

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Матрицы</b>	<b>3</b>
1.1	Определения . . . . .	3
1.2	Виды матриц . . . . .	3
1.3	Краткая запись различных видов матриц . . . . .	4
1.4	Линейные операции . . . . .	4
1.4.1	Сравнение матриц . . . . .	4
1.4.2	Сложение матриц . . . . .	5
1.4.3	Умножение матрицы на число . . . . .	5
1.4.4	Умножение матриц . . . . .	5
1.5	Свойства транспонирования матриц . . . . .	6
1.6	Присоединенная матрица . . . . .	7
1.7	Обратная матрица . . . . .	8



# Глава 1

## Матрицы

### 1.1 Определения

**Определение 1.1.1.** Матрица размером  $m \times n$  — таблица выражений, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

**Определение 1.1.2.** След матрицы — это сумма диагональных элементов матрицы. Операция взятия следа обозначается  $\text{tr}$ :

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; = (a_{ij}) \quad \text{tr} A = \sum_{i=1}^n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

### 1.2 Виды матриц

В зависимости от размерности, матрицы имеют названия, приведенные в следующей таблице.

Размерность	Название	Размерность	Название
$m \times n$	прямоугольная	$1 \times n$	матрица-строка
$n \times n$	квадратная	$m \times 1$	матрица-столбец

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ , образуют *главную диагональ матрицы*. Диагональ, соединяющая элементы  $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n1}$ , называется *побочной диагональю матрицы*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней (верхней) треугольной матрицей*:

$$\text{нижняя: } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \text{верхняя: } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единицам, называется *единичной*:

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\Theta_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A^T$ , у которой по отношению к матрице  $A$  элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к  $A$ :

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A'_{m \times n}.$$

Матрица, для которой справедливо равенство  $A = A^T$  называется *симметричной*.

### 1.3 Краткая запись различных видов матриц

Перечисленные выше основные виды матриц характеризуются определенными свойствами ее элементов. Введем *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

В таблице ниже приведены условия, с помощью которых можно выразить ранее приведенные свойства для квадратных матриц  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ).

Условие	Название	Условие	Название
$a_{ij} = 0$ при $i > j$	верхняя треугольная	$a_{ij} = \delta_{ij}$	единичная
$a_{ij} = 0$ при $i < j$	нижняя треугольная	$a_{ij} = 0$	нулевая
$a_{ij} = a_i \delta_{ij}$	диагональная	$a_{ij} = a_{ji}$	симметричная

## 1.4 Линейные операции

Рассмотрим операции, справедливые для матриц с размерностью  $m \times n$ .

### 1.4.1 Сравнение матриц

Две матрицы одинаковых размеров называются равными, если совпадают их элементы с одинаковыми индексами:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

### 1.4.2 Сложение матриц

Сложение матриц  $A + B$  есть операция нахождения матрицы  $C$ , все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойства сложения матриц:

- Коммутативность:  $A + B = B + A$
- Ассоциативность:  $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
- Сложение с нулевой матрицей:  $A + \theta = \theta + A = A$
- Существование противоположной матрицы:  $A + A^{-1} = 0$

### 1.4.3 Умножение матрицы на число

Умножение матрицы  $A$  на число  $\lambda \in \mathcal{K}$  заключается в построении матрицы  $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ .

Свойства умножения матриц на число:

- Ассоциативность:  $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$
- Дистрибутивность:  $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$ ;  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- Умножение на единицу:  $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

### 1.4.4 Умножение матриц

Умножение матриц — операция вычисления матрицы  $C$ , каждый элемент которой равен сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Количество столбцов в матрице  $A$  должно совпадать с количеством строк в матрице  $B$ . Если матрица  $A$  имеет размерность  $m \times n$ ,  $B$  —  $n \times k$ , то размерность их произведения  $AB = C$  есть  $m \times k$ .

Свойства умножения матриц:

- Некоммутативность (в общем случае):  $AB \neq BA$
- Ассоциативность:  $(AB)C = A(BC)$
- Коммутативность при умножении с единичной матрицей:  $AE = EA = A$
- Дистрибутивность:  $(A + B)C = AC + BC$ ;  $A(B + C) = AB + AC$
- Ассоциативность и коммутативность умножения на число:  $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

## 1.5 Свойства транспонирования матриц

### Свойство 1.5.1.

$$(A^T)^T = A$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} &\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A^T)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

*Что и требовалось доказать.*

### Свойство 1.5.2.

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \\ (A + B)^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{m2} + b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \\ A^T + B^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{m2} + b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Что и требовалось доказать.*

### Свойство 1.5.3.

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\lambda A)^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \lambda A^T = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{m1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Что и требовалось доказать.***Свойство 1.5.4.**

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

**Доказательство.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad B^T = D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \dots & d_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a_{ij} = c_{ji} \\ b_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} \end{cases}$$

$$A \cdot B = F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \dots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \dots & f_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \quad B^T \cdot A^T = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

$$g_{ji} = \sum_{\alpha=1}^k d_{j\alpha} c_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^k b_{\alpha j} a_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} b_{\alpha j} = f_{ij}$$

$$G = F^T \Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

*Что и требовалось доказать.*

## 1.6 Присоединенная матрица

**Определение 1.6.1.** Присоединенная матрица  $A^c$  — это транспонированная матрица алгебраических дополнений  $A_{ij}$  элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ :

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

**Теорема 1.6.1** (Аннулирование). Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, \quad (i \neq j); \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0, \quad (i \neq j).$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную матрицу  $A'$ , полученную из матрицы  $A$ , заменой  $j$ -ой строки  $i$ -ой строкой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{jk} A'_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение элемента некоторой строки не зависит от элементов этой строки (поскольку при вычислении алгебраического дополнения эта строка просто вычеркивается). Однако матрицы  $A$  и  $A'$  отличаются только  $j$ -ой строкой, следовательно,  $A_{jk} = A'_{jk}$ . Тогда

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}.$$

Поскольку матрица  $A'$  имеет две одинаковые строки, ее определитель равен нулю. Аналогично доказывается случай со столбцами.

*Что и требовалось доказать.*

## 1.7 Обратная матрица

**Определение 1.7.1.** Обратная матрица — это такая матрица  $A^{-1}$ , при умножении которой на исходную матрицу  $A$  получается единичная матрица  $E$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

**Определение 1.7.2.** Невырожденная матрица — это квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае матрица называется вырожденной.

**Теорема 1.7.1.** Для всякой невырожденной матрицы  $A$  существует единственная обратная матрица.