Оглавление

Глава 1

Матрицы и определители

1.1 Определения

Определение 1.1. Матрица размером $m \times n$ — это таблица выражений, состоящая из m строк и n столбцов:

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Определение 1.2. След матрицы — это сумма диагональных элементов матрицы. Операция взятия следа обозначается tr:

$$\underset{n \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} ; = (a_{ij}) \qquad \mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Определение 1.3. Ранг матрицы — это наивысший порядок ненулевого минора. Ранг матрицы обозначается rang.

1.2 Виды матриц

В зависимости от размерности, матрицы имеют названия, приведенные в следующей таблице.

Размерность	Название	Размерность	Название
$m \times n$	прямоугольная	$1 \times n$	матрица-строка
$n \times n$	квадратная	$m \times 1$	матрица-столбец

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы ($a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$), образуют *главную диагональ матрицы*. Диагональ, соединяющая элементы $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{n1}$, называется *побочной диагональю матрицы*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней* (*верхней*) *треугольной матрицей*:

$$\text{нижняя:} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{верхняя:} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единицам, называется *единичной*:

$$\underset{n\times n}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\underset{m\times n}{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица A^T, у которой по отношению к матрице A элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к A:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \underset{m\times n}{A'}.$$

Матрица, для которой справедливо равенство $A = A^T$ называется *симметричной*.

1.3 Краткая запись различных видов матриц

Перечисленные выше основные виды матриц характеризуются определенными свойствами ее элементов. Введем *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

В таблице ниже приведены условия, с помощью которых можно выразить ранее приведеные свойства для квадратных матриц $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Условие	Название	Условие	Название
$a_{ij} = 0$ при $i > j$	верхняя треугольная	$a_{ij} = \delta_{ij}$	единичная
$a_{ij} = 0$ при $i < j$	нижняя треугольная	$a_{ij} = 0$	нулевая
$a_{ij} = a_i \delta_{ij}$	диагональная	$a_{ij} = a_{ji}$	симметричная

1.4 Линейные операции

Рассмотрим операции, справедливые для матриц с размерностью $m \times n$.

1.4.1 Сравнение матриц

Две матрицы одинаковых размеров называются равными, если совпадают их элементы с одинаковыми индексами:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

1.4.2 Сложение матриц

Сложение матриц $A + B$ есть операция нахождения матрицы C, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойства сложения матриц:

- Коммутативность: $A + B = B + A$
- Ассоциативность: $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
- Сложение с нулевой матрицей: $A + \theta = \theta + A = A$
- Существование противоположной матрицы: $A + A^{-1} = 0$

1.4.3 Умножение матрицы на число

Умножение матрицы A на число $\lambda \in \mathscr{K}$ заключается в построении матрицы $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Свойства умножения матриц на число:

- Ассоциативность: $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$
- Дистрибутивность: $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A; \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- Умножение на единицу: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

1.4.4 Умножение матриц

Умножение матриц — операция вычисления матрицы C, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Количество столбцов в матрице A должно совпадать с количеством строк в матрице B. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, В — $n \times k$, то размерность их произведения $AB = C$ есть $m \times k$.

Свойства умножения матриц:

- Некоммутативность (в общем случае): $AB \neq BA$
- Ассоциативность: $(AB)C = A(BC)$
- Коммутативность при умножении с единичной матрицей: $AE = EA = A$
- Дистрибутивность: $(A + B)C = AC + BC; \quad A(B + C) = AB + BC$
- Ассоциативность и коммутативность умножения на число: $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

1.5 Элементарные преобразования

Определение 1.4. Элементарные преобразования — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц.

Таким образом, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Элементарные операции обратимы. Обозначение $A \sim B$ указывает на то, что матрица A может быть получена из матрицы B путем элементарных преобразований.

Примеры элементарных преобразований строк:

- перестановка местами любых двух строк матрицы;

- умножение любой строки матрицы на константу $k \neq 0$, при этом определитель матрицы увеличивается в k раз;
- прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на некоторую константу;
- удаление нулевых строк;
- транспонирование.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов.

1.6 Свойства транспонирования матриц

Свойство 1.1.

$$(A^T)^T = A$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies (A^T)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.2.

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{11} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{11} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{m2} + b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{m2} + b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.3.

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (\lambda A)^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda A^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.4.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{11} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T = D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{m1} \\ d_{11} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{ij} = c_{ji} \\ b_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} \end{cases}$$

$$A \cdot B = F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \dots & f_{m1} \\ f_{11} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T \cdot A^T = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} \\ g_{11} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

$$g_{ji} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{j\alpha} c_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha j} a_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} b_{\alpha j} = f_{ij}$$

$$G = F^T \implies (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Что и требовалось доказать.

1.7 Вычисление определителей

Теорема 1.5 (о раздложении определителя). Определителем порядка n, соответствующим квадратной матрице порядка n, называется число, равное

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

где

- $i, j \in (\overline{1, n})$;
- A_{ij} — соответствующее алгебраическое дополнение a_{ij};
- M_{ij} — соответствующий минор элемента a_{ij}.

Доказательство. Опираясь на основные свойства определителей, выпишем цепочку равенств:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

Таким образом, часть теоремы доказана. Положим теперь $A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ji} = a_{ij}$. Заметим, что соответствующим элементу a'_{ji} в $\det A^T$ будет $M'_{ji} = M_{ij}$. Как было показано выше,

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i}a'_{ji}M'_{ji} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

Что и требовалось доказать.

1.8 Присоединенная матрица

Определение 1.5. Присоединенная матрица A^c — это транспонированная матрица алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A:

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

Теорема 1.6 (Аннулирование)**.** Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0, \quad (i \neq j); \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0, \quad (i \neq j).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную матрицу A', полученную из матрицы A, заменой j-ой строки i-ой строкой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A'_{jk}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение элемента некоторой строки не зависит от элементов этой строки (поскольку при вычислении алгебраического дополнения эта строка просто вычеркивается). Однако матрицы A и A' отличаются только j-ой строкой, следовательно, $A_{jk} = A'_{jk}$. Тогда

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Поскольку матрица A' имеет две одинаковые строки, ее определитель равен нулю. Аналогично доказывается случай со столбцами.

Что и требовалось доказать.

1.9 Невырожденная матрица

Определение 1.6. Невырожденная матрица — это квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае матрица называется вырожденной.

1.10 Обратная матрица

Определение 1.7. Обратная матрица — это такая матрица A^{-1}, при умножении которой на исходную матрицу A получается единичная матрица E:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

1.10.1 Свойства обратной матрицы

Свойство 1.7.

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

Доказательство.

$$\det E = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A \quad \Longrightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{\det E}{\det A} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.8.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E \\ ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = E \end{cases} \implies (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.9.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Доказательство. Воспользуемся одним из свойств транспонированных матриц

$$\begin{cases} (A^{-1})^T A^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E \\ A^T(A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = E^T = E \end{cases} \implies (A^{-1})^T = A^T.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.10.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Доказательство.

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \implies \quad (A^{-1})^{-1}A^{-1}A = A \quad \overset{\text{2 св.}}{\implies} \quad (AA^{-1})^{-1}A = A \quad \implies$$
$$\implies \quad (AA^{-1})^{-1}A = A \quad \implies \quad E^{-1}A = A \quad \implies \quad A = A$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.11.

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \lambda A \lambda^{-1} A^{-1} = 1E = E \\ \lambda^{-1}A^{-1}\lambda A = 1E = E \end{cases} \implies (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}.$$

Что и требовалось доказать.

1.10.2 Теоремы

Теорема 1.12. Для всякой невырожденной матрицы A существует обратная матрица A^{-1} и притом только одна.

Доказательство. Сначала докажем существование обратной матрицы. Пусть нам дана следующая матрица A, определитель которой не равен нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы построим присоединенную матрицу:

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Перемножим матрицы A и A^c:

$$A^c A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n A_{k2}a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k2}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k2}a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{kn} \end{pmatrix}$$

По теореме о разложении определителя и теореме аннулирования:

$$\begin{cases} i = k \implies \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \det A \\ i \neq k \implies \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0 \end{cases}$$

Тогда получим, что

$$A^c A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E \det A.$$

Значит обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{A^c}{\det A}.$$

Аналогично доказывается случай AA^c, Теперь докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что существует две обратные матрицы: A^{-1} и $\tilde{A}$. Тогда

$$\begin{cases} AA^{-1} = A^{-1}A = E \\ A\tilde{A} = \tilde{A}A = E \end{cases} \implies A^{-1}A\tilde{A} = \begin{cases} A^{-1}(A\tilde{A}) = A^{-1}E = A^{-1} \\ (A^{-1}A)\tilde{A} = E\tilde{A} = \tilde{A} \end{cases} \implies A^{-1} = \tilde{A}.$$

Результат противоречит исходному предположению о существовании двух обратных матриц.

Что и требовалось доказать.

1.11 Норма матрицы

Определение 1.8. Нормой матрицы $A \in \mathcal{K}^{m\times n}$ (обычно $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ или $\mathcal{K} = \mathbb{C}$) понимается неотрицательное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|A\| \geq 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, где A и B — матрицы, допускающие сложение;
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, где A и B — матрицы, допускающие умножение.

Определение 1.9. Норма $\|A\|$ называется *мультипликативной*, если выполняются все 4 аксиомы, и *аддитивной*, если выполняются первые 3 аксиомы.

Определение 1.10. Если матрица удовлетворяет условию

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda| \|A\|,$$

то такая норма называются *согласованной* с нормой вектора.

Определим некоторые наиболее употребительные на практике матричные нормы:

- Евклидова норма или норма Фробениуса:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

- Столбцовая норма:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

- Строковая форма:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Спектральная норма:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i (\sigma_i)},$$

где σ_i — собственные значения симметричной матрицы $A^T A$.

1.12 Базисный минор

Определение 1.11. Если $\operatorname{rang} A = r$, то любой ненулевой минор порядка r называется *базисным минором*, а его строки (столбцы) — *базисными*.

Теорема 1.13 (о базисном миноре)**.** Базисные строки (столбцы) матрицы A, соответствующие любому ее базисному минору M, *линейно независимы*. Любые строки (столбцы) матрицы A, не входящие в M, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

1.13 Система линейных алгебраических уравнений

Определение 1.12. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ, СЛУ) — система уравнений, каждое уравнение в которой является *линейным* — алгебраическим уравнением первой степени.

Определение 1.13. Расширенная матрица — матрица, которая получается при добавлении в качестве (n+1) столбца матрицу-столбец свободных членов. Приведем пример. Пусть дана матрица коэффициентов A и матрица свободных членов B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда расширенная матрица P будет иметь вид:

$$P = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

СЛАУ можно записать в матричном виде:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad \underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \implies A^1 AX = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B.$$

Теорема 1.14 (Кронекера–Капелли)**.** Система линейных алгебраических уравнений будет совместной тогда и только тогда, когда ранг матрицы A ее коэффициентов и ранг расширенной матрицы P равны. Из этого утверждения следует, что для СЛАУ справедливо следующее:

- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = n$ — имеет единственное решение;
- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P < n$ — имеет бесконечное множество решений;
- $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} P$ — не имеет решений.

Доказательство.

Необходимость. Пусть система совместна, тогда найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что при подстановке которых в систему мы получим m тождеств, которые можно записать в виде одного векторного тождества:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Следовательно, вектор-столбец свободных членов B является линейной комбинацией вектор-столбцов матрицы A, тогда добавление его к системе векторов-столбцов матрицы A не меняет ранга системы. Отсюда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} R$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = r$, следовательно существует линейно независимая подсистема из r векторов-столбцов матрицы A. Она же будет содержаться и в матрице P. Так как эта система максимальна, то вектор-столбец свободных членов B будет выражаться через эти r векторов-столбцов. Следовательно, вектор-столбец свободных членов B можно представить в виде линейной комбинации всех векторов-столбцов матрицы A, т. е. найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что вектор-столбец будет представлен в виде:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

1.14 Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Определение 1.14. Однородная система уравнений (ОСЛУ) — это система линейных уравнений, у которой все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Любая ОСЛУ всегда совместна, поскольку всегда обладает нулевым (тривиальным) решением:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

Теорема 1.15. Если rang $A = n$ и det $A \neq 0$, тогда система имеет единственное решение.
Теорема 1.16. Если rang $A < n$ и det $A = 0$, тогда система имеет множество решений.
Теорема 1.17. Если X и Y — решения ОСЛУ, то любая линейная комбинация $\alpha X + \beta Y$ тоже является решением ОСЛУ.

1.15 Фундаментальная система решений

Определение 1.15. Фундаментальная система решений (ФСР) — это совокупность ненулевых решений ОСЛУ $x_1; x_2; ...; x_k$, если

1. $x_1; x_2; ...; x_k$ линейно независимы;
2. любое другое ненулевое решение x ОСЛУ может быть представлено линейной комбинацией $x_1; x_2; ...; x_k$, то есть общее решение ОСЛУ

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k, \quad \alpha_i \in R.$$

Глава 2

Векторное пространство

2.1 Определение

Определение 2.1. Векторным (линейным) пространством называется множество L произвольных элементов, называемых векторами, если для них:

- определена операция **сложения** векторов $L \times L \to L$, сопоставляющая каждой паре элементов $(x, y) \in L$ единственный элемент множества L, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$;
- определена операция **умножения** векторов на скаляры $F \times L \to L$ (F — множество скаляров), сопоставляющая каждому элементу $\lambda \in F$ и каждому элементу $x \in L$ единственный элемент множества L, обозначаемый $\lambda \cdot x$ или λx.

Эти операции должны удовлетворять восьми аксиомам векторного пространства.

Примеры линейных пространств:

- множество $\mathbb{R}$
- множество всех матриц
- множество всех многочленов $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$
- n-мерное пространство арифметических векторов A_n $n = 1, 2, ...$
- множество всех функций, интегрируемых на $[a, b]$

2.2 Аксиомы векторного пространства

2.2.1 Аксиомы сложения

Наименование	**Формула**
Коммутативность	$\forall x, y \in L \implies x + y = y + x$
Ассоциативность	$\forall x, y, z \in L \implies x + (y + z) = (x + y) + z$
Существование нейтрального элемента	$\exists 0 \in L : x + 0 = 0 + x = x$
Существование противоположного элемента	$\forall x \in L\ \exists(-x) \in L : x + (-x) = 0$

2.2.2 Аксиомы умножения

Наименование	**Формула**
Ассоциативность	$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
Дистрибутивность относительно сложения скаляров	$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
Дистрибутивность относительно сложения векторов	$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
Существование нейтрального элемента	$1 \cdot x = x$

2.3 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 2.2. Система из k векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_k\vec{a}_k = 0.$$

Если это равенство справедливо только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$, тогда эта система называется **линейно независимой**.

$$\mathfrak{I}(A) =$$