

# Оглавление

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Матрицы и определители</b>                                  | <b>5</b>  |
| 1.1      | Определения . . . . .  | 5         |
| 1.2      | Виды матриц . . . . .  | 5         |
| 1.3      | Краткая запись различных видов матриц . . . . .                | 7         |
| 1.4      | Линейные операции . . . . .                                    | 7         |
| 1.4.1    | Сравнение матриц . . . . .                                     | 7         |
| 1.4.2    | Сложение матриц . . . . .                                      | 8         |
| 1.4.3    | Умножение матрицы на число . . . . .                           | 8         |
| 1.4.4    | Умножение матриц . . . . .                                     | 9         |
| 1.5      | Элементарные преобразования . . . . .                          | 9         |
| 1.6      | Свойства транспонирования матриц . . . . .                     | 10        |
| 1.7      | Вычисление определителей . . . . .                             | 13        |
| 1.8      | Присоединенная матрица . . . . .                               | 14        |
| 1.9      | Невырожденная матрица . . . . .                                | 15        |
| 1.10     | Обратная матрица . . . . .                                     | 15        |
| 1.10.1   | Свойства обратной матрицы . . . . .                            | 15        |
| 1.10.2   | Теоремы . . . . .  | 17        |
| 1.11     | Норма матрицы . . . . .  | 18        |
| 1.12     | Базисный минор . . . . .                                       | 19        |
| 1.13     | Система линейных алгебраических уравнений . . . . .            | 19        |
| 1.14     | Однородные системы линейных алгебраических уравнений . . . . . | 21        |
| 1.15     | Фундаментальная система решений . . . . .                      | 22        |
| <b>2</b> | <b>Векторное пространство</b>                                  | <b>23</b> |
| 2.1      | Определение . . . . .  | 23        |
| 2.2      | Аксиомы векторного пространства . . . . .                      | 24        |
| 2.2.1    | Аксиомы сложения . . . . .                                     | 24        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2.2    | Аксиомы умножения . . . . .                               | 24        |
| 2.3      | Линейная зависимость и независимость векторов . . . . .   | 24        |
| <b>3</b> | <b>Линейные операторы</b>                                 | <b>25</b> |
| 3.1      | Определение линейного оператора . . . . .                 | 25        |
| 3.2      | Примеры линейных операторов . . . . .                     | 26        |
| 3.2.1    | Преобразование подобия . . . . .                          | 26        |
| 3.2.2    | Оператор поворота . . . . .                               | 26        |
| 3.2.3    | Оператор дифференцирования . . . . .                      | 27        |
| 3.2.4    | Оператор интегрирования . . . . .                         | 27        |
| 3.2.5    | Матричный оператор . . . . .                              | 27        |
| 3.3      | Образ и ядро линейного оператора . . . . .                | 28        |
| 3.4      | Матрица линейного оператора . . . . .                     | 30        |
| 3.5      | Примеры матриц линейных операторов . . . . .              | 32        |
| 3.5.1    | Нулевой оператор . . . . .                                | 32        |
| 3.5.2    | Тождественный оператор . . . . .                          | 32        |
| 3.5.3    | Поворот трехмерного пространства . . . . .                | 33        |
| 3.6      | Действия над линейными операторами . . . . .              | 33        |
| 3.6.1    | Сложение линейных операторов . . . . .                    | 33        |
| 3.6.2    | Свойства сложения линейных операторов . . . . .           | 34        |
| 3.6.3    | Умножение оператора на число . . . . .                    | 34        |
| 3.6.4    | Свойства умножения линейного оператора на число . . . . . | 34        |
| <b>4</b> | <b>Дифференциальные уравнения</b>                         | <b>35</b> |
| 4.1      | Основные определения . . . . .                            | 35        |
| 4.2      | Задача Коши . . . . .                                     | 36        |
| <b>5</b> | <b>Методы интегрирования уравнений в нормальной форме</b> | <b>39</b> |
| 5.1      | Неполные уравнения . . . . .                              | 39        |
| 5.2      | Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .          | 40        |
| 5.3      | Однородные уравнения . . . . .                            | 41        |
| 5.4      | Линейные уравнения . . . . .                              | 42        |
| 5.5      | Однородные уравнения . . . . .                            | 42        |
| 5.6      | Линейные уравнения первого порядка . . . . .              | 43        |
| 5.7      | Уравнение Бернулли . . . . .                              | 44        |
| 5.8      | Уравнение в полных дифференциалах . . . . .               | 44        |
| 5.8.1    | Определение . . . . .                                     | 44        |
| 5.8.2    | Решение уравнений . . . . .                               | 44        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.9      | Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка . . . . .     | 46        |
| 5.9.1    | Определение . . . . .   | 46        |
| 5.9.2    | Примеры точных производных . . . . .  | 46        |
| 5.10     | Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .   | 47        |
| 5.11     | Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . . | 48        |
| 5.12     | Метод Лагранжа . . . . .  | 49        |
| <b>6</b> | <b>Числовые ряды</b>  | <b>51</b> |
| 6.1      | Основные понятия . . . . .  | 51        |
| 6.2      | Свойства числовых рядов . . . . .   | 52        |



# Глава 1

## Матрицы и определители

### 1.1 Определения

**Определение 1.** Матрица размером  $m \times n$  — это таблица выражений, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

**Определение 2.** След матрицы — это сумма диагональных элементов матрицы. Операция взятия следа обозначается  $\text{tr}$ :

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; = (a_{ij}) \quad \text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

**Определение 3.** Ранг матрицы — это наивысший порядок ненулевого минора. Ранг матрицы обозначается  $\text{rang}$ .

### 1.2 Виды матриц

В зависимости от размерности, матрицы имеют названия, приведенные в следующей таблице.

| Размерность  | Название      | Размерность  | Название        |
|--------------|---------------|--------------|-----------------|
| $m \times n$ | прямоугольная | $1 \times n$ | матрица-строка  |
| $n \times n$ | квадратная    | $m \times 1$ | матрица-столбец |

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы ( $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ), образуют *главную диагональ матрицы*. Диагональ, соединяющая элементы  $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n1}$ , называется *побочной диагональю матрицы*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней (верхней) треугольной матрицей*:

$$\text{нижняя: } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \text{верхняя: } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единицам, называется *единичной*:

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\Theta_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A^T$ , у которой по отношению к матрице  $A$  элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к  $A$ :

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A'_{m \times n}.$$

Матрица, для которой справедливо равенство  $A = A^T$  называется *симметричной*.

## 1.3 Краткая запись различных видов матриц

Перечисленные выше основные виды матриц характеризуются определенными свойствами ее элементов. Введем *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

В таблице ниже приведены условия, с помощью которых можно выразить ранее приведенные свойства для квадратных матриц  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ).

| Условие                    | Название            | Условие                | Название     |
|----------------------------|---------------------|------------------------|--------------|
| $a_{ij} = 0$ при $i > j$   | верхняя треугольная | $a_{ij} = \delta_{ij}$ | единичная    |
| $a_{ij} = 0$ при $i < j$   | нижняя треугольная  | $a_{ij} = 0$           | нулевая      |
| $a_{ij} = a_i \delta_{ij}$ | диагональная        | $a_{ij} = a_{ji}$      | симметричная |

## 1.4 Линейные операции

Рассмотрим операции, справедливые для матриц с размерностью  $m \times n$ .

### 1.4.1 Сравнение матриц

Две матрицы одинаковых размеров называются равными, если совпадают их элементы с одинаковыми индексами:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

### 1.4.2 Сложение матриц

Сложение матриц  $A + B$  есть операция нахождения матрицы  $C$ , все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойства сложения матриц:

- Коммутативность:

$$A + B = B + A.$$

- Ассоциативность:

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C).$$

- Сложение с нулевой матрицей:

$$A + \theta = \theta + A = A.$$

- Существование противоположной матрицы:

$$A + A^{-1} = 0.$$

### 1.4.3 Умножение матрицы на число

Умножение матрицы  $A$  на число  $\lambda \in \mathcal{K}$  заключается в построении матрицы  $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ .

Свойства умножения матриц на число:

- Ассоциативность:

$$(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A).$$

- Дистрибутивность:

$$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A.$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

- Умножение на единицу:

$$1 \cdot A = A \cdot 1 = A.$$



### 1.4.4 Умножение матриц

Умножение матриц — операция вычисления матрицы  $C$ , каждый элемент которой равен сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Количество столбцов в матрице  $A$  должно совпадать с количеством строк в матрице  $B$ . Если матрица  $A$  имеет размерность  $m \times n$ ,  $B$  —  $n \times k$ , то размерность их произведения  $AB = C$  есть  $m \times k$ .

Свойства умножения матриц:

- Некоммутативность (в общем случае):

$$AB \neq BA.$$

- Ассоциативность:

$$(AB)C = A(BC).$$

- Коммутативность при умножении с единичной матрицей:

$$AE = EA = A.$$

- Дистрибутивность:

$$(A + B)C = AC + BC.$$

$$A(B + C) = AB + AC.$$

- Ассоциативность и коммутативность умножения на число:

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

## 1.5 Элементарные преобразования

**Определение 1.** Элементарные преобразования — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц.

Таким образом, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Элементарные операции обратимы. Обозначение  $A \sim B$  указывает на то, что матрица  $A$  может быть получена из матрицы  $B$  путем элементарных преобразований.

Примеры элементарных преобразований строк:

- перестановка местами любых двух строк матрицы;
- умножение любой строки матрицы на константу  $k \neq 0$ , при этом определитель матрицы увеличивается в  $k$  раз;
- прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на некоторую константу;
- удаление нулевых строк;
- транспонирование.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов.

## 1.6 Свойства транспонирования матриц

### Свойство 1.

$$(A^T)^T = A$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} &\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow (A^T)^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A
 \end{aligned}$$

*Что и требовалось доказать.*

### Свойство 2.

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{m2} + b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{m2} + b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 3.**

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\lambda A)^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \lambda A^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

**Свойство 4.**

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad B^T = D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \dots & d_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = c_{ji} \\ b_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} \end{cases}$$

$$A \cdot B = F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \dots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \dots & f_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \quad B^T \cdot A^T = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

$$g_{ji} = \sum_{\alpha=1}^k d_{j\alpha} c_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^k b_{\alpha j} a_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} b_{\alpha j} = f_{ij}$$

$$G = F^T \implies (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Что и требовалось доказать.

## 1.7 Вычисление определителей

**Теорема 1** (о разложении определителя). Определителем порядка  $n$ , соответствующим квадратной матрице порядка  $n$ , называется число, равное

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

где

- $i, j \in (\overline{1, n})$ ;
- $A_{ij}$  — соответствующее алгебраическое дополнение  $a_{ij}$ ;
- $M_{ij}$  — соответствующий минор элемента  $a_{ij}$ .

**Доказательство.** Опираясь на основные свойства определителей, выпишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом, часть теоремы доказана. Положим теперь  $A^T = (a'_{ji})$ , где  $a'_{ji} = a_{ij}$ . Заметим, что соответствующим элементу  $a'_{ji}$  в  $\det A^T$  будет  $M'_{ji} = M_{ij}$ . Как

было показано выше,

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a'_{ji} M'_{ji} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

*Что и требовалось доказать.*

## 1.8 Присоединенная матрица

**Определение 1.** Присоединенная матрица  $A^c$  — это транспонированная матрица алгебраических дополнений  $A_{ij}$  элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ :

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

**Теорема 1** (Аннулирование). Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, \quad (i \neq j); \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0, \quad (i \neq j).$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную матрицу  $A'$ , полученную из матрицы  $A$ , заменой  $j$ -ой строки  $i$ -ой строкой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{jk} A'_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение элемента некоторой строки не зависит от элементов этой строки (поскольку при вычислении алгебраического дополнения эта строка просто вычеркивается). Однако матрицы  $A$  и  $A'$  отличаются только  $j$ -ой строкой, следовательно,  $A_{jk} = A'_{jk}$ . Тогда

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}.$$

Поскольку матрица  $A'$  имеет две одинаковые строки, ее определитель равен нулю. Аналогично доказывается случай со столбцами.

*Что и требовалось доказать.*

## 1.9 Невырожденная матрица

**Определение 1.** Невырожденная матрица — это квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае матрица называется вырожденной.

## 1.10 Обратная матрица

**Определение 1.** Обратная матрица — это такая матрица  $A^{-1}$ , при умножении которой на исходную матрицу  $A$  получается единичная матрица  $E$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

### 1.10.1 Свойства обратной матрицы

**Свойство 1.**

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \det E &= \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A \\ \det A^{-1} &= \frac{\det E}{\det A} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1} \end{aligned}$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 2.**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**Доказательство.**

$$\begin{cases} B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E \\ ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = E \end{cases} \implies (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 3.**

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**Доказательство.** Воспользуемся **одним из свойств** транспонированных матриц

$$\begin{cases} (A^{-1})^T A^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E \\ A^T (A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = E^T = E \end{cases} \implies (A^{-1})^T = A^T.$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 4.**

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} = A &\implies (A^{-1})^{-1}A^{-1}A = A \xrightarrow{2 \text{ св.}} (AA^{-1})^{-1}A = A \implies \\ &\implies (AA^{-1})^{-1}A = A \implies E^{-1}A = A \implies A = A \end{aligned}$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 5.**

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$$

**Доказательство.**

$$\begin{cases} \lambda A \lambda^{-1} A^{-1} = 1E = E \\ \lambda^{-1} A^{-1} \lambda A = 1E = E \end{cases} \implies (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}.$$

*Что и требовалось доказать.*



## 1.10.2 Теоремы

**Теорема 1.** Для всякой невырожденной матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1}$  и притом только одна.

**Доказательство.** Сначала докажем существование обратной матрицы. Пусть нам дана следующая матрица  $A$ , определитель которой не равен нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы построим [присоединенную матрицу](#):

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Перемножим матрицы  $A$  и  $A^c$ :

$$\begin{aligned} A^c A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{kn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

По [теореме о разложении определителя](#) и [теореме аннулирования](#):

$$\begin{cases} i = k \implies \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \det A \\ i \neq k \implies \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0 \end{cases}$$

Тогда получим, что

$$A^c A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E \det A.$$

Значит обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{A^c}{\det A}.$$

Аналогично доказывается случай  $AA^c$ , Теперь докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что существует две обратные матрицы:  $A^{-1}$  и  $\tilde{A}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} AA^{-1} = A^{-1}A = E \\ A\tilde{A} = \tilde{A}A = E \end{cases} &\Rightarrow A^{-1}A\tilde{A} = \begin{cases} A^{-1}(A\tilde{A}) = A^{-1}E = A^{-1} \\ (A^{-1}A)\tilde{A} = E\tilde{A} = \tilde{A} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^{-1} = \tilde{A}. \end{aligned}$$

Результат противоречит исходному предположению о существовании двух обратных матриц.

*Что и требовалось доказать.*

## 1.11 Норма матрицы

**Определение 1.** Нормой матрицы  $A \in \mathcal{K}^{m \times n}$  (обычно  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ ) понимается неотрицательное число  $\|A\|$ , удовлетворяющее следующим аксиомам:

1.  $\|A\| \geq 0$ ;
2.  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$  или  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ , где  $A$  и  $B$  — матрицы, допускающие сложение;
4.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ , где  $A$  и  $B$  — матрицы, допускающие умножение.

**Определение 2.** Норма  $\|A\|$  называется *мультипликативной*, если выполняются все 4 аксиомы, и *аддитивной*, если выполняются первые 3 аксиомы.

**Определение 3.** Если матрица удовлетворяет условию

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda| \|A\|,$$

то такая норма называется *согласованной* с нормой вектора.

Определим некоторые наиболее употребительные на практике матричные нормы:

- Евклидова норма или норма Фробениуса:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

- Столбцовая норма:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

- Строковая форма:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- Спектральная норма:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i (\sigma_i)},$$

где  $\sigma_i$  — собственные значения симметричной матрицы  $A^T A$ .

## 1.12 Базисный минор

**Определение 1.** Если  $\text{rang } A = r$ , то любой ненулевой минор порядка  $r$  называется *базисным минором*, а его строки (столбцы) — *базисными*.

**Теорема 1** (о базисном миноре). Базисные строки (столбцы) матрицы  $A$ , соответствующие любому ее базисному минору  $M$ , *линейно независимы*. Любые строки (столбцы) матрицы  $A$ , не входящие в  $M$ , являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

## 1.13 Система линейных алгебраических уравнений

**Определение 1.** Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ, СЛУ) — система уравнений, каждое уравнение в которой является *линейным* — алгебраическим уравнением первой степени.

**Определение 2.** Расширенная матрица — матрица, которая получается при добавлении в качестве  $(n+1)$  столбца матрицу-столбец свободных членов. Приведем пример. Пусть дана матрица коэффициентов  $A$  и матрица свободных

членов  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда расширенная матрица  $P$  будет иметь вид:

$$P = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

СЛАУ можно записать в матричном виде:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \Rightarrow A^1 AX = A^{-1} B \Rightarrow X = A^{-1} B.$$

**Теорема 1** (Кронекера–Капелли). Система линейных алгебраических уравнений будет совместной тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $A$  ее коэффициентов и ранг расширенной матрицы  $P$  равны. Из этого утверждения следует, что для СЛАУ справедливо следующее:

- $\text{rang } A = \text{rang } P = n$  — имеет единственное решение;
- $\text{rang } A = \text{rang } P < n$  — имеет бесконечное множество решений;
- $\text{rang } A < \text{rang } P$  — не имеет решений.

**Доказательство.**

**Необходимость.** Пусть система совместна, тогда найдутся такие числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

что при подстановке которых в систему мы получим  $m$  тождеств, которые можно записать в виде одного векторного тождества:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Достаточность.** Пусть  $\text{rang } A = \text{rang } P = r$ , следовательно существует линейно независимая подсистема из  $r$  векторов-столбцов матрицы  $A$ . Она же будет содержаться и в матрице  $P$ . Так как эта система максимальна, то вектор-столбец свободных членов  $B$  будет выражаться через эти  $r$  векторов-столбцов. Следовательно, вектор-столбец свободных членов  $B$  можно представить в виде линейной комбинации всех векторов-столбцов матрицы  $A$ , т. е. найдутся такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , что вектор-столбец будет представлен в виде:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

## 1.14 Однородные системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$
$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

**Теорема 3.** Если  $X$  и  $Y$  — решения ОСЛУ, то любая линейная комбинация  $\alpha X + \beta Y$  тоже является решением ОСЛУ.

## 1.15 Фундаментальная система решений

**Определение 1.** Фундаментальная система решений (ФСР) — это совокупность ненулевых решений ОСЛУ  $x_1; x_2; \dots; x_k$ , если

1.  $x_1; x_2; \dots; x_k$  линейно независимы;
2. любое другое ненулевое решение  $x$  ОСЛУ может быть представлено линейной комбинацией  $x_1; x_2; \dots; x_k$ , то есть общее решение ОСЛУ

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k, \quad \alpha_i \in R.$$

## Глава 2

# Векторное пространство

### 2.1 Определение

**Определение 1.** Векторным (линейным) пространством называется множество  $L$  произвольных элементов, называемых векторами, если для них:

- определена операция **сложения** векторов  $L \times L \rightarrow L$ , сопоставляющая каждой паре элементов  $(x, y) \in L$  единственный элемент множества  $L$ , называемый их суммой и обозначаемый  $x + y$ ;
- определена операция **умножения** векторов на скаляры  $F \times L \rightarrow L$  ( $F$  — множество скаляров), сопоставляющая каждому элементу  $\lambda \in F$  и каждому элементу  $x \in L$  единственный элемент множества  $L$ , обозначаемый  $\lambda \cdot x$  или  $\lambda x$ .

Эти операции должны удовлетворять **восьми аксиомам векторного пространства**.

Примеры линейных пространств:

- множество  $\mathbb{R}$
- множество всех матриц
- множество всех многочленов  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$
- $n$ -мерное пространство арифметических векторов  $A_n$   $n = 1, 2, \dots$
- множество всех функций, интегрируемых на  $[a, b]$

## 2.2 Аксиомы векторного пространства

### 2.2.1 Аксиомы сложения

1. Коммутативность:

$$\forall x, y \in L \implies x + y = y + x.$$

2. Ассоциативность:

$$\forall x, y, z \in L \implies x + (y + z) = (x + y) + z.$$

3. Существование нейтрального элемента:

$$\exists 0 \in L : x + 0 = 0 + x = x.$$

4. Существование противоположного элемента:

$$\forall x \in L \exists (-x) \in L : x + (-x) = 0.$$

### 2.2.2 Аксиомы умножения

1. Ассоциативность:

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

2. Дистрибутивность относительно сложения скаляров:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

3. Дистрибутивность относительно сложения векторов:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

4. Существование нейтрального элемента:

$$1 \cdot x = x.$$

## 2.3 Линейная зависимость и независимость векторов

**Определение 1.** Система из  $k$  векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = 0.$$

Если это равенство справедливо только при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , тогда эта система называется **линейно независимой**.



## Глава 3

# Линейные операторы

### 3.1 Определение линейного оператора

**Определение 1.** Правило  $f$ , по которому каждому элементу  $x$  некоторого непустого множества  $X$  ставится в соответствие единственный элемент  $y$  непустого множества  $Y$ , называют **отображением** (или **оператором**) множества  $X$  в множество  $Y$ . Результат  $y$  применения оператора  $f$  к элементу  $x$  обозначают

$$y = f(x)$$

и говорят, что оператор  $f$ , действует из  $X$  в  $Y$  или отображает  $X$  в  $Y$ , записывая это в виде

$$f : X \rightarrow Y.$$

Элемент  $y$  называют **образом** элемента  $x$  при действии оператора  $f$ , а элемент  $x$  — **прообразом** элемента  $y$ .

**Определение 2.** Пусть  $V$  и  $W$  — линейные пространства (либо оба вещественные, либо оба комплексные). Тогда отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  называют **линейным отображением** или **линейным оператором**, если выполняются следующие условия:

$$1. \quad \forall x \in V; \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x;$$

$$2. \quad \forall x_1, x_2 \in X \implies \mathcal{A}x + \mathcal{A}y.$$

Эти два условия можно объединить:

$$\forall x_1, x_2 \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathcal{A}x_1 + \beta \mathcal{A}x_2.$$

**Определение 3.** Линейные операторы  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  и  $\mathcal{B} : V \rightarrow W$  называют **равными**, если

$$\forall x, y \in V \implies \mathcal{A}x = \mathcal{B}x.$$

**Определение 4.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$ , который осуществляет отображение линейного пространства  $V$  в себя, также называют **линейным преобразованием** линейного пространства. В этом случае говорят, что линейный оператор  $\mathcal{A}$  действует в линейном пространстве  $V$ , и записывают

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V.$$

**Определение 5.** Оператор  $E : V \rightarrow V$  называется **тождественным**, если

$$\forall x \in V \implies Ex = x.$$

**Определение 6.** Оператор  $\Theta : V \rightarrow V$  называется **нулевым**, если

$$\forall x \in V \implies \Theta x = \theta.$$

**Определение 7.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  называют **невырожденным**, если из равенства  $\mathcal{A}x = \theta$  следует, что  $x = \theta$ . В противном случае линейный оператор  $\mathcal{A}$  называют **вырожденным**.

## 3.2 Примеры линейных операторов

### 3.2.1 Преобразование подобия

Каждому элементу  $x$  из пространства  $V$  по некоторому правилу ставится в соответствие элемент  $\lambda x$  из  $V$  ( $\lambda \neq 0$  и фиксировано), т. е. имеет место равенство  $\mathcal{A}x = \lambda x$ .

### 3.2.2 Оператор поворота

Оператора поворота на угол  $\varphi$ , действующий в пространстве  $V^2$  векторов на плоскости, поворачивает каждый вектор на угол  $\varphi$ . Поворот происходит против хода часовой стрелки, если  $\varphi > 0$ , и по ходу часовой стрелки, если  $\varphi < 0$ .

### 3.2.3 Оператор дифференцирования

Оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$ , действующий в линейном пространстве  $K^n$  многочленов одной переменной  $x$  степени, не превосходящей  $n \in \mathbb{N}$ . Каждому многочлену  $P(x)$  ставится в соответствие его производная  $P'(x)$ , являющаяся многочленом степени не выше  $n - 1$ , т. е.  $P'(x)$  — элемент того же пространства  $K^n$ :

$$\frac{d}{dx}P(x) = P'(x).$$

Заметим, что производная суммы функций равна сумме производных, а при умножении функции на число производная этой функции умножается на это число.

### 3.2.4 Оператор интегрирования

Пусть задано пространство, в котором элементами являются непрерывные функции  $\varphi(t), t \in [0, 1]$ . Положим, что

$$\mathcal{A}\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Преобразование  $\mathcal{A}$  — линейное, поскольку в силу свойств определенного интеграла имеем

$$\mathcal{A}(\varphi_1 + \varphi_2) = \int_0^t [\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)] d\tau = \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau = \mathcal{A}\varphi_1 + \mathcal{A}\varphi_2;$$

$$\mathcal{A}(\alpha\varphi) = \int_0^t \alpha\varphi(\tau) d\tau = \alpha \int_0^t \varphi(\tau) d\tau = \alpha\mathcal{A}\varphi.$$

### 3.2.5 Матричный оператор

Рассмотрим  $n$ -мерное арифметическое пространство  $\mathbb{R}^n$  (пространство матриц-столбцов высотой  $n$ ) и прямоугольную матрицу  $\mathcal{A}$  размером  $m \times n$ . Каждому столбцу  $X \in \mathbb{R}^n$  поставим в соответствие столбец  $\mathcal{A}X$ , имеющий высоту  $m$ . Таким образом, определено отображение  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , которое является линейным в силу свойств умножения матриц.

### 3.3 Образ и ядро линейного оператора

**Определение 1.** **Образом** линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  называют множество всех элементов  $y \in W$  таких, что  $\mathcal{A}x = y$  для некоторого  $x \in V$ . Образ обозначается через  $\text{Im } \mathcal{A}$ :

$$\text{Im } \mathcal{A} = \{y : y = \mathcal{A}x; x \in V\}.$$

**Определение 2.** **Ядром** линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  называют множество всех элементов  $x \in V$  таких, что  $\mathcal{A}(x) = \theta$ . Ядро обозначается через  $\ker \mathcal{A}$ :

$$\ker \mathcal{A} = \{x : \mathcal{A}x = \theta; x \in V\}.$$

**Теорема 1.** Для любого линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  образ  $\text{Im } \mathcal{A}$  и ядро  $\ker \mathcal{A}$  являются линейными подпространствами в пространствах  $W$  и  $V$  соответственно.

**Доказательство.** Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — элементы из  $\text{Im } \mathcal{A}$ . Значит

$$\exists x_1, x_2 \in V : \mathcal{A}x_1 = y_1, \mathcal{A}x_2 = y_2.$$

Из соотношения

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \lambda_2 \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

следует, что произвольная комбинация элементов  $y_1$  и  $y_2$  также лежит в  $\text{Im } \mathcal{A}$ .

В тоже время, если  $x_1, x_2 \in \ker \mathcal{A}$ , что означает выполнение соотношений  $\mathcal{A}x_1 = \theta$  и  $\mathcal{A}x_2 = \theta$ , то

$$\mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \lambda_2 \mathcal{A}x_2 = \theta + \theta = \theta,$$

т. е. множество  $\ker \mathcal{A}$  замкнуто относительно линейных операций и потому является линейным подпространством.

*Что и требовалось доказать.*

**Определение 3.** Размерность образа  $\text{Im } \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  называют **рангом** этого линейного оператора. Обозначают через  $\text{rang } \mathcal{A}$ .

**Определение 4.** Размерность ядра  $\ker \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  называют **дефектом** этого линейного оператора. Обозначают через  $\text{def } \mathcal{A}$ .

**Теорема 2.** Для любого линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  справедливо равенство

$$\text{rang } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A} = \dim V.$$

**Теорема 3** (построение линейного оператора). Пусть  $V$  и  $W$  — линейные пространства,  $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  — базис пространства  $V$ , а  $g_1, g_2, \dots, g_n$  — произвольные элементы из пространства  $W$ . Тогда

$$\exists! \mathcal{A} : V \rightarrow W : \mathcal{A}e_i = g_i, i = \overline{1, n}.$$

**Доказательство.** Докажем существование. Разложим произвольный элемент  $x \in V$  по базису  $\{e\}$  пространства  $V$ :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = \sum_{i=1}^n x_ie_i.$$

Построим отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  по следующему правилу:

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1(\mathcal{A}e_1) + \dots + x_n(\mathcal{A}e_n) = \sum_{i=1}^n x_i(\mathcal{A}e_i) = \sum_{i=1}^n x_ig_i,$$

т. е., зная элементы  $\mathcal{A}e_i$  можно найти образ любого элемента  $x$  линейного пространства  $V$ .

Убедимся в линейности оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть

$$x = \sum_{i=1}^n x_ie_i; \quad y = \sum_{i=1}^n y_ie_i.$$

Тогда:

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)g_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_ig_i + \beta \sum_{i=1}^n y_ig_i = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y.$$

Условие линейности оператора выполняется.

Докажем единственность. Предположим, что

$$\exists \mathcal{B} : V \rightarrow W : \mathcal{B}e_i = g_i, i = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_ig_i = \sum_{i=1}^n x_i\mathcal{B}e_i = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right) = \mathcal{B}x.$$

Операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  совпадают.

*Что и требовалось доказать.*

### 3.4 Матрица линейного оператора

Пусть задан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , т. е. линейное преобразование  $n$ -мерного линейного пространства в себя:  $y = \mathcal{A}x$ . Найдем связь между координатами элемента  $x \in V$  и координатами его образа  $y \in V$ .

Выберем в пространстве  $V$  базис  $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , и пусть  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ . Тогда в силу линейности преобразований  $\mathcal{A}$  имеем

$$\mathcal{A}x = x_1(\mathcal{A}e_1) + x_2(\mathcal{A}e_2) + \dots + x_n(\mathcal{A}e_n) = \sum_{i=1}^n x_i(\mathcal{A}e_i).$$

Поскольку  $\mathcal{A}e_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — это тоже элемент из  $V$ , то и  $\mathcal{A}e_i$  можно разложить по базису:

$$\mathcal{A}e_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ni}e_n = \sum_{k=1}^n a_{ki}e_k, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда получим

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i (Ae_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right) e_k.$$

В силу единственности разложения элемента по базисным элементам  $e_1, e_2, \dots, e_n$  получим

$$\mathcal{A}x = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n = \sum_{i=1}^n y_ie_i,$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — координаты преобразованного элемента  $\mathcal{A}x$  в базисе  $\{e\}$ . Тогда получим

$$y_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i,$$

или в развернутом виде:

[illegible]

Эта формула представляет линейное преобразование  $y = \mathcal{A}x$  в координатной форме.

Элементам  $x$  и  $y$  поставим в соответствие матрицы-столбцы  $X$  и  $Y$ , образованные из координат этих элементов в базисе  $\{e\}$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда полученная система уравнений в развернутой матричной форме примет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной форме,

$$Y = AX.$$

Здесь  $A$  — квадратная матрица, у которой  $i$ -й столбец образован коэффициентами разложения элемента  $Ae_i$  по базису  $\{e\}$ .

Таким образом, показано, что при заданном базисе любое линейное преобразование можно представить, и притом единственным способом, в матричной форме, т. е. по своей структуре линейный оператор есть некоторая матрица.

**Определение 1.** Матрицу  $A$ , составленную из координатных столбцов элементов  $Ae_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) в базисе  $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  называют **матрицей линейного оператора  $\mathcal{A}$**  в базисе  $\{e\}$ .

**Определение 2.** Матрица линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  называется **квадратной**, если ее порядок совпадает с размерностью линейного пространства  $V$ .

**Теорема 1.** Каждая квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  может рассматриваться как матрица некоторого линейного оператора  $\mathcal{A}$ , следовательно, всякое преобразование вида  $Y = AX$  является линейным преобразованием.

**Доказательство.** В силу свойств операции умножения матриц:

$$\forall X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2 \implies A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2.$$

Таким образом, при фиксированном базисе между линейным преобразованием и матрицей линейного преобразования установлено взаимно-однозначное соответствие, что позволяет отождествлять преобразование  $\mathcal{A}$  с его матрицей

$A$  и записывать линейное преобразование  $y = Ax$  в матричной форме  $Y = AX$  или в координатной форме.

*Что и требовалось доказать.*

**Теорема 2.** Ранг матрицы  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  совпадает с рангом этого оператора.

**Доказательство.** Пусть  $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  — некоторый базис линейного пространства  $V$ . Образ  $\text{Im } \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  представляет собой **линейную оболочку** системы элементов  $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n$ , то есть

$$\text{Im } \mathcal{A} = L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n).$$

При этом  $\text{rang } \mathcal{A}$  равен максимальному числу линейно независимых элементов в системе  $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n$  и совпадает с максимальным числом линейно независимых столбцов в матрице  $A$ , т. е. с ее рангом. Таким образом,

$$\text{rang } A = \text{rang } \mathcal{A}.$$

*Что и требовалось доказать.*

## 3.5 Примеры матриц линейных операторов

### 3.5.1 Нулевой оператор

Пусть  $\Theta : V \rightarrow V$  — нулевой оператор. Матрицей такого оператора независимо от выбора базиса является нулевая матрица  $\theta$  соответствующего типа. Действительно, в случае нулевого оператора любой элемент будет нулевым. Поэтому матрица нулевого оператора в любом базисе состоит из нулевых столбцов.

### 3.5.2 Тожественный оператор

Пусть  $\mathcal{E} : V \rightarrow V$  — тождественный оператор, действующий согласно правилу

$$\forall x \implies \mathcal{E}x = x$$



Тогда  $\mathcal{C}e_i = e_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$  и, следовательно, матрица оператора  $\mathcal{C}$  в любом базисе является единичной:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.5.3 Поворот трехмерного пространства

Пусть  $\mathcal{A}$  — поворот трехмерного пространства на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Oz$ . Если  $e_1, e_2, e_3$  — единичные векторы прямоугольной декартовой системы координат, то

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= \cos \varphi \cdot e_1 + \sin \varphi \cdot e_2; \\ \mathcal{A}e_2 &= -\sin \varphi \cdot e_1 + \cos \varphi \cdot e_2; \\ \mathcal{A}e_3 &= e_3 \end{aligned}$$

и, значит, матрица этого оператора будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3.6 Действия над линейными операторами

### 3.6.1 Сложение линейных операторов

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  и  $\mathcal{B} : V \rightarrow W$  — линейные операторы. Тогда суммой линейных операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  называют оператор  $\mathcal{C} : V \rightarrow W$  такой, что

$$\forall x \in V \implies \mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x.$$

**Доказательство.** Линейность оператора  $\mathcal{C}$  можно доказать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) &= \mathcal{A}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) + \mathcal{B}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \\ &= \lambda_1(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + \lambda_2(\mathcal{A}y + \mathcal{B}y) = \lambda_1 \mathcal{C}x + \lambda_2 \mathcal{C}y. \end{aligned}$$

*Что и требовалось доказать.*

### 3.6.2 Свойства сложения линейных операторов

**Свойство 1.**

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$$

**Свойство 2.**

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}).$$

**Свойство 3.**

$$\mathcal{A} + \Theta = \mathcal{A}.$$

**Свойство 4.**

$$\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = \Theta.$$

### 3.6.3 Умножение оператора на число

**Лемма 2.** Произведением линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  и числа  $\alpha$  называют такой оператор  $\mathcal{B} : V \rightarrow W$ , что

$$\forall x \in V \implies \mathcal{B}x = \alpha \mathcal{A}x.$$

**Доказательство.** Линейность оператора  $\mathcal{B}$  можно доказать следующим образом:

$$\mathcal{B}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \alpha \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 (\alpha \mathcal{A}x_1) + \lambda_2 (\alpha \mathcal{A}x_2) = \lambda_1 \mathcal{B}x_1 + \lambda_2 \mathcal{B}x_2.$$

*Что и требовалось доказать.*

### 3.6.4 Свойства умножения линейного оператора на число

**Свойство 5.**

$$1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

**Свойство 6.**

$$\alpha(\beta \mathcal{A}) = (\alpha\beta)\mathcal{A}.$$

**Свойство 7.**

$$(\alpha + \beta)\mathcal{A} = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{A}.$$

**Свойство 8.**

$$\alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \alpha\mathcal{A} + \alpha\mathcal{B}.$$

## Глава 4

# Дифференциальные уравнения

### 4.1 Основные определения

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если оно содержит производные от искомой функции только по одной переменной:

**Порядком** дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

**Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее искомую функцию, ее аргумент и первую производную от искомой функции:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (4.1)$$

где  $y$  – искомая функция,  $x$  – ее аргумент, а  $y' = dy/dx$ .

Если уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$y' = f(x, y), \quad (4.2)$$

то уравнение (4.2) называется уравнением, **разрешенным относительно производной**, или уравнением **в нормальной форме**.

В некоторых случаях возникает необходимость использовать **перевернутое уравнение**:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (4.3)$$

В место двух уравнений (4.2) и (4.3) можно использовать одно уравнение, записанное в форме

$$dy - f(x, y)dx = 0. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) содержит не производную искомой функции, а дифференциалы от ее аргументов. Это частый случай уравнения, записанного в дифференциалах. В общем случае **уравнение в дифференциалах** имеет вид:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (4.5)$$

В уравнениях (4.4) и (4.5) переменные  $x$  и  $y$  входят равноправно. Запись уравнения в виде (4.5) показывает, что при решении дифференциального уравнения первого порядка любую величину  $x$  или  $y$  можно рассматривать в качестве аргумента, а другую – принять за искомую функцию.

Уравнение **в симметрической форме** выглядит следующим образом:

$$\frac{dx}{M(x, y)} = \frac{dy}{N(x, y)}. \quad (4.6)$$

## 4.2 Задача Коши

Одной из важнейших задач в теории дифференциальных уравнений является так называемая задача Коши. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (4.7)$$

**задача Коши** или **начальная задача** ставится следующим образом: среди всех решений уравнения найти такое решение, которое будет удовлетворять условию:

$$y(x_0) = y_0, \quad (4.8)$$

где  $x_0$  и  $y_0$  – некоторые заданные числа. При этом  $y_0$  называется **начальным значением** искомой функции, а число  $x_0$  – **начальным значением независимой переменной**. В целом же числа  $x_0$  и  $y_0$  называются **начальными данными**.

Задачу Коши **геометрически** можно сформулировать так: среди всех интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.9)$$

найти ту, которая проходит через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

Задача Коши с начальными условиями  $x_0$  и  $y_0$  имеет **единственное решение**, если  $\exists \lambda > 0$  такое, что в интервале  $|x - x_0| \leq \lambda$  определено решение

$y = y(x)$  такое, что  $y(x_0) = y_0$ . При этом не существует решения, определенного в этом же интервале и не совпадающего с решением  $y = y(x)$  хотя бы в одной точке интервала  $|x - x_0| \leq \lambda$ , отличной от точки  $x = x_0$ .

**Теорема 1.** Непрерывная функция  $y = y(x)$  является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (4.10)$$

**Доказательство.** Докажем необходимость. Пусть  $y = y(x)$  является решением задачи Коши, тогда справедливо тождество

$$y' = f(x, y).$$

Интегрируя это тождество в пределах от  $x_0$  до  $x$  и учитывая условие  $x = x_0$  и  $y = y_0$ , получаем требуемое равенство (4.10).

Докажем достаточность. Так как функции  $y = y(x)$  и  $f(x, y)$  непрерывные, то правая часть равенства (4.10), а следовательно, и левая, будут непрерывно дифференцируемыми по  $x$  функциями. Дифференцируя тождество (4.10) получаем, что функция  $y = y(x)$  является решением уравнения задачи Коши. Если в равенстве (4.10) положить  $x = x_0$ , то увидим, что это уравнение также удовлетворяет условию.

*Что и требовалось доказать.*



## Глава 5

# Методы интегрирования уравнений в нормальной форме

### 5.1 Неполные уравнения

Дифференциальное уравнение в нормальной форме называется **неполным**, если его правая часть зависит только от одного аргумента. Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f(x), \quad (5.1)$$

где будем считать функцию  $f(x)$  определенной и непрерывной на некотором интервале  $(a, b)$ .

Правая часть уравнения не зависит от искомой функции  $y(x)$ , поэтому область определения есть множество  $D = (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ . Поскольку правая часть уравнения не зависит от переменной  $y$ , то выполнены условия теоремы Пикара и поэтому имеет место существование и единственность решения начальной задачи.

Преобразуем уравнение:

$$y' = f(x) \quad (5.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (5.3)$$

$$dy = f(x)dx \quad (5.4)$$

$$y = \int f(x)dx + C. \quad (5.5)$$

Полученная формула определяет общее решение исходного уравнения на множестве  $R = \{x \in (a, b); |y| < \infty\}$ . Особых решений  $y$  исходного уравнения нет.

Если дополнительно задано начальное условие  $y(x_0) = y_0$ , то решение, удовлетворяющее этому условию, определяется формулой

$$y(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (5.6)$$

При фиксированном  $x_0$  и произвольном  $y_0$  эта формула определяет общее решение исходного уравнения на множестве  $\mathbb{R}$  в форме Коши. Также из этой формы следует, что каждое решение уравнения определено на интервале  $(a, b)$  и вся полоса  $\mathbb{R}$  заполнена непересекающимися интегральными кривыми.

Предположим теперь, что для некоторого  $\xi \in (a, b)$  будет  $f(\xi) = \infty$ . В окрестности этой точки рассмотрим тогда перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}. \quad (5.7)$$

Это уравнение определено при  $x = \xi$ , более того, очевидно, что прямая  $x \equiv \xi$  – решение этого уравнения. Это решение может быть как частным, так и особым.

## 5.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка, допускающее приведение к виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0, \quad (5.8)$$

где  $f_1(x), f_2(x)$  – известные функции лишь переменной  $x$ , а  $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$  – известные функции лишь переменной  $y$ , называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения этого уравнения нужно произвести разделение переменных, т. е. преобразовать это уравнение так, чтобы при  $dx$  стоял бы множитель, зависящий только от  $x$ , а при  $dy$  стоял бы множитель, зависящий только от  $y$ . Для этого достаточно обе части уравнения разделить на произведение  $f_2(x)\varphi_1(y)$ :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$



Рассматривая для определенности в последнем равенстве  $y$  как функцию переменной  $x$ , получим

$$\left[ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} \cdot y' \right] dx = 0.$$

Отсюда, интегрируя по  $x$ , будем иметь

$$\int \left[ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} y' \right] dx = C.$$

или

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = C, \quad (5.9)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Кроме решений, даваемых формулой (5.9), уравнение (5.8) допускает решение, обращающие в ноль произведение  $f_2(x)\varphi_1(y)$ , т. е. являющиеся корнями уравнений  $f_2(x) = 0$  или  $\varphi_1(y) = 0$ .

В самом деле, пусть  $x = a$ , где  $f_2(a) = 0$ , тогда  $dx = 0$  (поскольку дифференциал константы  $a$  равен нулю). Подставляя эту функцию в уравнение, получим

$$f_1(a)\varphi_1(y) \cdot 0 + f_2(a)\varphi_2(y)dy \equiv 0,$$

т. е.  $x = a$  – решение уравнения (5.8). Аналогично можно показать, что функция  $y = b$ , где  $\varphi_1(b) = 0$ , является также решением уравнения (5.8). Геометрически эти решения, если они существуют, составляют собой прямые, параллельные осям координат.

### 5.3 Однородные уравнения

Функция  $f(x, y)$  называется **однородной измерения  $\alpha$** , если при любом значении  $\lambda$  выполняется тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y). \quad (5.10)$$

В частности, многочлен

$$P(x, y) = \sum_{i,j} C_{ij} x^i y^j$$

представляет собой однородную функцию  $n$ -го измерения, если всего его члены имеют одно и тоже измерение, равное  $n$ , то есть, если  $i + j = n$ .

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (5.11)$$

называется **однородным**, если коэффициенты  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  при дифференциалах переменных  $x$  и  $y$  однородные функции одного и того же измерения.

## 5.4 Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется **линейным**, если оно первой степени относительно неизвестной функции  $y$  и ее производной  $y'$  (или дифференциала  $dy$ ) и не содержит произведения этих величин. В общем случае линейное уравнение имеет вид

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0, \quad (5.12)$$

где коэффициенты  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  и  $\gamma(x)$  – данные непрерывные функции в некотором интервале  $x \in (a, b)$ .

Предполагая, что  $\alpha(x) \neq 0$ , и вводя обозначения

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad q(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)},$$

уравнение (5.12) можно привести к нормальному виду

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (5.13)$$

где функции  $p(x)$  и  $q(x)$  определены и непрерывны в интервале  $x \in (a, b)$ .

Если  $q(x) \equiv 0$ , то линейное уравнение (5.13) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

## 5.5 Однородные уравнения

Функция  $F(x, y)$  называется **однородной степени  $k$** , если

$$\forall \lambda > 0 \implies F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y).$$

Примером однородной функции может служить любая форма (однородный многочлен) степени  $k$ .

Следующие функции являются однородными функциями степени 0, 1, 2 и  $k$  соответственно:

$$\frac{x-y}{x+y}, \quad \frac{x^2+xy}{x-y}, \quad x^2+y^2-xy, \quad x^{k-1}y+y^k.$$

Дифференциальное уравнение  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  называется **однородным**, если  $f(x, y)$  – однородная функция степени ноль.

Уравнение  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  является однородным, если  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  – однородные функции одной и той же степени. Замена  $y = zx$  приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

## 5.6 Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  – функции, непрерывные на  $[a, b]$ , называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**. Его решение ищут в виде

$$y(x) = u(x) \cdot v(x),$$

где  $u(x)$ ,  $v(x)$  – две неизвестные функции. После подстановки в уравнение выражений для  $y$  и  $y'$  получаем

$$v \frac{du}{dx} + \left( \frac{dv}{dx} + p(x)v \right) u = q(x).$$

В качестве  $v(x)$  выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0.$$

Тогда функция  $u(x)$  определяется из уравнения

$$v \frac{du}{dx} = q(x).$$

## 5.7 Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

где  $\alpha \in R(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$ , называется **уравнением Бернулли**. Путем подстановки  $z = y^{1-\alpha}$  оно сводится к линейному. Его можно решать и непосредственно, применяя подстановку

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

## 5.8 Уравнение в полных дифференциалах

### 5.8.1 Определение

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y)$ . В этом случае уравнение можно записать в виде  $du(x, y) = 0$ , откуда следует, что соотношение  $u(x, y) = C$  является его общим интегралом.

Выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

где  $M, N$  – непрерывные функции вместе со своими частными производными  $\frac{\partial M}{\partial y}$  и  $\frac{\partial N}{\partial x}$  в некоторой области  $D$ , есть **полный дифференциал** тогда и только

тогда, когда  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  во всей области  $D$ .

### 5.8.2 Решение уравнений

Рассмотрим пример. Пусть необходимо решить следующее уравнение:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Пусть

$$M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2, \quad N(x, y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Значит

$$Mdx + Ndy = du.$$

Следовательно

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \implies \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по  $x$ , считая  $y$  постоянной:

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 6y^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y),$$

где  $\varphi(y)$  – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция. Для полученной функции  $u(x, y)$  найдем частную производную по  $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y).$$

Объединим это уравнение и второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} 6x^2y + \varphi'(y) &= 6x^2y + 4y^3 \\ \varphi'(y) &= 4y^3 \\ \varphi(y) &= y^4 + C. \end{aligned}$$

Подставим  $\varphi(y)$  в ранее найденную функцию  $u(x, y)$ :

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

## 5.9 Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

### 5.9.1 Определение

Общий вид дифференциальных уравнений высшего порядка:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Допускают понижение порядка следующие типы дифференциальных уравнений:

1. Уравнение вида  $y^{(n)} = f(x)$  решается путем  $n$ -кратного интегрирования.
2. Уравнение вида  $F(x, y', y'') = 0$ , явно **не содержащее искомой функции**  $y(x)$ , сводят к уравнению первого порядка путем введения новой неизвестной функции  $z = z(x)$ . Полагая  $y'(x) = z(x)$ ,  $y''(x) = z'(x)$ , уравнение принимает вид  $F(x, z, z') = 0$ .
3. Уравнение вида  $F(y, y', y'') = 0$  явно **не содержащее независимой переменной**  $x$ , интегрируют с помощью подстановки  $p = y'$ , где  $p = p(y)$  – новая не известная функция, зависящая от  $y$ . Тогда  $y'' = p \cdot p'$ . При этом порядок уравнение понижается на единицу.
4. Если левая часть дифференциального уравнения **есть точная производная** какой-либо функции, то порядок уравнения так же можно понизить.

### 5.9.2 Примеры точных производных

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= (\ln y)'; & \frac{y''}{y'} &= (\ln y')'; \\ xy'' + y' &= (xy')'; & yy'' + (y')^2 &= (yy')'; \\ \frac{yy'' - (y')^2}{y^2} &= \left(\frac{y'}{y}\right)'. \end{aligned}$$

## 5.10 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Чтобы решить ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (5.14)$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (5.15)$$

и найти все его корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Общее решение уравнения (5.14) есть сумма, состоящая из слагаемых вида  $C_i e^{\lambda_i x}$  для каждого простого корня  $\lambda_i$  уравнения (5.15) и слагаемых вида

$$(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \dots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x} \quad (5.16)$$

для каждого кратного корня  $\lambda$  уравнения (5.15), где  $k$  – кратность корня. Все  $C_i$  – произвольные постоянные.

Для каждой пары комплексных сопряженных корней  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1}e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2}e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней  $\alpha + i\beta$  и  $\alpha - i\beta$  имеет кратность  $k$ . Здесь  $P_{k-1}$  и  $Q_{k-1}$  – многочлены степени  $k-1$ , аналогичные многочлену в (5.16), их коэффициенты – произвольные постоянные.

Например, вид общего решения уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – различные и действительные корни, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  – двукратный действительный корень, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  – комплексно-сопряженные корни, общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

## 5.11 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x).$$

Общее решение этого уравнения равно сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, то есть

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x).$$

Решение однородного уравнения определяется также, как было описано ранее. Частное решение уравнения  $\bar{y}(x)$  в случае, когда правая часть имеет специальный вид, определяется методом неопределенных коэффициентов. Правая часть специального вида

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

где  $P_m(x)$  и  $Q_n(x)$  – полиномы степеней  $m$  и  $n$  соответственно. Укажем вид частного решения дифференциального уравнения в двух случаях.

Первый случай: число  $\alpha + i\beta$  не является корнем характеристического уравнения:

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} (S_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x),$$

где  $S_l$  и  $R_l$  – полиномы степени  $l = \max(m, n)$  с неопределенными коэффициентами.

Второй случай: число  $\alpha + i\beta$  является корнем характеристического уравнения кратности  $k$ :

$$\bar{y}(x) = x^k e^{\alpha x} (S_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x),$$

то есть частное решение приобретает множитель  $x^k$ .



## 5.12 Метод Лагранжа

Общее решение  $y(x)$  линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

есть сумма общего решения  $y_0$  соответствующего ему однородного уравнения  $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$  и какого-нибудь частного решения  $\bar{y}$ :

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}.$$

Суть метода Лагранжа вариации произвольных постоянных заключается в следующем. Если  $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$  – общее решение однородного уравнения, то частное решение  $\bar{y}(x)$  ищется в виде

$$\bar{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  – неизвестные пока функции, производные от которых определяются из системы

$$\{C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0, C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x)\}.$$

Решая данную систему, находим  $C'_1(x)$  и  $C'_2(x)$ , откуда после интегрирования определяем  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ .



## Глава 6

# Числовые ряды

### 6.1 Основные понятия

**Определение.** Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

называют **числовым рядом**. Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – действительные или комплексные числа, называемые членами ряда, а  $a_n$  –  $n$ -ый или общий член ряда.

Ряд задан, если известен общий член ряда  $a_n$ , выраженных как функция его номера  $n$ :  $a_n = f(n)$ .

Сумму первых  $n$  членов числового ряда обозначают через  $S_n$  и называют  $n$ -й частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Ряд вида

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

называется  $n$ -м остатком ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , который получается отбрасыванием его  $n$  первых членов.

Ряд называется **сходящимся**, если его  $n$ -я частичная сумма  $S_n$  при неограниченном возрастании  $n$  стремится к конечному пределу, т. е. если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число  $S$  называют **суммой** ряда. Если же  $n$ -я частичная сумма ряда не стремится к конечному пределу, то ряд называют **расходящимся**.

## 6.2 Свойства числовых рядов

**Свойство 1.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (6.1)$$

сходится и его сумма равна  $S$ , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n + \dots, \quad (6.2)$$

где  $\lambda$  – произвольное число, также сходится и его сумма равна  $\lambda S$ . Если же ряд (6.1) расходится и  $\lambda \neq 0$ , то и ряд (6.2) расходится.

**Доказательство.**

**Сходимость.** Пусть  $S_n$  –  $n$ -я частичная сумма ряда (6.2). Тогда

$$S_n^{(a)} = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n + \dots = \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) = \lambda S_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lambda S.$$

Так как существует конечный предел частичных сумм, то ряд (6.2) сходится и имеет сумму  $\lambda S$ .

**Расходимость.** Допустим противное. Пусть ряд (6.2) сходится и имеет сумму  $S_1$ . Тогда

$$S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{\lambda}.$$

т. е. ряд (6.1) сходится, что противоречит условию о расходимости данного ряда.

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 2.** Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (6.3)$$

и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \quad (6.4)$$

а их суммы равны  $S_a$  и  $S_b$  соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n), \quad (6.5)$$

причем сумма каждого равна  $S_a \pm S_b$ .

**Доказательство.** Пусть  $S_n^{(a)}$ ,  $S_n^{(b)}$ ,  $S_n$  –  $n$ -е частичные суммы рядов (6.3), (6.4) и (6.5) соответственно. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(a)} \pm S_n^{(b)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(a)} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(b)} = S_a \pm S_b,$$

т. е. каждый из рядов (6.5) сходится и его сумма равна  $S_a \pm S_b$ .

*Что и требовалось доказать.*

**Следствие.** Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

**Замечание.** Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

**Свойство 3.** Если к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (6.6)$$

прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (6.6) сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.** Пусть  $S$  – сумма отброшенных членов ряда, а  $k$  – наибольший из этих номеров. Будем считать, что на место отброшенных членов ряда поставили нули. Тогда при  $n > k$  выполняется равенство

$$S_n - S'_n = S,$$

где  $S'_n$  –  $n$ -я частичная сумма ряда, полученная из ряда (6.6) путем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S + \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n.$$

Пределы в левой и правой части данного равенства одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд (6.6) сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Аналогично доказывается случай приписывания к ряду конечного числа членов.

*Что и требовалось доказать.*

**Следствие 1.** Ряд (6.6) и его  $n$ -й остаток сходятся или расходятся одновременно.

**Следствие 2.** Если ряд (6.6) сходится, то его  $n$ -й остаток  $r_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$