

Конспекты по математике

2 семестр

ИКТ
2021 — 2022

Автор:
Даниил Швалов

Оглавление

Глава 1. Интегралы	3
1.1 Неопределенный интеграл	3
1.1.1 Непосредственное интегрирование	3
1.1.2 Свойства неопределенного интеграла	3
1.1.3 Полезные тригонометрические тождества	3
1.1.4 Таблица основных интегралов	4
1.1.5 Замена переменной в неопределенном интеграле	4
1.1.6 Интегрирование по частям	5

Глава 1. Интегралы

1.1. Неопределенный интеграл

1.1.1 Непосредственное интегрирование

Определение.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если выполняется следующее:

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx$$

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет **бесконечное множество первообразных**, причем все они содержатся в выражении:

$$F(x) + C, \quad C = \text{const}$$

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)dx$) называется совокупность всех ее первообразных:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

1.1.2 Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx, a = \text{const}$
5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
6. $\begin{cases} \int f(x)dx = F(x) + C \\ u = \varphi(x) \end{cases} \implies \int f(u)du = F(u) + C$

1.1.3 Полезные тригонометрические тождества

$$1. \sin^x + \cos^2 x = 1$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$2. \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$4. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

1.1.4 Таблица основных интегралов

$$1. \int dx = x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$2. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$$

$$16. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$17. \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$4. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$19. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln |x + \sqrt{x^2+\lambda}| + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$22. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$10. \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$23. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$11. \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$24. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$12. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$25. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$13. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

1.1.5 Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной производится с помощью подстановок 2-х типов:

1. Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t , то формула замены переменной:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

2. Если $u = \psi(x)$, где u — новая переменная, то формула замены переменной:

$$\int f[\psi(x)] \cdot \psi'(x) dx = \int f(u) du$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

где f — табличная функция, а F — первообразная для f .

1.1.6 Интегрирование по частям

Пусть $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ — непрерывно дифференцируемы от x . Тогда:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Целесообразность. В качестве u берется такая функция, которая упрощается при дифференцировании. В качестве dv берется такая функция, что интеграл ее либо известен, либо может быть найден. Например:

1. Если $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin(ax)dx$, $\int P(x)\cos(ax)dx$, $\int P(x)$ — многочлен, то в качестве u используется $P(x)$, а в качестве dv — $e^{ax}dx$, $\sin(ax)dx$, $\cos(ax)dx$ соответственно.
2. Если $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ — многочлен, то в качестве u используется $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ соответственно, а в качестве dv — $P(x)dx$.