Ответы на экзаменационные вопросы по математике.

1 семестр

ИКТ 2021

Авторы:
Даниил Швалов

Оглавление

Глава 1. Векторы

1.1. Линейная зависимость системы векторов. Базис

1.1.1 Определения

Определение. Линейная комбинация.

Линейной комбинацией n векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, то есть выражения вида:

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n + \overrightarrow{a_n}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — любые действительные числа.

Определение. Линейно зависимая система векторов.

Если для линейная комбинация $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ равна нулевому вектору (нулю) при условии, что хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ отлично от нуля, то система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называется **линейно зависимой**.

Определение. Линейно <u>не</u>зависимая система векторов.

Если для линейная комбинация $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ равна нулевому вектору (нулю) **только тогда**, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ равны нулю, то система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называется **линейно независимой**.

1.1.2 Свойства линейной зависимости и независимости

1. Если к линейно зависимой системе векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ добавить несколько векторов, то полученная система будет линейно **зависимой**.

2. Если из линейно независимой системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ исключить несколько векторов, то полученная система будет линейно **независимой**.

3. Если в системе векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ есть хотя бы один нулевой вектор, то такая система линейно зависимая.

4. Если система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ линейно зависима, то хотя бы один из ее векторов линейно выражается через остальные. Если система векторов линейно независима, то ни один из векторов не выражается через остальные.

Из двух последних свойств следует важное утверждение: если система векторов содержит векторы $\overrightarrow{a}$ и $c\overrightarrow{a}$, где c – произвольное число, то она линейно зависима.

1.1.3 Размерность и базис

Размерностью векторного пространства называется число, равное максимальному количеству линейно **независимых** векторов в этом пространстве.

Базис векторного пространства – это упорядоченная совокупность линейно **независимых** векторов этого пространства, число которых равно размерности пространства.

1.2. Скалярное произведение векторов и его свойства. Проекции

Определение. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть ничто иное как:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — величина угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

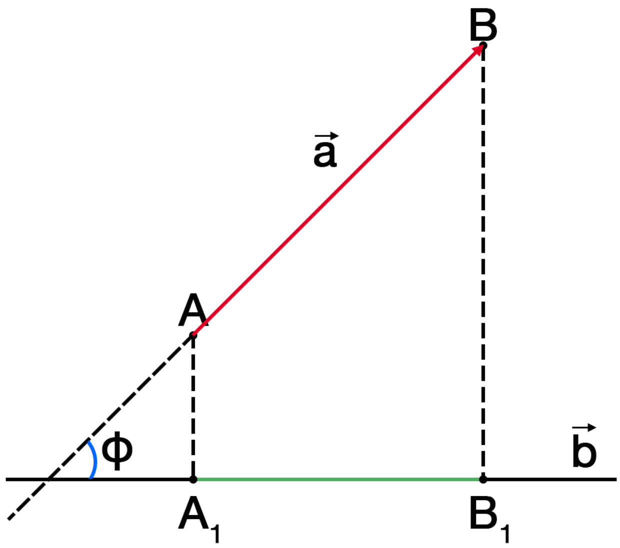
Скалярное произведение обозначается либо как $\vec{a} \cdot \vec{b}$, либо как $(\vec{a}, \vec{b})$.

1.2.1 Свойства скалярного произведения

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$
3. $(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a}, \vec{b})$, где $\lambda \in R$.
4. $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$, причем $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \iff |\vec{a}| = 0$
5. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
6. $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, где φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
7. $\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a}, \vec{b}) = 0$
8. Угол между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является острым тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{b}) > 0$; и является тупым – когда $(\vec{a}, \vec{b}) < 0$.

1.2.2 Проекции

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{b}$ — это длина отрезка $A_1B_1 \in \vec{b}$ со знаком плюс, если направление вектора A_1B_1 с направлением оси $\vec{b}$, и со знаком минус, если эти направления противоположны.



Проекция вектора $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ обозначается формулой: Пр$_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{AB}$ или Пр$_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$
Проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на ось $\overrightarrow{b}$ выражается формулой:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\varphi$$

С другой стороны:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

Следовательно:

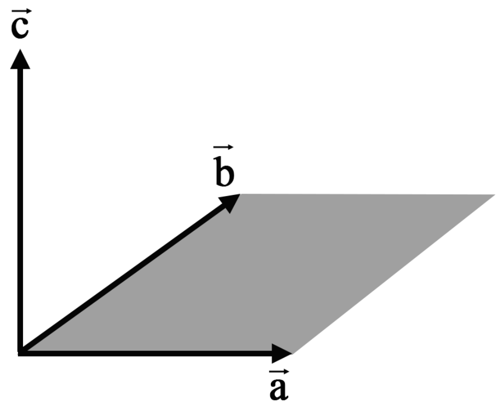
$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\varphi \iff \text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{|\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{b}} \iff \text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$$

1.2.3 Свойства проекций

1. Пр$_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}) =$ Пр$_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_1} +$ Пр$_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_2} +$ Пр$_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_3}$
2. Пр$_{\overrightarrow{b}}(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) = \lambda \cdot$ Пр$_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$

1.3. Векторное произведение и его свойства

Определение. Векторным произведением $\overrightarrow{a}$ на $\overrightarrow{b}$ называется $\overrightarrow{c}$, **длина** которого численно **равна площади параллелограмма**, построенного на $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, перпендикулярного к плоскости этих векторов и направленного так, чтоб **наименьшее вращение** от $\overrightarrow{a}$ к $\overrightarrow{b}$ вокруг вектора $\overrightarrow{c}$ осуществлялось **против часовой** стрелки, если смотреть с конца $\overrightarrow{c}$:



Векторное произведение обозначается либо как $\vec{a} \times \vec{b}$, либо как $[\vec{a}, \vec{b}]$.

1.3.1 Вычисление векторного произведения

Векторное произведение двух векторов $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ в декартовой системе координат — это **вектор**, значение которого можно вычислить по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

1.3.2 Геометрический смысл векторного произведения

Модуль векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S_{\text{парал-ма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Как следствие, площадь треугольника, построенного на этих же векторах равна половине модуля векторного произведения:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

1.3.3 Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
4. $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \times \vec{b} = 0 \implies \vec{a} || \vec{b}$
5. $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \implies \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$

1.4. Смешанное произведение векторов и его свойства

Определение. Смешанное произведение векторов — это скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Смешанное произведение обозначается либо как $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, либо как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

1.4.1 Вычисление смешанного произведения

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, тогда их смешанное произведение в декартовой системе координат будет равно:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1.4.2 Геометрический смысл смешанного произведения

Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, образованного этими векторами:

$$V_{\text{парал-да}} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Как следствие, объем пирамиды, образованной на этих же векторах равна одной шестой модуля смешанного произведения:

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

1.4.3 Алгебраические свойства смешанного произведения

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Доказательство.

1. Длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и ориентация тройки не меняются.
2. Модули слева и справа равны, а ориентация изменилась при перестановке $\vec{b}$ и $\vec{c}$ местами.
3. Следует из свойств (1) и (2).

Что и требовалось доказать.

1.4.4 Геометрические свойства смешанного произведения

Теорема 1.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство.

Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, тогда может быть два случая:

Случай 1. $\vec{b} \times \vec{c} = 0 \implies \vec{b} || \vec{c}$

$$\text{Тогда} \quad \exists k_1, k_2 : \vec{c} = k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} \implies \text{коллинеарность — компланарность.}$$

Случай 2. $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$

Доказательство следует напрямую из векторного произведения:

$$\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c}) \implies \vec{a} \subset \alpha_{(\vec{b}, \vec{c})} \implies \text{векторы компланарны}$$

Верно и обратное:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны }, \vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c}) \implies \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Что и требовалось доказать.

1.4.5 Алгебраические свойства смешанного произведения

Глава 2. Определители

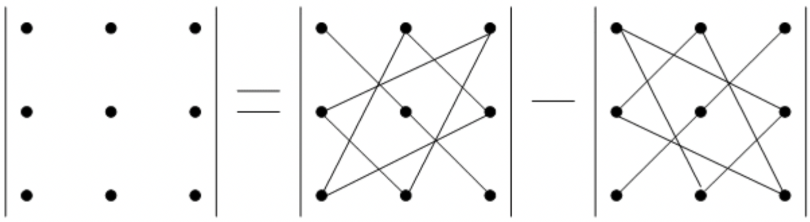
2.1. Определители 2-го и 3-го порядка. Разложение определителя по элементам строки

Пусть дан определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для ускорения вычисления определителя **третьего порядка** можно воспользоваться **методом треугольника**.

Вычисление выполняется по следующей схеме:



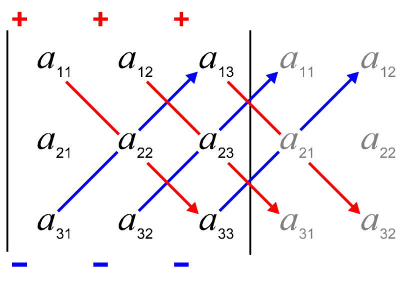
Следовательно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + a_{23} \cdot a_{13} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Правило Саррюса — еще один метод вычисления определителя матрицы **третьего порядка**. Наряду с правилом треугольника оно призвано внести в процесс вычисления определителя наглядность, уменьшив тем самым вероятность возникновения ошибки.

Действие выполняется согласно следующей схеме:



2.2. Свойства определителей

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы: det $A^T = $ det A

2. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на некоторое число λ равносильно умножению определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

3. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца, то определитель изменяет свой знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

4. Если матрица содержит нулевую строку (столбец), то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

5. Если две строки (столбца) матрицы равны между собой, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

6. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны друг другу, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{i3} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

7. Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{mn}$$

8. Если все элементы k-ой строки (столбца) определителя представлены в виде сумм $a_{kj} + b_{kj}$, то определитель можно представить в виде суммы соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & a_{k3}+b_{k3} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

9. Определитель не изменится, если к элементам любой его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или соответствующего столбца), умноженные на одно и тоже число:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+ca_{i1} & a_{k2}+ca_{i2} & a_{k3}+ca_{i3} & \dots & a_{kn}+ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

10. Пусть A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда определитель произведения матриц равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

2.3. Теорема Крамера

Метод крамера (правило Крамера) — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с **числом уравнений равным числу неизвестных** с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Теорема Крамера.

Для системы линейных уравнения вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{cases}
$$

Матрица коэффициентов:

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Матрица правых частей:

$$
B = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
\cdots \\
b_n
\end{pmatrix}
$$

Справедливо утверждение:

$$
x_k = \frac{\det C_k}{\det A} \text{ где } k = 1, 2, \ldots, n.
$$

C_k — матрица, получаемая заменой k-го столбца матрицы A столбцом B.

Доказательство.

Рассмотрим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{cases}
$$

Тогда:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{a_{11}b_1 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} \\[2ex]
x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}
\end{cases}
$$

где:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}
$$

Что и требовалось доказать.

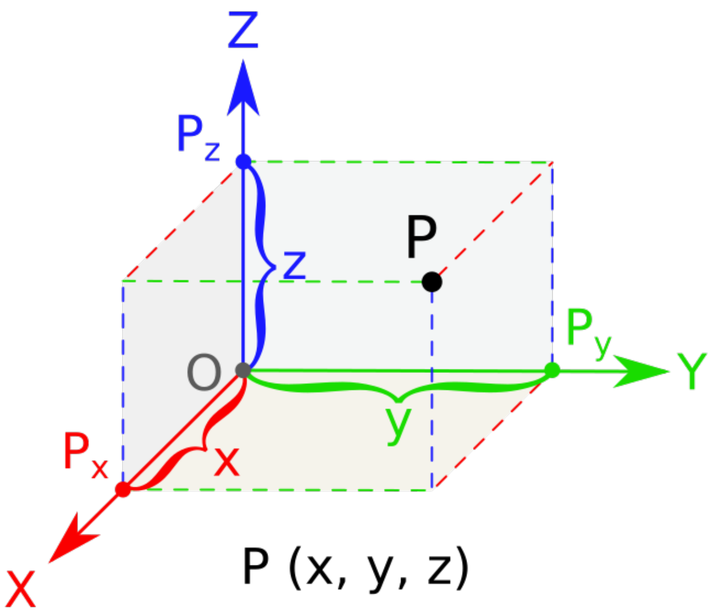
Глава 3. Прямые и плоскости

3.1. Системы координат. преобразования сдвига и поворота

3.1.1 Декартова система координат

Расположение точки P на плоскости определяется декартовыми координатами с помощью пары чисел (x, y):

- x — расстояоние от точки P до оси y с учетом знака
- y — расстояоние от точки P до оси x с учетом знака



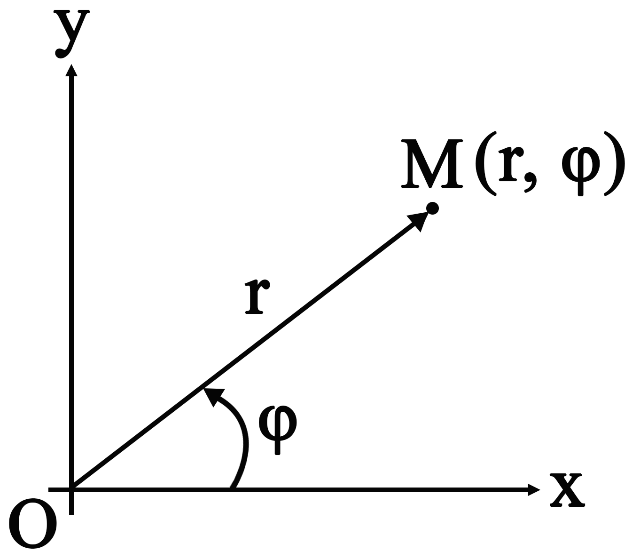
В пространстве уже необходимы три координаты (x, y, z) :

- x — расстояоние от точки P до плоскости yz
- y — расстояоние от точки P до плоскости xz
- z — расстояоние от точки P до плоскости xy

3.1.2 Полярная система координат

Полярная система координат задаётся лучом, который называют **нулевым лучом** или **полярной осью**. В нашем случае полярная ось совпадает с осью Ox. Точка, из которой выходит этот луч, называется **началом координат** или **полюсом**. На схеме таковой точкой является точка O.

Пусть $M(r, \varphi)$ — произвольная точка в полярной системе координат. Положение точки M фиксируется двумя числами: **радиусом** $r = \overrightarrow{OM}$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Этот угол называется **полярным углом**.



Декартовы координаты точки выражаются формулами:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Обозначения и ограничения

- $r \geq 0$ — радиус (также обозначают за r)
- $0 \leq \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leq \pi$ — азимут или долгота (также обозначают за θ)

Полярный радиус определен для любой точки плоскости и всегда принимает неотрицательные значения $r \geq 0$.

Полярный угол φ определен для любой точки плоскости, за исключением полюса O, и принимает значения $-\pi < \varphi \leq \pi$, то есть координаты $(r, \varphi + 2\pi)$ и $(r, \varphi + 4\pi)$ соответствуют одной точке. Полярный угол отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки и измеряется в радианах.

Достоинства

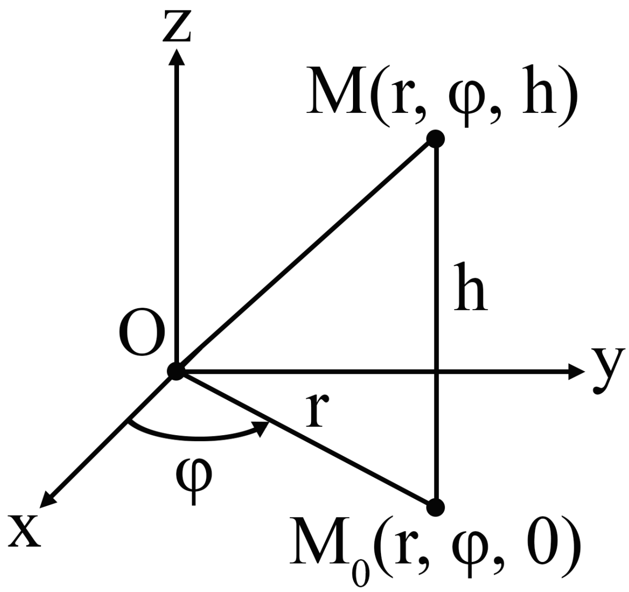
Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространённой декартовой, или прямоугольной, системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений.

Недостатки

- Угол φ не определен, если $r = 0$.

3.1.3 Цилиндрическая система координат

Цилиндрические координаты — трёхмерный аналог полярных координат, являющуюся расширением полярной системы координат путём добавления третьей координаты (обычно обозначаемой h или z), которая задаёт высоту точки над плоскостью.



Пусть $M(r, \varphi, h)$ — произвольная точка циллиндрической системы координат, а $M_0(r, \varphi, 0)$ — ее проекция на плоскость xy. Тогда:

r — это расстояние от точки M до оси Oz

φ — угол между осью Ox и отрезком OM_0

h — расстояние от точки M до плоскости xy

Обозначения и ограничения

- $r \geq 0$ — радиус (также обозначают за r)
- $0 \leq \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leq \pi$ — азимут или долгота (также обозначают за θ)
- h — высота (также обозначают за z)

Достоинства

Цилиндрические координаты полезны для изучения систем, симметричных относительно некоторой оси. Например, длинный цилиндр с радиусом R в декартовых координатах (с осью z, совпадающей с осью цилиндра) имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, тогда как в цилиндрических координатах оно выглядит гораздо проще, как $r = R$.

Недостатки

- Угол φ не определен, если $r = 0$.

3.1.4 Сферическая система координат

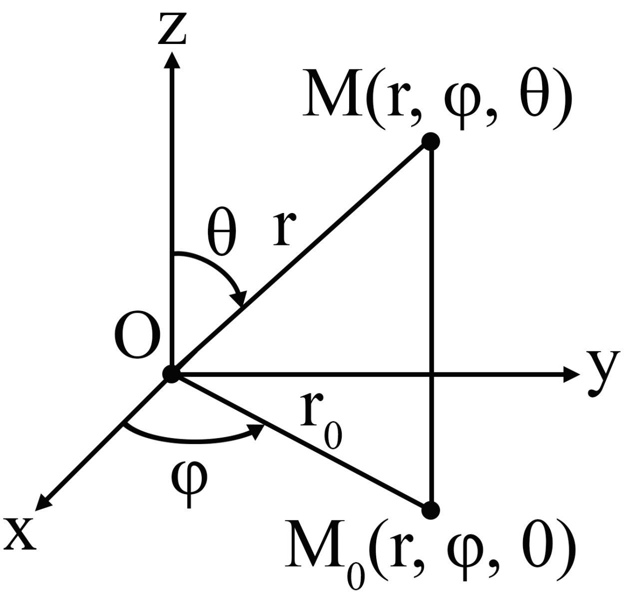
Сферическая система координат — трёхмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами (r, φ, θ).

Пусть $M(r, \varphi, \theta)$ — произвольная точка сферической системы координат, а $M_0(r, \varphi, 0)$ — ее проекция на плоскость xy. Тогда:

r — это расстояние от точки M до полюса O

φ — угол между осью Ox и отрезком OM_0

θ — угол между осью Oz и отрезком OM



Обозначения и ограничения

- $r \geq 0$ — радиус (также обозначают за r)
- $0 \leq \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leq \pi$ — азимут или долгота (также обозначают за θ)
- $0 \leq \theta \leq \pi$ или $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ — широта или полярный угол (также обозначают за φ)

Достоинства

Сферические координаты полезны при изучении систем, симметричных относительно точки. Так, уравнение сферы с радиусом R в декартовых координатах с началом отсчёта в центре сферы выглядит как $x^2 + y^2 = R^2$, тогда как в сферических координатах оно становится намного проще: $r = R$.

Недостатки

- Углы φ и θ не определены, если $r = 0$.
- Угол φ неопределен для граничных значений $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (или для $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$, при $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$)

3.2. Плоскость и ее уравнения

Плоскость – это геометрическая фигура, состоящая из отдельных точек. Каждой точке в трехмерном пространстве соответствуют координаты, которые задаются тремя числами. Уравнение плоскости устанавливает зависимость между координатами всех точек.

3.2.1 Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Теорема

Всякая плоскость в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве может быть задана уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D — некоторые действительные числа, одновременно не равные нулю. Всякое уравнение, имеющее вид $Ax+By+Cz+D = 0$ определяет плоскость в трехмерном пространстве.

3.2.2 Уравнение плоскости в отрезках

Если плоскость пересекает оси OX, OY, OZ в точках с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, то она может быть найдена по формуле **уравнения плоскости в отрезках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

3.2.3 Уравнение плоскости, проходящей через точку, перпендикулярно вектору нормали

Пусть у нас есть точка $M(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая плоскости, и вектор нормали плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$. Тогда плоскость задается уравнением:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3.2.4 Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой

Пусть у нас есть три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, лежащих на плоскости и не лежащих на одной прямой. Тогда уравнение плоскости можно найти по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

3.3. Прямая в пространстве и ее уравнения

Уравнение прямой на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy – это линейное уравнение с переменными x и y, которому отвечают координаты всех точек прямой и не удовлетворяют координаты никаких прочих точек.

3.3.1 Уравнение прямой в пространстве как уравнение двух пересекающихся плоскостей

Когда две плоскости в пространстве имеют общую точку, существует их общая прямая, на которой находятся все общие точки этих плоскостей.

Пусть у нас есть две плоскости α и β, которые описываются следующими уравнениями плоскости:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Прямую их пересечения обозначим за l. Поскольку любая точка прямой удовлетворяет сразу двум уравнениям плоскостей, координаты любой точки прямой будут частным решением системы:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

3.3.2 Канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть у нас есть некоторая прямая l, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на прямой l и направляющий вектор $\overrightarrow{r} = (m, n, p)$. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка l, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и вектор r коллинеарны. Из условия коллинеарности следует, что:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

что является каноническим уравнением прямой в пространстве.

3.3.3 Параметрические уравнения прямой в пространстве

Воспользуется каноническим уравнением прямой, прировняв каждую из дробей к некоторому параметру t:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

Тогда получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

3.3.4 Уравнение прямой через две заданные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, которые лежат на некоторой прямой l. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ явлется направляющим вектором этой прямой.

Пусть у нас есть произвольная точка $M(x, y, z)$, лежащая на прямой l. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ будет коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. Из условия коллинеарности следует, что:

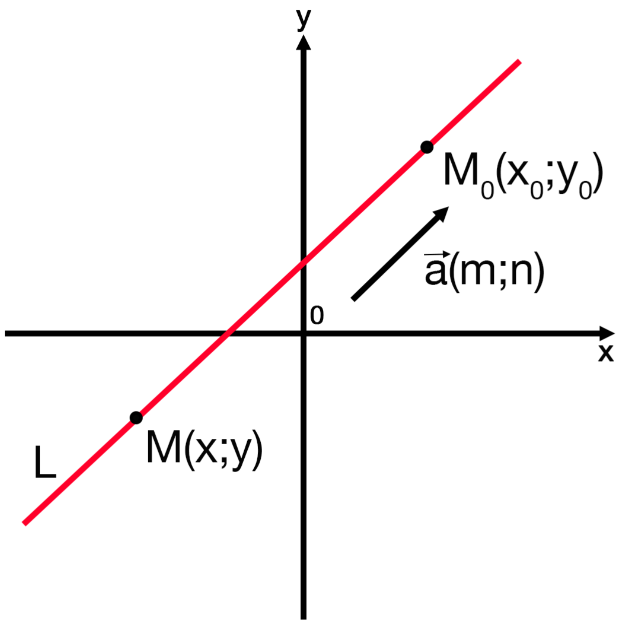
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

что является уравнением прямой в пространстве, которая проходит через две заданные точки.

3.4. Прямая на плоскости: уравнение через две точки, каноническое, параметрическое, общее, в отрезках на осях

3.4.1 Каноническое уравнение прямой

Дана прямая L, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, и направляющий вектор $\vec{a}(m, n)$ этой прямой. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка на искомой прямой L, тогда $M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} || \vec{a}$.



Условием коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ будет: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$, что и является каноническим уравнением прямой.

3.4.2 Уравнение прямой через 2 заданные точки

Даны две точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$, лежащие на прямой L. Из этого следует, что $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$ — направляющий вектор прямой L.

Тогда искомое уравнение будет иметь вид: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

3.4.3 Параметрическое уравнение прямой

Уравнение $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \vec{a}$ называют векторно-параметрическим уравнением прямой, где λ— некоторое действительное число.

В векторной форме оно имеет вид:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \vec{a} \iff \begin{cases} x - x_0 = \lambda \cdot m \\ y - y_0 = \lambda \cdot n \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot m \\ y = y_0 + \lambda \cdot n \end{cases}$$

3.4.4 Общее уравнение прямой

Уравнение, имеющее вид $Ax + By + C = 0$ — это общее уравнение прямой на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy.

Теорема 1.

Любое уравнение первой степени, имеющее вид $Ax+By+C = 0$, где A, B, C – некоторые действительные числа (A и B не равны одновременно нулю) определяет прямую линию в прямоугольной системе координат на плоскости. В свою очередь, любая прямая в прямоугольной системе координат на плоскости определяется уравнением, имеющим вид $Ax + By + C = 0$ при некотором наборе значений A, B, C.

Доказательство.

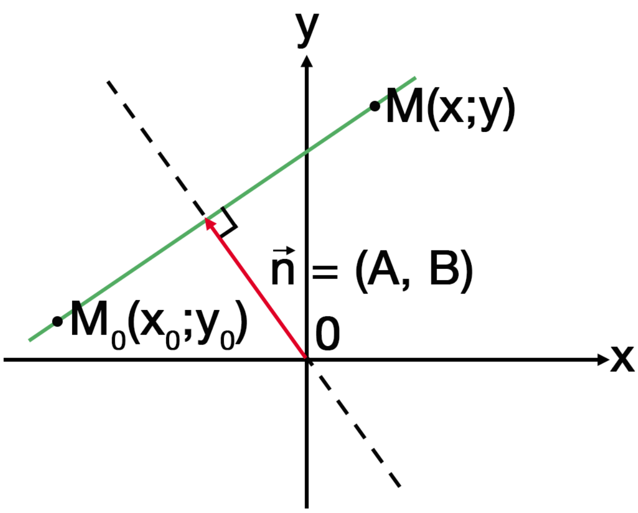
Теорема состоит из 2-х пунктов. Докажем каждый из них:

Пункт 1. Уравнение $Ax + By + C = 0$ определяет на плоскости прямую.

Пусть существует некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой отвечают уравнению $Ax + By + C = 0$, таким образом: $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычтем из левой и правой частей уравнений $Ax+By+C = 0$ левую и правую части уравнения $Ax_0+By_0+C = 0$, получим новое уравнение, имеющее вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C = 0$. Оно эквивалентно $Ax + By + C = 0$.

Полученное уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C = 0$ является необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\vec{n} = (A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Таким образом множество точек $M(x, y)$ задает в прямоугольной системе координат прямую линию, перпендикулярную направлению вектора $\vec{n} = (A, B)$.

Предположим, что это не так. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B)$ не перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, а равенство $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ не является верным.



Следовательно, уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$ определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат на плоскости, а значит и эквивалентное ему уравнение $Ax + By + C = 0$ определяет ту же прямую.

Пункт 2. Любую прямую в прямоугольной системе координат на плоскости можно задать уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$.

Зададим в прямоугольной системе координат на плоскости прямую a; точку $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит эта прямая, а также нормальный вектор этой прямой $\overrightarrow{n} = (A, B)$. Пусть точка $M(x, y)$ — произвольная точка на прямой, тогда векторы $\overrightarrow{n} = (A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ являются перпендикулярными друг другу и их скалярное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Пусть $C = -Ax_0 - By_0$, тогда получим уравнение:

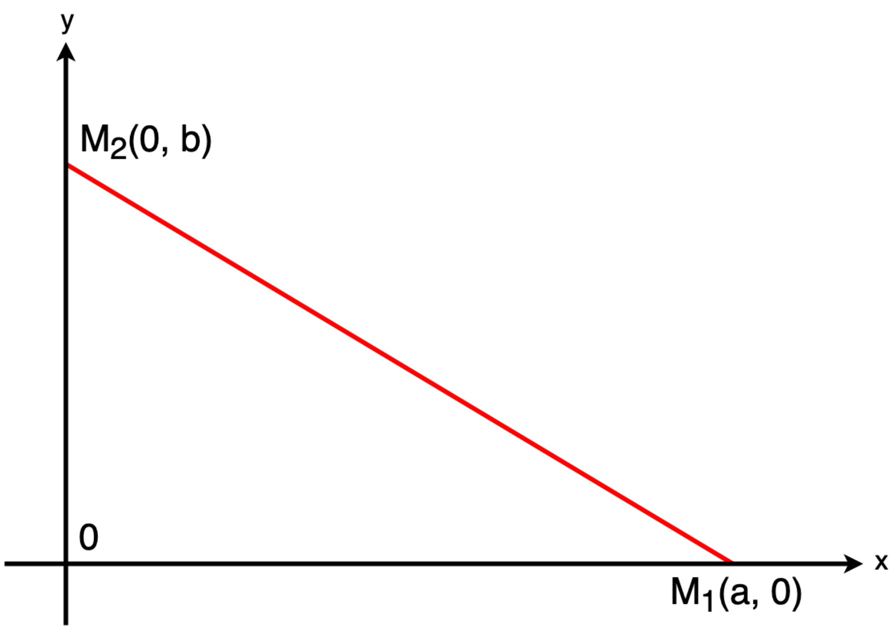
$$Ax + By + C = 0$$

Что и требовалось доказать.

3.4.5 Уравнение прямой в отрезках на осях

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ при условии $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ (то есть прямая не параллельна ни одной из осей координат и не проходит через начало отсчёта). Теперь преобразуем уравнение:

$$Ax + By + C = 0 \iff Ax + By = -C \iff \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$



Введем обозначение: $\frac{-C}{A} = a$, $\frac{-C}{B} = b$. Отсюда получим уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Это — уравнение прямой в отрезках на осях, так как числа a и b соответствуют длинам отрезков (с соответствующими знаками), которые прямая отсекает на осях координат (считая от начала отсчёта).

3.5. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых в пространстве

3.5.1 Параллельность и перпендикулярность плоскостей

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей равносильны условиям параллельности и перпендикулярности **их нормальных векторов**.

Пусть есть две плоскости:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда они:

— **Перпендикулярны**, если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

— **Параллельны**, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

3.5.2 Параллельность и перпендикулярность прямых в пространстве

В пространстве для прямых действуют те же условия, что и на плоскости, добавляется лишь новая координата.

Перейти к параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

3.5.3 Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости

Пусть есть прямая:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Ее направляющим вектором является вектор $\vec{s} = (m, n, p)$.

И плоскость:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Ее нормальным вектором является вектор $\vec{n} = (A, B, C)$

Тогда прямая **параллельна** плоскости, когда:

$$\vec{n} \perp \vec{s} \iff \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \iff Am + Bm + Cp = 0$$

И прямая **перпендикулярна** плоскости, если:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

3.6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых равносильны условиям параллельности и перпендикулярности **их направляющих векторов**.

3.6.1 Прямые, заданые в общем виде

Пусть даны прямые, заданные общими уравнениями:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Тогда они:

— **Перпендикулярны**, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ (условие коллинеарности векторов).

— **Параллельны**, когда $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ (условие параллельности векторов).

— **Совпадают**, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

3.6.2 Прямые с угловым коэффициентом

Пусть даны прямые:

$$l_1 : y = k_1x + b_1$$
$$l_2 : y = k_2x + b_2$$

Тогда они:

— **Перпендикулярны**, если $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ при $b_1 \neq b_2$

— **Параллельны**, когда $k_1 = k_2$

3.6.3 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Пусть даны прямые, через каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$$

Тогда они:

— **Перпендикулярны**, когда $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

— **Параллельны**, если $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

Глава 4. Кривые второго порядка

4.1. Эллипс. Определение, вывод уравнения, характеристики

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек есть величина постоянная

Обозначим соответствующие точки через F_1 и F_2, тогда условие, сформулированное в определении для произвольной точки эллипса M можно записать следующим образом:

$$|F_1M| + |F_2M| = const$$

Вводя краткие обозначения

$$|F_1M| = r_1, \quad |F_2M| = r_2, \quad |F_1F_2| = 2c, \quad const = 2a, \quad a > 0$$

получаем

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad c < a$$

Замечание. Из определения следует, что эллипс — ограниченная кривая:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{x}{a}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq a, \quad x = \pm a \quad y = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{y}{b}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |y| \leq b, \quad y = \pm b \quad x = 0$$

Замечание. Симметрия эллипса: осевая и центральная

$$M(x, y) \in E \quad \Longrightarrow \quad M_1(x, -y) \in E, \quad M_2(-x, y) \in E, \quad M_3(-x, -y) \in E$$

Замечание. Точки пересечения эллипса с осями координат:

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, b)$$

4.1.1 Определения

- Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** эллипса.
- Расстояние $c = \dfrac{|F_1F_2|}{2}$ называется **фокусным расстоянием**.
- Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются **вершинами** эллипса.

- Отрезок A_1A_2 (B_1B_2) называется **большой (малой) осью эллипса.**
- Величина $2a$ $(2b)$ называется **длиной большой (малой)** оси.
- Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса.
- **Директрисами эллипса** называются прямые, параллельные малой оси эллипса и проходящие от на на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$

Замечание. Эксцентриситет ε:

$$a > c \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \in [0, 1)$$

Частные случаи:

$$\varepsilon = 0 \implies c = 0 \implies F_1 = F_2 \implies r_1 = r_2 = a = R \text{ — окружность}$$

$$\varepsilon = 0 \implies b = 0 \implies |F_1F_2| = 2a \implies F_1F_2 \text{ — отрезок}$$

4.1.2 Каноническое уравнение эллипса

> Канонической системой координат для эллипса называется декартова прямоугольная система координат, центр которой является серединой отрезка, заключенного между точками F_1 и F_2, которые лежат на оси Ox.

Лемма 1. Уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и называется **каноническим уравнением** эллипса.

Доказательство.

Подставим в определение эллипса выражения для r_1 и r_2:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

Тогда:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + (c-x)^2 + y^2$$
$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$
$$a^2 - xc = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$
$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

Заметим, что $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, откуда получаем искомое уравнение.

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. Всякое уравнение вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяет эллипс.

Доказательство.

Покажем, что из канонического уравнения эллипса следуют геометрические соотношения, лежащие в основе его определения.

Имеем:

$$y^2 = b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)$$

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\Big(1 - \frac{b^2}{a^2}\Big)x^2 \pm 2xc + a^2} = \sqrt{\Big(\frac{c}{a}x \pm a\Big)^2} = \Big|\frac{c}{a}x \pm a\Big|$$

Откуда получаем:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}$$

Тогда:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Что и требовалось доказать.

4.1.3 Рациональное уравнение эллипса

Рациональными уравнениями эллипса называются уравнения вида:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}$$

4.1.4 Полярное уравнение эллипса

Полярным уравнением эллипса называется уравнение вида:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}, \quad p = a - \varepsilon c$$

где (ρ, φ) — полярные координаты на плоскости, F_1 — полюс и Ox — полярная ось.

Лемма 3. Полярное уравнение эллипса $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$ задает эллипс.

Доказательство.

Из определения следует, что $r_1 = \rho$. С другой стороны:

$$r^2{}_2 = (2a - r_1)^2 = 4a^2 - 4ar_1 + {r_1}^2$$
$$r^2{}_2 = {r_1}^2 + 4^2 - 4r_1 c\cos\varphi$$

откуда после исключения r_2 находим:

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

Что и требовалось доказать.

4.1.5 Параметрическое уравнение эллипса

Параметрическим уравнением эллипса называются уравнения вида

$$x(t) = a \cdot \cos t, \quad y(t) = b \cdot \sin t$$

Лемма 4. Параметрические уравнения эллипса задают эллипс.

Доказательство.

Имеет место следующее тождество:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Что и требовалось доказать.

4.2. Гипербола. Определение, вывод уравнения, характеристики

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости есть величина постоянная.

Обозначим соответствующие точки через F_1 и F_2. Пусть M — произвольная точка гиперболы, тогда условие, сформулированное в определении, можно записать следующим образом:

$$||F_1M| - |F_2M| = const$$

Вводя краткие обозначения

$$|F_1M| = r_1, \quad |F_2M| = r_2, \quad |F_1F_2| = 2c, \quad const = 2a, \quad a > 0$$

получаем

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad c > a$$

что приводит к двум уравнениям:

$$r_1 - r_2 = 2a, \quad r_1 > r_2$$
$$r_2 - r_1 = 2a, \quad r_2 > r_1$$

Гипербола — неограниченная кривая:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{x}{a}\right| \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| \geq a, \quad x = \pm a \quad y = 0$$
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{y}{b}\right| \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad |y| \geq 0, \quad y = \pm b \quad x = 0$$

Осевая и центральная симметрии

$$M(x, y) \in H \quad \Longrightarrow \quad M_1(x, -y) \in H, \quad M_2(-x, y) \in H, \quad M_3(-x, -y) \in H$$

Точки пересечения с осями координат и вспомогательные точки:

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, b)$$

4.2.1 Определения

- Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** гиперболы.
- Расстояние $c = \dfrac{|F_1F_2|}{2}$ называется **фокусным расстоянием**.
- Точки A_1, A_2 называются **вершинами** гиперболы.
- Отрезок A_1A_2 (B_1B_2) называется **вещественной (мнимой)** осью гиперболы.
- Величина $2a$ $(2b)$ называется **длиной вещественной (мнимой)** оси.
- Величина $e = \dfrac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** гиперболы.
- **Директрисами гиперболы** называются прямые, параллельные ее мнимой оси и находящиеся на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 1$$

4.2.2 Каноническое уравнение гиперболы

> Каноническая система координат для гиперболы — это прямоугольная декартова система координат, центр которой является серединой отрезка, заключенного между точками F_1 и F_2, которые лежат на оси Ox.

Лемма 1. Уравнение гиперболы в канонической системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и называется **каноническим уравнением** гиперболы.

Доказательство.

Подставим в определение гиперболы выражения для r_1 и r_2:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(c-x)^2}$$

Будем иметь:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + (c-x)^2 + y^2$$

$$4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1$$

Заметим, что $b^2 = c^2 - a^2 > 0$, откуда получаем искомое уравнение.

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. Всякое уравнение вида $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ определяет гиперболу.

Доказательство.

Покажем, что из канонического уравнения гиперболы следуют геометрические соотношения, лежащие в основе определения. Имеем:

$$y^2 = b^2\Big(\frac{x^2}{a^2} - 1\Big)$$

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{\Big(1 + \frac{b^2}{a^2}\Big)x^2 \pm 2xc + a^2} = \sqrt{\Big(\frac{c}{a}x \pm a\Big)^2} = \Big|\frac{c}{a}x \pm a\Big|$$

Откуда получаем:

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a, \quad r_1 > r_2$$

$$r_1 = -\varepsilon x + a, \quad r_2 = -\varepsilon x - a, \quad r_1 < r_2$$

Что и требовалось доказать.

4.2.3 Рациональное уравнение гиперболы

Рациональными уравнениями гиперболы называются уравнения вида:

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a$$
$$r_1 = -\varepsilon x + a, \quad r_2 = -\varepsilon x - a$$

где величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом гиперболы**.

Замечание. Эксцентриситет ε:

$$a < c \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \in [1, +\infty).$$

Частные случаи:

$$\varepsilon = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = 0 \text{ — лучи из фокусов}$$

$$\varepsilon = +\infty \quad \Longrightarrow \quad a = 0 \text{ — ось } Oy$$

4.2.4 Полярное уравнение гиперболы

Полярными уравнениями гиперболы называются уравнения вида

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = a - \varepsilon c, \quad r_1 > r_2$$
$$\rho = -\frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = a - \varepsilon c, \quad r_1 < r_2$$

где (ρ, φ) — полярные координаты на плоскости, F_1 — полюс и Ox — полярная ось.

Лемма 3. Полярное уравнение гиперболы задает гиперболу

Доказательство.

Из определения следует, что $r_1 = \rho$. Пусть $r_1 > r_2$, тогда:

$$
\begin{gathered}
{r_2}^2 = (r_1 - 2a)^2 = {r_1}^2 - 4ar_1 + 4a^2 \\
{r_2}^2 = {r_1}^2 + 4c^2 - 4r_1 c \cos\varphi
\end{gathered}
$$

откуда после исключения r_2 находим:

$$
r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon\cos\varphi}
$$

Случай $r_2 > r_1$ рассматривается аналогично.

Что и требовалось доказать.

4.2.5 Параметрическое уравнение гиперболы

Параметрическими уравнениями гиперболы называются уравнения вида

$$
x(t) = a \cdot \cosh t, \quad y(t) = b \cdot \sinh t
$$

Лемма 4. Параметрические уравнения гиперболы задают гиперболу.

Доказательство.

Имеет место следующее тождество:

$$
\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1
$$

Что и требовалось доказать.

4.3. Парабола. Определение, вывод уравнения, характеристики

4.3.1 Определение

Парабола — геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от данной прямой d и данной точки F. Точка F не лежит ни на кривой, ни на прямой d.

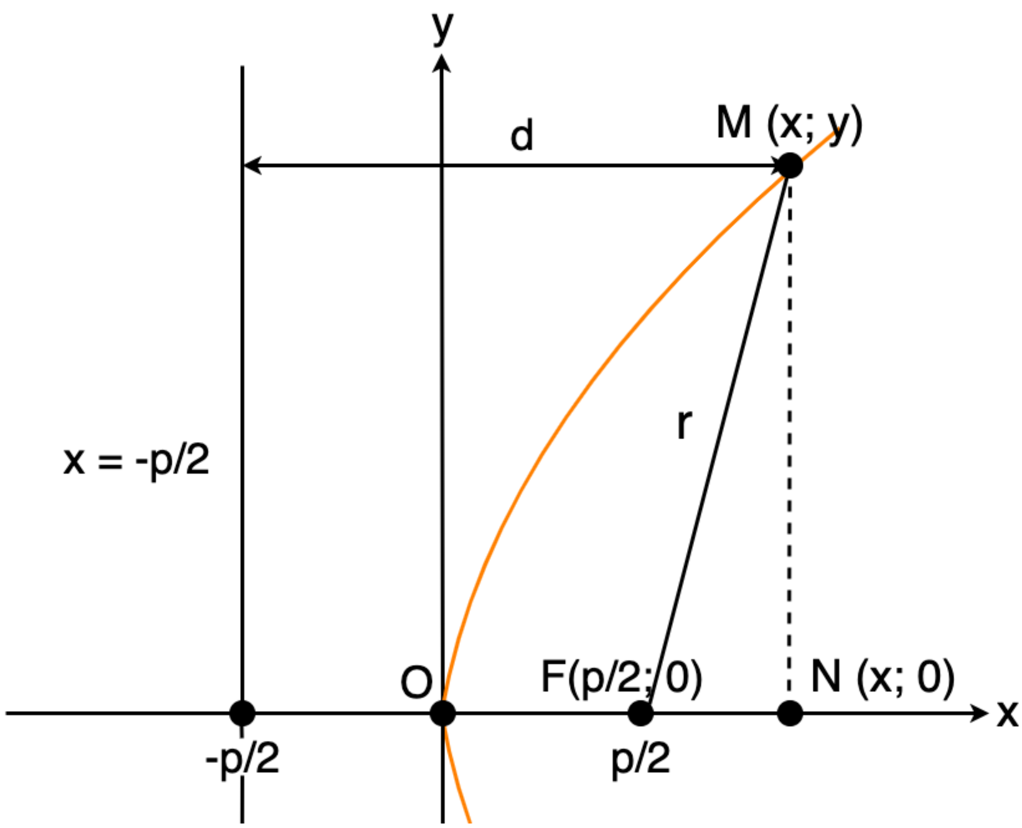
Точка F называется **фокусом**, а прямая d — **директрисой параболы**. Расстояние от фокуса до директрисы называется **фокальным параметром** параболы и обозначается через p.

Эксцентриситет параболы — это отношение расстояний от произвольной точки на кривой до фокуса и от этой же точки до директрисы. Эксцентриситет параболы по определению равен 1.

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$

4.3.2 Вывод канонического уравнения

Пусть фокус F принадлежит оси OX. Проведем директрису перпендикулярно оси OX на расстоянии p от фокуса F, тогда пусть т. O будет серединой этого расстояния. Возьмем т. $M(x;y)$, которая принадлежит параболе. Расстояние от т. $M(x;y)$ до фокуса обозначим за r, до директрисы за d.



Расстояние от т. $M(x;y)$ до директрисы равно $d = \left|x + \frac{p}{2}\right|$.

По определению параболы $r = d$.

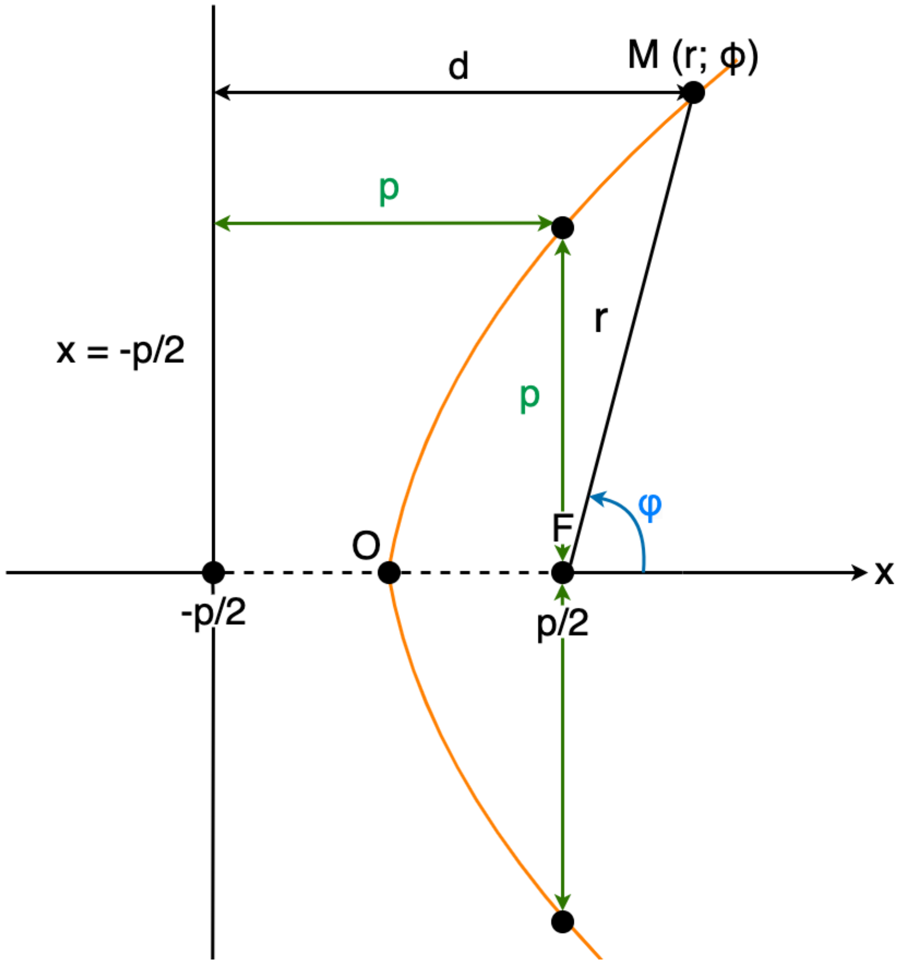
По теореме Пифагора из прямоугольного ΔFMN: $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Следовательно:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$
$$y^2 = 2px$$

4.3.3 Уравнение в полярной системе координат

Выберем фокус F параболы, а в качестве полярной оси — луч с началом в точке F, перпендикулярный директрисе и не пересекающий её. Тогда для произвольной точки $M(r, \varphi)$, принадлежащей параболе, по определению $d = r$.



Поскольку $d = p + r\cos\varphi$, получим уравнение параболы в координатной форме:

$$d = p + r \cdot \cos\varphi \iff r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

что является уравнением параболы в полярной системе координат $Fr\varphi$.

4.3.4 Свойства параболы

— Имеет ось симметрии называемой осью параболы. Ось проходит через фокус и вершину перпендикулярно директрисе;

— Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе;

— Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб;

Глава 5. Пределы

5.1. Вещественная ось. Бесконечность. Окрестность точки

5.1.1 Вещественная ось

А что писать сюда???

5.1.2 Бесконечность

И сюда что писать?

5.1.3 Окрестность точки

Окресностью действительной точки x_0 называется любой открытый интервал, содержащий эту точку:

$$U(x_0) = \{x : -\varepsilon_1 < x - x_0 < \varepsilon_2; \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0\}$$

Эпсилон окрестностью точки x_0 называется множество точек, расстояние от которых до точки x_0 меньше ε:

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Проколотой окрестностью точки x_0 называется окрестность этой точки, из которой исключили саму эту точку x_0:

$$\overset{\circ}{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$$

5.2. Определения предела функции. Односторонние пределы

5.2.1 Предел функции по Коши

Значение A называется **пределом** (**предельным значением**) функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно подобрать соответствующее ему положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех аргументов x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $0 \leq |f(x) - A| < \varepsilon$, то есть $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \Big[\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (0 < |x - x_0| < \delta) \to (|f(x) - A| < \varepsilon)\Big]$$

5.2.2 Окрестностное определение предела по Коши

Значение A называется **пределом** (**предельным значением**) функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой окрестности $O(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{O}$ точки x_0 такая, что образ этой окрестности $f(\overset{\circ}{O}(x_0))$ лежит в $O(A)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \left[\forall O(A) : \exists \overset{\circ}{O}(x_0) : f(\overset{\circ}{O}(x_0) \subseteq O(A))\right]$$

Определение. Предел по Гейне.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Тогда значение A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\} \to x_0 : x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ последовательность соответствующих значений $\{f(x_n)\}$ стремится к A:

$$\forall \{x_n\} : \ x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \ x_n \to x_0, \ f(x_n) \to A$$

5.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

5.3.1 Бесконечно малые функции и их свойства

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

5.3.2 Свойства бесконечно малых функций

Свойство 1.

Пусть есть бесконечно малая функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$. Также есть функция $g(x)$, ограниченная в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_g(x_0)$. Тогда их произведение есть бесконечно малая функция:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot g(x)) = 0$$

Доказательство.

Так как $g(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_g(x_0)$, то $\exists M : \forall x \in \overset{\circ}{U}_g(x_0) \implies |g(x)| \leq M$.

Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)$, то $\exists \overset{\circ}{U}_\alpha(x_0)$, на которой определена функция $\alpha(x)$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : x \in \overset{\circ}{U}_\alpha(x_0) \implies |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Пусть $\overset{\circ}{U}(x_0) = \min(\overset{\circ}{U}_\alpha(x_0), \overset{\circ}{U}_g(x_0))$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \implies |\alpha(x) \cdot g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, т. е. $|\alpha(x) \cdot g(x)| < \varepsilon$.

Следовательно:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot g(x)) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Из этого свойства следует, что произведение б. м. ф. на число есть функция бесконечно малая.

Свойство 2.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Тогда их **сумма**, **разность** и **произведение** являются также бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Доказательство.

Докажем, что сумма бесконечно малых функций являетсяя бесконечно малой функцией. Разность и произведение доказываются аналогично.

$\alpha(x)$ б. м. ф. $\implies$ $\alpha(x)$ определена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_\alpha(x_0)$

Тогда $\forall\varepsilon > 0 : x \in \overset{\circ}{U}_\alpha(x_0) \implies |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\beta(x)$ б. м. ф. $\implies$ $\beta(x)$ определена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_\beta(x_0)$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0 : x \in \overset{\circ}{U}_\beta(x_0) \implies |\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Пусть $\overset{\circ}{U}(x_0) = \min(\overset{\circ}{U}_\alpha(x_0), \overset{\circ}{U}_\beta(x_0))$

Тогда $\forall\varepsilon > 0 : x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \implies |\alpha(x) + \beta(x)| < |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Следовательно:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Теорема о частном от деления ограниченной снизу функции на бесконечно малую. Пусть есть бесконечно малая функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, которая определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\alpha(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)\alpha(x) \neq 0$. Также есть функция $g(x)$, которая определена и ограниченна в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_g(x_0)$ точки x_0 числом M: $0 < |g(x)| \leq M$. Тогда их частное есть бесконечно большая функция:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\alpha(x)} = \infty$$

5.3.3 Бесконечно большие функции и их свойства

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to x_0$, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Теорема о сумме ограниченной функции и бесконечно большой.

Сумма или **разность** ограниченной функции на некоторой проколотой окрестности точки x_0 и бесконечно большой функции при $x \to x_0$ является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$.

Теорема о произведении ограниченной снизу функции на бесконечно большую функцию.

Пусть есть функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$. Также есть функция $g(x)$, которая определена на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}(x_0)$ точки

x_0 и ограничена снизу значением $M : 0 < M \leq |g(x)|$. Тогда их произведение является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$$

Теорема о частном от деления ограниченной функции на бесконечно большую.

5.3.4 Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями

- Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.
- Если функция $\alpha(x)$ является бесконенчо малой при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой функцией можно выразить символическим образом:

$$\frac{1}{\infty} = 0 \qquad \frac{1}{0} = \infty$$

Следовательно:

$$\frac{1}{+0} = +\infty \qquad \frac{1}{-0} = -\infty$$
$$\frac{1}{+\infty} = +0 \qquad \frac{1}{-\infty} = -0$$

5.3.5 Арифметические свойства

Пусть существуют пределы функций:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq \infty$$
$$\lim_{x \to x_0} y(x) = b \neq 0$$
$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Тогда функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ — бесконечно большой при $x \to x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} (g(x) \pm f(x)) = \infty$$
$$\lim_{x \to x_0} (g(x) \cdot \alpha(x)) = 0$$
$$\lim_{x \to x_0} (y(x) \cdot f(x)) = \infty$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{y(x)}{\alpha(x)} = \infty$$

5.4. Сравнение пределов. Теорема о двух милиционерах

5.4.1 Теорема о двух милиционерах

Теорема 1. Пусть есть 3 вещественные последовательности $(x_n), (y_n), (z_n)$, такие что

$$\begin{cases} \forall n \ \ x_n \le y_n \le z_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \end{cases}$$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство.
$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \ \ \forall n > N_1 \to |x_n - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < x_n$
$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \ \ \forall n > N_2 \to |z_n - a| < \varepsilon \implies z_n < a + \varepsilon$
$N = \max(N_1, N_2)$

$\forall n > N$
$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$
$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

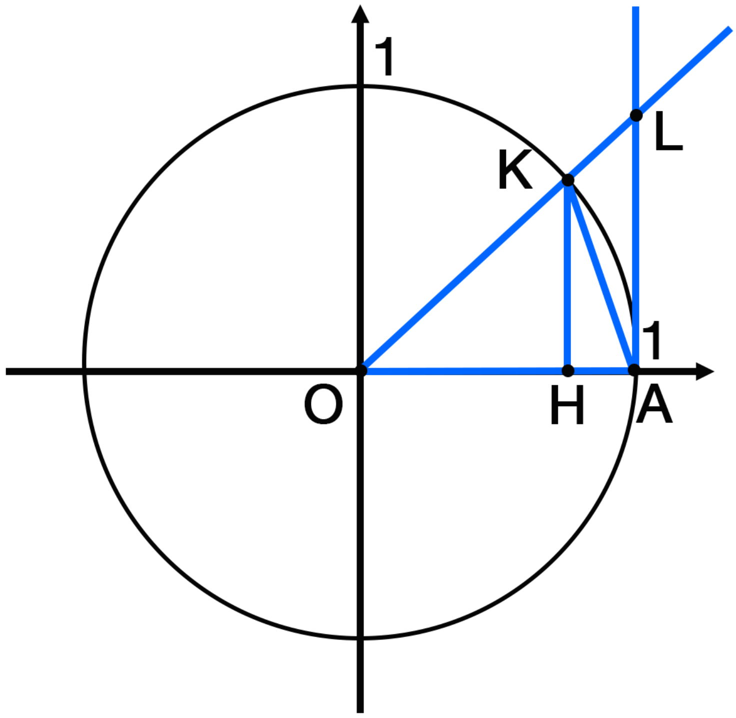
Что и требовалось доказать.

5.5. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Рассмотрим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sin x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{\sin x}{x}$ и докажем, что они равны 1.

Рассмотрим случай $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Отложим этот угол на единичной окружности так, чтобы его вершина совпадала с началом координат, а одна сторона совпадала с осью OX. Пусть K — точка пересечения второй сторны угла с единичной окружностью, а точка L — с касательной к этой окружност в точке $A = (1; 0)$. Точка H — проекция точки K на ось OX.



Очевидно, что $S_{\triangle OKA} < S_{sectKOA} < S_{\triangle OAL}$, где $S_{sectKOA}$ — площадь сектора KOA. Поскольку $|KH| = \sin x, |LA| = \operatorname{tg} x$:

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |KH| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$
$$S_{sectKOA} = \frac{1}{2} \cdot |OA|^2 \cdot x = \frac{x}{2}$$
$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |LA| = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Тогда, заменив площади в неравенстве, получим:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Так как при $x \to +0 : \sin x > 0, x > 0, \operatorname{tg} x > 0$, получим:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{x \to +0} \cos x \leq \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \implies 1 \leq \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \implies \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Найдем левый односторонний предел. Пусть $t = -x \implies t \to +0$:

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, следовательно и сам предел равен 1.

Следствия

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$
3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$
4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$

5.6. Второй замечательный предел. Число e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Доказательство.

Сначала докажем теорему для натуральных значений x:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n; n\in\mathbb{N}$$

По формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}\cdot a^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+ \\ +\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot b^n$$

Полагая $a=1, b=\dfrac{1}{n}$, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+ \\ +\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+ \\ +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

С увеличением n число полож. слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает. Следовательно величины $\left(1-\dfrac{1}{n}\right), \left(1-\dfrac{2}{n}\right), \ldots$ возрастают, а значит и последовательность является возрастающей.

Заметим, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2, n\in\mathbb{N}$.

Покажем, что последовательность ограничена, заменив каждую скобку в правой части на единицу:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

Усилим полученное неравенство, заменив $3, 4, 5, \ldots$, стоящие в знаменателях дробей числом 2 :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Заметим, что в скобках получилась геометрическая прогрессия, сумма которой равна $2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2 >$. А значит:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

На основании теоремы Вейерштрасса наша последовательность монотонно возрастает и ограничена, как следствие, имеет предел, равный e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Что и требовалось доказать.

Следствия

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a} = 1$ для $a > 0, a \neq 1$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{kx} = 1$

5.6.1 Число e

Число e может быть определено несколькими способами:

- Через предел: $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ или $e = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ (следует из формулы Муавра-Стирлинга)
- Как сумма ряда: $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ или $\frac{1}{e} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$
- Как единственное число a, для которого выполняется: $\int_1^a \frac{dx}{x} = 1$
- Как единственное полож. число a, для которого верно: $\frac{d}{dx}a^x = a^x$

Свойства

1. Производная экспоненты равна самой экспоненте
2. Число e иррационально
3. Число e трансцендентно (не может быть корнем многочлена с целочисленными коэффициентами)
4. $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$
5. $e^{i\pi} + 1 = 0$
6. Число e разлагается в бесконечную дробь

5.7. Теоремы Вейерштрасса

Теорема Вейерштрасса для непрерывных функций.
Если функция $f(x)$ непрерывна на всем $[a, b]$, то она ограничена на нем и притом $\exists \min (f(x)), \max (f(x))$, т. е. $\exists\ x_m, x_M \in [a, b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\ \forall x \in [a, b]$.

Теорема Вейерштрасса для полунепрерывных функций.
Если функция $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и полунепрерывна **сверху**, то:

$$\begin{cases} M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) < +\infty \\ \exists x_M \in [a, b] : f(x_M) = M \end{cases}$$

Если функция $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и полунепрерывна **снизу**, то:

$$\begin{cases} m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) > -\infty \\ \exists x_m \in [a, b] : f(x_m) = m \end{cases}$$

Доказательство.

Что и требовалось доказать.

5.8. Теорема Ролля

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство.
Если $f(x)$ постоянна на всем $[a, b]$, то утверждение верно и очевидно, поскольку $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$.
Если же нет, поскольку $f(a) = f(b)$, то согласно теореме Вейерштрасса, $\exists \min (f(x)), \max (f(x))$, то есть имеет в этой точке локальный экстремум, и по лемме Ферма производная в этой точке равна 0.
Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$

Что и требовалось доказать.

5.9. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то найдется такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), причем $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Замечание. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши, где $g(x) = x$. Поэтому достаточно доказать теорему Коши.

Доказательство теоремы Коши.

Заметим, что $g(a) \neq g(b)$, так как иначе по теореме Ролля $\exists\, t \in (a, b) : g'(t) = 0$.

Введем новую функцию $h(x) = f(x) - Kg(x)$, где $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Также заметим, что $h(a) = h(b)$, а потому функция $h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $h'(c) = 0 \iff f'(c) = Kg'(c)$. Отсюда получим:

$$K = \frac{f'(c)}{g'(c)} \iff \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Что и требовалось доказать.

5.10. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя действует одинаково как для неопределенности вида $0/0$, так и для ∞/∞. Однако их доказательства несколько различаются, поэтому они будут рассмотрены отдельно.

Теорема «Правило Лопиталя» ($0/0$ и ∞/∞).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и для них выполняются следующие условия:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ или ∞
2. $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$
3. $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство первого правила Лопиталя ($0/0$).

Доопределим или переопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a:

$$f(a) = g(a) = 0$$

На пределы и производные это никак не повлияет, поскольку они не зависят от того, чему равны функции в точке a. Тогда по теореме Коши:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

где $c \in (a, x)$.

Поскольку существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, который равен

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Если $x \to a$, то и $c \to a$, т. к. $a < c < x$, следовательно:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство второго правила Лопиталя (∞/∞).

Функции $\frac{1}{f(x)}$ и $\frac{1}{g(x)}$ являются бесконечно малыми при $x \to a$. Тогда по первому правилу Лопиталя:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)f^2(x)}{f'(x)g^2(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2$$

Следовательно:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Что и требовалось доказать.

5.11. Теорема Ферма

Теорема Ферма. Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема на (a, b) и $f(c) = \max(f(x))$ или $f(c) = \min(f(x))$, где $c \in (a, b)$, тогда $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Рассмотрим случай, когда $f(c) = \max(f(x))$. Случай, когда c — точка минимума, доказывается аналогично. Производная $f'(c)$ равна:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$$\begin{cases} \Delta x > 0 \implies \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \implies f'(c) \leq 0 \\ \Delta x < 0 \implies \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \implies f'(c) \geq 0 \end{cases} \implies f'(c) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Глава 6. Производные и дифференциалы

6.1. Производные

Определение. Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки x, тогда **производной функции** $f(x)$ **в точке** x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента, когда последний стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Дифференцирование — операция взятия полной или частной производной функции.

6.1.1 Обозначение Лагранжа

Производная функции $f(x)$ обозначается добавлением штриха к самой функции, т. е. $f'(x)$. Если функция задана алгебраическим выражением, то выражение заключается в скобки и добавляется знак штриха, т. е. $(f(x))'$. В случае наличия зависимой переменной $y = f(x)$ производную обозначают как $y' = f'(x)$.

Если функция зависит от нескольких переменных, например $y = f(x_1, x_2, x_3)$, но $x_2, x_3 = const$, то к обозначению производной добавляется индекс той переменной, по которой вычисляется производная:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3)$$

При наличии зависимой переменной используется следующее обозначение:

$$y'_{x_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3)$$

Производную по какой-то определенной переменной также можно обозначать с помощью точки:

$$\dot{y} = y'_t$$

6.1.2 Обозначение Лейбница

В способе Лейбница зависимую переменную обозначают в форме отношения дифференциалов:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}$$

Этот способ удобен, поскольку указывает, по какой переменной ведется дифференцирование. Такой способ применяется только для функций от одной переменной. Для функций от многих переменных используют обозначение частной производной:

$$\frac{dy}{dx_1}$$

6.1.3 Обозначение Коши

Для обозначения производной также можно использовать обозначение Коши:

$$Dy = Df(x)$$

6.2. Существование производной

Рассмотрим вопрос о существовании предела, который используется при вычислении производной, при заданном значении x:

$$\lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Здесь могут возникнуть три случая:

1. В точке x существует конечный предел.
2. Существует бесконечный предел ∞, $+\infty$ или $-\infty$.
3. Предела не существует.

Рассмотрим эти случаи:

1. Если существует конечный предел, то функция имеет производную в точке x.
2. Если в некоторой точке x существует бесконечный предел, то производной в этой точке не существует, поскольку это противоречит определению производной. Однако при этом говорят, что функция $f(x)$ имеет бесконечную производную в точке x.
3. Если предела не существует, то функция не имеет производной в точке x.

6.3. Производные справа и слева

Определение. Правая и левая производные функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в правой окрестности $U(x)$ точки x. Тогда **правой производной функции** $f(x)$ в точке x называется правый предел:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Соответственно, если функция определена в левой окрестности точки x, то **левой производной функции** $f(x)$ называется левый предел:

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Лемма об односторонних производных.

Функция $f(x)$ имеет в точке x производную тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производные справа и слева и они равны:

$$\exists f'_+(x), f'_-(x):\ f'_+(x) = f'_-(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$$

Доказательство.

Что и требовалось доказать.