Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/dt

Topologia Diferencial

Índice

1 Aula 1

1.1 Plano do curso, bibliografia

Cronograma

0. Revisão de variedades.
1. Transversalidade: Sard, top. forte, fraca, aproximação.
2. Teoria da interseção e indice.
3. Teoria de Morse.
4. Tópicos adicionais (possiveis): h-cobordismo, top. de baixa dimensão, Poincaré $n \geqslant 5$.

Bibliografía: [Mil65] (intuição), [GP10] (tranqui, tem muito), [Hir12] (pesado, tem tudo, e importante ler, usa Análise Funcional).

1.2 Resumo da aula 1

1. Revisão de vriedades, espaço topológico, 2-enumerável, 2-contável, Hausdorff, loc. euclidiano, dimensão é fixa nas componentes conexas, def. de carta, atlas, atlas C^k, atlas maximal. **Obs.** Existem atlas que não contém sub atlas C^k.
2. **Teorema.** $k = 1, \dots, +\infty$ tuda C^k-variedade é C^k-difeomorfa a uma C^∞-variedade.
3. **Teorema.** $1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant +\infty$, se M, N são C^k-variedades, C^ℓ-difeomorfas, então M e N são C^k-difeomorfas. No será ℓ?
4. **Partições da unidade**. Definição. **Exercício:** toda variedade topológica é paracompacta. **Teorema:** M variedade C^∞ e $\{U_i\}$ cobertura, então existe C^∞ partição da unidade subordinada.

2 Aula 2

2.1 Lembre

Dada uma variedade suave M. Definimos como velocidades de curvas ou como derivações: T_pM é um espaço vetorial de dimensão n, onde para $p \in U$, (U, φ) carta, $\varphi = (x^1, \dots, x^n$ com base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$. O ***espaço cotangente*** é

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

A base dual é $\left\{ dx^1|_p, \dots, dx^n|_p \right\}$ dada por

$$dx^i|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)\Big|_p = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

e ai extendemos por linearidade a todos os demais covetores.

Observação Note que mudando de carta a gente muda de base—não tem uma base canônica do espaço cotantente.

2.2 Fórmula de mudança de bases

Fórmula de mudança de bases (Exercício) $(U, \varphi), (V, \psi), p \in U \cap V$, $\varphi = (x^1, \dots, x^n$, $\psi(y^1, \dots, y^n$ com bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}, \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_p \right\},$$

mostre que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

2.3 Fibrado tangente

M variedade,

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM.$$

Note que para toda carta (U,φ) existe uma bijeção

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ \big(p,(\nu_1,\dots,\nu_n)\big) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

usando essa bijeção, topologizamos TM. Mas ainda, induz uma estrutura de variedade topológica com cartas dadas pelas ϕ. Mas exatamente, as cartas são

$$\begin{aligned} \phi_{(U,\varphi)} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \sum \nu_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p &\longmapsto \big(\varphi(p),(\nu_i)\big) \end{aligned}$$

e a mudança de coordenadas também é C^∞, i.e. esa estrutura é diferenciável.

Observação Se variedade é C^k, o fibrado tangente é C^{k-1}.

A gente vai fazer isso mesmo com o fibrado cotangente:

$$T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M.$$

O mesmo procedimento mostra que T^*M é uma C^∞-variedade de dimensão $2n$.

Observação Para todo $p \in M$ existe $U \ni p$ vizinhança tal que $\pi_1(U) \cong U\times\mathbb{R}^n$. Mas $TM \ncong M\times\mathbb{R}^n$ em geral; nesse caso dizemos que M é ***paralelizável***.

Casos onde $TM \cong M\times\mathbb{R}^n$

1. $M \cong \mathbb{R}^n$, $TM \cong \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.
2. $M = S^1$, $TS^1 \cong S^1\times\mathbb{R}$.
3. M 3-variedade orientável, então $TM \cong M\times\mathbb{R}^3$. (Difícil mas verdadeiro.) **Hint.** Usando quaternios não é difícil obter uma base global.

2.4 Imersões e mergulhos

Até agora definimos funções suaves, mas não o que é a diferencial delas.

Definição M, N variedades suaves e $f : M\to N$ suave. A ***derivada de*** f é

$$Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N,$$

uma aplicacão linear que pode ser definida usando a definição do espaço tangente de curvas ou de derivações. Se pensamos que v é uma clase de equivalência de curvas, $Df_p[\gamma] = [f \circ \gamma]$. Se $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é uma derivação, a definição é o pus rward

$$\begin{aligned} Df_p v : C^\infty(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (Df_p v)g &\longmapsto v(g \circ f). \end{aligned}$$

Tem outra forma de definir, que usando cartas coordenadas, onde Df_p está dada como uma matriz em termos das bases locais: em cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ de p e $f(p)$, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\psi = (y^1, \dots, y^n)$. A notação fica

$$Df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j}|_p \frac{\partial}{\partial y^i}|_{f(p)}$$

onde $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$ é definida como

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1})$$

Definição Seja $f : M \to N$ uma função suave. f é uma ***imersão em*** p se a derivada Df_p é injetiva. f é uma ***submersão em*** p se Df_p é sobrejetiva. f é um ***mergulho*** se é uma imersão injetiva tom inversa $g : f(M) \to M$ contínua.

Exemplo O exemplo mas fácil é o caso das incusões em variedades produto:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow M \times N \\ p &\longmapsto (p, q) \end{aligned}$$

E as projecões:

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M \\ (p, q) &\longmapsto p \end{aligned}$$

Outros exemplos de submersões são as projeções dos fibrados tangente e cotangente.

Para ver por que na definição de mergulho pedimos que a inversa seja contínua, considere o seguinte contraexemplo: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva que tem um ponto límite demais: a topologia no domínio é uma linha, mas a topologia no contradomínio e de um outro espaço, mas f é um mergulho injetivo! A inversa de f não é contínua (não manda limites em limites).

Observação Se $f : M \to N$ é um mergulho, então $f(M)$ herda uma estrutura de variedade diferenciável e f é um difeomorfismo entre M e $f(M)$.

Upshot Merhulo são as treis condições que precisamos para que a imagem de $f(M)$ tenha estrutura diferenciável e f um difeomorphismo entre M e $f(M)$. O lance é usar o teorema da função inversa. $f(M)$ é chamada de uma ***subvariedade*** de N.

Uma definição alternativa de ***subvariedade*** é que para cada ponto $p \in Q \subset M$, Q subespaço topológico, existe uma carta de N tal que $\varphi(U \cap Q) = \mathbb{R}^k$. (Misha's) In Misha's handouts:

Exercise 2.23 Let N_1, N_2 be two manifolds and let $\varphi_i : N_i \to M$ be smooth embeddings. Suppose that the image of N_1 coincides with that of N_2. Show that N_1 and N_2 are isomorphic.

Remark 2.10 By the above problem, in order to define a smooth structure on N, it sufficies to embed N into $\mathbb{R}^n$. As it will be clear in the next handout, every manifold is embeddable into $\mathbb{R}^n$ (assuming it admits partition of unity). Therefore, in place of a smooth manifold, we can use "manifolds that are smoothly embedded into $\mathbb{R}^n$".

Notação Se $f : M \to N$ é uma imersão escrevemos $M \looparrowright N$, se é mergulho $M \hookrightarrow N$ e se é submersão $f : M \twoheadrightarrow N$.

Uma ***subvariedade imersa*** é a imagem de uma imersão (que pode nem ser variedade...)

Observação $Q \subset M$ subvariedade, então existe uma inclusão natural $T_qQ \subset T_qM$ (linear injetiva) para todo $q \in Q$. Claro, a derivada da inclusão $\iota : Q \to M$, i.e. $D\iota_q : T_qQ \to T_qM$.

kj Dado $q \in Q$, existe (U, φ) carta de M tal que $\varphi|_{U \cap Q}$ é uma carta de Q, é só botar a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ dentro da base de M.

2.4.1 Valores regulares

Definição Seja $f : M \to N$ C^∞, um ponto $y \in N$ é dito ***valor regular*** se f é uma submersão em x para todo $x \in f^{-1}(y)$ i.e. Df_x é sobrejetiva para todo $x \in f^{-1}(y)$.

Teorema (Do valor regular) Se y é um valor regular de f, então $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de M de dimensão $\dim M - \dim N$. (Se $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.)

Observação Isso é só outra encarnação do teorema da função implícita.

Demostração. $x \in f^{-1}(y) := Q$. Pega cartas φ de x e ψ de y. Supondo que $f(U) \subset V$, e que x, y tem coordenadas 0.

$$\begin{tikzcd} U \subset M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \subset N \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\Phi : \psi \circ f \circ \varphi^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Note que $\Phi(0) = 0$ e que $\Phi^{-1}(0) = \varphi(f^{-1}(y) \cap U)$.

Afirmação $\Phi^{-1}(0)$ é uma subvariedade.

Para tudo ficar claro vamos reescrever o teorema de função implícita. $\Phi'(0)$ é sobrejetiva. Temos que

$$\begin{aligned} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ z &\longmapsto \Phi(z) \end{aligned}$$

A ideia é que existe uma vizinhança W de $0 \in \mathbb{R}^m$ e um difeomorfismo $\eta : W \to W^{\smile}$ tal que

$$\begin{aligned} \phi \circ \eta : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

□

2.5 Fibrados vetoriais

Um fibrado vetorial é uma coisa que generaliza os fibrados tangente e cotangente.

Definição Sejam E, M variedades e $\pi : E \to M$ submersão sobrejetiva. Dizemos que π é um ***fibrado vetorial*** se para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = E_p$ possui uma estrutura de espaço vetorial tal que para todo $p \in M$ existe $U \ni p$ aberto e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

e

$$\varphi|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo.

Exemplo $TM, T^*M, TM \oplus TM, TM \otimes TM, \Lambda^k(TM), \Lambda^k(T^*M), \mathrm{Sym}^k(TM)$.

2.6 Seções

Definição Uma ***seção*** de $\pi : E \to M$ é $s : M \to E$ suave tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] \\ M \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Uma seção de TM é uma função $X : M \to TM$ tal que $X(p) \in T_pM$, um ***campo vetorial***.

Teorema (da bola cabeluda) $M = S^n$, n par, $X : M \to TM$ campo vetorial, então existe $p \in M$ tal que $X(p) = 0 \in T_pM$.

Notação $\Gamma(E) = \{\text{seções de } \pi : E \to M\}, \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M), \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M), \Gamma(\Lambda^k(T^*M)) = \Omega^k(M)$.

Para qualquer espaço vetorial V,

$$\mathrm{Sym}^2(V^*) = \{f : V \times V \to \mathbb{R}, \text{ bilinear}, f(x,y) = f(y,x)\} \subset V^* \otimes V^*.$$

E para fibrado vetorial E,

$$\mathrm{Sym}^2(E) = \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{Sym}^2(E_p^*).$$

Definição Uma ***métrica Riemanniana*** em E é uma seção $s : M \to \mathrm{Sym}^2(E)$ tal que $s(p) : E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ é positiva definida, i.e. $s(p)(x,x) > 0$ se $x \neq 0$.

Observação (Aprox.) Todo fibrado vetorial tem uma métrica Riemanniana: usando a métrica euclidiana dada em cada carta, usamos uma partição da unidade para extender a uma seção global, somar e notar que fica positiva definida.

É muito fácil construir seções do fibrado cotangente: para $f \in C^\infty(M)$, a diferencial $df : M \to T^*M$ é uma seção do fibrado cotangente, i.e. $df \in \Gamma(T^*M)$ porque

$$df_p = Df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$$

Exercício Qualquer seção é um mergulho de M em E.

Mais uma g uma métrica Riemanniana em TM.

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g_p^\sharp : T_pM &\longrightarrow T_p^*M \\ v &\longmapsto g(v, \cdot) \end{aligned}$$

Então o ***gradiente*** de f é

$$(g_p^\sharp)^{-1}(df_p) := \mathrm{grad}_p\, f$$

3 Aula 3: Teorema de Sard

Teorema da função implícita (aula pasada)

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suave tal que $f(0) = 0$ e $f'(0)$ é sobrejetiva ($\implies n \geqslant m$). Então existe uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ U e $\tilde{U}$ **e um difeomorfismo** $\varphi : U \to \tilde{U}$ tal que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Demostração. Parecido à prova de [Tu10] no teorema do valor regular, usando uma matrix com um $*$, a identidade, e uma matriz invertível. $\square$

3.1 Transversalidade: Teorema de Sard

A prova do teorema de Sard é muito técnica. Porém, a parte difícil é só análise em $\mathbb{R}^n$.

Pegue $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, defina um ***cubo*** como sendo

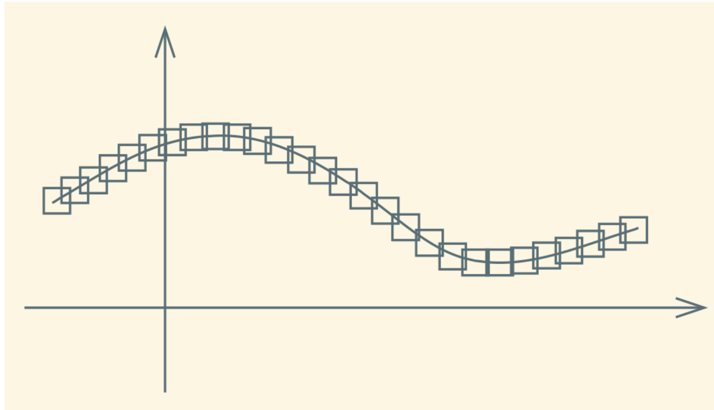
$$c(a, b) = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^n.$$

Note que $\mathrm{Vol}(a, b) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

What [Lee13] does

1. A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero.
2. Graph of continuous function has measure zero.
3. Affine subspaces of $\mathbb{R}^n$ have measure zero.
4. Smooth map from manifold to $\mathbb{R}^n$ maps measure zero to measure zero.
5. A set in a manifold has ***measure zero*** if it(s intersection with the respective domain) is mapped to a set of measure zero by any chart.
6. Confusing lemma.
7. Complement of zero measure is dense (in manifolds).
8. Smooth map *of manifolds* maps measure zero to measure zero.
9. Sard's theorem (heavy proof): critical value set of smooth map has measure zero.
10. Corollary **(minisard)**: image of smaller dimension manifolds under smooth map has measure zero. Corollary 2: smaller dimension immersed submanifolds have measure zero.
11. Up next: Whitney embedding theorem.

Definição



$S \subset \mathbb{R}^n$ possui ***medida nula*** se $\forall \varepsilon > 0$ existe $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ cubos (ou bolas) tais que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(c_i) < \varepsilon$$

Proposição

1. Uma união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 e $S \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula, então $f(S)$ tem medida nula.

Demostração.

1. $\{S_i\}$ enumerável de medida nula, para cada i você pode escolher cubos $C_1^i, C_2^i, \ldots$ que cobren S_i e tal que a soma dos volumes deles é menor do que $\sum_j \mathrm{Vol}(C_j^i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Vai ver que a soma dos volumeis variando tanto i como j da ε.
2. (Foto)

$\square$

Definição X variedade diferenciável. $S \subset X$. Dizemos que S tem ***medida nula*** se $\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ cobertura aberta de S, i.e. $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supset S$, e cartas $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ e $S_i \subset U_i$ e $\varphi(S)$ tem medida nula.

O más bien: sólo el chiste es que cada conjunto tiene medida en $\mathbb{R}^n$ cuando proyectas con cualquier carta.

Corolário

1. $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$. $S_i \subset X$ medida nula, entao $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ tem medida nula.
2. X^n, Y^n variedades, $f : X \to Y$ suave, $S \subset X$ medida nula. Então $f(S)$ tem medida nula.

Proposição Y^n variedade, $X^m \subset Y^n$ subvariedade de dimensão $m < n$. Então X tem medida nula.

Demostração. É simplesmente levar para $\mathbb{R}^n$: considera X_i como a parte de X que está den'de cada U_i no atlas de Y e vai ver que ele tem dimensão menor. Daí é só provar que subespaços (acho que lineares) de dimensão menor em $\mathbb{R}^n$ tem dimensão menor. $\square$

Corolário (Minisard) X^m, Y^n variedades $m < n$ e $f : X \to Y$ suave. Então $f(X)$ tem medida nula.

Demostração. Aqui se usa o corolário: usar a inclusão $\iota : X \to X \times \mathbb{R}^{n-m}, x \mapsto (x, 0)$, compor com $\tilde{f} : X \times R^{n-m} \to Y$, $(x, y) \mapsto f(x)$. Então $\tilde{f}(i(X)) = f(X)$. O lance é que $\iota(X)$ é uma subvariedade de codimensão positiva, então pela prop anterior tem medida nula. Daí $f(X)$ também. $\square$

Corolário (Versão fácil do teorema de mergulho de Whitney) Se X^n variedade diferenciável compacta, então existem

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}, \qquad X \overset{\circ}{\longrightarrow} \mathbb{R}^{2n}$$

Teorema (Difícil de Sard)

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \qquad X \overset{\circ}{\longrightarrow} \mathbb{R}^{2n-1}$$

Demostração.

Step 1 Mergulhar a variedade num espaço euclidiano *grande*. Pegue um atlas finito $\{(U_i, \varphi_i)_{i=1}^k\}$, note que $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ são mergulhos.

Ideia

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{nk} \\ p &\longmapsto (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots \end{aligned}$$

Isso não da. Para fazer bem precisamos de uma partição da unidade $\{\rho_i\}_{i=1}^k$ subordinada a $\{U_i\}_{i=1}^k$ sobertura. Defina $\rho_i \varphi_i : X \to \mathbb{R}^n$ como sendo zero fora do conjunto bom; note que essa função não é mais um mergulho, mas tudo bem. Agora faça $X \to (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k}$

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k} \\ p &\longmapsto \Big((\rho_1 \varphi_1)(p), \ldots, \Big(\rho_k \varphi_k)(p)\Big) \end{aligned}$$

Exercício (Importante) Mostre que Φ é uma imersão injetiva.

Step 2 **Afirmação:**

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^n \implies \begin{cases} X \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n+1 \\ X \underset{\circ}{\longrightarrow} \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n. \end{cases}$$

Prova da afirmação. Vamos projetar a variedade mergulhada em $\mathbb{R}^n$ no plano ortogonal a algum vetor $a \in \mathbb{R}^n$. Resulta que

Exercício

$$\begin{aligned} g : X \times X \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, y, t) &\longmapsto pr_a \circ f \end{aligned}$$

é injetiva.

□

Step 3 **Ideia:** ver que em quase todo ponto podemos projetar.

Considere agora o mapa pusforward que pega um vetor tangente e manda mediante f:

$$\begin{aligned} h : TX &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, v) &\longmapsto (Df)_x v \end{aligned}$$

Agora note que

Afirmação $a \notin \operatorname{Im}(h) \iff pr_a \circ f$ é uma imersão $\iff D(pr_a \circ f)_a$ é injetiva para toda x.

Step 4 A prova termina usando minisard: as imagens de g e de h tem medida nula. Mesmo a união delas. Então existe um ponto fora dessa união.

□

Definição Sejam X^m, Y^k variedades, $f : X \to Y$ suave, dizemos que

(a) $x \in X$ é ***ponto crítico*** se o posto de Df_x é menor do que $\min(m, n)$. ($\iff$ não é surjetiva I think) Aula 7: essa definição é que a derivada não é de posto máximo. Isso permete que o domínio tenha pontos regulares, así fez Sard e [GG74], mas não [Lee13], [GP10].

(b) $x \in X$ é ***ponto regular*** se posto $Df_x = \min(m, n)$.

(c) $y \in Y$ é ***valor crítico*** se existe um ponto crítico tal que $f(x) = y$.

(d) $y \in Y$ é ***valor regular*** se $\forall x \in f^{-1}(y)$, x é valor regular.

Teorema (Sard) $f : X \to Y$ suave. Então {valores críticos} tem medida nula.

Observação

1. Teorema vale se f é C^ℓ, onde $\ell > \max(m - n, 0)$.

.

Demostração.

Step 1 **Redução para a versão local.** Supomos que $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$. $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, U aberto.

$$\operatorname{Crit} f = \{x \in 0 : \text{posto } f'(x) < \min(m, n)\}$$

Então $f(\operatorname{Crit}(f)$ tem medida nula. Para isso fazemos **indução em** m**.** $m = 0$ trivial.

C_i vai ser o conjunto onde as derivadas parciais se anulam até i:

$$C_i = \left\{ p \in U : \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^\alpha} f_k(p) = 0 \forall \alpha, 0 < |\alpha| \leqslant 1, \forall k \right\}.$$

Note que $C_{i+1} \subset C_i \subset C_{i-1} \subset \ldots C_1 \subset C := \operatorname{Crit} f$.

Objetivo $f(C)$ tem medida nula.

Paso 1 $f(C_N)$ tem medida nula para algum $N \gg 0$. Crucial

Paso 2 $f(C_i \backslash C_{i+1}$ tem medida nula para toda i.

Paso 3 $f(C \backslash C_i$ tem medida nula.

Paso 1 Podemos supor sem perda de generalidade que $U \subset$cubo, a fórmula de Taylor diz que

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant K \cdot \|x - y\|_\infty^{i+1}$$

para todo $x, y \in C_i$.

Tem que botar C_i den'de um cubo D_j que se divide em r^m cubos de lado b/r. Então $f(D_j)$ está contido num cubo em $\mathbb{R}^n$ de lado $K \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{i+1} := R_j$. Também note que pontos den'de D_j são tq. $\|x - y\|_\infty \leqslant \frac{b}{r}$.

Agora

$$f(C_i) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{r^m} D_j\right) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} f(D_j) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} R_j.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r^m} \operatorname{Vol}(R_j) &= r^m \cdot K^n \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{(i+1)\cdot n} \\ &= \frac{K^n \cdot b^{n(N+1)}}{r^{n(N+1)-m}} \end{aligned}$$

Step 2

□

4 Aula 4§

4.1 Teorema de Sard

Teorema (Sard) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ C^ℓ, $\ell > \max(m - n, 0)$. Então {valores críticos} tem medida nula.

Demostração. **Note que** $\{\text{valores críticos}\} = f(\{\text{ptos críticos}\})$.

Seja $C = \{\text{ptos críticos de } f\}$. Então aproximamos a conjunto onde todas as derivadas parcias são zero com o conjunto C_i onde as derivadas parciais até i se anulam.

Passo 1 $f(C_N)$ tem medida nula se $N > \max(m-n, 0)$. (Feito na aula pasada.)

Passo 2 $f(C_i \backslash C_{i+1}$ tem medida nula

Passo 3 $f(C \backslash C_1$ tem medida nula.

Concluimos porque $f(C)$ é a união de treis conjuntos de medida nula: um por cada passo. Segundo e terceiro passos são com indução em m.

Prova:

Passo 1 Feito ontem.

Passo 2 A ideia é que podemos dar coordenadas de dimensão 1 menos usando que a derivada $i+1$ não se anula. (Acho.)

Passo 3 É parecido só que um pouco mas dificil. No caso anterior os valores da função h são zero, aqui não (ver foto). Aqui usamos

Lemma A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero:

$A \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $X \cap \{x\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{n-1}$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Então A tem medida nula.

Prova do lema. A ideia es pegar uma faixinha de altura x e cobrir esse pedaço de A com quadradinhos naquele plano C^x_j. Dai, "como A é compacto" podemos pegar um $I_x \subset \mathbb{R}$ intervalo tal que para todo $y \in I_x$ (y perto de x), a faixinha de altura y fique contida em $\bigcup I_x \times C^x_j$

Ideia. Como A é compacto podemos pegar um mini intervalo tal que todas as faixinhas muito pertinho (bom, a parte de A em cada faixinha) fica den'dos quadrados C^x_j multiplicados por esse mini-intervalo.

Agora calculamos os vulmeis. Lembre de análise na reta (ver [Lee13] lem 6.2, tem que shrink os intervalos) que a soma dos comprimentos dos intervalos I_{x_i} que conformam uma cobertura esencial (não pode tirar nenhum dos abertos da coberta) de um intervalo L **é menor do que duas vezes o tamanho do intervalo**: $\sum \text{compr}(I_{x_i}) < 2(2L) = 4L$.

Em fim, a soma dos comprimentos é um número finito. Então fica que

$$\sum_{i,j} \text{Vol}(I_{x_i} \times C^{x_i}_j = \sum_i \sum_j \text{Vol}_1(I_x)\,\text{Vol}_{n-1}(C^{x_i}_j) < \varepsilon \sum \text{Vol}_1(I_{x_i}) < 4L\varepsilon.$$

□

□

4.2 Espaço de jatos

Son como vectores de orden de diferenciabilidad más grande: a ideia é generalizar o espaço tangente e o espaço cotangente **para derivadas de ordem maior**.

Definição

Dos funciones $f, g : X \to Y$ suaves que mandan p al mismo punto son equivalentes si existem cartas tales que las derivadas parciales de sus representaciones en coordenadas coinciden hasta orden k.

Sejam X, Y variedades diferenciaveis suaves e $f, g : X \to Y$ suaves. Dizmos que $f \sim_k g$ em $p \in X$ se, intuitivamente, as derivadas parciais de f e g coincidem até ordem k. Isso é inuitivo porque precisamos pegar cartas para isso ficar bem definido: precisamos que existam cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ aoredor de p e $f(p)$ tais que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}($$

Los ***jatos*** son gérmenes:

$$J^k(X, Y)_{p,q} = \{f : X \to Y : f(p) = q\} \Big/ \sim_k .$$

Isso generaliza o espaço tangente do seguinte jeito:

$$J^1(\mathbb{R}, Y)_{0,q} \cong T_q Y.$$

Exercício

$$J_1(X, \mathbb{R})_{p,0} \cong T_p^* \cong T_p^* Y.$$

Daí definimos o ***espaço de*** k***-jatos***:

$$J^k(X, Y) := \bigsqcup_{\substack{p \in X \\ q \in Y}} J^k(X, Y)_{p,q}$$

Então pega um jato $\sigma \in J^k(X, Y)$. Isso cuspe um p e um q tais que $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$. Definamos as funções

$$\begin{aligned} \alpha : J^k(X, Y) &\longrightarrow X \\ \sigma &\longmapsto p \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta : J^k(X, Y) &\longrightarrow Y \\ 0 &\longmapsto q \end{aligned}$$

Exemplo $X = U \subset \mathbb{R}^n$, $Y = V \subset \mathbb{R}^m$ abertos. O que é o espaço de jatos neste caso?

Tem uma bijeção

$$\begin{aligned} : J^k(U, V)_{x,y} &\xrightarrow{\cong} B^k_{n,m} \\ f &\longmapsto (f_1^k, \ldots, f_m^k) \end{aligned}$$

Lance: pode pensar que esas funções são polinomias de grau maximo k.

$$B^k_{n,m} = \{p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \text{ppolinomial de grau} \leqslant k \text{ tal que } p(0) = 0\}.$$

Exercício Calcule a dimensão de $B^k_{n,m}$.

$$\begin{tikzcd} J^k(U,V) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & U \times V \times B^k_{n,m} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Creo que: definimos f^k_i como as ”partes sem constante dos polinómios de Taylor de ordem k das coordenadas de f”, CREO QUE la idea es que la clase de equivalencia $[f]$ está determinada por los principios de los polinomios de Taylor de sus funciones coordenadas.

No entendí esto pero va:

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \text{polinomial}$$

$x_0 \in U, y_0 \in V$, entre aspas:

$$"f(x - x_0) = y_0 + p(x - x_0),$$

$f(U) \subset V$. En fim, temos que

2. $J^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times T^*M$.
3. $J^1(\mathbb{R}, M) \cong \mathbb{R} \times TM$.

Agora o pushforward e o pullback, que basicamente é precompor e poscompor:

Definição

1. $\varphi : Y \to Z$ suave, X variedade suave. O ***pushforward*** é

$$\begin{aligned} \varphi_* : J^k(X,Y) &\longrightarrow J^k(X,Z) \\ [f]_x &\longmapsto [\varphi \circ f]_x \end{aligned}$$

2. O ***pullback*** é... mas aqui **precisamos que ψ seja difeomorfismo**

$$\begin{aligned} \psi^* : J^k(X,Y) &\longrightarrow J^k(Z,Y) \\ [f]_x &\longmapsto [f \circ \psi]_{\psi(x)} \end{aligned}$$

Observação

1. $\sigma \in J^k(X,Y)_{x,y}$, $\varphi_*\sigma \in J^k(X,Z)_{x,\varphi(y)}$
2. $\sigma \in J^k(X,Y)$, $\psi^*\sigma \in J^k(Z,Y)_{\psi^{-1}(x),y}$

4.2.1 Estrutura diferenciável no espaço de jatos

Pegue $\sigma \in J^k(X,Y)_{p,q}$ e cartas (U,φ) de p e (V,ψ) de q. Ideia: usar o pushforward e o pullback das cartas para levar o problema no $\mathbb{R}^n$.

Exercício Considere
$$J^k(U,V) = \bigsqcup_{\substack{p\in U\\ q\in V}} J^k(X,Y)_{p,q}.$$

Então

$$\begin{aligned} J^k(U,V) &\longrightarrow J^k(\varphi(U),\psi(V)) \\ \sigma &\longmapsto \psi_*(\varphi^{-1})^*\sigma \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Então para dar uma estrutura de variedade topológica no espaço de jatos note que também
$$J^k(\varphi(0),\varphi(V)) \cong \varphi(0)\times\varphi(V)\times B^k_{n,m} \subset \mathbb{R}^{n+m+\dim B^k_{n,m}}$$

(lo bueno es que ya sabes cual es la dimension de $B^k_{n,m}$. Mas não interessa qual é a dimensão: o importante é que o $B^k_{n,m}$ tem uma base, é um espaço vetorial.)) Em fim, tudo isso da uma estrutura de variedade topologica. Para terminhar só temos que ver o que acontece com as mudanças de coordenadas.

$$\begin{aligned} \varphi(U)\times\psi(V)\times B^k_{n,m} &\longrightarrow \tilde\varphi(\tilde U)\times\tilde\psi(\tilde V)\times B^k_{n,m} \\ (p,q,f) &\longmapsto \Big(\tilde\varphi\circ\varphi^{-1}(p),\tilde\psi\circ\psi^{-1}(q)\Big) \end{aligned}$$

Isso é suave! E isso implica que $J^k(X,Y)$ é uma C^∞ variedade de dimensão $n+m+\dim B^k_{n,m}$.

E daí que α e β são submersoes sobrejetivas.

References

[GG74] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1974.

[GP10] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub., 2010.

[Hir12] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, second edition edition, 2013.

[Mil65] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.

[Tu10] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010.