Быстрое перемещение

Для перемещения **нажмите** на название требуемого раздела:

Свойства определителей

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы: $\det A^T = \det A$

2. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на некоторое число λравносильно умножееию определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

3. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца, то определитель изменяет свой знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

4. Если матрица содержит нулевую строку (столбец), то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

5. Если две строки (столбца) матрицы равны между собой, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

6. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны друг другу, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{i3} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

7. Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{mn}$$

8. Если все элементы k-ой строки (столбца) определителя представлены в виде сумм $a_{kj} + b_{kj}$, то определитель можно представить в виде суммы соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & a_{k3} + b_{k3} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

9. Определитель не изменится, если к элементам любой его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или соответствующего столбца), умноженные на одно и тоже число:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + ca_{i1} & a_{k2} + ca_{i2} & a_{k3} + ca_{i3} & \dots & a_{kn} + ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

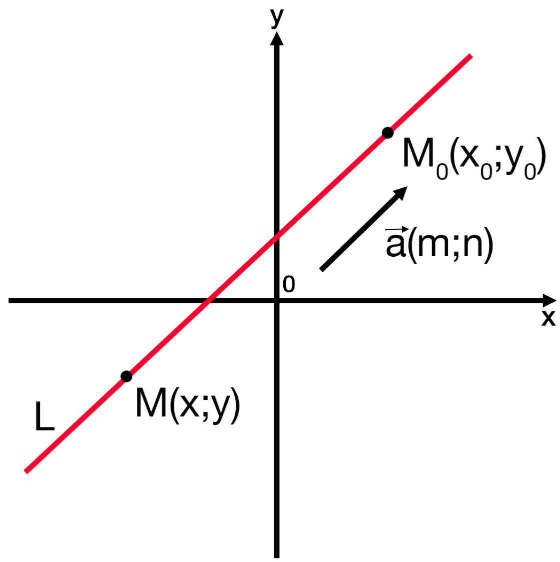
10. Пусть A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда определитель произведения матриц равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Прямая на плоскости: уравнение через две точки, каноническое, параметрическое

Каноническое уравнение прямой

Дана прямая L, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, и направляющий вектор $\overrightarrow{a}(m, n)$ этой прямой. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка на искомой прямой L, тогда $M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} || \overrightarrow{a}$.



Условием коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{a}$ будет: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$, что и является каноническим уравнением прямой.

Уравнение прямой через 2 заданные точки

Даны две точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$, лежащие на прямой L. Из этого следует, что $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$ — направляющий вектор прямой L.

Тогда искомое уравнение будет иметь вид: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

Параметрическое уравнение прямой

Уравнение $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \overrightarrow{a}$ называют векторно-параметрическим уравнением прямой, где λ— некоторое действительное число.

В векторной форме оно имеет вид:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} \iff \begin{cases} x - x_0 = \lambda \cdot m \\ y - y_0 = \lambda \cdot n \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot m \\ y = y_0 + \lambda \cdot n \end{cases}$$

Парабола. Определение, вывод уравнения, характеристики

Определение

Парабола — геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от данной прямой d и данной точки F. Точка F не лежит ни на кривой, ни на прямой d.

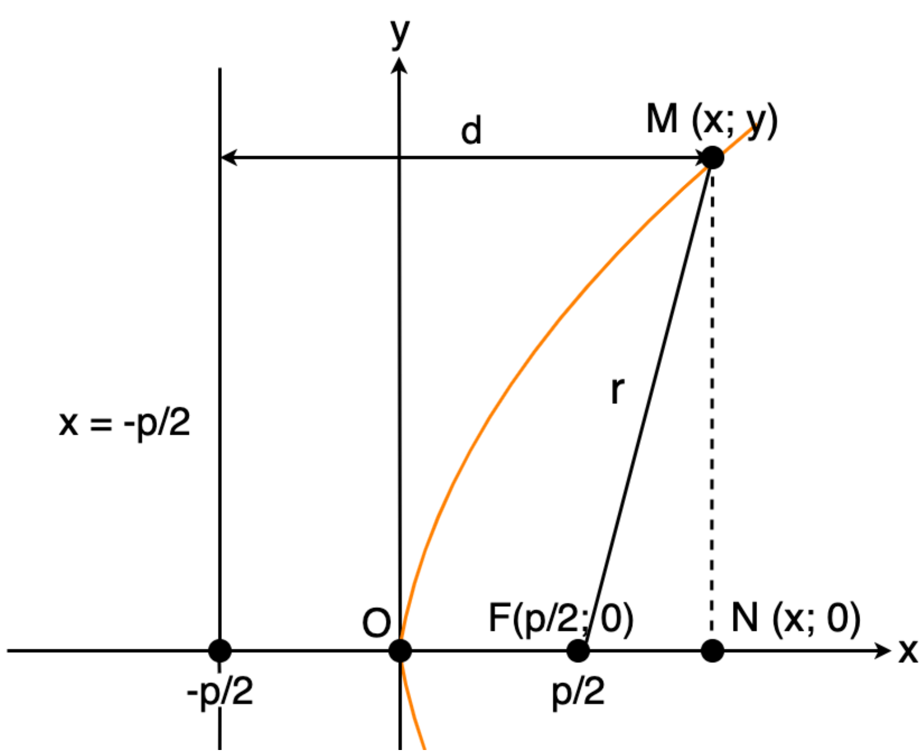
Точка F называется **фокусом**, а прямая d — **директрисой параболы**. Расстояние от фокуса до директрисы называется **фокальным параметром** параболы и обозначается через p.

Эксцентриситет параболы — это отношение расстояний от произвольной точки на кривой до фокуса и от этой же точки до директрисы. Эксцентриситет параболы по определению равен 1.

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$

Вывод канонического уравнения

Пусть фокус F принадлежит оси OX. Проведем директрису перпендикулярно оси OX на расстоянии p от фокуса F, тогда пусть т. O будет серединой этого расстояния. Возьмем т. $M(x; y)$, которая принадлежит параболе. Расстояние от т. $M(x; y)$ до фокуса обозначим за r, до директрисы за d.



Расстояние от т. $M(x;y)$ до директрисы равно $d = \left|x + \frac{p}{2}\right|$.
По определению параболы $r = d$.
По теореме Пифагора из прямоугольного ΔFMN: $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$
Следовательно:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$
$$y^2 = 2px$$

Свойства параболы

- Имеет ось симметрии называемой осью параболы. Ось проходит через фокус и вершину перпендикулярно директрисе;
- Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе;
- Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб;