Численные методы математической физики

Лабораторная работа 2

Методы решения граничной задачи для ОДУ-2

Крачковский Даниил
5 группа

Преподаватель:
Будник Анатолий Михайлович

7 июня 2018 г.

Постановка задачи

Дана задача ОДУ-2:

$$((2-x)u'(x))' - xu(x) = sin(x) - 2cos(x), \qquad x \in [0,1]$$

$$2u'(0) = u(0) - 1$$

$$-u'(1) = tg(1)u(1)$$

Решить данную граничную задачу ОДУ-2 методом баланса и методом Ритца.

Алгоритм

Метод баланса

Запишем схему, плученную данным методом, аппроксимирующую нашу задачу:

$$\left(\frac{a_1}{h} - 1 + \frac{h}{2}d_0\right) y_0 + \left(\frac{a_1}{h}\right) y_1 = -\left(1 + \frac{h}{2}\varphi_0\right)$$

$$\left(\frac{a_i}{h^2}\right) y_{i-1} - \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{h^2} + d_i\right) y_i + \left(\frac{a_{i+1}}{h^2}\right) y_{i+1} = -\varphi_i \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$$\left(\frac{a_N}{h}\right) y_{N-1} + \left(-\frac{a_N}{h} + tg(1) + \frac{h}{2}d_N\right) y_N = \frac{h}{2}\varphi_N$$

где d_i, φ_i, a_i вычичляются по следующим формулам:

$$d_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} xdx \qquad \varphi_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2}(2cos(x) - sin(x))dx$$

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} xdx \qquad \varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}(2cos(x) - sin(x))dx \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$$a_i = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{2-x}\right)^{-1} \qquad i = \overline{1, N}$$

$$d_N = \frac{2}{h}\int_{1-h/2}^{1} xdx \qquad \varphi_N = \frac{2}{h}\int_{1-h/2}^{1}(2cos(x) - sin(x))dx$$

Решим образовавшуюся систему методом прогонки.

Метод Ритца

Запишем схему, плученную данным методом, аппроксимирующую нашу задачу:

$$\left(\frac{a_i}{h^2}\right) y_{i-1} - \left(\frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i\right) y_i + \left(\frac{a_{i+1}}{h^2}\right) y_{i+1} = -\varphi_i \qquad i = \overline{0, N}$$

где d_i, φ_i, a_i вычичляются по следующим формулам:

$$a_i = \frac{1}{h}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x_i - x)(x - x_{i-1})dx\right) \qquad i = \overline{1, N}$$

$$d_i = \frac{1}{h^2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1} - x)dx\right) \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$$d_0 = \frac{2}{h^2}\int_0^h q(x)(h - x)dx \qquad d_N = \frac{2}{h^2}\int_{1-h}^1 q(x)(x - 1 + h)dx$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h^2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)dx\right) \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{h^2}\int_0^h f(x)(h - x)dx \qquad \varphi_N = \frac{2}{h^2}\int_{1-h}^1 f(x)(x - 1 + h)dx$$

Решим образовавшуюся систему методом прогонки.

Результат

Средних:

```
h: 0.00894427190999916
n: 111
I: 0.6909220448382232
```

Симпсона:

```
h: 0.09306048591020996
n: 10
I: 0.47912965028132487
```

1 Листинг кода

```
import math


def f_x(x):
    p = 1.2
    return math.sqrt(p + x ** 2) / (1. + math.cos(p * x))


eps = 10. ** (-5)
max_f_2 = 3.
a = 0
b = 1

if __name__ == '__main__':
    h = math.sqrt(24.*eps/max_f_2)
    n = int(1. / h)
    I = h * sum(f_x(a + k*h) for k in range(0, n - 1))

    print('middle')
    print('h: {}'.format(h))
    print('n: {}'.format(n))
    print('I: {}'.format(I))
```

```
import math


def f_x(x):
    p = 1.2
    return math.sqrt(p + x ** 2) / (1. + math.cos(p * x))


eps = 10. ** (-5)
max_f_4 = 24.
a = 0
b = 1

if __name__ == '__main__':
    h = (180. * eps / max_f_4) ** (1./4.)
    n = int(1. / h)

    sum_1 = sum(f_x(a + (2*k - 1)*h) for k in range(1, int(n / 2)))
    sum_2 = sum(f_x(a + (2*k)*h) for k in range(1, int(n / 2) - 1))

    I = h / 3. * (f_x(a) + f_x(b) + 4 * sum_1 + 2 * sum_2)

    print('simpson')
    print('h: {}'.format(h))
    print('n: {}'.format(n))
    print('I: {}'.format(I))
```