Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/dt

Lista 4

Problem 1 Para $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, seja $f : kP^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big([z_0 : \dots : z_n]\Big) = \frac{\sum_{j=0}^{n} j|z_j|^2}{\sum_{j=0}^{n} |z_j|^2}.$$

Prove que f é uma função de Morse e calcule o índice de todos os pontos críticos de f para $k = \mathbb{R}$ e $k = \mathbb{C}$.

Solution. **(Caso $k = \mathbb{R}$.)** Fixe $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Consideremos a carta coordenada $\varphi_r([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n)$ definida em $U_r = \{x_r \neq 0\} = \{x_r = 1\}$. Nossa função fica

$$f \circ \varphi_r^{-1}(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{1 + \sum_{i \neq r} x_i^2}$$

Para facilitar notação defina $\vec{x} := (x_0, \dots, x_{r-1}, 1, x_{r+1}, \dots, x_n)$. A nossa função se escreve como

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{\|\vec{x}\|^2}$$

Derivemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) &= \frac{\|\vec{x}\|^2 \cdot 2 i x_i + \frac{\partial \|\vec{x}\|^2}{\partial x_i}\Big(r + \sum_{j \neq r} i x_i^2\Big)}{\|\vec{x}\|^4} \\ &= 2x_i \cdot \frac{i\|\vec{x}\|^2 + \Big(r + \sum_{j \neq r} j x_j^2\Big)}{\|\vec{x}\|^4} \end{aligned}$$

É claro que se $x_i = 0$ para toda i temos um ponto crítico. Esse ponto é $p := (0, \dots, \underbrace{1}_{r\text{-th place}}, \dots, 0)$.

(Note que não podemos ter outros pontos críticos, pois se $x_k \neq 0$ para alguma k, a derivada parcial nessa variável não pode se anular: o numerador do quociente é uma soma de números positivos!)

Derivando de novo e avaliando em p:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_p = 2i\delta_{ij}$$

Isso fica pela regra do produto: obtemos a derivada de $2x_i$ multiplicada pelo quociente, somado com $2x_i$ multiplcado pela derivada do quociente. É só notar que, por um lado, a derivada de $2x_i$ respeito de x_j é $2\delta_{ij}$ e o lado direito avaliado em p da i. Por outro lado, a derivada do quociente em p se anula.

Então a matrix de segundas derivadas não tem autovalores negativos, e obtemos que os pontos $[0 : \ldots : \underbrace{1}_{r\text{-th place}} : \ldots : 0]$ são críticos de índice 0 para toda $r = 0, \ldots, n$.

$\square$