por

$$\tilde{x}_0[n] \xrightarrow{DTFS; 2\pi/141} \tilde{X}_0[k]$$

A Figura 4.53(c) ilustra  $|\tilde{X}_0[k]|$ . O passo seguinte é computar  $\tilde{Y}_0[k] = NH[k]\tilde{X}_0[k]$ . A Figura 4.53(d) descreve  $|\tilde{Y}_0[k]|$ . Então, computamos  $\tilde{y}_0[n]$  na etapa 6, em que

$$\tilde{y}_0[n] \xrightarrow{DTFS; 2\pi/141} \tilde{Y}_0[k]$$

O sinal  $\tilde{y}_0[n]$  é descrito na Figura 4.53(e). Finalmente, faça  $y[n] = \tilde{y}_0[n + 49]$ ,  $0 \leq n \leq 91$ , como ilustra a Figura 4.53(f).



**FIGURA 4.53** Exemplo do uso de convolução periódica para computar a convolução linear. (a)  $|H[k]|$ , (b)  $\tilde{x}_0[n]$ , (c)  $|\tilde{X}_0[k]|$ , (d)  $|\tilde{Y}_0[k]| = |NH[k]\tilde{X}_0[k]|$ , (e)  $\tilde{y}_0[n]$ , (f)  $y[n]$ .

### \*4.11 Algoritmos Eficientes para Avaliar a DTFS

O papel da DTFS como ferramenta computacional é grandemente ampliado pela disponibilidade de algoritmos eficientes para avaliar a DTFS direta e a inversa. Esses algoritmos são chamados coletivamente como *transformadas rápidas de Fourier* ou *algoritmos FFT*. Estes algoritmos rápidos operam de acordo com o princípio “dividir para conquistar”, dividindo a DTFS numa série de DTFS de ordem menor e explorando as propriedades de simetria e periodicidade da senóide complexa  $e^{jk2\pi n}$ . Menos computação é necessária para avaliar e combinar a DTFS de ordem mais baixa do que para avaliar a DTFS original. Demonstraremos as economias computacionais que resultam deste processo de divisão.

Lembre-se que o par DTFS pode ser avaliado usando-se as expressões

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j k \Omega_o n}$$

e

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j k \Omega_o n} \quad (4.63)$$

Estas expressões são virtualmente idênticas, diferindo somente na normalização por  $N$  e no sinal da exponencial complexa. Consequentemente, os mesmos algoritmos básicos podem ser usados para computar qualquer uma das relações; somente pequenas mudanças são necessárias. Consideraremos avaliar a equação (4.63).

O cálculo direto da equação (4.63) para um único valor de  $n$  requer  $N$  multiplicações complexas e  $N - 1$  adições complexas. Dessa forma, a computação de  $x[n]$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , requer  $N^2$  multiplicações complexas e  $N^2 - N$  adições complexas. Para demonstrar como isto pode ser reduzido, supomos que  $N$  seja par. Divida  $X[k]$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$  em sinais de índices par e ímpar\*, como é mostrado por

$$X_e[k] = X[2k], \quad 0 \leq k \leq N'/1$$

e

$$X_o[k] = X[2k+1], \quad 0 \leq k \leq N'/1$$

em que  $N' = N/2$  e

$$x_e[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } \Omega'_o} X_e[k], \quad x_o[n] \xrightarrow{\text{DTFS; } \Omega'_o} X_o[k]$$

com  $\Omega'_o = 2\pi/N'$ . Expressamos agora a equação (4.63) como uma combinação dos  $N'$  coeficientes  $X_e[k]$  e  $X_o[k]$  da DTFS, como é mostrado por

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j k \Omega_o n} \\ &= \sum_{k \text{ par}} X[k] e^{j k \Omega_o n} + \sum_{k \text{ ímpar}} X[k] e^{j k \Omega_o n} \end{aligned}$$

Escreva os índices par (*even*) e ímpar (*odd*) como  $2m$  e  $2m+1$ , respectivamente, para obter

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N'/1} X[2m] e^{jm2\Omega_o n} + \sum_{m=0}^{N'/1} X[2m+1] e^{j(m2\Omega_o n + \Omega_o n)}$$

Substitua as definições de  $X_e[k]$ ,  $X_o[k]$  e  $\Omega'_o = 2\Omega_o$  de forma que

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{m=0}^{N'/1} X_e[m] e^{jm2\Omega'_o n} + e^{j\Omega_o n} \sum_{m=0}^{N'/1} X_o[m] e^{jm\Omega'_o n} \\ &= x_e[n] + e^{j\Omega_o n} x_o[n], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \end{aligned}$$

Isto indica que  $x[n]$  é uma combinação ponderada de  $x_e[n]$  e  $x_o[n]$ .

\* N. de R.T.: Nas equações seguintes, par está associado ao subscrito *e* do inglês *even* (par) e ímpar, ao *o* de *odd* (ímpar).

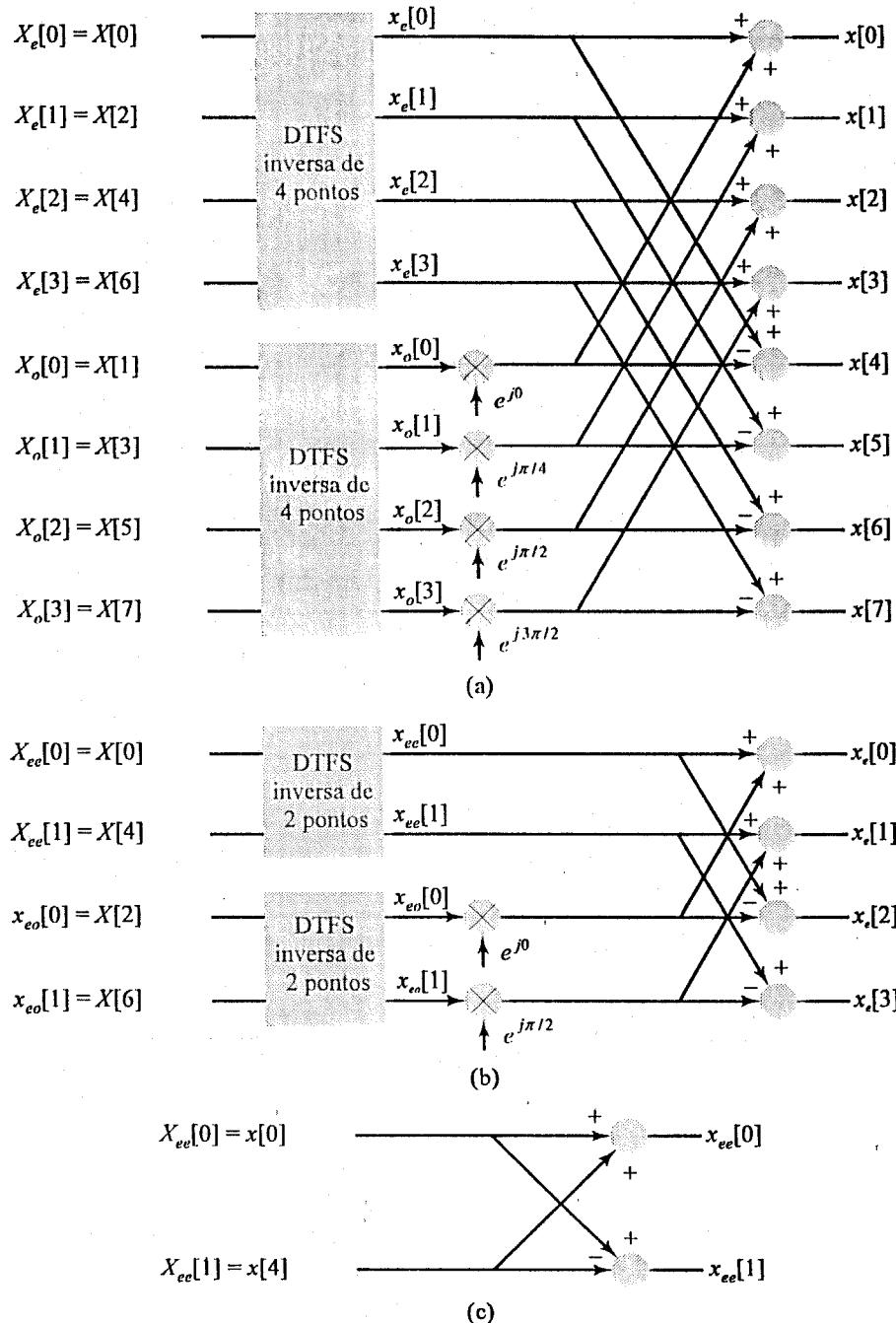
Podemos simplificar ainda mais nosso resultado explorando as propriedades de periodicidade de  $x_e[n]$  e  $x_o[n]$ . Usando  $x_e[n+N'] = x_e[n]$ ,  $x_o[n+N'] = x_o[n]$  e  $e^{j(n+N')\Omega_o} = -e^{j\Omega_o n}$  obtemos

$$x[n] = x_e[n] + e^{j\Omega_o n} x_o[n], \quad 0 \leq n \leq N' - 1 \quad (4.64)$$

como os primeiros  $N'$  valores da DTFS de  $x[n]$

$$x[n+N'] = x_e[n] - e^{j\Omega_o n} x_o[n], \quad 0 \leq n \leq N' - 1 \quad (4.65)$$

como os segundos  $N'$  valores de  $x[n]$ . A Figura 4.54(a) descreve graficamente a computação descrita nas equações (4.64) e (4.65) para  $N=8$ . Vemos que soamente precisamos multiplicar por  $e^{j\Omega_o n}$  uma vez ao computar ambas as equações. As operações restantes são adição e subtração.



**FIGURA 4.54** Diagramas de blocos descrevendo a decomposição de uma DTFS inversa como uma combinação de DTFS inversas de ordem mais baixa. (a) DTFS inversa de 8 pontos representada em termos de duas DTFS inversas de 4 pontos. (b) DTFS inversa de 4 pontos representada em termos de DTFS inversas de 2 pontos. (c) DTFS inversa de dois pontos.

Vamos considerar a computação necessária para avaliar as equações (4.64) e (4.65). O cálculo de  $x_c[n]$  e  $x_o[n]$  requer, cada um,  $(N')^2$  multiplicações complexas para um total de  $N^2/2$  multiplicações complexas.  $N'$  multiplicações adicionais são necessárias para computar  $e^{-j\Omega_n} X_o[k]$ . Dessa forma, o número total de multiplicações complexas é  $N^2/2 + N/2$ . Para um  $N$  grande, isto é aproximadamente  $N^2/2$ , cerca da metade do número de multiplicações necessárias para avaliar diretamente  $x[n]$ . Reduções adicionais nas exigências computacionais são obtidas se dividirmos ainda mais  $X_c[k]$  e  $X_o[k]$  em seqüências de índices par e ímpar. Por exemplo, a Figura 4.54(b) ilustra como dividir a DTFS inversa de 4 pontos usada para calcular  $x_c[n]$  em duas DTFSs inversas de 2 pontos para  $N = 8$ . A maior economia é quando  $N$  é uma potência de 2. Nesse caso, podemos continuar a subdividir até que o tamanho de cada DTFS inversa seja 2. Esta DTFS inversa de 2 pontos não exige nenhuma multiplicação, como ilustra a Figura 4.54(c).

A Figura 4.55 ilustra a computação da FFT para  $N = 8$ . A repetida partição em seqüências de índices par e ímpar permuta a ordem dos coeficientes da DTFS na entrada. Esta permutação é denominada *inversão de bits*, uma vez que a localização de  $X[k]$  pode ser determinada invertendo-se os bits de uma representação binária para o índice  $k$ . Por exemplo,  $X[6]$  tem o índice  $k = 6$ . Representando  $k = 6$  na forma binária, teremos  $k = 110_2$ . Agora, invertendo os bits, teremos  $k' = 011_2$  ou  $k' = 3$ , de forma que  $X[6]$  aparece na terceira posição. A estrutura de duas entradas e duas saídas descrita na Figura 4.54(c) e que é duplicada em cada etapa da FFT (veja a Figura 4.55) é denominada *borboleta* devido a sua aparência.

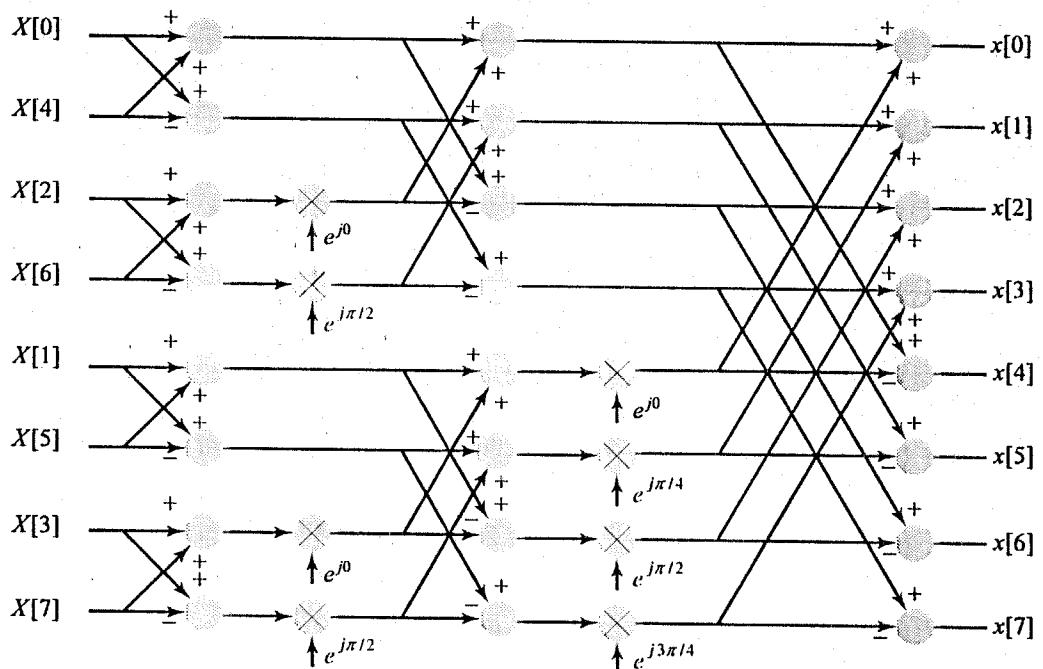


FIGURA 4.55 Diagrama do algoritmo FFT para computar  $x[n]$  para  $N = 8$ .

Os algoritmos FFT para  $N$  que seja potência de dois requerem multiplicações complexas na ordem de  $N \log_2(N)$ . Isto pode representar uma economia de computação extremamente grande em relação a  $N^2$  quando  $N$  é muito grande. Por exemplo, se  $N = 8192$  ou  $2^{13}$ , a abordagem direta exige aproximadamente 630 vezes mais operações aritméticas do que o algoritmo FFT.

Muitos pacotes de software contêm rotinas que implementam algoritmos FFT. Infelizmente, a localização do fator  $1/N$  não é padronizada. Algumas rotinas colocam o  $1/N$  na expressão dos coeficientes  $X[k]$  da DTFS, como fizemos aqui, enquanto outras colocam o  $1/N$  na expressão para o sinal de tempo  $x[n]$ .

Uma outra convenção ainda, é colocar  $1/\sqrt{N}$  tanto nas expressões para  $X[k]$  como para  $x[n]$ . O único efeito destas convenções é multiplicar os coeficientes  $X[k]$  da DTFS ou por  $N$  ou por  $\sqrt{N}$ .

## 4.12 Explorando Conceitos com o MATLAB

### ■ RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SISTEMAS LTI

As *MATLAB Signal Processing and Control Systems Toolboxes* contém rotinas para avaliar a resposta em freqüência de sistemas LTI. A resposta em freqüência é uma função contínua de freqüência. Entretanto, numericamente, podemos avaliar somente a resposta em freqüência em valores discretos de freqüência. Dessa forma, um número suficientemente grande de valores é usado para captar os detalhes na resposta em freqüência do sistema.

Lembre-se que as respostas ao impulso e em freqüência de um sistema de tempo contínuo se relacionam através da FT, enquanto que a DTFT relaciona respostas ao impulso e em freqüência de sistemas de tempo discreto. Conseqüentemente, a determinação da resposta em freqüência a partir da descrição da resposta ao impulso exige aproximar ou a FT ou a DTFT usando a DTFS, tópico este que é discutido nas Seções 4.9 e 4.10. Observamos na Seção 3.7 que a DTFS pode ser implementada no MATLAB com o comando `fft`.

Os comandos `freqs` e `freqz` avaliam a resposta em freqüência de sistemas descritos por equações diferenciais e de diferenças, respectivamente. O comando `H = freqs(b, a, w)` retorna os valores da resposta em freqüência de tempo contínuo dados pela equação (4.3) nas freqüências especificadas no vetor `w`. Aqui, assumimos que os vetores `b = [bM, bM-1, ..., b0]` e `a = [aN, aN-1, ..., a0]` representam os coeficientes da equação diferencial. A sintaxe de `freqz` é diferente, de uma forma útil. O comando `H = freqz(b, a, w)` avalia a resposta em freqüência de sistemas de tempo discreto dados pela equação (4.4) nas freqüências especificadas no vetor `w`. No caso de tempo discreto, as entradas de `w` devem situar-se entre 0 e  $2\pi$ , e os vetores `b = [b0, b1, ..., bM]` e `a = [a0, a1, ..., aN]` contêm os coeficientes de equações de diferenças na ordem inversa daquela exigida por `freqs`.

A resposta em freqüência de um sistema tanto de tempo contínuo ou de tempo discreto descrita na forma de variáveis de estado (veja a equação (4.10) e (4.11)) podem ser computadas usando-se `freqresp`. A sintaxe é `H = freqresp(sys, w)`, em que `sys` é o objeto que contém a descrição por variáveis de estado (veja a Seção 2.7) e `w` é um vetor que contém as freqüências nas quais se deve avaliar a resposta em freqüência. Em geral, `freqresp` se aplica a sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas, de forma que a saída `H` é uma matriz multidimensional. Para a classe de sistemas de entrada única e saída única considerados neste texto e `N` pontos de freqüência em `w`, `H` é uma matriz multidimensional de tamanho 1 por 1 por `N`. O comando `squeeze(H)` converte `H` para um vetor de tamanho `N` que pode ser exibido com o comando `plot`.

Por exemplo, podemos avaliar numericamente e plotar a resposta em módulo do sistema descrito no Exemplo 4.5 em 500 pontos uniformemente espaçados no intervalo  $0 \leq \omega < 10$  usando os comandos:

```
>> a = [2, -1; 1, 0]; b = [1; 0]; c = [3, 1]; d = 0;
>> sys = ss(a,b,c,d);
>> w = [0:499]*10/500;
>> H = freqresp(sys,w);
>> Hmag = abs(squeeze(H));
>> pLot(w,Hmag)
>> title('Resposta em Módulo do Sistema')
>> xlabel('Freqüência (rads/s)'); ylabel('Módulo')
```

A Figura 4.56 descreve a resposta em módulo do sistema.

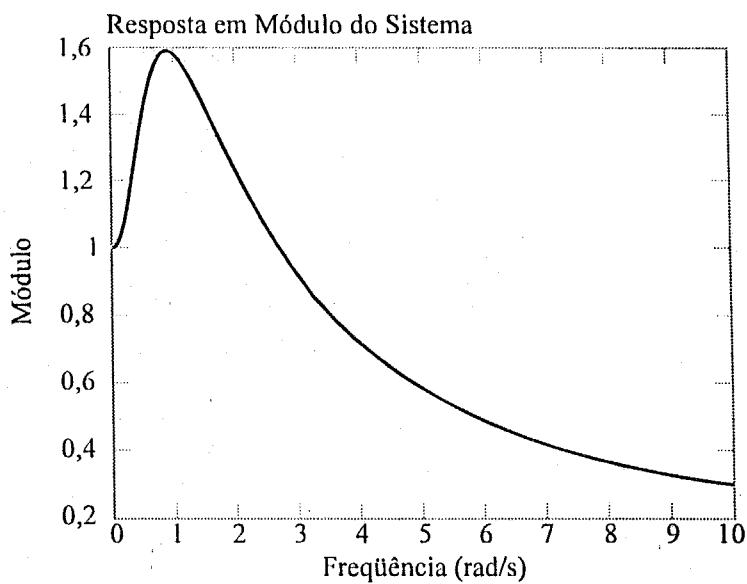


FIGURA 4.56 Resposta em módulo avaliada a partir de uma descrição por variáveis de estado usando-se o MATLAB.

### \* DECIMAÇÃO E INTERPOLAÇÃO

Lembre-se que a decimação reduz a taxa de amostragem efetiva de um sinal de tempo discreto enquanto a interpolação aumenta a taxa de amostragem efetiva. A decimação é realizada pela subamostragem de uma versão filtrada com passa-baixas do sinal, enquanto a interpolação é executada inserindo-se zeros entre as amostras e aplicando-se depois um filtro passa-baixas. A *Signal Processing Toolbox* contém diversas rotinas para executar decimação e interpolação. Todas elas projetam e aplicam automaticamente o filtro passa-baixas exigido tanto para a decimação como para a interpolação. O comando `y = decimate(x, r)` faz a decimação do sinal representado por `x` com um fator inteiro positivo `r` para produzir `y`. O vetor `y` é `r` vezes mais curto do que `x`. Similarmente, `y = interp(x, r)` interpola `x` com um fator inteiro positivo `r`, produzindo um vetor `y` que é `r` vezes maior do que `x`. O comando `y = resample(x, p, q)` reamostra o sinal no vetor `x` com `p/q` vezes a taxa de amostragem original, em que `p` e `q` são números inteiros positivos. Isto é conceitualmente equivalente a interpolar primeiro por um fator `p` e depois decimar por um fator `q`. O vetor `y` é `p/q` vezes o tamanho de `x`. Os valores da seqüência reamostrada podem ser inexatos próximo do início e do final de `y` se `x` contiver desvios grandes de zero em seu início e fim.

Suponhamos o sinal de tempo discreto

$$x[n] = e^{-n/15} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{13}n + \frac{\pi}{8}\right), \quad 0 \leq n \leq 59$$

resulte da amostragem de um sinal de tempo contínuo a uma taxa de 45 kHz e que desejamos encontrar o sinal de tempo discreto resultante da amostragem do sinal de tempo contínuo subjacente em 30 kHz.

Isto corresponde a mudar a taxa de amostragem por um fator de  $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ . O comando `resample` é usado para efetuar esta mudança da seguinte maneira:

```
>> x = exp(-[0:59]/15).*sen([0:59]*2*pi/13 + pi/8);
>> y = resample(x,2,3);
>> subplot(2,1,1)
>> stem([0:59],x);
>> title('sinal amostrado a 45 kHz'); xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude')
>> subplot(2,1,2)
>> stem([0:39],y);
>> title('sinal amostrado a 30 kHz'); xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude')
```

Os sinais originais e reamostrados resultantes destes comandos são descritos na Figura 4.57.

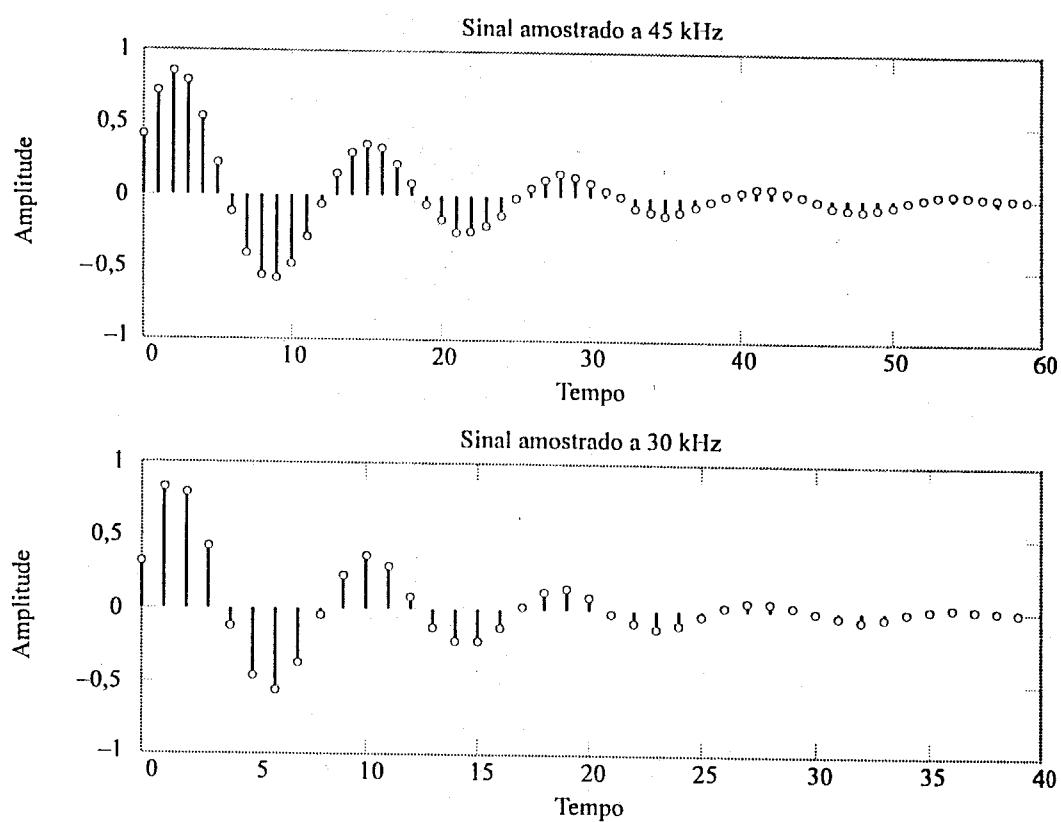


FIGURA 4.57 Sinais original e reamostrado obtidos usando-se o MATLAB.

### ■ RELACIONANDO A DTFS COM A DTFT

A equação (4.48) afirma que os coeficientes da DTFS de um sinal de duração finita correspondem às amostras da DTFT divididas pelo número de coeficientes da DTFS,  $N$ . Conforme discutimos na Seção 3.7, o comando do MATLAB `fft` calcula  $N$  vezes os coeficientes da DTFS. Consequentemente, a `fft` avalia diretamente as amostras da DTFT de um sinal de duração finita. O processo de anexar zeros ao sinal de duração finita antes de computar a DTFS é chamado preenchimento com zeros e resulta numa amostragem mais densa da DTFT subjacente. O preenchimento com zeros é facilmente realizado com `fft` adicionando-se um argumento que especifique o número de coeficientes a serem computados. Se  $x$  for um vetor de tamanho  $M$  que representa um sinal de duração finita e  $n$  for maior do que  $M$ , o comando  $X = \text{fft}(x, n)$  avaliará  $n$  amostras da DTFT de  $x$  ao, primeiro, acrescentar a  $x$  zeros até completar o tamanho  $n$ . Se  $n$  for menor do que  $M$ ,  $\text{fft}(x, n)$  truncará primeiro  $x$  no tamanho  $n$ .

Os valores de freqüência correspondentes às amostras em  $X$  são representados por um vetor de  $n$  pontos, cujo primeiro elemento é zero e as entradas restantes estão espaçadas em intervalos de  $2\pi/n$ . Por exemplo, o comando  $w = [0 : (n-1)] * 2 * \pi / n$  gera o vetor de freqüências apropriado. Observe que  $X$  descreve a DTFT para freqüências no intervalo  $0 \leq \Omega < 2\pi$ . Às vezes é mais conveniente visualizar a DTFT numa faixa de freqüências centralizadas em zero, ou seja,  $-\pi \leq \Omega < \pi$ . O comando do MATLAB  $Y = \text{fftshift}(X)$  permuta as metades esquerda e direita de  $X$  a fim de colocar o valor de freqüência zero no centro. O vetor de valores de freqüências correspondente aos valores em  $Y$  podem ser gerados usando-se  $w = [-n/2 : (n/2-1)] * 2 * \pi / n$ .

Suponhamos que revisitemos o Exemplo 4.16 usando o MATLAB para avaliar  $|X(e^{j\Omega})|$  em intervalos de freqüência de (a)  $2\pi/32$ , (b)  $2\pi/60$  e (c)  $2\pi/120$ . Lembre-se que

$$x[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi n}{8}\right), & 0 \leq n \leq 31 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para o caso (a), usamos uma DTFS de 32 pontos computada a partir dos 32 valores diferentes de zero do sinal. Nos casos (b) e (c), preenchemos com zeros até os tamanhos 60 e 120, respectivamente, para amostrar a DTFT nos intervalos especificados. Avaliamos e exibimos os resultados em  $-\pi \leq \Omega < \pi$  usando os seguintes comandos:

```
>> n = [0:31];
>> x = cos(3*pi*n/8);
>> X32 = abs(fftshift(fft(x))); %módulo para DTFS de 32 pontos.
>> X60 = abs(fftshift(fft(x,60))); %módulo para DTFS de 60 pontos
>> X120 = abs(fftshift(fft(x,120))); %módulo para DTFS de 120 pontos
>> w32 = [-16:15]*2*pi/32; w60 = [-30:29]*2*pi/60;
w120 = [-60:59]*2*pi/120;
>> stem(w32,X32); % gráfico de hastes para Fig. 4.47(a)
>> stem(w60,X60); % gráfico de hastes para Fig. 4.47(b)
>> stem(w120,X120); % gráfico de hastes para Fig. 4.47(c)
```

Os resultados estão ilustrados como gráficos de hastes nas Figuras 4.47(c)

### ■ APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS DA DTFS

Conforme observamos anteriormente, o comando `fft` do MATLAB pode ser usado para avaliar a DTFS e, dessa forma, é usado para aproximar a FT. Em especial, o comando `fft` é usado para gerar as aproximações por DTFS nos exemplos 4.17 e 4.18. Para repetirmos o Exemplo 4.18, usamos os comandos

```
>> ta = 0:0.1:3.9; % amostras de tempo para o caso (a)
>> tb = 0:0.1:199.9; % amostras de tempo para o caso (b)
>> xa = cos(0.8*pi*ta) + 0.5*cos(0.9*pi*ta);
>> xb = cos(0.8*pi*tb) + 0.5*cos(0.9*pi*tb);
>> Ya = abs(fft(xa)/40); Yb = abs(fft(xb)/2000);
>> Ydela = abs(fft(xa,8192)/40); %calcular 1/M Y_delta(j omega) para o caso (a)
>> Ydelb = abs(fft(xa,16000)/2000); %calcular 1/M Y_delta(j omega) para o caso (b)
>> fa = [0:19]*5/20; fb = [0:999]*5/1000;
>> f dela = [0:4095]*5/4096; f delb = [0:7999]*5/8000;
>> plot(f dela,Y dela(1:4192)) %Fig. 4.52(a)
>> hold on
>> stem(fa,Ya(1:20))
>> xlabel('Frequencia (Hz)'); ylabel('Amplitude')
>> hold off
>> plot(f delb(560:800),Y delb(560:800)) %Fig. 4.52(c)
>> hold on
>> stem(fb(71:100),Yb(71:100))
>> xlabel('Frequencia (Hz)'); ylabel('Amplitude')
```

Observe que avaliamos  $(1/M)Y_s(j\omega)$  usando `fft`, através do preenchimento com um grande número de zeros em relação ao tamanho de  $x[n]$ . Lembre-se que o preenchimento com zeros diminui o espaçamento entre as amostras da DTFT que são obtidas pela DTFS. Conseqüentemente, ao preencher com um grande número de zeros, obtemos detalhes suficientes para que o comando `plot` forneça uma aproximação suave da DTFT subjacente. Se o comando `plot` for usado para exibir os coeficientes da DTFS sem preenchimento com zero, uma aproximação muito mais grosseira da DTFT subjacente será obtida. A Figura 4.58 descreve os coeficientes da DTFS para o caso (b) do Exemplo 4.18 usando tanto `plot` como `stem`. Ela é obtida usando-se os comandos

```
>> plot(fb(71:100),Yb(71:100))
>> hold on
>> stem(fb(71:100),Yb(71:100))
```

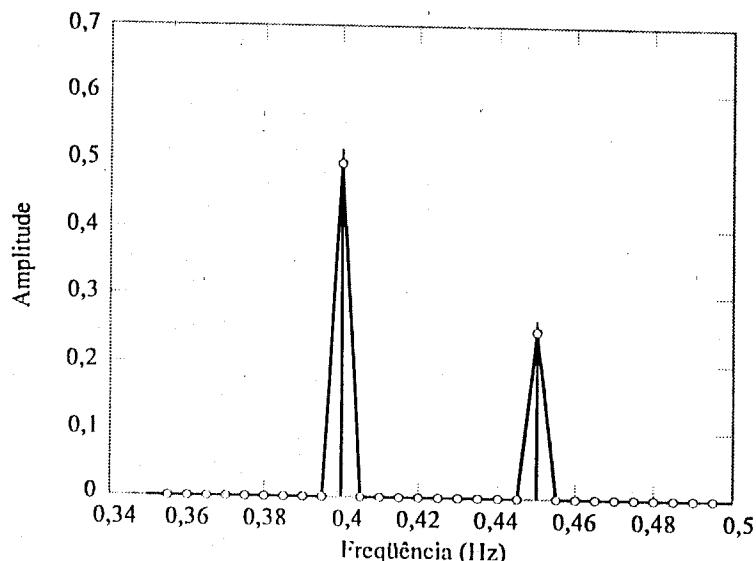


FIGURA 4.58 Uso do comando `plot` do MATLAB para exibir os coeficientes da DTFS no caso (b) do Exemplo 4.18.

Aqui, o comando `plot` produz triângulos centralizados nas freqüências associadas com as senóides. Os triângulos são uma consequência de `plot` desenhar linhas retas entre os valores em  $Y_b$ .

O comando `fft` é implementado usando-se um algoritmo numericamente eficiente ou de transformada rápida de Fourier baseado no princípio de dividir para conquistar discutido na Seção 4.11. A rotina da *Signal Processing Toolbox* `fftfilt` emprega um algoritmo baseado na transformada rápida de Fourier para computar a convolução com uma sequência de tamanho finito. Ele se baseia no método *sobrepor e adicionar*, o qual é similar em princípio à abordagem de sobrepor e guardar discutida na Seção 4.10. Ambos implementam a convolução através da multiplicação dos coeficientes da DTFS. Eles usam diferentes abordagens para relacionar a convolução linear desejada com a convolução periódica associada com a DTFS.

## 4.13 Resumo

As representações de Fourier encontram aplicação na análise da interação entre sinais e sistemas e no cálculo numérico das características de sinais ou do comportamento de sistemas. A DTFS é usada para computação numérica, uma vez que ela é a única representação que pode ser calculada num computador. A FT e a DTFT são mais comumente usadas para análise. No decorrer da aplicação destas representações, freqüentemente encontramos situações em que há uma combinação de classes de sinais. Esta combinação ocorre naturalmente na interação entre sinais e sistemas e na manipulação de sinais. Estabelecemos relações entre diferentes representações de Fourier neste capítulo a fim de tratarmos a combinação de classes de sinais.

A FT é a representação mais versátil para análise, uma vez que há diferentes representações FT para todas as quatro classes de sinais. Ela é usada mais freqüentemente para analisar sistemas LTI de tempo contínuo e sistemas que amostram sinais de tempo contínuo ou que reconstróem sinais de tempo contínuo a partir de amostras. O principal uso da DTFT é analisar sistemas de tempo discreto. Desenvolvemos uma representação por DTFT para sinais periódicos de tempo discreto para facilitar este papel. A DTFS é usada para aproximar tanto a FT como a DTFT em aplicações computacionais. A existência de algoritmos computacionalmente eficientes ou “rápidos” para avaliar a DTFS amplia muito a faixa de problemas em que a FT pode ser usada. Estabelecemos as relações entre a DTFS e a FT, bem como entre a DTFS e a DTFT a fim de interpretarmos corretamente os resultados de computações numéricas.

Os métodos de Fourier fornecem um poderoso conjunto de ferramentas analíticas e numéricas para resolver problemas que envolvem sinais e sistemas. Eles constituem um conjunto importante de ferramentas para o estudo de sistemas de comunicações, como veremos no próximo capítulo. Eles também têm extensas aplicações no contexto de filtragem, que será o tema do Capítulo 8.

## LEITURA ADICIONAL

1. Os temas da amostragem, reconstrução, sistemas de processamento de sinais de tempo discreto, aplicações computacionais da DTFS e algoritmos rápidos para a DTFS são discutidos com mais detalhes nos seguintes textos sobre processamento de sinais:
  - » Porat, B., *A Course in Digital Signal Processing* (Wiley, 1997)
  - » Proakis, J. G. e D. G. Manolakis, *Introduction to Digital Signal Processing*, Macmillan, 1988)
  - » Oppenheim, A. V. e R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, segunda edição (Prentice Hall, 1999)
  - » Jackson, L. B., *Digital Filters and Signal Processing*, terceira edição (Kluwer, 1996)
  - » Roberts, R.A. e C. T. Mullis, *Digital Signal Processing* (Addison-Wesley, 1987)
2. Em aplicações de computação numérica, normalmente a DTFS é denominada transformada discreta de Fourier, ou DFT. Optamos por manter a terminologia DTFS por consistência e para evitar confusão com a DTFT.
3. A redescoberta do algoritmo FFT para avaliar a DTFS é atribuída a J. W. Cooley e a J. W. Tukey por sua publicação em 1965 "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Mat. Comput.*, vol. 19, pp. 297-301. Este texto acelerou muito o desenvolvimento de um campo chamado processamento digital de sinais, que estava em sua infância em meados da década de 60. A disponibilidade de um algoritmo rápido para computar a DTFS abriu um número enorme de novas publicações para processamento digital de sinais e resultou num crescimento explosivo deste novo campo. De fato, a maior parte deste capítulo e uma parte substancial do Capítulo 8 preocupam-se com o campo do processamento digital de sinais. Carl Friederick Gauss, o eminentíssimo matemático alemão, recebeu o crédito por desenvolver um algoritmo eficiente equivalente para computar os coeficientes da DTFS no início de 1805, precedendo a obra de Joseph Fourier sobre análise harmônica. Leituras adicionais sobre a história da FFT e seu impacto sobre o processamento digital de sinais são encontradas nos seguintes artigos:
  - » M. T. Heideman, D. H. Johnson e C. S. Burrus, "Gauss and the history of the fast Fourier transform," *IEEE ASSP Magazine*, vol. 1, no. 4, pp. 14-21, outubro de 1984.
  - » J. W. Cooley, "How the FFT gained acceptance," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 9, no. 1, pp. 10-13, janeiro de 1992.

## PROBLEMAS

- 4.1 Esboce a resposta em freqüência dos sistemas descritos pelas seguintes respostas ao impulso. Caracterize cada sistema como passa-baixas, passagem de faixa ou passa-altas.
- (a)  $h(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$
  - (b)  $h(t) = 4e^{-2t} \cos(20t)u(t)$
  - (c)  $h[n] = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^n u[n]$
  - (d)  $h[n] = \begin{cases} (-1)^n, & |n| \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- 4.2 Encontre a resposta em freqüência e a resposta ao impulso dos sistemas que têm a saída  $y(t)$  ou  $y[n]$  para a entrada  $x(t)$  ou  $x[n]$ .
- (a)  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $y(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$
  - (b)  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ ,  $y(t) = e^{-3(t-2)}u(t-2)$
  - (c)  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ,  $y(t) = 2te^{-2t}u(t)$
  - (d)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ,  $y[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$
  - (e)  $x[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ,  
 $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$

- 4.3 Determine a resposta em freqüência e a resposta ao impulso dos sistemas descritos pelas seguintes equações diferenciais e de diferenças.

$$(a) \frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

$$(b) \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -\frac{d}{dt}x(t)$$

$$(c) y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n] - \frac{3}{4}x[n-1]$$

$$(d) y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$$

- 4.4 Determine as descrições por equação diferencial e de diferenças para os sistemas que têm as seguintes respostas ao impulso:

$$(a) h(t) = \frac{1}{a}e^{-t/a}u(t)$$

$$(b) h(t) = 2e^{-2t}u(t) - 2te^{-2t}u(t)$$

$$(c) h[n] = \alpha^n u[n], |\alpha| < 1$$

$$(d) h[n] = \delta[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (-1/2)^n u[n]$$

- 4.5 Determine as descrições por equação diferencial e de diferenças para os sistemas que têm as seguintes respostas ao impulso:

$$(a) H(j\omega) = \frac{2 + 3j\omega - 3(j\omega)^2}{1 + 2j\omega}$$

$$(b) H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{-\omega^2 - 4}$$

$$(c) H(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 1)}$$

$$(d) H(e^{j\Omega}) = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{e^{-j2\Omega} + 3}$$

$$(e) H(e^{j\Omega}) = 1 + \frac{e^{-j\Omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$

- 4.6 Determine a resposta em freqüência, a resposta ao impulso e as descrições por equação diferencial dos sistemas de tempo contínuo descritos pelas seguintes descrições por variáveis de estado:

$$(a) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, D = [0]$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = [0]$$

- 4.7 Determine a resposta em freqüência, a resposta ao impulso e as descrições por equação de diferenças dos sistemas de tempo discreto descritos pelas seguintes descrições por variáveis de estado:

$$(a) A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = [1]$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = [0]$$

- 4.8 Um sistema de tempo contínuo é descrito pela descrição por variáveis de estado

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

Transforme o vetor de estado associado com este sistema usando a matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para encontrar uma nova descrição por variáveis de estado do sistema. Mostre que as respostas em freqüência dos sistemas transformado e original são iguais.

- 4.9 Encontre as representações por FT dos seguintes sinais periódicos. Esboce os espectros de magnitude e fase.

$$(a) x(t) = 2 \operatorname{sen}(\pi t) + \cos(2\pi t)$$

$$(b) x(t) = \sum_{k=0}^4 [(-1)^k / 2k] \cos((2k+1)\pi t)$$

$$(c) x(t) = |\operatorname{sen}(\pi t)|$$

$$(d) x(t) \text{ conforme é descrito na Fig. P4.9(a)}$$

$$(e) x(t) \text{ conforme é descrito na Fig. P4.9(b).}$$

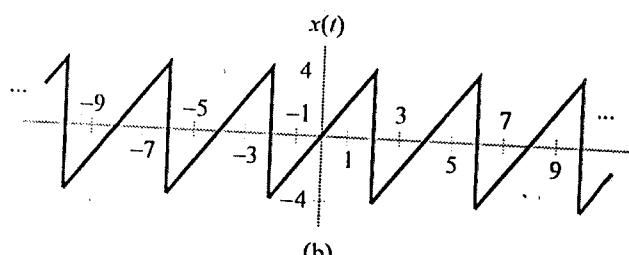
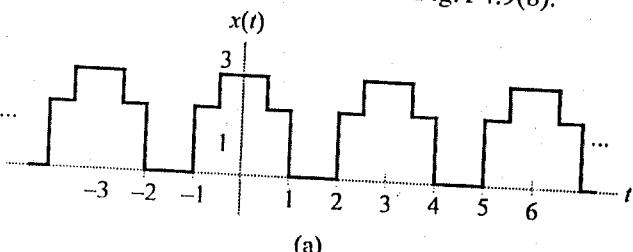


FIGURA P4.9

- 4.10 Encontre as representações por DTFT dos seguintes sinais periódicos. Esboce os espectros de magnitude e fase.

  - $x[n] = \cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/5)$
  - $x[n] = 1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(\pi m/2) \delta[n-m]$
  - $x[n]$  conforme é descrito na Figura P4.10(a)
  - $x[n]$  conforme é descrito na Figura P4.10(b)
  - $x[n]$  conforme é descrito na Figura P4.10(c)

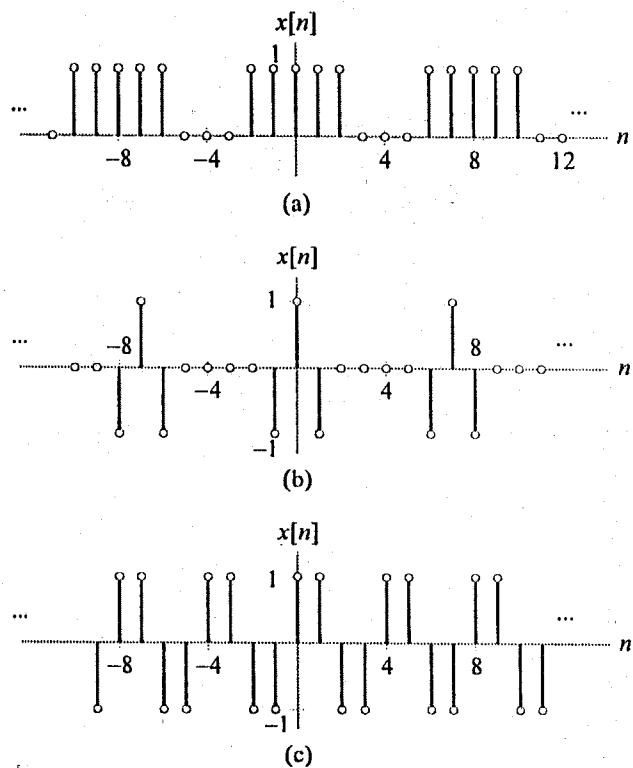


FIGURA P4.10

- #### 4.11 Um sistema LTI tem resposta ao impulso

$$h(t) = 2 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cos(4\pi t)$$

Use a FT para determinar a saída do sistema se a entrada for:

- (a)  $x(t) = 1 + \cos(\pi t) + \sin(4\pi t)$

(b)  $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m)$

(c)  $x(t)$  conforme é descrito na Figura P4.11(a)

(d)  $x(t)$  conforme é descrito na Figura P4.11(b)

(e)  $x(t)$  conforme é descrito na Figura P4.11(c)

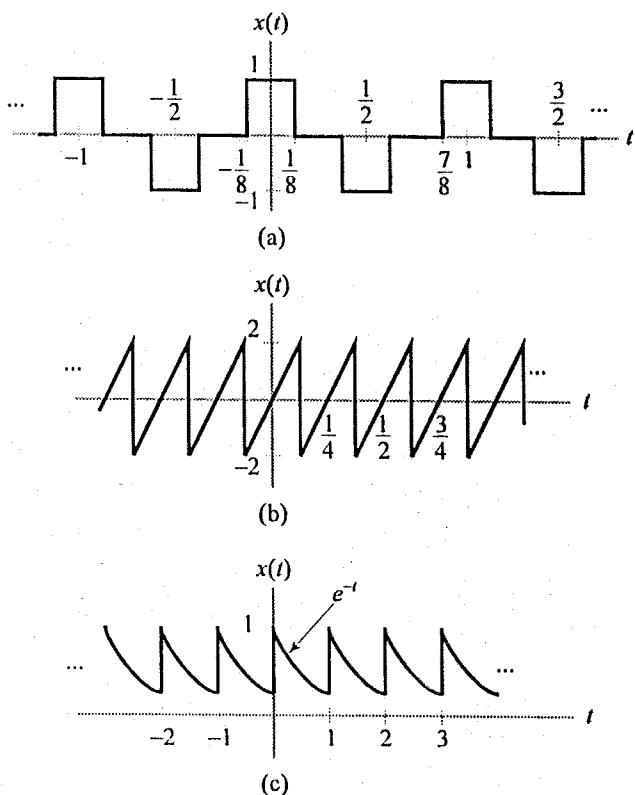


FIGURA P4.11

- 4.12 Podemos projetar uma fonte de energia dc colocando em cascata um retificador de onda completa e um circuito *RC* conforme descreve a Fig. P4.12. A saída do retificador de onda completa é dada por

$$g(t) = |x(t)|$$

Admitamos que  $H(j\omega) = Y(j\omega) / G(j\omega)$  seja a resposta em freqüência do circuito  $RC$ .

- (a) Mostre que

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

- (b) Suponhamos que a entrada seja  $x(t) = \cos(120\pi t)$

  - Encontre a representação por FT para  $g(t)$ .
  - Encontre a representação por FT para  $y(t)$ .
  - Encontre a faixa para a constante de tempo  $RC$  tal que a primeira harmônica da onda em  $y(t)$  seja inferior a 1% do valor médio.

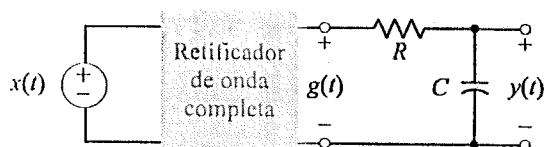


FIGURA P4.12

- 4.13 Considere o sistema descrito na Figura P4.13(a). A FT do sinal de entrada é descrito na Fig. 4.13(b). Admitamos que  $g(t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega)$  e  $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega)$ .

Esboce  $G(j\omega)$  e  $Y(j\omega)$  para os seguintes casos:

(a)  $w(t) = \cos(5\pi t)$  e  $h(t) = \frac{\sin(6\pi t)}{\pi t}$

(b)  $w(t) = \cos(5\pi t)$  e  $h(t) = \frac{\sin(5\pi t)}{\pi t}$

(c)  $w(t)$  conforme é descrito na Figura P4.13(c) e  $h(t) = 2 \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \cos(5\pi t)$

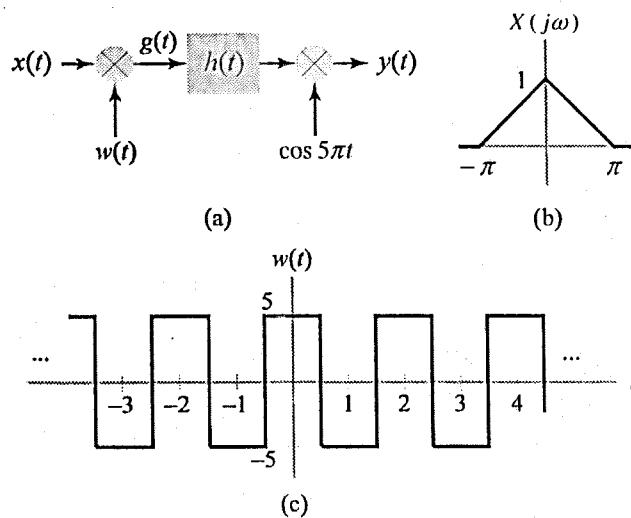


FIGURA P4.13

- 4.14 Considere o sistema descrito na Figura P4.14. A resposta ao impulso  $h(t)$  é dada por

$$h(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$$

e temos

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k4\pi t)$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{10} \cos(k8\pi t)$$

Use a FT para determinar  $y(t)$ .

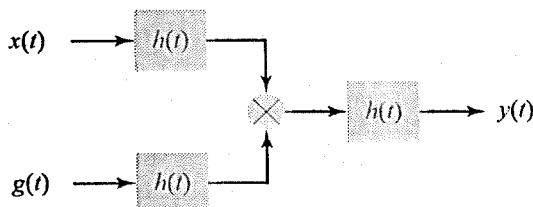


FIGURA P4.14

- 4.15 A entrada para um sistema de tempo discreto é dada por

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

Use a DTFT para encontrar a saída do sistema,  $y[n]$ , se a resposta ao impulso for dada por

(a)  $h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}$

(b)  $h[n] = (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}$

(c)  $h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n}$

- 4.16 Considere o sistema de tempo discreto descrito na Figura P4.16. Suponhamos que  $h[n] = [\sin(\pi n/2)]/\pi n$ . Use a DTFT para determinar a saída,  $y[n]$ , para os casos seguintes. Esboce também  $G(e^{j\Omega})$ , a DTFT de  $g[n]$ .

(a)  $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}, w[n] = (-1)^n$

(b)  $x[n] = \delta[n] - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}, w[n] = (-1)^n$

(c)  $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}, w[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

(d)  $x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right), w[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

$$w[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

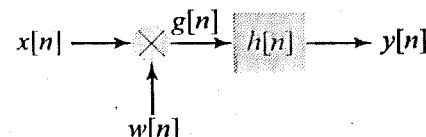


FIGURA P4.16

- 4.17 Determine e esboce a representação por FT,  $X_\delta(j\omega)$ , para os seguintes sinais de tempo discreto. O intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$  é dado para cada caso.

(a)  $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}, \mathcal{T} = 1$

(b)  $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}, \mathcal{T} = \frac{1}{4}$

(c)  $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}, \mathcal{T} = 2$

(d)  $x[n]$  descrito na Figura P4.10(a) com  $\mathcal{T} = 4$ .

(e)  $x[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta[n-4p], \mathcal{T} = \frac{1}{8}$

- 4.25 Admitamos que  $|X(j\omega)| = 0$  para  $|\omega| > \omega_m$ . Forme o sinal  $y(t) = x(t) [\cos(2\pi t) + \sin(10\pi t)]$ . Determine o valor máximo de  $\omega_m$  para o qual  $x(t)$  pode ser reconstruído a partir de  $y(t)$  e especifique um sistema que execute a reconstrução.

- \*4.26 Um sinal limitado em faixa  $x(t)$  satisfaz  $|X(j\omega)| = 0$  para  $|\omega| < \omega_1$  e  $|\omega| > \omega_2$ . Suponhamos que  $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$ . Neste caso, podemos amostrar  $x(t)$  numa taxa menor do que aquela indicada pelo teorema da amostragem e ainda realizarmos uma reconstrução perfeita usando um filtro de reconstrução com passa-faixa  $H_r(j\omega)$ . Admitamos que  $x[n] = x(nT)$ . Determine o intervalo de amostragem máximo  $T$  de forma que  $x(t)$  possa ser perfeitamente reconstruído a partir de  $x[n]$ . Esboce a resposta em freqüência do filtro de reconstrução necessária para este caso.

- \*4.27 Suponhamos que um sinal periódico  $x(t)$  tenha os coeficientes da FS

$$X[k] = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^k, & |k| \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O período deste sinal é  $T = 1$ .

- (a) Determine o intervalo de amostragem mínimo para este sinal que impedirá o aliasing.  
 (b) As restrições do teorema da amostragem podem ser relaxadas um pouco no caso de sinais periódicos se permitirmos que o sinal reconstruído seja uma versão diferente em escala de tempo do sinal original. Suponhamos que escolhemos um intervalo de amostragem  $T = \frac{20}{19}$  e que usemos um filtro de reconstrução

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Mostre que o sinal reconstruído é uma versão de  $x(t)$  em escala diferente de tempo e identifique o fator de mudança de escala.

- (c) Encontre as restrições sobre o intervalo de amostragem  $T$  de forma que o uso de  $H_r(j\omega)$  em (b) resulte no filtro de reconstrução ser uma versão de  $x(t)$  em escala diferente de tempo e determine a relação entre o fator de mudança de escala e  $T$ .

- 4.28 Um sistema de reconstrução consiste num retentor de ordem zero seguido de um filtro anti-imagem de tempo contínuo com resposta em freqüência  $H_c(j\omega)$ . O sinal original  $x(t)$  é limitado em faixa a  $\omega_m$ , ou seja,  $X(j\omega) = 0$  para  $|\omega| > \omega_m$ , e é amostrado com um intervalo de amostragem  $T$ . Determine as restrições sobre a resposta em módulo do filtro anti-imagem de forma que a resposta em módulo global deste sistema de reconstrução esteja entre 0,99 e 1,01 na faixa de passagem do sinal e seja inferior a  $10^{-4}$  para as imagens do espectro de sinal para os seguintes valores:

- (a)  $\omega_m = 10\pi, T = 0,08$   
 (b)  $\omega_m = 10\pi, T = 0,05$   
 (c)  $\omega_m = 10\pi, T = 0,01$   
 (d)  $\omega_m = 2\pi, T = 0,08$

- \*4.29 Neste problema, reconstruímos um sinal  $x(t)$  a partir de suas amostras  $x[n] = x(nT)$  usando pulsos de largura menor que  $T$  seguidos de um filtro anti-imagem com resposta em freqüência  $H_c(j\omega)$ . Especificamente, aplicamos

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_p(t-nT)$$

ao filtro anti-imagem, em que  $h_p(t)$  é um pulso de largura  $T_o$ , como descreve a Figura P4.29(a). Um exemplo de  $x_p(t)$  é descrito na Figura P4.29(b). Determine as restrições sobre  $|H_c(j\omega)|$  de forma que a resposta em módulo global deste sistema de reconstrução esteja entre 0,99 e 1,01 na faixa de passagem do sinal e seja inferior a  $10^{-4}$  para as imagens do espectro de sinal para os valores seguintes. Suponha que  $x(t)$  seja limitado em faixa a  $10\pi$ , ou seja,  $X(j\omega) = 0$  para  $|\omega| > 10\pi$ .

- (a)  $T = 0,08, T_o = 0,04$   
 (b)  $T = 0,08, T_o = 0,02$   
 (c)  $T = 0,04, T_o = 0,02$   
 (d)  $T = 0,04, T_o = 0,01$

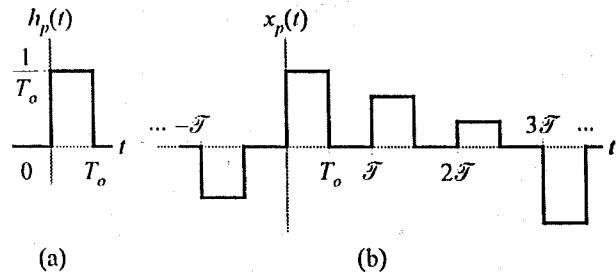


FIGURA P4.29

- 4.30 O retentor de ordem zero produz uma aproximação em degrau do sinal amostrado  $x(t)$  a partir das amostras  $x[n] = x(nT)$ . Um dispositivo denominado retentor de primeira ordem\* interpola linearmente as amostras  $x[n]$  e, dessa forma, produz uma aproximação mais suave de  $x(t)$ . A saída do retentor de primeira ordem pode ser descrita como

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_1(t-nT)$$

em que  $h_1(t)$  é o pulso triangular mostrado na Figura P4.30(a). A relação entre  $x[n]$  e  $x_1(t)$  é descrita na Figura P4.30(b).

- (a) Identifique as distorções introduzidas pelo retentor de primeira ordem e compare-as com aquelas introduzidas pelo retentor de ordem zero. Sugestão:  $h_1(t) = h_o(t) * h_o(t)$ .

\* N. de R.T.: Também conhecido por interpolador de primeira ordem.

- (b) Considere um sistema de reconstrução que consiste num retentor de primeira ordem seguido de um filtro antiimagem com resposta em freqüência  $H_c(j\omega)$ . Encontre  $H_c(j\omega)$  de forma que a reconstrução perfeita seja obtida.

- (c) Determine as restrições de  $|H_c(j\omega)|$  de forma que a resposta em módulo global deste sistema de reconstrução esteja entre 0,99 e 1,01 na faixa de passagem do sinal e seja inferior a  $10^{-4}$  para as imagens do espectro de sinal para os valores seguintes. Suponhamos que  $x(t)$  seja limitado em faixa a  $10\pi$ , ou seja,  $X(j\omega) = 0$  para  $|\omega| > 10\pi$ .

- (i)  $\mathcal{T} = 0,08$   
(ii)  $\mathcal{T} = 0,04$

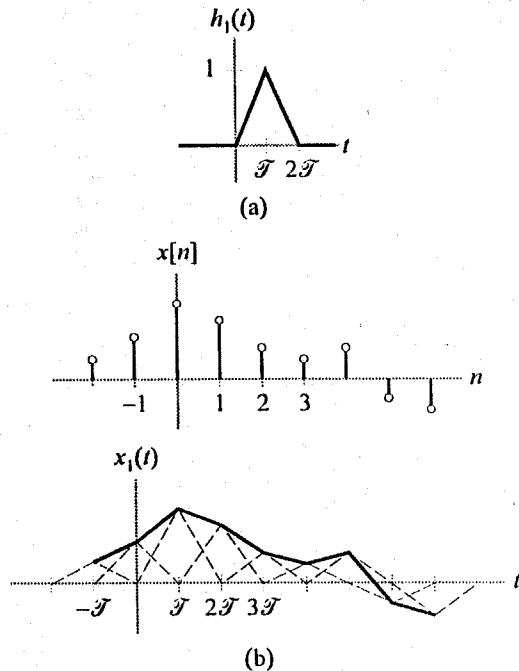


FIGURA P4.30

- \*4.31 Uma operação de amostragem não ideal obtém  $x[n]$  a partir  $x(t)$  como

$$x[n] = \int_{(n-1)\mathcal{T}}^{n\mathcal{T}} x(t) dt$$

- (a) Mostre que isto pode ser escrito como uma amostragem ideal de um sinal filtrado  $y(t) = x(t) * h(t)$ , ou seja,  $x[n] = y(n\mathcal{T})$ , e encontre  $h(t)$ .  
(b) Expresse a FT de  $x[n]$  em termos de  $X(j\omega)$ ,  $H(j\omega)$  e  $\mathcal{T}$ .  
(c) Suponhamos que  $x(t)$  seja limitado em faixa à faixa de freqüência  $|\omega| < 3\pi/(4\mathcal{T})$ . Determine a resposta em freqüência de um sistema de tempo discreto que corrija a distorção em  $x[n]$  introduzida pela amostragem não ideal.

- \*4.32 O sistema descrito na Figura P4.32(a) converte um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  num sinal de tempo discreto  $y[n]$ . Temos

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi/4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre a freqüência de amostragem  $\omega_s = 2\pi/\mathcal{T}$  e as restrições sobre a resposta em freqüência do filtro anti-aliasing  $H_a(j\omega)$  de forma que um sinal de entrada com a FT  $X(j\omega)$  mostrada na Figura P4.32(b) resulte no sinal de saída com a DTFT  $Y(e^{j\Omega})$ .

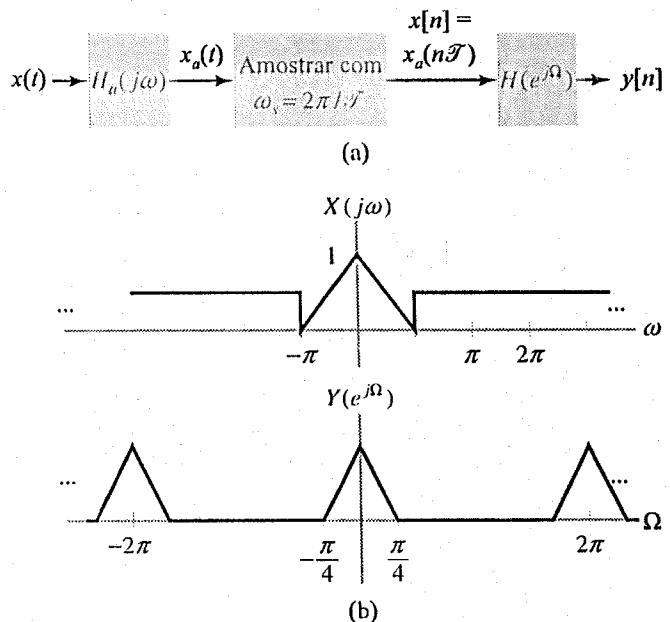


FIGURA P4.32

- \*4.33 Determine o fator  $q$  máximo pelo qual um  $x[n]$  com DTFT  $X(e^{j\Omega})$  descrita na Figura P4.33 possa ser decimado sem aliasing. Esboce a DTFT da seqüência resultante quando  $x[n]$  é decimado com este valor.

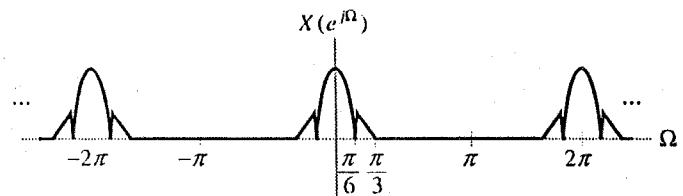


FIGURA P4.33

- \*4.34 O sinal de tempo discreto  $x[n]$  com a DTFT  $X(e^{j\Omega})$  mostrada na Figura P4.34(a) é decimado passando primeiro  $x[n]$  pelo filtro que tem a resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  mostrada na Figura P4.34(b) e então subamostrando por um fator de  $q$ . Para os seguintes valores de  $q$  e  $W$ , determine o valor mínimo de  $\Omega_p$  e o valor máximo de  $\Omega_s$  de forma que a operação de subamostragem não mude a forma da parte de  $X(e^{j\Omega})$  em  $|\Omega| < W$ . Esboce a DTFT do sinal subamostrado.

- (a)  $q = 2, W = \pi/3$   
(b)  $q = 2, W = \pi/4$   
(c)  $q = 3, W = \pi/4$

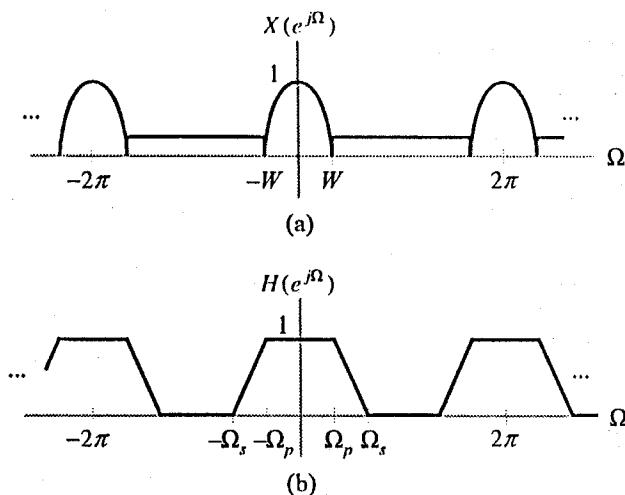


FIGURA P4.34

\*4.35 Um sinal  $x[n]$  é interpolado com um fator de  $q$  inserindo primeiro  $q-1$  zeros entre cada amostra e em seguida passando a seqüência preenchida com zeros através de um filtro que tem a resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  descrita na Figura P4.34(b). A DTFT de  $x[n]$  é descrita na Figura P4.35. Determine o valor mínimo de  $\Omega_p$  e o valor máximo de  $\Omega_x$  de forma que seja obtida a interpolação ideal para os casos seguintes. Esboce também a DTFT do sinal interpolado.

- (a)  $q = 2, W = \pi/2$
- (b)  $q = 2, W = 3\pi/4$
- (c)  $q = 3, W = 3\pi/4$

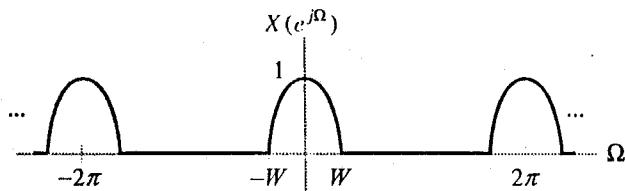


FIGURA P4.35

\*4.36 Considere interpolar um sinal  $x[n]$  repetindo cada valor  $q$  vezes, como descreve a Figura P4.36. Ou seja, definimos  $x_q[n] = x[\text{floor}(n/q)]$ , em que  $\text{floor}(w)$ \* é o maior número inteiro menor ou igual a  $w$ . Admitindo que  $x_z[n]$  seja derivado de  $x[n]$  ao inserir  $q-1$  zeros entre cada valor de  $x[n]$ , ou seja,

$$x_z[n] = \begin{cases} x[n/q] & n/q \text{ inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

podemos escrever  $x_o[n] = x_z[n] * h_o[n]$ , em que

$$h_o[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq q-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe que isto é o análogo em tempo discreto do retentor de ordem zero. O processo de interpolação é concluído passando-se  $x_o[n]$  através de um filtro que tem resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$ .

- (a) Expresse  $X_o(e^{j\Omega})$  em termos de  $X(e^{j\Omega})$  e  $H_o(e^{j\Omega})$ . Esboce  $|X_o(e^{j\Omega})|$  se  $x[n] = [\sin(3\pi n/4)]/(\pi n)$ .
- (b) Suponhamos que  $X(e^{j\Omega})$  seja como mostra a Figura P4.35. Especifique as restrições sobre  $H(e^{j\Omega})$  de forma que seja obtida interpolação ideal para os seguintes casos:

- (i)  $q = 2, W = 3\pi/4$
- (ii)  $q = 4, W = 3\pi/4$

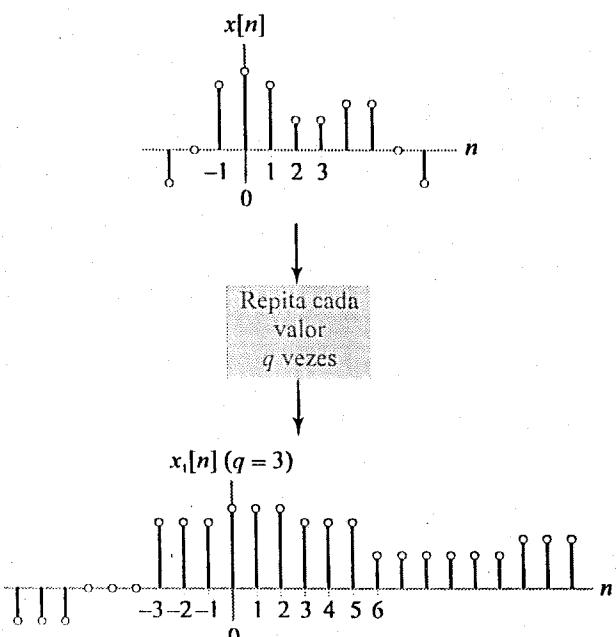


FIGURA P4.36

4.37 Um sistema de tempo discreto para processar sinais de tempo contínuo é mostrado na Figura P4.37. Esboce o módulo da resposta em freqüência de um sistema de tempo contínuo equivalente para os seguintes casos:

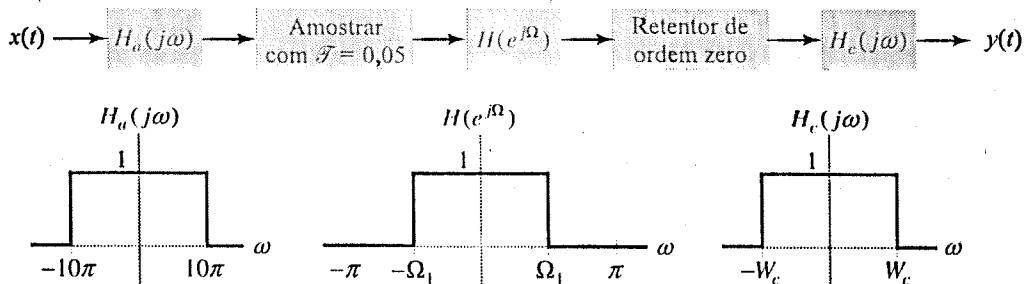


FIGURA P4.37

\*N. R.T.: Alusão à chão (floor) em inglês.

- (a)  $\Omega_1 = \pi/4$ ,  $W_c = 20\pi$   
 (b)  $\Omega_1 = 3\pi/4$ ,  $W_c = 20\pi$   
 (c)  $\Omega_1 = \pi/4$ ,  $W_c = 2\pi$

\*4.38 O sistema mostrado na Figura P4.38 é usado para implementar um filtro de faixa de passagem. O filtro de tempo discreto  $H(e^{j\Omega})$  tem resposta em freqüência  $-\pi < \Omega \leq \pi$

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & \Omega_a \leq |\Omega| \leq \Omega_b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre o intervalo de amostragem  $\tilde{T}$ ,  $\Omega_a$ ,  $\Omega_b$ ,  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  e  $W_4$ , de forma que a resposta em freqüência de tempo contínuo equivalente  $G(j\omega)$  satisfaça

$$0.9 < |G(j\omega)| < 1.1 \quad \text{para } 100\pi < \omega < 200\pi$$

$$G(j\omega) = 0 \quad \text{para outros casos}$$

Para resolver este problema, escolha  $W_1$  e  $W_3$  os menores possíveis e escolha  $\tilde{T}$ ,  $W_2$  e  $W_4$  os maiores possíveis.

- 4.39 Admitamos que  $X(e^{j\Omega}) = \operatorname{sen}(11\Omega/2)/\operatorname{sen}(\Omega/2)$  e defina  $\tilde{X}[k] = X(e^{jk\Omega_a})$ . Encontre e esboce  $\tilde{x}[n]$ , em que  $\tilde{x}[n] \xleftarrow[\Omega_a]{DTFS} \tilde{X}[k]$  para os seguintes valores de  $\Omega_a$ :
- (a)  $\Omega_a = 2\pi/15$   
 (b)  $\Omega_a = \pi/10$   
 (c)  $\Omega_a = \pi/3$

- 4.40 Admitamos que  $X(j\omega) = [\operatorname{sen}(2\omega)]/\omega$  e defina  $\tilde{X}[k] = X(jk\omega_a)$ . Encontre e esboce  $\tilde{x}(t)$ , em que  $\tilde{x}(t) \xleftarrow[\omega_a]{FS} \tilde{X}[k]$  para os seguintes valores de  $\omega_a$ :
- (a)  $\omega_a = \pi/8$   
 (b)  $\omega_a = \pi/4$   
 (c)  $\omega_a = \pi/2$

- \*4.41 A representação em tempo contínuo de um sinal periódico de tempo discreto  $x[n] \xleftarrow[DTFS; 2\pi/\tilde{T}]{ } X[k]$  é periódica e, dessa forma, tem uma representação com FS. Esta representação com FS é uma função dos coeficientes  $X[k]$  da DTFS, como mostramos neste problema. O resultado estabelece a relação entre as representa-

ções com FS e DTFS. Admitamos que  $x[n]$  tenha período  $N$  e admitamos que  $x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - n\tilde{T})$ .

- (a) Mostre que  $x_\delta(t)$  é periódico e encontre o período,  $T$ .
- (b) Inicie com a definição dos coeficientes da FS

$$X_\delta[k] = \frac{1}{T} \int_{(T)} x_\delta(t) e^{-jk\omega_o t} dt$$

Substitua  $T$ ,  $\omega_o$  e um período de  $x_\delta(t)$  para mostrar que

$$X_\delta[k] = \frac{1}{\tilde{T}} X[k]$$

- 4.42 Um sinal  $x(t)$  é amostrado em intervalos de  $\tilde{T} = 0,01$ . Cem amostras são coletadas e uma DTFS de 200 pontos é tomada, numa tentativa de aproximar  $X(j\omega)$ . Suponhamos que  $|X(j\omega)| \approx 0$  para  $|\omega| > 120\pi$ . Determine a faixa de freqüência  $-\omega_a < \omega < \omega_a$  na qual a DTFS oferece uma aproximação razoável de  $X(j\omega)$ , a resolução efetiva desta aproximação,  $\omega_r$ , e o intervalo de freqüência entre cada coeficiente da DTFS,  $\Delta\omega$ .

### Experiências no Computador

- 4.43 Use o comando do MATLAB `freqs` ou `freqz` para plotar a resposta em módulo dos sistemas seguintes. Determine se o sistema tem uma característica passa-baixas, passa-altas ou passagem de faixa.

$$(a) H(j\omega) = \frac{8}{(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 8j\omega + 8}$$

$$(b) H(j\omega) = \frac{(j\omega)^3}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$$

$$(c) H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 3e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega}}{6 + 2e^{-j2\Omega}}$$

$$(d) H(e^{j\Omega}) = H_1(e^{j\Omega}) H_2(e^{j\Omega})$$

em que

$$H_1(e^{j\Omega}) = \frac{0,02426(1 - e^{-j\Omega})^2}{(1 + 1,10416e^{-j\Omega} + 0,4019e^{-j2\Omega})}$$

$$H_2(e^{j\Omega}) = \frac{(1 - e^{-j\Omega})^2}{(1 + 0,56616e^{-j\Omega} + 0,7657e^{-j2\Omega})}$$

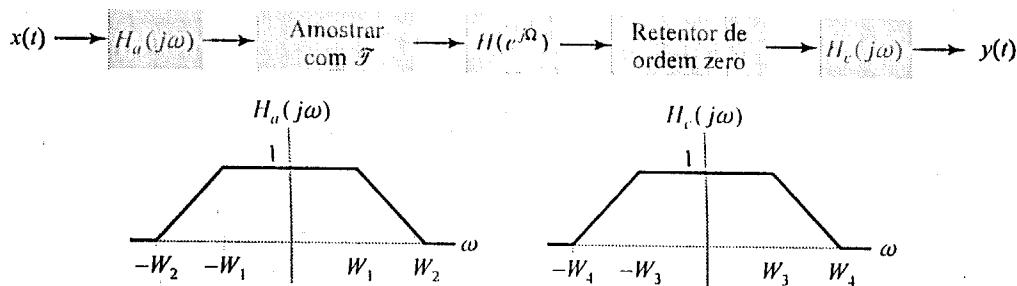


FIGURA P4.38

- 4.44 Use o comando do MATLAB `freqresp` para plotar a resposta em módulo e a resposta em fase dos sistemas que têm as descrições por variáveis de estado dadas no Problema 4.6 e 4.7.
- 4.45 Repita o Exemplo 4.11 usando preenchimento com zeros e os comandos do MATLAB `fft` e `fftshift` para amostrar e plotar  $|Y(e^{j\Omega})|$  em 512 pontos em  $-\pi \leq \Omega < \pi$  para cada caso.

- 4.46 A janela retangular é definida como

$$w_r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos truncar um sinal para dentro de  $0 \leq n \leq M$  multiplicando o sinal por  $w[n]$ . No domínio de freqüência, fazemos a convolução da DTFT do sinal com

$$W_r(e^{j\Omega}) = e^{-j(M/2)\Omega} \frac{\sin\left(\frac{\Omega(M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

O efeito desta convolução é espalhar os detalhes e introduzir ondulações nas vizinhanças das descontinuidades. O espalhamento é proporcional à largura do lóbulo principal, enquanto a ondulação é proporcional ao tamanho dos lóbulos laterais. Uma variedade de janelas alternativas é usada na prática para reduzir a altura do lóbulo lateral em troca de um aumento na largura do lóbulo principal. Neste problema, avaliamos o efeito de ajanelar sinais de domínio de tempo em sua DTFT. O papel do ajanelamento no projeto de filtro será explorado no capítulo 8.

A janela de Hanning é definida como

$$w_h[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5\cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Suponha que  $M = 50$  e use o comando `fft` do MATLAB para avaliar o espectro de magnitude da janela retangular em dB em intervalos de freqüência de  $\pi/50, \pi/100$  e  $\pi/200$ .
- (b) Suponha que  $M = 50$  e use o comando `fft` do MATLAB para avaliar o espectro de magnitude da janela de Hanning em dB em intervalos de freqüência de  $\pi/50, \pi/100$  e  $\pi/200$ .
- (c) Use os resultados de (a) e (b) para avaliar a largura do lóbulo principal e a altura do lóbulo lateral do pico em dB para cada janela.
- (d) Admitamos que  $y_r[n] = x[n]w_r[n]$  e  $y_h[n] = x[n]w_h[n]$ , em que  $x[n] = \cos(26\pi n/100) + \cos(29\pi n/100)$  e  $M = 50$ . Use o comando `fft` do MATLAB para avaliar  $|Y_r(e^{j\Omega})|$  em dB e  $|Y_h(e^{j\Omega})|$  em dB em intervalos de  $\pi/200$ . A escolha da janela afeta se podemos identificar ou não a presença de duas senóides? Por que?

- (e) Admitamos que  $y_r[n] = x[n]w_r[n]$  e  $y_h[n] = x[n]w_h[n]$ , em que  $x[n] = \cos(26\pi n/100) + 0,02\cos(51\pi n/100)$  e  $M = 50$ . Use o comando `fft` do MATLAB para avaliar  $|Y_r(e^{j\Omega})|$  em dB e  $|Y_h(e^{j\Omega})|$  em dB em intervalos de  $\pi/200$ . A escolha da janela afeta se podemos ou não identificar a presença de duas senóides? Por que?

- 4.47 Admitamos que o sinal de tempo discreto  $x[n]$  seja definido como

$$x[n] = \begin{cases} e^{-(0,1n)^2/2}, & |n| \leq 50 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Use os comandos do MATLAB `fft` e `fftshift` para numericamente avaliar e plotar a DTFT de  $x[n]$  e os seguintes sinais subamostrados em 500 valores de  $\Omega$  no intervalo  $-\pi \leq \Omega < \pi$ .

- (a)  $y[n] = x[2n]$   
 (b)  $g[n] = x[4n]$

- 4.48 Repita o Problema 4.47 supondo que

$$x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n/2)e^{-(0,1n)^2/2}, & |n| \leq 50 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- 4.49 Um sinal  $x(t)$  é definido como

$$x(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)e^{-t^2/2}$$

- (a) Calcule a FT  $X(j\omega)$  e mostre que  $|X(j\omega)| \approx 0$  para  $|\omega| > 3\pi$ .

Nas partes (b) - (d), compararemos  $X(j\omega)$  com a FT do sinal amostrado,  $x[n] = x(nT)$ , para diversos intervalos de amostragem. Admitamos que  $x[n] \xrightarrow{FT} X_\delta(j\omega)$  seja a FT da versão amostrada de  $x(t)$ . Use o MATLAB para determinar numericamente  $X_\delta(j\omega)$  calculando

$$X_\delta(j\omega) = \sum_{n=-25}^{25} x[n]e^{-j\omega nT}$$

em 500 valores de  $\omega$  no intervalo  $-3\pi \leq \omega < 3\pi$ . Em cada caso, compare  $X(j\omega)$  e  $X_\delta(j\omega)$  e explique as diferenças.

- (b)  $T = \frac{1}{3}$   
 (c)  $T = \frac{2}{5}$   
 (d)  $T = \frac{1}{2}$

- 4.50 Use o comando do MATLAB `fft` para repetir o Exemplo 4.16.

- 4.51 Use o comando do MATLAB `fft` para repetir o Exemplo 4.17.

- 4.52 Use o comando do MATLAB `fft` para repetir o Exemplo 4.18. Descreva também a aproximação por DTFS e a DTFT subjacente para  $M = 2001$  e  $M = 2005$ .

4.53 Considere a soma de senóides

$$x(t) = \cos(2\pi t) + 2\cos(2\pi(0.8)t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi(1.1)t)$$

Suponhamos que a faixa de freqüência que nos interessa seja  $-5\pi < \omega < 5\pi$ .

- Determine o intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$  de forma que a aproximação por DTFS da FT de  $x(t)$  abranja a faixa de freqüência desejada.
- Determine o número de amostras mínimo  $M_o$  de forma que a aproximação por DTFS consista em impulsos de valores discretos localizados na freqüência correspondente a cada senóide.
- Use o MATLAB para plotar  $(1/M)|Y_\delta(j\omega)|$  e  $|Y[k]|$  para o valor de  $\mathcal{T}$  escolhido na parte (a) e  $M = M_o$ .
- Repita a parte (c) usando  $M = M_o + 5$  e  $M = M_o + 8$ .

4.54 Desejamos usar a DTFS para aproximar a FT de um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  na faixa  $-\omega_a < \omega < \omega_a$  com resolução  $\omega_r$  e um intervalo de amostragem máximo em freqüência de  $\Delta\omega$ . Encontre o intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$ , o número de amostras  $M$  e o tamanho  $N$  da DTFS. Pode-se supor que o sinal seja efetivamente limitado em faixa a uma freqüência  $\omega_m$  para a qual  $|X(j\omega_m)| \geq 10|X(j\omega)|$ ,  $\omega > \omega_m$ . Plote a FT e a aproximação por DTFS para cada um dos casos seguintes usando o comando do MATLAB `fft`. Sugestão: Certifique-se de amostrar os pulsos em (a) e em (b) simetricamente em torno de  $t = 0$ .

$$(a) x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \omega_a = \frac{3\pi}{2},$$

$$\omega_r = \frac{3\pi}{4}, \quad \Delta\omega = \frac{\pi}{8}.$$

$$(b) x(t) = 1/(2\pi)e^{-t^2/2}, \quad \omega_a = 3, \quad \omega_r = \frac{1}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{1}{8}$$

$$(c) x(t) = \cos(20\pi t) + \cos(21\pi t), \quad \omega_a = 40\pi, \quad \omega_r = \pi/3, \quad \Delta\omega = \pi/10$$

(d) Repita o caso (c) usando  $\omega_r = \pi/10$

4.55 Repita o Exemplo 4.19 usando o MATLAB.

4.56 Escreva um M-file para o MATLAB que implementa o método sobrepor e guardar usando o comando `fft` para avaliar a convolução  $y[n] = h[n] * x[n]$  em  $0 \leq n < L$  para os exercícios seguintes:

$$(a) h[n] = \frac{1}{5}(u[n] - u[n-5]), \quad x[n] = \cos(\pi n/6), \quad L = 30$$

$$(b) h[n] = \frac{1}{5}(u[n] - u[n-5]), \quad x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n], \quad L = 20$$

4.57 Trace graficamente a razão entre o número de multiplicações no método direto para computar os coeficientes da DTFS e o da abordagem FFT quando  $N = 2^p$  para  $p = 2, 3, 4, \dots, 16$ .

4.58 Neste problema, compararemos o número de multiplicações necessárias para avaliar  $h[n] * x[n]$  usando o algoritmo sobrepor e guardar com aquele que é necessário para o cálculo direta da soma de convolução quando a resposta ao impulso  $h[n] = 0$  para  $n < 0, n \geq M$ . Para maximizar a eficiência computacional do algoritmo sobrepor e guardar, um algoritmo FFT é usado para avaliar a DTFS no passo 4 e a DTFS inversa na etapa 6.

- Mostre que  $M$  multiplicações são necessárias por ponto de saída se a soma de convolução for avaliada diretamente.
- Para contar as multiplicações por ponto de saída para o algoritmo sobrepor e guardar, somente precisamos considerar as etapas 4, 5 e 6, uma vez que supomos que  $H[k]$  é previamente computado. Mostre que

$$\frac{2N \log_2(N) + N}{N - M + 1}$$

multiplicações por ponto de saída são necessárias.

- Admitamos que  $R$  seja a razão entre as multiplicações necessárias para o cálculo direto da soma de convolução e as do algoritmo sobrepor e guardar. Calcule  $R$  para os seguintes casos:
  - $M = 10; N = 16, 256$  e  $1024$ .
  - $M = 20; N = 32, 256$  e  $1024$ .
  - $M = 100; N = 128, 256$  e  $1024$ .
- Mostre que para  $N \gg M$ , o algoritmo sobrepor e guardar requer menos multiplicações do que o cálculo direto da soma de convolução se  $M > 2 \log_2 N + 1$ .

4.59 Nesta experiência, investigamos o cálculo do produto tempo-largura de faixa usando a DTFS.

Admitamos que  $x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$ .

- Use a aproximação por soma de Riemann para uma integral

$$\int_a^b f(u) du \approx \sum_{m=m_a}^{m_b} f(m\Delta u) \Delta u$$

para mostrar que

$$T_d = \left[ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \right]^{1/2}$$

$$\approx \mathcal{T} \left[ \frac{\sum_{n=-M}^M n^2 |x[n]|^2}{\sum_{n=-M}^M |x[n]|^2} \right]^{1/2}$$

desde que  $x[n] = x(n\mathcal{T})$  represente as amostras de  $x(t)$  e  $x(n\mathcal{T}) = 0$  para  $|n| > M$ .

- (b) Use a aproximação por DTFS da FT e a aproximação por soma de Riemann da integral para mostrar que

$$B_w = \left[ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2}$$

$$\approx \frac{\omega_s}{2M+1} \left[ \frac{\sum_{k=-M}^M |k|^2 |X[k]|^2}{\sum_{k=-M}^M |X[k]|^2} \right]^{1/2}$$

em que  $x[n] \xrightarrow{DTFS; 2\pi/(2M+1)} X[k]$ ,  $\omega_s = 2\pi/\tilde{T}$  é a freqüência de amostragem, e  $X(jk\omega_s/(2M+1)) \approx 0$  para  $|k| > M$ .

- (c) Use os resultados de (a) e (b) e a equação (3.58) para mostrar que o produto tempo - largura de faixa computado, usando-se a aproximação por DTFS, satisfaz

$$T_d B_w = \left[ \frac{\sum_{n=-M}^M n^2 |x[n]|^2}{\sum_{n=-M}^M |x[n]|^2} \right]^{1/2} \left[ \frac{\sum_{n=-M}^M |k|^2 |X[k]|^2}{\sum_{n=-M}^M |X[k]|^2} \right]^{1/2}$$

$$\geq \frac{2M+1}{4\pi}$$

- (d) Repita a Experiência em Computador 3.45 para demonstrar que o limite em (c) é satisfeito e que os pulsos gaussianos satisfazem o limite com igualdade.

# 5

# APLICAÇÕES A SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO



## 5.1 *Introdução*

O propósito de um sistema de comunicação é transportar um sinal com uma mensagem (gerado por uma fonte de informação) através de um canal e entregar uma estimativa desse sinal de mensagem a um usuário. Por exemplo, o sinal de mensagem pode ser um sinal de fala. O canal pode ser um canal de telefone celular ou canal de satélite. Conforme mencionamos no capítulo 1, a modulação é fundamental para a operação de um sistema de comunicação. A modulação constitui o meio para deslocar ou transladar a faixa de freqüências contida no sinal de mensagem para outra faixa de freqüência adequada para a transmissão pelo canal, e um deslocamento de volta para a faixa de freqüência original após a recepção. Formalmente, *modulação* é definida como *o processo através do qual alguma característica de uma onda portadora é variada de acordo com o sinal de mensagem*. O sinal de mensagem é denominado *onda moduladora*, e o resultado do processo de modulação é chamado *onda modulada*. No receptor, é usada a *demodulação* para recuperar o sinal de mensagem da onda modulada. Demodulação é o inverso do processo de modulação.

Neste capítulo, apresentamos um tratamento introdutório da modulação a partir de um ponto de vista teórico, ampliando o que foi exposto sobre a análise de Fourier, conforme foi discutido nos dois capítulos anteriores. Iniciamos a discussão com uma descrição dos tipos básicos de modulação, seguida dos benefícios práticos derivados de seu uso. Isto prepara o cenário para uma discussão da chamada modulação de amplitude, a qual é amplamente usada na prática nas comunicações analógicas em virtude de sua simplicidade. Uma aplicação comum da modulação de amplitude está na rádiodifusão. Discutiremos então algumas importantes variantes da modulação de amplitude. A contraparte da modulação de amplitude que é usada nas comunicações digitais é conhecida como modulação de amplitude de pulso, a qual será discutida na última parte deste capítulo. Na realidade, a modulação de amplitude de pulso é outra manifestação do processo de amostragem que estudamos no Capítulo 4.

## 5.2 *Tipos de Modulação*

O tipo específico de modulação empregado num sistema de comunicação é determinado pela forma da onda portadora usada para executar a modulação. As duas formas de onda portadora mais comumente usadas são:

- Onda senoidal
- Trem de pulsos periódicos

De maneira correspondente, podemos identificar duas classes principais de modulação, como descrevemos aqui:

**1. Modulação de onda contínua (CW<sup>\*</sup>)**

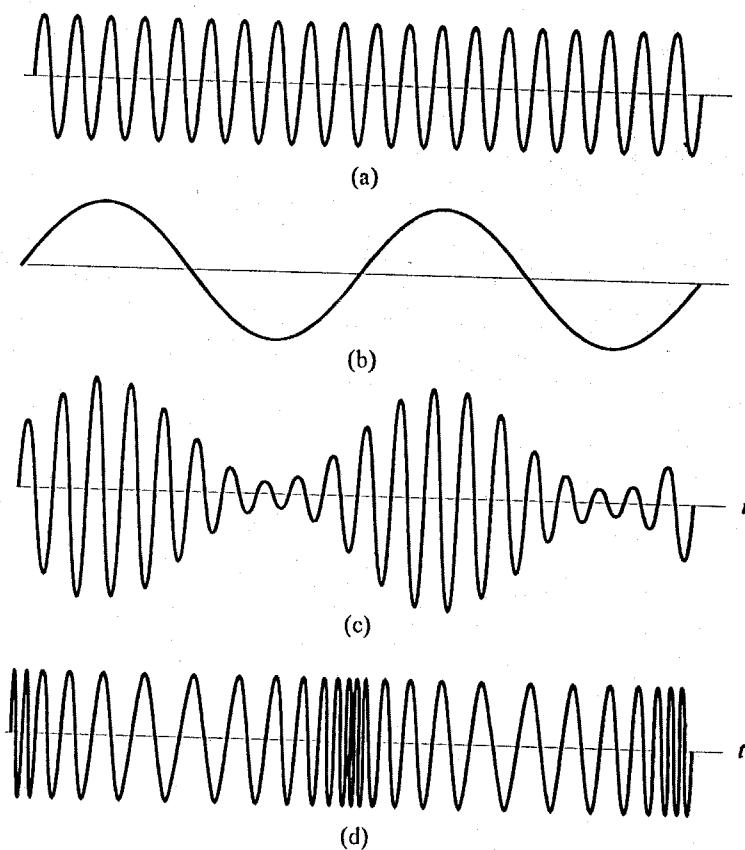
Considere a onda portadora senoidal

$$c(t) = A_c \cos(\phi(t)) \quad (5.1)$$

a qual é definida de modo único pela amplitude da portadora (carrier)  $A_c$  e pelo ângulo  $\phi(t)$ . Dependendo de qual destes parâmetros é escolhido para modulação, podemos identificar duas classes de modulação CW:

- *Modulação de amplitude*, na qual a amplitude da portadora é variada com o sinal de mensagem
- *Modulação angular*, na qual o ângulo da portadora é variado com o sinal de mensagem.

A Figura 5.1 mostra exemplos de ondas moduladas em amplitude e ondas moduladas em ângulo correspondentes a uma onda moduladora senoidal.



**FIGURA 5.1** Ondas moduladas em amplitude e em ângulo correspondentes à modulação senoidal. (a) Onda portadora. (b) Onda moduladora senoidal. (c) Onda modulada em amplitude. (d) Onda modulada em ângulo.

A modulação de amplitude pode, ela própria, ser implementada em diversas formas diferentes. Para determinado sinal de mensagem, o conteúdo de freqüência da onda modulada depende da forma de modulação de amplitude usada. Especificamente, temos:

- Modulação completa de amplitude (portadora de faixa lateral dupla transmitida)
- Modulação de faixa lateral dupla e portadora suprimida.

\* Nota de R.: CW de Continuous Wave.

- » Modulação em faixa lateral simples
- » Modulação em faixa lateral vestigial.

Os três últimos tipos de modulação de amplitude são exemplos de *modulação linear*, em termos de que se a amplitude do sinal de mensagem for multiplicada por um certo fator, a amplitude da onda modulada será alterada exatamente pelo mesmo fator. Neste estrito sentido, a modulação em amplitude total não satisfaz a definição de modulação linear com respeito ao sinal de mensagem, por razões que se tornarão mais claras mais tarde. Todavia, o afastamento da linearidade no caso da modulação completa em amplitude é de um tipo bastante moderado, de tal maneira que muitos dos procedimentos matemáticos aplicáveis à análise da modulação linear podem ser mantidos. O mais importante, a partir de nossa perspectiva atual, é que todas as quatro diferentes formas de modulação de amplitude mencionadas aqui prestam-se à análise matemática que usa as ferramentas apresentadas neste livro. As seções subsequentes deste capítulo desenvolvem os detalhes desta análise.

Em comparação, a modulação angular é um processo de modulação *não linear*. Para descrevê-la de uma maneira formal, precisamos introduzir a noção de *frequência instantânea em radianos*, denotada por  $\omega_i(t)$ . Ela é definida como a derivada do ângulo  $\phi(t)$  com respeito ao tempo  $t$ , como é mostrado por

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (5.2)$$

De modo equivalente, podemos escrever (ignorando a constante de integração)

$$\phi(t) = \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

em que se supõe que o valor inicial

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^0 \omega_i(\tau) d\tau$$

seja zero.

A equação (5.2) inclui a definição usual de frequência em radianos como um caso especial. Considere a forma comum de onda senoidal escrita como

$$c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \theta)$$

em que  $A_c$  é a amplitude,  $\omega_c$  é a frequência em radianos e  $\theta$  é a fase. Para este caso simples, o ângulo  $\phi(t)$  é

$$\phi(t) = \omega_c t + \theta$$

em cujo caso, o uso da equação (5.2) produz o resultado esperado

$$\omega_i(t) = \omega_c t \text{ para todo } t$$

Retornando à definição geral da equação (5.2), quando a frequência instantânea em radianos  $\omega_i(t)$  é variada de acordo com o sinal de mensagem denotado por  $m(t)$ , podemos escrever

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t) \quad (5.4)$$

em que  $k_f$  é o fator ou índice de sensibilidade à frequência do modulador. Conseqüentemente, substituindo a equação (5.4) em (5.3), obtemos

$$\phi(t) = \omega_c t + \int_0^t m(\tau) d\tau$$

A forma resultante de modulação angular é conhecida como *modulação de frequência* (FM\*), escrita como

$$s_{\text{FM}}(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau\right) \quad (5.5)$$

em que a amplitude da portadora é mantida constante.

\* N. de R.T.: FM de Frequency Modulation.

Quando o ângulo  $\phi(t)$  é variado de acordo com o sinal de mensagem  $m(t)$ , podemos escrever

$$\phi(t) = \omega_c t + k_p m(t)$$

em que  $k_p$  é o fator de sensibilidade à fase do modulador. Desta vez, temos uma forma diferente de modulação angular conhecida como *modulação de fase* (PM\*), definida por

$$s_{\text{PM}}(t) = A_c \cos(\omega_c t + k_p m(t)) \quad (5.6)$$

em que a amplitude da portadora é novamente mantida constante.

Não obstante as fórmulas das equações (5.5) e (5.6) para sinais de FM e PM parecerem diferentes, eles são, de fato, intimamente relacionados entre si. Por enquanto, basta dizermos que ambos são funções não lineares do sinal de mensagem  $m(t)$ , o que torna sua análise matemática mais difícil do que a da modulação de amplitude. Uma vez que a ênfase principal neste livro é na análise linear de sinais e sistemas, dedicaremos grande parte da discussão neste capítulo à modulação de amplitude e suas variantes.

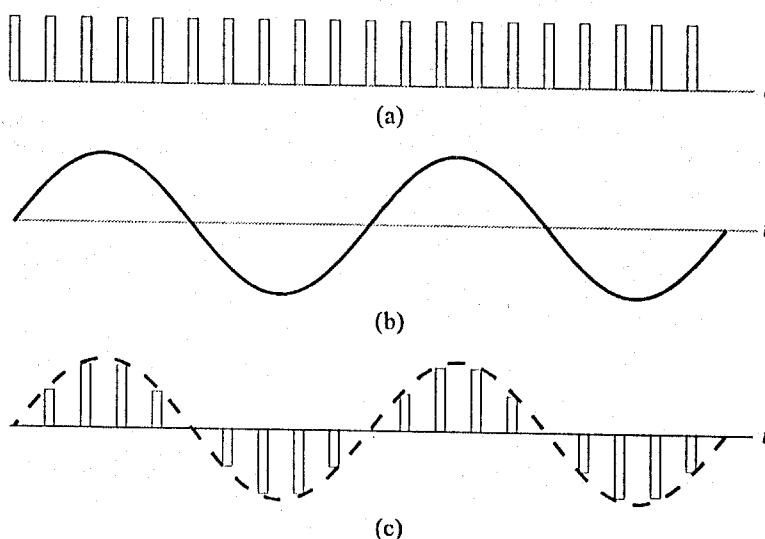
## 2. Modulação de pulso

Considere a seguir uma onda portadora que consiste num trem de pulsos periódicos estreitos, como é mostrado por

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT)$$

em que  $T$  é o período, e  $p(t)$  denota um pulso de duração relativamente curta (em comparação com o período  $T$ ) e centralizado na origem. Quando algum parâmetro característico de  $p(t)$  é variado de acordo com o sinal de mensagem, temos *modulação de pulso*.

A Figura 5.2 mostra um exemplo de modulação de amplitude de pulso para o caso de uma onda moduladora senoidal.



**FIGURA 5.2** Modulação de amplitude de pulso. (a) Trem de pulsos retangulares como onda portadora. (b) Onda moduladora senoidal. (c) Onda modulada em amplitude de pulso.

Dependendo de como a modulação de pulso é de fato realizada, podemos distinguir as duas subclasses seguintes:

- *Modulação de pulso analógica*, na qual um parâmetro característico, como por exemplo a amplitude, duração ou posição de um pulso, é variada continuamente com o sinal de mensagem. Deste modo, falamos de modulação de amplitude de pulso, modulação de duração de

\* N. de R.T.: PM de Phase Modulation.

pulso e modulação de posição de pulso como diferentes realizações de modulação de pulso analógica. Este tipo de modulação de pulso pode ser visto como a contraparte da modulação em CW.

- *Modulação de pulso digital*, na qual o sinal modulado é representado na forma codificada. Esta representação pode ser executada em muitas maneiras diferentes. O método padrão envolve duas operações. Primeiro, a amplitude de cada pulso modulado é aproximada pelo elemento mais próximo de um conjunto de níveis discretos que ocupe uma faixa compatível de valores. Esta operação é chamada *quantização*, e o dispositivo para executá-lo é chamado *quantizador*. Segundo, a saída do quantizador é *codificada* (por exemplo, na forma binária). Esta forma particular de modulação de pulso digital é conhecida como *modulação por codificação de pulsos* (PCM\*). A quantização é um processo não linear que resulta numa perda de informação, mas a perda está sob controle do projetista em termos de que ela pode ser tão pequena quanto se desejar simplesmente usando-se um número suficientemente grande de níveis discretos (quantização). De qualquer forma, a PCM não tem nenhuma contraparte em CW. Como acontece com a modulação simples, uma discussão completa da PCM está além do escopo deste livro. No que se refere à modulação de pulso, a ênfase principal neste capítulo é sobre a modulação de amplitude de pulso, a qual é um processo linear.

### 5.3 Benefícios da Modulação

O uso da modulação não se restringe exclusivamente a sistemas de comunicação. Ao contrário, a modulação é usada de uma forma ou de outra no processamento de sinais, radiotelemetria, radar, sonar, sistemas de controle e instrumentos de uso geral como, por exemplo, analisadores de espectro e sintetizadores de freqüência. Entretanto, é no estudo de sistemas de comunicação que achamos a modulação desempenhando um papel preponderante.

No contexto dos sistemas de comunicação, podemos identificar três benefícios práticos que resultam do uso da modulação:

1. *A modulação é usada para deslocar o conteúdo espectral de um sinal de mensagem de forma que ele se situe dentro da faixa de freqüência operacional de um canal de comunicação*

Considere, por exemplo, uma comunicação telefônica através de um canal celular de rádio. Para essa aplicação, os componentes de freqüência de um sinal de fala de aproximadamente 300 a 3100 Hz são considerados adequados para o propósito de comunicação. Na América do Norte, a faixa de freqüências atribuída a sistemas de rádio celular é de 800-900 MHz. A sub-faixa de 824 - 849 MHz é usada para receber sinais das unidades móveis e a sub-faixa 869 - 894 MHz é usada para transmitir sinais para as unidades móveis. Para que esta forma de comunicação telefônica seja viável, precisamos evidentemente de duas coisas: deslocar o conteúdo espectral essencial de um sinal de fala de forma que ele se situe dentro da sub-faixa de transmissão prescrita, e desloque-o de volta para sua faixa de freqüência original após a recepção. A primeira destas duas operações é de modulação, e a segunda é de demodulação.

2. *A modulação constitui um mecanismo para colocar o conteúdo de informação de um sinal de mensagem numa forma que possa ser menos vulnerável a ruído ou interferência.*

Num sistema de comunicação, o sinal recebido comumente é prejudicado pelo ruído gerado pelo *front end* \*\* do receptor ou por interferência captada no curso da transmissão. Algumas formas específicas de modulação como, por exemplo, modulação de freqüência e modulação por codificação de pulso têm a capacidade inerente de negociar a largura aumentada de faixa de transmissão em troca de um melhor desempenho do sistema na presença de ruído. Temos o cuidado de dizer aqui que esta importante propriedade não é compartilhada por todas as técnicas de modulação. Em especial, aquelas técnicas de modulação que variam a amplitude de uma CW ou portadora pulsada não oferecem absolutamente qualquer proteção contra ruído ou interferência no sinal recebido.

\* N. de R.T.: PCM de Pulse-Code Modulation.

\*\* N. de T.: Front end: constituintes da interface do usuário.

### 3. A modulação permite o uso de multiplexação

Um canal de comunicação (por exemplo, canal telefônico, canal de rádio móvel, comunicação por satélite) representa um grande investimento de capital e, portanto, deve ser empregado de uma maneira eficiente quanto ao custo. A *multiplexação* é uma operação de processamento de sinais que torna isto possível. Em especial, ela permite a transmissão simultânea de sinais portadores de informações de um grande número de fontes independentes por um canal até seu respectivo destino. Ela pode assumir a forma de multiplexação por divisão de freqüências para ser usada com técnicas de modulação de CW, ou multiplexação por divisão de tempo para ser usada com técnicas de modulação de pulso digital.

Neste capítulo, discutiremos os aspectos de deslocamento de freqüência e multiplexação da modulação. Porém, um estudo das questões relativas ao ruído em sistemas de modulação está além do escopo deste livro.

## 5.4 Modulação Completa de Amplitude

Considere uma onda portadora senoidal  $c(t)$  definida por

$$c(t) = A_c \cos(\omega_c t) \quad (5.7)$$

Por conveniência de apresentação, supomos que a fase da onda portadora seja zero na equação (5.7). Temos justificativa para fazer esta suposição, uma vez que a ênfase principal aqui é a variação imposta à amplitude da portadora. Admitamos que  $m(t)$  denote um sinal da mensagem de interesse. A *modulação de amplitude* (AM\*) é definida como um processo no qual a amplitude da portadora é variada proporcionalmente a um sinal de mensagem  $m(t)$ , como é mostrado por

$$s(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(\omega_c t) \quad (5.8)$$

em que  $k_a$  é uma constante chamada fator de *sensibilidade à amplitude* do modulador. Diz-se que a onda modulada  $s(t)$  assim definida é uma onda AM “completa”, pelas razões explicadas posteriormente nesta seção. Note que a freqüência em radianos  $\omega_c$  da portadora é mantida constante.

A amplitude da função de tempo que multiplica  $\cos(\omega_c t)$  na equação (5.8) é chamada *envoltória* da onda AM  $s(t)$ . Usando  $a(t)$  para denotar esta envoltória, podemos então escrever

$$a(t) = A_c |1 + k_a m(t)| \quad (5.9)$$

Surgem dois casos, dependendo do módulo de  $k_a m(t)$ , comparados com a unidade:

1.  $|k_a m(t)| \leq 1$  para todo  $t$

Nesta condição, o termo  $1 + k_a m(t)$  é sempre não negativo. Portanto, podemos simplificar a expressão para a envoltória da onda AM escrevendo

$$a(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \quad \text{para todo } t \quad (5.10)$$

2.  $|k_a m(t)| > 1$  para algum  $t$

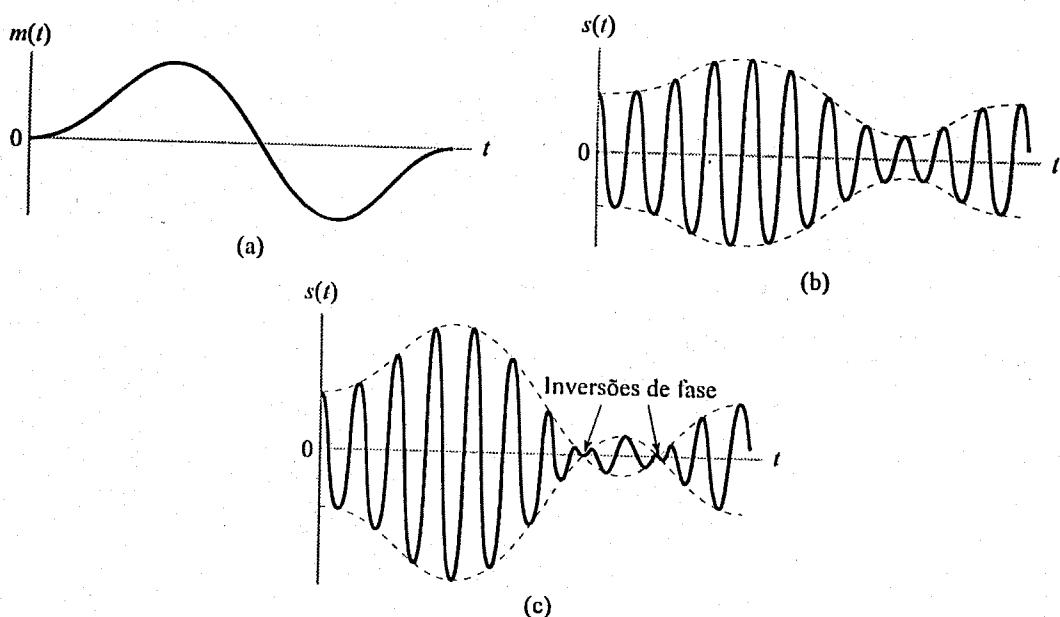
Nesta segunda condição, devemos usar a equação (5.9) para avaliar a envoltória da onda AM.

O valor absoluto máximo de  $k_a m(t)$  multiplicado por 100 é chamado *modulação percentual*. Conseqüentemente, o caso 1 corresponde a uma modulação percentual menor ou igual a 100% enquanto que o caso 2 corresponde a uma modulação percentual que ultrapassa 100%.

As formas de onda da Figura 5.3 ilustram o processo de modulação de amplitude. A parte (a) da Figura descreve a forma de onda de um sinal de mensagem  $m(t)$ . A parte (b) da figura descreve uma onda AM produzida por este sinal de mensagem para um valor de  $k_a$ , para o qual, a modulação percentual é 66,7% (isto é, o caso 1).

\* N. de R.T.: AM de Amplitude Modulation.

Por outro lado, a onda AM mostrada na Figura 5.3(c) corresponde a um valor de  $k_a$  para o qual a modulação percentual é 166,7% (isto é, o caso 2). Comparando as formas de onda destas duas ondas AM com a do sinal de mensagem, tiramos uma conclusão importante. Especificamente, a envoltória da onda AM tem uma forma de onda que apresentará uma correspondência biunívoca com a do sinal de mensagem se, e somente se, a modulação percentual for menor ou igual a 100%. Esta correspondência é destruída se for permitido que a modulação percentual ultrapasse 100%. No último caso, diz-se que a onda modulada sofre de *distorção de envoltória*, e diz-se que a própria onda é *sobremodulada*.



**FIGURA 5.3** Modulação de amplitude para porcentagem variável de modulação. (a) Sinal de mensagem  $m(t)$ . (b) Onda AM para  $|k_a m(t)| < 1$  para todo  $t$ , em que  $k_a$  é a sensibilidade à amplitude do modulador. Este caso representa sobremodulação. (c) Onda AM para  $|k_a m(t)| > 1$  durante parte do tempo. Este segundo caso representa sobremodulação.

► **EXERCÍCIO 5.1** Para 100% de modulação, a envoltória  $a(t)$  torna-se zero em algum tempo  $t$ . Por que?

**Resposta:** Se  $k_a m(t) = -1$  em algum tempo  $t$ , então  $a(t) = 0$ .

### ■ MAIS DETALHES SOBRE A DESCRIÇÃO NO DOMÍNIO DE TEMPO DE UMA ONDA AM

Anteriormente, definimos modulação linear como a forma de um processo de modulação na qual, se a amplitude do sinal de mensagem (isto é, onda moduladora) for multiplicada por certo fator, a amplitude do sinal de mensagem será alterada exatamente pelo mesmo fator. Esta definição de modulação linear é consistente com a noção de linearidade de um sistema que foi apresentada na Seção 1.8. A modulação de amplitude, conforme a definição da equação (5.8), falha no teste de linearidade, em estrito sentido. Para demonstrar isto, suponhamos que o sinal de mensagem  $m(t)$  consista na soma de dois componentes,  $m_1(t)$  e  $m_2(t)$ . Admitamos que  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  denotem as ondas AM produzidas por estes dois componentes agindo separadamente. Com o operador  $H$  denotando o processo de modulação de amplitude, podemos então escrever

$$H\{m_1(t) + m_2(t)\} = A_c[1 + k_a(m_1(t) + m_2(t))] \cos(\omega_c t) \\ \neq s_1(t) + s_2(t)$$

em que

$$s_1(t) = A_c[1 + k_a m_1(t)] \cos(\omega_c t)$$

e

$$s_2(t) = A_c[1 + k_a m_2(t)] \cos(\omega_c t)$$

A presença da onda portadora  $A_c \cos(\omega_c t)$  na onda AM faz com que o princípio da superposição seja violado.

Entretanto, como foi destacado anteriormente, o fato de a modulação de amplitude não satisfazer o critério de linearidade é algo sem consequências maiores. A partir da definição dada na equação (5.8), vemos que o sinal de AM  $s(t)$  é, de fato, uma combinação linear do componente portadora  $A_c \cos(\omega_c t)$  com o componente modulado  $A_c \cos(\omega_c t)m(t)$ . Conseqüentemente, a modulação de amplitude permite o uso da análise de Fourier sem dificuldade, conforme discutiremos a seguir.

### ■ DESCRIÇÃO DA MODULAÇÃO DE AMPLITUDE NO DOMÍNIO DE FREQÜÊNCIA

A equação (5.8) define a onda AM  $s(t)$  como uma função do tempo. Para desenvolver a descrição de freqüência desta onda AM, tomamos a transformada de Fourier de ambos os lados da equação (5.8). Admitamos que  $S(j\omega)$  denote a transformada de Fourier de  $s(t)$  e que  $M(j\omega)$  denote a transformada de Fourier de  $m(t)$ ; referimo-nos a  $M(j\omega)$  como *espectro de mensagem*. Conseqüentemente, usando a representação por transformada de Fourier da função co-seno  $A_c \cos(\omega_c t)$  e a propriedade de deslocamento em freqüência da transformada de Fourier, podemos escrever

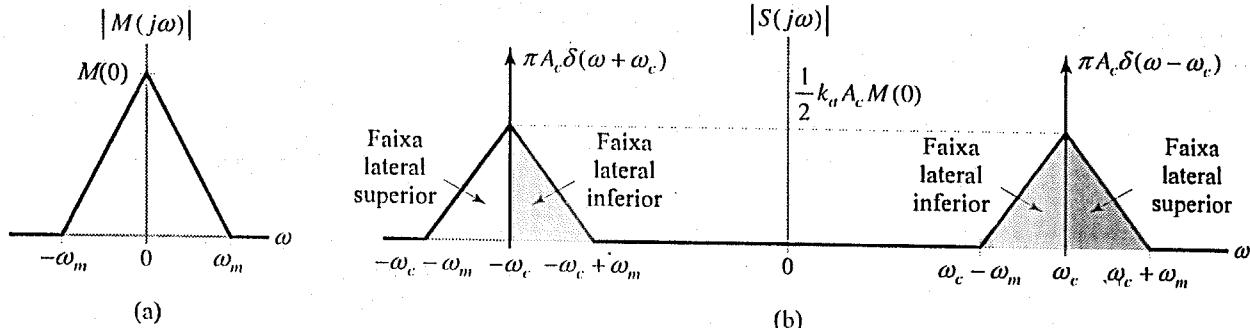
$$\begin{aligned} S(j\omega) = & \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ & + \frac{1}{2} k_a A_c [M(j(\omega - \omega_c)) + M(j(\omega + \omega_c))] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Admitimos que o sinal de mensagem  $m(t)$  seja limitado em faixa ao intervalo  $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$  como na Figura 5.4(a). Referimo-nos ao componente de freqüência mais elevada  $\omega_m$  de  $m(t)$  como a *largura de faixa da mensagem*, a qual é medida em rad/s. A forma do espectro destina-se a servir de ilustração somente. A partir da equação (5.11), descobrimos que o espectro  $S(j\omega)$  da onda AM está de acordo com o que mostra a Figura 5.4(b) para o caso em que  $\omega_c > \omega_m$ . Este espectro consiste em duas funções impulso ponderadas pelo fator  $\pi A_c$  e ocorre em  $\pm \omega_c$  e em duas versões do espectro de mensagem deslocado em freqüência de  $\pm \omega_c$ , e multiplicada em amplitude por  $\frac{1}{2} k_a A_c$ . O espectro da Figura 5.4(b) pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Para freqüências positivas, a parte do espectro da onda modulada que se situa acima da freqüência portadora  $\omega_c$  é chamada *faixa lateral superior*, enquanto a parte simétrica abaixo de  $\omega_c$  é chamada *faixa lateral inferior*. Para freqüências negativas, a imagem da faixa lateral superior é representada pela parte do espectro abaixo de  $-\omega_c$ , e a imagem da faixa lateral inferior, pela faixa acima de  $-\omega_c$ . A condição  $\omega_c > \omega_m$  assegura que as faixas laterais não se sobreponham. Em caso contrário, a onda modulada exibe *sobreposição espectral* e, portanto, distorção de freqüência.
2. Para freqüências positivas, o componente de freqüência mais elevada da onda AM é  $\omega_c + \omega_m$ , e o componente de freqüência mais baixa é  $\omega_c - \omega_m$ . A diferença entre estas duas freqüências define a *largura de faixa de transmissão*  $\omega_T$  da onda AM, a qual é exatamente o dobro da largura de faixa da mensagem  $\omega_m$ ; ou seja,

$$\omega_T = 2\omega_m \quad (5.12)$$

O espectro da onda AM descrita na Figura 5.4(b) é *completo* em termos de que a portadora, a faixa lateral superior e a faixa lateral inferior são todas completamente representadas. É por este motivo que nos referimos a esta forma de modulação como “modulação de amplitude total ou completa.”



**FIGURA 5.4** Conteúdo espectral da onda AM. (a) Espectro de magnitude do sinal de mensagem. (b) Espectro de magnitude da onda AM, mostrando as composições da portadora, faixas laterais superior e inferior.

A faixa lateral superior da onda AM representa os componentes de freqüência positivos do espectro de mensagem  $M(j\omega)$ , deslocado em freqüência para cima pela freqüência da portadora  $\omega_c$ . A faixa lateral inferior da onda AM representa os componentes de freqüência negativos do espectro de mensagem  $M(j\omega)$ , também deslocados em freqüência para cima por  $\omega_c$ . Aqui repousa a importância de admitirmos o uso de freqüências negativas na análise de Fourier de sinais. Em particular, o uso da modulação de amplitude revela os componentes de freqüência negativos de  $M(j\omega)$  completamente, desde que  $\omega_c > \omega_m$ .

**EXEMPLO 5.1** Considere uma onda moduladora  $m(t)$  que consiste num único componente de tom ou freqüência, ou seja,

$$m(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

em que  $A_0$  é a amplitude da onda moduladora e  $\omega_0$  é sua freqüência em radianos (veja a Figura 5.5(a)). A onda portadora senoidal  $c(t)$  tem amplitude  $A_c$  e a freqüência em radianos  $\omega_c$  (veja a Figura 5.5(b)). Avalie as características de domínio de tempo e domínio de freqüência da onda AM.

**Solução:** A onda AM é descrita por

$$s(t) = A_c [1 + \mu \cos(\omega_0 t)] \cos(\omega_c t) \quad (5.13)$$

em que

$$\mu = k_a A_0$$

A constante adimensional  $\mu$  para uma onda moduladora senoidal é chamada *fator de modulação*; ela é igual à modulação percentual quando é expressa numericamente como uma porcentagem. Para evitar distorção de envoltória devido à supermodulação, o fator de modulação  $\mu$  deve ser mantido abaixo da unidade. A Figura 5.5(c) é um esboço de  $s(t)$  para  $\mu$  menor do que a unidade.

Admitamos que  $A_{\max}$  e  $A_{\min}$  denotem os valores máximo e mínimo da envoltória da onda modulada. Então, a partir da equação (5.13), obtemos

$$\frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{A_c(1+\mu)}{A_c(1-\mu)}$$

Resolvendo para  $\mu$ :

$$\mu = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

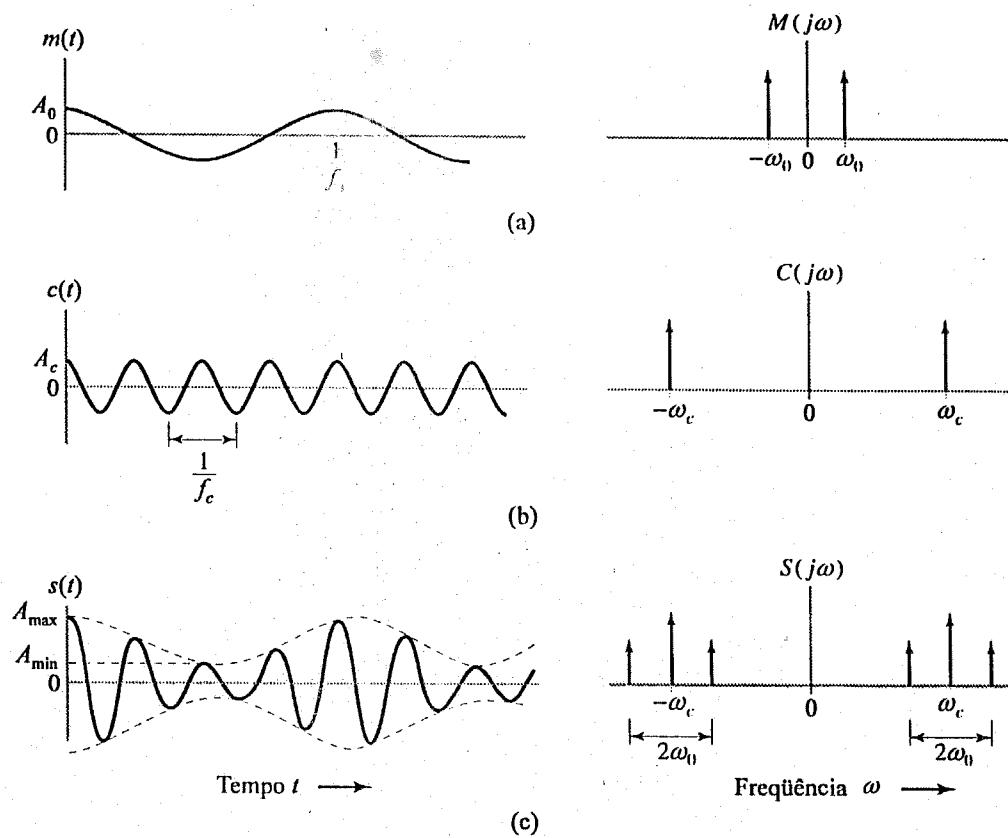
Expressando o produto dos dois co-senos da equação (5.13) como a soma de duas ondas senoidais, sendo que uma delas tem freqüência  $\omega_c + \omega_0$  e a outra tendo freqüência  $\omega_c - \omega_0$ , obtemos

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{1}{2} \mu A_c \cos[(\omega_c + \omega_0)t] \\ + \frac{1}{2} \mu A_c \cos[(\omega_c - \omega_0)t]$$

Portanto, a transformada de Fourier de  $s(t)$  é

$$S(j\omega) = \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ + \frac{1}{2} \pi \mu A_c [\delta(\omega - \omega_c - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_c + \omega_0)] \\ + \frac{1}{2} \pi \mu A_c [\delta(\omega - \omega_c + \omega_0) + \delta(\omega + \omega_c - \omega_0)]$$

Deste modo, em termos ideais, o espectro de uma onda AM completa, para o caso especial da modulação senoidal, consiste em funções impulso em  $\pm\omega_c$ ,  $\omega_c \pm \omega_0$  e  $-\omega_c \pm \omega_0$ , como descreve a Figura 5.5(c).



**FIGURA 5.5** Características em domínio de tempo (à esquerda) e domínio de freqüência (à direita) de AM produzida por uma onda moduladora senoidal. (a) Onda moduladora. (b) Onda portadora. (c) Onda AM.

**EXEMPLO 5.2** Prosseguindo com o Exemplo 5.1, investigue o efeito de variar o fator de modulação  $\mu$  sobre o conteúdo de potência da onda AM.

**Solução:** Na prática, a onda AM  $s(t)$  é um sinal de tensão ou corrente. Em qualquer um dos casos, a potência média entregue por  $s(t)$  a um resistor de carga de 1 ohm é composto de três componentes:

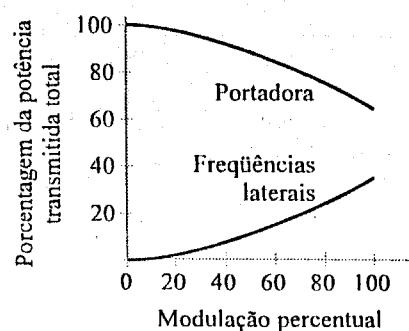
$$\text{Potência da portadora} = \frac{1}{2} A_c^2$$

$$\text{Potência da freqüência lateral superior} = \frac{1}{8} \mu^2 A_c^2$$

$$\text{Potência da freqüência lateral inferior} = \frac{1}{8} \mu^2 A_c^2$$

A razão da potência total da faixa lateral para a potência total da onda modulada é, portanto, igual a  $\mu^2/(2 + \mu^2)$ , o qual depende somente do fator de modulação  $\mu$ . Se  $\mu = 1$ , ou seja, se for usada uma modulação igual a 100%, a potência total nas duas freqüências laterais da onda AM resultante será igual a somente 1/3 da potência total da onda modulada.

A Figura 5.6 mostra a porcentagem de potência total tanto nas freqüências laterais como na portadora plotadas em relação à modulação percentual.



**FIGURA 5.6** Variações de potência de portadora e potência da faixa lateral com a modulação percentual de onda AM para o caso de modulação senoidal.

► **EXERCÍCIO 5.2** Para um caso particular de modulação senoidal, a modulação percentual é inferior a 20%. Mostre que a potência numa freqüência lateral é inferior a 1% da potência total na onda AM.

### ■ GERAÇÃO DE ONDA AM

Vários esquemas foram idealizados para geração de uma onda AM. Aqui, consideramos um circuito simples decorrente da equação de definição (5.8). Primeiro, reescrevemos esta equação na forma equivalente:

$$s(t) = k_a [m(t) + B] A_c \cos(\omega_c t) \quad (5.14)$$

A constante  $B$ , igual a  $1/k_a$ , representa um *bias* que é adicionado ao sinal de mensagem  $m(t)$  antes da modulação. A equação (5.14) sugere o esquema descrito no diagrama de blocos da Figura 5.7 para gerar uma onda AM. Basicamente, ela consiste em dois blocos funcionais:

- Um somador, que acrescenta o *bias*  $B$  ao sinal de mensagem  $m(t)$  que chega.
- Um multiplicador, que multiplica a saída do somador ( $m(t) + B$ ) pela onda portadora  $A_c \cos(\omega_c t)$ , produzindo a onda AM  $s(t)$ . A constante  $k_a$  é uma constante de proporcionalidade associada com o multiplicador.

A modulação percentual é controlada simplesmente ajustando-se o *bias*  $B$ .

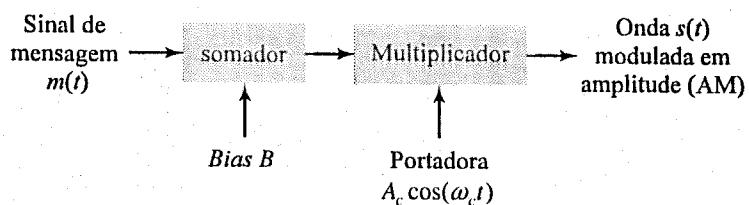


FIGURA 5.7 Sistema que envolve um somador e um multiplicador para gerar uma onda AM.

► **EXERCÍCIO 5.3** Supondo que  $M_{\max}$  seja o valor absoluto máximo do sinal de mensagem, qual é a condição que o *bias* deve satisfazer para evitar a supermodulação?

**Resposta:**  $B \geq M_{\max}$ .

### ■ DEMODULAÇÃO DE ONDA AM

O chamado *detetor de envoltória* constitui um dispositivo simples e, contudo, eficiente, para demodulação de uma onda AM de faixa estreita para a qual a modulação percentual seja inferior a 100%. Por “faixa estreita,” queremos dizer que a freqüência da portadora é grande em comparação com a largura de faixa da mensagem. Idealmente, um detetor de envoltória produz um sinal de saída que segue exatamente a envoltória da forma de onda do sinal de entrada — daí, seu nome. Alguma versão deste circuito é usada em quase todos os receptores de rádio AM comerciais.

A Figura 5.8(a) mostra o diagrama do circuito de um detetor de envoltória que consiste num diodo e num filtro resistor-capacitor. A operação deste detetor de envoltória é a seguinte. No meio-ciclo positivo do sinal de entrada, o diodo é polarizado diretamente e o capacitor  $C$  é carregado rapidamente até o valor de pico do sinal de entrada. Quando o sinal de entrada cai abaixo deste valor, o diodo sofre uma polarização inversa e o capacitor  $C$  se descarrega lentamente através do resistor de carga  $R_f$ . O processo de descarga prossegue até o meio-ciclo positivo seguinte. Quando o sinal de entrada torna-se maior do que a tensão presente no capacitor, o diodo conduz novamente e o processo se repete. Supomos que o diodo seja ideal, apresentando impedância zero ao fluxo de corrente na região que sofre a polarização direta, e impedância infinita na região que sofre polarização inversa. Supomos ainda que a onda AM aplicada ao detetor de envoltória seja fornecida por uma fonte de tensão de resistência interna  $R_s$ .

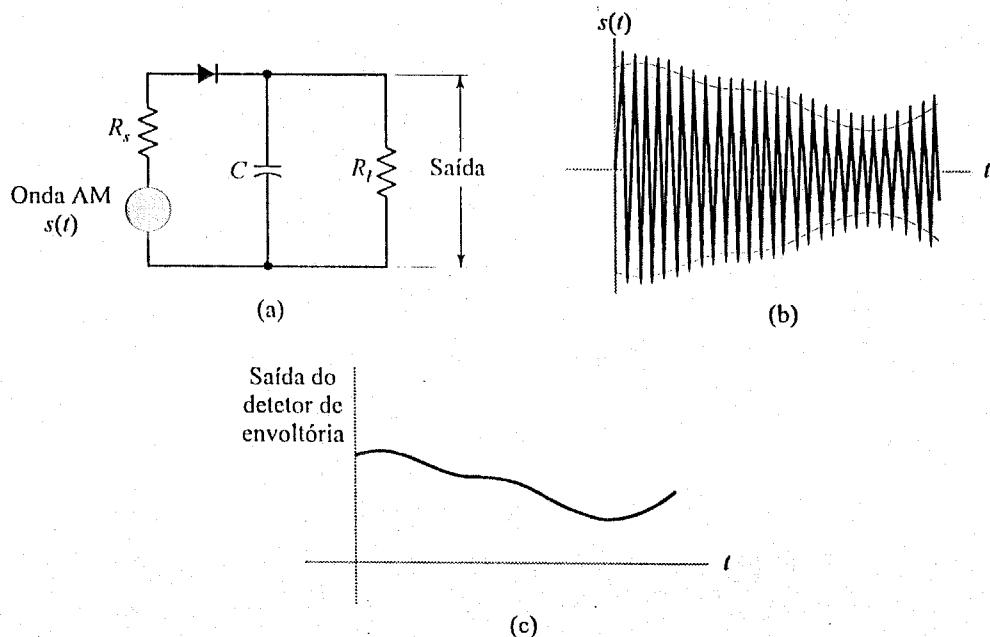
A constante de tempo  $R_s C$  de carga deve ser pequena em comparação com o período da portadora  $2\pi/\omega_c$ , ou seja,

$$R_s C \ll \frac{2\pi}{\omega_c}$$

Conseqüentemente, o capacitor  $C$  é carregado rapidamente e, portanto, segue a tensão aplicada até o pico positivo, quando o diodo está conduzindo. Por outro lado, a constante de tempo  $R_t C$  de descarga deve ser suficientemente grande para assegurar que o capacitor se descarregue lentamente através do resistor de carga  $R_t$  entre os picos positivos da onda portadora, mas não tão grande que a tensão do capacitor não se descarregue à taxa máxima de variação da onda moduladora, ou seja,

$$\frac{2\pi}{\omega_c} \ll R_t C \ll \frac{2\pi}{\omega_m}$$

em que  $\omega_m$  é a largura de faixa da mensagem. O resultado é que a tensão do capacitor ou saída do detector é quase a mesma que a da envoltória da onda AM, como podemos ver nas Figuras 5.8(b) e (c). A saída do detector normalmente tem uma ondulação pequena (não mostrada na Figura 5.8(c)) na freqüência de portadora; esta ondulação é facilmente removida pelo filtro passa-baixas.



**FIGURA 5.8** Detetor de envoltória, ilustrado por (a) diagrama do circuito. (b) Entrada de onda AM e (c) Saída do detetor de envoltória, supondo condições ideais.

► **EXERCÍCIO 5.4** Um detector de envoltória tem uma resistência de fonte  $R_s = 75\Omega$  e uma resistência de carga  $R_t = 10k\Omega$ . Você tem  $\omega_c = 2\pi \times 10^5$  rad/s e  $\omega_m = 2\pi \times 10^3$  rad/s. Sugira um valor adequado para o capacitor  $C$ .

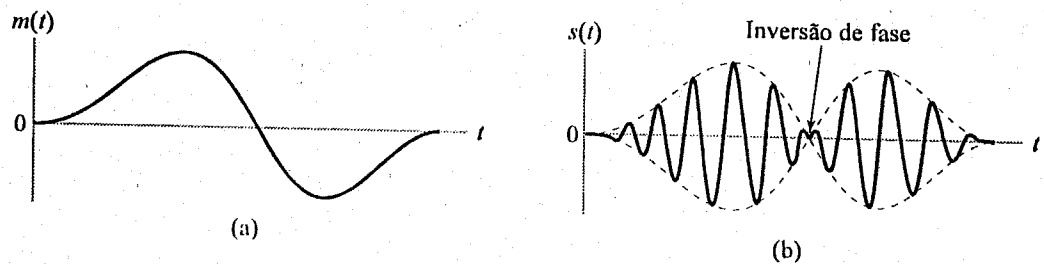
**Resposta:**  $C = 0,01 \mu F$ .

## 5.5 Modulação de Faixa Lateral Dupla e Portadora Suprimida

Na AM completa, a onda portadora  $c(t)$  é completamente independente do sinal de mensagem  $m(t)$ , o que significa que a transmissão da onda portadora representa uma perda de potência. Isto aponta para uma deficiência da modulação de amplitude, a saber, que somente uma fração da potência total transmitida é afetada por  $m(t)$ , o que foi bem demonstrado no Exemplo 5.2. Para superar esta deficiência, podemos suprimir o componente portadora da onda modulada, resultando numa *modulação de faixa lateral dupla e portadora suprimida* (DSB-SC\*). Ao suprimir a portadora, obtemos uma onda modulada que é proporcional ao produto da onda portadora e do sinal de mensagem. Dessa forma, para descrever uma onda modulada DSB-SC como uma função do tempo, simplesmente escrevemos

$$\begin{aligned} s(t) &= c(t)m(t) \\ &= A_c \cos(\omega_c t)m(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Esta onda modulada sofre uma inversão de fase sempre que o sinal de mensagem  $m(t)$  cruze o ponto zero, como ilustra a Figura 5.9; a parte (a) da figura descreve a forma de onda de um sinal de mensagem, e a parte (b) descreve a onda modulada DSB-SC correspondente. Por isso, diferentemente da modulação de amplitude, a envoltória de uma onda modulada DSB-SC é completamente diferente do sinal de mensagem.



**FIGURA 5.9** Modulação de faixa lateral dupla e portadora suprimida. (a) Sinal de mensagem. (b) Onda modulada DSB-SC, resultante da multiplicação do sinal de mensagem pela onda portadora senoidal.

► **EXERCÍCIO 5.5** Esboce a envoltória da onda modulada DSB-SC mostrada na Figura 5.9(b) e compare-a com o sinal de mensagem descrito na Figura 5.9(a).

### ■ DESCRIÇÃO NO DOMÍNIO DE FREQÜÊNCIA

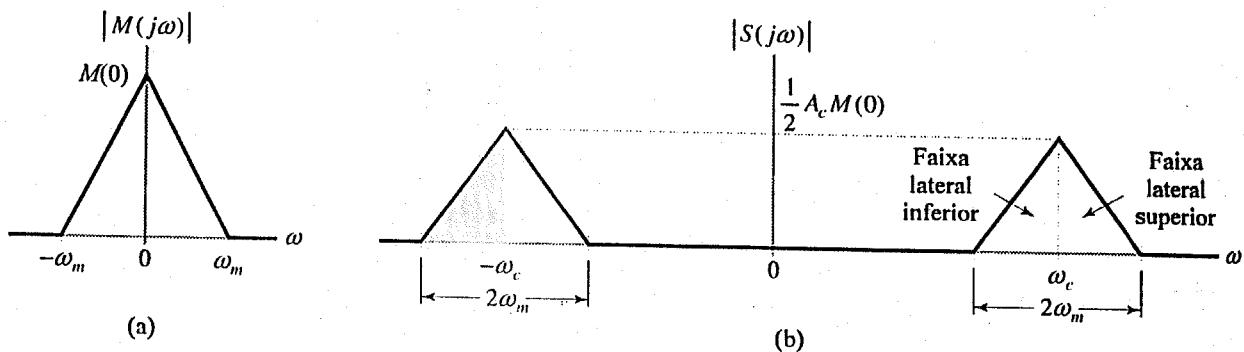
A supressão da portadora da onda modulada da equação (5.15) é bem analisada quando se examina seu espectro. Especificamente, tomando a transformada de Fourier de ambos os lados da equação (5.15), obtemos

$$S(j\omega) = \frac{1}{2} A_c [M(j(\omega - \omega_c)) + M(j(\omega + \omega_c))] \quad (5.16)$$

em que, como antes,  $S(j\omega)$  é a transformada de Fourier da onda modulada  $s(t)$ , e  $M(j\omega)$  é a transformada de Fourier do sinal de mensagem  $m(t)$ . Quando o sinal de mensagem  $m(t)$  é limitado ao intervalo  $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$  como na Figura 5.10(a), descobrimos que o espectro  $S(j\omega)$  é como o ilustrado na parte (b) da figura. Com exceção de uma mudança no fator de mudança de escala, o processo de modulação simplesmente desloca o espectro do sinal de mensagem de  $\pm\omega_c$ . Evidentemente, a largura de faixa de transmissão exigida pela modulação DSB-SC é a mesma que aquela para a modulação de amplitude total, a saber,  $2\omega_m$ .

Entretanto, comparando o espectro da Figura 5.10(b) da modulação DSB-SC com o da Figura 5.4(b) correspondente à AM total, vemos claramente que a portadora é suprimida no caso DSB-SC, ao passo que ela continua presente no caso da AM total, como exemplificado pela existência do par de funções impulso em  $\pm\omega_c$ .

\* N. de R.T.: DSB-SC de Double Sideband - Suppressed Carrier



**FIGURA 5.10** Conteúdo espectral da onda modulada DSB-SC. (a) Espectro de magnitude do sinal de mensagem. (b) Espectro de magnitude de onda modulada DSB-SC, que consiste somente nas faixas laterais superior e inferior.

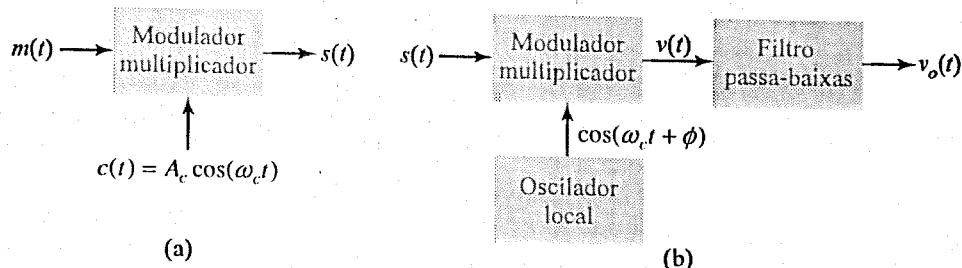
A geração de uma onda modulada DSB-SC consiste simplesmente no produto do sinal de mensagem  $m(t)$  e da onda portadora  $A_c \cos(\omega_c t)$ , como é indicado na equação (5.15). Um dispositivo para satisfazer esta exigência é chamado *modulador multiplicador* ou de *produto*, que é outro termo para designar um multiplicador direto. A Figura 5.11(a) mostra a representação em diagrama de blocos de um modulador de produto.

### ■ DETECÇÃO COERENTE

O sinal de mensagem  $m(t)$  pode ser recuperado de uma onda modulada DSB-SC  $s(t)$  multiplicando-se primeiro  $s(t)$  por uma onda senoidal gerada localmente e depois realizar uma filtragem passa-baixas no produto, como descreve a Figura 5.11(b). Presume-se que a saída de oscilador local seja exatamente coerente ou sincronizada, tanto em termos de freqüência como de fase, com a onda portadora  $c(t)$  usada no modulador multiplicador para gerar  $s(t)$ . Este método de demodulação é conhecido como *deteção coerente* ou *demodulação síncrona*.

É instrutivo derivar a detecção coerente como um caso especial do processo de demodulação mais geral usando-se um sinal de oscilador local que tenha a mesma freqüência, mas com uma diferença de fase arbitrária  $\phi$ , medida com respeito à onda portadora  $c(t)$ . Dessa forma, denotando o sinal do oscilador local no receptor por  $\cos(\omega_c t + \phi)$ , suposto com amplitude unitária por conveniência, e usando a equação (5.15) para a onda modulada DSB-SC  $s(t)$ , descobrimos que a saída do modulador de produto na Figura 5.11(b) é dada por

$$\begin{aligned} v(t) &= \cos(\omega_c t + \phi)s(t) \\ &= A_c \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t + \phi)m(t) \\ &= \frac{1}{2} A_c \cos(\phi)m(t) + \frac{1}{2} A_c \cos(2\omega_c t + \phi)m(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$



**FIGURA 5.11** (a) Modulador multiplicador para gerar a onda modulada DSB-SC. (b) Detetor coerente para demodulação da onda modulada DSB-SC.

O primeiro termo no lado direito da equação (5.17), a saber,  $\frac{1}{2} A_c \cos(\phi)m(t)$ , representa uma versão multiplicada do sinal de mensagem original  $m(t)$ . O segundo termo,  $\frac{1}{2} A_c \cos(2\omega_c t + \phi)m(t)$ , representa uma nova onda modulada DSB-SC com freqüência de portadora  $2\omega_c$ . A Figura 5.12 mostra o espectro de magnitude de  $v(t)$ . A clara separação entre os espectros dos dois componentes

de  $v(t)$  indicados na Figura 5.12 gira em torno da pressuposição de que a freqüência de portadora original  $\omega_c$  satisfaz a seguinte condição:

$$2\omega_c - \omega_m > \omega_m$$

ou, de maneira equivalente,

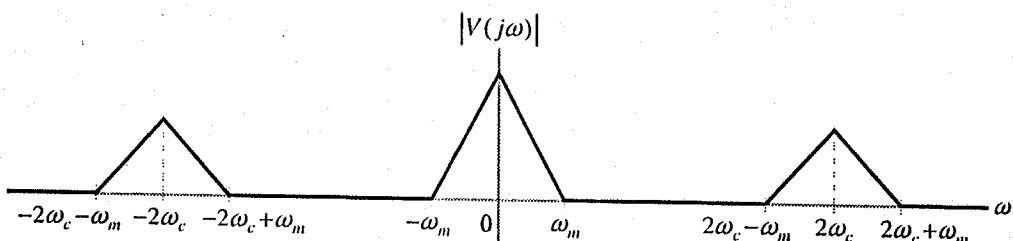
$$\omega_c > \omega_m \quad (5.18)$$

em que  $\omega_m$  é a largura de faixa da mensagem. Desde que esta condição seja satisfeita, podemos usar um filtro passa-baixas para suprimir o segundo termo não desejado de  $v(t)$ . Para realizar isto, a faixa de passagem do filtro passa-baixas deve estender-se por todo o espectro de mensagem e não mais do que isto. Mais precisamente, suas especificações devem satisfazer duas exigências:

1. Freqüência de corte:  $\omega_m$
2. Faixa de transição:  $\omega_m \leq \omega \leq 2\omega_c - \omega_m$

Deste modo, a saída global  $v_o(t)$  na Figura 5.11(b) é dada por

$$v_o(t) = \frac{1}{2} A_c \cos(\phi) m(t) \quad (5.19)$$



**FIGURA 5.12** Espectro de magnitude da saída do modulador multiplicador  $v(t)$  no detetor coerente da Figura 5.11(b).

O sinal demodulado  $v_o(t)$  é proporcional a  $m(t)$  quando o erro de fase  $\phi$  é uma constante. A amplitude desse sinal demodulado é máxima quando  $\phi = 0$  e tem um mínimo igual a zero quando  $\phi = \pm\pi/2$ . O sinal demodulado nulo, o qual ocorre para  $\phi = \pm\pi/2$ , representa o *efeito nulo de quadratura* do detetor coerente. O erro de fase  $\phi$  no oscilador local faz com que a saída do detetor seja atenuada por um fator igual a  $\cos \phi$ . Contanto que o erro de fase  $\phi$  seja constante, a saída do detetor fornecerá uma versão não distorcida do sinal de mensagem original  $m(t)$ . Na prática, entretanto, comumente descobrimos que o erro de fase  $\phi$  varia aleatoriamente com o tempo devido a variações aleatórias no canal de comunicação. O resultado é que na saída do detetor, o fator de multiplicação  $\cos \phi$  também varia aleatoriamente com o tempo, o que, evidentemente, é indesejável. Portanto, deve haver um circuito no receptor para manter o oscilador local em perfeito sincronismo, tanto em termos de freqüência como de fase, com a onda portadora usada para gerar a onda modulada DSB-SC no transmissor. O resultante aumento de complexidade no receptor é o preço que deve ser pago por suprimirmos a onda portadora para economizar potência de transmissor.

► **EXERCÍCIO 5.6** Para que o detector coerente da Figura 5.11(b) opere adequadamente, a condição da equação (5.18) deve ser satisfeita. O que aconteceria se esta condição fosse violada?

**Resposta:** As faixas laterais inferior e superior se sobreponem, em cujo caso, o detetor coerente deixa de operar apropriadamente. ▶

**EXEMPLO 5.3** Considere novamente o sinal modulador senoidal

$$m(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

com amplitude  $A_0$  e freqüência  $\omega_0$ ; veja a Figura 5.13(a). A onda portadora é

$$c(t) = A_c \cos(\omega_c t)$$

com amplitude  $A_c$  e freqüência  $\omega_c$ ; veja a Figura 5.13(b). Investigue as características de domínio de tempo e domínio de freqüência da onda modulada DSB-SC correspondente.

*Solução:* A onda modulada DSB-SC é definida por

$$\begin{aligned}s(t) &= A_c A_0 \cos(\omega_c t) \cos(\omega_0 t) \\&= \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c + \omega_0)t] + \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c - \omega_0)t]\end{aligned}$$

A transformada de Fourier de  $s(t)$  é dada por

$$\begin{aligned}S(j\omega) &= \frac{1}{2}\pi A_c A_0 [\delta(\omega - \omega_c - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_c + \omega_0) \\&\quad + \delta(\omega - \omega_c + \omega_0) + \delta(\omega + \omega_c - \omega_0)]\end{aligned}$$

Dessa forma, em termos ideais, o espectro da onda modulada DSB-SC, para o caso especial de uma onda moduladora senoidal, consiste em funções de impulso localizadas em  $\omega_c \pm \omega_0$  e  $-\omega_c \pm \omega_0$ . A Figura 5.13(c) apresenta uma descrição da onda modulada  $s(t)$  e sua transformada de Fourier  $S(j\omega)$ . A comparação da Figura 5.13 da modulação DSB-SC com a Figura 5.5 da AM completa não vale a pena. A supressão da portadora tem um profundo impacto sobre a forma de onda do sinal modulado e seu espectro.

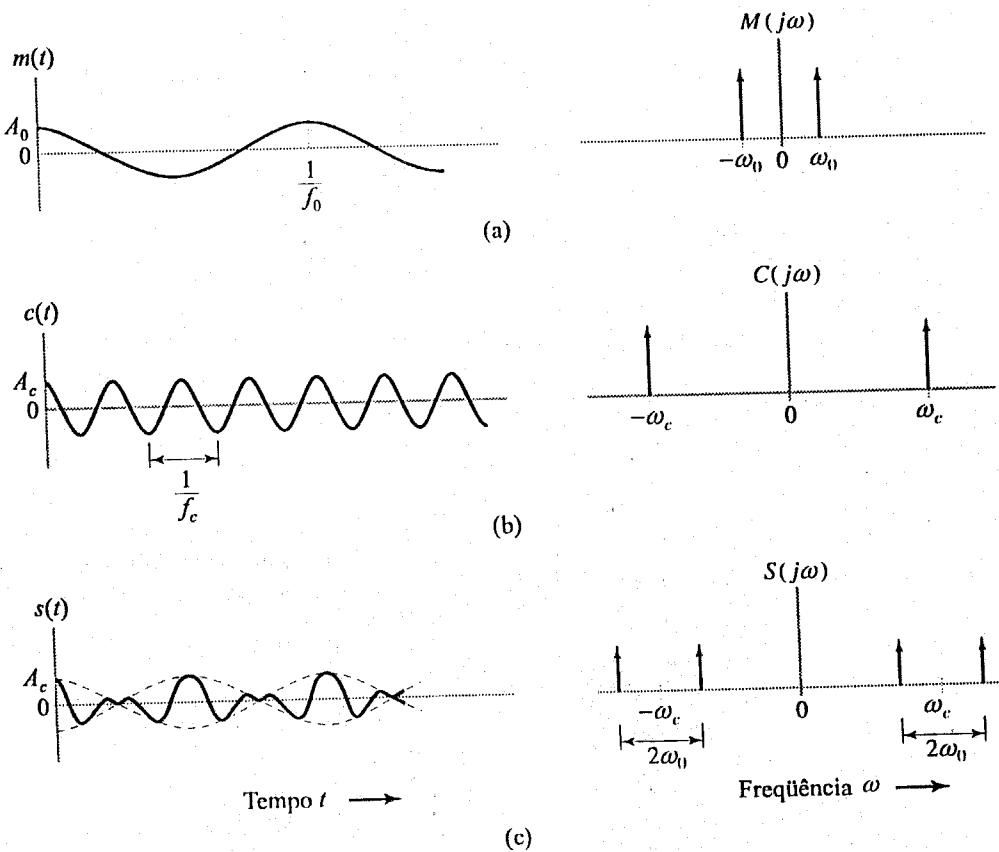


FIGURA 5.13 Características de domínio de tempo (à esquerda) e domínio de freqüência (à direita) da modulação DSB-SC produzida por uma onda moduladora senoidal. (a) Onda moduladora. (b) Onda portadora. (c) Onda modulada DSB-SC. Note que  $\omega = 2\pi f$ .

É informativo prosseguirmos a análise da modulação DSB-SC de uma onda moduladora senoidal. Quando há um perfeito sincronismo entre o oscilador local no receptor da Figura 5.11(b) e a onda portadora  $c(t)$  no transmissor da Figura 5.11(a), descobriremos que a saída do modulador multiplicador é

$$\begin{aligned}v(t) &= \cos(\omega_c t) \left\{ \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c - \omega_0)t] + \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c + \omega_0)t] \right\} \\&= \frac{1}{4} A_c A_0 \cos[(2\omega_c - \omega_0)t] + \frac{1}{4} A_c A_0 \cos(\omega_0 t) \\&\quad + \frac{1}{4} A_c A_0 \cos[(2\omega_c + \omega_0)t] + \frac{1}{4} A_c A_0 \cos(\omega_0 t)\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos de  $v(t)$  são produzidos pela freqüência lateral inferior, e os dois últimos termos são produzidos pela freqüência lateral superior. O primeiro e o terceiro termos, de freqüências  $2\omega_c - \omega_0$  e  $2\omega_c + \omega_0$ , respectivamente, são removidos pelo filtro passa-baixas na Figura 5.11(b). A saída de detetor coerente reproduz, dessa forma, a onda moduladora original. Observe, entretanto, que esta saída de detetor aparece como dois termos iguais, um derivado da freqüência lateral superior e o outro da freqüência lateral inferior. Portanto, concluímos que, para a transmissão de informação, somente uma freqüência lateral é necessária. Esta questão será discutida adicionalmente na Seção 5.7.

► **EXERCÍCIO 5.7** Para a modulação senoidal considerada no Exemplo 5.3, qual é a potência média na freqüência lateral inferior ou superior, expressa como uma porcentagem da potência total na onda modulada DSB-SC?

**Resposta:** 50%.

## 5.6 Multiplexação por Portadora em Quadratura

Um sistema de *multiplexação por portadora em quadratura* ou *modulação de amplitude em quadratura* (QAM\*) possibilita que duas ondas moduladas DSB-SC (resultantes da aplicação de dois sinais de mensagem *independentes*) ocupem a mesma largura de faixa de transmissão, e permite ainda a separação dos mesmos na saída do receptor. Portanto, ele é um *esquema de conservação da largura de faixa*.

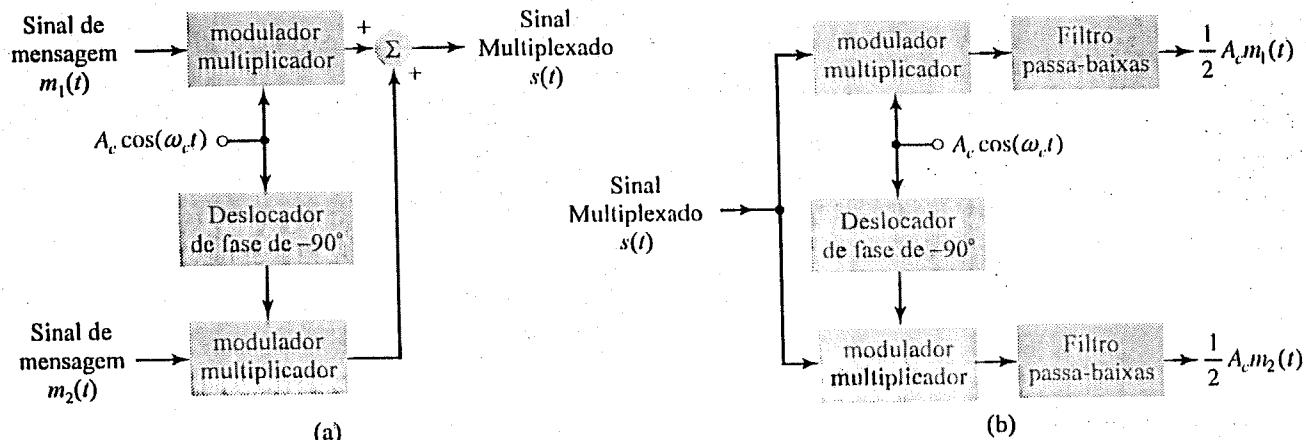
A Figura 5.14 é um diagrama de blocos do sistema de multiplexação pela portadora de quadratura. O transmissor do sistema, mostrado na parte (a) da figura, envolve o uso de dois moduladores multiplicadores distintos que são fornecidos com duas ondas portadoras da mesma freqüência, mas diferentes em termos de fase em  $-90^\circ$ .

O sinal multiplexado  $s(t)$  consiste na soma destas duas saídas dos moduladores multiplicadores, como é mostrado por

$$s(t) = A_c m_1(t) \cos(\omega_c t) + A_c m_2(t) \sin(\omega_c t) \quad (5.20)$$

em que  $m_1(t)$  e  $m_2(t)$  denotam os dois diferentes sinais de mensagem aplicados aos moduladores de produto. Uma vez que cada termo da equação (5.20) tem uma largura de faixa de transmissão de  $2\omega_m$  e está centralizada em  $\omega_c$ , vemos que o sinal multiplexado  $s(t)$  ocupa uma largura de faixa de transmissão de  $2\omega_m$  centralizada na freqüência de portadora  $\omega_c$ , em que  $\omega_m$  é a largura de faixa comum de mensagem de  $m_1(t)$  e  $m_2(t)$ .

O receptor do sistema é mostrado na Figura 5.14(b). O sinal multiplexado  $s(t)$  é aplicado simultaneamente a dois detectores coerentes distintos que são fornecidos com duas portadoras locais de mesma freqüência, mas diferentes em termos de fase em  $-90^\circ$ . A saída do detetor superior é  $\frac{1}{2} A_c m_1(t)$ , ao passo que a saída do detetor inferior é  $\frac{1}{2} A_c m_2(t)$ .



**FIGURA 5.14** Sistema de multiplexação por portadora em quadratura que explora o efeito nulo de quadratura.  
(a) Transmissor. (b) Receptor, supondo sincronização perfeita com o transmissor.

\* N. de R.T.: QAM de Quadrature-Amplitude Modulation

Para que um sistema de multiplexação por portadora em quadratura opere satisfatoriamente, é importante manter as relações de fase e frequência corretas entre os osciladores locais usados nas partes transmissora e receptora do sistema. Este aumento de complexidade do sistema é o preço que deve ser pago pelo benefício prático ganho com a conservação da largura de faixa.

► **EXERCÍCIO 5.8** Verifique se as saídas do receptor da Figura 5.14 em resposta ao  $s(t)$  da equação (5.20) estão de acordo com o que é indicado lá. ◀

## 5.7 Outras Variantes da Modulação de Amplitude

As formas de modulação AM total e DSB-SC são desperdiçadoras de largura de faixa, porque ambas requerem uma largura de faixa de transmissão igual a duas vezes a largura da faixa de mensagem. Em qualquer um dos casos, metade da largura de faixa de transmissão é ocupada pela faixa lateral superior da onda modulada, enquanto a outra metade é ocupada pela faixa lateral inferior. De fato, as faixas laterais superior e inferior se relacionam de modo único entre si em virtude de sua simetria em torno da frequência de portadora, como é ilustrado no Exemplo 5.3. Ou seja, dados os espectros de amplitude e fase de qualquer uma das faixas laterais, podemos determinar de modo único a outra. Isto significa que no que se refere à transmissão de informação, somente uma faixa lateral é necessária, e se tanto a portadora como a outra faixa lateral forem suprimidas no transmissor, nenhuma informação será perdida. Desta maneira, o canal somente precisa fornecer a mesma largura de faixa que o sinal de mensagem, conclusão esta que é intuitivamente satisfatória. Quando somente uma largura de faixa é transmitida, a modulação se denomina *modulação de faixa lateral simples (SSB)\**.

### ■ DESCRIÇÃO DA MODULAÇÃO SSB NO DOMÍNIO DE FREQUÊNCIA

A descrição precisa de uma onda modulada SSB no domínio de frequência depende de qual faixa lateral é transmitida. Para investigar esta questão, considere um sinal de mensagem  $m(t)$  com um espectro  $M(j\omega)$  limitado à faixa  $\omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b$ , como na Figura 5.15(a). O espectro da onda modulada DSB-SC, obtido multiplicando-se  $m(t)$  pela onda portadora  $A_c \cos(\omega_c t)$ , é mostrado na Figura 5.15(b). A faixa lateral superior é representada em duplicata pelas frequências acima de  $\omega_c$  e aquelas abaixo de  $-\omega_c$ ; e quando somente a faixa lateral superior é transmitida, a onda modulada SSB resultante tem o espectro mostrado na Figura 5.15(c). De maneira semelhante, a faixa lateral inferior é representada em duplicata pelas frequências abaixo de  $\omega_c$  (para frequências positivas) e aquelas acima de  $-\omega_c$  (para frequências negativas); e quando somente a faixa lateral inferior é transmitida, o espectro da onda modulada SSB correspondente é como mostra a Figura 5.15(d). Dessa forma, a função essencial da modulação SSB é *deslocar* o espectro da onda moduladora, com ou sem inversão, para uma nova localização no domínio de frequência. Além disso, a exigência de largura de faixa de transmissão de um sistema de modulação SSB é a metade da necessária para um sistema AM padrão ou de modulação DSB-SC.

O benefício de usar a modulação SSB deriva-se, portanto, principalmente da exigência reduzida de largura de faixa e da eliminação da onda portadora de potência alta, duas características que tornam a modulação SSB a forma *ótima* (e, portanto, a mais desejada) de modulação CW linear. A principal desvantagem da modulação SSB, entretanto, é o custo e a complexidade para implementar tanto o transmissor como o receptor. Aqui, novamente, temos um compromisso entre a complexidade aumentada do sistema e um melhor desempenho do sistema.

\* N. de R.T.: SSB de Single Sideband

**4.18** Considere a amostragem do sinal  $x(t) = (1/\pi t) \sin(\pi t)$ .

- (a) Esboce a FT do sinal amostrado para os seguintes intervalos de amostragem:

- (i)  $\mathcal{T} = \frac{1}{4}$
- (ii)  $\mathcal{T} = \frac{1}{2}$
- (iii)  $\mathcal{T} = 1$
- (iv)  $\mathcal{T} = \frac{4}{3}$

- (b) Admitamos que  $x[n] = x(n\mathcal{T})$ . Esboce a DTFT de  $x[n]$ ,  $X(e^{j\Omega})$ , para cada um dos intervalos de amostragem dados em (a).

**4.19** O sinal de tempo contínuo  $x(t)$  com FT, como descreve a Fig. P4.19, é amostrado.

- (a) Esboce a FT do sinal amostrado para os seguintes intervalos de amostragem. Identifique se, em cada caso, ocorre aliasing.

- (i)  $\mathcal{T} = \frac{1}{15}$
- (ii)  $\mathcal{T} = \frac{2}{15}$
- (iii)  $\mathcal{T} = \frac{1}{5}$

- (b) Admitamos que  $x[n] = x(n\mathcal{T})$ . Esboce a DTFT de  $x[n]$ ,  $X(e^{j\Omega})$ , para cada um dos intervalos dados em (a).

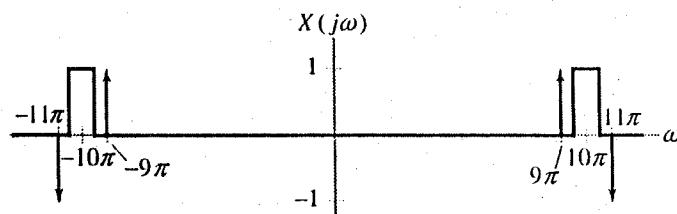


FIGURA P4.19

**\*4.20** Considere a subamostragem do sinal  $x[n] = [\sin(\pi n/6)]/\pi n$  de forma que  $y[n] = x[qn]$ . Esboce  $Y(e^{j\Omega})$  para as seguintes opções de  $q$ :

- (a)  $q = 2$
- (b)  $q = 4$
- (c)  $q = 8$

**\*4.21** O sinal de tempo discreto  $x[n]$  com DTFT descrita na Figura P4.21 é subamostrado para obter  $y[n] = x[qn]$ . Esboce  $Y(e^{j\Omega})$  para as seguintes opções de  $q$ :

- (a)  $q = 3$
- (b)  $q = 4$
- (c)  $q = 8$

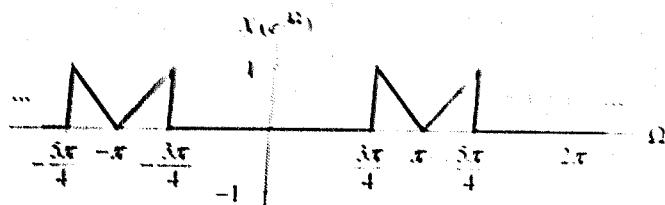


FIGURA P4.21

**\*4.22** Os sinais abaixo são amostrados, tendo o intervalo de amostragem  $\mathcal{T}$ . Determine os limites em  $\mathcal{T}$  que garantem que não haverá aliasing.

- (a)  $x(t) = (1/t) \sin \pi t + \cos(2\pi t)$
- (b)  $x(t) = \cos(10\pi t)[\sin(\pi t)]/\pi t$
- (c)  $x(t) = e^{-4t} u(t) * [\sin(Wt)]/\pi t$
- (d)  $x(t) = w(t)z(t)$ , em que as FTs  $W(j\omega)$  e  $Z(j\omega)$  são descritas na Figura P4.22.

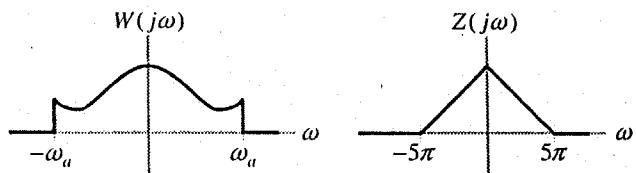


FIGURA P4.22

**\*4.23** Um sinal de tempo contínuo situa-se na faixa de freqüência  $|\omega| < 5\pi$ . Este sinal é contaminado por um sinal senoidal grande com freqüência  $120\pi$ . O sinal contaminado é amostrado numa taxa de freqüência de  $\omega_s = 13\pi$ .

- (a) Depois da amostragem, em qual freqüência o sinal senoidal interferente aparece?
- (b) O sinal contaminado é passado por um filtro antialiasing que consiste no circuito  $RC$  descrito na Fig. P4.23. Encontre o valor da constante de tempo  $RC$  necessária para que a senóide contaminada seja atenuada por um fator de 1000 antes da amostragem.
- (c) Esboce a resposta em magnitude em dB que o filtro antialiasing apresenta ao sinal de interesse para o valor de  $RC$  identificado em (b).

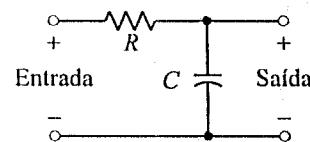


FIGURA P4.23

**4.24** Considere o sistema descrito na Figura P4.24. Suponhamos que  $|X(j\omega)| = 0$  para  $|\omega| > \omega_m$ . Encontre o maior valor de  $T$  para que  $x(t)$  possa ser reconstruído a partir de  $y(t)$ . Determine um sistema que execute a reconstrução com este valor máximo de  $T$ .

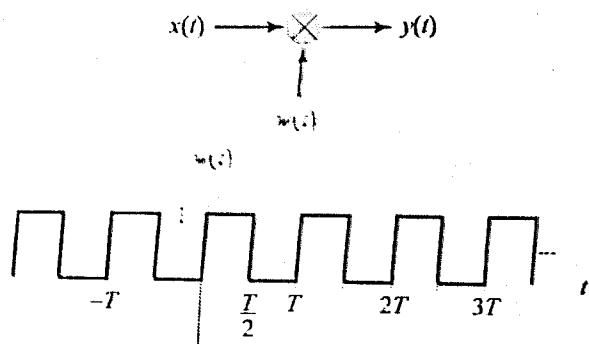
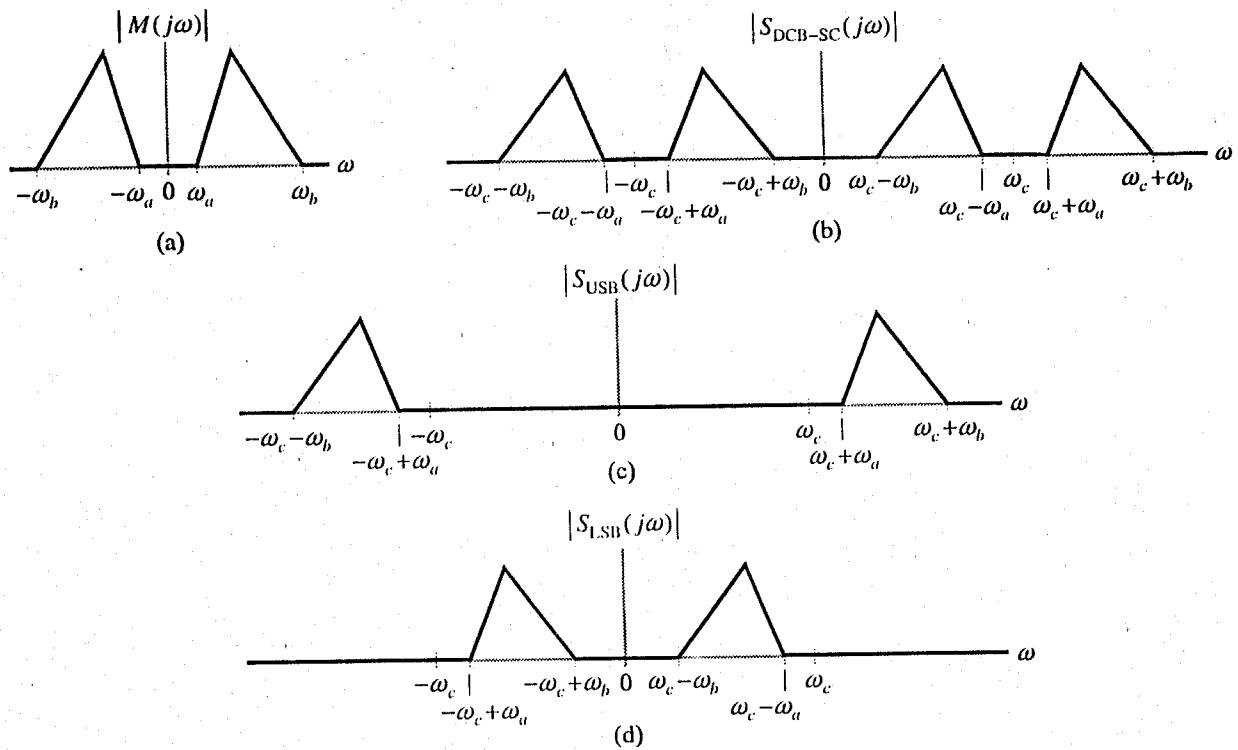
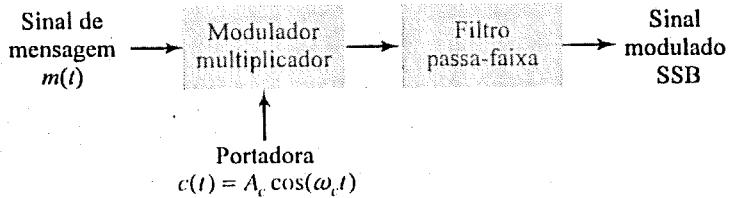


FIGURA P4.24



**FIGURA 5.15** Características de modulação SSB no domínio de freqüência. (a) Espectro de magnitude de um sinal de mensagem com ausência de energia de  $-\omega_a$  e  $\omega_a$ . (b) Espectro de magnitude de sinal DSB-SC. (c) Espectro de magnitude de onda modulada SSB que contém somente a faixa lateral superior. (d) Espectro de magnitude de onda modulada SSB que contém somente a faixa lateral inferior.

Usando as descrições de domínio de freqüência da Figura 5.15, podemos prontamente deduzir o *esquema de discriminação de freqüência* mostrado na Figura 5.16 para produzir modulação SSB. O esquema consiste num modulador multiplicador seguido de um filtro passa-faixa. O filtro é projetado para deixar passar a faixa lateral escolhida para transmissão e suprimir a faixa lateral restante. Para que um filtro seja fisicamente realizável, a faixa de transição que separa a faixa de passagem da faixa de rejeição deve ter uma largura finita. No contexto do esquema mostrado na Figura 5.16, este requisito exige que haja uma separação adequada entre a faixa lateral inferior e a faixa lateral superior da onda modulada DSB-SC produzida na saída do modulador multiplicador. Essa exigência somente pode ser satisfeita se o sinal de mensagem  $m(t)$  aplicado ao modulador multiplicador tiver uma *ausência de energia* em seu espectro, como indica a Figura 5.15(a). Felizmente, os sinais de fala por comunicação telefônica exibem uma ausência de energia que se estende de -300 a 300 Hz. É esta característica do sinal de fala que torna a modulação SSB adequada para sua transmissão. De fato, a telefonia analógica, que foi predominante durante boa parte do século XX, recorria à modulação SSB para suas necessidades de modulação.



**FIGURA 5.16** Sistemas para gerar o sinal de modulação SSB. O diagrama mostra o fluxo de informação: Sinal de mensagem  $m(t)$  entra no Modulador multiplicador, que também recebe a Portadora  $c(t) = A_c \cos(\omega_c t)$ . A saída é o Sinal modulado SSB, que passa por um Filtro passa-faixa antes de sair.

► **EXERCÍCIO 5.9** Uma onda modulada SSB  $s(t)$  é gerada usando-se uma portadora de freqüência  $\omega_c$  e uma onda moduladora senoidal de freqüência  $\omega_0$ . A amplitude da portadora é  $A_c$ , e a da onda moduladora é  $A_0$ . Defina  $s(t)$ , supondo que (a) somente a freqüência lateral superior é transmitida e (b) somente a freqüência lateral inferior é transmitida.

*Resposta:*

- (a)  $s(t) = \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c + \omega_0)t]$
- (b)  $s(t) = \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c - \omega_0)t]$

► **EXERCÍCIO 5.10** O espectro de um sinal de fala situa-se dentro da faixa  $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ . A freqüência de portadora é  $\omega_c$ . Especifique a faixa de passagem, a faixa de transição e a faixa de rejeição do filtro passa-faixa da Figura 5.16 de forma a transmitir (a) a faixa lateral inferior e (b) a faixa lateral superior.

*Resposta:*

- (a) Faixa de passagem:  $\omega_c - \omega_2 \leq |\omega| \leq \omega_c - \omega_1$   
Faixa de transição:  $\omega_c - \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_1$   
Faixa de rejeição:  $\omega_c + \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_2$
- (b) Faixa de passagem:  $\omega_c + \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_2$   
Faixa de transição:  $\omega_c - \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_1$   
Faixa de rejeição:  $\omega_c - \omega_2 \leq |\omega| \leq \omega_c - \omega_1$

#### \* ■ DESCRIÇÃO DA MODULAÇÃO SSB NO DOMÍNIO DE TEMPO

A descrição da modulação SSB no domínio de freqüência apresentada na Figura 5.15 e sua geração usando-se o esquema de discriminação da freqüência mostrado na Figura 5.16 aumentaram nosso conhecimento a respeito da modulação DSB-SC de uma maneira imediata. Porém, diferentemente da modulação DSB-SC, a descrição da modulação SSB no domínio de tempo não é imediata. Para desenvolver a descrição da modulação SSB no domínio de tempo, precisamos de uma ferramenta matemática conhecida como transformada de Hilbert. O dispositivo usado para executar esta transformação é conhecido como *transformador de Hilbert*, cuja resposta em freqüência é caracterizada da seguinte maneira:

- A resposta em módulo é a unidade para todas as freqüências, tanto positivas como negativas.
- A resposta em fase é  $-90^\circ$  para freqüências positivas e  $+90^\circ$  para freqüências negativas.

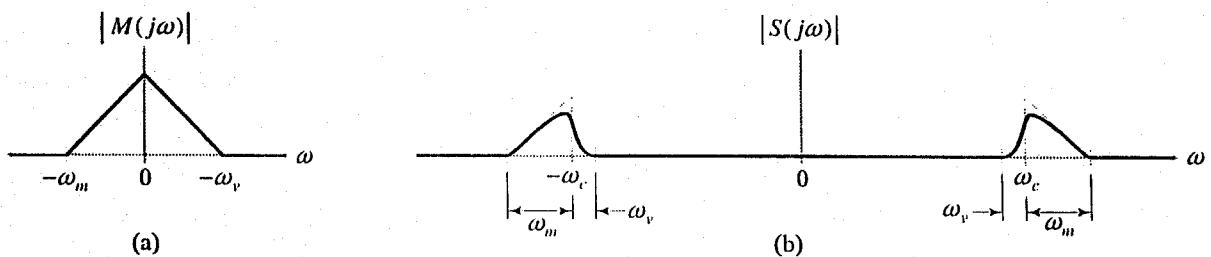
O transformador de Hilbert pode, por conseguinte, ser visto como um deslocador de fase de  $-90^\circ$  de faixa larga. Faixa larga em termos de que sua resposta em freqüência ocupa uma faixa de freqüências que, teoricamente, tem extensão infinita. Considerações adicionais sobre a descrição da modulação SSB no domínio de tempo estão além do escopo deste livro.

#### ■ MODULAÇÃO DE FAIXA LATERAL VESTIGIAL

A modulação de faixa lateral simples é adequada para a transmissão de fala devido à ausência de energia que existe no espectro dos sinais de fala entre zero e algumas centenas de hertz. Quando um sinal de mensagem contém componentes significativos em freqüências extremamente baixas (como no caso dos sinais de televisão e dados de faixa larga), as faixas laterais superior e inferior se encontram na freqüência de portadora. Isto significa que o uso da modulação SSB é impróprio para a transmissão desses sinais de mensagem devido à dificuldade prática de se construir um filtro que isole completamente uma faixa lateral. Esta dificuldade sugere outro esquema, conhecido como *modulação de faixa lateral vestigial* (VSB\*), a qual é um meio-termo entre as formas de modulação SSB e DSB-SC. Na modulação VSB, uma faixa lateral é passada quase que totalmente, enquanto que apenas um traço, ou *vestígio*, da outra faixa lateral é mantida.

\* N. de R.T.: VSB de Vestigial Sideband.

A Figura 5.17 ilustra o espectro de uma onda *modulada VSB*  $s(t)$  em relação ao do sinal de mensagem  $m(t)$ , supondo que a faixa lateral inferior seja transformada a faixa lateral vestigial.



**FIGURA 5.17** Conteúdo espectral de uma onda modulada VSB. (a) Espectro de magnitude de um sinal de mensagem. (b) Espectro de magnitude de uma onda modulada VSB que contém um vestígio da faixa lateral inferior.

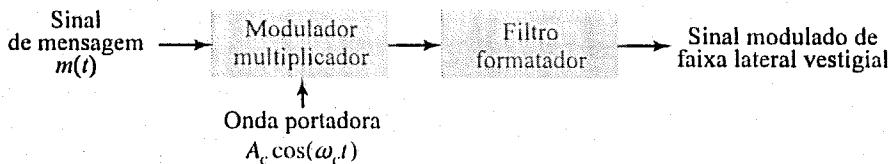
Especificamente, o vestígio transmitido da faixa lateral inferior compensa a quantidade removida da faixa lateral superior. A largura da faixa de transmissão exigida pela onda modulada VSB é dada, portanto, por

$$\omega_T = \omega_m + \omega_v \quad (5.21)$$

em que  $\omega_m$  é a largura de faixa da mensagem e  $\omega_v$  é a largura da faixa lateral vestigial.

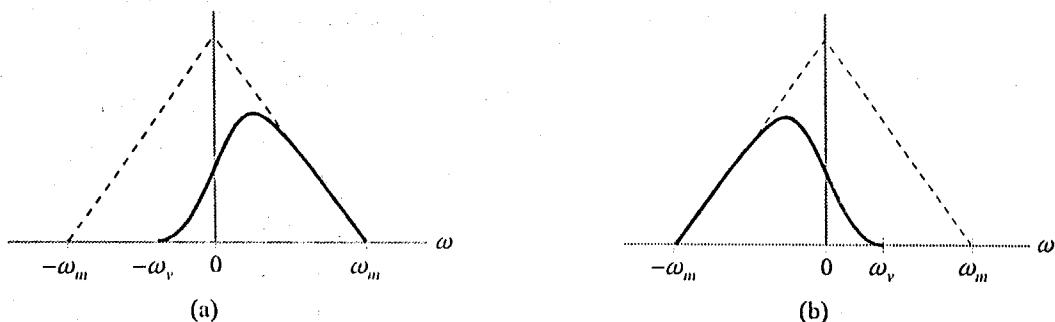
Para gerar uma onda modulada VSB, fazemos passar uma onda modulada DSB-SC através de um *filtro formatador ou produtor de forma da faixa lateral*, como na Figura 5.18. Diferentemente do filtro passa-faixa usado para modulação SSB, o filtro da Figura 5.18 não tem uma resposta em módulo “plana” em sua faixa de passagem, porque as faixas laterais superior e inferior têm de ser modeladas de maneira diferente. A resposta ao filtro é projetada de tal forma que o espectro de mensagem original  $M(j\omega)$  (isto é, a transformada de Fourier do sinal de mensagem  $m(t)$ ) é reproduzida na demodulação como um resultado da superposição de dois espectros:

- ▶ A parte de freqüência positiva de  $S(j\omega)$  (ou seja, a transformada de Fourier do sinal  $s(t)$  transmitido) deslocada de  $\omega_c$  para baixo em freqüência.
- ▶ A parte de freqüência negativa de  $S(j\omega)$ , deslocada de  $\omega_c$  para cima em freqüência.



**FIGURA 5.18** Sistema que consiste em modulador multiplicador e filtro formatador da faixa lateral para gerar uma onda modulada VSB.

Os módulos destas duas contribuições espectrais são ilustradas nas Figuras 5.19(a) e (b), respectivamente. Com efeito, uma reflexão do vestígio da faixa lateral inferior compensa a parte que falta da faixa lateral superior.



**FIGURA 5.19** A superposição dos dois espectros mostrados nas partes (a) e (b) resulta no espectro de mensagem original (mostrado com o tracejado) após a demodulação.

A exigência de projeto aqui descrita torna a implementação do filtro formatador da faixa lateral uma tarefa desafiadora.

A modulação de faixa vestigial tem a virtude de conservar a largura de faixa quase tão eficientemente quanto a modulação de faixa lateral simples, enquanto retém as características excelentes de baixa freqüência da modulação de faixa lateral dupla. Deste modo, a modulação VSB tornou-se o padrão para a transmissão analógica de sinais de televisão e similares, onde boas características de fase e transmissão de componentes de baixa freqüência são importantes, mas onde a largura de faixa necessária para a transmissão com faixa lateral dupla não está disponível ou não é econômica.

Na transmissão de sinais de televisão, na prática, uma quantidade controlada de portadora é adicionada ao sinal modulado VSB. Isto é feito para permitir o uso de um detetor de envoltória para demodulação. O projeto do receptor é, por isso, consideravelmente simplificado.

## 5.8 Modulação de Amplitude de Pulso

Depois de nos familiarizarmos com a onda contínua AM e suas variantes, voltaremos agora nossa atenção para a *modulação de amplitude de pulsos* (PAM\*). A PAM representa uma forma amplamente usada de modulação de pulso. Embora o deslocamento de freqüência desempenhe um papel fundamental na operação de sistemas AM, a operação básica em sistemas PAM é a da amostragem.

### A AMOSTRAGEM REVISITADA

O processo de amostragem, inclusive uma derivação do teorema da amostragem e seus tópicos relacionados, *aliasing* e reconstrução do sinal de mensagem a partir de sua versão amostrada, é coberto em detalhe nas Seções 4.6 e 4.7. Nesta subseção, associamos a discussão sobre a amostragem em PAM com o material lá coberto. Para iniciar, podemos redefinir o teorema da amostragem no contexto da PAM em duas partes equivalentes, da seguinte maneira:

1. *Um sinal de energia finita limitado em faixa, o qual não tem componentes de freqüência em radianos mais elevados do que  $\omega_m$ , é determinado de maneira única pelos valores do sinal em instantes de tempo separados por  $\pi/\omega_m$  segundos.*
2. *Um sinal de energia finita limitado em faixa, o qual não tem componentes de freqüência em radianos mais elevados do que  $\omega_m$ , pode ser completamente recuperado a partir do conhecimento de suas amostras tomadas a uma taxa de  $\omega_m/\pi$  por segundo.*

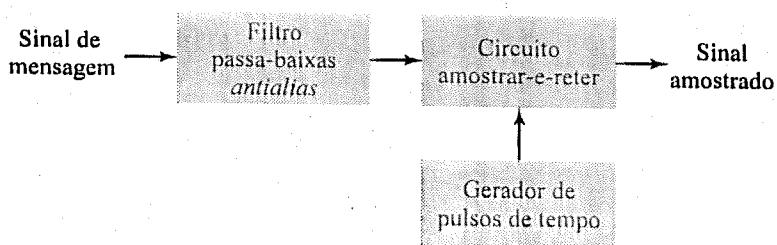
A Parte 1 do teorema da amostragem é explorado no transmissor de um sistema PAM; a parte 2 do teorema é explorada no receptor do sistema. O valor especial da taxa de amostragem  $\pi/\omega_m$  é denominado *taxa de Nyquist*, em homenagem ao trabalho pioneiro feito por Harry Nyquist sobre transmissão de dados.

Tipicamente, o espectro de um sinal de mensagem não é estritamente limitado em faixa, conforme é exigido pelo teorema da amostragem. Ao contrário, ele se aproxima de zero assintoticamente quando a freqüência se aproxima do infinito, o que dá origem a *aliasing* e, portanto, distorção de sinal. Lembre-se que *aliasing* refere-se a um componente de alta freqüência, no espectro do sinal de mensagem, que aparentemente assume a identidade de uma freqüência mais baixa, no espectro de uma versão amostrada do sinal de mensagem. Para combater os efeitos do *aliasing* na prática, usamos duas medidas corretivas:

- Antes da amostragem, um filtro *antialiasing* passa-baixas é usado para atenuar aqueles componentes de alta freqüência do sinal que se situam fora da faixa de interesse.
- O sinal filtrado é amostrado a uma taxa superior à taxa de Nyquist.

\* N. de R.T.: PAM de Pulse Amplitude Modulation.

Baseando-se nisto, a geração de um sinal PAM como uma seqüência de pulsos de topo plano, cujas amplitudes são determinadas pelas amostras de sinal correspondentes, segue o diagrama de blocos mostrado na Figura 5.20.



**FIGURA 5.20** Sistema que consiste num filtro *antialias* e circuito de amostragem-e-retenção para converter um sinal de mensagem em sinal PAM de topo plano.

**EXEMPLO 5.4** O componente de freqüência mais elevada de um sinal de fala necessário para comunicações telefônicas é aproximadamente 3,1 kHz. Sugira um valor apropriado para a taxa de amostragem.

**Solução:** O componente de freqüência mais elevada de 3,1 kHz corresponde a

$$\omega_m = 6,2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$$

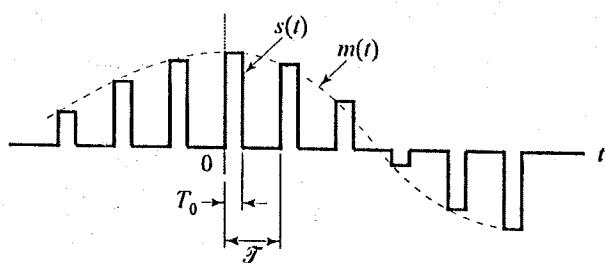
De maneira correspondente, a taxa de Nyquist é

$$\frac{\omega_m}{\pi} = 6,2 \text{ kHz}$$

Para um valor apropriado para a taxa de amostragem, ligeiramente mais elevada do que a taxa de Nyquist, podemos sugerir 8 kHz. De fato, esta taxa de amostragem é o padrão internacional para sinais de fala.

## ■ DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA PAM

A onda portadora usada na PAM consiste numa seqüência de pulsos breves de duração fixa, em termos do que a PAM é formalmente descrita da seguinte maneira. PAM é uma forma de modulação de pulsos na qual a amplitude da portadora pulsada é variada de acordo com os valores de amostragem instantânea do sinal de mensagem; a duração da portadora pulsada é mantida constante ao longo do processo. A Figura 5.21 ilustra a forma de onda desse sinal PAM. Observe que a freqüência fundamental da onda portadora (isto é a freqüência de repetição do pulso) é a mesma que a taxa de amostragem.



**FIGURA 5.21** Forma de onda de sinal PAM de topo plano com duração de pulso  $T_0$  e período de amostragem  $\mathcal{T}$ .

Para uma representação matemática do sinal PAM  $s(t)$  correspondente a um sinal de mensagem  $m(t)$ , podemos escrever

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m[n]h(t - n\mathcal{T}) \quad (5.22)$$

em que  $\mathcal{T}$  é o período de amostragem. O termo  $m[n]$  é o valor do sinal de mensagem  $m(t)$  no instante  $t = n\mathcal{T}$ . O termo  $h(t)$  é um pulso retangular de amplitude unitária e duração  $T_0$ , definidos da seguinte

maneira (veja a Figura 5.22(a)):

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.23)$$

Em termos físicos, a equação (5.22) representa uma operação de amostragem e retenção. Esta operação é análoga à reconstrução baseada no retentor de ordem zero descrita na Seção 4.7. Estas duas operações diferem uma da outra em termos de que a resposta ao impulso  $h(t)$  da equação (5.22) tem largura  $T_0$  ao invés de  $\mathcal{T}$ . Tendo esta diferença em mente, podemos usar o material apresentado na Seção 4.7 para derivar o espectro do sinal PAM  $s(t)$ .

A versão amostrada por impulso do sinal de mensagem  $m(t)$  é dada por

$$m_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m[n] \delta(t - n\mathcal{T}) \quad (5.24)$$

O sinal PAM  $s(t)$  é, ele próprio, descrito como

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m[n] h(t - n\mathcal{T}) \\ &= m_\delta(t) * h(t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

A equação (5.25) afirma que  $s(t)$  é matematicamente equivalente à convolução de  $m_\delta(t)$ , a versão amostrada por impulso de  $m(t)$ , e do pulso  $h(t)$ .

Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados da equação (5.25) e lembrando que a convolução de duas funções de tempo é transformada na multiplicação de suas respectivas transformadas de Fourier, obtemos

$$S(j\omega) = M_\delta(j\omega)H(j\omega) \quad (5.26)$$

em que  $S(j\omega) \xleftarrow{FT} s(t)$ ,  $M_\delta(j\omega) \xleftarrow{FT} m_\delta(t)$ , e  $H(j\omega) \xleftarrow{FT} h(t)$ . Do Capítulo 4, lebramo-nos que a amostragem por impulsos do sinal de mensagem  $m(t)$  introduz periodicidade no espectro, como é mostrado por

$$M_\delta(j\omega) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M\left(j\left(\omega - \frac{2\pi k}{\mathcal{T}}\right)\right) \quad (5.27)$$

em que  $1/\mathcal{T}$  é a taxa de amostragem. Portanto, a substituição da equação (5.27) na (5.26) produz

$$S(j\omega) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M\left(j\left(\omega - \frac{2\pi k}{\mathcal{T}}\right)\right) H(j\omega) \quad (5.28)$$

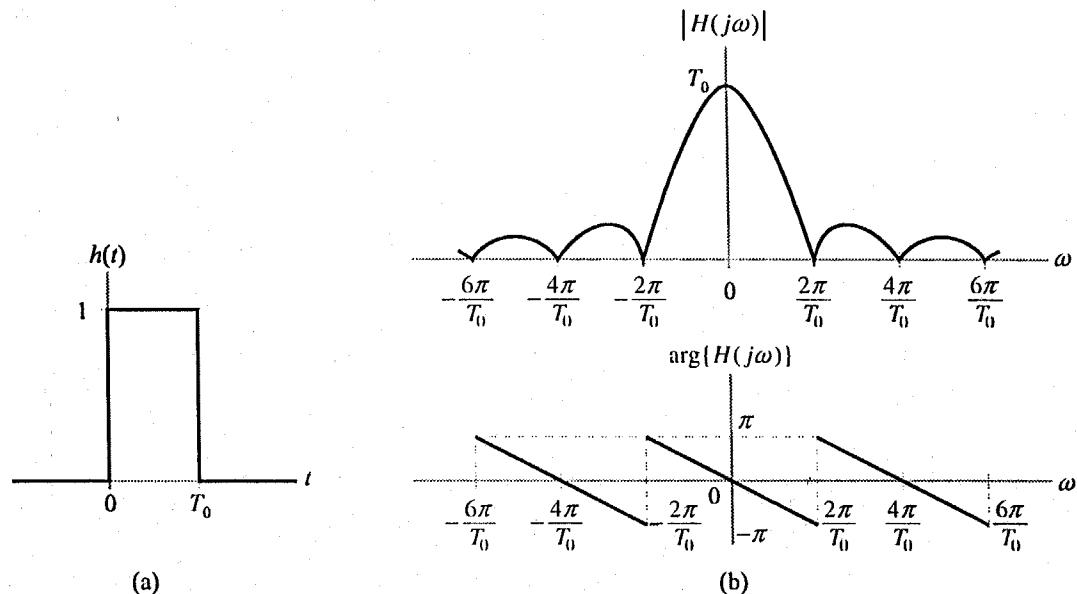
em que  $M(j\omega) \xleftarrow{FT} m(t)$ .

Finalmente, supomos que  $m(t)$  seja estritamente limitado em faixa e que a taxa de amostragem  $1/\mathcal{T}$  seja maior do que a taxa de Nyquist. Então, fazendo  $s(t)$  passar por um filtro de reconstrução escolhido como um filtro passa-baixas ideal com freqüência de corte  $\omega_m$ , descobrimos que o espectro da saída de filtro resultante é igual a  $M(j\omega)H(j\omega)$ . Este resultado é equivalente ao que seria obtido passando-se o sinal de mensagem original  $m(t)$  por um filtro passa-baixas com resposta em freqüência  $H(j\omega)$ .

A partir da equação (5.23), descobrimos que

$$H(j\omega) = T_0 \operatorname{sinc}(\omega T_0 / 2\pi) e^{-j\omega T_0 / 2} \quad (5.29)$$

cujos componentes de módulo e fase são plotados na Figura 5.22(b). Conseqüentemente, levando em conta as equações (5.26) e (5.29), vemos que, ao usar a PAM para representar um sinal de mensagem de tempo contínuo, introduzimos tanto uma distorção de amplitude como um retardamento de  $T_0/2$ . Ambos os efeitos também estão presentes no esquema de reconstrução amostrar-e-reter descrito na Seção 4.7. Uma forma similar de distorção de amplitude é causada pelo tamanho finito da abertura de varredura (scanning) nos aparelhos de televisão e fax. Conseqüentemente, a distorção de freqüência causada pelo uso de amostras de topo plano na geração de uma onda PAM, como na Figura 5.22(b), é chamada *efeito de abertura*.



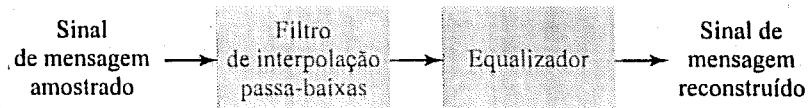
**FIGURA 5.22** (a) Pulso retangular  $h(t)$  de amplitude unitária e duração  $T_0$ . (b) Espectro de magnitude  $|H(j\omega)|$  e espectro de fase  $\arg\{H(j\omega)\}$  do pulso  $h(t)$ .

► **EXERCÍCIO 5.11** O que acontece à resposta em freqüência  $H(j\omega)/T_0$  obtida da equação (5.29) quando a duração de pulso  $T_0$  tende a zero?

$$\text{Resposta: } \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{H(j\omega)}{T_0} = 1$$

### ■ DEMODULAÇÃO DE SINAL PAM

Dada uma seqüência de amostras de topo plano,  $s(t)$ , podemos reconstruir o sinal de mensagem original  $m(t)$  usando o esquema mostrado na Figura 5.23. Ele consiste em dois componentes conectados em cascata. O primeiro componente é um filtro passa-baixas com uma freqüência de corte que é igual ao componente de freqüência mais elevada  $\omega_m$  do sinal de mensagem. O segundo componente é um *equalizador* que corrige o efeito de abertura devido à amostragem de topo plano no circuito de amostragem e retenção.



**FIGURA 5.23** Sistema que consiste num filtro de interpolação passa-baixas e equalizador para reconstruir um sinal de mensagem a partir de sua versão amostrada retangular.

O equalizador tem o efeito de diminuir a perda dentro da faixa do filtro de interpolação, à medida que a freqüência se eleva de maneira a compensar o efeito de abertura. Idealmente, a resposta em amplitude do equalizador é dada por:

$$\frac{1}{|H(j\omega)|} = \frac{1}{T_0 \operatorname{sinc}(\omega T_0 / 2)} = \frac{1}{2T_0} \frac{\omega T_0}{\sin(\omega T_0 / 2)}$$

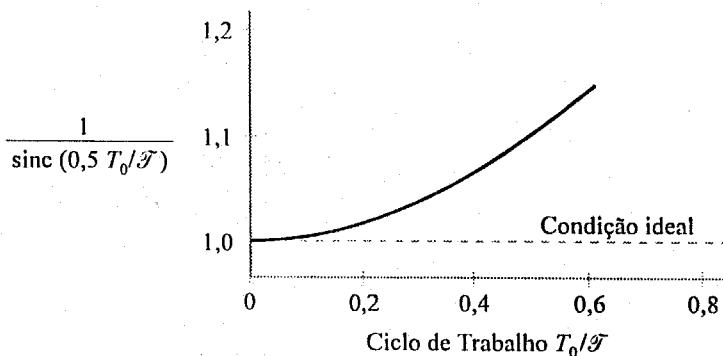
em que  $H(j\omega)$  é a resposta em freqüência definida na equação (5.29). A quantidade de equalização necessária na prática normalmente é pequena.

**EXEMPLO 5.5** O ciclo de trabalho num sinal PAM, a saber,  $T_0/\mathcal{T}$ , é 10%. Calcule a equalização necessária em  $\omega = \omega_m$  onde  $\omega_m$  é a freqüência de modulação.

**Solução:** Em  $\omega_m = \pi/\mathcal{T}$ , que corresponde ao componente de freqüência mais elevada do sinal de mensagem para uma taxa de amostragem igual à taxa de Nyquist, descobrimos, a partir da equação (5.29), que a resposta em módulo do equalizador em  $\omega_m$  normalizada para aquela na freqüência zero, é igual a

$$\frac{1}{\operatorname{sinc}(0,5T_0/\mathcal{T})} = \frac{(\pi/2)(T_0/\mathcal{T})}{\operatorname{sen}[(\pi/2)T_0/\mathcal{T}]}$$

em que a razão  $T_0/\mathcal{T}$  é igual ao ciclo de trabalho dos pulsos de amostragem. Na Figura 5.24, este resultado é plotado como uma função de  $T_0/\mathcal{T}$ . Idealmente, ela deve ser igual a 1 para todos os valores de  $T_0/\mathcal{T}$ . Para um ciclo de trabalho de 10%, ela é igual a 1,0041. Segue-se, portanto, que para ciclos de trabalho inferiores a 10%, a equalização de módulo necessária é inferior a 1,0041, e o efeito de abertura normalmente é considerado desprezível.



**FIGURA 5.24** Equalização mormalizada (para compensar o efeito de abertura) plotada contra o ciclo de trabalho  $T_0/\mathcal{T}$ .

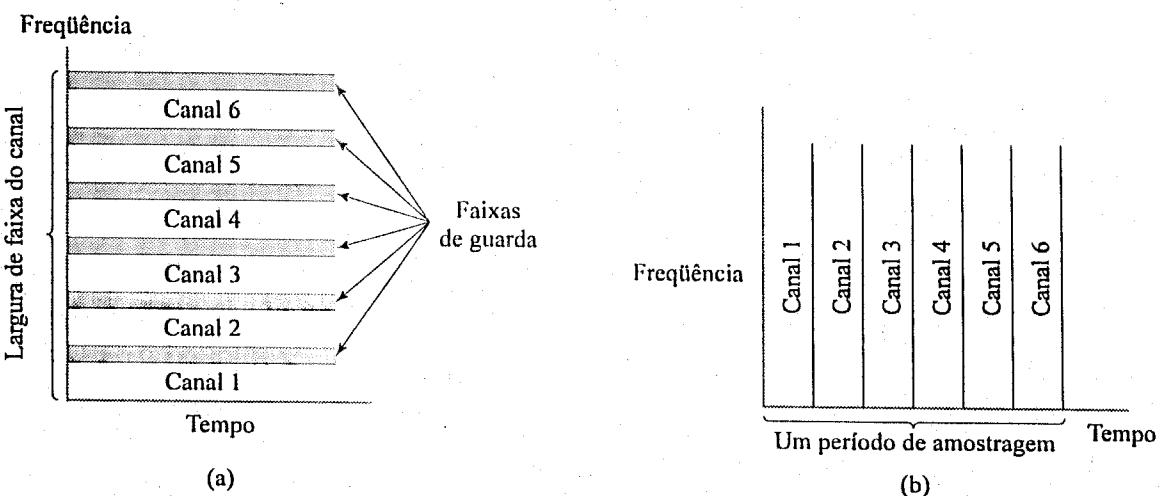
## 5.9 Multiplexação

Na Seção 5.3, apontamos que a modulação constitui um método para multiplexação, segundo o qual sinais de mensagem derivados de fontes independentes são combinados num sinal composto adequado para transmissão por um canal comum. Num sistema telefônico, por exemplo, a multiplexação é usada para transmitir conversações múltiplas por uma única linha de longa distância. Os sinais associados com diferentes interlocutores são combinados de tal maneira a não interferirem entre si durante a transmissão e, dessa forma, podem ser separados na extremidade receptora do sistema. A multiplexação pode ser realizada separando-se os diferentes sinais de mensagem tanto em freqüência ou no tempo, ou por meio do uso de técnicas de codificação. Dessa forma, temos três tipos básicos de multiplexação:

1. *Multiplexação por divisão de freqüências*, em que os sinais são separados atribuindo-se a eles diferentes faixas de freqüência. Isto é ilustrado na Figura 5.25(a) para o caso de seis diferentes sinais de mensagem. A multiplexação por divisão de freqüências favorece o uso da modulação CW, em que cada sinal de mensagem é capaz de usar o canal em base contínua no tempo.
2. *Multiplexação por divisão de tempo*, em que os sinais são separados atribuindo-se a eles diferentes fatias de tempo dentro de um intervalo de amostragem. Este segundo tipo de multiplexação é ilustrado na Figura 5.25(b) para o caso de seis diferentes sinais de mensagem. A multiplexação por divisão de tempo favorece o uso da modulação por pulsos, em que cada sinal de mensagem tem acesso à resposta em freqüência completa do canal.

3. *Multiplexação por divisão de código*, a qual recorre à atribuição de diferentes códigos para os usuários individuais do canal.

Os dois primeiros métodos de multiplexação serão descritos em seguida; a discussão da multiplexação por divisão de código está além do escopo deste livro.



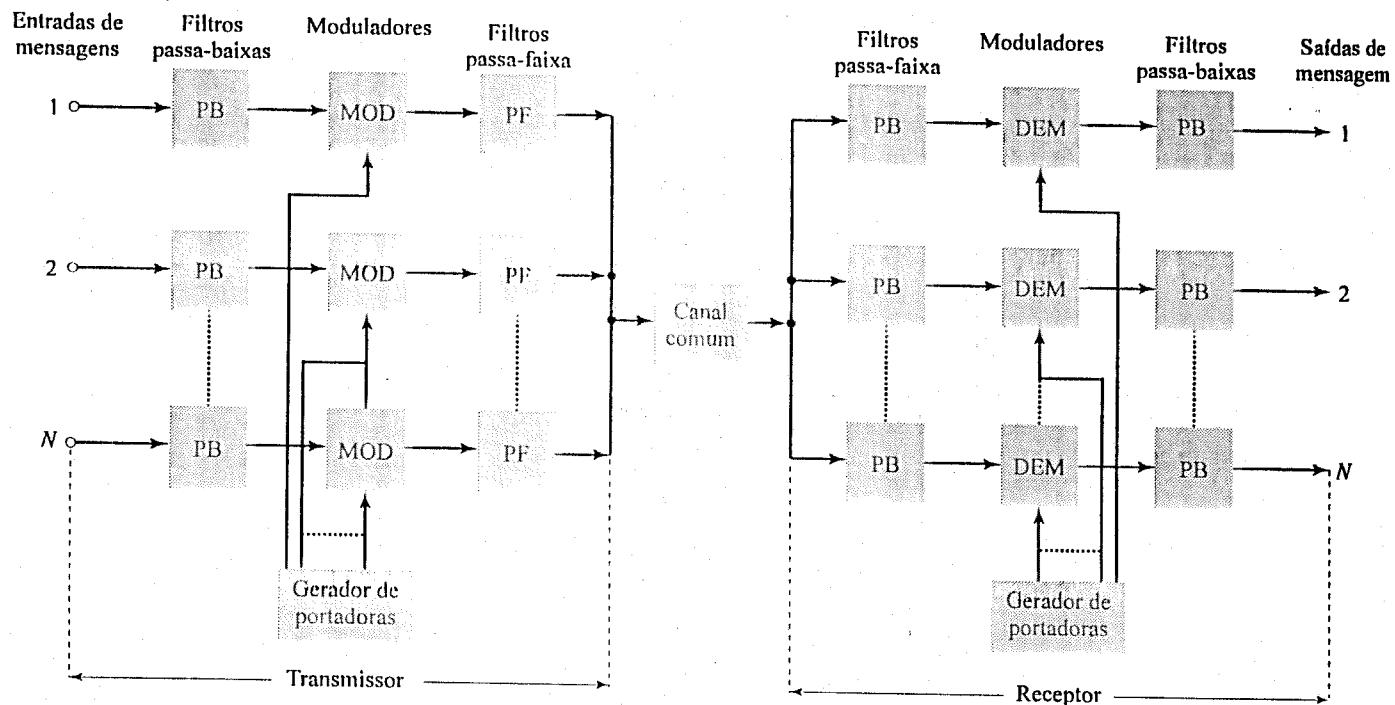
**FIGURA 5.25** Duas formas básicas de multiplexação. (a) Multiplexação por divisão de freqüências (com faixas de guarda). (b) Multiplexação por divisão de tempo; nenhuma provisão é feita aqui para a sincronização de pulsos.

### ■ MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO DE FREQÜÊNCIAS (FDM\*)

Um diagrama de blocos de um sistema FDM é mostrado na Figura 5.26. Presume-se que os sinais de mensagem que chegam sejam do tipo passa-baixas, mas seus espectros não têm necessariamente valores diferentes de zero até chegarem à freqüência zero. Depois de cada sinal de entrada, mostramos um filtro passa-baixas, o qual foi projetado para remover componentes de alta freqüência que não contribuem significativamente para a representação do sinal, mas são capazes de perturbar outros sinais de mensagem que compartilham do canal comum. Estes filtros passa-baixas podem ser omitidos soinente se os sinais de entrada forem suficientemente limitados em faixa inicialmente. Os sinais filtrados são aplicados a moduladores que deslocam as faixas de freqüência do sinal de forma a ocuparem intervalos de freqüência mutuamente exclusivos. As freqüências de portadora essenciais necessárias para executar estas conversões de freqüência são obtidas a partir de um gerador de portadoras.

Para a modulação, podemos usar qualquer um dos métodos descritos nas seções anteriores deste capítulo. Entretanto, o método de modulação mais amplamente usado na multiplexação por divisão de freqüências é a modulação por faixa lateral simples, a qual, no caso dos sinais de voz, exige uma largura de faixa que é aproximadamente igual ao do sinal de voz original. Na prática, a cada entrada de voz normalmente é atribuído uma largura de faixa igual a 4 kHz. Os filtros passa-faixa apóis os moduladores são usados para restringir a faixa de cada onda modulada a sua faixa prescrita. As saídas de filtro passa-faixa resultantes são combinadas em paralelo em seguida para formar a entrada para o canal comum. No terminal receptor, um banco de filtros passa-faixa, com suas entradas conectadas em paralelo, é usado para separar os sinais de mensagem com base na ocupação de freqüência. Finalmente, os sinais de mensagem originais são recuperados por demoduladores individuais. Note que o sistema FDM mostrado na Figura 5.26 opera somente em um sentido. Para fornecermos uma transmissão bidirecional, como na telefonia, por exemplo, precisamos duplicar completamente as facilidades de multiplexação, com os componentes conectados em ordem inversa e com as ondas de sinal partindo da direita para a esquerda.

\* N. de R. T.: FDM de Frequency-Division Multiplexing.



**FIGURA 5.26** Diagrama de blocos de um sistema FDM, mostrando os constituintes importantes do transmissor e receptor.

**EXEMPLO 5.6** Um sistema FDM é usado para multiplexar 24 sinais de voz independentes. Para a transmissão, é usada modulação SSB. Dado que a cada sinal de voz é atribuído uma largura de faixa de 4 kHz, calcule a largura de faixa de transmissão global do canal.

**Solução:** Sendo que a cada sinal de voz é atribuído uma largura de faixa de 4 kHz, o uso da modulação SSB requer uma largura de faixa de 4 kHz para sua transmissão. Consequentemente, a largura de faixa de transmissão global fornecida pelo canal é  $24 \times 4 = 96$  kHz.

### MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO DE TEMPO (TDM\*)

Algo que é fundamental para a operação de um sistema TDM é o teorema da amostragem. Ele afirma que podemos transmitir toda a informação contida num sinal de mensagem limitado em faixa usando-se amostras do sinal de mensagem tomado uniformemente a uma taxa que normalmente é ligeiramente mais elevada do que a taxa de Nyquist. Um importante recurso do processo de amostragem é uma conservação de tempo. Ou seja, a transmissão das amostras de mensagem emprega o canal de transmissão somente durante uma fração do intervalo de amostragem numa base periódica, igual à largura  $T_0$  da onda moduladora PAM. Desta maneira, parte do intervalo de tempo entre as amostras adjacentes fica disponível para ser usada por outras fontes independentes de mensagem independentes numa base de tempo compartilhado.

O conceito de TDM é ilustrado pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 5.27. Cada sinal de mensagem de entrada é restrinido primeiro na largura de faixa por um filtro passa-baixas para remover as freqüências que não são essenciais a uma representação de sinal adequada. As saídas de filtro passa-baixas são então aplicadas a um *comutador* que normalmente é implementado usando-se circuitos de comutação eletrônicos. A função do comutador é dupla: (a) tomar uma amostra estreita de cada um dos  $N$  sinais de mensagem de entrada a uma taxa de  $1/T$  que seja ligeiramente mais elevada do que  $\omega_c/\pi$ , em que  $\omega_c$  é a freqüência de corte do filtro passa-baixas de entrada; e (2)

\* N. de R.T.: TDM de Time Division Multiplexing.

intercalar sequencialmente estas  $N$  amostras dentro de um intervalo de amostragem  $T$ . De fato, esta última função é a essência da operação de multiplexação por divisão de tempo. Depois do processo de comutação, o sinal multiplexado é aplicado a um *modulador de pulso* (por exemplo, modulador de amplitude de pulsos), cujo propósito é transformar o sinal multiplexado numa forma adequada para transmissão por um canal comum. O uso da multiplexação por divisão de tempo introduz um *fator N de expansão de largura de faixa*, porque o esquema deve comprimir  $N$  amostras derivadas de  $N$  fontes de mensagem independentes numa fatia de tempo igual a um intervalo de amostragem. Na extremidade receptora do sistema, o sinal recebido é aplicado a um *demodulador de pulsos*, o qual executa a operação inversa do modulador de pulsos. As amostras estreitas produzidas na saída do demodulador de pulsos são distribuídas aos filtros de reconstrução passa-baixas apropriados por meio de um *decomutador ou demultiplexador*, o qual opera em sincronismo com o comutador no transmissor.

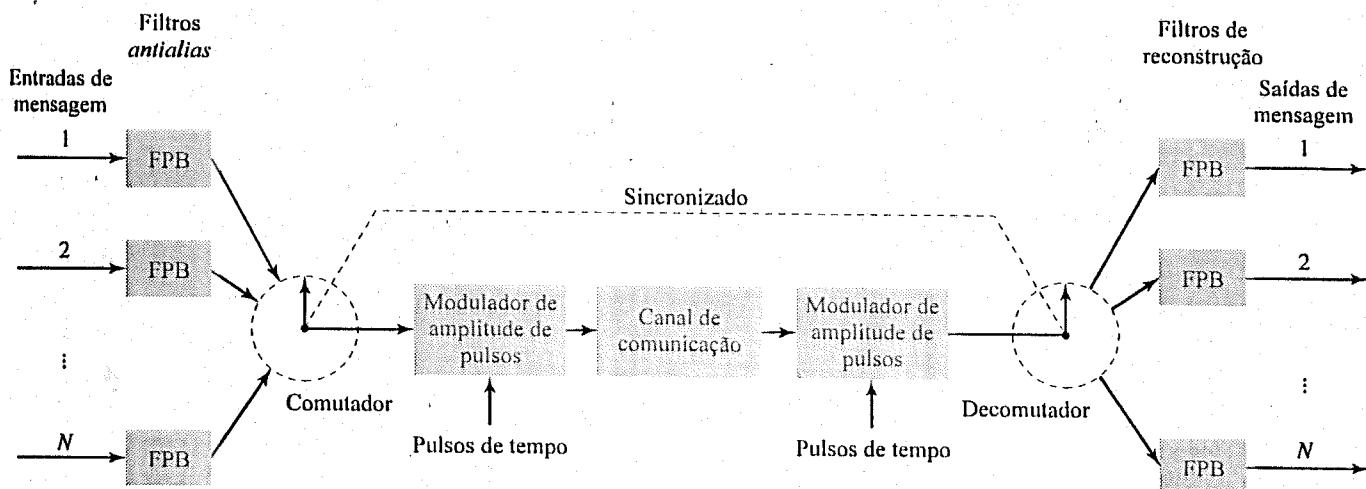


FIGURA 5.27 Diagrama de blocos de sistema TDM, mostrando os constituintes importantes do transmissor e receptor.

A *sincronização* entre as operações temporizadas do transmissor e receptor de um sistema TDM é fundamental para um desempenho satisfatório do sistema. No caso de um sistema TDM que usa PAM, a sincronização pode ser obtida inserindo-se um pulso extra em cada intervalo de amostragem numa base regular. A combinação de  $N$  sinais PAM e o pulso de sincronização contido num único período de amostragem é denominada *frame* (quadro).

Na PAM, a característica de um sinal de mensagem que é usada para demodulação é sua amplitude. Conseqüentemente, uma maneira simples de identificar o trem de pulsos de sincronização no receptor é certificar-se de que sua amplitude constante é suficientemente grande para permanecer acima de qualquer um dos sinais PAM. Baseando-se nisto, o trem de pulsos de sincronização é identificado no receptor usando-se um dispositivo de limiar fixado no nível apropriado. Observe que o uso da sincronização de tempo da maneira aqui descrita aumenta o fator de expansão da largura de faixa para  $N + 1$ , em que  $N$  é o número de sinais de mensagem a serem multiplexados.

O sistema TDM é altamente sensível a dispersão no canal de transmissão comum, ou seja, a variações de amplitude com a freqüência ou a resposta de fase não linear. Conseqüentemente, uma equalização exata tanto da resposta em amplitude como da resposta em fase do canal é necessária para que seja garantida uma operação satisfatória do sistema. A equalização de um canal de comunicação será discutida no Capítulo 8.

**EXEMPLO 5.7** Um sistema TDM é usado para multiplexar quatro sinais de voz independentes usando PAM. Cada sinal de voz é amostrado à taxa de 8 kHz. O sistema incorpora um trem de pulsos de sincronização para sua operação apropriada.

- Determine as relações de tempo entre o trem de pulsos de sincronização e os trens de impulso usados para amostrar os quatro sinais de voz.
- Calcule a largura de faixa de transmissão do canal para o sistema TDM, e compare o resultado com um sistema FDM correspondente que usa modulação SSB.

**Solução:**

- O período de amostragem é

$$\mathcal{T} = \frac{1}{8 \times 10^3} \text{ s} = 125 \mu\text{s}$$

Neste exemplo, o número de sinais de voz é  $N = 4$ . Por conseguinte, dividindo-se o período de amostragem de  $125 \mu\text{s}$  entre estes sinais de voz e o trem de pulso de sincronização, a fatia de tempo atribuída a cada um deles será

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\mathcal{T}}{N+1} \\ &= \frac{125}{5} = 25 \mu\text{s} \end{aligned}$$

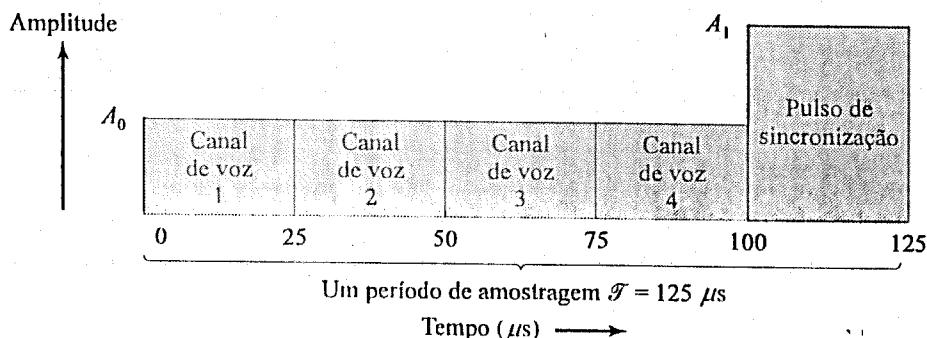
A Figura 5.28 mostra as relações de tempo entre o trem de pulso de sincronização e os quatro trens de impulso usados para amostrar os diferentes sinais de voz num único *frame*. Cada *frame* inclui fatias de tempo de duração comum  $T_0 = 25 \mu\text{s}$ , as quais são atribuídas aos sinais PAM correspondente ou ao trem de pulso de sincronização.

- Como uma consequência da discussão sobre o produto da largura de faixa de tempo na Seção 3.6, há uma relação inversa entre a duração de um pulso e a largura de faixa (isto é, a frequência de corte) do canal necessário para sua transmissão. Conseqüentemente, a largura de faixa de transmissão global do canal é

$$\begin{aligned} f_T &= \frac{\omega_T}{2\pi} \\ &= \frac{1}{T_0} \\ &= \frac{1}{25} \text{ MHz} = 40 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Em comparação, o uso de um sistema FDM baseado em modulação SSB requer uma largura de faixa de canal igual a  $N$  vezes a de um sinal de voz simples, ou seja,  $4 \times 4 = 16 \text{ kHz}$ . Dessa forma, o uso da PAM-TDM requer uma largura de faixa de canal que é  $40/16 = 2.5$  vezes a da SSB-FDM.

Na prática, a modulação por código de pulsos é usada comumente como o método de modulação para a TDM; isto resulta num aumento adicional da largura de faixa de canal, dependendo do tamanho da palavra de código usada na representação digital de cada pulso no sinal PAM.



**FIGURA 5.28** Composição de um *frame* de um sinal PAM multiplexado, incorporando quatro sinais de voz e o pulso de sincronização.

### \*5.10 Retardos de Fase e de Grupo

Sempre que um sinal seja transmitido através de um sistema dispersivo (isto é, seletivo em freqüência), como um canal de comunicação, certo *retardo* é introduzido no sinal de saída em relação ao sinal de entrada. O retardo é determinado pela resposta em fase do sistema, como discutiremos aqui.

Por conveniência de apresentação, digamos que  $\phi(\omega)$  denote a resposta em fase de um canal de comunicação dispersivo, como é mostrado por

$$\phi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\} \quad (5.30)$$

em que  $H(j\omega)$  é a resposta em freqüência do canal. Suponhamos que um sinal senoidal na freqüência  $\omega_c$  seja transmitido através do canal. O sinal recebido na saída do canal está atrasado em relação ao sinal transmitido em  $\phi(\omega_c)$  radianos. O retardo de tempo correspondente a este atraso de fase é simplesmente igual a  $-\phi(\omega_c)/\omega_c$ , em que o sinal de menos representa o atraso de fase. Este retardo de tempo é chamado *retardo de fase* do canal. O retardo de fase (*phase*), denotado por  $\tau_p$ , é formalmente definido por

$$\tau_p = -\frac{\phi(\omega_c)}{\omega_c} \quad (5.31)$$

É importante perceber, entretanto, que o retardo de fase *não* é necessariamente o retardo verdadeiro de sinal. Isto decorre do fato de que um sinal senoidal tem duração infinita, sendo cada ciclo exatamente igual ao ciclo precedente. Esse sinal não transmite informações, com exceção do fato de que ele está lá, por assim dizer. Entretanto, seria incorreto deduzir do raciocínio acima que o retardo de fase é o retardo verdadeiro de sinal. Na realidade, como vimos a partir do material apresentado neste capítulo, a informação somente pode ser transmitida através de um canal, aplicando-se alguma forma de modulação a uma portadora.

Suponhamos que tenhamos um sinal transmitido que consista numa onda modulada DSB-SC com freqüência de portadora  $\omega_c$  e freqüência de modulação senoidal  $\omega_0$ , como é mostrado por

$$s(t) = A \cos(\omega_c t) \cos(\omega_0 t) \quad (5.32)$$

a qual corresponde ao sinal considerado no Exemplo 5.3 (Por conveniência de apresentação, definimos  $A = A_p A_0$ ). Expressando o sinal modulado  $s(t)$  em termos de suas freqüências laterais superior e inferior, podemos escrever

$$s(t) = \frac{1}{2} A \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} A \cos(\omega_2 t)$$

onde

$$\omega_1 = \omega_c + \omega_0 \quad (5.33)$$

e

$$\omega_2 = \omega_c - \omega_0 \quad (5.34)$$

Agora, digamos que o sinal  $s(t)$  seja transmitido através do canal com resposta em fase  $\phi(\omega)$ . Para propósitos ilustrativos, supomos que a resposta em módulo do canal seja essencialmente constante (igual à unidade) na faixa de freqüência que vai de  $\omega_1$  a  $\omega_2$ . Conseqüentemente, o sinal recebido na saída do canal será

$$y(t) = \frac{1}{2} A \cos(\omega_1 t + \phi(\omega_1)) + \frac{1}{2} A \cos(\omega_2 t + \phi(\omega_2))$$

em que  $\phi(\omega_1)$  e  $\phi(\omega_2)$  são os deslocamentos de fase ou defasamentos produzidos pelo canal nas freqüências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente. De maneira equivalente, podemos expressar  $y(t)$  como

$$y(t) = A \cos\left(\omega_c t + \frac{\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2)}{2}\right) \cos\left(\omega_0 t + \frac{\phi(\omega_1) - \phi(\omega_2)}{2}\right) \quad (5.35)$$

onde invocamos as definições de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dadas nas equações (5.33) e (5.34), respectivamente. Comparando os componentes portadora senoidal e mensagem presentes no sinal recebido  $y(t)$  da equação (5.35) com os do sinal transmitido  $s(t)$  da equação (5.32), podemos fazer as duas afirmações seguintes:

- O componente portadora na freqüência  $\omega_c$  em  $y(t)$  está atrasado em relação a sua contraparte existente em  $s(t)$  de  $\frac{1}{2}(\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2))$ , o qual representa um retardo de tempo igual a

$$-\frac{\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2)}{2\omega_c} = -\frac{\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} \quad (5.36)$$

- O componente mensagem na freqüência  $\omega_0$  em  $y(t)$  está atrasado em relação a sua contraparte existente em  $s(t)$  de  $\frac{1}{2}(\phi(\omega_1) - \phi(\omega_2))$ , o qual representa um retardo de tempo igual a

$$-\frac{\phi(\omega_1) - \phi(\omega_2)}{2\omega_0} = -\frac{\phi(\omega_1) - \phi(\omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \quad (5.37)$$

Suponhamos que a freqüência de modulação  $\omega_0$  seja pequena em comparação com a freqüência  $\omega_c$  da portadora, o que implica que as freqüências laterais  $\omega_1$  e  $\omega_2$  estão próximas entre si, com  $\omega_c$  entre elas. Diz-se que esse sinal modulado é um *sinal de faixa estreita*. Então, podemos aproximar a resposta em fase  $\phi(\omega)$  nas vizinhanças de  $\omega = \omega_c$ , usando a expansão em série de Taylor de dois termos

$$\phi(\omega) = \phi(\omega_c) + \left. \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} (\omega - \omega_c) \quad (5.38)$$

Usando esta expansão para avaliar  $\phi(\omega_1)$  e  $\phi(\omega_2)$  para substituição na equação (5.36), vemos que o *retardo da portadora* é igual a  $-\phi(\omega_c)/\omega_c$ , o qual é idêntico à fórmula dada na equação (5.31) para o retardo de fase. Tratando a equação (5.37) de maneira semelhante, descobrimos que o retardo de tempo apresentado pelo sinal de mensagem (isto é, a "envoltória" do sinal modulado) é dado por

$$\tau_g = -\left. \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (5.39)$$

O retardo de tempo  $\tau_g$  é chamado *retardo de envoltória* ou *retardo de grupo*. O retardo de grupo é definido como o negativo da derivada da resposta em fase  $\phi(\omega)$  do canal com respeito a  $\omega$ , calculado na freqüência de portadora  $\omega_c$ .

Em geral, descobrimos assim que quando um sinal modulado é transmitido através de um canal de comunicação, há dois diferentes retardos a serem considerados:

- Retardo de portadora ou de fase,  $\tau_p$ , definido pela equação (5.31)
- Retardo de envoltória ou de grupo,  $\tau_g$ , definido pela equação (5.39)

O retardo de grupo é o retardo de sinal verdadeiro.

► **EXERCÍCIO 5.12** Quais são as condições para as quais o retardo de fase e o retardo de grupo assumem um valor comum?

**Resposta:** A resposta em fase  $\phi(\omega)$  deve ser linear em  $\omega$  e  $\phi(\omega_c) = 0$ .

**EXEMPLO 5.8** A resposta em fase de um canal de comunicação passa-faixa é definida por

$$\phi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega \omega_c} \right)$$

O sinal  $s(t)$  definido na equação (5.32) é transmitido através deste canal com  $\omega_c = 4,75 \text{ rad/s}$  e  $\omega_0 = 0,25 \text{ rad/s}$

Calcule (a) o retardo de fase e (b) o retardo de grupo.

*Solução:*

- (a) Em  $\omega = \omega_c$ ,  $\phi(\omega_c) = 0$ . De acordo com a equação (5.31), o retardo de fase  $\tau_p$  é zero.
- (b) Diferenciando  $\phi(\omega)$  com respeito a  $\omega$ , obtemos

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega_c(\omega^2 + \omega_c^2)}{\omega_c^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_c^2)^2}$$

Usando este resultado na equação (5.39), descobrimos que o retardo de grupo é

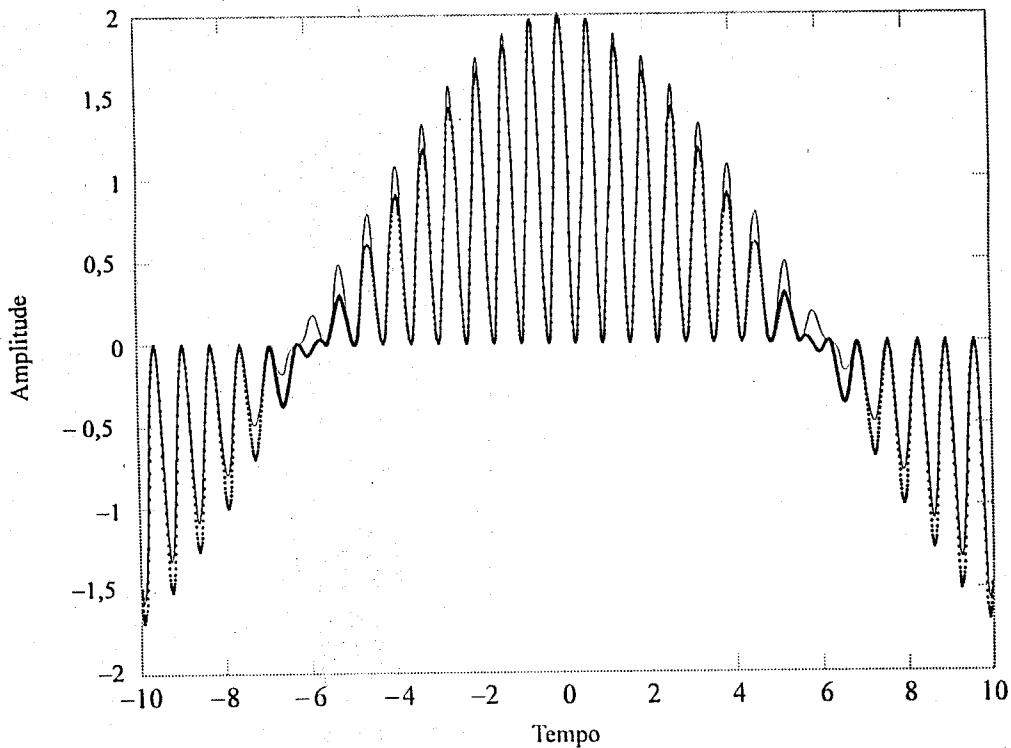
$$\tau_g = \frac{2}{\omega_c} = \frac{2}{4,75} = 0,4211 \text{ s}$$

Para exibir os resultados obtidos nas partes (a) e (b) na forma gráfica, a Figura 5.29 mostra uma superposição de duas formas de onda obtidas da seguinte maneira:

1. Uma forma de onda, mostrada como uma curva sólida, foi obtida multiplicando-se o sinal transmitido  $s(t)$  pela onda portadora  $\cos(\omega_c t)$ .
2. A segunda forma de onda, mostrada como uma curva pontilhada, foi obtida multiplicando-se o sinal recebido  $y(t)$  pela onda portadora  $\cos(\omega_c t)$ .

A Figura 5.29 mostra claramente que o retardo de portadora (fase)  $\tau_p$  é igual a zero, e que a envoltória do sinal recebido  $y(t)$  segue atrás do sinal transmitido  $\tau_g$  segundos depois. Para a apresentação de formas de onda nesta figura, intencionalmente não usamos um filtro para suprimir os componentes de alta freqüência resultantes das multiplicações descritas nos pontos 1 e 2 por causa do desejo de mantermos uma contribuição devida à portadora para ser exibida.

Observe também que a separação entre a freqüência lateral superior  $\omega_1 = \omega_c + \omega_0 = 5,00 \text{ rad/s}$  e a freqüência lateral inferior  $\omega_2 = \omega_c - \omega_0 = 4,50 \text{ rad/s}$  é aproximadamente 10% da freqüência de portadora  $\omega_c = 4,75 \text{ rad/s}$ , o que justifica referir-se ao sinal modulado deste exemplo como sinal de faixa estreita.



**FIGURA 5.29** Destacando o retardo nulo de portadora (curva sólida) e o retardo de grupo  $\tau_g$  (curva pontilhada), os quais são determinados de acordo com o Exemplo 5.9.

### ALGUMAS CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

Tendo estabelecido que o retardo de grupo é o verdadeiro retardo de sinal quando um sinal modulado é transmitido através de um canal de comunicação, precisamos tratar agora da seguinte questão: Qual é a importância prática do retardo de grupo? Para lidar com esta questão, primeiramente temos de perceber que a fórmula da equação (5.39) para determinar o retardo de grupo aplica-se estritamente a sinais modulados que têm faixa estreita, ou seja, a largura de faixa do sinal de mensagem é pequena em comparação com a freqüência da portadora. Somente quando esta condição é satisfeita é que seria justificável usarmos a aproximação de dois termos da equação (5.38) para a resposta em fase  $\phi(\omega)$ , com base no que a equação (5.39) foi derivada.

Entretanto, há muitas situações práticas em que esta suposição de faixa estreita não é satisfeita porque a largura de faixa da mensagem é comparável à freqüência da portadora. Em situações deste tipo, o retardo de grupo é formulado como um *parâmetro dependente da freqüência*, como é mostrado por

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (5.40)$$

a qual inclui a equação (5.39) como um caso especial. Agora, começamos a ver a real importância do retardo de grupo. Especificamente, quando um sinal modulado de *faixa larga* é transmitido através de um canal dispersivo, os componentes de freqüência da mensagem aparecem atrasados em diferentes quantidades na saída do canal. Conseqüentemente, o sinal de mensagem experimenta uma forma de distorção linear conhecida como *distorção de retardo*. Para reconstruir uma versão fiel do sinal de mensagem original no receptor, temos de usar um *equalizador de retardo*. Este equalizador tem de ser projetado de tal maneira que, quando ele estiver conectado em cascata com o canal, o retardo de grupo global seja constante (isto é, a fase total é linear em termos de freqüência).

Como um exemplo ilustrativo, considere o onipresente canal telefônico, cuja faixa de freqüência útil se estende de aproximadamente 0,1 a 3,1 kHz. Ao longo desta faixa de freqüências, a resposta em módulo do canal é considerada essencialmente constante, de forma que há pouca distorção de amplitude. Em comparação, o retardo de grupo do canal é altamente dependente da freqüência, como mostra a Figura 5.30. No que diz respeito à comunicação telefônica, a variação de retardo de grupo no canal em termos de freqüência não tem consequências reais porque nossos ouvidos são relativamente insensíveis a distorções causadas por retardo. A história é drasticamente diferente, entretanto, quando dados de faixa larga são transmitidos por um canal telefônico. Por exemplo, para uma taxa de dados de 16 quilobits por segundo, a duração de um bit é aproximadamente  $60\mu s$ . Na Figura 5.30, vemos que na faixa útil de freqüência do canal telefônico, o retardo de grupo varia de zero a vários milisegundos. Conseqüentemente, a distorção de retardo é extremamente danosa para a transmissão de dados de faixa larga por um canal telefônico. Nesse tipo de aplicação, a equalização do retardo é essencial para se ter uma operação satisfatória.

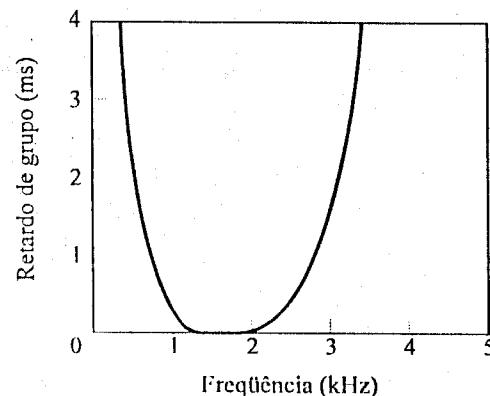


FIGURA 5.30 Resposta do retardo de grupo de um canal telefônico de voz. (Adaptado de J. C. Bellamy, *Digital Telephony*, Wiley, 1982.)

## 5.11 Explorando Conceitos com o MATLAB

Neste capítulo, discutimos a idéia de modulação para a transmissão de um sinal de mensagem por um canal passa-faixa. Para ilustrar esta idéia, usamos uma onda senoidal como sinal (modulador) de mensagem.

Em especial, usamos os Exemplos 5.1 e 5.3 para ilustrar os espectros de ondas moduladas senoidalmente, baseadas na modulação AM completa e DSB-SC, supondo condições ideais. Nesta seção, usamos o MATLAB para ampliar o que foi exposto sobre esses exemplos, considerando ondas moduladas de duração finita, que é o que elas são em situações da vida real. Em especial, recorremos ao resultado apresentado no Exemplo 4.18, em que usamos a DTFS para aproximar a transformada de Fourier de um sinal de duração finita que consiste num par de componentes senoidais.

### ■ AM COMPLETA

Na descrição da modulação de amplitude no domínio de tempo, a onda modulada consiste na portadora mais um produto do sinal de mensagem (isto é, a onda moduladora) vezes a portadora. Dessa forma, para o caso da modulação senoidal considerada no Exemplo 5.1, temos

$$s(t) = A_c [1 + \mu \cos(\omega_0 t)] \cos(\omega_c t)$$

em que  $\mu$  é o fator de modulação. O termo  $1 + \mu \cos(\omega_0 t)$  é uma versão modificada do sinal de modulação e  $A_c \cos(\omega_c t)$  é a portadora.

Para a experiência com AM aqui descrita, temos

Amplitude da portadora,	$A_c = 1$
Freqüência da portadora,	$\omega_c = 0,8\pi \text{ rad/s}$
Freqüência de modulação,	$\omega_m = 0,1\pi \text{ rad/s}$

Desejamos exibir e analisar 10 ciclos completos da onda AM. Isto corresponde a uma duração total de 200 s. Escolhendo uma taxa de amostragem de  $1/\mathcal{T} = 10 \text{ Hz}$ , temos um total de  $N = 2000$  amostras no tempo. A faixa de freqüência que nos interessa é  $-10\pi \leq \omega \leq 10\pi$ . Desde que a separação entre a portadora e qualquer uma das freqüências laterais é igual à freqüência de modulação  $\omega_m = 0,1\pi \text{ rad/s}$ , gostaríamos de ter uma resolução de freqüência igual a  $\omega_r = 0,01\pi \text{ rad/s}$ . Consequentemente, para alcançar esta resolução, necessitamos do seguinte número de amostras de freqüência (veja a equação (4.54)):

$$M \geq \frac{\omega_s}{\omega_r} = \frac{20\pi}{0,01\pi} = 2000$$

Por conseguinte, escolhemos  $M = 2000$ . Para aproximar a transformada de Fourier da onda AM  $s(t)$ , podemos usar uma DTFS de 2000 pontos. A única variável no experimento com AM é o fator de modulação  $\mu$ . Especificamente, desejamos investigar três diferentes situações:

- $\mu = 0,5$ , correspondente à submodulação.
- $\mu = 1,0$ , para o qual o sistema AM está à beira da sobremodulação.
- $\mu = 2,0$ , correspondente à sobremodulação

Reunindo todos estes pontos, podemos formular agora os comandos do MATLAB para gerar a onda AM e analisar seu conteúdo de freqüência da seguinte forma:

```
Ac = 1; % amplitude da portadora.
wc = 0.8*pi; % freqüência da portadora.
w0 = 0.1*pi; % freqüência de modulação.
mu = 0.5; fator de modulação.
t = 0:0.1:199.9;
s = Ac*(1 + mu*cos(w0*t)).*cos(wc*t);
plot(t,s)
```

```

Smag = abs(fftshift(fft,2000))/2000;
% Smag denota o espectro de magnitude da onda AM
w = 10*[ -1000:999]*2*pi/2000;
plot(w,Smag)

```

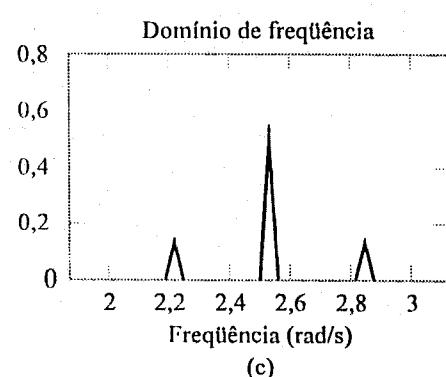
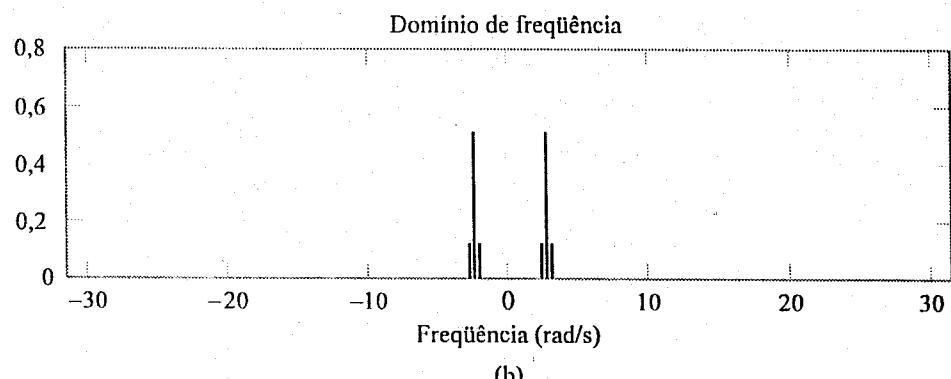
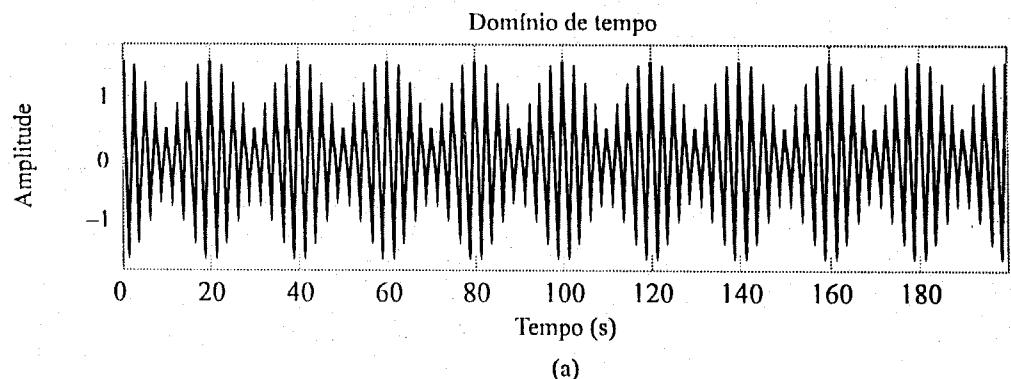
O quarto comando é escrito para  $\mu = 0,5$ . As computações são repetidas para  $\mu = 1,2$ .

A seguir, descreveremos o efeito de variarmos o fator de modulação  $\mu$  nas características de domínio de tempo e de domínio de freqüência da onda AM.

### 1. $\mu = 0,5$ .

A Figura 5.31(a) mostra 10 ciclos da onda AM completa  $s(t)$  correspondente a  $\mu = 0,5$ . Vê-se claramente que a envoltória de  $s(t)$  segue fielmente a onda moduladora senoidal.

Isto significa que podemos usar um detector de envoltória para demodulação. A Figura 5.31(b) mostra o espectro de magnitude de  $s(t)$ . Na Figura 5.31(c), ampliamos a estrutura fina do espectro de  $s(t)$  em torno da freqüência da portadora. Esta última figura exibe claramente as relações exatas entre as freqüências laterais e a portadora, de acordo com a teoria da modulação. Em especial, a freqüência lateral inferior, a portadora e a freqüência lateral superior da Figura 5.31(c) estão localizadas em  $\omega_c - \omega_0 = \pm 0,7\pi$  rad/s,  $\omega_c = \pm 0,8\pi$  rad/s e  $\omega_c + \omega_0 = 0,9\pi$  rad/s, respectivamente.



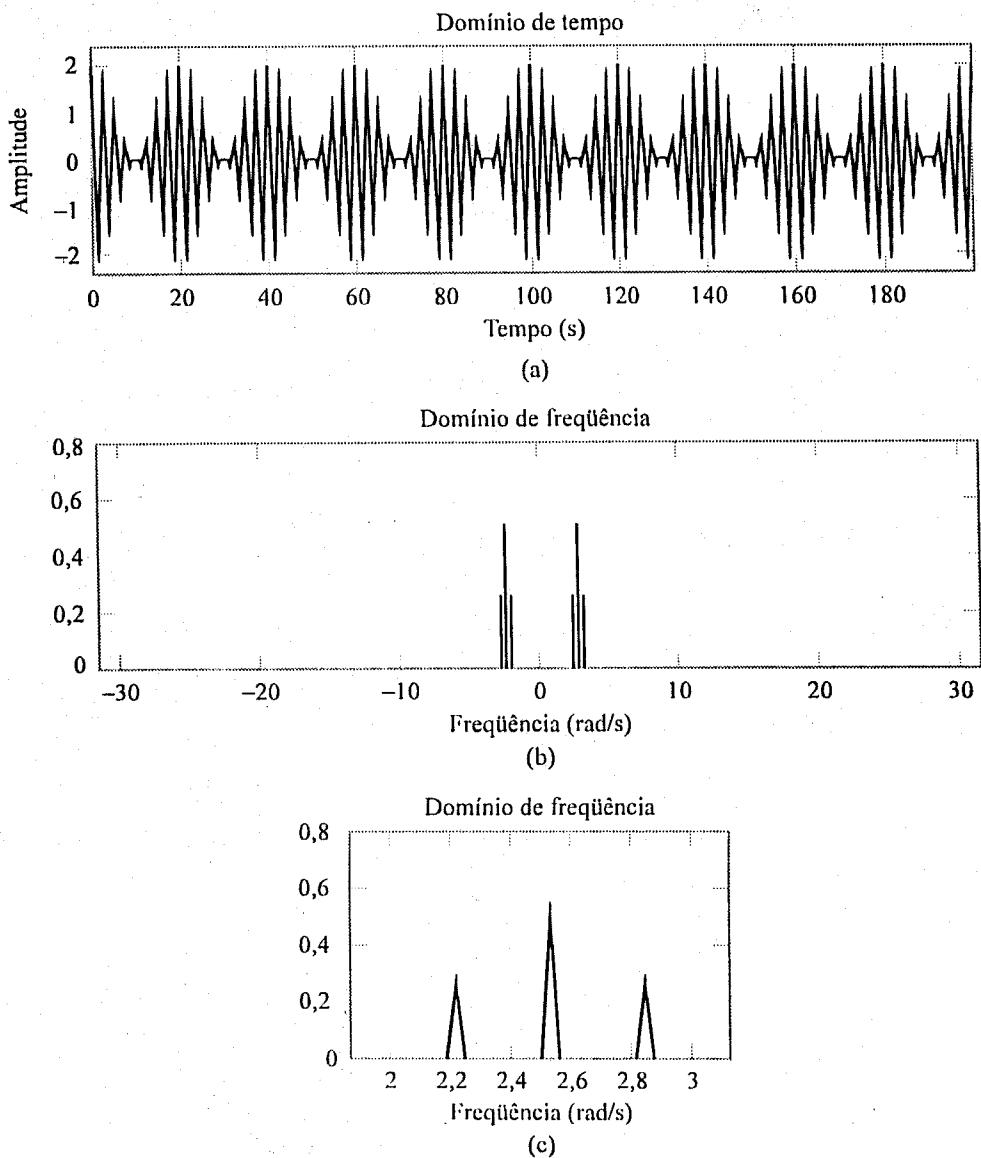
**FIGURA 5.31** Modulação de amplitude com 50% de modulação. (a) Onda AM, (b) Espectro de magnitude da onda AM, e (c) Espectro expandido em torno da freqüência da portadora.

Além disso, a amplitude de ambas as faixas laterais é  $(\mu/2) = 0,25$  vezes a da portadora; veja a Figura 5.5 para uma comparação.

### 2. $\mu = 1,0$ .

A Figura 5.32(a) mostra 10 ciclos da onda AM  $s(t)$  com os mesmos parâmetros usados na Figura 5.31(a), com exceção do fato que  $\mu = 1,0$ . A Figura mostra que a onda AM agora está à beira da sobremodulação.

O espectro de magnitude de  $s(t)$  é mostrado na Figura 5.32(b), e sua versão ampliada (em torno da freqüência da portadora) é mostrada na Figura 5.32(c). Aqui, mais uma vez, vemos que a estrutura básica do espectro de magnitude da onda AM completa está em perfeita concordância com a teoria.

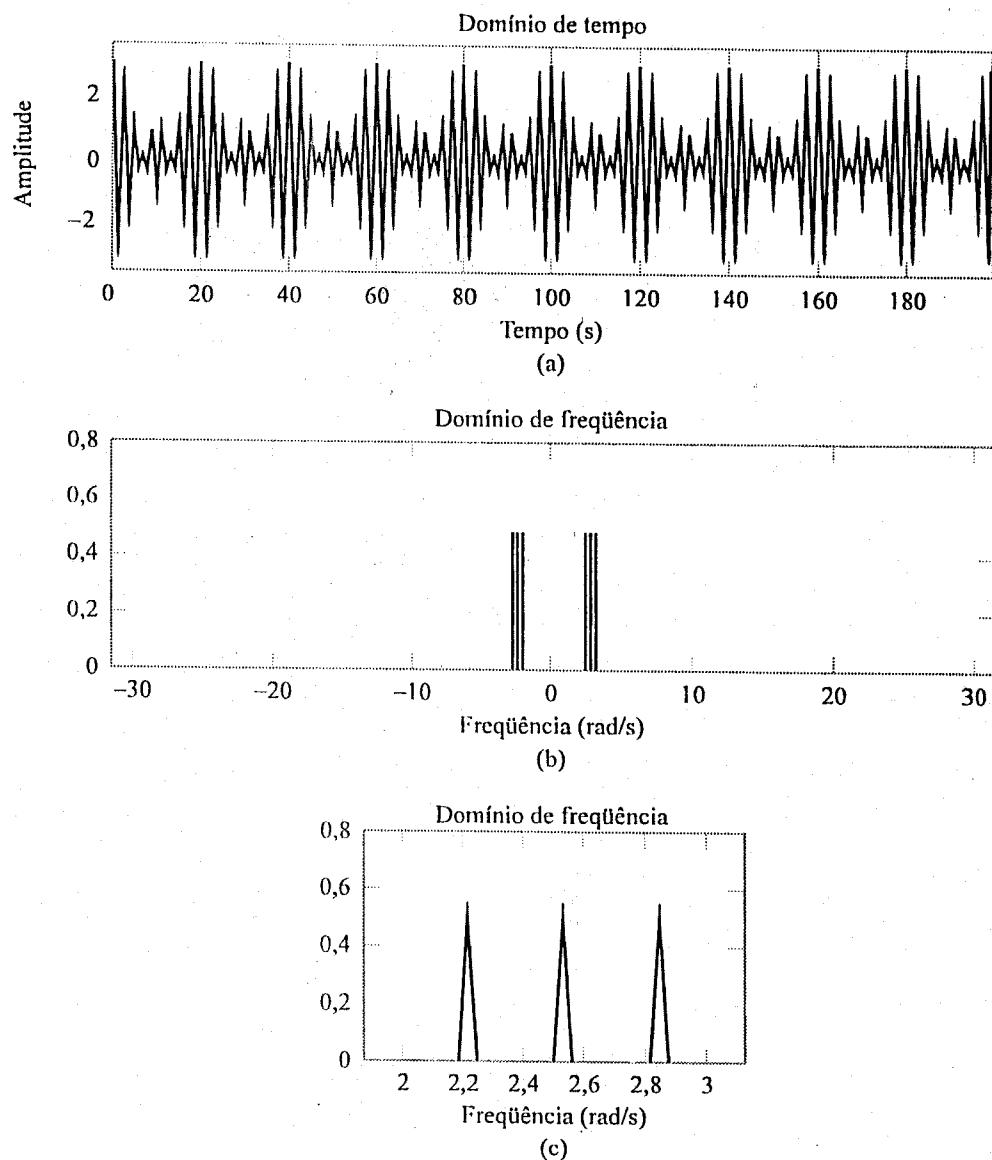


**FIGURA 5.32** Modulação de amplitude com 100% de modulação. (a) Onda AM, (b) Espectro de magnitude da onda AM, e (c) Espectro expandido em torno da freqüência da portadora.

### 3. $\mu = 2,0$ .

A Figura 5.33(a) demonstra o efeito da sobremodulação quando se usa um fator de modulação igual a  $\mu = 2$ . Aqui, não vemos qualquer relação clara entre a envoltória da onda  $s(t)$  sobremodulada

e a onda moduladora senoidal. Isto implica que um detector de envoltória não funcionará, e que devemos usar um detector coerente para realizar o processo de demodulação. Observe, entretanto, que o conteúdo espectral básico da onda AM exibida nas Figuras 5.33(b) e (c) segue exatamente o que a teoria prevê.



**FIGURA 5.33** Modulação de amplitude com 200% de modulação. (a) Onda AM, (b) Espectro de magnitude da onda AM, e (c) Espectro expandido em torno da freqüência da portadora.

### ■ MODULAÇÃO DSB-SC

Numa onda modulada DSB-SC, a portadora é suprimida e ambas as faixas laterais são transmitidas completamente. Ela é produzida simplesmente multiplicando-se a onda moduladora pela onda portadora. Dessa forma, para o caso da modulação senoidal, temos

$$s(t) = A_c A_0 \cos(\omega_c t) \cos(\omega_0 t)$$

Os comandos do MATLAB para gerar  $s(t)$  e analisar seu conteúdo de freqüência são os seguintes:

```
Ac = 1; % amplitude da portadora
wc = 0.8*pi; % freqüência de portadora em rad/s
A0 = 1; % amplitude do sinal modulador
w0 = 0.1*pi; % freqüência do sinal modulador
```

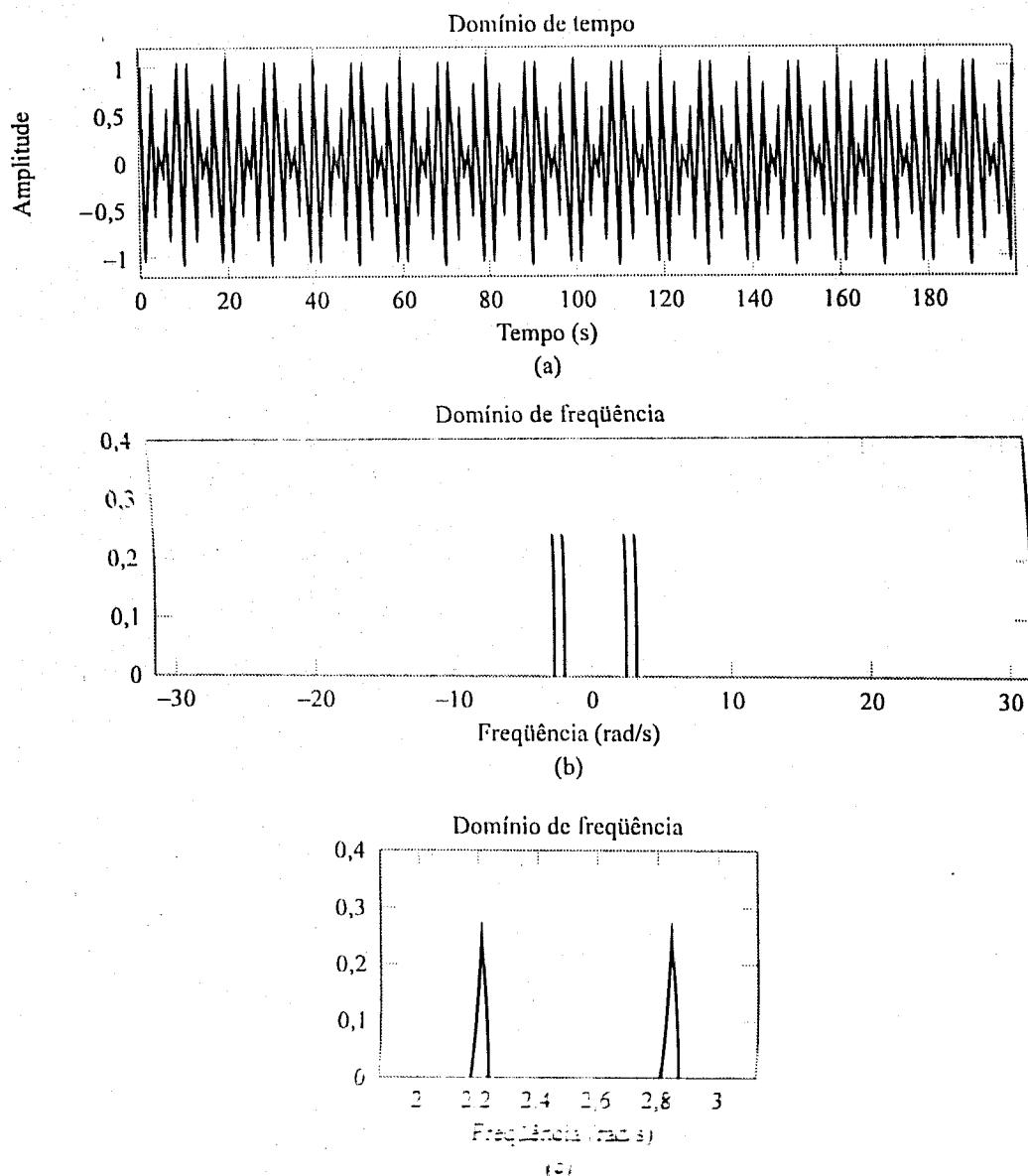
```

t = 0:.1:199.9;
s = Ac*A0*cos(wc*t).*cos(w0*t);
plot(t,s)
Smag = abs(fftshift(fft(s,2000))/2000;
w = 10*[-1000:999]*2*pi/2000;
plot(w,Smag)

```

Estes comandos foram usados para investigar aspectos diferentes da modulação DSB-SC, conforme descrevemos aqui.

1. A Figura 5.34(a) mostra 10 ciclos da onda modulada DSB-SC  $s(t)$  correspondentes à onda moduladora senoidal. Como esperávamos, a envoltória da onda modulada não apresenta relações claras com a onda moduladora senoidal. Conseqüentemente, devemos usar uma detecção coerente para demodulação, o que será discutido adicionalmente no ponto 2. A Figura 5.34(b) mostra o espectro de magnitude de  $s(t)$ . Uma visão ampliada do espectro em torno da freqüência da portadora é mostrada na Figura 5.34(c). Estas duas figuras mostram claramente que a portadora é, de fato, suprimida, e que as freqüências laterais superior e inferior estão localizadas exatamente onde deveriam estar, a saber,  $0,9\pi$  e  $0,7\pi$  rad/s, respectivamente.



**FIGURA 5.34** Modulação DSB-SC. (a) Onda modulada DSB-SC. (b) Espectro de magnitude da onda modulada. (c) Espectro expandido em torno da freqüência da portadora.

2. Para realizar a detecção coerente, multiplicamos a onda modulada DSB-SC  $s(t)$  por uma réplica da portadora e depois fazemos o resultado passar por um filtro passa-baixas, como foi descrito na Seção 5.5. A saída do modulador multiplicador da Figura 5.11(b) é definida (supondo-se sincronismo perfeito entre o transmissor e o receptor) por

$$v(t) = s(t) \cos(\omega_c t)$$

De maneira correspondente, o comando do MATLAB é

$$v = s.*\cos(wc*t);$$

em que  $s$  é, ele próprio, como computado anteriormente. A Figura 5.35(a) mostra a forma de onda de  $v(t)$ . Aplicando o comando `fft` em  $v$  e tomando o valor absoluto do resultado, obtemos o espectro de magnitude mostrado na Figura 5.35(b). Esta última figura mostra prontamente que  $v(t)$  consiste nos seguintes componentes:

- Um componente senoidal com freqüência  $0,1\pi$  rad/s, representando a onda moduladora.
- Uma nova onda DSB-SC modulada com freqüência de portadora dupla de  $1,6\pi$  rad/s; Na realidade, as freqüências laterais desta onda modulada estão localizadas em  $1,5\pi$  e  $1,7\pi$  rad/s.

Conseqüentemente, podemos recuperar o sinal modulador senoidal fazendo  $v(t)$  passar por um filtro passa-baixas com os seguintes requisitos:

- A freqüência da onda moduladora situa-se dentro da faixa de passagem do filtro.
- As freqüências laterais superior e inferior da nova onda modulada DSB-SC situam-se dentro da faixa de rejeição do filtro.

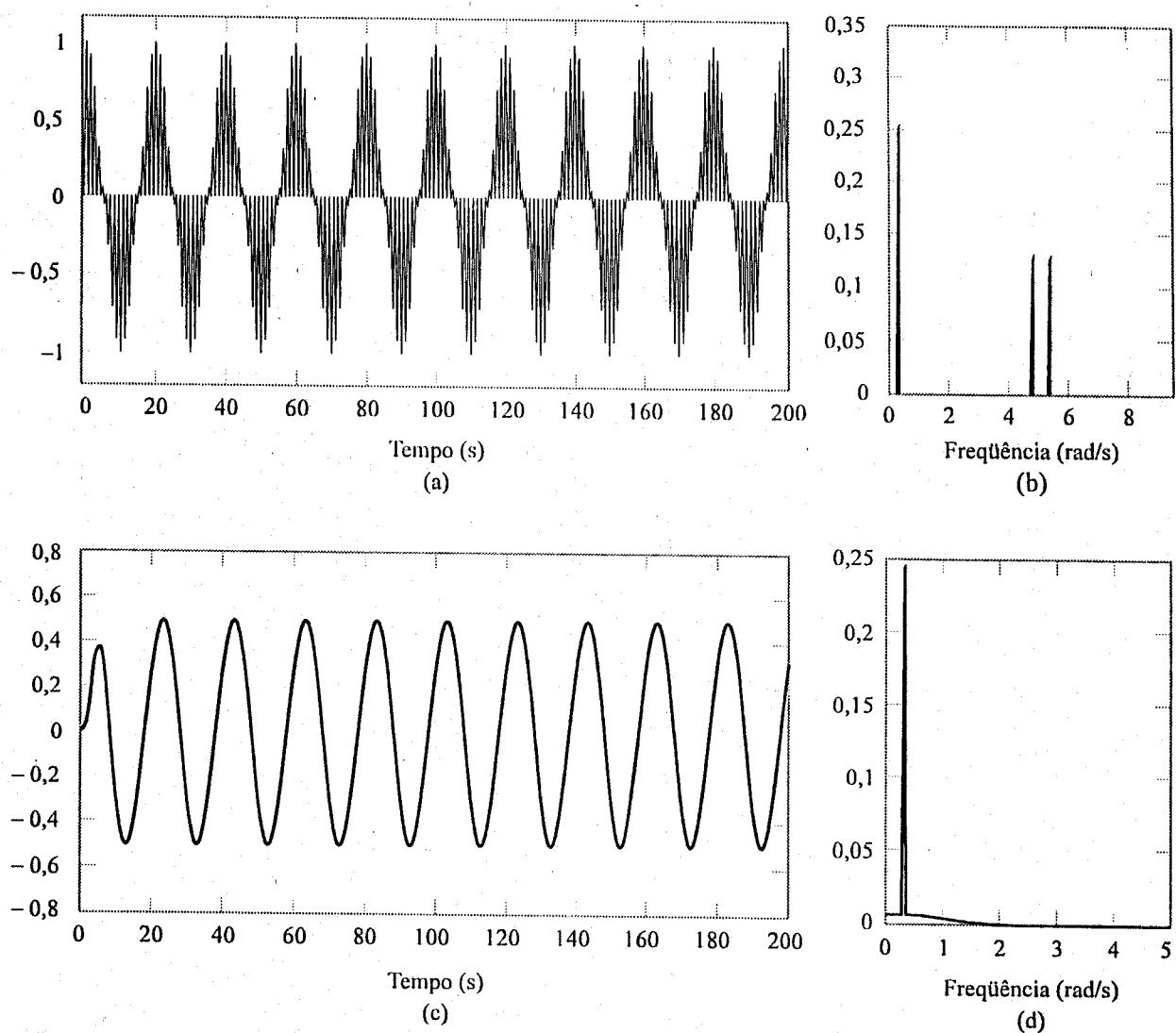
A questão de como projetar um filtro com estes requisitos será considerada detalhadamente no Capítulo 8. Por enquanto, basta dizermos que os requisitos acima podem ser satisfeitos usando-se os comandos do MATLAB:

$$\begin{aligned} [b, a] &= \text{butter}(3, 0.025); \\ \text{output} &= \text{filter}(b, a, v); \end{aligned}$$

O primeiro comando produz um tipo especial de filtro chamado *filtro de Butterworth*. Para o experimento aqui considerado, a ordem do filtro é 3 e sua *freqüência de corte normalizada* de 0,025 é calculada da seguinte maneira:

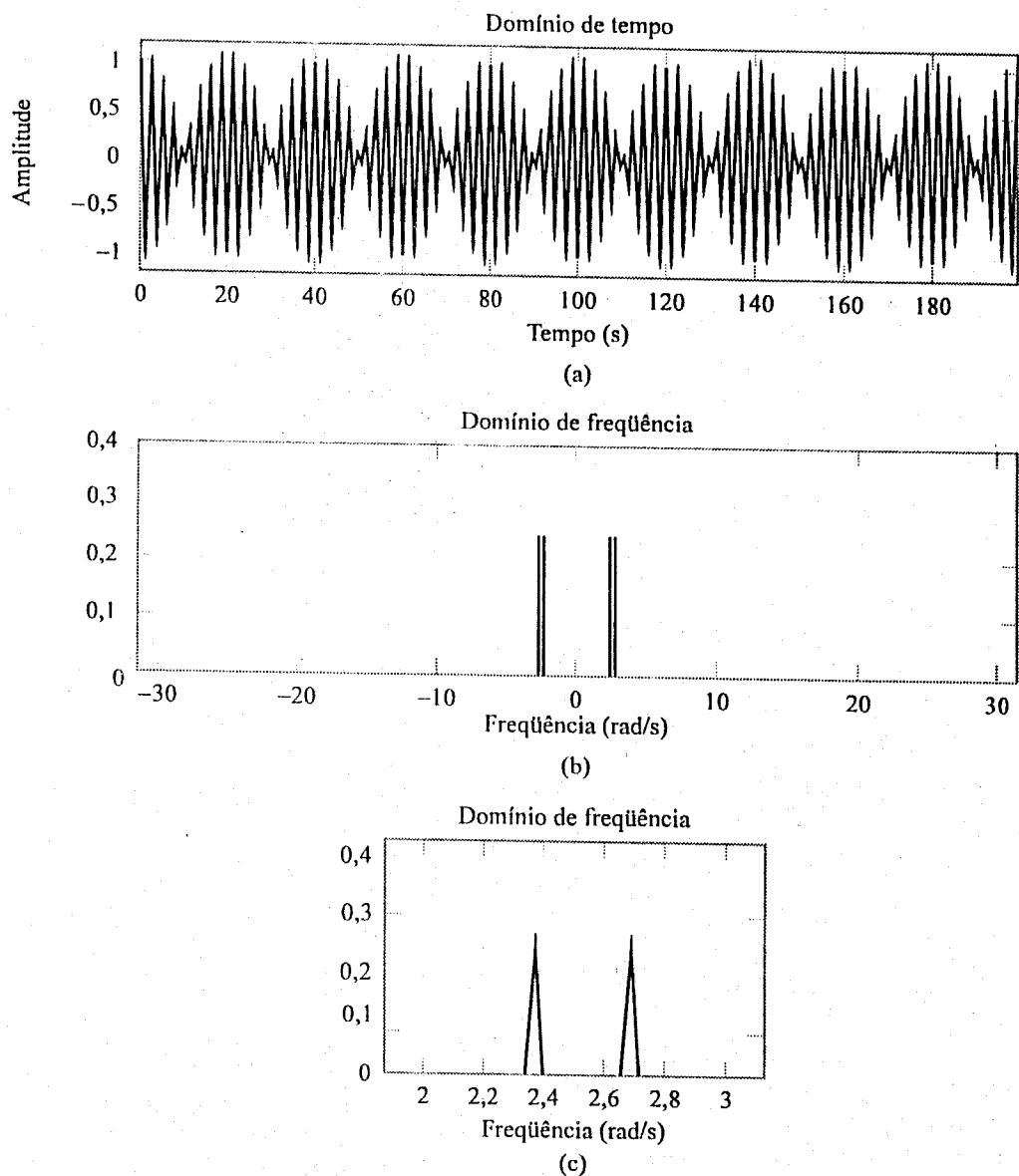
$$\begin{aligned} \frac{\text{Freqüência de corte real do filtro}}{\text{Metade da taxa de amostragem}} &= \frac{0,25\pi \text{ rad/s}}{10\pi \text{ rad/s}} \\ &= 0,025 \end{aligned}$$

O segundo comando computa a saída do filtro em resposta à saída do modulador multiplicador  $v(t)$ . (Voltaremos novamente ao projeto deste filtro no Capítulo 8). A Figura 5.35(c) exibe a forma de onda da saída do filtro passa-baixas; ela representa um sinal senoidal de freqüência igual a 0,05 Hz. Esta observação é confirmada usando-se o comando `fft` para aproximar o espectro da saída do filtro; o resultado da computação é mostrado na Figura 5.35(d).



**FIGURA 5.35** Detecção coerente de onda modulada DSB-SC. (a) e (b) Forma de onda e espectro de magnitude de um sinal produzido na saída do modulador multiplicador. (c) e (d) Forma de onda e espectro de magnitude da saída do filtro passa-baixas.

3. Na Figura 5.36, exploramos outro aspecto da modulação DSB-SC, a saber, o efeito de variarmos a freqüência de modulação. A Figura 5.36(a) mostra cinco ciclos de uma onda modulada DSB-SC que possui a mesma freqüência de portadora que a da Figura 5.34(a), mas a freqüência de modulação foi reduzida para 0,025 Hz (isto é, freqüência em radianos de  $0,05\pi$ ). A Figura 5.36(b) mostra o espectro de magnitude desta segunda onda modulada DSB-SC. Sua versão ampliada é mostrada na Figura 5.36(c). Comparando esta última figura com a Figura 5.34(c), vemos claramente que diminuir a freqüência de modulação tem o efeito de aproximar mais as freqüências superior e inferior, o que é consistente exatamente de acordo com a teoria da modulação.



**FIGURA 5.36** Efeito de variarmos a freqüência de modulação, em comparação com a da Figura 5.35. (a) e (b) Forma de onda e espectro de magnitude da onda modulada DSB-SC com uma freqüência de modulação igual à metade da que foi usada na Figura 5.34; (c) Espectro expandido em torno da freqüência de portadora.

► **EXERCÍCIO 5.13** Um *pulso de radiofreqüência (RF)* é definido como o produto de um pulso retangular e uma onda portadora senoidal. Usando o MATLAB, plote a forma de onda deste pulso para cada um dos dois casos seguintes:

- (a) Duração do pulso = 1 s  
Freqüência de portadora = 5 Hz
- (b) Duração do pulso = 1 s  
Freqüência de portadora = 25 Hz

Use uma freqüência de amostragem de 1 kHz.

► **EXERCÍCIO 5.14** Usando o comando `fft`, plote o espectro de magnitude do pulso RF correspondente a cada um dos dois casos descritos no Exercício 5.13. Então, demonstre o seguinte:

- (a) Para o caso (a), correspondente à freqüência de portadora de 5 Hz, as faixas laterais inferiores para freqüências positivas e negativas se sobrepõem entre si. O efeito é conhecido como *sobreposição de faixa lateral*.
- (b) Para o caso (b), correspondente à freqüência de portadora de 25 Hz, o espectro está essencialmente livre de sobreposição de faixa lateral.

### ■ \*RETARDOS DE FASE E DE GRUPO

No Exemplo 5.8, estudamos os retardos de fase e de grupo de um canal passa-faixa com resposta em fase

$$\phi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega\omega_c}\right)$$

Em  $\omega = \omega_c$ , o retardo de fase é  $\tau_p = 0$  e o retardo de grupo é  $\tau_g = 0,4211\text{s}$ . As duas formas de onda exibidas nas Figuras 5.29 são definidas da seguinte maneira:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= s(t)\cos(\omega_c t) \\ &= \frac{A}{2}[\cos((\omega_c + \omega_0)t) + \cos((\omega_c - \omega_0)t)] \\ &= \frac{A}{2}[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \end{aligned}$$

em que  $\omega_1 = \omega_c + \omega_0$  e  $\omega_2 = \omega_c - \omega_0$ . A forma de onda mostrada na Figura 5.29 como uma curva sólida é uma plotagem de  $x_1(t)$ .

$$(2) \quad \begin{aligned} x_2(t) &= y(t)\cos(\omega_c t) \\ &= \frac{A}{2}[\cos(\omega_1 t + \phi(\omega_1)) + \cos(\omega_2 t + \phi(\omega_2))] \cos(\omega_c t) \end{aligned}$$

em que os ângulos  $\phi(\omega_1)$  e  $\phi(\omega_2)$  são os valores da resposta em de  $\phi(\omega)$  em  $\omega = \omega_1$  e  $\omega = \omega_2$ , respectivamente. A forma de onda mostrada como uma curva pontilhada na Figura 5.29 é uma plotagem de  $x_2(t)$ .

A geração de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  no MATLAB é obtida usando-se os seguintes comandos:

```
o1=-atan((w1^2-wc^2)/(w1*wc));
o2=-atan((w2^2-wc^2)/(w2*wc));
s=cos(w1*t)+cos(w2*t);
y=cos(w1*t+o1)+cos(w2*t+o2);
x1=s.*cos(4.75*t);
x2=y.*cos(4.75*t);
```

em que definimos  $(A/2) = 1$  por conveniência de apresentação. A função `atan` nos dois primeiros comandos fornece o arco de tangente. Note também que tanto `x1` como `x2` envolvem multiplicações de elemento por elemento; daí, o uso de um ponto seguido de um asterisco.

## 5.12 Resumo

Neste capítulo, apresentamos uma discussão das técnicas de modulação linear para a transmissão de um sinal de mensagem através de um canal de comunicação.

Em especial, descrevemos a modulação de amplitude (AM) e suas variantes, conforme resumimos aqui:

- Na AM completa, o espectro consiste em duas faixas laterais (uma, denominada faixa lateral superior, e a outra denominada faixa lateral inferior) e a portadora. A principal vantagem da AM completa é a simplicidade de sua implementação, o que explica seu uso popular para transmissões radiofônicas. Suas desvantagens incluem um desperdício de largura de faixa de transmissão e potência de transmissão.
- Na modulação de faixa lateral dupla e portadora suprimida (DSB-SC), a portadora é suprimida, economizando potência de transmissão. Entretanto, a largura de faixa de transmissão para a modulação DSB-SC é a mesma que a da AM completa, ou seja, o dobro da largura de faixa da mensagem.

- Na modulação de faixa lateral simples (SSB), somente uma das faixas laterais é transmitida. A modulação SSB é, portanto, a forma ótima de modulação de onda contínua (CW), em termos de que ela requer o mínimo de largura de faixa de canal e de potência para sua transmissão. O uso da modulação SSB requer uma ausência de energia no espectro do sinal de mensagem nas proximidades da freqüência zero.
- Na modulação por faixa lateral vestigial (VSB), uma faixa lateral e um vestígio da outra faixa lateral são transmitidos. Ela é adequada para transmissão de sinais de faixa larga cujos espectros se estendem até a freqüência zero. A modulação VSB é o método padrão para a transmissão de sinais de televisão.

A outra forma de modulação linear discutida no capítulo foi a da modulação de amplitude de pulsos (PAM). A PAM representa a forma mais simples de modulação de pulsos. Ela pode ser vista como uma manifestação direta do processo de amostragem. Sendo assim, a PAM comumente é usada como um método de modulação em si mesma. Além disso, ela constitui uma operação que é fundamental para todas as outras formas de modulação de pulsos, inclusive a modulação por codificação de pulsos.

Discutimos então a noção de multiplexação, a qual permite o compartilhamento de um canal de comunicação comum entre uma série de usuários independentes. Na multiplexação por divisão de freqüências (FDM), o compartilhamento é executado no domínio de freqüência. Na multiplexação por divisão de tempo (TDM), o compartilhamento é executado no domínio de tempo.

O outro tópico discutido neste capítulo foi o retardo de fase (portadora) e retardo de grupo (envoltória), ambos os quais são definidos em termos da resposta de fase de um canal através do qual um sinal modulado é transmitido. O retardo de grupo é o retardo de sinal verdadeiro; ele se torna de suma importância quando um sinal modulado de faixa larga é transmitido por um canal.

Cabe um comentário final. Ao discutirmos os sistemas de modulação apresentados neste capítulo, utilizamos dois blocos funcionais:

- Filtros para a supressão de sinais espúrios.
- Equalizadores para corrigir a distorção de sinal produzida por sistemas físicos de transmissão.

A abordagem aqui seguida partiu de um ponto de vista teórico a respeito de sistemas, e não nos preocupamos com o projeto destes blocos funcionais. Considerações sobre projeto de filtros e equalizadores serão levantadas no Capítulo 8.

## LEITURA ADICIONAL

1. A tecnologia de comunicações tem uma extensa história que remonta à invenção do telégrafo (o antecessor das comunicações digitais) por Samuel Morse em 1837. Esta, foi seguida pela invenção do telefone por Alexander Graham Bell em 1876, em cuja homenagem o decíbel recebe o nome. Outros contribuintes notáveis incluem Harry Nyquist, que publicou um documento clássico sobre a teoria da transmissão de sinais na telegrafia em 1928, e Claude Shannon, que lançou as bases da *teoria da informação*, em 1948. A teoria da informação é um tema amplo, que abrange a transmissão, processamento e utilização da informação.

Para obter um relato histórico a respeito dos sistemas de comunicações, veja o Capítulo 1 do livro:

- Haykin, S., *Communication Systems*, terceira edição (Wiley, 1994)

2. Para obter um tratamento mais completo da teoria da modulação, leia os livros:
- Carlson, A. B., *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communications*, terceira edição (McGraw-Hill, 1986)
  - Couch, L. W. III, *Digital and Analog Communication Systems*, terceira edição (Prentice Hall, 1990)
  - Haykin, S., *Communication Systems*, terceira edição (Wiley, 1994)
  - Schwartz, M., *Information Transmission Modulation and Noise: A Unified Approach*, terceira edição (McGraw-Hill, 1980)
  - Stremler, F. G., *Introduction to Communication Systems*, terceira edição (Addison-Wesley, 1990)
  - Ziemer, R. E. e W. H. Tranter, *Principles of Communication Systems*, terceira edição (Houghton Mifflin, 1990)

Estes livros cobrem tanto a técnica de modulação de onda contínua como a modulação de pulsos.

- \*3. A transformada de Hilbert de um sinal  $x(t)$  é definida por

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

De maneira equivalente, podemos definir a transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  como a convolução de  $x(t)$  com  $1/\pi t$ . A transformada de Fourier de  $1/\pi t$  é  $j$  vezes a função signum (sinal), em que

$$\text{sgn}(j\omega) = \begin{cases} +1, & \text{para } \omega > 0 \\ 0, & \text{para } \omega = 0 \\ -1, & \text{para } \omega < 0 \end{cases}$$

Fazer  $x(t)$  passar por um transformador de Hilbert é, portanto, equivalente à combinação das duas operações seguintes no domínio de freqüência:

- Manter  $|X(j\omega)|$  (isto é, o espectro de magnitude de  $x(t)$ ) inalterado para todo  $\omega$
- Deslocar  $\arg\{x(j\omega)\}$  (isto é, o espectro de fase de  $x(t)$ ) de  $+90^\circ$  para freqüências negativas e  $-90^\circ$  para freqüências positivas

Para obter uma discussão mais completa da transformada de Hilbert e sua utilização na descrição no domínio de tempo da modulação de faixa lateral simples, veja os capítulos 2 e 3 do livro:

- Haykin, S., *Communication Systems*, terceira edição (Wiley, 1994)

4. Os livros citados acima incluem também o estudo de como o ruído afeta o desempenho dos sistemas de modulação.
5. Para obter um tratamento avançado do retardo de fase e do retardo de grupo, veja o Capítulo 2 do livro:
  - Haykin, S., *Communication Systems*, terceira edição (Wiley, 1994).

## PROBLEMAS

- 5.1 Você recebe um dispositivo não linear cuja relação entre entrada e saída é descrita por

$$i_o = a_1 v_i + a_2 v_i^2$$

em que  $a_1$  e  $a_2$  são constantes,  $v_i$  é a tensão de entrada e  $i_o$  é a corrente de saída. Admitamos que

$$v_i(t) = A_c \cos(\omega_c t) + A_m \cos(\omega_m t)$$

em que o primeiro termo representa uma portadora senoidal e o segundo termo representa um sinal modulador senoidal.

- (a) Determine o conteúdo de freqüência de  $i_o(t)$ .
- (b) A corrente de saída  $i_o(t)$  contém um sinal AM produzido pelos dois componentes de  $v_i(t)$ . Descreva a especificação de um filtro que extrai este sinal AM de  $i_o(t)$ .

- 5.2 Considere um sinal de mensagem  $m(t)$  com o espectro mostrado na Figura P5.2. A largura de faixa da mensagem é  $\omega_m = 2\pi \times 10^3$  rad/s. Este sinal é aplicado a um modulador multiplicador, juntamente com uma onda portadora  $A_c \cos(\omega_c t)$ , produzindo o sinal modulado DSB-SC  $s(t)$ . O sinal modulado é aplicado em seguida a um detetor coerente. Supondo um perfeito sincronismo entre as ondas portadoras no modulador e no detetor, determine o espectro da saída do detetor quando (a) a freqüência de portadora é  $\omega_c = 2,5\pi \times 10^3$  rad/s e (b) a freqüência de portadora é  $\omega_c = 1,5\pi \times 10^3$  rad/s. Qual é a menor freqüência de portadora para a qual cada componente do sinal modulado  $s(t)$  é determinado de maneira única por  $m(t)$ ?

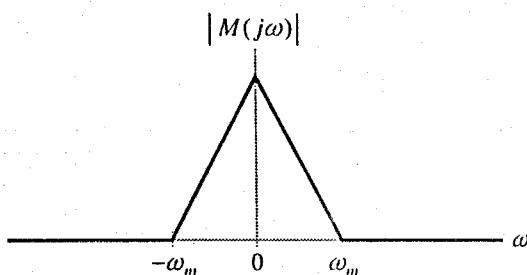


FIGURA P5.2

- 5.3 A Figura P5.3 mostra o diagrama do circuito de um modulador balanceado. A entrada aplicada ao modulador de AM de cima é  $m(t)$ , enquanto que a aplicada ao modulador de baixo é  $-m(t)$ ; estes dois moduladores têm a mesma sensibilidade à amplitude. Mostre que a saída  $s(t)$  do modulador balanceado consiste num sinal modulado DSB-SC.

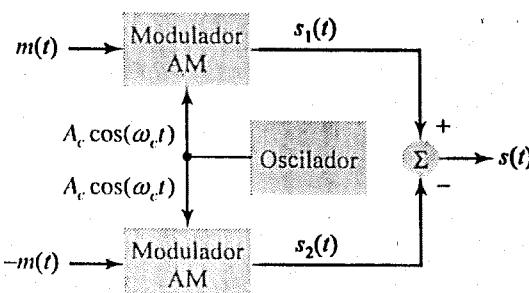


FIGURA P5.3

- 5.4 Chaveamento por desvio de fase (PSK\*) é uma forma de modulação de fase amplamente usada para comunicações digitais. A forma mais simples de PSK, conhecida como PSK binária, surge quando a seguinte representação para o sinal de modulação  $s(t)$  é adotada:

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(\omega_c t), & \text{símbolo 1} \\ A_c \cos(\omega_c t + \pi), & \text{símbolo 2} \end{cases}$$

O PSK binário também pode ser visto como uma modulação de faixa lateral dupla e portadora suprimida (DSB-SC). Especificamente, podemos redefinir  $s(t)$  como

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t)b(t)$$

em que  $b(t)$  representa a seqüência de 1's e 0's; o símbolo 1 é representado por +1 e o símbolo 0 é representado por -1.

Considere então uma seqüência binária  $b(t)$  que consiste numa onda quadrada com período fundamental  $2T_0$ ; ou seja, os símbolos 1 e 0 se alternam. Para esta seqüência especial, faça o seguinte:

- (a) Esboce a forma de onda do sinal PSK binário  $s(t)$  para  $\omega_c T_0 = 4\pi$ .
- (b) Derive uma fórmula geral para o espectro de  $s(t)$ .
- (c) Plote o espectro de magnitude de  $s(t)$  para  $\omega_c T_0 = 4\pi, 10\pi, 20\pi$ .

- 5.5 O chamado pulso de radiofreqüência (RF)  $s(t)$  é definido por

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(\omega_c t), & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Derive uma fórmula para o espectro de  $s(t)$ , supondo que  $\omega_c T_0 \gg 2\pi$ .
- (b) Esboce o espectro de magnitude de  $s(t)$  para  $\omega_c T_0 = 20\pi$ .

\* N. de R.T.: PSK de Phase-Shift Keying.

- 5.6 O sinal transmitido  $s(t)$  de um sistema de radar consiste numa seqüência periódica de pulsos RF breves. O período fundamental da seqüência é  $T_0$ . Cada pulso RF tem duração  $T_1$  e freqüência  $\omega_c$ . Valores típicos são:

$$T_0 = 1 \text{ ms}$$

$$T_1 = 1 \mu\text{s}$$

$$\omega_c = 2\pi \times 10^9 \text{ rad/s}$$

Usando os resultados do Problema 5.5, esboce o espectro de magnitude de  $s(t)$ .

- 5.7 Um sinal modulado DSB-SC é demodulado aplicando-se o mesmo a um detetor coerente. Avalie o efeito de um erro de freqüência  $\Delta\omega$  na freqüência de portadora local do detetor, medido com respeito à freqüência de portadora do sinal DSB-SB recebido.

- \*5.8 Considere o sistema de multiplexação de portadora em quadratura da Figura 5.14. O sinal multiplexado  $s(t)$  produzido na entrada do transmissor na Figura 5.14(a) é aplicado a um canal de comunicação com resposta em freqüência  $H(j\omega)$ . A saída deste canal, por sua vez, é aplicada à entrada do receptor da Figura 5.14(b). Prove que a condição

$$H(j\omega_c + j\omega) = H^*(j\omega_c - j\omega), \quad 0 < \omega < \omega_m$$

é necessária para a recuperação dos sinais de mensagem  $m_1(t)$  nas saídas do receptor;  $\omega_c$  é a freqüência de portadora e  $\omega_m$  é a largura de faixa da mensagem. Sugestão: Calcule os espectros das duas saídas do receptor.

- 5.9 Usando o sinal de mensagem

$$m(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

esboce as ondas moduladas correspondentes aos seguintes métodos de modulação:

- (a) Modulação de amplitude com 50% de modulação  
 (b) Modulação de faixa lateral dupla e portadora suprimida

- \*5.10 O espectro de um sinal de voz  $m(t)$  é nulo fora do intervalo  $\omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b$ . A fim de assegurar a privacidade de comunicação, este sinal é aplicado a

um embaralhador (*scrambler*) que consiste na seguinte cascata de componentes: um modulador multiplicador, um filtro passa-altas, um segundo modulador multiplicador e um filtro passa-baixas. A onda portadora aplicada ao primeiro modulador multiplicador tem uma freqüência igual a  $\omega_c$ , enquanto que a aplicada ao segundo modulador multiplicador tem uma freqüência igual a  $\omega_b + \omega_c$ ; ambas têm amplitude unitária. Os filtros passa-altas e passa-baixas têm a mesma freqüência de corte em  $\omega_c$ . Suponhamos que  $\omega_c > \omega_b$ .

- (a) Derive uma expressão para a saída do embaralhador  $s(t)$  e esboce seu espectro.  
 (b) Mostre que o sinal de voz original  $m(t)$  pode ser recuperado de  $s(t)$  usando um desembaralhador (*unscrambler*) que é idêntico à unidade descrita acima.

- 5.11 Uma onda modulada de faixa lateral única  $s(t)$  é aplicada ao detetor coerente mostrado na Figura P5.11. A freqüência de corte do filtro passa-baixas é definida como igual ao componente de freqüência mais elevada do sinal de mensagem. Usando idéias do domínio de freqüência, mostre que este detetor produz uma saída que é uma versão multiplicada do sinal de mensagem original. Você pode supor que a freqüência de portadora  $\omega_c$  satisfaz a condição  $\omega_c > \omega_m$ .

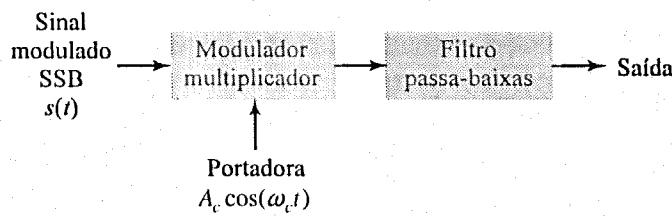


FIGURA P5.11

- 5.12 A Figura P5.12 mostra o diagrama de blocos de um *sintetizador de freqüências*, o qual possibilita a geração de muitas freqüências, cada uma das quais com a mesma exatidão elevada que a do *oscilador mestre*. O oscilador mestre de freqüência 1 MHz alimenta dois *geradores de espectros*, um diretamente, e o outro através de um *divisor de freqüências*.

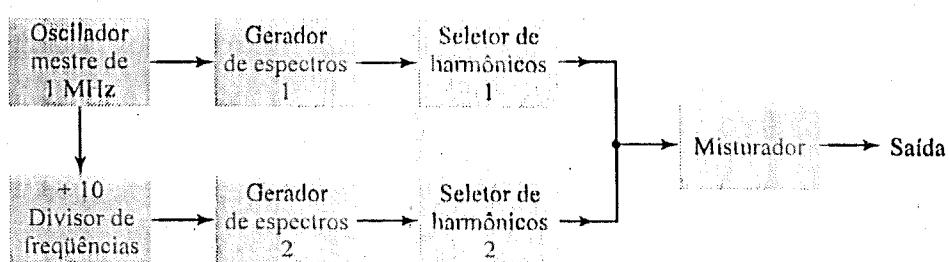


FIGURA P5.12

O gerador de espectro 1 produz um sinal rico nos seguintes harmônicos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 MHz.

O divisor de freqüências fornece uma saída de 100 kHz, em resposta à qual o gerador de espectro 2 produz um segundo sinal rico nos seguintes harmônicos: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 e 900 kHz. Os seletores de harmônicos são projetados para alimentar dois sinais no misturador, um do gerador de espectro 1 e o outro do gerador de espectro 2. Encontre a faixa de saídas de freqüência possíveis deste sintetizador e sua resolução (isto é, a separação entre as saídas de freqüência adjacentes).

- \*5.13 Considere um sistema multiplex no qual quatro sinais de entrada  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$ ,  $m_3(t)$  e  $m_4(t)$  são respectivamente multiplicados pelas ondas portadoras

$$\begin{aligned} & [\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_b t)] \\ & [\cos(\omega_a t + \alpha_1) + \cos(\omega_b t + \beta_1)] \\ & [\cos(\omega_a t + \alpha_2) + \cos(\omega_b t + \beta_2)] \\ & [\cos(\omega_a t + \alpha_3) + \cos(\omega_b t + \beta_3)] \end{aligned}$$

e os sinais DSB-SC resultantes são somados e depois transmitidos por um canal comum. No receptor, a demodulação é realizada multiplicando-se a soma dos sinais DSB-SC pelas quatro ondas portadoras separadamente e depois usando-se filtragem para remover os componentes indesejáveis. Determine as condições que os ângulos de fase  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  devem satisfazer para que a saída do  $k$ -ésimo demodulador seja  $m_k(t)$ , em que  $k = 1, 2, 3, 4$ .

- \*5.14 Neste problema, estudamos a idéia de misturador usada num *receptor super-heteródino*. Para sermos específicos, considere o diagrama de blocos do misturador mostrado na Figura P5.14, o qual consiste num modulador multiplicador com um oscilador local de freqüência variável, seguido de um filtro passa-faixa. O sinal de entrada é uma onda AM com largura de faixa de 10 kHz e freqüência de portadora que pode situar-se em qualquer lugar na faixa 0,535 – 1,605 MHz; estes parâmetros são típicos da radiodifusão em AM. É necessário transladar este sinal para uma faixa de freqüência centralizada numa *freqüência intermediária* (IF) fixa de 0,455 MHz. Encontre a faixa de sintonia que deve ser fornecida no oscilador local para que seja cumprida esta exigência.

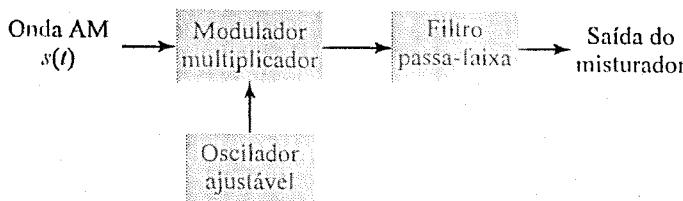


FIGURA P5.14

- 5.15 Compare a AM completa com a PAM, enfatizando suas similaridades e diferenças.

- 5.16 Na *amostragem natural*, um sinal analógico  $g(t)$  é multiplicado por um trem periódico de pulsos retangulares  $c(t)$ . Tem-se que a freqüência de repetição de pulsos deste trem periódico é  $\omega_s$  e que a duração de cada pulso retangular é  $T$  (com  $\omega_s T >> 2\pi$ ). Encontre o espectro do sinal  $s(t)$  que resulta do uso da amostragem natural; pode-se supor que o tempo  $t = 0$  corresponde ao ponto médio de um pulso retangular em  $c(t)$ .

- 5.17 Especifique a taxa de Nyquist para cada um dos seguintes sinais:

- (a)  $g(t) = \text{sinc}(200t)$
- (b)  $g(t) = \text{sinc}^2(200t)$
- (c)  $g(t) = \text{sinc}(200t) + \text{sinc}^2(200t)$

- 5.18 Vinte e quatro sinais de voz são amostrados uniformemente e depois multiplexados por divisão de tempo usando-se PAM. O sinal PAM é reconstruído a partir de pulsos de topo plano com  $1 \mu\text{s}$  de duração. A operação de multiplexação inclui a provisão de sincronização ao acrescentar um pulso extra de amplitude suficiente e também de  $1 \mu\text{s}$  de duração. O componente de freqüência mais elevada de cada sinal de voz é 3,4 kHz.

- (a) Supondo uma taxa de amostragem de 8 kHz, calcule o intervalo entre pulsos sucessivos do sinal multiplexado.
- (b) Repita seu cálculo supondo o uso da amostragem na taxa de Nyquist.

- 5.19 Doze diferentes sinais de mensagem, cada um com uma largura de faixa de 10 kHz, devem ser multiplexados e transmitidos. Determine a largura de faixa mínima necessária para cada método se o método de multiplexação/modulação usado for

- (a) FDM, SSB
- (b) TDM, PAM

- 5.20 Um sistema de *telemetria* PAM envolve a multiplexação de quatro sinais de entrada  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Dois dos sinais  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  têm larguras de faixa de 80 Hz cada um, enquanto que os dois sinais restantes  $s_3(t)$  e  $s_4(t)$  têm larguras de faixa de 1 kHz cada um. Os sinais  $s_3(t)$  e  $s_4(t)$  são, cada um, amostrados à taxa de 2.400 amostras por segundo. Esta taxa de amostragem é dividida por  $2^R$  (isto é, uma potência inteira de 2) a fim de obter a taxa de amostragem para  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$ .

- (a) Encontre o valor máximo de  $R$ .
- (b) Usando o valor de  $R$  encontrado na parte (a), projete um sistema de multiplexação que multiple o primeiro  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  numa nova seqüência,  $s_5(t)$  e então multiple  $s_3(t)$ ,  $s_4(t)$  e  $s_5(t)$ .

► Experiências no Computador

*Observação:* Espera-se que o leitor escolha as taxas de amostragem para as experiências de computador aqui descritas. Um perfeito entendimento do material apresentado no Capítulo 4 é necessário.

- 5.21** Use o MATLAB para gerar e exibir uma onda AM com as seguintes especificações:

Onda moduladora	Senoidal
Freqüência de modulação	1 kHz
Freqüência de portadora	20 kHz
Modulação percentual	75%

Compare e exiba o espectro de magnitude da onda AM.

- 5.22** (a) Gere uma onda triangular simétrica  $m(t)$  com freqüência fundamental de 1 Hz, alternando entre -1 e +1.  
 (b) Use  $m(t)$  para modular uma portadora de freqüência  $f_c = 25$  Hz, gerando uma onda AM completa com 80% de modulação. Compute o espectro de magnitude da onda AM.

- 5.23** Prosseguindo com o Problema 5.22, investigue o efeito de variar a freqüência de portadora  $f_c$  no espectro da onda AM. Determine o valor mínimo de  $f_c$  que é necessário para garantir que não haja nenhuma sobreposição entre as faixas laterais superior e inferior da onda AM.

- 5.24** A onda triangular descrita no Problema 5.22(a) é usada para executar a modulação DSB-SC numa portadora de freqüência  $f_c = 25$  Hz.

- (a) Gere e exiba a onda modulada DSB-SC assim produzida.
- (b) Compute e exiba o espectro da onda modulada. Investigue o uso da detecção coerente para modulação.

- 5.25** Use o MATLAB para fazer o seguinte:

- (a) Gere uma onda PAM usando um sinal modulador senoidal de freqüência  $\omega_m = 0,5\pi$  rad/s, período de amostragem  $T = 1$  s, e duração de pulso  $T = 0,05$  s.
- (b) Compute e exiba o espectro de magnitude da onda PAM.
- (c) Repita o experimento com duração de pulso  $T = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$  s.

Comente os resultados de sua experiência.

- 5.26** A amostragem natural envolve a multiplicação de um sinal de mensagem por um trem de pulsos retangulares, conforme discutimos no Problema 5.16. O período fundamental do trem de pulsos é  $T_c$  e a duração de pulso é  $T$ .

- (a) Gere e exiba a onda modulada correspondente para uma onda moduladora senoidal, com as seguintes especificações:

Freqüência de modulação	1 kHz
Freqüência de repetição de pulsos	$(1/T_c) = 10$ kHz
Duração de pulsos	$T = 10 \mu s$

- (b) Compute e exiba o espectro da onda modulada. Então, verifique que a onda moduladora original pode ser recuperada sem distorção fazendo-se a onda modulada passar por um filtro passa-baixas. Especifique as exigências que este filtro deve satisfazer.



# 6

## REPRESENTAÇÃO DE SINAIS USANDO EXPONENCIAIS COMPLEXAS DE TEMPO CONTÍNUO: A TRANSFORMADA DE LAPLACE



### 6.1 Introdução

Neste capítulo, generalizamos a representação senoidal complexa de um sinal de tempo contínuo fornecida pela FT através de uma representação em termos de sinais exponenciais complexos, a qual é denominada *transformada de Laplace*. A transformada de Laplace fornece uma caracterização mais ampla dos sistemas e suas interações com sinais do que aquela que é possível com os métodos de Fourier. Por exemplo, a transformada de Laplace pode ser usada para analisar uma grande classe de problemas de tempo contínuo que envolvem sinais que não são absolutamente integráveis, como por exemplo a resposta ao impulso de um sistema instável. A FT não existe para sinais que não são absolutamente integráveis, de forma que os métodos baseadas na FT não podem ser usados nesta classe de problemas.

A transformada de Laplace possui um conjunto poderoso de propriedades para a análise de sinais e sistemas. Muitas destas propriedades se comparam com as da FT. Por exemplo, veremos que as exponenciais complexas de tempo contínuo são autofunções de sistemas LTI. Como acontece com as senóides complexas, isto resulta em que a convolução de sinais de tempo transforma-se em multiplicação das transformadas de Laplace associadas. Então, a saída de um sistema LTI é obtida multiplicando-se a transformada de Laplace da entrada pela transformada de Laplace da resposta ao impulso. A transformada de Laplace da resposta ao impulso é definida como a função de transferência do sistema. A função de transferência generaliza a caracterização de resposta em freqüência do comportamento de entrada e saída de um sistema e fornece novos *insights* sobre as características do sistema.

A transformada de Laplace surge em duas variedades: (1) unilateral ou de um único lado e (2) bilateral ou de dois lados. A transformada de Laplace unilateral é uma ferramenta conveniente para resolver equações diferenciais com condições iniciais. A transformada de Laplace bilateral fornece *insight* sobre a natureza das características do sistema como, por exemplo, estabilidade, causalidade e resposta em freqüência. O papel principal da transformada de Laplace na engenharia é a análise de transitórios e estabilidade de sistemas LTI causais descritos por equações diferenciais. Desenvolveremos a transformada de Laplace com estes papéis em mente ao longo deste capítulo.

## 6.2 A Transformada de Laplace

Admitamos que  $e^{st}$  seja uma exponencial complexa com freqüência complexa  $s = \sigma + j\omega$ . Podemos escrever  $e^{st}$  como o sinal de valor complexo

$$e^{st} = e^{\sigma t} \cos(\omega t) + j e^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (6.1)$$

A parte real de  $e^{st}$  é um co-seno exponencialmente amortecido e a parte imaginária é um seno exponencialmente amortecido, como descreve a Figura 6.1. Na figura, assume-se que  $\sigma$  seja negativo. A parte real de  $s$  é o fator de amortecimento exponencial  $\sigma$ , e a parte imaginária de  $s$  é a freqüência dos fatores co-seno e seno,  $\omega$ .

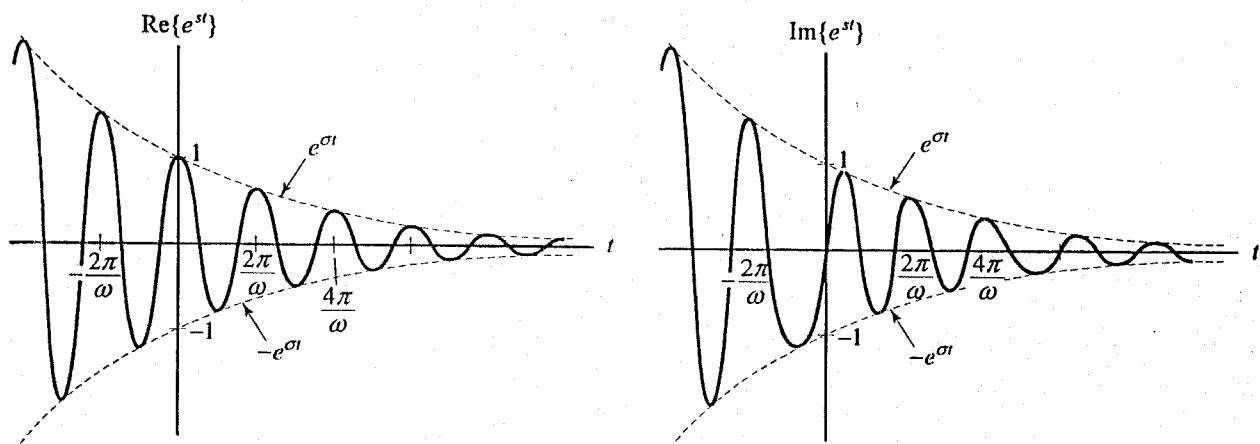


FIGURA 6.1 Partes real e imaginária da exponencial complexa  $e^{st}$ .

Considere aplicar uma entrada da forma  $x(t) = e^{st}$  a um sistema LTI com resposta ao impulso  $h(t)$ . A saída do sistema  $y(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= H\{e^{st}\} \\ &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Substitua  $x(t)$  para obter

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

Defina a função de transferência

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (6.2)$$

de forma que podemos escrever

$$H\{e^{st}\} = H(s)e^{st}$$

A ação do sistema sobre uma entrada  $e^{st}$  é uma multiplicação por  $H(s)$ . Então, identificamos  $e^{st}$  como uma autofunção do sistema e  $H(s)$  como um autovalor.

Expresso o número complexo  $H(s)$  na forma polar como  $H(s) = |H(s)| e^{j\phi(s)}$ , em que  $|H(s)|$  e  $\phi(s)$  são o módulo e a fase de  $H(s)$ , respectivamente. Agora, reescrevemos a saída do sistema como

$$y(t) = |H(s)| e^{j\phi(s)} e^{st}$$

Substitua  $s = \sigma + j\omega$  para obter

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} e^{j\omega t + \phi(\sigma + j\omega)} \\ &= |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi(\sigma + j\omega)) + j |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi(\sigma + j\omega)) \end{aligned}$$

Uma vez que a entrada  $x(t)$  tem a forma dada na equação (6.1), vemos que o sistema modifica a amplitude da entrada com  $|H(\sigma + j\omega)|$  e desloca a fase dos componentes senoidais de  $\phi(\sigma + j\omega)$ . Este sistema não muda o fator de amortecimento  $\sigma$  da entrada ou a freqüência senoidal  $\omega$ .

Dada a simplicidade de descrevermos a ação do sistema sobre as entradas com forma  $e^{\sigma t}$ , procuramos agora uma representação para sinais arbitrários como uma superposição ponderada de autofunções  $e^{\sigma t}$ . Substituindo  $s = \sigma + j\omega$  na equação (6.2) e usando  $t$  como a variável de integração, obtemos

$$\begin{aligned} H(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [h(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Isto indica que  $H(\sigma + j\omega)$  é a transformada de Fourier de  $h(t)e^{-\sigma t}$ . Então, a transformada de Fourier inversa de  $H(\sigma + j\omega)$  deve ser  $h(t)e^{-\sigma t}$ , ou seja,

$$h(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Podemos recuperar  $h(t)$  multiplicando ambos os lados desta equação por  $e^{\sigma t}$ , como é mostrado por

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \end{aligned} \quad (6.3)$$

Agora, substituímos  $s = \sigma + j\omega$  e  $d\omega = ds/j$  na equação (6.3), obtemos

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{st} ds \quad (6.4)$$

Os limites da integral também são um resultado da substituição  $s = \sigma + j\omega$ . A equação (6.2) indica como determinar  $H(s)$  a partir de  $h(t)$ , enquanto a equação (6.4) expressa  $h(t)$  como uma função de  $H(s)$ . Dizemos que  $H(s)$  é a *transformada de Laplace* de  $h(t)$  e que  $h(t)$  é a *transformada de Laplace inversa* de  $H(s)$ .

Obtivemos a transformada de Laplace para a resposta ao impulso de um sistema. Esta relação vale para um sinal arbitrário. A transformada de Laplace de  $x(t)$  é

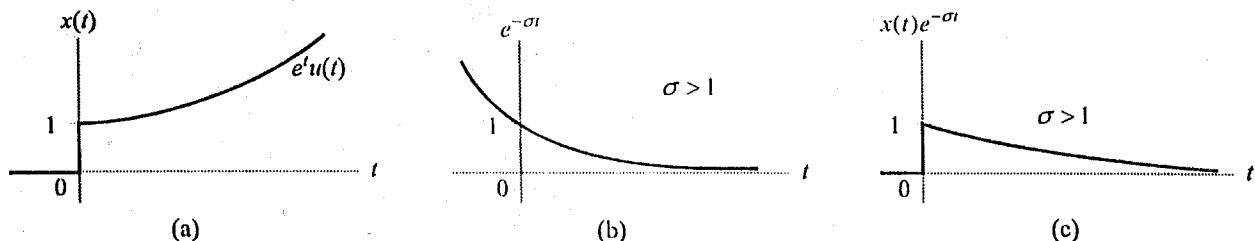
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.5)$$

e a transformada de Laplace inversa de  $X(s)$  é

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (6.6)$$

Expressamos esta relação com a notação

$$x(t) \xleftrightarrow{'} X(s)$$



**FIGURA 6.2** A transformada de Laplace se aplica a sinais mais gerais do que a transformada de Fourier. (a) Sinal para o qual a transformada de Fourier não existe. (b) Fator de atenuação associado com a transformada de Laplace. (c) O sinal modificado  $x(t)e^{-\sigma t}$  é absolutamente integrável para  $\sigma > 1$ .

Note que a equação (6.6) representa o sinal  $x(t)$  como uma superposição ponderada de exponenciais complexas  $e^{st}$ . Os pesos são proporcionais a  $X(s)$ . Na prática, normalmente não avaliamos esta integral diretamente, uma vez que ela exige técnicas de integração de contorno. Em vez disso, determinamos transformadas de Laplace inversas por inspeção, utilizando a relação biunívoca entre  $x(t)$  e  $X(s)$ .

O que estamos desenvolvendo indica que a transformada de Laplace é a transformada de Fourier de  $x(t)e^{-\sigma t}$ . Conseqüentemente, uma condição necessária para a convergência da transformada de Laplace é a integrabilidade absoluta de  $x(t)e^{-\sigma t}$ . Ou seja, devemos ter

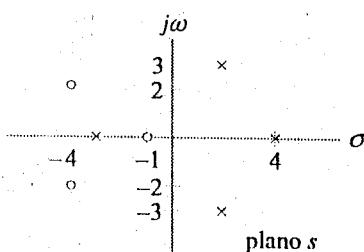
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

A faixa de  $\sigma$  para a qual a transformada de Laplace converge é denominada *região de convergência* (RDC).

Note que a transformada de Laplace existe para sinais que não têm uma transformada de Fourier. Limitando-nos a certa faixa de  $\sigma$ , podemos assegurar que  $x(t)e^{-\sigma t}$  é absolutamente integrável, apesar de  $x(t)$  não ser absolutamente integrável em si. Por exemplo a transformada de Fourier de  $x(t) = e^t u(t)$  não existe, uma vez que  $x(t)$  é um sinal exponencial real crescente e, dessa forma, não é absolutamente integrável. Porém, se  $\sigma > 1$ , então  $x(t)e^{-\sigma t} = e^{(1-\sigma)t} u(t)$  é absolutamente integrável e, então, a transformada de Laplace, que é a transformada de Fourier de  $x(t)e^{-\sigma t}$ , existe para alguns valores de  $\sigma$ . Este cenário é ilustrado na Figura 6.2. A existência da transformada de Laplace para sinais que não têm transformada de Fourier é uma vantagem significativa do uso da representação exponencial complexa.

É conveniente representarmos graficamente a freqüência complexa  $s$  em termos de um plano complexo denominado *plano s*, como descreve a Figura 6.3. O eixo horizontal representa a parte real de  $s$ , ou seja, o fator de amortecimento exponencial  $\sigma$ , e o eixo vertical representa a parte imaginária de  $s$ , ou a freqüência senoidal  $\omega$ . Note que se  $x(t)$  for absolutamente integrável, então poderemos obter a transformada de Fourier a partir da transformada de Laplace fazendo  $\sigma = 0$ , como é mostrado aqui:

$$X(j\omega) = X(s)|_{\sigma=0}$$



**FIGURA 6.3** O plano  $s$ . O eixo horizontal é  $\text{Re}[s]$  e o eixo vertical é  $\text{Im}[s]$ . Os zeros são descritos em  $s = -1$ ,  $s = -4 \pm 2j$  e os pólos são descritos em  $s = -3$ ,  $s = 2 \pm 3j$ ,  $s = 4$ .

No plano  $s$ ,  $\sigma = 0$  corresponde ao eixo imaginário. Dessa forma, dizemos que a transformada de Fourier é dada pela transformada de Laplace avaliada ao longo do eixo imaginário.

O eixo  $j\omega$  divide o plano  $s$  ao meio. A região do plano  $s$  à esquerda do eixo  $j\omega$  é denominada *semiplano esquerdo do plano s*, enquanto a região à direita do eixo  $j\omega$  é denominada *semiplano direito do plano s*. A parte real de  $s$  é negativa no semiplano esquerdo do plano  $s$  e positiva no semiplano direito do plano  $s$ .

A forma mais comumente encontrada de transformada de Laplace na engenharia é uma razão de dois polinômios em  $s$ . Ou seja,

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

É útil reescrevermos  $X(s)$  como um produto de termos que envolvem as raízes dos polinômios do denominador e do numerador, como é mostrado por

$$X(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

Os  $c_k$  são as raízes do polinômio do numerador e são denominados *zeros* de  $X(s)$ . Os  $d_k$  são as raízes do polinômio do denominador e são chamados *pólos* de  $X(s)$ . Denotamos as localizações dos zeros no plano  $s$  com o símbolo “o” e as localizações dos pólos com o símbolo “x”, como é ilustrado na Figura 6.3. As localizações de pólos e zeros no plano  $s$  especificam completamente  $X(s)$ , exceto quanto ao fator de ganho constante  $b_M$ .

**EXEMPLO 6.1** Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = e^{at} u(t)$$

e descreva a RDC e as localizações de pólos e zeros no plano  $s$ . Suponha que  $a$  seja real.

**Solução:**

Substitua  $x(t)$  na equação (6.50), obtendo

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

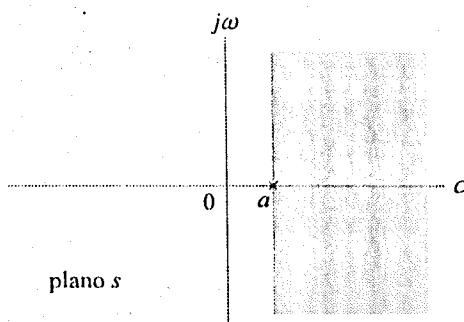
Para avaliar  $e^{-(s-a)t}$  nos limites, substituímos  $s = \sigma + j\omega$  e, assim, escrevemos

$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\omega - a} e^{-(\sigma-a)t} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty}$$

Agora, se  $\sigma > a$ , então  $e^{-(\sigma-a)t}$  tende a zero à medida que  $t$  se aproxima do infinito e

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{-1}{\sigma + j\omega - a} (0 - 1), \quad \sigma > a \\ &= \frac{1}{s - a}, \quad \text{Re}(s) > a \end{aligned} \tag{6.7}$$

A transformada de Laplace  $X(s)$  não existe para  $\sigma \leq a$ , uma vez que a integral não é limitada. A RDC para este sinal é, deste modo,  $\sigma > a$ , ou, de maneira equivalente,  $\text{Re}(s) > a$ . Esta RDC é descrita como a região sombreada do plano  $s$  da Figura 6.4. O polo está localizado em  $s = a$ .



**FIGURA 6.4** A RDC para  $e^{at} u(t)$  é descrita pela região sombreada. Um polo está localizado em  $s = a$ .

A expressão para a transformada de Laplace não corresponde de maneira única a um sinal  $x(t)$  se a RDC não for especificada. Isto é, dois sinais diferentes podem ter transformadas de Laplace idênticas mas RDCs diferentes. Demonstramos isto com o exemplo seguinte.

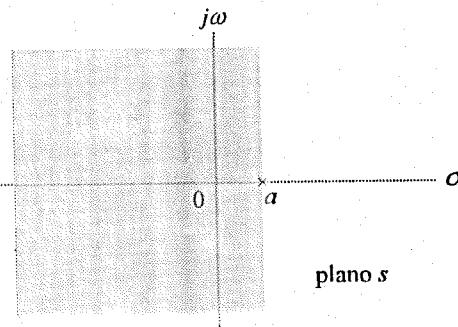
**EXEMPLO 6.2** Determine a transformada de Laplace e a RDC para o sinal

$$y(t) = -e^{at}u(-t)$$

**Solução:** Substitua  $x(t)$  na equação (6.5), obtendo

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at}u(-t)e^{-st} dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}(s) < a \end{aligned} \quad (6.8)$$

A RDC e as localizações de pólos e zeros são descritas na Figura 6.5.



**FIGURA 6.5** A RDC correspondente a  $-e^{at}u(-t)$  é descrita pela região sombreada. Um polo está localizado em  $s = a$ .

Os Exemplos 6.1 e 6.2 revelam que as transformadas de Laplace  $X(s)$  e  $Y(s)$  são iguais, não obstante os sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  serem claramente diferentes. Entretanto, suas RDCs são diferentes. Esta ambigüidade ocorre em geral com sinais unilaterais. Para ver isto, admitamos que  $x(t) = g(t)u(t)$  e  $y(t) = -g(t)u(-t)$ . Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \\ &= G(s, \infty) - G(s, 0) \end{aligned}$$

em que  $G(s, t)$  é a integral indefinida

$$G(s, t) = \int g(t)e^{-st} dt$$

Em seguida, escrevemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\int_{-\infty}^0 g(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{-\infty} g(t)e^{-st} dt \\ &= G(s, -\infty) - G(s, 0) \end{aligned}$$

Vemos que  $X(s) = Y(s)$  quando quer que  $G(s, \infty) = G(s, -\infty)$ . Nos Exemplos 6.1 e 6.2 temos  $G(s, -\infty) = G(s, \infty) = 0$ . Os valores de  $s$  para os quais  $G(s, \infty)$  é finito são diferentes daqueles para os quais  $G(s, -\infty)$  é finito e, dessa forma, as RDCs são diferentes. A RDC deve ser especificada para que a transformada de Laplace seja única.

► **EXERCÍCIO 6.1** Determine a transformada de Laplace e a RDC de

$$x(t) = u(t - 5)$$

*Resposta:*

$$X(s) = \frac{e^{-5s}}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

► **EXERCÍCIO 6.2** Determine a transformada de Laplace, a RDC e as localizações de pólos e zeros dos  $X(s)$  para

$$x(t) = e^{j\omega_o t} u(t)$$

*Resposta:*

$$X(s) = \frac{1}{s - j\omega_o}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

O polo está em  $s = j\omega_o$ .

### 6.3 A Transformada de Laplace Unilateral

Há muitas aplicações das transformadas de Laplace nas quais é razoável supor que os sinais envolvidos sejam causais, ou seja, zero para os instantes  $t < 0$ . Por exemplo, se aplicarmos uma entrada que seja nula para  $t < 0$  em um sistema causal, a saída também será nula para  $t < 0$ . Além disso, a escolha da origem do tempo é arbitrária em muitos problemas de sistemas. Dessa forma, o tempo  $t = 0$  muitas vezes é escolhido como o instante em que uma entrada é apresentada ao sistema, e o comportamento do sistema no instante  $t \geq 0$  é o que nos interessa. Nesses problemas, é vantajoso definir a transformada de Laplace unilateral ou de um único lado, a qual se baseia somente nas porções positivas de tempo ( $t > 0$ ) de um sinal. Ao trabalhar com sinais causais, removemos a ambigüidade inerente à transformada bilateral e, dessa forma, não precisamos considerar a RDC. Além disso, a propriedade de diferenciação da transformada de Laplace unilateral pode ser usada para analisar o comportamento de um sistema causal descrito por uma equação diferencial com condições iniciais. Este é o uso mais comum para a transformada unilateral nas aplicações de engenharia.

#### ■ DEFINIÇÃO

A transformada de Laplace unilateral de um sinal  $x(t)$  é definida por

$$X(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (6.9)$$

O limite inferior de  $0^+$  implica que não incluímos o ponto  $t = 0$  na integral. Conseqüentemente,  $X(s)$  depende somente de  $x(t)$  para  $t > 0$ . As descontinuidades e impulsos em  $t = 0$  são excluídos. A transformada unilateral inversa é dada pela equação (6.6). Denotaremos a relação entre  $X(s)$  e  $x(t)$  como

$$x(t) \xleftarrow{\mathcal{U}} X(s)$$

onde o subscrito  $u$  em  $\mathcal{U}$  denota a transformada unilateral. As transformadas de Laplace unilateral e bilateral são equivalentes naturalmente para sinais que são nulos  $t < 0$ . Por exemplo

$$e^{at} u(t) \xleftarrow{\mathcal{U}} \frac{1}{s - a}$$

é equivalente a

$$e^{at} u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - a} \quad \text{com RDC } \text{Re}\{s\} > a$$

### ■ PROPRIEDADES

As propriedades da transformada de Laplace são similares às da transformada de Fourier. Conseqüentemente, simplesmente enunciamos muitas das propriedades. Provas de algumas delas são dadas como problemas no final do capítulo. As propriedades descritas nesta subseção se aplicam especificamente à transformada de Laplace unilateral. As transformadas unilateral e bilateral têm muitas propriedades em comum, não obstante haver importantes diferenças. Estas diferenças são discutidas na Seção 6.6. Nas propriedades dadas abaixo, supomos que

$$x(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$$

e

$$y(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} Y(s)$$

#### *Linearidade*

$$ax(t) + by(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} aX(s) + bY(s) \quad (6.10)$$

A linearidade da transformada de Laplace decorre de sua definição como uma integral e o fato de a integração ser uma operação linear.

#### *Mudança de escala*

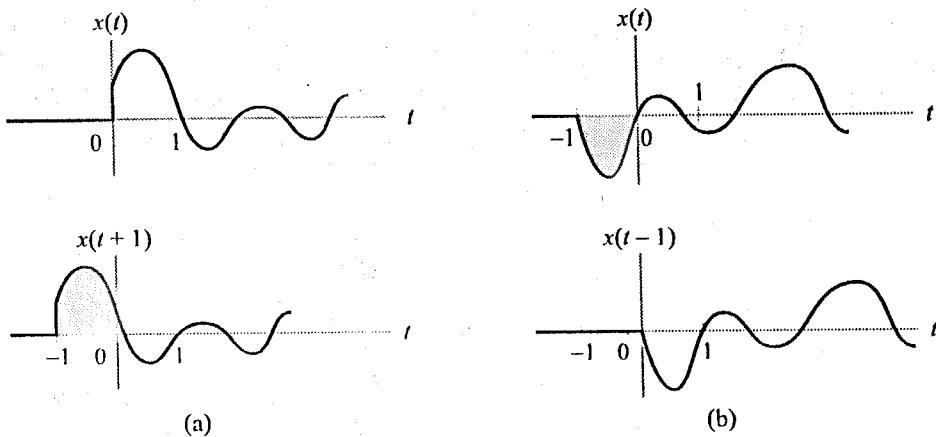
$$x(at) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (6.11)$$

A mudança de escala no tempo produz a mudança de escala inversa em  $s$ .

#### *Deslocamento no Tempo*

$$x(t - \tau) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} e^{-s\tau} X(s) \text{ para todos } \tau \text{ tais que } x(t - \tau)u(t) = x(t - \tau)u(t - \tau) \quad (6.12)$$

Um deslocamento de  $\pi$  no tempo corresponde à multiplicação pela exponencial complexa  $e^{-st}$ . A restrição quanto ao deslocamento surge porque a transformada unilateral é definida somente em termos dos valores de tempo positivos do sinal. Conseqüentemente, esta propriedade se aplica somente se o deslocamento não deslocar um componente do sinal de tempo positivo diferente de zero para negativo, como é descrito na Figura 6.6(a), ou deslocar uma parte do sinal de tempo negativo diferente de zero para tempo positivo, como é descrito na Figura 6.6(b). A propriedade do deslocamento no tempo é mais comumente aplicada a sinais causais  $x(t)$  com deslocamentos  $\tau > 0$ , em cujo caso a restrição ao deslocamento é sempre satisfeita.



**FIGURA 6.6** Deslocamentos no tempo para os quais a propriedade de deslocamento no tempo da transformada de Laplace unilateral não se aplica. (a) Uma porção diferente de zero de  $x(t)$  que ocorre nos instantes  $t > 0$  é deslocada para tempos  $t < 0$ . (b) Uma parte diferente de zero de  $x(t)$  que ocorre nos tempos  $t < 0$  é deslocada para tempos  $t > 0$ .

**Deslocamento no Domínio s**

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} X(s - s_0) \quad (6.13)$$

A multiplicação por uma exponencial complexa no tempo introduz um deslocamento na frequência complexa  $s$  na transformada de Laplace.

**Convolução**

$$x(t) * y(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} X(s)Y(s) \quad (6.14)$$

A convolução no tempo corresponde à multiplicação de transformadas de Laplace.

**Diferenciação no Domínio s**

$$-tx(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} \frac{d}{ds} X(s) \quad (6.15)$$

A diferenciação no domínio  $s$  corresponde à multiplicação por  $-t$  no domínio de tempo.

**EXEMPLO 6.3** Encontre a transformada de Laplace unilateral de

$$x(t) = (-e^{3t}u(t)) * (tu(t))$$

**Solução:** Primeiramente, observe que

$$-e^{3t}u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} \frac{-1}{s-3}$$

e

$$u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s}$$

Aplique a propriedade de diferenciação no domínio  $s$  para obter

$$tu(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s^2}$$

Agora, use a propriedade de convolução para obter

$$x(t) = (-e^{3t}u(t)) * (tu(t)) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} X(s) = \frac{-1}{s^2(s-3)}$$

► **EXERCÍCIO 6.3** Encontre a transformada de Laplace unilateral de

$$x(t) = e^{-t}(t-2)u(t-2)$$

**Resposta:**

$$X(s) = \frac{e^{-2(s+1)}}{(s+1)^2}$$

**Diferenciação no Domínio de Tempo**

Considere a transformada de Laplace unilateral de  $dx(t)/dt$ . Por definição, temos

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftarrow{\mathcal{L}_u} \int_{0'}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) e^{-st} dt$$

Integrando por partes, obtemos

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_u} x(t)e^{-st} \Big|_{t=0^+} + s \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Uma vez que  $X(s)$  existe, sabemos que  $x(t)e^{-st}|_{t=\infty} = 0$ . Além disso, a integral corresponde à definição da transformada de Laplace unilateral da equação (6.9) e, deste modo, temos

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_u} sX(s) - x(0^+) \quad (6.16)$$

**EXEMPLO 6.4** Verifique a propriedade de diferenciação da equação (6.16) para o sinal  $x(t) = e^{at}u(t)$ .

*Solução:* A derivada de  $x(t)$  é

$$\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}, t > 0$$

A transformada de Laplace unilateral de  $ae^{at}u(t)$  é  $a$  vezes a transformada de Laplace unilateral de  $e^{at}u(t)$ ; ou seja,

$$\frac{d}{dt} x(t) = ae^{at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{a}{s-a}$$

Em seguida, vamos derivar novamente este resultado usando a propriedade de diferenciação. Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}_u} sX(s) - x(0^+) = s \frac{1}{s-a} - 1 \\ &= \frac{s - (s-a)}{s-a} \\ &= \frac{a}{s-a} \end{aligned}$$

A forma geral da propriedade de diferenciação é

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} x(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}_u} s^n X(s) - \left. \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) \right|_{t=0^+} - s \left. \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} x(t) \right|_{t=0^+} \\ &\quad - \dots - s^{n-2} \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0^+} - s^{n-1} x(0^+) \end{aligned} \quad (6.17)$$

### Propriedade de Integração

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{x^{(-1)}(0^+)}{s} + \frac{X(s)}{s} \quad (6.18)$$

em que

$$x^{(-1)}(0^+) = \int_{-\infty}^{0^+} x(\tau) d\tau$$

é a área sob  $x(t)$ , de  $t = -\infty$  até  $t = 0^+$ .

► **EXERCÍCIO 6.4** Use a propriedade da integração para mostrar que a transformada de Laplace unilateral de

$$tu(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

é dada por  $1/s^2$ .

### Teoremas dos Valores Inicial e Final

Os teoremas dos valores inicial e final permitem-nos determinar o valor inicial de  $x(t)$ ,  $x(0^+)$ , e o valor final,  $x(\infty)$ , diretamente de  $X(s)$ . Estes teoremas são mais freqüentemente usados para avaliar os valores ou inicial ou final de uma saída de sistema sem que seja preciso determinar explicitamente a resposta completa no tempo do sistema. O teorema do valor inicial afirma que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+) \quad (6.19)$$

O teorema do valor inicial não se aplica a funções racionais  $X(s)$  cuja ordem do polinômio do numerador seja maior do que a ordem do polinômio do denominador. O teorema do valor final afirma que

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(\infty) \quad (6.20)$$

O teorema do valor final se aplica somente se todos os pólos de  $X(s)$  estiverem no semiplano esquerdo do plano  $s$ , tendo no máximo um único pôlo em  $s = 0$ .

**EXEMPLO 6.5** Determine os valores inicial e final de um sinal  $x(t)$  cuja transformada de Laplace unilateral seja

$$X(s) = \frac{7s+10}{s(s+2)}$$

*Solução:* Podemos aplicar o teorema do valor inicial para obter

$$\begin{aligned} x(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{7s+10}{s(s+2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{7s+10}{s+2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

O teorema do valor final é aplicável, uma vez que  $X(s)$  tem somente um único pôlo em  $s = 0$  e os pólos restantes estão no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Temos

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{7s+10}{s(s+2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7s+10}{s+2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

O leitor poderá verificar estes resultados mostrando que a transformada de Laplace inversa de  $X(s)$  é  $x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t)$ .

► **EXERCÍCIO 6.5** Encontre os valores inicial e final de  $x(t)$  se

$$X(s) = e^{-5s} \left( \frac{-2}{s(s+2)} \right)$$

*Resposta:*

$$x(0^+) = 0$$

$$x(\infty) = -1$$

## 6.4 Inversão da Transformada de Laplace

A inversão direta da transformada de Laplace inversa dada na equação (6.6) requer um entendimento da integração de contorno e não será levada adiante aqui. Determinaremos as transformadas de Laplace inversas usando a relação biunívoca entre um sinal e sua transformada de Laplace unilateral. Dado o conhecimento de diversos pares básicos de transformadas e das propriedades das transformadas de Laplace, podemos inverter uma classe muito grande de transformadas de Laplace desta maneira. Uma tabela de pares de transformadas de Laplace básicas é fornecida no Apêndice D.1.

No estudo dos sistemas LTI, freqüentemente encontramos transformadas de Laplace que são uma razão de polinômios em  $s$ . Neste caso, a transformada inversa é obtida expressando-se  $X(s)$  como uma soma de termos para os quais já conhecemos a função de tempo. Suponhamos que

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} \\ &= \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

em que  $M < N$ . O caso  $M \geq N$  não se aplica à transformada de Laplace unilateral, uma vez que isto implica que termos da forma  $c_k s^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M - N$ , estão contidos em  $X(s)$ . Esses termos correspondem a impulsos e suas derivadas localizadas no tempo  $t = 0$ , os quais são excluídos da transformada unilateral, como é definido na equação (6.9).

Iniciamos, fatorando o polinômio do denominador como um produto de pólos para obter

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

Se todos os pólos  $d_k$  forem distintos, podemos reescrever  $X(s)$  como uma soma de termos simples usando uma expansão em frações parciais, da seguinte maneira:

$$X(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - d_k}$$

Os  $A_k$  são determinados usando-se o método dos resíduos ou resolvendo-se um sistema de equações lineares conforme é descrito no Apêndice B. A transformada de Laplace inversa de cada termo da soma agora pode ser encontrada usando-se o par

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{A_k}{s - d_k}$$

Se um polo  $d_i$  for repetido  $r$  vezes, então há  $r$  termos na expansão em frações parciais associada com o polo. São eles

$$\frac{A_{i_1}}{s - d_i}, \frac{A_{i_2}}{(s - d_i)^2}, \dots, \frac{A_{i_r}}{(s - d_i)^r}$$

A transformada de Laplace inversa de cada termo é encontrada usando-se o par

$$\frac{At^{n-1}}{(n-1)!} e^{d_k t} u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{A}{(s - d_k)^n}$$

**EXEMPLO 6.6** Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

**Solução:** Use uma expansão em frações parciais de  $X(s)$  para escrever

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{(s+2)^2}$$

Resolvendo  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , usando o método dos resíduos, obtemos

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

Podemos construir  $x(t)$  a partir da transformada de Laplace inversa de cada um dos termos da expansão em frações parciais:

- O pôlo do primeiro termo está em  $s = -1$ :

$$e^{-t}u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{s+1}$$

- O segundo termo tem um pôlo em  $s = -2$ :

$$-e^{-2t}u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{1}{s+2}$$

- O pôlo duplo do último termo está em  $s = -2$ :

$$2te^{-2t}u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{2}{(s+2)^2}$$

Combinando estes três termos, obtemos

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) + 2te^{-2t}u(t)$$

- **EXERCÍCIO 6.6** Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{-5s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)}$$

**Resposta:**

$$x(t) = e^{-t}u(t) - 2e^tu(t) + e^{-2t}u(t)$$

Se os coeficientes do polinômio do denominador forem reais, então todos os pôlos complexos ocorrerão em pares complexos conjugados. O procedimento de expansão em frações parciais descrito acima é aplicável com pôlos ou reais ou complexos. Um pôlo complexo normalmente resulta em coeficientes de expansão que têm valores complexos e uma função exponencial complexa de tempo. Nos casos em que  $X(s)$  tem coeficientes reais e, deste modo, corresponde a um sinal de tempo com valor real, podemos simplificar a álgebra combinando pôlos complexos conjugados na expansão em frações parciais de tal forma a garantirmos coeficientes de expansão com valores reais e uma transformada inversa com valor real. Isto é realizado combinando-se todos os pares de pôlos complexos conjugados em termos quadráticos com coeficientes reais. As transformadas de Laplace inversas destes termos quadráticos são senóides exponencialmente amortecidas.

Suponhamos que  $\alpha + j\omega_o$  e  $\alpha - j\omega_o$  sejam um par de pôlos complexos conjugados. Os dois termos de primeira ordem associados com eles na expansão em frações parciais são escritos como

$$\frac{A_1}{s-\alpha-j\omega_o} + \frac{A_2}{s-\alpha+j\omega_o}$$

Para que esta soma represente um sinal de valor real,  $A_1$  e  $A_2$  devem ser o complexo conjugado um do outro. Consequentemente, podemos substituir estes dois termos pelo termo quadrático simples

$$\frac{B_1s + B_2}{(s - \alpha - j\omega_o)(s - \alpha + j\omega_o)} = \frac{B_1s + B_2}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$$

que tem os valores reais  $B_1$  e  $B_2$ . Resolvemos então  $B_1$  e  $B_2$  e fatoramos o resultado na soma de dois termos quadráticos para os quais as transformadas de Laplace inversas são conhecidas. Ou seja, escrevemos

$$\frac{B_1s + B_2}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2} = \frac{C_1(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2} + \frac{C_2\omega_o}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$$

em que  $C_1 = B_1$  e  $C_2 = (B_1\alpha + B_2)/\omega_o$ . A transformada de Laplace inversa do termo

$$\frac{C_1(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$$

é

$$C_1 e^{\alpha t} \cos(\omega_o t) u(t)$$

De maneira semelhante, a transformada de Laplace inversa de

$$\frac{C_2\omega_o}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$$

é

$$C_2 e^{\alpha t} \sin(\omega_o t) u(t)$$

O exemplo seguinte ilustra esta abordagem.

**EXEMPLO 6.7** Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2}$$

*Solução:* Há três pólos em  $X(s)$ . Pelo método de tentativas, descobrimos que  $s = 1$  é um pôlo. Fatoramos  $s - 1$  de  $s^3 + s^2 - 2$  para obter  $s^2 + 2s + 2 = 0$  como a equação que define os dois pôlos restantes. A extração da raiz desta equação quadrática resulta nos pôlos complexos conjugados  $s = -1 \pm j$ .

Podemos escrever a equação quadrática  $s^2 + 2s + 2$  em termos do quadrado perfeito  $(s^2 + 2s + 1) + 1 = (s + 1)^2 + 1$  e, deste modo, a expansão em frações parciais para  $X(t)$  assume a forma

$$X(s) = \frac{A}{s - 1} + \frac{B_1s + B_2}{(s + 1)^2 + 1} \quad (6.21)$$

O coeficiente de expansão  $A$  é facilmente obtido por meio do método dos resíduos. Ou seja, multiplique ambos os lados da equação (6.21) por  $(s - 1)$  e avalie em  $s = 1$  para obter

$$\begin{aligned} A &= X(s)(s - 1) \Big|_{s=1} \\ &= \frac{4s^2 + 6}{(s + 1)^2 + 1} \Big|_{s=1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Os coeficientes restantes  $B_1$  e  $B_2$  de expansão são obtidos colocando-se ambos os termos da equação (6.21) num denominador comum e igualando-se o numerador com o numerador de  $X(s)$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} 4s^2 + 6 &= 2((s + 1)^2 + 1) + (B_1s + B_2)(s - 1) \\ &= (2 + B_1)s^2 + (4 - B_1 + B_2)s + (4 - B_2) \end{aligned}$$

Igualar os coeficientes em  $s^2$  resulta em  $B_1 = 2$ , e igualar os coeficientes de  $s^0$  resulta em  $B_2 = -2$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{s-1} + \frac{2s-2}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{2}{s-1} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - 4 \frac{1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

Ao chegarmos na segunda equação, fatoramos  $2s-2$  como  $2(s+1)-4$ . Tomemos agora a transformada de Laplace inversa de cada termo. Reunindo estes resultados, obtemos

$$x(t) = 2e^t u(t) + 2e^{-t} \cos(t)u(t) - 4e^{-t} \sin(t)u(t)$$

► **Exercício 6.7** Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$$

**Resposta:**

$$x(t) = -e^{-t} u(t) + 2e^{-t} \cos(\sqrt{2}t)u(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t} \sin(\sqrt{2}t)u(t)$$

Os pólos de  $X(s)$  determinam as características inerentes do sinal  $x(t)$ . Um pôlo em  $s = d_k$  resulta num termo senoidal exponencialmente amortecido da forma  $e^{d_k t} u(t)$ . Fazendo  $d_k = \sigma_k + j\omega_k$ , podemos escrever este termo como  $e^{\sigma_k t} e^{j\omega_k t} u(t)$ . Conseqüentemente, a parte real do pôlo determina o fator de amortecimento exponencial, e a parte imaginária determina a freqüência senoidal. Se  $\text{Re}\{d_k\}$  for grande e negativo, então o termo decrescerá muito rapidamente. Se  $\text{Im}\{d_k\}$  for grande, então o termo oscilará rapidamente. Tendo estas propriedades em mente, podemos inferir muito sobre as características de um sinal a partir das localizações de seus pólos no plano  $s$ .

## 6.5 Resolvendo Equações Diferenciais com Condições Iniciais

A principal aplicação da transformada unilateral de Laplace em análise de sistemas é resolver equações diferenciais com condições iniciais diferentes de zero. As condições iniciais são incorporadas na solução como os valores do sinal e suas derivadas que ocorrem no tempo zero na propriedade da diferenciação da equação (6.17). Isto é ilustrado por meio de um exemplo.

**EXEMPLO 6.8** Use a transformada de Laplace para encontrar a saída do sistema descrito pela equação diferencial

$$\frac{d}{dt} y(t) + 5y(t) = x(t)$$

em resposta à entrada  $x(t) = 3e^{-2t}u(t)$  e condição inicial  $y(0^+) = -2$ .

**Solução:** Tome a transformada de Laplace unilateral de cada lado da equação diferencial e aplique a propriedade da diferenciação da equação (6.16) para obter

$$sY(s) - y(0^+) + 5Y(s) = X(s)$$

Resolvendo  $Y(s)$ , obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{s+5} [X(s) + y(0^+)]$$

Substitua agora  $X(s) = 3/(s+2)$  e a condição inicial  $y(0^+) = -2$ , obtendo

$$Y(s) = \frac{3}{(s+2)(s+5)} + \frac{-2}{s+5}$$

Expandindo  $Y(s)$  em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+5} + \frac{-2}{s+5}$$

e tomando a transformada de Laplace inversa, obtemos,

$$y(t) = e^{-2t}u(t) - 3e^{-5t}u(t)$$

O método da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais apresenta uma separação clara entre a resposta natural do sistema às condições iniciais e a resposta forçada do sistema associada com a entrada. Tomando a transformada de Laplace unilateral de ambos os lados da equação diferencial

$$\begin{aligned} a_N \frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ = b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t) + b_{M-1} \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

obtemos

$$A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s) - D(s)$$

em que

$$\begin{aligned} A(s) &= a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ B(s) &= b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ C(s) &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-l-1} \frac{d^l}{dt^l} y(t) \Big|_{t=0^+} \end{aligned}$$

e

$$D(s) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=0}^{k-1} b_k s^{k-l-1} \frac{d^l}{dt^l} x(t) \Big|_{t=0^+}$$

Observamos que  $C(s) = 0$  se todas as condições iniciais forem nulas e  $B(s)X(s) - D(s) = 0$  se a entrada for nula. Podemos escrever  $Y(s)$  como

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{B(s)X(s) - D(s)}{A(s)} + \frac{C(s)}{A(s)} \\ &= Y^{(f)}(s) + Y^{(n)}(s) \end{aligned}$$

em que

$$Y^{(f)}(s) = \frac{B(s)X(s) - D(s)}{A(s)} \quad \text{e} \quad Y^{(n)}(s) = \frac{C(s)}{A(s)}$$

O primeiro termo,  $Y^{(f)}(s)$ , representa o componente da resposta associado inteiramente com a entrada, ou a *resposta forçada* do sistema. Ele representa a saída quando as condições iniciais são nulas. O segundo termo,  $Y^{(n)}(s)$ , representa o componente da saída devida às condições iniciais, ou a *resposta natural* do sistema. Ele representa a saída do sistema quando a entrada é nula.

**EXEMPLO 6.9** Use a transformada de Laplace para determinar a saída de um sistema representado pela equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 6y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + x(t)$$

em resposta à entrada  $x(t) = u(t)$ . Assuma que as condições iniciais do sistema sejam

$$y(0^+) = 1 \quad e \quad \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=0^+} = 2$$

Identifique a resposta forçada do sistema,  $y^{(f)}(t)$ , e a resposta natural,  $y^{(n)}(t)$ .

**Solução:** Tomando a transformada de Laplace unilateral de ambos os lados da equação diferencial, obtemos

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) - sy(0^+) - \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0^+} - 5y(0^+) = (2s + 1)X(s) - 2x(0^+)$$

Resolvendo  $Y(s)$ , obtemos

$$Y(s) = \frac{(2s+1)X(s) - 2x(0^+)}{s^2 + 5s + 6} + \frac{sy(0^+) + \frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0^+} + 5y(0^+)}{s^2 + 5s + 6}$$

O primeiro termo é associado com a resposta forçada do sistema,  $Y^{(f)}(s)$ . O segundo termo corresponde à resposta natural,  $Y^{(n)}(s)$ . Substituindo  $X(s)$ ,  $x(0^+)$ , e as condições iniciais, obtemos

$$Y^{(f)}(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

e

$$Y^{(n)}(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s+3)}$$

Expandir ambas numa expansão em frações parciais produzirá

$$Y^{(f)}(s) = \frac{\frac{1}{6}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{s+3}$$

$$Y^{(n)}(s) = \frac{5}{s+2} + \frac{-4}{s+3}$$

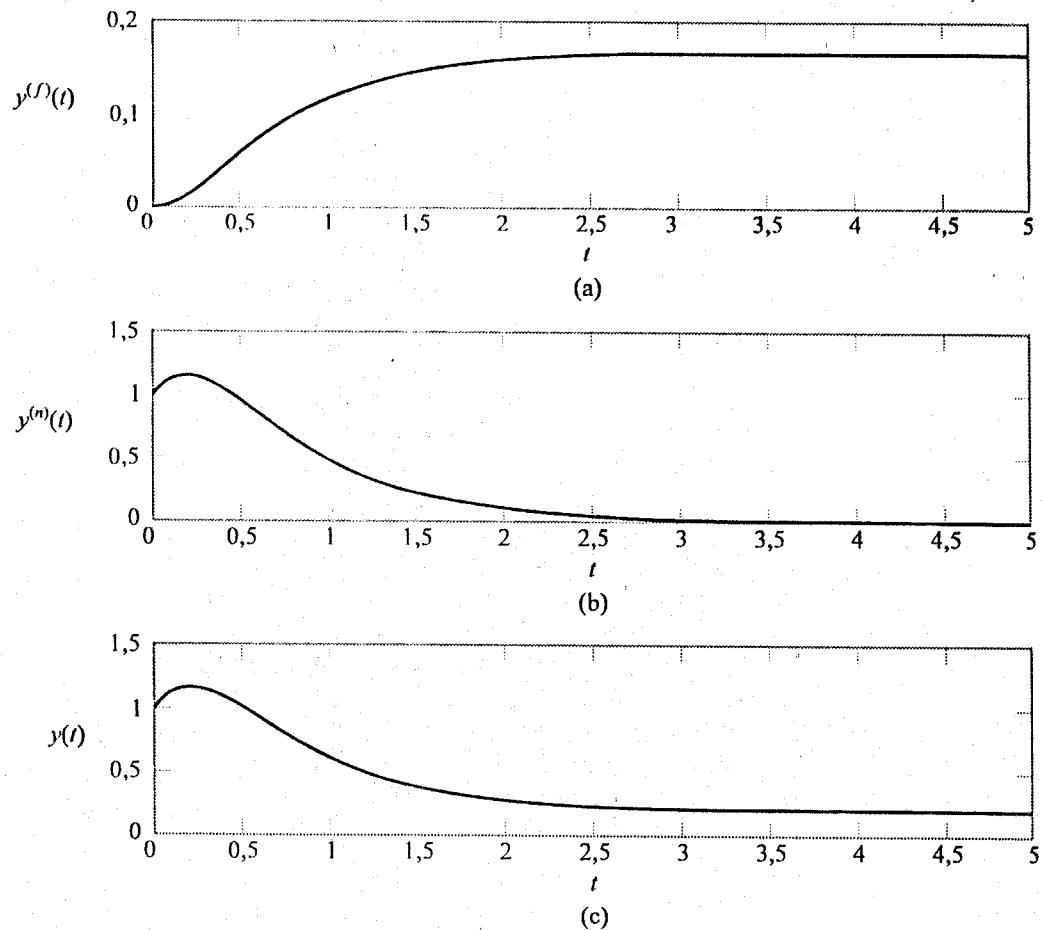
Em seguida, tomando as transformadas de Laplace unilaterais inversas de  $Y^{(f)}(s)$  e  $Y^{(n)}(s)$ , obtemos

$$y^{(f)}(t) = \frac{1}{6}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

e

$$y^{(n)}(t) = 5e^{-2t}u(t) - 4e^{-3t}u(t)$$

A saída do sistema é  $y(t) = y^{(f)}(t) + y^{(n)}(t)$ . As figuras 6.7(a), (b) e (c) descrevem a resposta forçada, a resposta natural e a saída de sistema, respectivamente.



**FIGURA 6.7** Solução para o Exemplo 6.9. (a) Resposta forçada do sistema,  $y^{(f)}(t)$ . (b) Resposta natural do sistema,  $y^{(n)}(t)$ . (c) Saída global de sistema.

**EXEMPLO 6.10** O sistema mecânico descrito na Figura 6.8 é regido pela equação diferencial

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + f \frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = x(t)$$

Aqui,  $x(t)$  é a força aplicada e  $y(t)$  é a posição da massa. Encontre as respostas forçada e natural deste sistema para  $m = 2$  kg,  $f = 4 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$  e  $k = 202 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  supondo que a posição inicial seja  $y(0^+) = 5$  m, a

velocidade inicial seja  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e a entrada seja  $x(t) = 2[u(t) - u(t-1)]$  N.

**Solução:** Tome a transformada de Laplace unilateral de ambos os lados da equação diferencial e reorganize os termos resultando

$$Y^{(f)}(s) = \frac{X(s)}{2s^2 + 4s + 202}$$

$$Y^{(n)}(s) = \frac{(2s+4)y(0^+) + 2 \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^+}}{2s^2 + 4s + 202}$$

Substituindo as condições iniciais e simplificando, obtemos

$$Y^{(n)}(s) = \frac{5(s+1)}{(s+1)^2 + 10^2}$$

Tome agora a transformada unilateral inversa de  $Y^{(n)}(s)$  para obter a resposta natural, como é mostrado por

$$y^{(n)}(t) = 5e^{-t} \cos(10t)u(t)$$

Em seguida, substituímos  $X(s)$  para obter a transformada de Laplace da resposta forçada como

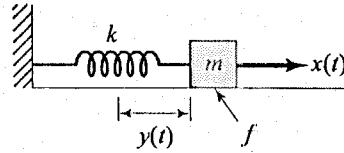
$$Y^{(f)}(s) = (1 - e^{-s}) \frac{1}{s(s^2 + 2s + 101)}$$

Execute uma expansão em frações parciais de  $Y^{(f)}(s)$  para obter

$$Y^{(f)}(s) = (1 - e^{-s}) \frac{1}{101} \left[ \frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 10^2} - \frac{1}{10} \frac{10}{(s+1)^2 + 10^2} \right]$$

O termo  $e^{-s}$  introduz um retardo de tempo igual a 1 s a cada termo da expansão em frações parciais. Tomando a transformada de Laplace unilateral inversa, obtemos

$$\begin{aligned} y^{(f)}(t) &= \frac{1}{101} \left[ u(t) - u(t-1) - e^{-t} \cos(10t)u(t) + e^{-(t-1)} \cos(10(t-1))u(t-1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{10} e^{-t} \sin(10t)u(t) + \frac{1}{10} e^{-(t-1)} \sin(10(t-1))u(t-1) \right] \end{aligned}$$



**FIGURA 6.8** Sistema mecânico com entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$ .

► **EXERCÍCIO 6.8** Determine a resposta forçada, a resposta natural e a saída de um sistema descrito pela equação diferencial

$$\frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = 4x(t)$$

em resposta à entrada  $x(t) = \cos(2t)u(t)$  e condição inicial  $y(0^+) = -2$ .

**Resposta:**

$$\begin{aligned} y^{(f)}(t) &= -\frac{12}{13} e^{-3t} u(t) + \frac{12}{13} \cos(2t)u(t) + \frac{8}{13} \sin(2t)u(t) \\ y^{(n)}(t) &= -2e^{-3t} u(t) \end{aligned}$$

e  $y(t) = y^{(f)}(t) + y^{(n)}(t)$ . □

A resposta natural do sistema é obtida de uma expansão em frações parciais usando-se os pólos de  $C(s)/A(s)$ , os quais são as raízes de  $A(s)$ . Por este motivo, estas raízes às vezes são chamadas *frequências naturais* do sistema. Observe que, se o sistema for estável, as raízes de  $A(s)$  deverão ter partes reais negativas; ou seja, deverão situar-se no semiplano esquerdo do plano  $s$ .

As propriedades de diferenciação e integração também podem ser usadas para transformar circuitos que envolvem elementos capacitivos e indutivos a fim de que o circuito possa ser resolvido diretamente em termos de transformadas de Laplace, ao invés de escrevermos primeiro a equação diferencial no domínio de tempo. Isto é realizado substituindo-se os elementos resistivos, capacitivos e indutivos por seus equivalentes em transformada de Laplace.

Uma resistência  $R$  com a correspondente tensão  $v_R(t)$  e corrente  $i_R(t)$  satisfaz a relação

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

Transformando esta equação, escrevemos

$$V_R(s) = RI_R(s) \quad (6.22)$$

a qual é representada pelo elemento resistivo transformado da Figura 6.9(a). Em seguida, consideraremos um indutor, para o qual

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

Transformando esta relação e usando a propriedade de diferenciação, temos

$$V_L(s) = sLI(s) - Li_L(0^+) \quad (6.23)$$

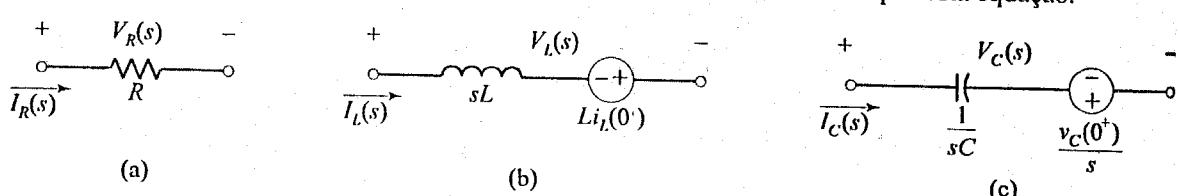
Esta relação é representada pelo elemento indutivo transformado da Figura 6.9(b). Consideremos agora um capacitor, o qual pode ser descrito por

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + v_C(0^+)$$

Transformando e usando a propriedade de integração, obtemos

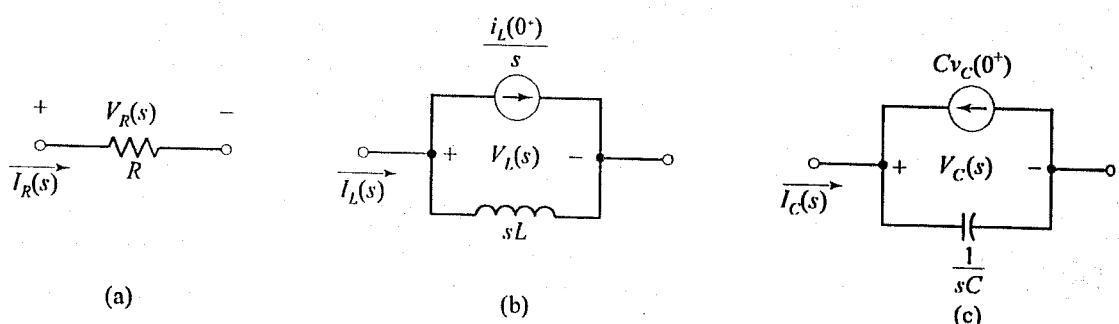
$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0^+)}{s} \quad (6.24)$$

A Figura 6.9(c) ilustra o elemento capacitivo transformado descrito por esta equação.



**FIGURA 6.9** Modelos de circuito expressos em transformada de Laplace para serem usados com a lei das tensões de Kirchhoff. (a) Resistor. (b) Indutor com corrente inicial  $i_L(0^+)$ . (c) Capacitor com tensão inicial  $v_C(0^+)$ .

Os modelos de circuito correspondentes às equações (6.22), (6.23) e (6.24) são muito úteis quando se aplica a lei das tensões de Kirchhoff para resolver um circuito. Se a lei das correntes de Kirchhoff precisar ser usada, então será mais conveniente reescrever as equações (6.22), (6.23) e (6.24) para expressarmos a corrente como uma função da tensão. Isto resulta nos elementos de circuito transformados descritos na Figura 6.10. O exemplo seguinte ilustra o método da transformada de Laplace para solucionar um circuito elétrico.



**FIGURA 6.10** Modelos de circuito expressos em transformada de Laplace para serem usados com a lei das correntes de Kirchhoff. (a) Resistor. (b) Indutor com corrente inicial  $i_L(0^+)$ . (c) Capacitor com tensão inicial  $v_C(0^+)$ .

**EXEMPLO 6.11** Use modelos de circuito expressos em transformada de Laplace para determinar a tensão  $y(t)$  no circuito da Figura 6.11(a) para uma tensão aplicada  $x(t) = 2e^{-10t}u(t)$  V. A tensão no capacitor no instante  $t = 0^+$  é 5 V.

**Solução:** O circuito transformado está desenhado na Figura 6.11(b) com os símbolos  $I_1(s)$  e  $I_2(s)$  representando a corrente em cada ramo. Podemos escrever as seguintes equações para descrever o circuito:

$$Y(s) = 1000(I_1(s) + I_2(s))$$

$$X(s) = Y(s) + \frac{1}{s10^{-4}}I_1(s) + \frac{5}{s}$$

e

$$X(s) = Y(s) + 1000I_2(s)$$

Combinando estas três equações para eliminar  $I_1(s)$  e  $I_2(s)$ , podemos escrever

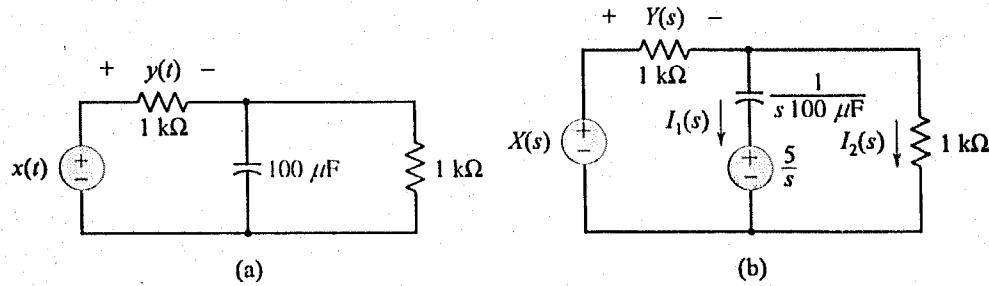
$$Y(s) = X(s) \frac{s+10}{s+20} - \frac{5}{s+20}$$

Substituindo  $X(s)$ , obtemos

$$Y(s) = \frac{-3}{s+20}$$

e, dessa forma, concluímos que

$$y(t) = -3e^{-20t}u(t) \text{ V}$$



**FIGURA 6.11** Circuito elétrico correspondente ao Exemplo 6.11(a). (a) Circuito original. (b) Circuito transformado.

As respostas natural e forçada de um circuito são facilmente determinadas usando-se a representação de circuito transformado. A resposta natural é obtida fazendo-se igual a zero a tensão ou a corrente da fonte associada com a entrada. Neste caso, as únicas fontes de tensão ou de corrente no circuito são aquelas associadas com as condições iniciais nos modelos de circuito capacitivo e indutivo transformados. A resposta forçada é obtida fazendo-se as condições iniciais iguais a zero, o que elimina as fontes de tensão ou de corrente presentes nos modelos de circuito capacitivo e indutivo transformados.

## 6.6 A Transformada de Laplace Bilateral

A transformada de Laplace bilateral envolve os valores do sinal  $x(t)$  tanto para  $t > 0$  como para  $t \leq 0$ , como é mostrado por

$$x(t) \xleftrightarrow{} X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Conseqüentemente, a transformada de Laplace bilateral é apropriada para problemas que envolvem sinais e sistemas não causais. Estas aplicações serão estudadas na próxima seção. Como aprendemos na Seção 6.2, a transformada de Laplace bilateral não é única, a menos que a RDC seja especificada.

Nesta seção, examinaremos as propriedades da RDC, observaremos as diferenças importantes entre as propriedades da transformada de Laplace unilateral e bilateral, e discutiremos a inversão da transformada de Laplace bilateral.

### ■ \*PROPRIEDADES DA REGIÃO DE CONVERGÊNCIA

Nesta subseção, mostramos como a RDC está relacionada com as características de um sinal  $x(t)$ . Desenvolvemos estas propriedades usando argumentos intuitivos ao invés de provas rigorosas. Uma vez que conhecemos as propriedades da RDC, muitas vezes podemos identificar a RDC a partir do conhecimento da transformada de Laplace  $X(s)$  e do conhecimento limitado das características de  $x(t)$ .

Primeiramente, notamos que a RDC não pode conter quaisquer pólos. Se a transformada de Laplace convergir, então  $X(s)$  será finita dentro da RDC inteira. Suponhamos que  $d$  seja um pôlo de  $X(s)$ . Isto implica que  $X(d) = \pm \infty$ , e a transformada de Laplace não converge em  $d$ . Dessa forma,  $d$  não pode situar-se na RDC.

Em seguida, a convergência da transformada de Laplace para um sinal  $x(t)$  implica que

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

para alguns valores de  $\sigma$ . O conjunto de  $\sigma$  para o qual esta integral é finita determina a RDC. A quantidade  $\sigma$  é a parte real de  $s$ , de forma que a RDC depende somente da parte real de  $s$ ; o componente imaginário de  $s$  não afeta a convergência. Isto implica que a RDC consiste em faixas paralelas ao eixo  $j\omega$  no plano  $s$ .

Suponhamos que  $x(t)$  seja um sinal de duração finita, ou seja,  $x(t) = 0$  para  $t < a$  e  $t > b$ . Se pudermos encontrar uma constante delimitadora finita  $A$  tal que  $|x(t)| \leq A$ , então

$$\begin{aligned} I(\sigma) &\leq \int_a^b A e^{-\sigma t} dt \\ &\leq \begin{cases} (-A/\sigma)e^{-\sigma t} \Big|_a^b, & \sigma \neq 0 \\ A(b-a), & \sigma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Neste caso, vemos que  $I(\sigma)$  é finito para todos os valores finitos de  $\sigma$  e concluímos que a RDC de um sinal de duração finita inclui o plano  $s$  inteiro.

Agora, separamos  $I(\sigma)$  em seções de tempo positivo e negativo, como é mostrado por

$$I(\sigma) = I_-(\sigma) + I_+(\sigma)$$

em que

$$I_-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

e

$$I_+(\sigma) = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

A fim de que  $I(\sigma)$  seja finito, ambas as integrais devem ser finitas. Isto implica que  $|x(t)|$  deve estar limitado em certo sentido.

Suponhamos que possamos limitar  $|x(t)|$  tanto para  $t$  positivo como negativo, encontrando as menores constantes  $A$  e  $\sigma_p$  tal que

$$|x(t)| \leq A e^{\sigma_p t}, \quad t > 0$$

e a maior constante  $\sigma_n$ , tal que

$$|x(t)| \leq A e^{\sigma_n t}, \quad t < 0$$

Diz-se que um sinal  $x(t)$  que satisfaz estes limites é de *ordem exponencial*. Estes limites implicam que  $|x(t)|$  não cresce mais rápido do que  $e^{\sigma_p t}$  para  $t$  positivo e  $e^{\sigma_n t}$  para  $t$  negativo. Há sinais que não são de ordem exponencial, tais como  $e^{t^2}$  ou  $t^3$ , mas esses sinais geralmente não surgem no estudo de sistemas físicos.

Usando os limites de ordem exponencial em  $|x(t)|$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} I_-(\sigma) &\leq A \int_{-\infty}^0 e^{(\sigma_n - \sigma)t} dt \\ &\leq \frac{A}{\sigma_n - \sigma} e^{(\sigma_n - \sigma)t} \Big|_{-\infty}^0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_+(\sigma) &\leq A \int_0^\infty e^{(\sigma_p - \sigma)t} dt \\ &\leq \frac{A}{\sigma_p - \sigma} e^{(\sigma_p - \sigma)t} \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

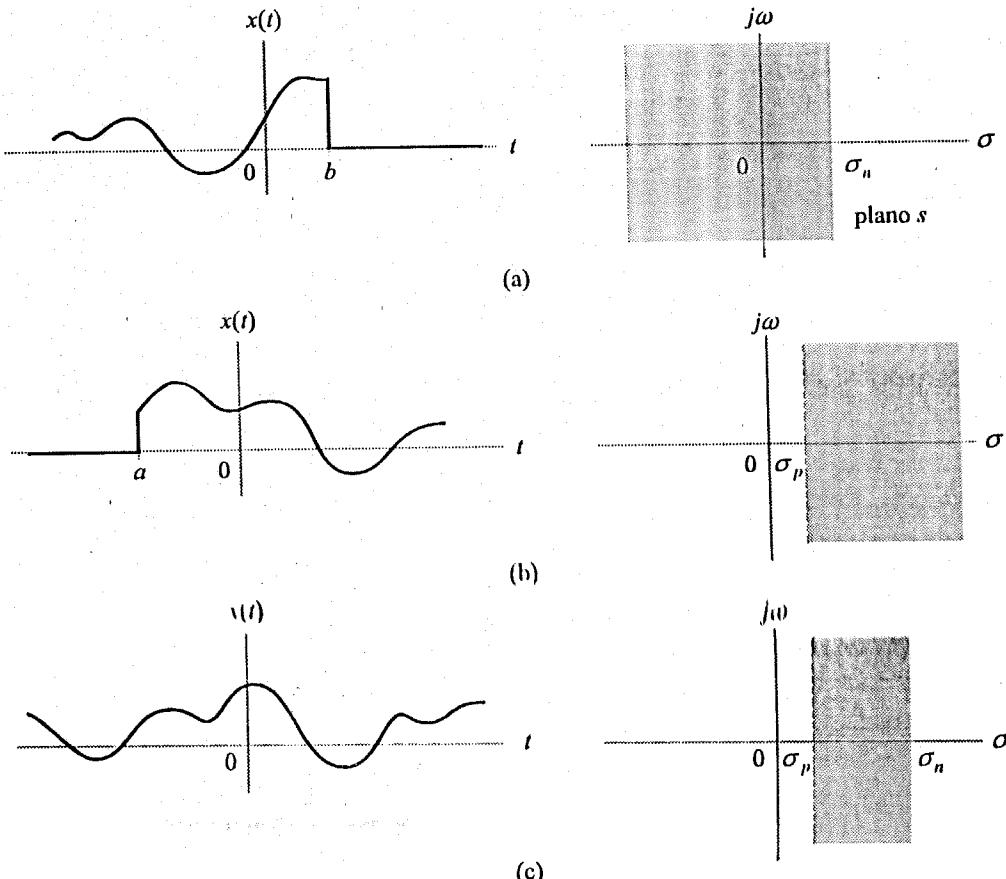
Observamos que  $I_-(\sigma)$  é finito quando quer que  $\sigma < \sigma_n$ , e que  $I_+(\sigma)$  é finito quando quer que  $\sigma > \sigma_p$ . A quantidade  $I(\sigma)$  é finita em valores  $\sigma$  para os quais tanto  $I_-(\sigma)$  e  $I_+(\sigma)$  são finitos. Conseqüentemente, a transformada de Laplace converge para  $\sigma_p < \sigma < \sigma_n$ . Note que se  $\sigma_p > \sigma_n$ , então não há nenhum valor  $\sigma$  para o qual a transformada de Laplace converge.

Podemos tirar as seguintes conclusões a respeito da RDC para sinais de duração infinita a partir da análise que acabamos de apresentar. Defina um *sinal unilateral esquerdo* como um sinal para o qual  $x(t) = 0$  para  $t > b$ , um *sinal unilateral direito* como um sinal para o qual  $x(t) = 0$  para  $t < a$ , e um *sinal bilateral* como um sinal que tem extensão infinita em ambas as direções.

Se  $x(t)$  for de ordem exponencial, podemos fazer as seguintes afirmações:

- » A RDC de um sinal unilateral esquerdo tem a forma  $\sigma < \sigma_n$ .
- » A RDC de um sinal unilateral direito tem a forma  $\sigma > \sigma_p$ .
- » A RDC de um sinal bilateral tem a forma  $\sigma_p < \sigma < \sigma_n$ .

Cada um destes casos é ilustrado na Figura 6.12.



**FIGURA 6.12** Relação entre a extensão de tempo de um sinal e a RDC. (a) Um sinal unilateral esquerdo tem RDC à esquerda de uma linha vertical no plano  $s$ . (b) Um sinal unilateral direito tem RDC à direita de uma linha vertical no plano  $s$ . (c) Um sinal bilateral tem a RDC dada por uma faixa de largura finita no plano  $s$ .

Sinais exponenciais freqüentemente são encontrados em problemas físicos. Neste caso, há uma clara relação entre a RDC e o sinal. Especificamente, a parte real de um ou mais pólos determina as fronteiras  $\sigma_n$  e  $\sigma_p$  da RDC. Suponhamos que tenhamos o sinal unilateral direito,  $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$ , em que, de maneira geral,  $\alpha$  é complexo. Este sinal é de ordem exponencial, com o sinal de menor limite exponencial  $e^{\operatorname{Re}(\alpha)t}$ . Conseqüentemente,  $\sigma_p = \operatorname{Re}(\alpha)$  e a RDC é  $\sigma > \operatorname{Re}(\alpha)$ . A transformada de Laplace de  $x(t)$  tem um pôlo em  $s = \alpha$ , e então a RDC é a região do plano  $s$  que se situa à direita do pôlo. De maneira semelhante, se  $x(t) = e^{\alpha t} u(-t)$ , a RDC será  $\sigma < \operatorname{Re}(\alpha)$ , ou seja, a região do plano  $s$  à esquerda do pôlo. Se um sinal  $x(t)$  consistir numa soma de exponenciais, a RDC será a intersecção das RDCs associadas com cada termo da soma. Isto é demonstrado no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 6.12** Considere os dois sinais

$$x_1(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} u(-t)$$

e

$$x_2(t) = e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(-t)$$

Identifique a RDC de cada sinal.

**Solução:** Verifique a integrabilidade absoluta de  $|x_1(t)|e^{-\sigma t}$  escrevendo

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|e^{-\sigma t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(1+\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(2+\sigma)t} dt \\ &= \frac{-1}{1+\sigma} e^{-(1+\sigma)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{-1}{2+\sigma} e^{-(2+\sigma)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

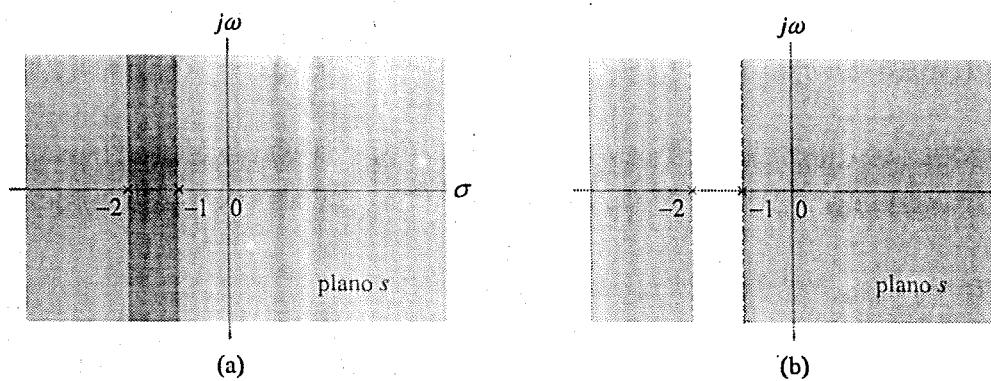
O primeiro termo converge para  $\sigma < -1$ , enquanto o segundo converge para  $\sigma > -2$ . Conseqüentemente, ambos os termos convergem para  $-2 < \sigma < -1$ . Esta é a intersecção da RDC de cada termo. A RDC de cada termo é descrita na Figura 6.13(a). A intersecção das RDCs é mostrada como a região duplamente sombreada. O leitor pode verificar que a transformada de Laplace de  $x_1(t)$  é

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

a qual tem pólos em  $s = -1$  e  $s = -2$ . Vemos que a RDC é a faixa do plano  $s$  localizada entre os pólos. Para o segundo sinal  $x_2(t)$ , temos

$$\begin{aligned} I_2(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|e^{-\sigma t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(2+\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+\sigma)t} dt \\ &= \frac{-1}{2+\sigma} e^{-(2+\sigma)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{-1}{1+\sigma} e^{-(1+\sigma)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

O primeiro termo converge para  $\sigma < -2$  e o segundo termo para  $\sigma > -1$ . Aqui, não há nenhum valor de  $\sigma$  para o qual ambos os termos convirjam e, deste modo, a intersecção é vazia. Conseqüentemente, não há nenhum valor de  $s$  para o qual  $X_2(s)$  convirja. Esta situação é ilustrada na Figura 6.13(b).



**FIGURA 6.13** RDCs correspondentes aos sinais do Exemplo 6.12. (a) As regiões sombreadas denotam as RDCs de cada termo individual,  $e^{-2t}u(t)$  e  $e^{-t}u(-t)$ . A região duplamente sombreada é a intersecção das RDCs individuais e representa a RDC da soma. (b) As regiões sombreadas representam as RDCs individuais de  $e^{-2t}u(-t)$  e  $e^{-t}u(t)$ . Neste caso, não há nenhuma intersecção e a transformada de Laplace da soma não converge para qualquer valor de  $s$ .

► **EXERCÍCIO 6.9** Descreva a RDC do sinal

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

**Resposta:** Para  $b > 0$  a RDC é a região  $-b < \sigma < b$ . Para  $b \leq 0$  a RDC é o conjunto vazio.

## ■ PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE BILATERAL

As propriedades de linearidade, mudança de escala, deslocamento de domínio  $s$ , convolução e diferenciação no domínio  $s$  são idênticas tanto para a transformada de Laplace bilateral como para a unilateral, não obstante as operações associadas com estas propriedades poderem modificar a RDC.

O efeito de cada uma destas operações na RDC é dada na tabela de propriedades da transformada de Laplace no Apêndice D.2.

Como um exemplo que ilustra a mudança que pode ocorrer na RDC, considere a propriedade de linearidade. Se  $x(t) \xrightarrow{r} X(s)$  com RDC  $R_x$  e  $y(t) \xrightarrow{r} Y(s)$  com RDC  $R_y$ , então  $ax(t) + by(t) \xrightarrow{r} aX(s) + bY(s)$  com RDC de pelo menos  $R_x \cap R_y$ , em que o símbolo  $\cap$  indica intersecção. Em geral, a RDC de uma soma de sinais é exatamente a intersecção das RDCs individuais. A RDC pode ser maior do que a intersecção das RDCs individuais se um polo e um zero se cancelarem na soma  $aX(s) + bY(s)$ . Isto é ilustrado no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 6.13** Suponhamos

$$x(t) = e^{-2t} u(t) \xleftrightarrow{r} X(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{com RDC Re}(s) > -2$$

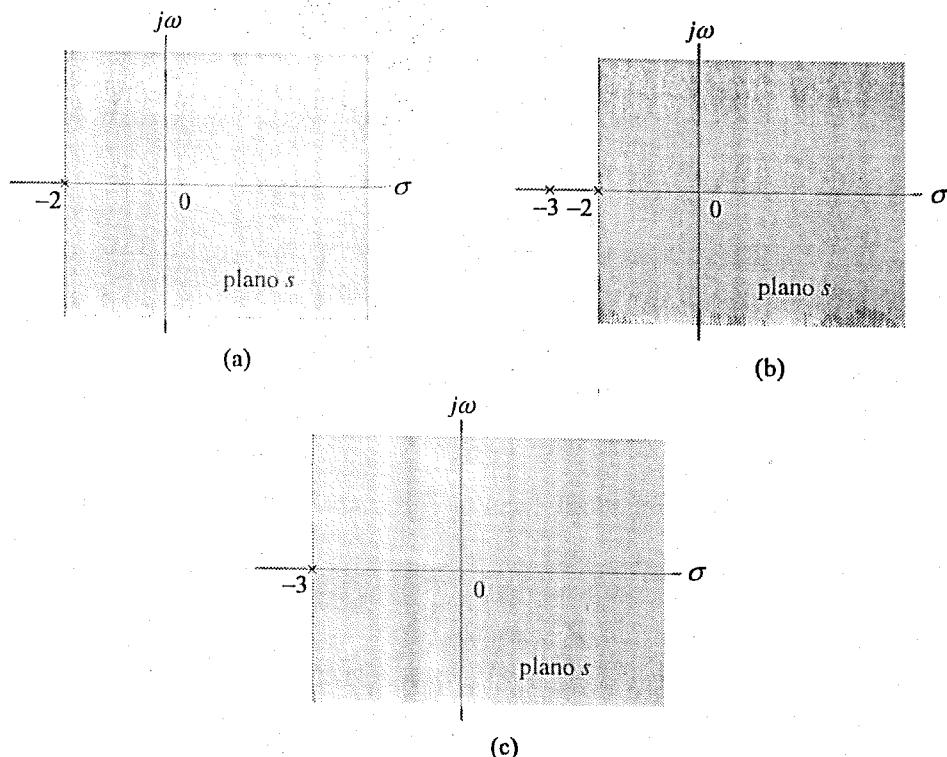
$$y(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \text{ com RDC } \operatorname{Re}(s) > -2$$

As representações no plano  $s$  das RDCs são mostradas na Figura 6.14. A intersecção das RDCs é  $\text{Re}(s) > -2$ . Porém, se escolhermos  $a = 1$  e  $b = -1$ , a soma  $x(t) - y(t) = e^{-3t}u(t)$  terá RDC  $\text{Re}(s) > -3$ , a qual é maior do que a intersecção das RDCs. Aqui, a subtração elimina o sinal  $e^{-2t}u(t)$  no domínio de tempo  $t$ , e, consequentemente a RDC é ampliada. Isto corresponde a um cancelamento pólo-zero no domínio  $s$ , uma vez que

$$\begin{aligned}
 X(s) - Y(s) &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\
 &= \frac{(s+3)-1}{(s+2)(s+3)} \\
 &= \frac{(s+2)}{(s+2)(s+3)}
 \end{aligned}$$

O zero de  $(X(s) - Y(s))$  localizado em  $s = -2$  cancela o pólo em  $s = -2$  e, deste modo, temos

$$X(s) - Y(s) = \frac{1}{s+3}$$



**FIGURA 6.14** A RDC de uma soma de sinais pode ser maior do que a intersecção de RDCs individuais quando ocorre um cancelamento de polo por zero. (a) RDC para  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ; (b) RDC para  $y(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t)$ ; (c) RDC para  $x(t) - y(t)$ .

Se a intersecção das RDCs for o conjunto vazio e não ocorrer o cancelamento de polo por zero, a transformada de Laplace de  $ax(t) + by(t)$  não existirá. Note que a RDC para a convolução de dois sinais também pode ser maior do que a intersecção de RDCs individuais se ocorrer um cancelamento de polo por zero.

As propriedades da transformada de Laplace bilateral que envolvem deslocamentos no tempo, diferenciação no domínio de tempo e integração no tempo, diferem ligeiramente de suas contrapartes unilaterais. Nós as expressamos da seguinte maneira:

#### Deslocamento no Tempo

$$x(t - \tau) \xrightarrow{\text{def}} e^{-s\tau} X(s) \quad (6.25)$$

A restrição no deslocamento que está presente no caso unilateral é removida porque a transformada de Laplace bilateral é avaliada ao longo de valores de tempo tanto positivos como negativos.

### Diferenciação no Domínio de Tempo

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\text{Laplace}} sX(s) \quad \text{com RDC no mínimo } R_x \quad (6.26)$$

A diferenciação no tempo corresponde à multiplicação por  $s$ . Aqui, mais uma vez, a RDC pode ser maior do que  $R_x$  se  $X(s)$  tiver um pôlo simples em  $s = 0$  na fronteira da RDC. A multiplicação por  $s$ , correspondendo à diferenciação, cancela este pôlo e, deste modo, elimina o componente dc em  $x(t)$ .

**EXEMPLO 6.14** Encontre a transformada de Laplace de

$$x(t) = \frac{d^2}{dt^2}(e^{-3(t-2)}u(t-2))$$

**Solução:** Sabemos que

$$e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\text{Laplace}} \frac{1}{s+3} \quad \text{com RDC } \operatorname{Re}(s) > -3$$

A propriedade do deslocamento no tempo implica que

$$e^{-3(t-2)}u(t-2) \xleftrightarrow{\text{Laplace}} \frac{1}{s+3} e^{-2s} \quad \text{com RDC } \operatorname{Re}(s) > -3$$

Agora, aplique a propriedade da diferenciação no tempo duas vezes, como é mostrado por

$$x(t) = \frac{d^2}{dt^2}(e^{-3(t-2)}u(t-2)) \xleftrightarrow{\text{Laplace}} X(s) = \frac{s^2}{s+3} e^{-2s} \quad \text{com RDC } \operatorname{Re}(s) > -3$$

### Integração no Tempo

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\text{Laplace}} \frac{X(s)}{s} \quad \text{com RDC } R_x \cap \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (6.27)$$

A integração corresponde à divisão por  $s$ . Uma vez que isto produz um pôlo em  $s = 0$  e estamos integrando para a direita, a RDC deve situar-se à direita de  $s = 0$ .

Os teoremas dos valores inicial e final se aplicam à transformada de Laplace bilateral com a restrição adicional de que  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ .

## ■ INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE BILATERAL

Como no caso unilateral, consideramos a inversão de transformadas de Laplace bilaterais que são expressas como razões de polinômios em  $s$ . A principal diferença entre a inversão das transformadas de Laplace bilateral e unilateral é que devemos usar a RDC para determinar uma transformada inversa única no caso bilateral. Lembre-se que a RDC de um sinal exponencial unilateral direito situa-se à direita de um pôlo, enquanto que a RDC de um sinal exponencial unilateral esquerdo situa-se à esquerda de um pôlo.

Iniciamos, supondo que a transformada a ser invertida é expressa como uma expansão em frações parciais em termos de pôlos não repetidos, como é mostrado por

$$X(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - d_k}$$

No caso bilateral, há duas possibilidades para a transformada de Laplace inversa de cada termo da soma. Podemos usar ou o par de transformadas de lado direito

ou o par de transformadas de lado esquerdo

$$-A_k e^{d_k t} u(-t) \xleftarrow{\mathcal{L}} \frac{A_k}{s - d_k} \quad \text{com RDC } \operatorname{Re}(s) < d_k$$

A RDC associada com  $X(s)$  determina se é escolhida a transformada inversa lateral esquerda ou a lateral direita.

A propriedade de linearidade afirma que a RDC de  $X(s)$  é a intersecção das RDCs dos termos individuais da expansão em frações parciais. Para encontrar a transformada inversa de cada termo, devemos inferir a RDC de cada termo a partir da RDC de  $X(s)$ . Isto é facilmente realizado comparando-se cada localização de pólo com a RDC de  $X(s)$ . Se a RDC de  $X(s)$  situar-se à esquerda de um pólo particular, escolhemos a transformada de Laplace inversa lateral esquerda para esse pólo. Se a RDC de  $X(s)$  situar-se à direita de um pólo em particular, escolhemos a transformada de Laplace inversa lateral direita para esse pólo. Este procedimento é ilustrado no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 6.15** Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{-5s - 7}{(s + 1)(s - 1)(s + 2)} \quad \text{com RDC } -1 < \operatorname{Re}(s) < 1$$

*Solução:* Use uma expansão em frações parciais

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s-1} + \frac{A_3}{s+2}$$

Resolvendo para  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , temos

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s+2}$$

A RDC e as localizações dos pólos são descritas na Figura 6.15. Encontramos a transformada de Laplace inversa de cada termo usando a relação entre a localização dos pólos e a RDC.

O pólo do primeiro termo está em  $s = -1$ . A RDC situa-se à direita deste pólo, de forma que escolhemos a transformada de Laplace inversa de lado direito

$$e^{-t} u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}$$

O segundo termo tem um pólo em  $s = 1$ . Aqui, a RDC está à esquerda do pólo, de forma que escolhemos a transformada de Laplace inversa de lado esquerdo

$$2e^t u(-t) \xleftarrow{\mathcal{L}} -\frac{2}{s-1}$$

O pólo do último termo está em  $s = -2$ . A RDC está à direita deste pólo, de forma que escolhemos a transformada de Laplace inversa de lado direito

$$e^{-2t} u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}$$

Combinando estes três termos, obtemos

$$x(t) = e^{-t} u(t) + 2e^t u(-t) + e^{-2t} u(t)$$

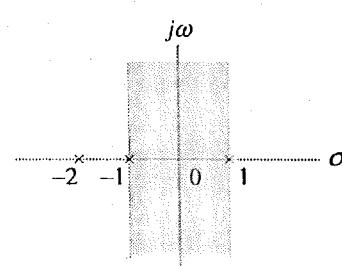


FIGURA 6.15 A RDC do Exemplo 6.15.

► EXERCÍCIO 6.10 Repita o exemplo anterior se a RDC for  $-2 < \operatorname{Re}(s) < -1$ .

*Resposta:*

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + 2e^t u(-t) + e^{-2t}u(t)$$

A relação entre as localizações dos pólos e da RDC no plano  $s$  também determina a transformada inversa para os outros termos que podem ocorrer numa expansão em frações parciais. Por exemplo, a transformada de Laplace inversa do termo

$$\frac{A}{(s-d_k)^n}$$

é dada pelo sinal unilateral direito

$$\frac{At^{n-1}}{(n-1)!} e^{d_k t} u(t)$$

se a RDC situar-se à direita dos pólos em  $s = d_k$ . Se a RDC situar-se à esquerda dos pólos em  $s = d_k$ , a transformada de Laplace inversa será

$$\frac{-At^{n-1}}{(n-1)!} e^{d_k t} u(-t)$$

Similarmente, a transformada de Laplace inversa do termo

$$\frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2}$$

é o sinal unilateral direito

$$C_1 e^{\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t)$$

se a RDC situar-se à direita dos pólos em  $s = \alpha \pm j\omega_0$ . Se a RDC situar-se à esquerda dos pólos em  $s = \alpha \pm j\omega_0$ , a transformada de Laplace inversa será

$$-C_1 e^{\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(-t)$$

► EXERCÍCIO 6.11 Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2} \text{ com RDC } -1 < \operatorname{Re}(s) < 1$$

*Resposta:*

$$x(t) = -2e^t u(-t) + 2e^{-t} \cos(t) u(t) - 4e^{-t} \sin(t) u(t)$$

Note que uma informação que não seja RDC pode ser usada para determinar uma transformada de Laplace inversa única. A forma mais comum de outra informação é a da causalidade, estabilidade, ou existência da transformada de Fourier. Se for conhecido que o sinal é causal, escolhemos a transformada inversa de lado direito cada termo. Esta é a abordagem seguida com a transformada de Laplace unilateral. Um sinal estável é absolutamente integrável e, dessa forma, tem uma transformada de Fourier. Conseqüentemente, a estabilidade e a existência da transformada de Fourier são condições equivalentes. Em ambos os casos, a RDC inclui o eixo  $j\omega$  no plano  $s$ , ou  $\operatorname{Re}(s) = 0$ . A transformada de Laplace inversa é obtida comparando-se as localizações dos pólos com o eixo  $j\omega$ . Se um pôlo situar-se à direita do eixo  $j\omega$ , a transformada inversa lateral direita é escolhida. Se ele situar-se à esquerda do eixo  $j\omega$ , a transformada inversa lateral esquerda é escolhida.

► EXERCÍCIO 6.12 Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{4s^2 + 15s + 8}{(s+2)^2(s-1)}$$

supondo que (a)  $x(t)$  é causal e (b) a transformada de Fourier de  $x(t)$  existe.

*Resposta:*

- (a)  $x(t) = e^{-2t}u(t) + 2te^{-2t}u(t) + 3e^t u(t)$   
 (b)  $x(t) = e^{-2t}u(t) + 2te^{-2t}u(t) - 3e^t u(-t)$

## 6.7 Análise de Sistemas com Transformadas

A função de transferência de um sistema foi definida na Seção 6.2 como a transformada de Laplace da resposta ao impulso. A saída de um sistema LTI relaciona-se com a entrada em termos da resposta ao impulso por meio da convolução

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Em geral, esta equação se aplica a  $h(t)$  e  $x(t)$  que sejam ou causais ou não causais. Conseqüentemente, se tomarmos a transformada de Laplace bilateral de ambos os lados desta equação e usarmos a propriedade de convolução, veremos que

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (6.28)$$

A transformada de Laplace da saída do sistema é o produto da função de transferência vezes a transformada de Laplace da entrada. Conseqüentemente, a função de transferência fornece ainda outra descrição do comportamento da entrada e saída de um sistema LTI.

Note que a Equação (6.28) implica que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (6.29)$$

Ou seja, a função de transferência é a razão da transformada de Laplace da saída pela transformada de Laplace da entrada. Esta definição se aplica em valores de  $s$  para os quais  $X(s)$  é diferente de zero. Examinaremos agora como as características do sistema estão relacionadas com a função de transferência.

### A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A função de transferência pode ser relacionada diretamente com a descrição em equação diferencial de um sistema LTI usando-se a transformada de Laplace bilateral. Lembre-se que a relação entre a entrada e a saída de um sistema LTI de  $N$ -ésima ordem é descrito pela equação diferencial

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

Na Seção 6.2, mostramos que a entrada  $e^{st}$  é uma autofunção do sistema com autovalor igual à função de transferência  $H(s)$ . Ou seja, se  $x(t) = e^{st}$ , então  $y(t) = e^{st}H(s)$ . A substituição de  $e^{st}$  em  $x(t)$  e  $e^{st}H(s)$  em  $y(t)$  na equação diferencial resulta em

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\} H(s) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\}$$

Substituímos agora a relação

$$\frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\} = s^k e^{st}$$

e resolvemos para  $H(s)$  para obter

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (6.30)$$

A função de transferência do sistema é uma razão de polinômios em  $s$  e, dessa forma, é denominada uma *função racional de transferência*. O coeficiente de  $s^k$  no polinômio do numerador corresponde ao coeficiente da  $k$ -ésima derivada de  $x(t)$ . O coeficiente de  $s^k$  no polinômio do denominador corresponde ao coeficiente da  $k$ -ésima derivada de  $y(t)$ . Conseqüentemente, podemos obter a função de transferência a partir da descrição por equação diferencial de um sistema. Inversamente, podemos determinar a descrição por equação diferencial de um sistema a partir de sua função de transferência.

**EXEMPLO 6.16** Encontre a função de transferência do sistema LTI descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2 y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) - 3 x(t)$$

*Solução:* Aplique a equação (6.30), obtendo

$$H(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Os pólos e zeros de uma função racional de transferência fornecem muito *insight* sobre as características do sistema, conforme veremos nas subseções seguintes. A função de transferência é expressa na forma de pólos e zeros fatorando-se os polinômios do numerador e do denominador da equação (6.30) da seguinte maneira:

$$H(s) = \frac{(b_M / a_N) \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (6.31)$$

Os  $c_k$  e  $d_k$  são os zeros e pólos do sistema, respectivamente. O conhecimento dos pólos, zeros e fator de ganho ( $b_M / a_N$ ) do sistema determina completamente a função de transferência do sistema e, dessa forma, fornece ainda uma outra descrição de um sistema LTI.

**EXEMPLO 6.17** Um sistema eletromecânico que consiste num motor dc e numa carga é descrito na Figura 6.16(a). A entrada é a tensão aplicada  $x(t)$  e a saída é a posição angular da carga  $y(t)$ . A inércia rotacional da carga é dada por  $J$ . Sob circunstâncias ideais, o torque produzido pelo motor é diretamente proporcional à corrente de entrada; ou seja,

$$\tau(t) = K_1 i(t)$$

A rotação do motor resulta numa força contra-eletromotriz  $v(t)$  que é proporcional à velocidade angular, como é mostrado por

$$v(t) = K_2 \frac{d}{dt} y(t)$$

O diagrama de circuito da Figura 6.16(b) descreve a relação entre a corrente de entrada, a tensão aplicada, a força contra-eletromotriz e a resistência  $R$  da armadura. Expressse a função de transferência deste sistema na forma de pólos e zeros.

**Solução:** O torque experimentado pela carga é dado pela inércia rotacional vezes a aceleração angular. Igualando o torque produzido pelo motor com o experimentado pela carga resulta na seguinte relação

$$J \frac{d^2}{dt^2} y(t) = K_1 i(t)$$

A aplicação da lei de Ohm ao circuito da Figura 6.16(b) indica que a corrente é expressa em termos da entrada e da força contra-eletromotriz como mostrado por

$$i(t) = \frac{1}{R} [x(t) - v(t)]$$

Conseqüentemente, substituindo  $i(t)$ , temos

$$J \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{K_1}{R} [x(t) - v(t)]$$

Expressamos agora  $v(t)$  em termos da velocidade angular para obter a equação diferencial que relaciona a tensão aplicada com a posição, como é mostrado por

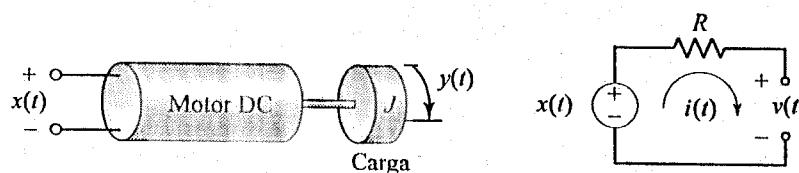
$$J \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{K_1 K_2}{R} \frac{d}{dt} y(t) = \frac{K_1}{R} x(t)$$

A aplicação da equação (6.30) mostra que a função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{\frac{K_1}{R}}{Js^2 + \frac{K_1 K_2}{R} s}$$

Conseqüentemente, a função de transferência é expressa na forma de pólos e zeros como

$$H(s) = \frac{\frac{K_1}{RJ}}{s \left( s + \frac{K_1 K_2}{RJ} \right)}$$



(a)

(b)

**FIGURA 6.16** (a) Sistema eletromecânico no qual um motor é usado para posicionar uma carga. (b) Diagrama de circuito relacionando a tensão aplicada à força contra-eletromotriz, à resistência da armadura e à corrente de entrada.

### ■ FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E DESCRIÇÃO POR VARIÁVEIS DE ESTADO

A função de transferência também se relaciona diretamente com a descrição por variáveis de estado

$$\frac{d}{dt} q(t) = \Lambda q(t) + b x(t) \quad (6.32)$$

$$y(t) = c q(t) + D x(t) \quad (6.33)$$

Tomando a transformada de Laplace da equação (6.32) e aplicando a propriedade de diferenciação da equação (6.26), obtemos

$$s\tilde{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}(s) + \mathbf{b}X(s) \quad (6.34)$$

Aqui, temos

$$\tilde{\mathbf{q}}(s) = \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ \vdots \\ Q_N(s) \end{bmatrix}$$

em que  $Q_i(s)$  é a transformada de Laplace do  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{q}(t)$ . A equação (6.34) pode ser reescrita como

$$s\tilde{\mathbf{q}}(s) - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{b}X(s)$$

ou, de maneira equivalente,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\tilde{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{b}X(s)$$

Este último resultado implica que

$$\tilde{\mathbf{q}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(s)$$

Em seguida, tomando a transformada de Laplace da equação (6.33) resulta

$$Y(s) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{q}}(s) + DX(s)$$

Substitua  $\tilde{\mathbf{q}}(s)$  para obter

$$Y(s) = [\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D]X(s)$$

Conseqüentemente, podemos identificar a função de transferência do sistema como

$$H(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D \quad (6.35)$$

**EXEMPLO 6.18** Encontre a função de transferência de um sistema que possui matrizes de descrição por variáveis de estado

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [1 \quad 1], \quad D = 0$$

*Solução:* Substituindo ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $D$ ) na equação (6.35), obtemos

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + s - 8} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}$$

c

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s^2 + s - 8} \begin{bmatrix} 4 \\ 2s-2 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o uso da equação (6.35) produz

$$H(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D$$

$$= \frac{2s+2}{s^2 + s - 8}$$

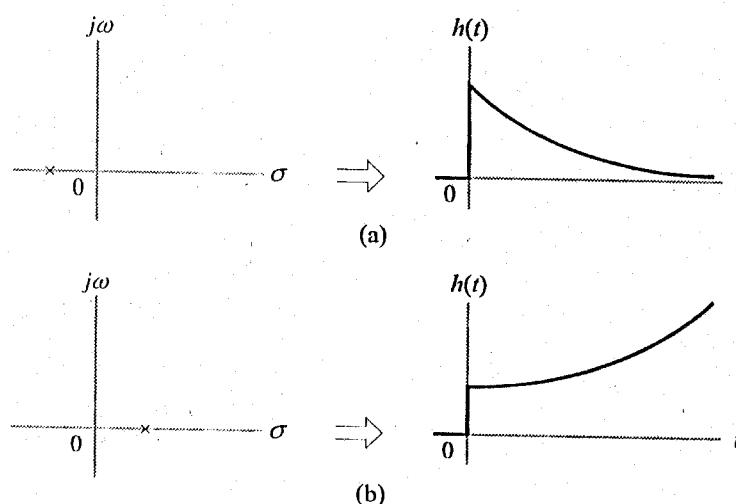
A função de transferência é uma descrição de um sistema em termos da entrada e saída. As transformações do vetor estado modificam a descrição por variáveis de estado, mas não mudam as características de entrada e saída do sistema. Consequentemente, conclui-se que a equação (6.35) é invariante às transformações do vetor estado.

### ■ CAUSALIDADE E ESTABILIDADE

A resposta ao impulso é a transformada de Laplace inversa da função de transferência. Para obter uma transformada inversa única, devemos conhecer a RDC ou ter algum outro conhecimento a respeito da resposta ao impulso. A descrição em equação diferencial de um sistema não contém esta informação. Daí, para obter a resposta ao impulso, devemos ter um conhecimento adicional das características do sistema. As relações entre os pólos, os zeros e as características do sistema podem proporcionar este conhecimento adicional.

A resposta ao impulso de um sistema causal é igual a zero para  $t < 0$ . Portanto, se soubermos que um sistema é causal, a resposta ao impulso será determinada a partir da função de transferência usando-se transformadas de Laplace inversas de lado direito.

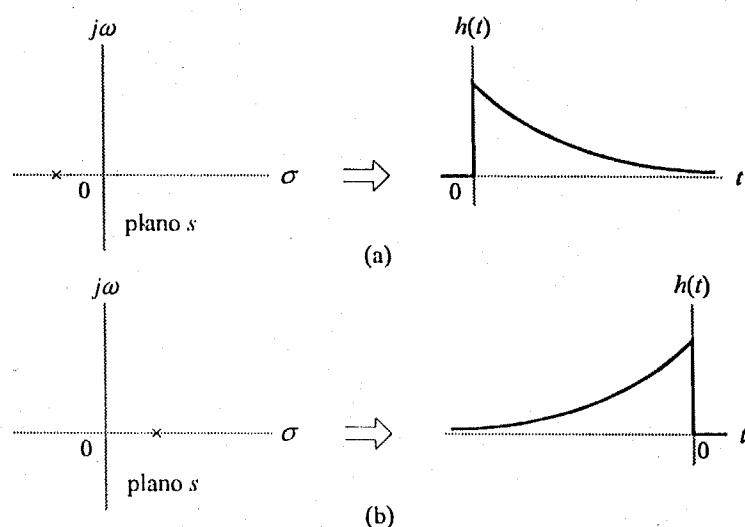
Um pôlo em  $s = d_k$  no semiplano esquerdo do plano  $s$  [ $\operatorname{Re}(d_k) < 0$ ] contribui com um termo exponencialmente decrescente para a resposta ao impulso, enquanto que um pôlo no semiplano direito do plano  $s$  [ $\operatorname{Re}(d_k) > 0$ ] contribui com um termo exponencialmente crescente para a resposta ao impulso. Estas relações são ilustradas na Figura 6.17.



**FIGURA 6.17** Relação entre a localização do pôlo e a resposta ao impulso de um sistema causal. (a) Um pôlo no semiplano esquerdo do plano  $s$  corresponde a uma resposta ao impulso exponencialmente decrescente. (b) Um pôlo no semiplano direito do plano  $s$  corresponde a uma resposta ao impulso exponencialmente crescente.

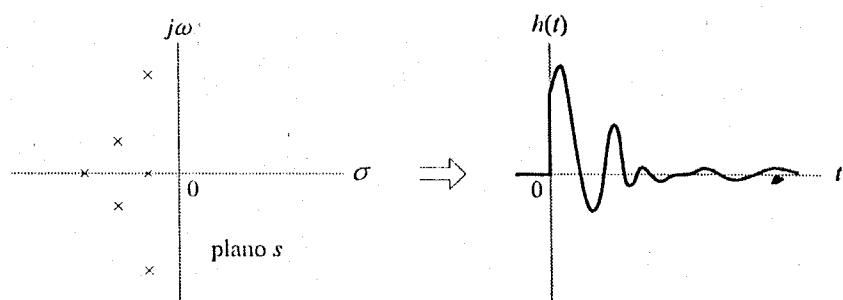
Alternativamente, se sabermos que um sistema é estável, a resposta ao impulso será absolutamente integrável. Isto implica que a transformada de Fourier existe e, dessa forma, a RDC inclui o eixo  $j\omega$  no plano  $s$ . Este conhecimento é suficiente para determinar de maneira única a transformada de Laplace inversa da função de transferência.

Um pôlo que está no semiplano direito do plano  $s$  contribui com um termo exponencialmente decrescente de lado esquerdo para a resposta ao impulso, enquanto que um pôlo que está no semiplano esquerdo do plano  $s$  contribui com um termo exponencialmente decrescente de lado direito para a resposta ao impulso, como descreve a Figura 6.18. Note que uma resposta ao impulso estável não pode conter quaisquer termos exponencialmente crescentes, uma vez que uma exponencial crescente não é absolutamente integrável.



**FIGURA 6.18** Relação entre a localização do pôlo e a resposta ao impulso de um sistema estável. (a) Um pôlo no semiplano esquerdo do plano  $s$  corresponde a uma resposta ao impulso de lado direito. (b) Um pôlo no semiplano direito do plano  $s$  corresponde a uma resposta ao impulso de lado esquerdo.

Suponhamos que um sistema seja conhecido como sendo tanto causal como estável. Um pôlo que está no semiplano esquerdo do plano  $s$  contribui com um termo exponencialmente decrescente de lado direito para a resposta ao impulso. Não podemos ter um pôlo no semiplano direito do plano  $s$ , entretanto. Um pôlo no semiplano direito contribuirá ou com uma exponencial decrescente de lado esquerdo que não é causal, ou com uma exponencial crescente de lado direito que resulta numa resposta instável ao impulso. Ou seja, a transformada de Laplace inversa de um pôlo que está no semiplano direito do plano  $s$  é ou estável ou causal, mas não pode ser tanto estável quanto causal. Sistemas que são estáveis e causais devem ter todos os seus pôlos no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Esse sistema é ilustrado na Figura 6.19.



**FIGURA 6.19** Um sistema que é tanto estável quanto causal deve ter todos os seus pôlos no semiplano esquerdo do plano  $s$ , como é mostrado aqui.

**EXEMPLO 6.19** Um sistema tem a função de transferência

$$H(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s-2}$$

Encontre a resposta ao impulso supondo que (a) o sistema é estável e (b) o sistema é causal. Este sistema pode ser tanto estável quanto causal?

**Solução:** Este sistema tem um pôlo em  $s = -3$  e em  $s = 2$ . Se o sistema for estável, o pôlo em  $s = -3$  contribuirá com um termo de lado direito para a resposta ao impulso, enquanto que o pôlo em  $s = 2$  contribuirá com um termo de lado esquerdo. Teremos

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{2t}u(-t)$$

Se o sistema for causal, ambos os pólos devem contribuir com termos de lado direito para a resposta ao impulso, e teremos

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(t)$$

Observe que este sistema não é estável, uma vez que o termo  $e^{2t}u(t)$  não é absolutamente integrável. De fato, este sistema não pode ser tanto estável como causal, uma vez que o pôlo em  $s = 2$  está no semiplano direito do plano  $s$ .

► **EXERCÍCIO 6.13** Um sistema que é estável e causal é descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 8\frac{d}{dt}x(t) + 13x(t)$$

Encontre a resposta ao impulso do sistema

**Resposta:**

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) + \delta(t)$$

### SISTEMAS INVERSOS

Dado um sistema LTI com resposta ao impulso  $h(t)$ , a resposta ao impulso do sistema inverso,  $h^{-1}(t)$ , satisfaz a condição

$$h^{-1}(t) * h(t) = \delta(t)$$

Se tomarmos a transformada de Laplace de ambos os lados desta equação, descobrirímos que a função de transferência do sistema inverso  $H^{-1}(s)$  satisfaz

$$H^{-1}(s)H(s) = 1$$

ou

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)}$$

A função de transferência do sistema inverso é, portanto, a inversa da função de transferência do sistema original. Se  $H(s)$  for escrito na forma de pólos e zeros como na equação (6.31), teremos

$$H^{-1}(s) = \frac{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}{(b_M/a_N) \prod_{k=1}^M (s - c_k)} \quad (6.36)$$

Os zeros do sistema inverso são os pólos de  $H(s)$ , e os pólos do sistema inverso são os zeros de  $H(s)$ . Concluímos que qualquer sistema com uma função racional de transferência tem um sistema inverso.

Muitas vezes, estamos interessados em sistemas inversos que são tanto estáveis como causais. Na subseção anterior, concluímos que um sistema estável, causal, deve ter todos os seus pólos no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Uma vez que os pólos do sistema inverso  $H^{-1}(s)$  são os zeros de  $H(s)$ , existe um sistema inverso estável e causal somente se todos os zeros de  $H(s)$  estiverem no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Diz-se que um sistema cuja função de transferência  $H(s)$  tem todos os seus pólos e zeros no semiplano esquerdo do plano  $s$  é de *fase mínima*. Um sistema de fase não mínima não pode ter um sistema inverso estável e causal, uma vez que ele tem zeros no semiplano direito do plano  $s$ .

**EXEMPLO 6.20** Considere um sistema  $H$  descrito pela equação diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) - 3x(t)$$

Encontre a função de transferência do sistema inverso para  $H$ . Existe um sistema inverso estável e causal?

**Solução:** Encontre primeiro a função  $H(s)$  de transferência do sistema tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação diferencial dada, obtendo

$$Y(s)(s+2) = X(s)(s^2 + 2s - 3)$$

Conseqüentemente, a função de transferência do sistema é

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} \\ &= \frac{s^2 + 2s - 3}{s + 2} \end{aligned}$$

e o sistema inverso tem a função de transferência

$$\begin{aligned} H^{-1}(s) &= \frac{1}{H(s)} \\ &= \frac{s+2}{s^2 + 2s - 3} \\ &= \frac{s+2}{(s-1)(s+3)} \end{aligned}$$

O sistema inverso tem pólos em  $s = 1$  e  $s = -3$ . O polo em  $s = 1$  está no semiplano direito do plano  $s$ . Portanto, o sistema inverso não pode ser tanto estável como causal.

► **EXERCÍCIO 6.14** Considere o sistema que possui a resposta ao impulso

$$h(t) = \delta(t) + e^{-3t}u(t) + 2e^{-t}u(t)$$

Encontre a função de transferência do sistema inverso. Existe um sistema inverso estável e causal?

**Resposta:**

$$H^{-1}(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{(s+2)(s+5)}$$

Um sistema estável e causal existe de fato.

## ■ DETERMINANDO A RESPOSTA EM FREQÜÊNCIA A PARTIR DE PÓLOS E ZEROS

As localizações dos pólos e zeros no plano  $s$  fornecem *insight* sobre a resposta em freqüência de um sistema. Lembre-se que a resposta em freqüência é obtida a partir da função de transferência substituindo-se  $s$  por  $j\omega$ , ou seja, avaliando-se a função de transferência ao longo do eixo  $j\omega$  no plano  $s$ . Isto supõe que o eixo  $j\omega$  está na RDC. Substituindo  $s$  por  $j\omega$  na equação (6.31) produzirá

$$H(j\omega) = \frac{(b_M/a_N) \prod_{k=1}^M (j\omega - c_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - d_k)} \quad (6.37)$$

Examinaremos tanto o módulo como a fase de  $H(j\omega)$ . Iniciando com o módulo em algum valor fixado de  $\omega$ , digamos,  $\omega_o$ , podemos escrever

$$|H(j\omega_o)| = \frac{|b_M/a_N| \prod_{k=1}^M |j\omega_o - c_k|}{\prod_{k=1}^N |j\omega_o - d_k|}$$



Esta expressão envolve uma razão de produtos de termos que tem a forma  $|j\omega_n - g|$ , em que  $g$  é ou um pôlo ou um zero. As contribuições dos zeros estão no numerador, enquanto que as contribuições de pôlos estão no denominador. O fator  $(j\omega_n - g)$  é um número complexo que pode ser representado no plano  $s$  como um vetor que parte do ponto  $g$  para o ponto  $j\omega_n$ , como ilustra a Figura 6.20. O comprimento deste vetor é  $|j\omega_n - g|$ . Examinando o comprimento deste vetor à medida que  $\omega_n$  se modifica, podemos avaliar a contribuição de cada pôlo ou zero para a resposta global em módulo.

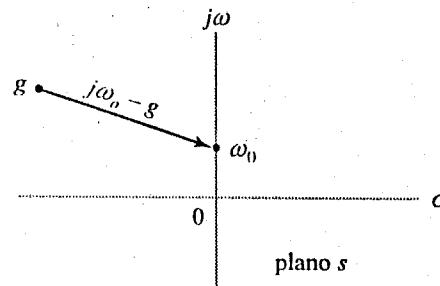


FIGURA 6.20 A quantidade  $j\omega_n - g$  como um vetor que parte de  $g$  para  $j\omega_n$  no plano  $s$ .

A Figura 6.21(a) descreve o vetor  $j\omega - g$  correspondente a diversos valores diferentes de  $\omega$ , e a Figura 6.21(b) descreve  $|j\omega - g|$  como uma função contínua de freqüência. Observe que quando  $\omega = \text{Im}\{g\}$ ,  $|j\omega - g| = |\text{Re}\{g\}|$ . Conseqüentemente, se  $g$  estiver próximo do eixo  $j\omega$  ( $\text{Re}\{g\} \approx 0$ ), então  $|j\omega - g|$  se tornará muito pequeno para  $\omega = \text{Im}\{g\}$ . Além disso, se  $g$  estiver próximo do eixo  $j\omega$ , então a mudança mais rápida em  $|j\omega - g|$  ocorrerá nas freqüências mais próximas de  $g$ .

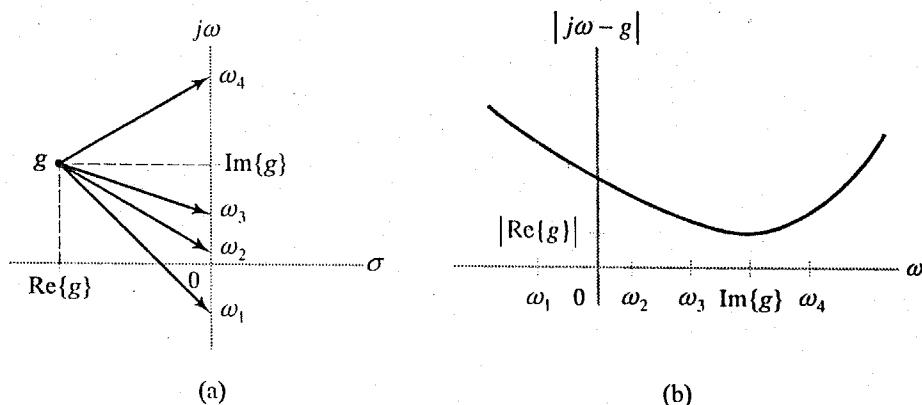
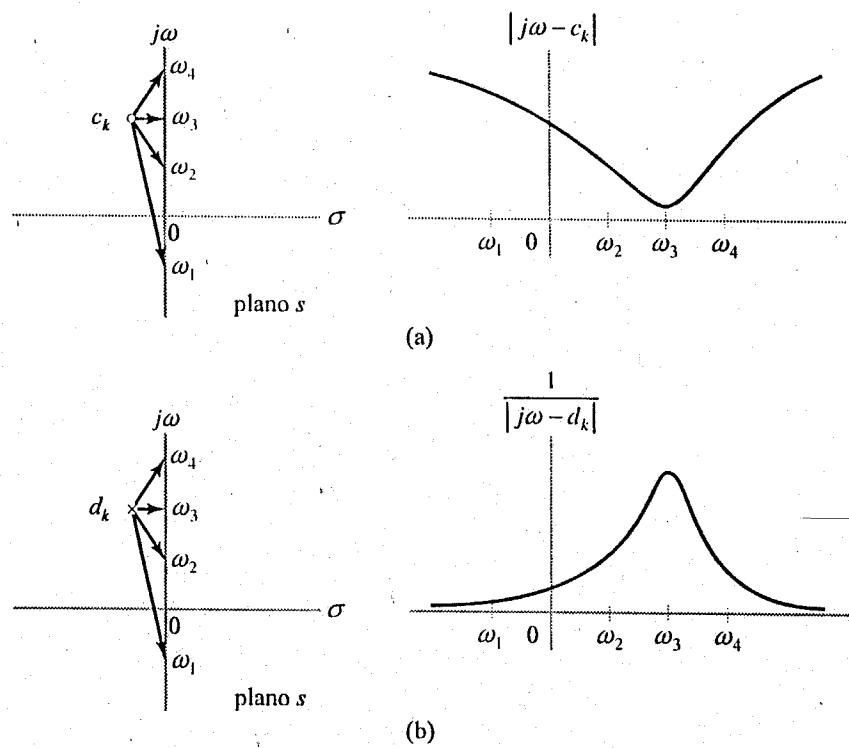


FIGURA 6.21 A função  $|j\omega - g|$  corresponde ao comprimento dos vetores que vão de  $g$  ao eixo  $j\omega$  no plano  $s$ . (a) Vetores que vão de  $g$  a  $j\omega$  para diversas freqüências. (b)  $|j\omega - g|$  como uma função de  $j\omega$ .

Se  $g$  representar um zero, então  $|j\omega - g|$  contribuirá para o numerador de  $|H(j\omega)|$ . Conseqüentemente, em freqüências próximas de um zero,  $|H(j\omega)|$  tenderá a decrescer. Até qual ponto  $|H(j\omega)|$  decrescerá, dependerá de quão próximo do eixo  $j\omega$  o zero está. Se o zero estiver no eixo  $j\omega$ , então  $|H(j\omega)|$  tenderá ao zero na freqüência correspondente à localização do zero. Em freqüências distantes de um zero,  $|\omega| > |g|$ ,  $|j\omega - g|$  é aproximadamente igual a  $|\omega|$ . O componente da resposta em módulo devida a um zero é ilustrado na Figura 6.22(a). Por outro lado, se  $g$  corresponder a um pôlo, então  $|j\omega - g|$  contribuirá para o denominador de  $|H(j\omega)|$ , e quando  $|j\omega - g|$  decrescer,  $|H(j\omega)|$  crescerá. Até que ponto  $|H(j\omega)|$  crescerá, depende de quão próximo o pôlo está do eixo  $j\omega$ .

Um pôlo que está próximo do eixo  $j\omega$  resultará num grande pico em  $|H(j\omega)|$ . O componente da resposta em módulo associada com um pôlo é ilustrado na Figura 6.22(b). Conseqüentemente, os zeros próximos ao eixo  $j\omega$  tendem a puxar para baixo o módulo da resposta, enquanto os pôlos próximos do eixo  $j\omega$  tendem a empurrar para cima a resposta em módulo. Observe que um pôlo não pode situar-se no eixo  $j\omega$ , uma vez que supomos que a RDC inclui o eixo  $j\omega$ .





**FIGURA 6.22** Componentes da resposta em módulo. (a) Resposta em módulo associada com um zero. (b) Resposta em módulo associada com um pôlo.

**EXEMPLO 6.21** Esboce a resposta em módulo do sistema que possui a função de transferência

$$H(s) = \frac{(s - 0,5)}{(s + 0,1 - 5j)(s + 0,1 + 5j)}$$

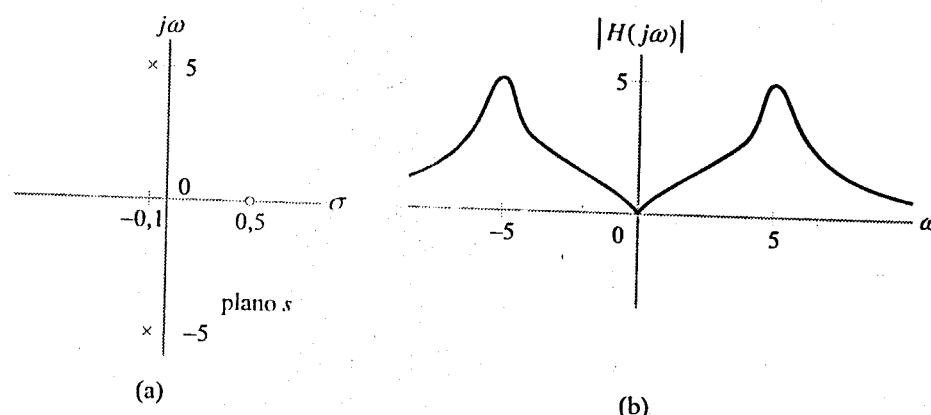
**Solução:** O sistema tem um zero em  $s = 0,5$  e pôlos em  $s = -0,1 \pm 5j$ , como descreve a Figura 6.23(a). Conseqüentemente, a resposta tenderá a decrescer nas proximidades de  $\omega = 0$  e a crescer nas proximidades de  $\omega = \pm 5$ . Em  $\omega = 0$ , temos

$$\begin{aligned} |H(j0)| &= \frac{0,5}{|0,1 - 5j||0,1 + 5j|} \\ &\approx \frac{0,5}{5^2} \\ &\approx 0,02 \end{aligned}$$

Em  $\omega = 5$ , temos

$$\begin{aligned} |H(j5)| &= \frac{|j5 - 0,5|}{|0,1||j10 + 0,1|} \\ &\approx \frac{5}{0,1(10)} \\ &\approx 5 \end{aligned}$$

Para  $\omega \gg 5$ , o comprimento do vetor que vai de  $j\omega$  a um dos pôlos é aproximadamente igual ao comprimento do vetor que vai de  $j\omega$  ao zero e, dessa forma, o zero é cancelado por um dos pôlos. A distância de  $j\omega$  ao pôlo restante aumenta à medida que a frequência se eleva e, dessa forma, a resposta em módulo tende a zero. A resposta em módulo está esboçada na Figura 6.23(b).

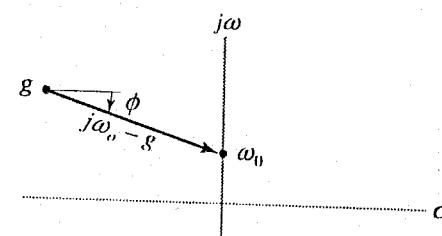


**FIGURA 6.23** Solução para o Exemplo 6.20. (a) Plotagem de pólos e zeros. (b) Resposta em módulo aproximada.

A fase de  $H(j\omega)$  também pode ser avaliada em termos da fase associada com cada pôlo e zero. Usando a equação (6.37), podemos avaliar o  $\arg\{H(j\omega)\}$  como

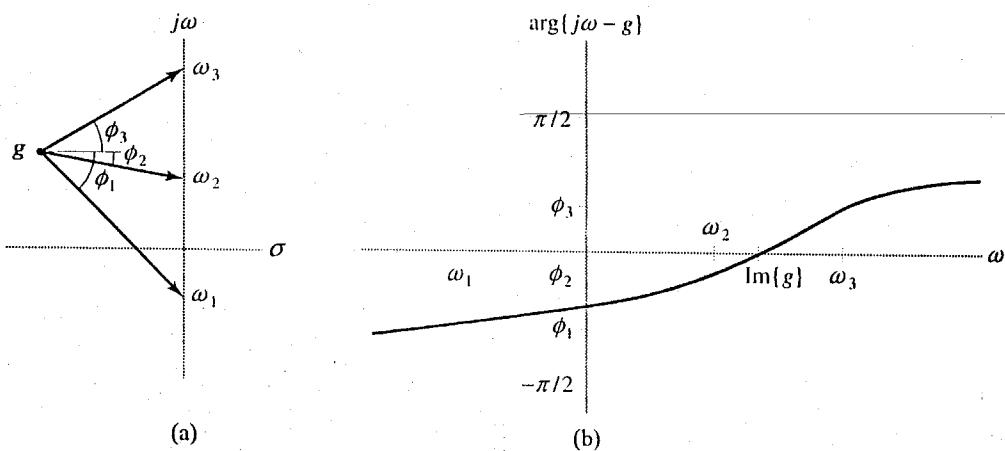
$$\arg\{H(j\omega)\} = \arg\{b_M/a_N\} + \sum_{k=1}^M \arg\{j\omega - c_k\} - \sum_{k=1}^N \arg\{j\omega - d_k\} \quad (6.38)$$

Neste caso, a fase de  $H(j\omega)$  é a soma dos ângulos de fase devidos a todos os zeros menos a soma dos ângulos de fase devidos a todos os pôlos. O primeiro termo,  $\arg\{b_M/a_N\}$ , é independente da freqüência. A fase associada com cada zero e pôlo é avaliada considerando-se um termo da forma  $\arg\{j\omega_n - g\}$ . Este é o ângulo de um vetor que aponta de  $g$  para  $j\omega_n$  no plano  $s$ . O ângulo do vetor a partir de  $g$  é medido em relação à linha horizontal, como ilustra a Figura 6.24. Examinando a fase deste vetor à medida que  $\omega$  se modifica, podemos avaliar a contribuição de cada pôlo ou zero para a resposta em fase global.



**FIGURA 6.24** A quantidade  $j\omega_n - g$  como um vetor que vai de  $g$  a  $j\omega_n$  no plano  $s$ . O ângulo de fase do vetor é  $\phi$ , que é o seu ângulo a partir de  $g$  com respeito à linha horizontal que passa por  $g$ .

A Figura 6.25(a) descreve a fase deste vetor para diversas freqüências diferentes, e a Figura 6.25(b) ilustra a fase como uma função contínua de freqüência. Note que, como  $g$  está no semiplano esquerdo do plano  $s$ , a fase é  $-\pi/2$  para um  $\omega$  grande e negativo, cresce até zero quando  $\omega = \text{Im}\{g\}$ , e continua crescendo até  $\pi/2$  para um  $\omega$  grande e positivo. Se  $g$  estiver no semiplano direito do plano  $s$ , a fase iniciará em  $-\pi/2$  para um  $\omega$  grande e negativo, decrescerá para  $-\pi$  quando  $\omega = \text{Im}\{g\}$  e depois decrescerá até  $-3\pi/2$  para um  $\omega$  grande e positivo. Se  $g$  estiver próximo do eixo  $j\omega$ , a mudança de  $-\pi/2$  para  $\pi/2$  (ou  $-3\pi/2$ ) ocorrerá rapidamente nas vizinhanças de  $\omega = \text{Im}\{g\}$ . Se  $g$  corresponder a um zero, a fase associada com  $g$  se somará à fase de  $H(j\omega)$ , enquanto que, se  $g$  for um pôlo, a fase associada com  $g$  se subtrairá da fase de  $H(j\omega)$ .

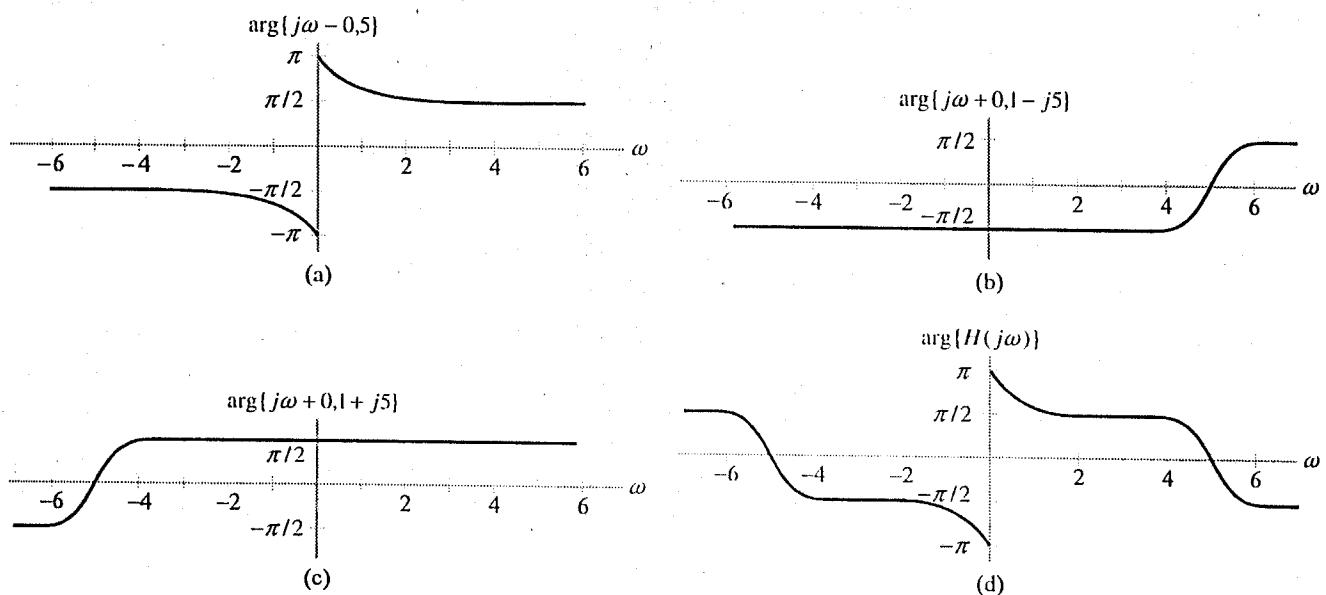


**FIGURA 6.25** O ângulo de fase de  $j\omega - g$ . (a) Vetores que vão de  $g$  a  $j\omega$  para diversos valores diferentes de  $\omega$ . (b) Plotagem de  $\arg\{j\omega - g\}$  como uma função contínua de  $\omega$ .

**EXEMPLO 6.22** Esboce a resposta em fase de um sistema descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{(s-0,5)}{(s+0,1-5j)(s+0,1+5j)}$$

**Solução:** As localizações dos pólos e zeros deste sistema no plano  $s$  são descritas na Figura 6.23(a). A resposta em fase associada com o zero em  $s = 0,5$  é ilustrada na Figura 6.26(a), a resposta em fase associada com o polo em  $s = -0,1 + 5j$  na Figura 6.26(b), e a associada com o polo em  $s = -0,1 - 5j$  na Figura 6.26(c). A resposta em fase do sistema é obtida subtraindo as contribuições de fase dos pólos daquela do zero. O resultado este mostrado na Figura 6.26(d).



**FIGURA 6.26** A resposta em fase do sistema do Exemplo 6.22. (a) Fase do zero em  $s = 0,5$ . (b) Fase do polo em  $s = -0,1 + 5j$ . (c) Fase do polo em  $s = -0,1 - 5j$ . (d) Resposta em fase do sistema.

**EXERCÍCIO 6.15** Esboce a resposta em módulo e a resposta em fase de um sistema que possui a função de transferência

$$H(s) = \frac{-2}{(s+0,2)(s^2+2s+5)}$$

**Resposta:** Pólos em  $s = -0,2$ ,  $s = -1 \pm j2$ . Veja as Figuras 6.27(a) e (b).

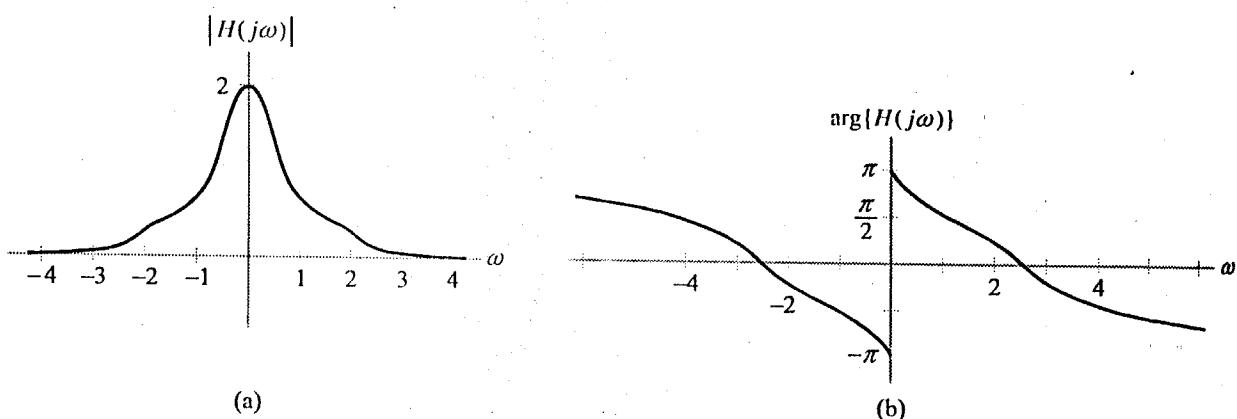


FIGURA 6.27 Exercício 6.15. (a) Resposta em módulo. (b) Resposta em fase.

## 6.8 Explorando Conceitos com o MATLAB

A *Control System Toolbox* do MATLAB contém numerosos comandos que são úteis para trabalharmos com transformadas de Laplace e sistemas LTI de tempo contínuo descritos em termos de funções de transferência, pólos e zeros, ou descrições por variáveis de estado.

### PÓLOS E ZEROS

O comando `r = roots(a)` encontra as raízes de um polinômio descrito pelo vetor `a` e, dessa forma, pode ser usado para determinar os zeros e os pólos de uma transformada de Laplace descrita como uma razão de polinômios em  $s$ . Os elementos do vetor `a` correspondem a potências decrescentes de  $s$ .

Por exemplo, podemos encontrar os pólos e zeros da transformada de Laplace do Exemplo 6.7,

$$X(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2}$$

usando os comandos

```
>> z = roots([4, 0, 6])
z =
    0 + 1.2247i
    0 - 1.2247i
>> p = roots([1, 1, 0, -2])
p =
    -1.0000 + 1.0000i
    -1.0000 - 1.0000i
    1.0000
```

Conseqüentemente, identificamos um par de zeros complexos conjugados em  $s = \pm j1,2247$ , um polo em  $s = 1$ , e um par de pólos complexos conjugados em  $s = -1 \pm j$ .

O comando `poly(r)` usa os pólos ou zeros especificados no vetor `r` para determinar os coeficientes do polinômio correspondente.

### ■ EXPANSÕES EM FRAÇÕES PARCIAIS

O comando `residue` encontra a expansão em frações parciais de uma razão de dois polinômios. A sintaxe é  $[r, p, k] = \text{residue}(b, a)$ , em que  $b$  representa o polinômio do numerador,  $a$  representa o polinômio do denominador,  $r$  representa os coeficientes ou resíduos da expansão em frações parciais,  $p$  representa os pólos, e  $k$  é um vetor que descreve qualquer termo em potências de  $s$ . Se a ordem do numerador for menor do que a ordem do denominador, conforme supomos na Seção 6.4, então  $k$  será uma matriz vazia.

Para ilustrar este comando, encontraremos a expansão em frações parciais da transformada de Laplace considerada no Exemplo 6.6,

$$X(s) = \frac{3s+4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

usando os comandos

```
>> [r,p,k] = residue([3, 4], [1, 5, 8, 4])
r =
    -1.0000
    2.0000
    1.0000
p =
    -2.0000
    -2.0000
    -1.0000
k =
    []
```

Conseqüentemente, o resíduo  $r(1) = -1$  corresponde ao polo em  $s = -2$  dado por  $p(1)$ , o resíduo  $r(2) = 2$  corresponde ao polo duplo em  $s = -2$  dado por  $p(2)$ , e o resíduo  $r(3) = 1$  corresponde ao polo em  $s = -1$  dado por  $p(3)$ . A expansão em frações parciais é, por conseguinte,

$$X(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+1}$$

Este resultado concorda com o Exemplo 6.6.

► **EXERCÍCIO 6.16** Use `residue` para resolver o Problema 6.6.

### ■ RELACIONANDO DESCRIÇÕES DE SISTEMAS

Lembre-se que um sistema LTI pode ser descrito em termos de uma equação diferencial, da resposta ao impulso, da função de transferência, dos pólos e zeros, da resposta em frequência, ou de uma descrição por variáveis de estado. A Control System Toolbox contém rotinas para relacionar as representações com função de transferência, pólos e zeros e variáveis de estado de sistemas LTI. Todas elas se baseiam em objetos LTI que representam as diferentes formas de descrição do sistema. A definição de objetos do espaço de estados é realizada com o comando `ss` do MATLAB, conforme discutimos na Seção 2.7. O comando  $H = \text{tf}(b, a)$  cria um objeto  $H$  do tipo LTI que representa uma função de transferência com os polinômios do numerador e do denominador definidos pelos coeficientes em  $b$  e  $a$ , respectivamente. Os coeficientes em  $b$  e  $a$  são ordenados em potências decrescentes de  $s$ . O comando  $H = \text{zpk}(z, p, k)$  cria um objeto LTI que representa a forma polo-zero-ganho de descrição do sistema. Os zeros e pólos são descritos pelos vetores  $z$  e  $p$ , respectivamente, e o ganho é representado pelo escalar  $k$ .

Os comandos `ss`, `tf` e `zpk` também executam conversão de modelos quando aplicados a um objeto LTI de uma forma diferente. Por exemplo, se `syszpk` for um objeto LTI que representa um sistema na forma polo-zero-ganho, o comando `sysss = ss(syszpk)` gerará um objeto do tipo espaço de estados que representa o mesmo sistema.

Os comandos `tzero(sys)` e `pole(sys)` encontram os pólos e zeros do objeto `sys` do tipo LTI, enquanto `pzmap(sys)` produz uma plotagem de pólos e zeros. Entre os comandos adicionais que se aplicam diretamente a objetos LTI incluem-se o `freqresp`, para determinar a resposta em freqüência (veja a Seção 4.13), `step` para determinar a resposta ao degrau e `Lsim` para simular a saída do sistema em resposta a uma entrada especificada.

Considere um sistema que contém zeros em  $s = 0$ ,  $s = \pm j10$  e pólos em  $s = -0.5 \pm j5$ ,  $s = -3$  e  $s = -4$ , com ganho 2. Podemos determinar a representação com função de transferência para este sistema, plotar as localizações de pólos e zeros no plano  $s$ , e plotar a resposta em módulo do sistema usando os comandos do MATLAB:

```
>> z = [0, j*10, -j*10];
p = [-0.5+j*5, -0.5-j*5, -3, -4]; k = 2;
>> syszpk = zpk(z, p, k)
Zero/pole/gain
2 s (s^2 + 100)

-----
(s+4) (s+3) (s^2 + s + 25.25)
>> systf = tf(syszpk) % converte para a forma de função de transferência
Transfer function:
2 s^3 + 200 s

-----
s^4 + 8 s^3 + 44.25 s^2 + 188.8 s + 303
>> pzmap(systf) % gere plotagem de polos e zeros
>> w = [0:499]*20/500; % Freqüências de 0 a 20 rad/seg
>> H = freqresp(systf,w);
>> Hmag = abs(squeeze(H)); plot(w,Hmag)
```

A Figura 6.28 descreve a plotagem de pólos e zeros resultante destes comandos, enquanto a Figura 6.29 ilustra a resposta em módulo deste sistema para  $0 \leq \omega < 20$ . Observe que a resposta em módulo é zero em freqüências correspondentes às localizações dos zeros no eixo  $j\omega$ , em  $\omega = 0$  e  $\omega = 10$ . Similarmente, a resposta em módulo é grande na freqüência correspondente à localização do polo nas proximidades do eixo  $j\omega$ , em  $\omega = 5$ .

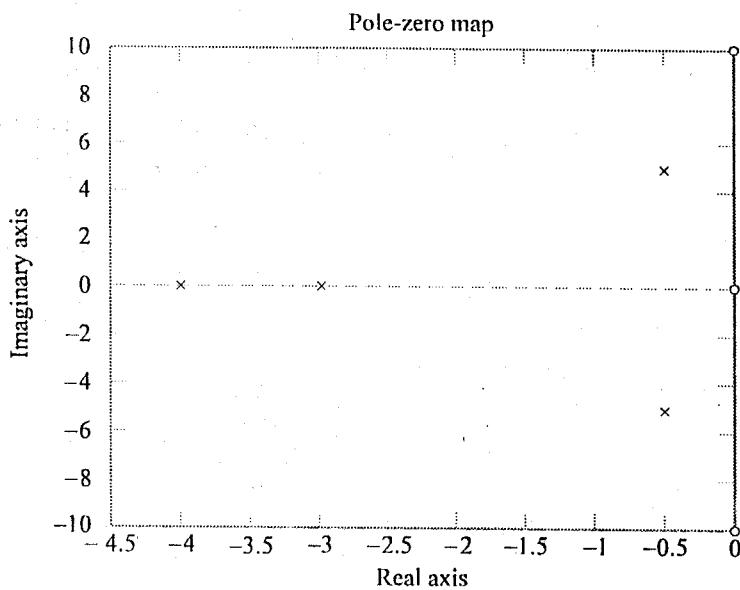


FIGURA 6.28 Localizações de pólos e zeros no plano  $s$  de um sistema usando o MATLAB.

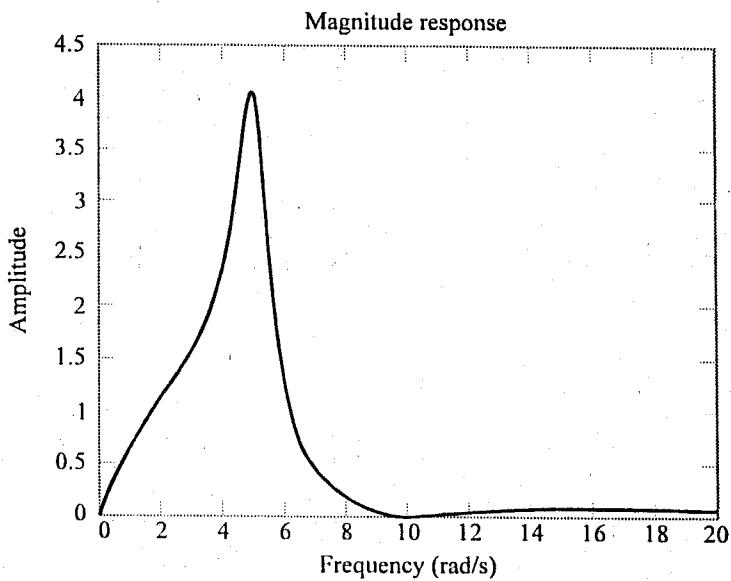


FIGURA 6.29 Resposta em módulo usando o MATLAB.

## 6.9 Resumo

A transformada de Laplace representa sinais de tempo contínuo como uma superposição ponderada de exponenciais complexas. As exponenciais complexas são sinais mais gerais do que as senóides complexas; elas incluem as senóides complexas como um caso especial. De maneira correspondente, a transformada de Laplace representa uma classe mais geral de sinais do que a transformada de Fourier, incluindo sinais que não são absolutamente integráveis. Por isso, podemos usar a transformada de Laplace para analisar sinais e sistemas que não são estáveis. A função de transferência é a transformada de Laplace da resposta ao impulso e fornece uma outra descrição das características de entrada e saída de um sistema. A transformada de Laplace converte a convolução de sinais de tempo numa multiplicação de transformadas de Laplace; deste modo, a transformada de Laplace de uma saída de sistema é o produto da transformada de Laplace da entrada e da função de transferência. As localizações dos pólos e zeros de uma função de transferência no plano  $s$  oferecem mais uma caracterização de um sistema LTI. Elas fornecem informações referentes à estabilidade, causalidade, invertibilidade e resposta em freqüência do sistema.

As exponenciais complexas são parametrizadas por uma variável complexa. A transformada de Laplace é uma função de  $s$  e é representada num plano complexo denominado plano  $s$ . A transformada de Fourier é obtida avaliando-se a transformada de Laplace no eixo  $j\omega$ , ou fazendo-se  $s = j\omega$ . As propriedades da transformada de Laplace são análogas às da transformada de Fourier.

A transformada de Laplace unilateral, ou de um único lado aplica-se a sinais causais e constitui uma ferramenta conveniente para resolver problemas de sistemas que envolvem equações diferenciais com condições iniciais. A transformada de Laplace bilateral aplica-se a sinais de dois lados. Ela não é única, a menos que a RDC seja especificada. As posições relativas da RDC e dos pólos da transformada de Laplace no plano  $s$  determinam se um sinal é lateral esquerdo, lateral direito, ou bilateral.

As transformadas de Fourier e de Laplace têm muitas similaridades e muitas vezes podem ser usadas de maneira intercambiável; contudo, têm papéis distintamente diferentes na análise de sinais e sistemas. A transformada de Laplace é a mais freqüentemente usada para solucionar problemas que envolvem a análise de transitórios e estabilidade de sistemas.

Problemas deste tipo ocorrem freqüentemente em aplicações de sistemas de controle, onde estamos interessados no modo pelo qual a saída do sistema acompanha de perto uma saída desejada de sistema. Os pólos do sistema fornecem informações essenciais sobre as características de estabilidade e de resposta transitória de um sistema LTI, enquanto a transformada unilateral pode ser usada para se obter a resposta de um sistema LTI dadas a entrada e as condições iniciais. Não há nenhuma contraparte

da transformada de Fourier com estas capacidades. O papel da transformada de Laplace na análise dos transitórios e da estabilidade dos sistemas de controle será mais explorada no Capítulo 9.

Em comparação, a transformada de Fourier é empregada comumente como uma ferramenta de representação de sinais e em problemas de sistemas em que as características de estado estacionário nos interessam. A transformada de Fourier é mais fácil de visualizar e usar do que a transformada de Laplace nesses problemas porque ela é uma função da freqüência  $\omega$  de valor real, enquanto a transformada de Laplace é uma função da freqüência complexa  $s = \sigma + j\omega$ . Exemplos da representação de sinais e problemas de análise de sistemas em estado estacionário para os quais a transformada de Fourier é usada foram dados nos capítulos 4 e 5 e serão mais desenvolvidos no contexto de filtragem no Capítulo 8.

## LEITURA ADICIONAL

1. A transformada de Laplace recebe este nome de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Laplace estudou uma grande variedade de fenômenos naturais, incluindo a hidrodinâmica, a propagação do som, o calor, as marés e o estado líquido da matéria, não obstante a maior parte de sua vida ter sido dedicada à mecânica celeste. Laplace apresentou soluções analíticas completas para os problemas matemáticos do sistema solar numa série de cinco volumes intitulados *Mécanique céleste*. Uma passagem famosa em outro de seus livros afirmava que o futuro do mundo é determinado inteiramente pelo passado, que se alguém possuísse o conhecimento do "estado" do mundo em um instante qualquer, poderia prever o futuro. Não obstante Laplace tenha feito muitas descobertas importantes na matemática, seu principal interesse era o estudo da natureza. A matemática foi simplesmente um meio para este fim.
2. Os textos seguintes são dedicados especificamente à transformada de Laplace e às aplicações desta:
  - » Holbrook, J. G., *Laplace Transforms for Electronic Engineers*, segunda edição (Pergamon Press, 1966)
  - » Kuhfittig, P. K. F., *Introduction to the Laplace Transform* (Plenum Press, 1978)
  - » Thomson, W. T., *Laplace Transformation*, segunda edição (Prentice Hall, 1960)

## PROBLEMAS

- 6.1** Um sinal  $x(t)$  tem a transformada de Laplace  $X(s)$  conforme é dado abaixo. Plote os pólos e zeros no plano  $s$  e determine a transformada de Fourier de  $x(t)$  sem inverter  $X(s)$ . Assuma que  $x(t)$  é absolutamente integrável.

(a) 
$$X(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 3s + 2}$$

(b) 
$$X(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}$$

(c) 
$$X(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{2}{s+2}$$

- 6.2** Determine a transformada de Laplace bilateral e a RDC de cada um dos seguintes sinais:

- (a)  $x(t) = u(t-2)$
- (b)  $x(t) = e^{2t}u(-t+2)$
- (c)  $x(t) = \delta(t-t_0)$
- (d)  $x(t) = \cos(2t)u(t)$

- 6.3** Determine a transformada de Laplace unilateral de cada um dos sinais seguintes usando a equação de definição:

- (a)  $x(t) = u(t-1)$
- (b)  $x(t) = u(t+1)$
- (c)  $x(t) = e^{-t+2}u(t)$
- (d)  $x(t) = \cos(\omega_n t)u(t-3)$
- (e)  $x(t) = \sin(\omega_n t)u(t+2)$
- (f)  $x(t) = e^{2t}[u(t) - u(t-4)]$
- (g)  $x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- 6.4** Use as propriedades da transformada de Laplace e a tabela de transformadas de Laplace básicas para determinar a transformada de Laplace unilateral de cada um dos seguintes sinais:

(a)  $x(t) = t^2 e^{-2t}u(t)$

(b)  $x(t) = e^{-t}u(t) * \sin(3\pi t)u(t)$

(c)  $x(t) = \frac{d}{dt}\{tu(t)\}$

(d)  $x(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$

(e)  $x(t) = \int_0^t e^{-2\tau} \cos(3\tau)d\tau$

(f)  $x(t) = 2t \frac{d}{dt}(e^{-t} \sin(t)u(t))$

- 6.5 Use as propriedades da transformada de Laplace e a tabela de transformadas de Laplace básicas para determinar os sinais de tempo que correspondem às seguintes transformadas de Laplace unilaterais:

(a)  $X(s) = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)$

(b)  $X(s) = \frac{d}{ds}\left(e^{-2s} \frac{1}{(s+2)^2}\right)$

(c)  $X(s) = \frac{1}{(2s+1)^2 + 4}$

(d)  $X(s) = s \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{4}{s^2 + 4}\right)$

- 6.6 Dado o par de transformadas  $\cos(2t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ , determine os sinais de tempo correspondentes às seguintes transformadas de Laplace:

(a)  $sX(s) - 1$

(b)  $X(2s)$

(c)  $X(s+1)$

(d)  $s^{-1}X(s)$

(e)  $\frac{d}{ds}(e^{-2s}X(s))$

- 6.7 Dado o par de transformadas  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 2s/(s^2 - 2)$ , determine a transformada de Laplace de cada um dos seguintes sinais:

(a)  $x(2t)$

(b)  $x(t-3)$

(c)  $x(t) * tx(t)$

(d)  $e^{-2t}x(t)$

(e)  $2 \frac{d}{dt}x(t)$

(f)  $\int_0^t x(2\tau)d\tau$

- 6.8 Use a propriedade de deslocamento no domínio  $s$  e o par de transformadas  $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/(s+a)$  para derivar a transformada de Laplace unilateral de  $x(t) = e^{-at} \cos(\omega_1 t)u(t)$ .

6.9 Prove as seguintes propriedades da transformada de Laplace unilateral:

(a) Linearidade

(b) Mudança de escala

(c) Deslocamento no tempo

(d) Deslocamento no domínio  $s$

(e) Convolução

(f) Diferenciação no domínio  $s$

- 6.10 Determine o valor inicial  $x(0^+)$  dadas as seguintes transformadas de Laplace:

(a)  $X(s) = \frac{3}{s^2 + 5s - 1}$

(b)  $X(s) = \frac{2s+3}{s^2 + 5s - 6}$

(c)  $X(s) = e^{-5s} \frac{3s^2 + 2s}{s^2 + s - 1}$

- 6.11 Determine o valor final  $x(\infty)$  dadas as seguintes transformadas de Laplace:

(a)  $X(s) = \frac{2s^2 + 3}{s^2 + 5s + 1}$

(b)  $X(s) = \frac{2s+3}{s^3 + 5s^2 + 6s}$

(c)  $X(s) = e^{-3s} \frac{3s^2 + 2}{s(s+1)(s+2)}$

- 6.12 Use o método das frações parciais para encontrar os sinais de tempo correspondentes às seguintes transformadas de Laplace unilaterais:

(a)  $X(s) = \frac{-s-4}{s^2 + 3s + 2}$

(b)  $X(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 6}$

(c)  $X(s) = \frac{2s-1}{s^2 + 2s + 1}$

(d)  $X(s) = \frac{5s+4}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

(e)  $X(s) = \frac{3s^2 + 8s + 5}{(s+2)(s^2 + 2s + 1)}$

(f)  $X(s) = \frac{3s+2}{s^2 + 4s + 5}$

(g)  $X(s) = \frac{4s^2 + 8s + 10}{(s+2)(s^2 + 2s + 5)}$

(h)  $X(s) = \frac{-9}{(s+1)(s^2 + 2s + 10)}$

(i)  $X(s) = \frac{s+4 + e^{-2s}}{s^2 + 5s + 6}$

- 6.13** Determine as respostas forçada e natural dos sistemas descritos pelas seguintes equações diferenciais com a entrada e as condições iniciais especificadas:

(a)  $5\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$ ,  $y(0^+) = 2$ ,  
 $x(t) = u(t)$

(b)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -4x(t) - 3\frac{d}{dt}x(t)$ ,  $y(0^+) = -1$ ,

$$\left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0^+} = 5, \quad x(t) = e^{-t}u(t)$$

(c)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4y(t) = 8x(t)$ ,  $y(0^+) = 1$ ,  

$$\left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0^+} = 2, \quad x(t) = u(t)$$

(d)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ ,  
 $y(0^+) = 2, \quad \left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0^+} = 0, \quad x(t) = e^{-t}u(t)$

- 6.14** Use os modelos de circuito na forma de transformadas de Laplaces para determinar a corrente  $y(t)$  no circuito da Figura P6.14 em resposta a uma tensão aplicada  $x(t) = e^{-t}u(t)$  V, supondo valores normalizados  $R = 1\Omega$  e  $L = \frac{1}{2}$  H. A corrente que percorre o indutor no instante  $t = 0^+$  é 2 A.

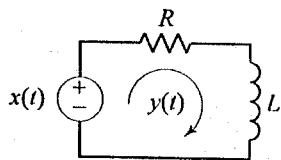


FIGURA P6.14

- 6.15** O circuito da Figura P6.15 representa um sistema com entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$ . Determine a resposta forçada e a resposta natural deste sistema sob as condições especificadas.

- (a)  $R = 3\Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = \frac{1}{2}$  F,  $x(t) = e^{-3t}u(t)$  V, a corrente que percorre o indutor em  $t = 0^+$  é 2 A, e a tensão no capacitor em  $t = 0^+$  é 1 V.
- (b)  $R = 2\Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = \frac{1}{5}$  F,  $x(t) = 2e^{-t}u(t)$  V, a corrente que percorre o indutor em  $t = 0^+$  é 2 A, e a tensão no capacitor em  $t = 0^+$  é 1 V.

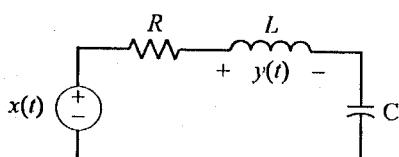


FIGURA P6.15

- 6.16** Determine a transformada de Laplace bilateral e a RDC correspondente para cada um dos seguintes sinais:

(a)  $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t) + e^tu(-t)$

(b)  $x(t) = e^{2t}\cos(2t)u(-t) + e^{-t}u(t) + e^tu(t)$

(c)  $x(t) = e^{2t+4}u(t+2)$

(d)  $x(t) = \cos(3t)u(-t) * e^{-t}u(t)$

(e)  $x(t) = e^t \sin(2t+4)u(t+2)$

(f)  $x(t) = e^{-t} \frac{d}{dt}(e^{-t}u(t+1))$

(g)  $x(t) = \int_{-\infty}^t e^{2\tau} \sin(\tau)u(-\tau)d\tau$

- 6.17** Use as tabelas de transformadas e propriedades para determinar os sinais de tempo que correspondem às seguintes transformadas de Laplace bilaterais:

(a)  $X(s) = e^{5s} \frac{1}{s+2}$  com RDC  $\text{Re}(s) > -2$

(b)  $X(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s-1} \right)$  com RDC  $\text{Re}(s) < 1$

(c)  $X(s) = s \left( \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s} \right)$  com RDC  $\text{Re}(s) < 0$

(d)  $X(s) = s^{-1} \frac{d}{ds} \left( \frac{e^{-2s}}{s} \right)$  com RDC  $\text{Re}(s) > 0$

- 6.18** Use o método das frações parciais para determinar os sinais de tempo correspondentes às seguintes transformadas de Laplace bilaterais:

(a)  $X(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$

(i) com RDC  $\text{Re}(s) < -2$

(ii) com RDC  $\text{Re}(s) > -1$

(iii) com RDC  $-2 < \text{Re}(s) < -1$

(b)  $X(s) = \frac{s^2 + 7}{(s+1)(s^2 - 2s + 4)}$

(i) com RDC  $\text{Re}(s) < -1$

(ii) com RDC  $\text{Re}(s) > 1$

(iii) com RDC  $-1 < \text{Re}(s) < 1$

(c)  $X(s) = \frac{2s^2 + 4s + 2}{s^2 + 2s}$

(i) com RDC  $\text{Re}(s) < -2$

(ii) com RDC  $\text{Re}(s) > 0$

(iii) com RDC  $-2 < \text{Re}(s) < 0$

(d)  $X(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s^2 + 2s + 1}$  com RDC

$\text{Re}(s) < -1$

- 6.19** Um sistema tem a função de transferência  $H(s)$ , como é dado abaixo. Determine a resposta ao impulso, supondo

- (i) que o sistema é causal
- (ii) que o sistema é estável.

$$(a) H(s) = \frac{3s-1}{s^2-1}$$

$$(b) H(s) = \frac{5s+7}{s^2+3s+2}$$

$$(c) H(s) = \frac{s^2+5s-9}{(s+1)(s^2-2s+10)}$$

- 6.20** Um sistema estável tem entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$ , como é dado abaixo. Use transformadas de Laplace para determinar a função de transferência e a resposta ao impulso do sistema.

$$(a) x(t) = u(t), \quad y(t) = e^{-t} \cos(2t)u(t)$$

$$(b) x(t) = e^{-2t}u(t), \quad y(t) = -2e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

- 6.21** A relação entre a entrada  $x(t)$  e a saída  $y(t)$  de um sistema causal é descrita por cada uma das equações diferenciais dadas abaixo. Use transformadas de Laplace para determinar a função de transferência e a resposta ao impulso de cada sistema.

$$(a) 5\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$$

$$(b) \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(c) \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)$$

- 6.22** Determine a descrição por equação diferencial de um sistema com cada uma das seguintes funções de transferência:

$$(a) H(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)}$$

$$(b) H(s) = \frac{3s}{s^2+2s+10}$$

$$(c) H(s) = \frac{2(s+1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

- 6.23** Determine as descrições por função de transferência, resposta ao impulso e equação diferencial de um sistema estável representado pelas seguintes descrições com variáveis de estado:

$$(a) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -1], \quad D = [0]$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 1], \quad D = [0]$$

- 6.24** Determine se os sistemas descritos pelas seguintes funções de transferência podem ser

- (i) tanto estáveis como causais
- (ii) se existe um sistema inverso estável e causal.

$$(a) H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+10)}$$

$$(b) H(s) = \frac{s^2-2s-3}{(s+2)(s^2+4s+5)}$$

$$(c) H(s) = \frac{s^2+3s+2}{(s+2)(s^2-2s+8)}$$

$$(d) H(s) = \frac{s^2+2s}{(s^2+3s+2)(s^2+s-2)}$$

- 6.25** A relação entre a entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$  de um sistema é descrita pela equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 6y(t)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t)$$

- (a) Este sistema tem um inverso estável e causal? Por que?
- (b) Encontre uma descrição em equação diferencial para o sistema inverso.

- 6.26** Esboce as respostas em módulo dos sistemas descritos pelas seguintes funções de transferência usando-se a relação entre as localizações de pólos e zeros e o eixo  $j\omega$  no plano  $s$ .

$$(a) H(s) = \frac{s}{s^2+2s+10}$$

$$(b) H(s) = \frac{s^2+25}{s+1}$$

$$(c) H(s) = \frac{s-2}{s+2}$$

- \*6.27** Suponhamos que um sistema tem  $M$  pólos em  $d_k = \alpha_k + j\beta_k$  e  $M$  zeros em  $c_k = -\alpha_k + j\beta_k$ . Ou seja, as localizações de pólos e zeros são simétricas nas proximidades do eixo  $j\omega$ .

- (a) Mostre que a resposta em módulo de qualquer sistema que satisfaz esta condição é a unidade. Esse sistema é denominado sistema *passa-tudo*, uma vez que ele deixa passar todas as freqüências com ganho unitário.

- (b) Avalie a resposta em fase de um par real polo-zero simples; ou seja, esboce a resposta em fase de  $(s - \alpha)/(s + \alpha)$ , em que  $\alpha > 0$ .
- 6.28** Esboce as respostas em fase dos sistemas descritos pelas funções de transferência seguintes usando a relação entre as localizações de pólos e zeros e o eixo  $j\omega$  no plano  $s$ :
- $H(s) = \frac{s-1}{s+2}$
  - $H(s) = \frac{s+1}{s+2}$
  - $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 101}$
  - $H(s) = s^2$
- \***6.29** Considere o sistema de fase não mínima descrito pela função de transferência
- $$H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+4)(s+3)(s+5)}$$
- Este sistema tem um sistema inverso estável e causal?
  - Expresse  $H(s)$  como o produto de um sistema de fase mínima,  $H_{\min}(s)$ , e um sistema passa-tudo,  $H_p(s)$ , que contém um polo e zero simples. (Veja o Problema 6.27 para obter uma definição de um sistema passa-tudo.)
  - Admitamos que  $H_{\min}^{-1}(s)$  seja o sistema inverso de  $H_{\min}(s)$ . Determine  $H_{\min}^{-1}(s)$ . Ele pode ser tanto estável como causal?
  - Esboce a resposta em módulo e a resposta em fase do sistema  $H(s)H_{\min}^{-1}(s)$ .
  - Generalize os resultados que você obteve nas partes (b) e (c) para um sistema de fase não mínima arbitrário  $H(s)$  e determine a resposta em módulo do sistema  $H(s)H_{\min}^{-1}(s)$ .
- **Experiências no Computador**
- 6.30** Use o comando `roots` do MATLAB para determinar os pólos e zeros dos seguintes sistemas:
- $H(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$
- (b)  $H(s) = \frac{s^3 + 1}{s^4 + 2s^2 + 1}$
- (c)  $H(s) = \frac{4s^2 + 8s + 10}{2s^3 + 8s^2 + 18s + 20}$
- 6.31** Use o comando `pzmap` do MATLAB para plotar os pólos e zeros dos seguintes sistemas:
- $H(s) = \frac{s^3 + 1}{s^4 + 2s^2 + 1}$
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$   
 $c = [0 \quad 1], \quad D = [0]$
- 6.32** Use o comando `freqresp` do MATLAB para avaliar e plotar as respostas em módulo e em fase dos Exemplos 6.21 e 6.22.
- 6.33** Use o comando `freqresp` do MATLAB para avaliar e plotar as respostas em módulo e em fase do Problema 6.26.
- 6.34** Use seu conhecimento do efeito dos pólos e zeros sobre a resposta em módulo para projetar sistemas que têm a resposta em módulo especificada abaixo. Coloque pólos e zeros no plano  $s$  e avalie a resposta em módulo correspondente usando o comando `freqresp` do MATLAB. Repita este processo até encontrar as localizações de pólos e zeros que satisfazem as especificações.
  - Projete um filtro passa-altas com dois pólos e dois zeros que satisfaça  $|H(j0)| = 0, 0,8 \leq |H(j\omega)| \leq 1,2$  para  $|\omega| > 100\pi$  e tenha coeficientes reais.
  - Projete um filtro passa-baixas com coeficientes reais que satisfaça  $0,8 \leq |H(j\omega)| \leq 1,2$  para  $|\omega| < \pi$ , e  $|H(j\omega)| < 0,1$  para  $|\omega| > 10\pi$ .
- 6.35** Use o comando `ss` do MATLAB para encontrar descrições por variáveis de estado para os sistemas do Problema 6.22.
- 6.36** Use o comando `tf` do MATLAB para encontrar descrições por funções de transferência para os sistemas do Problema 6.23.

# 7

## REPRESENTAÇÃO DE SINAIS USANDO EXPOENCIAIS COMPLEXAS DE TEMPO DISCRETO: A TRANSFORMADA Z



### 7.1 Introdução

Neste capítulo, generalizaremos a representação senoidal complexa de um sinal de tempo discreto dada pela DTFT para uma representação em termos de sinais exponenciais complexos, a qual é denominada *transformada z*. A transformada z é a contraparte em tempo discreto da transformada de Laplace. Usando esta representação mais geral para sinais de tempo discreto, podemos obter uma caracterização mais ampla dos sistemas e suas interações com sinais do que aquilo que é possível com a DTFT. Por exemplo, a DTFT pode ser aplicada somente a sistemas estáveis, uma vez que a DTFT existe somente se a resposta ao impulso for absolutamente somável e, deste modo, a transformada z pode ser usada para estudar uma classe muito maior de sistemas e sinais.

Como no tempo contínuo, veremos que as exponenciais complexas de tempo discreto são autofunções de sistemas LTI. Esta característica confere à transformada z um poderoso conjunto de propriedades para análise de sinais e sistemas. Muitas destas propriedades se comparam com as da DTFT; por exemplo, a convolução de sinais de tempo corresponde à multiplicação de transformadas z. Conseqüentemente, a saída de um sistema LTI é obtida multiplicando-se a transformada z da entrada com a transformada z da resposta ao impulso. Definimos a transformada z da resposta ao impulso como a função de transferência de um sistema. A função de transferência generaliza a caracterização pela resposta em freqüência do comportamento de entrada e saída de um sistema e fornece novos *insights* sobre as características do sistema.

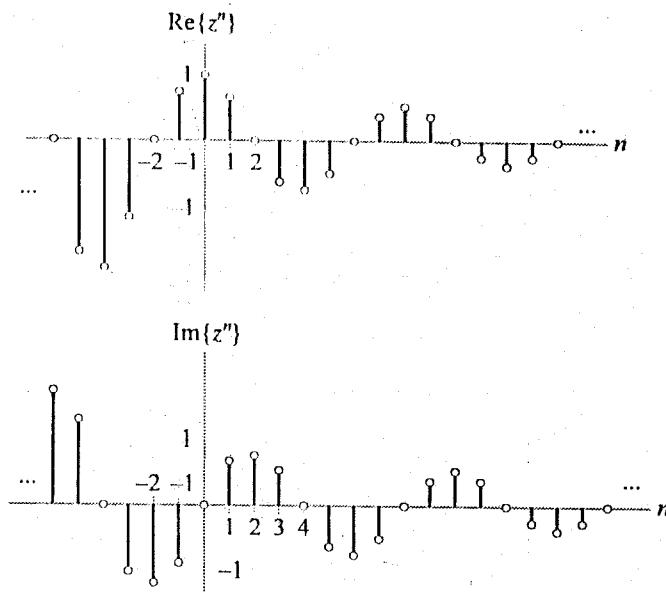
Os papéis principais da transformada z na prática da engenharia são o estudo das características de sistemas e a derivação de estruturas computacionais para implementar sistemas de tempo discreto em computadores. A transformada z unilateral também é usada para resolver equações de diferenças sujeitas a condições iniciais. Exploraremos esses problemas neste capítulo à medida que estudarmos a transformada z.

### 7.2 A Transformada z

Derivaremos a transformada z examinando o efeito de aplicarmos uma entrada exponencial complexa a um sistema LTI. Admitamos que  $z = re^{j\Omega}$  seja um número complexo com módulo  $r$  e fase  $\Omega$ . O sinal  $x[n] = z^n$  é um sinal exponencial complexo. Substitua  $re^{j\Omega}$  em z para escrever  $x[n]$  como

$$x[n] = r^n \cos(\Omega n) + jr^n \sin(\Omega n) \quad (7.1)$$

Como ilustra a Figura 7.1, a parte real de  $x[n]$  é um co-seno exponencialmente amortecido e a parte imaginária é um seno exponencialmente amortecido. O número positivo  $r$  determina o fator de amortecimento e  $\Omega$  é a freqüência senoidal. Observe que  $x[n]$  é uma senóide complexa se  $r = 1$ .

FIGURA 7.1 Partes real e imaginária do sinal  $z^n$ .

Considere aplicar  $x[n] = z^n$  a um sistema LTI que possui resposta ao impulso  $h[n]$ . A saída de sistema  $y[n]$  é dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= H\{x[n]\} \\ &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \end{aligned}$$

Substitua  $x[n] = z^n$  para obter

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \\ &= z^n \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \right) \end{aligned}$$

Defina a função de transferência

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (7.2)$$

de forma que podemos escrever

$$H\{z^n\} = H(z)z^n$$

Esta equação tem a forma de uma auto-relação, em que  $z^n$  é a autofunção e  $H(z)$  é o autovalor. A ação do sistema sobre uma entrada  $z^n$  é equivalente à multiplicação da entrada pelo número complexo  $H(z)$ .

Se expressarmos  $H(z)$  na forma polar como  $H(z) = |H(z)|e^{j\phi(z)}$ , então a saída do sistema será escrita como

$$y[n] = |H(z)|e^{j\phi(z)}z^n$$

Substitua  $z = re^{j\Omega}$  para obter

$$y[n] = |H(re^{j\Omega})|r^n \cos(\Omega n + \phi(re^{j\Omega})) + j|H(re^{j\Omega})|r^n \sin(\Omega n + \phi(re^{j\Omega}))$$

Comparando  $y[n]$  com  $x[n]$  na equação (7.1), vemos que o sistema multiplica a amplitude da entrada por  $|H(re^{j\Omega})|$  e desloca a fase dos componentes senoidais de  $\phi(re^{j\Omega})$ .

Agora, procuraremos representar sinais arbitrários como uma superposição ponderada das autofunções  $z^n$ . Substituir  $z = re^{j\Omega}$  na equação (7.2) produzirá

$$\begin{aligned} H(re^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n](re^{j\Omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n]r^{-n})e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

Vemos que  $H(re^{j\Omega})$  corresponde à DTFT de um sinal  $h[n]r^{-n}$ . Consequentemente, a DTFT inversa de  $H(re^{j\Omega})$  deve ser  $h[n]r^{-n}$  e, deste modo, podemos escrever

$$h[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(re^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$$

Multiplicar este resultado por  $r^n$  produzirá

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(re^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(re^{j\Omega})(re^{j\Omega})^n d\Omega \end{aligned}$$

Podemos converter isto numa integral em  $z$ , substituindo  $re^{j\Omega} = z$ . Uma vez que a integração é feita somente em  $\Omega$ ,  $r$  pode ser considerado uma constante, e teremos  $dz = jre^{j\Omega} d\Omega$ . Consequentemente, identificamos  $d\Omega = (1/j)z^{-1} dz$ . Por fim, considere os limites da integral. Quando  $\Omega$  vai de  $-\pi$  a  $\pi$ ,  $z$  percorre um círculo de raio  $r$  no sentido anti-horário. Dessa forma, escrevemos

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z)z^{n-1} dz \quad (7.3)$$

em que o símbolo  $\oint$  denota integração ao longo de um círculo de raio  $|z| = r$  no sentido anti-horário. A equação (7.2) indica como determinar  $H(z)$  a partir de  $h[n]$ , enquanto a equação (7.3) expressa  $h[n]$  como uma função de  $H(z)$ . Dizemos que a função de transferência  $H(z)$  é a transformada  $z$  da resposta ao impulso  $h[n]$ .

De maneira mais geral, a transformada  $z$  de um sinal arbitrário  $x[n]$  é

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7.4)$$

e a transformada  $z$  inversa é

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz \quad (7.5)$$

Expressamos a relação entre  $x[n]$  e  $X(z)$  com a notação

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z)$$

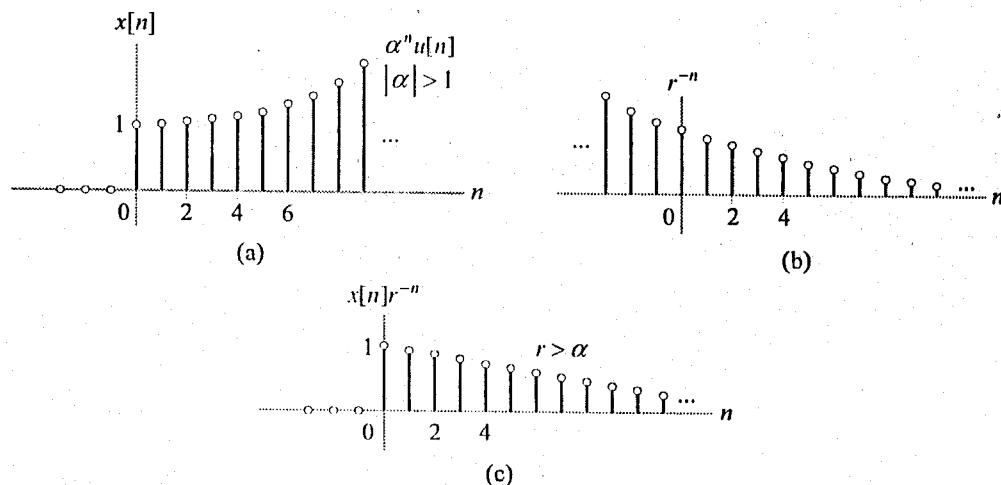
Observe que a equação (7.5) expressa o sinal  $x[n]$  como uma superposição ponderada de exponenciais complexas  $z^n$ . Os pesos são  $(1/2\pi j)X(z)z^{-1} dz$ . Na prática, não avaliaremos esta integral diretamente, uma vez que isto requer o conhecimento da teoria das variáveis complexas, o que está além do escopo deste livro. Em vez disso, avaliaremos as transformadas  $z$  inversas por inspeção, usando a relação biunívoca entre  $x[n]$  e  $X[z]$ .

A transformada  $z$  existe quando a soma infinita na equação (7.4) converge. Uma condição necessária para convergência é a somabilidade absoluta de  $x[n]z^{-n}$ . Uma vez que  $|x[n]z^{-n}| = |x[n]r^{-n}|$ , devemos ter

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

A faixa de  $r$  para a qual esta condição é satisfeita é denominada *região de convergência* (RDC).

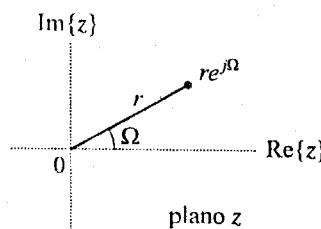
A transformada  $z$  existe para sinais que não têm uma DTFT. Lembre-se que a existência da DTFT exige somabilidade absoluta de  $x[n]$ . Limitando-nos a valores restritos de  $r$ , podemos assegurar que  $x[n]r^{-n}$  é absolutamente somável não obstante  $x[n]$  não sê-lo. Por exemplo, a DTFT de  $x[n] = \alpha^n u[n]$  não existe para  $|\alpha| > 1$  uma vez que  $x[n]$  é um sinal exponencial crescente, como ilustra a Figura 7.2(a). Entretanto, se  $r > |\alpha|$ , então  $r^{-n}$ , descrito na Figura 7.2(b), decresce mais rápido do que  $x[n]$  cresce. Consequentemente, o sinal  $x[n]r^{-n}$ , descrito na Figura 7.2(c), é absolutamente somável, e a transformada  $z$  existe. A capacidade de trabalhar com sinais que não têm uma DTFT é uma vantagem significativa oferecida pela transformada  $z$ .



**FIGURA 7.2** Ilustração de um sinal que tem uma transformada  $z$ , mas não tem uma DTFT. (a) Um sinal exponencial crescente para o qual a DTFT não existe. (b) O fator de atenuação  $r^{-n}$  associado com a transformada  $z$ . (c) O sinal modificado  $x[n]r^{-n}$  é absolutamente somável, desde que  $r > |\alpha|$  e, dessa forma, a transformada  $z$  de  $x[n]$  existe.

É conveniente representar o número complexo  $z$  como uma localização num plano complexo denominado *plano  $z$*  e descrito graficamente na Figura 7.3. O ponto  $z = re^{j\Omega}$  está localizado a uma distância  $r$  da origem e ângulo  $\Omega$  em relação ao eixo real. Observe que se  $x[n]$  é absolutamente somável, então a DTFT é obtida da transformada  $z$  fazendo-se  $r = 1$ , ou substituindo  $z = e^{j\Omega}$  na equação (7.4). Ou seja,

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$



**FIGURA 7.3** O plano  $z$ . Um ponto  $z = re^{j\Omega}$  está localizado a uma distância  $r$  da origem e ângulo  $\Omega$  em relação ao eixo real.

A equação  $z = e^{j\Omega}$  descreve um círculo de raio unitário centralizado na origem no plano  $z$ , como ilustra a Figura 7.4. Este contorno é denominado *círculo unitário* no plano  $z$ . A freqüência  $\Omega$  na DTFT corresponde ao ponto no círculo unitário com um ângulo de  $\Omega$  relativo ao eixo real. Quando a freqüência de tempo discreto  $\Omega$  vai de  $-\pi$  a  $\pi$ , fazemos um percurso em torno do círculo unitário. Dizemos que a DTFT corresponde à transformada  $z$  avaliada no círculo unitário.

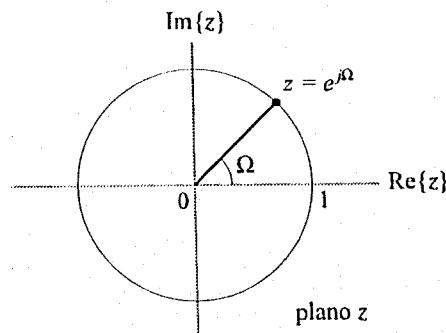


FIGURA 7.4 O círculo unitário,  $z = e^{j\Omega}$ , no plano  $z$ .

**EXEMPLO 7.1** Determine a transformada  $z$  do sinal

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Use a transformada  $z$  para determinar a DTFT de  $x[n]$ .

*Solução:* Substitua  $x[n]$  na equação 7.4 para obter

$$X(z) = z + 2 - z^{-1} + z^{-2}$$

Obtemos a DTFT a partir de  $X(z)$  substituindo  $z = e^{j\Omega}$ :

$$X(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega} + 2 - e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}$$

A forma da transformada  $z$  mais comumente encontrada em aplicações de engenharia é uma razão de dois polinômios em  $z^{-1}$ , como é mostrado pela função racional

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

É útil reescrevermos  $X(z)$  como o produto de termos que envolvem as raízes dos polinômios do numerador e denominador; ou seja,

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

Os  $c_k$  são as raízes do polinômio do numerador e são denominados *zeros* de  $X(z)$ . Os  $d_k$  são as raízes do polinômio do denominador e são denominados *pólos* de  $X(z)$ . As localizações dos zeros são denotadas com o símbolo “○” e as localizações dos pólos com o símbolo “×” no plano  $z$ . As localizações dos pólos e zeros especificam  $X(z)$  de maneira completa, com exceção do fator de ganho  $b_0$ .

**EXEMPLO 7.2** Determine a transformada  $z$  do sinal

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

Descreva a RDC e as localizações dos pólos e zeros de  $X(z)$  no plano  $z$ .

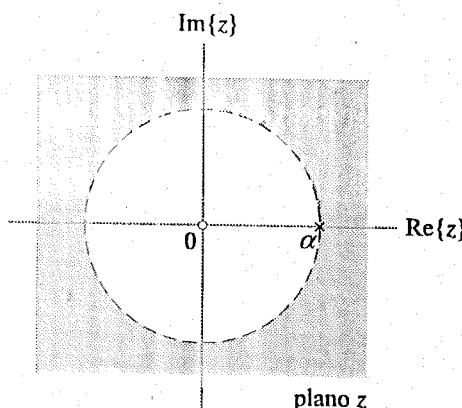
*Solução:* Substitua  $x[n]$  na equação (7.4), obtendo

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n \end{aligned}$$

Esta é uma série geométrica de tamanho infinito na razão  $\alpha/z$ ; a soma converge, desde que  $|\alpha/z| < 1$ , ou  $|z| > |\alpha|$ . Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha| \\ &= \frac{z}{z - \alpha}, \quad |z| > |\alpha| \end{aligned} \tag{7.6}$$

Há um pôlo em  $z = \alpha$  e um zero em  $z = 0$ , como ilustra a Figura 7.5. A RDC é descrita como a região sombreada do plano  $z$ .



**FIGURA 7.5** Localizações dos pólos e zeros no plano  $z$  para  $x[n] = \alpha^n u[n]$ . A RDC é a área sombreada.

Como acontece com a transformada de Laplace, a expressão para  $X(z)$  não corresponde a um sinal de tempo único, a menos que a RDC seja especificada. Isto significa que dois sinais de tempo diferentes podem ter transformadas  $z$  idênticas, mas RDCs diferentes, como é demonstrado no Exemplo 7.3.

**EXEMPLO 7.3** Determine a transformada  $z$  do sinal

$$y[n] = -\alpha^n u[-n-1]$$

Descreva a RDC e as localizações dos pólos e zeros no plano  $z$ .

*Solução:* Substitua  $y[n]$  na equação (7.4) e escreva

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n u[-n-1] z^{-n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k \end{aligned}$$

A soma converge, desde que  $|z/\alpha| < 1$ , ou  $|z| < |\alpha|$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1-z\alpha^{-1}}, \quad |z| < |\alpha| \\ &= \frac{z}{z-\alpha}, \quad |z| < |\alpha| \end{aligned} \quad (7.7)$$

A RDC e as localizações dos pólos e zeros são descritas na Figura 7.6.

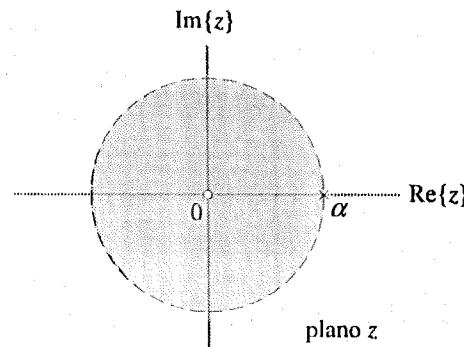


FIGURA 7.6 RDC e localizações dos pólos e zeros no plano z para  $y[n] = -\alpha^n u[-n-1]$ .

Note que  $Y(z)$  na equação (7.7) é idêntico ao  $X(z)$  da equação (7.6), não obstante os sinais de tempo serem bem diferentes. Somente a RDC os diferencia. Devemos conhecer a RDC para determinar a transformada z inversa correta. Esta ambigüidade geralmente ocorre com sinais que são unilaterais.

**EXEMPLO 7.4** Determine a transformada z de

$$x[n] = -u[-n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]$$

Descreva a RDC e as localizações dos pólos e zeros de  $X(z)$  no plano z.

*Solução:* Substitua  $x[n]$  na equação (7.4), obtendo

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} ((\frac{1}{2})^n u[n]z^{-n} - u[-n-1]z^{-n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} z^k \end{aligned}$$

Ambas as somas deste exemplo devem convergir a fim de que  $X(z)$  converja. Isto implica que devemos ter  $|z| > \frac{1}{2}$  e  $|z| < 1$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 1 - \frac{1}{1-z}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1 \\ &= \frac{z(2z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1 \end{aligned}$$

A RDC e as localizações dos pólos e zeros são descritas na Figura 7.7. Neste caso, a RDC é um anel no plano z.

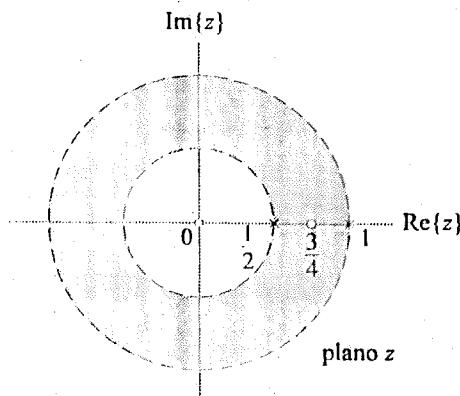


FIGURA 7.7 A RDC e as localizações dos pólos e zeros no plano  $z$  correspondentes ao Exemplo 7.4.

► EXERCÍCIO 7.1 Determine a transformada  $z$ , a RDC, e as localizações dos pólos e zeros de  $X(z)$  para

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

*Resposta:*

$$X(z) = \frac{z(2z - \frac{1}{6})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Pólos em  $z = \frac{1}{2}$ ,  $z = -\frac{1}{3}$  e zeros em  $z = 0$ ,  $z = \frac{1}{12}$ .

► EXERCÍCIO 7.2 Determine a transformada  $z$ , a RDC, e as localizações dos pólos e zeros de  $X(z)$  para

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} u[n]$$

*Resposta:*

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{j\Omega_0}}, \quad |z| > 1$$

Pólo em  $z = e^{j\Omega_0}$ , zero em  $z = 0$ .

### \*7.3 Propriedades da Região de Convergência

As propriedades básicas da RDC serão examinadas nesta seção. Em especial, mostraremos como a RDC está relacionada com as características de um sinal,  $x[n]$ . Dadas as propriedades da RDC, muitas vezes podemos identificar a RDC a partir de  $X(z)$  e um conhecimento limitado das características de  $x[n]$ . A relação entre a RDC e as características do sinal no domínio de tempo é usada para encontrar transformadas  $z$  inversas na Seção 7.5. Os resultados apresentados aqui são derivados usando-se argumentos intuitivos ao invés de provas rigorosas.

Primeiramente, observamos que a RDC não pode conter nenhum pôlo. Isto se deve ao fato da RDC ser definida como o conjunto de  $z$  para o qual a transformada  $z$  converge. Consequentemente,  $X(z)$  deve ser finito para todo  $z$  na RDC. Entretanto, se  $d$  for um pôlo, então  $|X(d)| = \infty$  e a transformada  $z$  não converge no pôlo. Deste modo, o pôlo não pode situar-se na RDC.

Em segundo lugar, a RDC de um sinal de duração finita inclui o plano  $z$  inteiro, com exceção, possivelmente, de  $z = 0$  e/ou  $|z| = \infty$ . Para ver isto, suponhamos que  $x[n]$  seja diferente de zero somente no intervalo  $n_1 \leq n \leq n_2$ . Teremos

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]z^{-n}$$

Esta soma convergirá, desde que cada termo da soma seja finito. Se um sinal tiver quaisquer componentes causais diferentes de zero ( $n_2 > 0$ ), então a expressão para  $X(z)$  terá um termo que envolve  $z^{-1}$  e, dessa forma, a RDC não poderá incluir  $z = 0$ . Se um sinal tiver quaisquer componentes não causais diferentes de zero ( $n_1 < 0$ ), então a expressão para  $X(z)$  terá um termo que envolve  $z$  e, dessa forma, a RDC não poderá incluir  $|z| = \infty$ . Inversamente, se um sinal não tiver nenhum componente causal diferente de zero ( $n_2 \leq 0$ ), então a RDC incluirá  $z = 0$ . Se um sinal não tiver nenhum componente não causal diferente de zero ( $n_1 \geq 0$ ), então a RDC incluirá  $|z| = \infty$ . Isto também indica que  $x[n] = c\delta[n]$  é o único sinal cuja RDC é o plano  $z$  inteiro.

Consideraremos agora os sinais de duração infinita. A condição de convergência é  $|H(z)| < \infty$ . Deste modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}|X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |z|^{-n}\end{aligned}$$

A segunda linha decorre do fato que o módulo de uma soma de números é menor ou igual à soma dos módulos. Obtemos a terceira linha observando que o módulo de um produto é igual ao produto dos módulos. Dividindo a soma infinita em partes de tempos positivo e negativo, podemos escrever

$$I_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]| \cdot |z|^{-n}$$

e

$$I_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]| \cdot |z|^{-n}$$

Notamos que  $|X(z)| \leq I_-(z) + I_+(z)$ . Se tanto  $I_-(z)$  como  $I_+(z)$  forem finitos, então  $|X(z)|$  terá a garantia de ser finito. Isto, evidentemente, exige que  $|x[n]|$  seja limitado de alguma maneira.

Suponhamos que possamos limitar  $|x[n]|$  encontrando as menores constantes positivas  $A_-$ ,  $A_+$ ,  $r_-$  e  $r_+$  tais que

$$|x[n]| \leq A_-(r_-)^n, \quad n < 0 \quad (7.8)$$

e

$$|x[n]| \leq A_+(r_+)^n, \quad n \geq 0 \quad (7.9)$$

Um sinal que satisfaz este limite não cresce mais rápido do que  $(r_+)^n$  para  $n$  positivo e do que  $(r_-)^n$  para  $n$  negativo. Embora possamos construir sinais que não satisfazem estes limites, como por exemplo  $a^n^2$ , de maneira geral esses sinais não ocorrem em problemas de engenharia.

Se o limite (7.8) for satisfeito, então

$$\begin{aligned}I_-(z) &\leq A_- \sum_{n=-\infty}^{-1} (r_-)^n |z|^{-n} \\ &= A_- \sum_{n=-\infty}^{-1} \left( \frac{r_-}{|z|} \right)^n \\ &= A_- \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{|z|}{r_-} \right)^k\end{aligned}$$

Esta última soma converge se e somente se  $|z| < r_-$ . Agora, considere a parte de tempo positivo. Se o limite (7.9) for satisfeito, então

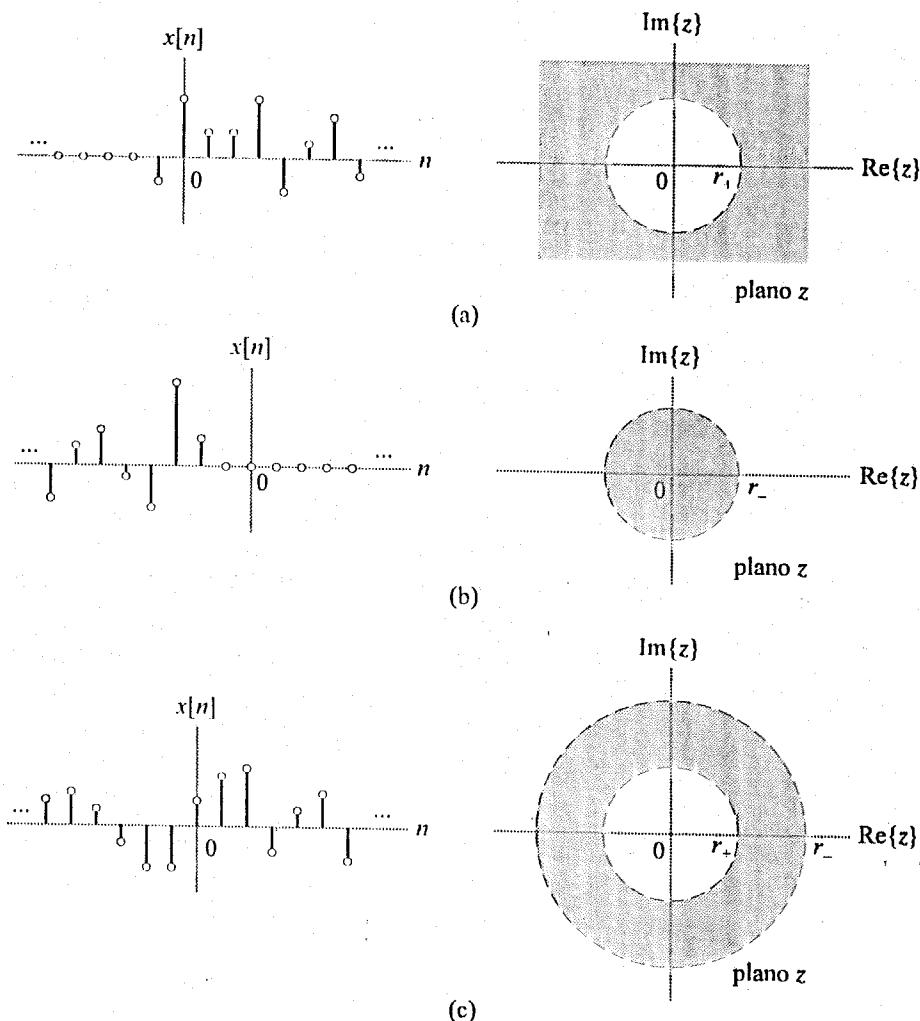
$$\begin{aligned}I_+(z) &\leq A_+ \sum_{n=0}^{\infty} (r_+)^n |z|^{-n} \\ &= A_+ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_+}{|z|} \right)^n\end{aligned}$$

Esta soma converge se e somente se  $|z| > r_+$ . Conseqüentemente, se  $r_+ < |z| < r_-$ , então tanto  $I_+(z)$  como  $I_-(z)$  convergirão e  $|X(z)|$  também convergirá. Note que se  $r_+ > r_-$ , então não existem valores de  $z$  para os quais a convergência é garantida.

Esta análise embasa as seguintes conclusões para sinais de duração infinita. Defina um *sinal unilateral esquerdo* como um sinal para o qual  $x[n] = 0$  para  $n > n_2$ , um *sinal unilateral direito* como um sinal para qual  $x[n] = 0$  para  $n < n_1$  e um *sinal bilateral* como um que tem duração infinita tanto para direções positiva como negativa. Para sinais  $x[n]$  que satisfazem os limites exponenciais nas equações (7.8) e (7.9), temos:

- » A RDC de um sinal unilateral direito tem a forma  $|z| > r_+$ .
- » A RDC de um sinal unilateral esquerdo tem a forma  $|z| < r_-$ .
- » A RDC de um sinal bilateral tem a forma  $r_+ < |z| < r_-$ .

Cada um destes casos é ilustrado na Figura 7.8.



**FIGURA 7.8** A relação entre a RDC e a extensão temporal de um sinal. (a) Um sinal unilateral direito tem uma RDC da forma  $|z| > r_+$ . (b) Um sinal unilateral esquerdo tem uma RDC da forma  $|z| < r_-$ . (c) Um sinal bilateral tem a forma  $r_+ < |z| < r_-$ .

Sinais exponenciais unilaterais são freqüentemente encontrados em problemas de engenharia. Neste caso, o módulo de um ou mais pólos determina os limites  $r_-$  e  $r_+$  da RDC.

Suponhamos que tenhamos um sinal unilateral direito  $x[n] = \alpha^n u[n]$ , em que  $\alpha$  é, em geral, complexo. A transformada  $z$  de  $x[n]$  tem um pôlo em  $z = \alpha$  e a RDC é  $|z| > |\alpha|$ . Conseqüentemente, a RDC é a região do plano  $z$  que possui um raio maior do que o raio do pôlo. De maneira semelhante, se  $x[n]$  for o sinal unilateral esquerdo  $x[n] = \alpha^n u[-n - 1]$ , então a RDC será  $|z| < |\alpha|$ , que é a região do plano  $z$  que possui raio menor do que o raio do pôlo. Se um sinal consistir de uma soma de exponenciais,

então a RDC será a intersecção das RDCs associadas com cada termo. Ela terá um raio maior do que o do pôlo de maior raio associado com os termos do lado direito e um raio menor do que o do polo de menor raio associado com os termos do lado esquerdo. Alguns destes aspectos são ilustrados no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 7.5** Identifique a RDC associada com a transformada z de cada um dos seguintes sinais:

$$\begin{aligned}x[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \\y[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \\w[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n]\end{aligned}$$

*Solução:* Iniciando com  $x[n]$ , escrevemos

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=-\infty}^0 \left(-\frac{1}{2z}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4z}\right)^n \\&= \sum_{k=0}^{\infty} (-2z)^k + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4z}\right)^n\end{aligned}$$

A primeira série converge para  $|z| < \frac{1}{2}$ , ao passo que a segunda converge para  $|z| > \frac{1}{4}$ . Ambas as séries devem convergir para que  $X(z)$  convirja, de forma que a RDC é  $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$ . A RDC deste sinal bilateral é descrita na Figura 7.9(a). Somando as duas séries geométricas, obtemos

$$X(z) = \frac{1}{1+2z} + \frac{2z}{z-\frac{1}{4}}$$

a qual tem pôlos em  $z = -\frac{1}{2}$  e  $z = \frac{1}{4}$ . Observe que a RDC está na região sombreada em forma de anel localizada entre os pôlos.

Em seguida,  $y[n]$  é um sinal unilateral direito, e

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2z}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^0 \left(\frac{1}{4z}\right)^n$$

A primeira série converge para  $|z| > \frac{1}{2}$ , ao passo que a segunda converge para  $|z| > \frac{1}{4}$ . Consequentemente, a RDC combinada é  $|z| > \frac{1}{2}$ , como descreve a Figura 7.9(b). Neste caso, escrevemos

$$Y(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{2z}{z-\frac{1}{4}}$$

para a qual os pôlos estão, mais uma vez, em  $z = -\frac{1}{2}$  e  $z = \frac{1}{4}$ . A RDC está fora de um círculo que contém o pôlo de maior raio,  $z = -\frac{1}{2}$ .

O último sinal,  $w[n]$ , é unilateral esquerdo, e

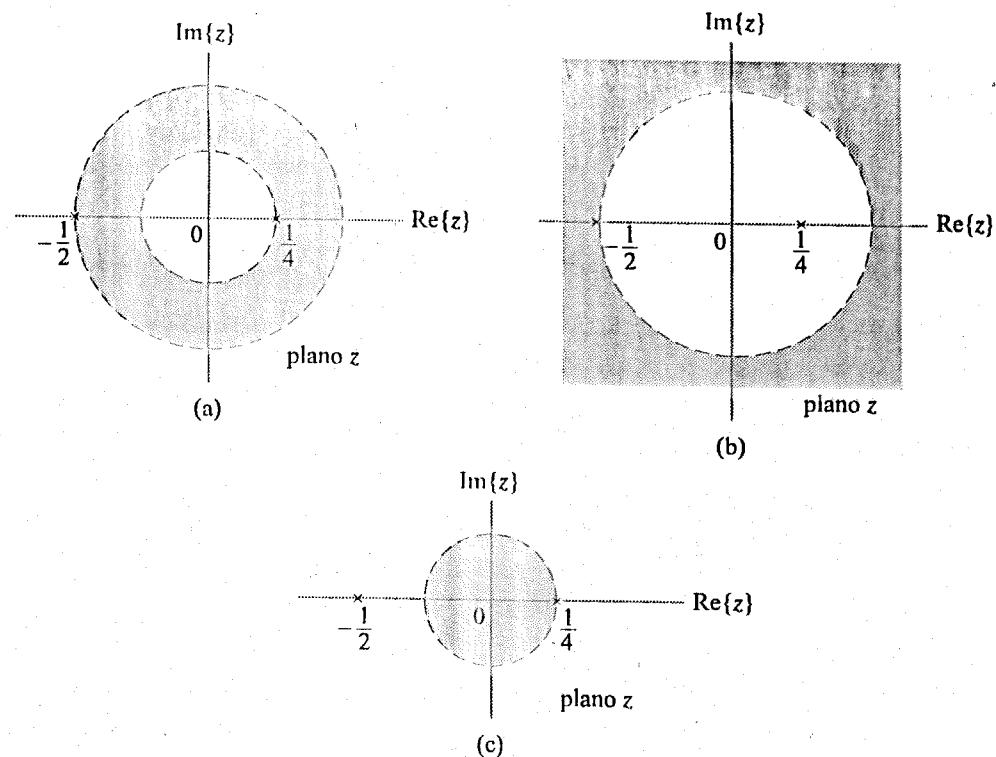
$$\begin{aligned}W(z) &= \sum_{n=-\infty}^0 \left(-\frac{1}{2z}\right)^n + 2 \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{1}{4z}\right)^n \\&= \sum_{k=0}^{\infty} (-2z)^k + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (4z)^k\end{aligned}$$

Aqui, a primeira série converge para  $|z| < \frac{1}{2}$ , ao passo que a segunda série converge para  $|z| < \frac{1}{4}$ , fornecendo uma RDC combinada de  $|z| < \frac{1}{4}$ , como é descrito na Figura 7.9(c). Aqui, temos

$$W(z) = \frac{1}{1+2z} + \frac{2}{1-4z}$$

em que os pôlos estão em  $z = -\frac{1}{2}$  e  $z = \frac{1}{4}$ . A RDC está dentro de um círculo que contém o pôlo de menor raio,  $z = \frac{1}{4}$ .

Consequentemente, este exemplo ilustra que a RDC de um sinal bilateral é um anel, a RDC de um sinal unilateral direito é o exterior de um círculo, e a RDC de um sinal unilateral esquerdo é o interior de um círculo. Em cada caso, os pôlos definem as fronteiras da RDC.



**FIGURA 7.9** RDCs correspondentes ao Exemplo 7.5. (a) Um sinal bilateral  $x[n]$  tem a RDC entre os pólos. (b) Um sinal unilateral direito  $y[n]$  tem a RDC fora do círculo que contém o maior pólo. (c) Um sinal unilateral esquerdo  $w[n]$  tem a RDC dentro do círculo que contém o menor pólo.

► **EXERCÍCIO 7.3** Determine a transformada  $z$  e a RDC do sinal bilateral

$$x[n] = \alpha^{|n|}$$

supondo que  $|\alpha| < 1$ . Repita para  $|\alpha| > 1$ .

**Resposta:** Para  $|\alpha| < 1$

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha} - \frac{z}{z - 1/\alpha}, \quad |\alpha| < |z| < 1/|\alpha|$$

Para  $|\alpha| > 1$  a RDC é o conjunto vazio. ◀

## 7.4 Propriedades da Transformada $z$

A maioria das propriedades da transformada  $z$  é análoga às da DTFT. Por isso, nesta seção, apresentamos as propriedades e adiamos as provas para os exercícios. Nas propriedades dadas abaixo, supomos que

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z) \text{ com RDC } R_x$$

e

$$y[n] \xrightarrow{z} Y(z) \text{ com RDC } R_y$$

A RDC é modificada por certas operações. Na seção anterior estabelecemos que a forma geral da RDC é um anel no plano  $z$ . Deste modo, o efeito de uma operação sobre a RDC é descrito por uma mudança nos raios das fronteiras da RDC.

### ■ LINEARIDADE

A propriedade de linearidade afirma que a transformada z de uma soma de sinais é exatamente a soma das transformadas z individuais. Ou seja,

$$ax[n] + by[n] \xrightarrow{z} aX(z) + bY(z) \quad \text{com RDC no mínimo } R_x \cap R_y \quad (7.10)$$

A RDC é a intersecção das RDCs individuais, porque a transformada z da soma é válida somente quando tanto  $X(z)$  como  $Y(z)$  convergem. A RDC pode ser maior do que a intersecção se um ou mais termos de  $x[n]$  ou  $y[n]$  se cancelarem mutuamente na soma. No plano z, isto corresponde a um zero cancelar um pólo que define uma das fronteiras da RDC. Este fenômeno é ilustrado no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 7.6** Suponhamos que

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - (\frac{3}{2})^n u[-n-1] \xrightarrow{z} X(z) = \frac{-z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})} \quad \text{com RDC } \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$$

e

$$y[n] = (\frac{1}{4})^n u[n] - (\frac{1}{2})^n u[n] \xrightarrow{z} Y(z) = \frac{-\frac{1}{4}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} \quad \text{com RDC } |z| > \frac{1}{2}$$

Avalie a transformada z de  $ax[n] + by[n]$ .

**Solução:** As plotagens dos pólos e zeros e as RDCs correspondentes a  $x[n]$  e  $y[n]$  estão ilustradas na Figura 7.10(a) e (b), respectivamente. A propriedade de linearidade afirma que

$$ax[n] + by[n] \xrightarrow{z} a \frac{-z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})} + b \frac{-\frac{1}{4}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}$$

Em geral, a RDC é a intersecção de RDCs individuais, ou  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ , o que corresponde a RDC descrita na Figura 7.10(a). Note, entretanto, o que acontece quando  $a = b$ . Neste caso, temos

$$ax[n] + ay[n] = a(-(\frac{3}{2})^n u[-n-1] + (\frac{1}{4})^n u[n])$$

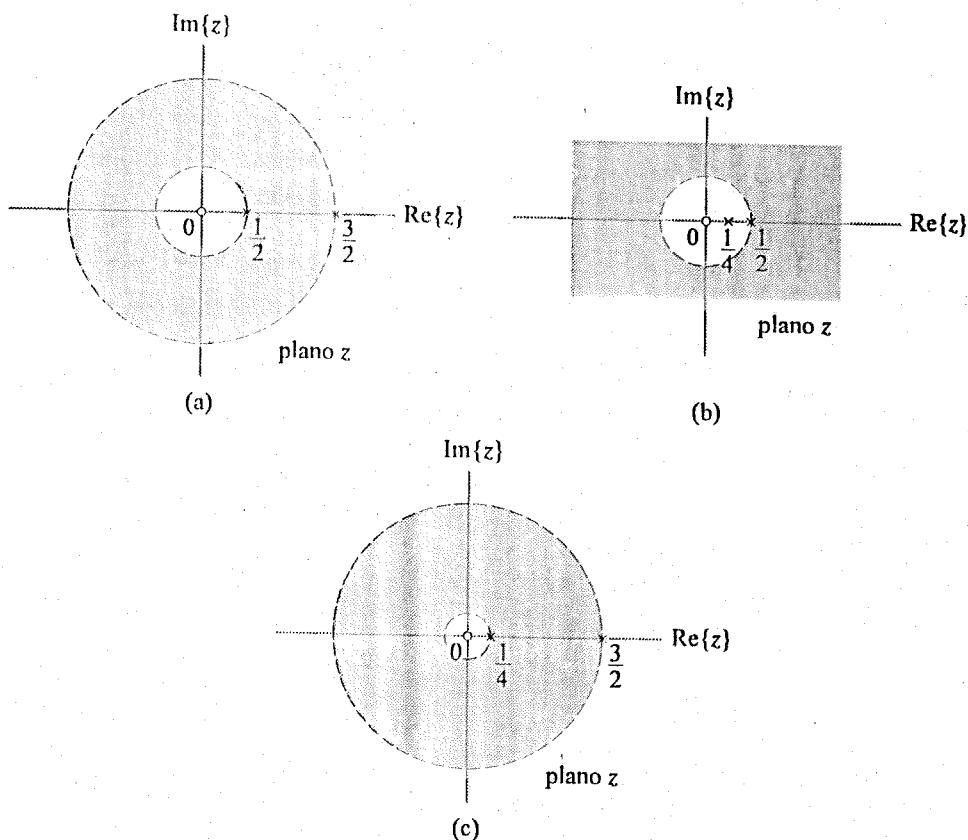
e vemos que o termo  $(\frac{1}{2})^n u[n]$  foi cancelado no sinal de domínio de tempo. A RDC agora é facilmente verificada como sendo  $\frac{1}{4} < |z| < \frac{3}{2}$ , como mostra a Figura 7.10(c). Esta RDC é maior do que a intersecção das RDCs individuais, porque o termo  $(\frac{1}{2})^n u[n]$  não mais está presente. Combinando transformadas z e usando a propriedade de linearidade, obtemos

$$\begin{aligned} aX(z) + aY(z) &= a \left( \frac{-z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})} + \frac{-\frac{1}{4}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} \right) \\ &= a \frac{-\frac{1}{4}z(z-\frac{3}{2}) - z(z-\frac{1}{4})}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})} \\ &= a \frac{-\frac{5}{4}z(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})} \end{aligned}$$

O zero em  $z = \frac{1}{2}$  cancela o pólo em  $z = \frac{1}{2}$  e, deste modo, temos

$$aX(z) + aY(z) = a \frac{-\frac{5}{4}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{3}{2})}$$

Conseqüentemente, o cancelamento do termo  $(\frac{1}{2})^n u[n]$  no domínio de tempo corresponde ao cancelamento do pólo em  $z = \frac{1}{2}$  por um zero no domínio z. Este pólo definiu a fronteira da RDC; deste modo, a RDC se alarga quando ele é removido.



**FIGURA 7.10** RDCs correspondentes ao Exemplo 7.6. (a) RDC e plotagem de pólos e zeros para  $X(z)$ . (b) RDC e plotagem de pólos e zeros para  $Y(z)$ . (c) RDC e plotagem de pólos e zeros para  $a(X(z) + Y(z))$ .

### ■ INVERSÃO DE TEMPO

$$x[-n] \xleftarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \text{ com RDC } \frac{1}{R_x} \quad (7.11)$$

Inversão de tempo, ou reflexão, corresponde a substituir  $z$  por  $z^{-1}$ . Conseqüentemente, se  $R_x$  tiver a forma  $a < |z| < b$ , a RDC do sinal refletido será  $a < 1/|z| < b$  ou  $1/b < |z| < 1/a$ .

### ■ DESLOCAMENTO NO TEMPO

$$x[n - n_o] \xleftarrow{z} z^{-n_o} X(z) \text{ com RDC } R_x \text{ com exceção possivelmente de } z = 0 \text{ ou } |z| = \infty \quad (7.12)$$

A multiplicação por  $z^{-n_o}$  introduz um polo de ordem  $n_o$  em  $z = 0$  se  $n_o > 0$ . Neste caso, a RDC não pode incluir  $z = 0$ , mesmo que  $R_x$  inclua  $z = 0$ , a menos que  $X(z)$  tenha um zero de ordem pelo menos  $n_o$  em  $z = 0$  que cancele todos os novos polos. Se  $n_o < 0$ , então a multiplicação por  $z^{-n_o}$  introduzirá  $n_o$  polos no infinito. Se estes polos não forem cancelados por zeros no infinito em  $X(z)$ , então a RDC de  $z^{-n_o} X(z)$  não poderá incluir  $|z| = \infty$ .

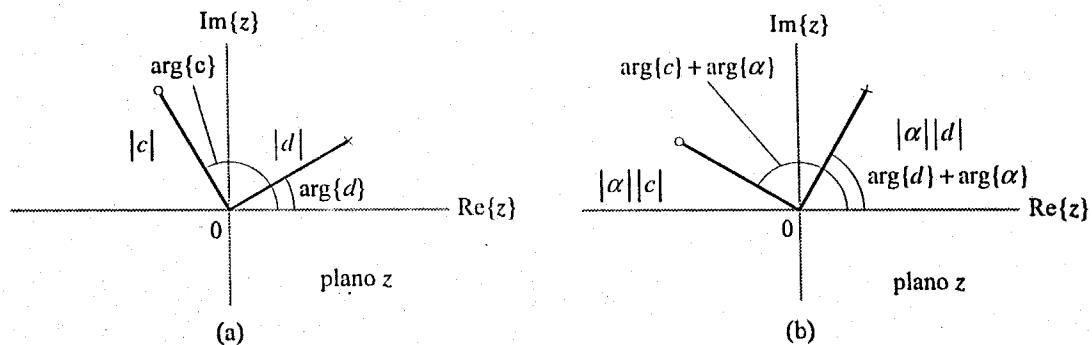
### ■ MULTIPLICAÇÃO POR SEQÜÊNCIA EXPONENCIAL

Admitamos que  $\alpha$  seja um número complexo. Teremos

$$\alpha^n x[n] \xleftarrow{z} X\left(\frac{z}{\alpha}\right) \text{ com RDC } |\alpha| R_x \quad (7.13)$$

A notação  $|\alpha| R_x$  implica que as fronteiras da RDC são multiplicadas por  $|\alpha|$ . Se  $R_x$  for  $a < |z| < b$ , então a nova RDC será  $|\alpha|a < |z| < |\alpha|b$ . Se  $X(z)$  contiver um fator  $1 - dz^{-1}$  no denominador de forma que  $d$  seja um polo, então  $X(z/\alpha)$  terá um fator  $1 - \alpha dz^{-1}$  no denominador e, deste modo, terá um polo em  $\alpha d$ . Similarmente, se  $c$  for um zero de  $X(z)$ , então  $X(z/\alpha)$  terá um zero em  $\alpha c$ . Isto indica

que os pólos e zeros de  $X(z)$  têm seus raios modificados por  $|\alpha|$  e seus ângulos são modificados com  $\arg\{\alpha\}$ . Isto é descrito na Figura 7.11. Se  $\alpha$  tiver módulo unitário, então o raio permanece inalterado, ao passo que se  $\alpha$  for um número real positivo então o ângulo permanecerá inalterado.



**FIGURA 7.11** O efeito da multiplicação por  $\alpha^n$  nos pólos e zeros de uma função de transferência. (a) Localizações dos pólos e zeros de  $X(z)$ . (b) Localizações dos pólos e zeros de  $X(z/\alpha)$ .

## ■ CONVOLUÇÃO

$$x[n] * y[n] \xleftarrow{z} X(z)Y(z) \text{ com RDC no mínimo } R_x \cap R_y \quad (7.14)$$

A convolução de sinais de tempo corresponde à multiplicação de transformadas z. Como na propriedade de linearidade, a RDC pode ser maior do que a intersecção se ocorrer um cancelamento dos pólos e zeros no produto de  $X(z)Y(z)$ .

## ■ DIFERENCIACÃO NO DOMÍNIO Z

$$nx[n] \xleftarrow{z} -z \frac{d}{dz} X(z) \text{ com RDC } R_x \quad (7.15)$$

Multiplicação por  $n$  no tempo corresponde a diferenciação com respeito a  $z$  e multiplicação do resultado por  $-z$  no domínio z. Esta operação não muda a RDC.

**EXEMPLO 7.7** Encontre a transformada z do sinal

$$x[n] = (n(-\frac{1}{2})^n u[n]) * (\frac{1}{4})^{-n} u[-n]$$

**Solução:** Primeiramente, encontramos a transformada z de  $w[n] = n(-\frac{1}{2})^n u[n]$ . Sabemos que

$$(-\frac{1}{2})^n u[n] \xleftarrow{z} \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \text{ com RDC } |z| > \frac{1}{2}$$

Dessa forma, a propriedade de diferenciação no domínio z da equação (7.15) implica que

$$\begin{aligned} w[n] &= n(-\frac{1}{2})^n u[n] \xleftarrow{z} W(z) = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \right) \text{ com RDC } |z| > \frac{1}{2} \\ &= -z \left( \frac{z + \frac{1}{2} - z}{(z + \frac{1}{2})^2} \right) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}z}{(z + \frac{1}{2})^2} \text{ com RDC } |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Em seguida, encontramos a transformada z de  $y[n] = (\frac{1}{4})^{-n} u[-n]$ . Fazemos isto usando a propriedade de inversão de tempo. Observe que

$$(\frac{1}{4})^n u[n] \xleftarrow{z} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \text{ com RDC } |z| > \frac{1}{4}$$

Conseqüentemente, a equação (7.11) implica que

$$\begin{aligned} y[n] \xrightarrow{z} Y(z) &= \frac{z^{-1}}{z^{-1} - \frac{1}{4}} \quad \text{com RDC } |z| > \frac{1}{4} \\ &= \frac{-4z}{z-4} \quad \text{com RDC } |z| < 4 \end{aligned}$$

Por fim, aplicamos a propriedade de convolução para obter  $X(z)$  e, deste modo, escrevemos

$$\begin{aligned} x[n] = w[n] * y[n] &\xrightarrow{z} X(z) = W(z)Y(z) \quad \text{com RDC } R_w \cap R_y \\ &= \frac{2z^2}{(z-4)(z+\frac{1}{2})^2} \quad \text{com RDC } \frac{1}{2} < |z| < 4 \end{aligned}$$

**EXEMPLO 7.8** Use as propriedades de linearidade e multiplicação por uma exponencial complexa para encontrar a transformada  $z$  de

$$x[n] = a^n \cos(\Omega_o n) u[n]$$

em que  $a$  é real e positivo.

*Solução:* Primeiramente, observe que  $y[n] = a^n u[n]$  tem a transformada  $z$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{com RDC } |z| > a$$

Reescreva agora  $x[n]$  como a soma

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j\Omega_o n} y[n] + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_o n} y[n]$$

e aplicamos a propriedade de multiplicação por uma exponencial complexa a cada termo, obtendo

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} Y(e^{-j\Omega_o z}) + \frac{1}{2} Y(e^{j\Omega_o z}) \quad \text{com RDC } |z| > a \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{j\Omega_o z^{-1}}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega_o z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - ae^{-j\Omega_o z^{-1}} + 1 - ae^{j\Omega_o z^{-1}}}{(1 - ae^{j\Omega_o z^{-1}})(1 - ae^{-j\Omega_o z^{-1}})} \right) \\ &= \frac{1 - a \cos(\Omega_o z^{-1})}{1 - 2a \cos(\Omega_o z^{-1}) + a^2 z^{-2}} \quad \text{com RDC } |z| > a \end{aligned}$$

► **EXERCÍCIO 7.4** Encontre a transformada  $z$  de

$$x[n] = u[n-2] * (\frac{2}{3})^n u[n]$$

*Resposta:*

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-\frac{2}{3})} \quad \text{com RDC } |z| > 1$$

## 7.5 Inversão da Transformada $z$

Voltaremos agora nossa atenção para o problema de recuperarmos um sinal do domínio de tempo a partir de sua transformada  $z$ . A avaliação direta da integral de inversão definida na equação (7.5) exige um entendimento de integração de contorno, e ela não é discutida com mais detalhes aqui. Dois métodos alternativos para determinar transformadas  $z$  inversas são apresentados. O método das frações parciais usa o conhecimento de diversos pares de transformadas  $z$  básicas e as propriedades da transformada  $z$  para inverter uma grande classe de transformadas  $z$ . Esta abordagem também recorre a uma importante propriedade da RDC. Um sinal unilateral direito tem uma RDC que se situa fora do raio do pólo, ao passo que um sinal unilateral esquerdo de tempo tem uma RDC que se situa dentro do raio do pólo. O segundo método de inversão expressa  $X(z)$  como uma série de potências em  $z^{-1}$  que tem a forma da equação (7.4), de forma que os valores do sinal podem ser determinados por inspeção.

### ■ EXPANSÕES EM FRAÇÕES PARCIAIS

No estudo de sistemas LTI, freqüentemente encontramos transformadas z que são uma função racional de  $z^{-1}$ . Admitamos que

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

e suponhamos que  $M < N$ . Se  $M \geq N$ , então podemos usar divisão para expressar  $X(z)$  na forma

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} f_k z^{-k} + \frac{\tilde{B}(z)}{A(z)}$$

O polinômio do numerador  $\tilde{B}(z)$  agora tem ordem um a menos do que a do polinômio do denominador, e o método da expansão em frações parciais é aplicado para determinar a transformada inversa de  $\tilde{B}(z)/A(z)$ . A transformada z inversa dos termos da soma é obtida a partir do par  $\delta[n] \xleftarrow{z} 1$  e da propriedade de deslocamento no tempo.

Em alguns problemas,  $X(z)$  pode ser expresso como uma razão de polinômios em z ao invés de  $z^{-1}$ . Neste caso, podemos usar o método da expansão em frações parciais aqui descrito se convertermos primeiro  $X(z)$  numa razão de polinômios em  $z^{-1}$ , conforme é descrito pela equação (7.16). Esta conversão é realizada fatorando-se a potência mais elevada de z presente no numerador e o termo que possui a potência mais elevada de z presente no denominador. Isto assegura que o resto tenha a forma descrita na equação (7.16). Por exemplo, se

$$X(z) = \frac{2z^2 - 2z + 10}{3z^3 - 6z + 9}$$

então, fatoramos  $z^2$  do numerador e  $3z^3$  do denominador e, deste modo, escrevemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^2}{3z^3} \left( \frac{2 - 2z^{-1} + 10z^{-2}}{1 - 2z^{-2} + 3z^{-3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} z^{-1} \left( \frac{2 - 2z^{-1} + 10z^{-2}}{1 - 2z^{-2} + 3z^{-3}} \right) \end{aligned}$$

A expansão em frações parciais é aplicada ao termo entre parênteses, e o fator  $\frac{1}{3} z^{-1}$  é incorporado mais tarde usando-se a propriedade de deslocamento no tempo.

A expansão em frações parciais da equação (7.16) é obtida fatorando-se o polinômio do denominador num produto de termos de primeira ordem, como é mostrado por

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

em que os  $d_k$  são os pólos de  $X(z)$ . Se nenhum dos pólos for repetido, podemos escrever  $X(z)$  como uma soma de termos de primeira ordem usando a expansão em frações parciais:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

A transformada z inversa associada com cada termo é então determinada usando-se o par de transformada:

$$A_k (d_k)^n u[n] \xleftarrow{z} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad \text{com RDC } |z| > d_k$$

ou

$$-A_k (d_k)^n u[-n-1] \xleftarrow{z} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad \text{com RDC } |z| < d_k$$

A relação entre a RDC associada com  $X(z)$  e cada pólo determina se é escolhida a transformada inversa lateral direita ou esquerda para cada termo.

Se um pólo  $d_i$  for repetido  $r$  vezes, então haverá  $r$  termos na expansão em frações parciais associados com este pólo. São eles

$$\frac{A_{i_1}}{1-d_i z^{-1}}, \frac{A_{i_2}}{(1-d_i z^{-1})^2}, \dots, \frac{A_{i_r}}{(1-d_i z^{-1})^r}$$

A transformada  $z$  inversa de cada termo aqui é determinada usando-se ou

$$A \frac{(n+1) \cdots (n+m-1)}{(m-1)!} (d_i)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{A}{(1-d_i z^{-1})^m} \quad \text{com RDC } |z| > d_i$$

ou

$$-A \frac{(n+1) \cdots (n+m-1)}{(m-1)!} (d_i)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{A}{(1-d_i z^{-1})^m} \quad \text{com RDC } |z| < d_i$$

Novamente, a RDC de  $X(z)$  determina se é escolhida a transformada inversa lateral direita ou esquerda.

A propriedade de linearidade indica que a RDC de  $X(z)$  é a intersecção das RDCs associadas com os termos individuais na expansão em frações parciais. Para escolher a transformada inversa correta, devemos inferir a RDC de cada termo a partir da RDC de  $X(z)$ . Isto é realizado comparando-se a localização de cada pólo com a RDC de  $X(z)$ . Se a RDC de  $X(z)$  tiver raio maior do que o do pólo associado com um termo dado, escolhemos a transformada inversa lateral direita. Se a RDC de  $X(z)$  tiver raio menor do que o do pólo, escolhemos a transformada inversa lateral esquerda para este termo. O exemplo seguinte ilustra este procedimento.

**EXEMPLO 7.9** Encontre a transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} \quad \text{com RDC } 1 < |z| < 2$$

*Solução:* Use uma expansão em frações parciais para escrever

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-2z^{-1}} + \frac{A_3}{1-z^{-1}}$$

Resolvendo  $A_1, A_2$  e  $A_3$  obtemos

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{2}{1-z^{-1}}$$

Agora, encontramos a transformada  $z$  inversa de cada termo usando a relação entre a localização do pólo e a RDC de  $X(z)$ . A RDC e as localizações dos pólos são descritas na Figura 7.12. A RDC tem um raio maior do que o pólo em  $z = \frac{1}{2}$ , de forma que este termo tem a transformada inversa lateral direita

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

A RDC tem um raio menor do que o pólo em  $z = 2$ , de forma que este termo tem a transformada inversa lateral esquerda

$$-2(2)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{2}{1-2z^{-1}}$$

Por fim, a RDC tem um raio maior do que o pólo em  $z = 1$ , de forma que este termo tem a transformada  $z$  inversa lateral direita

$$-2u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{2}{1-z^{-1}}$$

Combinando os termos individuais, teremos

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(2)^n u[-n-1] - 2u[n]$$

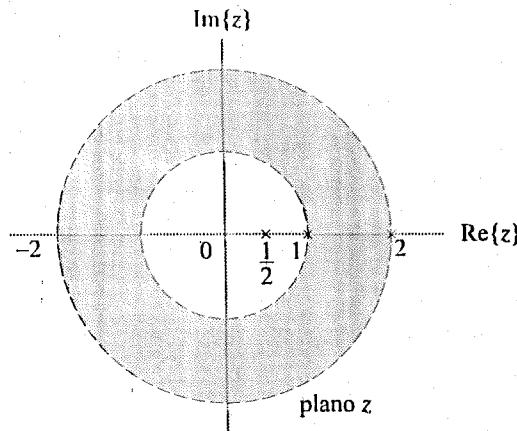


FIGURA 7.12 Localizações dos pólos e a RDC correspondentes ao Exemplo 7.9.

► EXERCÍCIO 7.5 Repita o exemplo anterior se a RDC for modificada para  $\frac{1}{2} < |z| < 1$ .

**Resposta:**

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(2)^n u[-n-1] + 2u[-n-1]$$

**EXEMPLO 7.10** Encontre a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z^3 - 10z^2 - 4z + 4}{2z^2 - 2z - 4} \quad \text{com RDC } |z| < 1$$

**Solução:** Os pólos em  $z = -1$  e  $z = 2$  são encontrados extraíndo-se a raiz do polinômio do denominador. A RDC e as localizações dos pólos no plano z são ilustradas na Figura 7.13. Agora, converta  $X(z)$  numa razão de polinômios em  $z^{-1}$  de acordo com a equação (7.16).

Fazemos isto fatorando  $z^3$  do numerador e  $2z^2$  do denominador, dando

$$X(z) = \frac{1}{2} z \left( \frac{1 - 10z^{-1} - 4z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} \right)$$

O fator  $\frac{1}{2}z$  é facilmente incorporado mais tarde usando-se a propriedade de deslocamento no tempo, de forma que nos concentramos na razão de polinômios entre parênteses. Usando divisão para reduzirmos a ordem do polinômio do numerador, temos

$$\begin{array}{r} 4z^{-3} - 4z^{-2} - 10z^{-1} + 1 \\ \underline{-4z^{-3} + 2z^{-2} - 2z^{-1}} \\ -6z^{-2} - 8z^{-1} + 1 \\ \underline{-6z^{-2} - 3z^{-1} + 3} \\ -5z^{-1} - 2 \end{array}$$

Deste modo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1 - 10z^{-1} - 4z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} &= -2z^{-1} + 3 + \frac{-5z^{-1} - 2}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} \\ &= -2z^{-1} + 3 + \frac{-5z^{-1} - 2}{(1 + z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \end{aligned}$$

Em seguida, usando uma expansão em frações parciais, escrevemos

$$\frac{-5z^{-1} - 2}{(1 + z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{3}{1 - 2z^{-1}}$$

e, dessa forma, definimos

$$X(z) = \frac{1}{2} z W(z)$$

em que

$$W(z) = -2z^{-1} + 3 + \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{3}{1-2z^{-1}} \quad \text{com RDC } |z| < 1$$

A RDC tem um raio menor do que qualquer um dos pólos e, sendo assim, a transformada  $z$  inversa de  $W(z)$  é

$$w[n] = -2\delta[n-1] + 3\delta[n] - (-1)^n u[-n-1] + 3(2)^n u[-n-1]$$

A propriedade de deslocamento no tempo indica que

$$x[n] = \frac{1}{2} w[n+1]$$

e, deste modo,

$$x[n] = -\delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n+1] - \frac{1}{2}(-1)^{n+1}u[-n-2] + \frac{3}{2}(2)^{n+1}u[-n-2]$$

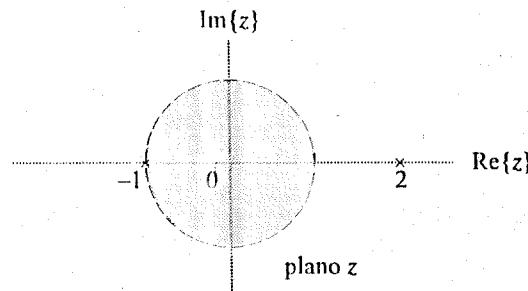


FIGURA 7.13 Localizações dos pólos e a RDC correspondentes ao Exemplo 7.10.

► EXERCÍCIO 7.6 Encontre a transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{16z^2 - 4z + 1}{8z^2 + 2z - 1} \quad \text{com RDC } |z| > \frac{1}{2}$$

*Resposta:*

$$x[n] = -\delta[n] + \frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{7}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

O método das frações parciais também se aplica quando os pólos têm valor complexo. Neste caso, os coeficientes da expansão geralmente têm também valor complexo. Entretanto, se os coeficientes em  $X(z)$  tiverem valor real, os coeficientes de expansão correspondentes aos pólos conjugados complexos serão conjugados complexos um do outro.

Note que uma outra informação que não seja a RDC pode ser usada para estabelecer uma transformada inversa única. Por exemplo, causalidade, estabilidade, ou existência da DTFT é suficiente para determinar a transformada inversa. Se um sinal for conhecido como causal, então serão escolhidas transformadas inversas laterais direitas. Se um sinal for estável, ele será absolutamente somável e terá uma DTFT. Conseqüentemente, a estabilidade e a existência da DTFT são condições equivalentes. Em ambos os casos, a RDC inclui o círculo unitário no plano  $z$ ,  $|z| = 1$ . A transformada  $z$  inversa é determinada comparando-se as localizações dos pólos com o círculo unitário. Se um pôlo estiver dentro do círculo unitário, então será escolhida a transformada  $z$  inversa lateral direita. Se um pôlo estiver fora do círculo unitário, então será escolhida a transformada  $z$  inversa lateral esquerda.

► EXERCÍCIO 7.7 Encontre a transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}}$$

supondo que (a) o sinal seja causal e (b) o sinal tenha uma DTFT.

*Resposta:*

(a)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + 2(2)^n u[n]$

(b)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - 2(2)^n u[-n-1]$

### ■ EXPANSÃO EM SÉRIE DE POTÊNCIAS

Aqui, procuramos expressar  $X(z)$  como uma série de potências em  $z^{-1}$  ou  $z$  da forma definida na equação (7.4). O valor do sinal  $x[n]$  é dado então pelo coeficiente associado com  $z^{-n}$ . Este método de inversão é limitado a sinais unilaterais; ou seja, com RDCs da forma  $|z| < a$  ou  $|z| > a$ . Se a RDC for  $|z| > a$ , então expressamos  $X(z)$  como uma série de potências em  $z^{-1}$  a fim de que obtenhamos um sinal unilateral direito. Se a RDC for  $|z| < a$ , então expressamos  $X(z)$  como uma série de potências em  $z$  e obtemos uma transformada inversa lateral esquerda.

**EXEMPLO 7.11** Encontre a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{com RDC } |z| > \frac{1}{2}$$

usando uma expansão em série de potências.

**Solução:** Usamos divisão para escrever  $X(z)$  como uma série de potências em  $z^{-1}$ , uma vez que a RDC indica que  $x[n]$  está no lado direito. Temos

$$\begin{array}{r} 2+z^{-1} \\ \underline{2-z^{-1}} \\ 2z^{-1} \\ \underline{2z^{-1}-z^{-2}} \\ z^{-2} \\ \underline{z^{-2}-\frac{1}{2}z^{-3}} \\ \frac{1}{2}z^{-3} \end{array}$$

Ou seja,

$$X(z) = 2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} + \dots$$

Dessa forma, concluímos que

$$x[n] = 0, \quad n < 0$$

$$x[0] = 2$$

$$x[1] = 2$$

$$x[2] = 1$$

$$x[3] = \frac{1}{2}$$

Se a RDC é modificada para  $|z| < \frac{1}{2}$ , então expandimos  $X(z)$  como uma série de potências em  $z$ :

$$\begin{array}{r} z^{-1}+2 \\ \underline{z^{-1}-2} \\ 4 \\ \underline{4-8z} \\ 8z \\ \underline{8z-16z^2} \\ 16z^2 \end{array}$$

Ou seja,

$$X(z) = -2 - 8z - 16z^2 - 32z^3 + \dots$$

Deste modo, neste caso, temos

$$x[n] = 0, \quad n > 0$$

$$x[0] = -2$$

$$x[-1] = -8$$

$$x[-2] = -16$$

$$x[-3] = -32$$

A divisão longa pode ser usada para obter a série de potências quando quer que  $X(z)$  seja uma razão de polinômios, e é simples de executar. Entretanto, a divisão longa pode não levar a uma expressão de forma fechada para  $x[n]$ .

Uma vantagem da abordagem da série de potências é a capacidade de se encontrar transformadas  $z$  inversas para sinais que não são uma razão de polinômios em  $z$ . Isto é ilustrado no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 7.12** Encontre a transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = e^{z^2} \quad \text{com RDC igual a todos os } z \text{ exceto } |z| = \infty$$

**Solução:** Usando a representação em série de potências para  $e^a$ ,

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

escrevemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!} \end{aligned}$$

Deste modo,

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n > 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{(n/2)!}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 7.6 Análise com Transformada de Sistemas LTI

Nesta seção, examinaremos a relação entre a função de transferência e as características de entrada e saída de sistemas LTI de tempo discreto. Na Seção 7.2, definimos a função de transferência como a transformada  $z$  da resposta ao impulso. A saída  $y[n]$  de um sistema LTI é expressa em termos da resposta ao impulso  $h[n]$  e a entrada  $x[n]$  usando a convolução

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

Se tomarmos a transformada  $z$  de ambos os lados desta equação usando a propriedade de convolução, poderemos então expressar a saída transformada  $Y(z)$  como o produto da função de transferência  $H(z)$  e a entrada transformada,  $X(z)$ , como é mostrado por

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (7.17)$$

A transformada  $z$  converteu a convolução de seqüências de tempo em multiplicações de transformadas. Dessa forma, a função de transferência fornece mais uma descrição das características de entrada e saída de um sistema LTI de tempo discreto.

Note que a equação (7.17) implica que a função de transferência também pode ser vista como a razão entre a transformada  $z$  da saída e a da entrada, ou seja

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (7.18)$$

Esta definição se aplica a todos os valores de  $z$  para os quais  $X(z)$  é diferente de zero.

### ■ RELACIONANDO A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E A EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

A função de transferência pode ser obtida diretamente da descrição por equação de diferenças de um sistema. Lembre-se que uma equação de diferenças de  $N$ -ésima ordem relaciona a entrada  $x[n]$  com a saída  $y[n]$  como

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Na Seção 7.2 mostramos que a função de transferência  $H(z)$  é um autovalor do sistema associado com a autofunção  $z^n$ . Ou seja, se  $x[n] = z^n$ , a saída de um sistema LTI será  $y[n] = z^n H(z)$ . Substituir  $x[n-k] = z^{n-k}$  e  $y[n-k] = z^{n-k} H(z)$  na equação de diferenças dará a relação

$$z^n \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} H(z) = z^n \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Agora podemos resolver  $H(z)$ , obtendo

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (7.19)$$

A função de transferência de um sistema descrita por uma equação de diferenças é uma razão de polinômios em  $z^{-1}$  e, dessa forma, é denominada *função de transferência racional*. O coeficiente de  $z^{-k}$  no polinômio do numerador é o coeficiente associado com  $x[n-k]$  na equação de diferenças. O coeficiente de  $z^{-k}$  no polinômio do denominador é o coeficiente associado com  $y[n-k]$  na equação de diferenças. Esta correspondência nos permite não somente encontrar a função de transferência dada a equação de diferenças, como também encontrar a descrição por equação de diferenças de um sistema dado uma função de transferência racional.

**EXEMPLO 7.13** Encontre a descrição com equação de diferenças de um sistema que possui a função de transferência

$$H(z) = \frac{5z+2}{z^2+3z+2}$$

**Solução:** Primeiramente, reescrevemos  $H(z)$  como uma razão de polinômios em  $z^{-1}$ . Dividindo tanto o numerador como o denominador por  $z^2$ , obtemos

$$H(z) = \frac{5z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Comparando isto com a equação (7.19), concluímos que  $M = 2$ ,  $N = 2$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 5$ ,  $b_2 = 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  e  $a_2 = 2$ . Por isso, este sistema é descrito pela equação de diferenças

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 5x[n-1] + 2x[n-2]$$

Os pólos e zeros de uma função de transferência racional fornecem muito *insight* sobre as características do sistema, conforme veremos nas subseções seguintes. A função de transferência é expressa na forma de pólos e zeros fatorando-se os polinômios do numerador e do denominador da equação (7.19). Escrevemos

$$H(z) = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (7.20)$$

em que os  $c_k$  e os  $d_k$  são os pólos e zeros do sistema e  $\tilde{b} = b_0 / a_0$  é o fator de ganho. Esta forma supõe que não há nenhum polo ou zero em  $z = 0$ . Um polo de  $p$ -ésima ordem em  $z = 0$  ocorre quando  $b_0 = b_1 = \dots = b_{p-1} = 0$ , ao passo que um zero de  $l$ -ésima ordem em  $z = 0$  ocorre quando  $a_0 = a_1 = \dots = a_{l-1} = 0$ . Neste caso, escrevemos

$$H(z) = \frac{\tilde{b} z^{-p} \prod_{k=1}^{M-p} (1 - c_k z^{-1})}{z^{-l} \prod_{k=1}^{N-l} (1 - d_k z^{-1})} \quad (7.21)$$

em que  $\tilde{b} = b_p / a_l$ . O sistema do exemplo anterior tinha um polo de primeira ordem em  $z = 0$ . Os pólos, zeros e fator de ganho  $\tilde{b}$  do sistema determinam de maneira única a função de transferência do sistema e, dessa forma, constituem outra descrição para o comportamento de entrada e saída do sistema.

A resposta ao impulso é a transformada  $z$  inversa da função de transferência. Para determinar de maneira única a resposta ao impulso a partir da função de transferência, devemos conhecer a RDC. Porém, a equação de diferenças não fornece informações sobre a RDC, de forma que outras características do sistema, como estabilidade ou causalidade, devem ser conhecidas para que se possa determinar de maneira única a resposta ao impulso.

### ■ RELACIONANDO A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E A DESCRIÇÃO POR VARIÁVEIS DE ESTADO

A função de transferência também pode ser obtida a partir da descrição por variáveis de estado

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n] \quad (7.22)$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + \mathbf{D}x[n] \quad (7.23)$$

Admitamos que

$$\tilde{\mathbf{q}}(z) = \begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \\ \vdots \\ Q_N(z) \end{bmatrix}$$

seja a transformada  $z$  de  $\mathbf{q}[n]$ . Aqui,  $Q_i(z)$  é a transformada  $z$  do  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{q}[n]$ ,  $q_i[n]$ . Tomando a transformada  $z$  da equação (7.22) usando a propriedade de deslocamento no tempo e resolvendo  $\tilde{\mathbf{q}}(z)$  de maneira análoga ao que usamos para encontrar a resposta em frequência na Seção 4.2, obtemos

$$\tilde{\mathbf{q}}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X(z)$$

Agora, tomamos a transformada  $z$  da equação (7.23), obtendo

$$Y(z) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{q}}(z) + DX(z)$$

Substitua a expressão para  $\tilde{\mathbf{q}}(z)$  nesta transformada  $z$  dando

$$Y(z) = [\mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D]X(z)$$

Conseqüentemente, a função de transferência do sistema é

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D \quad (7.24)$$

**EXEMPLO 7.14** Determine a função de transferência de um sistema LTI que possui a descrição por variáveis de estado

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [3 \ 0], \quad D = [0]$$

*Solução:* Iniciamos com

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z-1 \end{bmatrix}$$

Isto implica que

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z^2 - z + 1} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

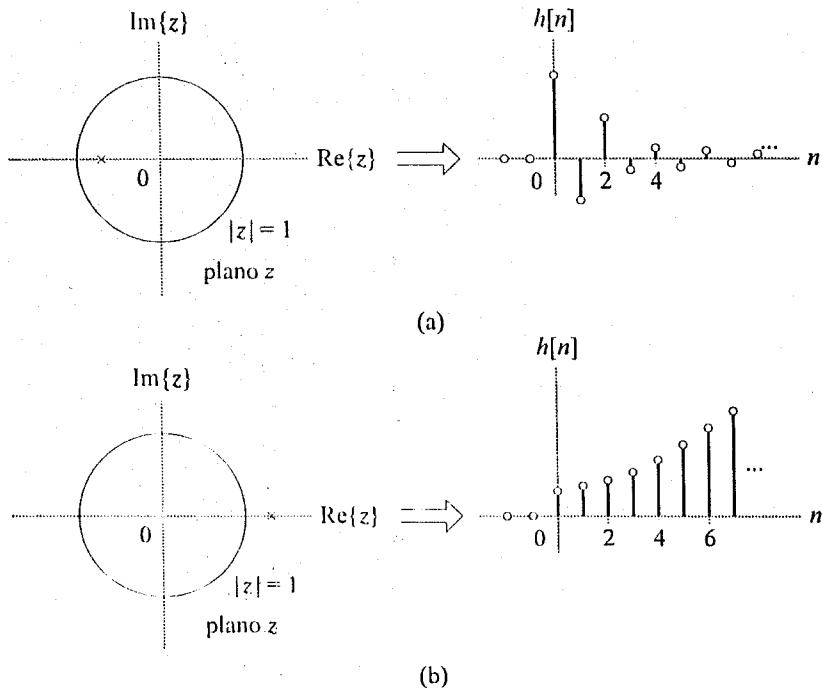
Conseqüentemente, o uso da equação (7.24) produzirá

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z^2 - z + 1} [3 \ 0] \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{z^2 - z + 1} [3 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 2z \end{bmatrix} \\ &= \frac{6}{z^2 - z + 1} \end{aligned}$$

Note que a expressão para  $H(z)$  tem a mesma forma que a resposta em freqüência definida na equação (4.11). Aqui,  $e^{j\Omega}$  é substituído por  $z$ . Conseqüentemente, como descrição de sistema por entrada-saída, a função de transferência é invariante a uma transformação do vetor de estado do sistema.

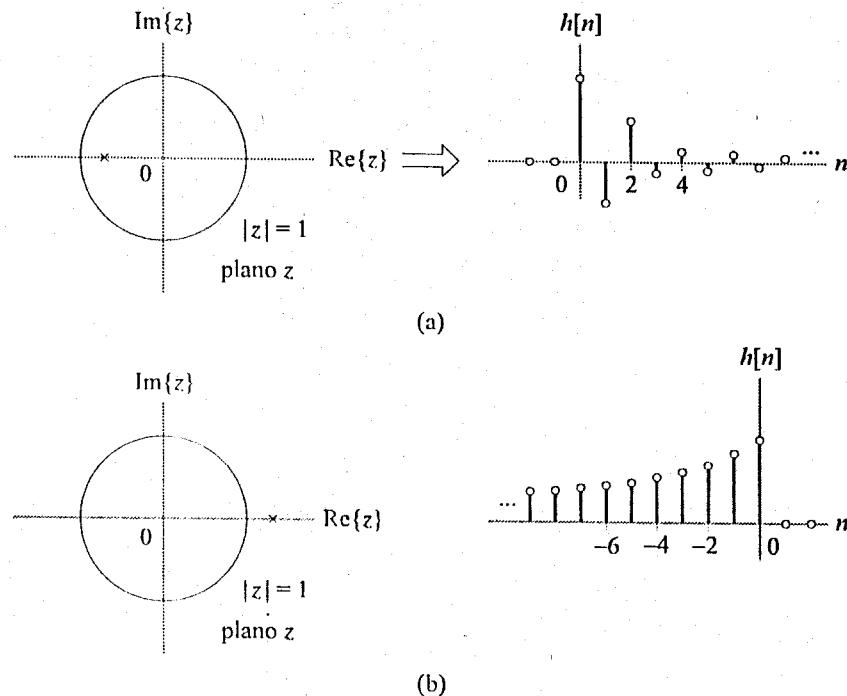
### ■ ESTABILIDADE E CAUSALIDADE

A resposta ao impulso de um sistema causal é zero para  $n < 0$ . Portanto, a resposta ao impulso de um sistema causal é determinada a partir da função de transferência usando-se a transformada inversa lateral direita. Um pólo que está dentro do círculo unitário no plano  $z$  ( $|d_k| < 1$ ) contribui com um termo exponencialmente decrescente para a resposta ao impulso, ao passo que um pólo que está fora do círculo unitário ( $|d_k| > 1$ ) contribui com um termo exponencialmente crescente. Estas relações são ilustradas na Figura 7.14.



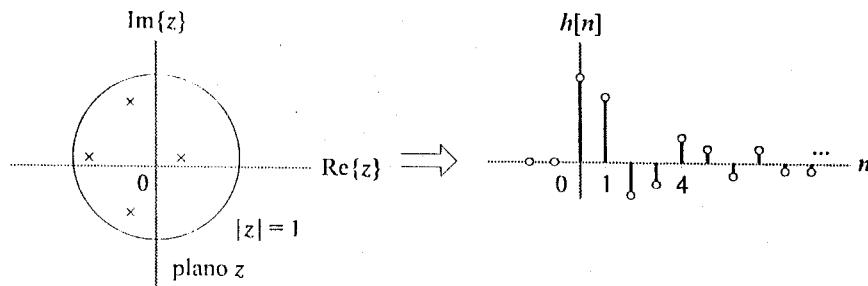
**FIGURA 7.14** A relação entre a localização do pólo e as características de resposta ao impulso de um sistema causal. (a) Um pólo dentro do círculo unitário contribui com um termo exponencialmente decrescente para a resposta ao impulso. (b) Um pólo fora do círculo unitário contribui com um termo exponencialmente crescente para a resposta ao impulso.

Alternativamente, se sabemos que um sistema é estável, a resposta ao impulso é absolutamente somável e a DTFT da resposta ao impulso existirá. Segue-se que a RDC deve incluir o círculo unitário no plano  $z$ . Conseqüentemente, a relação entre uma localização de pólo e o círculo unitário determina o componente da resposta ao impulso associada com o pólo. Um pólo dentro do círculo unitário contribui com um termo exponencial decrescente lateral direita para a resposta ao impulso, ao passo que um pólo fora do círculo unitário contribui com um termo exponencial decrescente lateral esquerda para a resposta ao impulso, como descreve a Figura 7.15. Note que uma resposta ao impulso estável não pode conter quaisquer termos exponenciais crescentes, uma vez que a resposta ao impulso não é absolutamente somável.



**FIGURA 7.15** A relação entre a localização do pólo e as características de resposta ao impulso de um sistema estável. (a) Um pólo dentro do círculo unitário contribui com um termo lateral direita para a resposta ao impulso. (b) Um pólo fora do círculo unitário contribui com um termo lateral esquerda para a resposta ao impulso.

Sistemas que são tanto estáveis como causais devem ter todos os seus pólos dentro do círculo unitário. Um pólo que está dentro do círculo unitário no plano  $z$  contribui com um termo exponencial lateral direito ou causal decrescente para a resposta ao impulso. Não podemos ter um pólo fora do círculo unitário, uma vez que a transformada inversa de um pólo localizado fora do círculo contribuirá ou com um termo exponencial crescente lateral direito, o qual não é estável, ou com um termo exponencial decrescente lateral esquerdo, o qual não é causal. Um exemplo de sistema estável e causal é apresentado na Figura 7.16.



**FIGURA 7.16** Um sistema que é tanto estável quanto causal deve ter todos os seus pólos dentro do círculo unitário no plano  $z$ , como é ilustrado aqui.

**EXEMPLO 7.15** Um sistema tem a função de transferência

$$H(z) = \frac{2}{1-0,9e^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{2}{1-0,9e^{-j\pi/4}z^{-1}} + \frac{3}{1+2z^{-1}}$$

Encontre a resposta ao impulso supondo que o sistema seja (a) estável e (b) causal. Este sistema pode ser tanto estável como causal?

**Solução:** Este sistema tem pólos em  $z = 0,9e^{j\pi/4}$ ,  $z = 0,9e^{-j\pi/4}$  e  $z = -2$ , como descreve a Figura 7.17. Se o sistema for estável, a RDC incluirá o círculo unitário. Os dois pólos dentro do círculo unitário contribuem com termos laterais direitos para a resposta ao impulso, ao passo que o pôlo fora do círculo unitário contribui com um termo lateral esquerdo. Por isso,

$$\begin{aligned} h[n] &= 2(0,9e^{j\pi/4})^n u[n] + 2(0,9e^{-j\pi/4})^n u[n] - 3(-2)^n u[-n-1] \\ &= 4(0,9)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] - 3(-2)^n u[-n-1] \end{aligned}$$

para o caso (a). Se o sistema for considerado causal, então todos os pólos contribuirão com termos laterais direitos para a resposta ao impulso e, deste modo, teremos

$$\begin{aligned} h[n] &= 2(0,9e^{j\pi/4})^n u[n] + 2(0,9e^{-j\pi/4})^n u[n] + 3(-2)^n u[n] \\ &= 4(0,9)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] + 3(-2)^n u[n] \end{aligned}$$

como a solução para o caso (b). Note que este sistema não pode ser nem estável nem causal, uma vez que há um pôlo fora do círculo unitário.

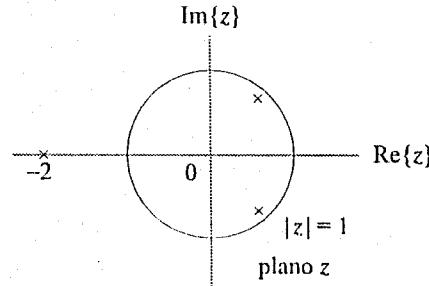


FIGURA 7.17 Localizações dos pólos no plano z para o sistema do Exemplo 7.15.

► **EXERCÍCIO 7.8** Um sistema estável e causal é descrito pela equação de diferenças

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = -2x[n] + \frac{5}{4}x[n-1]$$

Encontre a resposta ao impulso do sistema.

**Resposta:**

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

### SISTEMAS INVERSOS

Lembre-se que a resposta ao impulso de um sistema inverso,  $h^{-1}[n]$ , satisfaz

$$h^{-1}[n] * h[n] = \delta[n]$$

em que  $h[n]$  é a resposta ao impulso do sistema a ser invertido. Tomando a transformada z de ambos os lados desta equação, descobrimos que a função de transferência do sistema inverso deve satisfazer

$$H^{-1}(z)H(z) = 1$$

Ou seja,

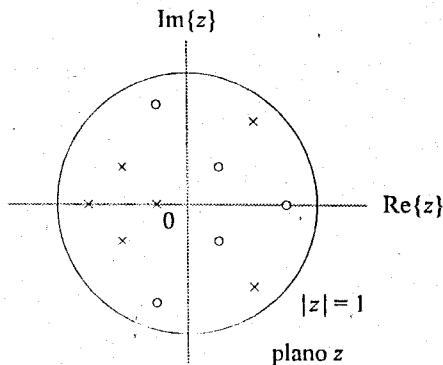
$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)}$$

A função de transferência de um sistema inverso é o inverso da função de transferência do sistema que desejamos inverter. Se  $H(z)$  é escrito na forma pólos e zeros mostrada na equação (7.21), então

$$H^{-1}(z) = \frac{z^{-l} \prod_{k=1}^{N-l} (1 - d_k z^{-1})}{\tilde{b} z^{-p} \prod_{k=1}^{M-p} (1 - c_k z^{-1})} \quad (7.25)$$

Os zeros de  $H(z)$  são os pólos de  $H^{-1}(z)$ , e os pólos de  $H(z)$  são os zeros de  $H^{-1}(z)$ . Qualquer sistema descrito por uma função de transferência racional tem um sistema inverso desta forma.

Muitas vezes estamos interessados em sistemas inversos que são tanto estáveis como causais.  $H^{-1}(z)$  é tanto estável como causal se todos os seus pólos estiverem dentro do círculo unitário. Uma vez que os pólos de  $H^{-1}(z)$  são os zeros de  $H(z)$ , concluímos que um inverso estável e causal para um sistema  $H(z)$  existe se e somente se todos os zeros de  $H(z)$  estiverem dentro do círculo unitário. Se  $H(z)$  tiver quaisquer zeros fora do círculo unitário, então um sistema inverso estável e causal não existirá. Um sistema com todos os seus pólos e zeros dentro do círculo unitário, como ilustra a Figura 7.18, é denominado sistema de fase mínima.



**FIGURA 7.18** Um sistema que possui um inverso causal e estável tem todos os seus pólos e zeros dentro do círculo unitário, como é ilustrado aqui.

**EXEMPLO 7.16** Um sistema é descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] + \frac{1}{4} x[n-1] - \frac{1}{8} x[n-2]$$

Encontre a função de transferência do sistema inverso. Um sistema inverso estável e causal existe?

**Solução:** Encontramos a função de transferência deste sistema aplicando a equação (7.19) para obter

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2} \end{aligned}$$

e o sistema inverso tem a função de transferência

$$H^{-1}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$$

Os pólos do sistema inverso estão em  $z = \frac{1}{4}$  e  $z = -\frac{1}{2}$ . Ambos os pólos estão dentro do círculo unitário e, portanto, o sistema inverso pode ser tanto estável como causal.

► **EXERCÍCIO 7.9** Um sistema tem a resposta ao impulso

$$h[n] = 2\delta[n] + \frac{5}{2}(\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{7}{2}(-\frac{1}{4})^n u[n]$$

Encontre a função de transferência do sistema inverso. Existe um sistema inverso estável e causal?

**Resposta:**

$$H^{-1}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{8}z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

O sistema inverso não pode ser nem estável nem causal.

### ■ DETERMINANDO A RESPOSTA EM FREQUÊNCIA A PARTIR DOS PÓLOS E ZEROS

Exploraremos agora a relação entre as localizações dos pólos e zeros no plano  $z$  e a resposta em freqüência do sistema. Lembre-se que a resposta em freqüência é obtida a partir da função de transferência substituindo-se  $z$  por  $e^{j\Omega}$  em  $H(z)$ . Ou seja, a resposta em freqüência corresponde à função de transferência avaliada no círculo unitário no plano  $z$ . Isto supõe que a RDC inclui o círculo unitário. Substituir  $z = e^{j\Omega}$  na equação (7.21) dará

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\tilde{b} e^{-jp\Omega} \prod_{k=1}^{M-p} (1 - c_k e^{-j\Omega})}{e^{-jN\Omega} \prod_{k=1}^{N-l} (1 - d_k e^{-j\Omega})}$$

Multiplicar tanto o numerador como o denominador por  $e^{jN\Omega}$  produzirá

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\tilde{b} e^{j(N-M)\Omega} \prod_{k=1}^{M-p} (e^{j\Omega} - c_k)}{\prod_{k=1}^{N-l} (e^{j\Omega} - d_k)} \quad (7.26)$$

Examinaremos tanto o módulo como a fase de  $H(e^{j\Omega})$  usando a equação (7.26).

O módulo de  $H(e^{j\Omega})$  em algum valor fixado de  $\Omega$ , digamos,  $\Omega_o$ , é definido por

$$|H(e^{j\Omega_o})| = \frac{|\tilde{b}| \prod_{k=1}^{M-p} |e^{j\Omega_o} - c_k|}{\prod_{k=1}^{N-l} |e^{j\Omega_o} - d_k|}$$

Esta expressão envolve uma razão de produtos de termos da forma  $|e^{j\Omega_o} - g|$ , em que  $g$  representa ou um pôlo ou um zero. Os termos que envolvem zeros estão no numerador, ao passo que aqueles que envolvem pôlos estão no denominador. Se usarmos vetores para representar números complexos no plano  $z$ , então  $e^{j\Omega_o}$  será um vetor a partir da origem até o ponto  $e^{j\Omega_o}$  e  $g$  será um vetor a partir da origem até  $g$ . Conseqüentemente,  $e^{j\Omega_o} - g$  é representado como um vetor do ponto  $g$  ao ponto  $e^{j\Omega_o}$ , como ilustra a Figura 7.19. O comprimento deste vetor é  $|e^{j\Omega_o} - g|$ . Avaliamos a contribuição de cada pôlo e zero para a resposta em freqüência global examinando o comprimento deste vetor à medida que  $\Omega_o$  se modifica.

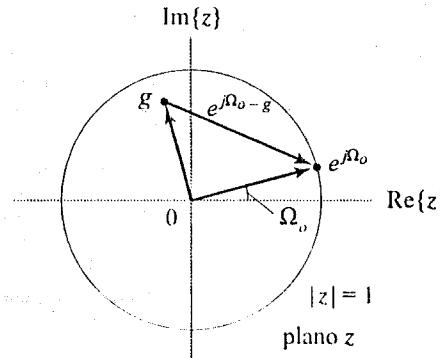
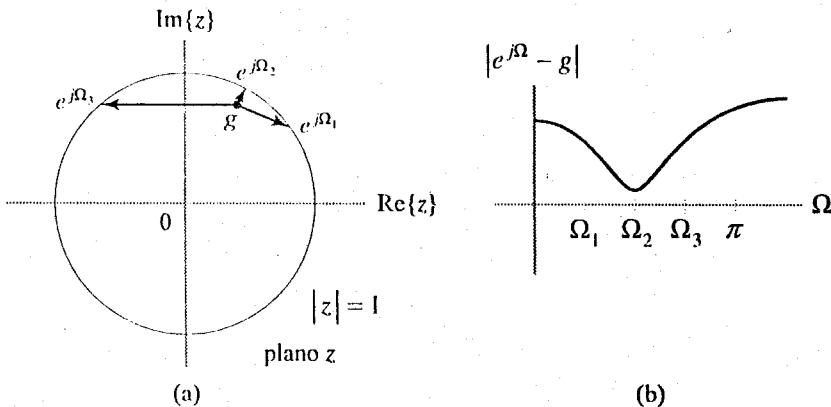


FIGURA 7.19 Interpretação vetorial de  $e^{j\Omega_o} - g$  no plano  $z$ .

A Figura 7.20(a) descreve o vetor  $e^{j\Omega} - g$  para diversos valores diferentes de  $\Omega$ , enquanto a Figura 7.20(b) descreve  $|e^{j\Omega} - g|$  como uma função contínua de freqüência. Note que se  $\Omega = \arg\{g\}$ , então  $|e^{j\Omega} - g|$  atinge seu valor mínimo de  $1 - |g|$  quando  $g$  está dentro do círculo unitário e  $|g| - 1$  quando  $g$  está fora do círculo unitário. Conseqüentemente, se  $g$  estiver próximo do círculo unitário ( $|g| \approx 1$ ), então  $|e^{j\Omega} - g|$  torna-se muito pequeno quando  $\Omega = \arg\{g\}$ .



**FIGURA 7.20** A quantidade  $|e^{j\Omega} - g|$  é o comprimento dos vetores de  $g$  até  $e^{j\Omega}$  no plano  $z$ . (a) Vetores de  $g$  até  $e^{j\Omega}$  em diversas freqüências. (b) A função  $|e^{j\Omega} - g|$ .

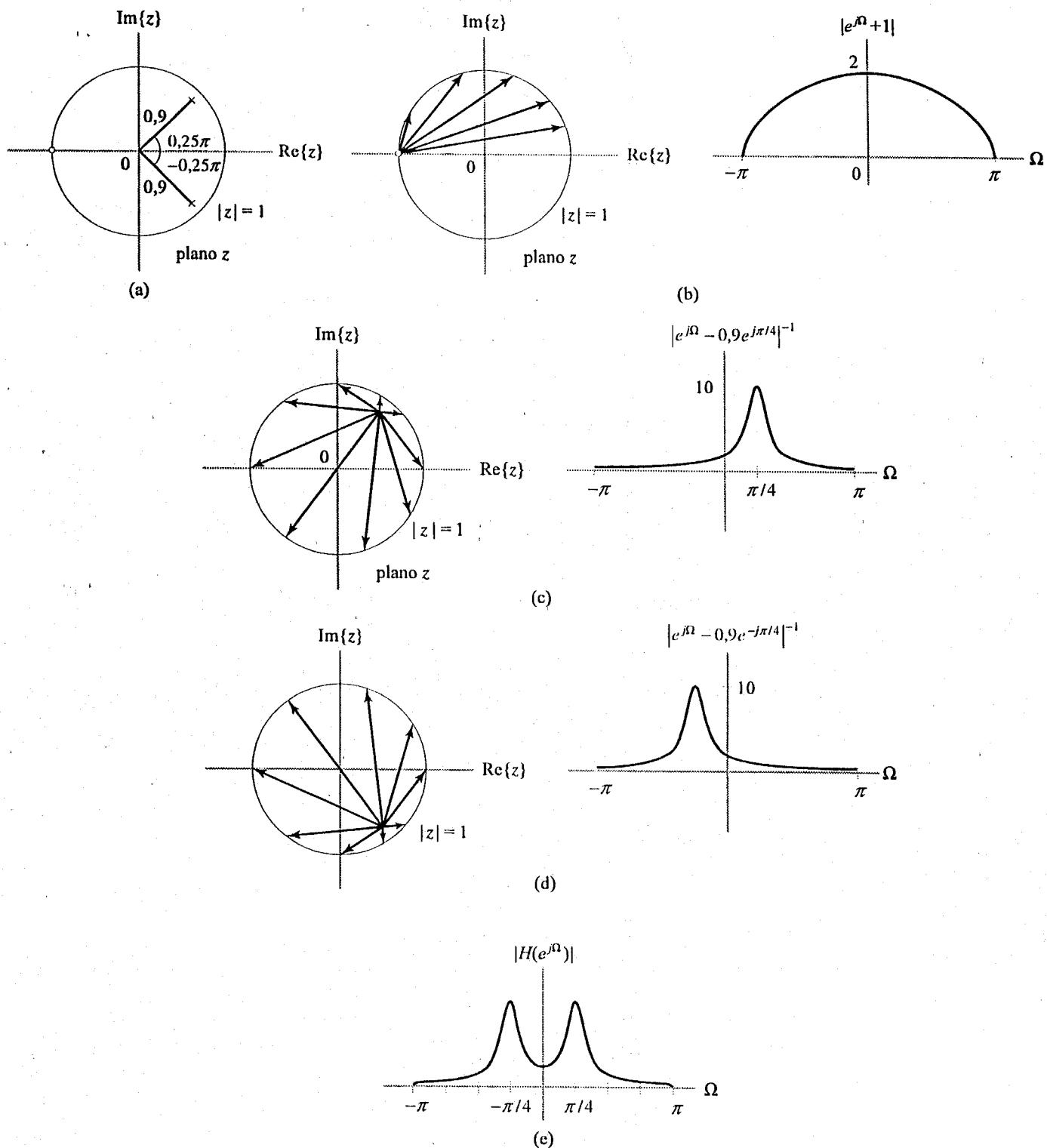
Se  $g$  representar um zero, então  $|e^{j\Omega} - g|$  contribuirá para com o numerador de  $|H(e^{j\Omega})|$ . Conseqüentemente, em freqüências próximas de  $\arg\{g\}$ ,  $|H(e^{j\Omega})|$  tenderá a decrescer. Até que ponto  $|H(e^{j\Omega})|$  decrescerá é algo que depende de quão próximo o zero está do círculo unitário. Se o zero estiver no círculo unitário, então  $|H(e^{j\Omega})|$  tenderá a zero na freqüência correspondente ao zero. Por outro lado, se  $g$  representar um pôlo, então  $|e^{j\Omega} - g|$  contribuirá para com o denominador de  $|H(e^{j\Omega})|$ . Quando  $|e^{j\Omega} - g|$  decrescer,  $|H(e^{j\Omega})|$  crescerá, com o valor do acréscimo dependendo de quão distante o pôlo está do círculo unitário.

Um pôlo que está muito próximo do círculo unitário causará um grande pico em  $|H(e^{j\Omega})|$  na freqüência correspondente ao ângulo de fase do pôlo. Por isso, os zeros tendem a puxar para baixo o módulo da resposta em freqüência, enquanto os pôlos tendem a empurrá-la para cima.

**EXEMPLO 7.17** Esboce a resposta em módulo de um sistema que tem a função de transferência

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0,9e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0,9e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

**Solução:** O sistema tem um zero em  $z = -1$  e pôlos em  $z = 0,9e^{j\pi/4}$  e  $z = 0,9e^{-j\pi/4}$  como descreve a Figura 7.21(a). Conseqüentemente, a resposta em módulo será zero em  $\Omega = \pi$  e grande em  $\Omega = \pm\pi/4$  porque os pôlos estão próximos do círculo unitário. As Figuras 7.21(b) – (d) descrevem o componente da resposta em módulo associado com o zero e com cada pôlo. A multiplicação destas contribuições resulta na resposta em módulo esboçada na Figura 7.21(e).

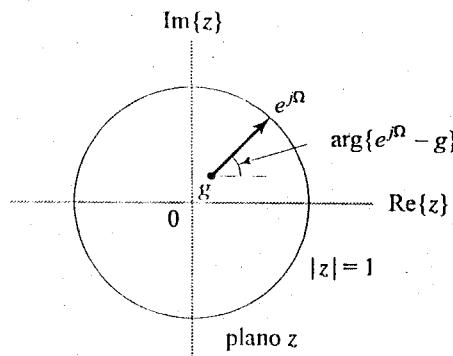


**FIGURA 7.21** Solução para o Exemplo 7.17. (a) Localizações dos pólos e zeros no plano  $z$ . (b) O componente da resposta em módulo associada com um zero é dado pelo comprimento de um vetor a partir do zero até  $e^{j\Omega}$ . (c) O componente da resposta em módulo associada com o polo em  $z = 0,9e^{j\pi/4}$  é o inverso do comprimento de um vetor a partir do polo até  $e^{j\Omega}$ . (d) O componente da resposta em módulo associado com o polo em  $z = 0,9e^{-j\pi/4}$  é o inverso do comprimento de um vetor do polo até  $e^{j\Omega}$ . (e) A resposta em módulo do sistema é o produto da resposta nas partes (b) – (d).

A fase de  $H(e^{j\Omega})$  também pode ser avaliada em termos da fase associada com cada pôlo e zero. Usando a equação (7.26), avaliaremos  $\arg\{H(e^{j\Omega})\}$  como

$$\arg\{H(e^{j\Omega})\} = \arg\{\tilde{b}\} + (N - M)\Omega + \sum_{k=1}^{M-p} \arg\{e^{j\Omega} - c_k\} - \sum_{k=1}^{N-l} \arg\{e^{j\Omega} - d_k\}$$

A fase de  $H(e^{j\Omega})$  envolve a soma dos ângulos de fase devidos a cada zero, menos o ângulo de fase devido a cada pôlo. O primeiro termo,  $\arg\{\tilde{b}\}$  independe da freqüência. A fase associada com cada zero e pôlo é avaliada considerando-se um termo da forma  $\arg\{e^{j\Omega} - g\}$ . Este é o ângulo associado com um vetor que aponta de  $g$  para  $e^{j\Omega}$ . O ângulo deste vetor é medido em relação a uma linha horizontal que passa por  $g$ , como ilustra a Figura 7.22. A contribuição de qualquer pôlo ou zero para a resposta em fase global é determinada pelo ângulo deste vetor à medida que a freqüência se modifica.



**FIGURA 7.22** A quantidade  $\arg\{e^{j\Omega} - g\}$  é o ângulo do vetor, de  $g$  a  $e^{j\Omega}$ , em relação a uma linha horizontal que passa por  $g$ , como é mostrado aqui.

A avaliação exata da resposta em freqüência é mais bem executada numericamente. Entretanto, muitas vezes podemos obter uma aproximação grosseira a partir das localizações dos pôlos e zeros e, dessa forma, desenvolvermos um *insight* sobre a natureza da resposta em freqüência a partir das localizações dos pôlos e zeros.

## 7.7 Estruturas Computacionais para Implementar Sistemas de Tempo Discreto

Sistemas de tempo discreto muitas vezes são implementados num computador. Para escrever o programa de computador que determina a saída do sistema a partir da entrada, devemos primeiramente especificar a ordem na qual cada computação deve ser realizada. A transformada  $z$  freqüentemente é usada para desenvolver essas estruturas computacionais para implementar sistemas de tempo discreto que tenham uma dada função de transferência. Lembramos do capítulo 2, que há muitas implementações diferentes de diagramas de blocos que correspondem a um sistema com uma dada característica de entrada e saída. A liberdade de escolher entre implementações alternativas pode ser usada para otimizar alguns critérios associados com a computação, como por exemplo, o número de operações numéricas ou a sensibilidade do sistema ao arredondamento numérico das computações. Um estudo detalhado dessas questões está além do escopo deste livro. Aqui, ilustramos o papel da transformada  $z$  para se obter estruturas computacionais alternativas.

Diversos diagramas de blocos para implementar sistemas descritos com equações de diferenças foram derivados na Seção 2.5. Eles consistem em operações de deslocamento no tempo, denotadas pelo operador  $S$ , multiplicação por constantes e funções de soma. Podemos representar as descrições com função de transferência racional para sistemas com diagramas de blocos análogos, tomando a transformada  $z$  do diagrama de blocos que representa a equação de diferenças. O operador de deslocamento no tempo corresponde à multiplicação por  $z^{-1}$  no domínio  $z$ . A multiplicação por escalar e a adição são operações lineares e, deste modo, não são modificadas tomando-se a

transformada  $z$ . Conseqüentemente, os diagramas de blocos que representam as funções racionais de transferência usam  $z^{-1}$  em lugar do operador de deslocamento. Por exemplo, o diagrama de blocos descrito na Figura 2.27 representa um sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (7.27)$$

Tomando a transformada  $z$  da equação de diferenças, temos

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

O diagrama de blocos descrito na Figura 7.23 implementa esta relação. Ele é obtido substituindo-se os operadores de deslocamento na Figura 2.27 por  $z^{-1}$ . A função de transferência do sistema na Figura 7.23 é dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (7.28)$$

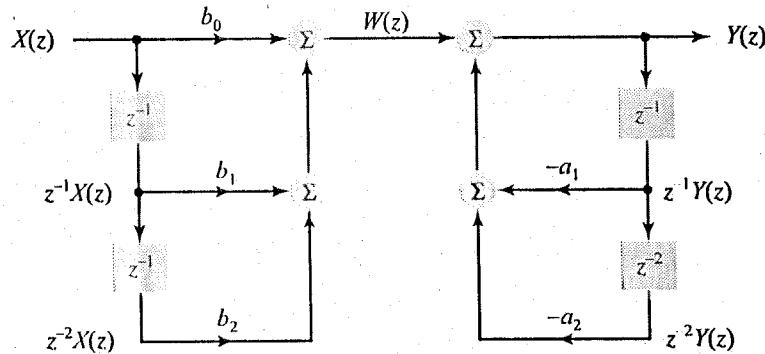


FIGURA 7.23 Diagrama de blocos da função de transferência correspondente à Figura 2.27.

A representação por forma direta II de um sistema foi derivada na Seção 2.5 ao escrevermos a equação de diferenças descrita pela equação (7.27) como duas equações de diferenças vinculadas que envolvem um sinal intermediário  $f[n]$ . Podemos também derivar a forma direta II diretamente da função de transferência do sistema. A função de transferência do sistema descrita pela equação (7.27) é dada por  $H(z)$  na equação (7.28). Suponhamos agora que escrevamos  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ , em que

$$H_1(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

e

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

A implementação da forma direta II para  $H(z)$  é obtida escrevendo-se

$$Y(z) = H_1(z)F(z) \quad (7.29)$$

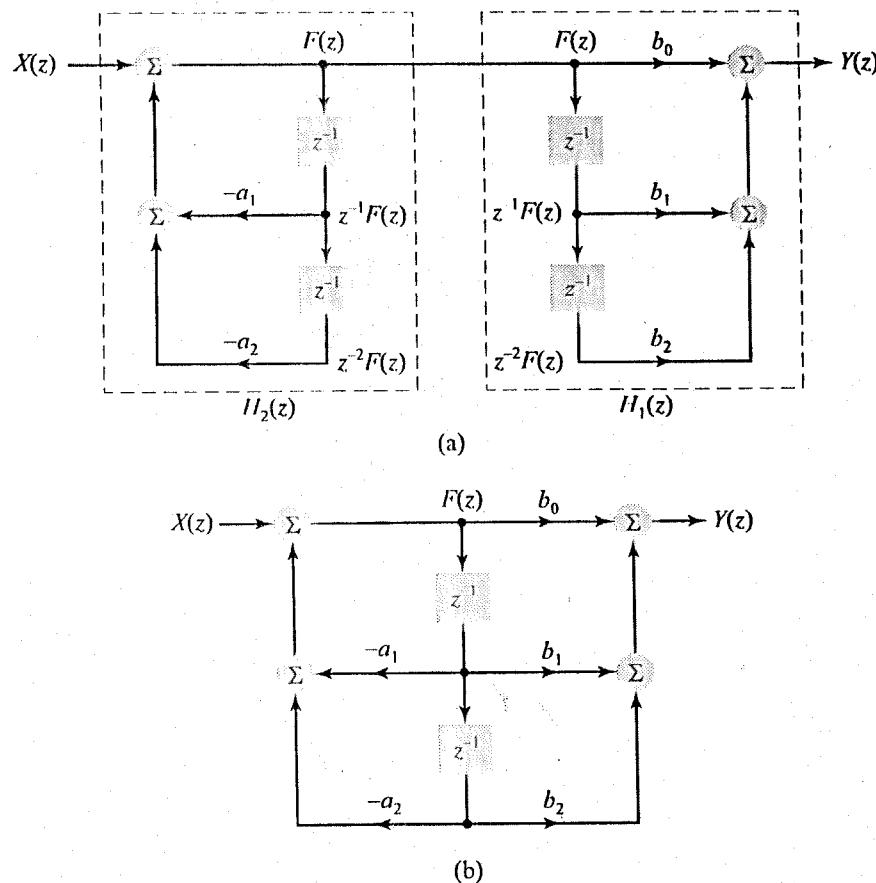
em que

$$F(z) = H_2(z)X(z) \quad (7.30)$$

O diagrama de blocos descrito na Figura 7.24(a) implementa as equações (7.29) e (7.30). Os blocos de  $z^{-1}$  em  $H_1(z)$  e  $H_2(z)$  geram quantidades idênticas e, dessa forma, podem ser combinados para se obter o diagrama de blocos por forma direta II descrito na Figura 7.24(b).

A forma com pólos e zeros da função de transferência leva a duas implementações alternativas de sistema, as formas em cascata e em paralelo. Nestas formas, a função de transferência é representada como uma interconexão de funções, ou seções, de ordem mais baixa. Na forma em cascata, escrevemos

$$H(z) = \prod_{i=1}^p H_i(z)$$



**FIGURA 7.24** Desenvolvimento da forma direta II. (a) Representação da função de transferência  $H(z)$  como  $H_1(z)H_2(z)$ . (b) Implementação da forma direta II da função de transferência  $H(z)$  obtida a partir de (a) combinando-se os dois conjuntos de blocos  $z^{-1}$ .

em que o  $H_i(z)$  contém subconjuntos distintos dos pólos e zeros de  $H(z)$ . Normalmente, um ou dois dos pólos e zeros de  $H(z)$  são atribuídos a cada  $H_i(z)$ . Dizemos que o sistema é representado como uma cascata de seções de primeira e segunda ordens neste caso. Os pólos e zeros que ocorrem em pares conjugados complexos normalmente são colocados na mesma seção a fim de que os coeficientes da seção tenham valor real. Na forma paralela, usamos uma expansão em frações parciais para escrever

$$H(z) = \sum_{i=1}^p H_i(z)$$

em que cada  $H_i(z)$  contém um conjunto distinto dos pólos de  $H(z)$ . Aqui, mais uma vez, normalmente um ou dois pólos são atribuídos a cada seção, e dizemos que o sistema é representado por uma conexão paralela de seções de primeira e segunda ordens. O exemplo seguinte e o exercício ilustram tanto a forma em paralelo como a forma em cascata.

**EXEMPLO 7.18** Considere o sistema representado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{(1 + jz^{-1})(1 - jz^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{3}{4}e^{j\pi/8}z^{-1})(1 - \frac{3}{4}e^{-j\pi/8}z^{-1})}$$

Descreva a forma em cascata deste sistema usando seções de segunda ordem com valor real. Suponha que cada seção de segunda ordem seja implementada como uma forma direta II.

**Solução:** Combinamos os pólos e zeros conjugados complexos nas seções, como é mostrado por

$$H_1(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - \cos(\pi/4)z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}\cos(\pi/8)z^{-1} + \frac{9}{16}z^{-2}}$$

O diagrama de blocos correspondente a  $H_1(z)H_2(z)$  é descrito na Figura 7.25. Note que esta solução não é única, uma vez que podemos ter intercambiado a ordem de  $H_1(z)$  e  $H_2(z)$  ou intercambiado a associação dos pólos e zeros.

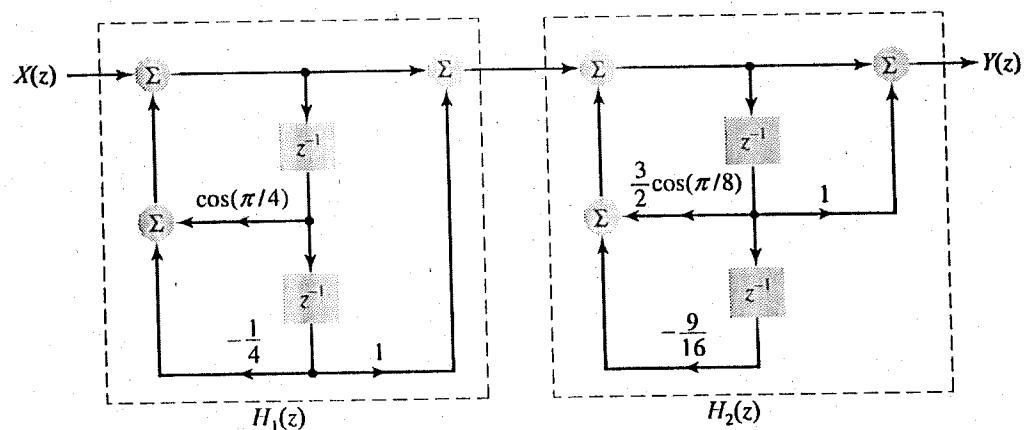


FIGURA 7.25 Forma de representação em cascata correspondente ao Exemplo 7.18.

► EXERCÍCIO 7.10 Descreva a representação da forma paralela correspondente à função de transferência

$$H(z) = \frac{4 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

usando seções de primeira ordem implementadas como uma forma direta II.

*Resposta:*

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Veja a Figura 7.26.

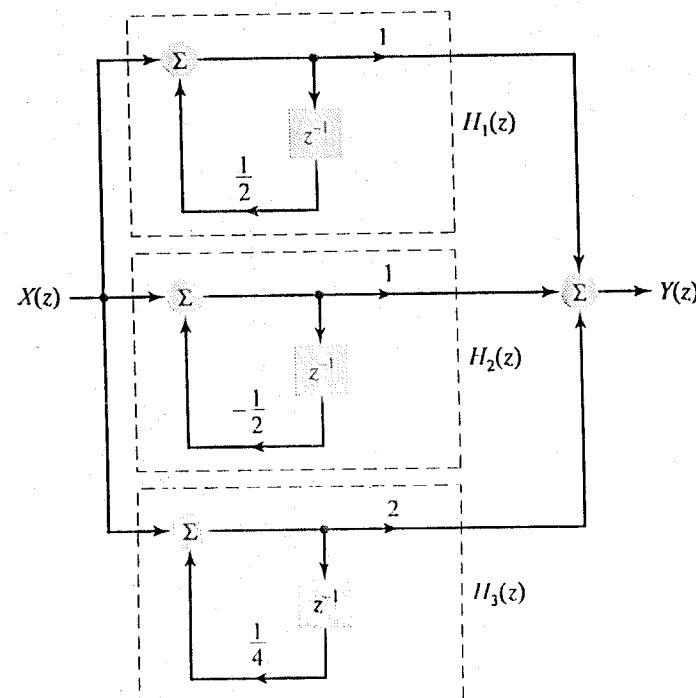


FIGURA 7.26 Forma de implementação paralela correspondente ao Exercício 7.10.

## 7.8 A Transformada z Unilateral

A transformada z unilateral ou transformada z de um lado é avaliada usando-se a parte de um sinal associada com valores não negativos do índice de tempo ( $n \geq 0$ ). Esta forma de transformada z é apropriada para problemas que envolvem sinais e sistemas causais.

É razoável supor causalidade em muitas aplicações da transformada z. Por exemplo, muitas vezes estamos interessados na resposta de um sistema causal a um sinal de entrada. A escolha da origem de tempo normalmente é arbitrária, de forma que podemos escolher  $n = 0$  como o instante em que a entrada é aplicada e depois estudar a resposta correspondente a tempos  $n \geq 0$ . Há diversas vantagens em usarmos a transformada unilateral nesses problemas. Primeiramente, não precisamos usar a RDC. Em segundo lugar, e talvez o mais importante, a transformada unilateral nos permite estudar sistemas descritos por equações de diferenças com condições iniciais.

### DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

A transformada z unilateral de um sinal  $x[n]$  é definida como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7.31)$$

a qual depende somente de  $x[n]$  para  $n \geq 0$ . A transformada z inversa pode ser obtida avaliando-se a equação (7.5) para  $n \geq 0$ . Denotamos a relação entre  $x[n]$  e  $X(z)$  como

$$x[n] \xleftarrow{z_n} X(z)$$

As transformadas z unilateral e bilateral são equivalentes para sinais causais. Por exemplo,

$$\alpha^n u[n] \xleftarrow{z_n} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

e

$$a^n \cos(\Omega_o n) u[n] \xleftarrow{z_n} \frac{1 - a \cos(\Omega_o) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\Omega_o) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$$

Podemos mostrar de maneira imediata que a transformada z unilateral satisfaz as mesmas propriedades que a transformada z bilateral, com uma importante exceção: a propriedade de deslocamento no tempo. Para desenvolver a propriedade de deslocamento no tempo, admitamos que  $w[n] = x[n - 1]$ . Agora, a partir da equação (7.31) temos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

A transformada z unilateral de  $w[n]$  é definida de maneira semelhante,

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w[n]z^{-n}$$

Expressamos  $W(z)$  como uma função de  $X(z)$ . Substituindo  $w[n] = x[n - 1]$ , obtemos

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n - 1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n - 1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)} \\ &= x[-1] + z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} \\ &= x[-1] + z^{-1} X(z) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, um deslocamento unitário no tempo resulta numa multiplicação por  $z^{-1}$  e numa adição da constante  $x[-1]$ . Obtemos a propriedade de deslocamento no tempo para retardos maiores do que 1 de maneira idêntica. Se

$$x[n] \xleftrightarrow{z_u} X(z)$$

teremos

$$\begin{aligned} x[n-k] &\xleftrightarrow{z_u} x[-k] + x[-k+1]z^{-1} \\ &\quad + \cdots + x[-1]z^{-k+1} + z^{-k}X(z) \quad \text{para } k > 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

No caso de um adiantamento no tempo, a propriedade de deslocamento se modifica bastante. Aqui, otemos

$$x[n+k] \xleftrightarrow{z_u} -x[0]z^k - x[1]z^{k-1} - \cdots - x[k-1]z + z^kX(z) \quad \text{para } k > 0 \quad (7.33)$$

Ambas as propriedades de deslocamento correspondem à propriedade de deslocamento bilateral, com termos adicionais que são responsáveis pelos valores da sequência que são deslocados para dentro ou para fora do intervalo de tempo não negativo do sinal.

### ■ RESOLVENDO EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS COM CONDIÇÕES INICIAIS

A principal aplicação da transformada z unilateral está na resolução de equações de diferenças sujeitas a condições iniciais diferentes de zero. A equação de diferenças é resolvida tomando-se a transformada z unilateral de ambos os lados, usando-se álgebra para obter a transformada z da solução e então obter a transformada z inversa. As condições iniciais são incorporadas naturalmente aos problemas como uma consequência da propriedade de deslocamento no tempo, equação (7.32). Iniciamos com um exemplo.

**EXEMPLO 7.19** Considere o sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - 0,9y[n-1] = x[n]$$

Encontre a saída se a entrada for  $x[n] = u[n]$  e se a condição inicial da saída for  $y[-1] = 2$ .

**Solução:** Tome a transformada z unilateral de ambos os lados da equação de diferenças e use a propriedade de deslocamento no tempo, obtendo

$$Y(z) - 0,9(y[-1] + z^{-1}Y(z)) = X(z)$$

Reorganize agora esta equação para determinar  $Y(z)$ , como é mostrado por

$$(1 - 0,9z^{-1})Y(z) = X(z) + 0,9y[-1]$$

ou

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - 0,9z^{-1}} + \frac{0,9y[-1]}{1 - 0,9z^{-1}}$$

Note que  $Y(z)$  é dado como a soma de dois termos: um que depende da entrada e outro que depende da condição inicial. O termo que depende da entrada representa a resposta forçada do sistema. O termo da condição inicial representa a resposta natural do sistema.

Substitua  $X(z) = 1/(1 - z^{-1})$  e  $y[-1] = 2$  para obter

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - 0,9z^{-1})(1 - z^{-1})} + \frac{1,8}{1 - 0,9z^{-1}}$$

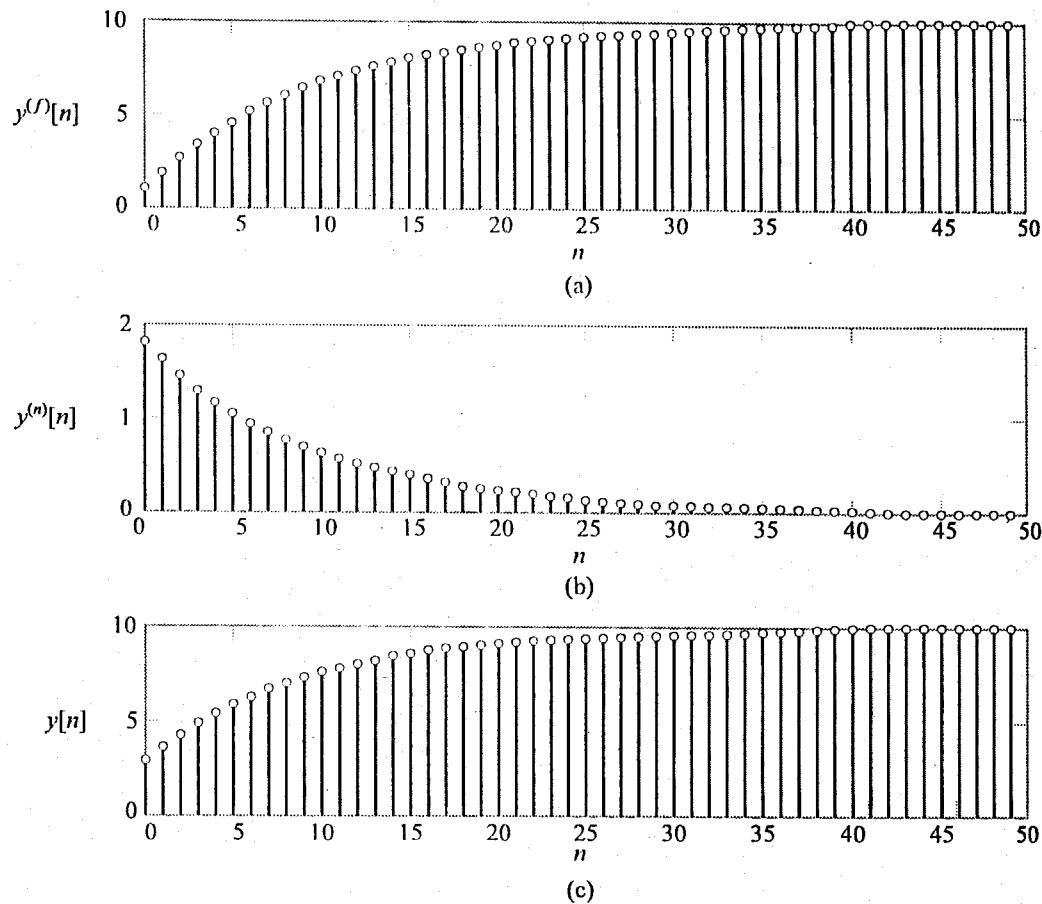
Execute agora uma expansão em frações parciais no primeiro termo de  $Y(z)$ , obtendo

$$Y(z) = \frac{-9}{1 - 0,9z^{-1}} + \frac{10}{1 - z^{-1}} + \frac{1,8}{1 - 0,9z^{-1}}$$

A saída do sistema é obtida fazendo-se a transformada z inversa de  $Y(z)$ , como é mostrado por

$$y[n] = -9(0,9)^n u[n] + 10u[n] + 1,8(0,9)^n u[n]$$

O último termo,  $1,8(0,9)^n u[n]$ , é a resposta natural do sistema, ao passo que os dois primeiros termos representam a resposta forçada. A resposta natural, a resposta forçada e a resposta completa estão ilustradas na Figura 7.27.



**FIGURA 7.27** Solução do Exemplo 7.19. (a) Resposta forçada. (b) Resposta natural. (c) Saída completa do sistema.

No exemplo anterior, havia uma separação natural entre a resposta forçada e a natural do sistema. Esta separação geralmente ocorre. Considere tomar a transformada  $z$  unilateral de ambos os lados da seguinte equação de diferenças:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Podemos escrever a transformada  $z$  como é mostrado por

$$A(z)Y(z) + C(z) = B(z)X(z)$$

em que

$$A(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}$$

$$B(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

e

$$C(z) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=m+1}^N a_k y[-k+m] z^{-m}$$

Aqui, supomos que  $x[n]$  seja causal, de forma que  $x[n-k] \xrightarrow{z^{-k}} X(z)$ . O termo  $C(z)$  depende das  $N$  condições iniciais  $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$  e de  $a_k$ . Ele será nulo se todas as condições iniciais forem iguais a zero. Resolvendo  $Y(z)$ , obtemos

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z) - \frac{C(z)}{A(z)}$$

A saída é a soma da resposta forçada devida à entrada,  $[B(z)/A(z)]X(z)$ , e a resposta natural induzida pelas condições iniciais,  $C(z)/A(z)$ . Uma vez que  $C(z)$  é um polinômio, os pólos da resposta natural são as raízes de  $A(z)$ , as quais são também os pólos da função de transferência. Conseqüentemente, a forma da resposta natural depende somente dos pólos do sistema. Note que, se o sistema for estável, os pólos deverão situar-se dentro do círculo unitário.

► **Exercício 7.11** Determine a resposta forçada  $y^{(f)}[n]$ , a resposta natural  $y^{(n)}[n]$ , e a saída  $y[n]$  do sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n] + x[n-1]$$

se a entrada for  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$  e  $y[-1] = 1$  for a condição inicial.

*Resposta:*

$$\begin{aligned} y^{(f)}[n] &= \frac{4}{7}(-3)^n u[n] + \frac{3}{7}(\frac{1}{2})^n u[n] \\ y^{(n)}[n] &= -6(-3)^n u[n] \\ y[n] &= y^{(f)}[n] + y^{(n)}[n] \end{aligned}$$

## 7.9 Explorando Conceitos com o MATLAB

A *Signal Processing Toolbox* do MATLAB contém rotinas para trabalharmos com transformadas z.

### PÓLOS E ZEROS

Os pólos e zeros de um sistema podem ser determinados aplicando-se `roots` ao polinômio respectivo. Por exemplo, para encontrar as raízes de  $1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}$ , aplicamos o comando `roots` ( $[1, 4, 3]$ ). Os pólos e zeros podem ser exibidos no plano z usando-se `zplane(b, a)`. Se b e a forem vetores linha, então `zplane` extrairá as raízes dos polinômios do numerador e do denominador representados por b e a, respectivamente, para encontrar os pólos e zeros antes de exibi-los. Se b e a forem vetores coluna, `zplane` presumirá que b e a contêm as localizações dos zeros e pólos, respectivamente.

### INVERSÃO DA TRANSFORMADA Z

O comando `residuez` computa expansões em frações parciais para transformadas z expressas como uma razão de dois polinômios em  $z^{-1}$ . A sintaxe é  $[r, p, k] = \text{residuez}(b, a)$ , em que b e a são vetores que representam os coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador ordenados em potências decrescentes de z. O vetor r representa os coeficientes das expansões em frações parciais correspondentes aos pólos dados em p. O vetor k contém os coeficientes associados com potências de  $z^{-1}$  que resultam da divisão quando a ordem do numerador iguala ou ultrapassa a ordem do denominador.

Por exemplo, podemos usar o MATLAB para encontrar a expansão em frações parciais para a transformada z dada no Exemplo 7.10.

$$X(z) = \frac{z^3 - 10z^2 - 4z + 4}{2z^2 - 2z - 4}$$

Uma vez que `residuez` supõe que os polinômios do numerador e do denominador são expressos em potências de  $z^{-1}$ , escrevemos primeiro  $X(z) = zY(z)$ , em que

$$Y(z) = \frac{1 - 10z^{-1} - 4z^{-2} + 4z^{-3}}{2 - 2z^{-1} - 4z^{-2}}$$

Usamos agora `residuez` para encontrar a expansão em frações parciais para  $Y(z)$ , da seguinte maneira:

```
>> [r, p, k] = residuez([1, -10, -4, 4], [2, -2, -4])
r =
    -1.5000
    0.5000
p =
    2
    -1
k =
    1.5000   -1.0000
```

Isto implica uma expansão em frações parciais da forma

$$Y(z) = \frac{-1,5}{1-2z^{-1}} + \frac{0,5}{1+z^{-1}} + 1,5 - z^{-1}$$

a qual, como se poderia esperar, corresponde a  $\frac{1}{2}W(z)$  do Exemplo 7.10.

► **EXERCÍCIO 7.12** Resolva o Exercício 7.6 usando o MATLAB e o comando `residuez`.

### ■ ANÁLISE POR TRANSFORMADA DE SISTEMAS LTI

Lembre-se que a resposta ao impulso, a equação de diferenças, a função de transferência, os pólos e zeros, a resposta em freqüência e a descrição por variáveis de estado fornecem representações diferentes, ainda que equivalentes, para as características de entrada e saída de um sistema LTI. A *Signal Processing Toolbox* do MATLAB contém diversas rotinas para fazermos a conversão entre diferentes descrições de sistema. Se `b` e `a` contém os coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador, respectivamente, da função de transferência, ordenados em potências decrescentes de  $z$ , então `tf2ss(b, a)` determina uma descrição por variáveis de estado para o sistema e `tf2zp(b, a)` determina a descrição por pólo-zero-ganho do sistema. Similarmente, `zp2ss` e `zp2tf` fazem a conversão de descrições por pólo-zero-ganho para descrições por variáveis de estado e por função de transferência, respectivamente, enquanto `ss2tf` e `ss2zp` fazem a conversão de descrição por variáveis de estado para as formas de função de transferência e pólo-zero-ganho, respectivamente. Conforme chamamos a atenção na Seção 4.12, a resposta em freqüência é avaliada a partir da função de transferência usando-se `freqz`.

Considere um sistema que possui a função de transferência

$$H(z) = \frac{0,094(1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4})}{1+0,4860z^{-2}+0,0177z^{-4}} \quad (7.34)$$

Podemos descrever os pólos e zeros de  $H(z)$  no plano  $z$  e plotar a resposta em módulo do sistema com os seguintes comandos:

```
>> b = .094*[1, 4, 6, 4, 1];
>> a = [1, 0, 0.486, 0, 0.0177]
>> zplane(b,a)
>> [H,w] = freqz(b,a,250);
>> plot(w,abs(H))
```

A Figura 7.28 indica que este sistema tem um zero de ordem quatro em  $z = -1$  e quatro pólos no eixo imaginário. A resposta em módulo é descrita na Figura 7.29. Note que os zeros em  $z = -1$  forçam a resposta em módulo a ser pequena em freqüências elevadas.

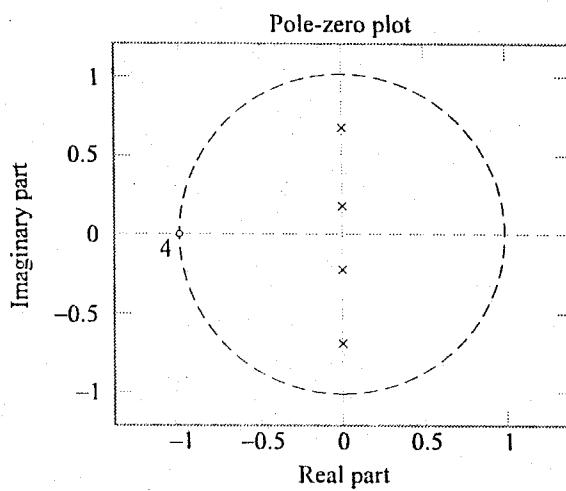
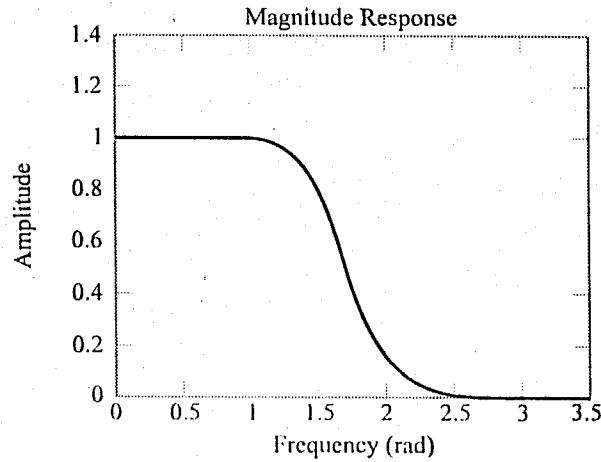
FIGURA 7.28 Localizações dos pólos e zeros no plano  $z$  obtidas usando-se o MATLAB.

FIGURA 7.29 Resposta em módulo avaliada usando-se o MATLAB.

### ■ ESTRUTURAS COMPUTACIONAIS PARA IMPLEMENTAR SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

Um meio útil de implementar um sistema de tempo discreto é como uma cascata com seções de segunda ordem. A *Signal Processing Toolbox* do MATLAB contém rotinas para convertermos uma descrição por variáveis de estado ou por pôlo-zero-ganho de um sistema numa conexão em cascata de seções de segunda ordem. Isto é realizado usando-se `sos2sos` e `zp2sos`, respectivamente. A sintaxe para `zp2sos` é `sos = zp2sos(z, p, k)`, em que `z` e `p` são vetores que contêm zeros e pôlos, respectivamente, e `k` é o ganho. A matriz `sos` é  $L$  por 6, em que cada linha contém os coeficientes da função de transferência para essa seção. Os três primeiros elementos da linha contêm os coeficientes do numerador, ao passo que os últimos três elementos contêm os coeficientes do denominador. Os comandos `sos2zp`, `sos2ss` e `sos2tf` fazem a conversão de uma cascata de seções de segunda ordem para descrições por pôlo-zero-ganho, variáveis de estado e função de transferência, respectivamente.

Suponhamos que repitamos o Exemplo 7.18 usando o MATLAB para obter uma representação do sistema como uma cascata de seções de segunda ordem. A função de transferência é dada na forma de pólo-zero-ganho

$$H(z) = \frac{(1+jz^{-1})(1-jz^{-1})(1+z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-\frac{3}{4}e^{j\pi/8}z^{-1})(1-\frac{3}{4}e^{-j\pi/8}z^{-1})}$$

O sistema tem zeros em  $z = \pm j$  e  $z = -1$ , enquanto os pólos estão em  $z = \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/4}$  e  $z = \frac{3}{4}e^{\pm j\pi/8}$ . Empregamos `zp2sos` para fazer a conversão da forma pólo-zero-ganho para seções de segunda ordem, da seguinte maneira:

```
>> z = [-1, -j, j]; ...
>> p = [0.5*exp(j*pi/4), 0.5*exp(-j*pi/4), ...
0.75*exp(j*pi/8), 0.75*exp(-j*pi/8)];
>> k = 1;
>> sos = zp2sos(z,p,k)
sos =
    0.2706    0.2706      0    1.0000   -0.7071    0.2500
    3.6955        0    3.6955    1.0000   -1.3858    0.5625
```

Conseqüentemente, o sistema descrito como a cascata de seções de segunda ordem.

$$F_1(z) = \frac{0.2706 + 0.2706z^{-1}}{1 - 0.7071z^{-1} + 0.25z^{-2}} \quad F_2(z) = \frac{3.6955 + 3.6955z^{-2}}{1 - 1.3858z^{-1} + 0.5625z^{-2}}$$

Note que esta solução difere daquela do Exemplo 7.18 em termos de que a associação de zeros e pólos é intercambiável. Um fator de mudança de escala também é introduzido em cada seção por `zp2sos`. O ganho global não se altera, entretanto, uma vez que o produto dos fatores de mudança de escala é a unidade. Os procedimentos empregados por `zp2sos` para mudar de escala e associar os pólos com zeros são escolhidos para minimizar o efeito de erros numéricos quando esses sistemas são implementados com aritmética de ponto fixo.

## 7.10 Resumo

A transformada  $z$  representa os sinais de tempo discreto como uma superposição ponderada de exponenciais complexas. As exponenciais complexas são uma classe de sinais mais geral do que as senóides complexas, de forma que a transformada  $z$  pode representar uma classe mais ampla de sinais do que a DTFT, incluindo sinais que não são absolutamente somáveis. Dessa forma, podemos usar a transformada  $z$  para analisar sinais e sistemas que não são estáveis. A função de transferência de um sistema é a transformada  $z$  de sua resposta ao impulso. Ela fornece outra descrição das características de entrada e saída de um sistema LTI. A transformada  $z$  converte a convolução de sinais de tempo em multiplicação de transformadas  $z$ , de forma que a transformada  $z$  da saída de um sistema é o produto das transformadas  $z$  da entrada e da função de transferência do sistema.

Uma exponencial complexa é descrita por um número complexo. Conseqüentemente, a transformada  $z$  é uma função de uma variável complexa  $z$  representada num plano complexo. A DTFT é obtida avaliando-se a transformada  $z$  no círculo unitário,  $|z| = 1$ , fazendo-se  $z = e^{j\Omega}$ . As propriedades da transformada  $z$  são análogas às da DTFT. A RDC define os valores de  $z$  para os quais a transformada  $z$  converge. A RDC deve ser especificada a fim de que se tenha uma relação única entre o sinal de tempo e sua transformada  $z$ . As localizações relativas da RDC e dos pólos da transformada  $z$  determinam se o sinal de tempo correspondente é lateral direito, lateral esquerdo, ou ambos. As localizações dos pólos e zeros da transformada  $z$  fornecem uma outra representação das características de entrada e saída do sistema. Elas fornecem informações referentes à estabilidade, causalidade, invertibilidade e resposta em frequência do sistema.

A transformada  $z$  e a DTFT têm muitos recursos comuns. Entretanto, elas têm papéis distintos na análise de sinais e sistemas. A transformada  $z$  geralmente é usada para estudar características de sistema, como por exemplo, estabilidade e causalidade, e para desenvolver estruturas computacionais para implementar sistemas de tempo discreto. A transformada  $z$  também é usada para análises do transitórios e de estabilidade de sistemas de controle de dados amostrados, tópico este que visitaremos no Capítulo 9. A transformada  $z$  unilateral se aplica a sinais causais e constitui uma ferramenta conveniente para resolver problemas de sistema definidos por equações de diferenças que possuem condições iniciais não nulas. Nenhum deste problemas é tratado com a DTFT. Em vez disso, a DTFT normalmente é usada como uma ferramenta de representação de sinais e para estudar as características de estado estacionário de sistemas, como ilustramos nos capítulos 3 e 4. Nestes problemas, a DTFT é mais fácil de visualizar do que a transformada  $z$ , uma vez que ela é uma função da frequência de valor real  $\Omega$ , enquanto a transformada  $z$  é uma função de um número complexo  $z = re^{j\Omega}$ .

## LEITURA ADICIONAL

- O texto seguinte é dedicado inteiramente a transformadas  $z$ :  
» Vich, R., *Z Transform Theory and Applications* (D. Reidel Publishing, 1987)
- A transformada  $z$  também é discutida na maioria dos textos sobre processamento de sinais, incluindo:  
» Oppenheim, A. V. e R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, segunda edição (Prentice Hall, 1999)  
» Proakis, J. G. e D. G. Manolakis, *Introduction to Digital Signal Processing* (Macmillan, 1988)  
» Roberts, R. A. e C. T. Mullis, *Digital Signal Processing* (Addison-Wesley, 1987)
- Uma propriedade interessante dos sistemas de fase mínima é a relação única entre suas respostas em módulo e em fase. Se tivermos um componente, poderemos determinar de maneira única o outro. Esta e outras propriedades dos sistemas de fase mínima são discutidas em  
» Oppenheim, A. V. e R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Segunda edição (Prentice Hall, 1999).

## PROBLEMAS

- 7.1** Determine a transformada  $z$  e a RDC dos seguintes sinais de tempo. Esboce a RDC, os pólos e zeros no plano  $z$ .

- (a)  $x[n] = \delta[n]$
- (b)  $x[n] = \delta[n - k], \quad k > 0$
- (c)  $x[n] = \delta[n + k], \quad k > 0$
- (d)  $x[n] = u[n]$
- (e)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n (u[n] - u[n - 10])$
- (f)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$
- (g)  $x[n] = 2^n u[-n - 1]$
- (h)  $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$
- (i)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n - 2]$
- (j)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{3})^n u[-n - 1]$

- 7.2** Dadas as seguintes transformadas  $z$ , determine se existe a DTFT dos sinais de tempo correspondentes sem determinar o sinal de tempo. Identifique a DTFT nos casos em que ela existe.

- (a)  $X(z) = \frac{10}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$
- (b)  $X(z) = \frac{10}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$
- (c)  $X(z) = z^{-5}, \quad |z| > 0$
- (d)  $X(z) = z^5, \quad |z| < \infty$
- (e)  $X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + 3z^{-1})}, \quad |z| < \frac{1}{3}$
- (f)  $X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + 3z^{-1})}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 3$

- 7.3** As localizações dos pólos e zeros de  $X(z)$  são descritas no plano  $z$  das figuras seguintes. Em cada caso, identifique todas as RDCs válidas de  $X(z)$  e especifique as características do sinal de tempo correspondentes a cada RDC.

- (a) Figura P7.3(a)  
 (b) Figura P7.3(b)  
 (c) Figura P7.3(c)

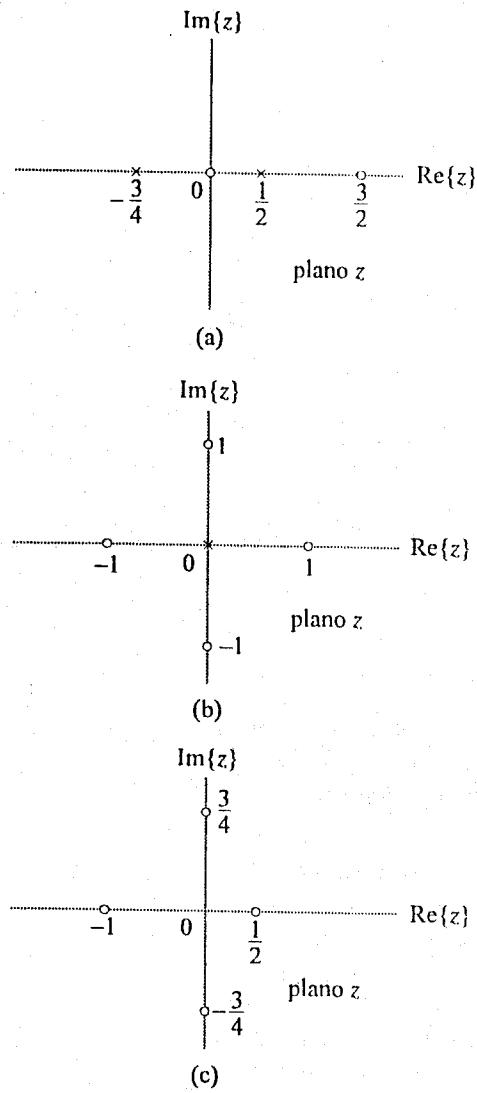


FIGURA P7.3

- 7.4** Prove as seguintes propriedades da transformada  $z$ :

- (a) Deslocamento no tempo  
 (b) Inversão de tempo  
 (c) Multiplicação por seqüência exponencial  
 (d) Diferenciação no domínio  $z$

- 7.5** Use as tabelas de transformadas  $z$  e as propriedades da transformada  $z$  para determinar as transformadas  $z$  dos seguintes sinais:

- (a)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] * (\frac{1}{3})^n u[n]$   
 (b)  $x[n] = n((\frac{1}{2})^n u[n] * (\frac{1}{3})^n u[n])$

(c)  $x[n] = u[-n]$

(d)  $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n - \frac{\pi}{4}\right)u[n-2]$

(e)  $x[n] = n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[-n]$

- 7.6** Dado o par de transformada  $z$   $x[n] \xrightarrow{z} z/(z^2 + 4)$  com RDC  $|z| < 2$ , use as propriedades da transformada  $z$  para determinar a transformada  $z$  dos seguintes sinais:

- (a)  $y[n] = x[n-4]$   
 (b)  $y[n] = 2^n x[n]$   
 (c)  $y[n] = x[-n]$   
 (d)  $y[n] = nx[n]$   
 (e)  $y[n] = x[n+1] + x[n-1]$   
 (f)  $y[n] = \underbrace{x[n] * x[n] * \dots * x[n]}_{m \text{ vezes}}$   
 (g)  $y[n] = (n-3)x[n-2]$

- 7.7** Dado o par de transformada  $z$   $3^n u[n] \xrightarrow{z} X(z)$  use as propriedades da transformada  $z$  para determinar os sinais de domínio de tempo correspondentes às seguintes transformadas  $z$ :

- (a)  $Y(z) = X(3z)$   
 (b)  $Y(z) = X(z^{-1})$   
 (c)  $Y(z) = \frac{d}{dz} X(z)$   
 (d)  $Y(z) = \frac{z+z^{-1}}{2} X(z)$   
 (e)  $Y(z) = X(z)X(9z)$

- 7.8** Use o método das frações parciais para obter os sinais de domínio de tempo correspondentes às seguintes transformadas  $z$ :

- (a)  $X(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{2}$   
 (b)  $X(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}, |z| < \frac{1}{4}$   
 (c)  $X(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}, \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$   
 (d)  $X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 + \frac{3}{2}z - 1}, \frac{1}{2} < |z| < 2$   
 (e)  $X(z) = \frac{12(11z^2 - 3z)}{12z^2 - 7z + 1}, |z| > \frac{1}{3}$   
 (f)  $X(z) = \frac{8z^2 + 4z}{4z^2 - 4z + 1}, |z| > \frac{1}{2}$

$$(g) X(z) = \frac{z^3 + z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}{z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z}, |z| < \frac{1}{2}$$

$$(h) X(z) = \frac{z^3 + z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}, |z| > 1$$

$$(i) X(z) = \frac{2z^4 - 2z^3 - 2z^2}{z^2 - 1}, |z| > 1$$

- 7.9 Determine os sinais de domínio de tempo correspondentes às seguintes transformadas z:

$$(a) X(z) = 1 + 2z^{-2} + 4z^{-4}, |z| > 0$$

$$(b) X(z) = \sum_{k=5}^{10} (1/k)z^{-k}, |z| > 0$$

$$(c) X(z) = (1+z^{-1})^4, |z| > 0$$

$$(d) X(z) = z^4 + 2z^2 + 3 + 2z^{-2} + z^{-4}, 0 < |z| < \infty$$

- 7.10 Determine a resposta ao impulso correspondente às seguintes funções de transferência se (i) o sistema for estável; (ii) o sistema for causal.

$$(a) H(z) = \frac{3z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$$

$$(b) H(z) = \frac{12z^2 + 24z}{12z^2 + 13z + 3}$$

$$(c) H(z) = \frac{4z}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}}$$

- 7.11 Use uma expansão em série de potências para determinar o sinal de domínio de tempo correspondente às seguintes transformadas z:

$$(a) X(z) = \frac{1}{1-z^{-2}}, |z| > 1$$

$$(b) X(z) = \frac{1}{1-z^{-2}}, |z| < 1$$

$$(c) X(z) = \cos(2z), |z| < \infty$$

$$(d) X(z) = \cos(z^{-2}), |z| > 0$$

$$(e) X(z) = \ln(1+z^{-1}), |z| > 0$$

- 7.12 Um sistema causal tem entrada  $x[n]$  e saída  $y[n]$ . Use a função de transferência para determinar a resposta ao impulso deste sistema.

$$(a) x[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-2], \\ y[n] = \delta[n] - \frac{3}{4}\delta[n-1]$$

$$(b) x[n] = (-\frac{1}{3})^n u[n], y[n] = 3(-1)^n u[n] + (\frac{1}{3})^n u[n]$$

$$(c) x[n] = (-3)^n u[n], y[n] = 4(2)^n u[n] - (\frac{1}{2})^n u[n]$$

- 7.13 Um sistema tem resposta ao impulso  $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ . Determine a entrada no sistema se a saída for dada por:

$$(a) y[n] = \delta[n-2]$$

$$(b) y[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (-\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$(c) y[n] = \frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

- 7.14 Determine (i) a função de transferência e (ii) a resposta ao impulso dos sistemas descritos pelas seguintes equações de diferenças:

$$(a) y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n-1]$$

$$(b) y[n] = x[n] - x[n-2] + x[n-4] - x[n-6]$$

$$(c) y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = -x[n] + 2x[n-1]$$

$$(d) y[n] - \frac{4}{5}y[n-1] - \frac{16}{25}y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$$

- 7.15 Determine (i) a função de transferência e (ii) uma representação por equação de diferenças para os sistemas que possuem as seguintes respostas ao impulso:

$$(a) h[n] = 3(\frac{1}{4})^n u[n-1]$$

$$(b) h[n] = (\frac{1}{3})^n u[n] + (\frac{1}{2})^{n-2} u[n-1]$$

$$(c) h[n] = 2(\frac{2}{3})^n u[n-1] + (\frac{1}{4})^n [\cos(\pi n/6) - 2 \operatorname{sen}(\pi n/6)] u[n]$$

$$(d) h[n] = \delta[n] - \delta[n-5]$$

- 7.16 Determine (i) a função de transferência e (ii) uma representação por equação de diferenças para os sistemas descritos pelas seguintes descrições por variáveis de estado. Plote as localizações dos pólos e zeros no plano z.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ c = [1 \quad -1], D = [1]$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ c = [2 \quad 1], D = [0]$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ c = [0 \quad 1], D = [0]$$

- 7.17 Determine se cada um dos sistemas descritos abaixo é (i) causal e estável e (ii) de fase mínima.

$$(a) H(z) = \frac{2z+1}{z^2 + z - \frac{5}{16}}$$

$$(b) H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{14}{8}z^{-1} + \frac{49}{64}z^{-2}}$$

$$(c) y[n] - \frac{6}{5}y[n-1] - \frac{16}{25}y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$$

$$(d) y[n] - 2y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ c = [1 \quad 1], D = [0]$$

- 7.18** Para cada sistema descrito abaixo, identifique a função de transferência do sistema inverso e determine se ele pode ser tanto causal como estável.

$$(a) H(z) = \frac{1-4z^{-1}+4z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$(b) H(z) = \frac{z^2 - \frac{49}{64}}{z^2 - 4}$$

$$(c) h[n] = 10(-\frac{1}{2})^n u[n] - 9(-\frac{1}{4})^n u[n]$$

$$(d) h[n] = 24(\frac{1}{2})^n u[n-1] - 30(\frac{1}{3})^n u[n-1]$$

$$(e) y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = 6x[n] - 7x[n-1] + 3x[n-2]$$

$$(f) y[n] - 2y[n-1] = x[n]$$

- 7.19** Use o método gráfico para esboçar a resposta em módulo dos sistemas que possuem as seguintes funções de transferência:

$$(a) H(z) = \frac{z-1}{z+0,9}$$

$$(b) H(z) = \frac{z^{-2}}{1+\frac{49}{64}z^{-2}}$$

$$(c) H(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}}{4}$$

- \*7.20** Considere um sistema que possui a função de transferência

$$H(z) = \frac{1-a^*z}{z-a}, \quad |a| < 1$$

Aqui, o pólo e o zero são um par conjugado recíproco.

- (a) Esboce uma plotagem de pólos e zeros para este sistema no plano z.
- (b) Use o método gráfico para mostrar que a resposta em módulo deste sistema é a unidade para todas as freqüências. Um sistema que possui esta característica é denominado *passa-tudo*.
- (c) Use o método gráfico para esboçar a resposta em fase deste sistema para  $a = \frac{1}{2}$ .
- (d) Use o resultado de (b) para provar que qualquer sistema que possui uma função de transferência da forma

$$H(z) = \prod_{k=1}^p \frac{1-a_k^*z}{z-a_k}, \quad |a_k| < 1$$

corresponde a um sistema passa-tudo estável e causal.

- (e) Um sistema passa-tudo estável e causal também pode ter fase mínima? Explique.

- 7.21** Desenhe implementações de diagramas de blocos dos sistemas seguintes como uma cascata de seções de segunda ordem com coeficientes de valor real:

$$(a) H(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/8}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/8}z^{-1})}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{2}e^{j\pi/3}z^{-1})(1+\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}e^{j7\pi/8}z^{-1})(1-\frac{3}{4}e^{-j7\pi/8}z^{-1})}$$

$$(b) H(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{3}{4}e^{j\pi/4}z^{-1})}$$

$$\frac{(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})}$$

- 7.22** Desenhe implementações com diagramas de blocos dos sistemas seguintes como uma combinação paralela de seções de segunda ordem com coeficientes de valor real:

$$(a) h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{-j}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$(b) h[n] = 2\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}e^{j\pi/3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}e^{-j\pi/3}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n]$$

- 7.23** Determine a função de transferência do sistema descrito na Figura P7.23.

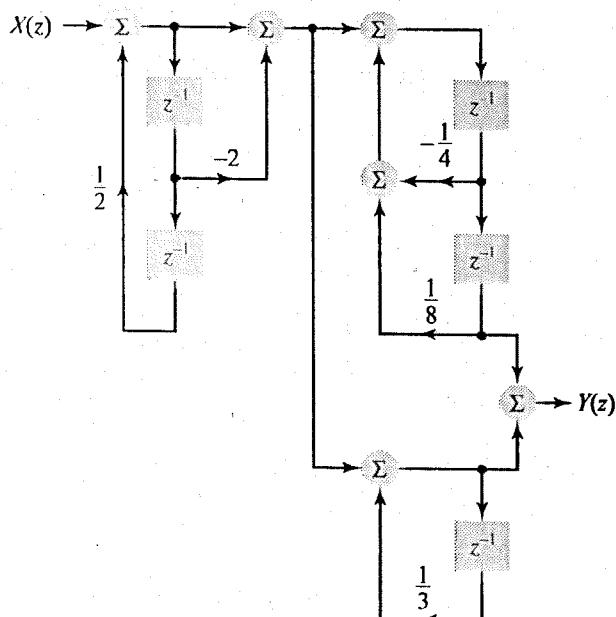


FIGURA P7.23

- \*7.24** Uma estrutura muito útil para implementar sistemas não recursivos é a chamada estrutura reticulada. O reticulado é construído como uma cascata de seções de duas entradas e duas saídas, da forma descrita na Figura P7.24(a). Uma estrutura reticulada de  $M$ -ésima ordem é descrita na Figura P7.24(b).

(a) Encontre a função de transferência de um reticulado de segunda ordem ( $M = 2$ ) que tem  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $c_2 = -\frac{1}{4}$ .

(b) Podemos determinar a relação entre a função de transferência e a estrutura reticulada examinando o efeito de adicionarmos uma seção na função de transferência, como descreve a Figura P7.24(c). Aqui, definimos  $\tilde{H}_i(z)$  como a função de transferência entre a entrada e a saída do ramo inferior na  $i$ -ésima seção e  $\tilde{H}_i(z)$  como a função de transferência entre a entrada e a saída do ramo superior na  $i$ -ésima seção. Escreva a relação entre as funções de transferência para os  $(i-1)$ -ésimo e  $i$ -ésimo estágios como

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_i(z) \\ H_i(z) \end{bmatrix} = T(z) \begin{bmatrix} \tilde{H}_{i-1}(z) \\ H_{i-1}(z) \end{bmatrix}$$

em que  $T(z)$  é uma matriz 2 por 2. Expresse  $T(z)$  em termos de  $c_i$  e  $z^{-1}$ .

(c) Use indução para provar que  $\tilde{H}_i(z) = z^{-i} H_i(z^{-1})$ .

(d) Mostre que o coeficiente de  $z^{-1}$  em  $H_i(z)$  é dado por  $c_i$ .

(e) Combinando os resultados de (b)-(d), podemos derivar um algoritmo para encontrar o  $c_i$  exigido pela estrutura reticulada a fim de implementarmos uma função de transferência  $H(z)$  não recursiva de ordem arbitrária  $M$ . Inicie com  $i = M$  a fim de que  $H_M(z) = H(z)$ . O resultado de (d) implica que  $c_M$  é o coeficiente de  $z^{-M}$  em  $H(z)$ . Diminuindo  $i$ ,

continue este algoritmo para encontrar os  $c_i$  restantes. Sugestão: Use o resultado de (b) para encontrar uma matriz 2 por 2  $A(z)$  tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{i-1}(z) \\ H_{i-1}(z) \end{bmatrix} = A(z) \begin{bmatrix} \tilde{H}_i(z) \\ H_i(z) \end{bmatrix}$$

\*7.25 Os filtros causais sempre têm uma resposta em fase não nula. Uma técnica para obter resposta em fase zero em um filtro causal envolve filtrar o sinal duas vezes, uma no sentido direto e a segunda vez no sentido inverso. Podemos descrever esta operação em termos da entrada  $x[n]$  e da resposta  $h[n]$  ao impulso do filtro da seguinte maneira. Admitamos que  $y_1[n] = x[n] * h[n]$  represente a filtragem de um sinal no sentido direto. Filtre agora  $y_1[n]$  no sentido inverso para obter  $y_2[n] = y_1[-n] * h[n]$ .

A saída é dada então invertendo-se  $y_2[n]$  para se obter  $y[n] = y_2[-n]$ .

- Mostre que este conjunto de operações é representado de maneira equivalente por um filtro com resposta ao impulso  $h_o[n]$  como  $y[n] = x[n] * h_o[n]$  e expresse  $h_o[n]$  em termos de  $h[n]$ .
- Mostre que  $h_o[n]$  é um sinal par e que a resposta em fase de qualquer sistema que possua uma resposta par ao impulso é zero.
- Mostre, para cada pólo ou zero em  $z = \beta$  em  $h[n]$ , que  $h_o[n]$  tem um par de pólos ou zeros em  $z = \beta$  e  $z = 1/\beta$ .

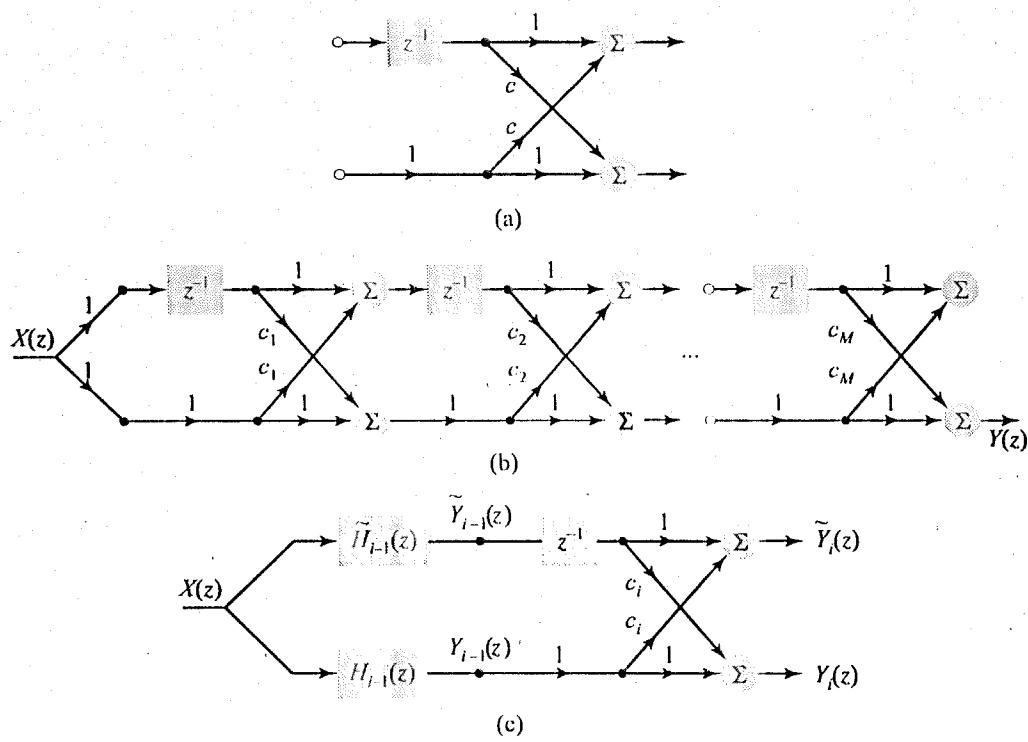


FIGURA P7.24

**7.26** Admitamos que  $x[n] = \delta[n - 2] + \delta[n + 2]$ .

- Determine a transformada z unilateral de  $z[n]$ .
- Use a propriedade de deslocamento no tempo da transformada z unilateral e o resultado de (a) para determinar a transformada z unilateral dos seguintes sinais:
  - $w[n] = x[n - 1]$
  - $w[n] = x[n - 3]$

**7.27** Use a transformada z unilateral para determinar a resposta forçada, a resposta natural e a resposta completa dos sistemas descritos pelas seguintes equações de diferenças com as entradas e condições iniciais dadas:

- $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 3,$   
 $x[n] = 2(-\frac{1}{2})^n u[n]$
- $y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n-1], \quad y[-1] = 0,$   
 $y[-2] = 1, \quad x[n] = 3u[n]$
- $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1],$   
 $y[-1] = 1, \quad y[-2] = -1, \quad x[n] = 3^n u[n]$
- $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n],$   
 $y[-1] = 1, \quad y[-2] = -1, \quad x[n] = u[n]$

**7.28** Use a transformada z unilateral para determinar a resposta ao impulso dos sistemas descritos pelas seguintes equações de diferenças, fazendo  $x[n] = \delta[n]$ .  
*Sugestão:* A resposta ao impulso é definida em termos de um sistema que está inicialmente em repouso.

- $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n]$
- $y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1]$
- $y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$

**7.29** O valor atual de um empréstimo com juros compostos mensalmente pode ser descrito em termos da equação de diferenças de primeira ordem

$$y[n] = \left(1 + \frac{r}{12}\right)y[n-1] - x[n]$$

em que  $r$  é a taxa de juros anual expressa como um número decimal,  $x[n]$  é o pagamento creditado no final do  $n$ -ésimo mês, e  $y[n]$  é o saldo do empréstimo no início do  $(n+1)$ -ésimo mês. O saldo inicial do empréstimo é a condição inicial  $y[-1]$ . Se forem feitos pagamentos uniformes de valor  $c$  durante  $L$  meses consecutivos, então  $x[n] = c\{u[n] - u[n-L]\}$ .

- O sistema representado por esta equação de diferenças é estável? Por que?
- Encontre a resposta natural do sistema. O que acontece quando  $n \rightarrow \infty$ ?

**7.26** Use a transformada z unilateral para mostrar que

$$Y(z) = \frac{y[-1](1+r/12) - c\sum_{n=0}^{L-1} z^{-n}}{1-(1+r/12)z^{-1}}$$

*Sugestão:* Use divisão para mostrar que

$$\frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}} = \sum_{n=0}^{L-1} z^{-n}$$

- Mostre que  $(1+r/12)$  deve ser um zero de  $Y(z)$  se o empréstimo necessitar ter saldo zero depois de  $L$  pagamentos.
- Encontre o pagamento mensal  $c$  como uma função do valor de empréstimo inicial  $y[-1]$  e da taxa de juros  $r$  supondo que o empréstimo tenha saldo zero depois de  $L$  pagamentos.

### ► Experiências no Computador

**7.30** Use o comando `zplane` do MATLAB para obter uma plotagem dos pólos e zeros para os seguintes sistemas:

$$(a) H(z) = \frac{1+z^{-2}}{2+z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}}$$

$$(b) H(z) = \frac{1+z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}}{1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

**7.31** Use o comando `residuez` do MATLAB para obter as expansões em frações parciais necessárias para resolver o problema 7.8(d)-(i).

**7.32** Use o comando `tf2ss` do MATLAB para encontrar descrições por variáveis de estado para os sistemas do Problema 7.14.

**7.33** Use o comando `ss2tf` do MATLAB para encontrar as funções de transferência do Problema 7.16.

**7.34** Use o comando `zplane` do MATLAB para resolver o Problema 7.17.

**7.35** Use o comando `freqz` do MATLAB para avaliar e plotar a resposta em módulo e em fase dos sistemas dados no Exemplo 7.17.

**7.36** Use o comando `freqz` do MATLAB para avaliar e plotar a resposta em módulo e em fase dos sistemas dados no Exemplo 7.19.

**7.37** Use os comandos `filter` e `filtic` do MATLAB para plotar o saldo do empréstimo no início de cada mês  $n = 0, 1, \dots, L+1$  para o Problema 7.29. Suponha que  $y[-1] = R\$ 10.000,00$ ,  $L = 60$ ,  $r = 0,12$  e que o pagamento mensal seja escolhido de tal forma que o saldo do empréstimo chegue a zero depois de 60 pagamentos.

- 7.38** Use o comando `zp2sos` do MATLAB para determinar uma conexão em cascata de seções de segunda ordem para implementar os sistemas do Problema 7.21.

- 7.39** Um sistema de tempo discreto causal tem a função de transferência dada por

$$H(z) = \left[ \frac{0,0976(z-1)^2}{(z-0,357-j0,589)(z-0,357+j0,589)} \right] \cdot \left[ \frac{(z+1)^2}{(z-0,769-j0,334)(z-0,769+j0,334)} \right]$$

- (a) Use as localizações dos pólos e zeros para esboçar a resposta em módulo.  
 (b) Use os comandos `zp2tf` e `freqz` do MATLAB para avaliar e plotar a resposta em módulo e em fase.

- (c) Use o comando `zp2sos` do MATLAB para obter uma representação para este filtro como uma cascata de duas seções de segunda ordem com coeficientes de valor real.  
 (d) Use o comando `freqz` do MATLAB para avaliar e plotar a resposta em módulo de cada seção em (c).  
 (e) Use o comando `filter` do MATLAB para determinar a resposta ao impulso deste sistema, obtendo a saída para uma entrada  $x[n] = \delta[n]$ .  
 (f) Use o comando `filter` do MATLAB para determinar a saída do sistema para uma entrada que tem a forma

$$x[n] = \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \cos(\pi n) \right) u[n]$$

Plote os primeiros 250 pontos da entrada e saída.



# 8

## APLICAÇÃO A FILTROS E EQUALIZADORES



### 8.1 *Introdução*

Nos capítulos 4 e 5 fizemos uso de *filtros* como blocos funcionais para suprimir sinais espúrios, explorando o fato de que o conteúdo de freqüência destes sinais é separado do conteúdo de freqüência dos sinais desejados. No capítulo 5, fizemos uso de *equalizadores* como blocos funcionais para compensar a distorção de sinal surgida quando um sinal é transmitido através de um sistema físico como, por exemplo, um canal telefônico. O tratamento tanto dos filtros como dos equalizadores apresentado nesses capítulos foi do ponto de vista teórico em relação a sistemas. Agora que temos a transformada de Laplace e a transformada  $z$  à nossa disposição, estamos preparados para descrever procedimentos para *projeto* destes dois importantes blocos funcionais.

Iniciamos a discussão considerando a questão da transmissão sem distorções, a qual é fundamental para o estudo de filtros e equalizadores lineares. Isto leva naturalmente à discussão a respeito de uma estrutura idealizada para a filtragem, a qual, por sua vez, constitui a base para o projeto de filtros práticos. O projeto de um filtro pode ser realizado usando-se conceitos de tempo contínuo, em cujo caso, falamos de *filtros analógicos*. Alternativamente, o projeto do filtro pode ser realizado usando-se conceitos de tempo discreto, em cujo caso falamos de *filtros digitais*. Os filtros analógicos e digitais têm suas próprias vantagens e desvantagens. Ambos os tipos de filtro serão discutidos neste capítulo. O tópico da equalização será coberto próximo ao final deste capítulo.

### 8.2 *Condições para Transmissão sem Distorções*

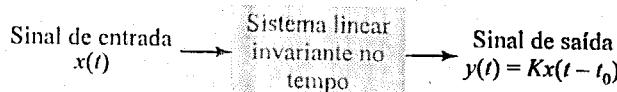
Considere um sistema LTI de tempo contínuo com resposta ao impulso  $h(t)$ . De maneira equivalente, o sistema pode ser descrito em termos de sua resposta em freqüência  $H(j\omega)$ , definida como a transformada de Fourier de  $h(t)$ . Admitamos que um sinal  $x(t)$  com transformada de Fourier  $X(j\omega)$  seja aplicado à entrada do sistema. Admitamos que o sinal  $y(t)$  com transformada de Fourier  $Y(j\omega)$  denote a saída do sistema. Desejamos conhecer as condições para *transmissão sem distorções* através do sistema. Por “transmissão sem distorções” queremos dizer que o sinal de saída é uma réplica exata do sinal de entrada, com exceção de duas pequenas modificações:

- ▶ Uma possível mudança de escala na amplitude
- ▶ Um retardo de tempo constante

Baseando-se nisto, dizemos que um sinal  $x(t)$  é transmitido através do sistema sem sofrer distorções se o sinal de saída  $y(t)$  for definido por (veja a Figura 8.1)

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (8.1)$$

em que a constante  $K$  é responsável por uma mudança de amplitude e a constante  $t_0$  é responsável por um retardo na transmissão.



**FIGURA 8.1** Condição no domínio de tempo para transmissão sem distorções de um sinal através de um sistema linear invariante no tempo.

Aplicando a transformada de Fourier à equação (8.1) e usando a propriedade de deslocamento no tempo da transformada de Fourier, obtemos

$$Y(j\omega) = KX(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (8.2)$$

A resposta em freqüência de um sistema sem distorções é, por conseguinte,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \\ &= Ke^{-j\omega t_0} \end{aligned} \quad (8.3)$$

De maneira correspondente, a resposta ao impulso do sistema é dada por

$$h(t) = K\delta(t - t_0) \quad (8.4)$$

As equações (8.4) e (8.3) descrevem as condições no domínio de tempo e no domínio de freqüência, respectivamente, as quais o sistema LTI precisa satisfazer para obter-se uma transmissão sem distorções. Do ponto de vista prático, entretanto, a equação (8.3) é a mais reveladora das duas, conforme discutiremos em seguida.

A equação (8.3) indica que para conseguirmos a transmissão sem distorções de um sinal com algum conteúdo finito de freqüências através de um sistema LTI de tempo contínuo, a resposta em freqüência do sistema deve satisfazer duas condições:

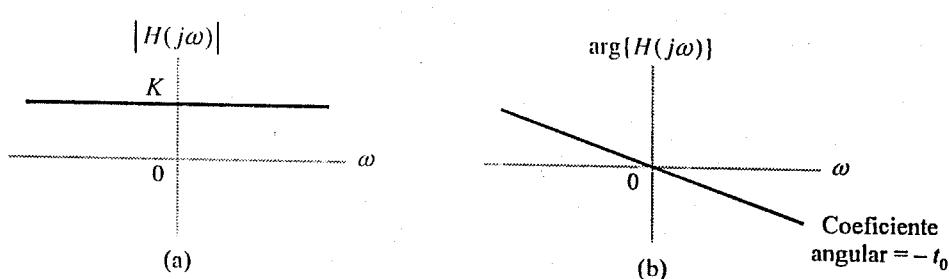
1. A resposta em módulo  $|H(j\omega)|$  é constante para todas as freqüências de interesse, como é mostrado por

$$|H(j\omega)| = K \quad (8.5)$$

2. Para as mesmas freqüências de interesse, a resposta em fase  $\arg\{H(j\omega)\}$  é linear em freqüência, com coeficiente angular  $-t_0$  e coeficiente linear zero, como é mostrado por

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_0 \quad (8.6)$$

Estas duas condições são ilustradas nas Figuras 8.2(a) e (b), respectivamente.



**FIGURA 8.2** Resposta em freqüência para transmissão sem distorções através de um sistema linear invariante no tempo. (a) Resposta em módulo. (b) Resposta em fase.

Considere em seguida o caso de um sistema LTI de tempo discreto que possui a função de transferência  $H(e^{j\Omega})$ . Segundo um procedimento similar ao que descrevemos acima, podemos mostrar que as condições para uma transmissão ideal através desses sistemas são as seguintes:

1. A resposta em módulo  $|H(e^{j\Omega})|$  é constante para todas as freqüências de interesse, como é mostrado por

$$|H(e^{j\Omega})| = K \quad (8.7)$$

em que  $K$  é uma constante.

2. Para as mesmas freqüências de interesse, a resposta em fase  $\arg\{H(e^{j\Omega})\}$  é linear em freqüência, como é mostrado por

$$\arg\{H(e^{j\Omega})\} = -\Omega n_0 \quad (8.8)$$

em que  $n_0$  é responsável por um retardo inteiro na transmissão através do sistema.

► **EXERCÍCIO 8.1** Usando a resposta ao impulso da equação (8.4) na integral de convolução, mostre que a relação de entrada e saída de um sistema sem distorções está de acordo com a definição dada na equação (8.1). ◀

**EXEMPLO 8.1** Suponhamos que a condição da equação (8.6) sobre a resposta em fase  $\arg\{H(j\omega)\}$  para resposta sem distorções seja modificada acrescentando uma constante igual a um múltiplo inteiro positivo ou negativo de  $\pi$  radianos (isto é,  $180^\circ$ ). Qual é o efeito desta modificação?

*Solução:* Iniciamos, reescrevendo a equação (8.6) como

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_0 + k\pi$$

em que  $k$  é um número inteiro. De maneira correspondente, a resposta em freqüência do sistema dado na equação (8.3) assume a nova forma

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0 + jk\pi}$$

Mas

$$e^{+jk\pi} = \begin{cases} -1, & k = \text{ímpar} \\ +1, & k = \text{par} \end{cases}$$

Segue-se, portanto, que

$$H(j\omega) = \pm Ke^{-j\omega t_0}$$

a qual tem exatamente a mesma forma que a descrita na equação (8.3), exceto quanto a uma possível mudança no sinal algébrico do fator de escala  $K$ . Concluímos, portanto, que as condições para transmissão sem distorções através de um sistema linear invariante no tempo permanecem inalteradas quando a resposta em fase do sistema é modificada por uma quantidade constante igual a um múltiplo inteiro positivo ou negativo de  $180^\circ$ .

### 8.3 Filtros Passa-Baixas Ideais

Tipicamente, o conteúdo espectral de um sinal portador de informações ocupa uma faixa de freqüência com extensão finita. Por exemplo, o conteúdo espectral de um sinal de fala essencial para comunicações telefônicas situa-se na faixa de freqüência de 300 a 3100 Hz.

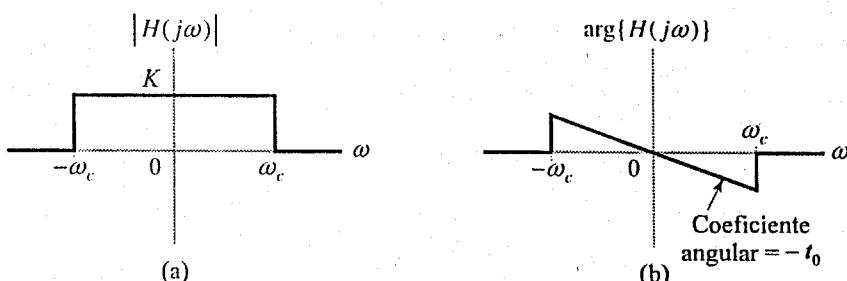
Para extrair o conteúdo de informação fundamental de um sinal de fala para esse tipo de aplicação, necessitamos de um sistema seletivo de freqüências, ou seja, um filtro que limite o espectro do sinal à faixa desejada de freqüências. De fato, os filtros são fundamentais para o estudo de sinais e sistemas em termos de que todo sistema usado para processar sinais contém um filtro de algum tipo em sua composição.

Conforme observamos no Capítulo 4, a resposta em freqüência de um filtro é caracterizada por uma faixa de passagem e uma faixa de rejeição, as quais são separadas por uma faixa de transição ou faixa de guarda. Sinais com freqüências dentro da faixa de passagem são transmitidos com pouca ou nenhuma distorção, ao passo que aqueles que têm freqüências dentro da faixa de rejeição são efetivamente rejeitados. Deste modo, o filtro pode ser do tipo passa-baixas, passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa, dependendo de se ele transmite freqüências baixas, elevadas, intermediárias, ou todas menos as intermediárias, respectivamente.

Considere então um filtro passa-baixas *ideal*, o qual transmite todas as freqüências dentro da faixa de passagem sem qualquer distorção e rejeita todas as freqüências dentro da faixa de rejeição. Presume-se que a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição ocupe uma largura zero. No que diz respeito à filtragem passa-baixas, o interesse principal está na transmissão fiel de um sinal portador de informação em que o conteúdo espectral está confinado a alguma faixa de freqüência definida por  $0 \leq \omega \leq \omega_c$ . Conseqüentemente, nesse tipo de aplicação, as condições para transmissão sem distorções somente precisam ser satisfeitas dentro da faixa de passagem do filtro, conforme ilustra a Figura 8.3. Especificamente, a resposta em freqüência de um filtro passa-baixas ideal com freqüência de corte  $\omega_c$  é definido por

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (8.9)$$

em que, por conveniência de apresentação, definimos a constante  $K = 1$ . Para um retardo finito  $t_0$ , o filtro passa-baixas ideal é não causal, o que é confirmado examinando-se a resposta ao impulso  $h(t)$  do filtro.



**FIGURA 8.3** Resposta em freqüência de um filtro passa-baixas ideal. (a) Resposta em módulo. (b) Resposta em fase.

Para avaliar  $h(t)$ , tomamos a transformada de Fourier inversa da equação (8.9), obtendo

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \quad (8.10)$$

A partir da definição da função sinc dada na equação (3.21), temos

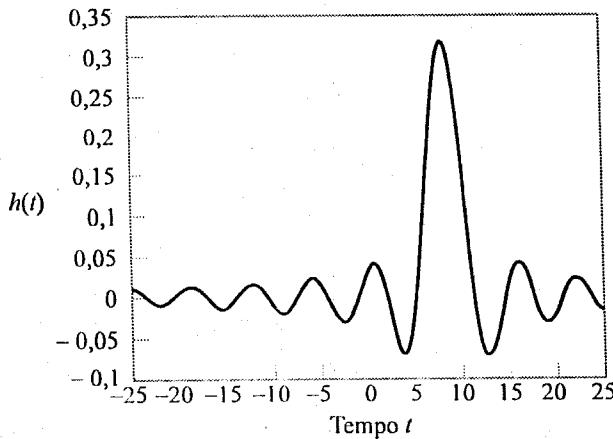
$$\begin{aligned} \text{sinc}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Conseqüentemente, podemos reescrever a equação (8.10) na forma compacta

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t-t_0)\right) \quad (8.12)$$

Esta resposta ao impulso tem uma amplitude de pico de  $\omega_c/\pi$  centralizada no instante  $t_0$ , como é mostrado na Figura 8.4 para  $\omega_c = 1$  e  $t_0 = 8$ . A duração do lóbulo principal da resposta ao impulso é  $2\pi/\omega_c$ , e o tempo de subida a partir do zero no início do lóbulo principal até o pico é  $\pi/\omega_c$ . Vemos na Figura 8.4 que, para qualquer valor finito de  $t_0$ , há alguma resposta do filtro antes do instante  $t = 0$ , no qual o impulso unitário é aplicado à entrada do filtro. Isto confirma que o filtro passa-baixas ideal é não causal.

Apesar da natureza não causal do filtro passa-baixas ideal, este é um conceito teórico útil. Em especial, ele constitui a estrutura ideal para o projeto de filtros práticos (isto é, causais).



**FIGURA 8.4** Forma da função sinc deslocada no tempo, representando a resposta ao impulso de um filtro passa-baixas ideal (mas não causal).

### ■ TRANSMISSÃO DE UM PULSO RETANGULAR ATRAVÉS DE UM FILTRO PASSA-BAIXAS IDEAL

Um pulso retangular desempenha um papel fundamental nas comunicações digitais. Por exemplo, para a representação elétrica de uma seqüência binária através de um canal, podemos usar o seguinte:

- » Transmitir um pulso retangular, para o símbolo 1.
- » Desligar o pulso, para o símbolo 0.

Considere então um pulso retangular  $x(t)$  de amplitude unitária e duração  $T$ , escrito como

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (8.13)$$

Este pulso é aplicado a um canal de comunicação modelado como um filtro passa-baixas ideal cuja resposta em freqüência é definida pela equação (8.9). A questão que nos interessa é determinar a resposta do canal à entrada do pulso.

A resposta ao impulso do filtro que representa o canal é dada pela equação (8.12), reescrita aqui na forma expandida

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t-t_0))}{\omega_c(t-t_0)} \quad (8.14)$$

Podemos expressar a resposta do filtro usando a integral de convolução da seguinte maneira

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (8.15)$$

Substituindo às equações (8.13) e (8.14) em (8.15), obtemos

$$y(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin(\omega_c(t-t_0-\tau))}{\omega_c(t-t_0-\tau)} d\tau$$

Admitamos que

$$\lambda = \omega_c(t-t_0-\tau)$$

Então, mudando a variável de integração de  $\tau$  para  $\lambda$ , podemos reescrever  $y(t)$  como

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^a \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda - \int_0^b \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \right] \end{aligned} \quad (8.16)$$

em que os limites de integração,  $a$  e  $b$ , são definidos por

$$a = \omega_c \left( t - t_0 + \frac{T}{2} \right) \quad (8.17)$$

e

$$b = \omega_c \left( t - t_0 - \frac{T}{2} \right) \quad (8.18)$$

Para reescrever a equação (8.16) numa forma compacta, introduzimos a *integral seno*, definida por

$$\text{Se}(u) = \int_0^u \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \quad (8.19)$$

A integral seno não pode ser avaliada de forma fechada em termos de funções elementares, mas pode ser integrada usando-se uma série de potências. Sua plotagem é mostrada na Figura 8.5. Nesta figura, podemos ver que:

- » A integral seno  $\text{Se}(u)$  tem simetria ímpar em torno da origem  $u = 0$ .
- » Ela tem máximos e mínimos em múltiplos de  $\pi$ .
- » Ela se aproxima do valor limite de  $\pm\pi/2$  para valores grandes de  $|u|$ .

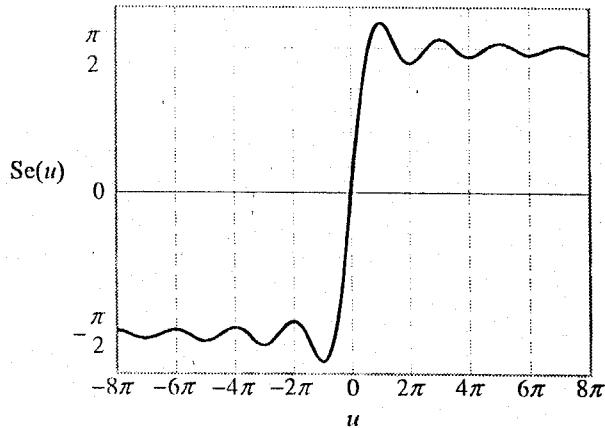


FIGURA 8.5 Integral seno.

Usando a definição da integral seno na equação (8.19), podemos reescrever a resposta  $y(t)$  definida na equação (8.16) na forma compacta:

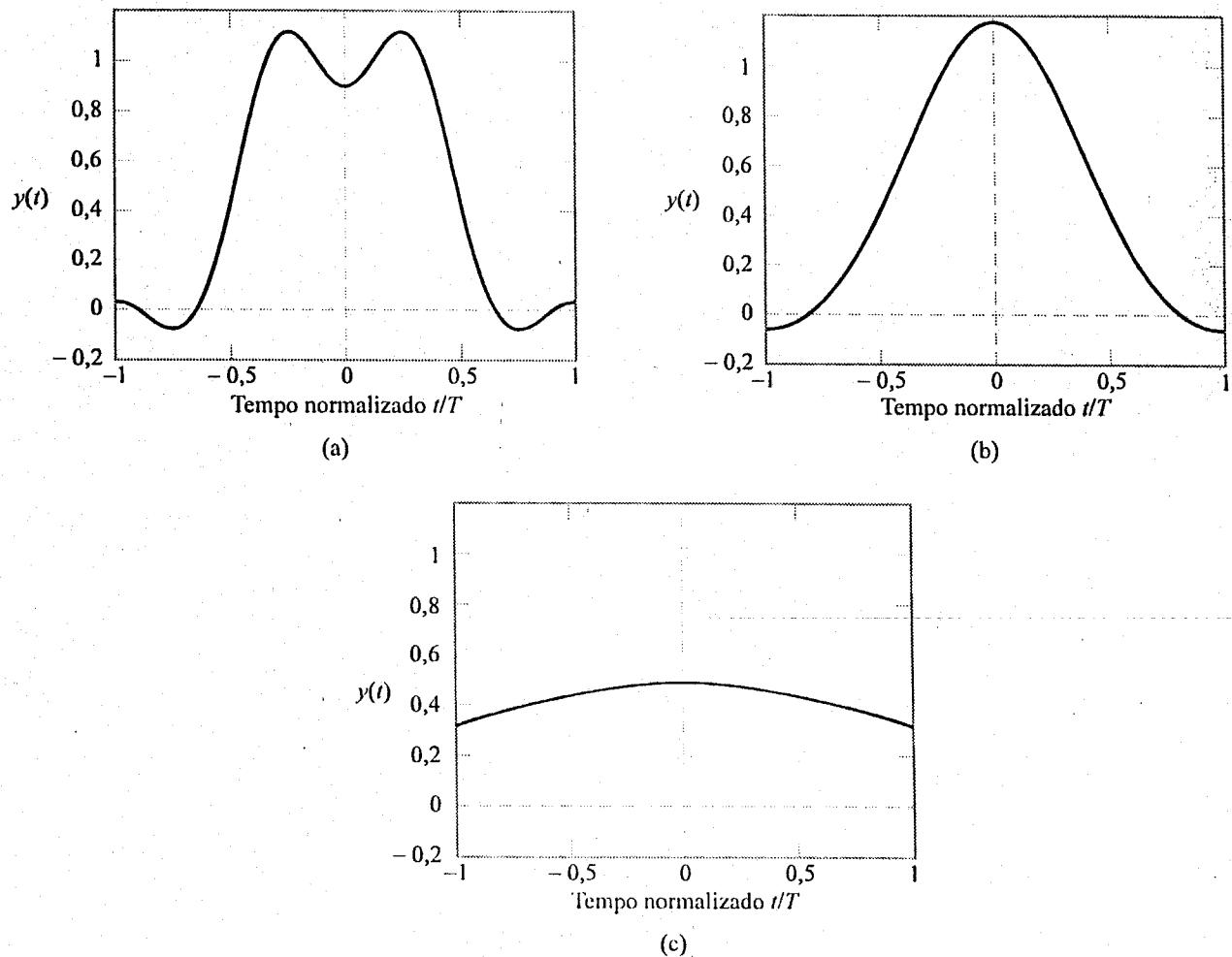
$$y(t) = \frac{1}{\pi} [\text{Se}(a) - \text{Se}(b)] \quad (8.20)$$

em que  $a$  e  $b$  são, eles próprios, definidos nas equações (8.17) e (8.18), respectivamente.

A Figura 8.6 descreve a resposta  $y(t)$  para três valores diferentes de freqüência de corte  $\omega_c$ , supondo que o retardado de transmissão  $t_0$  seja nulo. Em cada caso, vemos que a resposta  $y(t)$  é simétrica em torno de  $t = 0$ .

Observamos ainda que a forma da resposta  $y(t)$  é notavelmente dependente da freqüência de corte. Em especial, observamos os seguintes pontos:

1. Quando  $\omega_c$  é maior do que  $2\pi/T$ , como na Figura 8.6(a), a resposta  $y(t)$  tem aproximadamente a mesma duração que o pulso retangular  $x(t)$  aplicado à entrada do filtro. Entretanto, ele difere de  $x(t)$  em dois importantes aspectos:
  - » Diferentemente da entrada  $x(t)$ , a resposta  $y(t)$  tem tempos de subida e descida não nulos que são inversamente proporcionais à freqüência de corte  $\omega_c$ .
  - » A resposta  $y(t)$  exibe oscilações (*ringing*) tanto na borda anterior como na borda posterior.
2. Quando  $\omega_c = 2\pi/T$ , como na Figura 8.6(b), a resposta  $y(t)$  é reconhecível como um pulso. Entretanto, os tempos de subida e descida de  $y(t)$  agora são significativos em comparação com a duração do pulso retangular de entrada  $x(t)$ .
3. Quando a freqüência de corte  $\omega_c$  é menor do que  $2\pi/T$ , como na Figura 8.6(c), a resposta  $y(t)$  é uma versão grosseiramente distorcida da entrada  $x(t)$ .



**FIGURA 8.6** Resposta ao pulso de um filtro passa-baixas ideal para uma duração de pulso  $T = 1$ s e freqüência variável de corte de filtro  $\omega_c$ : (a)  $\omega_c = 4\pi$  rad/s; (b)  $\omega_c = 2\pi$  rad/s; e (c)  $\omega_c = 0,4\pi$  rad/s.

Estas observações apontam para a relação inversa que existe entre os dois parâmetros: (1) a duração de um pulso retangular que age como o sinal de entrada para um filtro passa-baixas ideal, e (2) a freqüência de corte do filtro. Esta relação inversa é uma manifestação da constância do produto tempo - largura de faixa discutido no capítulo 3. De uma perspectiva prática, a relação inversa entre a duração de pulso e a freqüência de corte de um filtro tem uma interpretação simples, como é ilustrado aqui, no contexto das comunicações digitais. Especificamente, se a exigência for simplesmente a de reconhecer que a resposta de um canal passa-baixas se deve à transmissão do símbolo 1 representado por um pulso retangular de duração  $T$ , é adequado definir a freqüência de corte do canal em  $\omega_c = 2\pi/T$ .

**EXEMPLO 8.2** A resposta  $y(t)$  mostrada na Figura 8.6(a), correspondente à freqüência de corte  $\omega_c = 4\pi/T$ , exibe uma sobrerespota de aproximadamente 9%. Investigue o que acontece com esta sobrerespota quando é permitido que a freqüência de corte  $\omega_c$  se aproxime do infinito.

**Solução:** Nas Figuras 8.7(a) e (b) mostramos a resposta ao pulso do filtro passa-baixas ideal correspondente a freqüência de corte  $\omega_c = 10\pi/T$  e  $\omega_c = 40\pi/T$ . Estes dois grafos ilustram que a sobrerespota permanece aproximadamente igual a 9% de uma maneira que é praticamente independente de quão grande é a freqüência de corte  $\omega_c$ . Este resultado é, de fato, uma outra manifestação do *fenômeno de Gibbs* que foi discutido no Capítulo 3.

Para oferecer uma prova analítica deste resultado, observamos na Figura 8.5 que a integral seno  $Se(u)$  definida na equação (8.19) oscila numa freqüência de  $1/2\pi$ . A implicação desta observação é que a resposta do filtro  $y(t)$  oscilará numa freqüência igual a  $\omega_c/2\pi$ , em que  $\omega_c$  é a freqüência de corte do filtro. O valor máximo de  $Se(u)$  ocorre em  $u_{\max} = \pi$  e é igual a 1,179, o qual podemos escrever como  $(1,179)(\pi/2)$ . A resposta do filtro  $y(t)$  tem, dessa forma, seu primeiro máximo em

$$t_{\max} = \frac{T}{2} - \frac{\pi}{\omega_c} \quad (8.21)$$

De maneira correspondente, os limites de integração  $a$  e  $b$ , definidos nas equações (8.17) e (8.18) assumem os seguintes valores (supondo-se  $t_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \omega_c \left( t_{\max} + \frac{T}{2} \right) \\ &= \omega_c \left( \frac{T}{2} - \frac{\pi}{\omega_c} + \frac{T}{2} \right) \\ &= \omega_c T - \pi \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} b_{\max} &= \omega_c \left( t_{\max} - \frac{T}{2} \right) \\ &= \omega_c \left( \frac{T}{2} - \frac{\pi}{\omega_c} - \frac{T}{2} \right) \\ &= -\pi \end{aligned} \quad (8.23)$$

Substituir as equações (8.22) e (8.23) em (8.20) produzirá

$$\begin{aligned} y(t_{\max}) &= \frac{1}{\pi} [Se(a_{\max}) - Se(b_{\max})] \\ &= \frac{1}{\pi} [Se(\omega_c T - \pi) - Se(-\pi)] \\ &= \frac{1}{\pi} [Se(\omega_c T - \pi) + Se(\pi)] \end{aligned} \quad (8.24)$$

Admitamos que

$$Se(\omega_c T - \pi) = \frac{\pi}{2}(1 + \Delta) \quad (8.25)$$

em que  $\Delta$  é o valor absoluto do desvio no valor de  $Se(\omega_c T - \pi)$ , expresso como uma fração do valor final  $+\pi/2$ . Dessa forma, reconhecendo que

$$Se(\pi) = (1,179) \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

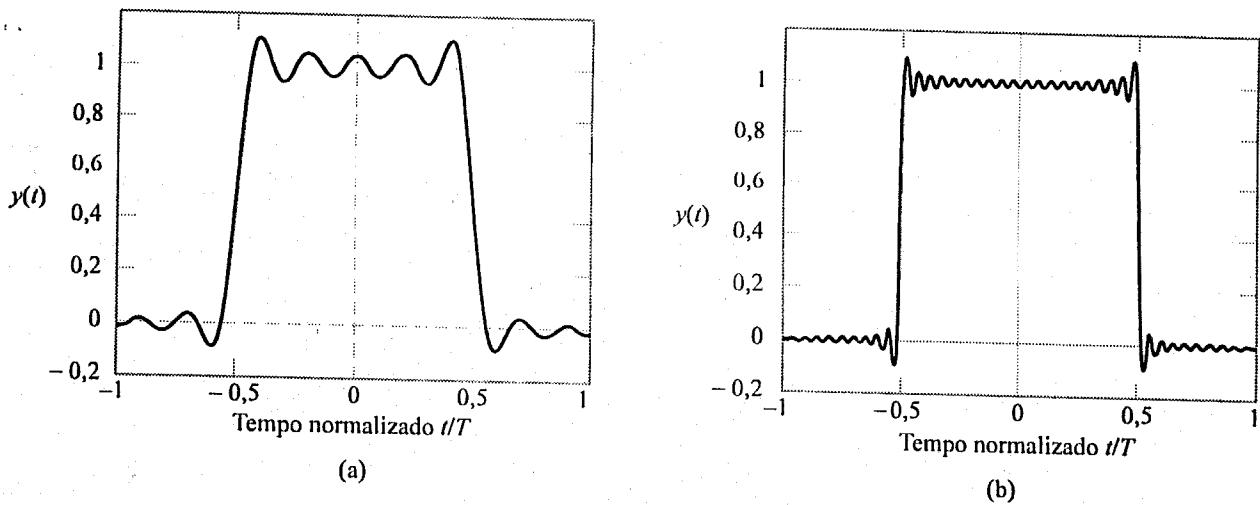
podemos reescrever a equação (8.24) como

$$\begin{aligned} y(t_{\max}) &= \frac{1}{2}(1,179 + 1 + \Delta) \\ &= 1,09 + \frac{1}{2}\Delta \end{aligned} \quad (8.26)$$

Vendo  $\omega_c$  como uma medida da largura de faixa do filtro, notamos que para um produto de tempo - largura de faixa  $\omega_c T \gg 1$  o desvio fracionário  $\Delta$  tem um valor muito pequeno. Dessa forma, podemos escrever a aproximação

$$y(t_{\max}) \cong 1,09 \quad \text{para } \omega_c \gg 2\pi/T \quad (8.27)$$

a qual mostra que a sobrerespota na resposta do filtro é de aproximadamente 9%, resultado este que é praticamente independente da freqüência de corte  $\omega_c$ .



**FIGURA 8.7** O fenômeno de Gibbs, exemplificado pela resposta ao pulso de um filtro passa-baixas ideal. A sobre-resposta permanece essencialmente a mesma apesar de um aumento significativo da freqüência de corte  $\omega_c$ : (a)  $\omega_c = 10\pi$  rad/s e (b)  $\omega_c = 40\pi$  rad/s. A duração do pulso  $T$  é mantida constante em 1 s.

## 8.4 Projeto de Filtros

O filtro passa-baixas com a resposta em freqüência mostrada na Figura 8.3 é “ideal” em termos de que deixa passar todos os componentes de freqüência que se situam dentro da faixa de passagem sem nenhuma distorção e rejeita todos os componentes de freqüência que se situam dentro da faixa de rejeição, e a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição é abrupta. Lembre-se que estas características resultam num filtro não implementável. Por conseguinte, de uma perspectiva prática, a abordagem prudente é tolerar um nível aceitável de distorção, permitindo “desvios” prescritos destas condições ideais, como é descrito aqui para o caso de filtros de tempo contínuo ou analógicos:

- Dentro da faixa de passagem, a resposta em módulo do filtro deve situar-se entre 1 e  $1 - \epsilon$ :

$$1 - \epsilon \leq |H(j\omega)| \leq 1 \quad \text{para } 0 \leq |\omega| \leq \omega_p \quad (8.28)$$

em que  $\omega_p$  é a freqüência de corte da faixa de passagem e  $\epsilon$  é um parâmetro de tolerância.

- Dentro da faixa de rejeição, a resposta em módulo do filtro não deve ultrapassar  $\delta$ :

$$|H(j\omega)| \leq \delta \quad \text{para } |\omega| \geq \omega_s \quad (8.29)$$

em que  $\omega_s$  é a freqüência de corte da faixa de rejeição \* e  $\delta$  é outro parâmetro de tolerância.

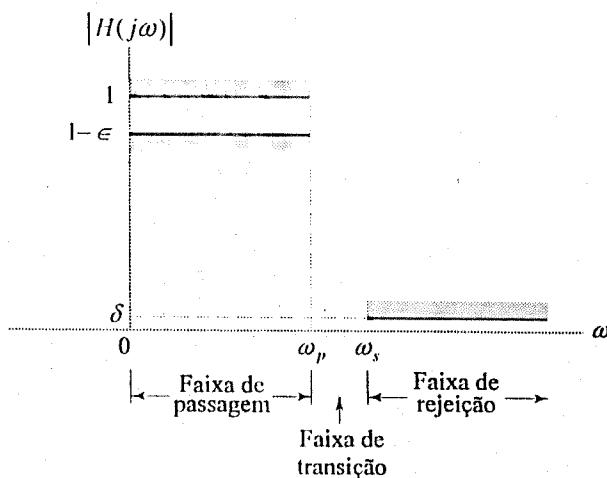
- A largura da faixa de transição tem uma largura finita igual a  $\omega_s - \omega_p$ .

O diagrama de tolerância da Figura 8.8 apresenta um retrato destas especificações de filtro. Especificações análogas são usadas para filtros de tempo discreto, com a informação adicional de que a resposta tem sempre período  $2\pi$  em  $\Omega$ .

Contanto que estas especificações cumpram a meta correspondente ao problema de filtragem que se tem em mãos e que o projeto de filtro seja executado a um custo razoável, o trabalho é feito de maneira satisfatória. De fato, esta é a própria natureza do projeto de engenharia.

As especificações que acabamos de escrever favorecem uma abordagem que se concentra no projeto do filtro baseando-se em sua resposta em freqüência ao invés de sua resposta ao impulso. Isto se deve ao reconhecimento do fato de que a aplicação de um filtro normalmente envolve a separação de sinais baseando-se no conteúdo de freqüência dos mesmos.

\* N. de R.T.: O  $\delta$  em  $\omega_s$  é de stopband (faixa de rejeição).



**FIGURA 8.8** Diagrama de tolerância de um filtro passa-baixas prático: a faixa de passagem, a faixa de transição e a faixa de rejeição para freqüências positivas são mostradas.

Tendo formulado um conjunto de especificações que descrevem as propriedades desejadas do filtro seletivo de freqüências, há dois passos distintos envolvidos no projeto do filtro, os quais são executados na seguinte ordem:

1. A *aproximação* de uma resposta em freqüência prescrita (isto é, a resposta em módulo, a resposta em fase, ou ambas) por uma função de transferência racional que representa um sistema que é tanto causal como estável.
2. A *realização* da função de transferência aproximada por um sistema físico.

Ambos os passos podem ser implementados numa variedade de maneiras diferentes, com o resultado de que não existe uma solução única para o problema de projeto de filtros com um conjunto prescrito de especificações.

Todavia, podemos mencionar três diferentes abordagens para o projeto de filtros analógicos e digitais, como resumimos aqui:

1. *Abordagem analógica*, a qual se aplica à classe de filtros analógicos.
2. *Abordagem de analógico para digital*, em que a motivação é projetar um filtro digital lançando mão de um projeto de filtro analógico.
3. *Abordagem digital direta*, a qual se aplica à classe de filtros digitais.

Naquilo que exponemos a seguir, as idéias básicas destas abordagens, especialmente as duas primeiras, são apresentadas e ilustradas com diferentes exemplos de projeto.

## 8.5 Funções de Aproximação

A escolha de uma função de transferência para resolver o problema de aproximação é a etapa de transição de um conjunto de especificações de projeto para a realização da função de transferência por meio de uma estrutura específica de filtro. Sendo assim, ele é o passo mais fundamental no projeto de filtros: a escolha da função de transferência determina o desempenho do filtro. Logo no início, entretanto, deve-se enfatizar que não existe uma solução única para o problema da aproximação. Aliás, temos um conjunto de soluções possíveis, sendo que cada uma das quais tem suas próprias propriedades distintivas.

Basicamente, o problema da aproximação é um *problema de otimização*, o qual somente pode ser resolvido no contexto de um *critério de qualidade ótima* específico. Em outras palavras, antes de continuar a resolver o problema da aproximação, precisamos especificar um critério de qualidade ótima num sentido implícito ou explícito. Além disso, a escolha desse critério determina de maneira única a solução. Dois critérios de qualidade ótima comumente usados no projeto de filtros são os seguintes:

### 1. Resposta em módulo maximamente plana.

Admitamos que  $|H(j\omega)|$  denote a resposta em módulo de um filtro passa-baixas analógico de ordem  $N$ . Diz-se que resposta em módulo  $|H(j\omega)|$  é *maximamente plana* na origem se suas  $(2N - 1)$  derivadas com respeito a  $\omega$  se anulam em  $\omega = 0$ ; ou seja,

$$\frac{\partial^{2N-1}}{\partial \omega^{2N-1}} |H(j\omega)| = 0 \quad \text{em } \omega = 0$$

### 2. Resposta equiripple<sup>1</sup> em módulo

Admitamos que o valor quadrático da resposta em módulo  $|H(j\omega)|$  de um filtro passa-baixas analógico seja expresso na forma

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \delta^2 F^2(\omega)}$$

em que  $\delta$  está relacionado com o parâmetro de tolerância de faixa de passagem  $\epsilon$ , e  $F(\omega)$  seja alguma função de  $\omega$ . Diz-se que a resposta em módulo  $|H(j\omega)|$  é *equiripple* na faixa de passagem se  $F^2(\omega)$  oscilar entre máximos e mínimos de igual amplitude ao longo da faixa de passagem inteira. Aqui, devemos distinguir entre dois casos, dependendo de se a ordem  $N$  do filtro é ímpar ou par. Ilustramos a formulação deste segundo critério de otimização para dois casos,  $N = 3$  e  $N = 4$ , da seguinte maneira:

*Caso (a):  $N = 3$ , e  $\omega_c = 1$*

- (i)  $F(\omega) = 0$  se  $\omega = 0, \pm \omega_a$
- (ii)  $F^2(\omega) = 1$  se  $\omega = \pm \omega_b, \pm 1$
- (iii)  $\frac{\partial}{\partial \omega} F^2(\omega) = 0$  se  $\omega = 0, \pm \omega_b, \pm \omega_a, \pm 1$   
em que  $0 < \omega_b < \omega_a < 1$ .

*Caso (b):  $N = 4$ , e  $\omega_c = 1$*

- (i)  $F(\omega) = 0$  se  $\omega = \pm \omega_{a1}, \pm \omega_{a2}$
- (ii)  $F^2(\omega) = 1$  se  $\omega = 0, \pm \omega_b, \pm 1$
- (iii)  $\frac{\partial}{\partial \omega} F^2(\omega) = 0$  se  $\omega = 0, \pm \omega_{a1}, \pm \omega_b, \pm \omega_{a2}, \pm 1$   
em que  $0 < \omega_{a1} < \omega_b < \omega_{a2} < 1$ .

Os critérios de otimização ótima descritos nos pontos 1 e 2 são satisfeitos por duas classes de filtros conhecidos como filtros de Butterworth e filtros de Chebyshev, respectivamente. Ambos são descritos a seguir.

## ■ FILTROS DE BUTTERWORTH

Uma função de Butterworth de ordem  $N$  é definida por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad (8.30)$$

e um filtro assim projetado é chamado de *filtro de Butterworth de ordem  $N$* .

<sup>1</sup> Equiripple: Esta palavra pode ser traduzida literalmente por "oscilação (ou ondulação) uniforme." Por exemplo, o algoritmo de projeto de filtros FIR *equiripple* de Parks-McClellan (às vezes chamado de algoritmo de troca de Remez) é um método de projeto que permite que um filtro FIR seja projetado de acordo com uma especificação de resposta em frequência que consiste num número arbitrário de faixas de passagem e faixas de rejeição, em cada uma das quais uma quantidade especificada de ondulações (*ripples*) pode ser tolerada.

A função de aproximação da equação (8.30) satisfaz a exigência de que  $H(j\omega)$  deve ser uma função par de  $\omega$ . O parâmetro  $\omega_c$  é a *frequência de corte* do filtro. Para os valores prescritos dos parâmetros de tolerância  $\epsilon$  e  $\delta$  definidos na Figura 8.8, descobrimos prontamente na equação (8.30) que as frequências de corte da faixa de passagem e da faixa de rejeição são as seguintes, respectivamente:

$$\omega_p = \omega_c \left( \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{1/2N} \quad (8.31)$$

$$\omega_s = \omega_c \left( \frac{1-\delta}{\delta} \right)^{1/2N} \quad (8.32)$$

A resposta em módulo quadrática  $|H(j\omega)|^2$  obtida usando-se a função de aproximação da equação (8.30) é mostrada plotada na Figura 8.9, para quatro valores diferentes  $N$  de ordem de filtro. Todas estas curvas atravessam o ponto de potência média em  $\omega = \omega_c$ .

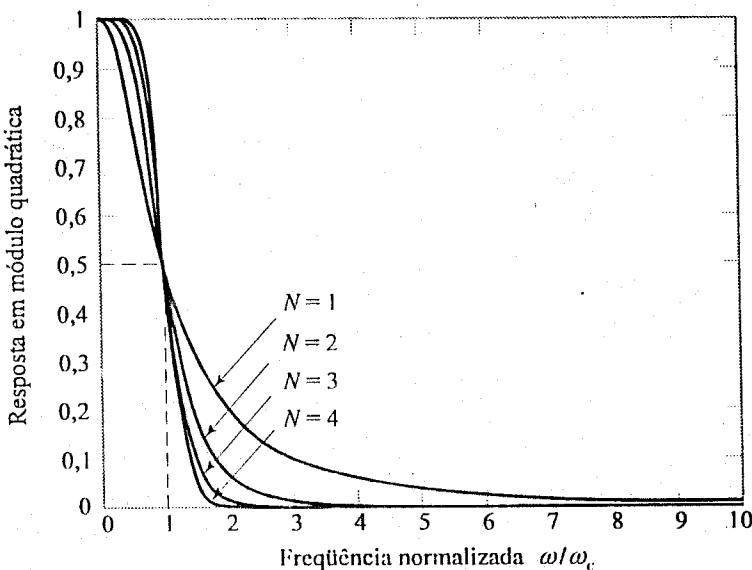


FIGURA 8.9 Resposta em módulo de filtros de Butterworth de ordens variáveis.

Uma função de Butterworth é monotônica ao longo da faixa de passagem e da faixa de rejeição. Em especial, nas vizinhanças de  $\omega = 0$ , podemos expandir o módulo de  $H(j\omega)$  como uma série de potências da seguinte maneira:

$$|H(j\omega)| = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} + \frac{3}{8} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{4N} - \frac{5}{16} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{6N} + \dots \quad (8.33)$$

o que implica que as primeiras  $2N - 1$  derivadas de  $|H(j\omega)|$  com respeito a  $\omega$  são nulas na origem. Conclui-se, portanto, que a função de Butterworth é, de fato, *maximamente plana* em  $\omega = 0$ .

Para projetar um filtro analógico, precisamos conhecer a função de transferência  $H(s)$ , expressa como uma função da variável complexa  $s$ . Dada a função de Butterworth  $|H(j\omega)|^2$ , como encontramos a função de transferência  $H(s)$  correspondente? Para tratar esta questão, fazemos  $j\omega = s$  e temos que

$$H(s)H(-s)|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2 \quad (8.34)$$

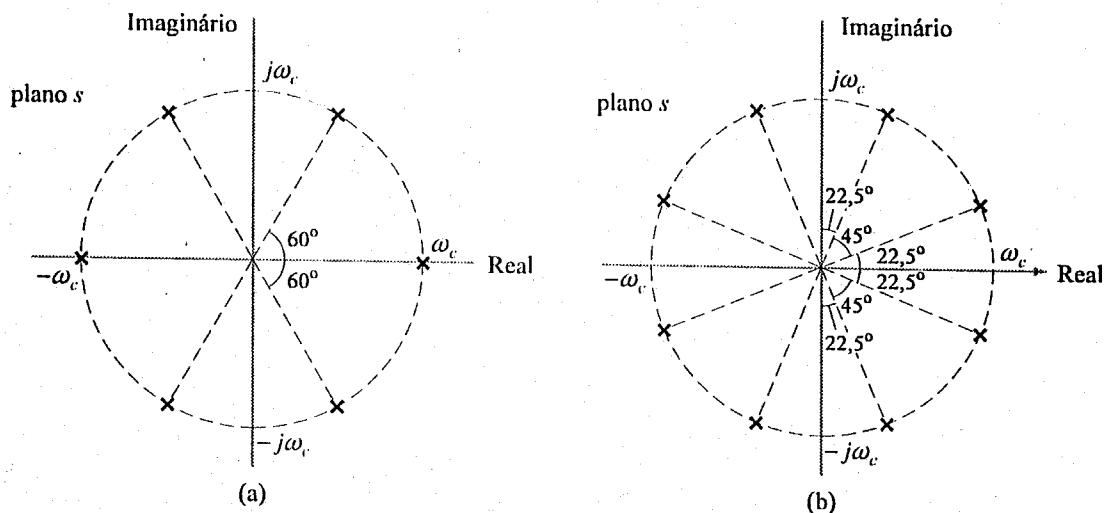
Conseqüentemente, podemos reescrever a equação (8.30) na forma equivalente

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left( \frac{s}{j\omega_c} \right)^{2N}} \quad (8.35)$$

As raízes do polinômio do denominador estão localizados nos seguintes pontos no plano  $s$ :

$$s = j\omega_c (-1)^{1/2N} \\ = \omega_c e^{j\pi(2k+N-1)/2N} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (8.36)$$

Ou seja, os polos de  $H(s)H(-s)$  formam padrões simétricos num círculo de raio  $\omega_c$ , como ilustra a Figura 8.10 para  $N = 3$  e  $N = 4$ . Note que, para qualquer  $N$ , nenhum dos polos se situam no eixo imaginário do plano  $s$ .



**FIGURA 8.10** Distribuição de polos de  $H(s)H(-s)$  no plano  $s$  para duas ordens diferentes de filtro. (a)  $N = 3$  e (b)  $N = 4$ .

Quais destes  $2N$  pólos pertencem a  $H(s)$ ? Para responder esta pergunta fundamental, lembremos do Capítulo 6 que, para que a função de transferência  $H(s)$  represente um filtro estável e causal, todos os seus polos devem situar-se no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Conseqüentemente, aqueles  $N$  polos de  $H(s)H(-s)$  que se situam no semiplano esquerdo do plano  $s$  são atribuídos a  $H(s)$ , e os polos de lado direito restantes são atribuídos a  $H(-s)$ .

**EXEMPLO 8.3** Determine a função de transferência de um filtro de Butterworth do tipo passa-baixas com ordem  $N = 3$ . Suponha que a frequência de corte de 3-dB seja  $\omega_c = 1$ .

**Solução:** Para  $N = 3$ , os  $2N = 6$  polos de  $H(s)H(-s)$  estão localizados num círculo de raio unitário com espaçamento angular de  $60^\circ$ , como é mostrado na Figura 8.10(a). Conseqüentemente, atribuindo os polos do semiplano esquerdo a  $H(s)$ , podemos defini-los como

$$s = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ s = -1 \\ s = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A função de transferência de um filtro de Butterworth de ordem 3 é, portanto,

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \\ = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} \quad (8.37)$$

► EXERCÍCIO 8.2 Como a função de transferência da equação (8.37) se modifica para um filtro de Butterworth de ordem 3 e freqüência de corte  $\omega_c$ ?

*Resposta:*

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1}$$

► EXERCÍCIO 8.3 Encontre a função de transferência de um filtro de Butterworth com freqüência de corte  $\omega_c = 1$  e ordem de filtro (a)  $N = 1$  e (b)  $N = 2$ .

*Respostas:*

(a)  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

(b)  $H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

Na Tabela 8.1, apresentamos um resumo das funções de transferência de filtros de Butterworth de freqüência de corte  $\omega_c = 1$  até a ordem  $N = 6$ .

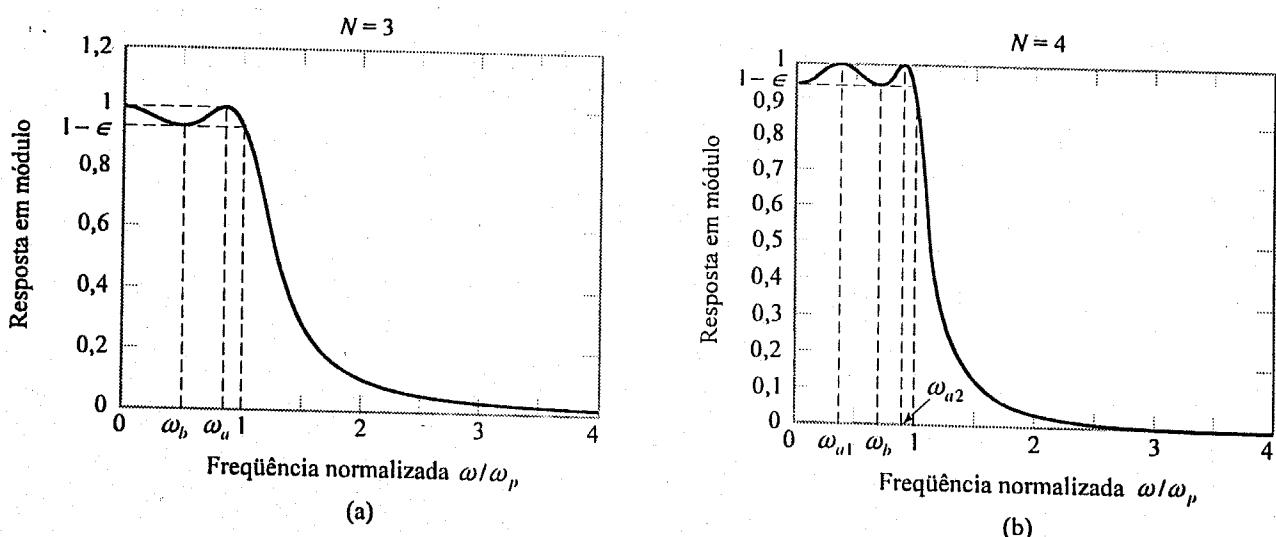
### ■ FILTROS DE CHEBYSIEV

O diagrama de tolerâncias da Figura 8.8 requer uma função de aproximação que se situa entre 1 e  $1 - \epsilon$  dentro da faixa de passagem  $0 \leq |\omega| < \omega_p$ . A função de Butterworth satisfaz esta exigência, mas concentra sua capacidade de aproximação próximo a  $\omega = 0$ . Para uma determinada ordem de filtro, podemos obter um filtro com uma largura de faixa de transição reduzida usando uma função de aproximação que exibe uma característica *equiripple* na faixa de passagem (isto é, ela oscila uniformemente entre 1 e  $1 - \epsilon$  para  $0 \leq \omega \leq \omega_p$ ) como é ilustrado nas Figuras 8.11(a) e (b) para  $N = 3, 4$ , respectivamente, e oscilação na faixa de passagem de 0,5 dB. As respostas em módulo aqui plotadas satisfazem os critérios *equiripple* descritos anteriormente para  $N$  ímpar e  $N$  par, respectivamente. Funções de aproximação com uma resposta em módulo *equiripple* são conhecidas coletivamente como *funções de Chebyshev*. Um filtro projetado nesta base é chamado *filtro de Chebyshev*. Os polos da função de transferência  $H(s)$  pertencentes a um filtro de Chebyshev situam-se numa elipse no plano  $s$  de uma maneira estreitamente relacionada com os do filtro de Butterworth correspondente.

TABELA 8.1 Resumo dos filtros de Butterworth

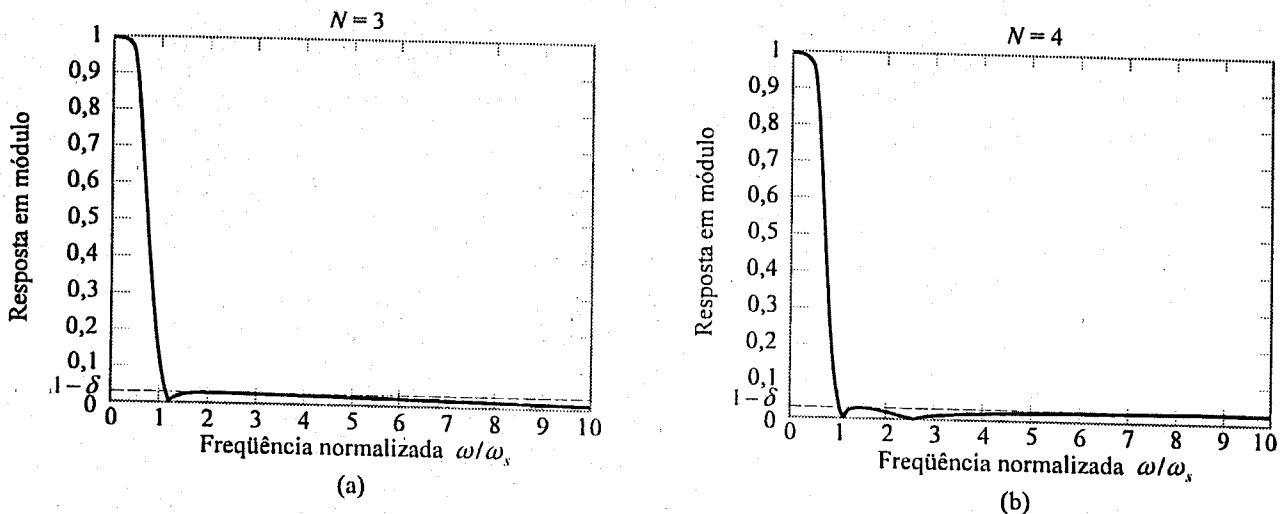
$$H(s) = \frac{1}{Q(s)}$$

Ordem $N$ do Filtro	Polinômio $Q(s)$
1	$s+1$
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	$s^4 + 2,6131s^3 + 3,4142s^2 + 2,6131s + 1$
5	$s^5 + 3,2361s^4 + 5,2361s^3 + 5,2361s^2 + 3,2361s + 1$
6	$s^6 + 3,8637s^5 + 7,4641s^4 + 9,1416s^3 + 7,4641s^2 + 3,8637s + 1$



**FIGURA 8.11** Resposta em módulo de um filtro de Chebyshev de ordem (a)  $N = 3$  e (b)  $N = 4$ , e *ripple* de faixa de passagem = 0,5 dB. As freqüências  $\omega_b$  e  $\omega_a$  no caso (a) e as freqüências  $\omega_{a1}$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_{a2}$  no caso (b) são definidas de acordo com o critério de otimização para resposta em amplitude *equiripple*.

As funções de Chebyshev mostradas na Figura 8.11 exibem um comportamento monotônico na faixa de rejeição. Alternativamente, podemos usar outra classe de funções de Chebyshev que exibem uma resposta monotônica na faixa de passagem, mas uma resposta *equiripple* na faixa de rejeição, como é ilustrado nas Figuras 8.12(a) e (b) para  $N = 3, 4$ , respectivamente, e oscilações (*ripple*) na faixa de rejeição de 30-dB. Um filtro projetado baseando-se neste último dado é chamado *filtro de Chebyshev inverso*. Diferentemente de um filtro de Chebyshev, a função de transferência de um filtro de Chebyshev inverso tem zeros no eixo  $j\omega$  do plano  $s$ .



**FIGURA 8.12** Resposta em módulo de um filtro de Chebyshev inverso de ordem (a)  $N = 3$ , e (b)  $N = 4$ , e oscilações de faixa de rejeição = 30 dB.

As idéias incorporadas nos filtros de Chebyshev e Chebyshev inverso podem ser combinadas para reduzir ainda mais a largura da faixa de transição ao tornarmos *equiripple* a função de transição tanto na faixa de passagem como na faixa de rejeição. Esse tipo de função de aproximação é chamado *função elíptica*, e um filtro resultante de seu uso é chamado *filtro elíptico*.

Um filtro elíptico é ótimo em termos de que para um conjunto prescrito de especificações de projeto, a largura da faixa de transição é a menor que podemos obter. Isto permite a menor separação possível entre a faixa de passagem e a faixa de rejeição do filtro. Do ponto de vista de análise, entretanto, a determinação da função de transferência  $H(s)$  é mais simples no filtro de Butterworth e a mais desafiadora no filtro elíptico. O filtro elíptico é capaz de obter seu comportamento ótimo

em virtude do fato de que sua função de transferência  $H(s)$  tem zeros finitos no plano  $s$ , cujo número é determinado de maneira única pela ordem  $N$  do filtro. Em comparação, a função de transferência  $H(s)$  para um filtro de Butterworth ou a de um filtro de Chebyshev tem todos os seus zeros localizados em  $s = \infty$ .

## 8.6 Transformações de Freqüência

Até este ponto da discussão, consideramos a questão de resolver o problema da aproximação em filtros passa-baixas. Neste contexto, é uma prática comum falarmos de filtro “protótipo” passa-baixas pelo que, queremos nos referir a um filtro passa-baixas cuja freqüência de corte  $\omega_c$  é normalizada para a unidade. Se tivermos encontrado a função de transferência de um filtro protótipo passa-baixas, podemos usá-lo para derivar a função de transferência de um filtro passa-baixas com uma freqüência de corte arbitrária, um filtro passa-altas, passa-faixa ou de rejeição de faixa, por meio de uma transformação apropriada da variável independente. Essa transformação não tem nenhum efeito sobre a tolerância dentro da qual a característica ideal de interesse é aproximada. A seguir, consideraremos duas *transformações de freqüência* específicas: passa-baixas para passa-altas e passa-baixas para passa-faixa. Outras transformações de freqüência seguem os princípios aqui descritos.

### ■ TRANSFORMAÇÃO PASSA-BAIXAS PARA PASSA-ALTAS

Os pontos  $s = 0$  e  $s = \infty$  no plano  $s$  são de especial interesse aqui. No caso de um filtro passa-baixas,  $s = 0$  define o ponto médio da faixa de passagem (definida tanto para freqüências positivas como para freqüências negativas), e  $s = \infty$  define a vizinhança onde a função de transferência do filtro se comporta assintoticamente. Os papéis destes dois pontos são intercambiados num filtro passa-altas. Consequenteemente, a transformação passa-baixas para passa-altas é descrita por

$$s \rightarrow \frac{\omega_c}{s} \quad (8.38)$$

em que  $\omega_c$  é a freqüência de corte desejada do filtro de passa-altas. Esta notação implica que substituímos  $s$  na função de transferência do filtro protótipo passa-baixas por  $\omega_c/s$  para obtermos a função de transferência do filtro passa-altas correspondente que possui freqüência de corte  $\omega_c$ .

Para sermos mais precisos, admitamos que  $(s - d_j)$  denote um fator polar da função de transferência  $H(s)$  de um protótipo passa-baixas. Usando a fórmula (8.38), podemos então escrever

$$\frac{1}{s - d_j} \rightarrow \frac{-s/d_j}{s - D_j} \quad (8.39)$$

em que  $D_j = \omega_c/d_j$ . A transformação da equação (8.39) resulta num zero em  $s = 0$  e num polo em  $s = D_j$  para um polo em  $s = d_j$  na função de transferência  $H(s)$  original.

**EXEMPLO 8.4** A equação (8.37) define a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de ordem 3 e freqüência de corte igual à unidade. Determine a função de transferência do filtro de passa-altas correspondente com freqüência de corte igual a  $\omega_c = 1$ .

**Solução:** Aplicar a transformação de freqüência da equação (8.38) à função de transferência passa-baixas da equação (8.37) produz a função de transferência do filtro passa-altas correspondente com  $\omega_c = 1$  como

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 1\right) + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + 1\right)} \\ &= \frac{s^3}{(s+1)(s^2+s+1)} \end{aligned}$$

## ► EXERCÍCIO 8.4 Dada a função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

pertencente a um filtro passa-baixas de Butterworth, encontre a função de transferência do filtro passa-altas correspondente com freqüência de corte  $\omega_c$ .

*Resposta:*

$$\frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

► EXERCÍCIO 8.5 Admitamos que  $(s - c_j)$  denote um fator zero numa função de transferência de um protótipo passa-baixas. Como este fator é transformado pelo uso da equação (8.38)?

*Resposta:*

$$\frac{s - C_j}{-s/c_j}, \text{ em que } C_j = \omega_c / c_j$$

## ■ TRANSFORMAÇÃO PASSA-BAIXAS PARA PASSA-FAIXA

Considere a seguir a transformação de um filtro protótipo passa-baixas para um filtro passa-faixa. Por definição, um filtro passa-faixa rejeita tanto os componentes de baixa freqüência como os de alta freqüência e deixa passar determinada faixa de freqüências em algum ponto entre eles. Dessa forma, a resposta em freqüência  $H(j\omega)$  de um filtro passa-faixa tem as seguintes propriedades:

1.  $H(j\omega) = 0$  tanto em  $\omega = 0$  como  $\omega = \infty$ .
2.  $|H(j\omega)| \equiv 1$  para uma faixa de freqüências centralizada em  $\omega_0$ , em que  $\omega_0$  é a freqüência média da faixa do filtro.

Conseqüentemente, queremos criar uma função de transferência com zeros em  $s = 0$  e  $s = \infty$  e pólos próximos de  $s = \pm j\omega_0$  no eixo  $j\omega$  no plano  $s$ . Uma transformação passa-baixas para passa-faixa que satisfaz estas exigências é descrita por

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \quad (8.40)$$

em que  $B^*$  é a largura de faixa do filtro passa-faixa. Tanto  $\omega_0$  como  $B$  são medidos em radianos por segundo. De acordo com a equação (8.40), o ponto  $s = 0$  do filtro protótipo passa-baixas é transformado em  $s = \pm j\omega_0$  no filtro passa-faixa, e o ponto  $s = \infty$  do filtro protótipo passa-baixas é transformado em  $s = 0$  e  $s = \infty$  no filtro passa-faixa.

Dessa forma, um fator polar  $(s - d_j)$  na função de transferência de um filtro protótipo passa-baixas é transformado da seguinte maneira:

$$\frac{1}{s - d_j} \rightarrow \frac{Bs}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (8.41)$$

em que os polos  $p_1$  e  $p_2$  são definidos por

$$p_1, p_2 = \frac{1}{2}(Bd_j \pm \sqrt{B^2d_j^2 - 4\omega_0^2}) \quad (8.42)$$

Um ponto importante a ser observado é que a transformação de freqüência descrita nas equações (8.38) e (8.40) são funções de reatância. Por "função de reatância" queremos nos referir à impedância do ponto de acionamento de uma rede composta inteiramente de indutores e capacitores. De fato, podemos generalizar este resultado dizendo que todas as transformações de freqüência, independentemente de complicações nas especificações da faixa de passagem de interesse, estão na forma de funções de reatância.

\* N. de R.T.: B de Band (faixa, banda).

► **EXERCÍCIO 8.6** Considere um filtro passa-baixas cuja função de transferência seja

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Encontre a função de transferência do filtro passa-faixa correspondente com freqüência de ponto médio  $\omega_0 = 1$  e largura de faixa  $B = 0,1$ .

**Resposta:**

$$\frac{0,1s}{s^2 + 0,1s + 1}$$

► **EXERCÍCIO 8.7** Aqui, revisitamos a resposta em fase de um canal passa-faixa considerado no Exemplo 5.8, a saber

$$\phi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega\omega_c}\right)$$

em que  $\omega_c$  é a freqüência da portadora do sinal modulado aplicado ao filtro. Mostre que  $\phi(\omega)$  é a resposta em fase do filtro obtido aplicando-se a transformação passa-baixas para passa-faixa no filtro passa-baixas de Butterworth de ordem 1:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Depois de nos familiarizarmos com a noção de funções de aproximação e com o papel fundamental dos filtros protótipo passa-baixas, consideraremos a implementação de filtros analógicos passivos na próxima seção, seguindo-se o projeto de filtros digitais na Seção 8.8.

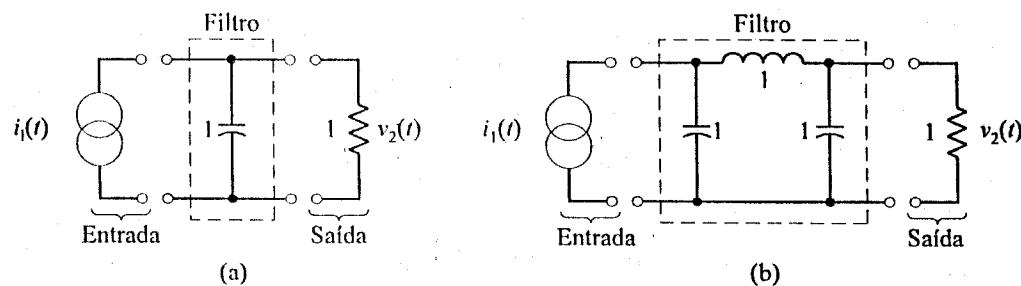
## 8.7 Filtros Passivos

Diz-se que um filtro é *passivo* quando sua composição é feita inteiramente de elementos passivos de circuito (isto é, indutores, capacitores e resistores). Entretanto, o projeto de filtros passivos altamente seletivos da freqüência baseia-se exclusivamente em elementos de reatância (isto é, indutores e capacitores).

Os elementos resistivos entram no projeto somente como uma resistência de fonte e/ou resistência de carga. A ordem  $N$  do filtro normalmente é determinada pelo número de elementos reativos contidos no filtro.

A Figura 8.13(a) mostra um filtro de Butterworth do tipo passa-baixas de ordem  $N=1$  e freqüência de corte  $\omega_c = 1$  de 3 dB. O filtro é ativado a partir de uma fonte de corrente ideal. A resistência  $R_l = 1$  representa a resistência de carga. O capacitor  $C = 1$  representa o único elemento reativo do filtro.

A Figura 8.13(b) mostra um filtro de Butterworth do tipo passa-baixas de ordem  $N=3$  e freqüência de corte  $\omega_c = 1$  de 3 dB. À semelhança da configuração anterior, o filtro é ativado a partir de uma fonte de corrente, e  $R_l$  representa a resistência de carga. Neste caso, o filtro é composto de três elementos reativos: dois capacitores de desvio ou derivação (*shunt*) e um único indutor serial.



**FIGURA 8.13** Filtros passa-baixas de Butterworth ativados por uma fonte de corrente ideal. (a) ordem  $N = 1$  e (b) ordem  $N = 3$ .

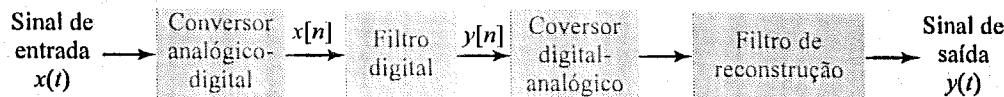
Note que tanto na Figura 8.13(a) como na (b), a função de transferência  $H(s)$  está, de fato, na forma de uma impedância de transferência, definida pela transformada de Laplace da tensão de saída  $v_2(t)$  dividida pela transformada de Laplace da fonte de corrente  $i_1(t)$ .

► **Exercício 8.8** Mostre que a função de transferência do filtro na Figura 8.13(b) é igual à função de Butterworth dada na equação (8.37). ◀

A determinação dos elementos de um filtro, a partir de uma função de transferência  $H(s)$  particular, é denominada *síntese de rede*. Ela abrange um grande número de procedimentos altamente avançados que estão além do escopo deste livro. De fato, os filtros passivos ocuparam um papel predominante no projeto de sistemas de comunicação e de outros sistemas durante várias décadas, até o surgimento dos filtros ativos e filtros digitais na década dos 60. Os filtros ativos (que usam amplificadores operacionais) serão discutidos no Capítulo 9, e os filtros digitais serão discutidos na próxima seção.

## 8.8 Filtros Digitais

Um filtro digital usa *computação* para implementar a ação de filtragem que deve ser executada num sinal de tempo contínuo. A Figura 8.14 mostra o diagrama de blocos das operações envolvidas em tal abordagem para projetar um filtro seletivo de freqüência; as idéias que estão por trás destas operações foram discutidas na Seção 4.8.



**FIGURA 8.14** Sistema para filtrar um sinal de tempo contínuo, construído em torno de um filtro digital.

O bloco rotulado conversor analógico-digital (A/D) é usado para converter o sinal de tempo contínuo  $x(t)$  numa seqüência  $x[n]$  de números. O filtro digital processa a seqüência de números  $x[n]$  numa base de amostra por amostra para produzir uma nova seqüência de números,  $y[n]$ , a qual é então convertida num sinal de tempo contínuo correspondente pelo conversor digital-analógico (D/A). Finalmente, o filtro de reconstrução (passa-baixas) na saída do sistema produz um sinal de tempo contínuo  $y(t)$ , representando a versão filtrada do sinal de entrada original  $x(t)$ .

Dois pontos importantes devem ser cuidadosamente observados no estudo dos filtros digitais:

1. Os procedimentos de projeto subjacentes normalmente se baseiam no uso de um modelo de precisão analógica ou infinita para as amostras de dados de entrada e todos os cálculos internos; isto é feito para que se possa tirar proveito da matemática bem compreendida de tempo discreto, mas de amplitude contínua. O *filtro de tempo discreto* resultante proporciona ao projetista uma “estrutura teórica” para a tarefa que ele tem à frente.
2. Quando o filtro de tempo discreto é implementado na forma digital para uso prático, os dados de entrada e os cálculos internos são todos quantizados com uma precisão finita. Quando se faz isto, são introduzidos *erros de arredondamento* na operação do filtro digital, fazendo com que seu desempenho se desvie daquele do filtro de tempo discreto, do qual ele foi derivado.

Nesta seção, limitar-nos-emos às questões relacionadas com o ponto 1. Ainda que à luz deste ponto os filtros aqui considerados devam na realidade ser chamados filtros de tempo discreto, referir-nos-emos a eles como filtros digitais para nos adequarmos à terminologia comumente usada.

Os filtros analógicos, exemplificados pelos filtros passivos discutidos na Seção 8.7, são caracterizados por uma resposta ao impulso de duração infinita. Em comparação, há duas classes de filtros digitais, dependendo da duração da resposta ao impulso:

1. *Filtros digitais de resposta ao impulso de duração finita (FIR)*, cuja operação é regida por equações lineares de diferenças com coeficientes constantes de natureza não-recursiva. A função de transferência de um filtro digital FIR é um polinômio em  $z^{-1}$ . Conseqüentemente, os filtros digitais FIR exibem três importantes propriedades:
  - » Eles têm memória finita e, portanto, qualquer transitório tem duração limitada.
  - » Eles são sempre BIBO estáveis.
  - » Eles podem implementar uma resposta em módulo desejada com resposta em fase exatamente linear (isto é, sem nenhuma distorção de fase), conforme explicaremos em seguida.
2. Os *filtros digitais de resposta ao impulso de duração infinita (IIR)*, cujas características de entrada e saída são regidas por equações lineares de diferenças com coeficientes constantes de natureza recursiva. A função de transferência de um filtro digital IIR é uma função racional em  $z^{-1}$ . Conseqüentemente, para uma resposta em freqüência prescrita, o uso de um filtro digital IIR normalmente resulta num comprimento de filtro menor do que o do filtro digital FIR correspondente. Entretanto, esta melhoria é obtida às custas de distorção de fase e um transitório que não se limita a um intervalo de tempo finito.

Em seguida, serão discutidos exemplos tanto de filtros digitais FIR como IIR.

## 8.9 Filtros Digitais FIR

Uma propriedade inerente dos filtros digitais FIR é que eles podem realizar uma resposta em freqüência com *fase linear*. Reconhecendo que uma resposta em fase linear corresponde a um retardo constante, o problema da aproximação no projeto de filtros digitais FIR torna-se então muito simplificado.

Especificamente, o projeto simplifica-se num de se aproximar a resposta em módulo desejada.

Admitamos que  $h[n]$  denote a resposta ao impulso de um filtro digital FIR, definida como a transformada inversa de Fourier de tempo discreto da resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$ . Admitamos que  $M$  denote a ordem de filtro, correspondente a um comprimento de filtro  $M + 1$ . Para projetar o filtro é necessário que determinemos os coeficientes de filtro,  $h[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, M$ , de forma que a resposta em freqüência real do filtro, a saber,  $H(e^{j\Omega})$ , forneça uma boa aproximação para uma resposta em freqüência  $H_d(e^{j\Omega})$  desejada ao longo do intervalo de freqüência  $-\pi < \Omega \leq \pi$ . Como uma medida da qualidade desta aproximação, definimos o *erro médio quadrático*

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\Omega}) - H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (8.43)$$

Admitamos que  $h_d[n]$  denote a transformada inversa de Fourier de tempo discreto de  $H_d(e^{j\Omega})$ . Então, invocando o teorema de Parseval que foi discutido no Capítulo 3, podemos definir o erro médio  $E$  na forma equivalente

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h[n]|^2 \quad (8.44)$$

Os únicos parâmetros ajustáveis nesta equação são os coeficientes de filtro  $h[n]$ . Conseqüentemente, a medida de erro é minimizada fazendo

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.45)$$

A aproximação da equação (8.45) é equivalente ao uso de uma *janela retangular* definida por

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.46)$$

Portanto, podemos reescrever a equação (8.45) na forma equivalente:

$$h[n] = w[n]h_d[n] \quad (8.47)$$

É por este motivo que o projeto de um filtro FIR baseado na equação (8.45) é chamado *método de janela*. O erro médio quadrático resultante do uso do método de janela é

$$E = \sum_{n=-\infty}^{-1} h_d^2[n] + \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d^2[n] \quad (8.47a)$$

Uma vez que a multiplicação de duas seqüências é equivalente à convolução de suas DTFTs, podemos expressar a resposta em freqüência do filtro FIR com resposta ao impulso  $h[n]$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=0}^M h[n]e^{-jn\Omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\Omega})H_d(e^{j(\Omega-\Lambda)}) d\Lambda \end{aligned} \quad (8.48)$$

A função  $W(e^{j\Omega})$  é a resposta em freqüência da janela retangular  $w[n]$ ; ela é definida por

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{\sin[\Omega(M+1)/2]}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(M+1)/2}, \quad -\pi < \Omega \leq \pi \quad (8.49)$$

Na Figura 8.15, plotamos a resposta em módulo  $|W(e^{j\Omega})|$  da janela retangular correspondente à ordem de filtro  $M = 12$ . Para que a resposta em freqüência real  $H(e^{j\Omega})$  do filtro digital FIR se iguale à resposta em freqüência ideal  $H_d(e^{j\Omega})$ , um período da função  $W(e^{j\Omega})$  teria de ser um impulso. A resposta em freqüência  $W(e^{j\Omega})$  da janela retangular  $w[n]$  somente pode aproximar esta condição ideal de forma oscilatória.

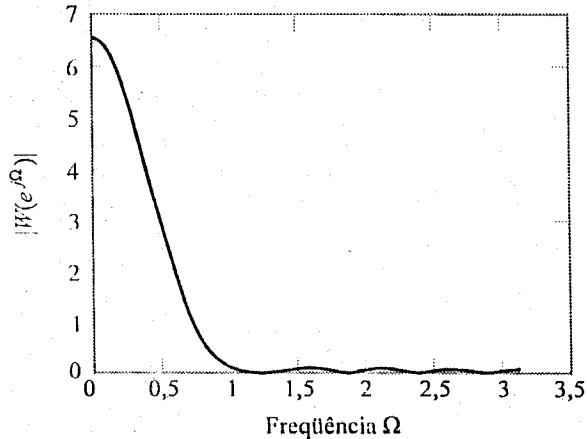


FIGURA 8.15 Resposta em módulo de janela retangular para um filtro FIR de ordem  $M = 12$ , descrita em  $0 \leq \Omega \leq \pi$ .

O *lóbulo principal* de uma janela  $w[n]$  é definido como a faixa de freqüência entre o primeiro cruzamento por zero de sua resposta em freqüência  $W(e^{j\Omega})$  nos dois lados da origem. As regiões de transição individuais que se situam nos dois lados do lóbulo principal são chamadas *lóbulos laterais*. A largura do lóbulo principal e as amplitudes dos lóbulos laterais fornecem medidas da extensão pela qual a resposta em freqüência  $W(e^{j\Omega})$  se desvia de uma função impulso.

► **EXERCÍCIO 8.9** Referindo-se à Figura 8.15, a qual descreve a resposta em freqüência de uma janela retangular, verifique que a largura do lóbulo principal é

$$\Delta\Omega_{\text{lóbulo principal}} = \frac{4\pi}{M+2}$$

em que  $M$  é a ordem do filtro.

► **EXERCÍCIO 8.10** Novamente referindo-se à resposta em freqüência da Figura 8.15, verifique que para uma janela retangular (a) todos os lóbulos laterais têm uma largura comum igual a  $2\pi/(M+1)$ , e (b) os primeiros lóbulos laterais têm uma amplitude de pico que é igual a 13 dB inferior a do lóbulo principal. ◀

A partir da discussão apresentada no Capítulo 3, lembramo-nos que a convolução com  $W(e^{j\Omega})$  descrita na equação (8.48) resulta numa aproximação oscilatória da resposta em freqüência  $H_d(e^{j\Omega})$  desejada pela resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  do filtro FIR. As oscilações são uma consequência dos lóbulos laterais em  $W(e^{j\Omega})$ . Elas podem ser reduzidas usando-se uma janela com lóbulos laterais menores. Uma janela comumente usada para este propósito é a *janela de Hamming*, definida por

$$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.50)$$

Com  $M$  considerado par,  $w[n]$  é simétrico em torno do ponto  $n = M/2$ . Na Figura 8.16, plotamos  $w[n]$  para a janela de Hamming com  $M = 12$ .

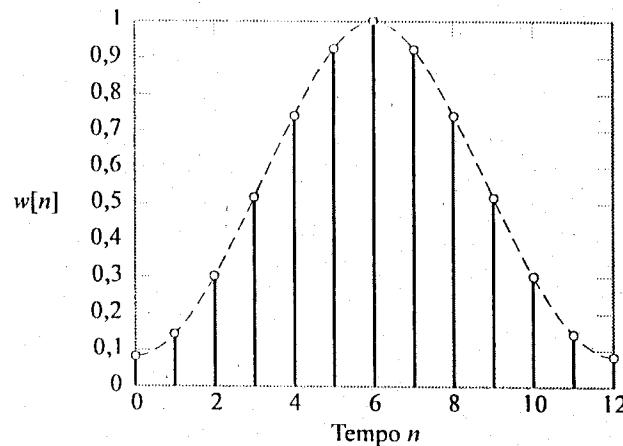


FIGURA 8.16 Resposta ao impulso da janela de Hamming para um filtro FIR de ordem  $M = 12$ .

Para compararmos ainda mais a resposta em freqüência da janela de Hamming com a da janela retangular, plotamos  $20 \log_{10} |W(e^{j\Omega})|$  para estas duas janelas na Figura 8.17, para  $M = 12$ .

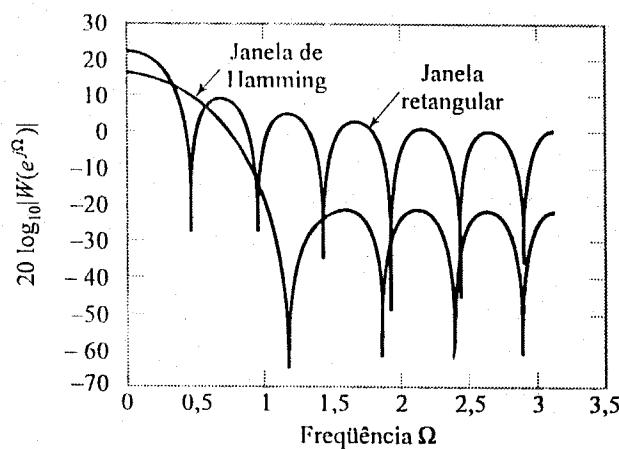


FIGURA 8.17 Comparação de respostas em módulo de janelas retangular e de Hamming para uma ordem de filtro  $M = 12$ , plotadas em decibéis.

A partir desta figura podemos fazer duas observações importantes:

- O lóbulo principal da janela retangular tem aproximadamente a metade da largura do lóbulo principal da janela de Hamming.
- Os lóbulos laterais da janela de Hamming, em relação ao lóbulo principal, são muito reduzidos em comparação com os da janela retangular. Especificamente, o pico de amplitude do primeiro lóbulo lateral da janela retangular está somente a aproximadamente 13 dB abaixo da do lóbulo principal, ao passo que o valor correspondente para a janela de Hamming esta aproximadamente a 40 dB.

É devido a este último ponto que a janela de Hamming reduz as oscilações na resposta em freqüência de um filtro digital FIR, como é ilustrado nos dois exemplos seguintes. Entretanto, há um preço a ser pago por esta melhoria, a saber, uma faixa de transição mais larga.

Para obter a melhor aproximação possível da resposta desejada, a janela deve conservar o máximo de energia possível de  $h_d[n]$ . Uma vez que as janelas são simétricas em torno de  $n = M/2$ , desejamos concentrar os valores máximos de  $h_d[n]$  em torno de  $n = M/2$ .

Isto é conseguido fazendo-se com que a resposta em fase  $\arg\{H_d(e^{j\Omega})\}$  seja linear com coeficiente linear nulo e coeficiente angular igual a  $-M/2$ . Este ponto é ilustrado no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 8.5** Considere a resposta em freqüência desejada

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-jM\Omega/2}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (8.51)$$

a qual representa a resposta em freqüência de um filtro passa-baixas ideal com fase linear. Investigue a resposta em freqüência de um filtro digital FIR de comprimento  $M = 12$ , usando (a) uma janela retangular e (b) uma janela de Hamming. Suponha que  $\Omega = 0,2\pi$  radianos.

*Solução:* A resposta desejada é

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega(n-M/2)} d\Omega \end{aligned} \quad (8.52)$$

Invocando a definição da função sinc, podemos expressar  $h_d[n]$  na forma compacta

$$h_d[n] = \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Omega_c}{\pi}\left(n - \frac{M}{2}\right)\right], \quad -\infty < n < \infty \quad (8.53)$$

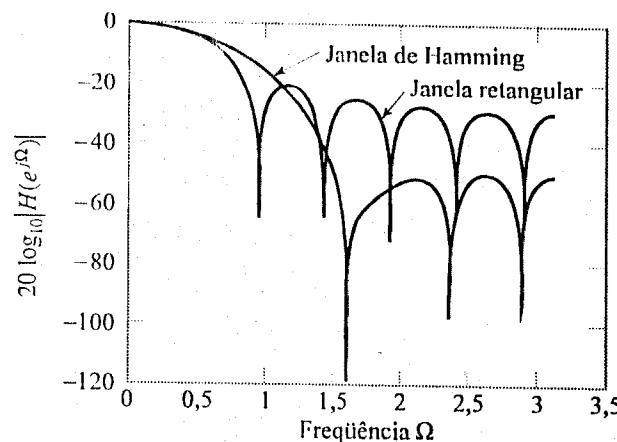
A resposta ao impulso é simétrica em torno de  $n = M/2$ , para  $M$  par, em cujo ponto temos

$$h_d\left[\frac{M}{2}\right] = \frac{\Omega_c}{\pi} \quad (8.54)$$

(a) *Janela retangular.* Para o caso de uma janela retangular, o uso da equação (8.53) produz

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Omega_c}{\pi}\left(n - \frac{M}{2}\right)\right], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.55)$$

cujo valor é dado na primeira coluna da Tabela 8.2, para  $\Omega_c = 0,2\pi$  e  $M = 12$ . A resposta em módulo correspondente  $|H(e^{j\Omega})|$  é plotada na Figura 8.18. As oscilações de  $|H(e^{j\Omega})|$  devidas ao ajaneamento da resposta ao impulso ideal são claramente evidentes em freqüências maiores do que  $\Omega_c = 0,2\pi$ .



**FIGURA 8.18** Comparação de respostas em módulo (plotadas numa escada de decibéis) de dois filtros passa-baixas digitais FIR de ordem  $M = 12$ , sendo que um filtro usa a janela retangular e o outro usa a janela de Hamming.

(b) *Janela de Hamming*. Para o caso de uma janela de Hamming, o uso das equações (8.50) e (8.53) produz

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Omega_c}{\pi}\left(n - \frac{M}{2}\right)\right] \left(0,54 - 0,46\cos\left(2\pi \frac{n}{M}\right)\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.56)$$

cujo valor é dado na segunda coluna da Tabela 8.1 para  $\Omega_c = 0,2\pi$  e  $M = 12$ . A resposta em módulo correspondente  $|H(e^{j\Omega})|$  também está plotada na Figura 8.18. Vemos que as oscilações devidas ao ajanelamento foram muito reduzidas em amplitude. Porém, esta melhoria foi conseguida à custa de uma faixa de transição mais larga em comparação com aquela obtida usando-se uma janela retangular.

Note que os coeficientes de filtro da Tabela 8.2 foram ajustados por multiplicação a fim de que a resposta em módulo do filtro em  $\omega = 0$  seja exatamente 1 depois do ajanelamento. Isto explica o desvio do coeficiente  $h[M/2]$  do valor teórico  $\Omega_c/\pi = 0,2$ .

A estrutura do filtro digital FIR para ambas as janelas é a mesma mostrada na Figura 8.19. Os coeficientes de filtro para as duas janelas são evidentemente diferentes, tomando-se os respectivos valores dados na Tabela 8.2.

**TABELA 8.2 Coeficientes de Filtros com Janelas Retangular e de Hamming para Filtros Passa-Baixas**

$n$	$h[n]$	
	Janela Retangular	Janela de Hamming
0	-0,0281	-0,0027
1	0,0000	0,0000
2	0,0421	0,0158
3	0,0909	0,0594
4	0,1364	0,1271
5	0,1686	0,1914
6	0,1802	0,2180
7	0,1686	0,1914
8	0,1364	0,1271
9	0,0909	0,0594
10	0,0421	0,0158
11	0,0000	0,0000
12	-0,0281	-0,0027

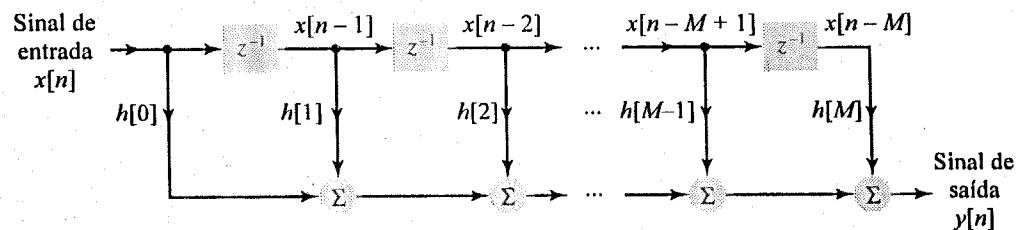


FIGURA 8.19 Estrutura para implementar um filtro digital FIR.

**EXEMPLO 8.6** Considere em seguida o projeto de um *diferenciador* de tempo discreto, cuja resposta em frequência é definida por

$$H_d(e^{j\Omega}) = j\Omega e^{-jM\Omega/2}, \quad -\pi < \Omega \leq \pi \quad (8.57)$$

Projete um filtro digital FIR que aproxime esta resposta em frequência desejada para  $M = 12$  usando (a) uma janela retangular e (b) uma janela de Hamming.

*Solução:* A resposta ao impulso desejada é

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\Omega e^{j\Omega(n-M/2)} d\Omega \end{aligned} \quad (8.58)$$

Usando integração por partes, obtemos

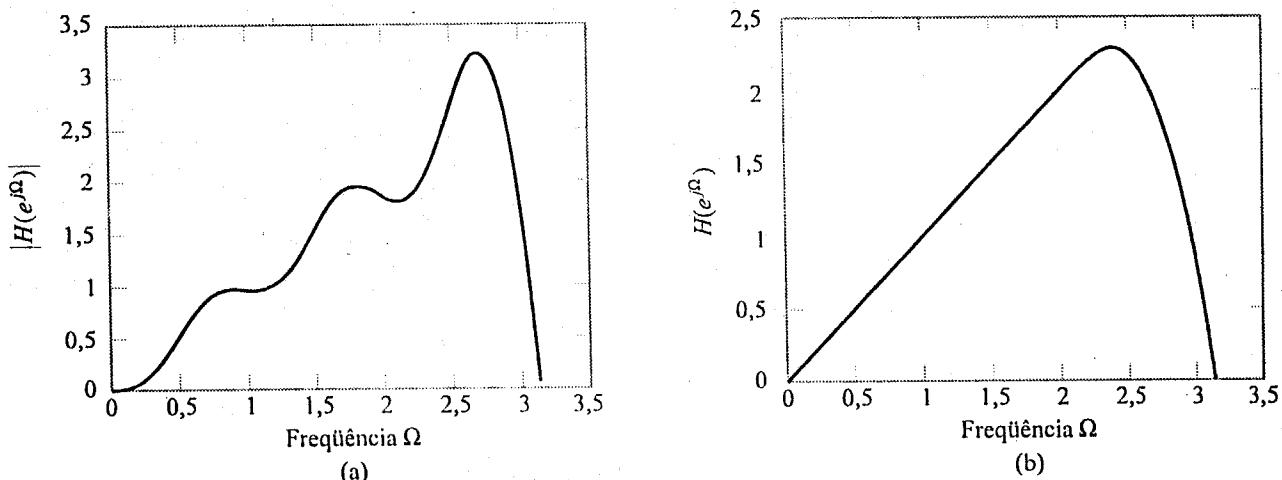
$$h_d[n] = \frac{\cos[\pi(n - M/2)]}{(n - M/2)} - \frac{\sin[\pi(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)^2}, \quad -\infty < n < \infty \quad (8.59)$$

- (a) *Janela retangular*. Multiplicando esta resposta ao impulso pela janela retangular da equação (8.46), obtemos

$$h[n] = \frac{\cos[\pi(n - M/2)]}{(n - M/2)} - \frac{\sin[\pi(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)^2}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (8.60)$$

Esta resposta ao impulso é antissimétrica em termos de que  $h[M-n] = -h[n]$ . Observe também que para  $M$  par,  $h[n]$  é nulo em  $n = M/2$ . O valor de  $h[n]$  é dado na segunda coluna da Tabela 8.3 para  $M = 12$ , a qual demonstra claramente a propriedade antissimétrica de  $h[n]$ . A resposta em módulo  $|H(e^{j\Omega})|$  correspondente é plotada na Figura 8.20(a). Os desvios oscilatórios da resposta em frequência ideal são manifestações do ajanelamento da resposta ao impulso ideal da Equação (8.59).

- (b) *Janela de Hamming*. Multiplicando a resposta ao impulso  $h_d[n]$  da Equação (8.59) pela janela de Hamming da equação (8.50), obtemos a resposta ao impulso  $h[n]$  dada na última coluna da Tabela 8.3. A resposta em módulo correspondente  $|H(e^{j\Omega})|$  é plotada na Figura 8.20(b). Comparando esta resposta com a da Figura 8.20(a), vemos que as oscilações foram muito reduzidas em amplitude, mas a largura de faixa ao longo da qual  $|H(e^{j\Omega})|$  é linear em  $\Omega$  foi reduzida, implicando menos largura de faixa usável para a operação de diferenciação.

FIGURA 8.20 Resposta em módulo de um filtro digital FIR como diferenciador, projetado usando-se (a) uma janela retangular e (b) janela de Hamming. Em ambos os casos, a ordem de filtro  $M$  é 12.

**TABELA 8.3 Coeficientes de Filtros com Janelas Retangular e de Hamming para um Diferenciador**

<i>n</i>	<i>h[n]</i>	
	Janela Retangular	Janela de Hamming
0	-0,1667	-0,0133
1	0,2000	0,0283
2	-0,2500	-0,0775
3	0,3333	0,1800
4	-0,5000	-0,3850
5	1,0000	0,9384
6	0	0
7	-1,0000	-0,9384
8	0,5000	0,3850
9	-0,3333	-0,1800
10	0,2500	0,0775
11	-0,2000	-0,0283
12	0,1667	0,0133

Note que há muitas outras janelas além da janela de Hamming que permitem diferentes compromissos entre a largura do lóbulo principal e a altura do lóbulo lateral.

► **EXERCÍCIO 8.11** Iniciando com a equação (8.58), derive a fórmula para a resposta ao impulso  $h_d[n]$  dada na equação (8.59), e mostre que  $h_d[M/2] = 0$ .

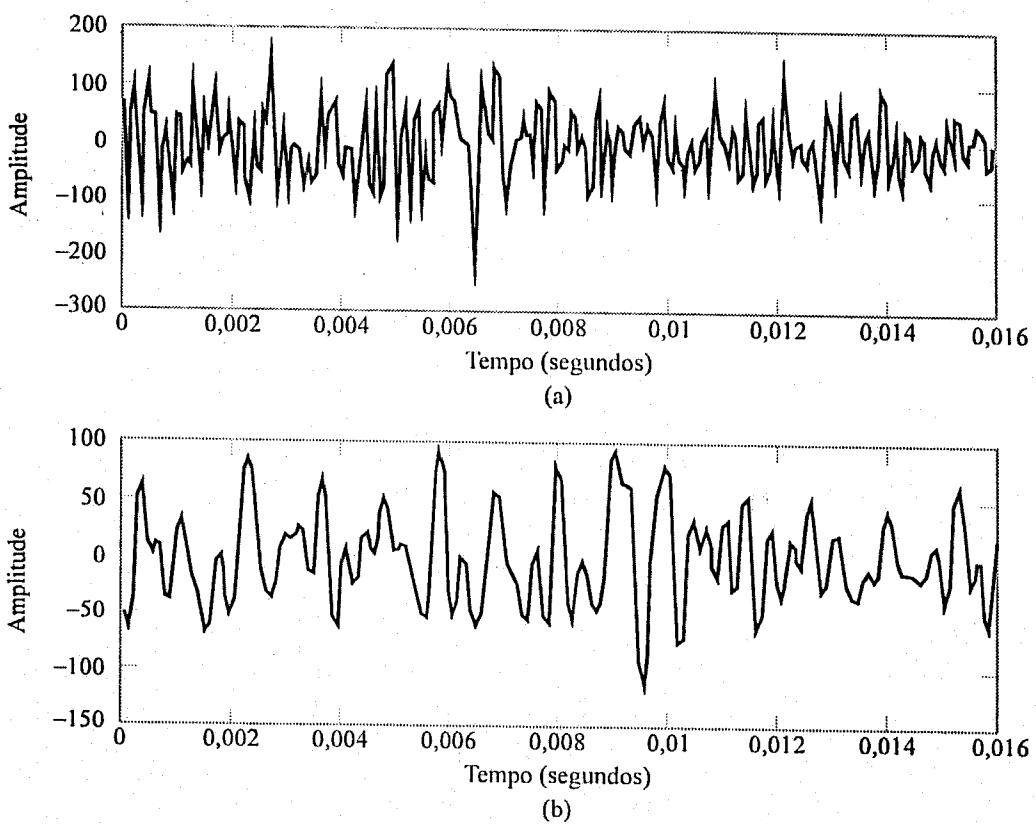
### ■ FILTRAGEM DE SINAIS DE FALA

O pré-processamento de sinais de fala é fundamental para muitas aplicações, como por exemplo, os sistemas de transmissão e armazenamento digitais da fala, reconhecimento automático de fala, e reconhecimento automático de quem fala. Os filtros digitais FIR se adaptam bem para o pré-processamento de sinais de fala por duas razões importantes:

1. Nas aplicações de processamento de fala, é fundamental manter um alinhamento de tempo preciso. A propriedade de fase linear *exata* inerente a um filtro digital FIR atende este requisito de maneira natural.
2. O problema da aproximação no projeto de filtros é muito simplificado pela propriedade de fase linear exata de um filtro digital FIR. Em especial, por não termos de lidar com distorção de retardo (fase), nossa única preocupação é a de aproximar uma resposta em módulo desejada.

Entretanto, há um preço a ser pago para se obter estes dois recursos desejáveis. Para projetarmos um filtro digital FIR com uma característica de corte abrupto, o comprimento do filtro tem de ser grande. Isto, por sua vez, produz uma resposta ao impulso com uma duração longa.

Nesta subseção, ilustraremos o uso de um filtro digital FIR para o processamento prévio de um sinal de fala real de modo que ele seja apropriado para transmissão por um canal telefônico. A Figura 8.21(a) mostra uma pequena porção da forma de onda de um sinal de fala produzido por uma pessoa falante do sexo feminino dizendo a frase: "This was easy for us" (Isto foi fácil para nós). A taxa de amostragem original deste sinal de fala foi 16 kHz, e o número total de amostras contidas na seqüência inteira foi 27.751. O espectro de módulo do sinal de fala, computado por meio de um algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT), é mostrado na Figura 8.22(a).



**FIGURA 8.21** (a) Forma de onda de sinal de fala bruto, contendo uma grande quantidade de ruído de alta freqüência. (b) Forma de onda do sinal de fala depois de passar por um filtro digital FIR passa-baixas de ordem  $M = 98$  e freqüência de corte  $\omega_c = 2\pi \times 3,1 \times 10^3$  rad/s.

Antes da transmissão, o sinal de fala é aplicado a um filtro digital FIR passa-baixas com as seguintes especificações:

Comprimento do filtro:  $M + 1 = 99$

Simétrico em torno do ponto médio para obter uma resposta em fase linear

Freqüência de corte  $\omega_c = 2\pi \times 3,1 \times 10^3$  rad/s

O projeto do filtro baseou-se no método de janelas, usando a *janela de Hanning* ou de *co-seno elevado*, o qual não deve ser confundido com a janela de Hamming. Esta nova janela é definida por

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \right], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.61)$$

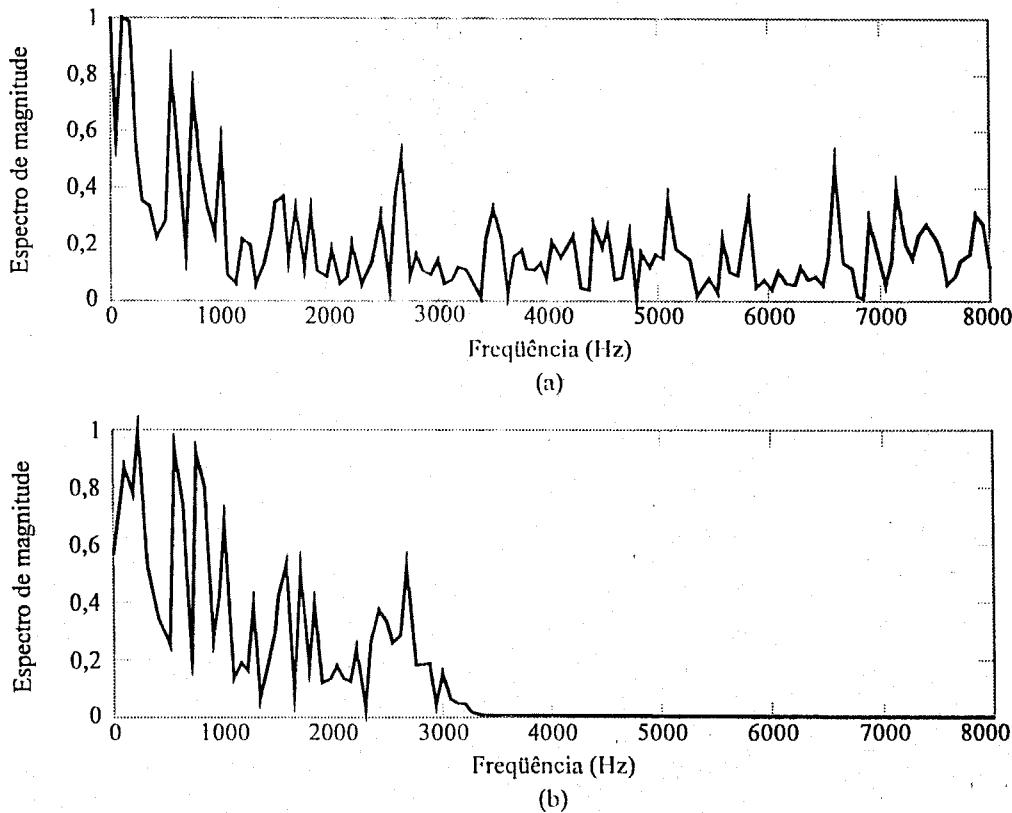
A janela de Hanning tende a zero, com inclinação nula nas bordas da janela [isto é,  $n = 0$  e  $n = M$ ].

A Figura 8.21(b) mostra a forma de onda do sinal de fala pós-filtrado. Seu espectro de módulo, novamente computado usando-se o algoritmo FFT, é mostrado na Figura 8.22(b). Ao comparar este espectro com o da Figura 8.22(a), vemos claramente o corte relativamente abrupto produzido pelo filtro FIR passa-baixas nas proximidades de 3,1 kHz.

Ao ouvirmos as versões pré-filtrada e pós-filtrada do sinal de fala, as seguintes observações foram feitas:

1. O sinal de fala pré-filtrado era áspero, com uma grande quantidade de ruídos de alta freqüência como, por exemplo, sons de cliques, estalidos e chiados.
2. O sinal pós-filtrado, em comparação, foi considerado um som muito mais suave, mais uniforme e natural.

A essência destas observações pode ser confirmada examinando-se 10 milisegundos das formas de onda de fala e seus espectros, mostradas nas Figuras 8.21 e 8.22, respectivamente.



**FIGURA 8.22** (a) Espectro de magnitude ou módulo de um sinal de fala previamente filtrado. (b) Espectro de magnitude de um sinal de fala pós-filtrado. Note o corte abrupto no espectro nas proximidades de 3.100 Hz.

Conforme mencionamos anteriormente, o sinal de fala original foi amostrado à taxa de 16 kHz, o que corresponde a um período de amostragem  $\mathcal{T} = 62,5 \mu\text{s}$ . A estrutura usada para implementar o filtro FIR foi similar à descrita na Figura 8.19. Ao fazermos passar o sinal de fala por este filtro com  $M + 1 = 99$  coeficientes, um retardamento de

$$\mathcal{T} \left( \frac{M}{2} \right) = 62,5 \times 49 = 3,0625 \text{ ms}$$

é introduzido no sinal de fala pós-filtrado. Este retardamento de tempo é claramente perceptível comparando-se a forma de onda do sinal de fala pós-filtrado da Figura 8.21(b) com a do sinal de fala previamente filtrado da Figura 8.21(a).

## 8.10 Filtros Digitais IIR

Várias técnicas foram desenvolvidas para o projeto de filtros digitais IIR. Nesta seção, descreveremos um método popular para convertermos funções de transferência analógicas em funções de transferência digitais. O método se baseia na *transformada bilinear*, a qual fornece uma correspondência única entre pontos no plano  $s$  com os do plano  $z$ :

A transformada bilinear é definida por

$$s = \left( \frac{2}{\mathcal{T}} \right) \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right) \quad (8.62)$$

em que  $\mathcal{T}$  é o intervalo de amostragem implicado associado com a conversão do domínio  $s$  para o domínio  $z$ . Para simplificar a questão, definiremos  $\mathcal{T} = 2$  a partir de agora. O projeto de filtro resultante é independente da escolha real de  $\mathcal{T}$ . Digamos que  $H_a(s)$  denote a função de transferência de um filtro analógico (tempo contínuo). A função de transferência do filtro digital correspondente é obtida substituindo-se a transformação bilinear da equação (8.62) em  $H_a(s)$ , como é mostrado por

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=((z-1)/(z+1))} \quad (8.63)$$

O que podemos dizer acerca das propriedades da função de transferência  $H(z)$  derivadas da equação (8.63)? Para responder esta pergunta, reescrevemos a equação (8.62) na forma (com  $T=2$ )

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

Colocando  $s = \sigma + j\omega$  nesta equação, podemos expressar a variável complexa  $z$  na forma polar

$$z = re^{j\theta}$$

em que o raio  $r$  e o ângulo  $\theta$  são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left[ \frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8.64)$$

e

$$\begin{aligned} \theta &= \arg\{z\} \\ &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{1+\sigma}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{1-\sigma}\right) \end{aligned} \quad (8.65)$$

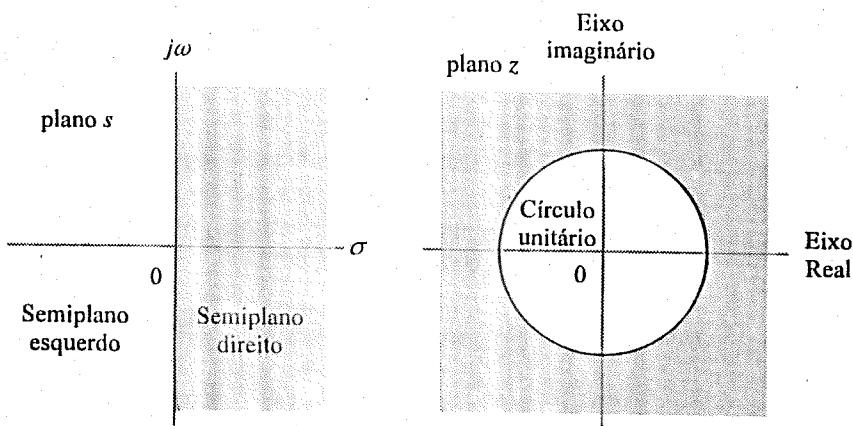
A partir das equações (8.64) e (8.65), vemos imediatamente que

- $r < 1$  para  $\sigma < 0$ .
- $r = 1$  para  $\sigma = 0$ .
- $r > 1$  para  $\sigma > 0$ .
- $\theta = 2\operatorname{tg}^{-1}(\omega)$  para  $\sigma = 0$ .

Conseqüentemente, podemos enunciar as propriedades da transformada bilinear da seguinte maneira:

1. O semiplano esquerdo do plano  $s$  é mapeado no interior do círculo unitário no plano  $z$ .
2. O eixo  $j\omega$  inteiro é mapeado numa revolução completa do círculo unitário no plano  $z$ .
3. O semiplano direito do plano  $s$  é mapeado no exterior do círculo unitário no plano  $z$ .

Estas propriedades são ilustradas na Figura 8.23.



**FIGURA 8.23** Ilustração das propriedades da transformada bilinear. O semiplano esquerdo do plano  $s$  (mostrado à esquerda) é mapeado no interior do círculo unitário no plano  $z$  (mostrado à direita). De maneira semelhante, o semiplano direito do plano  $s$  é mapeado no exterior do círculo unitário no plano  $z$ ; estas duas regiões correspondentes são mostradas sombreadas.

Uma implicação imediata da propriedade 1 é que se o filtro analógico representado pela função de transferência  $H_a(s)$  for estável e causal, o filtro digital dele derivado usando-se a transformada bilinear terá a garantia de ser também estável e causal. Uma vez que a transformada bilinear tem coeficientes reais, segue-se que  $H(z)$  terá coeficientes reais se  $H_a(s)$  tiver coeficientes reais. Conseqüentemente, a função de transferência  $H(z)$  resultante do uso da equação (8.63) é, de fato, fisicamente realizável.

► **Exercício 8.12** Qual é a correspondência dos pontos  $s = 0$  e  $s = \pm j\infty$  no plano  $s$  com o plano  $z$  usando-se a transformada bilinear?

**Resposta:**  $s = 0$  é mapeado em  $z = +1$ . Os pontos  $s = j\infty$  e  $s = -j\infty$  são mapeados imediatamente acima e imediatamente abaixo de  $z = -1$ , respectivamente.

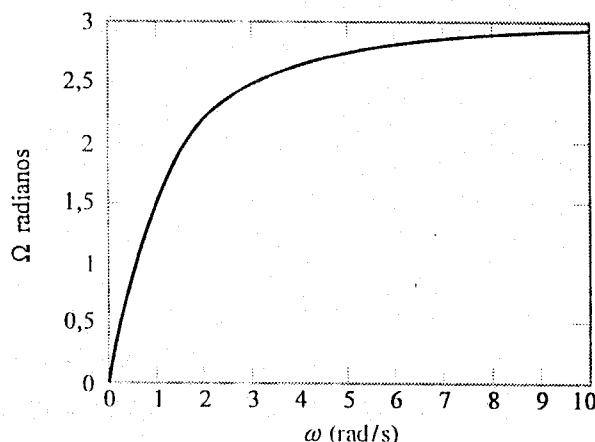
Para  $\sigma = 0$  e  $\theta = \Omega$ , a equação (8.65) se reduz a

$$\Omega = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\omega) \quad (8.66)$$

a qual é plotada na Figura 8.24 para  $\omega > 0$ . Note que a equação (8.66) tem simetria ímpar. A faixa infinitamente longa de freqüência  $-\infty < \omega < \infty$  de um filtro analógico (tempo contínuo) é comprimida não linearmente na faixa de freqüência finita  $-\pi < \Omega < \pi$  de um filtro digital (tempo discreto). Esta forma de distorção não linear é conhecida como *warping*. No projeto de filtros seletivos da freqüência em que a ênfase está na aproximação de uma resposta em módulo seção por seção, devemos compensar esta distorção linear fazendo um pré-warping das especificações de projeto do filtro analógico. Especificamente, as freqüências críticas (isto é, as freqüências da corte de faixa de passagem e as freqüências de corte da faixa de rejeição) prescritas sofrem pré-warping de acordo com a fórmula

$$\omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (8.67)$$

a qual é a inversa da equação (8.66).



**FIGURA 8.24** Plotagem gráfica da relação entre a freqüência  $\Omega$  pertencente ao domínio de tempo discreto e a freqüência  $\omega$  pertencente ao domínio de tempo contínuo:  $\Omega = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\omega)$ .

Para ilustrar o procedimento de pré-warping, façamos com que  $\Omega'_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , denotem as freqüências críticas que se exige que um filtro digital realize. Antes de aplicarmos a transformada bilinear, as freqüências críticas correspondentes do filtro de tempo contínuo sofrem pré-warping usando-se a equação (8.67) para se obter

$$\omega_k = \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega'_k}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.68)$$

Então, quando a transformada bilinear é aplicada à função de transferência do filtro analógico projetado usando-se as freqüências que sofreram pré-warping da equação (8.68), descobrimos na equação (8.66) que

$$\Omega_k = \Omega'_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.69)$$

Ou seja, o procedimento de pré-warping assegura que o filtro digital atenderá as exigências de projeto exatamente.

**EXEMPLO 8.7** Usando um filtro analógico com uma resposta de Butterworth de ordem 3, projete um filtro digital IIR passa-baixas com uma freqüência de corte  $\Omega_c = 0,2\pi$  de 3 dB.

**Solução:** A fórmula de pré-warping da equação (8.68) indica que a freqüência de corte do filtro analógico deve ser

$$\omega_c = \operatorname{tg}(0,1\pi) = 0,3429$$

Adaptando-se a equação (8.37) ao problema que se tem à frente, levando em conta o Exercício 8.2, a função de transferência do filtro analógico será

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c} + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_c^2} + \frac{s}{\omega_c} + 1\right)} \\ &= \frac{0,0403}{(s + 0,3429)(s^2 + 0,3429s + 0,1176)} \end{aligned} \quad (8.70)$$

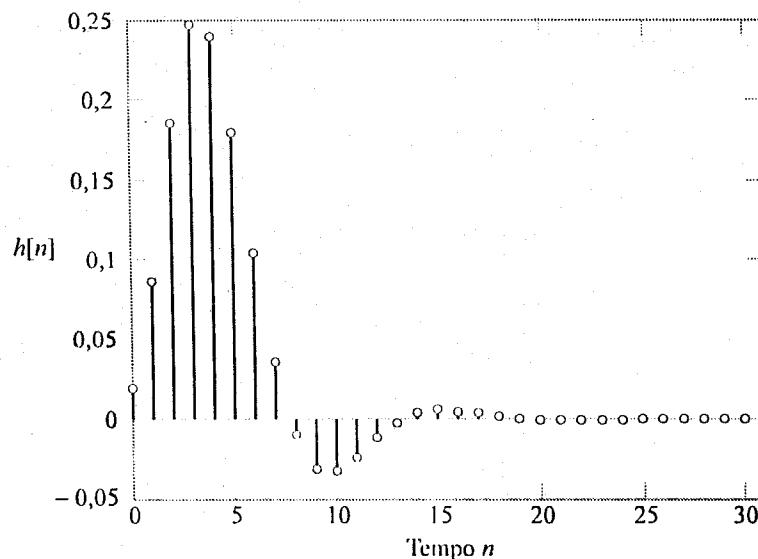
Conseqüentemente, usando a equação (8.63), obtemos

$$H(z) = \frac{0,0205(z+1)^3}{(z - 0,4893)(z^2 - 1,208z + 0,5304)} \quad (8.71)$$

A Figura 8.25 mostra a resposta ao impulso  $h[n]$  do filtro (isto é, a transformada  $z$  inversa de  $H(z)$  dado na equação (8.71)).

Na Seção 7.7, discutimos diferentes estruturas computacionais (isto é, formas em cascata e em paralelo) para implementar sistemas de tempo discreto. Levando em conta o material lá coberto, vemos imediatamente que a função transformada da equação (8.71) pode ser realizada usando-se uma cascata de duas seções, como mostra a Figura 8.26. A seção resultante da transformação bilinear do fator polar simples  $((s/\omega_c) + 1)$  em  $H_a(s)$  é chamada *seção de primeira ordem*.

Pela mesma razão, a seção resultante da transformação bilinear do fator polar quadrático  $((s/\omega_c)^2 + (s/\omega_c) + 1)$  em  $H_a(s)$  é chamada *seção de segunda ordem*. De fato, este resultado pode ser generalizado, podendo-se dizer que a aplicação da transformada bilinear a  $H_a(s)$  na forma fatorada resulta numa realização de  $H(z)$  que consiste numa cascata de seções de primeira ordem e de segunda ordem. Do ponto de vista prático, este tipo de estrutura para implementar um filtro digital tem um apelo intuitivo. Colocando  $z = e^{j\Omega}$  na equação (8.71) e plotando  $H(e^{j\Omega})$  contra  $\Omega$ , obtemos as respostas em módulo e em fase mostradas na Figura 8.27. Vemos que a faixa de passagem do filtro se estende até  $0,2\pi$ , conforme foi prescrita.



**FIGURA 8.25** Resposta ao impulso de um filtro passa-baixas IIR com resposta de Butterworth de ordem 3 e freqüência de corte  $\Omega_c = 0,2\pi$  de 3 dB.

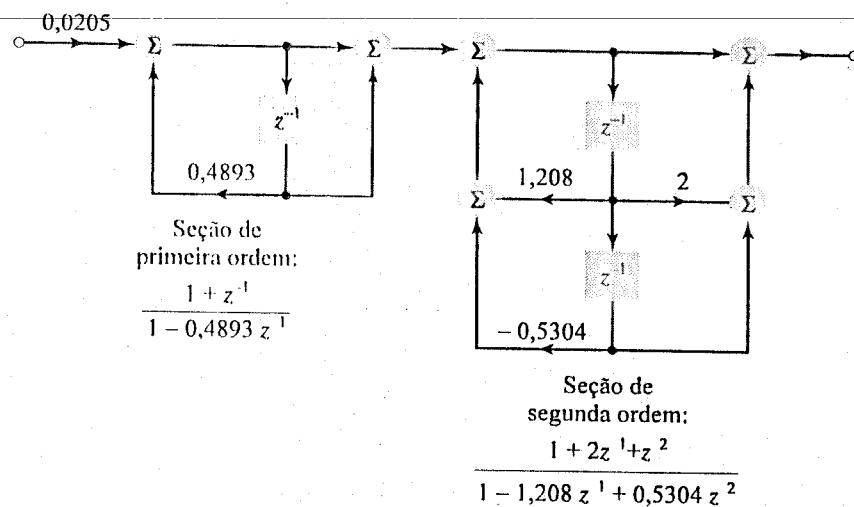


FIGURA 8.26 Implementação em cascata de filtro digital IIR passa-baixas, composto de uma seção de primeira ordem seguida de uma seção de segunda ordem.

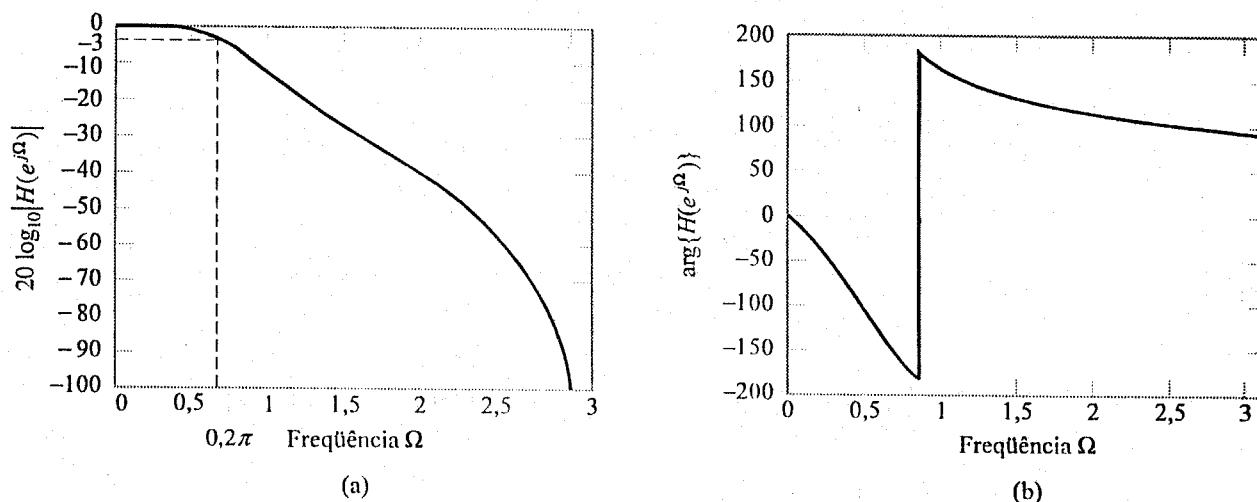


FIGURA 8.27 (a) Resposta em módulo de um filtro digital IIR passa-baixas caracterizado pela resposta ao impulso mostrada na Figura 8.25, plotada em decibéis. (b) Resposta em fase do filtro.

## 8.11 Distorção Linear

Na prática, as condições para transmissão sem distorções descritas na Seção 8.2 somente podem ser satisfeitas de maneira aproximada; o material apresentado nas seções anteriores testifica esta afirmação. Equivale a dizer que sempre há certa quantidade de distorção presente no sinal de saída de um sistema LTI físico, seja de tempo contínuo como de tempo discreto, devida a desvios na resposta em frequência do sistema das condições ideais descritas nas equações (8.5) e (8.6). Em especial, podemos distinguir dois componentes de distorção linear produzidos pela transmissão de sinais através de um sistema LTI:

1. *Distorção de amplitude*. Quando a resposta em módulo do sistema não é constante dentro da faixa de frequência de interesse, os componentes de frequência do sinal de entrada são transmitidos através do sistema com diferentes valores de ganho ou atenuação. Este efeito é chamado *distorção de amplitude*. A forma mais comum de distorção de amplitude é o excesso de ganho ou atenuação em uma ou ambas as extremidades da faixa de frequência de interesse.

2. *Distorção de fase.* A segunda forma de distorção linear surge quando a resposta em fase do sistema não é linear, em freqüências dentro da faixa de freqüências de interesse. Se o sinal de entrada for dividido num conjunto de componentes, cada um dos quais ocupa uma faixa estreita de freqüências, consideramos que cada um desses componentes está sujeito a um retardamento diferente ao passar pelo sistema, com o resultado de que o sinal de saída emerge com uma forma de onda diferente daquela do sinal de entrada. Esta forma de distorção linear é chamada *distorção de fase* ou *retardo*.

Enfatizamos a distinção entre um retardamento constante e um deslocamento de fase constante. No caso de um sistema LTI de tempo contínuo, um retardamento constante significa uma resposta em fase linear, ou seja,  $\arg\{H(j\omega)\} = -t_0\omega$ , em que  $t_0$  é o retardamento constante. Por outro lado, deslocamento de fase constante significa que  $\arg\{H(j\omega)\}$  é igual a alguma constante para todo  $\omega$ . Estas duas condições têm diferentes implicações. Um retardamento constante é um requisito para uma transmissão sem distorções. Um deslocamento de fase constante, por outro lado, provoca distorção de sinal.

Diz-se que um sistema LTI que apresenta de distorção linear é *dispersivo*, em termos de que os componentes de freqüência do sinal de entrada emergem com características de amplitude e fase que são diferentes daquelas do sinal de entrada original depois da transmissão através do sistema. O canal telefônico é um exemplo de sistema dispersivo.

## 8.12 Equalização

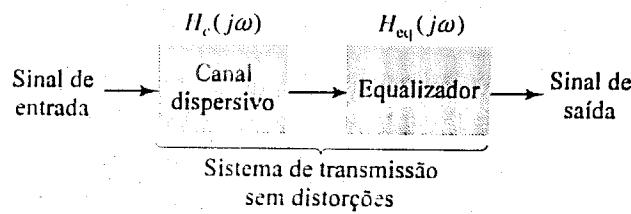
Para compensar a distorção linear, podemos usar uma rede conhecida como *equalizador*, conectada em cascata com o sistema em questão, como ilustra a Figura 8.28. O equalizador é projetado de tal maneira que, dentro da faixa de freqüência de interesse, as respostas em módulo e em fase globais desta conexão em cascata aproximam as condições para transmissão sem distorções dentro dos limites prescritos.

Considere, por exemplo, um canal de comunicação com resposta em freqüência  $H_c(j\omega)$ . Digamos que um equalizador de resposta em freqüência  $H_{eq}(j\omega)$  esteja conectado em cascata com o canal, como na Figura 8.28. A resposta em freqüência global desta combinação é igual a  $H_c(j\omega)H_{eq}(j\omega)$ . Para que a transmissão global através da conexão em cascata da Figura 8.28 seja sem distorções, é necessário que (veja a equação 8.3))

$$H_c(j\omega)H_{eq}(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad (8.72)$$

em que  $t_0$  é um retardamento de tempo constante; por conveniência de apresentação, definimos o fator de mudança de escala  $K$  da equação (8.3) como igual à unidade. Idealmente, portanto, a resposta em freqüência do equalizador é *inversamente relacionada* com a do canal, como é mostrado por

$$H_{eq}(j\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{H_c(j\omega)} \quad (8.73)$$



**FIGURA 8.28** Conexão em cascata de um canal dispersivo (LTI) e um equalizador para transmissão sem distorções.

Na prática o equalizador é projetado de forma que sua resposta em freqüência se aproxime do valor ideal da equação (8.73) de forma bastante estreita para que a distorção linear se reduza a um nível satisfatório.

A resposta em freqüência  $H_{\text{eq}}(j\omega)$  do equalizador da Equação (8.73) é formulada em tempo contínuo. Ainda que, na verdade, seja possível projetar o equalizador usando-se um filtro analógico, o método preferido é realizar o projeto em tempo discreto usando um filtro digital. Com a abordagem de tempo discreto, a saída do canal é amostrada antes da equalização. Dependendo da aplicação, a saída do equalizador pode ser convertida novamente num sinal de tempo contínuo ou deixado na forma de tempo discreto.

Um filtro que é bem apropriado para equalização é o filtro digital FIR, também chamado *equalizador com linha de retardo em estágios*. A estrutura desse filtro é descrita na Figura 8.19. Uma vez que a resposta em freqüência do canal é representada em termos da transformada de Fourier, empregaremos a representação por transformada de Fourier para a resposta em freqüência do filtro FIR. Se o intervalo de amostragem é  $\mathcal{T}$  segundos, então vemos na equação (4.27) que a resposta em freqüência do equalizador é

$$H_{\delta,\text{eq}}(j\omega) = \sum_{n=0}^M h[n] \exp(-jn\omega\mathcal{T}) \quad (8.74)$$

O subscrito  $\delta$  em  $H_{\delta,\text{eq}}(j\omega)$  destina-se a distinguir-lo de sua contraparte de tempo contínuo  $H_{\text{eq}}(j\omega)$ . Por conveniência de análise, presume-se que o número  $M + 1$  de coeficientes de filtro no equalizador seja ímpar; ou seja,  $M$  é par.

O objetivo do projeto de equalizadores é determinar os coeficientes de filtro  $h[0], h[1], \dots, h[M]$ , de forma que  $H_{\delta,\text{eq}}(j\omega)$  aproxime  $H_{\text{eq}}(j\omega)$  na equação (8.73) ao longo de uma faixa de freqüência de interesse, digamos,  $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ . Note que  $H_{\delta,\text{eq}}(j\omega)$  é periódica, com um período ocupando a faixa de freqüência  $-\pi/\mathcal{T} \leq \omega \leq \pi/\mathcal{T}$ . Consequentemente, escolhemos  $\mathcal{T} = \pi/\omega_c$ , de forma que um período de  $H_{\delta,\text{eq}}(j\omega)$  corresponda à faixa de freqüência de interesse. Digamos que

$$H_d(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}/H_c(j\omega), & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.75)$$

seja a resposta em freqüência que procuramos aproximar com  $H_{\delta,\text{eq}}(j\omega)$ . Realizamos esta tarefa usando uma variação do método de janela do projeto de filtros FIR, como descrevemos aqui:

1. Faça  $t_0 = (M/2)\mathcal{T}$ .
2. Tome a transformada de Fourier inversa de  $H_d(j\omega)$  para obter uma resposta desejada ao impulso  $h_d(t)$ .
3. Faça  $h[n] = w[n]h_d(n\mathcal{T})$ , em que  $w[n]$  é uma janela de comprimento  $(M + 1)$ . Observe que a operação de amostragem não provoca *aliasing* da resposta desejada na faixa  $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ , uma vez que escolhemos  $\mathcal{T} = \pi/\omega_c$ .

Tipicamente,  $H_c(j\omega)$  é dado numericamente em termos de seu módulo e fase, em cujo caso a integração numérica é usada para avaliar  $h_d(n\mathcal{T})$ . O número de termos,  $M + 1$ , é escolhido suficientemente grande para produzir uma aproximação satisfatória de  $H_d(j\omega)$ .

**EXEMPLO 8.8** Considere um canal simples cuja resposta em freqüência seja descrita pela resposta de Butterworth de primeira ordem

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\pi}$$

Projete um filtro FIR com 13 coeficientes (isto é,  $M = 12$ ) para equalizar o canal dentro da faixa de freqüência  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ .

**Solução:** Neste exemplo, o problema de equalização de canal é simples o bastante para que o resolvamos sem ter de recorrer ao uso da integração numérica. Com  $\omega_c = \pi$ , o intervalo de amostragem é  $\mathcal{T} = 1s$ . Agora, a partir da equação (8.75), temos

$$H_d(j\omega) = \begin{cases} \left(1 + \frac{j\omega}{\pi}\right)e^{-j6\omega}, & -\pi \leq \omega \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A parte não nula da resposta em frequência  $H_d(j\omega)$  consiste na soma de dois termos: a unidade e  $j\omega/\pi$ , exceto por um termo de fase linear. Estes dois termos são aproximados da seguinte maneira, respectivamente:

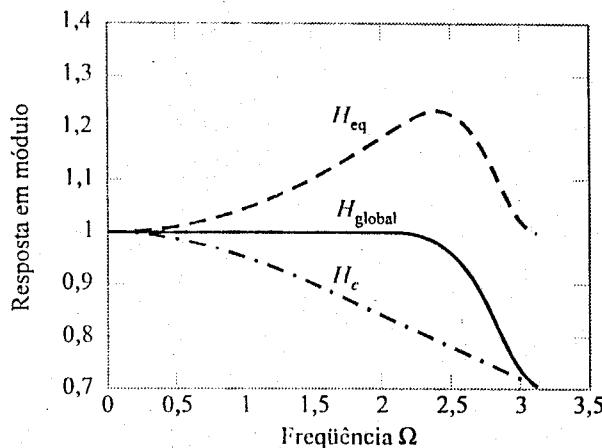
- O termo  $j\omega/\pi$  representa uma forma de diferenciação multiplicada por um fator. O projeto de um diferenciador que usa um filtro FIR foi discutido no Exemplo 8.6. Na verdade, avaliando a transformada de Fourier inversa de  $j\omega/\pi$  e então fazendo  $t = n$  para um período de amostragem  $\mathcal{T} = 1s$ , obtemos o resultado da equação, multiplicada por  $1/\pi$ . Dessa forma, usando o resultado obtido naquele exemplo, o qual incorporava a janela de Hamming de comprimento 13, e multiplicando-o por  $1/\pi$ , obtemos os valores listados na segunda coluna da Tabela 8.4.
- A transformada de Fourier inversa do termo da unidade é  $\text{sinc}(t)$ . Fazendo  $t = n\mathcal{T} = n$  e ponderando-o com a janela de Hamming de comprimento 13, obtemos os valores relacionados na coluna 4 da Tabela 8.4.

Adicionando estes dois conjuntos de valores, obtemos os coeficientes do filtro FIR com janelas de Hamming para o equalizador listados na última coluna da Tabela 8.4. Observe que este filtro é antissimétrico em torno do ponto médio,  $n = 6$ .

A Figura 8.29 exibe a superposição das respostas em módulo do canal, o equalizador FIR e o canal equalizado. As respostas são plotadas para a faixa  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Na Figura 8.29, vemos que a resposta em módulo do canal equalizado é essencialmente plana ao longo da faixa  $0 \leq \omega \leq 2,5$ . Em outras palavras, o filtro FIR com  $m = 12$  equaliza o canal em mais de 80% de sua faixa de passagem.

**TABELA 8.4 Coeficientes de Filtro para o Exemplo 8.8 sobre Equalização**

<i>n</i>	Transformada de Fourier Inversa de $j\omega/\pi$ com Janela de Hamming		Transformada de Fourier Inversa de 1 com Janela de Hamming		$h_d[n]$
	<i>n</i>	$h_d[n]$	<i>n</i>	$h_d[n]$	
0	-0,0042		0	0	-0,0042
1	0,0090		0	0	0,0090
2	-0,0247		0	0	-0,0247
3	0,0573		0	0	0,0573
4	-0,1225		0	0	-0,1225
5	0,2987		0	0	0,2987
6	0		1	1,0000	1,0000
7	-0,2987		0	0	-0,2987
8	0,1225		0	0	0,1225
9	-0,0573		0	0	-0,0573
10	0,0247		0	0	0,0247
11	-0,0090		0	0	-0,0090
12	0,0042		0	0	0,0042



**FIGURA 8.29** Resposta em módulo do canal de Butterworth de ordem 1; curva tracejada e pontilhada (— · — ·). Resposta em módulo do equalizador FIR de ordem  $M = 12$ ; curva tracejada (— —). Resposta em módulo do canal equalizado; curva contínua. A região plana da resposta em módulo global (equalizada) é estendida até em torno de  $\omega = 2,5$ .

## 8.13 Explorando Conceitos com o MATLAB

Neste capítulo, estudamos o projeto de filtros lineares e equalizadores. Embora estes dois sistemas ajam de forma própria em sinais de entrada, os seus propósitos são inteiramente diferentes. O objetivo da filtragem é produzir um sinal de saída com um conteúdo de freqüência especificado. Um equalizador, por outro lado, é usado para compensar alguma forma de distorção linear contida no sinal de entrada.

A *Signal Processing Toolbox* do MATLAB possui uma rica coleção de funções que são feitas sob medida para a análise e projeto de filtros digitais e equalizadores lineares. Nesta seção, exploraremos o uso de algumas destas funções como ferramentas para consolidar idéias e procedimentos de projeto descritos nas seções anteriores deste capítulo.

### ■ TRANSMISSÃO DE UM PULSO RETANGULAR ATRAVÉS DE UM FILTRO PASSA-BAIXAS IDEAL

No Exemplo 8.1, estudamos a resposta de um filtro passa-baixas ideal a um pulso de entrada retangular. Esta resposta, denotada por  $y(t)$ , é dada em termos da integral seno pela equação (8.20); ou seja,

$$y(t) = \frac{1}{\pi} [\text{Se}(a) - \text{Se}(b)]$$

em que

$$a = \omega_c \left( t - t_0 + \frac{T}{2} \right)$$

$$b = \omega_c \left( t - t_0 - \frac{T}{2} \right)$$

em que  $T$  é a duração do pulso,  $\omega_c$  é a freqüência de corte do filtro e  $t_0$  é o retardo de transmissão através do filtro. Por conveniência de apresentação, definimos  $t_0 = 0$ .

A expressão para  $y(t)$  mostra que a integral seno  $\text{Se}(u)$ , definida na equação (8.19), desempenha um papel predominante na determinação da resposta de um filtro passa-baixas ideal a uma entrada de pulso retangular. Infelizmente, não existe nenhuma solução analítica para esta integral. Portanto, recorremos ao uso de integração numérica para esta avaliação. Um procedimento comum para a

integração numérica é computar uma estimativa da área sob o integrando entre os limites de integração. Esse procedimento é chamado *técnica da quadratura*. A função do MATLAB

```
quad('function_name', 'a, b)
```

retorna a área sob o integrando entre os limites de integração, a e b. A função quad usa uma forma da regra de Simpson, na qual o integrando é uniformemente amostrado em [a, b]. Para a integral seno plotada na Figura 8.5, usamos os seguintes comandos:

```
>> x = -20:.1:20;
    For u = 1: Length(x),
        z(u) = quad('sincnopi', '0, x(u));
    end
```

os quais incorpora, o arquivo M denominado 'sincnopi.m' aqui descrito:

```
Function y = sincnopi(w)
y = ones(size(w));
i = find(w);
y(i) = sin(w(i))./w(i);
```

Retornando à questão de que estamos tratando, o arquivo M do MATLAB para computar a resposta ao pulso  $y(t)$  é a seguinte:

```
function [y]=sin_pr(wc, r)
%r é um parâmetro de resolução especificado pelo usuário

>> T=1;
>> to=0; % retardo de transmissão = 0
>> t=-T*1.01:r:T*1.01;
>> ta=wc*(t-to+T/2);
>> tb=wc*(t-to-T/2);
>> for q=1:Length(ta),
    z1(q)=quad('sincnopi', '0, ta(q));
end
>> for q=1:Length(tb),
    z2(q)=quad('sincnopi', '0, tb(q));
end
>> plot(t, (z1-z2)/pi)
axis(gca, 'YLim', [-.2 1.2])
axis(gca, 'XLim', [-1 1])
```

## ■ FILTROS DIGITAIS FIR

A *Signal Processing Toolbox* do MATLAB tem dois tipos de rotinas, a saber, **fir1** e **fir2**, para projetar filtros FIR baseados nos métodos de ajanelamento. Suas funções são resumidas aqui.

### 1. O comando

```
b=fir1(M, wc)
```

projeta um filtro digital passa-baixas de ordem  $M$  e retorna os coeficientes de filtro no vetor b de comprimento  $M+1$ . A freqüência de corte  $wc$  é normalizada de forma que ela se situe no intervalo  $[0, 1]$ , sendo que 1 corresponde à metade da taxa de amostragem, ou  $\Omega = \pi$ , em freqüência de tempo discreto. Como padrão, **fir1** usa uma janela de Hamming. Ela permite o uso de diversas outras janelas, inclusive as janelas retangular e de Hamming; no MATLAB, a janela retangular é chamada *boxcar*\*. O uso de uma janela desejada pode ser especificado com um argumento opcional no final do comando. Por exemplo, **fir1(M, wc, boxcar(M+1))** usa uma janela retangular. Note que, como padrão, o filtro é ajustado em escala de forma que o centro da primeira faixa de passagem tenha um módulo exatamente igual a um depois do ajanelamento.

\* N. de R.T.: Alusão ao vagão ferroviário fechado de carga.

2. `fir2` projeta um filtro FIR com resposta em freqüência arbitrária. O comando

`b=fir2(M,F,K)`

projeta um filtro de ordem M com resposta em freqüência especificada pelos vetores F e K. O vetor F é um vetor com pontos de freqüência na faixa [0, 1], em que 1 corresponde à metade da taxa de amostragem ou  $\Omega = \pi$ . O vetor K é um vetor que contém a resposta em módulo desejada nos pontos especificados em F. Os vetores F e K devem ter o mesmo comprimento. Como acontece com `fir1`, como padrão, `fir2` usa uma janela de Hamming; outras janelas podem ser especificadas com um argumento opcional no final do comando.

`fir1` foi usado para projetar os filtros digitais FIR considerados nos Exemplos 8.5 e 8.6. Em particular, no Exemplo 8.5 estudamos o método de janela para o projeto de um filtro passa-baixas de ordem M = 12, usando (a) uma janela retangular (`boxcar`) e (b) uma janela de Hamming. Usamos os seguintes comandos do MATLAB para projetar estes filtros e avaliar suas respostas em freqüência:

(a) *Janela retangular*

```
>> b=fir1(12,0.2,boxcar(13));
>> [H,w]=freqz(b,1,512);
>> db=20*log10(abs(H));
>> plot(w,db)
```

(b) *Janela de Hamming*

```
>> b=fir1(12,0.2,hamming(13));
>> [H,w]=freqz(b,1,512);
>> db=20*log10(abs(H));
>> plot(w,db)
```

No Exemplo 8.6, estudamos o projeto de um diferenciador de tempo discreto cuja resposta em freqüência é definida por

$$H_d(e^{j\Omega}) = j\Omega e^{-jM\Omega/2}$$

Aqui, novamente, examinamos o uso de uma janela retangular e de uma janela de Hamming como a base para projeto de filtros. Os comandos do MATLAB correspondentes para projetar estes filtros são os seguintes

```
>> taps=13; M=taps-1; %M - comprimento do filtro
>> n=0:M; f=n-M/2;
>> a = cos(pi*f) ./ f; % integração por partes como é feita
>> b = sin(pi*f) ./ (pi*f.^2); % na equação 8.59
>> h=a-b; % resposta ao impulso para a janelamento retangular
>> k=isnan(h); h(k)=0; % livre-se da NaN
>> [H,w]=freqz(h,1,512,2*pi);
>> hh=hamming(taps)'.*h; % aplique a janela de Hamming
>> [HH,w]=freqz(hh,1,512,2*pi);
```

## ■ PROCESSANDO SINAIS DE FALA

A filtragem de sinais de fala foi usada como uma ilustração na Seção 8.9. O filtro lá considerado foi o filtro passa-baixas FIR projetado usando-se a janela de Hamming. Obtivemos um *insight* sobre o efeito da filtragem comparando os espectros de sinais de fala bruto e filtrado. Uma vez que os dados de fala representam um sinal de tempo contínuo, a transformada de Fourier é a representação de Fourier apropriada. Aproximaremos a transformada de Fourier avaliando a série de Fourier de tempo discreto de uma seção amostrada de duração finita de fala usando o comando `fft`, conforme discutimos no Capítulo 4. Dessa forma, os comandos do MATLAB para estudarmos o efeito da filtragem em sinais de fala são os seguintes:

```
>> load spk-sam % carregue sinais de fala
>> b=fir1(98,31/80,hanning(99));
>> filt_sp=filter(b,1,speech);
>> f=0:8000/(127):8000; % taxa de amostragem = 16.000Hz
>> subplot(2,1,1)
```

```
>> spect=fft(speech,256); % speech refere-se a dados de fala
>> plot(f,abs(spect(1:128))/max(abs(spect(1:128))))
>> xlabel('freqüência')
>> subplot(2,1,2)
>> filt_spect=fft(filt_sp,256);
>> plot(f,abs(filt_spect(1:128))/max(abs(filt_spect(1:128))))
```

### ■ FILTROS DIGITAIS IIR

No Exemplo 8.7, usamos um filtro analógico como base para o projeto de um filtro passa-baixas IIR com freqüência de corte  $\Omega_c$ . É uma questão simples projetarmos esse tipo de filtro digital usando a *Signal Processing Toolbox*. Para o problema apresentado no Exemplo 8.8, a exigência é projetarmos um filtro digital IIR passa-baixas com uma resposta de Butterworth de ordem 3.

O comando do MATLAB

```
[b,a]=butter(N,w)
```

projeta um filtro digital IIR passa-baixas com resposta de Butterworth e ordem N e retorna os coeficientes dos polinômio do numerador e do denominador da função de transferência nos vetores b e a, respectivamente, de comprimento  $N+1$ . A freqüência de corte w do filtro deve ser normalizada a fim de que ela se situe no intervalo [0, 1], sendo que 1 corresponde a  $\Omega = \pi$ .

Dessa forma, os comandos para projetar o filtro digital IIR do Exemplo 8.7 e a avaliação de sua resposta em freqüência são os seguintes:

```
>> [b,a]=butter(3,0.2);
>> [H,w]=freqz(b,a,512);
>> mag=20*log10(abs(H));
>> plot(w,mag)
>> phi=angle(H);
>> phi=(180/pi)*phi; % converte de radianos para graus
>> plot(w,phi)
```

► **EXERCÍCIO 8.13** Na experiência sobre modulação em faixa lateral dupla e portadora suprimida descrita na Seção 5.11, usamos um filtro digital passa-baixas de Butterworth com as seguintes especificações:

Ordem do filtro 3

Freqüência de corte de 0,125 Hz

Taxa de amostragem de 10 Hz

Use o comando *butter* do MATLAB para projetar este filtro. Plete a resposta em freqüência do filtro, demonstrando que ele satisfaz as especificações da experiência acima mencionada.

### ■ EQUALIZAÇÃO

No Exemplo 8.9, consideramos o projeto de um filtro digital FIR para equalizar um canal com resposta em freqüência

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\omega/\pi)}$$

A resposta em freqüência desejada do equalizador é

$$H_d(j\omega) = \begin{cases} \left(1 + \frac{j\omega}{\pi}\right) e^{-jM\omega/2}, & -\pi < \omega \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $M$  é o comprimento do equalizador. Seguindo o procedimento descrito no Exemplo 8.9, observamos que o equalizador consiste em dois componentes conectados em paralelo: um filtro passa-baixas ideal e um diferenciador. Supondo o uso de uma janela de Hamming de comprimento  $M + 1$ , podemos recorrer aos comandos do MATLAB usados nos Exemplos 8.1 e 8.6. O conjunto de comandos correspondente para projetar o equalizador e avaliar sua resposta em freqüência pode, dessa forma, ser formulado da seguinte maneira:

```

>> % obtenha uma resposta do canal
>> w=0:pi/(length(hh)-1):pi;
>> den=sqrt(1+(w/pi).^2);
>> Hchan=1./den;

>> % obtenha a resposta do equalizador
>> taps=13; M=taps-1; % M - comprimento do filtro
>> n=0:M; f=n-M/2;
>> a = cos(pi*f) ./ f; % integração por partes como foi feito
>> b = sin(pi*f) ./ (pi*f.^2); % na equação 8.59
>> h=a-b; % resposta ao impulso
>> k=isnan(h); h(k)=0; % Livre-se de NaN
>> hh = (hamming(taps)'.*h)/pi;
>> k=fftshift(ifft(ones(13,1)).*hamming(13));
>> [Heq,w]=freqz(hh+k',1,512,2*pi);

>> % obtenha a resposta em módulo do canal equalizado
>> Hcheq=abs(Heq).*Hchan';
>> hold on
>> plot(w,abs(Heq))
plot(w,abs(Hchan))
plot(w,abs(Hcheq))
hold off

```

## 8.14 Resumo

Neste capítulo, discutimos os procedimentos para o projeto de dois importantes blocos de construção para sistemas e processamento de sinais — os filtros lineares e equalizadores — e os exploramos usando o MATLAB. A finalidade de um filtro é separar sinais baseando-se no conteúdo de freqüência dos mesmos. A finalidade de um equalizador é compensar a distorção linear produzida pela transmissão de sinais através de um canal dispersivo.

Filtros analógicos seletivos de freqüência podem ser realizados usando-se indutores e capacitores. As redes resultantes são chamadas filtros passivos; o projeto deles baseia-se em idéias de tempo contínuo. Alternativamente, podemos usar filtros digitais cujo projeto se baseia em conceitos de tempo discreto. Os filtros digitais são de dois tipos: filtros de resposta ao impulso de duração finita (FIR) e resposta ao impulso de duração infinita (IIR).

Os filtros digitais FIR são caracterizados por memória finita e estabilidade BIBO; eles podem ser projetados para ter resposta em fase linear. Os filtros digitais IIR têm memória infinita; por conseguinte, eles são capazes de realizar uma resposta em módulo prescrita com um comprimento de filtro menor do que aquilo que é possível com filtros FIR.

Para o projeto de filtros digitais FIR, podemos usar o método de janela, em que uma janela é usada para fornecer um compromisso entre a largura de faixa de transição e as oscilações (*ripple*) de faixa de passagem/faixa de rejeição. Para o projeto de filtros digitais IIR, podemos iniciar com uma função de transferência de tempo contínuo apropriada (por exemplo função de Butterworth ou de Chebyshev) e depois aplicar a transformada bilinear. Ambos os filtros digitais podem ser projetados diretamente a partir das especificações prescritas usando-se procedimentos auxiliados por computador. Aqui, faz-se um compromisso entre a complexidade computacional algorítmica e um projeto mais eficiente.

Voltando-nos finalmente para a questão da equalização, o método mais comumente usado na prática envolve um filtro digital FIR. O problema central aqui é avaliar os coeficientes de filtro de tal forma que quando o equalizador estiver conectado em cascata com um canal de comunicação, digamos, a combinação dos dois aproxime um filtro sem distorções.

**LEITURA ADICIONAL**

1. Os textos clássicos para síntese de filtros passivos incluem:
  - » Guillemin, E.A, *Synthesis of Passive Networks* (Wiley, 1957)
  - » Tuttle, D. F. Jr., *Network Synthesis* (Wiley, 1958)
  - » Weinberg, L., *Network Analysis and Synthesis* (McGraw-Hill, 1962)
2. A janela de Hamming e a janela de Hanning (também chamada janela de Hann) recebem esses nomes de seus respectivos criadores: Richard W. Hamming e Julius von Hann. O termo janela de "Hanning" foi introduzido por Blackman e Tukey em seu livro:
  - » Blackman, R. B. e J. W. Tukey, *The Measurement of Power Spectra* (Dover Publications, 1958).

Uma discussão a respeito do método de janela para o projeto de filtros digitais FIR seria incompleta sem que mencionássemos a *janela de Kaiser*, que recebeu este nome de James F. Kaiser. Ela é definida em termos de um parâmetro ajustável, denotado por  $a$ , que controla o compromisso entre a largura do lóbulo principal e o nível do lóbulo lateral. Quando  $a$  tende a zero, a janela de Kaiser torna-se simplesmente a janela retangular. Para obter uma descrição sucinta da janela de Kaiser, veja:

  - » Kaiser, J.F., "Nonrecursive digital filter using the  $I_0 - \sinh$  window function," *Selected Papers in Digital Signal Processing, II*, editado por The Digital Signal Processing Committee, IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing Society, pp. 123-126 (IEEE Press, 1975)
3. Os filtros digitais foram descritos pela primeira vez nos seguintes livros:
  - » Gold, B. e C. M. Rader, *Digital Processing of Signals* (McGraw-Hill, 1969)
  - » Kuo, F. e J. F. Kaiser, editores, *System Analysis by Digital Computer* (Wiley, 1966)
4. Para obter um tratamento avançado dos filtros digitais, veja os seguintes livros:
  - » Antoniou, A., *Digital Filters: Analysis, Design, and Applications*, segunda edição (McGraw-Hill, 1993)
  - » Mitra, S. K., *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach* (McGraw-Hill, 1998)
  - » Oppenheim, A. V. e R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, segunda edição (Prentice-Hall, 1999)
  - » Parks, T. W. e C. S. Burrus, *Digital Filter Design* (Wiley, 1987)
  - » Rabiner, L. R. e B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing* (Prentice Hall, 1975)
5. Em relação a livros sobre processamento de fala que usa técnicas de filtragem digital, veja os livros:
  - » Rabiner, L. R. e R. W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signals* (Prentice Hall, 1978)
  - » Deller, J., J. G. Proakis e J. H. L. Hanson, *Discrete-Time Processing of Speech Signals* (Prentice Hall, 1993)
6. Para uma discussão a respeito de equalização, veja o livro clássico:
  - » Lucky, R. W., J. Salz e E. J. Weldon, Jr., *Principles of Data Communication* (McGraw-Hill, 1968)

A equalização também é discutida nos seguintes livros:

  - » Haykin, S., *Communications Systems*, Terceira edição (Wiley, 1994)
  - » Proakis, J. G. *Digital Communications*, Terceira edição (McGraw-Hill, 1995)

## PROBLEMAS

- 8.1** Um pulso retangular de duração  $1-\mu s$  é transmitido através de um canal passa-baixas. Sugira um valor pequeno o bastante para a freqüência de corte do canal, de forma que o pulso seja reconhecível na saída do filtro.

- 8.2** Suponhamos que, para determinado sinal  $x(t)$ , o valor da integral do sinal em um intervalo  $T$  seja necessário, como é mostrado por

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

- (a) Mostre que  $y(t)$  pode ser obtido transmitindo-se  $x(t)$  através de um filtro que possui a função de transferência dada por

$$H(j\omega) = T \operatorname{sinc}(\omega T/2\pi) \exp(-j\omega T/2)$$

- (b) Supondo o uso de um filtro passa-baixas ideal, determine a saída de filtro no instante  $t = T$  devida a uma função degrau aplicada ao filtro no instante  $t = 0$ . Compare o resultado com a saída correspondente do integrador ideal.

*Nota:*  $\operatorname{Se}(\pi) = 1,85$  e  $\operatorname{Se}(\infty) = \pi/2$ .

- 8.3** Derive as equações (8.31) e (8.32), definindo as freqüências de corte da faixa de passagem e faixa de rejeição de um filtro de Butterworth de ordem  $N$ .

- 8.4** Considere um filtro passa-baixas de Butterworth de ordem  $N = 5$  e freqüência de corte  $\omega_c = 1$ .

- (a) Encontre os  $2N$  polos de  $H(s)H(-s)$ .

- (b) Determine  $H(s)$ .

- 8.5** Mostre que, para um filtro passa-baixas de Butterworth, as seguintes propriedades são satisfatórias:

- (a) A função de transferência  $H(s)$  tem um pôlo em  $s = -\omega_c$  para  $N$  ímpar.

- (b) Todos os polos da função de transferência  $H(s)$  aparecem na forma de conjugado complexo para  $N$  par.

- 8.6** O polinômio do denominador da função de transferência de um filtro protótipo passa-baixas de Butterworth de ordem  $N = 5$  é definido por

$$(s+1)(s^2 + 0,618s + 1)(s^2 + 1,618s + 1)$$

- Encontre a função de transferência do filtro passa-altas correspondente com freqüência de corte  $\omega_c = 1$ . Plote a resposta em módulo do filtro.

- 8.7** Considere novamente o filtro protótipo passa-baixas de ordem  $N = 5$  descrito no Problema 8.6. A exigência é modificar a freqüência de corte do filtro para algum valor arbitrário  $\omega_c$ . Encontre a função de transferência deste filtro.

- 8.8** Para a função de transferência passa-baixas  $H(s)$  especificada no Exemplo 8.3, encontre a função de transferência do filtro passa-faixa correspondente com freqüência central ou média de faixa (*midband*)  $\omega_0 = 1$  e largura de faixa  $B = 0,1$ . Pinte a resposta em módulo do filtro.

- 8.9** Um filtro protótipo passa-baixas deve ser transformado num filtro de rejeição de faixa com freqüência central de faixa de rejeição  $\omega_0$ . Sugira uma transformação de freqüência apropriada para fazer esta transformação.

- 8.10** Um filtro digital FIR tem um total de  $M + 1$  coeficientes, em que  $M$  é um número inteiro par. A resposta ao impulso do filtro é simétrica em relação ao  $(M/2)$ -ésimo ponto:

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M$$

- (a) Encontre a resposta em módulo do filtro.

- (b) Mostre que este filtro tem uma resposta em fase linear.

Conseqüentemente, mostre que não existem restrições para a resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  tanto em  $\Omega = 0$  como em  $\Omega = \pi$ . Este filtro é rotulado como tipo I.

- 8.11** Suponhamos que no Problema 8.10 os  $M + 1$  coeficientes do filtro digital FIR satisfaçam a condição de antisimetria com respeito ao  $(M/2)$ -ésimo ponto:

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq \frac{M}{2} - 1$$

Neste caso, mostre que a resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  do filtro deve satisfazer as duas condições seguintes:  $H(e^{j0}) = 0$  e  $H(e^{j\pi}) = 0$ . Mostre também que o filtro tem uma resposta em fase linear. Este filtro é rotulado como tipo III.

- 8.12** Nos Problemas 8.10 e 8.11, o comprimento de filtro  $M$  é um número inteiro par. Neste problema e no seguinte, o comprimento de filtro  $M$  é um número inteiro ímpar. Suponhamos que a resposta ao impulso  $h[n]$  do filtro seja simétrica em torno do ponto não inteiro  $n = M/2$ . Digamos que

$$b[k] = 2h[(M+1)/2 - k], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2$$

Encontre a resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  do filtro em termos de  $b[k]$ . Conseqüentemente, mostre que:

- (a) A resposta em fase do filtro é linear.

- (b) Não há qualquer restrição em  $H(e^{j0})$ , mas  $H(e^{j\pi}) = 0$ .

O filtro considerado neste problema é rotulado como tipo II.

- 8.13** Prosseguindo com o Problema 8.12, que envolve um filtro digital FIR de comprimento  $M$  que é um número inteiro ímpar, suponhamos que a resposta ao impulso  $h[n]$  do filtro seja antissimétrica em torno do ponto não inteiro  $n = M/2$ . Digamos que

$$c[k] = 2h[(M+1)/2 - k], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2$$

Encontre a resposta em freqüência  $H(e^{j\Omega})$  do filtro em termos de  $c[k]$ . Conseqüentemente, mostre que:

- (a) A resposta em fase do filtro é linear.
- (b)  $H(e^{j0}) = 0$ , mas não há qualquer restrição em  $H(e^{j\pi})$ .

O filtro considerado neste problema é rotulado como tipo IV.

- 8.14** Precisa-se que um filtro digital FIR tenha um zero em  $z = 1$  para sua função de transferência  $H(z)$ . Encontre a condição que a resposta ao impulso  $h[n]$  do filtro deve satisfazer para que esta exigência seja realizada.

- 8.15** Na Seção 8.9, apresentamos um procedimento para derivar um filtro digital FIR usando-se o método de janelas. Neste problema, queremos avançar dois passos, como descrevemos aqui:

- (a) Defina

$$h_d[n] = \begin{cases} h_d[n], & -M/2 \leq n \leq M/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $h_d[n]$  é a resposta ao impulso desejada para uma resposta em freqüência com fase nula. A resposta em fase de  $h_d[n]$  também é nula.

- (b) Tendo determinado  $h_d[n]$ , desloque-o para a direita  $M/2$  amostras. Este segundo passo torna o filtro causal.

Mostre que este procedimento é equivalente ao descrito na Seção 8.9.

- 8.16** A equação (8.59) define a resposta ao impulso  $h_d[n]$  de um filtro digital FIR usado como um diferenciador que possui uma janela retangular. Mostre que  $h_d[n]$  é antissimétrico, ou seja,

$$h[n-M] = -h[n], \quad 0 \leq n \leq M/2 - 1$$

em que  $M$  é o comprimento do filtro, o qual se presume que seja par. Levando em conta o Problema 8.11, o que você pode dizer a respeito da resposta em freqüência deste diferenciador em particular? Confira sua resposta em relação às respostas em módulo mostradas na Figura 8.20.

- 8.17** As equações (8.64) e (8.65) pertencem à transformada bilinear

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

Como estas equações são modificadas para

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

em que  $T$  é o intervalo de amostragem?

- 8.18** É possível que um filtro digital IIR seja instável. Como essa condição pode surgir? Supondo que seja usada a transformada bilinear, onde alguns dos polos da função de transferência analógica correspondente teriam de situar-se para que isto aconteça?

- 8.19** A Figura 8.26 mostra uma realização em cascata do filtro digital IIR especificado na equação (8.71). Formule uma forma direta II para realizar esta função de transferência.

- 8.20** Na Seção 8.10, descrevemos o método da transformada bilinear para o projeto de filtros digitais IIR. Aqui, consideramos outro método, chamado *método de invariância de impulso* para projeto de filtros. Neste procedimento para transformar um filtro de tempo contínuo (analógico) num filtro de tempo discreto (digital), a resposta ao impulso  $h_a(t)$  do filtro de tempo contínuo é escolhida como amostras igualmente espaçadas da resposta ao impulso do filtro de tempo contínuo  $h_a(t)$ ; ou seja,

$$h[n] = T h_a(nT)$$

em que  $T$  é o intervalo de amostragem. Digamos que

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - d_k}$$

denote a função de transferência do filtro de tempo contínuo. Mostre que a função de transferência do filtro de tempo discreto correspondente obtido usando-se o método da invariância de impulso é dada por

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\bar{A}_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}}$$

- 8.21** As equações (8.73) definem a resposta em freqüência de um equalizador para lidar com a distorção linear produzida por um sistema LTI de tempo contínuo. Formule a relação correspondente de um equalizador usando para lidar com a distorção linear produzida por um sistema LTI de tempo discreto.

- 8.22** Considere um equalizador com linha de retardo com estágios cuja resposta em freqüência é especificada na equação (8.84). Teoricamente, este equalizador pode compensar qualquer distorção linear, simplesmente tornando o número de coeficientes,  $M + 1$ , do equalizador, suficientemente grande. Qual é o preço de se tornar  $M$  grande? Justifique sua resposta.

- 8.23** Alguns sistemas de rádio sofrem de distorção *multipath*, a qual é causada pela existência de mais de um caminho de propagação entre o transmissor e o receptor. Considere um canal regido pela relação de entrada e saída

$$y(t) = K_1 x(t - t_{01}) + K_2 x(t - t_{02})$$

em que  $x(t)$  é a entrada,  $y(t)$  é a saída,  $K_1$  e  $K_2$  são constantes, e  $t_{01}$  e  $t_{02}$  representam retardos de transmissão. É proposto o uso do filtro digital FIR da figura 8.19 para equalizar a distorção *multipath* produzida por este canal.

- (a) Avalie a função de transferência do canal.
- (b) Avalie os coeficientes do equalizador, supondo que  $K_2 << K_1$  e  $t_{02} > t_{01}$ .

#### ► Experiências no Computador

- 8.24** Projete um filtro digital FIR passa-baixas com um total de 23 coeficientes. Use uma janela de Hamming para o projeto. A freqüência de corte do filtro é  $\omega_c = \pi/3$ .

- (a) Pinte a resposta ao impulso do filtro.
- (b) Pinte a resposta em módulo do filtro.

- 8.25** Projete um diferenciador usando um filtro digital FIR de ordem  $M = 100$ . Para este projeto, use (a) uma janela retangular e (b) uma janela de Hamming. Em cada caso, pinte a resposta ao impulso e a resposta em módulo do filtro.

- 8.26** Você tem uma seqüência de dados com taxa de amostragem de  $2\pi \times 8000$  rad/s. Um filtro digital IIR passa-baixas é necessário para processar esta seqüência de dados para satisfazer as seguintes especificações:

Freqüência de corte  $\omega_c = 2\pi \times 800$  rad/s

Atenuação em  $2\pi \times 1200$  rad/s = 15 dB

- (a) Supondo uma resposta de Butterworth, determine um valor apropriado para a ordem de filtro  $N$ .
- (b) Usando a transformada bilinear, projete o filtro.
- (c) Pinte a resposta em módulo e a resposta em fase do filtro.

- 8.27** Projete um filtro FIR passa-altas com resposta de Butterworth. As especificações de filtro são as seguintes: ordem de filtro  $N = 5$  e freqüência de corte  $\omega_c = 0,6$ .

- 8.28** Considere um canal cuja resposta em freqüência seja descrita pela resposta de Butterworth de segunda ordem

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega/\pi)^2}$$

Projete um filtro FIR com 95 coeficientes para equalizar este canal ao longo da faixa de freqüência  $-\pi < \omega \leq \pi$ .

# 9

## APLICAÇÃO EM SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO



### 9.1 Introdução

Realimentação (*feedback*) é definida como o *retorno de uma fração do sinal de saída de um sistema para sua entrada*. Ela pode acontecer num sistema de duas maneiras.

- A realimentação está *naturalmente* presente no sistema, em termos de que ela é uma parte integrante do mecanismo físico subjacente responsável pela operação do sistema.
- A realimentação é aplicada *externamente* no sistema, com um propósito específico em mente.

É com esta última forma de realimentação que nos preocuparemos aqui.

A aplicação de realimentação é motivada por diversas propriedades desejáveis:

- Redução na sensibilidade do ganho de um sistema a variações de parâmetro devidas a variações na tensão da fonte de energia, condições ambientais etc
- Redução no efeito de perturbações externas (por exemplo, ruído) sobre o desempenho de um sistema
- Melhoria no comportamento linear de um sistema ao reduzir a distorção devida a efeitos não lineares no sistema

Estes benefícios são de profunda importância para a engenharia. Entretanto, eles são obtidos à custa de um comportamento de sistema mais complicado. Há também a potencial possibilidade de que um sistema de realimentação possa tornar-se instável, a menos que cuidados especiais sejam tomados no projeto do sistema.

Iniciamos o estudo dos sistemas de realimentação lineares neste capítulo descrevendo alguns conceitos de realimentação básicos, seguindo-se discussões da análise da sensibilidade, do efeito da realimentação sobre perturbações externas, e análise da distorção. Este material introdutório sobre a teoria da realimentação linear constitui a motivação para duas aplicações importantes: amplificadores operacionais e sistemas de controle realimentados, os quais são discutidos nesta ordem. O tópico seguinte a ser discutido é o problema da estabilidade, o qual se apresenta de maneira proeminente no estudo dos sistemas de realimentação. Duas abordagens são seguidas aqui: uma abordagem baseia-se na resposta natural de um sistema de realimentação, e a outra baseia-se na resposta em freqüência do sistema. Um outro tópico importante coberto próximo ao fim do capítulo é o de um sistema de dados amostrados, o qual é um sistema de controle que usa um computador para fazer o controle. O estudo de sistemas de dados amostrados é importante não somente no contexto da engenharia, mas também no contexto teórico: ele combina o uso da transformada  $z$  e da transformada de Laplace num único tópico.

## 9.2 Conceitos Básicos de Realimentação

A Figura 9.1(a) mostra o diagrama de blocos de um sistema de realimentação em sua forma mais básica. O sistema consiste em três componentes conectados entre si para formar uma única malha de realimentação:

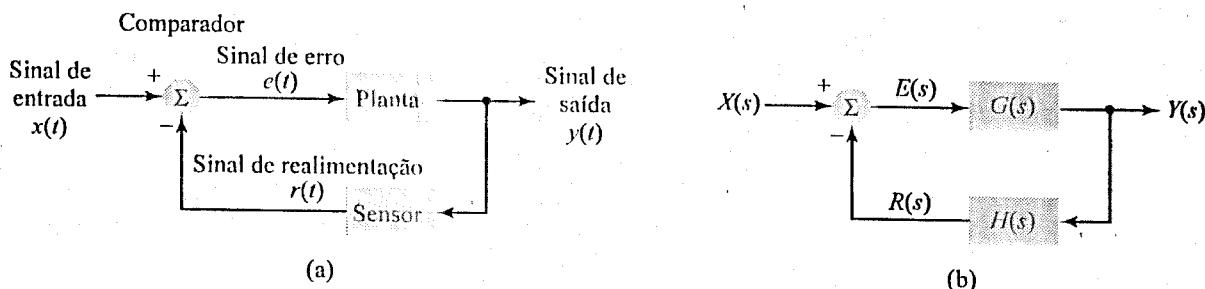
- ▶ Uma *planta*, a qual age a partir de um *sinal de erro*  $e(t)$  para produzir o sinal de saída  $y(t)$
- ▶ Um *sensor*, o qual mede o sinal de saída  $y(t)$  para produzir um *sinal de realimentação*  $r(t)$
- ▶ Um *comparador*, o qual calcula a diferença entre o sinal de entrada  $x(t)$  aplicado externamente (referência) e o sinal de realimentação  $r(t)$  para produzir o sinal de erro  $e(t)$  como é mostrado por

$$e(t) = x(t) - r(t) \quad (9.1)$$

A terminologia aqui usada pertence mais estreitamente a um sistema de controle, mas pode ser prontamente adaptada para lidar com um amplificador realimentado.

Naquilo que exporemos a seguir, supomos que a dinâmica da planta e a dinâmica do sensor da Figura 9.1(a) são ambas modeladas como sistemas LTI. Dadas as descrições de domínio de tempo de ambas, podemos continuar a relacionar o sinal de saída  $y(t)$  com o sinal de entrada  $x(t)$ . Entretanto, achamos mais conveniente trabalhar com transformadas de Laplace e fazer a formulação no domínio  $s$  complexo, como é descrito na Figura 9.1(b). Digamos que  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $R(s)$  e  $E(s)$  denotem as transformadas de Laplace de  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $r(t)$  e  $e(t)$ , respectivamente. Podemos então transformar a equação (9.1) na forma equivalente

$$E(s) = X(s) - R(s) \quad (9.2)$$



**FIGURA 9.1** Representações com diagramas de blocos de sistemas de realimentação de malha simples: (a) representação no domínio de tempo e (b) representação no domínio  $s$  complexo.

Digamos que  $G(s)$  denote a função de transferência da planta, e  $H(s)$  denote a função de transferência do sensor. Então, por definição, podemos escrever

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} \quad (9.3)$$

e

$$H(s) = \frac{R(s)}{Y(s)} \quad (9.4)$$

Usando a equação (9.3) para eliminar  $E(s)$ , e a equação (9.4) para eliminar  $R(s)$  da equação (9.2) obtemos

$$\frac{Y(s)}{G(s)} = X(s) - H(s)Y(s)$$

Reunindo termos e resolvendo, obtemos a razão  $Y(s)/X(s)$  e descobrimos que a *função de transferência de malha fechada* do sistema de realimentação da Figura 9.1(b) é

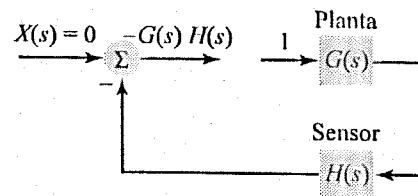
$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (9.5)$$

O termo “malha fechada” é usado aqui para enfatizar o fato de que há um laço fechado de transmissão de sinais, em torno do qual sinais podem fluir no sistema.

A quantidade  $1 + G(s)H(s)$  no denominador da equação (9.5) fornece uma medida da realimentação que age em torno de  $G(s)$ . Para obter uma interpretação física desta quantidade, considere a configuração da Figura 9.2. Nesta figura, fizemos duas modificações no sistema de realimentação da Figura 9.1(b):

- O sinal de entrada  $x(t)$  é reduzido a zero.
- A malha de realimentação em torno de  $G(s)$  é aberta.

$$F(s) = \text{diferença entre } 1 \text{ e } -G(s) H(s)$$



**FIGURA 9.2** Representação no domínio  $s$  complexo de um esquema para medir a diferença de retorno  $F(s)$ .

Suponhamos que um sinal de teste com transformada de Laplace unitária seja aplicado a  $G(s)$  (isto é, a planta) na Figura 9.2. O sinal retornado à outra extremidade aberta da malha será  $-G(s)H(s)$ . A diferença entre o sinal de teste unitário e o sinal retornado é igual a  $1 + G(s)H(s)$ . Por isso, esta quantidade é denominada *diferença de retorno*. Denotando-a por  $F(s)$ , podemos escrever

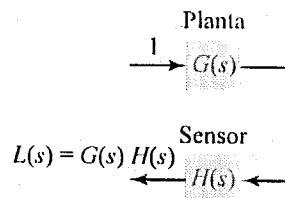
$$F(s) = 1 + G(s)H(s) \quad (9.6)$$

O termo com o produto  $G(s)H(s)$  é chamado *função de transferência da malha* do sistema. Ele é simplesmente as funções de transferência da planta e do sensor conectadas em cascata, como é mostrado na Figura 9.3. Esta última configuração é a mesma que usamos na Figura 9.2, com o comparador removido. Denotando a função de transferência em malha por  $L(s)$ , podemos então escrever

$$L(s) = G(s)H(s) \quad (9.7)$$

e, deste modo, relacionar a diferença de retorno  $F(s)$  com  $L(s)$  da seguinte maneira:

$$F(s) = 1 + L(s) \quad (9.8)$$



**FIGURA 9.3** Representação de domínio  $s$  complexo de um esquema para medir a função de transferência em malha  $L(s)$ .

Na seqüência, usaremos  $G(s)H(s)$  e  $L(s)$  de maneira intercambiável quando nos referirmos à função de transferência.

### ■ REALIMENTAÇÕES NEGATIVA E POSITIVA

Considere uma faixa operacional de freqüências para a qual  $G$  e  $H$ , pertencentes respectivamente à planta e ao sensor, podem ser tratados essencialmente como independentes da freqüência complexa  $s$ . Nessa situação, diz-se que a realimentação mostrada na Figura 9.1(a) é *negativa*. Quando o comparador da Figura 9.1(a) é substituído por um somador, diz-se que a realimentação é *positiva*.

Estes termos, entretanto, são de valor limitado. Dizemos isto porque, na configuração geral descrita na Figura 9.1(b), a função de transferência em malha  $G(s)H(s)$  depende da freqüência complexa  $s$ . Para  $s = j\omega$ , descobrimos que  $G(j\omega)H(j\omega)$  tem uma fase que varia com a freqüência  $\omega$ . Quando a fase de  $G(j\omega)H(j\omega)$  é zero, a situação da Figura 9.1(b) corresponde a uma realimentação negativa. Quando a fase de  $G(j\omega)H(j\omega)$  é  $180^\circ$ , a mesma configuração se comporta como um sistema de realimentação positiva. Dessa forma, para o sistema de realimentação de malha simples da Figura 9.1(b), haverá diferentes faixas de freqüência para as quais a realimentação é alternativamente negativa e positiva. Deve-se tomar cuidado, entretanto, no uso dos termos realimentação negativa e realimentação positiva.

### 9.3 Análise da Sensibilidade

Uma motivação primordial para o uso da realimentação é reduzir a sensibilidade da função de transferência de malha fechada do sistema da Figura 9.1 a variações na função de transferência da planta. Para a finalidade desta discussão, ignoramos as dependências da freqüência complexa  $s$  na equação (9.5) e tratamos  $G$  e  $H$  como parâmetros “escalares.” Dessa forma, podemos escrever

$$T = \frac{G}{1 + GH} \quad (9.9)$$

Na equação (9.9), referimo-nos a  $G$  como o *ganho* da planta e a  $T$  como o *ganho de malha fechada* do sistema de realimentação.

Suponhamos agora que o ganho  $G$  seja modificado numa pequena quantidade  $\Delta G$ . Então, diferenciando a equação (9.9) com respeito a  $G$ , descobrimos que a variação correspondente em  $T$  é

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\partial T}{\partial G} \Delta G \\ &= \frac{1}{(1 + GH)^2} \Delta G \end{aligned} \quad (9.10)$$

A *sensibilidade* de  $T$  com respeito às variações em  $G$  é formalmente definida por

$$S_G^T = \frac{\Delta T / T}{\Delta G / G} \quad (9.11)$$

Literalmente, a sensibilidade de  $T$  em relação a  $G$  é a variação percentual em  $T$  dividida pela variação percentual em  $G$ . O uso das equações (9.5) e (9.10) em (9.11) produzirá

$$\begin{aligned} S_G^T &= \frac{1}{1 + GH} \\ &= \frac{1}{F} \end{aligned} \quad (9.12)$$

o que mostra que a sensibilidade de  $T$  em relação a  $G$  é igual à recíproca da diferença de retorno  $F$ .

Com a disponibilidade de dois graus de liberdade representados pelos parâmetros  $G$  e  $H$  pertencentes à planta e ao sensor, respectivamente, o uso da realimentação permite que um projetista de sistemas possa usar simultaneamente os valores prescritos para o ganho de malha fechada  $T$  e a sensibilidade  $S_G^T$ . Isto é realizado por meio do uso das equações (9.9) e (9.12), respectivamente.

► **EXERCÍCIO 9.1** Para tornar a sensibilidade  $S_G^T$  pequena em comparação com a unidade, o ganho de malha  $GH$  deve ser grande em comparação com a unidade. Quais são os valores aproximados do ganho de malha fechada  $T$  e da sensibilidade  $S_G^T$  sob esta condição?

**Resposta:**

$$T \approx \frac{1}{H} \quad \text{e} \quad S_G^T \approx \frac{1}{GH}$$

**EXEMPLO 9.1** Considere um amplificador realimentado de malha simples, cujo diagrama de blocos é mostrado na Figura 9.4. Ele consiste num amplificador linear com ganho  $A$  e uma rede de realimentação passiva; este último componente realimenta a entrada com uma fração controlável  $\beta$  do sinal de saída. Sabemos que o ganho  $A = 1000$ .

- Determine o valor de  $\beta$  que resultará num ganho de malha fechada  $T = 10$ .
- Suponha que o ganho  $A$  se modifique em 10%. Qual é a variação percentual correspondente no ganho de malha fechada  $T$ ?

#### Solução

- Para o problema que temos em mãos, a planta e o sensor são representados pelo amplificador e pela rede de realimentação, respectivamente. Deste modo, podemos colocar  $G = A$  e  $H = \beta A$ , assim, reescrever a equação (9.9) na forma

$$T = \frac{A}{1 + \beta A}$$

Resolvendo para  $\beta$ , obtemos

$$\beta = \frac{1}{A} \left( \frac{A}{T} - 1 \right)$$

Com  $A = 1000$  e  $T = 10$ , obtemos, portanto,

$$\beta = \frac{1}{1000} \left( \frac{1000}{10} - 1 \right) = 0,099$$

- Na equação (9.12), a sensibilidade do ganho de malha fechada  $T$  em relação a  $A$  é

$$\begin{aligned} S_A^T &= \frac{1}{1 + \beta A} \\ &= \frac{1}{1 + 0,099 \times 1000} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, com uma variação de 10% em  $A$ , a variação percentual correspondente em  $T$  é

$$\begin{aligned} \Delta T &= S_A^T \frac{\Delta A}{A} \\ &= \frac{1}{100} \times 10\% = 0,1\% \end{aligned}$$

o que indica que, para este exemplo, o amplificador com realimentação da Figura 9.4 é relativamente insensível a variações no ganho  $A$  do amplificador interno.

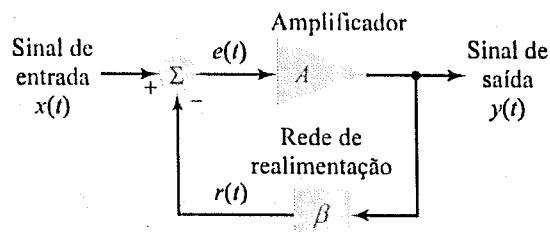


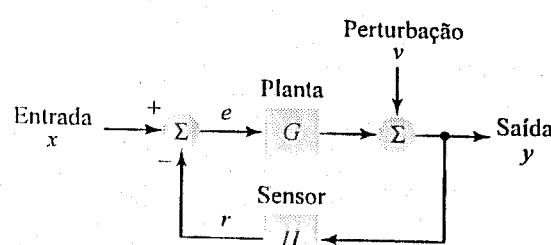
FIGURA 9.4 Diagrama de blocos de um amplificador com realimentação de malha simples.

## 9.4 Efeito da Realimentação sobre a Perturbação ou Ruído

O uso da realimentação tem outro efeito benéfico sobre o desempenho do sistema: ele reduz o efeito de uma perturbação ou ruído gerados dentro da malha de realimentação.

Considere o sistema de realimentação de malha simples descrito na Figura 9.5. Ele difere da configuração básica da Figura 9.1 em dois aspectos:  $G$  e  $H$  são ambos tratados como parâmetros escalares, e o sistema inclui uma perturbação denotada por  $v$  dentro da malha. Uma vez que o sistema é linear, podemos usar o princípio da superposição para calcular separadamente os efeitos do sinal de entrada  $x$  aplicado externamente e da perturbação  $v$  e depois adicionar os resultados. Levando em conta a equação (9.9), o sinal de saída resultante de  $x$  que age sozinho é

$$y|_{v=0} = \frac{G}{1+GH} x$$



**FIGURA 9.5** Diagrama de blocos de um sistema de realimentação de malha simples que inclui uma perturbação dentro da malha.

Para avaliar o sinal de saída resultante de  $v$  que age sozinho, descobrimos prontamente na Figura 9.5 que

$$y|_{x=0} = \frac{1}{1+GH} v$$

Adicionando-se estas duas contribuições, a saída da Figura 9.5 devida à ação combinada de  $x$  e  $v$  é obtida como

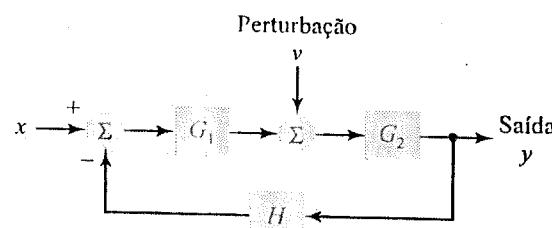
$$y = \frac{G}{1+GH} x + \frac{1}{1+GH} v \quad (9.13)$$

em que o primeiro termo representa a saída desejada e o segundo termo representa a saída não desejada. A equação (9.13) mostra claramente que o uso de realimentação na Figura 9.5 tem o efeito de reduzir a perturbação  $v$  pelo fator  $1+GH$  (isto é, a diferença de retorno  $F$ ).

► **EXERCÍCIO 9.2** Considere a configuração do sistema da Figura 9.6. Determine o efeito da perturbação  $v$  sobre a saída deste sistema.

*Resposta:*

$$\frac{G_2}{1+G_1G_2H} v$$



**FIGURA 9.6** Sistema de realimentação correspondente ao Exercício 9.2.

## 9.5 Análise de Distorção

A não linearidade surge num sistema físico sempre que ele é levado para fora de sua faixa linear de operação. Podemos melhorar a linearidade desse sistema aplicando-lhe realimentação. Para investigar este efeito importante, podemos prosseguir de uma entre duas maneiras:

- ▶ A saída do sistema é expressa como uma função não-linear da entrada, e uma onda senoidal pura é usada como sinal de entrada.
- ▶ A entrada no sistema é expressa como uma função não-linear da saída.

A última abordagem pode parecer estranha à primeira vista; entretanto, ela é mais geral em sua formulação e fornece uma descrição mais intuitivamente satisfatória de como a realimentação afeta o comportamento não linear de um sistema. Portanto, esta é a abordagem adotada no que exporemos a seguir.

Considere então um sistema de realimentação no qual a relação de entrada e saída da planta é expressa por

$$e = a_1 y + a_2 y^2 \quad (9.14)$$

em que o erro  $e$  aparece como dependente da saída  $y$  e  $a_1$  e  $a_2$  são constantes. O termo linear  $a_1 y$  da equação (9.14) representa o comportamento desejado da planta, e o termo parabólico  $a_2 y^2$  é responsável por seu desvio da linearidade. Digamos que o parâmetro  $H$  determine a fração da saída  $y$  da planta que é realimentada na entrada. Com  $x$  denotando a entrada aplicada ao sistema de realimentação, podemos então escrever

$$e = x - Hy \quad (9.15)$$

Eliminando  $e$  entre as equações (9.14) e (9.15), e reorganizando os termos, obtemos

$$x = (a_1 + H)y + a_2 y^2$$

Diferenciar  $x$  com respeito a  $y$  produzirá

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= a_1 + H + 2a_2 y \\ &= (a_1 + H) \left( 1 + \frac{2a_2}{a_1 + H} y \right) \end{aligned} \quad (9.16)$$

a qual vale na presença de realimentação.

Na ausência de realimentação, a planta opera por si mesma, como é mostrado por

$$x = a_1 y + a_2 y^2 \quad (9.17)$$

a qual é a da equação (9.14) reescrita com a entrada  $x$  usada em lugar do erro  $e$ . Diferenciar a equação (9.17) com respeito a  $y$  produzirá

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= a_1 + 2a_2 y \\ &= a_1 \left( 1 + \frac{2a_2}{a_1} y \right) \end{aligned} \quad (9.18)$$

As derivadas nas equações (9.16) e (9.18) foram ambas *normalizadas* em seus respectivos termos lineares para facilitar uma comparação entre elas. Na presença de realimentação, o termo  $2a_2 y / (a_1 + H)$  da equação (9.16) fornece uma medida da *distorção* devida ao termo parabólico  $a_2 y^2$  na relação de entrada e saída da planta. A medida correspondente da distorção na ausência da realimentação é representada pelo termo  $2a_2 y / a_1$  na equação (9.18). Consequentemente, a aplicação da realimentação reduziu a distorção, devida ao desvio para fora da linearidade por parte da planta, pelo seguinte fator:

$$D = \frac{2a_2 y / (a_1 + H)}{2a_2 y / a_1} = \frac{a_1}{a_1 + H}$$

Na equação (9.17), vemos prontamente que o coeficiente  $a$  é a recíproca do ganho  $G$  da planta.

Conseqüentemente, podemos reescrever este resultado como

$$D = \frac{1/G}{(1/G) + H} = \frac{1}{1 + GH} = \frac{1}{F} \quad (9.19)$$

a qual mostra que a distorção é reduzida numa quantidade igual à diferença de retorno  $F$ .

A partir da análise apresentada nesta seção e nas duas seções precedentes, vemos agora que a diferença de retorno  $F$  desempenha um papel fundamental no estudo dos sistemas de realimentação em três aspectos importantes:

1. O controle da sensibilidade
2. O controle do efeito de uma perturbação interna
3. O controle da distorção num sistema não linear

No caso 1, a realimentação reduz a sensibilidade numa quantidade igual a  $F$ . No caso 2, a transmissão de uma perturbação a partir de algum ponto dentro da malha de realimentação para a saída também é reduzida numa quantidade igual a  $F$ . Finalmente, no caso 3, a distorção devida a efeitos não lineares é novamente reduzida numa quantidade igual a  $F$ .

► **EXERCÍCIO 9.3** Suponhamos que a relação de entrada e saída não linear da equação (9.14) seja expandida para incluir um termo cúbico, como é mostrado por

$$e = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$$

Mostre que a aplicação de realimentação também reduz o efeito da distorção devida a este termo cúbico num fator igual à diferença de retorno  $F$ . □

## 9.6 Custo da Realimentação

Nas três seções anteriores, discutimos os benefícios que são ganhos pela aplicação de realimentação a um sistema de controle. Deve-se esperar que um *custo* acompanhe estes benefícios, conforme descrevemos aqui.

1. *Complexidade aumentada.* Naturalmente, a aplicação de realimentação a um sistema de controle exige a adição de novos componentes. Deste modo, há o custo da complexidade aumentada do sistema.
2. *Ganho reduzido.* Na ausência de realimentação, a função de transferência de uma planta é  $G(s)$ . Quando é aplicada realimentação à planta, a função de transferência é modificada para  $G(s)/F(s)$ , em que  $F(s)$  é a diferença de retorno. Agora, os benefícios da realimentação são realizados somente quando  $F(s)$  é maior do que 1. Segue-se, portanto, que a aplicação de realimentação resulta em redução de ganho.
3. *Possível instabilidade.* Muitas vezes, um sistema de malha aberta (isto é, a planta operando sozinha) é estável. Porém, quando é aplicada realimentação ao sistema, há uma possibilidade real de que o sistema de malha fechada possa tornar-se instável. Para resguardar-se dessa possibilidade, temos de tomar medidas preventivas no projeto do sistema de controle de realimentação.

Em geral, as vantagens da realimentação têm mais peso do que as desvantagens. Portanto, é necessário considerarmos a complexidade aumentada ao projetar um sistema de controle e prestar atenção especial no problema da instabilidade.

## 9.7 Amplificadores Operacionais

Uma aplicação importante da realimentação está nos amplificadores operacionais. Um *amplificador operacional*, ou um *op amp*, como às vezes é chamado, constitui a base para realizar uma função de transferência com pólos e zeros prescritos de uma maneira relativamente direta. Comumente, ele tem dois terminais de entrada, sendo um inversor e o outro não inversor, e um terminal de saída. A Figura 9.7(a) mostra o símbolo convencional usado para representar um amplificador operacional; somente os terminais principais de sinal são incluídos neste símbolo.

O *modelo ideal* de um amplificador operacional pode ser descrito da seguinte maneira (veja a Figura 9.7(b)):

1. Ele é uma fonte de tensão controlada, descrita pela relação de entrada e saída

$$v_o = A(v_2 - v_1) \quad (9.20)$$

em que  $v_1$  e  $v_2$  são os sinais aplicados aos terminais de saída inversor e não-inversor, respectivamente, e  $v_o$  é o sinal de saída. Todos estes sinais são medidos em volts.

2. O ganho de tensão de malha aberta  $A$  tem um valor constante que é muito grande em comparação com a unidade, o que significa que para um sinal de saída finito  $v_o$ , devemos ter  $v_1 = v_2$ . Esta propriedade é chamada *terra virtual*.
3. A impedância entre os dois terminais de entrada é infinitamente grande, o mesmo acontecendo com a impedância entre cada um deles e o terra, o que significa que as correntes dos terminais de entrada são nulas.
4. A impedância da saída é nula.

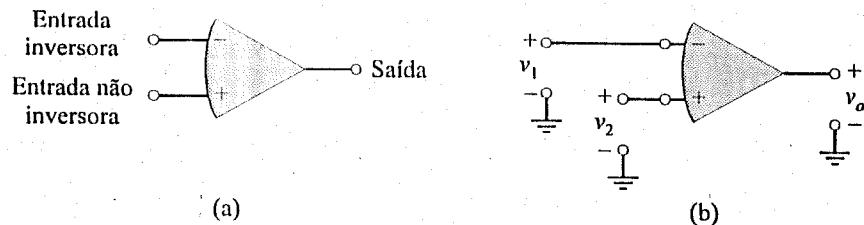


FIGURA 9.7 (a) Símbolo convencional de amplificador operacional. (b) Amplificador operacional com tensões de entrada e saída.

Um amplificador operacional não é usado em configurações de malha aberta. Ao contrário, normalmente ele é usado como o componente amplificador de um circuito de realimentação, no qual a realimentação controla a função de transferência de malha fechada do circuito. A Figura 9.8 mostra um desses circuitos, em que o terminal de entrada não inversor do amplificador operacional está ligado ao terra, e as impedâncias  $Z_1(s)$  e  $Z_2(s)$  representam o elemento de entrada e o elemento de realimentação do circuito, respectivamente. Admitamos que  $V_{\text{ent}}(s)$  e  $V_{\text{saída}}(s)$  denotem as transformadas de Laplace dos sinais de tensão de entrada e saída, respectivamente. Então, usando o modelo ideal para descrever o amplificador operacional, podemos, de maneira correspondente, construir o modelo mostrado na Figura 9.9 referente ao circuito de realimentação da Figura 9.8. A condição seguinte decorre prontamente das propriedades 2 e 3 do amplificador operacional:

$$\frac{V_{\text{ent}}(s)}{Z_1(s)} \equiv -\frac{V_{\text{saída}}(s)}{Z_2(s)}$$

A função de transferência de malha fechada do circuito de realimentação da Figura 9.8 é, portanto,

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{V_{\text{saída}}(s)}{V_{\text{ent}}(s)} \\ &\equiv -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \end{aligned} \quad (9.21)$$

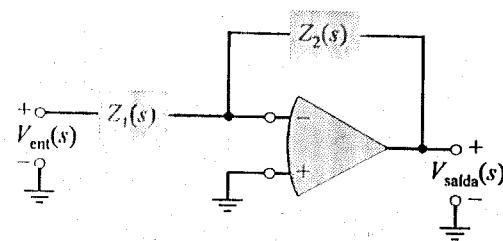


FIGURA 9.8 Amplificador operacional em um circuito de realimentação de malha simples.

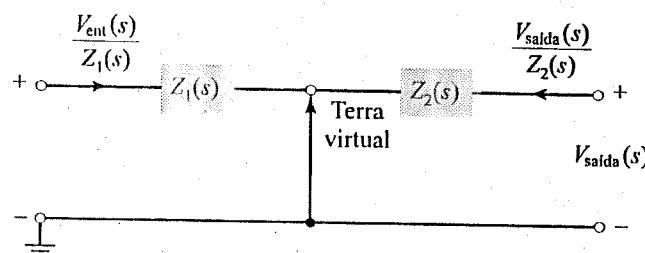


FIGURA 9.9 Modelo ideal correspondente ao circuito de realimentação da Figura 9.8.

Derivamos este resultado sem o recurso da teoria da realimentação desenvolvida na Seção 9.2. Como interpretamos então o resultado levando em conta a fórmula de realimentação geral da equação (9.5)? Para responder esta pergunta, precisamos entender a maneira pela qual a realimentação se manifesta no circuito com amplificador operacional da Figura 9.8. O elemento de realimentação  $Z_2(s)$  é conectado em paralelo ao amplificador tanto em sua porta de entrada como na de saída. Portanto, isto sugeriria o uso de correntes como a base para representar o sinal de entrada  $x(t)$  e o sinal de realimentação  $r(t)$ . A aplicação de realimentação no sistema da Figura 9.8 tem o efeito de tornar pequena a impedância de entrada medida quando se examina o amplificador operacional, em comparação tanto com  $Z_1(s)$  como com  $Z_2(s)$ , mas, ainda assim, de algum valor finito. Digamos que  $Z_{\text{ent}}(s)$  denote esta impedância de entrada. Podemos então usar sinais de corrente para representar as transformadas de Laplace de  $x(t)$  e  $r(t)$  em termos das transformadas de Laplace de  $v_{\text{ent}}(t)$  e  $v_{\text{saída}}(t)$ , respectivamente, da seguinte maneira:

$$X(s) = \frac{V_{\text{ent}}(s)}{Z_1(s)} \quad (9.22)$$

e

$$R(s) = -\frac{V_{\text{saída}}(s)}{Z_2(s)} \quad (9.23)$$

O sinal de erro  $e(t)$ , definido como a diferença entre  $x(t)$  e  $r(t)$ , é aplicado nos terminais de entrada do amplificador operacional para produzir uma tensão de saída igual a  $v_{\text{saída}}(t)$ . Com  $e(t)$  visto como um sinal de corrente, podemos expressar a transformada de Laplace do sinal de saída  $y(t)$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Y(s) &= V_{\text{saída}}(s) \\ &= -AZ_{\text{ent}}(s)E(s) \end{aligned} \quad (9.24)$$

Por definição (veja a equação 9.3), a função de transferência do amplificador operacional (visto como a planta) é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

Para o problema que temos à frente, portanto, deduzimos da equação (9.24) que

$$G(s) = -AZ_{\text{ent}}(s) \quad (9.25)$$

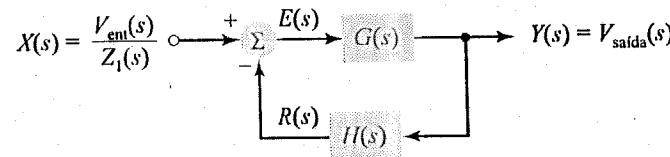
Além disso, por definição (veja a equação 9.4), a função de transferência do caminho de realimentação que compreende  $Z_2$  (visto como o sensor) é

$$H(s) = \frac{R(s)}{Y(s)}$$

Conseqüentemente, com  $V_{\text{saída}}(s) = Y(s)$ , deduzimos da equação (9.23) que

$$H(s) = -\frac{1}{Z_2(s)} \quad (9.26)$$

Usando as equações (9.22) e (9.24), podemos agora reformular o circuito de realimentação da Figura 9.8 como descreve a Figura 9.10, em que  $G(s)$  e  $H(s)$  são definidos pelas equações (9.25) e (9.26), respectivamente. A Figura 9.10 é configurada da mesma maneira que o sistema de realimentação básico mostrado na Figura 9.1(b).



**FIGURA 9.10** Reformulação do circuito de realimentação da Figura 9.8 a fim de que ele corresponda ao sistema de realimentação básico da Figura 9.1(b).

Na Figura 9.10, descobrimos prontamente que

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \frac{-AZ_{\text{ent}}(s)}{1 + \frac{AZ_{\text{ent}}(s)}{Z_2(s)}} \end{aligned}$$

Levando em conta a equação (9.22) e a primeira linha da equação (9.24), podemos reescrever este resultado na forma equivalente:

$$\frac{V_{\text{saída}}(s)}{V_{\text{ent}}(s)} = \frac{-AZ_{\text{ent}}(s)}{Z_1(s) \left[ 1 + \frac{AZ_{\text{ent}}(s)}{Z_2(s)} \right]} \quad (9.27)$$

Uma vez que, para um amplificador operacional o ganho  $A$  é muito grande em comparação com a unidade, podemos aproximar a equação (9.27) como

$$\frac{V_{\text{saída}}(s)}{V_{\text{ent}}(s)} \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

a qual é o resultado que derivamos anteriormente.

**EXEMPLO 9.2** Considere o circuito com amplificador operacional da Figura 9.11, no qual o elemento de entrada consiste num resistor  $R_1$  e o elemento de realimentação consiste num capacitor  $C_2$ . Mostre que este circuito opera como um integrador.

**Solução:** As impedâncias  $Z_1(s)$  e  $Z_2(s)$  são

$$Z_1(s) = R_1$$

e

$$Z_2(s) = \frac{1}{sC_2}$$

Dessa forma, substituindo estes valores na equação (9.21), obtemos

$$T(s) = -\frac{1}{sC_2 R_1}$$

o que mostra que a função de transferência de malha fechada da Figura 9.11 tem um polo na origem. Uma vez que a divisão pela variável complexa  $s$  corresponde à integração no tempo, concluímos que este circuito faz a integração do sinal de entrada.

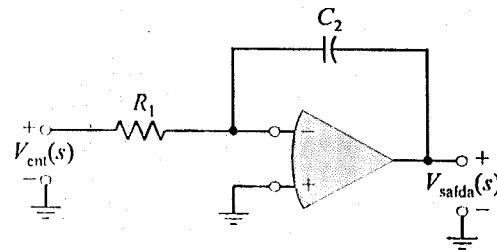


FIGURA 9.11 Circuito com amplificador operacional usado como integrador.

► **EXERCÍCIO 9.4** Os elementos de circuito do integrador da Figura 9.11 têm os seguintes valores:  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  e  $C_2 = 1\mu\text{F}$ . O valor inicial da tensão de saída é  $v_{\text{saída}}(0)$ . Determine a tensão de saída  $v_{\text{saída}}(t)$  para o tempo  $t$  variável.

**Resposta:**  $v_{\text{saída}}(t) = -\int_0^t 10v_{\text{ent}}(\tau) d\tau + v_{\text{saída}}(0)$ , em que o instante  $t$  é medido em segundos. ◀

**EXEMPLO 9.3** Considere o circuito com amplificador operacional da Figura 9.12. Determine a função de transferência de malha fechada deste circuito.

**Solução:** O elemento de entrada consiste na combinação em paralelo do resistor  $R_1$  e do capacitor  $C_1$ ; consequentemente,

$$Z_1(s) = \frac{R_1}{1 + sC_1R_1}$$

O elemento de realimentação consiste na combinação em paralelo do resistor  $R_2$  e do capacitor  $C_2$ ; consequentemente,

$$Z_2(s) = \frac{R_2}{1 + sC_2R_2}$$

Substituir estes valores na equação (9.21) produzirá a função de transferência de malha fechada

$$T(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 + sC_1R_1}{1 + sC_2R_2}$$

a qual tem um zero em  $s = -1/C_1R_1$ , e um polo em  $s = -1/C_2R_2$ .

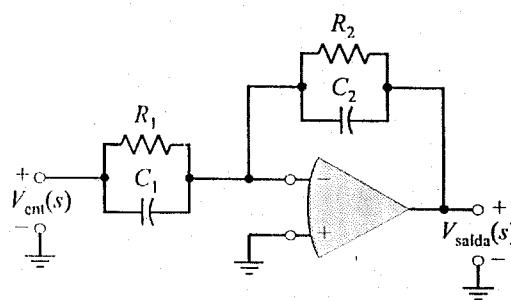


FIGURA 9.12 Circuito amplificador operacional do Exemplo 9.3.

Observe que, dispondo em cascata versões diferentes do circuito básico da Figura 9.12, é possível sintetizarmos uma função de transferência global com pólos reais arbitrários e zeros reais arbitrários. De fato, com formas mais elaboradas de  $Z_1(s)$  e  $Z_2(s)$ , podemos realizar uma função de transferência com pólos e zeros complexos arbitrários.

Os filtros sintetizados usando-se amplificadores operacionais são chamados *filtros ativos*.

## 9.8 Sistemas de Controle

Considere uma *planta* que seja controlável. A função de um sistema de controle é *obter um controle acurado sobre a planta, de tal forma que a saída da planta permaneça próxima a uma resposta desejada*. Isto é realizado através de uma modificação apropriada da entrada da planta. Podemos identificar dois tipos básicos de sistemas de controle:

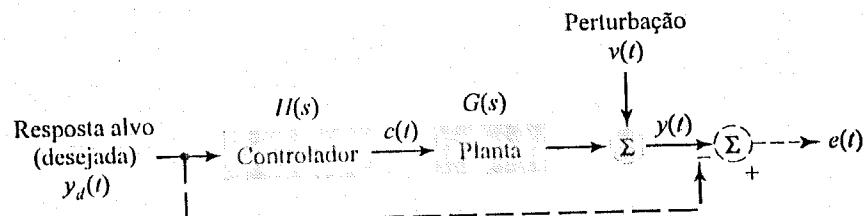
- *Controle de malha aberta*, no qual a modificação na entrada da planta é derivada diretamente da resposta alvo desejada.
- *Controle de malha fechada*, no qual é usada realimentação na planta.

Em ambos os casos, a resposta desejada age como a entrada do sistema de controle. Na continuação, estes dois tipos de controle serão considerados nessa ordem.

### ■ CONTROLE DE MALHA ABERTA

A Figura 9.13 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle de malha aberta. A dinâmica da planta é representada pela função de transferência  $G(s)$ . O controlador, representado pela função de transferência  $H(s)$ , age a partir da resposta desejada  $y_d(t)$  para produzir o sinal de controle desejado  $c(t)$ . A perturbação  $v(t)$  é incluída para servir de causa do ruído e da distorção produzidos na saída da planta. A parte tracejada da figura nada tem a ver com a operação do sistema; ela é incluída aqui simplesmente para descrever o erro  $e(t)$  como a diferença entre a resposta desejada  $y_d(t)$  e a saída real  $y(t)$  do sistema, como é mostrado por

$$e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (9.28)$$



**FIGURA 9.13** Diagrama de blocos de um sistema de controle de malha aberta; a linha tracejada da entrada até a saída é incluída simplesmente para ilustrar o cálculo do sinal de erro  $e(t)$ .

Digamos que  $Y_d(s)$ ,  $Y(s)$  e  $E(s)$  denotem as transformadas de Laplace de  $y_d(t)$ ,  $y(t)$  e  $e(t)$ , respectivamente. Portanto, podemos reescrever a equação (9.28) no domínio  $s$  complexo da seguinte maneira:

$$E(s) = Y_d(s) - Y(s) \quad (9.29)$$

Na Figura 9.13, também podemos descobrir prontamente que

$$Y(s) = G(s)H(s)Y_d(s) + N(s) \quad (9.30)$$

em que  $N(s)$  é a transformada de Laplace da perturbação  $v(t)$ . Eliminar  $Y(s)$  entre as equações (9.29) e (9.30) produzirá

$$E(s) = [1 - G(s)H(s)]Y_d(s) - N(s) \quad (9.31)$$

O erro  $e(t)$  é minimizado fazendo-se

$$1 - G(s)H(s) = 0$$

Para que esta condição seja satisfeita, o controlador deve agir como o inverso da planta, como é mostrado por

$$H(s) = \frac{1}{G(s)} \quad (9.32)$$

Na Figura 9.13, vemos prontamente que com  $y_d(t) = 0$ , a saída de planta  $y(t)$  é igual a  $v(t)$ . Portanto, o melhor que o sistema de controle de malha aberta pode fazer é deixar a perturbação  $v(t)$  sem modificação.

A função de transferência global do sistema (na ausência da perturbação  $v(t)$ ) é simplesmente

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{Y_d(s)} \\ &= G(s)H(s) \end{aligned} \quad (9.33)$$

Ignorando-se a dependência de  $s$ , a sensibilidade de  $T$  com respeito a variações em  $G$  será, portanto,

$$\begin{aligned} S_G^T &= \frac{\Delta T / T}{\Delta G / G} \\ &= \frac{H \Delta G / (GH)}{\Delta G / G} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (9.34)$$

A implicação de  $S_G^T = 1$  é que uma variação percentual em  $G$  é convertida em uma variação percentual igual em  $T$ .

A conclusão a ser tirada desta análise é que um sistema de controle de malha aberta deixa tanto a sensibilidade como o efeito de uma perturbação inalterados.

### ■ CONTROLE DE MALHA FECHADA

Considere em seguida o sistema de controle de malha fechada mostrado na Figura 9.14. Como anteriormente, a planta e o controlador são representados pela função de transferência  $G(s)$  e  $H(s)$ , respectivamente. O controlador ou compensador que precede a planta é a única parte “livre” do sistema que está disponível para ser ajustada pelo projetista do sistema. Conseqüentemente, o sistema de controle de malha fechada da Figura 9.14 é chamado *estrutura com grau de liberdade simples (I-GDL)*.

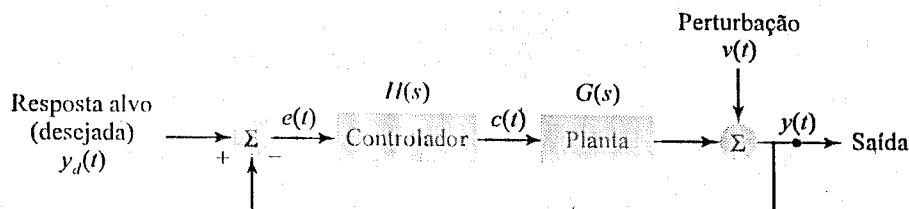


FIGURA 9.14 Sistema de controle com realimentação unitária.

Para simplificar a questão, a Figura 9.14 supõe que o sensor (que mede o sinal de saída para produzir um sinal de realimentação) seja perfeito. Ou seja, a função de transferência do sensor é a unidade, e o ruído produzido pelo sensor é nulo. De acordo com esta suposição, a saída real  $y(t)$  da planta realimenta diretamente a entrada do sistema. Diz-se que o sistema da Figura 9.14 é, portanto, um *sistema de realimentação unitária*. O controlador deste sistema sofre a ação do erro “medido”  $e(t)$ , definido como a diferença entre a resposta alvo (desejada)  $y_d(t)$  (que age como a entrada  $x(t)$ ) e o sinal de realimentação (saída)  $y(t)$ .

Para o propósito de análise, podemos reformular o sistema de controle de malha fechada da Figura 9.14 para a forma equivalente mostrada na Figura 9.15. Aqui, utilizamos a equivalência entre os dois diagramas de bloco mostrados na Figura 9.16. Com exceção do bloco rotulado como  $H(s)$  no terminal de entrada da Figura 9.15, o sistema de realimentação de malha simples mostrado nesta figura tem exatamente a mesma forma que o da Figura 9.1(b). Transformando o sistema de controle de malha fechada original da Figura 9.14 para a forma equivalente mostrada na Figura 9.15, podemos utilizar totalmente os recursos desenvolvidos na Seção 9.3. Especificamente, observamos na Figura 9.15 que

$$X(s) = H(s)Y_d(s) \quad (9.35)$$

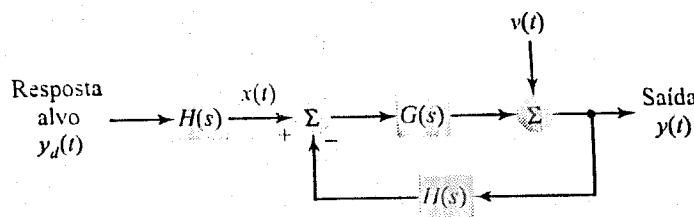


FIGURA 9.15 Reformulação do sistema de controle de realimentação da Figura 9.14.

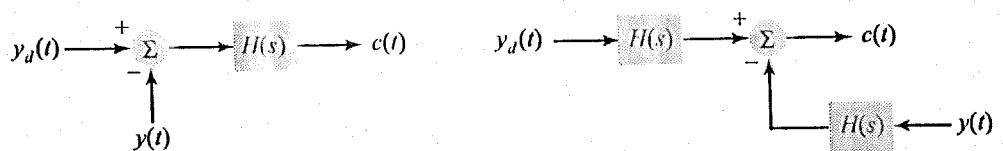


FIGURA 9.16 Um par de diagramas de blocos equivalentes usados para mudar a Figura 9.14 para a forma equivalente mostrada na Figura 9.15.

Conseqüentemente, usando a equação (9.35) na equação (9.5), descobrimos prontamente que a função de transferência de malha fechada do sistema 1-GDL da Figura 9.14 é dada por

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{Y_d(s)} \\ &= \frac{Y(s)}{X(s)} \cdot \frac{X(s)}{Y_d(s)} \\ &= \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Supondo que  $G(s)H(s)$  seja grande em comparação com a unidade, para todos os valores de interesse, a equação (9.36) se reduz a

$$T(s) \equiv 1$$

Ou seja,

$$y(t) \equiv y_d(t) \quad (9.37)$$

Portanto, é desejável que se tenha um ganho de malha  $G(s)H(s)$  grande. Nesta condição, o sistema da Figura 9.14 tem o potencial de atingir o objetivo desejado de controle acurado, exemplificado pela saída real  $y(t)$  do sistema manter-se próxima com margem estreita da resposta desejada  $y_d(t)$ .

Há outros bons motivos para se usar um ganho de malha grande. Especificamente, levando em conta os resultados derivados nas Seções 9.3 a 9.5, podemos afirmar que:

A sensibilidade do sistema de controle de malha fechada  $T(s)$  é reduzida por um igual à diferença de retorno

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

A perturbação  $v(t)$  dentro da malha de realimentação é reduzida pelo mesmo fator  $F(s)$ .

O efeito da distorção devida a um comportamento não linear da planta também é reduzido por  $F(s)$ .

### ■ ESPECIFICAÇÕES DE ERRO DE ESTADO ESTACIONÁRIO

O sinal de erro  $e(t)$  é definido como a diferença entre o sinal desejado (atuante)  $y_d(t)$  e o sinal controlado (isto é, a resposta real)  $y(t)$ . Expressando estes sinais em termos de suas respectivas transformadas de Laplace, podemos escrevermos

$$\begin{aligned} E(s) &= Y_d(s) - Y(s) \\ &= [1 - T(s)]Y_d(s) \end{aligned} \quad (9.38)$$

Substituir a equação (9.36) na (9.38) produzirá

$$\begin{aligned} E(s) &= \left[ 1 - \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \right] Y_d(s) \\ &= \frac{1}{1+G(s)H(s)} Y_d(s) \end{aligned} \quad (9.39)$$

O *erro de estado estacionário* de um sistema de controle realimentado é definido como o valor do sinal de erro  $e(t)$  quando o tempo  $t$  tende ao infinito. Denotando esta quantidade por  $\epsilon_{ss}^*$ , podemos então escrever

$$\epsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (9.40)$$

Usando o teorema do valor final da teoria da transformada de Laplace descrito no Capítulo 6, podemos redefinir o erro de estado estacionário  $\epsilon_{ss}$  na forma equivalente

$$\epsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (9.41)$$

Consequentemente, substituindo a equação (9.39) na equação (9.41), obtemos

$$\epsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sY_d(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (9.42)$$

A equação (9.42) mostra que o erro de estado estacionário  $\epsilon_{ss}$  de um sistema de controle realimentado depende de duas quantidades:

- » A função de transferência de malha aberta  $G(s)H(s)$  do sistema
- » A transformada de Laplace  $Y_d(s)$  do sinal desejado  $y_d(t)$

Porém, para que a equação (9.42) seja válida, o sistema de controle de malha fechada da Figura 9.14 deve ser estável.

Em geral,  $G(s)H(s)$  pode ser escrito na forma de uma função racional, da seguinte maneira.

$$G(s)H(s) = \frac{P(s)}{s^p Q_1(s)} \quad (9.43)$$

em que nem o polinômio  $P(s)$ , nem o  $Q_1(s)$ , tem um zero em  $s = 0$ . Uma vez que  $1/s$  é a função de transferência de um integrador, segue-se que  $p$  é o número de integradores livres na função de transferência de malha  $G(s)H(s)$ . A ordem  $p$  é denominada *tipo* do sistema de controle realimentado. Dessa forma, falamos de um sistema de controle realimentado ser do tipo 0, tipo 1, tipo 2 etc. para  $p = 0, 1, 2, \dots$ , respectivamente. Levando em conta esta classificação, consideraremos a seguir o erro de estado estacionário de três diferentes funções de entrada.

### Entrada de Degrau

Para a entrada de degrau  $y_d(t) = u(t)$ , temos  $Y_d(s) = 1/s$ . Conseqüentemente, a equação (9.42) produz o erro de estado estacionário

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)H(s)} \\ &= \frac{1}{1+K_p} \end{aligned} \quad (9.44)$$

em que  $K_p$  é chamado *constante de erro de posição*, definida por

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(s)}{s^p Q_1(s)} \end{aligned} \quad (9.45)$$

\* N. de R.T.: ss de *steady state* (estado estacionário).

Para  $p \geq 1$ ,  $K_p$  não é limitado e, portanto,  $\epsilon_{ss} = 0$ . Para  $p = 0$ ,  $K_p$  é finito e, portanto,  $\epsilon_{ss} \neq 0$ . Conseqüentemente, podemos afirmar que o erro de estado estacionário para uma entrada de degrau é nulo num sistema de controle realimentado do tipo 1 ou maior. Por outro lado, para um sistema do tipo 0, o erro de estado estacionário não é nulo, e seu valor é dado pela equação (9.44).

### Entrada de Rampa

Para a entrada de rampa  $y_d(t) = tu(t)$ , temos  $Y_d = 1/s^2$ . Neste caso, a equação (9.42) produz

$$\begin{aligned}\epsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + sG(s)H(s)} \\ &= \frac{1}{K_v}\end{aligned}\quad (9.46)$$

em que  $K_v$  é a *constante de erro de velocidade*, definido por

$$\begin{aligned}K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(s)}{s^{p-1}Q_1(s)}\end{aligned}\quad (9.47)$$

Para  $p \geq 2$ ,  $K_v$  não é limitado e, portanto,  $\epsilon_{ss} = 0$ . Para  $p = 1$ ,  $K_v$  é finito e  $\epsilon_{ss} \neq 0$ . Para  $p = 0$ ,  $K_v$  é nulo e  $\epsilon_{ss} = \infty$ . Conseqüentemente, podemos afirmar que o erro de estado estacionário para uma entrada de rampa é nulo num sistema de controle realimentado do tipo 2 ou maior. Para um sistema do tipo 1, o erro de estado estacionário não é nulo, e seu valor é dado pela equação (9.46). Para um sistema do tipo 0, o erro de estado estacionário não é limitado.

### Entrada Parabólica

Para uma entrada parabólica  $y_d(t) = (t^2/2)u(t)$ , temos  $Y_d = 1/s^3$ . O uso da equação (9.42) produz

$$\begin{aligned}\epsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)H(s)} \\ &= \frac{1}{K_a}\end{aligned}\quad (9.48)$$

em que  $K_a$  é chamado de *constante de erro de aceleração*, definida por

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(s)}{s^{p-2}Q_1(s)}\quad (9.49)$$

Para  $p \geq 3$ ,  $K_a$  não é limitado e, portanto,  $\epsilon_{ss} = 0$ . Para  $p = 2$ ,  $K_a$  é finito e, portanto,  $\epsilon_{ss} \neq 0$ . Para  $p = 0, 1$ ,  $K_a$  é nulo e, portanto,  $\epsilon_{ss} = \infty$ . Conseqüentemente, podemos afirmar que para uma entrada parabólica, o erro de estado estacionário é nulo para um sistema do tipo 3 ou maior. Para um sistema do tipo 2, o erro de estado estacionário não é nulo, e seu valor é dado pela equação (9.48). Para um sistema do tipo 0 ou do tipo 1, o erro de estado estacionário não é limitado.

Na Tabela 9.1, apresentamos um resumo dos erros de estado estacionário de acordo com o tipo de sistema, como foi determinado acima.

Um sistema do tipo 0 é chamado *regulador*. O objetivo desse sistema é manter uma variável física de interesse em algum valor constante prescrito apesar da presença de perturbações externas. Os exemplos de sistemas reguladores incluem:

- Controle do conteúdo de umidade em papel, que é um problema que surge no processo de fabricação de papéis.
- Controle da composição química da saída de material produzido por um reator
- Sistema de controle biológico, o qual mantém a temperatura do corpo humano em aproximadamente 37°C apesar de variações na temperatura do ambiente ao redor

**TABELA 9.1 Erros de Estado Estacionário de Acordo com o Tipo de Sistema**

	Degrado	Rampa	Parabólico
Tipo 0	$1/(1+K_p)$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$1/K_v$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$1/K_a$

Os sistemas de tipo 1 e maiores são chamados *servomecanismos*. O objetivo aqui é fazer uma variável física seguir, ou rastrear, alguma função variável no tempo desejada. Os exemplos de servomecanismos incluem:

- » Controle de um robô, no qual se faz com que o manipulador de robô siga uma trajetória predefinida no espaço
- » Controle de um míssil, guiando-o para que siga uma rota de combate especificada
- » Rastreamento de um alvo móvel (por exemplo, aeronave inimiga) por um sistema de radar

**EXEMPLO 9.4.** A Figura 9.17 mostra um diagrama de blocos de um sistema de controle de realimentação que envolve um *motor dc*. O motor dc é um dispositivo eletromecânico que converte energia elétrica de corrente contínua em energia mecânica rotativa. Sua função de transferência é definida aproximadamente por

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau_L s + 1)}$$

em que  $K$  é o ganho e  $\tau_L$  é a constante de tempo da carga. Presume-se aqui que a constante de tempo do campo do motor seja pequena em comparação com a constante de tempo da carga. A função de transferência do controlador é

$$H(s) = \frac{\alpha \tau s + 1}{\tau s + 1}$$

Encontre os erros de estado estacionário deste sistema de controle. Qual é o efeito de fazermos o ganho  $K$  assumir um valor grande?

**Solução:** A função de transferência de malha do sistema de controle da Figura 9.17 é

$$G(s)H(s) = \frac{K(\alpha \tau s + 1)}{s(\tau_L s + 1)(\tau s + 1)} \quad (9.50)$$

a qual representa um sistema do tipo 1. Comparando a equação (9.50) com a (9.43), teremos para o exemplo em questão

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{\alpha K}{\tau_L} \left( s + \frac{1}{\alpha \tau} \right) \\ Q_1(s) &= \left( s + \frac{1}{\tau_L} \right) \left( s + \frac{1}{\tau} \right) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, o uso destes valores nas equações (9.45), (9.47) e (9.49) produz

$$\begin{aligned} K_p &= \infty \\ K_v &= K \\ K_a &= 0 \end{aligned}$$

De maneira correspondente, substituir estas constantes de erro nas equações (9.44), (9.46) e (9.48) produzirá os seguintes erros de estado estacionário para o sistema de controle da Figura 9.17:

- Entrada de degrau:  $\epsilon_{ss} = 0$ .
- Entrada de rampa:  $\epsilon_{ss} = 1/K = \text{constante}$ .
- Entrada parabólica:  $\epsilon_{ss} = \infty$ .

O efeito de tornarmos o ganho  $K$  grande é reduzir o erro de estado estacionário do sistema devido a uma entrada de rampa. Isto, por sua vez, melhora o comportamento do sistema como um sistema de controle de velocidade.

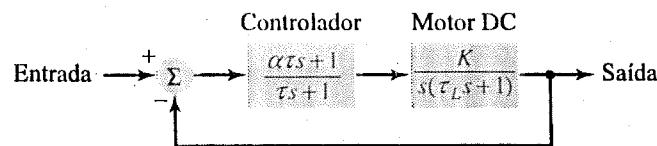


FIGURA 9.17 O sistema de controle realimentado do tipo 1 considerado no Exemplo 9.4.

► EXERCÍCIO 9.5 Considere um sistema de controle realimentado do tipo 2 cuja função de transferência de malha seja definida por

$$G(s)H(s) = \frac{0,25K(s+2)}{s^2(s+1)(s+\frac{1}{2})}$$

Calcule o erro de estado estacionário do sistema para cada uma das três entradas seguintes:

- (a) Função degrau com amplitude unitária.
- (b) Rampa com coeficiente angular unitário.
- (c) Entrada parabólica com derivada de segunda ordem unitária.

*Resposta:*

- (a)  $\epsilon_{ss} = 0$ .
- (b)  $\epsilon_{ss} = 0$ .
- (c)  $\epsilon_{ss} = 1/K = \text{constante}$ .

## 9.9 Resposta Transitoria de Sistemas de Baixa Ordem

Com a finalidade de preparar o cenário para o material sobre a análise de estabilidade dos sistemas de controle realimentados a serem apresentados nas seções subsequentes deste capítulo, consideramos informativo examinar a resposta transitoria de sistemas de primeira ordem e de segunda ordem. Não obstante os sistemas de controle realimentado de tal baixa ordem serem, de fato, raros na prática, a análise transitoria dos mesmos constitui a base para um melhor entendimento dos sistemas de ordem mais elevada.

### SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

Usando a notação do Capítulo 6, a função de transferência de um sistema de primeira ordem é definida por

$$T(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$$

Para darmos um significado físico aos coeficientes da função de transferência  $T(s)$ , achamos mais conveniente reescrevê-la na forma padrão:

$$T(s) = \frac{T(0)}{\tau s + 1} \quad (9.51)$$

em que  $T(0) = b_0/a_0$  e  $\tau = 1/a_0$ . O parâmetro  $T(0)$  é o ganho do sistema em  $s = 0$ . O parâmetro  $\tau$  é medido em unidades de tempo e, portanto, é chamado *constante de tempo* do sistema. De acordo com a equação (9.51), o polo simples de  $T(s)$  está localizado em  $s = -1/\tau$ .

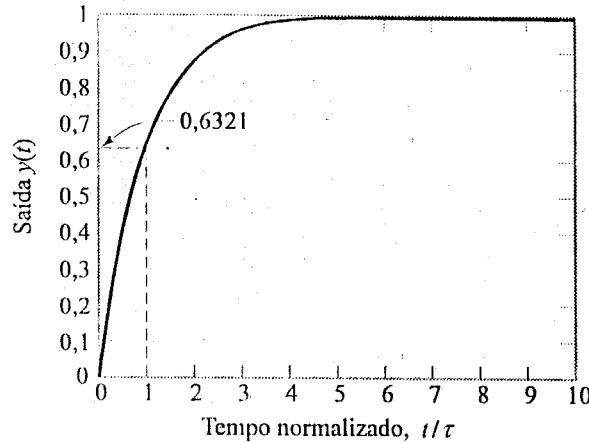
Para uma entrada de degrau (isto é,  $Y_d(s) = 1/s$ ), a resposta do sistema tem a transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{T(0)}{s(\tau s + 1)} \quad (9.52)$$

Expandindo  $Y(s)$  em frações parciais e usando a tabela de pares de transformadas de Laplace do Apêndice D, descobrimos que a resposta ao degrau do sistema é a seguinte (supondo que  $T(0) = 1$ ):

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau} \quad (9.53)$$

a qual está plotada na Figura 9.18. Em  $t = \tau$ , a resposta  $y(t)$  atinge 63,21% de seu valor final; daí, a terminologia “constante de tempo.”



**FIGURA 9.18** Resposta transitória de um sistema de primeira ordem, plotado contra o tempo normalizado  $t/\tau$ , em que  $\tau$  é a constante de tempo do sistema.

### ■ SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

Usando novamente a notação do Capítulo 6, a função de transferência de um sistema de segunda ordem é definida por

$$T(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Entretanto, como no caso de primeira ordem, achamos mais conveniente formular a função de transferência  $T(s)$  de forma que seus coeficientes tenham um significado físico. Especificamente, redefinimos  $T(s)$  na forma padrão:

$$T(s) = \frac{T(0)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9.54)$$

em que  $T(0) = b_0/a_0$ ,  $\omega_n^2 = a_0$ , e  $2\zeta\omega_n = a_1$ . O parâmetro  $T(0)$  é o ganho do sistema em  $s = 0$ . O parâmetro adimensional  $\zeta$  é chamado *taxa de amortecimento*, e  $\omega_n$  é chamado *freqüência natural ou freqüência não amortecida* do sistema. Estes três parâmetros caracterizam o sistema cada um à sua própria maneira. Os pólos do sistema estão localizados em

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (9.55)$$

Para a entrada de degrau, a resposta do sistema tem a transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{T(0)\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Por enquanto, supomos que os pólos de  $T(s)$  sejam complexos, com partes reais negativas. Isto implica que  $0 < \zeta < 1$ . Então, expandindo  $Y(s)$  em frações parciais e usando a tabela de pares de transformadas de Laplace do Apêndice D, podemos expressar a resposta ao degrau do sistema como o seguinte sinal senoidal exponencialmente amortecido (supondo-se que  $T(0) = 1$ ):

$$y(t) = \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right) \right] u(t) \quad (9.56)$$

A constante de tempo da senóide exponencialmente amortecida é definida por

$$\tau = \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (9.57)$$

a qual é medida em segundos. A frequência da senóide exponencialmente amortecida é  $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

Dependendo do valor de  $\zeta$ , podemos formalmente identificar três regimes de operação:

1.  $0 < \zeta < 1$ . Neste caso, os dois pólos de  $T(s)$  constituem um par complexo conjugado, e a resposta ao degrau do sistema é definida pela equação (9.56). Diz-se que o sistema é *subamortecido*.
2.  $\zeta > 1$ . Neste segundo caso, os dois pólos de  $T(s)$  são ambos reais. A resposta ao degrau  $y(t)$  agora envolve duas funções exponenciais, como é mostrado por

$$y(t) = (1 + k_1 e^{-t/\tau_1} + k_2 e^{-t/\tau_2}) u(t) \quad (9.58)$$

em que as constantes de tempo  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ \tau_2 &= \frac{1}{\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

e os fatores de escala  $k_1$  e  $k_2$  são definidos, respectivamente, por,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \\ k_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \end{aligned}$$

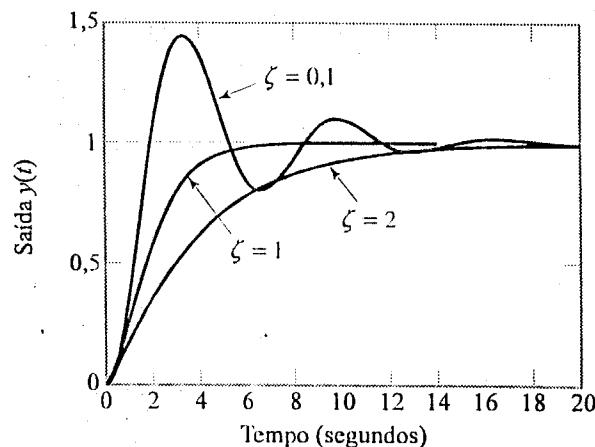
Dessa forma, para  $\zeta > 1$ , diz-se que o sistema é *superamortecido*.

3.  $\zeta = 1$ . Neste caso final, os dois pólos são coincidentes em  $s = -\omega_n$ , e a resposta ao degrau do sistema é definida por

$$y(t) = (1 - e^{-t/\tau} - te^{-t/\tau}) u(t) \quad (9.59)$$

em que  $\tau = 1/\omega_n$  é a única constante de tempo do sistema. Diz-se que o sistema é *criticamente amortecido*.

A Figura 9.19 mostra a resposta ao degrau  $y(t)$  plotada contra o tempo  $t$  para  $\omega_n = 1$  e três taxas diferentes de amortecimento:  $\zeta = 2$ ,  $\zeta = 1$  e  $\zeta = 0,1$ . Estes três valores de  $\zeta$  correspondem aos casos 2, 3 e 1, respectivamente.



**FIGURA 9.19** Resposta transitória de um sistema de segunda ordem para três valores diferentes de taxa de amortecimento: superamortecido,  $\zeta = 2$ ; criticamente amortecido,  $\zeta = 1$ ; subamortecido,  $\zeta = 0,1$ .

Com o material acima sobre sistemas de primeira ordem e segunda ordem à nossa disposição, estamos preparados para retomar nosso estudo dos sistemas de controle realimentados.

► **Exercício 9.6** Usando a tabela de pares de transformadas de Laplace do Apêndice D, derive o seguinte:

- A resposta ao degrau de um sistema subamortecido, conforme a definição da equação (9.56).
- A resposta ao degrau de um sistema superamortecido, conforme a definição da equação (9.58).
- A resposta ao degrau de um sistema criticamente amortecido, conforme a definição da equação (9.59).

## 9.10 Especificações de Domínio de Tempo

Para sistemas de controle linear, a resposta transitória normalmente é medida em termos da resposta ao degrau. Tipicamente, a resposta ao degrau, denotada por  $y(t)$ , é oscilatória, como ilustra a Figura 9.20. Para descrever essa resposta, temos dois critérios conflitantes: rapidez da resposta e proximidade da resposta em relação à resposta desejada. A proximidade da resposta em relação à resposta desejada é medida em termos do sobre-sinal percentual e do tempo de acomodação. Estas quatro quantidades são definidas da seguinte maneira:

- O *tempo de subida*,  $T_r$  (*rise = subida*), é definido como o tempo tomado pela resposta ao degrau para elevar-se de 10% para 90% de seu valor final  $y(\infty)$ .
- O *tempo de pico*,  $T_p$ , é definido como o tempo tomado pela resposta ao degrau para atingir o valor máximo (global) de sobre-sinal  $y_{\max}$ .
- O *sobre-sinal percentual*, P.O. (*percentage overshoot*), é definido em termos do valor máximo  $y_{\max}$  e do valor final  $y(\infty)$  por

$$\text{P.O.} = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$$

- O *tempo de acomodação*,  $T_s$  (*settling time*), é definido como o tempo necessário pela resposta ao degrau para acomodar-se dentro de  $\pm\delta\%$  do valor final  $y(\infty)$ , em que  $\delta$  é definido pelo usuário.

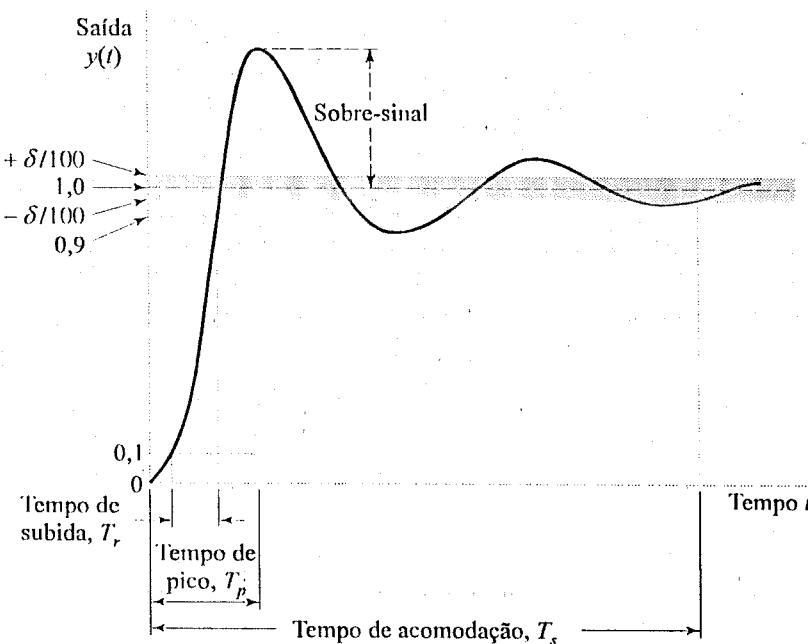


FIGURA 9.20 Especificações de domínio de tempo de uma resposta ao degrau.

A Figura 9.20 ilustra a definição destas quatro quantidades, supondo que  $y(\infty) = 1,0$ . Elas proporcionam uma descrição apropriada da resposta ao degrau  $y(t)$ . O que é mais importante, elas se prestam a medições. Observe que no caso de um sistema superamortecido, o tempo de pico e o sobre-sinal percentual não são definidos. Nesse caso, a resposta ao degrau do sistema é especificada simplesmente em termos do tempo de subida e do tempo de acomodação.

Por razões que se tornarão claras mais adiante, a resposta subamortecida de um sistema de segunda ordem a uma entrada de degrau fornece muitas vezes uma aproximação adequada para a resposta ao degrau num sistema de controle de realimentação linear. Conseqüentemente, é de especial interesse relacionarmos as quantidades acima mencionadas com os parâmetros de um sistema de segunda ordem.

**EXEMPLO 9.5** Considere um sistema subamortecido de segunda ordem com taxa de amortecimento  $\zeta$  e freqüência natural  $\omega_n$ . Determine o tempo de subida, o tempo de pico, o sobre-sinal percentual e o tempo de acomodação do sistema. Para o tempo de acomodação, use  $\delta = 1$ .

**Solução:** Infelizmente, é difícil de se obter uma expressão explícita para o tempo de subida  $T_s$ , em termos da taxa de amortecimento  $\zeta$  e da freqüência natural  $\omega_n$ . Todavia, ela pode ser determinada por simulação. A Tabela 9.2 apresenta os resultados da simulação para a faixa  $0,1 \leq \zeta \leq 0,9$ . Nesta tabela, também incluímos os resultados obtidos usando a fórmula aproximada:

$$T_s \approx \frac{1}{\omega_n} (0,60 + 2,16 \zeta)$$

Esta fórmula produz resultados razoavelmente exatos para  $0,3 \leq \zeta \leq 0,8$ , como se pode ver na Tabela 9.2.

Para determinar o tempo de pico  $T_p$ , podemos diferenciar a equação (9.56) com respeito ao tempo  $t$  e depois fazermos o resultado igual a zero. Dessa forma, obtemos as soluções  $t = \infty$  e

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A solução  $t = \infty$  define o máximo da resposta ao degrau  $y(t)$  somente quando  $\zeta \geq 1$  (isto é, o caso criticamente amortecido ou superamortecido). Estamos interessados no caso subamortecido. O primeiro máximo de  $y(t)$  ocorre para  $n = 1$ ; conseqüentemente, o tempo de pico é

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

O primeiro máximo de  $y(t)$  também define o sobre-sinal percentual. Dessa forma, fazendo  $t = T_p$  na equação (9.56) e simplificando o resultado, obtemos

$$y_{\max} = 1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

O sobre-sinal percentual é, portanto

$$\text{P.O.} = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Finalmente, para determinar o tempo de acomodação  $T_s$ , procuramos o tempo  $t$  para o qual a resposta ao degrau  $y(t)$  definida na equação (9.56) decresce e permanece dentro de  $\pm\delta\%$  do valor final  $y(\infty) = 1,0$ . Para  $\delta = 1$ , este tempo é aproximado de perto pelo fator exponencial decrescente  $e^{-\zeta\omega_n t}$ , como é mostrado por

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} \approx 0,01$$

ou

$$T_s \approx \frac{4,6}{\zeta\omega_n}$$

**TABELA 9.2 Tempo de Subida Normalizado como uma Função da Taxa de Amortecimento  $\zeta$  para um Sistema de Segunda Ordem**

$\zeta$	$\omega_n T_r$	Valor Aproximado
0,1	1,1	0,82
0,2	1,2	1,03
0,3	1,3	1,25
0,4	1,45	1,46
0,5	1,65	1,68
0,6	1,83	1,90
0,7	2,13	2,11
0,8	2,5	2,33
0,9	2,83	2,54

## 9.11 O Problema da Estabilidade

Nas Seções 9.3 a 9.5, mostramos que um ganho de malha  $G(s)H(s)$  grande é necessário para tornar a função de transferência de malha fechada  $T(s)$  de um sistema de realimentação menos sensível a variações de parâmetro, reduzir os efeitos da perturbação ou ruído, e reduzir a distorção não linear. De fato, baseando-se no que lá foi apresentado, seria tentador propor a receita seguinte para melhorar o desempenho de um sistema realimentado: tornar o ganho de malha  $G(s)H(s)$  do sistema o maior possível na faixa de passagem do sistema. Infelizmente, a utilidade desta receita simples é limitada por um problema da estabilidade que se sabe que surge em sistemas realimentados sob certas condições.

Se o número de pólos contido em  $G(s)H(s)$  for três ou mais, então o sistema se tornará mais propenso à instabilidade e, portanto, mais difícil de controlar à medida que ganho de malha é aumentado. No projeto de um sistema com realimentação, a tarefa é, por conseguinte, não somente satisfazer as várias exigências de desempenho impostas ao sistema para se obter uma operação satisfatória dentro de uma faixa de passagem prescrita, mas também assegurar que o sistema seja estável e permaneça estável sob todas as condições operacionais possíveis.

A estabilidade de um sistema com realimentação, como qualquer outro sistema LTI, é completamente determinada pela localização de seus pólos ou freqüências naturais no plano  $s$ . As *freqüências naturais* de um sistema realimentado linear com função de transferência de malha fechada  $T(s)$  são definidas como as raízes da *equação característica*

$$A(s) = 0 \quad (9.60)$$

em que  $A(s)$  é o polinômio do denominador de  $T(s)$ . O sistema realimentado será estável se as raízes desta equação característica estiverem todas confinadas no semiplano esquerdo do plano  $s$ .

Portanto, pareceria apropriado iniciarmos um estudo detalhado do problema da estabilidade discutindo como as freqüências naturais de um sistema realimentado são modificadas pela aplicação de realimentação. Examinaremos agora esta questão, usando três sistemas realimentado simples.

### SISTEMA REALIMENTADO DE PRIMEIRA ORDEM

Considere um sistema com realimentação de primeira ordem de tipo 0, com realimentação igual à unidade. A função de transferência de malha do sistema é definida por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{\tau_0 s + 1} \quad (9.61)$$

em que  $\tau_0$  é a constante de tempo de malha aberta do sistema, e  $K$  é um ganho de malha ajustável. A função de transferência de malha  $G(s)H(s)$  tem um polo simples em  $s = -1/\tau_0$ . Usando a equação (9.61) em (9.36), encontramos que a função de transferência de malha fechada do sistema é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \\ &= \frac{K}{\tau_0 s + K + 1} \end{aligned}$$

A equação característica do sistema é, portanto,

$$\tau_0 s + K + 1 = 0 \quad (9.62)$$

a qual tem uma única raiz em  $s = -(K + 1)/\tau_0$ . À medida que  $K$  é aumentado, esta raiz se move ao longo do eixo real do plano  $s$ , traçando o lugar (*locus*)<sup>1</sup> mostrado na Figura 9.21. De fato, ele permanece confinado no semiplano esquerdo do plano  $s$  para  $K > -1$ . Portanto, podemos afirmar que o sistema de realimentação de primeira ordem com uma função de transferência descrita pela equação (9.61) é estável para todo  $K > -1$ .

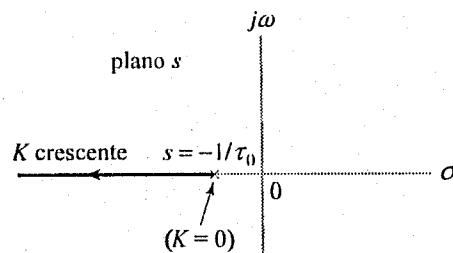


FIGURA 9.21 Efeito da realimentação sobre a localização do pôlo de um sistema de primeira ordem.

### SISTEMA REALIMENTADO DE SEGUNDA ORDEM

Considere em seguida um sistema de realimentação de segunda ordem do tipo I, com realimentação unitária. A função de transferência de malha do sistema é definida por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \quad (9.63)$$

em que  $K$  é um ganho de malha ajustável medido em rad/s, e  $G(s)H(s)$  tem pólos simples em  $s = 0$  e  $s = -1/\tau$ . Usando a equação (9.63) em (9.36), descobrimos que a função de transferência de malha fechada do sistema é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \\ &= \frac{K}{\tau s^2 + s + K} \end{aligned}$$

A equação característica do sistema é, portanto,

$$\tau s^2 + s + K = 0 \quad (9.64)$$

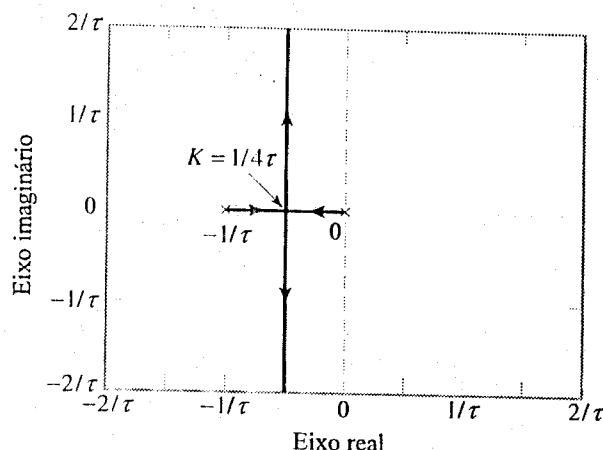
Esta é uma equação quadrática em  $s$  com um par de raízes definidas por

$$s = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \frac{K}{\tau}} \quad (9.65)$$

A Figura 9.22 mostra o lugar traçado pelas duas raízes da equação (9.65) quando o ganho de malha  $K$  é variado, iniciando em zero. Vemos que, para  $K = 0$ , a equação característica tem uma raiz em  $s = 0$  e uma outra em  $s = -1/\tau$ . Quando  $K$  é aumentado, as duas raízes se movem uma na direção da

<sup>1</sup>Locus. Lugar geométrico. 1. (Mat.) A linha traçada por um ponto que varia sua posição de acordo com alguma lei determinada; a superfície descrita por um ponto ou linha que se move de acordo com uma lei dada.

outra ao longo do eixo real, até se encontrarem em  $s = -1/2\tau$  para  $K = 1/4\tau$ . Quando  $K$  é aumentado ainda mais, as duas raízes se separam uma da outra ao longo de uma linha paralela ao eixo  $j\omega$  e que intercepta o ponto  $s = -1/2\tau$ . Este ponto é denominado *ponto de separação ou ramificação*, onde os lugares das raízes se afastam do eixo real do plano  $s$ .



**FIGURA 9.22** Efeito da realimentação sobre as localizações dos pólos de um sistema de segunda ordem. A função de transferência de malha tem pólos em  $s = 0$  e  $s = -1/\tau$ .

Quando nenhuma realimentação é aplicada ao sistema (isto é,  $K = 0$ ), a equação característica do sistema tem uma raiz em  $s = 0$  e o sistema está, portanto, à beira da instabilidade. Quando é atribuído a  $K$  um valor maior do que zero, as duas raízes da equação característica são ambas confinadas ao semiplano esquerdo do plano  $s$ . Segue-se, portanto, que o sistema de realimentação de segunda ordem com uma função de transferência de malha descrita pela equação (9.63) é instável para todos os valores positivos de  $K$ .

► **EXERCÍCIO 9.7** Em relação ao sistema de realimentação de segunda ordem da equação (9.63), identifique os valores de  $K$  que resultam nas formas seguintes de resposta ao degrau para o sistema: (a) subamortecido, (b) superamortecido e (c) criticamente amortecido.

**Resposta:** (a)  $K > 0,25/\tau$ . (b)  $K < 0,25/\tau$ . (c)  $K = 0,25/\tau$ .

► **EXERCÍCIO 9.8** Para o caso em que o ganho de malha  $K$  é suficientemente grande para produzir uma resposta ao degrau subamortecida, mostre que a taxa de amortecimento e a freqüência natural do sistema de realimentação de segunda ordem são definidas em termos do ganho de malha  $K$  e da constante de tempo  $\tau$ , respectivamente, da seguinte maneira:

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\tau K}} \quad \text{e} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}}$$

► **EXERCÍCIO 9.9** A equação característica de um sistema de realimentação de segunda ordem pode, em geral, ser escrito na forma

$$s^2 + as + b = 0$$

Mostre que esse sistema é estável, desde que os coeficientes  $a$  e  $b$  sejam ambos positivos.

### ■ SISTEMA REALIMENTADO DE TERCEIRA ORDEM

A partir da análise que acabamos de apresentar, vemos que os sistemas realimentados de primeira ordem e de segunda ordem, conforme descrevemos aqui, não apresentam um problema de estabilidade. Em ambos os casos, o sistema de realimentação é estável para todos os valores positivos do ganho de malha  $K$ . Para explorar ainda mais o problema da estabilidade, consideraremos agora um sistema realimentado de terceira ordem cuja função de transferência de malha é descrita por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \quad (9.66)$$

De maneira correspondente, a função de transferência de malha fechada do sistema é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \\ &= \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + K + 1} \end{aligned}$$

A equação característica do sistema é, portanto,

$$s^3 + 3s^2 + 3s + K + 1 = 0 \quad (9.67)$$

Esta equação característica cúbica é mais difícil de manipular do que as equações características de ordem mais baixa (9.62) e (9.64). Deste modo, recorremos ao uso de um computador para obter algum *insight* sobre como as variações no ganho de malha  $K$  afetam o desempenho da estabilidade do sistema.

A Tabela 9.3 apresenta as raízes da equação característica (9.67) para três diferentes valores de  $K$ . Para  $K = 0$ , temos uma raiz de terceira ordem já que  $s = -1$ . Para  $K = 5$ , a equação característica tem uma raiz simples e um par de raízes complexas conjugadas, todas as quais têm partes reais negativas (isto é, elas estão localizadas no semiplano esquerdo do plano  $s$ ). Conseqüentemente, para  $K = 5$ , o sistema é estável. Para  $K = 10$ , o par de raízes complexas conjugadas se move para o semiplano direito do plano  $s$  e, portanto, o sistema é instável. Dessa forma, no caso de um sistema realimentado de terceira ordem com uma função de transferência de malha descrita pela equação (9.66), o ganho de malha  $K$  tem uma profunda influência sobre a estabilidade do sistema.

**TABELA 9.3 Raízes da Equação Característica  $s^3 + 3s^2 + 3s + K + 1 = 0$**

$K$	Raízes
0	Raiz de terceira ordem em $s = -1$
5	$s = -2,71$ $s = -0,1450 \pm j1,4809$
10	$s = -3,1544$ $s = 0,0772 \pm j1,8658$

A maioria dos sistemas de realimentação usados na prática são de ordem 3 ou mais. A estabilidade desses sistemas é, portanto, uma questão de primordial importância. Grande parte do material apresentado no restante deste capítulo é dedicada ao estudo deste problema.

## 9.12 Critério de Routh-Hurwitz

O *critério de Routh-Hurwitz* fornece um procedimento simples para se certificar se todas as raízes de um polinômio  $A(s)$  têm ou não partes reais (isto é, situam-se no semiplano esquerdo do plano  $s$ ); ele faz isto sem precisar computar as raízes de  $A(s)$ . Digamos que o polinômio  $A(s)$  seja expresso na forma expandida

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (9.68)$$

em que  $a_n \neq 0$ . O procedimento se inicia organizando todos os coeficientes de  $A(s)$  na forma de duas linhas, da seguinte maneira:

Linha  $n$ :  $a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad \cdots$

Linha  $n-1$ :  $a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad \cdots$

Se a ordem  $n$  do polinômio  $A(s)$  é par e, portanto, o coeficiente  $a_0$  pertence à linha  $n$ , então um zero é colocado sob  $a_0$  na linha  $n - 1$ . O próximo passo é construir a linha  $n - 2$  usando as entradas das linhas  $n$  e  $n - 1$  da seguinte maneira:

$$\text{Linha } n - 2: \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad \dots$$

Note que as entradas nesta linha têm quantidades assemelhadas a determinantes nos seus numeradores. Ou seja,  $a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}$ . Corresponde ao negativo do determinante da matriz  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}$$

Uma formulação similar se aplica aos numeradores das outras entradas da linha  $n - 2$ . Em seguida, as entradas das linhas  $n - 1$  e  $n - 2$  são usadas para construir a linha  $n - 3$ , seguindo-se um procedimento idêntico ao que descrevemos acima, e o processo é continuado até que atinjamos a linha 0. A matriz resultante de  $(n + 1)$  linhas é chamada *matriz de Routh*.

Agora podemos enunciar o critério de Routh-Hurwitz: *Todas as raízes do polinômio  $A(s)$  situar-se-ão no semiplano esquerdo do plano  $s$  se todas as entradas da coluna mais à esquerda da matriz de Routh forem não nulas e tiverem o mesmo sinal. Se forem encontradas variações de sinal ao percorrermos a coluna mais à esquerda, o número de variações de sinal será o número de raízes de  $A(s)$  no semiplano direito do plano  $s$ .*

**EXEMPLO 9.6** O polinômio característico de um sistema realimentado de quarta ordem é dado por

$$A(s) = s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 2s + 10$$

Construa a matriz de Routh e, então, determine se o sistema é estável ou não.

**Solução:** Construindo a matriz de Routh para  $n = 4$ , obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{cccc} \text{Linha 4:} & 1 & 7 & 10 \\ \text{Linha 3:} & 3 & 3 & 0 \\ \text{Linha 2:} & \frac{3 \times 7 - 3 \times 1}{3} = 6 & \frac{3 \times 10 - 0 \times 1}{3} = 10 & 0 \\ \text{Linha 1:} & \frac{6 \times 3 - 10 \times 3}{6} = -2 & 0 & 0 \\ \text{Linha 0:} & \frac{-2 \times 10 - 0 \times 6}{-2} = 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Há duas variações de sinal nas entradas da coluna mais à esquerda da matriz de Routh. Portanto, concluímos que (1) o sistema é instável e (2) a equação característica do sistema tem duas raízes no semiplano direito do plano  $s$ .

O critério de Routh-Hurwitz pode ser usado para determinar o valor crítico do ganho de malha  $K$  para o qual o polinômio  $A(s)$  tem um par de raízes no eixo  $j\omega$  do plano  $s$  ao explorarmos um caso especial deste critério. Se  $A(s)$  tiver um par de raízes no eixo, o teste de Routh-Hurwitz termina prematuramente, em termos de que uma linha (sempre uma linha com numeração ímpar) de zeros é encontrada ao construir a matriz de Routh. Quando isto acontece, diz-se que o sistema realimentado está *a beira da instabilidade*. O valor crítico de  $K$  é deduzido das entradas da linha particular em questão. O par correspondente de raízes no eixo  $j\omega$  é encontrado no polinômio auxiliar formado a partir das entradas da linha precedente, como ilustra o exemplo seguinte.

**EXEMPLO 9.7** Considere novamente um sistema realimentado de terceira ordem cuja função de transferência de malha  $L(s) = G(s)H(s)$  é definida pela equação (9.66), ou seja,

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

Encontre (a) o valor de  $K$  para o qual o sistema está à beira da instabilidade e (b) o par correspondente de raízes no eixo  $j\omega$  do plano  $s$ .

**Solução:** O polinômio característico  $A(s)$  do sistema é definido por

$$\begin{aligned} A(s) &= (s+1)^3 + K \\ &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K \end{aligned}$$

Construindo a matriz de Routh, obtemos o seguinte

$$\begin{array}{ccc} \text{Linha 3:} & 1 & 3 \\ \text{Linha 2:} & 3 & 1+K \\ \text{Linha 1:} & \frac{9-(1+K)}{3} & 0 \\ \text{Linha 0:} & 3 & 0 \end{array}$$

(a) Para que a única entrada não nula da linha 1 se torne nula, necessitamos que

$$9 - (1 + K) = 0$$

o que produz  $K = 8$ .

(b) Para este valor de  $K$ , o polinômio auxiliar é obtido da linha 2:

$$3s^2 + 9 = 0$$

o qual tem um par de raízes em  $s = \pm j\sqrt{3}$ .

► **EXERCÍCIO 9.10** Considere um sistema de realimentação linear com sua função de transferência de malha definida por

$$L(s) = \frac{0,2K(s+5)}{(s+1)^3}$$

Encontre (a) o valor crítico do ganho de malha  $K$  para o qual o sistema está à beira da instabilidade e (b) o par de raízes correspondente no eixo  $j\omega$  do plano  $s$ .

**Resposta:** (a)  $K = 20$ , (b)  $s = \pm j\sqrt{7}$ .

### ■ OSCILADORES SENOIDAIS

No projeto de *osciladores senoidais*, é aplicada realimentação a um amplificador com o objetivo específico de tornar o sistema *instável*. Nessa aplicação, o oscilador consiste num amplificador e numa rede determinante da freqüência, formando um sistema de realimentação de malha fechada. O amplificador dá a condição necessária para a oscilação. Para evitar distorcer o sinal de saída, o grau de não linearidade no amplificador é mantido em um nível muito baixo. No exemplo seguinte, mostraremos como o critério de Routh-Hurwitz pode ser usado para esse tipo de aplicação.

**EXEMPLO 9.8** A Figura 9.23 mostra o diagrama do circuito simplificado de um *oscilador de áudio RC*. Determine a freqüência de oscilação e a condição para a oscilação.

**Solução:** Com a chave aberta, descobrimos na Figura 9.23 que a função de transferência de malha é (de acordo com a terminologia da Figura 9.2)

$$\begin{aligned} L(s) &= -\frac{V_1(s)}{V_2(s)} \\ &= -\frac{K \left( \frac{R}{sC} \right) / \left( R + \frac{1}{sC} \right)}{\left( \frac{R}{sC} / \left( R + \frac{1}{sC} \right) \right) + R + \frac{1}{sC}} \\ &= -\frac{KRCs}{(RCs)^2 + 3(RCs) + 1} \end{aligned}$$

A equação característica do circuito de realimentação é, portanto,

$$(RCs)^2 + (3 - K)RCs + 1 = 0$$

Uma equação característica quadrática é simples o bastante para que determinemos a condição de instabilidade sem termos de criar a matriz de Routh. Para o problema em questão, vemos que quando a chave da Figura 9.23 estiver fechada, o circuito estará à beira da instabilidade, desde que o ganho de tensão  $K$  do amplificador seja 3. As freqüências naturais do circuito situar-se-ão então no eixo  $j\omega$  em  $s = \pm j/RC$ . Na prática, o ganho  $K$  é escolhido ligeiramente maior do que 3 a fim de que as raízes da equação característica se situem logo à direita do eixo  $j\omega$ . Isto é feito para se ter certeza de que o oscilador possa dar partida por si mesmo. À medida que a oscilação se eleva em termos de amplitude, um componente resistivo do amplificador (não mostrado na Figura 9.23) é modificado ligeiramente, ajudando a estabilizar o ganho  $K$  no valor desejado 3.

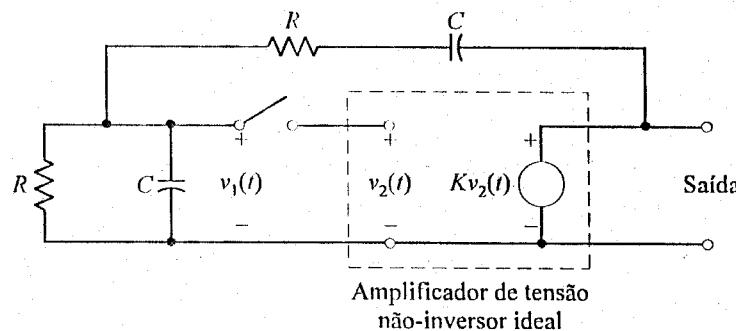


FIGURA 9.23 Oscilador de áudio *RC*.

► **Exercício 9.11** Os valores dos elementos do circuito oscilador da Figura 9.23 são  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 0,01 \mu\text{F}$ . Encontre a freqüência de oscilação.

**Resposta:** 1,5915 kHz.

### 9.13 Método do Lugar das Raízes

O *método do lugar das raízes* (*root locus*) é uma ferramenta analítica para projeto de sistemas com realimentação linear, com ênfase nas localizações de pólos em sua função de transferência de malha fechada.

Lembre-se que os pólos de uma função de transferência do sistema determinam sua resposta transitória. Conseqüentemente, conhecendo as localizações dos pólos de malha fechada, podemos deduzir informações consideráveis sobre a resposta transitória do sistema de realimentação. O método deriva seu nome do fato de que o “lugar das raízes” é o caminho ou lugar geométrico seguido pelas raízes da equação característica do sistema no plano  $s$  complexo quando algum parâmetro (usualmente, mas não necessariamente, o ganho de malha) é variado de zero ao infinito. Esse lugar das raízes é exemplificado pelas plotagens na Figura 9.21 correspondentes a um sistema realimentado de primeira

ordem e na Figura 9.22 correspondentes a um sistema realimentado de segunda ordem do tipo 1.

Numa configuração geral, a construção do lugar das raízes se inicia com a função de transferência de malha do sistema, expressa na forma fatorada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} L(s) &= G(s)H(s) \\ &= K \frac{\prod_{i=1}^M (1 - s/c_i)}{\prod_{j=1}^N (1 - sd_j)} \end{aligned} \quad (9.69)$$

em que  $K$  é o ganho de malha, e  $d_j$  e  $c_i$  são os pólos e zeros de  $L(s)$ , respectivamente. Estes pólos e zeros são números fixos, independentes de  $K$ . Num sistema de realimentação linear, eles podem ser determinados diretamente do diagrama de blocos do sistema, uma vez que o sistema normalmente é composto de uma cascata de componentes de primeira e segunda ordens.

Tradicionalmente, o termo "lugar das raízes" refere-se a uma situação em que o ganho de malha é não negativo, ou seja,  $0 \leq K \leq \infty$ . Este é o caso que será tratado em seguida.

### ■ CRITÉRIOS DO LUGAR DAS RAÍZES

Admitamos que os polinômios do numerador e do denominador da função de transferência de malha  $L(s)$  sejam definidos por

$$P(s) = \prod_{i=1}^M \left( 1 - \frac{s}{c_i} \right) \quad (9.70)$$

e

$$Q(s) = \prod_{j=1}^N \left( 1 - \frac{s}{d_j} \right) \quad (9.71)$$

A equação característica do sistema é definida por

$$A(s) = Q(s) + KP(s) = 0 \quad (9.72)$$

De maneira equivalente, podemos escrever

$$L(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)} = -1 \quad (9.73)$$

Uma vez que  $s = \sigma + j\omega$  tem valor complexo, podemos expressar o polinômio  $P(s)$  em termos de seus componentes de módulo e fase da seguinte maneira:

$$P(s) = |P(s)| e^{j \arg\{P(s)\}} \quad (9.74)$$

em que

$$|P(s)| = \prod_{i=1}^M \left| 1 - \frac{s}{c_i} \right| \quad (9.75)$$

e

$$\arg\{P(s)\} = \sum_{i=1}^M \arg \left\{ 1 - \frac{s}{c_i} \right\} \quad (9.76)$$

Similarmente, o polinômio  $Q(s)$  pode ser expresso em termos dos componentes de módulo e fase da seguinte maneira:

$$Q(s) = |Q(s)| e^{j \arg\{Q(s)\}} \quad (9.77)$$

em que

$$|Q(s)| = \prod_{j=1}^N \left| 1 - \frac{s}{d_j} \right| \quad (9.78)$$

e

$$\arg\{Q(s)\} = \sum_{j=1}^N \arg \left\{ 1 - \frac{s}{d_j} \right\} \quad (9.79)$$

Substituindo as equações (9.75), (9.76), (9.78) e (9.79) na (9.69), podemos estabelecer prontamente dois critérios básicos para um lugar de raízes (supondo que  $K$  seja não-negativo):

- » **Critério de ângulo.** Para que um ponto  $s_t$  se situe num lugar de raízes, o critério de ângulo
- $$\arg\{P(s)\} - \arg\{Q(s)\} = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.80)$$

deve ser satisfeito para  $s = s_t$ . Os ângulos  $\arg\{Q(s)\}$  e  $\arg\{P(s)\}$  são, eles próprios, determinados pelos ângulos dos fatores de pólos e zeros de  $L(s)$  como nas equações (9.76) e (9.79).

- » **Critério de módulo.** Assim que um lugar de raízes é construído, o valor do ganho de malha  $K$  correspondente ao ponto  $s_t$  é determinado a partir do critério de módulo

$$K = \frac{|Q(s)|}{|P(s)|} \quad (9.81)$$

avaliado em  $s = s_t$ . Os módulos  $|Q(s)|$  e  $|P(s)|$  são, eles próprios, determinados pelos módulos dos fatores de pôlo e zero de  $L(s)$  como nas equações (9.75) e (9.78).

Para ilustrar o uso dos critérios de ângulo e módulo para a construção de lugares de raízes, considere a função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K(1-s/c)}{s(1-s/d)(1-s/d^*)}$$

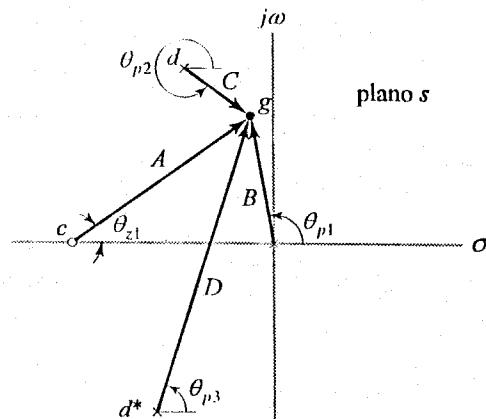
a qual tem um zero em  $s = c$ , um polo simples em  $s = 0$ , e um par de pólos complexos conjugados em  $s = d, d^*$ . Escolha um ponto tentativo  $g$  arbitrário no plano  $s$  e construa vetores a partir dos pólos e zeros de  $L(s)$  até este ponto, como descreve a Figura 9.24. Para que o critério de ângulo da equação (9.80) e o critério de módulo da equação (9.81) sejam ambos satisfeitos pela escolha do ponto  $g$ , devemos encontrar

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

e

$$K = \frac{BCD}{A}$$

em que os ângulos e tamanhos dos vetores são definidos na Figura 9.24.



**FIGURA 9.24** Ilustração do critério de ângulo da equação (9.80) e do critério de módulo da equação (9.81) correspondente à função de transferência de malha:

$$L(s) = \frac{K(1-s/c)}{s(1-s/d)(1-s/d^*)}$$

Os vários ângulos e tamanhos de vetores desenhados a partir dos pólos e zeros de  $L(s)$  até o ponto  $g$  no plano  $s$  complexo são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \theta_{z_1} &= \arg\left\{1 - \frac{g}{c}\right\}, & A &= \left|1 - \frac{g}{c}\right| \\ \theta_{p_1} &= \arg\{g\}, & B &= |g| \\ \theta_{p_2} &= \arg\left\{1 - \frac{g}{d}\right\}, & C &= \left|1 - \frac{g}{d}\right| \\ \theta_{p_3} &= \arg\left\{1 - \frac{g}{d^*}\right\}, & D &= \left|1 - \frac{g}{d^*}\right| \end{aligned}$$

### ■ PROPRIEDADES DO LUGAR DAS RAÍZES

Dados os pólos e zeros da função de transferência de malha como descreve a equação (9.69), podemos construir uma forma aproximada do lugar das raízes de um sistema de realimentação linear explorando algumas propriedades básicas do lugar das raízes, como descreveremos a seguir.

**Propriedade 1.** *O lugar das raízes tem um número de ramos igual ao maior entre N e M. Um ramo do lugar das raízes se refere ao lugar de uma raiz da equação característica comum  $A(s) = 0$  quando K varia de zero ao infinito.* A propriedade 1 decorre da equação (9.72), tendo-se em mente que os polinômios  $P(s)$  e  $Q(s)$  são, eles próprios, definidos pelas equações (9.70) e (9.71).

**Propriedade 2.** *O lugar das raízes inicia nos pólos da função de transferência de malha.* Para  $K = 0$ , a equação característica (9.72) se reduz a

$$Q(s) = 0$$

As raízes desta equação são o mesmo que os pólos da função de transferência de malha  $L(s)$ , o que prova a Propriedade 2.

**Propriedade 3.** *O lugar das raízes termina nos zeros da função de transferência de malha, incluindo aqueles zeros que se situam no infinito.*

Para  $K = \infty$ , a equação característica (9.72) se reduz a

$$P(s) = 0$$

As raízes desta equação são o mesmo que os zeros da função de transferência de malha  $L(s)$ , o que prova a Propriedade 3.

**Propriedade 4.** *O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real do plano s.* Os pólos e zeros da função de transferência de malha  $L(s)$  são reais ou então ocorrem em pares complexos conjugados. As raízes da equação característica (9.72) devem, portanto, ser reais ou pares complexos conjugados, dos quais a Propriedade 4 decorre imediatamente.

**Propriedade 5.** *Quando a freqüência complexa se aproxima do infinito, os ramos do lugar das raízes tendem a assíntotas em linha reta com os ângulos dados por*

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{N-M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, |N-M|-1 \quad (9.82)$$

*As assíntotas se interceptam num ponto comum no eixo real do plano s, cuja localização é definida por*

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{j=1}^N d_j - \sum_{i=1}^M c_i}{N-M} \quad (9.83)$$

Ou seja

$$\sigma_0 = \frac{(\text{soma de polos finitos}) - (\text{soma de zeros finitos})}{(\text{números de polos finitos}) - (\text{números de zeros finitos})}$$

O ponto de intersecção  $s = \sigma_0$  é chamado *centróide* do lugar das raízes.

► **EXERCÍCIO 9.12** A função de transferência de malha de um sistema de realimentação linear é definida por

$$L(s) = \frac{0,2K(s+5)}{(s+1)^3}$$

Encontre (a) as assíntotas do lugar das raízes do sistema e (b) seu centróide.

**Resposta:** (a)  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ . (b)  $\sigma_0 = 1$ .

**Propriedade 6.** Os pontos de intersecção do lugar das raízes com o eixo imaginário do plano  $s$ , e os correspondentes valores  $K$  de ganho de malha, podem ser determinados a partir do critério de Routh-Hurwitz.

Esta propriedade foi discutida na Seção 9.12.

**Propriedade 7.** Os pontos de separação, onde os ramos do lugar das raízes se interceptam, devem satisfazer a condição

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{L(s)} \right) = 0 \quad (9.84)$$

em que  $L(s)$  é a função de transferência de malha.

A condição da equação (9.84) é uma condição necessária, mas não suficiente para um ponto de separação. Em outras palavras, todos os pontos de separação satisfazem a equação (9.84), mas nem todas as soluções desta equação são pontos de separação.

**EXEMPLO 9.9** Considere novamente o sistema realimentado de segunda ordem da equação (9.63), supondo que  $\tau = 1$ . A função de transferência de malha do sistema é

$$L(s) = \frac{K}{s(1+s)}$$

Encontre o ponto de separação do lugar das raízes deste sistema.

**Solução:** O uso da equação (9.84) produz

$$\frac{d}{ds} = [s(1+s)] = 0$$

Ou seja,

$$1 + 2s = 0$$

a partir do que venios imediatamente que o ponto de separação está em  $s = -\frac{1}{2}$ . Isto está de acordo com o resultado exibido na Figura 9.22 para  $\tau = 1$ .

As sete propriedades descritas acima normalmente são adequadas para construir um lugar das raízes razoavelmente exato, iniciando-se com a forma fatorada da função de transferência de malha de um sistema de realimentação linear. Os dois exemplos seguintes ilustram como isto é feito.

**EXEMPLO 9.10** Considere um amplificador de realimentação linear que envolve três estágios transistorizados. A função de transferência de malha do amplificador é definida por

$$L(s) = \frac{6K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Esbocce o lugar das raízes deste amplificador realimentado.

**Solução:** A função de transferência de malha  $L(s)$  tem pólos em  $s = -1$ ,  $s = -2$  e  $s = -3$ . Todos os três zeros de  $L(s)$  ocorrem no infinito. Dessa forma, o lugar das raízes tem três ramos que começam nos pólos acima mencionados e terminam no infinito.

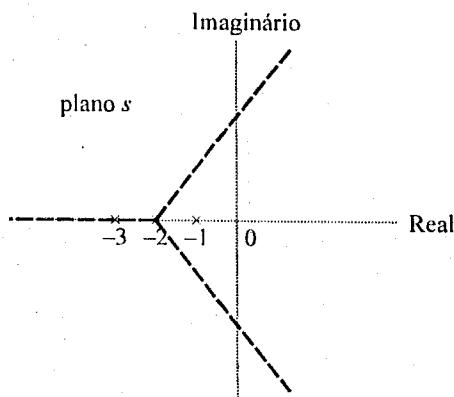
Na equação (9.82), descobrimos que os ângulos das três assíntotas são  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $300^\circ$ . Além disso, o ponto de intersecção destas assíntotas (isto é, o centróide do lugar das raízes) é obtida da equação (9.83) como

$$\sigma_0 = \frac{-1 - 2 - 3}{3} = -2$$

As assíntotas são desenhadas na Figura 9.25.

Para descobrir os pontos de intersecção do lugar das raízes com o eixo imaginário do plano  $s$ , formamos o princípio o polinômio característico:

$$\begin{aligned} A(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) + 6K \\ &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6(K+1) \end{aligned}$$



**FIGURA 9.25** Diagrama mostrando o ponto de intersecção das três assíntotas (isto é, o centróide do lugar das raízes) correspondente ao sistema realimentado do Exemplo 9.10.

Em seguida, construiremos a matriz de Routh:

$$\begin{array}{rcc}
 \text{Linha 3:} & 1 & 11 \\
 \text{Linha 2:} & 6 & 6(K+1) \\
 \text{Linha 1:} & \frac{66-6(K+1)}{6} & 0 \\
 \text{Linha 0:} & 6(K+1) & 0
 \end{array}$$

Fazendo a única entrada não-nula da linha 1 igual a zero, de acordo com a Propriedade 6, descobrimos que o valor crítico de  $K$  para o qual o sistema está à beira da instabilidade é

$$K = 10$$

Usando a linha 2 para construir o polinômio auxiliar com  $K = 10$ , escrevemos

$$6s^2 + 66 = 0$$

Conseqüentemente, os pontos de intersecção do lugar das raízes com o eixo imaginário estão em  $s = \pm j\sqrt{11}$ .

Finalmente, usando a equação (9.84), descobrimos que o ponto de separação deve satisfazer a condição

$$\frac{d}{ds}[(s+1)(s+2)(s+3)] = 0$$

Ou seja,

$$3s^2 + 12s + 11 = 0$$

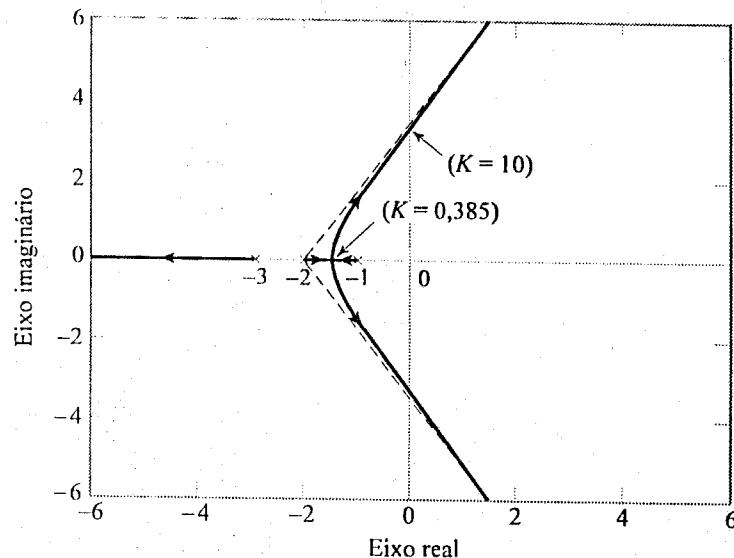
As raízes desta equação quadrática são

$$s = -1,423 \quad \text{e} \quad s = -2,577$$

Examinando os segmentos do eixo real do lugar das raízes, descobrimos que o primeiro ponto está sobre ele e, portanto, é um ponto de separação do lugar das raízes, mas o segundo ponto não está no lugar das raízes. Além disso, para  $s = -1,423$ , o uso da equação (9.73) produz

$$\begin{aligned}
 K &= |1 - 1,423| \cdot |2 - 1,423| \cdot |3 - 1,423| \\
 &= 0,385
 \end{aligned}$$

Finalmente, reunindo todos estes resultados, podemos esboçar o lugar das raízes do amplificador realimentado, como mostra a Figura 9.26.



**FIGURA 9.26** Lugar das raízes de um sistema realimentado de terceira ordem com função de transferência de malha.

$$L(s) = \frac{6K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

**EXEMPLO 9.11** Considere o sistema de realimentação unitária da Figura 9.27. A planta é instável, com uma função de transferência definida por

$$G(s) = \frac{0,5K}{(s+5)(s-4)}$$

O controlador tem uma função de transferência definida por

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+5)}{s(s+12)}$$

Eskoste o lugar das rafzes do sistema e determine os valores de  $K$  para os quais o sistema é estável.

**Solução:** A planta tem dois pólos, um em  $s = -5$  e o outro em  $s = 4$ . Este último polo é responsável pela instabilidade da planta. O controlador tem um par de zeros em  $s = -2$  e  $s = -5$ , e um par de pólos em  $s = 0$  e  $s = -12$ . Quando o controlador está conectado em cascata com a planta, um *cancelamento de pólos e zeros* ocorre, produzindo a função de transferência de malha

$$\begin{aligned} L(s) &= G(s)H(s) \\ &= \frac{0,5K(s+2)}{s(s+12)(s-4)} \end{aligned}$$

a qual é indicativa de um sistema realimentado do tipo 1.

O lugar das rafzes tem três ramos. Um ramo inicia no polo  $s = -12$  e termina no zero  $s = -2$ . Os outros dois ramos iniciam nos pólos  $s = 0$  e  $s = 4$  e terminam no infinito.

Com  $L(s)$  tendo três pólos e um zero finito, descobrimos na equação (9.82) que o lugar das rafzes tem duas assintotas definidas por  $\theta = 90^\circ$  e  $180^\circ$ . O centróide do lugar das rafzes é obtido a partir da equação (9.83) como

$$\sigma_0 = \frac{(-12 + 0 + 4) - (-2)}{3 - 1} = -3$$

Em seguida, o polinômio característico do sistema realimentado é

$$A(s) = s^3 + 8s^2 + (0,5K - 48)s + K$$

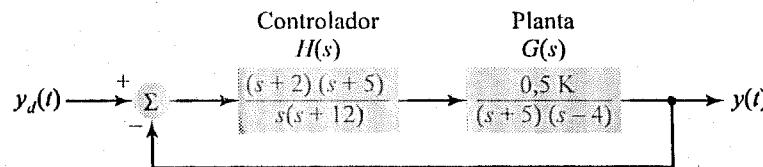


FIGURA 9.27 Sistema de realimentação unitária correspondente ao Exemplo 9.11.

Construindo a matriz de Routh, obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{cc|c} \text{Linha 3:} & 1 & 0,5K - 48 \\ \text{Linha 2:} & 8 & K \\ \text{Linha 1:} & \frac{8(0,5K - 48) - K}{8} & 0 \\ \text{Linha 0:} & K & 0 \end{array}$$

Fazendo a única entrada não nula da linha 1 igual a zero, obtemos

$$8(0,5K - 48) - K = 0$$

a qual produz o valor crítico do ganho de malha  $K$  como

$$K = 128$$

Em seguida, usando as entradas da linha 2 com  $K = 128$ , obtemos o polinômio auxiliar:

$$8s^2 + 128 = 0$$

o qual tem raízes em  $s = \pm j4$ . Dessa forma, o lugar das raízes intercepta o eixo imaginário do plano  $s$  em  $s = \pm j4$ , e o valor correspondente de  $K$  é 128.

Finalmente, aplicando a equação (9.84), descobrimos que o ponto de separação do lugar das raízes deve satisfazer a condição

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{s(s+12)(s-4)}{0,5K(s+2)} \right) = 0$$

ou seja,

$$s^3 + 7s^2 + 16s - 48 = 0$$

Usando o computador, descobrimos que esta equação cúbica tem uma raiz real simples em  $s = 1,6083$ . O valor correspondente de  $K$  é 5,5611.

Reunindo estes resultados, construímos o lugar das raízes mostrado na Figura 9.28. Aqui, vemos que o sistema realimentado é instável para  $0 \leq K \leq 128$ . Quando  $K > 128$ , todas as três raízes da equação característica se tornam confinadas ao semiplano esquerdo do plano  $s$ . Deste modo, vemos que a aplicação de realimentação tem o efeito benéfico de *estabilizar* uma planta instável, desde que o ganho de malha seja grande o bastante.

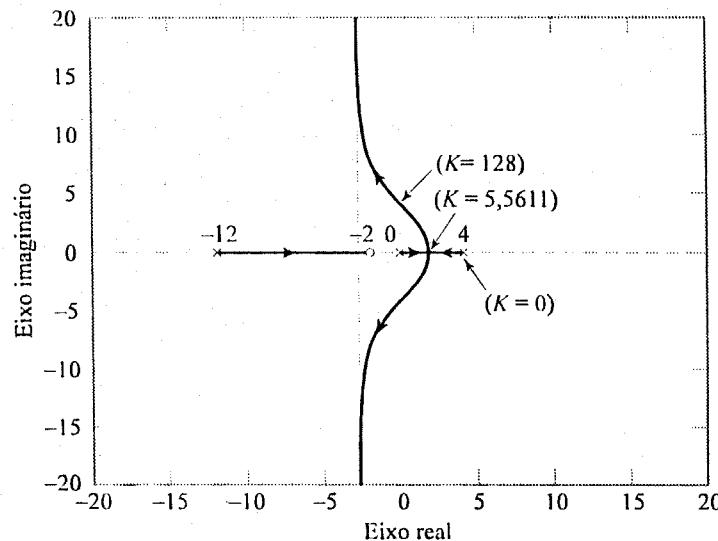


FIGURA 9.28 Lugar das raízes de um sistema de controle de malha fechada com função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{0,5K(s+2)}{s(s-4)(s+12)}$$

► **EXERCÍCIO 9.13** Esboce o lugar das raízes de um sistema de realimentação linear cuja função de transferência seja definida por

$$L(s) = \frac{0,2K(s+5)}{(s+1)^3}$$

*Sugestão:* Use as respostas dos Exercícios 9.10 e 9.12.

## 9.14 Modelos de Ordem Reduzida

Muitas vezes, descobrimos que os pólos e zeros da função de transferência de malha fechada  $T(s)$  de um sistema realimentado estão agrupados no plano  $s$  complexo mais ou menos da maneira ilustrada na Figura 9.29. Em particular, dependendo de quão próximo os pólos e zeros estão do eixo  $j\omega$ , podemos identificar dois agrupamentos:

1. *Pólos e zeros dominantes* são aqueles pólos e zeros de  $T(s)$  que se situam próximo ao eixo  $j\omega$ . Diz-se que eles são dominantes porque exercem uma profunda influência sobre a resposta em frequência do sistema. Outra maneira de visualizar esta situação é dar-se conta que os pólos próximos ao eixo  $j\omega$  correspondem a constantes de tempo grandes do sistema. As contribuições feitas por estes pólos para a resposta transitória do sistema são lentas e, portanto, dominantes.
2. *Pólos e zeros insignificantes* são aqueles pólos e zeros de  $T(s)$  que estão bem afastados do eixo  $j\omega$ . Diz-se que eles são insignificantes porque têm relativamente pouca influência sobre a resposta em frequência do sistema. Em termos de comportamento no domínio de tempo, os pólos que estão afastados do eixo  $j\omega$  correspondem a constantes de tempo pequenas.

As contribuições de tais pólos para a resposta transitória do sistema são muito mais rápidas e, portanto, insignificantes.

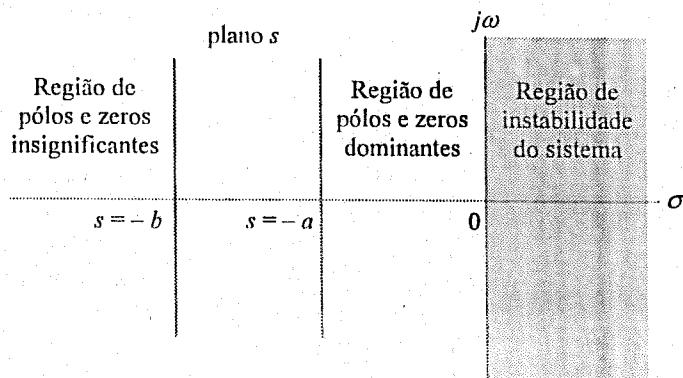


FIGURA 9.29 Diferentes regiões do plano  $s$  complexo.

Digamos que  $s = -a$  e  $s = -b$  definam as fronteiras dos pólos dominantes e dos pólos insignificantes, conforme indica a Figura 9.29. Como regra prática, o agrupamento de pólos em pólos dominantes e pólos insignificantes é justificado se a razão  $b/a$  for maior do que 4.

Dado que tenhamos um sistema realimentado de ordem mais elevada cuja função de transferência de malha fechada se encaixe no quadro apresentado na Figura 9.29, poderemos aproximar o sistema por meio de um *modelo de ordem reduzida* simplesmente mantendo os pólos e zeros dominantes de  $T(s)$ . O uso de um modelo de ordem reduzida em lugar do sistema original é motivado pelas seguintes considerações:

- Os modelos de baixa ordem são simples; portanto, eles são intuitivamente atraentes na análise e projeto de sistemas.
- Os modelos de baixa ordem são menos exigentes em termos computacionais do que os de ordem elevada.

Um caso de especial interesse é quando o uso de um modelo de primeira ordem ou de segunda ordem como modelo de ordem reduzida se justifica, porque então poderemos explorar a riqueza de informações disponíveis sobre modelos de baixa ordem.

Quando se descarta pólos e zeros na derivação de um modelo de ordem reduzida, é importante reajustar o ganho do sistema. Especificamente, o modelo de ordem reduzida e o sistema original devem ter o mesmo ganho na freqüência zero.

**EXEMPLO 9.12** Considere novamente o amplificador de realimentação linear do Exemplo 9.10. Supondo  $K = 8$ , aproxime este sistema usando um modelo de segunda ordem. Use a resposta ao degrau para avaliar a qualidade da aproximação.

**Solução:** Para  $K = 8$ , a equação característica do amplificador realimentado é dada por

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 54 = 0$$

Usando-se o computador, as raízes encontradas desta equação são

$$s = -5,7259, \quad s = -0,1370 \pm j3,0679$$

As localizações destas três raízes estão plotadas na Figura 9.30. Imediatamente, observamos no mapa de pólos e zeros da Figura 9.30 que os pólos em  $s = -0,1370 \pm j3,0679$  são os pólos dominantes, e o polo em  $s = -5,7259$  é um polo insignificante. O numerador da função de transferência de malha fechada  $T(s)$  consiste simplesmente em  $6K$ ,

Conseqüentemente, o ganho de malha fechada do amplificador realimentado pode ser aproximado como

$$\begin{aligned} T'(s) &\equiv \frac{6K'}{(s+0,1370+j3,0679)(s+0,1370-j3,0679)} \\ &= \frac{6K'}{s^2 + 0,2740s + 9,4308} \end{aligned}$$

Para nos certificarmos de que  $T'(s)$  é ajustado apropriadamente em relação ao  $T(s)$  original, o ganho  $K'$  é escolhido, da seguinte maneira:

$$K' = \frac{9,4308}{54} \times 8 = 1,3972$$

para a qual temos então  $T'(0) = T(0)$ .

Levando em conta a equação (9.54), definimos

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n &= 0,2740 \\ \omega_n^2 &= 9,4308 \end{aligned}$$

a partir do que descobrimos prontamente que

$$\begin{aligned} \zeta &= 0,0446 \\ \omega_n &= 3,0710 \end{aligned}$$

A resposta ao degrau do amplificador de realimentação é, portanto, subamortecida. A constante de tempo da resposta exponencialmente amortecida é, a partir da equação (9.57):

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{0,137} = 7,3293 \text{ s}$$

A freqüência da resposta exponencialmente amortecida é

$$\begin{aligned} \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} &= 3,0710\sqrt{1-(0,0446)^2} \\ &= 3,0679 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

A Figura 9.31 mostra duas plotagens: uma exibindo a resposta ao degrau do amplificador realimentado original de terceira ordem com  $K = 8$ , e a outra exibindo a resposta ao degrau do modelo aproximado de segunda ordem com  $K' = 1,3972$ . As duas plotagens são muito similares, o que indica que o modelo de ordem reduzida é adequado para o exemplo em questão.

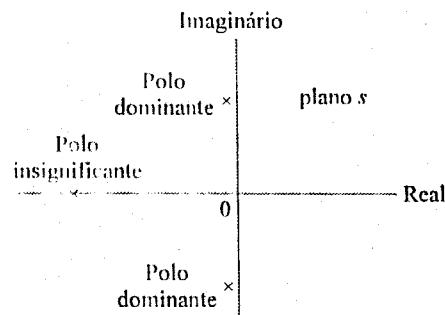


FIGURA 9.30 Mapa de pólos e zeros do amplificador realimentado do Exemplo 9.10, com ganho  $K = 8$ .

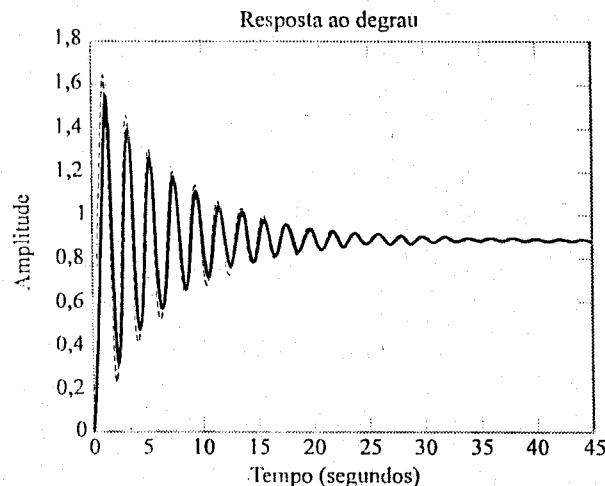


FIGURA 9.31 Resposta ao degrau correspondente ao sistema de terceira ordem mostrada como uma curva tracejada, e resposta ao degrau correspondente a sistema de segunda ordem (reduzido) mostrada como uma curva sólida.

## \*9.15 Critério de Nyquist da Estabilidade

O método de lugar das raízes fornece informações sobre as raízes da equação característica de um sistema com realimentação linear (isto é, pólos da função de transferência de malha fechada do sistema) quando o ganho de malha é variado. Estas informações podem, por sua vez, ser usadas para avaliar não somente a estabilidade do sistema, mas também as questões relativas a sua resposta transitória, conforme discutimos nas duas seções anteriores. Para que o método funcione, precisamos do conhecimento dos pólos e zeros da função de transferência de malha do sistema. Entretanto, há situações em que esta exigência pode ser difícil de cumprir. Por exemplo, pode ser que a única maneira de avaliar a estabilidade de um sistema de realimentação seja por meios experimentais, ou a malha de realimentação inclua um atraso de tempo, em cujo caso a função de transferência de malha não será uma função racional. Nessas situações, podemos olhar para o critério de Nyquist como um método alternativo para avaliar o desempenho da estabilidade do sistema. De qualquer forma, o critério de Nyquist é bastante importante para ser considerado por si mesmo.

O critério de Nyquist da estabilidade é um método do domínio de freqüência que se baseia numa plotagem (em coordenadas polares) da função de transferência de malha  $L(s)$  para  $s = j\omega$ . Ele tem uma série de recursos desejáveis que o tornam útil para a análise e projeto de um sistema de realimentação linear:

1. Ele fornece informações sobre a estabilidade absoluta do sistema, o grau de estabilidade e como estabilizar o sistema se ele estiver instável.
2. Ele fornece informações sobre a resposta no domínio de freqüência do sistema.
3. Ele pode ser usado para estudar a estabilidade de um sistema de realimentação linear com atraso de tempo, o qual pode surgir devido à presença de componentes distribuídos.

Uma limitação do critério de Nyquist, entretanto, é que, diferentemente da técnica do lugar das raízes, ele não fornece a localização exata das raízes da equação característica do sistema.

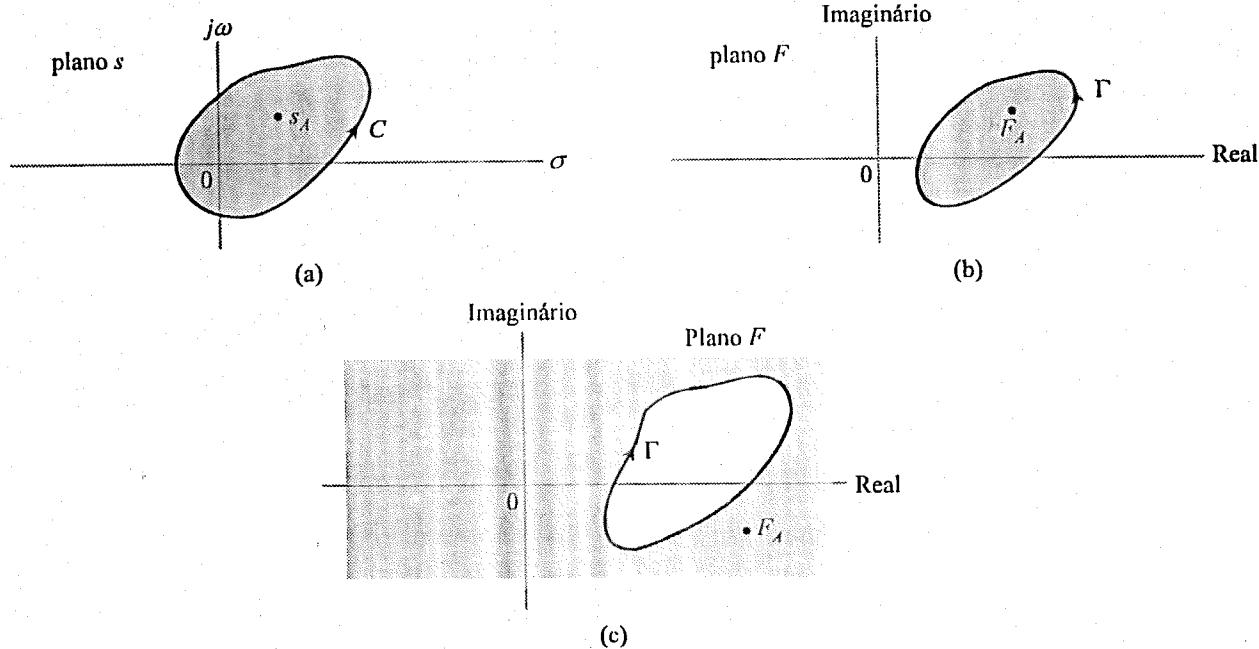
### ■ ENVOLVIMENTOS E CIRCUNDAMENTOS

A fim de preparar o caminho para um enunciado do critério de Nyquist da estabilidade, precisamos entender o que significam os termos “envolvimento” e “circundamento,” os quais surgem no contexto do mapeamento de contorno.

Para sermos específicos, considere alguma função  $F(s)$  da variável complexa  $s$ . Estamos acostumados à representação de tópicos relacionados a  $s$  num plano complexo, chamado plano  $s$ . Suponhamos que a função  $F(s)$  seja representada num plano complexo próprio, ao qual denominaremos plano  $F$  a partir de agora. Digamos que  $C$  denote um *contorno fechado* percorrido pela variável complexa  $s$  no plano  $s$ . Diz-se que um contorno é fechado se ele terminar em si mesmo e não interceptar a si mesmo quando é percorrido pela variável complexa  $s$ . Digamos que  $\Gamma$  denota o contorno correspondente percorrido pela função  $F(s)$  no plano  $F$ . Se  $F(s)$  for uma função de  $s$  de valor simples, então  $\Gamma$  também será um contorno fechado. A prática costumeira é percorrer o contorno  $C$  no sentido anti-horário, como é indicado na Figura 9.32(a). Duas diferentes situações podem surgir no plano  $F$ , como descrevemos aqui:

- ▶ O interior do contorno  $C$  no plano  $s$  é mapeado sobre o interior do contorno  $\Gamma$  no plano  $F$ , como ilustra a Figura 9.32(b). Neste caso, o contorno  $\Gamma$  é percorrido o sentido anti-horário (isto é, o mesmo sentido que o do contorno  $C$ ).
- ▶ O interior do contorno  $C$  no plano  $s$  é mapeado sobre o exterior do contorno  $\Gamma$  no plano  $F$ , como ilustra a Figura 9.32(c). Neste segundo caso, o contorno  $\Gamma$  é percorrido no sentido horário (isto é, no sentido oposto ao do contorno  $C$ ).

Baseando-se nesta figura, podemos então apresentar a seguinte definição: *Diz-se que uma região ou ponto de um plano é “envolvido” por um contorno fechado se ela for circundada no sentido anti-horário*. Por exemplo, o ponto  $s_A$  dentro do contorno  $C$  na Figura 9.32(a) é mapeado no ponto  $F_A$  dentro do contorno  $\Gamma$  na Figura 9.32(b), mas fora do contorno  $\Gamma$  na Figura 9.32(c). Dessa forma, o ponto  $F_A$  é envolvido por  $\Gamma$  na Figura 9.32(b), mas não na Figura 9.32(c).

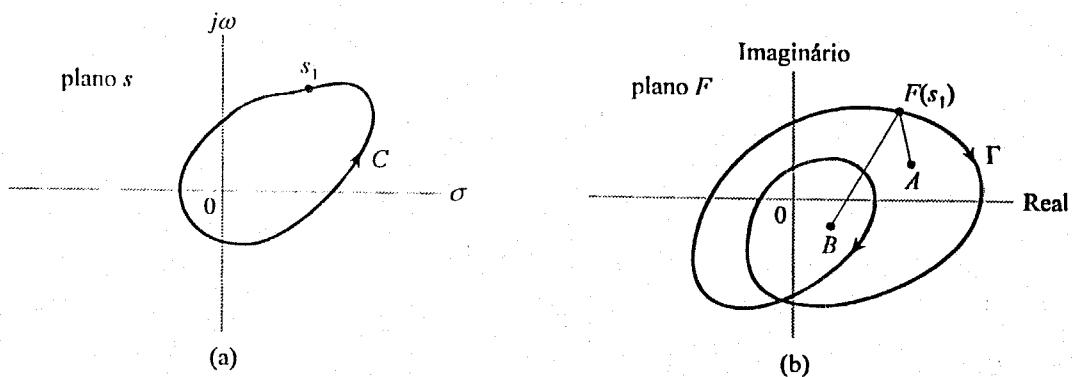


**FIGURA 9.32** (a) Contorno  $C$  percorrido no sentido anti-horário no plano  $s$ . (b) e (c) Duas maneiras possíveis pelas quais o contorno  $C$  é mapeado no plano  $F$ .

A noção de envolvimento como aqui é definida, deve ser cuidadosamente distinguida da de circundamento. Quanto a esta última, podemos apresentar a seguinte definição: *Diz-se que um ponto é circundado por um contorno fechado se ele se situar dentro do contorno*. É possível que um ponto de interesse no plano  $F$  seja circundado mais de uma vez num sentido positivo ou negativo. Em especial, o contorno  $\Gamma$  no plano  $F$  faz um total de  $m$  circundamentos positivos de um ponto  $A$ , digamos,

se o fasor (isto é, a linha desenhada do ponto  $A$  até um ponto móvel  $F(s_1)$  no contorno  $\Gamma$ ) realiza uma rotação angular de  $2\pi m$  no sentido anti-horário enquanto o ponto  $s_1$  percorre uma vez o contorno  $C$  no plano  $s$  no sentido anti-horário.

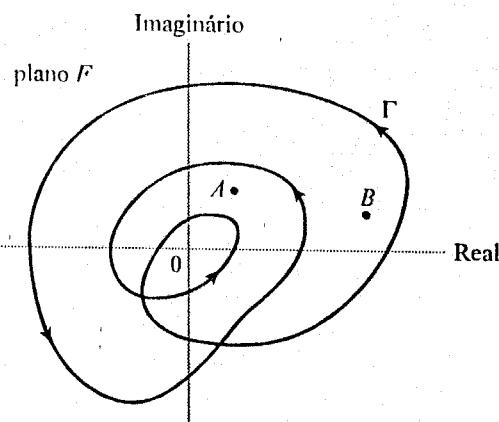
Dessa forma, na situação descrita na Figura 9.33, descobrimos que enquanto o ponto  $s_1$  percorre o contorno  $C$  no plano  $s$  uma vez no sentido anti-horário, o ponto  $A$  é circundado pelo contorno  $\Gamma$  no plano  $F$  somente uma vez, ao passo que o ponto  $B$  é circundado pelo contorno  $\Gamma$  duas vezes, ambos no sentido horário. Deste modo, no caso do ponto  $A$ , temos  $m = -1$ ; e no caso do ponto  $B$ , temos  $m = -2$ .



**FIGURA 9.33** Ilustração da definição de circundamento. À medida que o ponto  $s_1$  percorre o contorno  $C$  no plano  $s$  no sentido anti-horário, como é mostrado na parte (a) da figura, o ponto  $A$  é circundado pelo contorno  $\Gamma$  somente uma vez e  $B$  é circundado duas vezes, ambas no sentido horário no plano  $F$ , como é mostrado na parte (b) da figura.

► **EXERCÍCIO 9.14** Considere as situações descritas na Figura 9.34. Quantas vezes os pontos  $A$  e  $B$  são circundados pelo lugar  $\Gamma$  nesta figura?

**Resposta:** Para o ponto  $A$ , o número de circundamentos é 2, e para o ponto  $B$  é 1.



**FIGURA 9.34** Diagrama correspondente ao Exercício 9.14.

### ■ PRINCÍPIO DO ARGUMENTO

Suponhamos que a função  $F(s)$  seja uma função racional de valor simples de  $s$  que satisfaz as duas exigências seguintes:

1. A função  $F(s)$  é analítica no interior de um contorno fechado  $C$  no plano  $s$  no plano  $s$ , exceto num número finito de pólos. A exigência analítica significa que em todo ponto  $s = s_0$  dentro do contorno  $C$ , excluindo-se os pontos onde os pólos estão localizados, a função  $F(s)$  tem uma derivada em  $s = s_0$  e em todo ponto na vizinhança de  $s_0$ .
2. A função  $F(s)$  não tem nem pólos, nem zeros, no contorno  $C$ .

Podemos então enunciar o *princípio do argumento* da teoria das variáveis complexas da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2\pi} \arg\{F(s)\}_C = Z - P \quad (9.85)$$

em que  $\arg\{F(s)\}_C$  é a variação no argumento (ângulo) da função  $F(s)$  quando o contorno  $C$  é percorrido uma vez no sentido anti-horário; e  $Z$  e  $P$  são o número de zeros e pólos, respectivamente, da função  $F(s)$  dentro do contorno  $C$ . Note que a variação de módulo de  $F(s)$ , quando  $s$  se move no contorno  $C$  uma vez, é nula porque  $F(s)$  tem valor simples e o contorno  $C$  é fechado; consequentemente, o  $\arg\{F(s)\}_C$  é o único termo que representa a variação em  $F(s)$  no lado esquerdo da equação (9.85) quando  $s$  percorre o contorno  $C$  uma vez. Suponhamos agora que a origem no plano  $F$  seja circundada um total de  $m$  vezes quando o contorno  $C$  é percorrido uma vez no sentido anti-horário. Podemos então escrever

$$\arg\{F(s)\}_C = 2\pi m \quad (9.86)$$

em função do que a equação (9.85) se reduz a

$$m = Z - P \quad (9.87)$$

Como mencionamos anteriormente,  $m$  pode ser positivo ou negativo. Consequentemente, podemos identificar três casos distintos, quando o contorno  $C$  é percorrido no plano  $s$  uma vez no sentido anti-horário:

1.  $Z > P$ , em cujo caso o contorno  $\Gamma$  circunda  $m$  vezes a origem do plano  $F$  no sentido anti-horário.
2.  $Z = P$ , em cujo caso a origem do plano  $F$  não é circundada pelo contorno  $\Gamma$ .
3.  $Z < P$ , em cujo caso o contorno  $\Gamma$  circunda  $m$  vezes a origem do plano  $F$  no sentido horário.

## ■ CONTORNO OU CURVA DE NYQUIST

Agora estamos equipados com as ferramentas de que precisamos para retornar à questão que temos em mãos: avaliação da estabilidade de um sistema de realimentação linear. A partir da equação (9.6), sabemos que a equação característica desse tipo de equação é definida em termos de sua função de transferência de malha  $L(s) = G(s) H(s)$

$$1 + L(s) = 0$$

ou, de maneira equivalente,

$$F(s) = 0 \quad (9.88)$$

em que  $F(s)$  é a diferença de retorno. Com  $F(s)$  sendo a função de interesse, o critério de Nyquist da estabilidade é basicamente uma aplicação do princípio do argumento, como descrevemos aqui: determine o número de raízes da equação característica (9.88) que se situam no semiplano direito do plano  $s$ . Com esta parte do plano  $s$  sendo o domínio de interesse, podemos resolver o problema da estabilidade considerando o contorno  $C$  mostrado na Figura 9.35, o qual é construído de forma a satisfazer as exigências do princípio do argumento:

- O semicírculo tem um raio  $R$  que tende ao infinito; consequentemente, o contorno  $C$  abrange o semiplano direito inteiro do plano  $s$  quando  $R \rightarrow \infty$ .
- Os pequenos semicírculos mostrados ao longo do eixo imaginário são incluídos para contornar as singularidades (isto é, pólos e zeros) de  $F(s)$  que estão localizadas nos centros dos semicírculos. Isto garantiria que a diferença de retorno  $F(s)$  não tenha pólos ou zeros no contorno  $C$ .

O contorno  $C$  da Figura 9.35 é chamado *contorno ou curva de Nyquist*.

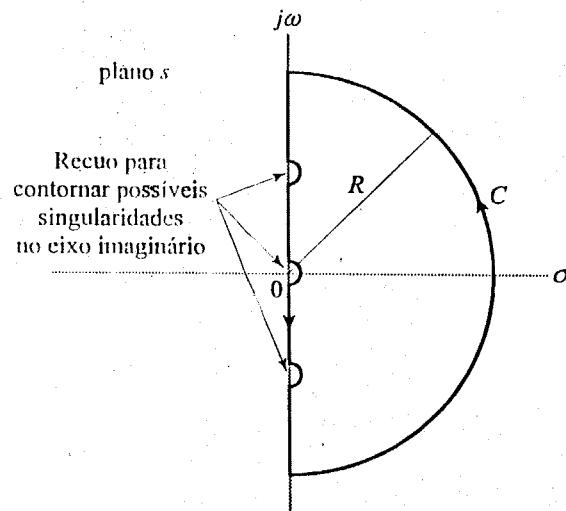


FIGURA 9.35 Contorno ou Curva de Nyquist.

Admitamos que  $\Gamma$  seja o contorno fechado traçado pela diferença de retorno  $F(s)$  no plano  $F$  quando o contorno de Nyquist  $C$  da Figura 9.35 é percorrido uma vez no plano  $s$  no sentido anti-horário. Se  $Z$  for o número (não conhecido) dos zeros de  $F(s)$  no semiplano direito do plano  $s$ , então, a partir da equação (9.87), vemos prontamente que

$$Z = m - P \quad (9.89)$$

em que  $P$  é o número de pólos de  $F(s)$  no semiplano direito do plano  $s$ , e  $m$  é o número líquido de circundamentos anti-horários da origem no plano  $F$  pelo contorno  $\Gamma$ . Vendo que os zeros de  $F(s)$  são o mesmo que as raízes da equação característica do sistema, podemos agora enunciar formalmente o critério de Nyquist da estabilidade como: *Um sistema de realimentação linear é absolutamente estável, desde que sua equação característica não tenha raízes no semiplano direito do plano s ou no eixo jω, ou seja,*

$$m - P = 0 \quad (9.90)$$

O critério de Nyquist da estabilidade pode ser simplificado para uma grande classe de sistemas realimentado lineares, como descrevemos aqui. Por definição, a diferença de retorno  $F(s)$  relaciona-se com a função de transferência de malha  $L(s)$  da seguinte maneira:

$$F(s) = 1 + L(s) \quad (9.91)$$

Os pólos de  $F(s)$  são, portanto, o mesmo que os pólos de  $L(s)$ . Se  $L(s)$  não tiver pólos no semiplano direito do plano  $s$  (isto é, o sistema é estável na ausência de realimentação), então  $P = 0$ , e a equação (9.90) se reduz a  $m = 0$ . Ou seja, o sistema realimentado é absolutamente estável, desde que o contorno  $\Gamma$  não circunde a origem do plano  $F$ .

A partir da equação (9.91) também notamos que a origem do plano  $F$  corresponde ao ponto  $(-1, 0)$  do plano  $L$ . Para o caso em que  $L(s)$  não tem pólos no semiplano direito do plano  $s$ , podemos, portanto, reformular o critério de Nyquist da estabilidade da seguinte maneira: *Um sistema de realimentação linear que possui a função de transferência de malha  $L(s)$  é absolutamente estável, desde que o lugar traçado por  $L(s)$  no plano  $L$  não circunde o ponto  $(-1, 0)$  quando  $s$  percorrer o contorno de Nyquist uma vez no plano  $s$ .* O ponto  $(-1, 0)$  no plano  $L$  é chamado *ponto crítico*.

Tipicamente, a função de transferência de malha  $L(s)$  tem mais pólos do que zeros, o que significa que  $L(s)$  tende a zero quando  $s$  tende ao infinito. Conseqüentemente, a contribuição da parte semicircular do contorno de Nyquist  $C$  para o lugar  $L(s)$  tende à zero quando o raio  $R$  tende ao infinito. Ou seja, o lugar  $L(s)$  se reduz simplesmente a uma plotagem de  $L(j\omega)$  para  $-\infty < \omega < \infty$  (isto é, os valores de  $s$  no eixo imaginário do plano  $s$ ). Também é útil visualizarmos o lugar como uma plotagem *polar* de  $L(j\omega)$  para  $\omega$  variando, com  $|L(j\omega)|$  denotando o módulo e  $\arg\{L(j\omega)\}$  denotando o ângulo de fase. A plotagem resultante é chamada *lugar de Nyquist* ou *diagrama de Nyquist*.

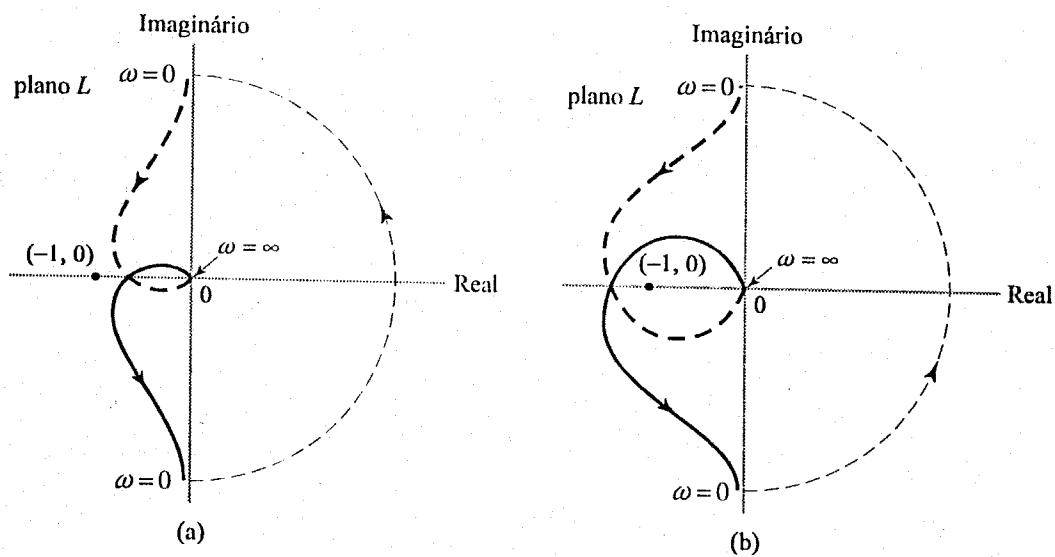
A construção do lugar de Nyquist é simplificada vendo que

$$|L(-j\omega)| = |L(j\omega)|$$

e

$$\arg\{L(-j\omega)\} = -\arg\{L(j\omega)\}$$

Conseqüentemente, é necessário plotar apenas o lugar de Nyquist para freqüências positivas  $0 \leq \omega < \infty$ . O lugar para a freqüências negativas é inserido simplesmente refletindo-se o lugar para freqüências positivas em torno do eixo real do plano  $L$ , como ilustra a Figura 9.36 para um sistema cuja função de transferência de malha tem um polo em  $s = 0$ . A Figura 9.36(a) representa um sistema estável, ao passo que a Figura 9.36(b) representa um sistema instável cuja equação característica tem duas raízes no semiplano direito e para a qual o lugar de Nyquist circunda o ponto crítico  $(-1, 0)$  duas vezes no sentido anti-horário. Observe que na Figura 9.36, ambos os lugares de Nyquist começam em  $\omega = \infty$  e terminam em  $\omega = 0$ , de forma a ser consistente com o fato de que o lugar de Nyquist da Figura 9.35 é percorrido no sentido anti-horário.



**FIGURA 9.36** Diagramas de Nyquist representando (a) um sistema estável e (b) um sistema instável.

**EXEMPLO 9.13** Usando o critério de Nyquist da estabilidade, investigue o desempenho de estabilidade do amplificador realimentado transistorizado de três estágios considerado no Exemplo 9.10. Colocando  $s = j\omega$  em  $L(s)$ , obtemos a resposta em freqüência de malha

$$L(j\omega) = \frac{6K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

Mostre que o amplificador é estável com  $K = 6$ .

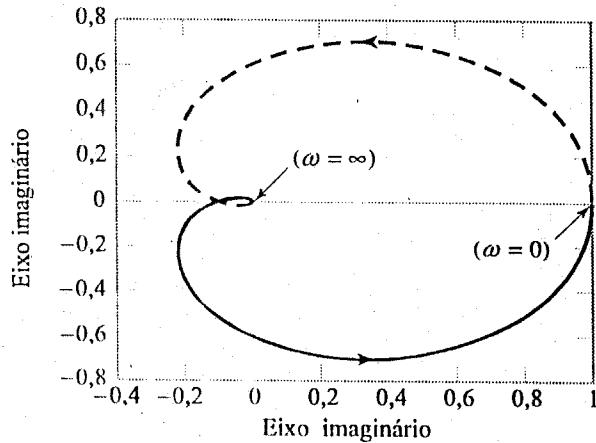
*Solução:* O módulo e a fase de  $L(j\omega)$  são dadas (com  $K = 6$ ) por

$$|L(j\omega)| = \frac{36}{(\omega^2 + 1)^{1/2}(\omega^2 + 4)^{1/2}(\omega^2 + 9)^{1/2}}$$

e

$$\arg\{L(j\omega)\} = -\operatorname{tg}^{-1}(\omega) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

A Figura 9.37 mostra uma plotagem do lugar de Nyquist, na qual se vê que ele não circunda o ponto crítico  $(-1, 0)$ . Portanto, o amplificador é estável.



**FIGURA 9.37** Diagrama de Nyquist correspondente a um amplificador realimentado de três estágios com resposta em freqüência de malha.

$$L(j\omega) = \frac{6K}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)} \text{ com } K = 6.$$

► **EXERCÍCIO 9.15** Considere um amplificador realimentado descrito pela resposta em freqüência de malha

$$L(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)^3}$$

Usando o critério de Nyquist da estabilidade, mostre que o amplificador está à beira da instabilidade para  $K = 8$ . ◀

## 9.16 Diagrama de Bode

Outro método para estudar o desempenho da estabilidade de um sistema realimentado envolve plotar a função de transferência de malha  $L(s)$  do sistema para  $s = j\omega$  na forma de dois gráficos separados. Num gráfico, o módulo de  $L(j\omega)$  é plotado em decibéis contra o logaritmo de  $\omega$ . No outro gráfico, a fase de  $L(j\omega)$  em graus é plotada contra o logaritmo de  $\omega$ . A combinação destes dois gráficos é chamada *diagrama de Bode* ou *gráfico de Bode*. A característica atraente deste método é dupla:

- A facilidade relativa e a velocidade pela qual os cálculos para diferentes freqüências podem ser executados, tornando o diagrama de Bode uma ferramenta de projeto útil.
- Os conceitos aprendidos a partir do diagrama de Bode são muito úteis para desenvolver uma intuição de engenharia referente à colocação de pólos e zeros na resposta em freqüência do sistema.

Prosseguindo na descrição do diagrama de Bode, admitamos que  $L(s)$  seja expresso na forma fatorada mostrada na equação (9.69). Fazendo  $s = j\omega$  e multiplicando o logaritmo de  $L(j\omega)$  por 20, obtemos (supondo que o ganho de malha  $K$  seja positivo)

$$\left| L(j\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} K + 20 \sum_{i=1}^M \log_{10} \left| 1 - \frac{j\omega}{c_i} \right| - 20 \sum_{k=1}^N \log_{10} \left| 1 - \frac{j\omega}{d_k} \right| \quad (9.92)$$

e

$$\arg\{L(j\omega)\} = \sum_{i=1}^M \arg \left\{ 1 - \frac{j\omega}{c_i} \right\} - \sum_{k=1}^N \arg \left\{ 1 - \frac{j\omega}{d_k} \right\} \quad (9.93)$$

nas equações (9.92) e (9.93), usamos o índice  $k$  em vez de  $j$  para não causar confusão com  $j$ , a raiz quadrada de  $-1$ .) Conseqüentemente, ao computar o *componente de ganho*  $|L(j\omega)|_{dB}$ , os fatores de produto e divisão na resposta em módulo  $|L(j\omega)|$  são substituídos por adições e subtrações, respectivamente. Além disso, as contribuições individuais dos fatores de pólos e zeros para a resposta em fase  $\arg\{L(j\omega)\}$  envolvem adições e subtrações de uma maneira natural. A computação de  $L(j\omega)$  para um  $\omega$  variável se torna, em função disto, relativamente fácil.

O apelo intuitivo do diagrama de Bode vem do fato de que a computação de  $|L(j\omega)|_{dB}$  pode ser prontamente aproximada por segmentos de reta. A natureza da aproximação depende de se o fator de polo/zero em questão é um fator simples ou quadrático, como descreveremos em seguida.

1. *Fator simples.* Considere o caso de um fator de polo  $(1 - s/d_0)$  para o qual  $d_0 = -\sigma_0$ , em que  $\sigma_0$  é algum número real. A contribuição deste fator de polo para o componente ganho de  $|L(j\omega)|_{dB}$  é escrita como

$$-20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{\sigma_0} \right| = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\sigma_0^2} \right) \quad (9.94)$$

Podemos obter aproximações assintóticas desta contribuição, considerando valores muito pequenos e muito grandes de  $\omega$ , comparados com  $\sigma_0$ , como descrevemos aqui:

- *Assíntota de baixa freqüência:* Para  $\omega \ll \sigma_0$ , a equação (9.94) é aproximada por

$$-20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{\sigma_0} \right| \approx -10 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB} \quad (9.95)$$

a qual consiste simplesmente na linha de 0 dB..

- *Assíntota de alta freqüência:* Para  $\omega \gg \sigma_0$ , a equação (9.94) é aproximada por

$$-20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{\sigma_0} \right| \approx -10 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\sigma_0} \right)^2 = -20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\sigma_0} \right) \text{ dB} \quad (9.96)$$

a qual representa uma linha reta com uma inclinação de  $-20 \text{ dB/década}$ .

Estas duas assíntotas se interceptam em  $\omega = \sigma_0$ . Conseqüentemente, a contribuição do fator de polo  $(1 + s/\sigma_0)$  para  $|L(j\omega)|_{dB}$  pode ser aproximada por um par de segmentos de reta, como ilustra a Figura 9.38(a). A freqüência de intersecção  $\sigma_0$  é chamada *freqüência de canto* ou *de quebra* do diagrama de Bode. A Figura 9.38(a) também inclui também o módulo real de um fator de polo simples. O erro de aproximação, ou seja a diferença entre o módulo real e sua forma aproximada alcança o valor máximo de 3 dB na freqüência de  $\sigma_0$ . A tabela incluída na Figura 9.38(a) apresenta uma relação dos erros de aproximação para um conjunto de freqüências logarítmicamente espaçadas e normalizadas com respeito a  $\sigma_0$ .

A resposta de fase do fator de polo simples é definida por

$$\arg \left\{ \frac{1}{1 + j\omega/\sigma_0} \right\} = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\sigma_0} \right) \quad (9.97)$$

a qual é mostrada plotada de maneira exata na Figura 9.38(b). A Figura 9.38(b) também inclui uma aproximação linear para a resposta de fase. A aproximação é mostrada tracejada.

2. *Fator quadrático.* Considere em seguida o fator de polo quadrático representado por um par de pólos complexos conjugados, escritos da seguinte maneira:

$$Q(s) = \frac{1}{1 + (2\zeta/\omega_n)s + s^2/\omega_n^2} = \frac{1}{(s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} \quad (9.98)$$

em que supomos a taxa de amortecimento  $\zeta \leq 1$ . Para  $s = j\omega$ , o módulo de  $Q(j\omega)$  em decibéis é

$$|Q(j\omega)|_{dB} = -10 \log_{10} \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \quad (9.99)$$

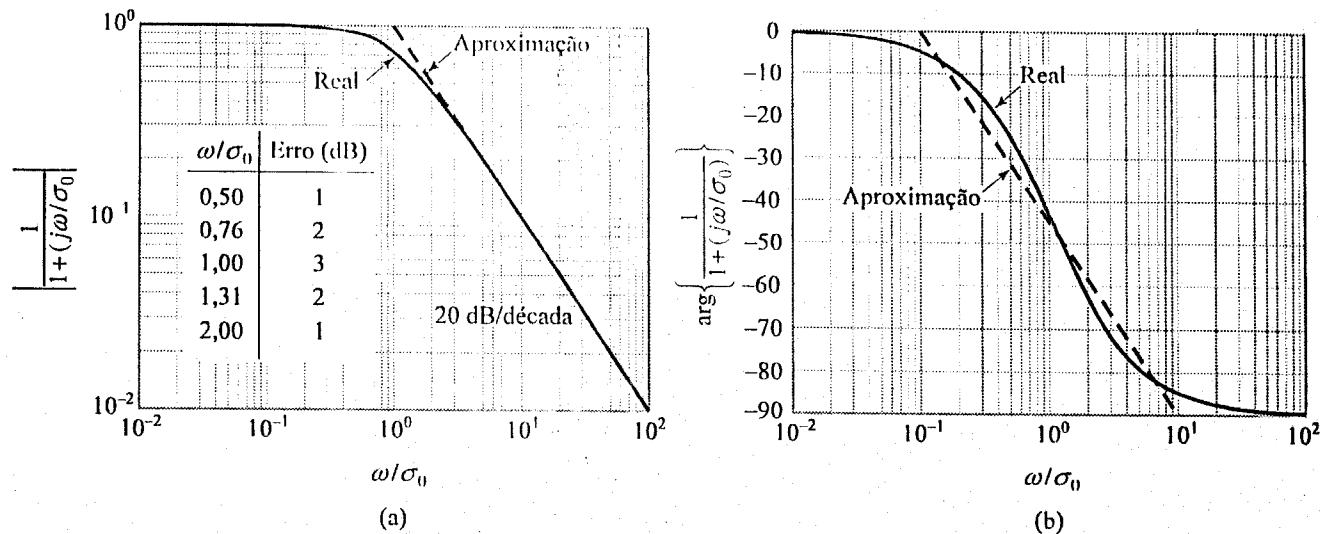


FIGURA 9.38 (a) Componente de ganho do diagrama de Bode para um fator de pôlo de primeira ordem:  $1/(1 + s/\sigma_0)$ . (b) Componente de fase do diagrama de Bode.

Para  $\omega \ll \omega_n$ , a equação (9.99) é aproximada como

$$|Q(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

Para  $\omega \gg \omega_n$ , ela é aproximada como

$$|Q(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 = -40 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Dessa forma, o componente de ganho  $|Q(j\omega)|_{\text{dB}}$  pode ser aproximado por um par de segmentos de reta, um representado pela linha 0 dB e o outro tendo uma inclinação de  $-40 \text{ dB/década}$ , como mostra a Figura 9.39. As duas assintotas se interceptam em  $\omega = \omega_n$ , o qual é chamado freqüência de canto ou de quebra do fator quadrático. Porém, diferentemente do caso de um fator de pôlo simples, o módulo real do fator de pôlo quadrático  $Q(j\omega)$  pode diferir de maneira notável de sua aproximação assintótica, dependendo de quanto pequeno é a taxa de amortecimento  $\zeta$  em comparação com a unidade. A Figura 9.40(a) mostra a plotagem exata de  $|Q(j\omega)|_{\text{dB}}$  correspondente a três diferentes valores de  $\zeta$  na faixa de  $0 < \zeta < 1$ . A diferença entre a curva exata e a aproximação exata de  $|Q(j\omega)|_{\text{dB}}$  define o erro de aproximação. Avaliando a equação (9.99) em  $\omega = \omega_n$  e notando que o valor correspondente da aproximação assintótica é 0 dB, descobrimos que o valor do erro em  $\omega = \omega_n$  é dado por

$$(\text{Erro})_{\omega=\omega_n} = -20 \log_{10}(2\zeta) \text{ dB} \quad (9.100)$$

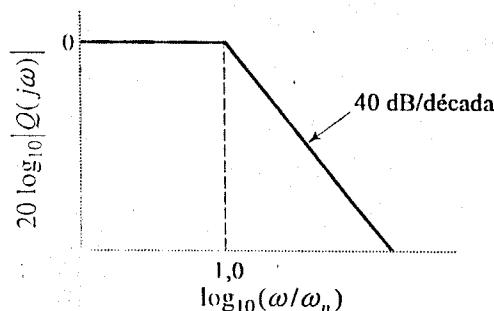


FIGURA 9.39 Aproximação assintótica para  $20 \log_{10}|Q(j\omega)|$ , em que

$$Q(s) = \frac{1}{1 + (2\zeta/\omega_n)s + s^2/\omega_n^2}$$

Este erro é nulo para  $\zeta = 0,5$ , positivo para  $\zeta < 0,5$ , e negativo para  $\zeta > 0,5$ .

Na equação (9.98), descobrimos que o componente de fase de  $Q(j\omega)$  é dado por

$$\arg\{Q(j\omega)\} = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right) \quad (9.101)$$

A Figura 9.40(b) mostra as plotagens exatas de  $\arg\{Q(j\omega)\}$  para os mesmos valores de  $\zeta$  usados na Figura 9.40(a). Em  $\omega = \omega_n$ , temos

$$\arg\{Q(j\omega_n)\} = -90^\circ$$

Note também a variação no sinal algébrico de  $\arg\{Q(j\omega)\}$  em  $\omega = \omega_n$ .

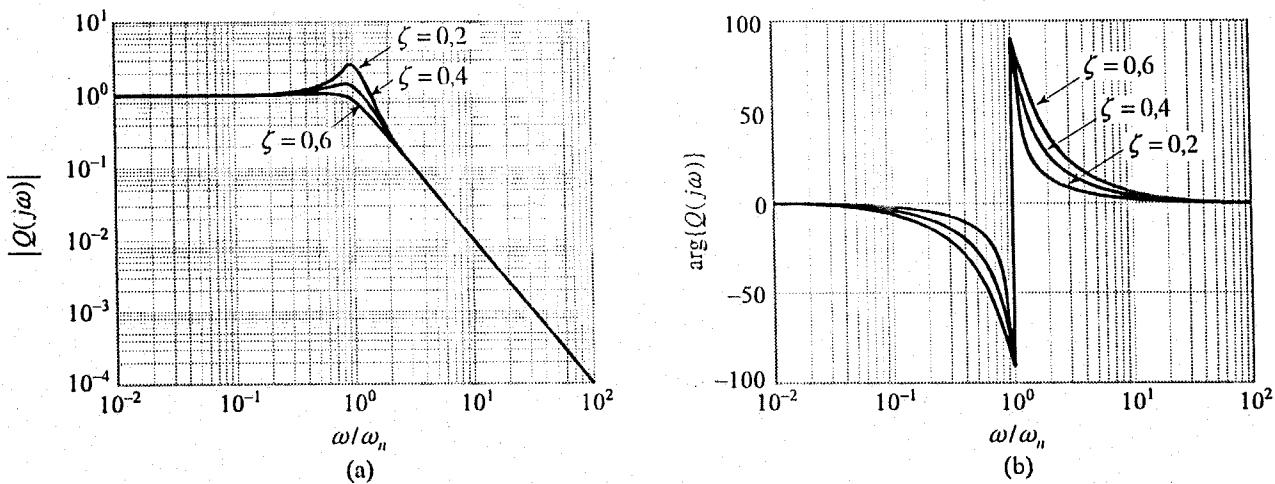


FIGURA 9.40 Diagrama de Bode de fator de pôlo de segunda ordem:

$$Q(s) = \frac{1}{1 + (2\zeta/\omega_n)s + s^2/\omega_n^2}$$

para  $\zeta$  variável. (a) Componente de ganho. (b) Componente de fase.

Podemos ver agora o mérito prático do diagrama de Bode. Especificamente, usando a aproximação acima descrita para os fatores de pôlo/zero simples e quadráticos da função de transferência de malha  $L(s)$ , podemos fazer rapidamente um esboço de  $|L(j\omega)|_{dB}$  e investigar o efeito da colocação de pôlos e zeros em  $|L(j\omega)|$ .

**EXEMPLO 9.14** Considere um amplificador realimentado que tem a resposta em frequência de malha

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{6K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)} \\ &= \frac{K}{(1+j\omega)(1+j\omega/2)(1+j\omega/3)} \end{aligned}$$

Construa o diagrama de Bode para  $K = 6$ .

**Solução:** O numerador na segunda linha de  $L(j\omega)$  é uma constante igual a 6 para  $K = 6$ . Expresso em decibéis, este numerador contribui com um ganho constante igual a

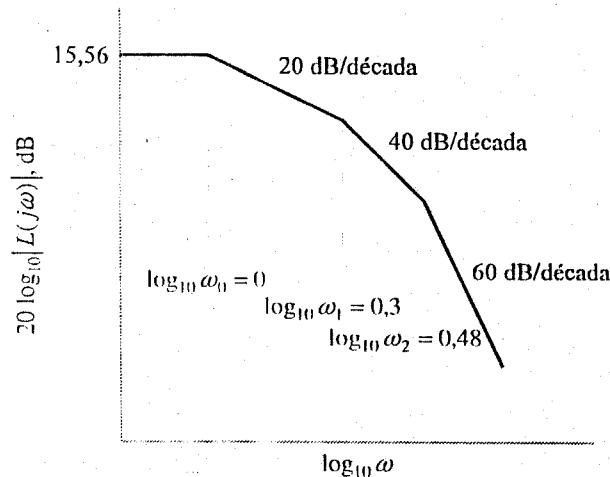
$$20 \log_{10} 6 = 15,56 \text{ dB}$$

O denominador é composto de três fatores de pôlos simples com frequências de quebra iguais a 1, 2 e 3 rad/s. Reunindo as contribuições dos termos do numerador e do denominador, obtemos a aproximação por segmentos de reta para o componente de ganho de  $L(j\omega)$  mostrado na Figura 9.41.

As Figuras 9.42(a) e (b) mostram o ganho exato e os componentes de fase de  $L(j\omega)$ , respectivamente.

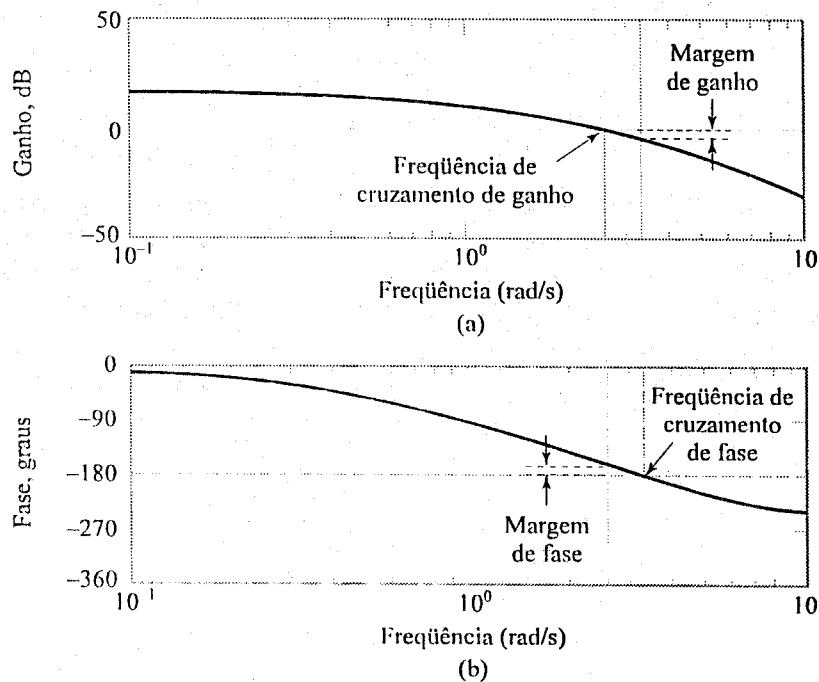
### ■ ESTABILIDADE RELATIVA DE UM SISTEMA REALIMENTADO

Agora que estamos familiarizados com a construção do diagrama de Bode, estamos preparados para considerar seu uso no estudo do problema da estabilidade. A *estabilidade relativa* de um sistema realimentado é determinada por quanto próximo o gráfico da função de transferência de malha  $L(s)$  do sistema está do ponto crítico  $L(s) = -1$  para  $s = j\omega$ .



**FIGURA 9.41** Aproximação por segmentos de reta para o componente de ganho do diagrama de Bode correspondente a uma resposta em malha aberta

$$L(j\omega) = \frac{6K}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)} \quad \text{para } K = 6.$$



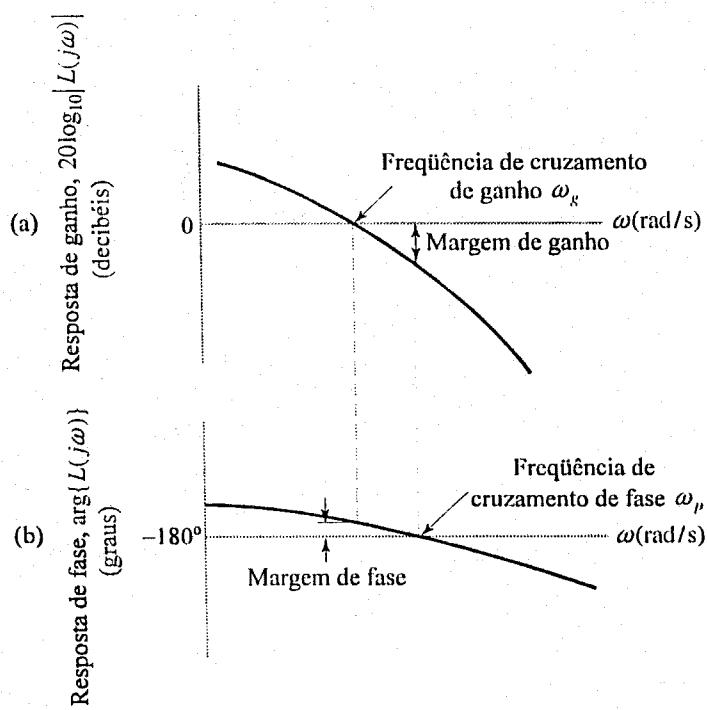
**FIGURA 9.42** Ganho exato e respostas de fase para resposta em malha aberta

$$L(j\omega) = \frac{6K}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)} \quad \text{para } K = 6.$$

Como o diagrama de Bode consiste em dois gráficos, um associado a  $20 \log_{10}|L(j\omega)|$  e o outro a  $\arg\{L(j\omega)\}$ , há duas medidas comumente usadas da estabilidade relativa, como ilustra a Figura 9.43.

A primeira destas duas medidas é a *margem de ganho*, expressa em decibéis. Para um sistema de realimentação estável, a margem de ganho é definida como o número de decibéis pelo qual  $20 \log_{10}|L(j\omega)|$  deve ser variado para levar o sistema à beira da instabilidade. Suponhamos que quando o ângulo de fase da resposta em freqüência de malha  $L(j\omega)$  se iguala a  $-180^\circ$ , seu módulo  $|L(j\omega)|$  se iguala a  $1/K_m$ , em que  $K_m > 1$ . A quantidade  $20 \log_{10} K_m$  é igual à margem de ganho do sistema, como indica a Figura 9.43(a). A freqüência  $\omega_p$  na qual  $\arg\{L(j\omega_p)\} = -180^\circ$  é chamada *freqüência de cruzamento de fase*.

A segunda medida da estabilidade relativa é a *margem de fase*, expressa em graus. Novamente, para um sistema de realimentação estável, a margem de fase é definida como o módulo do ângulo mínimo pelo qual  $\arg\{L(j\omega)\}$  deve ser variado para interceptar o ponto crítico  $L(j\omega) = -1$ . Suponhamos que quando o módulo  $|L(j\omega)|$  se iguala à unidade, o ângulo de fase  $\arg\{L(j\omega)\}$  se iguala a  $-180 + \phi_m$ . O ângulo  $\phi_m$  é a margem de fase do sistema, como é indicado na Figura 9.43(b). A freqüência  $\omega_g$  na qual  $|L(j\omega_g)| = 1$  é chamada *freqüência de cruzamento de ganho*.



**FIGURA 9.43** Ilustração das definições de (a) margem de ganho e freqüência de cruzamento de ganho, e (b) margem de fase e freqüência de cruzamento de fase.

Tendo como base estas definições, podemos fazer as seguintes observações sobre a estabilidade de um sistema de realimentação:

1. Para um sistema de realimentação estável, tanto a margem de ganho como a margem de fase devem ser positivas. Por implicação, a freqüência de cruzamento de fase deve ser maior do que a freqüência de cruzamento de ganho.
2. O sistema é instável se a margem de ganho for negativa, a margem de fase for negativa ou ambas forem negativas.

**EXEMPLO 9.15** Calcule as margens de ganho e de fase da resposta em freqüência de malha do Exemplo 9.14 para  $K = 6$ .

**Solução:** A Figura 9.42 também inclui as localizações das freqüências de cruzamento de ganho e de fase:

$$\omega_p = \text{freqüência de cruzamento de fase} = 3,317 \text{ rad/s}$$

$$\omega_g = \text{freqüência de cruzamento de ganho} = 2,59 \text{ rad/s}$$

Com  $\omega_p > \omega_g$ , temos uma confirmação adicional de que o amplificador realimentado de três estágios descrito pela resposta em freqüência de malha  $L(j\omega)$  dos Exemplos 9.13 e 9.14 é estável para  $K = 6$ .

Em  $\omega = \omega_p$ , temos, por definição,  $\arg\{L(j\omega_p)\} = -180^\circ$ . Nesta freqüência, descobrimos na Figura 9.42(a) que

$$20 \log_{10}|L(j\omega_p)| = -4,437 \text{ dB}$$

A margem de ganho é, portanto, igual a 4,437 dB.

Em  $\omega = \omega_g$ , temos, por definição,  $|L(j\omega_g)| = 1$ . Nesta freqüência, descobrimos na Figura 9.42(b) que

$$\arg\{L(j\omega_g)\} = -162,01^\circ$$

A margem de fase é, portanto, igual a

$$180 - 162,01 = 17,99^\circ$$

Estas margens de estabilidade estão incluídas no diagrama de Bode da Figura 9.42.

### ■ RELAÇÃO ENTRE A MARGEM DE FASE E A TAXA DE AMORTECIMENTO

As diretrizes usadas na abordagem clássica (domínio de freqüência) ao projeto de um sistema de realimentação linear normalmente são derivadas da análise da dinâmica de servomecanismos de segunda ordem. Essa abordagem é justificada pelos seguintes fundamentos. Primeiro, quando o ganho de malha é grande, a função de transferência de malha fechada do sistema desenvolve um par de pólos complexos conjugados dominantes. Em segundo lugar, um modelo de segunda ordem fornece uma aproximação adequada a um modelo de ordem mais elevada cuja função de transferência seja dominada por um par de pólos complexos conjugados (veja a Seção 9.14).

Considere então um sistema de segunda ordem cuja função de transferência de malha seja dada por

$$T(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

Este sistema foi estudado na Seção 9.11. Quando o ganho de malha  $K$  é grande o bastante para produzir uma resposta ao degrau subamortecida (isto é, os pólos de malha fechada formam um par complexo conjugado), a taxa de amortecimento e a freqüência natural do sistema são definidos, respectivamente, por (veja o Exercício 9.8),

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\tau K}} \quad \text{e} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}}$$

Conseqüentemente, podemos redefinir a função de transferência de malha em termos de  $\zeta$  e  $\omega_n$  da seguinte maneira:

$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (9.102)$$

Por definição, a freqüência de cruzamento de ganho  $\omega_g$  é determinada a partir da relação

$$|L(j\omega_g)| = 1$$

Portanto, colocando  $s = j\omega_g$  na equação (9.102) e resolvendo para  $\omega_g$ , obtemos

$$\omega_g = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \quad (9.103)$$

Portanto, a margem de fase, medida em graus, é

$$\begin{aligned} \phi_m &= 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_g}{2\zeta\omega_n}\right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_g}\right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}}\right) \end{aligned} \quad (9.104)$$

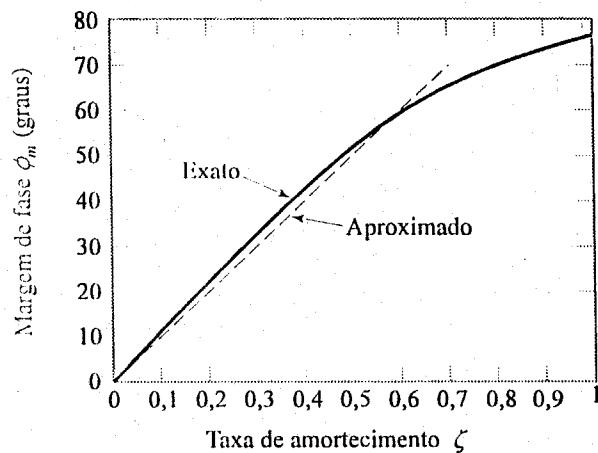
A equação (9.104) fornece uma relação exata entre a margem de fase  $\phi_m$ , que é uma quantidade associada à resposta em freqüência de malha aberta, e a taxa de amortecimento  $\zeta$ , que é uma quantidade associada à resposta ao degrau em malha fechada. Esta relação exata está plotada na Figura 9.44. Para valores da taxa de amortecimento que estão na faixa  $0 \leq \zeta \leq 0,6$ , a equação (9.104) é estreitamente aproximada por

$$\phi_m \approx 100\zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq 0,6$$

De maneira equivalente, podemos escrever

$$\zeta = \frac{\phi_m}{100}, \quad 0 \leq \zeta \leq 0,6 \quad (9.105)$$

em que, como mencionamos acima, a margem de fase  $\phi_m$  é medida em graus. Esta aproximação está incluída na Figura 9.44 como a linha tracejada.



**FIGURA 9.44** Gráfico da relação entre a taxa de amortecimento e a margem de fase computada para um sistema de segunda ordem.

Assim que tivermos obtido um valor para a taxa de amortecimento  $\zeta$ , poderemos usar a equação (9.103) para determinar o valor correspondente da freqüência natural  $\omega_n$  em termos da freqüência de cruzamento de ganho  $\omega_c$ . Com os valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  à nossa disposição, poderemos então determinar o tempo de subida, o tempo de pico, o sobre-sinal percentual e o tempo de acomodação como descritores da resposta ao degrau usando as fórmulas derivadas no Exemplo 9.5.

### ■ \*RELAÇÃO ENTRE O DIAGRAMA DE BODE E O CRITÉRIO DE NYQUIST

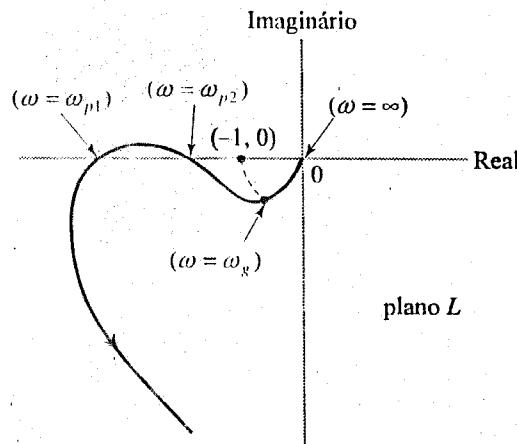
O diagrama de Bode discutido nesta seção e o diagrama de Nyquist discutido na seção anterior são técnicas do domínio de freqüência que fornecem perspectivas diferentes sobre o desempenho da estabilidade de um sistema de realimentação linear. O diagrama de Bode consiste em dois gráficos distintos, sendo um para exibir a resposta de ganho e o outro para exibir a resposta de fase. Por outro lado, o diagrama de Nyquist combina as respostas em módulo e em fase numa única plotagem polar.

O diagrama de Bode ilustra a resposta em freqüência do sistema. Ele usa aproximações por segmentos de reta que podem ser esboçadas com pouco esforço, constituindo assim, um método fácil para avaliar a estabilidade absoluta e a estabilidade relativa do sistema. Conseqüentemente, muito *insight* pode ser derivado do uso do diagrama de Bode para projetar um sistema de realimentação por meio de técnicas do domínio de freqüência.

O critério de Nyquist é importante por dois motivos:

1. Ele fornece a base teórica para se usar a resposta em freqüência de malha para determinar a estabilidade de um sistema de malha fechada.
2. Ele pode ser usado para avaliar a estabilidade a partir de dados experimentais que descrevem o sistema.

O critério de Nyquist é o teste definitivo de estabilidade, em termos de que a determinação da estabilidade pode ser enganosa, a menos que ela seja usada em conjunto com o critério de Nyquist. Isto acontece especialmente quando o sistema é *condicionalmente estável*, o que significa que o sistema atravessa condições estáveis/instáveis quando o ganho de malha é variado. Esse fenômeno é ilustrado na Figura 9.45, onde vemos que há *duas* freqüências de cruzamento de fase, a saber,  $\omega_{p1}$  e  $\omega_{p2}$ . Para  $\omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2}$ , a resposta em módulo  $|L(j\omega)|$  é maior do que a unidade. Além disso, vemos que a freqüência de cruzamento de ganho  $\omega_g$  é maior do que tanto  $\omega_{p1}$  como  $\omega_{p2}$ . Baseando-se nestas observações superficiais, seria tentador concluirmos que um sistema realimentado de malha fechada representado pela Figura 9.45 é instável. Na realidade, entretanto, o sistema é estável, desde que o lugar de Nyquist lá mostrado *não* circunda o ponto crítico  $(-1, 0)$ .



**FIGURA 9.45** Diagrama de Nyquist ilustrando a noção de estabilidade condicional.

Diz-se que um sistema de malha fechada caracterizado por um lugar de Nyquist como o mostrado na Figura 9.45 é condicionalmente estável pela seguinte razão: um ganho de malha reduzido ou um ganho de malha aumentado tornará o sistema instável.

► **EXERCÍCIO 9.16** Verifique se o lugar de Nyquist mostrado na Figura 9.45 não circunda o ponto crítico  $(-1, 0)$ . ◀

## \*9.17 Sistemas de Dados Amostrados

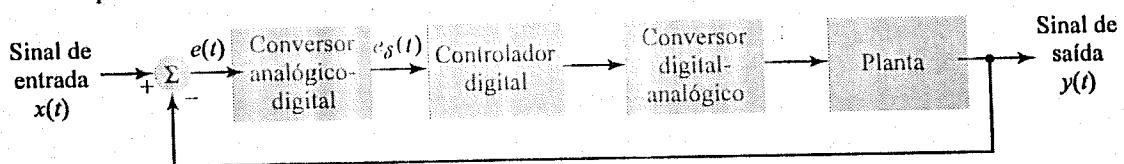
No tratamento dos sistemas de controle realimentados discutidos até agora, supomos que o sistema inteiro se comporta baseado em tempo contínuo. Porém, em muitas aplicações da teoria do controle, um computador digital é incluído como parte integrante do sistema de controle. Os exemplos de controle digital de sistemas dinâmicos incluem aplicações importantes como pilotos automáticos de aeronaves, veículos de transporte de massa, refinarias de petróleo e máquinas de fabricação de papel. Uma vantagem marcante de se usar um computador digital para o controle é a *flexibilidade* aumentada do programa de controle das tomadas de decisões.

O uso de um computador digital para calcular a ação de controle para um sistema de tempo contínuo apresenta dois efeitos: amostragem e quantização. A amostragem se torna necessária em virtude do fato de que um computador digital somente pode manipular sinais de tempo discreto. Dessa forma, amostras são tomadas de sinais físicos como, por exemplo, posição e velocidade, e estas amostras são usadas no computador para calcular o controle apropriado. Em relação à quantização, ela surge porque o computador opera com aritmética finita. O computador recebe números, armazena-os, realiza cálculos com eles e depois os devolve com uma certa exatidão finita. Em outras palavras, a quantização introduz erros de arredondamento nos cálculos executados pelo computador. Nesta seção, concentraremos nossa atenção nos efeitos da amostragem em sistemas de controle realimentados.

Sistemas de controle realimentados que usam computadores digitais são sistemas “híbridos”, híbridos em termos de que sinais de tempo contínuo aparecem em alguns lugares e sinais de tempo discreto aparecem em outros lugares. Esses sistemas comumente são chamados *sistemas de dados amostrados*. A natureza híbrida desse tipo de sistema torna sua análise bem menos direta do que a de um sistema de tempo puramente contínuo ou de um sistema de tempo puramente discreto, uma vez que ela requer o uso de métodos de análise tanto de tempo contínuo como de tempo discreto.

### ■ DESCRIÇÃO DE SISTEMA

Considere, por exemplo, o sistema de controle realimentado da Figura 9.46, no qual o computador digital (controlador) executa a ação de controle. O conversor analógico-digital (A/D), à frente do sistema, age no sinal de erro de tempo contínuo e converte-o num fluxo de números a serem processados no computador.



**FIGURA 9.46** Diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado com dados amostrados, o qual inclui tanto componentes de tempo discreto como de tempo contínuo.

O controle calculado pelo computador é um segundo fluxo de números, o qual é convertido pelo conversor digital-analógico (D/A) novamente num sinal de tempo contínuo aplicado à planta.

Para o propósito de análise, os vários componentes do sistema de dados amostrados da Figura 9.46 são modelados da seguinte maneira:

1. *Conversor A/D*. Este componente é representado simplesmente por um amostrador comandado por impulsos. Digamos que  $e(t)$  denote o sinal de erro, definido como a diferença entre a entrada  $x(t)$  do sistema e a saída  $y(t)$  do sistema. Admitamos que  $e[n] = e(nT)$  sejam as amostradas de  $e(t)$ , em que  $T$  é o período de amostragem. Lembre-se do capítulo 4 que o sinal de tempo discreto  $e[n]$  pode ser representado pelo sinal de tempo contínuo

$$e_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \delta(t - nT) \quad (9.106)$$

2. *Controlador digital*. O programa de computador responsável pelo controle é visto como uma equação de diferenças, cujo efeito de entrada-saída é representado pela transformada z  $D(z)$  ou, de maneira equivalente, pela resposta ao impulso  $d[n]$ :

$$D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n] z^{-n} \quad (9.107)$$

Alternativamente, podemos representar o programa de computador pela função de transferência de tempo contínuo  $D_\delta(s)$ , em que  $s$  é a freqüência complexa na transformada de Laplace. Isto decorre da representação de tempo contínuo do sinal  $d[n]$  dada por

$$d_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n] \delta(t - nT)$$

Tomando a transformada de Laplace de  $d_\delta(t)$ , temos

$$D_\delta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n] e^{-nsT} \quad (9.108)$$

Nas equações (9.107) e (9.108) vemos que, dada a função de transferência  $D_\delta(s)$ , podemos determinar a transformada z  $D(z)$  correspondente fazendo  $z = e^{Ts}$ , como é mostrado por

$$D(z) = D_\delta(s)|_{e^{Ts}=z} \quad (9.109)$$

Inversamente, dado  $D(z)$ , podemos determinar  $D_\delta(s)$  escrevendo

$$D_\delta(s) = D(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad (9.110)$$

A transformada z inversa de  $D(z)$  é uma seqüência de números cujos valores individuais são iguais à resposta ao impulso  $d[n]$ . Por outro lado, a transformada de Laplace inversa de  $D_\delta(s)$  é uma seqüência de impulsos cujos valores individuais são ponderados pela resposta ao impulso  $d[n]$ . Observe também que  $D_\delta(s)$  é periódico em  $s$ , com um período igual a  $2\pi jT$ .

3. *Conversor D/A.* Um tipo de conversor D/A comumente usado é o *retentor ou interpolador de ordem zero*, o qual simplesmente mantém constante a amplitude de uma amostra que chega durante o período inteiro de amostragem até que chegue a amostra seguinte. A resposta ao impulso do retentor de ordem zero, denotada por  $h_o(t)$  pode, deste modo, ser descrita como mostra a Figura 9.47 (veja a Seção 4.7); ou seja,

$$h_o(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

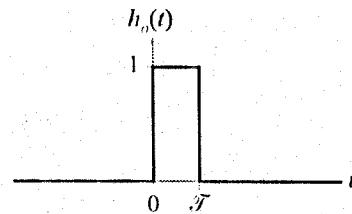


FIGURA 9.47 Resposta ao impulso o retentor de ordem zero.

A função de transferência o retentor de ordem zero é, portanto,

$$\begin{aligned} H_o(s) &= \int_0^T e^{-st} dt \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \end{aligned} \quad (9.111)$$

4. *Planta.* A planta opera com base no controle de tempo contínuo entregue pelo retentor de ordem zero para produzir a saída de sistema global. A planta, como usual, é representada pela função de transferência  $G(s)$ .

Em função destas representações, podemos modelar o sistema de controle digital da Figura 9.46 como descreve a Figura 9.48.

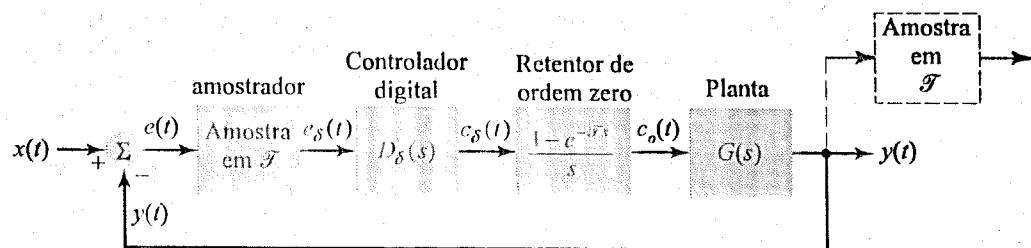


FIGURA 9.48 Modelo do sistema de controle realimentado com dados amostrados mostrado na Figura 9.46.

### ■ PROPRIEDADES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE SINAIS AMOSTRADOS

Para preparar o caminho para determinar a função de transferência de malha fechada do sistema de dados amostrados modelado na Figura 9.48, precisamos introduzir algumas propriedades das transformadas de Laplace de sinais amostrados. Digamos que  $a_\delta(t)$  denote a versão amostrada por impulsos de um sinal de tempo contínuo  $a(t)$ , ou seja,

$$a_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(nT) \delta(t - nT)$$

Digamos que  $A_\delta(s)$  denote a transformada de Laplace de  $a_\delta(t)$ . (Na literatura de controle,  $a^*(t)$  e  $A^*(s)$  comumente são usados para denotar a versão amostrada por impulsos de  $a(t)$  e sua transformada de Laplace, respectivamente, e, neste modo,  $A^*(s)$  é denominado *transformada asterisco*. Não usamos esta terminologia amplamente porque o asterisco é usado para denotar o conjugado complexo neste livro.) A transformada de Laplace  $A_\delta(s)$  tem duas propriedades importantes que se seguem do material sobre amostragem por impulsos apresentado no Capítulo 4:

1. A transformada de Laplace  $A_\delta(s)$  de um sinal amostrado  $a_\delta(t)$  é periódica na variável complexa  $s$  com período  $j\omega_s$ , em que  $\omega_s = 2\pi/T$ , e  $T$  é o período de amostragem. Esta propriedade decorre diretamente da equação (4.32).

Especificamente, usando  $s$  em vez de  $j\omega$  nessa equação, podemos escrever

$$A_\delta(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(s - jk\omega_s) \quad (9.112)$$

a partir da qual descobrimos prontamente que

$$A_\delta(s) = A_\delta(s + j\omega_s) \quad (9.113)$$

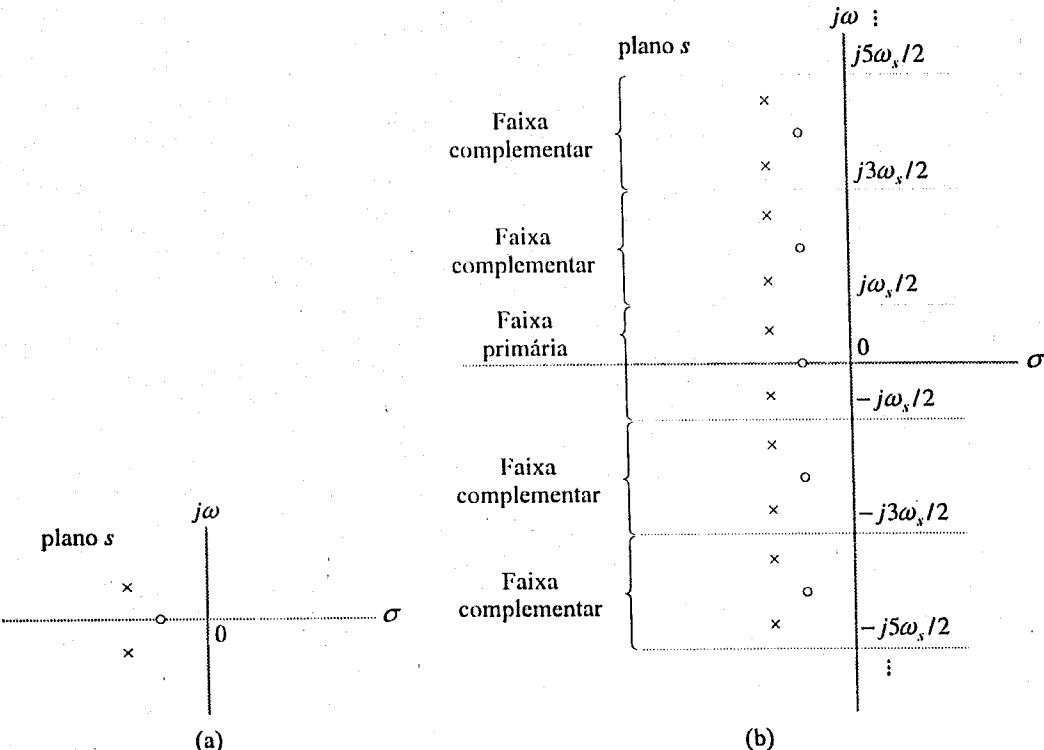
2. Se a transformada de Laplace  $A(s)$  do sinal de tempo contínuo original  $a(t)$  tiver um polo em  $s = s_1$ , então a transformada de Laplace  $A_\delta(s)$  do sinal amostrado  $a_\delta(t)$  terá pólos em  $s = s_1 + jm\omega_s$ , em que  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Esta propriedade decorre diretamente da equação (9.112), reescrevendo-a na forma expandida

$$A_\delta(s) = \frac{1}{T} [A(s) + A(s + j\omega_s) + A(s - j\omega_s) + A(s + j2\omega_s) + A(s + j2\omega_s) + \dots]$$

Aqui, vemos claramente que, se  $A(s)$  tiver um polo em  $s = s_1$ , então cada termo da forma  $A(s - jm\omega_s)$  contribuirá com um polo em  $s = s_1 + jm\omega_s$ , porque

$$A(s - jm\omega_s)|_{s=s_1+jm\omega_s} = A(s_1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A Propriedade 2 de  $A_\delta(s)$  é ilustrada na Figura 9.49.



**FIGURA 9.49** Ilustração da Propriedade 2 da transformada de Laplace de sinal amostrado. (a) Mapa de pólos e zeros de  $A(s)$ . (b) Mapa de pólos e zeros de  $A_\delta(s)$  definido por

$$A_\delta(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(s - jk\omega_s)$$

em que  $\omega_s$  é a freqüência de amostragem.

Examinando a equação (9.112), vemos que, devido à soma envolvendo os termos da forma  $A(s - jk\omega_s)$ , tanto os pólos como os zeros de  $A(s)$  contribuem para os zeros de  $A_\delta(s)$ . Conseqüentemente, nenhum enunciado equivalente à Propriedade 2 pode ser feita em relação aos zeros de  $A_\delta(s)$ . Todavia, podemos dizer que os zeros de  $A_\delta(s)$  exibem periodicidade, tendo o período  $j\omega_s$ , como ilustra a Figura 9.49.

Até agora, nesta subseção, discutimos somente sinais de tempo discreto. Entretanto, num sistema de dados amostrados, temos uma combinação de sinais de tempo contínuo e de tempo discreto. A questão que discutiremos a seguir preocupa-se com essa situação. Suponhamos que tenhamos um sinal  $l(t)$  que seja o resultado da convolução de um sinal de tempo discreto  $a_\delta(t)$  com um sinal de tempo contínuo  $b(t)$ , como é mostrado por

$$l(t) = a_\delta(t) * b(t)$$

Agora, amostramos  $l(t)$  na mesma taxa que  $a_\delta(t)$  e, deste modo, escrevemos

$$l_\delta(t) = [a_\delta(t) * b(t)]_\delta$$

Transformando esta relação para o domínio complexo  $s$ , podemos escrever de maneira equivalente

$$L_\delta(s) = [A_\delta(s)B(s)]_\delta$$

em que  $a_\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} A_\delta(s)$ ,  $b(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} B(s)$ , e  $l_\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} L_\delta(s)$ . Adaptando a equação (9.112) a esta nova situação, teremos

$$L_\delta(s) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_\delta(s - jk\omega_s)B(s - jk\omega_s) \quad (9.114)$$

em que, como antes,  $\omega_s = 2\pi/\mathcal{T}$ . Entretanto, por definição, a transformada de Laplace  $A_\delta(s)$  é periódica em  $s$ , com período  $j\omega_s$ . Segue-se, portanto, que

$$A_\delta(s - jk\omega_s) = A_\delta(s) \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Conseqüentemente, podemos simplificar a equação (9.114) para

$$\begin{aligned} L_\delta(s) &= A_\delta(s) \cdot \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B(s - jk\omega_s) \\ &= A_\delta(s)B_\delta(s) \end{aligned} \quad (9.115)$$

em que  $b_\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} B_\delta(s)$  e  $b_\delta(t)$  é a versão amostrada por impulsos de  $b(t)$ ; ou seja,

$$B_\delta(s) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B(s - jk\omega_s)$$

Levando em conta a equação (9.115), podemos agora enunciar uma outra propriedade da amostragem por impulsos. Se a transformada de Laplace de um sinal a ser amostrado a uma taxa de  $1/\mathcal{T}$  for o produto de uma transformada de Laplace que já é periódica em  $s$ , com período  $j\omega_s = j2\pi/\mathcal{T}$ , vezes uma outra transformada de Laplace que não o é, então a transformada de Laplace periódica surgirá como um fator no resultado.

### ■ FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE MALHA FECHADA

Retornando à questão que temos em mãos, a saber, a de determinar a função de transferência de malha fechada do sistema de dados amostrados da Figura 9.46, observamos que cada um dos blocos funcionais do modelo da Figura 9.48 é caracterizado por uma função de transferência própria, com exceção do amostrador. Infelizmente, um amostrador não tem uma função de transferência, o que complica a determinação da função de transferência de malha fechada de um sistema de dados amostrados.

Para contornar este problema, trocamos de lugar o operador de amostragem com o somador e, deste modo, reformulamos o modelo da Figura 9.48 na forma equivalente mostrada na Figura 9.50, onde os sinais que entram na análise agora são todos representados por suas respectivas transformadas de Laplace. A abordagem usual na análise de sistemas de dados amostrados é relacionar a versão

amostrada da entrada,  $X_\delta(s)$ , com uma versão amostrada da saída,  $Y_\delta(s)$ . Ou seja, analisamos a função de transferência de malha fechada,  $T_\delta(s)$ , contida na caixa tracejada da Figura 9.50. Esta abordagem descreve o comportamento da saída da planta  $y(t)$  nos instantes de amostragem, mas não fornece nenhuma informação sobre como a saída varia entre os instantes de amostragem.

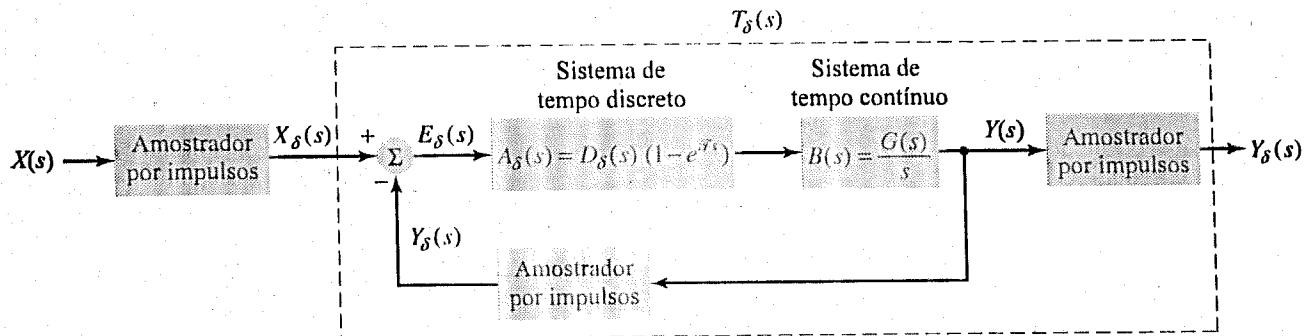


FIGURA 9.50 Diagrama de blocos de sistema de dados amostrados obtido reformulando-se o modelo da Figura 9.48.

Na Figura 9.50, a função de transferência do retentor de ordem zero foi dividida em duas partes. Uma parte, representada por  $(1 - e^{-\bar{T}s})$ , foi integrada com a função de transferência  $D_\delta(s)$  do controlador digital. A outra parte, representada por  $1/s$ , foi integrada com a função de transferência  $G(s)$  da planta. Agindo assim agora temos somente dois tipos de transformada sobre as quais pensar no modelo da Figura 9.50:

- Transformadas de variáveis de tempo contínuo, representadas pela transformada de Laplace  $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$  e pela função de transferência

$$B(s) = \frac{G(s)}{s} \quad (9.116)$$

- Transformadas de variáveis de tempo discreto, representadas pelas transformadas de Laplace  $x_\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_\delta(s)$ ,  $e_\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} E_\delta(s)$ ,  $y_\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y_\delta(s)$ , e a função de transferência

$$A_\delta(s) = D_\delta(s)(1 - e^{-\bar{T}s}) \quad (9.117)$$

Agora estamos preparados para descrever um procedimento direto para a análise de sistemas de dados amostrados:

- Escreva equações de causa e efeito usando transformadas de Laplace para obter a função de transferência de malha fechada  $T_\delta(s)$ .
- Converta  $T_\delta(s)$  numa função de transferência de tempo discreto  $T(z)$ .
- Use ferramentas de análise do plano  $z$ , como o método do lugar das raízes, para avaliar a estabilidade do sistema e o desempenho do sistema.

Examinando a Figura 9.50, podemos obter prontamente as seguintes equações de causa e efeito:

$$E_\delta(s) = X_\delta(s) - Y_\delta(s) \quad (9.118)$$

$$Y(s) = A_\delta(s)B(s)E_\delta(s) \quad (9.119)$$

em que  $B(s)$  e  $A_\delta(s)$  são definidos pelas equações (9.116) e (9.117), respectivamente. O amostrador por impulsos aplicado a  $y(t)$  tem o mesmo período de amostragem  $\bar{T}$  e está sincronizado com o amostrador por impulsos à frente do sistema. Assim, amostrando  $y(t)$  desta maneira, podemos reescrever a equação (9.119) na forma amostrada:

$$\begin{aligned} Y_\delta(s) &= A_\delta(s)B_\delta(s)E_\delta(s) \\ &= L_\delta(s)E_\delta(s) \end{aligned} \quad (9.120)$$

em que  $B_\delta(s)$  é a forma amostrada de  $B(s)$ , e  $L_\delta(s)$  é definido pela equação (9.115). Resolvendo as equações (9.118) e (9.120) para obter a razão  $Y_\delta(s)/X_\delta(s)$ , podemos expressar a função de transferência de malha fechada do sistema amostrado da Figura 9.48 como

$$\begin{aligned} T_\delta(s) &= \frac{Y_\delta(s)}{X_\delta(s)} \\ &= \frac{L_\delta(s)}{1 + L_\delta(s)} \end{aligned} \quad (9.121)$$

Finalmente, adaptando a equação (9.109) a nossa situação atual, podemos reescrever a equação (9.121) em termos da transformada  $z$  da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)} \quad (9.122)$$

em que

$$L(z) = L_\delta(s)|_{e^{s\tau}=z}$$

e

$$T(z) = T_\delta(s)|_{e^{s\tau}=z}$$

Como enunciarmos anteriormente, a equação (9.122) define a função de transferência  $T(z)$  entre a entrada amostrada do sistema original de dados amostrados da Figura 9.46 e a saída da planta  $y(t)$  medida somente nos instantes de amostragem.

**EXEMPLO 9.16** No sistema de dados amostrados da Figura 9.46, a função de transferência da planta é

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

e a transformada  $z$  do controlador digital (programa de computador) é

$$D(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}}$$

Determine a função de transferência de malha fechada  $T(z)$  do sistema.

*Solução:* Considere primeiro  $B(s) = G(s)/s$  expresso em frações parciais como

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{a}{s(s+a)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

A transformada de Laplace inversa de  $B(s)$  é

$$b(t) = \mathcal{L}^{-1}[B(s)] = 1 - e^{-at}$$

Conseqüentemente, adaptando a definição da equação (9.108) para o problema que temos em mãos, obtemos

$$\begin{aligned} B_\delta(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]e^{-sn\tilde{T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-an\tilde{T}})e^{-sn\tilde{T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-sn\tilde{T}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(s+a)n\tilde{T}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\tilde{T}}} - \frac{1}{1 - e^{-a\tilde{T}}e^{-\tilde{T}}} \\ &= \frac{(1 - e^{-a\tilde{T}})e^{-\tilde{T}}}{(1 - e^{-\tilde{T}})(1 - e^{-a\tilde{T}}e^{-\tilde{T}})} \end{aligned}$$

Para obter convergência, temos de restringir nossa análise a valores de  $s$  para os quais tanto  $|e^{-\mathcal{R}s}|$  como  $|e^{-\mathcal{R}(s+a)}|$  são menores do que um. Em seguida, aplicando a fórmula da equação (9.110) à transformada  $z D(z)$  dada, obtemos

$$D_\delta(s) = \frac{K}{1 - e^{-\mathcal{R}s}}$$

cujo uso na equação (9.117) produz

$$A_\delta(s) = K$$

Conseqüentemente, usando os resultados obtidos para  $A_\delta(s)$  e  $B_\delta(s)$  na equação (9.115), obtemos

$$L_\delta(s) = \frac{K(1 - e^{-a\mathcal{T}})e^{-\mathcal{R}s}}{(1 - e^{-\mathcal{R}s})(1 - e^{-a\mathcal{T}}e^{-\mathcal{R}s})}$$

Finalmente, definindo  $e^{-\mathcal{R}s} = z^{-1}$ , obtemos a transformada  $z$

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{K(1 - e^{-a\mathcal{T}})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-a\mathcal{T}}z^{-1})} \\ &= \frac{K(1 - e^{-a\mathcal{T}})z}{(z - 1)(z - e^{-a\mathcal{T}})} \end{aligned}$$

a qual tem um zero na origem, um pôlo em  $z = e^{-a\mathcal{T}}$  dentro do círculo unitário, e um pôlo em  $z = 1$  no círculo unitário do plano  $z$ .

#### ► EXERCÍCIO 9.17 A função de transferência de uma planta é

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Determine  $(G(s)/s)_\delta$ .

$$\text{Resposta: } \left(\frac{G(s)}{s}\right)_\delta = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-\mathcal{R}s}} - \frac{1}{1 - e^{-\mathcal{R}}e^{-\mathcal{R}s}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-2\mathcal{T}}e^{-\mathcal{R}s}}$$

#### ■ ESTABILIDADE

O problema da estabilidade num sistema de dados amostrados é diferente de sua contraparte em tempo contínuo porque estamos realizando nossa análise no plano  $z$  ao invés do plano  $s$ .

O domínio de estabilidade para um sistema de tempo contínuo é representado pelo semiplano esquerdo do plano  $s$ . Por outro lado, o domínio de estabilidade para um sistema de dados amostrados é representado pelo interior do círculo unitário no plano  $z$ .

Em relação à equação (9.122), vemos que a estabilidade do sistema de dados amostrados da Figura 9.46 é determinada pelos pôlos da função de transferência de malha fechada  $T(z)$  ou, de maneira equivalente, as raízes da equação característica:

$$1 + L(z) = 0$$

ou, de maneira equivalente,

$$L(z) = -1 \quad (9.123)$$

O ponto significativo a ser notado em relação a esta equação é que ela tem a mesma forma matemática que a equação correspondente para o sistema realimentado de tempo contínuo descrito pela equação (9.73). Conseqüentemente, a mecânica de construção do lugar das raízes no plano  $z$  é exatamente a mesma que a mecânica de construção do lugar das raízes no plano  $s$ . Em outras palavras, todas as propriedades do lugar das raízes no plano  $s$  descritas na Seção 9.13 são transportadas para o lugar das raízes do plano  $z$ . O único ponto diferente é que, para que o sistema realimentado de dados amostrados seja estável, todas as raízes da equação característica (9.123) devem estar confinados ao interior do círculo unitário no plano  $z$ .

De maneira semelhante, o princípio do argumento usado para derivar o critério de Nyquist na Seção 9.15 se aplica ao plano  $z$ , bem como ao plano  $s$ . Desta vez, entretanto, o eixo imaginário do plano  $s$  é substituído pelo círculo unitário no plano  $z$ , e todos os pólos da função de transferência de malha fechada  $T(z)$  necessitam estar dentro do círculo unitário.

**EXEMPLO 9.17** Prosseguindo com o Exemplo 9.16, supomos que  $e^{-aT} = 1/2$ . O valor correspondente de  $L(z)$  é

$$L(z) = \frac{\frac{1}{2}Kz}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

Construa o lugar das raízes do plano  $z$  do sistema.

*Solução:* A equação característica do sistema é

$$(z-1)(z-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}Kz = 0$$

ou seja,

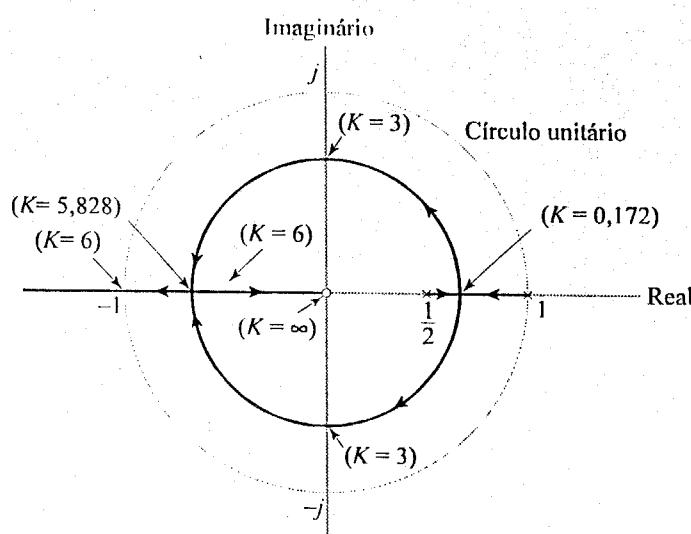
$$z^2 + \frac{1}{2}(K-3)z + \frac{1}{2} = 0$$

Esta é uma equação quadrática em  $z$ ; suas duas raízes são dadas por

$$z = -\frac{1}{4}(K-3) \pm \frac{1}{4}\sqrt{K^2 - 6K + 1}$$

O lugar das raízes do sistema é mostrado na Figura 9.51, onde notamos o seguinte:

- Iniciando-se com  $K = 0$ , o ponto de separação do lugar das raízes ocorre em  $z = 1/\sqrt{2} = 0,707$  para  $K = 3 - 2\sqrt{2} = 0,172$ .
- Para  $K = 3 + 2\sqrt{2} = 5,828$ , o lugar das raízes intercepta novamente o eixo real do plano  $z$ , mas, desta vez, em  $z = -1/\sqrt{2} = -0,707$ .
- Para  $0,172 \leq K \leq 5,828$ , as raízes da equação característica traçam um círculo centrado na origem do plano  $z$  e com raio igual a  $1/\sqrt{2}$ .
- Para  $K > 5,828$ , as duas raízes começam afastando-se uma da outra, sendo que uma raiz se move na direção do zero na origem e a outra se move na direção do infinito.
- Para  $K = 6$ , as duas raízes da equação característica se movem para  $z = -\frac{1}{2}$  e  $z = -1$ . Assim, para este valor de  $K$ , o sistema está à beira da instabilidade, e para  $K > 6$  o sistema torna-se instável.



**FIGURA 9.51** Lugar das raízes de um sistema de dados amostrados com função de transferência de malha.

$$L(z) = \frac{\frac{1}{2}Kz}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

## 9.18 Projeto de Sistemas de Controle

Nas seções anteriores deste capítulo, descrevemos os benefícios da realimentação aplicada a um sistema de controle e apresentamos um tratamento detalhado do problema da estabilidade. Portanto, é benéfico que consideremos agora o projeto de um sistema de controle levando em conta o material aqui coberto.

O projeto de um sistema de controle realimentado preocupa-se com três questões inter-relacionadas:

- Planejamento de uma estrutura adequada para o sistema
- Escolha de sensores e controladores adequados
- Determinação de parâmetros ajustáveis dos controladores.

O projeto se inicia com um conjunto de especificações que incluem as seguintes questões que dizem respeito ao desempenho do sistema de uma maneira ou de outra:

- Sensibilidade às variações de parâmetro e perturbações
- Erros de estado estacionário, medidos em relação a entradas em degrau, em rampa e parabólica
- Resposta transitória, especificada em termos do tempo de subida, tempo de pico, sobre-sinal percentual e tempo de acomodação de uma entrada em degrau
- Estabilidade relativa, medida em termos das margens de ganho e de fase.

O projeto pode ser executado no domínio de freqüência ou no domínio de tempo. Na abordagem de domínio de freqüência, o projeto é executado manualmente por meios gráficos. Especificamente, o projetista usa um compensador (controlador) para alterar ou dar nova forma às características do sistema usando o diagrama de Bode de forma a satisfazer as especificações de projeto. A metodologia de projeto normalmente se baseia na noção de uma aproximação dominante de segunda ordem, e na relação entre taxa de amortecimento e a margem de fase, como discutimos na Seção 9.16.

Alternativamente, o projetista usa uma abordagem de domínio de tempo. Nesta segunda abordagem, o compensador é usado para alterar ou dar nova forma ao lugar das raízes de forma que os pólos de malha fechada do sistema incluam um par dominante de pólos complexos conjugados em localizações desejadas no plano  $s$ .

Com a disponibilidade de software de computador de alta capacidade e fácil de usar, o projetista pode chegar a uma solução satisfatória através de um grande número de execuções de projeto num período de tempo relativamente breve.

Nesta seção, apresentamos um par de exemplos de projeto ilustrativos de ambas as abordagens.

### EXEMPLO 9.18 Projeto de um Compensador de Atraso de Fase Usando o Diagrama de Bode.

Considere o uso de um compensador na forma de rede de atraso de fase cuja função de transferência é definida por

$$H(s) = \frac{\alpha \tau s + 1}{\tau s + 1}, \quad \alpha < 1$$

Você tem uma planta com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

O solicitado é projetar um compensador de atraso de fase que atenda as seguintes especificações de desempenho:

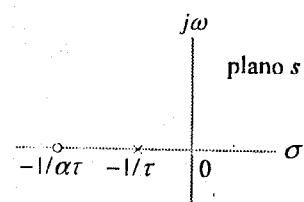
Resposta ao degrau em malha fechada com um sobre-sinal inferior a 25%

Erro de estado estacionário inferior a 0,1, medido em relação a uma entrada em rampa.

Depois de projetar o compensador, construa um circuito amplificador operacional para sua implementação.

**Solução:** Figura 9.52 mostra o mapa de pólos e zeros do compensador. Com  $\alpha < 1$ , o polo em  $s = -1/\tau$  situa-se mais próximo da origem do que o zero em  $s = -1/\alpha\tau$ . A Figura 9.53 mostra o diagrama de Bode correspondente com duas freqüências de canto definidas de acordo com a resposta em freqüência

$$H(j\omega) = \frac{j\alpha\tau\omega + 1}{j\tau\omega + 1}, \quad \alpha < 1$$



**FIGURA 9.52** Mapa de pólos e zeros da rede de compensação de atraso de fase, supondo que  $\alpha < 1$ .

Na Figura 9.53(a), observamos que, para  $\omega \geq 10/\alpha\tau$ , o compensador é caracterizado por (1) atenuação de altas freqüências dependente de  $\alpha$  e (2) atraso de fase quase nulo. Faremos bom proveito desta propriedade em nossa estratégia de projeto.

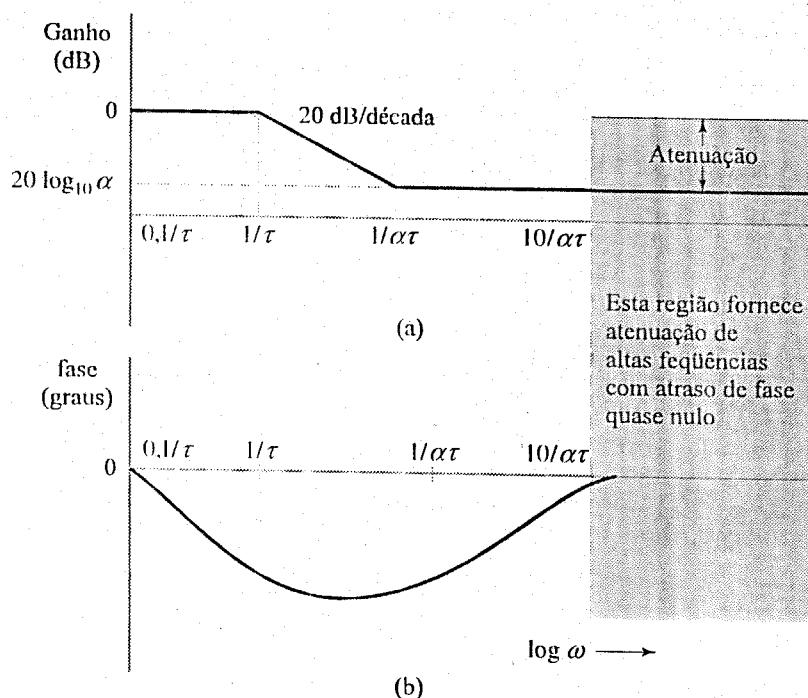
Lembre-se que o sobre-sinal percentual (P.O.) de um sistema de segunda ordem é definido em termos da taxa de amortecimento  $\zeta$  por (veja o Exemplo 9.5)

$$\text{P.O.} = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Com P.O.  $\leq 25\%$ , esta relação é satisfeita escolhendo-se  $\zeta \geq 0,4$ .

O erro de estado estacionário para uma entrada em rampa é  $1/K_v$  em que  $K_v$  é a constante de erro de velocidade (veja a Seção 9.8). Com este erro especificado para ser menor do que 0,1, devemos ter

$$K_v \geq \frac{1}{0,1} = 10$$



**FIGURA 9.53** Diagrama de Bode de uma rede de compensação de atraso de fase com  $\alpha < 1$ . (a) Resposta de ganho. (b) Resposta de fase.

A Figura 9.54 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle realimentado que incorpora o compensador de atraso de fase. A função de transferência de malha do sistema é

$$\begin{aligned} L(s) &= G(s)H(s) \\ &= \frac{K(\alpha\tau s + 1)}{s(\tau s + 1)(s + 1)} \end{aligned}$$

Esta função de transferência de malha foi considerada no Exemplo 9.4. Usando o resultado lá obtido, descobrimos que, com  $K_v = 10$ , o ganho de malha  $K$  desejado é

$$K = K_v = 10$$

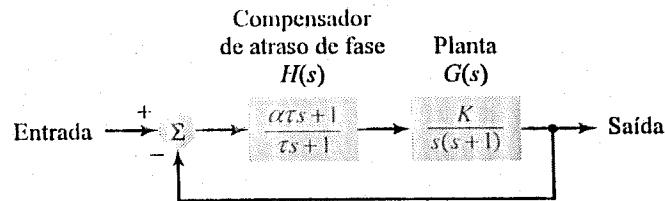


FIGURA 9.54 Diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado compensado.

O diagrama de Bode do sistema não-compensado está plotado na Figura 9.55, na qual descobrimos que a frequência de cruzamento de ganho é

$$\omega_g = 3,2 \text{ rad/s}$$

e a margem de fase é

$$\phi_m = 23^\circ$$

Com uma taxa de amortecimento  $\zeta \geq 0,4$  para o sistema compensado, a margem de fase correspondente é de  $45^\circ$  (veja a Figura 9.44). Segue-se, portanto, que a margem de fase do sistema não-compensado deve ser aumentada. Aumentaremos a margem de fase usando o compensador para diminuir a frequência de cruzamento de ganho sem mudar de maneira apreciável a fase. Admitindo-se  $5^\circ$  para o atraso de fase introduzido pelo compensador, a margem de fase desejada será

$$\phi'_m = 45^\circ + 5^\circ = 50^\circ$$

Localizamos agora a frequência  $\omega$  na resposta em fase do sistema não-compensado que corresponde a (veja a Figura 9.55(b))

$$180^\circ - \phi'_m = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

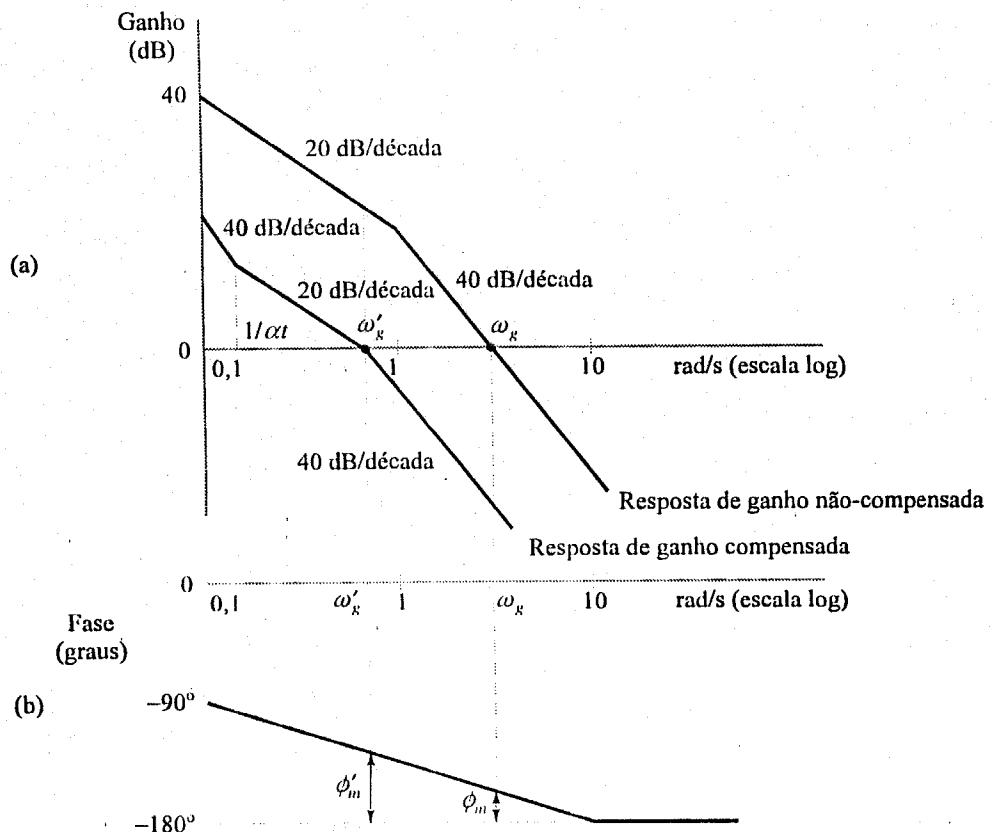


FIGURA 9.55 Diagrama de Bode: (a) Respostas de ganho de sistemas não-compensado e compensado. (b) Resposta de fase de sistema não-compensado.

A freqüência  $\omega_g' = 0,69$  rad/s assim localizada é a freqüência desejada de cruzamento de ganho.

Anteriormente, destacamos que para  $\omega \geq 10/\alpha\tau$  o compensador introduz atenuação com atraso de fase quase nulo. Portanto, podemos fazer

$$\frac{10}{\alpha\tau} = \omega_g' = 0,69 \text{ rad/s}$$

A partir da resposta de ganho do sistema não compensado, o ganho correspondente é 23 dB em  $\omega = \omega_g'$ . A atenuação introduzida pelo compensador é, portanto, 23 dB; ou seja

$$-20 \log_{10} \alpha = 23 \text{ dB}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\alpha = 0,07$$

Resolvendo para a constante de tempo  $\tau$ , obtemos

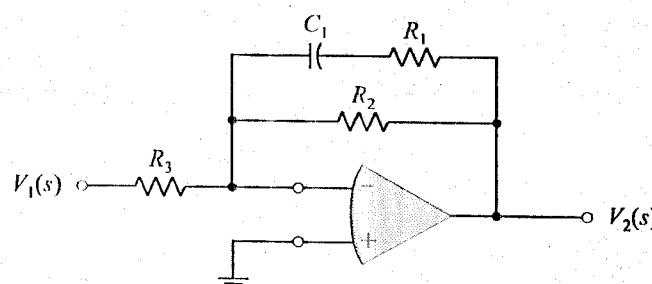
$$\tau = \frac{10}{0,69\alpha} = 208$$

O projeto agora está concluído, com o compensador definido por

$$H(s) = \frac{0,07(s + 0,069)}{s + 0,0048}$$

Para a implementação do compensador de atraso de fase com o ganho  $K$ , podemos usar o circuito com amplificador operacional mostrado na Figura 9.56. A função de transferência deste circuito é

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2}{R_3} \left( \frac{R_1 C_1 s + 1}{(R_1 + R_2) C_1 s + 1} \right)$$



**FIGURA 9.56** Circuito com amplificador operacional para implementar o compensador de atraso de fase no sistema de controle da Figura 9.54.

Portanto, podemos fazer as seguintes identificações:

$$K = \frac{R_2}{R_3}$$

$$\tau = (R_1 + R_2) C_1$$

$$\alpha\tau = R_1 C_1$$

Pegue  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ . Então, com  $K = 10$ ,  $\alpha = 0,07$  e  $\tau = 208$ , descobrimos que os elementos restantes do circuito com amplificador operacional da Figura 9.56 tem os seguintes valores:

$$R_1 = 1,46 \text{ M}\Omega$$

$$R_2 = 19,3 \text{ M}\Omega$$

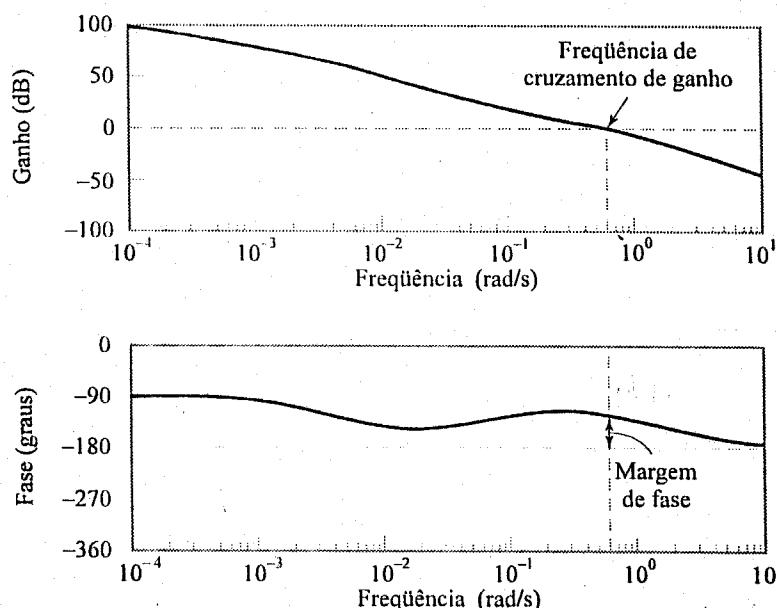
$$R_3 = 1,93 \text{ M}\Omega$$

Encerrando este exemplo, é interessante vermos quão próximo o desempenho do sistema projetado está em relação às especificações de projeto. A função de transferência de malha do sistema compensado é

$$L(s) = G(s)H(s)$$

$$= \frac{145,6s + 10}{208s^3 + 209s^2 + s}$$

As respostas de ganho e de fase reais computadas a partir desta função de transferência de malha com  $s = j\omega$  estão plotadas na Figura 9.57. Aqui, vemos que a margem de fase é  $52,86^\circ$  e que a freqüência de cruzamento de ganho é  $0,6032$  rad/s.



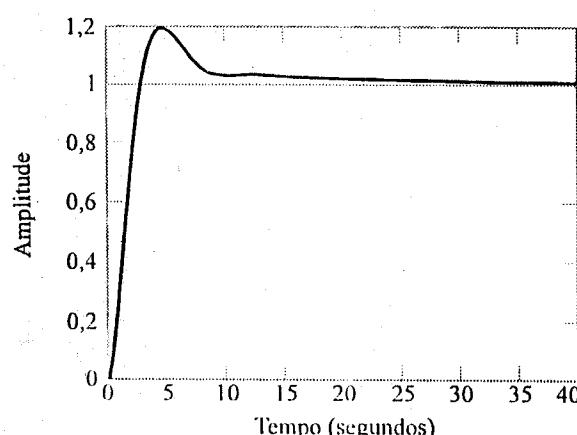
**FIGURA 9.57** Plotagens de fase e ganho reais de malha fechada do sistema realimentado compensado projetado usando-se a abordagem de domínio de freqüência.

Elas estão bastante perto dos valores correspondentes aos quais visávamos ao executar nosso projeto. A função de transferência de malha fechada do sistema é

$$T(S) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$= \frac{145,6s + 10}{208s^3 + 209s^2 + 146,6s + 10}$$

A Figura 9.58 mostra a resposta ao degrau deste sistema. O sobre-sinal percentual desta figura é de aproximadamente 20%, o qual é menor do que o valor especificado de 25%. Deste modo, podemos de fato dizer que atingimos de maneira bem-sucedida as especificações de projeto.



**FIGURA 9.58** Resposta ao degrau do sistema de controle realimentado compensado projetado usando-se a abordagem de domínio de freqüência.

**EXEMPLO 9.19** Projeto de um Compensador de Atraso de Fase Usando o Lugar das Raízes.

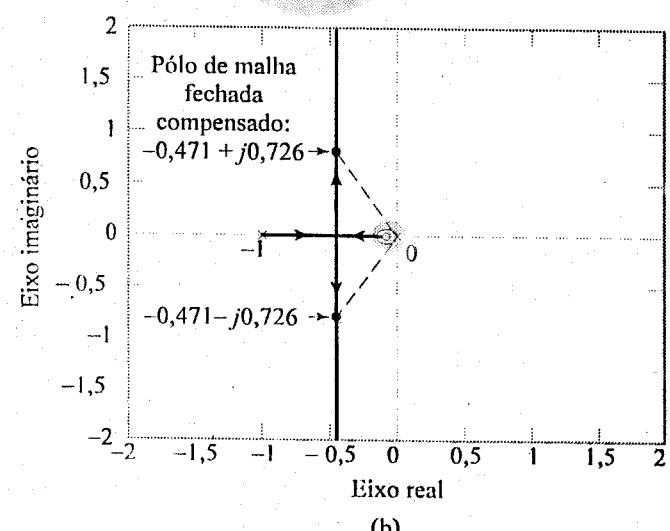
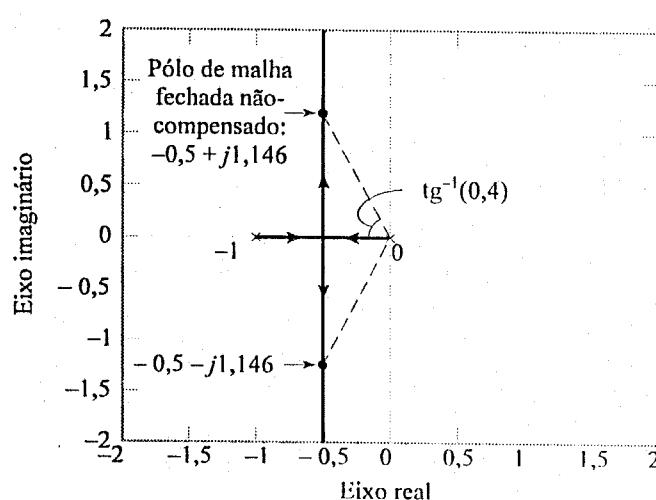
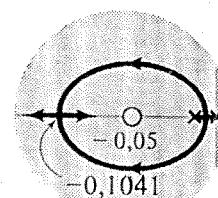
Repita o projeto do compensador de atraso de fase a fim de atender as especificações de desempenho descritas no Exemplo 9.18, mas desta vez use o método do lugar das raízes.

**Solução:** Considere primeiramente o sistema não-compensado. A função de transferência de malha do sistema é  $K/(s+1)$ . O lugar das raízes não-compensado é, portanto, como mostra a Figura 9.59(a). Para um sobre-sinal inferior a 25%, a taxa de amostramento é  $\zeta \geq 0,4$ . Para encontrar as localizações dos pólos de malha fechada no lugar das raízes correspondente a  $\zeta = 0,4$ , notamos que elas são definidas por  $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  (veja a equação 9.55). Dessa forma, com  $\zeta\omega_n = 0,5$ , segue-se que a frequência natural  $\omega_n$  é

$$\omega_n = \frac{0,5}{0,4} = 1,25$$

Os pólos de malha fechada estão, portanto, em  $-0,5 + j1,146$ , como indica a Figura 9.59(a). O valor do ganho  $K$  para o qual os pólos de malha fechada estão nestas localizações é  $K = 1,56$ . A constante de erro de velocidade para o sistema não-compensado é, portanto,

$$K_v = K = 1,56$$



**FIGURA 9.59** (a) Lugar das raízes do sistema de controle realimentado não-compensado definido pela função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

(b) Lugar das raízes do sistema de controle realimentado compensado definido pela função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K'(s+0,05)}{s(s+1)(s+0,004)}$$

A inserção sombreada apresenta detalhes do lugar das raízes na vizinhança da origem.

O erro resultante de estado estacionário para uma entrada em rampa é 0,64, o qual é muito maior do que o valor especificado de 0,1. Para atender esta especificação, precisamos, portanto, compensar o sistema. Para este propósito, podemos usar um compensador de atraso de fase. Como anteriormente, a função de transferência do compensador é

## APLICAÇÃO EM SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO

$$H(s) = \frac{\alpha(s + 1/\alpha\tau)}{s + 1/\tau}, \quad \alpha < 1$$

O fator de variação de escala  $\alpha$  é absorvido no ganho do sistema. A razão entre as localizações do zero e as localizações do polo do compensador é, portanto

$$\left| \frac{-1/\alpha\tau}{-1/\tau} \right| = \frac{1}{\alpha} = \frac{K_{v,comp}}{K_{v,não-comp}} = \frac{10}{1,56}$$

Conseqüentemente,  $\alpha = 0,156$ . Examinando o lugar das raízes não-compensado da Figura 9.59(a), vemos que uma escolha razoável para a localização do zero do compensador é

$$-\frac{1}{\alpha\tau} = -0,05$$

Com  $\alpha = 0,156$ , a localização correspondente do polo do compensador é

$$-\frac{1}{\tau} = 0,05 \times 0,156 = -0,0078$$

A função de transferência de malha do sistema compensado é, portanto,

$$L(s) = \frac{K'(s + 0,05)}{s(s + 1)(s + 0,0078)}$$

em que  $K' = \alpha K$ . Para obter um erro de estado estacionário igual a 0,1 em resposta a uma entrada de rampa, precisamos que

$$K' = \frac{10 \times 1 \times 0,0078}{0,05} = 1,56$$

Com  $K' = 1,56$ , a transformada de malha fechada do sistema é

$$T(s) = \frac{1,56s + 0,078}{s^3 + 1,0078s^2 + 1,568s + 0,078}$$

A resposta ao degrau resultante do sistema é mostrada na Figura 9.60(a). Aqui, vemos que o sobre-sinal é 30%, o qual é ligeiramente maior do que o valor especificado de 25%.

Para reduzir o sobre-sinal, manteremos o zero do compensador em  $-0,05$ , mas deslocamos o polo para mais perto da origem localizando-o em  $s = -0,004$ . Para nossa segunda tentativa na função de transferência de malha do sistema compensado temos, então

$$L(s) = \frac{K'(s + 0,05)}{s(s + 1)(s + 0,004)}$$

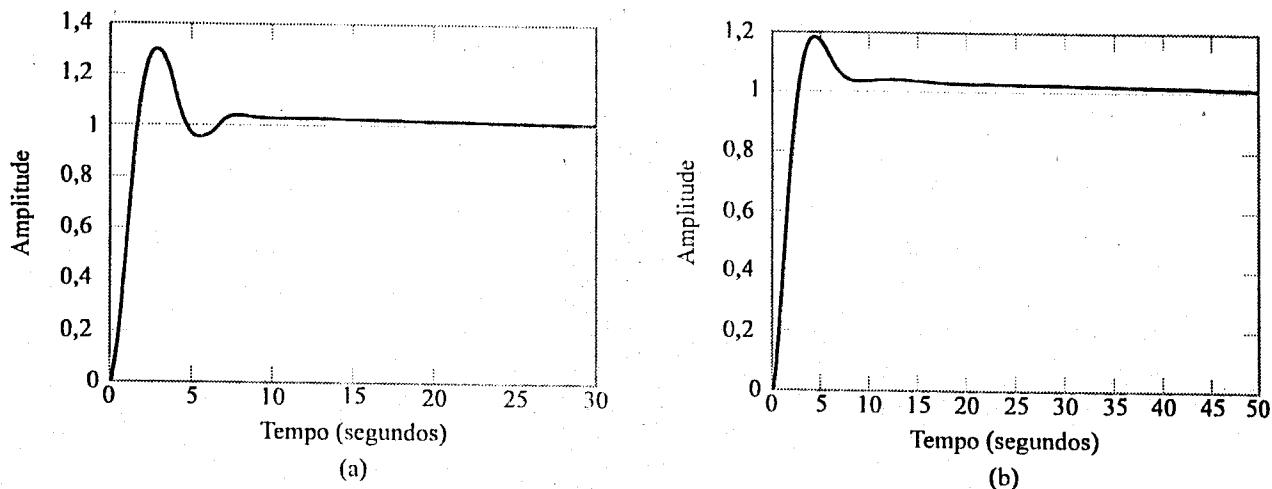
Então, prosseguindo de maneira similar ao que descrevemos em nossa primeira tentativa de compensação, podemos registrar os seguintes resultados:

- O ganho  $K' = 0,8$  para um erro de estado estacionário igual a 0,1 em resposta a uma entrada de rampa.
- A função de transferência de malha fechada é

$$T(s) = \frac{0,8s + 0,04}{s^3 + 1,004s^2 + 0,804s + 0,04}$$

- Existe um par de pólos complexos conjugados dominantes em  $s = -0,471 \pm j0,726$ , o qual, como se poderia esperar, moveu-se de suas localizações não-compensadas (veja o lugar das raízes da Figura 9.59(b)).
- A resposta ao degrau é mostrada na Figura 9.60(b), a qual exibe um sobre-sinal de aproximadamente 19%.
- O lugar das raízes tem três pontos de separação em  $s = -0,002, -0,1041, -0,4708$ .

As especificações de projeto são, dessa forma, cumpridas, usando-se um compensador de atraso de fase com um zero em  $s = -0,05$ , um polo em  $s = -0,004$  e um ganho  $K' = 0,8$ . Note que o ganho de sistema  $K$  foi aumentado do valor não-compensado de 1,56 para  $K'/\alpha = 10$ .



**FIGURA 9.60** (a) Resposta ao degrau do sistema de controle realimentado compensado definido pela função de transferência de malha fechada

$$T(s) = \frac{1,56s + 0,078}{s^3 + 1,0078s^2 + 1,568s + 0,078}$$

(b) Resposta ao degrau do segundo sistema de controle realimentado compensado definido pela função de transferência de malha fechada

$$T(s) = \frac{0,8s + 0,04}{s^3 + 1,004s^2 + 0,804s + 0,04}$$

Ambas as respostas foram obtidas usando-se a abordagem de domínio de tempo para projetar o sistema de controle.

## 9.19 Explorando Conceitos com o MATLAB

Neste capítulo, estudamos o papel da realimentação em amplificadores realimentados e em sistemas de controle. A questão da estabilidade é de suma importância no estudo dos sistemas realimentados. Especificamente, temos a função de transferência de malha (aberta) do sistema, denotada por  $L(s)$ , e a exigência é determinar a estabilidade de malha fechada do sistema. No material apresentado neste capítulo, dois métodos básicos para o estudo deste problema foram apresentados:

1. Método do lugar das raízes.
2. Critério de Nyquist da estabilidade.

A *Control System Toolbox* do MATLAB foi projetada para explorar estes dois métodos de uma maneira eficiente do ponto de vista computacional.

### ■ PÓLOS DE MALHA FECHADA DE UM SISTEMA REALIMENTADO

Digamos que a função de transferência de malha  $L(s)$  seja expressa como a razão de dois polinômios em  $s$ , como é mostrado por

$$L(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)}$$

em que  $K$  é um fator de variação de escala. A equação característica do sistema realimentado é definida por

$$1 + L(s) = 0$$

ou, de maneira equivalente,

$$Q(s) + KP(s) = 0$$

As raízes desta equação definem os pólos da função de transferência de malha fechada do sistema realimentado. Para extrair estas raízes, usamos o comando `roots` introduzido na Seção 6.8.

Este comando foi usado para computar os resultados apresentados na Tabela 9.3, detalhando as raízes da equação característica de um sistema realimentado de terceira ordem, a saber

$$s^3 + 3s^2 + 3s + K + 1 = 0$$

Para  $K = 0, 5$  e  $10$ . Por exemplo, para  $K = 10$ , temos

```
>> sys = [1, 3, 3, 11];
>> roots(sys)
ans =
-3.1544
0.0772 + 1.8658i
0.0772 - 1.8658i
```

Uma questão relacionada é a de calcular as frequências naturais e os fatores de amortecimento dos pólos da função de transferência de malha fechada do sistema ou as raízes da equação característica. Este cálculo é facilmente realizado no MATLAB usando-se o comando `damp`. Especificamente, o comando

```
[wn, z] = damp(sys)
```

retorna os vetores `wn` e `z` que contêm as freqüências naturais e os fatores de amortecimento do sistema realimentado, respectivamente.

Prosseguindo com o exemplo acima, suponhamos que queiramos calcular as freqüências naturais e os fatores de amortecimento associados aos pólos de malha fechada do sistema realimentado de terceira ordem para  $K = 10$ . Para este sistema, escrevemos e obtemos

```
>> sys = [1, 3, 3, 11];
>> damp(sys)
Eigenvalue          Damping      Freq. (rad/s)
0.0772 + 1.8658i   -0.0414      1.8674
0.0772 - 1.8658i   -0.0414      1.8674
-3.1544             1.000       3.1544
```

Os valores retornados na primeira coluna são as raízes da equação característica. O termo `Eigenvalue` é simplesmente um reflexo da maneira pela qual esta parte do cálculo é executada.

### ■ DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES

A construção do lugar das raízes de um sistema de realimentação exige que calculemos e plotemos o lugar das raízes da equação característica

$$Q(s) + KP(s) = 0$$

para  $K$  variável. Esta construção é facilmente realizada usando-se o comando do MATLAB

```
rlocus(tf(num, den))
```

em que `num` e `den` denotam os coeficientes do polinômio do numerador  $P(s)$  e o polinômio do denominador  $Q(s)$ , respectivamente, em potências decrescentes de  $s$ .

Este comando foi usado para gerar os resultados plotados nas Figuras 9.22, 9.26 e 9.28. Por exemplo, o lugar das raízes da Figura 9.28 pertence à função de transferência de malha

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{0,5K(s+2)}{s(s+12)(s-4)} \\ &= \frac{K(0,5s+1,0)}{s^3 + 8s^2 - 48s} \end{aligned}$$

O lugar das raízes é computado e plotado usando-se os comandos

```
>> num = [.5, 1];
>> den = [1, 8, -48, 0];
>> rlocus(tf(num, den))
```

► **Exercício 9.18** Use o comando `rlocus` para plotar o lugar das raízes de um sistema de realimentação que tem a seguinte função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

**Resposta:** Ponto de separação = -1. O sistema está à beira da instabilidade para  $K = 8$ , para o qual os pólos de malha fechada do sistema estão em  $s = -3$  e  $s = \pm 1,732i$ .

► **Exercício 9.19** Use o comando `rlocus` para plotar o lugar das raízes da seguinte função de transferência de malha:

$$L(s) = \frac{K'(s+0,05)}{s(s+1)(s+0,004)}$$

Então, verifique o resultado mostrado na Figura 9.59(b).

► **Exercício 9.20** Use o comando `step` para plotar a resposta transitória de malha fechada pertencente ao sistema de realimentação especificado no Exercício 9.19. Então, verifique o resultado plotado na Figura 9.60(b).

Outro comando útil é `rlocfind`, o qual encontra o valor do fator de variação de escala  $K$  necessário para obter um conjunto especificado de raízes no lugar das raízes. Para ilustrar o uso deste comando, considere novamente o lugar das raízes da Figura 9.28 e introduza os comandos.

```
>> num = [.5, 1];
>> den = [1, 8, -48, 0];
>> rlocus(tf(num, den));
>> K = rlocfind(num, den)
Select a point in the graphics window
```

Respondemos então, colocando o cursor no ponto A, representando a localização da raiz no quadrante superior esquerdo, digamos, um símbolo "+", como indica a Figura 9.61. Depois de introduzir este comando, o MATLAB responde da seguinte maneira:

```
selected point =
-1.6166 + 6.393i
K =
213.68
```

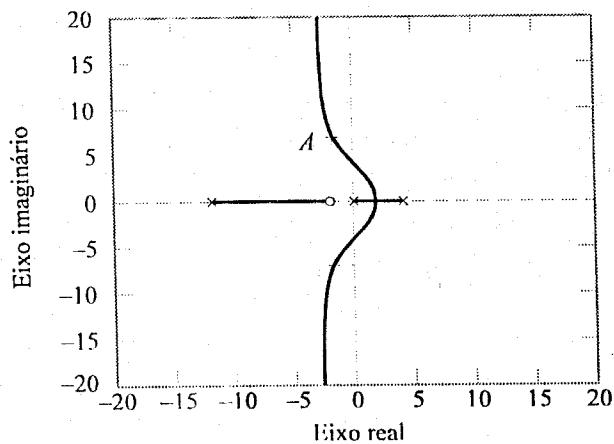


FIGURA 9.61 Diagrama do lugar das raízes ilustrando a aplicação do comando do MATLAB `rlocfind`.

### ■ MODELOS DE ORDEM REDUZIDA

Na Seção 9.14, discutimos o uso de um modelo de ordem reduzida para representar de maneira aproximada um sistema realimentado de ordem mais elevada. Há dois passos básicos para a derivação de um modelo de ordem reduzida (veja a Figura 9.29):

1. *Determinar os pólos dominantes de malha fechada do sistema.* Estes pólos são aquelas raízes da equação característica do sistema que se situam o mais próximo do eixo  $j\omega$  do plano  $s$ . As demais raízes se situam à esquerda longe do eixo  $j\omega$  e são descartadas. Podemos identificar os pólos de malha fechada dominantes usando o comando `roots`.
2. *Determinar os zeros dominantes de malha fechada do sistema.* Podemos identificar estes zeros como aqueles zeros particulares de  $L(s)$  que se situam o mais próximo do eixo  $j\omega$  do plano  $s$ , com os demais zeros se situando mais longe.

Para avaliar a qualidade da aproximação, podemos comparar a resposta ao degrau do modelo de ordem reduzida com o do sistema realimentado original. Digamos que a função de transferência de malha fechada do sistema realimentado seja denotada por

$$T(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Admitamos que `numorig` e `denorig` denotem os coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador de  $T(s)$ , respectivamente, organizados em potências decrescentes de  $s$ . Para computar a resposta ao degrau deste sistema, usamos o comando

`step(tf(numorig, denorig))`

Considere a seguir o modelo de ordem reduzida representado pela função de transferência

$$T'(s) = \frac{b'_l s^l + b'_{l-1} s^{l-1} + \dots + b'_1 s + b'_0}{a'_r s^r + a'_{r-1} s^{r-1} + \dots + a'_1 s + a'_0}$$

em que  $l < m$  e  $r < n$ . Para que as duas respostas ao degrau tenham o mesmo valor em  $t = \infty$ , precisamos que

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b'_0}{a'_0}$$

Fazemos com que `numapp` e `denapp` denotem os polinômios do numerador e do denominador da função de ordem reduzida  $T'(s)$ , respectivamente. Para computar a resposta ao degrau do modelo de ordem reduzida, re aplicamos o comando do MATLAB acima, como é mostrado aqui:

`step(tf(numapp, denapp))`

Para o sistema de realimentação considerado no Exemplo 9.12, temos

$$T(s) = \frac{48}{s^3 + 6s^2 + 11s + 54}$$

e

$$T'(s) = \frac{8,3832}{s^2 + 0,2740s + 9,4308}$$

Conseqüentemente, podemos escrever

```
>> numorig = [48];
>> denorig = [1, 6, 11, 54];
>> numapp = [8.3832];
>> denapp = [1, 0.2740, 9.4308];
>> step(tf(numorig, denorig))
>> hold
>> step(tf(numapp, denapp))
```

Os resultados desta computação são mostrados na Figura 9.31.

### ■ \*CRITÉRIO DE NYQUIST DA ESTABILIDADE

A construção do diagrama de Nyquist envolve fazermos uma plotagem polar da resposta em freqüência da malha  $L(j\omega)$ , a qual é obtida a partir da função de transferência de malha  $L(s)$  fazendo  $s = j\omega$ . A freqüência  $\omega$  é variada ao longo de  $-\infty < \omega < \infty$ . Para prosseguirmos com a construção, expressamos primeiro  $L(j\omega)$  como a razão de dois polinômios em potências decrescentes de  $j\omega$ , como é mostrado por

$$L(j\omega) = \frac{p'_m(j\omega)^m + p'_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + p'_1(j\omega) + p'_0}{q_n(j\omega)^n + q_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + q_1(j\omega) + q_0}$$

em que  $p'_i = Kp_i$  para  $i = m, m-1, \dots, 1, 0$ . Façamos com que `num` e `den` denotem os coeficientes do numerador e do denominador de  $L(j\omega)$ , respectivamente. Podemos então construir o diagrama de Nyquist usando o comando do MATLAB

`nyquist(tf(num, den))`

Os resultados exibidos na Figura 9.37 correspondentes ao Exemplo 9.13 foram obtidos usando-se este comando do MATLAB. Para aquele exemplo, temos

$$L(j\omega) = \frac{36}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 6}$$

Para computar o diagrama de Nyquist, escrevemos, portanto,

```
>> num = [36];
>> den = [1, 6, 11, 6];
>> nyquist(tf(num, den))
```

► **EXERCÍCIO 9.21** Usando o comando `nyquist`, plote o diagrama de Nyquist correspondente ao sistema de realimentação definido por

$$L(j\omega) = \frac{6}{(1+j\omega)^3}$$

Então, determine se o sistema é estável ou não.

**Resposta:** O sistema é estável. ◀

### ■ DIAGRAMA DE BODE

O diagrama de Bode de um sistema de realimentação linear consiste em dois gráficos. Num gráfico, a resposta do ganho de malha  $20 \log_{10}|L(j\omega)|$  é plotada contra o logaritmo de  $\omega$ . No outro gráfico, a resposta de fase de malha  $\arg\{L(j\omega)\}$  é plotada contra o logaritmo de  $\omega$ . Com a resposta em freqüência de malha dada, expressa na forma

$$L(j\omega) = \frac{p'_m(j\omega)^m + p'_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + p'_1(j\omega) + p'_0}{q_n(j\omega)^n + q_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + q_1(j\omega) + q_0}$$

fazemos primeiramente com que os vetores `num` e `den` representem os coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador de  $L(j\omega)$ , respectivamente. O diagrama de Bode para  $L(j\omega)$  poderá então ser facilmente construído usando-se o comando do MATLAB

`margin(tf(num, den))`

Este comando calcula a margem de ganho, a margem de fase e as freqüências de cruzamento associadas a partir dos dados da resposta em freqüência. O resultado também inclui plotagens tanto das respostas do ganho de malha como da fase.

O comando acima foi usado para computar os resultados apresentados na Figura 9.42 correspondentes ao Exemplo 9.14. Para esse exemplo, temos

$$L(j\omega) = \frac{36}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 6}$$

Os comandos para computar o diagrama de Bode, incluindo as margens de estabilidade, são os seguintes:

```
>> num = [36];
>> den = [1, 6, 11, 6];
>> margin(tf(num, den))
```

- **EXERCÍCIO 9.22** Compute o diagrama de Bode, as margens de estabilidade e as freqüências de cruzamento associadas para a resposta em freqüência de malha

$$L(j\omega) = \frac{6}{(1+j\omega)^3}$$

*Resposta:*

Margem de ganho = 2,499 dB

Margem de fase = 10.17°

Freqüência de cruzamento de fase = 1,7321

Freqüência de cruzamento de ganho = 1,5172

## 9.20 Resumo

Neste capítulo, discutimos o conceito de realimentação (*feedback*), o qual é de fundamental importância para o estudo dos amplificadores e sistemas de controle realimentado. A aplicação de realimentação tem efeitos benéficos:

- Reduz a sensibilidade do ganho de malha fechada do sistema com respeito a variações no ganho de uma planta dentro da malha.
- Reduz o efeito de uma perturbação gerada dentro da malha.
- Reduz a distorção não linear devida a planta se afastar de um comportamento linear.

De fato, estes benefícios crescem à medida que a quantidade de realimentação, medida pela diferença de retorno, é aumentada.

Porém, a realimentação é como uma espada de duas lâminas que pode tornar-se danosa se for usada de maneira imprópria. Em especial, é possível que um sistema realimentado se torne instável, a menos que cuidados especiais sejam tomados. A estabilidade se destaca de maneira proeminente no estudo de sistemas realimentados. Há dois métodos fundamentalmente diferentes para avaliar a estabilidade de sistemas realimentados lineares:

1. Lugar das raízes, que é um método do domínio das transformadas, está relacionado com a resposta transitória do sistema de malha fechada.
2. Critério de Nyquist da estabilidade, que é um método do domínio de freqüência, está relacionado à resposta em freqüência com malha aberta do sistema.

De uma perspectiva da engenharia, não basta assegurar que um sistema realimentado seja estável. Ao contrário, o projeto do sistema deve incluir uma margem adequada de estabilidade para proteger-se de variações de parâmetro devidas a fatores externos. A técnica do lugar das raízes e do critério de Nyquist da estabilidade atendem esta exigência, cada uma a seu modo.

O critério de Nyquist da estabilidade pode, ele próprio, ser usado através de uma de duas formas:

- Diagrama (lugar) de Nyquist. Nesta forma, a resposta em freqüência com malha fechada é plotada na forma polar, com a atenção se concentrando em se o ponto crítico (-1, 0) é circundado ou não.
- Diagrama de Bode. Neste segundo método, a resposta em freqüência de malha aberta do sistema aparece como uma combinação de dois grafos. Um gráfico plota a resposta de ganho de malha e o outro plota a resposta de fase de malha. Num sistema incondicionalmente estável, descobriríamos que a freqüência de cruzamento de ganho é menor do que a freqüência de cruzamento de fase.

## LEITURA ADICIONAL

1. Em um contexto da engenharia, parece que o termo “realimentação” (*feedback*) foi usado pela primeira vez em 1920 pelo pessoal dos Bell Telephone Laboratories, nos Estados Unidos da América. Foram notáveis entre eles:
  - Harold S. Black (1898–1981), que inventou o amplificador de realimentação negativa.
  - Harry Nyquist (1889–1976), que formulou o critério de Nyquist.
  - Hendrick W. Bode (1905–1982), que idealizou o diagrama de Bode.
 Para obter uma breve história dos sistemas de controle, leia
  - Dorf, R. C. e R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, sétima edição (Addison-Wesley, 1995)
  - Phillips, C. L. e R. D. Harbor, *Feedback Control Systems*, terceira edição (Prentice Hall, 1996)
2. Para um tratamento completo dos sistemas de controle automáticos, veja os livros:
  - Belanger, P. R., *Control Engineering: A Modern Approach* (Saunders, 1995)
  - Dorf, R. C. e R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, sétima edição (Addison-Wesley, 1995)
  - Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, sétima edição (Prentice Hall, 1995)
  - Palm, W. J. III, *Control Systems Engineering* (Wiley, 1986)
  - Phillips, C. L. e R. D. Harbor, *Realimentação Control Systems*, terceira edição (Prentice Hall, 1996)
 Estes livros cobrem tanto os aspectos de tempo contínuo como de tempo discreto dos sistemas de controle. Eles também apresentam procedimentos detalhados de projeto de sistemas.
3. Os amplificadores realimentados são discutidos nos livros:
  - Siebert, W. McC., *Circuits, Signals, and Systems* (MIT Press, 1986)
  - Waldhauer, F. D., *Feedback* (Wiley, 1982)
4. Para uma discussão dos amplificadores operacionais e suas aplicações, veja os livros:
  - Kennedy, E. J., *Operational Amplifier Circuits* (Holt, Rinehart e Winston, 1988)
  - Wait, J. V., L. P. Huelsman e G. A. Korn, *Introduction to Operational Amplifier Theory and Applications*, segunda edição (McGraw-Hill, 1992)
5. Para obter uma prova da Propriedade 5, incorporando as equações (9.82) e (9.83), veja:
  - Truxal, J. G., *Control System Synthesis* (McGraw-Hill, 1955), pp. 227–228.
6. Para uma discussão das questões práticas envolvidas na operação dos conversores D/A, veja o artigo:
  - Hendricks, P. “Specifying communication DACs,” *IEEE Spectrum*, vol. 34, pp. 58–69, julho de 1997.

## PROBLEMAS

- 9.1** Um amplificador transistorizado tem um ganho de 2500. É aplicada realimentação ao amplificador usando-se uma rede passiva que retorna uma fração da saída do amplificador à entrada, a saber,  $\beta = 0,01$ .
- (a) Calcule o ganho de malha aberta do amplificador realimentado.
  - (b) O ganho do amplificador realimentado muda em 10% devido a fatores externos. Calcule a variação correspondente no ganho de malha fechada do amplificador realimentado.
- 9.2** A Figura P9.2 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle de posição. O pré-amplificador tem um ganho  $G_a$ . O ganho da combinação do motor e a carga (isto é, a planta) é  $G_p$ . O sensor no caminho da realimentação retorna uma fração  $H$  da saída do motor para a entrada do sistema.
- (a) determine o ganho de malha fechada  $T$  do sistema realimentado.
  - (b) Determine a sensibilidade de  $T$  com respeito às variações em  $G_p$ .

- (c) Supondo que  $H = 1$  e, nominalmente,  $G_p = 1,5$ , qual é o valor de  $G_a$  que tornaria a sensibilidade de  $T$  em relação às variações em  $G_p$  igual a 1%?

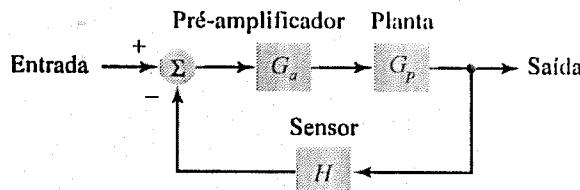


FIGURA P9.2

- 9.3 A figura P9.3 mostra o diagrama de blocos simplificado de um sistema de rastreamento por radar. O radar é representado por  $K_v$ , denotando certo ganho;  $\theta_{\text{ent}}$  e  $\theta_{\text{safda}}$  denotam as posições angulares do alvo (que está sendo rastreado) e a antena de radar, respectivamente. O controlador tem ganho  $G_c$ , e a planta (composta de motor, engrenagens e pedestal de antena) é representado por  $G_p$ . Para melhorar o desempenho, é aplicada à planta uma realimentação “local” por meio do sensor  $H$ . Além disso, o sistema usa realimentação unitária, como indica a Figura P9.3. O propósito do sistema é movimentar a antena a fim de rastrear o alvo com suficiente exatidão. Determine a o ganho de malha fechada do sistema.

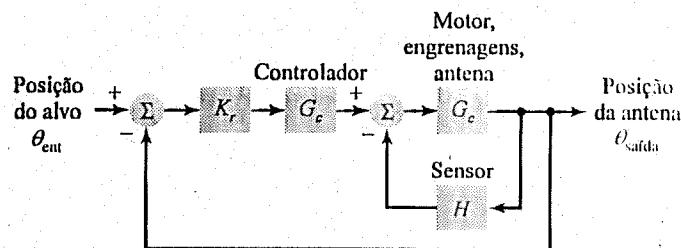


FIGURA P9.3

- 9.4 A Figura P9.4 mostra o diagrama de circuito de um circuito com amplificador operacional inversor. O amplificador operacional é modelado como tendo impedância de entrada infinita, impedância de saída nula e ganho de tensão infinito. Avalie a função de transferência deste circuito, ou seja,  $V_2(s)/V_1(s)$ .

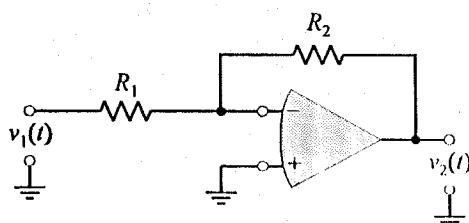


FIGURA P9.4

- 9.5 A Figura P9.5 mostra um diferenciador prático que usa um amplificador operacional. Suponhamos que o amplificador operacional seja ideal, tendo impedância de entrada infinita, impedância de saída nula e ganho infinito.

- (a) Determine a função de transferência deste circuito.  
 (b) Qual é a faixa de freqüências para as quais este circuito age como um diferenciador ideal?

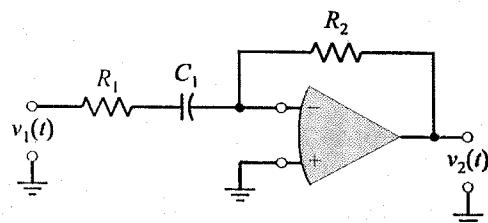


FIGURA P9.5

- \*9.6 A Figura P9.6 mostra o diagrama de blocos linearizado de uma malha *phase-locked*.

- (a) Mostre que o ganho de malha fechada do sistema é

$$\frac{V(s)}{\phi_1(s)} = \frac{(s/K_v)L(s)}{1+L(s)}$$

em que  $K_v$  é uma constante. A função de transferência de malha  $L(s)$  é, ela própria, definida por

$$L(s) = K_0 \frac{H(s)}{s}$$

em que  $K_0$  é um fator de ganho e  $H(s)$  é a função de transferência do filtro de malha.

- (b) Especifique a condição para a qual a malha *phase locked* age como um diferenciador ideal. Sob esta condição, defina a tensão de saída  $v(t)$  em termos do ângulo de fase  $\phi_1(t)$  que age como entrada.

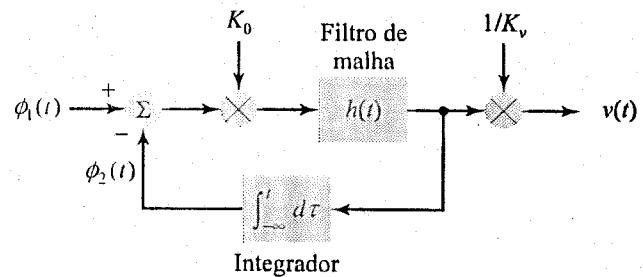


FIGURA P9.6

- 9.7 A Figura P9.7 mostra um sistema de controle com realimentação unitária. Determine o erro de estado estacionário do sistema para (i) entrada de degrau unitária, (ii) entrada de rampa unitária e (iii) entrada parabólica unitária. Faça estes cálculos para cada um dos seguintes casos:

$$(a) G(s) = \frac{15}{(s+1)(s+3)}$$

$$(b) G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+4)}$$

(c)  $G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+3)}$

(d)  $G(s) = \frac{5(s+1)(s+2)}{s^2(s+3)}$

Você pode supor que, em cada caso, a função de transferência de malha fechada do sistema é estável.

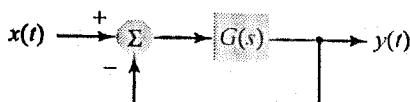


FIGURA P9.7

- 9.8 Usando o critério de Routh-Hurwitz, demonstre a estabilidade da função de transferência de malha fechada do sistema de controle da Figura P9.7 para todos os quatro casos especificados no Problema 9.7.

- 9.9 Use o critério de Routh-Hurwitz para determinar o número de raízes no semiplano esquerdo, no eixo imaginário e no semiplano direito do plano  $s$  para cada uma das seguintes equações características:

(a)  $s^4 + 2s^2 + 1 = 0$

(b)  $s^4 + s^3 + s + 0,5 = 0$

(c)  $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 4 = 0$

- 9.10 Usando o critério de Routh-Hurwitz, encontre a faixa do parâmetro  $K$  para o qual a equação característica representa um sistema estável:

$$s^3 + s^2 + s + K = 0$$

- 9.11 (a) A equação característica de um sistema realimentado de terceira ordem é definido, em geral, por

$$A(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, determine as condições que os coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  devem satisfazer para que o sistema seja estável.

- (b) Veja novamente Problema 9.10 levando em conta o resultado obtida na parte (a).

- 9.12 A função de transferência de malha de um sistema de controle realimentado é definida por

$$L(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 2)}, \quad K > 0$$

O sistema usa realimentação unitária.

- (a) Esboce o lugar das raízes do sistema para  $K$  variável.  
 (b) Qual é o valor de  $K$  para o qual o sistema está à beira da instabilidade?

- 9.13 O diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado que usa um controlador proporcional (*P*) é mostrado na Figura P9.13. Esta forma de compensação é usada quando é obtido um desempenho

satisfatório simplesmente definindo-se a constante  $K_p$ . Para a planta especificada na Figura P9.13, determine o valor de  $K_p$  necessário para se obter uma frequência natural  $\omega_n = 2$  natural (não amortecida). Quais são os valores correspondentes de (a) do fator de amortecimento e (b) da constante de tempo do sistema?

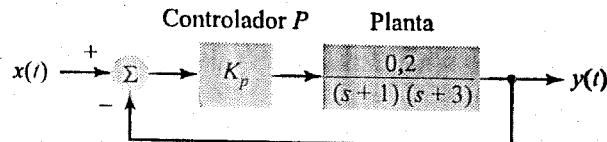


FIGURA P9.13

- 9.14 A Figura P9.14 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado que usa um controlador *proporcional integral (PI)*. Esta forma de controlador, caracterizada pelos parâmetros  $K_p$  e  $K_I$ , é usada para melhorar o erro de estado estacionário do sistema aumentando o tipo de sistema em 1. Sabese que  $K_I/K_p = 0,1$ . Plote o lugar das raízes do sistema para  $K_p$  variável. Então, encontre o valor de  $K_p$  necessário para colocar um polo da função de transferência de malha fechada do sistema em  $s = -5$ . Qual é o erro de estado estacionário do sistema para uma entrada de rampa unitária?

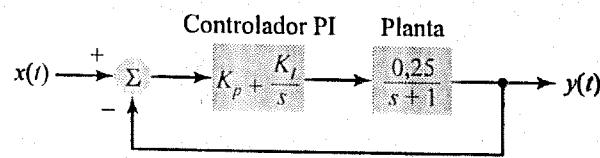


FIGURA P9.14

- 9.15 A Figura P9.15 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado que usa um controlador *proporcional derivativo (PD)*. Esta forma de compensação, caracterizada pelos parâmetros  $K_p$  e  $K_D$ , é usada para melhorar a resposta transitória do sistema. Sabese que  $K_D/K_p = 4$ . Plote o lugar das raízes do sistema para  $K_D$  variável. Então, determine o valor de  $K_D$  necessário para colocar um par de pólos da função de transferência de malha fechada do sistema em  $s = -2 \pm j2$ .

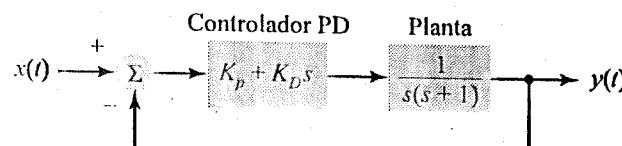


FIGURA P9.15

- \*9.16 Em relação aos controladores PI e PD dos Problemas 9.14 e 9.15, podemos fazer as seguintes afirmações no contexto de suas respostas em freqüência:

- (a) O controlador PI tem *atraso de fase*, em termos de que acrescenta uma contribuição negativa ao critério angular do lugar das raízes.

- (b) O controlador PD tem *avanço de fase*, em termos de que acrescenta uma contribuição positiva ao critério angular do lugar das raízes.
- 9.17** A Figura P9.17 mostra o diagrama de blocos de um sistema que usa um compensador popular conhecido como *controlador proporcional integral derivativo (PID)*. Os parâmetros  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_D$  do controlador são escolhidos para introduzir um par de zeros complexos conjugados em  $s = -1 \pm j/2$  na função de transferência de malha do sistema. Pinte o lugar das raízes do sistema para  $K_D$  crescente. Então, determine a faixa de valores de  $K_D$  para que o sistema permaneça estável.

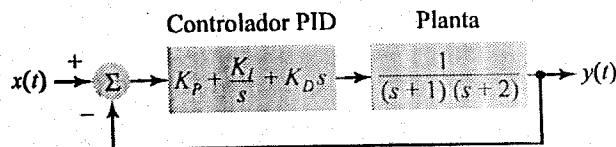


FIGURA P9.17

- \*9.18** A Figura P9.18 mostra um *pêndulo invertido* que se move num plano vertical sobre um veículo. O próprio veículo move-se ao longo de um eixo horizontal sob a influência de uma força. A força é aplicada para manter o pêndulo na vertical. A função de transferência do pêndulo invertido sobre o veículo, visto como planta, é dada por

$$G(s) = \frac{(s+3,1)(s-3,1)}{s^2(s+4,4)(s-4,4)}$$

Supondo o uso de um controlador proporcional de uma maneira similar à descrita no Problema 9.13, o uso desse controlador é suficiente para estabilizar o sistema? Justifique sua resposta. Como você estabilizaria o sistema?

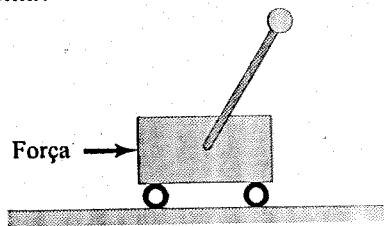


FIGURA P9.18

- 9.19** Considere um sistema de controle com realimentação unitária, cuja função de transferência de malha seja dada por

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Pinte a resposta transitória de malha fechada do sistema para os seguintes valores do fator de ganho:

- $K = 0,1$
- $K = 0,25$
- $K = 2,5$

- 9.20** A Figura 9.20 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado do tipo 1. Determine a taxa de amortecimento, a freqüência natural, a freqüência amortecida e a constante de tempo deste sistema para  $K = 20$ .

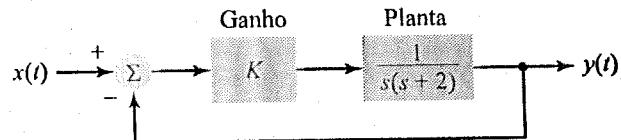


FIGURA P9.20

- \*9.21** Considere um amplificador realimentado de dois estágios, para o qual a função de transferência de malha é

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)^2}$$

Usando o critério de Nyquist, mostre que este sistema é estável para todo  $K > 0$ .

- \*9.22** Considere um amplificador realimentado de três estágios para o qual a função de transferência de malha é

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)^2(s+5)}$$

- Usando o critério de Nyquist, investigue a estabilidade deste sistema para  $K$  variável.
- Encontre o valor do fator de variação de escala  $K$  necessário para uma margem de ganho de 5 dB.
- Para o valor de  $K$  encontrado na parte (b), qual é a margem de fase?

- \*9.23** A função de transferência de malha de um sistema de controle com realimentação unitária do tipo 1 é definida por

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Usando o critério de Nyquist, investigue a estabilidade deste sistema para  $K$  variável. Então, mostre que o sistema é estável para  $K > 0$ .

- \*9.24** Um sistema de controle com realimentação unitária do tipo 2 tem a função de transferência

$$L(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}$$

Usando o critério de Nyquist, mostre que o sistema é instável para todos os ganhos  $K > 0$ . Verifique também sua resposta usando o critério de Routh-Hurwitz.

- \*9.25** A função de transferência de malha de um sistema com realimentação unitária do tipo 1 é definida por

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

- (a) Usando o critério de Nyquist da estabilidade, mostre que o sistema é estável para  $0 < K < 6$ . Verifique também sua resposta usando o critério de Routh-Hurwitz.
- (b) Para  $K = 2$ , determine a margem de ganho em decibéis e a margem de fase em graus.
- (c) Uma margem de fase de  $20^\circ$  é exigida. Qual é o valor de  $K$  para que se cumpra esta exigência? Qual é o valor correspondente da margem de ganho?
- \*9.26 A Figura 9.43 ilustra as definições de margem de ganho e de margem de fase usando o diagrama de Bode. Ilustre as definições destas duas medidas da estabilidade relativa usando o diagrama de Nyquist.

- 9.27 (a) Construa o diagrama de Bode correspondente à resposta em frequência de malha

$$L(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

para  $K = 7, 8, 9, 10$  e  $11$ . Então, mostre que o amplificador realimentado de três estágios caracterizado por esta resposta em frequência de malha é estável para  $K = 7, 8$  e  $9$ ; à beira da instabilidade para  $K = 10$ ; e instável para  $K = 11$ .

- (b) Calcule as margens de ganho e de fase do amplificador realimentado para  $K = 7, 8$  e  $9$ .

- 9.28 Neste problema, visitamos novamente o Exemplo 9.12, que envolve a aproximação de um amplificador realimentado de terceira ordem com um modelo de segunda ordem. Naquele exemplo, usamos a resposta ao degrau como base para avaliar a qualidade da aproximação. Neste problema, usamos o diagrama de Bode como base para avaliar a qualidade da aproximação. Especificamente, plote o diagrama de Bode para o modelo de segunda ordem

$$T'(s) = \frac{8,3832}{s^2 + 0,2740s + 9,4308}$$

e compare-o com o diagrama de Bode correspondente ao sistema original

$$T(s) = \frac{48}{s^3 + 6s^2 + 11s + 54}$$

Comente seus resultados.

- 9.29 Esboce o diagrama de Bode para cada uma das seguintes funções de transferência de malha:

$$(a) L(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)}$$

$$(b) L(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$(c) L(s) = \frac{5}{(s+1)^3}$$

$$(d) L(s) = \frac{10(s+0,5)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

- 9.30 Investigue o desempenho da estabilidade do sistema descrito no Exemplo 9.10 para um ganho  $K$  variável. Desta vez, entretanto, use o diagrama de Bode para fazer a investigação.

- \*9.31 Considere o sistema de dados amostrados mostrado na Figura P9.31. Expresse a transformada  $z$  da saída amostrada  $y(t)$  como uma função da transformada  $z$  da entrada amostrada  $x(t)$

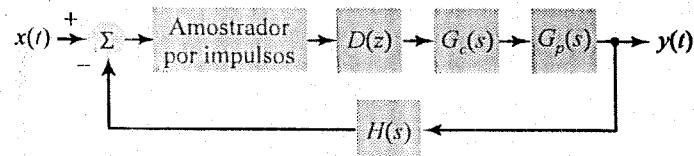


FIGURA P9.31

- \*9.32 A Figura P9.32 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle de um satélite que usa controle digital. A função de transferência do controlador digital é definida por

$$D(z) = K \left( 1,5 + \frac{z-1}{z} \right)$$

Encontre a função de transferência de malha fechada do sistema supondo o período de amostragem  $T=0,1$  s.

- \*9.33 A Figura P9.33 mostra o diagrama de blocos de um sistema de dados amostrados.

- (a) Determine a função de transferência de malha fechada do sistema correspondente a um período de amostragem  $T=0,1$  s.

- (b) Repita o problema para  $T=0,05$  s.

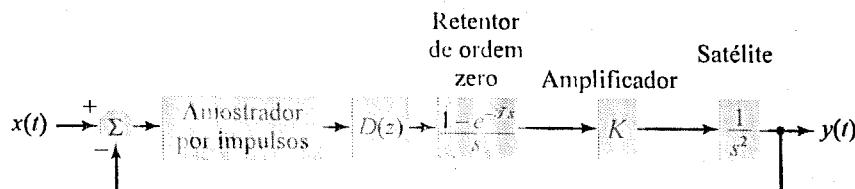


FIGURA P9.32

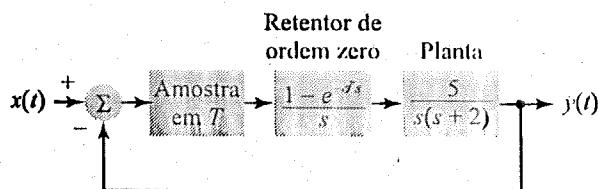


FIGURA P9.33

- 9.34** Nos procedimentos de projeto apresentados neste capítulo, discutimos somente o uso de estruturas de controle com 1 grau de liberdade. A Figura P9.34 apresenta duas estruturas de controle alternativas com 2 graus de liberdade. Compare os benefícios dos dois esquemas de compensação com alimentação direta (*feed-forward*) mostrados na Figura P9.34 nos contextos de (a) redução de ruído e (b) colocação de pólos e zeros.

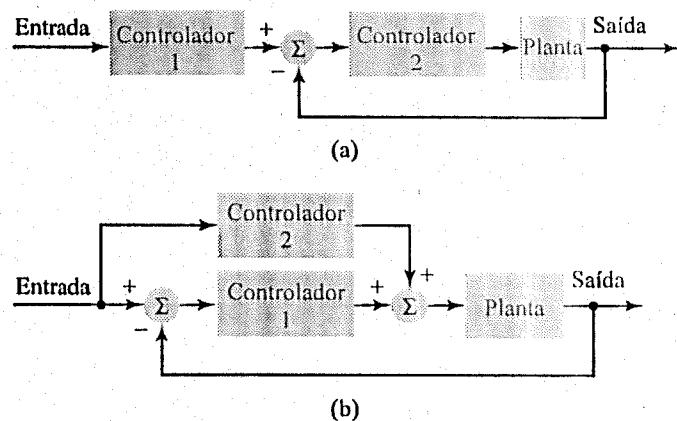


FIGURA P9.34

### ► Experiências no Computador

- 9.35** Prosseguindo com os sistemas realimentados de terceira ordem estudados no Exercício 9.18, use o comando do MATLAB `rlocfind` para determinar o valor do fator de variação de escala  $K$  na função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

que satisfaça a seguinte exigência: Os pólos de malha fechada complexos conjugados do sistema realimentado têm um fator de amortecimento igual a 0,5. Qual é o valor correspondente da frequência natural?

- 9.36** No Problema 9.12, consideramos um sistema com realimentação unitária que tem a função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 2)}$$

Use os seguintes comandos do MATLAB para avaliar o desempenho da estabilidade do sistema:

- `rlocus` para construir o diagrama do lugar das raízes do sistema.
- `rlocfind` para determinar o valor de  $K$  para o qual os pólos de malha fechada complexos conjugados do sistema têm um fator de amortecimento de aproximadamente 0,707.
- `margin` para avaliar as margens de ganho e de fase do sistema para  $K = 1,5$ .

- 9.37** A função de transferência de malha de um sistema realimentado é definida por

$$L(s) = \frac{K(s-1)}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

Esta função de transferência inclui um componente passa-todas representado por  $(s-1)/(s+1)$ , o qual recebe este nome porque deixa passar todas as frequências sem nenhuma distorção de amplitude.

- Use o comando do MATLAB `rlocus` para construir o lugar das raízes do sistema. Em seguida, use o comando `rlocfind` para determinar o valor de  $K$  para o qual o sistema está à beira da instabilidade. Verifique o valor assim obtido usando o critério de Routh-Hurwitz.
- Use o comando `nyquist` para plotar o diagrama de Nyquist do sistema para  $K = 0,8$ ; então, confirme que o sistema é estável.
- Para  $K = 0,8$ , use o comando `margin` para avaliar as margens de estabilidade do sistema.

- 9.38** A função de transferência de malha de um sistema realimentado é definida por

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 2s - 8}$$

Este sistema é estável somente quando  $K$  se situa dentro de uma certa faixa  $K_{\min} < K < K_{\max}$ .

- Use o comando do MATLAB `rlocus` para plotar o lugar das raízes do sistema.
- Encontre os limites críticos de estabilidade,  $K_{\min}$  e  $K_{\max}$ , usando o comando `rlocfind`.
- Para um  $K$  que se encontra a meio caminho entre  $K_{\min}$  e  $K_{\max}$ , determine as margens de estabilidade do sistema usando o comando `margin`.
- Para o valor de  $K$  usado na parte (c), confirme a estabilidade do sistema usando o comando `nyquist` para plotar o diagrama de Nyquist.

- 9.39** Neste problema, estudamos o projeto de um sistema de controle com realimentação unitária usando um *compensador de avanço de fase* para melhorar a resposta transitória do sistema. A função de transferência deste compensador é definida por

$$G_c(s) = \frac{\alpha\tau s + 1}{\tau s + 1}, \quad \alpha > 1$$

Ele é denominado compensador de avanço de fase porque introduz um avanço de fase na resposta em freqüência de malha do sistema. A função de transferência de malha do sistema não compensado é definida por

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

O compensador de avanço é conectado em cascata com o sistema de malha aberta, resultando na função de transferência de malha modificada

$$L_c(s) = G_c(s)L(s)$$

- (a) Para  $K = 1$ , determine a taxa de amortecimento e a freqüência natural dos pólos de malha fechada do sistema não compensado.
  - (b) Considere em seguida o sistema compensado. Suponhamos que as especificações de transitórios exijam que tenhamos pólos de malha fechada com uma taxa de amortecimento  $\zeta = 0,5$  e uma freqüência natural  $\omega_n = 2$ . Supondo que  $\alpha = 10$ , mostre que o critério angular (pertencente à construção do lugar das raízes) é satisfeito escolhendo-se a constante de tempo  $\tau = 0,027$  para o compensador de avanço.
  - (c) Use o comando do MATLAB rlocfind para confirmar se o uso de um compensador de avanço de fase com  $\alpha = 10$  e  $\tau = 0,027$  satisfaz, de fato, as especificações de resposta transitória desejadas.
- 9.40** Considere o sistema de controle com realimentação unitária que usa a conexão em cascata de uma planta e um compensador de atraso de fase, como mostra a Figura 9.54. A função de transferência da planta é

$$G(s) = \frac{10}{s(0,2s+1)}$$

A função de transferência do compensador é definida por

$$H(s) = K \left( \frac{\alpha\tau s + 1}{\tau s + 1} \right), \quad \alpha < 1$$

O compensador deve ser projetado para satisfazer as seguintes exigências:

- (a) O erro de estado estacionário de uma entrada de rampa de inclinação unitária deve ser 0,1.
- (b) O sobre-sinal da resposta ao degrau não deve ultrapassar 10%.
- (c) O tempo de acomodação de 5% da resposta ao degrau deve ser inferior a 2 s.

Execute este projeto usando (a) a abordagem de domínio de freqüência baseada no diagrama de Bode, e (b) a abordagem de domínio de tempo usando o método do lugar das raízes. Depois de projetar a rede de compensação usando qualquer uma das abordagens, construa um circuito com amplificador operacional para sua implementação.

- 9.41** Ao longo deste capítulo, tratamos o fator de escala ajustável  $K$  na função de transferência de malha

$$L(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)}$$

como um número positivo. Neste último problema, usamos o MATLAB para explorar sistemas realimentados para os quais  $K$  é negativo.

- (a) Use o comando rlocus para plotar o lugar das raízes da função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K(s-1)}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

em que  $K$  é negativo. Então, usando o comando rlocfind, mostre que este sistema realimentado está à beira da instabilidade para  $K = -1,0$ . Verifique este resultado usando o critério de Routh-Hurwitz.

- (b) Use o comando rlocus para mostrar que um sistema realimentado com função de transferência de malha

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 2s - 8}$$

é instável para todo  $K < 0$ .

# 10

## EPÍLOGO



Neste livro, apresentamos um tratamento introdutório dos sinais e sistema. No que diz respeito aos sinais, demos uma ênfase especial à análise de Fourier como método para sua representação. A teoria de Fourier é uma parte essencial do *kit* de ferramentas do profissional de processamento de sinais. Basicamente, ela possibilita transformarmos um sinal descrito no domínio de tempo para uma representação equivalente no domínio de freqüência, sujeita a certas condições impostas ao sinal. O mais importante é que a transformação é de um para um, em termos de que não há perda de informação à medida que passamos e voltamos de um domínio para outro. Em relação à análise de sistemas, restringimos nossa atenção principalmente a uma classe especial de sistemas que satisfaz duas propriedades distintas: linearidade e invariância no tempo. A motivação para invocarmos estas duas propriedades é tornar a análise de sistemas matematicamente tratável.

O propósito deste capítulo final do livro é colocar estas ferramentas numa perspectiva apropriada em relação às realidades físicas dos sinais e sistemas conforme eles são encontrados em situações da vida real. Para clarificar estas questões, discutiremos brevemente outras ferramentas que superam as limitações da análise de Fourier e dos sistemas lineares invariantes no tempo. Ao fazermos isto, damos ao leitor um quadro amplo do *kit* de ferramentas disponíveis aos analistas/projetistas de sinais e sistemas.

### 10.1 Propriedades Físicas de Sinais da Vida Real

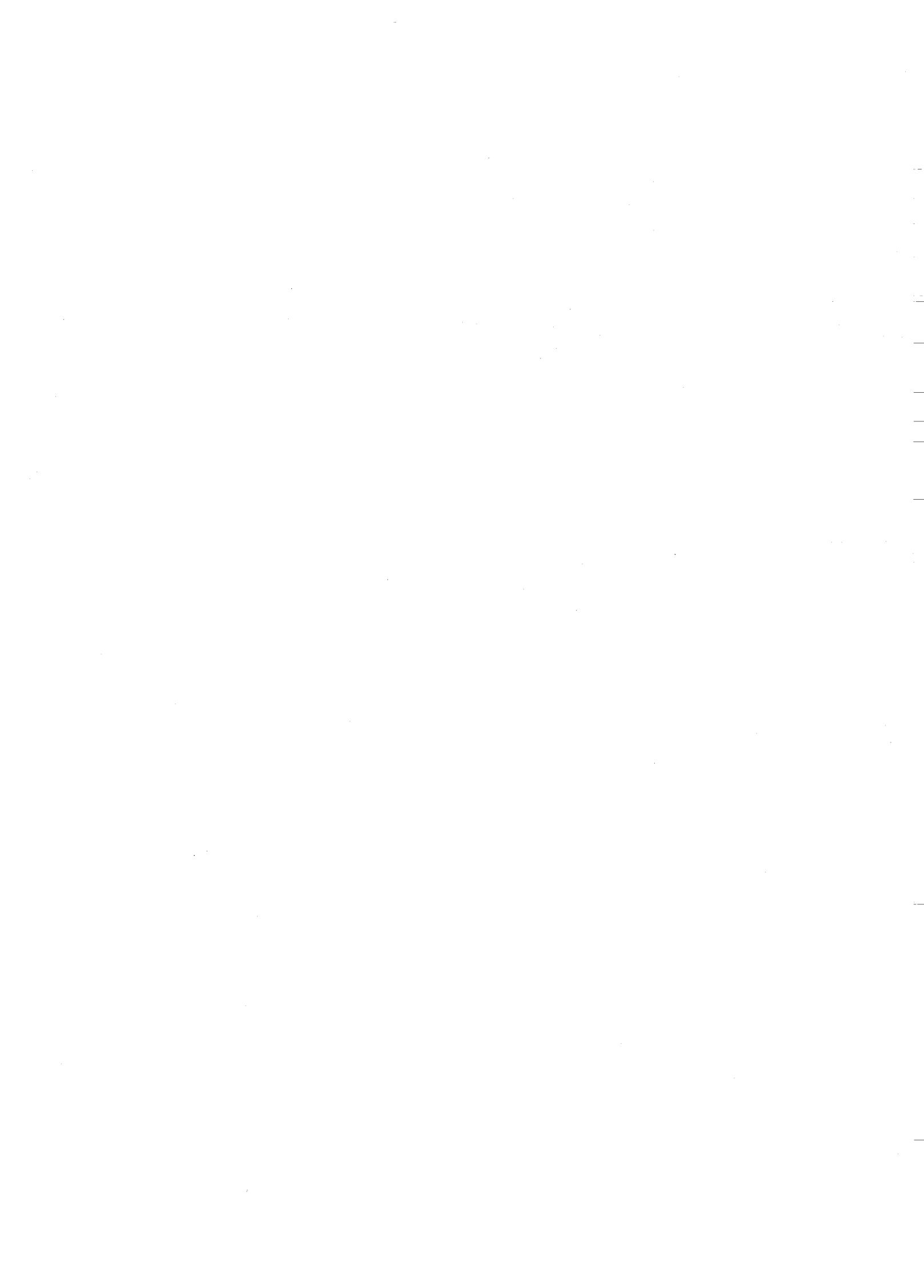
Muitos dos sinais da vida real encontrados na prática exibem um comportamento *não-estacionário* e alguma forma de caráter aleatório. A maneira pela qual estas propriedades se manifestam dependem naturalmente do tipo de sinal que é considerado.

#### ■ SINAIS NÃO-ESTACIONÁRIOS

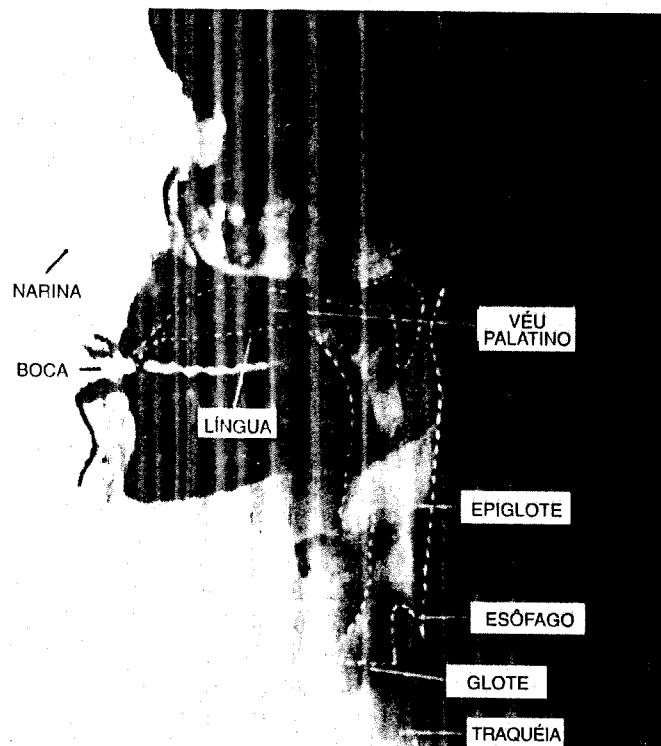
Diz-se que um sinal é *não-estacionário* se suas características intrínsecas variarem com o tempo. Por exemplo, um sinal de fala é não-estacionário, como explicamos aqui.

Um modelo simples do processo de produção da fala é dado por uma forma de filtragem, na qual uma fonte sonora excita um filtro no trato vocal. O trato vocal é então modelado como um tubo com área em seção transversal não-uniforme que inicia na glote (isto é, a abertura entre as cordas vocais) e termina nos lábios, como é esboçado pelas linhas tracejadas na Figura 10.1. Esta figura mostra uma fotografia em raios X de um plano sagital de um sistema vocal humano. Dependendo do modo de excitação fornecido pela fonte, os sons que constituem um sinal de fala podem ser classificados em dois tipos distintos:

- *Fonemas sonoros*, para os quais a fonte de excitação é semelhante a pulsos e periódica. Neste caso, o sinal de fala é produzido forçando-se o ar (dos pulmões) através da glote, com as cordas vocais vibrando numa oscilação de relaxamento. Um exemplo de fonema sonoro é /i/ em ímpar; o símbolo // comumente é usado para denotar um fonema, uma unidade lingüística básica.



- ▶ *Fonemas surdos*, para os quais a fonte de excitação é semelhante a ruído (isto é, aleatória). Neste segundo caso, o sinal de fala é produzido formando-se uma constrição no trato vocal na direção da extremidade da boca e forçando-se uma corrente contínua de ar através da constrição em alta velocidade. Um exemplo de fonema surdo é o /f/ em fala.



**FIGURA 10.1** Raios X de plano sagital do aparelho vocal humano. (Reproduzido de J. L. Flanagan et al., "Speech coding," *IEEE Transactions in Communications*, vol. COM-27, pp. 710-737, 1979; cortesia do IEEE.)

Fonemas sonoros durante as vocais são caracterizados por quase-periodicidade, conteúdo de baixa freqüência e grande amplitude. Em comparação, fonemas surdos, ou fricativos, são caracterizados por um caráter aleatório, conteúdo de alta freqüência e amplitude relativamente baixa. A transição no tempo entre os fonemas sonoros e surdos é gradual (na ordem de dezenas de milissegundos). Dessa forma, vendo que um sinal de fala típico contém muitos fonemas sonoros e não-surdos encadeados de uma maneira que depende daquilo que é falado, podemos avaliar prontamente que um sinal de fala é, de fato, um sinal não-estacionário.

Outros exemplos de sinais não-estacionários incluem a série de tempo que representa as flutuações nos preços das ações observadas nos vários mercados do mundo inteiro, o sinal recebido de um sistema de radar que monitora variações nas condições de tempo prevalecentes, e o sinal recebido de um radiotelescópio que perscruta emissões de rádio vindo da galáxia de estrelas ao nosso redor.

### ■ CARÁTER ALEATÓRIO

Outra propriedade dos sinais da vida real é a aparência aleatória de suas formas de onda. Esta propriedade pode surgir porque o sinal de interesse é gerado por um processo físico que é *intrinsecamente aleatório por natureza*. Diz-se que um sinal é aleatório se ele for imprevisível. Um conjunto dessas formas de onda, tendo cada uma certa probabilidade de ocorrência, constitui um *processo aleatório ou processo estocástico*.

Um sinal de fala, composto de fonemas sonoros e surdos, é um exemplo de sinal aleatório. Isto é bem ilustrado na versão "filtrada" de um sinal de fala exibido na Figura 8.21(b). Esta forma de onda é típica de sinais de fala transmitidos por um canal telefônico. A Figura 8.21(b) ilustra claramente o comportamento aleatório dos sinais de fala, exemplificado pelo fato de que a amplitude dos sinais de fala flutua entre valores positivos e negativos de uma maneira aparentemente imprevisível.



Outro exemplo de processo aleatório é o *ruído térmico*, que se refere ao ruído elétrico que surge do movimento aleatório dos elétrons num condutor. Esta forma de ruído é observada em todo receptor de um sistema de comunicação. Como um outro exemplo de processo aleatório, mencionamos o *ruído de quantização* produzido pela conversão de um sinal analógico num sinal digital. O ruído térmico e o ruído de quantização, cada um a seu modo, impõem limites à capacidade do sistema de comunicação transmitir informações de uma fonte até um usuário por meio de um canal.

Apesar da previsão precisa de um sinal aleatório não ser possível, ele pode ser descrito em termos de suas *propriedades estatísticas*. Estas propriedades incluem a potência média do sinal aleatório e a distribuição espectral desta potência média como uma função da freqüência. A disciplina matemática que lida com a caracterização estatística dos sinais aleatórios é a *teoria das probabilidades*.

## ■ COMPORTAMENTO CAÓTICO

Tendo a previsibilidade como critério de interesse, classificamos os sinais no Capítulo 1 ou como determinísticos ou como aleatórios. Na realidade, entretanto, há uma outra classe de sinais conhecida como *sinais caóticos*, os quais exibem propriedades distintas próprias. Um sinal caótico é uma observação de um *sistema caótico*, definido por um sistema de equações diferenciais vinculadas não-lineares ou equações de diferenças não-lineares, cujos parâmetros são todos fixos. Levando em conta o que dissemos até agora, seria tentador dizermos que o comportamento futuro de um sistema caótico é completamente determinado por seu passado. Em verdade, entretanto, isto não acontece, devido a uma propriedade intrínseca de todos os sistemas caóticos, conhecida como *sensibilidade às condições iniciais*. Especificamente, qualquer incerteza nas condições iniciais do sistema caótico, não importa quanto pequena seja, crescerá exponencialmente com o tempo. Conseqüentemente, um sinal caótico somente é previsível em curto prazo.

Apesar do fato de um sistema caótico ser determinístico por natureza, ele pode exibir uma forma de onda tão complicada na aparência que pode parecer aleatória. De fato, um sinal caótico pode passar em muitos dos testes estatísticos costumeiramente associados com sinais aleatórios, o que torna fácil confundir um sinal caótico com um aleatório.

Em suma, podemos definir um sinal caótico como sendo um sinal de aparência aleatória gerado por um sistema de equações diferenciais/de diferenças não-lineares com parâmetros fixos e que, diferentemente do ruído, é ligeiramente previsível, mas não tão previsível quanto um processo puramente determinístico. Falta precisão matemática a esta definição; todavia, ela é apropriada para nossa discussão atual.

O caos pode surgir numa de duas maneiras:

1. *Sistemas caóticos conhecidos*, cujos exemplos incluem os sistemas logísticos e de Lorenz, como descrevemos aqui.

- » *Sistema logístico*, cuja dinâmica é regida pela equação de diferenças não-linear:

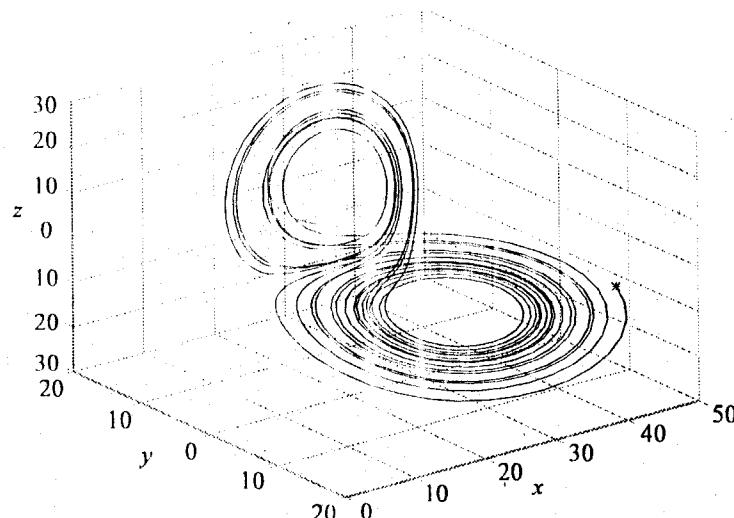
$$y[n] = 4y[n-1](1-y[n-1]) \quad (10.1)$$

A amostra  $y[n-1]$  anterior determina a amostra  $y[n]$  atual. É por este motivo que o sistema logístico é chamado processo não-linear de primeira ordem. O sistema logístico é conhecido por ser caótico no intervalo  $[0, 1]$ .

- » *Sistema de Lorenz*, cuja dinâmica é regida pelo sistema de equações diferenciais não-lineares:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -x(t)z(t) + rx(t) - y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - bz(t) \end{aligned} \quad (10.2)$$

em que  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$  são parâmetros adimensionais. Valores típicos destes parâmetros são  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  e  $r = 28$ . O sistema de Lorenz recebeu este nome do meteorologista Edward Lorenz. A Figura 10.2 mostra uma trajetória do ponto representado por  $(x(t), y(t), z(t))$  para o tempo variável  $t$  no espaço tridimensional.



**FIGURA 10.2** Gráfico tridimensional da trajetória de um atrator de Lorenz.

2. *Fenômenos da vida real*, em que o comportamento caótico foi confirmado experimentalmente. Exemplos desses fenômenos incluem os seguintes:
  - *Turbulência* observada em fluidos
  - *Backscatter*<sup>1</sup> de radar de uma superfície oceânica, comumente chamado *sea clutter*<sup>2</sup> ou *sea echo*

O estudo do caos está baseado nos *sistemas dinâmicos não-lineares*.

## 10.2 Análise de Tempo – Freqüência

A teoria de Fourier é válida somente para sinais estacionários. Para a análise de sinal não-estacionário, o método preferido é o uso de uma descrição do sinal que envolve tanto tempo como freqüência. Como o nome implica, a *análise de tempo – freqüência* associa um sinal (isto é, uma função unidimensional do tempo) com uma imagem (isto é, uma função bidimensional de tempo e freqüência) que exibe os componentes espectrais do sinal como uma função do tempo. Em termos conceituais, podemos imaginar este mapeamento como uma *representação espectral variável no tempo* do sinal. Esta representação é análoga a uma partitura musical, com o tempo e a freqüência representando os dois eixos principais. Os valores da representação de tempo – freqüência do sinal fornecem uma indicação dos tempos específicos nos quais certos componentes espectrais do sinal são observados.

Basicamente, há duas classes de representações de tempo – freqüência de sinais: *linear* e *quadrática*. Nesta seção, preocupa-nos-somos somente com a representação linear. Especificamente, apresentaremos breves exposições da transformada breve de Fourier e da transformada *wavelet*<sup>3</sup>, nesta ordem.

<sup>1</sup> *Backscatter*: dispersão da radiação pelos átomos do meio através do qual ela passa.

<sup>2</sup> *Clutter*: interferência em tela de imagens de radar que impossibilita a visão do alvo.

<sup>3</sup> *Wavelet*: pequena onda.

## ■ TRANSFORMADA BREVE DE FOURIER

A transformada breve ou de tempo curto de Fourier (STFT)\* é uma extensão natural da transformada de Fourier comum. Admitamos que  $x(t)$  denote um sinal que presumimos ser “estacionário” quando é visualizado através de uma *janela*  $w(t)$  temporal de extensão limitada; em geral,  $w(t)$  tem valor complexo. A STFT de  $x(t)$ , denotada por  $X(\tau, j\omega)$ , é definida como a transformada de Fourier do sinal ajanelado  $x(t)w^*(t - \tau)$ , em que  $\tau$  é a posição central da janela e o asterisco denota conjugado complexo; ou seja, escrevemos

$$X(\tau, j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w^*(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \quad (10.3)$$

$X(\tau, j\omega)$  é linear em relação ao sinal  $x(t)$ . O parâmetro  $\omega$  desempenha um papel similar ao da freqüência angular na transformada de Fourier comum. Para um dado  $x(t)$ , o resultado obtido computando-se  $X(\tau, j\omega)$  depende da escolha da janela  $w(t)$ . (Na literatura sobre análise de tempo – freqüência, a transformada breve de Fourier normalmente é denotada por  $X(\tau, \omega)$ ; usamos  $X(\tau, j\omega)$  aqui para sermos consistentes com a terminologia usada neste livro.)

Muitas formas de diferentes janelas são usadas na prática. Tipicamente, elas são simétricas, unimodais e; os exemplos incluem uma janela gaussiana, como ilustra a Figura 10.3(a), ou um único período de uma janela de Hanning (isto é, janela de co-seno elevado) como ilustra a Figura 10.3(b); veja a equação (8.61) para obter uma definição da janela de Hanning em tempo discreto.

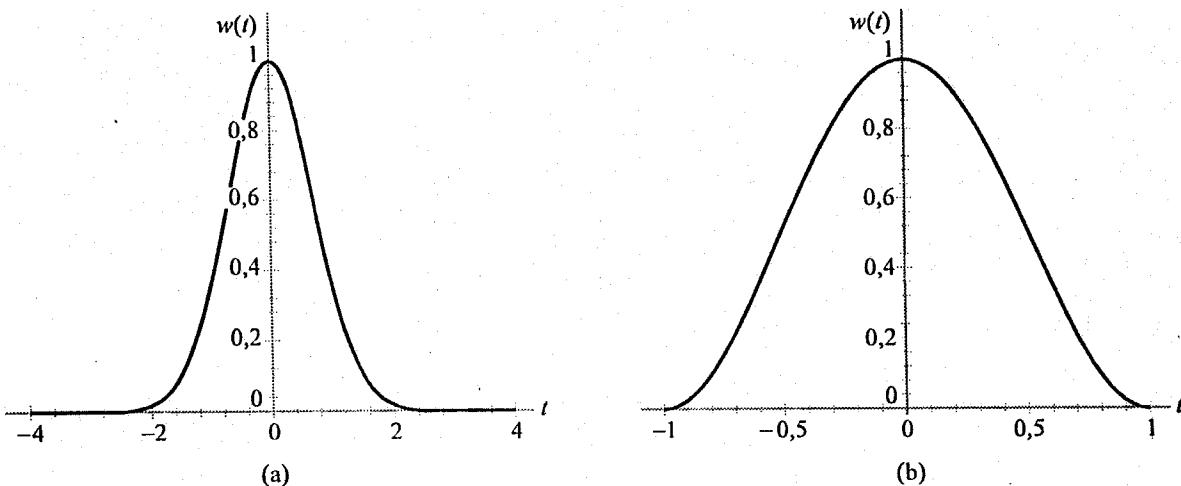


FIGURA 10.3 (a) Janela gaussiana. (b) Janela de Hanning.

Em termos matemáticos, a integral da equação (10.3) representa o produto interno (escalar) do sinal  $x(t)$  com uma família de funções básicas de dois parâmetros,  $w(t - \tau)e^{j\omega t}$ , para  $\tau$  e  $\omega$  variáveis. É importante observar que, em geral, estas funções básicas não constituem um conjunto ortonormal.

Muitas das propriedades da transformada de Fourier são transportadas para a STFT. Em especial, podemos mencionar as duas propriedades seguintes de preservação de sinal:

1. A STFT preserva os deslocamentos no tempo, exceto para uma modulação linear: ou seja, se  $X(\tau, j\omega)$  é a STFT de um sinal  $x(t)$ , então a STFT do sinal deslocado no tempo  $x(t - t_0)$  é igual a  $X(\tau - t_0, j\omega)e^{-j\omega t_0}$ .
2. A STFT preserva os deslocamentos em freqüência: ou seja, se  $X(\tau, j\omega)$  for a STFT de um sinal  $x(t)$ , então a STFT do sinal modulado  $x(t)e^{-j\omega_0 t}$  será igual a  $X(\tau, j\omega - j\omega_0)$ .

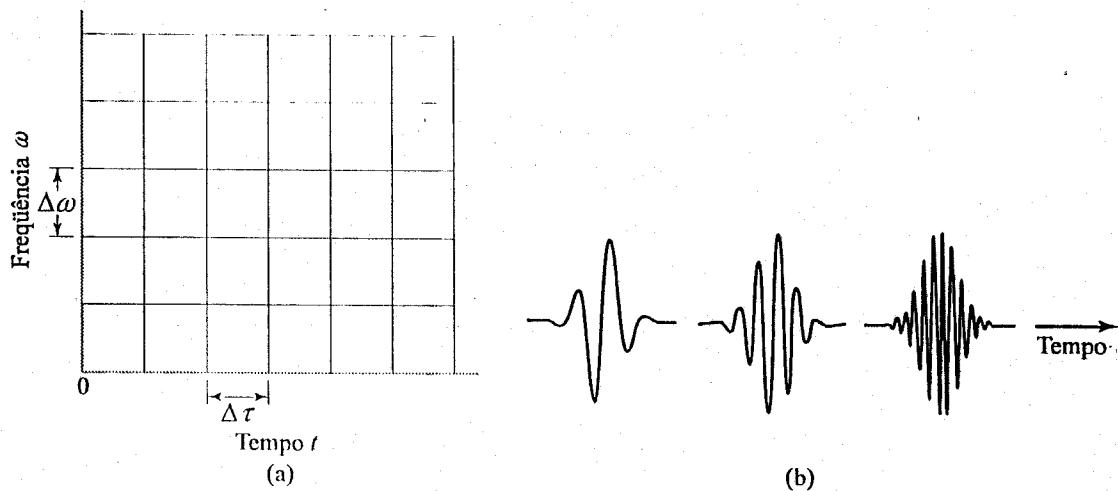
Uma questão de grande preocupação ao usar a STFT é a da *resolução de tempo-freqüência*. Para sermos específicos, considere um par de sinais puramente senoidais cujas freqüências angulares sejam espaçadas com uma separação de  $\Delta\omega$  rad/s.

\* N. de R.T.: STFT de *Short Time Fourier Transform*

O menor valor de  $\Delta\omega$  para o qual os dois sinais podem ser resolvidos ou distinguidos é chamado *resolução de freqüência*. A correspondente duração da janela  $w(t)$  é chamada *resolução de tempo*, denotado por  $\Delta\tau$ . A resolução de freqüência  $\Delta\omega$  e a resolução de tempo  $\Delta\tau$  são inversamente relacionadas, como é mostrado por

$$\Delta\tau \Delta\omega \geq \frac{1}{2} \quad (10.4)$$

que é uma manifestação da propriedade de dualidade da STFT, herdada da transformada de Fourier. Esta relação é chamada *princípio da incerteza*, um termo tomado emprestado por analogia da mecânica quântica estatística; ele foi discutido na Seção 3.6 no contexto do produto tempo – largura de faixa. O melhor que podemos fazer é satisfazer a equação (10.4) com o sinal de igualdade. Esta condição especial é satisfeita pelo uso de uma janela gaussiana. Consequentemente, a capacidade de resolução de tempo – freqüência da STFT é fixa ao longo do plano inteiro de tempo – freqüência. Este ponto é ilustrado na Figura 10.4(a), em que o plano de tempo – freqüência é dividido em *retângulos* da mesma forma e tamanho. A Figura 10.4(b) exibe as partes reais das funções básicas associadas da STFT; todas elas têm exatamente a mesma duração, mas diferentes freqüências.



**FIGURA 10.4** (a) Particionamento uniforme do plano tempo – freqüência pela transformada breve de Fourier. (b) Partes reais das funções básicas associadas.

O módulo ao quadrado da STFT de um sinal  $x(t)$  é chamado *espectrograma* do sinal; é definido por

$$|X(\tau, j\omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w^*(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (10.5)$$

O espectrograma representa uma extensão simples, mas poderosa, da teoria de Fourier clássica. Em termos físicos, ele fornece uma medida da energia do sinal no plano de tempo – freqüência.

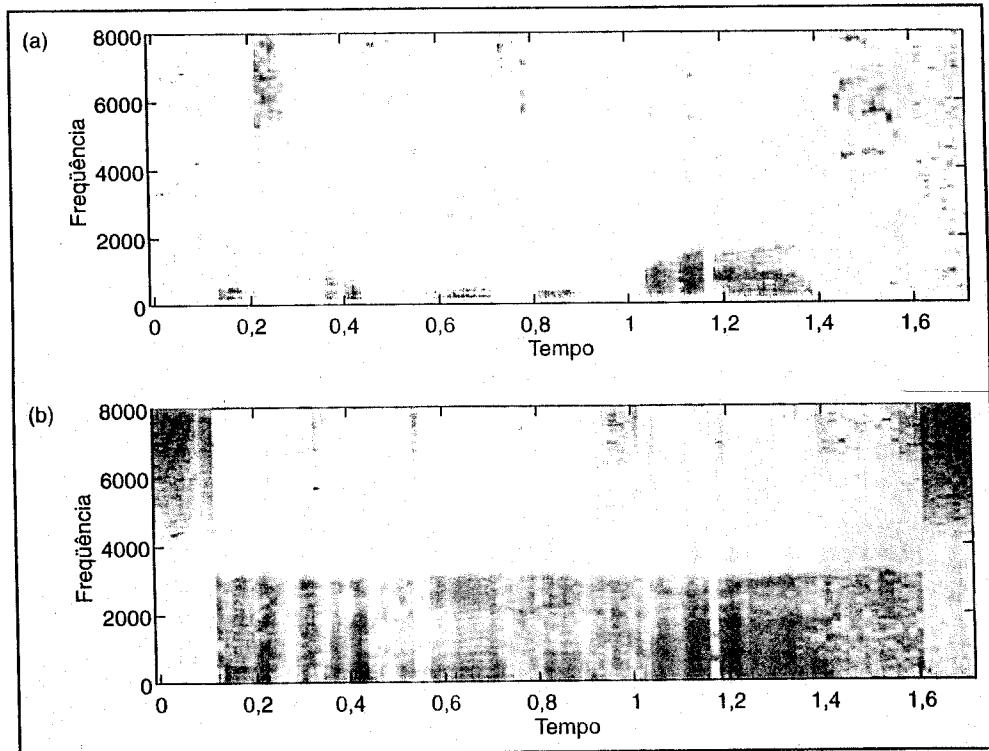
### ■ ESPECTROGRAMAS DE SINAIS DE FALA

A Figura 10.5 mostra os espectrogramas de versões pré-filtrada e pós-filtrada de um sinal de fala que foi exibido nas Figuras 8.21(a) e (b). Estes espectrogramas foram computados usando-se uma janela de co-seno elevado, com uma extensão de 256 amostras. A cor de um padrão particular nos espectrogramas da Figura 10.5 é indicativa da energia de sinal nesse padrão. O código de cores (em energia decrescente) é o seguinte: vermelho é o mais alto, seguido do amarelo e depois o azul.

As seguintes observações pertinentes às características dos sinais de fala podem ser feitas a partir dos espectrogramas da Figura 10.5:

- As freqüências ressonantes do trato vocal são representadas pelas áreas mais brilhantes (vermelho) dos espectrogramas.
- Nas regiões sonoras, os estriamentos parecem mais brilhantes quando a energia está concentrada em faixas estreitas de freqüência.

- Os sons surdos têm amplitudes mais baixas porque sua energia está distribuída numa faixa de freqüências mais ampla.



**FIGURA 10.5** Espectrogramas de sinais de fala. (a) Versão com ruído do sinal de fala produzido por uma mulher dizendo a frase: “This was easy for us.” (Isto foi fácil para nós). Versão filtrada do sinal de fala.

A fronteira horizontal abrupta em aproximadamente 3,1 kHz entre as regiões de energia significativa e energia baixa (quase zero) vistas no espectrograma da Figura 10.5(b), representando o sinal de fala pós-filtrado, deve-se à ação do filtro digital passa-baixas FIR.

### ■ TRANSFORMADA WAVELET

Para superar a limitação de resolução do tempo – freqüência da STFT, necessitamos de uma forma de mapeamento que tenha a capacidade de fazer um compromisso entre a resolução de tempo e a resolução de freqüência e vice-versa. Um desses métodos é conhecido como *Transformada Wavelet* (WT). A WT age como um “microscópio matemático,” em termos de que as diferentes partes do sinal podem ser examinadas ajustando-se o “foco.”

Dado um sinal não-estacionário  $x(t)$ , a WT é definida como o produto interno de  $x(t)$  com a família de funções básicas de dois parâmetros denotadas por

$$\psi_{\tau,a}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \quad (10.6)$$

em que  $a$  é um fator de escala (também chamado parâmetro de dilatação), e  $\tau$  é um retardo de tempo. Dessa forma, em termos matemáticos, a WT do sinal  $x(t)$  é definido por

$$W_x(\tau, a) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \quad (10.7)$$

Na análise de *wavelets*, a função básica  $\psi_{\tau,a}(t)$  é uma função oscilante; portanto, não há necessidade de usar senos e co-senos (ondas) como na análise de Fourier. Mais especificamente, a função básica  $e^{j\omega t}$  na análise de Fourier oscila ilimitadamente; em comparação, a função básica  $\psi_{\tau,a}(t)$  na análise de *wavelets* está localizada no tempo – ela perdura somente por alguns ciclos. À semelhança da transformada de Fourier, a transformada *wavelet* é invertível; se tivermos  $W_x(\tau, a)$ , o sinal original  $x(t)$  poderá ser reconstruído sem perda de informação.

As funções básicas  $\psi_{\tau,a}(t)$  são chamadas *wavelets*; elas constituem os blocos de construção da análise de *wavelets*. De acordo com a equação (10.6), as *wavelets* são versões, multiplicadas por fatores de escala e deslocadas, de um protótipo  $\psi(t)$ , chamado *wavelet básica* ou *wavelet mãe*. O parâmetro de retardo  $\tau$  dá a posição da *wavelet*  $\psi_{\tau,a}(t)$ , enquanto que o fator de escala  $a$  controla seu conteúdo de freqüência. Para  $a \ll 1$ , a *wavelet*  $\psi_{\tau,a}(t)$  é uma versão altamente concentrada e contraída da *wavelet* básica  $\psi(t)$ , com conteúdo de freqüência concentrado em sua maioria na faixa de alta freqüência. Por outro lado, para  $|a| \gg 1$ , a *wavelet*  $\psi_{\tau,a}(t)$  é muito espalhada e tem em sua maioria baixas freqüências. A Figura 10.6 mostra dois desses exemplos da *wavelet*  $\psi(t)$ . A *wavelet de Haar*, mostrada na Figura 10.6(a), é o exemplo mais simples de *wavelet*. A *wavelet de Daubechies*, mostrada na Figura 10.6(b) é um exemplo mais sofisticado de *wavelet*. Ambas as *wavelets* têm suporte finito (compacto) no tempo. A *wavelet* de Daubechies tem um tamanho  $L = 15$  e, portanto, é menos local do que a *wavelet* de Haar, que tem tamanho  $L = 2$ . Entretanto, a *wavelet* de Daubechies é contínua e tem melhor resolução de freqüência do que a *wavelet* de Haar.

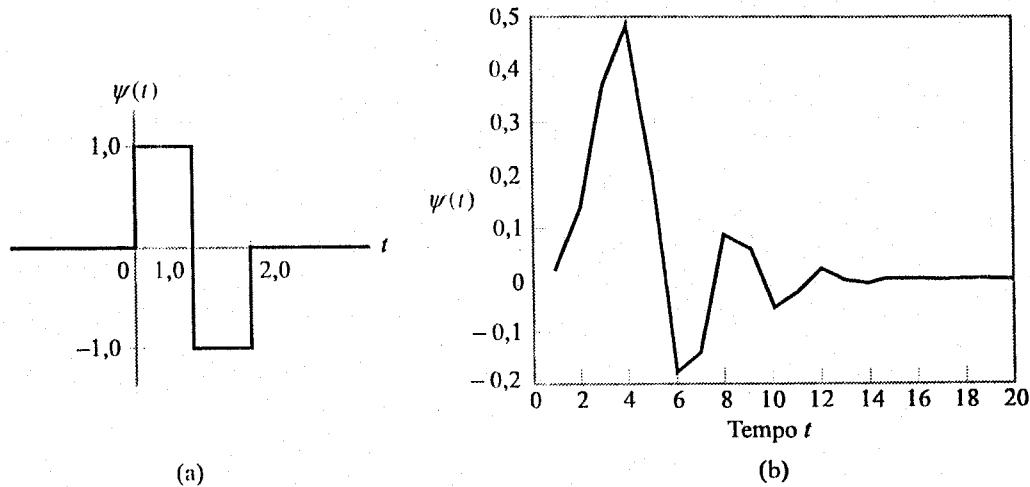


FIGURA 10.6 (a) Wavelet de Haar. (b) Wavelet de Daubechies.

Na análise de Fourier provida de janelas, a meta é medir o *conteúdo local de freqüência* do sinal. Por outro lado, na análise de *wavelets*, medimos a *similaridade* entre o sinal  $x(t)$  e a *wavelet*  $\psi_{\tau,a}(t)$  para  $\tau$  e  $a$  variáveis. As dilatações por  $1/a$  resultam em diversas *ampliações* do sinal, com *resoluções* distintas.

Da mesma forma que a STFT tem propriedades de preservação do tempo próprias, o mesmo acontece com a WT, como descrevemos aqui:

1. A WT preserva os deslocamentos no tempo: ou seja, se  $W_x(\tau, a)$  for a WT de um sinal  $x(t)$ , então  $W_x(\tau - t_0, a)$  será a WT do sinal  $x(t - t_0)$  deslocado no tempo.
2. A WT preserva a mudança da escala de tempo: ou seja, se  $W_x(\tau, a)$  for a WT de um sinal  $x(t)$ , então a WT do sinal de tempo  $|a_0|^{1/2}x(a_0t)$  mudando a escala será igual a  $W_x(a_0\tau, a/a_0)$ .

Entretanto, diferentemente da STFT, a WT não preserva deslocamentos de freqüência.

Em geral, a *wavelet* básica  $\psi(t)$  pode ser qualquer função passa-faixa. Para estabelecer uma conexão com a janela modulada na STFT, escolhemos

$$\psi(t) = w(t)e^{-j\omega_0 t} \quad (10.8)$$

A janela  $w(t)$  é tipicamente uma função passa-baixas. Dessa forma, a equação (10.8) descreve a *wavelet* básica  $\psi(t)$  como um sinal complexo, modulado linearmente, cujo conteúdo de freqüência está concentrado essencialmente em torno de sua própria freqüência de portadora  $\omega_0$ . Admitamos que  $\omega$  denote a freqüência de portadora de uma *wavelet* analisadora  $\psi_{\tau,a}(t)$ . O fator de escala  $a$  de  $\psi_{\tau,a}(t)$  está inversamente relacionado com a freqüência de portadora  $\omega$ , por

$$a = \frac{\omega_0}{\omega} \quad (10.9)$$

Uma vez que, por definição, uma *wavelet* é uma versão mudada em escala do mesmo protótipo, segue-se que também podemos escrever

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = Q \quad (10.10)$$

em que  $\Delta\omega$  é a resolução de freqüência da *wavelet* analisadora  $\psi_{\tau,a}(t)$  e  $Q$  é uma constante. Escolhendo a janela  $w(t)$  para ser uma função gaussiana e, portanto, usando a equação (10.4) com o sinal de igualdade, podemos expressar a resolução de tempo da *wavelet*  $\psi_{\tau,a}(t)$  como

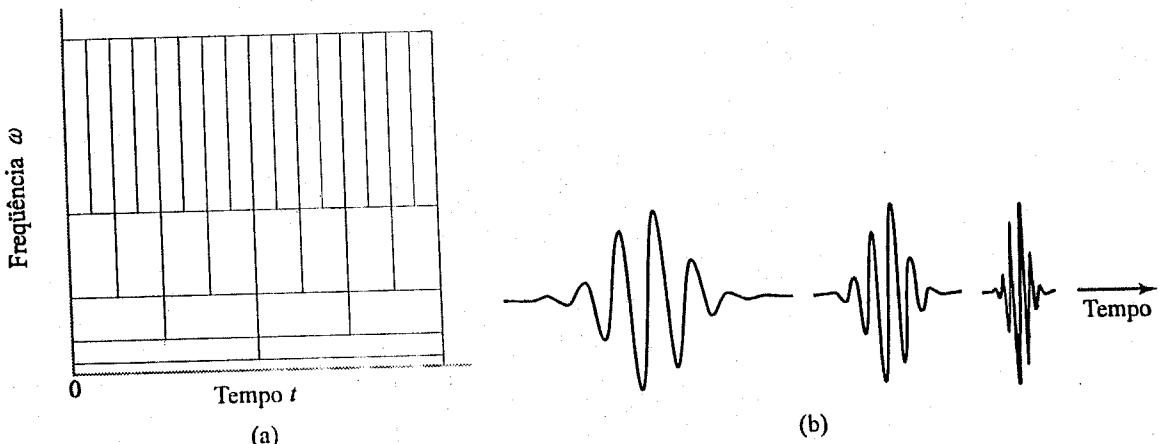
$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \frac{1}{2\Delta\omega} \\ &= \frac{1}{2Q\omega}\end{aligned} \quad (10.11)$$

Levando em conta as equações (10.10) e (10.11), agora podemos enunciar formalmente as propriedades de resolução de tempo – freqüência da WT da seguinte maneira:

- ▶ A resolução de tempo  $\Delta\tau$  varia inversamente com a freqüência de portadora  $\omega$  da *wavelet* analisadora  $\psi_{\tau,a}(t)$ ; consequentemente, ela pode ser tornada arbitrariamente pequena em altas freqüências.
- ▶ A resolução de freqüência  $\Delta\omega$  varia linearmente com a freqüência de portadora  $\omega$  da *wavelet* analisadora  $\psi_{\tau,a}(t)$ ; consequentemente, ela pode ser tornada arbitrariamente pequena em baixas freqüências.

Dessa forma, a WT é muito apropriada para a análise de sinais não-estacionários que contêm transitórios de alta freqüência sobrepostos a componentes de baixa freqüência de duração mais longa.

Na subseção anterior, afirmamos que a STFT tem uma resolução fixa, como ilustra a Figura 10.4(a). Em comparação, a WT tem uma capacidade de múltipla resolução, como ilustra a Figura 10.7(a). Nesta última figura, vemos que a WT divide o plano de tempo - freqüência em retângulos que têm a mesma área, mas com larguras e alturas variáveis que dependem da freqüência de portadora  $\omega$  da *wavelet* analisadora  $\psi_{\tau,a}(t)$ . Dessa forma, diferentemente da STFT, a WT fornece um compromisso entre as resoluções de tempo e freqüência, as quais são representadas pelas larguras e alturas dos retângulos, respectivamente (isto é, as larguras/alturas mais estreitas correspondem a melhor resolução). A Figura 10.7(b) exibe as partes reais das funções básicas da WT. Aqui, vemos que todas as vezes que uma função básica é comprimida digamos por um fator de 2, sua freqüência de portadora é aumentada pelo mesmo fator.



**FIGURA 10.7** (a) Particionamento do plano de tempo - freqüência pela transformada *wavelet*. (b) Partes reais de funções básicas associadas.

A WT realiza uma análise de escala de tempo. Dessa forma, seu módulo ao quadrado é chamado *escalograma*, definido por

$$|W_x(\tau, a)|^2 = \frac{1}{a} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt \right|^2 \quad (10.12)$$

O escalograma representa uma distribuição da energia do sinal no plano de escala de tempo.

Tanto no spectrograma como no escalograma, a informação de fase pertencente ao sinal  $x(t)$  é perdida; nenhum deles pode, portanto, ser invertido, de forma geral.

## ■ COMPRESSÃO DE IMAGEM USANDO-SE A TRANSFORMADA WAVELET

A transmissão de uma imagem por um canal de transmissão pode se tornar mais eficiente comprimindo-se a imagem no transmissor do sistema e reconstruindo a imagem original no receptor.

Esta combinação de operações de processamento de sinais é chamada *compressão de imagem*. Basicamente, há dois tipos de compressão de imagem:

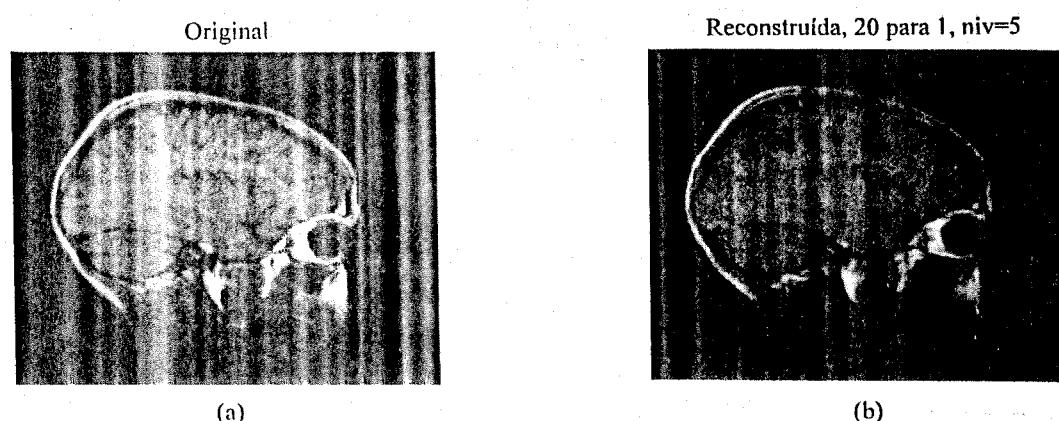
1. *Compressão sem perdas*, a qual opera removendo as informações *redundantes* contidas na imagem. A compressão sem perdas é completamente reversível em termos de que a imagem original pode ser reconstruída de maneira exata.
2. *Compressão com perdas*, a qual envolve a perda de alguma informação e, portanto, pode não ser completamente reversível. Entretanto, ela é capaz de atingir um índice de compressão mais elevado do que aquele que é alcançável com métodos sem perdas.

Em muitos casos, a compressão com perdas é o método preferido, uma vez que não altera de maneira significativa a qualidade de percepção da imagem. Para a maioria das aplicações, isto é aceitável, e em aplicações de elevadas taxas como por exemplo, a Internet, ela é uma necessidade.

As *wavelets* constituem um poderoso método linear para compressão de imagens com perdas, porque os coeficientes da transformada *wavelet* estão localizados tanto no espaço como na freqüência. A Figura 10.8(a) mostra uma *imagem de ressonância magnética* (MRI – Magnetic Ressonance Image). A Figura 10.8(b) mostra a mesma imagem depois de uma compressão de 20:1 e reconstrução. A transformada *wavelet* usada para executar a compressão foi baseada na *wavelet* de Daubechies da Figura 10.6(b). Comparando a MRI comprimida com a MRI original, vemos que a perda visual resultante da compressão é dificilmente perceptível.

Na realidade, entretanto, há alguma perda de informação, como mostra a imagem da diferença exibida na Figura 10.8(c), a qual foi obtida subtraíndo-se a MRI comprimida da MRI original. A imagem da diferença pode ser reduzida usando-se uma forma mais elaborada da *wavelet* de Daubechies do que a da Figura 10.6(b), se quisermos. Também é importante notar que em algumas aplicações (por exemplo, um ambiente clínico), a qualidade de diagnóstico da imagem não deve ser degradada na reconstrução.

A Figura 10.8(d) exibe um perfil da distribuição dos coeficientes da *wavelet* realçando a porcentagem de coeficientes que têm valores absolutos dentro de intervalos específicos. Para o índice de compressão de 20:1 obtido na Figura 10.8(b), somente os coeficientes representados pela parte mais à direita de aproximadamente 2,5 barras (isto é, os 5% máximos) são mantidos, e os coeficientes restantes são reduzidos a zero. Fazendo isto, vemos prontamente o poder e o benefício prático das técnicas de compressão de imagens.



**FIGURA 10.8** (a) Imagem de ressonância magnética original. (b) Imagem comprimida usando-se a *wavelet* de Daubechies da Figura 10.6(b).

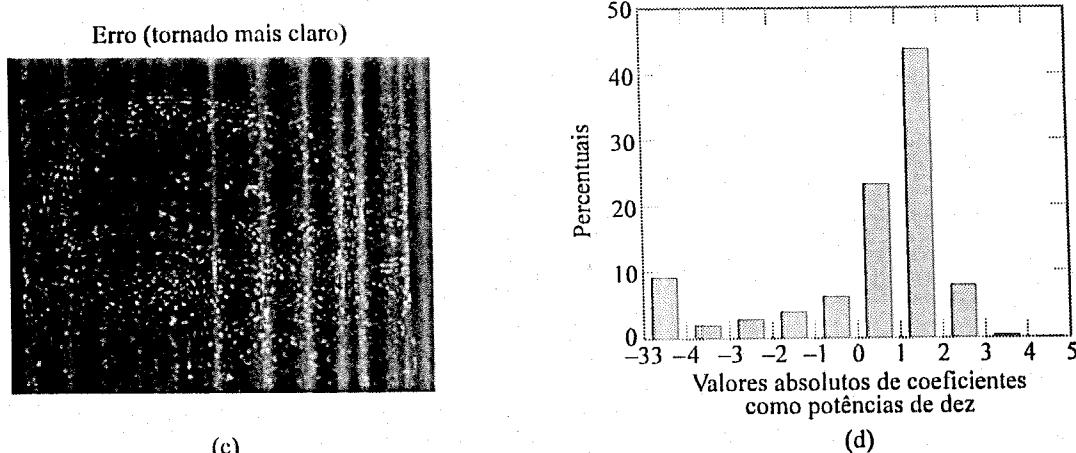


FIGURA 10.8 (Continuação). (c) Imagem da diferença entre as imagens original e comprida. Esta imagem foi tornada mais clara para tornar as diferenças mais visíveis. (d) Distribuição dos coeficientes da *wavelet*.

### 10.3 Variantes do Modelo de “Sistema Linear Invariante no Tempo”

Voltamo-nos em seguida ao modelo de sistema idealizado, a saber, o sistema linear invariante no tempo (LTI). Este modelo apóia-se numa base bem desenvolvida de teoria matemática, exemplificado pelo material apresentado nos capítulos anteriores deste livro. De fato, muitos sistemas físicos admitem o uso de um modelo LTI. Porém, estritamente falando, um sistema físico pode distanciar-se deste modelo ideal devido à presença de componentes não-lineares ou parâmetros invariantes no tempo no sistema ou em ambos, dependendo das condições sob as quais o sistema é operado.

#### ■ SISTEMAS NÃO-LINEARES

Para que a suposição de linearidade seja satisfeita, as amplitudes dos sinais encontrados num sistema (por exemplo, sistema de controle) teriam de ser obrigados a se situarem dentro de uma faixa bastante pequena para que todos os componentes do sistema operassem em suas “regiões lineares.” Isto asseguraria que o princípio da superposição fosse essencialmente satisfeito, de forma que, para todos os fins práticos, o sistema pudesse ser visto como linear. Mas, quando se permite que as amplitudes do sinal se situem fora da faixa de operação linear, o sistema não pode mais ser considerado linear. Por exemplo, um amplificador transistorizado usado num sistema de controle exibe uma característica de entrada e saída que entra em saturação quando a amplitude do sinal aplicado à entrada do amplificador é grande. Outras fontes de não linearidade num sistema de controle incluem a folga entre engrenagens acopladas e a fricção entre peças móveis. De qualquer forma, quando o afastamento da linearidade é relativamente pequeno, alguma forma de distorção é introduzida na caracterização do sistema. O efeito desta distorção pode ser reduzido aplicando-se realimentação ao sistema, como discutimos no Capítulo 9.

Porém, e se for necessário que a faixa de amplitude operacional de um sistema seja grande? A resposta para esta pergunta depende da aplicação pretendida e de como o sistema foi projetado. Por exemplo, numa aplicação de controle, é provável que um sistema de controle linear tenha um mau desempenho ou se torne instável, porque um procedimento de projeto linear é incapaz de compensar de maneira apropriada os efeitos de grandes desvios de linearidade. Por outro lado, um sistema de controle não-linear pode ter um desempenho melhor incorporando-se não-linearidades diretamente no projeto do sistema. Este ponto é demonstrado estudando-se o controle de movimentos de um robô, em que muitas das forças dinâmicas experimentadas variam proporcionalmente ao quadrado da velocidade. Quando um sistema de controle linear é usado para esse tipo de aplicação, forças não-lineares associadas com o movimento de vínculos do robô são desprezadas, com o resultado de que a precisão de controle se degrada rapidamente à medida que a velocidade do movimento é

Conseqüentemente, numa tarefa efetuada por robô, por exemplo, “pegue e coloque,” a velocidade do movimento tem de ser mantida relativamente baixa para que se atinja uma precisão de controle prescrita.

Em comparação, um controle altamente exato para uma grande faixa de velocidades de robô dentro de um grande ambiente de trabalho pode ser obtido empregando-se um sistema de controle não-linear que compense as forças não-lineares experimentadas no movimento do robô. O benefício assim obtido é a produtividade melhorada.

Apesar da dificuldade matemática de se analisar sistemas não-lineares, esforços sérios têm sido feitos em diversas frentes para desenvolver ferramentas teóricas para o estudo de sistemas não-lineares. Neste contexto, as três abordagens seguintes merecem menção especial:

### 1. Análise do espaço de fase

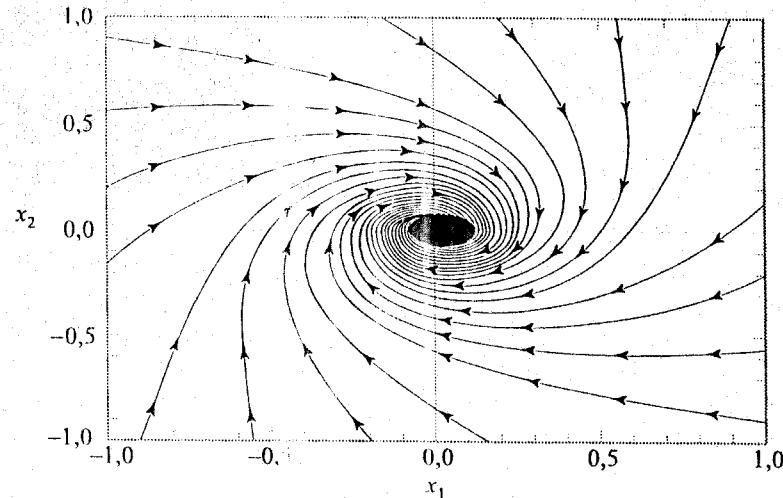
A idéia básica deste método é usar uma abordagem gráfica para estudar um sistema não-linear de equações diferenciais de primeira ordem escritas da seguinte maneira:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(x_j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (10.13)$$

em que  $x_j$  define os elementos de um *vetor de estado*  $p$ -dimensional  $\mathbf{x}(t)$ , e os  $f_j$  são funções não-lineares;  $p$  se denominava *ordem* do sistema. A equação (10.13) pode ser vista como uma equação que descreve o movimento de um ponto num espaço  $p$ -dimensional, comumente chamado *espaço de fase* do sistema. Esta terminologia foi tomada emprestado da física. O espaço de fase é importante porque nos fornece uma ferramenta visual/conceitual para analisar a dinâmica de um sistema não-linear descrito pela equação (10.13). Ele consegue isto chamando nossa atenção para as características globais do movimento ao invés dos aspectos detalhados das soluções analíticas ou numéricas das equações.

Iniciando-se por um conjunto de condições iniciais, a equação (10.13) define uma solução representada por  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)$ . Quando o tempo  $t$  é variado de zero ao infinito, esta solução traça uma curva no espaço de fase.

Essa curva é chamada *trajetória*. Uma família de trajetórias, correspondentes a diferentes condições iniciais, é chamada *gráfico de fase*. A Figura 10.9 ilustra o gráfico de fase de um sistema dinâmico não-linear bidimensional.



**FIGURA 10.9** Gráfico de fase de um sistema dinâmico não-linear bidimensional descrito pelo par de equações de estado

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) - x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - c)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) - x_2(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - c)$$

para o parâmetro de controle  $c = -0,2$ . (Reproduzido de T. S. Parker e L. O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, 1989, cortesia da Springer-Verlag.)

Em grande parte devido às limitações de nossa capacidade visual, o poder gráfico da análise do espaço de fase limita-se a sistemas de segunda ordem (isto é,  $p = 2$ ) ou a sistemas que podem ser aproximados por dinâmica de segunda ordem.

### 2. Análise por função descritiva

Com um elemento não-linear sujeito a uma entrada senoidal, a *função descritiva* do elemento é definida como a razão complexa entre o componente fundamental da saída e a entrada senoidal. Dessa forma, a essência do método da função descritiva é aproximar os elementos não-lineares de um sistema não-linear com equivalentes quase lineares e depois explorar o poder de técnicas do domínio de freqüência para analisar o sistema assim aproximado.

Considere, por exemplo, o sistema de controle não-linear descrito na Figura 10.10. A malha de realimentação do sistema inclui uma não linearidade e três elementos lineares representados pelas funções de transferência  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  e  $H(s)$ . Por exemplo, o elemento não-linear pode ser um relé. Para uma entrada senoidal  $x(t)$ , a entrada da não linearidade não será senoidal porque harmônicos do sinal de entrada gerados pela não linearidade são realimentados na entrada por meio do sensor  $H(s)$ . Entretanto, se os elementos lineares  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  e  $H(s)$  forem de um tipo passa-baixas de tal forma que os harmônicos assim gerados sejam atenuados para níveis insignificantes, então seria justificável supormos que a entrada para a não linearidade é essencialmente senoidal. Numa situação deste tipo, a aplicação do método da função descritiva produziria resultados acurados.

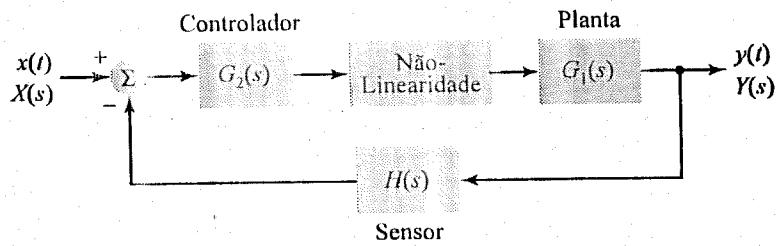


FIGURA 10.10 Sistema de controle realimentado contendo um elemento não-linear em sua malha de realimentação.

O método da função descritiva é usado principalmente para prever a ocorrência de *ciclos limite* em sistemas de realimentação não-lineares. Por “ciclo limite” queremos dizer uma trajetória fechada no espaço de fase para o qual outras trajetórias convergem assintoticamente, tanto de dentro como de fora, quando o tempo tende ao infinito. Esta forma de convergência no espaço de fase é ilustrada na Figura 10.11. Um ciclo limite é um movimento periódico peculiar de sistemas de realimentação não-lineares.

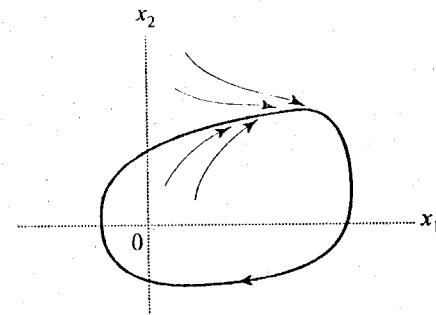


FIGURA 10.11 Ciclo limite no espaço de fase bidimensional.

### 3. Teoria de Lyapunov

Esta terceira abordagem à análise da estabilidade de sistemas não-lineares baseia-se nos métodos direto e indireto de Lyapunov:

- O *método indireto* declara que as propriedades de estabilidade de um sistema de realimentação não-linear nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio são essencialmente as mesmas que aquelas obtidas através de uma aproximação linearizada do sistema. Por “ponto de equilíbrio” queremos dizer um ponto no espaço de fase onde o vetor de estado do sistema pode permanecer para sempre.

- O *método direto* é uma generalização do conceito de energia associado com um sistema mecânico. Ele declara que o movimento de um sistema mecânico é estável se a energia do sistema for uma função decrescente do tempo. Para aplicar o método, precisamos formular uma função escalar tipo energia, chamada *função de Lyapunov*, e depois verificar se essa função decresce com o tempo. Aqui se encontra tanto a força como a limitação do método. A generalidade do método direto de Lyapunov concede a ele poder analítico: ele é aplicável a todo tipo de sistema de realimentação não-linear, tanto variável no tempo como invariante no tempo, e tanto dimensionalmente finito como dimensionalmente infinito. A limitação do método é que muitas vezes é difícil de encontrar uma função de Lyapunov para um sistema não-linear de interesse. Entretanto, a incapacidade de encontrar uma função de Lyapunov não prova a instabilidade do sistema. Ao contrário, a existência de uma função de Lyapunov é suficiente, mas não necessária, para a estabilidade.

Dessa forma, vemos que o método do espaço de fase, o método da função descritiva e a teoria de Lyapunov têm vantagens e limitações próprias. Entre elas, eles constituem um conjunto poderoso de ferramentas para o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares.

## ■ FILTROS ADAPTATIVOS

A não linearidade num sistema físico é uma causa de afastamento em relação ao modelo idealizado de sistema LTI. Outro caso de afastamento é a variação dos parâmetros do sistema no decorrer do tempo. Essa variação pode ser devida a uma variedade de fatores físicos. Também pode haver mudanças imprevistas nas propriedades estatísticas das entradas externas e das perturbações aplicadas ao sistema, cujos efeitos podem ser vistos como mudanças no ambiente em que o sistema opera. As ferramentas da teoria dos sistemas LTI convencionais, que produzem um projeto de sistema com parâmetros fixos, normalmente são inadequadas para lidar com estas situações da vida real. Para produzir um desempenho satisfatório ao longo de toda a gama de variações nos parâmetros, a abordagem preferida é usar um filtro adaptativo.

Um *filtro adaptativo* é definido como um sistema variável no tempo que é provido com um mecanismo iterativo para ajustar gradativamente seus parâmetros de modo a operar de maneira ótima de acordo com algum critério especificado. As aplicações de filtros adaptativos incluem a equalização adaptativa e a identificação de sistema, descritas em seguida.

Num ambiente de telecomunicações, o canal normalmente é variável no tempo. Por exemplo, numa rede telefônica comutada descobrimos que dois fatores contribuem para a distribuição da distorção de sinais em diferentes conexões de *links*:

- Diferenças nas características de transmissão dos *links* individuais que podem ser comutados em conjunto.
- Diferenças no número de *links* usados numa conexão em particular.

O resultado é que o canal telefônico é aleatório em termos de ser um dentro um conjunto (grupo) de realizações físicas possíveis disponíveis para uso. Consequentemente, o desempenho de um equalizador fixo para a transmissão de dados digitais por um canal telefônico pode não ser adequado, quando ele for projetado usando-se a teoria de sistemas LTI baseando-se em características médias de canal. Para obter-se a capacidade plena de transmissão de dados de um canal telefônico, há a necessidade de uma *equalização adaptativa*. O dispositivo usado para executar a equalização adaptativa é chamado *equalizador adaptativo*. O equalizador adaptativo, composto de um filtro FIR, comumente é colocado à frente do receptor. A Figura 10.12 mostra o diagrama de blocos de um equalizador adaptativo. Este equalizador ajusta seus próprios parâmetros (isto é, coeficientes de filtro FIR) contínua e automaticamente operando num par de sinais:

- *Sinais de entrada*,  $x[n]$ , que representam uma versão distorcida do sinal transmitido por um canal
- *Resposta desejada*,  $d[n]$ , que representam uma réplica do sinal transmitido.

## EPÍLOGO

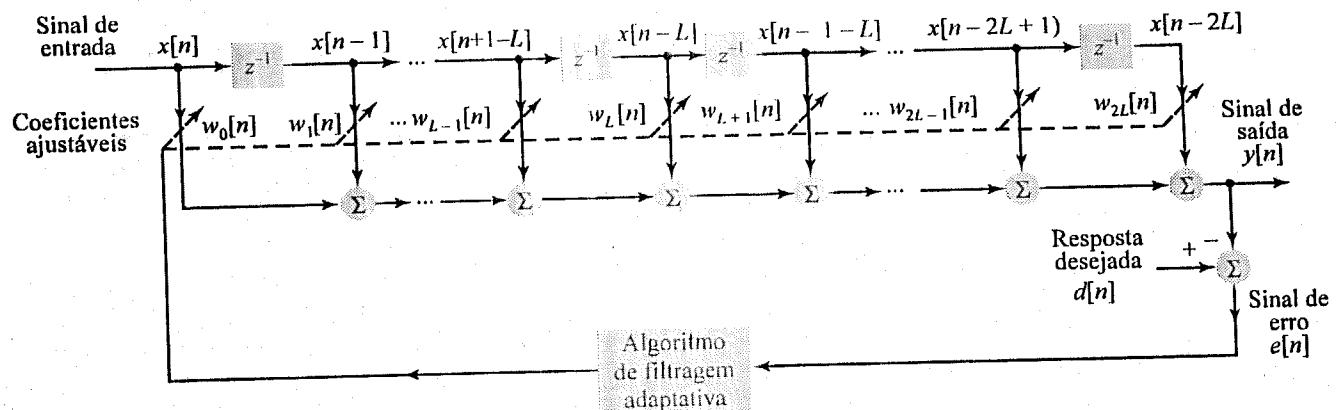
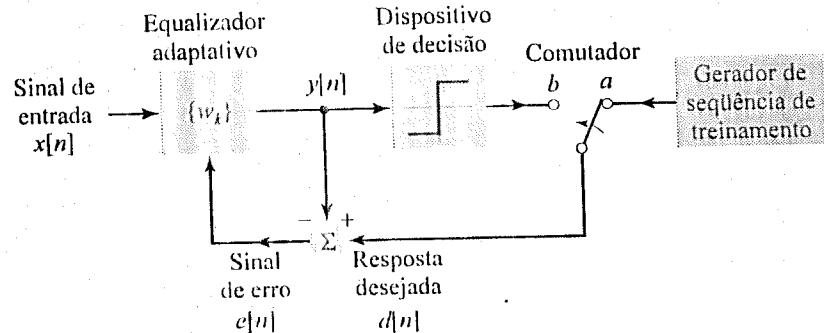


FIGURA 10.12 Equalizador adaptativo construído em torno de um filtro FIR.

A primeira reação de alguém à disponibilidade de uma réplica do sinal transmitido é: se este sinal está disponível no receptor, por que precisamos de equalização adaptativa? Para responder esta pergunta, observamos primeiramente que um canal telefônico típico se modifica pouco durante uma chamada de dados média. Conseqüentemente, antes da transmissão de dados, o equalizador é ajustado a partir de uma *seqüência de treinamento ou aprendizado* binária transmitida através do canal. Uma versão sincronizada desta seqüência de treinamento é gerada no receptor, onde (depois de um deslocamento de tempo igual ao retardo de transmissão através do canal) é aplicada ao equalizador como a resposta desejada. Uma seqüência de treinamento comumente usada na prática é a *seqüência de pseudo-ruído (PN\*)*, a qual consiste numa seqüência periódica determinística com características semelhantes a ruído. Dois geradores de seqüências PN idênticos são usados, um no transmissor e o outro no receptor. Quando o processo de treinamento se completa, o equalizador adaptativo está preparado para a operação normal. A seqüência de treinamento é desligada e dados binários portadores de informação são então transmitidos pelo canal. A saída do equalizador é passada por um dispositivo de limiar, e uma decisão é tomada quanto a se o símbolo de dados binários transmitidos é um “1” ou um “0.” Em operação normal, as decisões tomadas pelo receptor estão corretas na maioria das vezes. Isto significa que a seqüência de símbolos produzida na saída do dispositivo de limiar representa uma estimativa razoavelmente confiável da seqüência de dados transmitida e que pode, portanto, ser usada como um substituto para a resposta desejada, como indica a Figura 10.13. Este segundo modo de operação é chamado *modo dirigido por decisão*, cujo propósito é *rastrear* variações relativamente lentas nas características do canal que podem se desenvolver no decorrer da transmissão de dados normal.

FIGURA 10.13 Os dois modos de operar um equalizador adaptativo. (1) Quando o comutador está na posição *a*, o equalizador opera em seu modo de treinamento. (2) Quando o comutador é movido para a posição *b*, o equalizador opera em seu modo dirigido por decisão.

O ajuste dos coeficientes de filtro no equalizador é, neste modo, executado usando-se um *algoritmo de filtragem adaptativa* que procede da seguinte maneira:

\* N. de R.T.: PN de *Pseudo Noise*.

### 1. Modo de treinamento

- (i) Dados os coeficientes de filtro FIR na iteração  $n$ , o valor correspondente  $y[n]$  da saída real do equalizador real é computada em resposta ao sinal de entrada  $x[n]$ .
- (ii) A diferença entre a resposta desejada  $d[n]$  e a saída do equalizador  $y[n]$  é computada; esta diferença constitui o *sinal de erro*, denotado por  $e[n]$ .
- (iii) O sinal de erro  $e[n]$  é usado para aplicar correções aos coeficientes de filtro FIR.
- (iv) Usando os coeficientes de filtro atualizados do equalizador, os passos (i) a (iii) são repetidos até que o equalizador atinja uma condição de estado estacionário, a partir do qual nenhuma mudança notável nos coeficientes de filtro é observada.

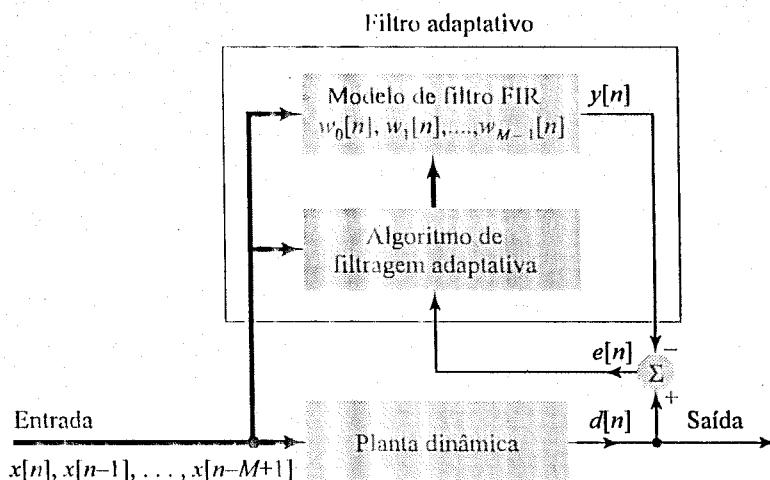
Para iniciar esta seqüência de iterações, os coeficientes de filtro são tornados iguais a alguns valores apropriados (por exemplo, zero para todos eles) em  $n = 0$ . Os detalhes das correções aplicadas aos coeficientes de filtro de uma iteração para a seguinte são determinados pelo tipo de algoritmo de filtragem adaptativo empregado.

### 2. Modo dirigido por decisão

Este segundo modo de operação se inicia onde o modo de treinamento se encerra e usa o mesmo conjunto de passos, com exceção de duas modificações:

- A saída do dispositivo de limiar é substituída pela resposta desejada.
- Os ajustes nos coeficientes de filtro do equalizador são continuados ao longo da transmissão de dados.

Outra aplicação útil da filtragem adaptativa é na *identificação de sistema*. Nesta aplicação, temos uma planta dinâmica desconhecida, cuja operação não pode ser interrompida, e para a qual precisamos construir um modelo. A Figura 10.14 mostra o diagrama de blocos de como esse modelo, que consiste num filtro FIR, pode ser computado. O sinal da entrada  $x[n]$  é aplicado simultaneamente à planta e ao modelo. Digamos que  $d[n]$  e  $y[n]$  denotem os valores correspondentes da saída da planta e da saída do modelo, respectivamente. A saída da planta  $d[n]$  faz o papel da resposta desejada nesta aplicação. A diferença entre  $d[n]$  e  $y[n]$  define, dessa forma, o sinal de erro  $e[n]$ , o qual deve ser minimizado de acordo com algum critério especificado. Esta minimização é obtida usando-se um algoritmo de filtragem adaptativa que ajuste os parâmetros do modelo (isto é, coeficientes de filtro FIR) num modo passo a passo, seguindo-se um procedimento similar ao descrito para o modo de treinamento do equalizador adaptativo.



**FIGURA 10.14** Diagrama de blocos de um modelo FIR cujos coeficientes são ajustados por um algoritmo de filtragem adaptativa para a identificação de uma planta dinâmica desconhecida.

A equalização adaptativa e a identificação de sistemas são apenas duas das muitas aplicações dos filtros adaptativos, as quais abrangem áreas tão diversas como comunicações, controle, radar, sonar, sismologia, rádio-astronomia e engenharia bioquímica.

## 10.4 Observações Finais

O material apresentado nos nove capítulos anteriores apresenta um tratamento teórico dos sinais e sistemas, o qual prepara o caminho para estudos detalhados do processamento de sinais digitais, sistemas de comunicação e sistemas de controle. A teoria apresentada baseia-se nas seguintes idealizações:

- ▶ Sinais estacionários
- ▶ Sinais lineares invariantes no tempo

Neste capítulo, destacamos as limitações dessa teoria, vistas da perspectiva de sinais e sistemas da vida real. Ao fazer isto, também abordamos brevemente os tópicos do caos, processos aleatórios, análise de tempo-freqüência, sistemas não-lineares e filtros adaptativos. Estes tópicos e os apresentados nos capítulos anteriores enfatizam a enorme amplitude daquilo que geralmente é abrangido pelo tema dos Sinais e Sistemas.

Outro ponto digno de nota é que ao longo deste livro focalizamos o tempo como uma variável independente. Portanto, podemos referir-nos ao material aqui abordado como *processamento temporal*. No *processamento espacial*, por outro lado, as coordenadas espaciais desempenham o papel de variáveis independentes. Exemplos de processamento espacial são encontrados em antenas de abertura contínua, arranjos (discretos) de antenas e processamento de imagens. Grande parte do material apresentado neste livro se aplica igualmente bem ao processamento espacial, mostrando assim ainda mais a sua natureza fundamental.

## LEITURA ADICIONAL

1. A abordagem clássica à caracterização dos sinais de fala é discutida nos seguintes livros:  
Flanagan, J. L., *Speech Analysis: Synthesis and Perception* (Springer-Verlag, 1972)
  - ▶ Rabiner, L. R. e R. W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signals* (Prentice Hall, 1978)Para um tratamento mais completo do assunto, veja o livro:
  - ▶ Deller, J. R. Jr., J. G. Proakis e J. H. L. Hanson, *Discrete-Time Processing of Speech Signals* (Prentice Hall, 1993)
2. Para um tratamento introdutório da teoria das probabilidades e dos processos aleatórios, veja os seguintes livros:
  - ▶ Helstrom, C. W., *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, segunda edição (Macmillan, 1990)
  - ▶ Leon-Garcia, A., *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, segunda edição (Addison-Wesley, 1994)
  - ▶ Thomas, J. B., *Introduction to Probability* (Springer-Verlag, 1986)
3. Para uma descrição de fácil leitura da dinâmica não-linear, incluindo o caos, veja o livro:
  - ▶ Abraham, R. H. e C. D. Shaw, *Dynamics: The Geometry of Behavior* (Addison-Wesley, 1992)
  - ▶ A edição de maio de 1998 da *IEEE Signal Processing Magazine*, Volume 15, Nº 3, apresenta dois artigos dedicados ao processamento de sinais caóticos.
4. O tema da análise de tempo – freqüência é coberto no livro:
  - ▶ Cohen, L., *Time-Frequency Analysis* (Prentice Hall, 1995)Para obter uma discussão de *wavelets*, veja:
  - ▶ Meyer, Y., *Wavelets: Algorithms and Applications* (SIAM, 1993)
  - ▶ Vetterli, M. e J. Kovacevic, *Wavelets and Subband Coding* (Prentice Hall, 1995)

Para um artigo de fácil leitura sobre aplicações médicas da transformada *wavelet*, veja:

- Akay, M., "Wavelet applications in medicine," *IEEE Spectrum*, vol. 34, nº 5, pp. 50-56, maio de 1997

5. Para um estudo de análise de sistemas não-lineares, veja os livros:

- Atherton, D. P., *Nonlinear-Control Engineering* (Van Nostrand-Reinhold, 1975)
- Slotine, J.-J. E., e W. Li, *Applied Nonlinear Control* (Prentice Hall, 1991)

6. A teoria dos filtros adaptativos e suas aplicações são cobertas nos seguintes livros:

- Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, terceira edição (Prentice Hall, 1996)
- Widrow, B. e S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing* (Prentice Hall, 1985)

# A

## IDENTIDADES MATEMÁTICAS SELECCIONADAS



### A.1 Trigonometria

Considere o triângulo retângulo ilustrado na Figura A.1. As seguintes relações são válidos:

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

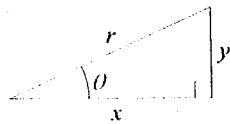


FIGURA A.1 Triângulo retângulo.

Outras identidades incluem:

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin \theta \sin \phi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)]$$

$$\cos \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)]$$

$$\sin \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\sin(\theta - \phi) + \sin(\theta + \phi)]$$

## A.2 Números Complexos

Seja  $w$  um número complexo expresso em coordenadas retangulares como  $w = x + jy$ , em que  $j = \sqrt{-1}$ ,  $x = \operatorname{Re}\{w\}$  é a parte real de  $w$ , e  $y = \operatorname{Im}\{w\}$  é a parte imaginária. Expressamos  $w$  em coordenadas polares como  $w = re^{j\theta}$ , em que  $r = |w|$  é a magnitude ou módulo de  $w$  e  $\theta = \arg\{w\}$  é a fase de  $w$ . As representações retangular e polar do número  $w$  são ilustradas no plano complexo da Figura A.2.

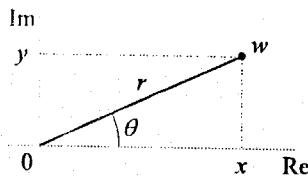


FIGURA A.2 O plano complexo.

### ■ CONVERTENDO DE COORDENADAS RETANGULARES PARA POLARES

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

### ■ CONVERTENDO DE COORDENADAS POLARES PARA RETANGULARES

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

### ■ CONJUGADO COMPLEXO

Se  $w = x + jy = re^{j\theta}$ , então usando o asterisco para denotar conjugado complexo,

$$w^* = x - jy = re^{-j\theta}$$

### ■ FÓRMULA DE EULER

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$$

### ■ OUTRAS IDENTIDADES

$$ww^* = r^2$$

$$x = \operatorname{Re}(w) = \frac{w + w^*}{2}$$

$$y = \operatorname{Im}(w) = \frac{w - w^*}{2j}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

### A.3 Série Geométrica

Se  $\beta$  for um número complexo, então a seguinte relação é válida:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n = \begin{cases} \frac{1-\beta^N}{1-\beta}, & \beta \neq 1 \\ N, & \beta = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{1}{1-\beta}, \quad |\beta| < 1$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \beta^n = \frac{\beta^k}{1-\beta}, \quad |\beta| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\beta^n = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}, \quad |\beta| < 1$$

### A.4 Integrais Definidas

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b, \quad n \neq -1$$

$$\int_a^b e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx} \Big|_a^b$$

$$\int_a^b x e^{cx} dx = \frac{1}{c^2} e^{cx} (cx - 1) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b \cos(cx) dx = \frac{1}{c} \operatorname{sen}(cx) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b \operatorname{sen}(cx) dx = -\frac{1}{c} \cos(cx) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b x \cos(cx) dx = \frac{1}{c^2} (\cos(cx) + cx \operatorname{sen}(cx)) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b x \operatorname{sen}(cx) dx = \frac{1}{c^2} (\operatorname{sen}(cx) - cx \cos(cx)) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b e^{gx} \cos(cx) dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + c^2} (g \cos(cx) + c \operatorname{sen}(cx)) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b e^{gx} \operatorname{sen}(cx) dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + c^2} (g \operatorname{sen}(cx) - c \cos(cx)) \Big|_a^b$$

### ■ PULSOS GAUSSIANOS

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma \sqrt{2\pi}, \quad \sigma > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma^3 \sqrt{2\pi}, \quad \sigma > 0$$

### ■ INTERGRAÇÃO POR PARTES

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

## A.5 Matrizes

Uma *matriz* é um conjunto de números organizados num arranjo ordenado retangular. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz com duas colunas e duas linhas. Deste modo, dizemos que  $\mathbf{A}$  é uma matriz **dois por dois**. A primeira e a segunda linhas de  $\mathbf{A}$  são dadas por  $[2 \ 3]$  e  $[-1 \ 4]$ , respectivamente. Indexamos os elementos da matriz em termos de sua localização, a qual é medida pela linha e coluna em que o elemento se situa. Por exemplo, o elemento na primeira linha e segunda coluna de  $\mathbf{A}$  é 3. Os símbolos maiúsculos em negrito são usados para denotar quantidades matriciais.

Um *vetor* é uma matriz que contém uma única coluna ou uma única linha. Um *vetor coluna* consiste numa única coluna. Por exemplo,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

é um vetor coluna bidimensional. Um *vetor linha* consiste numa única linha. Por exemplo,

$$\mathbf{c} = [2 \ -1]$$

é um vetor linha bidimensional. Vetores são denotados por minúsculas em negrito.

### ■ ADIÇÃO

Se  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  forem os elementos na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , respectivamente, então a matriz  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  tem elementos  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

### ■ MULTIPLICAÇÃO

Se  $a^{ik}$  for o elemento da  $i$ -ésima linha e  $k$ -ésima coluna de uma matriz  $\mathbf{A}$   $M$  por  $N$  e  $b_{kj}$  for o elemento da  $k$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de uma matriz  $\mathbf{B}$   $N$  por  $L$ , então a matriz  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$   $M$  por  $L$  tem elementos  $c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj}$ .

#### *Matriz Inversa Dois por Dois*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

#### *Inversa do Produto de Matrizes*

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem invertíveis, então

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

# B

## EXPANSÕES EM FRAÇÕES PARCIAIS



*Expansões em frações parciais* são usadas para expressar uma razão de polinômios como uma soma de razões de polinômios de ordem mais baixa. Essencialmente, a expansão em frações parciais é a operação inversa de se colocar uma soma de frações sobre um denominador comum. A expansão em frações parciais é usada em problemas de sinais e sistemas para determinar as transformadas inversas de Fourier, de Laplace e z. Neste contexto, usamos uma expansão em frações parciais para expressar uma razão de polinômios como uma soma de termos para os quais a transformada inversa é conhecida.

Há duas diferentes formas padrão para as razões de polinômios que ocorrem em nosso estudo dos sinais e sistemas. Uma, surge no contexto das representações de sinais e sistemas de tempo contínuo, ao passo que a outra surge no contexto dos sinais e sistemas de tempo discreto. Nós as trataremos separadamente, uma vez que o método para executar a expansão em frações parciais difere ligeiramente em cada caso.

### B.1 *Expansões em Frações Parciais para Representações de Tempo Contínuo*

No estudo dos sinais e sistemas de tempo contínuo, geralmente encontramos razões de polinômios que têm a forma

$$\begin{aligned} W(u) &= \frac{B(u)}{A(u)} \\ &= \frac{b_M u^M + b_{M-1} u^{M-1} + \dots + b_1 u + b_0}{u^N + a_{N-1} u^{N-1} + \dots + a_1 u + a_0} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Num problema com transformada de Fourier, a variável  $u$  representa  $\omega$  e num problema com transformada de Laplace  $u$  representa  $s$ . Observe que o coeficiente de  $u^N$  em  $A(u)$  é a unidade. Supomos que  $W(u)$  seja uma função racional própria; ou seja, a ordem de  $B(u)$  é menor do que a de  $A(u)$  ( $M < N$ ). Se esta condição não for satisfeita, a divisão de  $B(u)$  por  $A(u)$  é usada para escrevermos  $W(u)$  como a soma de um polinômio em  $u$  e uma função racional própria representando o resto da divisão. A expansão em frações parciais é então aplicada ao resto.

O primeiro passo ao executarmos uma expansão em frações parciais é fatorar o polinômio do denominador. Se as  $N$  raízes  $d_i$  forem distintas, poderemos reescrever  $W(u)$ , como é mostrado por

$$W(u) = \frac{B(u)}{(u - d_1)(u - d_2) \cdots (u - d_N)}$$

Neste caso, a expansão em frações parciais para  $W(u)$  assume a forma

$$W(u) = \frac{C_1}{u-d_1} + \frac{C_2}{u-d_2} + \cdots + \frac{C_N}{u-d_N} \quad (\text{B.2})$$

Se a raiz  $u = r$  ocorrer com multiplicidade  $L$ , então  $W(u)$  será da forma

$$W(u) = \frac{B(u)}{(u-r)^L (u-d_1)(u-d_2)\cdots(u-d_{N-L})}$$

e a expansão em frações parciais para  $W(u)$  será dada por

$$\begin{aligned} W(u) &= \frac{C_1}{u-d_1} + \frac{C_2}{u-d_2} + \cdots + \frac{C_{N-L}}{u-d_{N-L}} + \frac{K_{L-1}}{u-r} \\ &\quad + \frac{K_{L-2}}{(u-r)^2} + \cdots + \frac{K_0}{(u-r)^L} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Observe que quando aumenta a potência para a qual os termos  $(u-r)$  do denominador são elevados, os índices  $i$  dos coeficientes correspondentes  $K_i$  diminuem.

As constantes  $C_i$  e  $K_i$  são chamados *resíduos*. Podemos obter os resíduos usando duas abordagens diferentes. No método de equações lineares, colocamos todos os termos da expansão em frações parciais de  $W(u)$  sobre um denominador comum e igualamos o coeficiente de cada potência de  $u$  com o correspondente coeficiente em  $B(u)$ . Isto resulta num sistema de  $N$  equações lineares que pode ser resolvido para se obter os resíduos, como é ilustrado no exemplo seguinte. Para cálculos manuais esta abordagem geralmente se limita a  $N = 2$  ou  $N = 3$ .

**EXEMPLO B.1** Determine a expansão em frações parciais para a função

$$W(u) = \frac{3u+5}{u^3+4u^2+5u+2}$$

**Solução:** As raízes do polinômio do denominador são  $u = -2$  e  $u = -1$  com multiplicidade dois. Consequentemente, a expansão de  $W(u)$  em frações parciais tem a forma

$$W(u) = \frac{K_1}{u+1} + \frac{K_0}{(u+1)^2} + \frac{C_1}{u+2}$$

Os resíduos  $K_1$ ,  $K_0$  e  $C_1$  podem ser determinados colocando-se os termos na expansão em frações parciais sobre um denominador comum, como é mostrado por

$$\begin{aligned} W(u) &= \frac{K_1(u+1)(u+2)}{(u+1)^2(u+2)} + \frac{K_0(u+2)}{(u+1)^2(u+2)} + \frac{C_1(u+1)^2}{(u+1)^2(u+2)} \\ &= \frac{(K_1+C_1)u^2 + (3K_1+K_0+2C_1)u + (2K_1+2K_0+C_1)}{u^3+4u^2+5u+2} \end{aligned}$$

Igualar o coeficiente de cada potência de  $u$  no numerador do lado direito desta equação com os de  $B(u)$  resultará no sistema de três equações de três incógnitas  $K_1$ ,  $K_0$  e  $C_1$  mostrado por

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + C_1 \\ 3 &= 3K_1 + K_0 + 2C_1 \\ 5 &= 2K_1 + 2K_0 + C_1 \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações, obtemos  $K_1 = 1$ ,  $K_0 = 2$  e  $C_1 = -1$ , de forma que a expansão em frações parciais de  $W(u)$  é dada por

$$W(u) = \frac{1}{u+1} + \frac{2}{(u+1)^2} - \frac{1}{u+2}$$

## EXPANSÕES EM FRAÇÕES PARCIAIS

O método dos resíduos baseia-se na manipulação da expansão em frações parciais de forma a isolar cada resíduo. Conseqüentemente, este método comumente é mais fácil de usar do que resolver equações lineares. Considere multiplicar cada lado da equação (B.3) por  $(u - d_i)$ , como é mostrado por

$$(u - d_i)W(u) = \frac{C_1(u - d_i)}{u - d_1} + \frac{C_2(u - d_i)}{u - d_2} + \dots + C_i + \dots + \frac{C_{N-L}(u - d_i)}{u - d_{N-L}} \\ + \frac{K_{L-1}(u - d_i)}{u - r} + \frac{K_{L-2}(u - d_i)}{(u - r)^2} + \dots + \frac{K_0(u - d_i)}{(u - r)^L}$$

No lado esquerdo a multiplicação por  $(u - d_i)$  cancela o termo  $(u - d_i)$  no denominador de  $W(u)$ . Se avaliarmos agora esta expressão em  $u = d_i$ , todos os termos no lado direito serão nulos, com exceção de  $C_i$  e obteremos a expressão para  $C_i$  dada por

$$C_i = (u - d_i)W(u) \Big|_{u=d_i} \quad (B.4)$$

O isolamento dos resíduos associados com a raiz repetida  $u = r$  exige multiplicar ambos os lados da equação (B.3) por  $(u - r)^L$  e diferenciar. Teremos

$$K_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{du^i} \left\{ (u - r)^L W(u) \right\} \Big|_{u=r} \quad (B.5)$$

O exemplo seguinte usa as equações (B.4) e (B.5) para obter resíduos.

**EXEMPLO B.2** Encontre a expansão em frações parciais para

$$W(u) = \frac{3u^3 + 15u^2 + 29u + 21}{(u+1)^2(u+2)(u+3)}$$

**Solução:** Aqui, temos uma raiz de multiplicidade dois em  $u = -1$  e raízes distintas em  $u = -2$  e  $u = -3$ . Conseqüentemente, a expansão de  $W(u)$  em frações parciais tem a forma

$$W(u) = \frac{K_1}{u+1} + \frac{K_0}{(u+1)^2} + \frac{C_1}{u+2} + \frac{C_2}{u+3}$$

Obtemos  $C_1$  e  $C_2$  usando a equação (B.4), como é mostrado por

$$C_1 = (u+2) \frac{3u^3 + 15u^2 + 29u + 21}{(u+1)^2(u+2)(u+3)} \Big|_{u=-2} \\ = -1$$

$$C_2 = (u+3) \frac{3u^3 + 15u^2 + 29u + 21}{(u+1)^2(u+2)(u+3)} \Big|_{u=-3} \\ = 3$$

Agora podemos obter  $K_1$  e  $K_0$  usando a equação (B.5) da seguinte maneira:

$$K_0 = (u+1)^2 \frac{3u^3 + 15u^2 + 29u + 21}{(u+1)^2(u+2)(u+3)} \Big|_{u=-1} \\ = 2$$

$$K_1 = \frac{1}{1!} \frac{d}{du} \left\{ (u+1)^2 \frac{3u^3 + 15u^2 + 29u + 21}{(u+1)^2(u+2)(u+3)} \right\} \Big|_{u=-1} \\ = \frac{(9u^2 + 30u + 29)(u^2 + 5u + 6) - (3u^3 + 15u^2 + 29u + 21)(2u + 5)}{(u^2 + 5u + 6)^2} \Big|_{u=-1} \\ = 1$$

Conseqüentemente, a expansão de  $W(u)$  em frações parciais é dada por

$$W(u) = \frac{1}{u+1} + \frac{2}{(u+1)^2} - \frac{1}{u+2} + \frac{3}{u+3}$$

Podemos tirar as seguintes conclusões sobre os resíduos das equações (B.4) e (B.5):

- O resíduo associado com uma raiz real é real.
- Os resíduos associados com um par de raízes conjugadas complexas são o conjugado complexo uma da outra e, dessa forma, somente uma delas precisa ser computada.

## B.2 Expansões em Frações Parciais para Representações de Tempo Discreto

No estudo de sinais e sistemas de tempo discreto freqüentemente encontramos razões de polinômios que têm a forma mostrada por

$$\begin{aligned} W(u) &= \frac{B(u)}{A(u)} \\ &= \frac{b_M u^M + b_{M-1} u^{M-1} + \dots + b_1 u + b_0}{a_N u^N + a_{N-1} u^{N-1} + \dots + a_1 u + 1} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Num problema com transformada de Fourier de tempo discreto, a variável  $u$  representa  $e^{-j\Omega}$ , ao passo que, num problema com transformada  $z$ ,  $u$  representa  $z^{-1}$ . Observe que, aqui, o coeficiente da potência de  $u$  com expoente zero em  $A(u)$  é a unidade. Novamente, supomos que  $W(u)$  seja uma função racional própria: ou seja, a ordem de  $B(u)$  é menor do que a de  $A(u)$  ( $M < N$ ). Se esta condição não for satisfeita, então uma divisão de  $B(u)$  por  $A(u)$  será usada para escrever  $W(u)$  como a soma de um polinômio em  $u$  e uma função racional própria representando o resto da divisão. A expansão em frações parciais será então aplicada ao resto.

Aqui, escrevemos o polinômio do denominador como um produto de termos de primeira ordem, como é mostrado por

$$A(u) = (1 - d_1 u)(1 - d_2 u) \cdots (1 - d_N u) \quad (\text{B.7})$$

em que  $d_i^{-1}$  é uma raiz de  $A(u)$ . De maneira equivalente,  $d_i$  é uma raiz do polinômio  $\tilde{A}(u)$  construído invertendo-se a ordem dos coeficientes em  $A(u)$ . Ou seja,  $d_i$  é uma raiz de

$$\tilde{A}(u) = u^N + a_1 u^{N-1} + \dots + a_{N-1} u + a_N$$

Se todos os  $d_i$  forem distintos, a expansão em frações parciais é dada por

$$W(u) = \frac{C_1}{1 - d_1 u} + \frac{C_2}{1 - d_2 u} + \dots + \frac{C_N}{1 - d_N u} \quad (\text{B.8})$$

Se um termo  $1 - ru$  ocorrer com multiplicidade  $L$  na equação (B.7), a expansão em frações parciais terá a forma mostrada por

$$\begin{aligned} W(u) &= \frac{C_1}{1 - d_1 u} + \frac{C_2}{1 - d_2 u} + \dots + \frac{C_{N-L}}{1 - d_{N-L} u} \\ &\quad + \frac{K_{L-1}}{(1 - ru)^L} + \frac{K_{L-2}}{(1 - ru)^2} + \dots + \frac{K_0}{(1 - ru)^L} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Os resíduos  $C_i$  e  $K_i$  podem ser determinados de maneira análoga ao caso de tempo contínuo. Podemos colocar o lado direito da equação (B.8) ou (B.9) sobre um denominador comum e obtermos um sistema de  $N$  equações lineares igualando os coeficientes de potências iguais de  $u$  nos polinômios dos numeradores. Alternativamente, podemos obter os resíduos diretamente, manipulando a expansão em frações parciais de tal maneira a isolarmos cada coeficiente. Isto produz as duas relações seguintes:

$$C_i = (1 - d_i u)W(u) \Big|_{u=d_i^{-1}} \quad (\text{B.10})$$

$$K_i = \frac{1}{i!} (-r^{-1})^i \frac{d^i}{du^i} \{(1 - ru)^L W(u)\} \Big|_{u=r^{-1}} \quad (\text{B.11})$$

## EXPANSÕES EM FRAÇÕES PARCIAIS

**EXEMPLO B.3** Encontre a expansão em frações parciais correspondentes à função de tempo discreto

$$W(u) = \frac{-14u - 4}{8u^3 - 6u - 2}$$

**Solução:** O termo constante não é a unidade no denominador e, deste modo, dividimos primeiro o denominador e o numerador por  $-2$  para expressar  $W(u)$  na forma padrão. Podemos então escrever

$$W(u) = \frac{7u + 2}{-4u^3 + 3u + 1}$$

O polinômio do denominador  $A(u)$  é fatorado encontrando-se as raízes do polinômio associado

$$\tilde{A}(u) = u^3 + 3u^2 - 4$$

Este polinômio tem uma raiz única em  $u = 1$ , e uma raiz de multiplicidade dois em  $u = -2$ . Consequentemente,  $W(u)$  pode ser expresso como

$$W(u) = \frac{7u + 2}{(1-u)(1+2u)^2}$$

e a expansão em frações parciais tem a forma dada por

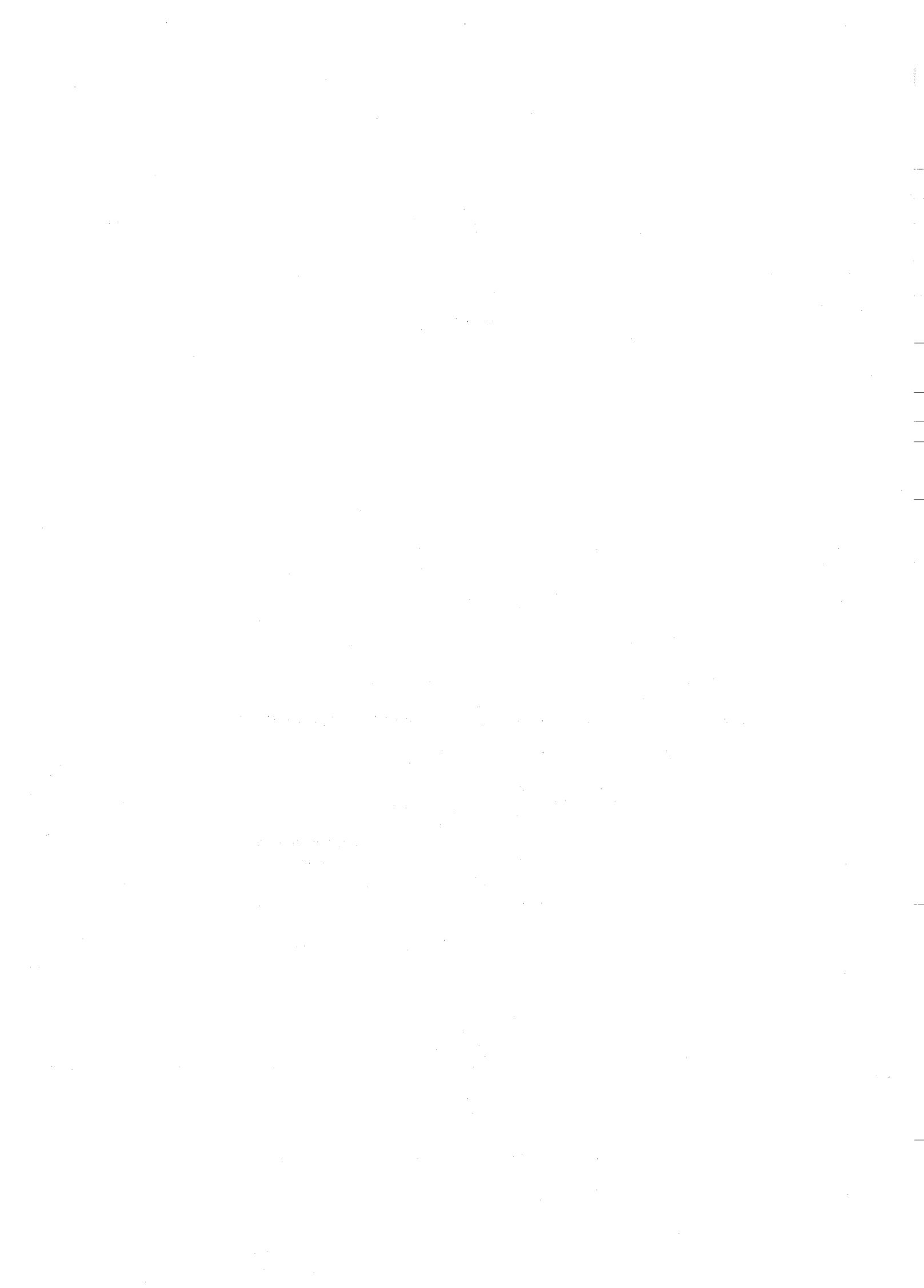
$$W(u) = \frac{C_1}{1-u} + \frac{K_1}{1+2u} + \frac{K_0}{(1+2u)^2}$$

Os resíduos são avaliados usando-se as equações (B.10) e (B.11) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C_1 &= (1-u)W(u)|_{u=1} \\ &= 1 \\ K_0 &= (1+2u)^2 W(u)|_{u=-1/2} \\ &= -1 \\ K_1 &= \frac{1}{1!} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{d}{du} [(1+2u)^2 W(u)] \Big|_{u=-1/2} \\ &= \frac{7(1-u) + (7u+2)}{2(1-u)^2} \Big|_{u=-1/2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Concluímos que a expansão em frações parciais é mostrada por

$$W(u) = \frac{1}{1-u} + \frac{2}{1+2u} - \frac{1}{(1+2u)^2}$$



# C

## TABELAS DE REPRESENTAÇÕES E PROPRIEDADES FOURIER



### C.1 Pares Básicos de Séries de Fourier de Tempo Discreto

Domínio de Tempo	Domínio de Freqüência
$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jkn\Omega_o}$	$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jkn\Omega_o}$ $\Omega_o = \frac{2\pi}{N}$
$x[n] = \begin{cases} 1, &  n  \leq M \\ 0, & M <  n  \leq N/2 \end{cases}$ $x[n] = x[n+N]$	$X[k] = \frac{\sin\left(k \frac{\Omega_o}{2} (2M+1)\right)}{N \sin\left(k \frac{\Omega_o}{2}\right)}$
$x[n] = e^{jp\Omega_o n}$	$X[k] = \begin{cases} 1, & k = p, p \pm N, p \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
$x[n] = \cos(p\Omega_o n)$	$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm p, \pm p \pm N, \pm p \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
$x[n] = \operatorname{sen}(p\Omega_o n)$	$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = p, p \pm N, p \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -p, -p \pm N, -p \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
$x[n] = 1$	$X[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
$x[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta[n - pN]$	$X[k] = \frac{1}{N}$

## C.2 Pares Básicos de Séries de Fourier

Domínio de Tempo	Domínio de Freqüência
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j k \omega_o t}$	$X[k] = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-j k \omega_o t} dt$
<i>Período = T</i>	$\omega_o = \frac{2\pi}{T}$
$x(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq T_s \\ 0, & T_s <  t  \leq T/2 \end{cases}$	$X[k] = \frac{\operatorname{sen}(k\omega_o t_s)}{k\pi}$
$x(t) = e^{jp\omega_o t}$	$X[k] = \delta[k - p]$
$x(t) = \cos(p\omega_o t)$	$X[k] = \frac{1}{2} \delta[k - p] + \frac{1}{2} \delta[k + p]$
$x(t) = \operatorname{sen}(p\omega_o t)$	$X[k] = \frac{1}{2j} \delta[k - p] - \frac{1}{2j} \delta[k + p]$
$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(t - pT)$	$X[k] = \frac{1}{T}$

## C.3 Pares Básicos de Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Domínio de Tempo	Domínio de Freqüência
$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$	$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$
$x[n] = \begin{cases} 1, &  n  \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$X(e^{j\Omega}) = \frac{\operatorname{sen}\left[\Omega\left(\frac{2M+1}{2}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
$x[n] = \alpha^n u[n], \quad  \alpha  < 1$	$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$
$x[n] = \delta[n]$	$X(e^{j\Omega}) = 1$
$x[n] = u[n]$	$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi p)$
$x[n] = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}(Wn), \quad 0 < W \leq \pi$	$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, &  \Omega  \leq W \\ 0, & W <  \Omega  \leq \pi, \quad X(e^{j\Omega}) \text{ tem período } 2\pi \end{cases}$
$x[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$	$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^2}$

### C.4 Pares Básicos de Transformadas de Fourier

Domínio de Tempo	Domínio de Freqüência
$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
$x(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$X(j\omega) = \frac{2 \operatorname{sen}(\omega T)}{\omega}$
$x(t) = \frac{1}{\pi t} \operatorname{sen}(Wt)$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, &  \omega  \leq W \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
$x(t) = \delta(t)$	$X(j\omega) = 1$
$x(t) = 1$	$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$
$x(t) = u(t)$	$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$x(t) = e^{-at} u(t), \quad \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$
$x(t) = te^{-at} u(t), \quad \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$x(t) = e^{-a t }, \quad a > 0$	$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$X(j\omega) = e^{-\omega^2/2}$

### C.5 Pares de Transformadas de Fourier para Sinais Periódicos

Sinal Periódico de Domínio de Tempo	Transformada de Fourier
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$	$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_o)$
$x(t) = \cos(\omega_o t)$	$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_o) + \pi\delta(\omega + \omega_o)$
$x(t) = \operatorname{sen}(\omega_o t)$	$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_o) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_o)$
$x(t) = e^{j\omega_o t}$	$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_o)$
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$
$x(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq T_s \\ 0, & T_s <  t  < T/2 \end{cases}$ $x(t+T) = x(t)$	$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_o T_s)}{k} \delta(\omega - k\omega_o)$

## C.6 Pares de Transformadas de Fourier de Tempo Discreto para Sinais Periódicos

Sinal Periódico de Domínio de Tempo	Transformada de Fourier de Tempo Discreto
$x[n] = \sum_{k=N} X[k] e^{j k \Omega_o n}$	$X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_o)$
$x[n] = \cos(\Omega_1 n)$	$X(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_1 - k2\pi) + \delta(\Omega + \Omega_1 - k2\pi)$
$x[n] = \sin(\Omega_1 n)$	$X(e^{j\Omega}) = \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_1 - k2\pi) - \delta(\Omega + \Omega_1 - k2\pi)$
$x[n] = e^{j\Omega_1 n}$	$X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_1 - k2\pi)$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$X(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{k2\pi}{N}\right)$

## C.7 Propriedades das Representações de Fourier

Propriedade	Transformada de Fourier	Série de Fourier
	$x(t) \xleftarrow{FT} X(j\omega)$ $y(t) \xleftarrow{FT} Y(j\omega)$	$x(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} X[k]$ $y(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} Y[k]$ Período = $T$
Linearidade	$ax(t) + by(t) \xleftarrow{FT} aX(j\omega) + bY(j\omega)$	$ax(t) + by(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} aX[k] + bY[k]$
Deslocamento no tempo	$x(t - t_o) \xleftarrow{FT} e^{-j\omega_o t_o} X(j\omega)$	$x(t - t_o) \xleftarrow{FS; \omega_o} e^{-jk\omega_o t_o} X[k]$
Deslocamento em freqüência	$e^{j\gamma t} x(t) \xleftarrow{FT} X(j(\omega - \gamma))$	$e^{jk_o \omega_o t} x(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} X[k - k_o]$
Mudança de escala	$x(at) \xleftarrow{FT} \frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	$x(at) \xleftarrow{FS; a\omega_o} X[k]$
Diferenciação - tempo	$\frac{d}{dt} x(t) \xleftarrow{FT} j\omega X(j\omega)$	$\frac{d}{dt} x(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} jk\omega_o X[k]$
Diferenciação - freqüência	$-jtx(t) \xleftarrow{FT} \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$	—
Integração / soma	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftarrow{FT} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0)\delta(\omega)$	—
Convolução	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \xleftarrow{FT} X(j\omega)Y(j\omega)$	$\int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \xleftarrow{FS; \omega_o} TX[k]Y[k]$
Modulação	$x(t)y(t) \xleftarrow{FT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)Y(j(\omega - \nu)) d\nu$	$x(t)y(t) \xleftarrow{FS; \omega_o} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X[l]Y[k-l]$
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2 d\omega$	$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle}  x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  X[k] ^2$
Dualidade	$X(jt) \xleftarrow{FT} 2\pi\delta(-\omega)$	$x[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$ $X(e^{jt}) \xleftarrow{FS; 1} x[-k]$
Simetria	$x(t)$ real $\xleftarrow{FT} X^*(j\omega) = X(-j\omega)$	$x(t)$ real $\xleftarrow{FS; \omega_o} X^*[k] = X[-k]$
	$x(t)$ imaginário $\xleftarrow{FT} X^*(j\omega) = -X(-j\omega)$	$x(t)$ imaginário $\xleftarrow{FS; \omega_o} X^*[k] = -X[-k]$
	$x(t)$ real e par $\xleftarrow{FT} \text{Im}\{X(j\omega)\} = 0$	$x(t)$ real e par $\xleftarrow{FS; \omega_o} \text{Im}\{X[k]\} = 0$
	$x(t)$ real e ímpar $\xleftarrow{FT} \text{Re}\{X(j\omega)\} = 0$	$x(t)$ real e ímpar $\xleftarrow{FS; \omega_o} \text{Re}\{X[k]\} = 0$

<i>FT de Tempo Discreto</i>	<i>FS de Tempo Discreto</i>
$x[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$	$x[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} X[k]$
$y[n] \xleftarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega})$	$y[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} Y[k]$
$ax[n] + by[n] \xleftarrow{DTFT} aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$	$ax[n] + by[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} aX[k] + bY[k]$
$x[n - n_o] \xleftarrow{DTFT} e^{-j\Omega n_o} X(e^{j\Omega})$	$x[n - n_o] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} e^{-jk\Omega_o n_o} X[k]$
$e^{j\Gamma n} x[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j(\Omega - \Gamma)})$	$e^{jk_o \Omega_o n} x[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} X[k - k_o]$
$x_z[n] = 0, \quad n \neq lp$ $x_z[pn] \xleftarrow{DTFT} X_z(e^{j\Omega/p})$	$x_z[n] = 0, \quad n \neq lp$ $x_z[pn] \xleftarrow{DTFS; p\Omega_o} pX_z[k]$
$-jnx(t) \xleftarrow{DTFT} \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega})$	—
$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xleftarrow{DTFT} \frac{X(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$	—
$\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]y[n-l] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$	$\sum_{l=\langle N \rangle} x[l]y[n-l] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} NX[k]Y[k]$
$x[n]y[n] \xleftarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\Gamma})Y(e^{j(\Omega-\Gamma)}) d\Gamma$	$x[n]y[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} \sum_{l=\langle N \rangle} X[l]Y[k-l]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)}  X(e^{j\Omega}) ^2 d\Omega$	$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle}  x[n] ^2 = \sum_{k=\langle N \rangle}  X[k] ^2$
$x[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$ $X(e^{j\ell}) \xleftarrow{FS; 1} x[-k]$	$X[n] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} \frac{1}{N} x[-k]$
$x[n] \text{ real} \xleftarrow{DTFT} X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega})$ $x[n] \text{ imaginário} \xleftarrow{DTFT} X^*(e^{j\Omega}) = -X(e^{-j\Omega})$ $x[n] \text{ real e par} \xleftarrow{DTFT} \text{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = 0$ $x[n] \text{ real e ímpar} \xleftarrow{DTFT} \text{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = 0$	$x[n] \text{ real} \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} X^*[k] = X[-k]$ $x[n] \text{ imaginário} \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} X^*[k] = -X[-k]$ $x[n] \text{ real e par} \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} \text{Im}\{X[k]\} = 0$ $x[n] \text{ real e ímpar} \xleftarrow{DTFS; \Omega_o} \text{Re}\{X[k]\} = 0$

## C.8 Relacionando as Quatro Representações de Fourier

Seja

$$\begin{aligned} g(t) &\xleftarrow{FS; \omega_o = 2\pi/T} G[k] \\ v[n] &\xleftarrow{DTFT} V(e^{j\Omega}) \\ w[n] &\xleftarrow{DTFS; \Omega_o = 2\pi/N} W[k] \end{aligned}$$

### ■ REPRESENTAÇÃO COM FT DE UM SINAL PERIÓDICO DE TEMPO CONTÍNUO

$$g(t) \xleftarrow{FT} G(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} G[k] \delta(\omega - k\omega_o)$$

### ■ REPRESENTAÇÃO COM DTFT DE UM SINAL PERIÓDICO DE TEMPO DISCRETO

$$w[n] \xleftarrow{DTFT} W(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[k] \delta(\Omega - k\Omega_o)$$

### ■ REPRESENTAÇÃO COM FT DE UM SINAL APERIÓDICO DE TEMPO DISCRETO

$$v_\delta(t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] \delta(t - n\bar{T}) \xleftarrow{FT} V_\delta(j\omega) = V(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\omega\bar{T}}$$

### ■ REPRESENTAÇÃO COM FT DE UM SINAL PERIÓDICO DE TEMPO DISCRETO

$$w_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] \delta(t - n\bar{T}) \xleftarrow{FT} W_\delta(j\omega) = \frac{2\pi}{\bar{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[k] \delta\left(\omega - \frac{k\Omega_o}{\bar{T}}\right)$$

## C.9 Relações de Amostragem e Aliasing

Seja

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftarrow{FT} X(j\omega) \\ v[n] &\xleftarrow{DTFT} V(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

### ■ AMOSTRAGEM COM IMPULSOS DE SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\bar{T}) \delta(t - n\bar{T}) \xleftarrow{FT} X_\delta(j\omega) = \frac{1}{\bar{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - k\frac{2\pi}{\bar{T}}\right)\right)$$

$X_\delta(j\omega)$  tem período  $2\pi/\bar{T}$ .

### ■ AMOSTRAGEM DE UM SINAL DE TEMPO DISCRETO

$$y[n] = v[qn] \xleftarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} V(e^{j(\Omega - m2\pi)/q})$$

$Y(e^{j\Omega})$  tem período  $2\pi$ .

■ AMOSTRAGEM DA DTFT EM FREQÜÊNCIA

$$w[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[n+mN] \xleftarrow{DTFS; \Omega_o = 2\pi/N} W[k] = \frac{1}{N} V(e^{jk\Omega_o})$$

w[n] tem período N.

■ AMOSTRAGEM DA FT EM FREQÜÊNCIA

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t+mT) \xleftarrow{FS; \omega_o = 2\pi/T} G[k] = \frac{1}{T} X(jk\omega_o)$$

g(t) tem período T.

# D

## TABELAS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE E PROPRIEDADES



### D.1 Transformadas de Laplace Básicas

Sinal	Transformada	RDC
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\delta(t - \tau), \quad \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	para todos $s$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s + a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[\sin(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{s^3 + \omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[e^{-at} \cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[e^{-at} \sin(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{(s + a)^2 + \omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$

Obra originalmente publicada sob o título  
*Signals and Systems*

© John Wiley & Sons, Inc., 1999  
ISBN 0-471-13820-7

Tradução autorizada da língua inglesa conforme acordo com a John Wiley & Sons, Inc.

Capa: *Mário Röhnelt*

Supervisão editorial: *Arysinha Jacques Affonso*

Editoração eletrônica: *Editare*

Reservados todos os direitos de publicação em língua portuguesa à  
ARTMED EDITORA LTDA.

(BOOKMAN COMPANHIA EDITORA é uma divisão da Artmed Editora Ltda.)  
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 - Fone (51) 330-3444 Fax (51) 330-2378  
90040-340 Porto Alegre, RS, Brasil

SÃO PAULO  
Rua Francisco Leitão, 146 - Pinheiros  
Fone (11) 3085-7270/3062-9544  
05414-020 São Paulo, SP

IMPRESSO NO BRASIL  
PRINTED IN BRAZIL

■ TEOREMA DO VALOR INICIAL

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

Este resultado não se aplica a funções racionais  $X(s)$  nas quais a ordem do polinômio do numerador é igual ou maior do que a ordem do polinômio do denominador, uma vez que isto implica que  $X(s)$  contém termos da forma  $cs^k$ ,  $k \geq 0$ . Esses termos correspondem aos impulsos e suas derivadas localizadas no instante  $t = 0$  e são excluídos da transformada de Laplace unilateral.

■ TEOREMA DO VALOR FINAL

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} x(t)$$

Este resultado exige que todos os polos de  $sX(s)$  estejam no semiplano esquerdo do plano  $s$ .

■ PROPRIEDADE DA DIFERENCIACÃO UNILATERAL – FORMA GERAL

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xleftarrow{\text{def}} s^n X(s) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) \Big|_{t=0^+} - s \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} x(t) \Big|_{t=0^+} - \cdots - s^{n-2} \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^+} - s^{n-1} x(0^+)$$



# E

## TABELAS DE TRANSFORMADAS Z E PROPRIEDADES



### E.1 Transformadas z Básicas

Sinal	Transformada	RDC
$\delta[n]$	1	Todos $z$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z >1$
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$[\cos(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos\Omega_1}{1-z^{-1}2\cos\Omega_1+z^{-2}}$	$ z >1$
$[\sin(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin\Omega_1}{1-z^{-1}2\cos\Omega_1+z^{-2}}$	$ z >1$
$[r^n \cos(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{1-z^{-1}r\cos\Omega_1}{1-z^{-1}2r\cos\Omega_1+r^2z^{-2}}$	$ z >r$
$[r^n \sin(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{z^{-1}r\sin\Omega_1}{1-z^{-1}2r\cos\Omega_1+r^2z^{-2}}$	$ z >r$

### ■ TRANSFORMADAS BILATERAIS DE SINAIS NÃO-NULOS PARA $n < 0$

Sinal	Transformada Bilateral	RDC
$u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  <  \alpha $
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z  <  \alpha $

### E.2 Propriedades da Transformada $z$

Sinal	Transformada Unilateral	Transformada Bilateral	RDC
$x[n]$	$X(z)$	$X(z)$	$R_x$
$y[n]$	$Y(z)$	$Y(z)$	$R_y$
$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$	$aX(z) + bY(z)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$x[n-k]$	Veja abaixo	$z^{-k} X(z)$	$R_x$ com exceção, possivelmente, de $ z  = 0, \infty$
$\alpha^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$ \alpha  R_x$
$x[-n]$	—	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_x}$
$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$X(z)Y(z)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$nx[n]$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$R_x$ com exceção, possivelmente, da adição ou exclusão de $z = 0$

### ■ PROPRIEDADE DE DESLOCAMENTO NO TEMPO DA TRANSFORMADA $z$ UNILATERAL

$$x[n-k] \xrightarrow{z_u} x[-k] + x[-k+1]z^{-1} + \dots + x[-1]z^{-k+1} + z^{-k} X(z) \quad \text{para } k > 0$$

$$x[n+k] \xrightarrow{z_u} -x[0]z^k - x[1]z^{k-1} - \dots - x[k-1]z + z^k X(z) \quad \text{para } k > 0$$

# ÍNDICE ANALÍTICO

Ajanelamento, 226-228, 278-279  
**Aliasing**, 284  
Amostragem de impulsos, 283  
Amostragem para baixo  
(*downsampling*), 305  
Amostragem para cima (*upsampling*), 308  
Amostragem, 283-287  
Amostrar-e-reter, 368  
Amplificadores operacionais, 546-547  
terra virtual, 547  
Amplitude de quadratura  
modulação. *Veja Multiplexação*  
pela portadora em quadratura  
Análise tempo – freqüência, 624-625  
Auto-correlação, 162  
Autofunção, 164, 396  
Autovalor, 164, 396  
Borboleta (FFT), 327  
Cancelamento de polos e zeros, 574  
Causalidade, 65  
função de transferência, 427-430,  
469-472  
resposta ao impulso, 111-112  
CD-player de áudio, 298-300  
Círculo unitário, 449  
Codificação, 23  
Compensador (controlador) de atraso  
de fase, 602  
implementação usando  
circuito com amplificador  
operacional, 604-605  
projeto, usando o diagrama de  
Bode, 602  
projeto usando o lugar das raízes,  
606  
Compensador (controlador) de avanço  
de fase, 619  
Compressão de imagens, 629-630

Condições de Dirichlet, 180, 197  
Controlador com dois graus de  
liberdade, 619  
Controlador Proporcional (P), 616  
Convolução rápida, 322  
experiências com o MATLAB,  
331-332  
Correlação cruzada, 162  
Critério de Nyquist da estabilidade,  
578  
contorno de Nyquist, 581  
envolvimentos e circundamentos,  
578  
experiências com o MATLAB, 611  
lugar (diagrama) de Nyquist, 583  
Critério de Routh-Hurwitz, 565  
matriz de Routh, 566  
Decimização, 300, 304-305  
experiências com o MATLAB,  
329-330  
Desconvolução, 114  
Descrição por variáveis de estado,  
136-144  
definição de estado, 136  
diagramas de blocos, 138-141  
escolha de estado, 138-139  
experiências com o MATLAB,  
150-151  
função de transferência, 426-428,  
468-469  
resposta em freqüência, 266-268  
transformação de estado, 141-144  
Diagrama de Bode, 68-4  
estabilidade relativa, 587  
experiências com o MATLAB, 612  
fator quadrático (polo/zero), 585  
fator simples (polo/zero), 584  
freqüência de canto (quebra), 585  
Diagramas de blocos, 132-136,  
476-479  
Diferenciador, 519  
Distorção de retardo, 379  
Distorção linear, 526  
distorção de amplitude, 526  
distorção de fase, 526  
**Downsampling**, *veja amostragem para*  
baixo  
Energia, 28  
Entrada única/saída única, 27  
Equação característica, 125-126, 131  
Equação homogênea, 125-126  
Equações diferenciais e de diferenças,  
120-132  
avaliação numérica, 121-124  
condições iniciais, 122, 131  
estabilidade, 131  
experiências com o MATLAB,  
148-150  
função de transferência, 424-426,  
467-468  
invariância no tempo, 131  
linearidade, 130-131  
ordem, 120  
resolvendo, 125-130  
resposta ao impulso, 129-130, 132  
resposta completa, 129-130  
resposta em freqüência, 263-266  
resposta forçada, 125, 127-131,  
410-413, 481-482  
resposta natural, 125-127, 131,  
410-413, 481-482  
solução da transformada de  
Laplace, 409-413  
solução da transformada z, 481-482  
solução particular, 127-129  
tempo de resposta, 131-132

- Equações integrais, 135**
- Equalização, 527, 635**
- experiência com o MATLAB, 533**
- Equalizador de linha de retardo multi-estágios. Veja Equalização**
- Equalizador, 262**
- Especificações de domínio de tempo, 560**
- sobre-sinal percentual, 560**
  - tempo de acomodação, 560**
  - tempo de pico, 560**
  - tempo de subida, 560**
- Especificações de erro de estado estacionário, 553**
- constante de erro de aceleração, 555**
  - constante de erro de posição, 554**
  - constante de erro de velocidade, 555**
- Espectro de energia, 233**
- Espectro de fase, 172, 182, 191, 198**
- Espectro de magnitude, 172, 182, 191, 197-198**
- Estabilidade**
- entrada limitada/saída limitada, 61**
  - função de transferência, 427-430, 469-472**
  - resposta ao impulso, 112-113**
- Estabilidade condicional, 591-592**
- Estabilidade relativa de sistemas realimentados, 587**
- freqüência de cruzamento de fase, 589**
  - freqüência de cruzamento de ganho, 589**
  - margem de fase, 589**
  - margem de ganho, 589**
  - relação entre a margem de fase e a taxa de amortecimento, 590**
- Estruturas computacionais,**
- análise da transformada z, 475-479**
  - descrições por variáveis de estado, 136-144**
  - diagramas de blocos, 132-136**
  - experimentos com o MATLAB, 484-485**
  - forma direta I, 134-135**
  - forma direta II, 134-135, 476-477**
  - forma em cascata, 477-478**
  - forma paralela, 477-479**
  - reticular, 489-490**
- Expansão em frações parciais**
- DTFT inversa, 206-207**
- experiências com o MATLAB, 436-437, 482-483**
- FT inversa, 204-206**
- representações de tempo discreto, 646-647**
- tempo contínuo**
- representações, 643-646**
  - transformada de Laplace inversa, 406-409**
- Faixa de passagem, 261**
- Faixa de rejeição, 261**
- Faixa de transição, 353**
- Fase mínima, 430, 441, 471-472, 486**
- Fenômeno de Gibbs, 184, 230, 501-502**
- Filtro anti-aliasing, 203**
- Filtro anti-imagein, 206**
- Filtro passa-altas, 261**
- Filtro passa-baixas ideal, 497**
- caracterização de, prático, 503**
  - freqüência de corte da faixa de passagem, 503**
  - freqüência de corte da faixa de rejeição, 503**
  - transmissão de pulso retangular através de, 499**
- Filtro passa-baixas, 261. Veja também**
- Filtro passa-baixas ideal**
- Filtros adaptativos, 634**
- aplicação à equalização adaptativa, 635**
  - aplicação à identificação de sistema, 336**
- Filtros ativos, 551**
- Filtros de Butterworth, 505**
- ordem de, 505**
  - tabela de coeficientes, 508**
- Filtros de Chebyshev, 508**
- inversos, 509**
- Filtros digitais com resposta ao impulso de duração finita (FIR), 514**
- experiências com o MATLAB, 531**
- Filtros digitais com resposta ao impulso de duração infinita (IIR), 514, 522-523**
- experiências com o MATLAB, 532**
  - pré-warping, 523**
- Filtros digitais, 513**
- Filtros eléticos, 509**
- Filtros passivos, 26-403**
- Filtros passivos, 512**
- Filtros rejeita-faixa, 498**
- Filtros, 30, 261, 495**
- adaptativos, 634**
  - ativos, 551**
  - Butterworth, 505**
  - Chebyshev, 508**
  - digitais, 513**
  - ideais, 499**
  - passivos, 512**
- Fonemas sonoros, 622**
- Fonemas surdos, 622**
- Forma direta I, 134-135**
- Forma direta II, 134-135, 476-477**
- Forma em cascata, 477-478**
- Formas paralelas, 477-479**
- Fórmula de Euler, 640**
- Fourier, Joseph, 163, 245**
- Freqüência de Nyquist, 293**
- Freqüência de oscilação, 50**
- Freqüência, fundamental, 37**
- Freqüências naturais, 413**
- não amortecidas, 558**
- Função analítica, 580**
- Função de transferência, causalidade, 427-428**
- definição, 396, 446**
  - descrição por variáveis de estado, 426-428, 468-469**
  - equação de diferenças, 467**
  - equação diferencial, 424-425**
  - estabilidade, 427-430, 469-472**
  - polos e zeros, 424-425**
  - resposta ao impulso, 424, 466**
- Função definida pelo usuário, MATLAB, 75**
- Função degrau, 54-55**
- Função delta de Dirac. Veja Função impulso**
- Função impulso, 56-57**
- propriedade de mudança de escala no tempo, 57**
  - propriedade de peneiramento, 56-57**
  - uso prático da, 56-57**
- Função rampa, 58-59**
- função seno, 183**
  - função *signum* (sinal), 220**
- Funções de Walsh, 257**
- Funções janela**
- janela de Hamming, 515**

- janelas de Hanning, ou de co-seno elevado, 512  
 janelas retangulares, 514-515  
**Identidade de Euler**, 52  
**Identidades trigonométricas**, 639  
**Integrais**, definidas, 641  
**Integral de convolução**, 98-108  
 definição, 100  
 exemplos, 103-108  
 procedimento de avaliação, 103  
 propriedade associativa, 110  
 propriedade comutativa, 110-111  
 propriedade distributiva, 109  
 sinais não periódicos, 273-275  
 sinais periódicos, 226, 230, 273-275  
 transformada de Fourier, 223-224  
**Interconexão de sistemas**, 108-111, 132  
 conexões em cascata, 109-111  
 conexões em paralelo, 108-109  
 experiências com o MATLAB, 150  
**Interpolação, tempo discreto**, 300, 305-310  
 experiências com o MATLAB, 329-330  
 limitada pela faixa, ideal, 294-295  
**Inversão de bits**, 327  
**Janela de Hamming**. *Veja Funções janela*  
**Janela de Hanning**. *Veja Funções de janela*  
**Largura de faixa**, 239  
**Lóbulo principal**, 183  
**Lóbulos laterais**, 183  
**Matrizes**, 642-643  
**Memória**, 63  
**Método do lugar das raízes**, 568  
 critério angular, 570  
 critério do módulo ou da magnitude, 570  
 propriedades do, 571  
**Modelos de ordem reduzida**, 576  
 experiência com o MATLAB, 610  
 polos e zeros dominantes, 576  
 polos e zeros insignificantes, 576  
**Modulação angular**, 346  
**Modulação de amplitude**, 346, 350  
 demodulação, 355  
 descrição em domínio de freqüência, 351-352  
 descrição em domínio de tempo, 350  
 detector de envoltória, 355  
 distorção de envoltória, 351  
 experiências com o MATLAB, 379  
 faixas laterais, 351-352  
 largura de faixa de transmissão, 352  
 modulação percentual, 351  
 sobremodulação, 351  
 variantes de, 361-362  
**Modulação de faixa lateral vestigial**, 364  
 filtro produtor de forma da faixa lateral, 365  
**Modulação de fase**, 348  
**Modulação de freqüência**, 348  
**Modulação de pulso**, 348  
 analógica, 349  
 digital, 69-70  
**Modulação em faixa lateral dupla e portadora suprimida**, 357  
 descrição de domínio de freqüência, 357  
 detecção coerente, 358  
**Modulação por amplitude de pulso**, 366  
 demodulação, 369  
 descrição matemática da, 367  
 efeito de abertura, 369  
**Modulação por faixa lateral simples**, 362  
**Modulação por codificação de pulsos**, 349  
**Modulação**, 23, 222-223, 345  
 benefícios da, 349  
 fase, 348  
 freqüência, 348  
 onda contínua, 346  
 propriedade de Fourier, 225-233  
 pulso, 348  
 sinais periódicos/não periódicos, 275-280  
 motor dc, 500  
**Multiplexação** pela portadora em quadratura, 361  
 efeito nulo de quadratura, 359  
**Multiplexação**, 350, 370  
 por divisão de código, 371  
 por divisão de freqüência, 371  
 por divisão de tempo, 372-373  
**Não estacionariedade**, 621  
**Números complexos**, 630  
**Op amp.** *Veja Amplificadores operacionais*  
**Operações em sinais**, adição, 40  
 compressão, 41  
 deslocamento no tempo, 43  
 diferenciação, 41  
 integração, 41  
 mudança de escala de amplitude, 40  
 multiplicação, 40  
 reflexão, 42  
**Ordem exponencial**, 416  
**Ortogonalidade**, 167-168  
**Oscilador senoidal**, 567  
 de áudio RC, 568  
**Passa-tudo, sistema**, 443-444, 489  
**Pathfinder**, 25  
 plano s, 398  
 plano z, 448  
**Planta**, 26, 540  
**Polinômios de Legendre**, 257  
**Polos**, definição, 399, 450  
 estabilidade e causalidade, 427-430, 469-472  
 experiências com o MATLAB, 436, 482  
 resposta em freqüência, 431-435, 472-476  
 sinais característicos, 409  
**Ponto de ramificação**. *Veja Ponto de separação*  
**Ponto de separação**, 563, 571-572  
**Potência**, 38  
**Preenchimento com zeros**, 312  
**Princípio da incerteza**, 240, 246, 626  
**Princípio da superposição**, 68-69  
**Princípio do argumento**, 580  
**Problema de aproximação**, 504  
 função de magnitude *equiripple*, 505  
 função de magnitude maximamente plana, 504  
**Problema de estabilidade em sistemas realimentados**, 562  
 equação característica, 562-563  
 sistema à beira da estabilidade, 566  
**Processamento de sinais analógicos**, 33  
 digitais, 33  
**Processamento de sinais biomédicos**,

- eletrocardiograma (ECG),** 29-30  
**eletroencefalograma (EEG),** 29-30  
**Processamento de sinais de tempo discreto,** 300-310  
**Processamento espacial,** 637  
**Produto interno,** 167  
**Proporcional-integral – derivativo (PID), controlador,** 617  
**Proporcional-integral (PI), controlador,** 617  
**Propriedades da representação de Fourier,** 201-240  
 convolução, não periódica, 223-225, 273-275  
 convolução periódica, 230-231, 273-275  
 deslocamento em freqüência, 211-212  
 deslocamento no tempo, 209-211  
 diferenciando, 221-222  
 diferenciação em freqüência, 217-220  
 diferenciação no tempo, 216-218  
 dualidade, 234-238  
 integração, 219-220  
 linearidade, 203-207  
 modulação, não periódica, 225-230, 275-280  
 modulação, periódica, 231, 275-280  
 mudança de escala, 212-216  
 periodicidade, 202-203  
 produto tempo-largura de faixa, 238-240, 242-244  
 relações de Parseval, 232-235  
 sinais imaginários, 208  
 sinais ímpares, 209  
 sinais pares, 208  
 sinais reais, 207-208  
 soma, 220  
 tabela de propriedades, 653-654  
**Proporcional-derivativo (PD), controlador,** 617  
**Pulsos gaussianos,** 217-219, 641  
**Quantização,** 23  
**Radar,** 28  
 abertura sintética, 28  
**Reconstrução,** 291-300  
**Região de Convergência (RDC), definição da transformada de Laplace,** 398  
 definição da transformada  $z$ , 448  
 propriedades da transformada de Laplace, 415-418  
 propriedades da transformada  $z$ , 452-456  
**Regra de procedimento para deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo,** 44  
**Regulador,** 555  
**Resolução,** 316  
**Resposta ao degrau,** 115-116, 130  
 experiências com o MATLAB, 145  
**Resposta ao impulso,** 86  
 experiências com o MATLAB, 150  
 função de transferência, 424, 466  
 resposta em freqüência, 260-264  
**Resposta em freqüência**  
 de circuito RC, 119-120, 263  
 definição, 117, 163-164  
 descrição por variáveis de estado, 266-268  
 equação diferencial/de diferenças, 263-266  
 experiências no MATLAB, 148, 328  
 polos e zeros, 431-435, 472-476  
 resposta ao impulso, 260-264  
 resposta em fase, 118  
 resposta em magnitude, 118  
**Resposta senoidal de estado estacionário,** 116-120  
 experiências com o MATLAB, 145-148  
**Retardo de envoltória,** 377  
 experiência com o MATLAB, 387  
**Retardo de fase,** 375  
 experiência com o MATLAB, 387  
**Retardo de grupo.** Veja Retardo de envoltória  
**Retardo de portadora.** Veja Retardo de fase  
**Retentor de ordem zero,** 294, 593  
**Sem memória,** 111  
**Sensor,** 540  
**Sensoreamento remoto,** 27  
**Série de Fourier (FS).** Veja também Série de Fourier de Tempo Discreto (DTFS)  
 aproximação por soma parcial, 184-186, 242  
 convergência, 180  
 definição, 180-181  
 derivação, 178-180  
 forma polar, 255  
 forma trigonométrica, 255  
 generalizada, 256  
 onda quadrada, 182-183  
 sinais não periódicos, 314  
 tabela de pares, 650  
**Série de Fourier Discreta no Tempo (DTFS)**  
 aproximação pela soma parcial, 175-177, 241  
 aproximando a FS, 319-320  
 aproximando a FT, 314-320  
 computando a convolução, 321-323  
 definição, 170  
 derivação, 168-170  
 experiências com o MATLAB, 240-241  
 onda quadrada, 172-174  
 sinais não periódicos, 309-313  
 tabela de pares, 649  
**Série geométrica,** 641  
**Simulação em computador analógico,** 135-136  
**Sinais**  
 aleatórios, 38  
 conjugados simétricos, 36-37  
 definição, 21  
 de tempo contínuo, 34  
 de tempo discreto, 34  
 determinísticos, 38  
 energia, 39  
 ímpares, 35  
 não periódicos, 37  
 pares, 35  
 periódicos, 37  
 potência, 39  
**Sinais aleatórios,** 623  
**Sinais caóticos,** 623  
**Sinais de faixa estreita,** 355, 376  
**Sinais de fala,** 520  
 espectrograma de, 627  
 experiências com o MATLAB, 533  
 filtragem de, 520  
**Sinais elementares,** 46-47  
 experiências com o MATLAB, 75  
 exponencial, 46-47  
 exponencial complexo, 52  
 exponencialmente amortecido, 54  
 função degrau, 54-55  
 impulso, 56-57  
 senoidal, 48-49  
**Sinais periódicos,** 37

- experiência com o MATLAB, 71**
- Sistema auditivo**
- células ciliares externas, 32**
  - células ciliares internas, 32**
  - cóclea, 31**
  - membrana basilar, 31**
  - organização tonotópica, 32**
  - transdução auditiva, 36-37**
- Sistema com grau simples de controle realimentado, 552**
- Sistema de entradas múltiplas – saídas múltiplas, 27**
- Sistema de Lorenz, 623-624**
- Sistema de média móvel, 97**
- Sistema de realimentação unitária, 552**
- Sistema inverso, 66, 114-115, 262, 430-431, 471-472**
- Veja também Equalizador*
- Sistema logístico, 623-624**
- Sistemas**
- definição, 23**
  - propriedades de, 61**
- Sistemas de baixa ordem,**
- primeira ordem, 557, 562-563**
  - resposta transitória de, 557**
  - segunda ordem, 558, 562-563**
  - criticamente amortecidos, 559**
  - subamortecidos, 559**
  - superamortecidos, 559**
  - terceira ordem, 564**
- Sistemas de comunicação, 23, 345**
- analógicos, 23**
  - digitais, 23**
  - espaço interplanetário, 25**
  - ponto a ponto, 24**
  - radiodifusão (*broadcasting*), 24**
- Sistemas de controle, 26, 551**
- malha aberta, 551**
  - malha fechada, 552**
  - projeto de, 601**
- Sistemas de dados amostrados, 592-593**
- controlador digital, 593**
  - conversor A/D, 593**
  - conversor D/A, 593**
  - função de transferência de malha fechada, 596**
  - propriedades da transformada de Laplace de, 594**
- Sistemas invariantes no tempo, 66-67**
- Sistemas lineares, 68-69**
- Sistemas não lineares, 68-69, 631**
- análise por função descritiva, 633**
  - análise por plano de fase, 632**
  - teoria de Lyapunov, 634**
- Sistemas realimentados, 539**
- conceitos básicos, 540**
  - custo dos, 546-547**
  - diferença de retorno, 541**
  - efeito sobre a distorção não linear, 545**
  - efeito sobre a perturbação ou ruído, 546-547**
  - estabilidade, 562**
  - experiências com o MATLAB, 608**
  - função de transferência de malha, 541**
  - realimentação negativa e positiva, 541**
  - sensibilidade, 542**
- Sobrepor e adicionar, 332**
- Sobrepor e guardar, 322**
- Soma de convolução, 86-98**
- definição, 88**
  - exemplos, 93-98**
  - experiências com o MATLAB, 143-145**
  - procedimento de avaliação, 92**
  - propriedade associativa, 110-111**
  - propriedade comutativa, 110-111**
  - propriedade distributiva, 109**
  - sinais periódicos, 231**
  - transformada de Fourier, 224-225**
- Subamostragem, 287-291**
- Superamostragem, 298-300, 302-303**
- Taxa de amortecimento, 558**
- Taxa de Nyquist, 293**
- Teorema da amostragem, 292, 366**
- Termistor, 67-68**
- terra virtual, 547**
- Transformações de freqüência, 510**
- passa-baixas para passa-altas, 510**
  - passa-baixas para passa-faixa, 511**
- Transformada bilinear, 522-523**
- Transformada breve (*short time*) de Fourier, 624-625**
- espectrograma, 627**
  - propriedades da, 624-625**
- Transformada de Fourier (FT). *Veja também***
- Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT),**
- convergência, 190-191**
- definição, 189-190**
- derivação, 188-189**
- experiências com o MATLAB por meio da DTFS, 330-331**
- função seno, tempo discreto, 194-195**
- impulso, 195**
- pulso retangular, 192-194**
- seqüência exponencial, 191**
- seqüências periódicas, 270-271**
- sinal DC, 195**
- tabela de pares, 650**
- tabela para sinais periódicos, 652**
- transformada z, 448**
- Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT); Transformada Rápida de Fourier (FFT)**
- convergência, 197**
  - definição, 196-197**
  - experiências no MATLAB por meio da DTFS, 331**
  - função seno, 200**
  - impulso, 200**
  - pulso gaussiano, 217-218**
  - pulso retangular, 197-200**
  - sinais de tempo discreto, 280-283**
  - sinais periódicos, 269-270**
- sinal DC, 200**
- sinal exponencial, 197-198**
  - tabela de pares, 651**
  - tabela de sinais periódicos, 651**
  - transformada de Laplace, 398**
  - trem de impulsos, 269-270**
- Transformada de Laplace bilateral**
- deslocamento no tempo, 420**
  - diferenciação no tempo, 421**
  - integração, 421**
  - inversão, 421-424**
  - propriedades, 418-421**
  - tabela de pares, 657-658**
  - tabela de propriedades, 658**
- Transformada de Laplace Unilateral, convolução, 402**
- definição, 401-402**
  - deslocamento no domínio s, 402**
  - diferenciação em s, 402**
  - diferenciação no tempo, 403**
  - integração, 404**
  - inversão, 405-409**
  - linearidade, 402**
  - modelos de circuito, 414-416**

- mudança de escala, 402  
resolvendo equações diferenciais, 409-413  
tabela de pares, 657  
tabela de propriedades, 658-659  
teorema do valor final, 405  
teorema do valor inicial, 404-405
- Transformada de Laplace.** *Veja também*  
definição, 397  
derivação, 395-397  
tabela de pares, 657  
tabela de propriedades, 658
- Transformada de Laplace bilateral;**  
transformada de Laplace unilateral  
transformada de Fourier, 398
- Transformada Discreta de Fourier (DFT),** 165, 245, 332
- Transformada Rápida de Fourier (FFT),** 240  
desenvolvimento, 323-328  
experiências com o MATLAB, 331
- história, 333  
**Transformada wavelet,** 628  
compressão de imagens usando, 629-630  
escalograma, 629-630  
*wavelet mãe*, 628  
propriedades de, 629
- Transformada z unilateral**  
definição, 479-480  
deslocamento no tempo, 480-481  
resolvendo equações de diferenças, 481-482  
tabela de pares, 661  
tabela de propriedades, 662
- Transformada z.** *Veja também*  
Transformada z Unilateral  
convolução, 459  
definição, 447-448  
derivação, 445-447  
deslocamento no tempo, 458  
diferenciação em z, 459  
inversão de tempo, 458  
inversão, experiências com o MATLAB, 482-483
- inversão, frações parciais, 461-464  
inversão, série de potências, 464-466  
linearidade, 465-457  
multiplicação por exponencial, 458  
propriedades, 456-460  
tabela de pares, 661-662  
tabela de propriedades, 662  
transformada de Fourier de tempo discreto, 449
- Transformador de Hilbert,** 364
- Transmissão sem distorções,**  
condições para, 495  
experiência com o MATLAB, 530
- Trem de impulsos,** 269-270
- Upsampling,** *veja amostragem para cima*
- Valor médio quadrático (RMS) do sinal,** 39
- Zeros,**  
definição, 399, 450  
experiências com o MATLAB, 436-482  
resposta em freqüência, 431-435, 472-476