Topologia diferencial 2025, Lista 4

Professor: Vinicius Ramos

Entrega dia 27/02

Problema 1: Para $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, seja $f : kP^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f([z_0 : \cdots : z_n]) = \frac{\sum_{j=0}^n j|z_j|^2}{\sum_{j=0}^n |z_j|^2}.$$

Prove que f é uma função de Morse e calcule o índice de todos os pontos críticos de f para $k = \mathbb{R}$ e $k = \mathbb{C}$.

Problema 2: Seja m um número inteiro positivo e $f : \mathbb{C}P^1 \to R$ definida por

$$f([z_0 : z_1]) = \frac{|z_0^m + z_1^m|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)^m}.$$

Determine para quais valores de m a função f é de Morse e calcule o índice de todos os seus pontos críticos.

Problema 3: Assumindo a classificação das superfícies compactas sem bordo, classifique as superfícies compactas com bordo a menos de difeomorfismo.

Problema 4: Seja $m < n$ e sejam $\mathbb{C}P^m \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}P^{n-m} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ as inclusões naturais. Prove que $I(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^{n-m}) = 1$, onde um espaço projetivo complexo tem a orientação induzida como quociente de uma esfera de dimensão ímpar. Mostre que vale um resultado similar para espaços projetivos reais usando a versão mod 2 de I.

Problema 5 (extra): Sejam p, q inteiros positivos relativamente primos. O espaço lenticular $L(p, q)$ é definido como o quociente de $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ pela ação de $\mathbb{Z}/p$ gerada por

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i/p} \cdot z_1, e^{2\pi iq/p} \cdot z_2).$$

Mostre que $L(p, q)$ é uma variedade e construa um diagrama de Heegaard para ela.