

## Быстрое перемещение

Для перемещения **нажмите** на название требуемого раздела:

1. Линейная зависимость системы векторов. Базис
2. Скалярное произведение векторов и его свойства. Проекция
3. Свойства определителей
4. Системы координат. Преобразования сдвига и поворота
5. Плоскость и ее уравнения
6. Прямая в пространстве и ее уравнения
7. Прямая на плоскости: уравнение через две точки, каноническое, параметрическое, общее
8. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых в пространстве
9. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости
10. Парабола. Определение, вывод уравнения, характеристики
11. Первый замечательный предел
12. Второй замечательный предел. Число  $e$

# 1. Линейная зависимость системы векторов.

## Базис

### Определения

#### Линейная комбинация

Линейной комбинацией  $n$  векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется сумма произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, то есть выражения вида:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — любые действительные числа.

#### Линейно зависимая система векторов

Если для линейная комбинация  $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$  равна нулевому вектору (нулю) при условии, что хотя бы одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  отлично от нуля, то система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется **линейно зависимой**.

#### Линейно независимая система векторов

Если для линейная комбинация  $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$  равна нулевому вектору (нулю) **только тогда**, когда все числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  равны нулю, то система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется **линейно независимой**.

### Свойства линейной зависимости и независимости

1. Если к линейно зависимой системе векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  добавить несколько векторов, то полученная система будет линейно **зависимой**.

2. Если из линейно независимой системы векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  исключить несколько векторов, то полученная система будет линейно **независимой**.

3. Если в системе векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  есть хотя бы один нулевой вектор, то такая система линейно зависима.

4. Если система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно зависима, то хотя бы один из ее векторов линейно выражается через остальные. Если система векторов линейно независима, то ни один из векторов не выражается через остальные.

Из двух последних свойств следует важное утверждение: если система векторов содержит векторы  $\vec{a}$  и  $c\vec{a}$ , где  $c$  — произвольное число, то она линейно зависима.

## Размерность и базис

**Размерностью векторного пространства** называется число, равное максимальному количеству линейно **независимых** векторов в этом пространстве.

**Базис векторного пространства** – это упорядоченная совокупность линейно **независимых** векторов этого пространства, число которых равно размерности пространства.

## 2. Скалярное произведение векторов и его свойства. Проекции

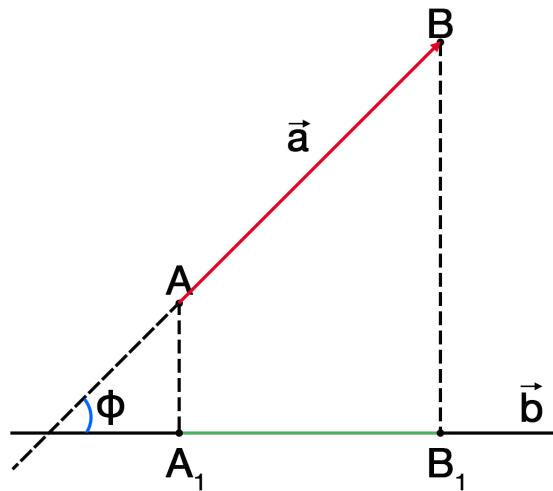
Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  есть ничто иное как:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — величина угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

### Проекции

Проекцией вектора  $\vec{AB}$  на ось  $\vec{b}$  — это длина отрезка  $A_1B_1 \in \vec{b}$  со знаком плюс, если направление вектора  $A_1B_1$  с направлением оси  $\vec{b}$ , и со знаком минус, если эти направления противоположны.



Проекция вектора  $\vec{AB} = \vec{a}$  обозначается формулой:  $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{AB}$  или  $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$   
Проекция вектора  $\vec{a}$  на ось  $\vec{b}$  выражается формулой:

$$\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$$

С другой стороны:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Следовательно:

$$\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi \iff \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{|\vec{a}| \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \iff \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

### Свойства проекций

1.  $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_1 + \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_2 + \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_3$
2.  $\text{Pr}_{\vec{b}}(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}$

### Свойства скалярного произведения

1.  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2.  $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$
3.  $(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a}, \vec{b})$ , где  $\lambda \in R$ .
4.  $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$ , причем  $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \iff |\vec{a}| = 0$
5.  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
6.  $\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ , где  $\varphi$  угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
7.  $\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a}, \vec{b}) = 0$
8. Угол между двумя ненулевыми векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является острым тогда и только тогда, когда  $(\vec{a}, \vec{b}) > 0$ ; и является тупым – когда  $(\vec{a}, \vec{b}) < 0$ .

### 3. Свойства определителей

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы:  $\det A^T = \det A$

2. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на некоторое число  $\lambda$  равносильно умножению определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

3. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца, то определитель изменяет свой знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

4. Если матрица содержит нулевую строку (столбец), то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

5. Если две строки (столбца) матрицы равны между собой, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

6. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны друг другу, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{i3} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

7. Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{mn}$$

8. Если все элементы  $k$ -ой строки (столбца) определителя представлены в виде сумм  $a_{kj} + b_{kj}$ , то определитель можно представить в виде суммы соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & a_{k3} + b_{k3} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

9. Определитель не изменится, если к элементам любой его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или соответствующего столбца), умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + ca_{i1} & a_{k2} + ca_{i2} & a_{k3} + ca_{i3} & \dots & a_{kn} + ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

10. Пусть  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда определитель произведения матриц равен произведению определителей:

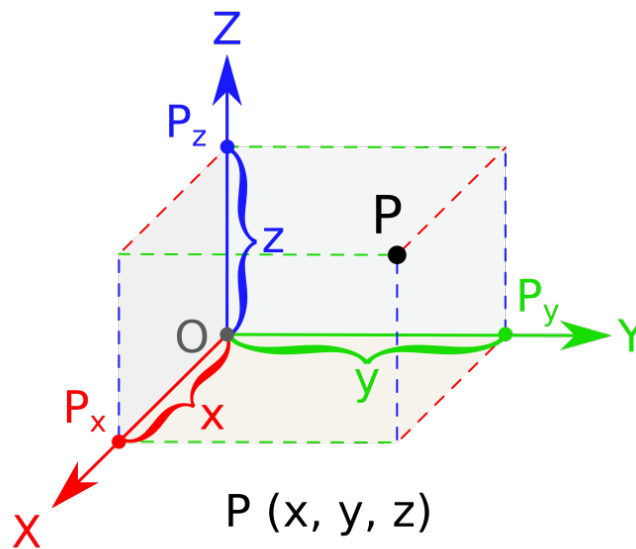
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

## 4. Системы координат. Преобразования сдвига и поворота

### Декартова система координат

Расположение точки  $P$  на плоскости определяется декартовыми координатами с помощью пары чисел  $(x, y)$ :

- $x$  — расстояние от точки  $P$  до оси  $y$  с учетом знака
- $y$  — расстояние от точки  $P$  до оси  $x$  с учетом знака

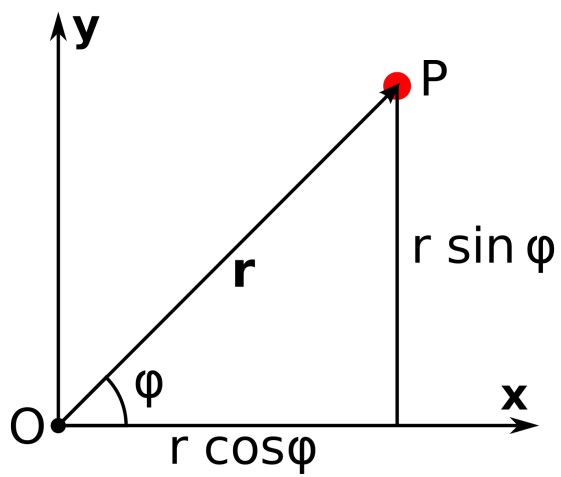


В пространстве уже необходимы три координаты  $(x, y, z)$  :

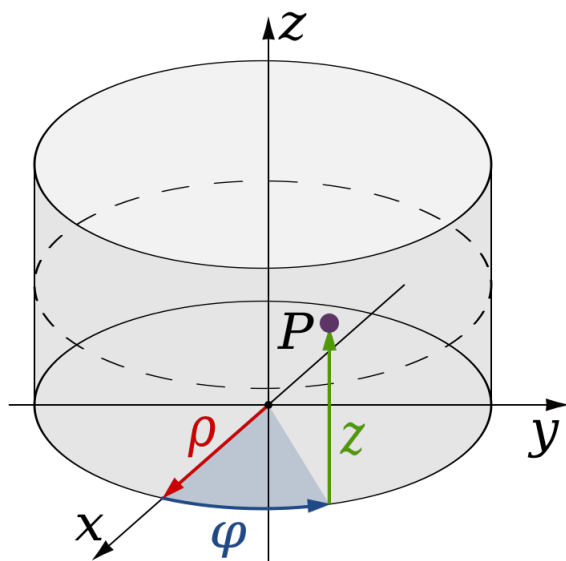
- $x$  — расстояние от точки  $P$  до плоскости  $yz$
- $y$  — расстояние от точки  $P$  до плоскости  $xz$
- $z$  — расстояние от точки  $P$  до плоскости  $xy$



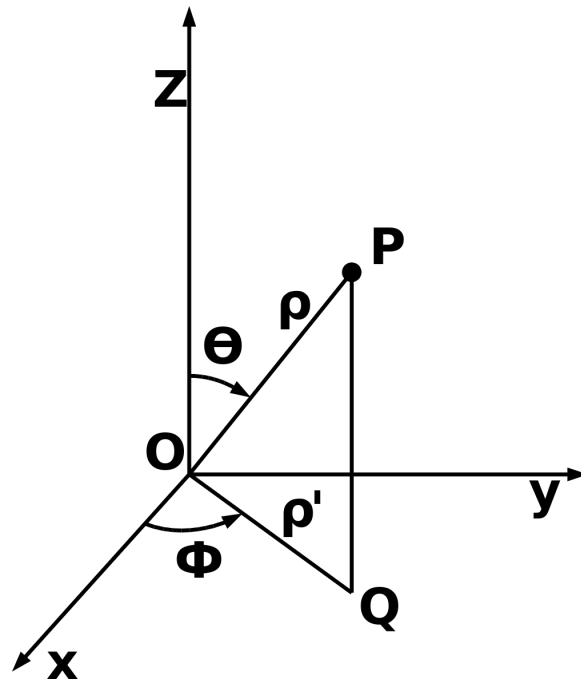
## Полярная система координат



## Цилиндрическая система координат



## Сферическая система координат



## 5. Плоскость и ее уравнения

**Плоскость** – это геометрическая фигура, состоящая из отдельных точек. Каждой точке в трехмерном пространстве соответствуют координаты, которые задаются тремя числами. Уравнение плоскости устанавливает зависимость между координатами всех точек.

### Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

#### Теорема

Всякая плоскость в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  в трехмерном пространстве может быть задана уравнением вида  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C, D$  – некоторые действительные числа, одновременно не равные нулю. Всякое уравнение, имеющее вид  $Ax + By + Cz + D = 0$  определяет плоскость в трехмерном пространстве.

### Уравнение плоскости в отрезках

Если плоскость пересекает оси  $OX, OY, OZ$  в точках с координатами  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$ ,  $(0, 0, c)$ , то она может быть найдена по формуле **уравнения плоскости в отрезках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

### Уравнение плоскости, проходящей через точку, перпендикулярно вектору нормали

Пусть у нас есть точка  $M(x_0, y_0, z_0)$ , принадлежащая плоскости, и вектор нормали плоскости  $\vec{n} = (A, B, C)$ . Тогда плоскость задается уравнением:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

### Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой

Пусть у нас есть три точки  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$ , лежащих на плоскости и не лежащих на одной прямой. Тогда уравнение плоскости можно

найти по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

## 6. Прямая в пространстве и ее уравнения

Уравнение прямой на плоскости в прямоугольной системе координат  $Oxy$  – это линейное уравнение с переменными  $x$  и  $y$ , которому отвечают координаты всех точек прямой и не удовлетворяют координаты никаких прочих точек.

### Уравнение прямой в пространстве как уравнение двух пересекающихся плоскостей

Когда две плоскости в пространстве имеют общую точку, существует их общая прямая, на которой находятся все общие точки этих плоскостей.

Пусть у нас есть две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , которые описываются следующими уравнениями плоскости:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Прямую их пересечения обозначим за  $l$ . Поскольку любая точка прямой удовлетворяет сразу двум уравнениям плоскостей, координаты любой точки прямой будут частным решением системы:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

### Канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть у нас есть некоторая прямая  $l$ , точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , лежащая на прямой  $l$  и направляющий вектор  $\vec{r} = (m, n, p)$ . Пусть  $M(x, y, z)$  – произвольная точка  $l$ , тогда вектор  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  и вектор  $r$  коллинеарны. Из условия коллинеарности следует, что:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

что является каноническим уравнением прямой в пространстве.

### Параметрические уравнения прямой в пространстве

Воспользуемся каноническим уравнением прямой, приравняв каждую из дробей к некоторому параметру  $t$ :

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

Тогда получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

### Уравнение прямой через две заданные точки

Пусть даны две точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , которые лежат на некоторой прямой  $l$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  является направляющим вектором этой прямой.

Пусть у нас есть произвольная точка  $M(x, y, z)$ , лежащая на прямой  $l$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$  будет коллинеарен вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . Из условия коллинеарности следует, что:

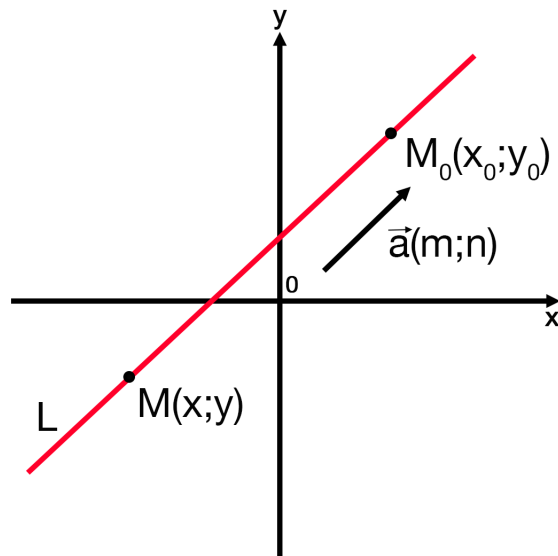
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

что является уравнением прямой в пространстве, которая проходит через две заданные точки.

## 7. Прямая на плоскости: уравнение через две точки, каноническое, параметрическое, общее, в отрезках на осях

### Каноническое уравнение прямой

Дана прямая  $L$ , проходящая через точку  $M_0(x_0; y_0)$ , и направляющий вектор  $\vec{a}(m, n)$  этой прямой. Пусть  $M(x, y)$  — произвольная точка на искомой прямой  $L$ , тогда  $M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ .



Условием коллинеарности векторов  $\overrightarrow{M_0M}$  и  $\vec{a}$  будет:  $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ , что и является каноническим уравнением прямой.

### Уравнение прямой через 2 заданные точки

Даны две точки  $M_0(x_0; y_0)$  и  $M_1(x_1; y_1)$ , лежащие на прямой  $L$ . Из этого следует, что  $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$  — направляющий вектор прямой  $L$ .

Тогда искомое уравнение будет иметь вид:  $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$ .

### Параметрическое уравнение прямой

Уравнение  $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \vec{a}$  называют векторно-параметрическим уравнением прямой, где  $\lambda$  — некоторое действительное число.

В векторной форме оно имеет вид:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \vec{d} \iff \begin{cases} x - x_0 = \lambda \cdot m \\ y - y_0 = \lambda \cdot n \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot m \\ y = y_0 + \lambda \cdot n \end{cases}$$

## Общее уравнение прямой

Уравнение, имеющее вид  $Ax + By + C = 0$  — это общее уравнение прямой на плоскости в прямоугольной системе координат  $Oxy$ .

### Теорема

Любое уравнение первой степени, имеющее вид  $Ax + By + C = 0$ , где  $A, B, C$  — некоторые действительные числа ( $A$  и  $B$  не равны одновременно нулю) определяет прямую линию в прямоугольной системе координат на плоскости. В свою очередь, любая прямая в прямоугольной системе координат на плоскости определяется уравнением, имеющим вид  $Ax + By + C = 0$  при некотором наборе значений  $A, B, C$ .

### Доказательство

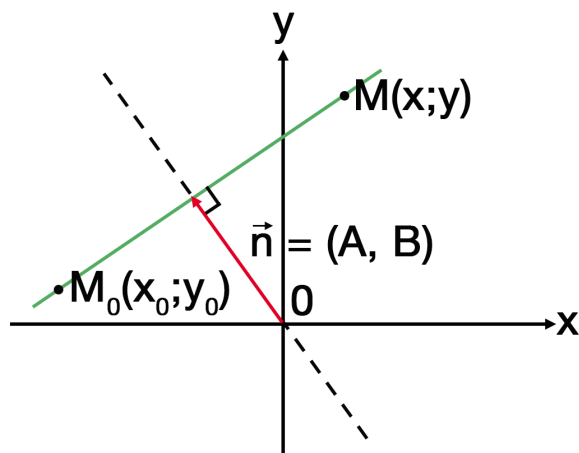
Теорема состоит из 2-х пунктов. Докажем каждый из них:

**Пункт 1.** Уравнение  $Ax + By + C = 0$  определяет на плоскости прямую.

Пусть существует некоторая точка  $M_0(x_0, y_0)$ , координаты которой отвечают уравнению  $Ax + By + C = 0$ , таким образом:  $Ax_0 + By_0 + C = 0$ . Вычтем из левой и правой частей уравнений  $Ax + By + C = 0$  левую и правую части уравнения  $Ax_0 + By_0 + C = 0$ , получим новое уравнение, имеющее вид  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C = 0$ . Оно эквивалентно  $Ax + By + C = 0$ . § Полученное уравнение  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C = 0$  является необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов  $\vec{n} = (A, B)$  и  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ . Таким образом множество точек  $M(x, y)$  задает в прямоугольной системе координат прямую линию, перпендикулярную направлению вектора  $\vec{n} = (A, B)$ .

Предположим, что это не так. Тогда вектор  $\vec{n} = (A, B)$  не перпендикулярен вектору  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ , а равенство  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$  не является верным.





Следовательно, уравнение  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$  определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат на плоскости, а значит и эквивалентное ему уравнение  $Ax + By + C = 0$  определяет ту же прямую.

**Пункт 2.** Любую прямую в прямоугольной системе координат на плоскости можно задать уравнением первой степени  $Ax + By + C = 0$ .

Зададим в прямоугольной системе координат на плоскости прямую  $a$ ; точку  $M_0(x_0, y_0)$ , через которую проходит эта прямая, а также нормальный вектор этой прямой  $\vec{n} = (A, B)$ . Пусть точка  $M(x, y)$  — произвольная точка на прямой, тогда векторы  $\vec{n} = (A, B)$  и  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$  являются перпендикулярными друг другу и их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

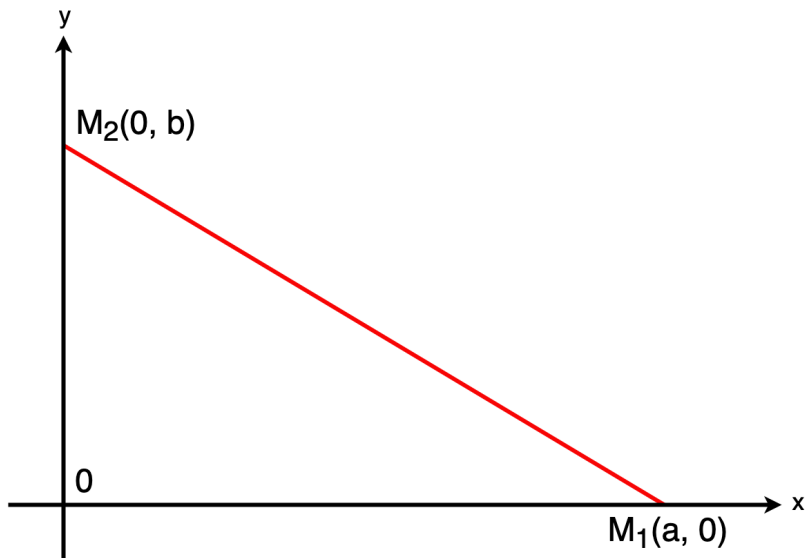
Пусть  $C = -Ax_0 - By_0$ , тогда получим уравнение:

$$Ax + By + C = 0$$

## Уравнение прямой в отрезках на осях

Рассмотрим общее уравнение прямой  $Ax + By + C = 0$  при условии  $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$  (то есть прямая не параллельна ни одной из осей координат и не проходит через начало отсчёта). Теперь преобразуем уравнение:

$$Ax + By + C = 0 \iff Ax + By = -C \iff \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$



Введем обозначение:  $\frac{-C}{A} = a$ ,  $\frac{-C}{B} = b$ . Отсюда получим уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Это — уравнение прямой в отрезках на осях, так как числа  $m$  и  $n$  соответствуют длинам отрезков (с соответствующими знаками), которые прямая отсекает на осях координат (считая от начала отсчёта).

## 8. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых в пространстве

### Параллельность и перпендикулярность плоскостей

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей равносильны условиям параллельности и перпендикулярности **их нормальных векторов**.

Пусть есть две плоскости:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда они:

— **Перпендикулярны**, если  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

— **Параллельны**, когда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

### Параллельность и перпендикулярность прямых в пространстве

В пространстве для прямых действуют те же условия, что и на плоскости, добавляется лишь новая координата.

Перейти к параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

### Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости

Пусть есть прямая:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Ее направляющим вектором является вектор  $\vec{s} = (m, n, p)$ .

И плоскость:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Ее нормальным вектором является вектор  $\vec{n} = (A, B, C)$

Тогда прямая **параллельна** плоскости, когда:

$$\vec{n} \perp \vec{s} \iff \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \iff Am + Bn + Cp = 0$$

И прямая **перпендикулярна** плоскости, если:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

## 9. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых равносильны условиям параллельности и перпендикулярности **их направляющих векторов**.

### Прямые, заданные в общем виде

Пусть даны прямые, заданные общими уравнениями:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Тогда они:

- **Перпендикулярны**, если  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  (условие коллинеарности векторов).
- **Параллельны**, когда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$  (условие параллельности векторов).
- **Совпадают**, если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

### Прямые с угловым коэффициентом

Пусть даны прямые:

$$l_1 : y = k_1x + b_1$$

$$l_2 : y = k_2x + b_2$$

Тогда они:

- **Перпендикулярны**, если  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$  при  $b_1 \neq b_2$
- **Параллельны**, когда  $k_1 = k_2$

### Прямые, заданные каноническими уравнениями

Пусть даны прямые, через каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$$

Тогда они:

- **Перпендикулярны**, когда  $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$
- **Параллельны**, если  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

## 10. Парабола. Определение, вывод уравнения, характеристики

### Определение

Парабола — геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от данной прямой  $d$  и данной точки  $F$ . Точка  $F$  не лежит ни на кривой, ни на прямой  $d$ .

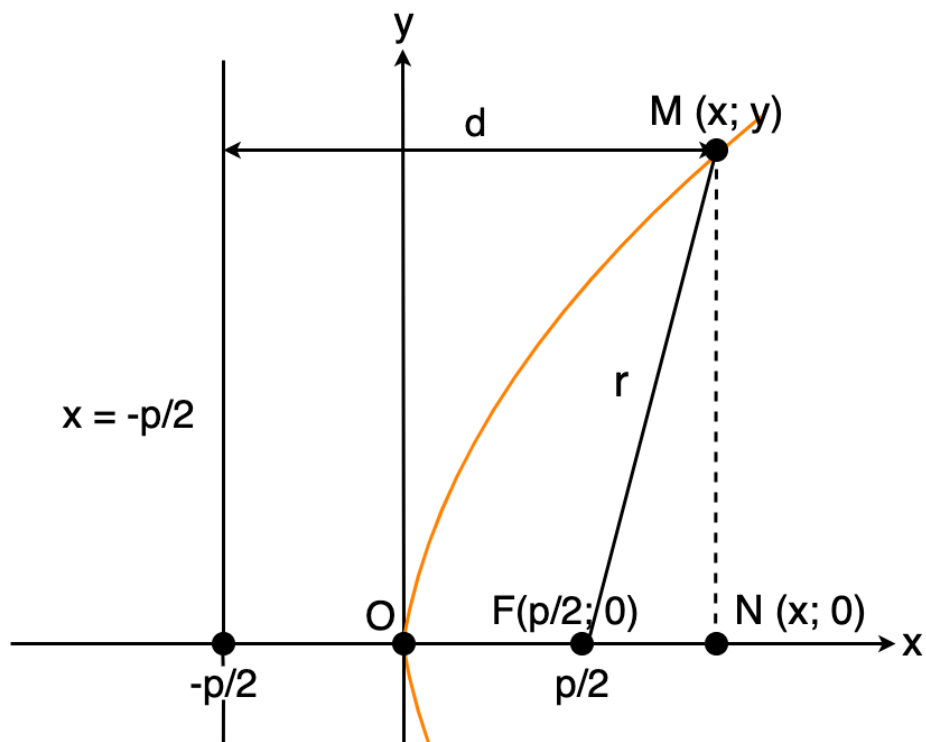
Точка  $F$  называется **фокусом**, а прямая  $d$  — **директрисой параболы**. Расстояние от фокуса до директрисы называется **фокальным параметром** параболы и обозначается через  $p$ .

**Эксцентриситет** параболы — это отношение расстояний от произвольной точки на кривой до фокуса и от этой же точки до директрисы. Эксцентриситет параболы по определению равен 1.

Каноническое уравнение параболы:  $y^2 = 2px$

### Вывод канонического уравнения

Пусть фокус  $F$  принадлежит оси  $OX$ . Проведем директрису перпендикулярно оси  $OX$  на расстоянии  $p$  от фокуса  $F$ , тогда пусть  $O$  будет серединой этого расстояния. Возьмем т.  $M(x; y)$ , которая принадлежит параболе. Расстояние от т.  $M(x; y)$  до фокуса обозначим за  $r$ , до директрисы за  $d$ .



Расстояние от т.  $M(x; y)$  до директрисы равно  $d = \left| x + \frac{p}{2} \right|$ .

По определению параболы  $r = d$ .

По теореме Пифагора из прямоугольного  $\triangle FMN$ :  $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Следовательно:

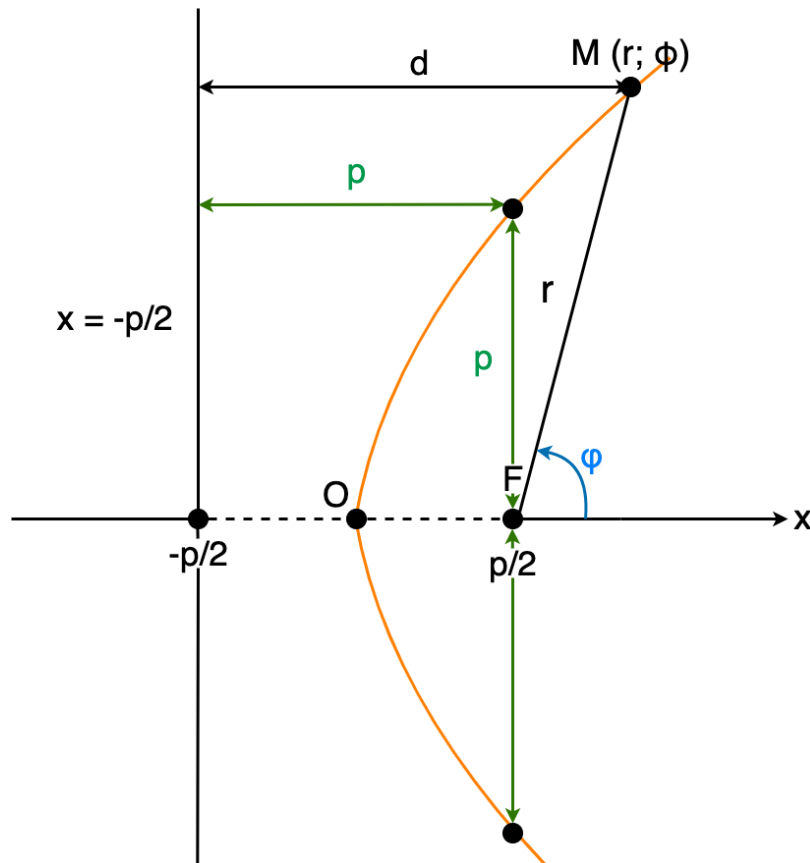
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

## Уравнение в полярной системе координат

Выберем фокус  $F$  параболы, а в качестве полярной оси — луч с началом в точке  $F$ , перпендикулярный директрисе и не пересекающий её. Тогда для произвольной точки  $M(r, \varphi)$ , принадлежащей параболе, по определению  $d = r$ .



Поскольку  $d = p + r \cos \varphi$ , получим уравнение параболы в координатной форме:

$$d = p + r \cdot \cos \varphi \iff r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$

что является уравнением параболы в полярной системе координат  $Fr\varphi$ .

### **Свойства параболы**

- Имеет ось симметрии называемой осью параболы. Ось проходит через фокус и вершину перпендикулярно директрисе;
- Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе;
- Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб;

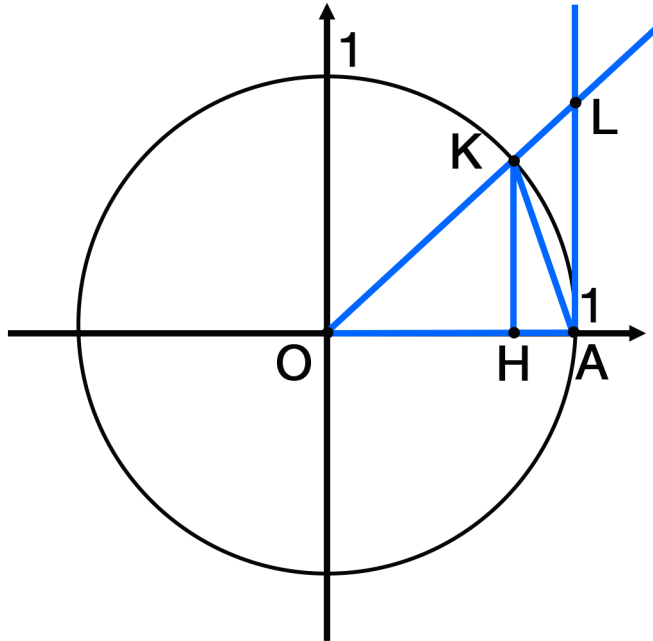


## 11. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Рассмотрим односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x}$  и  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x}$  и докажем, что они равны 1.

Рассмотрим случай  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ . Отложим этот угол на единичной окружности так, чтобы его вершина совпадала с началом координат, а одна сторона совпадала с осью  $OX$ . Пусть  $K$  — точка пересечения второй стороны угла с единичной окружностью, а точка  $L$  — с касательной к этой окружности в точке  $A = (1; 0)$ . Точка  $H$  — проекция точки  $K$  на ось  $OX$ .



Очевидно, что  $S_{\triangle OKA} < S_{\text{sect} KOA} < S_{\triangle OAL}$ , где  $S_{\text{sect} KOA}$  — площадь сектора  $KOA$ . Поскольку  $|KH| = \sin x$ ,  $|LA| = \operatorname{tg} x$ :

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |KH| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\text{sect} KOA} = \frac{1}{2} \cdot |OA|^2 \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |LA| = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Тогда, заменив площади в неравенстве, получим:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Так как при  $x \rightarrow +0$  :  $\sin x > 0, x > 0, \operatorname{tg} x > 0$ , получим:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \implies 1 \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \implies \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Найдем левый односторонний предел. Пусть  $t = -x \implies t \rightarrow +0$ :

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, следовательно и сам предел равен 1.

### Следствия

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

## 12. Второй замечательный предел. Число $e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

### Доказательство

Сначала докажем теорему для натуральных значений  $x$ :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n \in \mathbb{N}$$

По формуле бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot b^n$$

Полагая  $a = 1, b = \frac{1}{n}$ , получим:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

С увеличением  $n$  число полож. слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении  $n$  число  $\frac{1}{n}$  убывает. Следовательно величины  $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots$  возрастают, а значит и последовательность является возрастающей.

Заметим, что  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ .

Покажем, что последовательность ограничена, заменив каждую скобку в правой части на единицу:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

Усилим полученное неравенство, заменив 3, 4, 5, ..., стоящие в знаменателях дробей числом 2 :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Заметим, что в скобках получилась геометрическая прогрессия, сумма которой равна  $2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$ . А значит:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

На основании теоремы Вейерштрасса наша последовательность монотонно возрастает и ограничена, как следствие, имеет предел, равный  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

### Следствия

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$  для  $a > 0, a \neq 1$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^k - 1}{kx} = 1$

### Число $e$

Число  $e$  может быть определено несколькими способами:

- Через предел:  $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  или  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$  (следует из формулы Муавра-Стирлинга)
- Как сумма ряда:  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  или  $\frac{1}{e} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$
- Как единственное число  $a$ , для которого выполняется:  $\int_1^a \frac{dx}{x} = 1$
- Как единственное полож. число  $a$ , для которого верно:  $\frac{d}{dx} a^x = a^x$

### Свойства

1. Производная экспоненты равна самой экспоненте
2. Число  $e$  иррационально
3. Число  $e$  трансцендентно (не может быть корнем многочлена с целочисленными коэффициентами)
4.  $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$
5.  $e^{i\pi} + 1 = 0$
6. Число  $e$  разлагается в бесконечную дробь