Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/dt

Lista 4

Problem 1 Para $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, seja $f : kP^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big([z_0 : \dots : z_n]\Big) = \frac{\sum_{j=0}^{n} j|z_j|^2}{\sum_{j=0}^{n} |z_j|^2}.$$

Prove que f é uma função de Morse e calcule o índice de todos os pontos críticos de f para $k = \mathbb{R}$ e $k = \mathbb{C}$.

Solution. **(Caso $k = \mathbb{R}$.)** Fixe $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Consideremos a carta coordenada $\varphi_r([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n)$ definida em $U_r = \{x_r \neq 0\} = \{x_r = 1\}$. Nossa função fica

$$f \circ \varphi_r^{-1}(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{1 + \sum_{i \neq r} x_i^2}$$

Para facilitar notação defina $\vec{x} := (x_0, \dots, x_{r-1}, 1, x_{r+1}, \dots, x_n)$. A nossa função se escreve como

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{\|\vec{x}\|^2}$$

Derivemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) &= \frac{\|\vec{x}\|^2 \cdot 2 i x_i + \frac{\partial \|\vec{x}\|^2}{\partial x_i}\left(r + \sum_{j \neq r} i x_i^2\right)}{\|\vec{x}\|^4} \\ &= 2x_i \cdot \frac{i\|\vec{x}\|^2 + \left(r + \sum_{j \neq r} j x_j^2\right)}{\|\vec{x}\|^4}\end{aligned}$$

É claro que se $x_i = 0$ para toda i temos um ponto crítico, i.e. em $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$. (Note que não podemos ter outros pontos críticos, pois se $x_k \neq 0$ para alguma k, a derivada parcial nessa variável não pode se anular: o numerador do quociente é uma soma de números positivos!)

Derivando de novo e avaliando em $\vec{0}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 2\delta_{ij}(i + r), \qquad r \neq i, j$$

Isso fica pela regra do produto: obtemos a derivada de $2x_i$ multiplicada pelo quociente, somado com $2x_i$ multiplcado pela derivada do quociente. É só notar que, por um lado, a derivada de $2x_i$ respeito de x_j é $2\delta_{ij}$ e o lado direito avaliado em $\vec{0}$ da i. Por outro lado, a derivada do quociente em $\vec{0}$ se anula.

Então a matriz de segundas derivadas fica

$$2\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2+r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+r \end{pmatrix}$$

que é não singular e não tem autovalores negativos. Concluimos que os pontos $[0 : \ldots : \underbrace{1}_{r\text{-th place}} : \ldots : 0]$ são críticos de índice 0 para cada $r = 0, \ldots, n$.

(Caso $k = \mathbb{C}$**.)** Fixe $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos a carta coordenada $\varphi_r([z_0 : \ldots : z_n]) = (z_0, \ldots, \widehat{z_r}, \ldots, z_n)$ definida em $U_r = \{z_r \neq 0\} = \{z_r = 1\}$. Nossa função fica

$$f \circ \varphi_r^{-1}(z_0, \ldots, \widehat{z_r}, \ldots, z_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i z_i \overline{z_i}}{1 + \sum_{i \neq r} z_i \overline{z_i}}$$

Para facilitar notação defina $\vec{z} := (z_0, \ldots, z_{r-1}, 1, z_{r+1}, \ldots, z_n)$. A nossa função se escreve como

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(z_0, \ldots, \widehat{z_r}, \ldots, z_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i z_i \overline{z_i}}{\|\vec{z}\|^2}$$

Derivemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) &= \frac{\|\vec{z}\|^2 \cdot 2i\overline{z_i} + \frac{\partial \|\vec{z}\|^2}{\partial z_i}\left(r + \sum_{j \neq r} i z_i \overline{z_i}\right)}{\|\vec{z}\|^4} \\ &= 2\overline{z_i} \cdot \frac{i\|\vec{z}\|^2 + \left(r + \sum_{j \neq r} j z_j \overline{z_j}\right)}{\|\vec{z}\|^4} \end{aligned}$$

E analogamente

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) = 2z_i \cdot \frac{i\|\vec{z}\|^2 + \left(r + \sum_{j \neq r} j z_j \overline{z_j}\right)}{\|\vec{z}\|^4}$$

Como antes, a derivada só pode ser zero quando $z_i = 0 \iff \overline{z_i} = 0 \; \forall i$, i.e. no ponto $\vec{0} \in \mathbb{C}^n$.

Para calcular a Hessiana note que as parciais cruzadas $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$ são as únicas que podem sobrevivir! De fato, quando derivamos de novo y avaliamos em $\vec{0}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial z_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 2\delta_{ij}(i + r), \qquad r \neq i, j$$

Essa matriz é

$$
2\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & 0 & 1+r & 0 & \cdots & 0 \\
 & & 0 & & & 0 & 0 & 2+r & \cdots & 0 \\
 & & & & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & n+r \\
\hline
r & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
0 & 1+r & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 2+r & \cdots & 0 & & & 0 & & \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & n+r & & & & &
\end{array}\right)
$$

que é não singular e não tem autovalores negativos, concluindo, como no caso real, que os pontos $[0 : \ldots : \underbrace{1}_{r\text{-th place}} : \ldots : 0]$ são críticos não degenerados de índice 0.

$\square$