

Оглавление

1	Электрическое поле в вакууме	3
1.1	Электрический заряд	3
1.2	Закон сохранения электрического заряда	4
1.3	Квантование заряда	4
1.4	Носители электрического заряда	4
1.5	Электромагнитное поле	4
1.6	Закон Кулона	5
1.7	Напряженность электростатического поля	5
1.8	Силовые линии электростатического поля	5
1.9	Принцип суперпозиции	6
1.10	Макроскопический заряженный тело	6
1.11	Телесный угол	6
1.12	Поток вектора напряженности	7
1.13	Теорема Остроградского-Гаусса	8

Глава 1

Электрическое поле в вакууме

1.1 Электрический заряд

Определение 1.1.1. Электрический заряд — физическая величина, определяющая силу создаваемого им электрического взаимодействия. Единица измерения заряда в СИ — Кулон (Кл). Также заряд — это внутреннее свойство элементарных частиц, а также источник и объект действия электромагнитного поля;

Определение 1.1.2. Кулон — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 ампер за 1 секунду.

Все тела образованы из атомов или молекул, которые, в свою очередь, состоят из ядер и электронов, обладающих электрическим зарядом. Существует два типа зарядов, условно называемых *отрицательными* (электроны) и *положительными* (ядра атомов). Силы электрического взаимодействия связывают ядро и электроны в единую систему — атом.

Наименьший по величине электрический заряд (элементарный заряд), экспериментально обнаруженный в природе, — заряд электрона:

$$q_e = -e, \quad e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Положительный заряд атомных ядер образован входящими в их состав протонами. Заряд протона положителен и по величине равен заряду электрона $q_p = +e$. В каждом атоме суммы положительных и отрицательных зарядов равны по абсолютной величине, и поэтому обычно тела оказываются электронейтральными. Однако можно оторвать электроны от одних тел, которые становятся при этом положительно заряженными, и передать их другим телам, которые заряжаются отрицательно. Такие тела являются *макроскопически заряженными*. Электрический заряд любого тела кратен элементарному заряду e , т. е. изменяется дискретно на величину

$$\Delta q = \pm Ne, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Между заряженными телами возникают особые силы, называемые *электрическими силами*. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются.

Определение 1.1.3. Точечные заряды — это два заряженных тела настолько малых по сравнению с расстоянием между ними, что при дальнейшем уменьшении размеров этих тел и изменении их формы сила взаимодействия между ними *не будет изменяться* в пределах заданной точности измерений.

Определение 1.1.4. Пробный заряд — это точечный заряд, настолько малый, что его перемещение не вызывает перераспределения электрических зарядов на окружающих телах и поэтому не искажает исследуемое поле.

Определение 1.1.5. Электростатическое поле — это поле неподвижных зарядов.

1.2 Закон сохранения электрического заряда

В электрически изолированной системе сумма электрических зарядов остается неизменной:

$$\sum_i q_i = \text{const.}$$

1.3 Квантование заряда

Определение 1.3.1. Квантование заряда — это принцип, согласно которому заряд любого объекта является целым числом, кратным элементарному заряду.

Таким образом, заряд объекта может быть ровно $0e$, $1e$, $-1e$ или $2e$, но не $\frac{1}{2}e$ или $-3.8e$ (могут быть исключения из этого утверждения, в зависимости от того, как определяется «объект»; см. ниже). В этом и заключается причина терминологии «элементарный заряд»: подразумевается, что он является неделимой единицей заряда. При этом существует два известных вида **исключений** из неделимости элементарного заряда:

- **Кварки** имеют квантовый заряд, кратный $\frac{1}{3}e$. Однако кварки не могут быть изолированы, поскольку существуют только в группах. При этом стабильные группировки кварков (например, протон, состоящий из трех кварков) имеют заряды, кратные e . По этой причине либо $1e$, либо $\frac{1}{3}e$ может обоснованно считаться «квантом заряда», в зависимости от контекста.
- **Квазичастицы** не являются частицами как таковыми, а скорее возникающей сущностью в сложной материальной системе, которая ведет себя как частица.

1.4 Носители электрического заряда

Определение 1.4.1. Носители заряда — общее название подвижных частиц или квазичастиц, которые несут электрический заряд и способны обеспечивать протекание электрического тока. В зависимости от вещества носителями электрического заряда могут выступать различные частицы.

В металлах и веществах с металлическим типом проводимости носителями заряда являются **электроны**. В таких веществах один или несколько электронов внешних электронных оболочек атомов не связаны с окружающими атомами и могут упорядоченно перемещаться под действием электрического поля внутри кристалла или жидкости даже при температуре абсолютного нуля.

В электролитах, таких как соленая вода, носителями заряда являются **ионы**, которые представляют собой атомы или молекулы, которые приобрели или потеряли электроны, поэтому они электрически заряжены. Атомы, которые получили электроны, а потому они заряжены отрицательно, называются **анионами**, атомы, которые потеряли электроны, а потому они заряжены положительно, называются **катионами**.

Еще один вид носителя зарядов — это **дырки**. Они существуют в полупроводниках. Этот вид носителя зарядов называется квазичастицей, поскольку он как бы не существует, как частица, но при этом обладает всеми ее свойствами.

Дырка — это атом полупроводника, у которого в валентной зоне отсутствует электрон. Другими словами, существует «вакансия», которую может занять другой электрон. Атом с вакансией сам не перемещается внутри проводника, поскольку он привязан к кристаллической решетке. Однако вакансия может перемещаться по решетке полупроводника. Вакансия в данном атоме занимает электрон из валентной зоны соседнего атома. Таким образом, дырка перемещается из данного атома в соседний.

1.5 Электромагнитное поле

Оно обладает энергией и импульсом. Заряженное тело создает в пространстве вокруг себя *электромагнитное поле*. Это поле действует на помещенные в него заряды и токи. По представлениям

современной физики электромагнитное поле является один из видов материи.

1.6 Закон Кулона

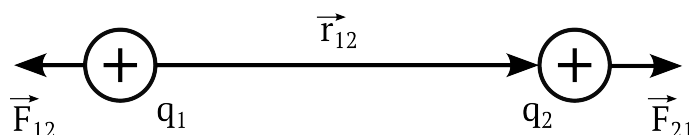
Сформулируем закон Кулона. Пусть имеются две заряженные частицы, причем

- q_1 и q_2 — величина зарядов;
- \vec{F}_{12} — сила, с которой действует заряд 1 на заряд 2;
- \vec{F}_{21} — сила, с которой действует заряд 2 на заряд 1;
- \vec{r}_{12} — вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2 и по модулю равный расстоянию между ними (r);

Тогда закон Кулона можно сформулировать следующим образом:

Определение 1.6.1. Сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в пустоте пропорциональна величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}.$$



Закон кулона применим, если в условии данной задачи заряды можно рассматривать как *точечные*.

Коэффициент пропорциональности k в СИ равен (здесь ε_0 — электрическая постоянная):

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2},$$

1.7 Напряженность электростатического поля

Определение 1.7.1. Напряженность электростатического поля — это векторная величина, характеризующая электрическое поле в данной точке. Напряженность является **силовой характеристикой поля**. Она равна отношению силы \vec{F} , действующей на неподвижный **пробный электрический заряд**, к величине этого заряда q :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad [E] = \text{В/м}.$$

1.8 Силовые линии электростатического поля

Особенности силовых линий:

- начинаются на положительных зарядах, оканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечность;
- не замкнуты;
- не пересекаются;
- густота линий прямо пропорциональна модулю напряженности.

1.9 Принцип суперпозиции

Определение 1.9.1. Напряженность электростатического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствии остальных:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i.$$

1.10 Макроскопических заряженное тело

Если распределение зарядов непрерывно, справедливы следующие формулы:

- Объемная плотность заряда:

$$\rho = \frac{dq}{dv}, \quad [\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}.$$

- Поверхностная плотность заряда:

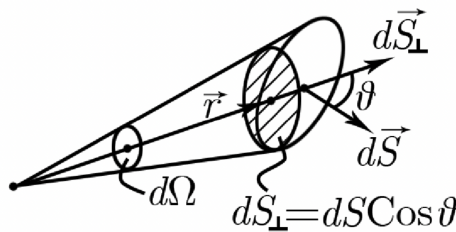
$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad [\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

- Линейная плотность заряда:

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad [\tau] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

1.11 Телесный угол

Определение 1.11.1. Пусть есть точка, из которой наблюдается бесконечно малая площадка, характеризующая вектором нормали $d\vec{S}$. Телесный конус, включающий в себя часть пространства, и есть телесный угол $d\Omega$:



Более формально, телесный угол — часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол).

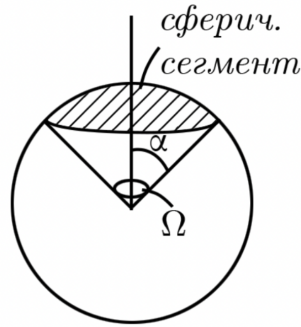
Телесный угол обозначается буквой Ω . Измеряется отношением площади той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса сферы:

$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2}, \quad [\Omega] = \text{стерадиан} = \text{ср},$$

где θ — угол между направлением вектора \vec{r} в эту точку и нормалью к площадке dS , в общем случае направленной к нему под углом. Тогда очевидно, что полная сфера образует **полный телесный угол**, равный

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ ср}.$$

Как посчитать телесный угол конуса, если α — угол образующей?



Телесный угол — полный аналог привычного угла на плоскости, который задается как отношение длины отмеренной им дуги l к радиусу окружности R :

$$\theta = \frac{l}{R}.$$

Телесный же угол находится в пространстве и задается как

$$\Omega = \frac{S_{\text{сф. сегм.}}}{R^2}.$$

Площадь сегмента шара равна

$$S_{\text{сф. сегм.}} = 2\pi RH, \quad H = R - R \cos \alpha,$$

где H — высота шарового сегмента. Значит телесный угол равен

$$\Omega = \frac{2\pi R^2(1 - \cos \alpha)}{R^2} 2\pi(1 - \cos \alpha).$$

Следовательно,

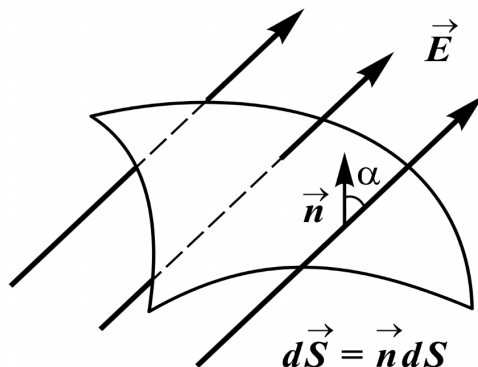
$$d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha.$$

1.12 Поток вектора напряженности

Определение 1.12.1. Элемент поверхности $d\vec{S}$ — это вектор, направленный перпендикулярно элементарной площадке dS и численно равный ее площади:

$$d\vec{S} = \vec{n}dS,$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к площадке dS в данной точке поверхности.



Определение 1.12.2. Поток вектора напряженности \vec{E} через малую площадку $d\vec{S}$ есть скалярное произведение векторов \vec{E} и $d\vec{S}$:

$$d\Phi = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = (\vec{E} \cdot d\vec{n})dS = E \cos \alpha dS = E_n dS,$$

где α — угол между векторами \vec{E} и \vec{n} , E_n — нормальная к поверхности dS составляющая вектора \vec{E} .

Определение 1.12.3. Поток вектора \vec{E} через произвольную поверхность S равен интегралу по поверхности:

$$\Phi = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS.$$

Поток вектора — величина скалярная. Если величина нормальной составляющей E_n поля остается постоянной на всей поверхности S , то поток равен

$$\Phi = E_n S.$$

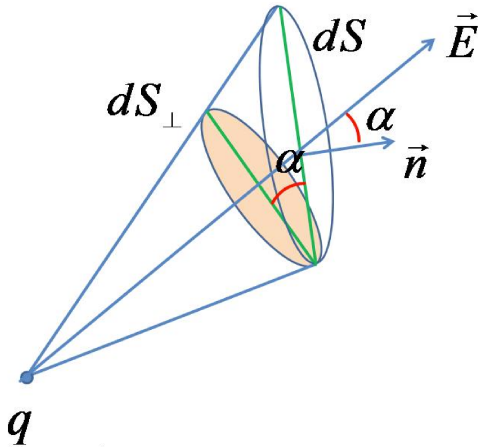
1.13 Теорема Остроградского-Гаусса

Теорема Остроградского-Гаусса позволяет связать поток вектора напряженности с величиной зарядов.

Теорема 1.13.1 (Остроградского-Гаусса). Поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемой этой поверхностью, деленной на ε_0 :

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i.$$

Доказательство.



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha$$

$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \Rightarrow dS \cos \alpha = r^2 d\Omega$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \int_S d\Omega = \frac{4\pi q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Что и требовалось доказать.

Поток напряженности равен нулю, если:

- полный заряд внутри поверхности равен нулю (все $q_i = 0$);
- поверхность не охватывает зарядов. ($d\Phi_1 = -d\Phi_2 \Rightarrow \Phi = 0$).

В случае, если заряды распределены непрерывно, теорема Остроградского-Гаусса записывается следующим образом:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где V — объем, охваченный гауссовой поверхностью S , ρ — объемная плотность заряда.