

# Topologia Diferencial

## Índice

<b>1 Aula 1</b>	<b>2</b>
1.1 Plano do curso, bibliografia	2
1.2 Resumo da aula 1	2
<b>2 Aula 2</b>	<b>3</b>
2.1 Lembre	3
2.2 Fórmula de mudança de bases	3
2.3 Fibrado tangente	3
2.4 Imersões e mergulhos	4
2.4.1 Valores regulares	6
2.5 Fibrados vetoriais	7
2.6 Seções	7
<b>3 Aula 3: Teorema de Sard</b>	<b>8</b>
3.1 Transversalidade: Teorema de Sard	9
<b>4 Aula 4</b>	<b>13</b>
4.1 Teorema de Sard	13
4.2 Espaço de jatos	15
4.2.1 Estrutura diferenciável no espaço de jatos	18
4.2.2 When dani finally understood this	18
4.2.3 how this can also be something else	18
4.2.4 Lecture notes	20
<b>5 Aula 5: topologia de Whitney</b>	<b>20</b>
<b>6 Aula 6: topologia de Whitney (cont.). Teoremas de transversalidade.</b>	<b>22</b>
6.1 Topologica de Whitney (cont.)	22
6.2 Teoremas de transversalidade	22
<b>7 Aula 7</b>	<b>23</b>
<b>8 Aula 8: teorema de transversalidade de Thom; multijatos</b>	<b>24</b>
8.1 Teorema de transversalidade de Thom	24
8.2 Multijatos	28
8.3 Imersão e mergulho de Whitney	28
<b>9 Aula 9</b>	<b>30</b>

9.1	Teorema das imersões injetivas	30
9.2	Teorema do mergulho de Whitney	31
9.2.1	Funções de Morse	31
9.3	Teoria de interseção	31
9.3.1	Preliminares: variedades com bordo e orientação	31
<b>10</b>	<b>Aula 10</b>	<b>33</b>
10.1	Mais variedades com bordo	33
10.2	Teorema de Sard com bordo	33
10.3	Teorema de transversalidade de Thom com bordo	33
10.4	Orientação	34
<b>11</b>	<b>Aula 11</b>	<b>35</b>
11.1	ii. Número de interseção	36
11.2	Grau	38
<b>12</b>	<b>Aula 12</b>	<b>39</b>
12.1	Orientando o bordo de $Q = f^{-1}(W)$	39
12.2	Exemplos: calculando o grau	39
12.2.1	Teorema fundamental da álgebra com teoria do grau	40
12.3	Winding number	41
12.4	Prova do teorema de Jordan-Brouwer	42

## 1 Aula 1

### 1.1 Plano do curso, bibliografia

#### Cronograma

0. Revisão de variedades.
1. Transversalidade: Sard, top. forte, fraca, aproximação.
2. Teoria da interseção e índice.
3. Teoria de Morse.
4. Tópicos adicionais (possíveis): h-cobordismo, top. de baixa dimensão, Poincaré  $n \geq 5$ .

Bibliografia: [Mil65] (intuição), [GP10] (tranqui, tem muito), [Hir12] (pesado, tem tudo, e importante ler, usa Análise Funcional).

### 1.2 Resumo da aula 1

1. Revisão de variedades, espaço topológico, 2-enumerável, 2-contável, Hausdorff, loc. euclidiano, dimensão é fixa nas componentes conexas, def. de carta, atlas, atlas  $C^k$ , atlas maximal. **Obs.** Existem atlas que não contém sub atlas  $C^k$ .
2. **Teorema.**  $k = 1, \dots, +\infty$  toda  $C^k$ -variedade é  $C^k$ -difeomorfa a uma  $C^\infty$ -variedade.

3. **Teorema.**  $1 \leq \ell \leq k \leq +\infty$ , se  $M, N$  são  $C^k$ -variedades,  $C^\ell$ -difeomorfas, então  $M$  e  $N$  são  $C^k$ -difeomorfas. **No será  $\ell$ ?**
4. **Partições da unidade.** Definição. **Exercício:** toda variedade topológica é paracompacta. **Teorema:**  $M$  variedade  $C^\infty$  e  $\{U_i\}$  cobertura, então existe  $C^\infty$  partição da unidade subordinada.

## 2 Aula 2

### 2.1 Lembre

Dada uma variedade suave  $M$ . Definimos como velocidades de curvas ou como derivações:  $T_p M$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ , onde para  $p \in U$ ,  $(U, \varphi)$  carta,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  com base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ . O *espaço cotangente* é

$$T_p^* M = (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}).$$

A base dual é  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$  dada por

$$dx^i|_p = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Big|_p = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

e ai extendemos por linearidade a todos os demais covetores.

**Observação** Note que mudando de carta a gente muda de base—não tem uma base canônica do espaço cotangente.

### 2.2 Fórmula de mudança de bases

**Fórmula de mudança de bases (Exercício)**  $(U, \varphi), (V, \psi), p \in U \cap V, \varphi = (x^1, \dots, x^n, \psi(y^1, \dots, y^n)$  com bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_p \right\},$$

mostre que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

### 2.3 Fibrado tangente

$M$  variedade,

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Note que para toda carta  $(U, \varphi)$  existe uma bijeção

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (p, (v_1, \dots, v_n)) &\longmapsto \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

usando essa bijeção, topologizamos  $TM$ . Mas ainda, induz uma estrutura de variedade topológica com cartas dadas pelas  $\phi$ . Mas exatamente, as cartas são

$$\begin{aligned} \phi_{(U, \varphi)} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \sum v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &\longmapsto (\varphi(p), (v_i)) \end{aligned}$$

e a mudança de coordenadas também é  $C^\infty$ , i.e. essa estrutura é diferenciável.

**Observação** Se variedade é  $C^k$ , o fibrado tangente é  $C^{k-1}$ .

A gente vai fazer isso mesmo com o fibrado cotangente:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

O mesmo procedimento mostra que  $T^*M$  é uma  $C^\infty$ -variedade de dimensão  $2n$ .

**Observação** Para todo  $p \in M$  existe  $U \ni p$  vizinhança tal que  $\pi_1(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ . Mas  $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^n$  em geral; nesse caso dizemos que  $M$  é *paralelizável*.

**Casos onde  $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$**

1.  $M \cong \mathbb{R}^n$ ,  $TM \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
2.  $M = S^1$ ,  $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ .
3.  $M$  3-variedade orientável, então  $TM \cong M \times \mathbb{R}^3$ . (Difícil mas verdadeiro.) **Hint.** Usando quatérnios não é difícil obter uma base global.

## 2.4 Imersões e mergulhos

Até agora definimos funções suaves, mas não o que é a diferencial delas.

**Definição**  $M, N$  variedades suaves e  $f : M \rightarrow N$  suave. A *derivada de  $f$*  é

$$Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N,$$

uma aplicação linear que pode ser definida usando a definição do espaço tangente de curvas ou de derivações. Se pensamos que  $v$  é uma classe de equivalência de curvas,  $Df_p[\gamma] = [f \circ \gamma]$ . Se  $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma derivação, a definição é o pushforward

$$\begin{aligned} Df_p v : C^\infty(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (Df_p v)g &\longmapsto v(g \circ f). \end{aligned}$$

Tem outra forma de definir, que usando cartas coordenadas, onde  $Df_p$  está dada como uma matriz em termos das bases locais: em cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  de  $p$  e  $f(p)$ ,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  e  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ . A notação fica

$$Df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{f(p)}$$

onde  $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$  é definida como

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

**Definição** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função suave.  $f$  é uma *imersão em*  $p$  se a derivada  $Df_p$  é injetiva.  $f$  é uma *submersão em*  $p$  se  $Df_p$  é sobrejetiva.  $f$  é um *mergulho* se é uma imersão injetiva tom inversa  $g : f(M) \rightarrow M$  contínua.

**Exemplo** O exemplo mas fácil é o caso das incusões em variedades produto:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow M \times N \\ p &\longmapsto (p, q) \end{aligned}$$

E as projecções:

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M \\ (p, q) &\longmapsto p \end{aligned}$$

Outros exemplos de submersões são as projecções dos fibrados tangente e cotangente.

Para ver por que na definição de mergulho pedimos que a inversa seja contínua, considere o seguinte contraexemplo:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva que tem um ponto limite demais: a topologia no domínio é uma linha, mas a topologia no contradomínio e de um outro espaço, mas  $f$  é um mergulho injetivo! A inversa de  $f$  não é contínua (não manda limites em limites).

**Observação** Se  $f : M \rightarrow N$  é um mergulho, então  $f(M)$  herda uma estrutura de variedade diferenciável e  $f$  é um difeomorfismo entre  $M$  e  $f(M)$ .

**Upshot** Merhulo são as treis condições que precisamos para que a imagem de  $f(M)$  tenha estrutura diferenciável e  $f$  um difeomorphismo entre  $M$  e  $f(M)$ . O lance é usar o teorema da função inversa.  $f(M)$  é chamada de uma *subvariedade* de  $N$ .

Uma definição alternativa de *subvariedade* é que para cada ponto  $p \in Q \subset M$ ,  $Q$  subespaço topológico, existe uma carta de  $N$  tal que  $\varphi(U \cap Q) = \mathbb{R}^k$ . (Misha's) In Misha's handouts:

**Exercise 2.23** Let  $N_1, N_2$  be two manifolds and let  $\varphi_i : N_i \rightarrow M$  be smooth embeddings. Suppose that the image of  $N_1$  coincides with that of  $N_2$ . Show that  $N_1$  and  $N_2$  are isomorphic.

**Remark 2.10** By the above problem, in order to define a smooth structure on  $N$ , it suffices to embed  $N$  into  $\mathbb{R}^n$ . As it will be clear in the next handout, every manifold is embeddable into  $\mathbb{R}^n$  (assuming it admits partition of unity). Therefore, in place of a smooth manifold, we can use “manifolds that are smoothly embedded into  $\mathbb{R}^n$ ”.

**Notação** Se  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão escrevemos  $M \rightarrowtail N$ , se é mergulho  $M \hookrightarrow N$  e se é submersão  $f : M \twoheadrightarrow N$ .

Uma *subvariedade imersa* é a imagem de uma imersão (que pode nem ser variedade...)

**Observação**  $Q \subset M$  subvariedade, então existe uma inclusão natural  $T_q Q \subset T_q M$  (linear injetiva) para todo  $q \in Q$ . Claro, a derivada da inclusão  $\iota : Q \rightarrow M$ , i.e.  $D\iota_q : T_q Q \rightarrow T_q M$ .

kj Dado  $q \in Q$ , existe  $(U, \varphi)$  carta de  $M$  tal que  $\varphi|_{U \cap Q}$  é uma carta de  $Q$ , é só botar a base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$  dentro da base de  $M$ .

#### 2.4.1 Valores regulares

**Definição** Seja  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$ , um ponto  $y \in N$  é dito *valor regular* se  $f$  é uma submersão em  $x$  para todo  $x \in f^{-1}(y)$  i.e.  $Df_x$  é sobrejetiva para todo  $x \in f^{-1}(y)$ .

**Teorema (Do valor regular)** Se  $y$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(y)$  é uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $\dim M - \dim N$ . (Se  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ .)

**Observação** Isso é só outra encarnação do teorema da função implícita.

*Demonstração.*  $x \in f^{-1}(y) := Q$ . Pega cartas  $\varphi$  de  $x$  e  $\psi$  de  $y$ . Supondo que  $f(U) \subset V$ , e que  $x, y$  tem coordenadas 0.

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\Phi := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Note que  $\Phi(0) = 0$  e que  $\Phi^{-1}(0) = \varphi(f^{-1}(y) \cap U)$ .

**Afirmção**  $\Phi^{-1}(0)$  é uma subvariedade.

Para tudo ficar claro vamos reescrever o teorema de função implícita.  $\Phi'(0)$  é sobrejetiva. Temos que

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ &z \longmapsto \Phi(z) \end{aligned}$$

A ideia é que existe uma vizinhança  $W$  de  $0 \in \mathbb{R}^m$  e um difeomorfismo  $\eta : W \rightarrow W^\sim$  tal que

$$\begin{aligned}\phi \circ \eta : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1\end{aligned}$$

□

## 2.5 Fibrados vetoriais

Um fibrado vetorial é uma coisa que generaliza os fibrados tangente e cotangente.

**Definição** Sejam  $E, M$  variedades e  $\pi : E \rightarrow M$  submersão sobrejetiva. Dizemos que  $\pi$  é um **fibrado vetorial** se para todo  $p \in M$ ,  $\pi^{-1}(p) = E_p$  possui uma estrutura de espaço vetorial tal que para todo  $p \in M$  existe  $U \ni p$  aberto e um difeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

e

$$\varphi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo.

**Exemplo**  $TM, T^*M, TM \oplus TM, TM \otimes TM, \Lambda^k(TM), \Lambda^k(T^*M), \text{Sym}^k(TM)$ .

## 2.6 Seções

**Definição** Uma **seção** de  $\pi : E \rightarrow M$  é  $s : M \rightarrow E$  suave tal que  $\pi \circ s = \text{id}$

$$\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \uparrow s \\ M \end{array}$$

Uma seção de  $TM$  é uma função  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $X(p) \in T_p M$ , um **campo vetorial**.

**Teorema (da bola cabeluda)**  $M = S^n$ ,  $n$  par,  $X : M \rightarrow TM$  campo vetorial, então existe  $p \in M$  tal que  $X(p) = 0 \in T_p M$ .

**Notação**  $\Gamma(E) = \{\text{seções de } \pi : E \rightarrow M\}$ ,  $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ ,  $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ ,  $\Gamma(\Lambda^k(T^*M)) = \Omega^k(M)$ .

Para qualquer espaço vetorial  $V$ ,

$$\text{Sym}^2(V^*) = \{f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bilinear}, f(x, y) = f(y, x)\} \subset V^* \otimes V^*.$$

E para fibrado vetorial  $E$ ,

$$\text{Sym}^2(E) = \bigsqcup_{p \in M} \text{Sym}^2(E_p^*).$$

**Definição** Uma *métrica Riemanniana* em  $E$  é uma seção  $s : M \rightarrow \text{Sym}^2(E)$  tal que  $s(p) : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$  é positiva definida, i.e.  $s(p)(x, x) > 0$  se  $x \neq 0$ .

**Observação (Aprox.)** Todo fibrado vetorial tem uma métrica Riemanniana: usando a métrica euclidiana dada em cada carta, usamos uma partição da unidade para estender a uma seção global, somar e notar que fica positiva definida.

É muito fácil construir seções do fibrado cotangente: para  $f \in C^\infty(M)$ , a diferencial  $df : M \rightarrow T^*M$  é uma seção do fibrado cotangente, i.e.  $df \in \Gamma(T^*M)$  porque

$$df_p = Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$$

**Exercício** Qualquer seção é um mergulho de  $M$  em  $E$ .

**Mais uma**  $g$  uma métrica Riemanniana em  $TM$ .

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g_p^\sharp : T_p M &\longrightarrow T_p^* M \\ v &\longmapsto g(v, \cdot) \end{aligned}$$

Então o *gradiente* de  $f$  é

$$(g_p^\sharp)^{-1}(df_p) := \text{grad}_p f$$

### 3 Aula 3: Teorema de Sard

#### Teorema da função implícita (aula pasada)

**Upshot** Think of the circle as the zero-set of  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . If the Jacobian matrix of  $f$  has enough rank at a given point  $(x, y)$ , we can find a function  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  that parametrizes the circle locally. That is:  $(x, g(x))$  is in the circle, i.e.  $f(x, g(x)) = 0$ . (So the zero-set is the graph of  $g$ ).

So you have the zero-set of a function at a point, which is a subset of the domain. It is a geometric object. You want to parametrize it. If the derivative has rank  $k$ , you can put  $k$  of the variables of the domain in terms of the remaining ones.

So the real upshot is that this geometric thing is truly determined by  $k$  variables, so we don't need the other variables. That's it. The theorem says how to get rid of the excess of info locally:  $g$  needs less variables and produces the geometric thing locally.



Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  suave tal que  $f(0) = 0$  e  $f'(0)$  é sobrejetiva ( $\implies n \geq m$ ). Então existe uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$   $U$  e  $\tilde{U}$  e um **difeomorfismo**  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  tal que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

*Demonstração.* Parecido à prova de [Tu10] no teorema do valor regular, usando uma matriz com um  $*$ , a identidade, e uma matriz invertível.  $\square$

### 3.1 Transversalidade: Teorema de Sard

A prova do teorema de Sard é muito técnica. Porém, a parte difícil é só análise em  $\mathbb{R}^n$ .

Pegue  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , defina um *cubo* como sendo

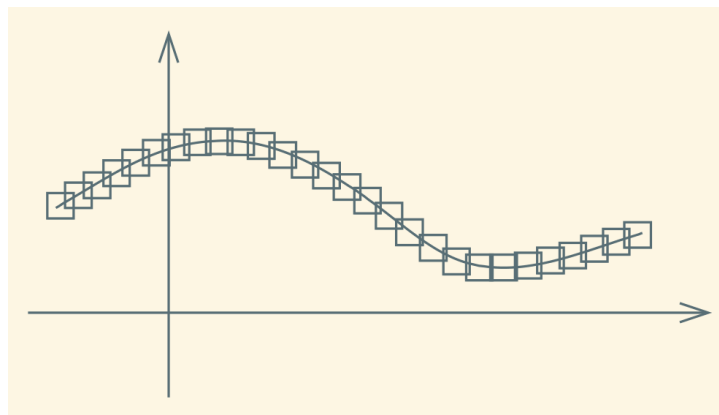
$$c(a, b) = \prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ \subset \mathbb{R}^n.$$

Note que  $\text{Vol}(a, b) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ .

**What [Lee13] does**

1. A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero.
2. Graph of continuous function has measure zero.
3. Affine subspaces of  $\mathbb{R}^n$  have measure zero.
4. Smooth map from manifold to  $\mathbb{R}^n$  maps measure zero to measure zero.
5. A set in a manifold has *measure zero* if it(s intersection with the respective domain) is mapped to a set of measure zero by any chart.
6. Confusing lemma.
7. Complement of zero measure is dense (in manifolds).
8. Smooth map *of manifolds* maps measure zero to measure zero.
9. Sard's theorem (heavy proof): critical value set of smooth map has measure zero.
10. Corollary (**minisard**): image of smaller dimension manifolds under smooth map has measure zero (Esto fue aclarado en clase: ¿por qué nosotros probamos minisard antes de sard? nuestra definición de punto crítico no permite aplicar este corolario; lo probamos de otra forma). Corollary 2: smaller dimension immersed submanifolds have measure zero.
11. Up next: Whitney embedding theorem.

**Definição**



$S \subset \mathbb{R}^n$  possui **medida nula** se  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$  cubos (ou bolas) tais que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(c_i) < \varepsilon$$

### Proposição

1. Uma união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
2.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$  e  $S \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula, então  $f(S)$  tem medida nula.

*Demonstração.*

1.  $\{S_i\}$  enumerável de medida nula, para cada  $i$  você pode escolher cubos  $C_1^i, C_2^i, \dots$  que cobrem  $S_i$  e tal que a soma dos volumes deles é menor do que  $\sum_j \text{Vol}(C_j^i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ . Vai ver que a soma dos volumeis variando tanto  $i$  como  $j$  da  $\varepsilon$ .
2. (Foto)

□

**Definição**  $X$  variedade diferenciável.  $S \subset X$ . Dizemos que  $S$  tem **medida nula** se  $\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  cobertura aberta de  $S$ , i.e.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supset S$ , e cartas  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S_i \subset U_i$  e  $\varphi(S)$  tem medida nula.

O más bien: sólo el chiste es que cada conjunto tiene medida en  $\mathbb{R}^n$  cuando proyectas con cualquier carta.

### Corolário

1.  $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ .  $S_i \subset X$  medida nula, entao  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  tem medida nula.
2.  $X^n, Y^n$  variedades,  $f : X \rightarrow Y$  suave,  $S \subset X$  medida nula. Então  $f(S)$  tem medida nula.

**Proposição**  $Y^n$  variedade,  $X^m \subset Y^n$  subvariedade de dimensão  $m < n$ . Então  $X$  tem medida nula.

*Demonstração.* É simplesmente levar para  $\mathbb{R}^n$ : considera  $X_i$  como a parte de  $X$  que está dentro de cada  $U_i$  no atlas de  $Y$  e vai ver que ele tem dimensão menor. Daí é só provar que subespaços (acho que lineares) de dimensão menor em  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão menor.  $\square$

**Corolário (Minisard)**  $X^m, Y^n$  variedades  $m < n$  e  $f : X \rightarrow Y$  suave. Então  $f(X)$  tem medida nula.

*Demonstração.* Aqui se usa o corolário: usar a inclusão  $\iota : X \rightarrow X \times \mathbb{R}^{n-m}, x \mapsto (x, 0)$ , compor com  $\tilde{f} : X \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow Y, (x, y) \mapsto f(x)$ . Então  $\tilde{f}(\iota(X)) = f(X)$ . O lance é que  $\iota(X)$  é uma subvariedade de codimensão positiva, então pela prop anterior tem medida nula. Daí  $f(X)$  também.  $\square$

**Corolário (Versão fácil do teorema de mergulho de Whitney)** Se  $X^n$  variedade diferenciável compacta, então existem

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}, \quad X \xrightarrow{\circ} \mathbb{R}^{2n}$$

**Teorema (Difícil de Sard)**

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad X \xrightarrow{\circ} \mathbb{R}^{2n-1}$$

*Prova do corolário.*

**Step 1** Mergulhar a variedade num espaço euclidiano *grande*. Pegue um atlas finito  $\{(U_i, \varphi_i)_{i=1}^k\}$ , note que  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  são mergulhos.

**Ideia**

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{nk} \\ p &\longmapsto (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \dots) \end{aligned}$$

Isso não dá. Para fazer bem precisamos de uma partição da unidade  $\{\rho_i\}_{i=1}^k$  subordinada a  $\{U_i\}_{i=1}^k$  cobertura. Defina  $\rho_i \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo zero fora do conjunto bom; note que essa função não é mais um mergulho, mas tudo bem. Agora faça  $X \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k}$

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k} \\ p &\longmapsto \left( (\rho_1 \varphi_1)(p), \dots, (\rho_k \varphi_k)(p) \right) \end{aligned}$$

**Exercício (Importante)** Mostre que  $\Phi$  é uma imersão injetiva.

**Step 2 Afirmação:**

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^N \implies \begin{cases} X \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n + 1 \\ X \xrightarrow{\circ} \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n. \end{cases}$$

*Prova da afirmação.* Vamos projetar a variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^n$  no plano ortogonal a algum vetor  $a \in \mathbb{R}^n$ . Resulta que

### Exercício

$$g : X \times X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(x, y, t) \longmapsto \text{pr}_a \circ f$$

é injetiva.

□

**Step 3 Ideia:** ver que em quase todo ponto podemos projetar.

Considere agora o mapa pushforward que pega um vetor tangente e manda mediante  $f$ :

$$h : TX \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(x, v) \longmapsto (Df)_x v$$

Agora note que

**Afirmação**  $a \notin \text{Im}(h) \iff \text{pr}_a \circ f$  é uma imersão  $\iff D(\text{pr}_a \circ f)_a$  é injetiva para toda  $x$ .

**Step 4** A prova termina usando minisard: as imagens de  $g$  e de  $h$  tem medida nula. Mesmo a união delas. Então existe um ponto fora dessa união.

□

**Definição** Sejam  $X^m, Y^k$  variedades,  $f : X \rightarrow Y$  suave, dizemos que

- (a)  $x \in X$  é **ponto crítico** se o posto de  $Df_x$  é menor do que  $\min(m, n)$ . (  $\iff$  não é surjetiva I think) *Aula 7: essa definição é que a derivada não é de posto máximo. Isso permite que o domínio tenha pontos regulares, así fez Sard e [GG74], mas não [Lee13], [GP10].*
- (b)  $x \in X$  é **ponto regular** se  $\text{posto } Df_x = \min(m, n)$ .
- (c)  $y \in Y$  é **valor crítico** se existe um ponto crítico tal que  $f(x) = y$ .
- (d)  $y \in Y$  é **valor regular** se  $\forall x \in f^{-1}(y)$ ,  $x$  é valor regular.

**Teorema (Sard)**  $f : X \rightarrow Y$  suave. Então  $\{\text{valores críticos}\}$  tem medida nula.

### Observação

1. Teorema vale se  $f$  é  $C^\ell$ , onde  $\ell > \max(m - n, 0)$ .

.

*Demonstração.*

**Step 1 Redução para a versão local.** Supomos que  $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ .  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  aberto.

$$\text{Crit } f = \{x \in 0 : \text{posto } f'(x) < \min(m, n)\}$$

Então  $f(\text{Crit}(f))$  tem medida nula. Para isso fazemos **indução em  $m$** .  $m = 0$  trivial.

$C_i$  vai ser o conjunto onde as derivadas parciais se anulam até  $i$ :

$$C_i = \left\{ p \in U : \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^\alpha} f_k(p) = 0 \forall \alpha, 0 < |\alpha| \leq i, \forall k \right\}.$$

Note que  $C_{i+1} \subset C_i \subset C_{i-1} \subset \dots \subset C_1 \subset C := \text{Crit } f$ .

**Objetivo**  $f(C)$  tem medida nula.

**Paso 1**  $f(C_N)$  tem medida nula para algum  $N \gg 0$ . **Crucial**

**Paso 2**  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula para toda  $i$ .

**Paso 3**  $f(C \setminus C_i)$  tem medida nula.

**Paso 1** Podemos supor sem perda de generalidade que  $U \subset$  cubo, a fórmula de Taylor diz que

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq K \cdot \|x - y\|_\infty^{i+1}$$

para todo  $x, y \in C_i$ .

Tem que botar  $C_i$  den' de um cubo  $D_j$  que se divide em  $r^m$  cubos de lado  $b/r$ .

Então  $f(D_j)$  está contido num cubo em  $\mathbb{R}^n$  de lado  $K \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{i+1} := R_j$ . Também note que pontos den' de  $D_j$  são tq.  $\|x - y\|_\infty \leq \frac{b}{r}$ .

Agora

$$f(C_i) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{r^m} D_j\right) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} f(D_j) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} R_j.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r^m} \text{Vol}(R_j) &= r^m \cdot K^n \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{(i+1) \cdot n} \\ &= \frac{K^n \cdot b^{n(N+1)}}{r^{n(N+1)-m}} \end{aligned}$$

**Step 2**

□

## 4 Aula 4

### 4.1 Teorema de Sard

**Teorema (Sard)**  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^\ell$ ,  $\ell > \max(m - n, 0)$ . Então  $\{\text{valores críticos}\}$  tem medida nula.

*Demonstração.* **Note que**  $\{\text{valores críticos}\} = f(\{\text{ptos críticos}\})$ .

Seja  $C = \{\text{ptos críticos de } f\}$ . Então aproximamos a conjunto onde todas as derivadas parciais são zero com o conjunto  $C_i$  onde as derivadas parciais até  $i$  se anulam.

**Passo 1**  $f(C_N)$  tem medida nula se  $N > \max(m - n, 0)$ . (Feito na aula pasada.)

**Passo 2**  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula

**Passo 3**  $f(C \setminus C_1)$  tem medida nula.

Concluimos porque  $f(C)$  é a união de três conjuntos de medida nula: um por cada passo. Segundo e terceiro passos são com indução em  $m$ .

Prova:

**Passo 1** Feito ontem.

**Passo 2** A ideia é que podemos dar coordenadas de dimensão 1 menos usando que a derivada  $i + 1$  não se anula. (Acho.)

**Passo 3** É parecido só que um pouco mas difícil. No caso anterior os valores da função  $h$  são zero, aqui não (ver foto). Aqui usamos

**Lemma** A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero:

$A \subset \mathbb{R}^n$  compacto tal que  $A \cap \{x\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^{n-1}$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $A$  tem medida nula.

*Prova do lema.* A ideia é pegar uma faixinha de altura  $x$  e cobrir esse pedaço de  $A$  com quadradinhos naquele plano  $C_j^x$ . Dai, “como  $A$  é compacto” podemos pegar um  $I_x \subset \mathbb{R}$  intervalo tal que para todo  $y \in I_x$  ( $y$  perto de  $x$ ), a faixinha de altura  $y$  fique contida em  $\bigcup_j I_x \times C_j^x$

**Ideia.** Como  $A$  é compacto podemos pegar um mini intervalo tal que todas as faixinhas muito pertinho (bom, a parte de  $A$  em cada faixinha) fica dentro dos quadradinhos  $C_j^x$  multiplicados por esse mini-intervalo.

Agora calculamos os volumes. Lembre de análise na reta (ver [Lee13] lem 6.2, tem que shrink os intervalos) que a soma dos comprimentos dos intervalos  $I_{x_i}$  que conformam uma cobertura essencial (não pode tirar nenhum dos abertos da coberta) de um intervalo  $L$  é menor do que duas vezes o tamanho do intervalo:  $\sum \text{compr}(I_{x_i}) < 2(2L) = 4L$ .

Em fim, a soma dos comprimentos é um número finito. Então fica que

$$\sum_{i,j} \text{Vol}(I_{x_i} \times C_j^{x_i}) = \sum_i \sum_j \text{Vol}_1(I_{x_i}) \text{Vol}_{n-1}(C_j^{x_i}) < \varepsilon \sum \text{Vol}_1(I_{x_i}) < 4L\varepsilon.$$

□

□

## 4.2 Espaço de jatos

Son como vectores de orden de diferenciabilidade más grande: a ideia é generalizar o espaço tangente e o espaço cotangente **para derivadas de ordem maior**.

### Definição

Dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  suaves que mandan  $p$  al mismo punto son equivalentes si existem cartas tales que las derivadas parciais de sus representaciones en coordenadas coinciden hasta orden  $k$ .

Sejam  $X, Y$  variedades diferenciáveis suaves e  $f, g : X \rightarrow Y$  suaves. Dizmos que  $f \sim_k g$  em  $p \in X$  se, intuitivamente, as derivadas parciais de  $f$  e  $g$  coincidem até ordem  $k$ . Isso é intuitivo porque precisamos pegar cartas para isso ficar bem definido: precisamos que existam cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  aoredor de  $p$  e  $f(p)$  tais que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)))$$

Los **jatos** son gérmes:

$$J^k(X, Y)_{p,q} = \{f : X \rightarrow Y : f(p) = q\} / \sim_k.$$

Isso generaliza o espaço tangente do seguinte jeito:

$$J^1(\mathbb{R}, Y)_{0,q} \cong T_q Y.$$

### Exercício

$$J^1(X, \mathbb{R})_{p,0} \cong T_p^* X.$$

*Solution.* Vamos definir uma correspondência que a cada jato associa um funcional em  $T_p^* X$  pensando que os vetores são classes de equivalência de curvas  $[\gamma]$ . Pegue um jato  $\sigma$ . Esse jato  $\sigma$  tem um representante  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (que manda  $p$  a zero). Pegue  $d_p f : T_p X \rightarrow \mathbb{R}$ , um elemento de  $T_p^* X$ . É claro que esta correspondência está bem definida: se  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  está relacionada com  $f$ , as derivadas parciais delas coincidem em  $p$ , de forma que  $d_p f = d_p g$ . A contenção oposta é evidente: toda forma em  $T_p^* X$  é a diferencial de algum jato já que a base canônica de  $T_p^* X$  está dada por diferenciais de funções em  $p$ .  $\square$

Daí definimos o *espaço de k-jatos*:

$$J^k(X, Y) := \bigsqcup_{\substack{p \in X \\ q \in Y}} J^k(X, Y)_{p,q}$$

Então pega um jato  $\sigma \in J^k(X, Y)$ . Isso cuspe um  $p$  e um  $q$  tais que  $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$ . Definamos as funções

$$\begin{aligned} \alpha : J^k(X, Y) &\longrightarrow X & \beta : J^k(X, Y) &\longrightarrow Y \\ \sigma &\longmapsto p & \sigma &\longmapsto q \end{aligned}$$

**Exemplo**  $X = U \subset \mathbb{R}^n, Y = V \subset \mathbb{R}^m$  abertos. O que é o espaço de jatos neste caso?

Tem uma bijeção

$$\begin{aligned} J^k(U, V)_{x,y} &\xrightarrow{\cong} B_{n,m}^k \\ f &\longmapsto (f_1^k, \dots, f_m^k) \end{aligned}$$

Lance: pode pensar que esas funções são polinomias de grau máximo  $k$ .

$$B_{n,m}^k = \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : p \text{ polinomial de grau } \leq k \text{ tal que } p(0) = 0\}.$$

**Exercício** Calcule a dimensão de  $B_{n,m}^k$ .

*Solution.* Enquanto eu achei que a dimensão era  $k^m$ , porque cada espaço de polinomios (em uma variável, sem termo constante) está gerado por  $\langle x, x^2, \dots, x^k \rangle$  e temos  $m$  deles, errei. Porque são polinomios em  $n$  variáveis. Então a base do espaço de polinomios em  $n$  variáveis de grau máximo  $k$  e sem termo constante e... o conjunto de monomios linearmente independentes de grau máximo  $k$

Façamos um polinomio de  $n$  variáveis de grau máximo  $k$ . Tendo  $n$  variáveis, pode pegar só uma delas, ai tem  $n$  opções. Pode pegar duas delas, ai tem mais  $n^2$  opções. Tres, quatro, até  $k$  delas. Tem  $\sum_{i=1}^k n^i$  diferentes monomios. **Mas...** o que acontece com a ordem?

De acordo com ChatGPT, o problema fica melhor quando pensamos que a cada variável (=indeterminada  $x_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ ) de um monómio associamos um número inteiro maior o igual de que 0, o expoente da variável. Daí a quantidade de monomios de grau  $i$  é simplesmente a quantidade de vetores inteiros não negativos  $a_j$  tais que  $\sum a_j = i$ . Isso é o mesmo que a quantidade de formas de acomodar  $i$  bolinhas em  $n$  caixinhas. Isso é o mesmo que a quantidade de formas de acomodar  $n - 1$  divisionsinhas numa lista de  $i$  bolinhas (porque todas as bolinhas são iguais). Então são  $i + n - 1$  coisas (divisionsinhas ou bolinhas) numa linha, e nesses  $i + n - 1$  lugares escolhemos  $n - 1$  para botar as divisionsinhas. O resultado é  $\binom{i+n-1}{n-1}$ . Somar sobre  $i$ . Elevar à  $m$ .  $\square$

$$\begin{array}{ccc} J^k(U, V) & \xrightarrow{\cong} & U \times V \times B_{n,m}^k \\ & \searrow \alpha & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

Creo que: definimos  $f_i^k$  como as "partes sem constante dos polinómios de Taylor de ordem  $k$  das coordenadas de  $f$ ", **CREO QUE la idea es que la clase de equivalencia  $[f]$  está determinada por los principios de los polinomios de Taylor de sus funciones coordenadas.**

No entendí esto pero va:

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{polinomial}$$



$x_0 \in U, y_0 \in V$ , entre aspas:

$$f(x - x_0) = y_0 + p(x - x_0),$$

$f(U) \subset V$ . Em fim, temos que

2.  $J^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times T^*M$ .
3.  $J^1(\mathbb{R}, M) \cong \mathbb{R} \times TM$ .

Agora o pushforward e o pullback, que basicamente é precompor e poscompor:

### Definição

1.  $\varphi : Y \rightarrow Z$  suave,  $X$  variedade suave. O **pushforward** é

$$\begin{aligned} \varphi_* : J^k(X, Y) &\longrightarrow J^k(X, Z) \\ [f]_x &\longmapsto [\varphi \circ f]_x \end{aligned}$$

2. O **pullback** é... mas aqui **precisamos que  $\psi$  seja difeomorfismo**

$$\begin{aligned} \psi^* : J^k(X, Y) &\longrightarrow J^k(Z, Y) \\ [f]_x &\longmapsto [f \circ \psi]_{\psi(x)} \end{aligned}$$

### Observação

1.  $\sigma \in J^k(X, Y)_{x,y}, \varphi_* \sigma \in J^k(X, Z)_{x, \varphi(y)}$
2.  $\sigma \in J^k(X, Y), \psi^* \sigma \in J^k(Z, Y)_{\psi^{-1}(x), y}$

#### 4.2.1 Estrutura diferenciável no espaço de jatos

#### 4.2.2 When dani finally understood this

Here's how the charts (and the topology) of  $J^k(X, Y)$  is constructed.

1. Choose charts  $(U, \varphi)$  of  $X$  and  $(V, \psi)$  of  $Y$ .
2. Take the jet space  $J^k(U, V)$  to an euclidean jet space via the induced maps of the charts:

$$(\psi^{-1})^* \varphi_* : J^k(U, V) \rightarrow J^k(U', V')$$

where  $U' = \varphi(U)$  and  $V' = \psi(V)$ .

3. Now that you are in euclidean space you can compute Taylor polynomials: a  $k$ -jet  $[f] \in J^k(U', V')$  has coordinate functions, the Taylor polynomials of which are well-defined up to order  $k$ :

$$\begin{aligned} f : U' \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow V' \subset \mathbb{R}^m \\ x_0 &\longmapsto (f_1(x_0), \dots, f_m(x_0)) \end{aligned}$$

Define

$$T_k f_i(x_0) := \text{Taylor polynomial of } f_i \text{ at } x_0 \text{ up to degree } k.$$

4. Realise: for every  $k$ -jet  $[f] \in J^k(U', V')$  its coordinates are:

$$\begin{aligned} (\alpha[f], \beta[f], T_k f_1(\alpha[f]), \dots, T_k f_m(\alpha[f])) &\in U' \times V' \times P_n^k \times \dots \times P_n^k \\ &= U' \times V' \times B_{n,m}^k. \end{aligned}$$

where  $\alpha[f]$  is (the coordinates of) the source,  $\beta[f]$  its target.

**The point is** that when you take an open set of  $J^k(X, Y)$  you are basically taking an open set of  $X$ , an open set of  $Y$ , and *an open set in some crazy polynomial space (that is not crazy at all: it's euclidean space!)*. So, its just a product of

$$\text{open set in } X \times \text{open set in } Y \times \text{crazy euclidean space } \mathbb{R}^N$$

Never forget that this is what a basic open set in  $J^k(X, Y)$  looks like.

#### 4.2.3 how this can also be something else

Now we read the book of Mukherjee

The space of polynomials of degree  $\leq r$  with constant term equal to zero defined on  $\mathbb{R}^n$  with values in  $\mathbb{R}^m$  is

$$P^r(n, m) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times L_s^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \dots \times L_s^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

where  $L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  is the space of  $k$ -multilinear maps  $L(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  and the little  $s$  means they are symmetric.

So we also have

$$P^r(n, m) = \underbrace{P_n^r \oplus \dots \oplus P_n^r}_{m \text{ summands}}$$

where  $P_n^r$  is the set of all polynomial functions in  $n$  variables.

**Superlemma 8.1.3 (Mukherjee)** Let  $U \subset \mathbb{R}_+^n$  and  $V \subset \mathbb{R}^m$  be open subsets. Then there is a canonical bijection

$$\begin{aligned} h_{U,V} : J^r(U, V) &\longrightarrow U \times V \times P^r(n, m) \\ j^r f &\longmapsto (p, f(p), Df(p), \dots, D^r f(p)) \end{aligned}$$

where  $D^k f$  is the  $k$ th total derivative of  $f$ , a  $k$ -multilinear map from  $\mathbb{R}^n$  to  $\mathbb{R}^m$ , i.e. an element of  $L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  defined inductively by taking the derivative of the derivative etc. (Symmetric I think because partial derivatives commute.)

**Now we see** that two things that are similar and yet very different can be used interchangeably: the “differential coordinates” of a jet (=the part of the coordinates that is not the coordinates in  $X$  nor  $Y$ ) can be seen as:

- the truncated Taylor polynomials of the  $m$  coordinate functions of  $f$  at some local charts,
- the total differentials of  $f$  from 1 to  $k$ .

**Last but not least** these open sets are in fact jet spaces of the form  $J^k(U, V)$ .

#### 4.2.4 Lecture notes

Pegue  $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$  e cartas  $(U, \varphi)$  de  $p$  e  $(V, \psi)$  de  $q$ . **Ideia:** usar o pushforward e o pullback das cartas para levar o problema no  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercício** Considere

$$J^k(U, V) = \bigsqcup_{\substack{p \in U \\ q \in V}} J^k(X, Y)_{p,q}.$$

Então

$$\begin{aligned} J^k(U, V) &\longrightarrow J^k(\varphi(U), \psi(V)) \\ \sigma &\longmapsto \psi_*(\varphi^{-1})^* \sigma \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Então para dar uma estrutura de variedade topológica no espaço de jatos note que também

$$J^k(\varphi(0), \varphi(V)) \cong \varphi(0) \times \varphi(V) \times B_{n,m}^k \subset \mathbb{R}^{n+m+\dim B_{n,m}^k}$$

(lo bueno es que ya sabes cual es la dimension de  $B_{n,m}^k$ . Mas não interessa qual é a dimensão: o importante é que o  $B_{n,m}^k$  tem uma base, é um espaço vetorial.) ) Em fim, tudo isso dá uma estrutura de variedade topológica. Para terminar só temos que ver o que acontece com as mudanças de coordenadas.

$$\begin{aligned} \varphi(U) \times \psi(V) \times B_{n,m}^k &\longrightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \times \tilde{\psi}(\tilde{V}) \times B_{n,m}^k \\ (p, q, f) &\longmapsto (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(p), \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}(q)) \end{aligned}$$

**Isso é suave!** E isso implica que  $J^k(X, Y)$  é uma  $C^\infty$  variedade de dimensão  $n + m + \dim B_{n,m}^k$ .

## 5 Aula 5: topologia de Whitney

1. Terminamos a estrutura de variedade diferenciável do espaço de jatos. As cartas são

$$J^k(\varphi(U), \psi(V)) \xrightarrow{\text{bijeção}} \varphi(U) \times \psi(U) \times B_{n,m}^k \subset \mathbb{R}^N$$

lembramos como ver que as funções de transição são suaves (**exercício: fazer detalhes**)

- 2.

**Definição** Sejam  $E, B, F$  variedades dif.  $\pi : E \rightarrow B$  suave é um *fibrado* com fibra  $F$  se

- $\pi$  é uma submersão sobrejetiva.

- para todo  $b \in B$  existe  $U \subset B$  aberto  $U \ni b$  e um difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\text{dif}} & U \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array}$$

3.  $\alpha$  e  $\beta$  são fibrados. Também  $\alpha \times \beta : J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y$ . As fibras do último são difeomorfismos a um espaço vetorial (polinômios  $B$ ) mas esse difeomorfismo não induz estrutura de espaço vetorial. Caso  $Y = \mathbb{R}^n$  pode sim pq os jatos são funções em  $m\mathbb{R}^n$ , assim pode botar estrutura de espaço vetorial nas fibras.
4. Para cada função  $f \in C^\infty(X, Y)$  temos uma **seção** de  $J^k(X, Y)$  chamada  $j^k f : X \rightarrow J^k(X, Y)$  dada por  $x \mapsto [f]_x$ .
5. Topologia de Whitney  $C^k$  defn.
6. Lema:  $k \leq \ell \implies W_k \subset W_\ell$ .
7. Def: a topologia  $C^\infty$  **de Whitney** é a topologia gerada por  $\bigcup_{k=1}^\infty W_k$  onde  $W_k$  é a  $k$ -ésima. “ $U$  é aberto em  $C^\infty$ ” se para todo  $x \in U$  existe  $V$  aberto em algum  $C^k$  (para todo  $x$  existe  $V$  e existe  $k$ ) tais que  $x \in V \subset U$ .
8. Def: Seja  $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  e  $f \in C^\infty(X, Y)$  definimos a  $\delta$ -bola como

$$D_\delta(f) = \{f \in C^\infty(X, Y) \mid d(j^k f(x), j^k g(x)) < \delta(x) \forall x \in X\}$$

onde  $d$  é qualquer métrica em  $J^k(X, Y)$ . (A distancia entre as derivadas é muito pequena.)

9. Prop:  $\{B_\delta(f) : \delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+\}$  é uma base local centrada em  $f$  da topologia  $C^k$ , i.e.
  - $B_\delta(f)$  é aberto.
  - $\forall \mathcal{W} \ni f$  aberto, existe  $\delta$  tal que  $B_\delta(f) \subset \mathcal{W}$ .
10. Fix: a locally finite atlas  $\Phi$  of  $X$  with a  $\subseteq$  cover (every open set of the cover contains an open subset whose closure is compact and contained in the original open set), an atlas  $\Psi$  of  $Y$ , e uns números positivos  $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$ , e uma função  $f \in C^\infty(X, Y)$ . Então a topologia gereada por (foto) coincide com a topologia  $C^k$ .
11. Obs: quando  $X$  é compacto,  $\delta_n = \frac{1}{n}$ ,  $\{B_{\delta_n}(f)\}$  é uma base local da topologia  $C^k$ .
12. Prop: seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(X, Y)$ ,  $f_n \xrightarrow{C^k} f$ . Então existe  $K \subset X$  compacto tal que  $f_n \equiv f$  em  $X \setminus K$  e  $j^k f_n \xrightarrow{u} j^k f$  em  $K$ .

## 6 Aula 6: topologia de Whitney (cont.). Teoremas de transversalidade.

### 6.1 Topologica de Whitney (cont.)

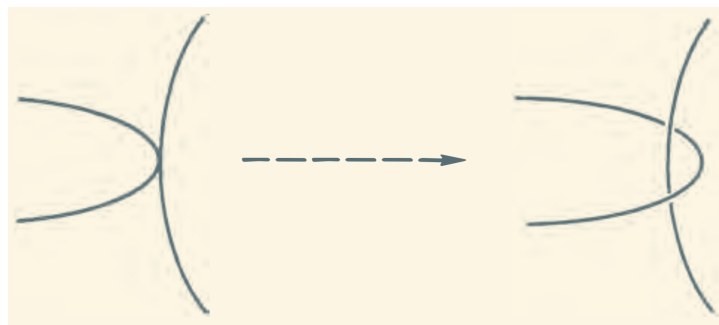
1. Lembrança das topologias  $C^k$  e  $C^\infty$ .
2.  $X$  variedade não compacta existe  $\{K_n\}$  compactos tais que  $K_n \subset \mathring{(K_{n+1} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n)} = X$ . Também existe  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\rho|_{K_{2n+1} \setminus K_{2n}} = 2$ .  $\rho$  é própria.
3. Em toda variedade existe uma métrica completa (análise em variedades...).
4. Definição de espaço de Baire.
5. Teo (Prop 3.3). Se  $X, Y$  são variedades suaves, então  $C^\infty(X, Y)$  é um espaço de Baire na topologia  $k = 1, 2, \dots, +\infty$ .
6. Prop 3.X,  $Y$  variedades diferenciáveis  $j^k : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, J^k(X, Y))$  é contínua em  $C^\infty$ .
7.  $\phi : Y \rightarrow Z$  suave então  $\phi_* : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, Z)$ ,  $f \mapsto \phi \circ f$  é contínua em  $C^\infty$ . Também  $C^\infty(X, Y) \times C^\infty(X, Z) \rightarrow C^\infty(X, Y \times Z)$ ,  $(f, g) \mapsto f \times g$ .

### 6.2 Teoremas de transversalidade

A ideia é que a transversalidade é uma condição genérica.

1. Def:  $X, Y, f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $W \subset Y$  subvariedade.  $f$  é **transversal** a  $W$  se para todo  $x \in f^{-1}(W)$ ,
 
$$df_x(T_x W) + T_{f(x)} W = T_{f(x)} Y.$$
2. Obs. Isso impoe restrições sobre as dimensoes: se  $f \pitchfork W$  e  $f^{-1}(W) \neq \emptyset$ . Então  $\dim X + \dim W \geq \dim Y$ .

**Observação** ([GP10], p. 35) Why can't two curves in  $\mathbb{R}^3$  never intersect transversally (except if they do not intersect at all)? Doesn't make sense because of course they can intersect transversally, right? what happens is that *by a small deformation of either curve, one can abruptly pull the two entirely apart; their intersection is not stable*:



3. Teorema muito importante.  $X, Y$  variedades suaves  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $W \subset Y$  subvariedade,  $f \pitchfork W$  e  $f^{-1}(W) \neq \emptyset$ . Então  $f^{-1}(W) \subset X$  é uma subvariedade e  $\text{codim } f^{-1}(W) = \text{codim}(W)$ .

Outra encarnação do teorema da função inversa.

**Observação** ([GP10], p. 29) When  $W$  is just a single point, its tangent space is the zero subspace of  $T_y(Y)$ . Thus  $f$  is transversal to  $y$  if  $df_x[T_x(X)] = T_y(Y)$  for all  $x \in f^{-1}(y)$  **which is to say that  $y$  is a regular value of  $f$** . So transversality includes the notion of regularity as a special case.

## 7 Aula 7

1. Prop: Sejam  $X, Y$  variedades e  $W \subset Y$  subvariedade fechada como subconjunto.

$$T_W := \{f \in C^\infty(X, Y) : f \pitchfork W\}$$

é aberto em  $C^\infty$ .

A ideia é que podemos perturbar variedades que se intersectam transversalmente, e isso fica transversal que podemos perturbar variedades que se intersectam transversalmente, e isso fica transversal.

2. Prop: Sejam  $X, Y, B$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade,  $j : B \rightarrow C^\infty(X, Y)$  (não podemos supor que  $j$  é contínua. Considere também

$$\begin{aligned} \Phi : X \times B &\longrightarrow Y \\ (x, b) &\longmapsto j(b)(x). \end{aligned}$$

Suponha que  $\Phi \pitchfork W$ .

Então  $\{b \in B : j(b) \pitchfork W\}$  é denso em  $B$ . (Também é verdade que esse conjunto tem medida total.)

3. Corolário 4.7.

4. Teorema de transversalidade de Thom. (Formulação.)

5. Coro 4.11. (Formulação.)

## 8 Aula 8: teorema de transversalidade de Thom; multi-jatos

### 8.1 Teorema de transversalidade de Thom

**Teorema (de transversalidade de Thom)** Sejam  $X, Y$  variedades diferenciáveis,  $W \subset J^k(X, Y)$  subvariedade. Então

$$\{d \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W\}$$

é residual (=interseção de abertos densos).

(Se  $W$  é fechado, então o conjunto também é aberto.)

*Demonstração.* Primeiro, para o último comentário ali entre parêntese, note que se  $W$  é fechado,

$$U = \{g \in C^\infty(X, J^k(X, Y)) : g \pitchfork W\}$$

é aberto. Note que  $T_W = (j^k)^{-1}(U)$ .

Como  $j^k : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, J^k(X, Y))$  é contínua,  $T_W$  é aberto.

**Começa a prova.** OK então pegue  $\sigma \in W$ . Seja  $W_\sigma \subset W$  uma vizinhança, e cartas  $\varphi_\sigma : U_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi_\sigma : V_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$  tais que

1.  $\alpha(\sigma) \in U_\sigma, \beta(\sigma) \in V_\sigma$ .
2.  $\overline{W}_\sigma, \overline{U}_\sigma$  compactos.
3.  $\alpha(\overline{W}_\sigma) \subset U_\sigma, \beta(\overline{W}_\sigma) \subset V_\sigma$ .
4.  $\psi_\sigma(V_\sigma) = \mathbb{R}^m$ .

Então beleza. Agora pegue

$$T_\sigma = \{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W \text{ em } \overline{W}_\sigma\}$$

Então

$$\bigcap_{\sigma \in W} T_\sigma = T_W.$$

Como  $W$  é 2-enumerável, podemos escolher  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_{\sigma_n} = W$ . Logo

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_{\sigma_n} = T_W.$$

**Afirmção**  $T_\sigma$  é aberto e denso.



*Prova da afirmação.*

**Proposição (da aula passada modificada)**  $X, Y$  variedades dif.  $W \subset Y$  subvariedade,  $W' \subset W$  fechado em  $Y$ . Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W \text{ em } W'\}$$

é aberto.

Ussando essa proposição é o fato de que  $j^k$  é contínua, mostramos que  $T_\sigma$  é aberto.

Para ver que  $T_\sigma$  é denso considere  $f \in C^\infty(X, Y)$ . Vamos construir  $\{g_n\} \subset C^\infty(X, Y)$  tal que  $g_n \xrightarrow{C^\infty} f$  e  $g_n \in T_\sigma$ .

Vamos escolher

$$\rho_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \quad \rho_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$$

suaves,  $\rho_1 \equiv 1$  numa vizinhança de  $\varphi_\sigma(\alpha(\overline{W}_\sigma))$ ,  $\rho_2 \equiv 1$  numa viz. de  $\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma))$ ,  $\text{supp } \rho_1, \text{supp } \rho_2$  compactos (partição da unidade).

Seja  $B = \{\text{funções polinomiais de } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de grau } \leq k\} \cong \mathbb{R}^m \oplus B_{n,m}^k$ .

Para  $b \in B$ , definimos  $g_b : X \rightarrow Y$ ,

$$g_b = \begin{cases} \psi_\sigma^{-1}(\psi_\sigma(f(x)) + \rho_2(\psi_\sigma(f(x)))\rho_1(\varphi_\sigma(x)) \cdot b(\varphi_\sigma(x))), & \text{se } x \in U_\sigma \text{ e } f(x) \in V_\sigma \\ f(x) & \text{se } x \notin U_\sigma \text{ e } f(x) \notin V_\sigma \end{cases}$$

$g_0 = f$ .

**Intuition for  $g_b$  by ChatGPT.** The function  $g_b$  is a smooth perturbation of  $f$  designed to ensure  $j^k g_b \pitchfork W$  in  $\overline{W}_\sigma$ . Locally, near  $\overline{W}_\sigma$ ,  $g_b$  behaves like  $f$  plus a polynomial perturbation  $b(\varphi_\sigma(x))$ , where  $b \in B$  spans the  $k$ -jet space. The partition of unity functions  $\rho_1, \rho_2$  localize the perturbation to a compact region, ensuring  $g_b$  is globally smooth and matches  $f$  outside this neighborhood.

Agora:

$$\begin{aligned} \Phi : X \times B &\longrightarrow J^k(X, Y) \\ (x, b) &\longmapsto j^k g_b(x) \end{aligned}$$

**Dependence of  $g_b$  on  $b$ .** For each  $b \in B$ , where  $B$  is the space of polynomials of degree  $\leq k$  in the local coordinates  $\varphi_\sigma(x)$ , there is a corresponding perturbation  $g_b$ . The choice of  $b$  determines how  $g_b$  modifies  $f$  locally near  $\overline{W}_\sigma$ . The perturbation:

- Is localized to  $\overline{W}_\sigma$  by the partition of unity functions  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , ensuring  $g_b = f$  outside  $U_\sigma$ .
- Explores all possible modifications in the  $k$ -jet space  $B_{n,m}^k$ , making the construction rich enough to enforce transversality.

While  $b$  can be chosen freely from  $B$ , the perturbation is controlled, smooth, and compactly supported, ensuring  $g_b$  remains globally well-behaved.

**Ideia:**  $\Phi \models W$ .

Seja  $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma)), \rho_2^{-1}([0, 1])) > 0$ .

$$\tilde{B} = \{b \in B : \|b(x)\| < \varepsilon \forall x \in \text{supp } \rho_1\}$$

aberto,  $0 \in \tilde{B}$ .

**The subset  $\tilde{B}$  (GPT).** The set  $\tilde{B}$  is a subset of the polynomial space  $B$ , defined as:

$$\tilde{B} = \{b \in B : \|b(x)\| < \varepsilon \forall x \in \text{supp } \rho_1\},$$

where  $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma)), \rho_2^{-1}([0, 1])) > 0$ . This means that  $\tilde{B}$  contains only those polynomials  $b(x)$  whose values are bounded by  $\varepsilon$  within the support of  $\rho_1$ . The set  $\tilde{B}$  is open in  $B$ , and  $0 \in \tilde{B}$ .

$\tilde{\Phi} : \Phi|_{X \times \tilde{B}} : X \times \tilde{B} \rightarrow J^k(X, Y)$  é um difeomorfismo local numa viz. de  $(x, 0)$ , onde  $\Phi(x, b) \in \overline{W}_\sigma$ .

$(x, b)$  t.q.  $\Phi(x, b) \in \overline{W}_\sigma$ .  $j^k g_b(x) \implies x \in \alpha(\overline{W}_\sigma)$ ,  $g_b(x) = \beta(\Phi(x, b))$ .

$$\Psi_b(g_b(x)) = \Psi_\sigma(f(x)) + \rho_2(\psi_\sigma(f(x)))\rho_1(\varphi_\sigma(x))b(\varphi_\sigma(x)).$$

$$\|\Psi_\sigma(g_b(x)) - \Psi_\sigma(f(x))\| \leq \|b(\varphi_\sigma(x))\| < \varepsilon.$$

Então

$$\rho_2(b(\varphi_\sigma(x))) = 1.$$

$$g_b(x) = \psi_\sigma^{-1}(\psi_\sigma(f(x)) + b(\varphi_\sigma(x)))$$

$$g'_b(x) = \psi_\sigma^{-1}(\psi_\sigma(f(x)) + b'(\varphi_\sigma(x)))$$

para  $b'$  suficientemente próxima de  $b$ . **Isso implica que  $\Phi$  é um difeomorfismo local para todo  $(x, b) \in \Phi^{-1}(\overline{W}_\sigma)$ .**

**Summary of  $\tilde{B}$  and its Role (GPT).** The set  $\tilde{B} = \{b \in B : \|b(x)\| < \varepsilon \forall x \in \text{supp } \rho_1\}$ , where  $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma)), \rho_2^{-1}([0, 1])) > 0$ , defines a controlled subset of perturbations. Perturbations  $b \in \tilde{B}$  ensure that:

- The map  $\tilde{\Phi} = \Phi|_{X \times \tilde{B}} : X \times \tilde{B} \rightarrow J^k(X, Y)$  is a local diffeomorphism near  $(x, 0)$ , allowing smooth control of  $j^k g_b$ .
- For  $(x, b)$  such that  $\Phi(x, b) \in \overline{W}_\sigma$ , we have  $x \in \alpha(\overline{W}_\sigma)$  and  $g_b(x) = \beta(\Phi(x, b))$ , ensuring the perturbation is relevant to  $\overline{W}_\sigma$ .
- The bound  $\|\Psi_\sigma(g_b(x)) - \Psi_\sigma(f(x))\| < \varepsilon$  ensures the perturbation remains localized, with  $\rho_2 = 1$  in the active region, maintaining smoothness and compact support.

This construction ensures  $g_b$  perturbs  $f$  only where needed, while staying smooth and controlled globally.

Logo  $\tilde{\Phi}$  é submersão para todo  $x \in \tilde{\Phi}^{-1}(\overline{W}_\sigma)$ .

Logo  $d\tilde{\Phi}_{(x,b)}(T_{(a,b)}(X \times \tilde{B}) + T_{\tilde{\Phi}(x,b)}W = T_{\tilde{\Phi}(x,b)}(J^k(X, Y)) \implies \tilde{\Phi} \pitchfork W$  em  $X \times \tilde{B}$ .

Pelo lema da aula passada

$$j^k g_b = \Phi_b \pitchfork W$$

para um conjunto denso de  $b \in \tilde{B}$ . Então existe  $b_n \rightarrow 0$  tal que  $j^k g_{b_n} \pitchfork W$  em  $\overline{W}_\sigma$ ,  $g_{b_n} \xrightarrow{C^\infty} f$ . (Tem uma conta aqui para ser feita.)

**Final Step of the Proof.** The map  $\tilde{\Phi} : X \times \tilde{B} \rightarrow J^k(X, Y)$  is a submersion on  $\tilde{\Phi}^{-1}(\overline{W}_\sigma)$ , meaning:

$$d\tilde{\Phi}_{(x,b)}(T_{(x,b)}(X \times \tilde{B})) + T_{\tilde{\Phi}(x,b)}W = T_{\tilde{\Phi}(x,b)}(J^k(X, Y)).$$

This implies  $\tilde{\Phi} \pitchfork W$  on  $X \times \tilde{B}$ .

By a previous lemma, for a dense subset of  $b \in \tilde{B}$ , we have:

$$j^k g_b = \tilde{\Phi}_b \pitchfork W \text{ on } \overline{W}_\sigma.$$

Thus, there exists a sequence  $b_n \rightarrow 0$  in  $\tilde{B}$  such that:

$$j^k g_{b_n} \pitchfork W \text{ on } \overline{W}_\sigma, \quad \text{and} \quad g_{b_n} \xrightarrow{C^\infty} f.$$

This concludes the proof by showing that  $f$  can be approximated arbitrarily closely by maps achieving transversality.

□

□

**Corolário (da demonstração)** Sejam  $X, Y$  variedades,  $W \subset J^k(X, Y)$  subvariedade, agora já sei que  $\alpha(\overline{W}) \subset U$ ,  $U$  aberto de  $X$ . “So preciso modificar a função num conjunto aberto, não preciso modificar a função globalmente.”

Então existe  $g \in \mathcal{U}$  tal que  $j^k g \pitchfork W$  e  $g \equiv f$  em  $X \setminus U$ .

**Corolário (Versão simples da transversalidade)**

(a)  $X, Y$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade. Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : f \pitchfork W\}$$

é denso.

Se  $W$  é fechado, então esse conjunto é aberto.

(b)  $U_1, U_2 \subset X$  abertos,  $\overline{U_1} \subset U_2$ . Então existe  $g \in C^\infty(X, Y)$  tal que  $f \equiv g$  em  $U_1$ ,  $g \pitchfork W$  em  $X \setminus U_2$ . (É só aplicar o corolário para caso de 0-jatos.

## 8.2 Multijatos

Um pouco mais de teoria para obter corolários bonitos.

$X, Y$  variedades,  $s \in \mathbb{N}$ .

$$X^{(s)} = \{(x_1, x_s) \in X^s : x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

(são os pontos que não tem duas coordenadas iguais). Isso é claramente aberto em  $X^s$ .

$$\begin{aligned} \alpha^s : J^k(X, Y)^s &\longrightarrow X^s \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) &\longmapsto (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) \end{aligned}$$

O espaço de *multijatos* é o espaço de  $s$ -jatos tal que cada jato está num ponto diferente:

$$J_s^k(X, Y) := (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$$

i.e.  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in J_s^k(X, Y)$  sse  $\sigma_i = j^k f_i(x_i)$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ .

Note que

$$J_s^k(X, Y) \subset J^k(X, Y)^s$$

é aberto.

E agora

$$\alpha^s : J_s^k(X, Y) \rightarrow X^{(s)}$$

fibrado.

Para  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,

$$\begin{aligned} j_s^k f : X^{(s)} &\longrightarrow J_s^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_s) &\longmapsto (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)) \end{aligned}$$

**Teorema (transversalidade para multijatos)** Sejam  $X, Y$  variedades e  $W \subset J_s^k(X, Y)$  sub-variedade.

$$T_w = \{f \in C^\infty(X, Y) : j_s^k f \pitchfork W\}$$

é residual. Além disso, se  $W$  é **compacto**, então  $T_W$  é aberto.

## 8.3 Imersão e mergulho de Whitney

Sejam  $X, Y$  variedades,  $\sigma = j^1 f(x) \in J^1(X, Y)$ ,  $\text{rk } \sigma = \text{rk}(df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y)$ . Definimos o *coposto* como sendo

$$\text{corank} = \min(n, m) - \text{rk } \sigma$$

**Lemma** Seja  $S_r = \{\sigma \in J^1(X, Y) : \text{corank } \sigma = r\}$ .  $f$  é imersão ( $n \leq m$ ) ou submersão ( $n \geq m$ ) sse  $j^1 f(X) \cap \bigcup_{r \geq 1} S_r = \emptyset$ .

**Teorema (Imersão de Whitney)** Sejam  $X, Y$  variedades tais que  $m \geq 2n$ . Então

$$\text{Im}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ é imersão}\}$$

é aberto e denso.

**Proposição**  $S_r$  é uma subvariedade de codimensão  $(n - q + r)(m - q + r)$ , onde  $q = \min(m, n)$  (o posto máximo).

*Demonstração.*  $S_r$  é um fibrado sobre  $X \times Y$  cuja fibra é

$$\{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \text{corank } k = r\}$$

Pega uma transformação linear de posto  $r$ ,  $M \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ,  $q = \min(n, m)$ ,  $k = \text{rk } M = q - r$ . Então

$$[M] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Seja  $U$  uma viz. de  $M$  em  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Pegue  $M' \in U$ . Então

$$[M'] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Vamos multiplicar  $M'$  por uma matriz que preserva o rank:

$$\begin{aligned} \text{rk } M' &= \text{rk} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -C'(A')^{-1} & I_{m-k} \end{bmatrix}_{m \times m} M' \\ &= \text{rk} \begin{bmatrix} A' & B' \\ 0 & D' - C'(A')^{-1}B' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como é que o posto dessa matriz é  $k$ ? Isso acontece se  $D' - C'(A')^{-1}B' = 0$ .

Ou seja,  $M' \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \iff D' - C'(A')^{-1}B' = 0$ .

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^{m-k}) \\ [M'] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} &\longmapsto [D' - C'(A')^{-1}B'] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cap U = \varphi^{-1}(0).$$

Submersão, pois

$$\varphi \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & * \end{bmatrix} = \text{Id} - C'(A')^{-1}B'$$

$$\text{codim } \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = (n - k)(m - k) = (m - q + r)(n - q + r)$$

□

Do teorema de imersão de Whitney.

$$\begin{aligned}\text{Im}(X, Y) &= \{f : j^1 f(X) \subset S^0\} \\ &= \{f : j^1 f(X) \cap \bigcup_{r \geq 1} S_r = \emptyset\}.\end{aligned}$$

□

## 9 Aula 9

### 9.1 Teorema das imersões injetivas

**Teorema (das imersões injetivas)**  $X^n, Y^m$  variedades dif.  $m \geq 2n + 1$ ,

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : f \text{ imersão injetiva}\}$$

é residual.

*Demonstração.* Note que  $f$  não é injetiva pode ser dito na linguagem de multijatos assim:  $\exists (x_1, x_2) \in X^{(2)}$  tal que  $j_2^0 f(x_1, x_2) \in X^{(2)} \times \Delta_Y$ .

Logramos argumentar que  $f$  é injetiva se  $j_2^0 f(X^{(2)}) \cap W = \emptyset$  para  $W = X^{(2)} \times \Delta_Y \subset J_2^0(X, Y)$ , note que  $\text{codim } W = \dim Y = m$ . Dai  $\dim X^{(2)} = 2n < m = \text{codim } W$ . Dai  $j_2^0 f \cap W \iff j_2^0 f(X^{(2)}) \cap W = \emptyset$ .

aplicamos teorema de transversalidade de multijatos, obtendo que  $\text{Inj}(X, Y)$  é residual, e o resultado segue. □

**Lemma** Seja  $X$  variedade.

$$\text{Prop}(X, \mathbb{R}^m) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}^m : f \text{ é própria}\}$$

é não-vazio e aberto.

*Demonstração.*

- **(Não vazio.)** Pegue  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  própria. Dai  $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (x, 0, \dots, 0)$  é injetiva e linear, asi  $i \circ \rho$  é própria.
- **(Aberto.)** Pegue  $f \in \text{Prop}(X, \mathbb{R}^m)$ . Pegue  $V \subset J^0(X, \mathbb{R}^m) \cong X \times \mathbb{R}^m$  aberto. Queremos ver que  $f \in M(V) \subset \text{Prop}(X, \mathbb{R}^m)$ .

Defina  $V_x = \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, f(x)) < 1\}$ . O truque é esse!

$$g \in M(V) \iff d(g(x), f(x)) < 1 \forall x \in X \iff j^0 g(X) \subset V$$

então para  $g \in M(V)$  com  $d(g(x), f(x)) < 1 \forall x \in X$ , e asi

$$g^{-1}(\overline{B_r(0)}) \subset f^{-1}(\overline{B_r(0)})$$

e isso implica que  $g$  é própria.

□

## 9.2 Teorema do mergulho de Whitney

**Corolário (Teorema do mergulho de Whitney)**  $X^m$  variedade,  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Demonstração.*  $\text{Im}(X, Y) \cap \text{Inj}(X, Y)$  é residual, logo denso. Então  $\text{Im}(X, Y) \cap \text{Inj}(X, Y) \cap \text{Prop}(X, Y) \neq \emptyset$ , which implies that  $X \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^{2n+1}$ .  $\square$

### 9.2.1 Funções de Morse

**Definição**  $f \in C^\infty(X) = C^\infty(X, \mathbb{R})$ . Um ponto crítico de  $f$  é quando a derivada não tem posto máximo, neste caso isso implica que a derivada tem posto 0, ou seja,  $d_p f = 0$ .

$$D_p^2 f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma forma bilinear simétrica. Para mostrar que isso está bem definido quando mudamos de coordenadas precisamos usar que  $d_p f = 0$ . Também pode ver isso usando “conexões”: quando a derivada é zero, temos uma eleição canônica de horizontal bundle e podemos identificar  $T_{(p, \underbrace{v}_{=0})}(TM) \cong T_p M \times T_p M$

**Definição**  $p \in \text{Crit}(f)$  é não degenerado se  $D^2 f_p$  é não degenerada, i.e. para todo  $v \in T_p M \setminus \{0\}$  existe  $w$  tal que  $D^2 f_p(v, w) \neq 0 \iff \left( \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j} \right)$  é residual.

$$S^1 := \{j^1 g(x) \in J^1(X, \mathbb{R}) : dg_x = 0 \iff \text{corank } \sigma = 1\}$$

**Proposição**  $p \in \text{Crit}(f)$  é não degenerada  $\iff j^1 f \pitchfork S^1$  em  $p$ .  $p \in (j^1 f)^{-1}(S^1)$

*Demonstração.* Se usa que a dimensão de  $X$  é a mesma do que a dimensão de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Definição**  $f \in C^\infty(X)$  é uma *função de Morse* se todo ponto crítico de  $f$  é não degenerado.

**Corolário (da proposição)**  $f$  é de Morse  $\iff j^1 f \pitchfork S^1$ .

**Teorema**  $\{f \in C^\infty(X) : f \text{ é de Morse}\}$  é aberto denso de  $C^\infty(X, \mathbb{R})$ .

*Demonstração.*  $S^1$  é fechado porque é subvariedade, logo o conjunto das funções de Morse é igual a  $\{f : j^1 f \pitchfork S^1\}$  é aberto e denso pelo teorema de Thom.  $\square$

## 9.3 Teoria de interseção

### 9.3.1 Preliminares: variedades com bordo e orientação

**Definição** Uma *variedade topológica  $X$  com bordo* é um espaço topológico Hausdorff 2-enumerável tal que todo ponto possui uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ .  $\partial \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = 0\}$ .

**Proposição**  $X$  variedade topológica com bordo,  $p \in X$  tal que existe cart  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$  tal que  $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ . Seja  $(V, \psi)$  outra carta,  $p \in V$ . Então  $\psi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ .

*Demonstração.* Suponha que existe  $(V, \psi)$  tal que  $\psi(p) \in \text{int } \mathbb{H}^n$ . Pega a bolinha pequenina que está contida no interior do  $\mathbb{H}^n$  e a preimagem dela está dentro de  $U$ . Então obtemos um difeomorfismo entre uma bola cortada e uma bola. Tira o ponto: de um lado obtemos um conjunto contrátil, do outro lado não. Usar topologia algébrica.  $\square$

**Definição** O *bordo* de uma variedade com bordo é

$$\partial X = \{p \in X : \exists (U, \varphi) \text{ carta}, U \ni p, \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n\}$$

O *interior* é

$$\text{int } X \setminus \partial X = \{p \in X : \exists (U, \varphi) \text{ carta}, U \ni p, \varphi(p) \in \text{int } \mathbb{H}^n\}.$$

**Observação**  $\text{int } X, \partial X$  são variedades topológicas sem bordo.

**Definição**  $f : U \subset \overset{\text{op}}{\mathbb{H}^n} \rightarrow \mathbb{H}^n$  é *suave* se existe uma extensão suave  $\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{U} \supset U$ ,  $\tilde{U}$  aberto.

**Intuição** É uma função que era suave e vc trabou. Não que ela acaba aí.

**Definição**  $X$  é uma *variedade diferenciável com bordo* se está munida de um atlas suave maximal. (Tem que definir compatibilidade de cartas em  $\mathbb{H}^n$ .)

**Exemplo (Look!)**  $B^n$  the unit ball is  $f^{-1}((-\infty, 1])$  where  $f$  is the norm function.

**Proposição**  $f \in C^\infty(X)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  valor regular de  $f$ . Então  $f^{-1}(-\infty, a]$  e  $f^{-1}([a, +\infty))$  são variedades com bordo.

*Demonstração.*  $f^{-1}(-\infty, a)$  é aberto porque  $f$  é contínua, então é uma subvariedade do domínio. Seja  $p \in f^{-1}(a)$ . Usando TFI podemos upor que  $\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = -x_1 + a$ . Pegue  $y \in f^{-1}(-\infty, a]$ ...

**Definição**  $X$  variedade dif. com bordo. O *espaço tangente* em pontos interiores é o mesmo que em variedades sem bordo, e no bordo fica um espaço vetorial da mesma dimensão: porque com curvas que moram no interior e podem ser extendidas podemos obter muitos vetores.

Se  $X$  é uma variedade com bordo, também é podemos definir:

- *submersão* em  $x \in X$  se a derivada for sobrejetiva.

**Proposição (level set for manifolds with boundary)** Sejam  $X, Y$  variedades com bordo,  $\dim X > \dim Y$ , pega um ponto  $y \in \text{int } Y$ ,  $f \in C^\infty(X, Y)$  tal que  $y$  valor regular de  $f$  e  $y$  **valor regular de**  $\partial f := f|_{\partial X}$  (isso é mais forte). Então  $f^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo e  $\partial f^{-1}(y) = (\partial f)^{-1}(y)$ .



## 10 Aula 10

### 10.1 Mais variedades com bordo

Lembre que o espaço tangente em pontos do bordo não tem mistério:  $T_x X = \text{span } \frac{\partial}{\partial x^i}$ , porque é gerado pelas derivadas de curvas que realmente continuam sendo suaves em  $\mathbb{R}^n$ .

Como o bordo de  $X$  é uma subvariedade, note que, olhando essas curvas tangentes no bordo como curvas em  $M$ , obtemos uma inclusão natural

$$T_x(\partial X) \subset T_x X$$

**Proposição**  $X, Y$  variedades  $X$  tem bordo,  $\dim X > \dim Y$  e  $\partial Y \neq \emptyset$ .  $y \in Y$  valor regular de  $f$ , e valor regular de  $\partial f := f|_{\partial X}$ .

Então  $f^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo de codimensão  $m$  e  $\partial f^{-1}(y) = (\partial f)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial X$ .

“Não é só que a imagem inversa é uma subvariedade; é que a fronteira dela é *exatamente a parte que esta tocando a fronteira*”

**Proposição**  $X, Y$  variedades,  $\partial Y = \emptyset$ .  $W \subset Y$  subvariedade sem bordo.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f \pitchfork W$ ,  $\partial f \pitchfork W$ .

Então  $f^{-1}(W)$  é uma subvariedade com bordo  $\partial(f^{-1}(W)) = (\partial f)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap \partial X$  e  $\text{codim } f^{-1}(W) = \text{codim } W$ .

### 10.2 Teorema de Sard com bordo

**Teorema (de Sard com bordo)**  $X, Y$  variedades,  $\partial Y = \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\{y \in Y : y \text{ valor crítico de } f \text{ em } \partial f\}$  tem medida nula.

*Demonstração.*

$$f(\text{Crit } f \cup \partial f(\text{Crit } \partial f)) = f(\text{Crit}(f) \cup \text{Crit}(\partial f))$$

□

### 10.3 Teorema de transversalidade de Thom com bordo

**Teorema (de transversalidade de Thom com bordo)**  $X, Y$  variedades  $W \subset J^k(X, Y)$ ,  $\partial W \subset \alpha^{-1}(\partial X)$ . Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W \text{ e } j^k(\partial f) \pitchfork W\}$$

é residual.

*Demonstração.* Tá no interior não tem problema. Tá no bordo olha pro bordo é uma variedade sem bordo tudo bem. Interseção de residuais é residual. □

### Corolário

1.  $X, Y$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade,  $\partial Y = \partial W = \emptyset$ . Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : f \pitchfork W \text{ e } \partial f \pitchfork W\}$$

é residual.

2.  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $\partial f \pitchfork W$ ,  $\forall U \ni f$  aberto  $\exists g \in U$  tal que  $g = f$  em uma vizinhança de  $\partial X$ .

**Observação** Sobre b.: mais forte que  $\partial f$  seja transversal a  $W$  do que  $f$  transversal a  $W$  nos pontos do bordo.

## 10.4 Orientação

**Definição**  $V$  espaço vetorial. Duas bases  $\{x^i\}, \{y^i\}$  são **equivalentes** se a transformação linear  $T : V \rightarrow V, x^i \mapsto y^i$  tem determinante positivo.

**Observação** Existem exatamente duas classes de equivalência.

**Definição** Uma **orientação** em uma variedade  $X$  é uma escolha de orientação de cada  $T_p X$  para todo  $p \in X$  tal que  $\forall (U, \varphi)$  carta  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  é sempre positiva ou sempre negativa ( $\forall p \in U$ ).

**Observação (Extra)** Se  $X$  é simplesmente conexa, então existe uma orientação.

**Observação**  $X$  conexa e orientável, então  $X$  possui exatamente 2 orientações.

**Observação** Existem variedades não orientáveis.

$X$  variedade orientada com bordo induz uma orientação em  $\partial X$ . É porque existe um fibrado vetorial  $N$  de dimensão 1 ao longo do  $\partial X$  tal que  $N_x \pitchfork T_x(\partial X) \forall x \in \partial X$ . Pode pegar uma métrica Riemanniana ou pode fazer assim: pega em cada carta (atlas localmente finito, usamos partição da unidade) aí pega o campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  que com a nossa definição de  $\mathbb{H}^n$  é a direção que “sae” da variedade, multiplica com a partição da unidade e some. Aí você tem um campo vetorial que não está no fibrado tangente ao bordo.

Então em cada  $x \in \partial X$  temos uma base  $\{x_1, \dots, x^{n-1}\}$  de  $T_x(\partial X)$ . Completamos a uma base de  $T_x X, \{n_x, x_1, \dots, x^{n-1}\}$ .

**Definição**  $p \in \partial X$ .  $T_p(\partial X) \subset T_p X$ .  $N_p \oplus T_p(\partial X) = T_p X$ . uma base é orientada se, e aqui tem que ter alguém que decide, a base obtida declarando que a primeira entrada vai ter um sinal  $-\frac{\partial}{\partial x_1}$ , e completando para uma base, i.e.  $(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots)$ , essa base tá na orientação de  $X$ .

**Definição**  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é **orientada** se  $\{n_x, v_1, \dots, v_n\}$  é positivamente orientada.

**Exemplo** O intervalo. Pode decidir que um ponto da borda tenha orientação positiva, aí o outro ponto fica com orientação negativa.

$X$  orientada sem bordo.  $\partial(I \times X) = \{0\} \times X \sqcup \{1\} \times X$ .  $T_{(t,x)}(I \times X) \cong I_t I \oplus T_x X$ . Então o bordo fica  $\partial(I \times X) = \{1\} \times X \sqcup (-\{0\} \times X)$ .

## 11 Aula 11

**Proposição**  $X, Y$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade,  $\partial W = \partial Y = \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f \pitchfork W$ ,  $(\partial f) \pitchfork W$ . Suponhamos que  $X, Y$  e  $W$  são orientadas.

Então  $Q = f^{-1}(W)$  possui uma orientação *natural*.

*Demonstração.* Sejam  $n = \dim X$ ,  $m = \dim Y$  e  $k = \dim W$ . Como é que a gente calcula?

A codimensão de  $Q = f^{-1}(W)$  é a mesma que a codimensão de  $W$ .

Ou seja,  $Q$  é uma subvariedade de dimensão  $n - m + k$  e  $\partial Q = \partial Q \cap \partial X$ .

**Também lembre que se**

$$V_1 \oplus V_2 = V_3$$

**sabendo a orientação de dois deles, já tem como saber a orientação do terceiro.**

**Dani** Creio que formalmente es así: supongamos que  $V_2$  y  $V_3$  son orientados. Para construir una base orientada de  $V_1$  sólo pegamos una base orientada  $\{e_i\}$  de  $V_1$  y la completamos a una base orientada de  $V_3$ . Los vectores completadores forman una base *orientada* de  $V_2$ .

Pegue o fibrado normal (lembre que não precisa de uma métrica rimeanniana para isso, qualquer complemento de  $TQ$  funciona.)

**A gente vai usar a orientação de  $X$  e  $Y$  para orientar o fibrado normal.**

Olhe pra a condição de transversalidad

$$df_p(T_p X) + T_{f(p)} W = T_{f(p)} Y$$

Tu vai poder pegar só o fibrado normal a  $Q$  e ai vai virar soma direita. Claro, porque por definição do fibrado normal temos uma descomposição em soma direita do fibrado de  $X$ , então basta com pegar a componente normal a  $W$  para gerar o mesmo bundle do que estamos falando no left hand side da equação acima.

Entao para mostrar isso argumentamos por dimensão: a dimensão da soma tem que ser maior o igual à soma das dimensoes, e quando tem igualdade é soma direita:

$$\underbrace{df_p(N_p Q)}_{\dim=m-k} + \underbrace{T_{f(p)} W}_{\dim=k} = \underbrace{T_{f(p)} Y}_{\dim=m}$$

entao a soma fica direita.

Entao tu ta na situação desse comentario acima com  $V_i$ . Entao pode orientar o terceiro espaço ( $W$  e  $Y$  são orientadas). E como  $df_p$  é injetiva, (acho que isso é por causa do aumento de dimensão,, soma direita).

Tendo uma orientação para  $d_p N_p Q$ , e que  $df_p$  é injetiva, pode voltar para a equação  $N_p Q \oplus T_p Q = T_p X$ , e como  $X$  e  $NQ$  são orientados, acabou.  $\square$

**Exercício**  $\partial(f^{-1}(W)) = (-1)^{m-1}(\partial f)^{-1}(W)$ . **Hint.** É uma continha, número de transposições.

## 11.1 ii. Número de interseção

**Teorema (Classificação das 1-variedades compactas (com bordo?))** Seja  $X$  uma 1-variedade compacta e conexa de dimensão 1. Então  $X$  é difeomorfa a  $S^1$  (caso sem bordo) ou  $[0, 1]$ .

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

**Corolário** Toda variedade (compacta) de dimensão 1 é orientável.  $\#(\partial X)$  é par. Fixando uma orientação de  $X$ ,  $\sum_{p \in \partial X} \text{sgn}(p) = 0$

**Observação** O teorema anterior pode ser feito para variedades não compactas, obtendo intervalos abertos ou meio abertos. Mas a gente não vai usar isso.

Agora pegue  $X, Y, W$  variedades [orientadas, mas vamos fazer o caso não orientado primeiro] sem bordo (agora nenhuma tem bordo),  $W \subset Y$ . Seja  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $f \pitchfork W$ . Agora vamos botar uma condição a mais: que é que as dimensões são complementares, é uma condição bem forte:

$$\dim X + \dim W = \dim Y$$

Então  $f^{-1}(W)$  é uma variedade de dimensão 0 (um conjunto de pontos).

**Definição** Suponha  $X$  compacto e  $W$  fechado. O *índice* é

$$I_\alpha(f, W) := \#f^{-1}(W) \in \mathbb{Z} \bmod 2$$

Se  $X, Y, W$  orientadas, definimos

$$I(f, W) = \sum_{p \in f^{-1}(W)} \text{sign}(p) \in \mathbb{Z}$$

a gente vai ver que esses números são estáveis baixo homotopias.

**Como e que definimos a orientação, a sinal, num ponto?** Olha aqui

$$N_p Q \oplus T_p Q = T_p X$$

se as orientações de  $N_p Q$  e  $T_p X$  batem (coincidem), aí definimos que orientação do pontinho  $T_p Q$  (a gente está supondo que isso dá um ponto), então definimos que esta *positivamente orientado*. Ou seja:

**Definição** Pega  $p \in f^{-1}(W)$ . Qual é o sinal de  $p$ ?

$$df_p(T_p X) \oplus T_{f(p)} W = T_{f(p)} Y \quad (*)$$

então

$$\text{sign } p := +$$

se  $(*)$  for base orientada, i.e.  $x_1, \dots, x_n$  base de  $T_p X$ ,  $w_1, \dots, w_k$  base de  $T_{f(p)} W$ ,

$$\{df_p(x_1), \dots, df_p(x_n), w_1, \dots, w_k\}$$

é uma base orientada de  $T_{f(p)} Y$ .

**Definição** Agora pega  $X, W \subset Y$  subvariedades. Definimos  $X \frown W \iff i_X \frown W \iff i_W \frown X$ .  
 $\dim X + \dim W = \dim Y$ .

$$I(X, W) = I(i_X, W)$$

**Observação** Se um deles  $X, W$  for compacto é suficiente para garantir que a interseção é finita

$$p \in X \cap W. i_X^{-1}(W) = i_W^{-1}(X) \cong X \cap W.$$

Resulta que

$$I(X, W) = (-1)^{nk} I(W, X)$$

porque tem que permutar a base quando considera  $T_p X \oplus T_p W = T_p Y$  ou  $T_p W \oplus T_p X = T_p Y$ .

**Observação** O índice não orientado é o índice orientado mod 2. Então tudo que vamos fazer vai ser pro caso orientado mas para passar no caso não orientado e só pegar mod 2.

**Proposição (Lema mais importante da teoria de interseção. Extremamente poderoso.)**  
 Com as hipóteses necessárias para definir número de interseção (domínio compacto, subvariedade fechada, dimensões complementares),  $X = \partial Z$ ,  $Z$  variedade compacta orientada.  $W \subset Y$ ,  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $f \frown W$ . Supongamos que podemos estender  $f$ , i.e. existe  $\text{Fin} C^\infty(Z, Y)$  tal que  $\partial F = F|_X = f$ . Então  $I(f, W) = 0$ .

*Demonstração.* Que está passando? O bordo de  $Z$  é transversal a  $W$ . Isso implica  $F \frown W$  em  $\partial Z$ . (Note que  $f \frown W \implies F \frown W$  em  $\partial Z$ . A primeira é mais forte.)

Daí

$$\dim Z + \dim W = \dim Y + 1$$

$$F^{-1}(W) \text{ variedade de dimensão 1}$$

$$\partial(F^{-1}(W)) = F^{-1}(W) \implies I_Z(f, W) = 0.$$

Se  $X, Y, W, Z$  são orientadas,

$$\partial(F^{-1}(W)) = (-1)^{nk} f^{-1}(W)$$

$$\implies I(f, W) = \sum_{p \in f^{-1}(W)} \text{sign}(p)$$

$$= \pm \sum_{\partial F^{-1}(W)} \text{sign}(p) = 0$$

□

**Teorema (em [GP10] tudo é um lemma)**  $X, Y, W$  uma subvariedade  $X$  compact,  $W \subset Y$  fechada.  $f_0, f_1 \in C^\infty(X, Y)$ ,  $f_0, f_1 \pitchfork W$ . Supondo que  $f_0 \simeq f_1$ , i.e. que existe  $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $F(0, x) = f_0(x)$ ,  $F(1, x) = f_1(x)$ . Então  $I(f_0, W) = I(f_1, W)$

*Demonstração.*  $Z = [0, 1] \times X$ ,  $\partial Z = -\{0\} \times X \sqcup \{1\} \times X$ . Note a sinal numa das componentes de  $\partial Z$ . O negocio é igual que como quando orientamos o intervalo: um pontinho do bordo do intervalo vai ter uma orientação e o outro a outra. É só levar iso para o caso de  $T_{(t,x)}([0, 1] \times X) \cong T_t[0, 1] \oplus T_x X$ .

Então ai a ideia é olhar para a preimagem de  $F^{-1}(W)$  no bordo. Por causa do lemma o numero de interseção da zero, e por causa do negocio do intervalo que muda de sinal de um lado a outro da fronteira do cilindro  $Z = [0, 1] \times X$ , teremos que

$$\begin{aligned} F|_{\partial Z}^{-1} &= \{1\} \times f_1^{-1}(W) \sqcup -\{0\} \times f_0^{-1}(W) \\ \implies I(f_0, W) &= I(f_1, W). \end{aligned}$$

□

**Observação (dani)** Me recuerda al cobordismo: para estudiar una variedad nos imaginamos una variedad mas grande cuya frontera es la variedad inicial.

Isso permite definir transversalidade sem necessidade de que a função seja transversal usando o teorema de Thom:

$X$  compacta,  $W \subset Y$  fechado.  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $I(f, W) := I(\tilde{f}, W)$  onde  $\tilde{f} \simeq f$ ,  $\tilde{f} \pitchfork W$ . **Explicación:** perturbamos um pouquinho  $f$  para que fique transversal a  $W$ .

**Observação (dani)** So how to pass from “dense in Whitney  $C^\infty$ ” to “homotopic”.

**Exemplo (muito bom)** Pega dois circulos tangentes. Parece que a interseção é  $\pm 1$ , mas *eles não se intersectam transversalmente!* Preciso perturbar. Perturbo. Ou bem ficam sem se intersectar ( $I = 0$ ), o se intersectan duas vezes, e ai tb da zero.

**Observação**  $\dim Y = 2n$ ,  $X \subset Y$ ,  $\dim X = n$ , podemos definir o número de interseção de  $X$  com  $X$ ! porque perturbamos o embedding de  $X$  em  $Y$ .

Note que se  $n$  é ímpar,  $I(X, X) = (-1)^{nm} I(X, X) = -I(X, X)$ , o número de interseção dele é zero!

**Exemplo** O número de interseção de um círculo em  $\mathbb{R}^n$  é zero. O número de interseção de um círculo numa faixa de Möbius é 1!

## 11.2 Grau

**Definição**  $X, Y$  variedades,  $\partial X = \partial Y = \emptyset$ ,  $\dim X = \dim Y$ ,  $X$  compacto,  $Y$  conexo.  $W = \{a\}$ ,  $a \in Y$ .  $f \in C^\infty(X, Y)$ . O **grau** de  $f$  é

$$\deg f := I(f, \{a\})$$

**Proposição** O grau está bem definido, ou seja, não depende de  $a$ .

*Demonstração.* Podemos supor que  $f \nmid \{a\}$ ,  
iff  $a$  é valor regular de  $f$ .

**Afirmção**  $I(f, \{a\})$  é localmente constante, i.e. em uma vizinhança de  $a$  esse número não muda.

*Prova da afirmação.* Como  $a$  é valor regular e supusimos que  $\dim X = \dim Y$ ,  $f^{-1}(a)$  é uma quantidade finita de pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . E pelo TFI temos uma vizinhança de cada um desses pontinhos a uma vizinhança de  $a$ . Cada ponto nessa vizinhança de  $a$  tem uma preimagem perto de cada  $x_i$ .  $\square$

Em fim. O teorema acaba desde que  $Y$  é conexo.  $\square$

**Observação** Se  $f_0 \simeq f_1$  então  $\deg f_0 \simeq \deg f_1$ .

## 12 Aula 12

### 12.1 Orientando o bordo de $Q = f^{-1}(W)$

A gente mostrou ontem como é que  $Q = f^{-1}(W)$  tem uma orientação *natural* induzida pelas orientações deos demais espaços. Hoje vamos orientar o bordo.

**A primeira coisa a entender** é esa igualdade daqui:  $N_p \tilde{Q} = N_q Q$ , onde  $\tilde{Q} = \partial Q$ . É claro que  $\subset$ , e a igualdade fica porque são espaços da mesma dimensão.

**dani** Acho que o claim ai é que  $\partial f^{-1}(W) = (-1)^{\text{codim } W} (\partial f)^{-1}(W)$ , ver [GP10] p. 101.

### 12.2 Exemplos: calculando o grau

**Exemplo** Grau de  $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, z \mapsto z^n$ , I think it is  $n$ , because at 0 there's only one preimage, but zero is not regular value, so in regular values you have  $n$  preimages.

Considere  $f(z) = \bar{z}^n$ . Podemos ver isso como uma composição. Para isso convém escrever

**Afirmção (Leminha do produto)**  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ,  $Y, Z$  conexas, então

$$\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$$

Usando isso, podemos calcular  $\deg \bar{z}^n$  calculando simplesmente os graus de  $z \mapsto \bar{z}$  e  $z \mapsto z^{-1}$ . Então por exemplo  $\bar{z}$  é muito fácil porque é uma reflexão em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, sua derivada é ela mesma, que troca orientação. Segue que  $\deg(\bar{z}) = -1$

**Observação (Algo que não falamos a vez passada)** é que se uma função não é sobrejetiva, o grau dela é zero. Porque entao pode pegar um valor que não está na imagem, que é regular por definição, e aí tem zero preimagens.

### 12.2.1 Teorema fundamental da álgebra com teoria do grau

Suponha que  $p$  é um polinômio de grau  $\geq 1$  e, por contradição, suponha que não tem raízes. Suponha que  $p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_0$ . Seja  $R > 0$  tal que  $R^n > |a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_0|$ . Defina

$$p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0).$$

$$\begin{aligned} f : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

é claro que  $\deg(z^n) = n \in \mathbb{Z}$ .

Agora pega

$$p_t : \partial B(R) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Note que

$$\begin{aligned} |p_t(z)| &\geq |z^n| - t|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &\geq |z|^n - t(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_0|) \\ &= R^n - t(|a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_0|) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned} \frac{p_t}{|p_t|} : \partial B(R) &\rightarrow S^1, \\ \deg\left(\frac{p}{|p|}\right) &= \deg\left(\frac{z^n}{R^n}\right) = n > 0 \end{aligned}$$

Então  $\frac{p}{|p|}$  é sobrejetiva. Temos

$$\frac{p}{|p|} : \partial B(R) \rightarrow S^1$$

Podemos estender a

$$\frac{p}{|p|} : B(R) \rightarrow S^1$$

E concluímos que

$$I\left(\frac{p}{|p|}, \{\alpha\}\right) = 0.$$

acho que isso é porque:

**Proposição** Se tem uma função definida numa variedade, e consegue estender essa função para outra variedade cujo bordo é a variedade inicial, o grau da função é zero.

$X, Y, W, f : X \rightarrow Y, \dim X + \dim W = \dim Y$ .  $f = F|_X, F : Z \rightarrow Y, Z$  compacta,  $\partial Z = X$ . Então  $I(f, W) = 0$ .



### 12.3 Winding number

Começamos com esse teorema muito bom, que Jordan provou para curvas e Brouwer generalizou a toda dimensão:

**Teorema (Jordan-Brouwer)**  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície (subvariedade de codimensão 1) compacta conexa. Então  $\mathbb{R}^n \setminus X = U_1 \sqcup U_2$  onde  $U_1$  é uma variedade compacta com bordo  $\partial \overline{U_1} = X$  e  $U_2$  é não compacta com bordo também  $\partial \overline{U_2} = X$ .

Para definir o Winding number usando teoria de grau pegue  $X$  compacto sem bordo,  $\dim X = 0$ . Vamos começar definindo para funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Pegue  $p \notin f(X)$ . Então definimos

$$\text{wind}_p(f) = \deg \frac{f - p}{\|f - p\|}$$

A ideia é que essa função vai de  $X \rightarrow S^n$ . É como se fosse  $S^1 \rightarrow S^1$ , mandando  $z \mapsto z^n$ .

**Observação (Invariança homotópica do wind)**  $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $p \notin f_t(X) \forall t$ , então  $\text{wind}_p(f_0) = \text{wind}_p(f_1)$ .

**Exemplo**  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de grau  $n$ .  $p|_{\partial B(R)} : \partial B(R) \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\text{wind}_0(p|_{\partial B(R)}) = n \quad \text{se } R \text{ é muito grande}$$

**Proposição** Suponha que  $X = \partial Z$ ,  $Z$  compacto e  $f$  se estende para  $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Então  $\text{wind}_p(f) = I(F, \{p\})$ , para  $p \notin f(X)$ .

*Demonstração.*  $f \pitchfork \{p\}$  porque  $p \notin f(X)$ . Então podemos supor que  $F \pitchfork \{p\}$ . Casos:

1.  $F^{-1}(p) = \emptyset$ . Então  $I(F, \{p\}) = 0$ .

$$\text{wind}_p f = \deg \left( \frac{f - p}{\|f - p\|} \right) = I \left( \frac{f - p}{\|f - p\|}, \{a\} \right)$$

que é zero usando aquele lema de que se podemos estender a função  $\frac{f-p}{\|f-p\|}$  a  $Z$  compacta com  $\partial Z = X$ , o índice da equação anterior é zero.

2.  $F^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . **Ideia: pegar bolinhas ao redor de cada pontinho e calcular o grau aí, depois somar.** Considere

$$u = \frac{F - p}{\|F - p\|} : Z \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow S^n$$

Pegue umas bolinhas  $B_i \ni x_i$ . Olhemos para

$$u|_{Z \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i} : Z \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i \rightarrow S^n$$

Obtemos

$$\partial(Z \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i) = X \sqcup - \bigsqcup_{i=1}^N \partial B_i$$

Pela proposição da aula passada de que quando logramos estender o índice vale zero, o índice vale zero aqui, assim que

$$\deg(u|_{X \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n \partial B_i}) = 0$$

mas isso daí é

$$\deg(u|_X) + \sum_{i=1}^N \deg(u|_{\partial B_i})$$

Concluimos que

$$\text{wind}_p f = \sum_{i=1}^N \text{wind}_p f_i.$$

Então queremos calcular  $\text{wind}_p f_i$ . Usamos TFI. Mas precisamos de uma versão do TFI orientado.

**Teorema (TFI orientado)** Se  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g'(0)$  é inversível, existe um difeomorfismo  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , mandando  $0 \mapsto 0$ , que **preserva orientação** e tal que  $g \circ \varphi$  é a identidade ou uma reflexão, i.e.

$$g \circ \varphi = \begin{cases} \text{id} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Usando isso concluimos que

$$\text{wind}_p f_i = \text{sign}_F(x_i) = I(F, \{p\}).$$

□

## 12.4 Prova do teorema de Jordan-Brouwer

*Demonstração.*

1.  $\mathbb{R}^n \setminus X$  possui, no máximo, duas componentes conexas.

□

## References

- [GG74] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1974.
- [GP10] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub., 2010.
- [Hir12] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, second edition edition, 2013.
- [Mil65] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.
- [Tu10] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010.