# Оглавление

# Глава 1

# Матрицы и определители

## 1.1 Определения

**Определение 1.1.** Матрица размером $m \times n$ — это таблица выражений, состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

**Определение 1.2.** След матрицы — это сумма диагональных элементов матрицы. Операция взятия следа обозначается tr:

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; = (a_{ij}) \qquad \mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

**Определение 1.3.** Ранг матрицы — это наивысший порядок ненулевого минора. Ранг матрицы обозначается rang.

## 1.2 Виды матриц

В зависимости от размерности, матрицы имеют названия, приведенные в следующей таблице.

| Размерность | Название | Размерность | Название |
|---|---|---|---|
| $m \times n$ | прямоугольная | $1 \times n$ | матрица-строка |
| $n \times n$ | квадратная | $m \times 1$ | матрица-столбец |

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы ($a_{11}$, $a_{22}$, …, $a_{nn}$), образуют *главную диагональ матрицы*. Диагональ, соединяющая элементы $a_{1n}$, $a_{2n}$, …, $a_{n1}$, называется *побочной диагональю матрицы*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней* (*верхней*) *треугольной матрицей*:

$$\text{нижняя:} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{верхняя:} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единицам, называется *единичной*:

$$\underset{n\times n}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\underset{m\times n}{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица $A^T$, у которой по отношению к матрице $A$ элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к $A$:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \underset{m\times n}{A'}.$$

Матрица, для которой справедливо равенство $A = A^T$ называется *симметричной*.

## 1.3 Краткая запись различных видов матриц

Перечисленные выше основные виды матриц характеризуются определенными свойствами ее элементов. Введем *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

В таблице ниже приведены условия, с помощью которых можно выразить ранее приведеные свойства для квадратных матриц $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$.

| Условие | Название | Условие | Название |
|---|---|---|---|
| $a_{ij} = 0$ при $i > j$ | верхняя треугольная | $a_{ij} = \delta_{ij}$ | единичная |
| $a_{ij} = 0$ при $i < j$ | нижняя треугольная | $a_{ij} = 0$ | нулевая |
| $a_{ij} = a_i\delta_{ij}$ | диагональная | $a_{ij} = a_{ji}$ | симметричная |

## 1.4 Линейные операции

Рассмотрим операции, справедливые для матриц с размерностью $m \times n$.

### 1.4.1 Сравнение матриц

Две матрицы одинаковых размеров называются равными, если совпадают их элементы с одинаковыми индексами:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

### 1.4.2 Сложение матриц

Сложение матриц $A+B$ есть операция нахождения матрицы $C$, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц $A$ и $B$:

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойства сложения матриц:

- Коммутативность:

$$A + B = B + A.$$

- Ассоциативность:

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C).$$

- Сложение с нулевой матрицей:

$$A + \theta = \theta + A = A.$$

- Существование противоположной матрицы:

$$A + A^{-1} = 0.$$

### 1.4.3 Умножение матрицы на число

Умножение матрицы $A$ на число $\lambda \in \mathcal{K}$ заключается в построении матрицы $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Свойства умножения матриц на число:

- Ассоциативность:

$$(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A).$$

- Дистрибутивность:

$$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A.$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

- Умножение на единицу:

$$1 \cdot A = A \cdot 1 = A.$$

### 1.4.4 Умножение матриц

Умножение матриц — операция вычисления матрицы $C$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Количество столбцов в матрице $A$ должно совпадать с количеством строк в матрице $B$. Если матрица $A$ имеет размерность $m \times n$, B — $n \times k$, то размерность их произведения $AB = C$ есть $m \times k$.

Свойства умножения матриц:

- Некоммутативность (в общем случае):

$$AB \neq BA.$$

- Ассоциативность:

$$(AB)C = A(BC).$$

- Коммутативность при умножении с единичной матрицей:

$$AE = EA = A.$$

- Дистрибутивность:

$$(A + B)C = AC + BC.$$

$$A(B + C) = AB + BC.$$

- Ассоциативность и коммутативность умножения на число:

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

## 1.5 Элементарные преобразования

**Определение 1.4.** Элементарные преобразования — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц.

Таким образом, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Элементарные операции обратимы. Обозначение $A \sim B$ указывает на то, что матрица $A$ может быть получена из матрицы $B$ путем элементарных преобразований.

Примеры элементарных преобразований строк:

- перестановка местами любых двух строк матрицы;
- умножение любой строки матрицы на константу $k \neq 0$, при этом определитель матрицы увеличивается в $k$ раз;
- прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на некоторую константу;
- удаление нулевых строк;
- транспонирование.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов.

## 1.6 Свойства транспонирования матриц

**Свойство 1.1.**

$$(A^T)^T = A$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (A^T)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 1.2.**

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{11} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{m1} \\ b_{11} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & ... & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{m2} + b_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & ... & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{m2} + b_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 1.3.**

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (\lambda A)^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & ... & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda A^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & ... & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 1.4.**

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{m1} \\ c_{11} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T = D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & ... & d_{m1} \\ d_{11} & d_{22} & ... & d_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ d_{1n} & d_{2n} & ... & d_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = c_{ji} \\ b_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} \end{cases}$$

$$A \cdot B = F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & ... & f_{m1} \\ f_{11} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{1n} & f_{2n} & ... & f_{mn} \end{pmatrix} \qquad B^T \cdot A^T = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & ... & g_{m1} \\ g_{11} & g_{22} & ... & g_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ g_{1n} & g_{2n} & ... & g_{mn} \end{pmatrix}$$

$$g_{ji} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{j\alpha} c_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha j} a_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} b_{\alpha j} = f_{ij}$$

$$G = F^T \implies (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

*Что и требовалось доказать.*

## 1.7 Вычисление определителей

**Теорема 1.5** (о раздложении определителя)**.** Определителем порядка $n$, соответствующим квадратной матрице порядка $n$, называется число, равное

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

где

- $i, j \in (\overline{1, n})$;
- $A_{ij}$ — соответствующее алгебраическое дополнение $a_{ij}$;
- $M_{ij}$ — соответствующий минор элемента $a_{ij}$.

**Доказательство.** Опираясь на основные свойства определителей, выпишем цепочку равенств:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

Таким образом, часть теоремы доказана. Положим теперь $A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ji} = a_{ij}$. Заметим, что соответствующим элементу $a'_{ji}$ в $\det A^T$ будет $M'_{ji} = M_{ij}$. Как было показано выше,

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a'_{ji} M'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

*Что и требовалось доказать.*

## 1.8 Присоединенная матрица

**Определение 1.5.** Присоединенная матрица $A^c$ — это транспонированная матрица алгебраических дополнений $A_{ij}$ элементов $a_{ij}$ матрицы $A$:

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

**Теорема 1.6** (Аннулирование)**.** Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad (i \neq j); \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad (i \neq j).$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную матрицу $A'$, полученную из матрицы $A$, заменой $j$-ой строки $i$-ой строкой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A'_{jk}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение элемента некоторой строки не зависит от элементов этой строки (поскольку при вычислении алгебраического дополнения эта строка просто вычеркивается). Однако матрицы $A$ и $A'$ отличаются только $j$-ой строкой, следовательно, $A_{jk} = A'_{jk}$. Тогда

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

Поскольку матрица $A'$ имеет две одинаковые строки, ее определитель равен нулю. Аналогично доказывается случай со столбцами.

*Что и требовалось доказать.*

## 1.9 Невырожденная матрица

**Определение 1.6.** Невырожденная матрица — это квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае матрица называется вырожденной.

## 1.10 Обратная матрица

**Определение 1.7.** Обратная матрица — это такая матрица $A^{-1}$, при умножении которой на исходную матрицу $A$ получается единичная матрица $E$:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

### 1.10.1 Свойства обратной матрицы

**Свойство 1.7.**

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

**Доказательство.**

$$\det E = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A$$

$$\det A^{-1} = \frac{\det E}{\det A} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 1.8.**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**Доказательство.**

$$\begin{cases} B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E \\ ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = E \end{cases} \implies (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 1.9.**

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**Доказательство.** Воспользуемся одним из свойств транспонированных матриц

$$\begin{cases} (A^{-1})^T A^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E \\ A^T(A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = E^T = E \end{cases} \implies (A^{-1})^T = A^T.$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 1.10.**

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**Доказательство.**

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \implies \quad (A^{-1})^{-1}A^{-1}A = A \quad \stackrel{\text{2 св.}}{\implies} \quad (AA^{-1})^{-1}A = A \quad \implies$$
$$\implies \quad (AA^{-1})^{-1}A = A \quad \implies \quad E^{-1}A = A \quad \implies \quad A = A$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 1.11.**

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$$

**Доказательство.**

$$\begin{cases} \lambda A \lambda^{-1} A^{-1} = 1E = E \\ \lambda^{-1}A^{-1}\lambda A = 1E = E \end{cases} \implies (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}.$$

*Что и требовалось доказать.*

### 1.10.2 Теоремы

**Теорема 1.12.** Для всякой невырожденной матрицы $A$ существует обратная матрица $A^{-1}$ и притом только одна.

**Доказательство.** Сначала докажем существование обратной матрицы. Пусть нам дана следующая матрица $A$, определитель которой не равен нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы построим присоединенную матрицу:

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Перемножим матрицы $A$ и $A^c$:

$$A^cA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n A_{k2}a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k2}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k2}a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{kn} \end{pmatrix}$$

По теореме о разложении определителя и теореме аннулирования:

$$\begin{cases} i = k \implies \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \det A \\ i \neq k \implies \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0 \end{cases}$$

Тогда получим, что

$$A^c A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E \det A.$$

Значит обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{A^c}{\det A}.$$

Аналогично доказывается случай $AA^c$, Теперь докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что существует две обратные матрицы: $A^{-1}$ и $\tilde{A}$. Тогда

$$\begin{cases} AA^{-1} = A^{-1}A = E \\ A\tilde{A} = \tilde{A}A = E \end{cases} \implies A^{-1}A\tilde{A} = \begin{cases} A^{-1}(A\tilde{A}) = A^{-1}E = A^{-1} \\ (A^{-1}A)\tilde{A} = E\tilde{A} = \tilde{A} \end{cases} \implies$$
$$\implies A^{-1} = \tilde{A}.$$

Результат противоречит исходному предположению о существовании двух обратных матриц.

*Что и требовалось доказать.*

## 1.11 Норма матрицы

**Определение 1.8.** Нормой матрицы $A \in \mathcal{K}^{m\times n}$ (обычно $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ или $\mathcal{K} = \mathbb{C}$) понимается неотрицательное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|A\| \geq 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, где $A$ и $B$ — матрицы, допускающие сложение;
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, где $A$ и $B$ — матрицы, допускающие умножение.

**Определение 1.9.** Норма $\|A\|$ называется *мультипликативной*, если выполняются все 4 аксиомы, и *аддитивной*, если выполняются первые 3 аксиомы.

**Определение 1.10.** Если матрица удовлетворяет условию

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda|\|A\|,$$

то такая норма называются *согласованной* с нормой вектора.

Определим некоторые наиболее употребительные на практике матричные нормы:

- Евклидова норма или норма Фробениуса:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

- Столбцовая норма:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

- Строковая форма:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Спектральная норма:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i(\sigma_i)},$$

  где $\sigma_i$ — собственные значения симметричной матрицы $A^TA$.

## 1.12 Базисный минор

**Определение 1.11.** Если $\operatorname{rang} A = r$, то любой ненулевой минор порядка $r$ называется *базисным минором*, а его строки (столбцы) — *базисными*.

**Теорема 1.13** (о базисном миноре)**.** Базисные строки (столбцы) матрицы $A$, соответствующие любому ее базисному минору $M$, *линейно независимы*. Любые строки (столбцы) матрицы $A$, не входящие в $M$, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

## 1.13 Система линейных алгебраических уравнений

**Определение 1.12.** Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ, СЛУ) — система уравнений, каждое уравнение в которой является *линейным* — алгебраическим уравнением первой степени.

**Определение 1.13.** Расширенная матрица — матрица, которая получается при добавлении в качестве (n+1) столбца матрицу-столбец свободных членов. Приведем пример. Пусть дана матрица коэффициентов $A$ и матрица свободных членов $B$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда расширенная матрица $P$ будет иметь вид:

$$P = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

СЛАУ можно записать в матричном виде:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad \underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \implies A^1AX = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B.$$

**Теорема 1.14** (Кронекера–Капелли). Система линейных алгебраических уравнений будет совместной тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A$ ее коэффициентов и ранг расширенной матрицы $P$ равны. Из этого утверждения следует, что для СЛАУ справедливо следующее:

- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = n$ — имеет единственное решение;
- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P < n$ — имеет бесконечное множество решений;
- $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} P$ — не имеет решений.

**Доказательство.**

**Необходимость.** Пусть система совместна, тогда найдутся такие числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

что при подстановке которых в систему мы получим $m$ тождеств, которые можно записать в виде одного векторного тождества:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Следовательно, вектор-столбец свободных членов $B$ является линейной комбинацией вектор-столбцов матрицы $A$, тогда добавление его к системе векторов-столбцов матрицы $A$ не меняет ранга системы. Отсюда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} R$.

**Достаточность**. Пусть $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = r$, следовательно существует линейно независимая подсистема из $r$ векторов-столбцов матрицы $A$. Она же будет содержаться и в матрице $P$. Так как эта система максимальна, то вектор-столбец свободных членов $B$ будет выражаться через эти $r$ векторов-столбцов. Следовательно, вектор-столбец свободных членов $B$ можно представить в виде линейной комбинации всех векторов-столбцов матрицы $A$, т. е. найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что вектор-столбец будет представлен в виде:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Что и требовалось доказать.*

## 1.14 Однородные системы линейных алгебраических уравнений

**Определение 1.14.** Однородная система уравнений (ОСЛУ) — это система линейных уравнений, у которой все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Любая ОСЛУ всегда совместна, поскольку всегда обладает нулевым (тривиальным) решением:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

**Теорема 1.15.** Если $\operatorname{rang} A = n$ и $\det A \neq 0$, тогда система имеет единственное решение.

**Теорема 1.16.** Если $\operatorname{rang} A < n$ и $\det A = 0$, тогда система имеет множество решений.

**Теорема 1.17.** Если $X$ и $Y$ — решения ОСЛУ, то любая линейная комбинация $\alpha X + \beta Y$ тоже является решением ОСЛУ.

## 1.15 Фундаментальная система решений

**Определение 1.15.** Фундаментальная система решений (ФСР) — это совокупность ненулевых решений ОСЛУ $x_1; x_2; ...; x_k$, если

1. $x_1; x_2; ...; x_k$ линейно независимы;
2. любое другое ненулевое решение $x$ ОСЛУ может быть представлено линейной комбинацией $x_1; x_2; ...; x_k$, то есть общее решение ОСЛУ

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k, \quad \alpha_i \in R.$$

# Глава 2

# Векторное пространство

## 2.1 Определение

**Определение 2.1.** Векторным (линейным) пространством называется множество $L$ произвольных элементов, называемых векторами, если для них:

- определена операция **сложения** векторов $L \times L \to L$, сопоставляющая каждой паре элементов $(x, y) \in L$ единственный элемент множества $L$, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$;
- определена операция **умножения** векторов на скаляры $F \times L \to L$ ($F$ — множество скаляров), сопоставляющая каждому элементу $\lambda \in F$ и каждому элементу $x \in L$ единственный элемент множества $L$, обозначаемый $\lambda \cdot x$ или $\lambda x$.

Эти операции должны удовлетворять восьми аксиомам векторного пространства.

Примеры линейных пространств:

- множество $\mathbb{R}$
- множество всех матриц
- множество всех многочленов $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$
- $n$-мерное пространство арифметических векторов $A_n$ $n = 1, 2, \ldots$
- множество всех функций, интегрируемых на $[a, b]$

## 2.2 Аксиомы векторного пространства

### 2.2.1 Аксиомы сложения

1. Коммутативность:
$$\forall x, y \in L \implies x + y = y + x.$$
2. Ассоциативность:
$$\forall x, y, z \in L \implies x + (y + z) = (x + y) + z.$$
3. Существование нейтрального элемента:
$$\exists 0 \in L : x + 0 = 0 + x = x.$$
4. Существование противоположного элемента:
$$\forall x \in L\ \exists (-x) \in L : x + (-x) = 0.$$

### 2.2.2 Аксиомы умножения

1. Ассоциативность:
$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$
2. Дистрибутивность относительно сложения скаляров:
$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$
3. Дистрибутивность относительно сложения векторов:
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$
4. Существование нейтрального элемента:
$$1 \cdot x = x.$$

## 2.3 Линейная зависимость и независимость векторов

**Определение 2.2.** Система из $k$ векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не равные нулю одновременно, что
$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_k\vec{a}_k = 0.$$
Если это равенство справедливо только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$, тогда эта система называется **линейно независимой**.

# Глава 3

# Линейные операторы

## 3.1 Определение линейного оператора

**Определение 3.1.** Правило $f$, по которому каждому элементу $x$ некоторого непустого множества $X$ ставится в соответствие единственный элемент $y$ непустого множества $Y$, называют **отображением** (или **оператором**) множества $X$ в множество $Y$. Результат $y$ применения оператора $f$ к элементу $x$ обозначают

$$y = f(x)$$

и говорят, что оператор $f$, действует из $X$ в $Y$ или отображает $X$ в $Y$, записывая это в виде

$$f : X \to Y.$$

Элемент $y$ называют **образом** элемента $x$ при действии оператора $f$, а элемент $x$ — **прообразом** элемента $y$.

**Определение 3.2.** Пусть $V$ и $W$ — линейные пространства (либо оба вещественные, либо оба комплексные). Тогда отображение $\mathcal{A} : V \to W$ называют **линейным отображением** или **линейным оператором**, если выполняются следующие условия:

1. $\forall x \in V; \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$;
2. $\forall x_1, x_2 \in X \implies \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$.

Эти два условия можно объединить:

$$\forall x_1, x_2 \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathcal{A}x_1 + \beta \mathcal{A}x_2.$$

**Определение 3.3.** Линейные операторы $\mathcal{A} : V \to W$ и $\mathcal{B} : V \to W$ называют **равными**, если

$$\forall x, y \in V \implies \mathcal{A}x = \mathcal{B}x.$$

**Определение 3.4.** Линейный оператор $\mathcal{A}$, который осуществляет отображение линейного пространства $V$ в себя, также называют **линейным преобразованием** линейного пространства. В этом случае говорят, что линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в линейном пространстве $V$, и записывают

$$\mathcal{A} : V \to V.$$

**Определение 3.5.** Оператор $E : V \to V$ называется **тождественным**, если

$$\forall x \in V \implies Ex = x.$$

**Определение 3.6.** Оператор $\Theta : V \to V$ называется **нулевым**, если

$$\forall x \in V \implies \Theta x = \theta.$$

**Определение 3.7.** Линейный оператор $\mathcal{A}$ называют **невырожденным**, если из равенства $\mathcal{A}x = \theta$ следует, что $x = \theta$. В противном случае линейный оператор $\mathcal{A}$ называют **вырожденным**.

## 3.2 Примеры линейных операторов

### 3.2.1 Преобразование подобия

Каждому элементу $x$ из пространства $V$ по некоторому правилу ставится в соответствие элемент $\lambda x$ из $V$ ($\lambda \neq 0$ и фиксировано), т. е. имеет место равенство $\mathcal{A}x = \lambda x$.

### 3.2.2 Оператор поворота

Оператора поворота на угол $\varphi$, действующий в пространстве $V^2$ векторов на плоскости, поворачивает каждый вектор на угол $\varphi$. Поворот происходит против хода часовой стрелки, если $\varphi > 0$, и по ходу часовой стрелки, если $\varphi < 0$.

### 3.2.3 Оператор дифференцирования

Оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$, действующий в линейном пространстве $K^n$ многочленов одной переменной $x$ степени, не превосходящей $n \in \mathbb{N}$. Каждому многочлену $P(x)$ ставится в соответствие его производная $P'(x)$, являющаяся многочленом степени не выше $n-1$, т. е. $P'(x)$ — элемент того же пространства $K^n$:

$$\frac{d}{dx}P(x) = P'(x).$$

Заметим, что производная суммы функций равна сумме производных, а при умножении функции на число производная этой функции умножается на это число.

### 3.2.4 Оператор интегрирования

Пусть задано пространство, в котором элементами являются непрерывные функции $\varphi(t), t \in [0,1]$. Положим, что

$$\mathcal{A}\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Преобразование $\mathcal{A}$ — линейное, поскольку в силу свойств определенного интеграла имеем

$$\mathcal{A}(\varphi_1+\varphi_2) = \int\limits_0^t [\varphi_1(\tau)+\varphi_2(\tau)]d\tau = \int\limits_0^t \varphi_1(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \varphi_2(\tau)d\tau = \mathcal{A}\varphi_1 + \mathcal{A}\varphi_2;$$

$$\mathcal{A}(\alpha\varphi) = \int\limits_0^t \alpha\varphi(\tau)d\tau = \alpha\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau = \alpha\mathcal{A}\varphi.$$

### 3.2.5 Матричный оператор

Рассмотрим $n$-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ (пространство матриц-столбцов высотой $n$) и прямоугольную матрицу $\mathcal{A}$ размером $m \times n$. Каждому столбцу $X \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие столбец $\mathcal{A}X$, имеющий высоту $m$. Таким образом, определено отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, которое является линейным в силу свойств умножения матриц.

## 3.3 Образ и ядро линейного оператора

**Определение 3.8.** **Образом** линейного оператора $\mathcal{A} : V \to W$ называют множество всех элементов $y \in W$ таких, что $\mathcal{A}x = y$ для некоторого $x \in V$. Образ обозначается через $\operatorname{Im} \mathcal{A}$:

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{y : y = \mathcal{A}x; x \in V\}.$$

**Определение 3.9.** **Ядром** линейного оператора $\mathcal{A} : V \to W$ называют множество всех элементов $x \in V$ таких, что $\mathcal{A}(x) = \theta$. Ядро обозначается через $\ker \mathcal{A}$:

$$\ker \mathcal{A} = \{x : \mathcal{A}x = \theta; x \in V\}.$$

**Теорема 3.1.** Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : V \to W$ образ $\operatorname{Im} A$ и ядро $\ker A$ являются линейными подпространствами в пространствах $W$ и $V$ соответственно.

**Доказательство.** Пусть $y_1$ и $y_2$ — элементы из $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Значит

$$\exists x_1, x_2 \in V : \mathcal{A}x_1 = y_1, \mathcal{A}x_2 = y_2.$$

Из соотношения

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \lambda_2 \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

следует, что произвольная комбинация элементов $y_1$ и $y_2$ также лежит в $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.

В тоже время, если $x_1, x_2 \in \ker \mathcal{A}$, что означает выполнение соотношений $\mathcal{A}x_1 = \theta$ и $\mathcal{A}x_2 = \theta$, то

$$\mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2) = \lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \lambda_2 \mathcal{A}x_2 = \theta + \theta = \theta,$$

т. е. множество $\ker A$ замкнуто относительно линейных операций и потому является линейных подпространством.

*Что и требовалось доказать.*

**Определение 3.10.** Размерность образа $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ называют **рангом** этого линейного оператора. Обозначают через $\operatorname{rang} A$.

**Определение 3.11.** Размерность ядра $\ker \mathcal{A}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ называют **дефектом** этого линейного оператора. Обозначают через $\operatorname{def} \mathcal{A}$.

**Теорема 3.2.** Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : V \to W$ справедливо равенство

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim V.$$

**Теорема 3.3** (построение линейного оператора)**.** Пусть $V$ и $W$ — линейные пространства, $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — базис пространства $V$, а $g_1, g_2, \dots, g_n$ — произвольные элементы из пространства $W$. Тогда

$$\exists! \mathcal{A} : V \to W : \mathcal{A}e_i = g_i, i = \overline{1, n}.$$

**Доказательство.** Докажем существование. Разложим произвольный элемент $x \in V$ по базису $\{e\}$ пространства $V$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Построим отображение $\mathcal{A} : V \to W$ по следующему правилу:

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1(\mathcal{A}e_1) + \dots + x_n(\mathcal{A}e_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathcal{A}e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i,$$

т. е., зная элементы $\mathcal{A}e_i$ можно найти образ любого элемента $x$ линейного пространства $V$.

Убедимся в линейности оператора $\mathcal{A}$. Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i; \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Тогда:

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) g_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i g_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i g_i = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y.$$

Условие линейности оператора выполняется.

Докажем единственность. Предположим, что

$$\exists \mathcal{B} : V \to W : \mathcal{B}e_i = g_i, i = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{B}e_i = \mathcal{B}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \mathcal{B}x.$$

Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают.

*Что и требовалось доказать.*

## 3.4 Матрица линейного оператора

Пусть задан линейный оператор $\mathcal{A} : V \to V$, т. е. линейное преобразование $n$-мерного линейного пространства в себя: $y = \mathcal{A}x$. Найдем связь между координатами элемента $x \in V$ и координатами его образа $y \in V$.

Выберем в пространстве $V$ базис $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, и пусть $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Тогда в силу линейности преобразований $\mathcal{A}$ имеем

$$\mathcal{A}x = x_1(\mathcal{A}e_1) + x_2(\mathcal{A}e_2) + \dots + x_n(\mathcal{A}e_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathcal{A}e_i).$$

Поскольку $\mathcal{A}e_i$ ($i = \overline{1, n}$) — это тоже элемент из $V$, то и $\mathcal{A}e_i$ можно разложить по базису:

$$\mathcal{A}e_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ni}e_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда получим

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} x_i(Ae_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k = \sum_{k=1}^{n} \Big( \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i \Big) e_k.$$

В силу единственности разложения элемента по базисным элементам $e_1, e_2, \dots, e_n$ получим

$$\mathcal{A}x = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i,$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ — координаты преобразованного элемента $\mathcal{A}x$ в базисе $\{e\}$. Тогда получим

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i,$$

или в развернутом виде:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Эта формула представляет линейное преобразование $y = \mathcal{A}x$ в координатной форме.

Элементам $x$ и $y$ поставим в соответствие матрицы-столбцы $X$ и $Y$, образованные из координат этих элементов в базисе $\{e\}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда полученная система уравнений в развернутой матричной форме примет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной форме,

$$Y = AX.$$

Здесь $A$ — квадратная матрица, у которой $i$-й столбец образован коэффициентами разложения элемента $\mathcal{A}e_i$ по базису $\{e\}$.

Таким образом, показано, что при заданном базисе любое линейное преобразование можно представить, и притом единственным способом, в матричной форме, т. е. по своей структуре линейный оператор есть некоторая матрица.

**Определение 3.12.** Матрицу $A$, составленную из координатных столбцов элементов $\mathcal{A}e_i$ $(i = \overline{1, n})$ в базисе $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ называют **матрицей линейного оператора** $\mathcal{A}$ в базисе $\{e\}$.

**Определение 3.13.** Матрица линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$ называется **квадратной**, если ее порядок совпадает с размерностью линейного пространства $V$.

**Теорема 3.4.** Каждая квадратная матрица $A$ порядка $n$ может рассматриваться как матрица некоторого линейного оператора $\mathcal{A}$, следовательно, всякое преобразование вида $Y = AX$ является линейным преобразованием.

**Доказательство.** В силу свойств операции умножения матриц:

$$\forall X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2 \implies A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 A X_1 + \lambda_2 A X_2.$$

Таким образом, при фиксированном базисе между линейным преобразованием и матрицей линейного преобразования установлено взаимно-однозначное соответствие, что позволяет отождествлять преобразование $\mathcal{A}$ с его матрицей

$A$ и записывать линейное преобразование $y = \mathcal{A}x$ в матричной форме $Y = AX$ или в координатной форме.

*Что и требовалось доказать.*

**Теорема 3.5.** Ранг матрицы $A$ линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$ совпадает с рангом этого оператора.

**Доказательство.** Пусть $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — некоторый базис линейного пространства $V$. Образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ представляет собой **линейную оболочку** системы элементов $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n$, то есть

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n).$$

При этом $\operatorname{rang}\mathcal{A}$ равен максимальному число линейно независимых элементов в системе $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n$ и совпадает с максимальным числом линейно независимых столбцов в матрице $A$, т. е. с ее рангом. Таким образом,

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\mathcal{A}.$$

*Что и требовалось доказать.*

## 3.5 Примеры матриц линейных операторов

### 3.5.1 Нулевой оператор

Пусть $\Theta : V \to V$ — нулевой оператор. Матрицей такого оператора независимо от выбора базиса является нулевая матрица $\theta$ соответствующего типа. Действительно, в случае нулевого оператора любой элемент будет нулевым. Поэтому матрица нулевого оператора в любом базисе состоит из нулевых столбцов.

### 3.5.2 Тождественный оператор

Пусть $\mathcal{E} : V \to V$ — тождественный оператор, действующий согласно правилу

$$\forall x \implies \mathcal{E}x = x$$

Тогда $\mathcal{E}e_i = e_i$ для всех $i = \overline{1, n}$ и, следовательно, матрица оператора $\mathcal{E}$ в любом базисе является единичной:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.5.3 Поворот трехмерного пространства

Пусть $\mathcal{A}$ — поворот трехмерного пространства на угол $\varphi$ вокруг оси $Oz$. Если $e_1, e_2, e_2$ — единичные векторы прямоугольной декартовой системы координат, то

$$\begin{gathered} \mathcal{A}e_1 = \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\varphi \cdot e_2; \\ \mathcal{A}e_2 = -\sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2; \\ \mathcal{A}e_3 = e_3 \end{gathered}$$

и, значит, матрица этого оператора будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3.6 Действия над линейными операторами

### 3.6.1 Сложение линейных операторов

**Лемма 3.6.** Пусть $\mathcal{A} : V \to W$ и $\mathcal{B} : V \to W$ — линейные операторы. Тогда **суммой линейных операторов** $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называют оператор $\mathcal{C} : V \to W$ такой, что

$$\forall x \in V \implies \mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x.$$

**Доказательство.** Линейность оператора $\mathcal{C}$ можно доказать следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathcal{C}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \mathcal{A}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) + B(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \\ = \lambda_1(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + \lambda_2(\mathcal{A}y + \mathcal{B}y) = \lambda_1 \mathcal{C}x + \lambda_2 \mathcal{C}y. \end{gathered}$$

*Что и требовалось доказать.*

### 3.6.2 Свойства сложения линейных операторов

**Свойство 3.7.**
$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$$

**Свойство 3.8.**
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}).$$

**Свойство 3.9.**
$$\mathcal{A} + \Theta = \mathcal{A}.$$

**Свойство 3.10.**
$$\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = \Theta.$$

### 3.6.3 Умножение оператора на число

**Лемма 3.11. Произведением линейного оператора** $\mathcal{A} : V \to W$ и числа $\alpha$ называют такой оператор $\mathcal{B} : V \to W$, что

$$\forall x \in V \implies \mathcal{B}x = \alpha\mathcal{A}x.$$

**Доказательство.** Линейность оператора $\mathcal{B}$ можно доказать следующим образом:

$$\mathcal{B}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \alpha\mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(\alpha\mathcal{A}x_1) + \lambda_2(\alpha\mathcal{A}x_2) = \lambda_1\mathcal{B}x_1 + \lambda_2\mathcal{B}x_2.$$

*Что и требовалось доказать.*

### 3.6.4 Свойства умножения линейного оператора на число

**Свойство 3.12.**
$$1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

**Свойство 3.13.**
$$\alpha(\beta\mathcal{A}) = (\alpha\beta)\mathcal{A}.$$

**Свойство 3.14.**
$$(\alpha + \beta)\mathcal{A} = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{A}.$$

**Свойство 3.15.**
$$\alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \alpha\mathcal{A} + \alpha\mathcal{B}.$$

# Глава 4

# Дифференциальные уравнения

## 4.1 Основные определения

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если оно содержит производные от искомой функции только по одной переменной:

**Порядком** дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

**Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее искомую функцию, ее аргумент и первую производную от искомой функции:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{4.1}$$

где $y$ – искомая функция, $x$ – ее аргумент, а $y' = dy/dx$.

Если уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{4.2}$$

то уравнение (4.2) называется уравнением, **разрешенным относительно производной**, или уравнением **в нормальной форме**.

В некоторых случаях возникает необходимость использовать **перевернутое уравнение**:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{4.3}$$

В место двух уравнений (4.2) и (4.3) можно использовать одно уравнение, записанное в форме

$$dy - f(x, y)dx = 0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) содержит не производную искомой функции, а дифференциалы от ее аргументов. Это частый случай уравнения, записанного в дифференциалах. В общем случае **уравнение в дифференциалах** имеет вид:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{4.5}$$

В уравнениях (4.4) и (4.5) переменные $x$ и $y$ входят равноправно. Запись уравнения в виде (4.5) показывает, что при решении дифференциального уравнения первого порядка любую величину $x$ или $y$ можно рассматривать в качестве аргумента, а другую – принять за искомую функцию.

Уравнение **в симметрической форме** выглядит следующим образом:

$$\frac{dx}{M(x,y)} = \frac{dy}{N(x,y)}. \tag{4.6}$$

## 4.2 Задача Коши

Одной из важнейших задач в теории дифференциальных уравнений является так называемая задача Коши. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{4.7}$$

**задача Коши** или **начальная задача** ставится следующим образом: среди всех решений уравнения найти такое решение, которое будет удовлетворять условию:

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.8}$$

где $x_0$ и $y_0$ – некоторые заданные числа. При этом $y_0$ называется **начальным значением** искомой функции, а число $x_0$ – **начальным значением независимой переменной**. В целом же числа $x_0$ и $y_0$ называются **начальными данными**.

Задачу Коши **геометрически** можно сформулировать так: среди всех интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{4.9}$$

найти ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Задача Коши с начальными условиями $x_0$ и $y_0$ имеет **единственное решение**, если $\exists\lambda > 0$ такое, что в интервале $|x - x_0| \leq \lambda$ определено решение

$y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$. При этом не существует решения, определенного в этом же интервале и не совпадающего с решением $y = y(x)$ хотя бы в одной точке интервала $|x - x_0| \leq \lambda$, отличной от точки $x = x_0$.

**Теорема 4.1.** Непрерывная функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{4.10}$$

**Доказательство.** Докажем необходимость. Пусть $y = y(x)$ является решением задачи Коши, тогда справедливо тождество

$$y' = f(x, y).$$

Интегрируя это тождество в пределах от $x_0$ до $x$ и учитывая условие $x = x_0$ и $y = y_0$, получаем требуемое равенство (4.10).

Докажем достаточность. Так как функции $y = y(x)$ и $f(x, y)$ непрерывные, то правая часть равенства (4.10), а следовательно, и левая, будут непрерывно дифференцируемыми по $x$ функциями. Дифференцируя тождество (4.10) получаем, что функция $y = y(x)$ является решением уравнения задачи Коши. Если в равенстве (4.10) положить $x = x_0$, то увидим, что это уравнение также удовлетворяет условию.

*Что и требовалось доказать.*

# Глава 5

# Методы интегрирования уравнений в нормальной форме

## 5.1 Неполные уравнения

Дифференциальное уравнение в нормальной форме называется **неполным**, если его правая часть зависит только от одного аргумента. Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f(x), \tag{5.1}$$

где будем считать функцию $f(x)$ определенной и непрерывной на некотором интервале $(a, b)$.

Правая часть уравнения не зависит от искомой функции $y(x)$, поэтому область определения есть множество $D = (a, b) \times (-\infty, +\infty)$. Поскольку правая часть уравнения не зависит от переменной $y$, то выполнены условия теоремы Пикара и поэтому имеет место существования и единственность решения начальной задачи.

Преобразуем уравнение:

$$y' = f(x) \tag{5.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{5.3}$$

$$dy = f(x)dx \tag{5.4}$$

$$y = \int f(x)dx + C. \tag{5.5}$$

Полученная формула определяет общее решение исходного уравнения на множестве $R = \{x \in (a, b); |y| < \infty\}$. Особых решений $y$ исходного уравнения нет.

Если дополнительно задано начальное условие $y(x_0) = y_0$, то решение, удовлетворяющее этому условию, определяется формулой

$$y(x, x_0, y_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{5.6}$$

При фиксированном $x_0$ и произвольном $y_0$ эта формула определяет общее решение исходного уравнения на множестве $\mathbb{R}$ в форме Коши. Также из этой формы следует, что каждое решение уравнения определено на интервале $(a, b)$ и вся полоса $\mathbb{R}$ заполнена непересекающимися интегральными кривыми.

Предположим теперь, что для некоторого $\xi \in (a, b)$ будет $f(\xi) = \infty$. В окрестности этой точки рассмотрим тогда перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}. \tag{5.7}$$

Это уравнение определено при $x = \xi$, более того, очевидно, что прямая $x \equiv \xi$ – решение этого уравнения. Это решение может быть как частным, так и особым.

## 5.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка, допускающее приведение к виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0, \tag{5.8}$$

где $f_1(x), f_2(x)$ – известные функции лишь переменной $x$, а $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ – известные функции лишь переменной $y$, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения этого уравнения нужно произвести разделение переменных, т. е. преобразовать это уравнение так, чтобы при $dx$ стоял бы множитель, зависящий только от $x$, а при $dy$ стоял бы множитель, зависящий только от у. Для этого достаточно обе части уравнения разделить на произведение $f_2(x)\varphi_(y)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

Рассматривая для определенности в последнем равенстве $y$ как функцию переменной $x$, получим

$$\Big[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} \cdot y'\Big]dx = 0.$$

Отсюда, интегрируя по $x$, будем иметь

$$\int \Big[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}y'\Big]dx = C.$$

или

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C, \tag{5.9}$$

где $C$ – произвольная постоянная.

Кроме решений, даваемых формулой (5.9), уравнение (5.8) допускает решение, обращающие в ноль произведение $f_2(x)\varphi_1(y)$, т. е. являющиеся корнями уравнений $f_2(x) = 0$ или $\varphi_1(y) = 0$.

В самом деле, пусть $x = a$, где $f_2(a) = 0$, тогда $dx = 0$ (поскольку дифференциал константы $a$ равен нулю). Подставляя эту функцию в уравнение, получим

$$f_1(a)\varphi_1(y) \cdot 0 + f_2(a)\varphi_2(y)dy \equiv 0,$$

т. е. $x = a$ – решение уравнения (5.8). Аналогично можно показать, что функция $y = b$, где $\varphi_1(b) = 0$, является также решением уравнения (5.8). Геометрически эти решения, если они существуют, составляют собой прямые, параллельные осям координат.

## 5.3 Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется **однородной измерения** $\alpha$, если при любом значении $\lambda$ выполняется тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y). \tag{5.10}$$

В частности, многочлен

$$P(x,y) = \sum_{i,j} C_{ij}x^i y^i$$

представляет собой однородную функцию $n$-го измерения, если всего его члены имеют одно и тоже измерение, равное $n$, то есть, если $i + j = n$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{5.11}$$

называется **однородным**, если коэффициенты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ при дифференциалах переменных $x$ и $y$ однородные функции одного и того же измерения.

## 5.4 Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется **линейным**, если оно первой степени относительно неизвестной функции $y$ и ее производной $y'$ (или дифференциала $dy$) и не содержит произведения этих величин. В общем случае линейное уравнение имеет вид

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0, \tag{5.12}$$

где коэффициенты $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – данные непрерывные функции в некотором интервале $x \in (a, b)$.

Предполагая, что $\alpha(x) \neq 0$, и вводя обозначения

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \qquad q(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)},$$

уравнение (5.12) можно привести к нормальному виду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{5.13}$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в интервале $x \in (a, b)$.

Если $q(x) \equiv 0$, то линейное уравнение (5.13) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

## 5.5 Однородные уравнения

Функция $F(x, y)$ называется **однородной степени** $k$, если

$$\forall \lambda > 0 \implies F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y).$$

Примером однородной функции может служить любая форма (однородный многочлен) степени $k$.

Следующие функции являются однородными функциями степени $0$, $1$, $2$ и $k$ соответственно:

$$\frac{x-y}{x+y}; \quad \frac{x^2+xy}{x-y}; \quad x^2+y^2-xy; \quad x^{k-1}y+y^k.$$

Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ называется **однородным**, если $f(x,y)$ – однородная функция степени ноль.

Уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ является однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени. Замена $y=zx$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

## 5.6 Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x),$$

где $p(x)$, $q(x)$ – функции, непрерывные на $[a,b]$, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**. Его решение ищут в виде

$$y(x)=u(x)\cdot v(x),$$

где $u(x)$, $v(x)$ – две неизвестные функции. После подстановки в уравнение выражений для $y$ и $y'$ получаем

$$v\frac{du}{dx}+\Big(\frac{dv}{dx}+p(x)v\Big)u=q(x).$$

В качестве $v(x)$ выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx}+p(x)v=0.$$

Тогда функция $u(x)$ определяется из уравнения

$$v\frac{du}{dx}=q(x).$$

## 5.7 Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha \in R(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$, называется **уравнением Бернулли.** Путем подстановки $z = y^{1-\alpha}$ оно сводится к линейному. Его можно решать и непосредственно, применяя подстановку

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

## 5.8 Уравнение в полных дифференциалах

### 5.8.1 Определение

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. В этом случае уравнение можно записать в виде $du(x, y) = 0$, откуда следует, что соотношение $u(x, y) = C$ является его общим интегралом.

Выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

где $M$, $N$ – непрерывные функции вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой области $D$, есть **полный дифференциал** тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ во всей области $D$.

### 5.8.2 Решение уравнений

Рассмотрим пример. Пусть необходимо решить следующее уравнение:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Пусть

$$M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2, \qquad N(x, y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Так как
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$
то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Значит
$$Mdx + Ndy = du.$$
Следовательно
$$Mdx + Ndy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \implies \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по $x$, считая $y$ постоянной:
$$u(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 6y^2 * \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y),$$
где $\varphi(y)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция. Для полученной функции $u(x,y)$ найдем частную производную по $y$:
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y).$$
Объединим это уравнение и второе уравнение системы:
$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$
$$\varphi'(y) = 4y^3$$
$$\varphi(y) = y^4 + C.$$

Подставим $\varphi(y)$ в ранее найденную функцию $u(x,y)$:
$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения:
$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

## 5.9 Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

### 5.9.1 Определение

Общий вид дифференциальных уравнений высшего порядка:

$$F\Big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\Big) = 0.$$

Допускают понижение порядка следующие типы дифференциальных уравнений:

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается путем $n$-кратного интегрирования.
2. Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$, явно **не содержащее искомой функции** $y(x)$, сводят к уравнению первого порядка путем введения новой неизвестной функции $z = z(x)$. Полагая $y'(x) = z(x)$, $y''(x) = z'(x)$, уравнение принимает вид $F(x, z, z') = 0$.
3. Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$ явно **не содержащее независимой переменной** $x$, интегрируют с помощью подстановки $p = y'$, где $p = p(y)$ – новая не известная функция, зависящая от $y$. Тогда $y'' = p \cdot p'$. При этом порядок уравнение понижается на единицу.
4. Если левая часть дифференциального уравнения **есть точная производная** какой-либо функции, то порядок уравнения так же можно понизить.

### 5.9.2 Примеры точных производных

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)'; \qquad \frac{y''}{y'} = (\ln y')';$$
$$xy'' + y' = (xy')'; \qquad yy'' + (y')^2 = (yy')';$$
$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \Big(\frac{y'}{y}\Big)'.$$

## 5.10 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Чтобы решить ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{5.14}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{5.15}$$

и найти все его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (5.14) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня $\lambda_i$ уравнения (5.15) и слагаемых вида

$$(C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+3} x^2 + \ldots + C_{m+k} x^{k-1}) e^{\lambda x} \tag{5.16}$$

для каждого кратного корня $\lambda$ уравнения (5.15), где $k$ – кратность корня. Все $C_i$ – произвольные постоянные.

Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ имеет кратность $k$. Здесь $P_{k-1}$ и $Q_{k-1}$ – многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (5.16), их коэффициенты – произвольные постоянные.

Например, вид общего решения уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – различные и действительные корни, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – двукратный действительный корень, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряженные корни, общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

## 5.11 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x).$$

Общее решение этого уравнения равно сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, то есть

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x).$$

Решение однородного уравнения определяется также, как было описано ранее. Частное решение уравнения $\bar{y}(x)$ в случае, когда правая часть имеет специальный вид, определяется методом неопределенных коэффициентов. Правая часть специального вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – полиномы степеней $m$ и $n$ соответственно. Укажем вид частного решения дифференциального уравнения в двух случаях.

Первый случай: число $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения:

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x}(S_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x),$$

где $S_l$ и $R_l$ – полиномы степени $l = \max(m, n)$ с неопределенными коэффициентами.

Второй случай: число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности $k$:

$$\bar{y}(x) = x^k e^{\alpha x}(S_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x),$$

то есть частное решение приобретает множитель $x^k$.