Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/dt

Topologia Diferencial

1 Aula 1

Função suave. Espaço tangente.

2 Aula 2

2.1 Lembre

Dada uma variedade suave M. Definimos como velocidades de curvas ou como derivações: T_pM é um espaço vetorial de dimensão n, onde para $p \in U$, (U,φ) carta, $\varphi = (x^1, \dots, x^n$ com base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$. O ***espaço cotangente*** é

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \mathsf{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

A base dual é $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ dada por

$$dx^i|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\Big|_p = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

e ai extendemos por linearidade a todos os demais covetores.

Remark Note que mudando de carta a gente muda de base—não tem uma base canônica do espaço cotantente.

2.2 Fórmula de mudança de bases

Fórmula de mudança de bases (Exercício) $(U,\varphi), (V,\psi), p \in U \cap V$, $\varphi = (x^1, \dots, x^n$, $\psi(y^1, \dots, y^n$ com bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}, \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_p \right\},$$

mostre que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

2.3 Fibrado tangente

M variedade,

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

Note que para toda carta (U, φ) existe uma bijeção

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ \big(p, (v_1, \ldots, v_n)\big) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

usando essa bijeção, topologizamos TM. Mas ainda, induz uma estrutura de variedade topológica com cartas dadas pelas ϕ. Mas exatamente, as cartas são

$$\begin{aligned} \phi_{(U,\varphi)} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \sum v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p &\longmapsto \big(\varphi(p), (v_i)\big) \end{aligned}$$

e a mudança de coordenadas também é C^∞, i.e. esa estrutura é diferenciável.

Remark Se variedade é C^k, o fibrado tangente é C^{k-1}.

A gente vai fazer isso mesmo com o fibrado cotangente:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

O mesmo procedimento mostra que T^*M é uma C^∞-variedade de dimensão $2n$.

Remark Para todo $p \in M$ existe $U \ni p$ vizinhança tal que $\pi_1(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$. Mas $TM \ncong M \times \mathbb{R}^n$ em geral; nesse caso dizemos que M é ***paralelizável***.

Casos onde $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$

1. $M \cong \mathbb{R}^n$, $TM \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
2. $M = S^1$, $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$.
3. M 3-variedade orientável, então $TM \cong M \times \mathbb{R}^3$. (Difícil mas verdadeiro.) **Hint.** Usando quaternios não é difícil obter uma base global.

2.4 Imersões e mergulhos

Até agora definimos funções suaves, mas não o que é a diferencial delas.

Definition M, N variedades suaves e $f : M \to N$ suave. A ***derivada de*** f é

$$Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N,$$

uma aplicacão linear que pode ser definida usando a definição do espaço tangente de curvas ou de derivações. Se pensamos que v é uma clase de equivalência de curvas, $Df_p[\gamma] = [f \circ \gamma]$. Se $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é uma derivação, a definição é o pus rward

$$\begin{aligned} Df_p v : C^\infty(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (Df_p v)g &\longmapsto v(g \circ f). \end{aligned}$$

Tem outra forma de definir, que usando cartas coordenadas, onde Df_p está dada como uma matriz em termos das bases locais: em cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ de p e $f(p)$, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\psi = (y^1, \dots, y^n)$. A notação fica

$$Df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^j}|_p \frac{\partial}{\partial y^i}|_{f(p)}$$

onde $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$ é definida como

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1})$$

Definition (Imersão) Seja $f : M \to N$ uma função suave. f é uma ***imersão em*** p se a derivada Df_p é injetiva. f é uma ***submersão em*** p se Df_p é sobrejetiva. f é um ***mergulho*** se é uma imersão injetiva tom inversa $g : f(M) \to M$ contínua.

Example O exemplo mas fácil é o caso das incusões em variedades produto:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow M \times N \\ p &\longmapsto (p, q) \end{aligned}$$

E as projecões:

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M \\ (p, q) &\longmapsto p \end{aligned}$$

Outros exemplos de submersões são as projeções dos fibrados tangente e cotangente.

Para ver por que na definição de mergulho pedimos que a inversa seja contínua, considere o seguinte contraexemplo: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva que tem um ponto límite demais: a topologia no domínio é uma linha, mas a topologia no contradomínio e de um outro espaço, mas f é um mergulho injetivo! A inversa de f não é contínua (não manda limites em limites).

Remark Se $f : M \to N$ é um mergulho, então $f(M)$ herda uma estrutura de variedade diferenciável e f é um difeomorfismo entre M e $f(M)$.

Upshot Merhulo são as treis condições que precisamos para que a imagem de $f(M)$ tenha estrutura diferenciável e f um difeomorphismo entre M e $f(M)$. O lance é usar o teorema da função inversa. $f(M)$ é chamada de uma ***subvariedade*** de N.

Uma definição alternativa de ***subvariedade*** é que para cada ponto $p \in Q \subset M$, Q subespaço topológico, existe uma carta de N tal que $\varphi(U \cap Q) = \mathbb{R}^k$. (Misha's). Tem uma terceira definição: Q é a imagem de um mergulho; para isso pode usar a inclusão como o mergulho. In Misha's handouts:

Exercise 2.23 Let N_1, N_2 be two manifolds and let $\varphi_i : N_i \to M$ be smooth embeddings. Suppose that the image of N_1 coincides with that of N_2. Show that N_1 and N_2 are isomorphic.

Remark 2.10 By the above problem, in order to define a smooth structure on N, it sufficies to embed N into $\mathbb{R}^n$. As it will be clear in the next handout, every manifold is embeddable into $\mathbb{R}^n$ (assuming it admits partition of unity). Therefore, in place of a smooth manifold, we can use "manifolds that are smoothly embedded into $\mathbb{R}^n$".

Notação Se $f : M \to N$ é uma imersão escrevemos $M \looparrowright N$, se é mergulho $M \hookrightarrow N$ e se é submersão $f : M \twoheadrightarrow N$.

Uma ***subvariedade imersa*** é a imagem de uma imersão (que pode nem ser variedade...)

Remark $Q \subset M$ subvariedade, então existe uma inclusão natural $T_qQ \subset T_qM$ (linear injetiva) para todo $q \in Q$. Claro, a derivada da inclusão $\iota : Q \to M$, i.e. $D\iota_q : T_qQ \to T_qM$.

kj Dado $q \in Q$, existe (U, φ) carta de M tal que $\varphi|_{U \cap Q}$ é uma carta de Q, é só botar a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ dentro da base de M.

Valores regulares

Definition Seja $f : M \to N$ C^∞, um ponto $y \in N$ é dito ***valor regular*** se f é uma submersão em x para todo $x \in f^{-1}(y)$ i.e. Df_x é sobrejetiva para todo $x \in f^{-1}(y)$.

Theorem (Do valor regular) Se y é um valor regular de f, então $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de M de dimensão $\dim M - \dim N$. (Se $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.)

Remark Isso é só outra encarnação do teorema da função implícita.

Proof. $x \in f^{-1}(y) := Q$. Pega cartas φ de x e ψ de y. Supondo que $f(U) \subset V$, e que x, y tem coordenadas 0.

$$\begin{tikzcd} U \subset M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \subset N \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\Phi:\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Note que $\Phi(0) = 0$ e que $\Phi^{-1}(0) = \varphi(f^{-1}(y) \cap U)$.

Claim $\Phi^{-1}(0)$ é uma subvariedade.

Para tudo ficar claro vamos reescrever o teorema de função implícita. $\Phi'(0)$ é sobrejetiva. Temos que

$$\begin{aligned} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ z &\longmapsto \Phi(z) \end{aligned}$$

A ideia é que existe uma vizinhança W de $0 \in \mathbb{R}^m$ e um difeomorfismo $\eta : W \to W^{\smile}$ tal que

$$\begin{aligned} \phi \circ \eta : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

□

2.5 Fibrados vetoriais

Um fibrado vetorial é uma coisa que generaliza os fibrados tangente e cotangente.

Definition Sejam E, M variedades e $\pi : E \to M$ submersão sobrejetiva. Dizemos que π é um ***fibrado vetorial*** se para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = E_p$ possui uma estrutura de espaço vetorial tal que para todo $p \in M$ existe $U \ni p$ aberto e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

e

$$\varphi|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo.

Example $TM, T^*M, TM \oplus TM, TM \otimes TM, \Lambda^k(TM), \Lambda^k(T^*M), \mathrm{Sym}^k(TM)$.

2.6 Seções

Definition Uma ***seção*** de $\pi : E \to M$ é $s : M \to E$ suave tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"', shift right] \\ M \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Uma seção de TM é uma função $X : M \to TM$ tal que $X(p) \in T_pM$, um ***campo vetorial***.

Theorem (da bola cabeluda) $M = S^n$, n par, $X : M \to TM$ campo vetorial, então existe $p \in M$ tal que $X(p) = 0 \in T_pM$.

Notação $\Gamma(E) = \{\text{seções de } \pi : E \to M\}, \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M), \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M), \Gamma(\Lambda^k(T^*M)) = \Omega^k(M)$.

Para qualquer espaço vetorial V,

$$\mathsf{Sym}^2(V^*) = \{f : V \times V \to \mathbb{R}, \text{ bilinear, } f(x, y) = f(y, x)\} \subset V^* \otimes V^*.$$

E para fibrado vetorial E,

$$\mathsf{Sym}^2(E) = \bigsqcup_{p \in M} \mathsf{Sym}^2(E_p^*).$$

Definition Uma ***métrica Riemanniana*** em E é uma seção $s : M \to \mathsf{Sym}^2(E)$ tal que $s(p) : E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ é positiva definida, i.e. $s(p)(x, x) > 0$ se $x \neq 0$.

Remark (Aprox.) Todo fibrado vetorial tem uma métrica Riemanniana: usando a métrica euclidiana dada em cada carta, usamos uma partição da unidade para extender a uma seção global, somar e notar que fica positiva definida.

É muito fácil construir seções do fibrado cotangente: para $f \in C^\infty(M)$, a diferencial $df : M \to T^*M$ é uma seção do fibrado cotangente, i.e. $df \in \Gamma(T^*M)$ porque

$$df_p = Df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$$

Exercise Qualquer seção é um mergulho de M em E.

Extra g uma métrica Riemanniana em TM.

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g_p^\sharp : T_pM &\longrightarrow T_p^*M \\ v &\longmapsto g(v, \cdot) \end{aligned}$$

Então o ***gradiente*** de f é

$$(g_p^\sharp)^{-1}(df_p) := \mathsf{grad}_p\, f$$