Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/dt

Lista 4

Comentários de V.R. Pode ver que o índice de duas variedades complexas (que sempre são orientáveis) de dimensões complementares é sempre 1.

Problem 1 Para $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, seja $f : kP^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big([z_0 : \dots : z_n]\Big) = \frac{\sum_{j=0}^n j|z_j|^2}{\sum_{j=0}^n |z_j|^2}.$$

Prove que f é uma função de Morse e calcule o índice de todos os pontos críticos de f para $k = \mathbb{R}$ e $k = \mathbb{C}$.

Solution. **(Caso $k = \mathbb{R}$.)** Fixe $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Consideremos a carta coordenada $\varphi_r([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n)$ definida em $U_r = \{x_r \neq 0\} = \{x_r = 1\}$. Nossa função fica

$$f \circ \varphi_r^{-1}(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{1 + \sum_{i \neq r} x_i^2}$$

Para facilitar notação defina $\vec{x} := (x_0, \dots, x_{r-1}, 1, x_{r+1}, \dots, x_n)$. A nossa função se escreve como

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{\|\vec{x}\|^2}$$

Derivemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) &= \frac{\|\vec{x}\|^2 \cdot 2ix_i - \frac{\partial \|\vec{x}\|^2}{\partial x_i}\Big(r + \sum_{j \neq r} i x_i^2\Big)}{\|\vec{x}\|^4} \\ &= 2x_i \cdot \frac{i\|\vec{x}\|^2 - \Big(r + \sum_{j \neq r} j x_j^2\Big)}{\|\vec{x}\|^4} \end{aligned}$$

É claro que se $x_i = 0$ para toda i temos um ponto crítico, i.e. em $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Note que não podemos ter outros pontos críticos...

Se tivessemos um índice só em que $x_k \neq 0$, a parcial respeito a essa variável não se anula. Assim, para ter um ponto crítico distinto de $\vec{0}$ é necessário que as coordenadas em pelo menos dois índices k e k' foram distintas de zero. Porém, nesse caso a parcial respeito de alguma delas não se anula (falta argumentar).

Derivando de novo e avaliando em $\vec{0}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 2\delta_{ij}(i - r), \qquad r \neq i, j$$

Isso fica pela regra do produto: obtemos a derivada de $2x_i$ multiplicada pelo quociente, somado com $2x_i$ multiplcado pela derivada do quociente. É só notar que, por um lado, a derivada de $2x_i$ respeito de x_j é $2\delta_{ij}$ e o quociente avaliado em $\vec{0}$ da $i-r$. Por outro lado, a derivada do quociente em $\vec{0}$ se anula.

Então a matriz de segundas derivadas fica

$$2\begin{pmatrix} -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-r \end{pmatrix}$$

que é não singular. Ela tem r autovalores negativos. Concluimos que os pontos $[0 : \ldots : \underbrace{1}_{r\text{-th place}} : \ldots : 0]$ são críticos de índice r para cada $r = 0, \ldots, n$.

(Caso $k = \mathbb{C}$.) Fixe $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos a carta coordenada $\varphi_r([z_0 : \ldots : z_n]) = (z_0, \ldots, \widehat{z_r}, \ldots, z_n)$ definida em $U_r = \{z_r \neq 0\} = \{z_r = 1\}$. Expressando as coordenadas em parte real e imaginária, nossa função fica

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(z) = \frac{r + \sum_{j \neq r} j(x_j^2 + y_j^2)}{1 + \sum_{j \neq r}(x_j^2 + y_j^2)}$$

Calculemos os pontos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi_r^{-1})(z) &= \frac{\left(1 + \sum_{j \neq r}(x_j^2 + y_j^2)\right) \cdot 2ix_i - 2x_i \left(r + \sum_{j \neq r} j(x_j^2 + y_j^2)\right)}{\left(1 + \sum_{j \neq r}(x_j^2 + y_j^2)\right)^2} \\ &= 2x_i \frac{\left(1 + \sum_{j \neq r}(x_j^2 + y_j^2)\right) \cdot i - \left(r + \sum_{j \neq r} j(x_j^2 + y_j^2)\right)}{\left(1 + \sum_{j \neq r}(x_j^2 + y_j^2)\right)^2} \end{aligned}$$

de forma que o gradiente se anula quando $x_i = 0$ para toda i, e o mesmo sucede para as coordenadas imaginárias y_i. Derivando de novo obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} =$$

Nossa função fica

$$f \circ \varphi_r^{-1}(z_0, \dots, \widehat{z_r}, \dots, z_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i z_i \overline{z_i}}{1 + \sum_{i \neq r} z_i \overline{z_i}}$$

Para facilitar notação defina $\vec{z} := (z_0, \dots, z_{r-1}, 1, z_{r+1}, \dots, z_n)$. A nossa função se escreve como

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(z_0, \dots, \widehat{z_r}, \dots, z_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i z_i \overline{z_i}}{\|\vec{z}\|^2}$$

Derivemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) &= \frac{\|\vec{z}\|^2 \cdot 2i\overline{z_i} - \frac{\partial \|\vec{z}\|^2}{\partial z_i}\left(r + \sum_{j \neq r} i z_i \overline{z_i}\right)}{\|\vec{z}\|^4} \\ &= 2\overline{z_i} \cdot \frac{i\|\vec{z}\|^2 - \left(r + \sum_{j \neq r} j z_j \overline{z_j}\right)}{\|\vec{z}\|^4} \end{aligned}$$

E analogamente

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) = 2z_i \cdot \frac{i\|\vec{z}\|^2 - \left(r + \sum_{j \neq r} j z_j \overline{z_j}\right)}{\|\vec{z}\|^4}$$

Como antes, a derivada só pode ser zero quando $z_i = 0 \iff \overline{z_i} = 0 \; \forall i$, i.e. no ponto $\vec{0} \in \mathbb{C}^n$.

Para calcular a Hessiana note que as parciais cruzadas $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$ são as únicas que podem sobrevivir! De fato, quando derivamos de novo y avaliamos em $\vec{0}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial z_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 2\delta_{ij}(i - r), \qquad r \neq i, j$$

Essa matriz é

$$2\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-r \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-r \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

que é não singular. Vemos que, como no caso real, os pontos $[0 : \dots : \underbrace{1}_{\text{r-th place}} : \dots : 0]$ são críticos não degenerados, só que agora de índice $2r$. $\square$

Problema 2 Seja m um número inteiro positivo $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big([z_0 : z_1]\Big) = \frac{|z_0^m + z_1^m|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)^m}.$$

Determine para quais valores de m a função f é de Morse e calcule o índice de todos os seus pontos críticos.

Proof. Considere a carta $\varphi_0 : \{z_0 = 1\} \subset \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}$, $[1 : z] \mapsto z$. Como $z \in \mathbb{C}$ realmente é $r(\cos\theta, \sin\theta)$ para $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, nossa função fica

$$\begin{aligned}
f \circ \varphi_0^{-1}(z) &= \frac{\Big|(1,0) + r^m\Big(\cos(\theta m), \sin(\theta m)\Big)\Big|^2}{(1+r^2)^m} \\
&= \frac{\Big|\Big(1 + r^m\cos(\theta m), r^m\sin(\theta m)\Big)\Big|^2}{(1+r)^2} \\
&= \frac{\Big(1 + r^m\cos(\theta m)\Big)^2 + r^{2m}\sin^2(\theta m)}{(1+r^2)^m} \\
&= \frac{1 + 2r^m\cos(\theta m) + r^{2m}\cos^2(\theta m) + r^{2m}\sin^2(\theta m)}{(1+r^2)^m} \\
&= \frac{1 + 2r^m\cos(\theta m) + r^{2m}}{(1+r^2)^m}
\end{aligned}$$

Agora derivamos, primeiro respeito a θ:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^m \cdot 2r^m\Big(-\sin(\theta m)m\Big)}{(1+r^2)^{2m}}$$

que vai se anular quando $\sin(\theta m) = 0$, i.e. $\theta = 0, \pi$, ou quando $r = 0$.

Agora derivamos respeito a r:

$$\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^m \cdot \Big(2\cos(\theta m)mr^{m-1} + 2mr^{2m-1}\Big) - m(1+r^2)^{m-1} \cdot 2r \cdot \Big(1 + 2r^m\cos(\theta m) + r^{2m}\Big)}{(1+r^2)^{2m}}$$

Como precisamos que no ponto que buscamos $\theta = 0, \pi$, concluimos que $\cos(\theta m)$ pode ser 1 ou -1. Então temos

$$\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^m \cdot \Big(2(\pm 1)mr^{m-1} + 2mr^{2m-1}\Big) - m(1+r^2)^{m-1}2r \cdot \Big(1 + 2r^m(\pm 1) + r^{2m}\Big)}{(1+r^2)^{2m}}$$

Para que isso seja 0 preciso que o numerador se anule. Então me interessa

$$
\begin{gathered}
(1+r^2)^m \cdot \Big(2(\pm 1) m r^{m-1} + 2mr^{2m-1}\Big) = m(1+r^2)^{m-1} 2r \cdot \Big(1 + 2r^m(\pm 1) + r^{2m}\Big) \\
\Longleftrightarrow \\
2mr(1+r^2)^m \cdot \Big(\pm r^{m-2} + r^{2m-2}\Big) = 2mr(1+r^2)^{m-1}\Big(1 \pm 2r^m + r^{2m}\Big) \\
\Longleftrightarrow \\
(1+r^2)\Big(\pm r^{m-2} + r^{2m-2}\Big) = 1 \pm 2r^m + r^{2m} \\
\Longleftrightarrow \\
(\pm r^{m-2} + r^{2m-2}) + (\pm r^m + \cancelto{0}{r^{2m}}) = 1 \pm 2r^m + \cancelto{0}{r^{2m}} \\
\Longleftrightarrow \\
\pm r^{m-2} + r^{2m-2} \pm r^m = 1 \pm 2r^m \\
\Longleftrightarrow \\
r^{2m-2} \pm r^m \mp 2r^m \pm r^{m-2} - 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow \\
r^{2m-2} \mp r^m \pm r^{m-2} - 1 = 0 \qquad (*)
\end{gathered}
$$

Então $(*)$ é a condição que deve satisfacer r num ponto crítico. (Lembre que a condição para θ é ser igual a $0, \pi$.) Note que os signos em $(*)$ dependen não só da escolha de θ, senão também de m, pois quando m é par o signo é positivo porque obtemos um coseno avaliado num múltiplo de 2π.

Pronto, vamos ver o que acontece para distintos valores de m. Primeiro note que 0 (que corresponde com o ponto $[1:0] \in \mathbb{C}P^1$) sempre é um ponto crítico.

Para $m = 1$ obtemos

$$(*)|_{m=1} = \cancel{1} \mp r \pm r^{-1} \cancel{-1} = 0$$

que se cumple quando $z = 1$ ou -1 (como número complexo).

Para $m = 2$ temos

$$(*)|_{m=2} = r^2 \mp r^2 + \cancel{1 - 1} = 0$$

que no caso positivo a única solução é zero. No caso negativo a equação fica trivial, de forma que não temos restrições em r, concluindo que o eixo real é tudo de pontos críticos, que portanto não são isolados.

Para $m = 3$,

$$(*)|_{m=3} = r^4 \mp r^3 \pm r - 1 = 0$$

E aí já não sei. Então vou calcular a Hessiana. Primeiro quero derivar a parcial respeito a θ que já tinha calculado, que boto de novo para facilitar a leitura:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^m \cdot 2r^m \Big(-\sin(\theta m) m\Big)}{(1+r^2)^{2m}} \tag{1}$$

Primeiro respeito a θ:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta}(f\circ\varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^{2m}(1+r^2)^m\cdot 2r^m\Big(-\cos(\theta m)m^2\Big)}{(1+r^2)^{4m}}$$

Tendo em mente que $z=0$ é ponto crítico para toda m, vamos notando que essa derivada se anula em $z=0$. Para calcular a parcial respeito a r vou calcular primeiro a derivada do numerador da eq. (1), excluindo o seno (que é constante):

$$\frac{\partial}{\partial r}(1+r^2)^m\cdot 2r^m m = m(1+r^2)^{m-1}\cdot 2r\cdot 2r^m m + (1+r^2)^m\cdot 2m^2 r^{m-1} \tag{2}$$

Agora sim, denotado a eq. (2) como (2),

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}(f\circ\varphi_0^{-1}) = \frac{-(1+r^2)^{2m}(2)\sin(\theta m) - 2m(1+r^2)^{2m-1}\cdot 2r\cdot\Big(-(1+r^2)^m\cdot 2r^m\sin(\theta m)m\Big)}{(1+r^2)^{4m}}$$

Lembre que devemos pegar θ tal que $\sin(\theta m)=0$, e desse modo a parcial cruzada se anula para toda m. Então fica que $z=0$ é degenerado para toda m!

Por último vou tentar derivar a derivada parcial respeito a r que já tinha calculado, i.e.:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}(f\circ\varphi_0^{-1}) = \\ &\frac{(1+r^2)^m\cdot\Big(2\cos(\theta m)mr^{m-1}+2mr^{2m-1}\Big) - m(1+r^2)^{m-1}\cdot 2r\cdot\Big(1+2r^m\cos(\theta m)+r^{2m}\Big)}{(1+r^2)^{2m}}\end{aligned} \tag{3}$$

Primeiro derivo o numerador por separado. Vamos definir

$$(1+r^2)^m\cdot\Big(2\cos(\theta m)mr^{m-1}+2mr^{2m-1}\Big) \tag{4}$$

$$m(1+r^2)^{m-1}\cdot 2r\cdot\Big(1+2r^m\cos(\theta m)+r^{2m}\Big)(1+r^2)^{2m} \tag{5}$$

Então fica que o numerador é simplesmente (4)−(5). Para derivá-lo vou fazer

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(4) = {} & m(1+r^2)^{m-1}\cdot 2r\Big(2\cos(\theta m)mr^{m-1}+2mr^{2m-1}\Big) \\ & + (1+r^2)^m\cdot 2\cos(\theta m)m(m-1)r^{m-2} + 2m(2m-1)r^{2m-2}\end{aligned} \tag{6}$$

E depois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(5) = {} & \Big(m(m-1)(1+r^2)^{m-2}\cdot 2r\cdot 2r + m(1+r^2)^{m-1}\cdot 2\Big)\cdot\Big(1+2r^m\cos(\theta m)+r^{2m}\Big) \\ & + \Big(m(1+r^2)^{m-1}\cdot 2r\Big)\cdot\Big(2\cos(\theta m)mr^{m-1}+2mr^{2m-1}\Big)\end{aligned} \tag{7}$$

Talvez isso foi o mais difícil. Agora podemos escrever a derivada do numerador como (6) − (7). Segue que

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^{2m}\Big((6)-(7)\Big) - 2m(1+r^2)^{2m-1}\cdot 2r\Big((4)-(5)\Big)}{(1+r^2)^{4m}} \tag{8}$$

Queremos saber se isso vale zero em $z = 1$ ou -1 quando $m = 1$, porque esses são pontos críticos. Então sustituyo nas eqs. (4) to (7) para obter □

Problem 3 Assumindo a classificação das superfícies compactas sem bordo, classifique as superfícies compactas com bordo a menos de difeomorfismo.

Solution.

A classificação das superfícies compactas com bordo pode ser feita do mesmo jeito que fizemos a classificação das superfícies compactas com bordo. Pegamos uma função de Morse qualquer (por exemplo, a função altura i.e. a projeção respeito a alguma coordenada, despois de mergulhar a variedade em algum espaço euclideano), e a ajeitamos para que os pontos críticos não estejam no bordo, que cada valor crítico corresponda a um único ponto crítico e que os pontos críticos estejam em ordem por índice (talvez alguma outra propriedade que se me escapa, essas condições foram provadas ou comentadas em aula).

Daí podemos descrever a variedade mediante o proceso de handle attachment. Começamos com uma 0-alça, que é um disco, e vamos colando 1 alças con distinas orientações. Depois colamos 2-alças, também com distinas orientações. Podemos colar também uma 3-alça. A diferença com a classificação para variedades sem bordo é que agora não devemos nos preocupar por tampar furos que ficam no caminho. Sendo assim, as posibilidades são exatamente as mesmas que no caso sem bordo, i.e. somas conexas de toros ou planos projetivos, só que agora admitimos qualquer quantidade finita de pontos removidos.

□

Problema 4 Seja $m < n$ e sejam $\mathbb{C}P^m \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}P^{n-m} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ as inclusões naturais. Prove que $I(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^{n-m}) = 1$, onde um espaço projetivo complexo tem a orientação induzida como quociente de uma esfera de dimensão ímpar. Mostre que vale um resultado similar para espaços projetivos reais usando a versão $\bmod 2$ de I.

Solution. The natural embeddings are

$$\begin{aligned} i_1 : \mathbb{C}P^m &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ [z_0 : z_1 : \ldots : z_m] &\longmapsto [z_0 : z_1 : \ldots : z_m : 0 : \ldots : 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 : \mathbb{C}P^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ [z_m : z_{m+1} : \ldots : z_n] &\longmapsto [0 : \ldots : 0 : z_m : z_{m+1} : \ldots : z_n] \end{aligned}$$

which clearly intersect at the point $p := [0 : \ldots : 0 : z_m : 0 : \ldots : 0]$.

Notice that this intersection is transversal, which may be seen in the local coordinate chart $U_m = \{z_m \neq 0\}$ of $\mathbb{C}P^n$, where the tangent spaces of $\mathbb{C}P^m$ and $\mathbb{C}P^{n-m}$ are embedded with trivial intersection. Further, by dimensional reasons we see that the condition of transversality is satisfied.

To compute the intersection index we check whether the base obtained from an oriented base of $\mathbb{C}P^m$ along with an oriented base of $\mathbb{C}P^{n-m}$ give an oriented base of $\mathbb{C}P^n$. This becomes immediate looking, again, at the chart $U_m = \{z_m \neq 0\}$ of $\mathbb{C}P^n$, where the union of the oriented bases of $\mathbb{C}P^m$ and $\mathbb{C}P^{n-m}$ is the canonical choice of oriented basis for $\mathbb{C}P^n$

For the real case we can't use oriented intersection number because $\mathbb{R}P^n$ is not orientable for even n. But the reasoning is very similar. The natural embeddings are

$$\begin{aligned} i_1 : \mathbb{R}P^m &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ [x_0 : x_1 : \ldots : x_m] &\longmapsto [x_0 : x_1 : \ldots : x_m : 0 : \ldots : 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 : \mathbb{R}P^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ [x_m : x_{m+1} : \ldots : x_n] &\longmapsto [0 : \ldots : 0 : x_m : x_{m+1} : \ldots : x_n] \end{aligned}$$

which clearly intersect at the point $p := [0 : \ldots : 0 : x_m : 0 : \ldots : 0]$.

Now we don't need to check the orientations of the bases, but barely count the number of intersection points, which as we have said is 1.

□

Problem 5 (Extra) Sejam p, q inteiros positivos relativamente primos. O espaço lenticular $L(p, q)$ é definido como o quociente de $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ pela ação de $\mathbb{Z}/p$ gerada por

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i/p} \cdot z_1, e^{2\pi i q/p} \cdot z_2).$$

Mostre que $L(p, q)$ é uma variedade e construa um diagrama de Heegard para ela.

Solution. Primeiro revisemos a construção de um diagrama de Heegard feita em aula. Primero consideramos uma 0-alça (no caso de 3-variedades é uma bola), e nela colamos uma certa quantidade de 1 alças (que são cilindros preenchidos), produzindo um handlebody. No bordo do handlebody (que uma superfície compacta) botamos alguma coleção de curvas que são as attaching spheres das 2-alças que colamos no seguinte passo. Outra coleção de curvas na mesma superfície representa as 3-alças . □