Implementando Algoritmos de Integração Numérica em C++

Danilo Sanchez Tuzita
(danilo_st@hotmail.com)

I. Resumo

Esse é um trabalho que tem como objetivo implementar os algoritmos de Integração numérica em *C++*.

II. Introdução

O calculo numérico de integrais pode ser mais fácil e rápido de se obter um resultado do que calcular de forma analítica. Porém deve-se levar em conta que esse calculo não será completamente preciso.

III. Teoria

Para o entendimento desse trabalho é necessário conhecimentos básico de cálculo.

IV. Proposta e Implementação

Nesse trabalho foi implementado três métodos de integração: O Método Retangular, A Regra Trapezoidal e A Regra de Simpson. Após isso foi implementado o Método de Quadratura Adaptativa.

A. Método Retangular

O Método Retangular é expresso pela fórmula 1 com erro expresso pela fórmula 2. Sua ideia geral é calcular o valor de $f(x)$ dentro do intervalo $[a, b]$ e assumir que a área abaixo da curva da função $f(x)$ é um retângulo com largura de $a - b$ e altura de $f(x)$, como demonstra a figura 1.

$$\int_a^b f(x) \approx (b-a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{(b-a)^3}{24} \times f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2}$$

B. Regra Trapezoidal

A Regra Trapezoidal é expressa pela fórmula 3 com erro expresso pela fórmula 4. Sua ideia geral é calcular o valor de $f(a)$ e $f(b)$ dentro do intervalo $[a, b]$ e assumir que a área abaixo da curva da função $f(x)$ é um trapézio com base de $a - b$ e altura esquerda de $f(a)$ e altura direita de $f(b)$, como demonstra a figura 2.

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{2} \times (f(a) + f(b)) \tag{3}$$

$$-\frac{(b-a)^3}{12} \times f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{4}$$

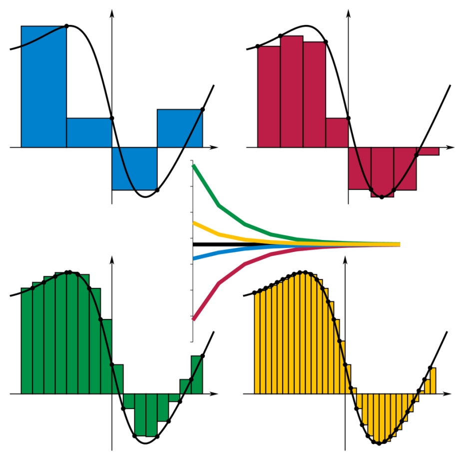

Fig. 1. Representação do Método Retangular. Fonte: Wikipédia

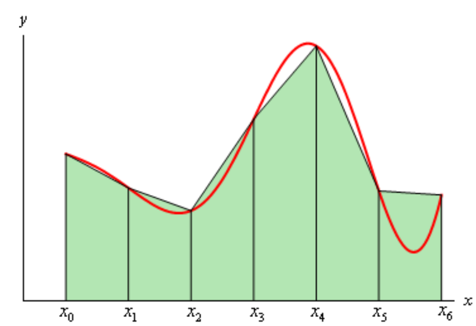

Fig. 2. Representação da Regra Trapezoidal. Fonte: http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ApproximatingDefIntegrals.aspx.

C. Regra de Simpson

A Regra de Simpson é expressa pela fórmula 5 com erro expresso pela fórmula 6. Sua ideia geral é calcular o valor de $f(a)$, $f\left(\frac{b-a}{2}\right)$ e $f(b)$ dentro do intervalo $[a, b]$ e assumir que a curva da função $f(x)$ se comporta como uma função $P(x)$ que é uma parábola interpolada pelos pontos $f(a)$, $f\left(\frac{b-a}{2}\right)$ e $f(b)$, como demonstra a figura 3. E com essa função $P(x)$ é calculada a área abaixo dela.

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{6} \times \left(f(a) + 4 \times f\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(b)\right) \tag{5}$$

$$-\frac{(b-a)^5}{2880} \times f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{6}$$

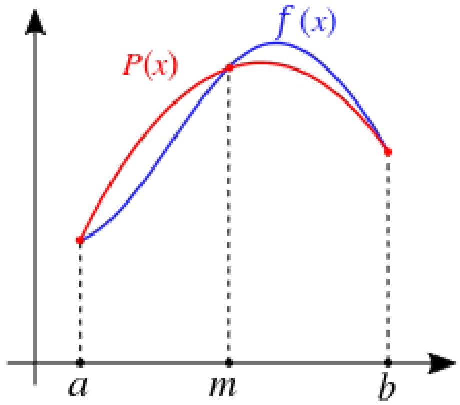

Fig. 3. Representação da Regra de Simpson. Fonte: Wikipédia

D. *Método da Quadratura Adaptativa*

Nenhum dos métodos acima mencionados são 100% acurados e pode se observar que quanto menor o intervalo entre a e b mais preciso são os métodos. Naturalmente há ocasiões onde é necessário que o calculo da integral da função tenha certa acurácia.

O Método da Quadratura Adaptativa visa a aumentar a acurácia de certo método dividindo o intervalo inicial em intervalos menores e aplicando o método nesses intervalos menores, até que se atinja um erro aceitável para a situação.

Suponha que $I_r = \int_a^b f(x)dx = 50$, porém o valor calculado dessa integral $I_c = 52$ e é preciso que $|I_r - I_c| \leq 10^{-3}$.

Para isso o intervalo $[a, b]$ é divido em 2 e calculado a integral para cada divisão, ou seja, $I_c = \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx$ onde $m = \frac{a+b}{2}$. Os intervalos são divididos até que o erro seja menor que 10^{-3}.

V. Resultados

Para testar os métodos propostos, foi usado três funções, sendo essas: e^x, $\sqrt{1-x^2}$, e $e^{(-x^2)}$. Foi calculado a integral no intervalo $[0, 1]$ de cada uma das funções para cada método e foi utilizado o Método da Quadratura Adaptativa para reduzir o erro. Uma tabela com o resultados de todos os experimentos feitos encontra se no repositório no *GitHub* do projeto[1].

As figuras 4, 5 e 6 demonstram como se comporta o calculo de cada uma das funções contra o erro mínimo pedido para cada método implementado.

A figura 7 demonstra a quantidade em quantas vezes que o intervalo inicial foi divido, por exemplo, para ter uma precisão de 10^{-3} o intervalo inicial de $[0, 1]$ foi quebrado em 8, calculado a integral em cada um dos intervalos gerados e somados para dar o resultado final com a precisão pedida.

VI. Conclusão

A utilização de métodos de integração numérica pode ser muito útil quando é difícil calcular a integral analiticamente ou quando não se tem uma função, apenas amostras dela em certos pontos. Nesse trabalho foi demonstrado que os métodos

[1]Resultados: https://github.com/danilotuzita/programacao-cientifica/blob/master/Aula5/Resultados.xlsx.

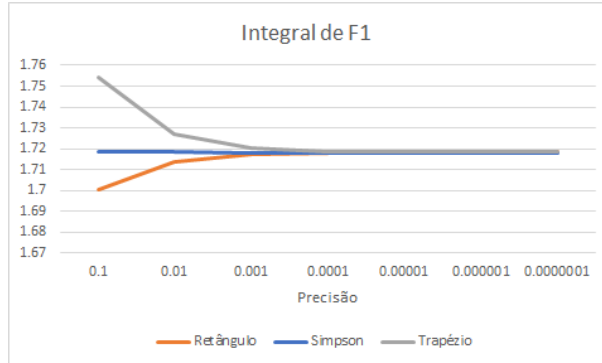

Fig. 4. Cálculo da integral de e^x. Fonte: Autor

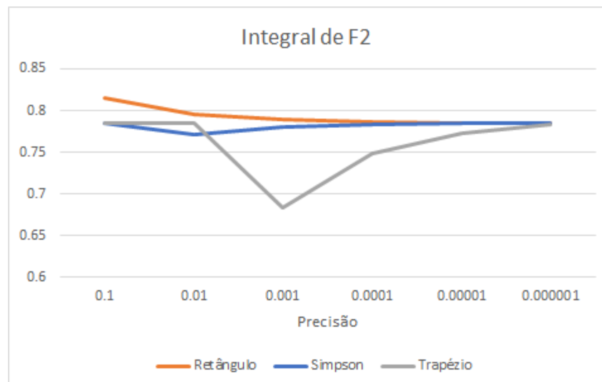

Fig. 5. Cálculo da integral de $\sqrt{1-x^2}$. Fonte: Autor

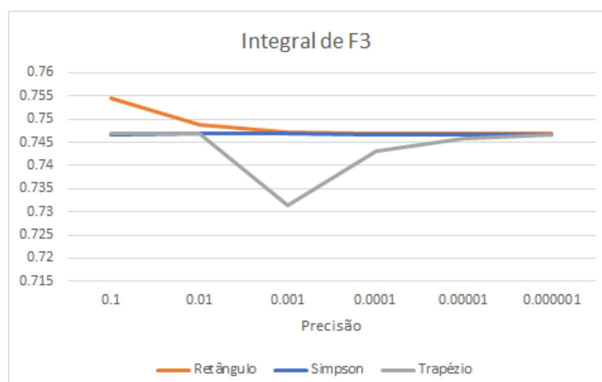

Fig. 6. Cálculo da integral de $e^{(-x^2)}$. Fonte: Autor

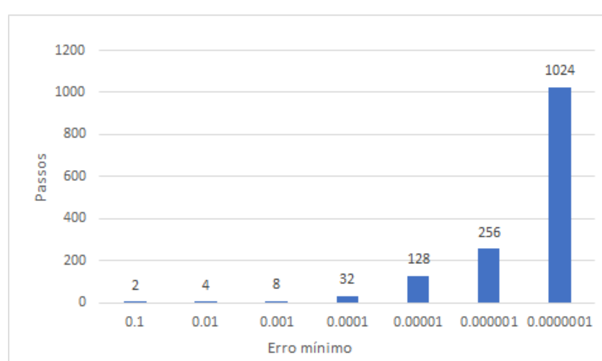

Fig. 7. Passos dados vs Erro Mínimo. Fonte: Autor

funcionam e pode se até atingir uma precisão razoável a custo computacional.