Оглавление

Глава 1

Матрицы

1.1 Определения

Определение 1.1.1. Матрица размером $m \times n$ — таблица выражений, состоящая из m строк и n столбцов:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Определение 1.1.2. След матрицы — это сумма диагональных элементов матрицы. Операция взятия следа обозначается tr:

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ;= (a_{ij}) \qquad \mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Определение 1.1.3. Ранг матрицы — это наивысший порядок ненулевого минора. Ранг матрицы обозначается rang.

1.2 Виды матриц

В зависимости от размерности, матрицы имеют названия, приведенные в следующей таблице.

Размерность	Название	Размерность	Название
$m \times n$	прямоугольная	$1 \times n$	матрица-строка
$n \times n$	квадратная	$m \times 1$	матрица-столбец

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$), образуют *главную диагональ матрицы*. Диагональ, соединяющая элементы $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n1}$, называется *побочной диагональю матрицы*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней* (*верхней*) *треугольной матрицей*:

$$\text{нижняя:} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{верхняя:} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единицам, называется *единичной*:

$$\underset{n\times n}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\underset{m\times n}{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица A^T, у которой по отношению к матрице A элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к A:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \underset{m\times n}{A'}.$$

Матрица, для которой справедливо равенство $A = A^T$ называется *симметричной*.

1.3 Краткая запись различных видов матриц

Перечисленные выше основные виды матриц характеризуются определенными свойствами ее элементов. Введем *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

В таблице ниже приведены условия, с помощью которых можно выразить ранее приведеные свойства для квадратных матриц $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Условие	Название	Условие	Название
$a_{ij} = 0$ при $i > j$	верхняя треугольная	$a_{ij} = \delta_{ij}$	единичная
$a_{ij} = 0$ при $i < j$	нижняя треугольная	$a_{ij} = 0$	нулевая
$a_{ij} = a_i \delta_{ij}$	диагональная	$a_{ij} = a_{ji}$	симметричная

1.4 Линейные операции

Рассмотрим операции, справедливые для матриц с размерностью $m \times n$.

1.4.1 Сравнение матриц

Две матрицы одинаковых размеров называются равными, если совпадают их элементы с одинаковыми индексами:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

1.4.2 Сложение матриц

Сложение матриц $A + B$ есть операция нахождения матрицы C, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойства сложения матриц:

- Коммутативность: $A + B = B + A$
- Ассоциативность: $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
- Сложение с нулевой матрицей: $A + \theta = \theta + A = A$
- Существование противоположной матрицы: $A + A^{-1} = 0$

1.4.3 Умножение матрицы на число

Умножение матрицы A на число $\lambda \in \mathcal{K}$ заключается в построении матрицы $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.
Свойства умножения матриц на число:

- Ассоциативность: $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$
- Дистрибутивность: $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A; \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- Умножение на единицу: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

1.4.4 Умножение матриц

Умножение матриц — операция вычисления матрицы C, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Количество столбцов в матрице A должно совпадать с количеством строк в матрице B. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, B — $n \times k$, то размерность их произведения $AB = C$ есть $m \times k$.
Свойства умножения матриц:

- Некоммутативность (в общем случае): $AB \neq BA$
- Ассоциативность: $(AB)C = A(BC)$
- Коммутативность при умножении с единичной матрицей: $AE = EA = A$
- Дистрибутивность: $(A + B)C = AC + BC; \quad A(B + C) = AB + BC$
- Ассоциативность и коммутативность умножения на число: $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

1.5 Элементарные преобразования

Определение 1.5.1. Элементарные преобразования — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц.

Таким образом, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Элементарные операции обратимы. Обозначение $A \sim B$ указывает на то, что матрица A может быть получена из матрицы B путем элементарных преобразований.

Примеры элементарных преобразований строк:

- перестановка местами любых двух строк матрицы;

- умножение любой строки матрицы на константу $k \neq 0$, при этом определитель матрицы увеличивается в k раз;
- прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на некоторую константу;
- удаление нулевых строк;
- транспонирование.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов.

1.6 Свойства транспонирования матриц

Свойство 1.6.1.

$$(A^T)^T = A$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies (A^T)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.6.2.

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{11} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{11} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{m2}+b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T+B^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{m2}+b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.6.3.

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (\lambda A)^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda A^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.6.4.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{11} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T = D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{m1} \\ d_{11} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{ij} = c_{ji} \\ b_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} \end{cases}$$

$$A \cdot B = F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \dots & f_{m1} \\ f_{11} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T \cdot A^T = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} \\ g_{11} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

$$g_{ji} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{j\alpha} c_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha j} a_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} b_{\alpha j} = f_{ij}$$

$$G = F^T \implies (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Что и требовалось доказать.

1.7 Присоединенная матрица

Определение 1.7.1. Присоединенная матрица A^c — это транспонированная матрица алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A:

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

Теорема 1.7.1 (Аннулирование). *Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0, \quad (i \neq j); \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0, \quad (i \neq j).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную матрицу A', полученную из матрицы A, заменой j-ой строки i-ой строкой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A'_{jk}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение элемента некоторой строки не зависит от элементов этой строки (поскольку при вычислении алгебраического дополнения эта строка просто вычеркивается). Однако матрицы A и A' отличаются только j-ой строкой, следовательно, $A_{jk} = A'_{jk}$. Тогда

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Поскольку матрица A' имеет две одинаковые строки, ее определитель равен нулю. Аналогично доказывается случай со столбцами.

Что и требовалось доказать.

1.8 Обратная матрица

Определение 1.8.1. Обратная матрица — это такая матрица A^{-1}, при умножении которой на исходную матрицу A получается единичная матрица E:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

1.8.1 Свойства обратной матрицы

Свойство 1.8.1.

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

Доказательство.

$$\det E = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A \quad \Longrightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{\det E}{\det A} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.8.2.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E \\ ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = E \end{cases} \Longrightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.8.3.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Доказательство. Воспользуемся одним из свойств транспонированных матриц

$$\begin{cases} (A^{-1})^T A^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E \\ A^T(A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = E^T = E \end{cases} \Longrightarrow (A^{-1})^T = A^T.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.8.4.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Доказательство.

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \Longrightarrow \quad (A^{-1})^{-1}A^{-1}A = A \quad \overset{2\text{ св.}}{\Longrightarrow} \quad (AA^{-1})^{-1}A = A \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad (AA^{-1})^{-1}A = A \quad \Longrightarrow \quad E^{-1}A = A \quad \Longrightarrow \quad A = A$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1.8.5.

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \lambda A \lambda^{-1} A^{-1} = 1E = E \\ \lambda^{-1}A^{-1}\lambda A = 1E = E \end{cases} \Longrightarrow (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 1.8.6. *Для всякой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица.*

1.9 Невырожденная матрица

Определение 1.9.1. Невырожденная матрица — это квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае матрица называется вырожденной.

1.10 Норма матрицы

Определение 1.10.1. Нормой матрицы $A \in \mathcal{K}^{m\times n}$ (обычно $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ или $\mathcal{K} = \mathbb{C}$) понимается неотрицательное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|A\| \geq 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, где A и B — матрицы, допускающие сложение;
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, где A и B — матрицы, допускающие умножение.

Определение 1.10.2. Норма $\|A\|$ называется *мультипликативной*, если выполняются все 4 аксиомы, и *аддитивной*, если выполняются первые 3 аксиомы.

Определение 1.10.3. Если матрица удовлетворяет условию

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda|\|A\|,$$

то такая норма называются *согласованной* с нормой вектора.

Определим некоторые наиболее употребительные на практике матричные нормы:

- Евклидова норма или норма Фробениуса:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

- Столбцовая норма:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

- Строковая форма:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Спектральная норма:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i(\sigma_i)},$$

где σ_i — собственные значения симметричной матрицы A^TA.