

# Topologia Diferencial

## Índice

<b>1 Aula 1</b>	<b>1</b>
1.1 Plano do curso, bibliografia	1
1.2 Resumo da aula 1	2
<b>2 Aula 2</b>	<b>2</b>
2.1 Lembre	2
2.2 Fórmula de mudança de bases	2
2.3 Fibrado tangente	3
2.4 Imersões e mergulhos	3
2.4.1 Valores regulares	5
2.5 Fibrados vetoriais	6
2.6 Seções	6
<b>3 Aula 3: Teorema de Sard</b>	<b>7</b>
3.1 Transversalidade: Teorema de Sard	8
<b>4 Aula 4§</b>	<b>12</b>
4.1 Teorema de Sard	12
4.2 Espaço de jatos	14
4.2.1 Estrutura diferenciável no espaço de jatos	16

## 1 Aula 1

### 1.1 Plano do curso, bibliografia

#### Cronograma

0. Revisão de variedades.
1. Transversalidade: Sard, top. forte, fraca, aproximação.
2. Teoria da interseção e índice.
3. Teoria de Morse.
4. Tópicos adicionais (possíveis): h-cobordismo, top. de baixa dimensão, Poincaré  $n \geq 5$ .

Bibliografia: [Mil65] (intuição), [GP10] (tranqui, tem muito), [Hir12] (pesado, tem tudo, e importante ler, usa Análise Funcional).

## 1.2 Resumo da aula 1

1. Revisão de variedades, espaço topológico, 2-enumerável, 2-contável, Hausdorff, loc. euclidiano, dimensão é fixa nas componentes conexas, def. de carta, atlas, atlas  $C^k$ , atlas maximal. **Obs.** Existem atlas que não contém sub atlas  $C^k$ .
2. **Teorema.**  $k = 1, \dots, +\infty$  toda  $C^k$ -variedade é  $C^k$ -difeomorfa a uma  $C^\infty$ -variedade.
3. **Teorema.**  $1 \leq \ell \leq k \leq +\infty$ , se  $M, N$  são  $C^k$ -variedades,  $C^\ell$ -difeomorfas, então  $M$  e  $N$  são  $C^k$ -difeomorfas. **No será  $\ell$ ?**
4. **Partições da unidade.** Definição. **Exercício:** toda variedade topológica é paracompacta. **Teorema:**  $M$  variedade  $C^\infty$  e  $\{U_i\}$  cobertura, então existe  $C^\infty$  partição da unidade subordinada.

## 2 Aula 2

### 2.1 Lembre

Dada uma variedade suave  $M$ . Definimos como velocidades de curvas ou como derivações:  $T_p M$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ , onde para  $p \in U$ ,  $(U, \varphi)$  carta,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  com base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ . O *espaço cotangente* é

$$T_p^* M = (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}).$$

A base dual é  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$  dada por

$$dx^i|_p = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Big|_p = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

e ai extendemos por linearidade a todos os demais covetores.

**Observação** Note que mudando de carta a gente muda de base—não tem uma base canônica do espaço cotangente.

### 2.2 Fórmula de mudança de bases

**Fórmula de mudança de bases (Exercício)**  $(U, \varphi), (V, \psi), p \in U \cap V, \varphi = (x^1, \dots, x^n, \psi(y^1, \dots, y^n)$  com bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_p \right\},$$

mostre que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

## 2.3 Fibrado tangente

$M$  variedade,

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Note que para toda carta  $(U, \varphi)$  existe uma bijeção

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (p, (v_1, \dots, v_n)) &\longmapsto \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

usando essa bijeção, topologizamos  $TM$ . Mas ainda, induz uma estrutura de variedade topológica com cartas dadas pelas  $\phi$ . Mas exatamente, as cartas são

$$\begin{aligned} \phi_{(U, \varphi)} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \sum v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &\longmapsto (\varphi(p), (v_i)) \end{aligned}$$

e a mudança de coordenadas também é  $C^\infty$ , i.e. esa estrutura é diferenciável.

**Observação** Se variedade é  $C^k$ , o fibrado tangente é  $C^{k-1}$ .

A gente vai fazer isso mesmo com o fibrado cotangente:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

O mesmo procedimento mostra que  $T^*M$  é uma  $C^\infty$ -variedade de dimensão  $2n$ .

**Observação** Para todo  $p \in M$  existe  $U \ni p$  vizinhança tal que  $\pi_1(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ . Mas  $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^n$  em geral; nesse caso dizemos que  $M$  é *paralelizável*.

**Casos onde  $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$**

1.  $M \cong \mathbb{R}^n$ ,  $TM \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
2.  $M = S^1$ ,  $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ .
3.  $M$  3-variedade orientável, então  $TM \cong M \times \mathbb{R}^3$ . (Difícil mas verdadeiro.) **Hint.** Usando quatérnios não é difícil obter uma base global.

## 2.4 Imersões e mergulhos

Até agora definimos funções suaves, mas não o que é a diferencial delas.

**Definição**  $M, N$  variedades suaves e  $f : M \rightarrow N$  suave. A *derivada de  $f$*  é

$$Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N,$$

uma aplicação linear que pode ser definida usando a definição do espaço tangente de curvas ou de derivações. Se pensarmos que  $v$  é uma classe de equivalência de curvas,  $Df_p[\gamma] = [f \circ \gamma]$ . Se  $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma derivação, a definição é o pushforward

$$Df_p v : C^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (Df_p v)g \longmapsto v(g \circ f).$$

Tem outra forma de definir, que usando cartas coordenadas, onde  $Df_p$  está dada como uma matriz em termos das bases locais: em cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  de  $p$  e  $f(p)$ ,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  e  $\psi = (y^1, \dots, y^m)$ . A notação fica

$$Df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{f(p)}$$

onde  $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$  é definida como

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

**Definição** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função suave.  $f$  é uma *imersão em*  $p$  se a derivada  $Df_p$  é injetiva.  $f$  é uma *submersão em*  $p$  se  $Df_p$  é sobrejetiva.  $f$  é um *mergulho* se é uma imersão injetiva tem inversa  $g : f(M) \rightarrow M$  contínua.

**Exemplo** O exemplo mais fácil é o caso das inclusões em variedades produto:

$$M \longrightarrow M \times N \\ p \longmapsto (p, q)$$

E as projecções:

$$M \times N \longrightarrow M \\ (p, q) \longmapsto p$$

Outros exemplos de submersões são as projecções dos fibrados tangente e cotangente.

Para ver por que na definição de mergulho pedimos que a inversa seja contínua, considere o seguinte contraexemplo:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva que tem um ponto limite demais: a topologia no domínio é uma linha, mas a topologia no contradomínio é de um outro espaço, mas  $f$  é um mergulho injetivo! A inversa de  $f$  não é contínua (não manda limites em limites).

**Observação** Se  $f : M \rightarrow N$  é um mergulho, então  $f(M)$  herda uma estrutura de variedade diferenciável e  $f$  é um difeomorfismo entre  $M$  e  $f(M)$ .

**Upshot** Mergulhos são as três condições que precisamos para que a imagem de  $f(M)$  tenha estrutura diferenciável e  $f$  um difeomorfismo entre  $M$  e  $f(M)$ . O lance é usar o teorema da função inversa.  $f(M)$  é chamada de uma *subvariedade* de  $N$ .

Uma definição alternativa de *subvariedade* é que para cada ponto  $p \in Q \subset M$ ,  $Q$  subespaço topológico, existe uma carta de  $N$  tal que  $\varphi(U \cap Q) = \mathbb{R}^k$ . (Misha's) In Misha's handouts:

**Exercise 2.23** Let  $N_1, N_2$  be two manifolds and let  $\varphi_i : N_i \rightarrow M$  be smooth embeddings. Suppose that the image of  $N_1$  coincides with that of  $N_2$ . Show that  $N_1$  and  $N_2$  are isomorphic.

**Remark 2.10** By the above problem, in order to define a smooth structure on  $N$ , it suffices to embed  $N$  into  $\mathbb{R}^n$ . As it will be clear in the next handout, every manifold is embeddable into  $\mathbb{R}^n$  (assuming it admits partition of unity). Therefore, in place of a smooth manifold, we can use "manifolds that are smoothly embedded into  $\mathbb{R}^n$ ".

**Notação** Se  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão escrevemos  $M \rightarrowtail N$ , se é mergulho  $M \hookrightarrow N$  e se é submersão  $f : M \twoheadrightarrow N$ .

Uma *subvariedade imersa* é a imagem de uma imersão (que pode nem ser variedade...)

**Observação**  $Q \subset M$  subvariedade, então existe uma inclusão natural  $T_q Q \subset T_q M$  (linear injetiva) para todo  $q \in Q$ . Claro, a derivada da inclusão  $\iota : Q \rightarrow M$ , i.e.  $D\iota_q : T_q Q \rightarrow T_q M$ .

kj Dado  $q \in Q$ , existe  $(U, \varphi)$  carta de  $M$  tal que  $\varphi|_{U \cap Q}$  é uma carta de  $Q$ , é só botar a base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$  dentro da base de  $M$ .

### 2.4.1 Valores regulares

**Definição** Seja  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$ , um ponto  $y \in N$  é dito *valor regular* se  $f$  é uma submersão em  $x$  para todo  $x \in f^{-1}(y)$  i.e.  $Df_x$  é sobrejetiva para todo  $x \in f^{-1}(y)$ .

**Teorema (Do valor regular)** Se  $y$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(y)$  é uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $\dim M - \dim N$ . (Se  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ .)

**Observação** Isso é só outra encarnação do teorema da função implícita.

*Demonstração.*  $x \in f^{-1}(y) := Q$ . Pega cartas  $\varphi$  de  $x$  e  $\psi$  de  $y$ . Supondo que  $f(U) \subset V$ , e que  $x, y$  tem coordenadas 0.

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\Phi := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Note que  $\Phi(0) = 0$  e que  $\Phi^{-1}(0) = \varphi(f^{-1}(y) \cap U)$ .

**Afirmção**  $\Phi^{-1}(0)$  é uma subvariedade.

Para tudo ficar claro vamos reescrever o teorema de função implícita.  $\Phi'(0)$  é sobrejetiva. Temos que

$$\begin{aligned} & : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ & z \longmapsto \Phi(z) \end{aligned}$$

A ideia é que existe uma vizinhança  $W$  de  $0 \in \mathbb{R}^m$  e um difeomorfismo  $\eta : W \rightarrow W^\sim$  tal que

$$\begin{aligned} \phi \circ \eta : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

□

## 2.5 Fibrados vetoriais

Um fibrado vetorial é uma coisa que generaliza os fibrados tangente e cotangente.

**Definição** Sejam  $E, M$  variedades e  $\pi : E \rightarrow M$  submersão sobrejetiva. Dizemos que  $\pi$  é um *fibrado vetorial* se para todo  $p \in M$ ,  $\pi^{-1}(p) = E_p$  possui uma estrutura de espaço vetorial tal que para todo  $p \in M$  existe  $U \ni p$  aberto e um difeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr_1 & \\ & U & \end{array}$$

e

$$\varphi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo.

**Exemplo**  $TM, T^*M, TM \oplus TM, TM \otimes TM, \wedge^k(TM), \wedge^k(T^*M), \text{Sym}^k(TM)$ .

## 2.6 Seções

**Definição** Uma *seção* de  $\pi : E \rightarrow M$  é  $s : M \rightarrow E$  suave tal que  $\pi \circ s = \text{id}$

$$\begin{array}{c} E \\ \left. \begin{array}{c} \downarrow \pi \\ \uparrow s \end{array} \right) \\ M \end{array}$$

Uma seção de  $TM$  é uma função  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $X(p) \in T_p M$ , um *campo vetorial*.

**Teorema (da bola cabeluda)**  $M = S^n$ ,  $n$  par,  $X : M \rightarrow TM$  campo vetorial, então existe  $p \in M$  tal que  $X(p) = 0 \in T_p M$ .

**Notação**  $\Gamma(E) = \{\text{seções de } \pi : E \rightarrow M\}$ ,  $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ ,  $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ ,  $\Gamma(\wedge^k(T^*M)) = \Omega^k(M)$ .

Para qualquer espaço vetorial  $V$ ,

$$\text{Sym}^2(V^*) = \{f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bilinear}, f(x, y) = f(y, x)\} \subset V^* \otimes V^*.$$

E para fibrado vetorial  $E$ ,

$$\text{Sym}^2(E) = \bigsqcup_{p \in M} \text{Sym}^2(E_p^*).$$

**Definição** Uma *métrica Riemanniana* em  $E$  é uma seção  $s : M \rightarrow \text{Sym}^2(E)$  tal que  $s(p) : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$  é positiva definida, i.e.  $s(p)(x, x) > 0$  se  $x \neq 0$ .

**Observação (Aprox.)** Todo fibrado vetorial tem uma métrica Riemanniana: usando a métrica euclidiana dada em cada carta, usamos uma partição da unidade para estender a uma seção global, somar e notar que fica positiva definida.

É muito fácil construir seções do fibrado cotangente: para  $f \in C^\infty(M)$ , a diferencial  $df : M \rightarrow T^*M$  é uma seção do fibrado cotangente, i.e.  $df \in \Gamma(T^*M)$  porque

$$df_p = Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$$

**Exercício** Qualquer seção é um mergulho de  $M$  em  $E$ .

**Mais uma**  $g$  uma métrica Riemanniana em  $TM$ .

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g_p^\sharp : T_p M &\longrightarrow T_p^* M \\ v &\longmapsto g(v, \cdot) \end{aligned}$$

Então o *gradiente* de  $f$  é

$$(g_p^\sharp)^{-1}(df_p) := \text{grad}_p f$$

### 3 Aula 3: Teorema de Sard

#### Teorema da função implícita (aula pasada)

Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  suave tal que  $f(0) = 0$  e  $f'(0)$  é sobrejetiva ( $\implies n \geq m$ ). Então existe uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$   $U$  e  $\tilde{U}$  e um **difeomorfismo**  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  tal que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

*Demonstração.* Parecido à prova de [Tu10] no teorema do valor regular, usando uma matriz com um  $*$ , a identidade, e uma matriz invertível.  $\square$

### 3.1 Transversalidade: Teorema de Sard

A prova do teorema de Sard é muito técnica. Porém, a parte difícil é só análise em  $\mathbb{R}^n$ .

Pegue  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , defina um *cubo* como sendo

$$c(a, b) = \prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ \subset \mathbb{R}^n.$$

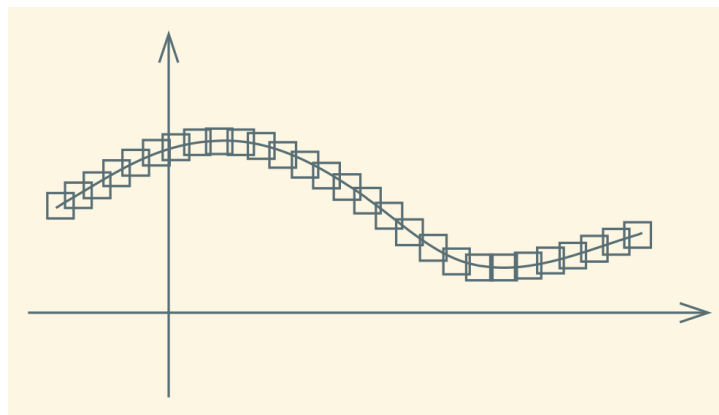
Note que  $\text{Vol}(a, b) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ .

**What [Lee13] does**

1. A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero.
2. Graph of continuous function has measure zero.
3. Affine subspaces of  $\mathbb{R}^n$  have measure zero.
4. **Smooth map maps measure zero to measure zero.**
5. A set in a manifold has *measure zero* if its intersection with the respective domain is mapped to a set of measure zero by any chart.
6. Confusing lemma.
7. Complement of zero measure is dense (in manifolds).
8. Smooth map of *manifolds* maps measure zero to measure zero.
9. Sard's theorem (heavy proof): critical value set of smooth map has measure zero.
10. Corollary (**minisard**): image of smaller dimension manifolds under smooth map has measure zero. Corollary 2: smaller dimension immersed submanifolds have measure zero.
11. Up next: Whitney embedding theorem.

**Definição**





$S \subset \mathbb{R}^n$  possui **medida nula** se  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$  cubos (ou bolas) tais que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(c_i) < \varepsilon$$

### Proposição

1. Uma união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
2.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$  e  $S \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula, então  $f(S)$  tem medida nula.

*Demonstração.*

1.  $\{S_i\}$  enumerável de medida nula, para cada  $i$  você pode escolher cubos  $C_1^i, C_2^i, \dots$  que cobrem  $S_i$  e tal que a soma dos volumes deles é menor do que  $\sum_j \text{Vol}(C_j^i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ . Vai ver que a soma dos volumeis variando tanto  $i$  como  $j$  da  $\varepsilon$ .
2. (Foto)

□

**Definição**  $X$  variedade diferenciável.  $S \subset X$ . Dizemos que  $S$  tem **medida nula** se  $\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  cobertura aberta de  $S$ , i.e.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supset S$ , e cartas  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $S_i \subset U_i$  e  $\varphi(S)$  tem medida nula.

O más bien: sólo el chiste es que cada conjunto tiene medida en  $\mathbb{R}^n$  cuando proyectas con cualquier carta.

### Corolário

1.  $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ .  $S_i \subset X$  medida nula, entao  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  tem medida nula.
2.  $X^n, Y^n$  variedades,  $f : X \rightarrow Y$  suave,  $S \subset X$  medida nula. Então  $f(S)$  tem medida nula.

**Proposição**  $Y^n$  variedade,  $X^m \subset Y^n$  subvariedade de dimensão  $m < n$ . Então  $X$  tem medida nula.

*Demonstração.* É simplesmente levar para  $\mathbb{R}^n$ : considera  $X_i$  como a parte de  $X$  que está dentro de cada  $U_i$  no atlas de  $Y$  e vai ver que ele tem dimensão menor. Daí é só provar que subespaços (acho que lineares) de dimensão menor em  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão menor.  $\square$

**Corolário (Minisard)**  $X^m, Y^n$  variedades  $m < n$  e  $f : X \rightarrow Y$  suave. Então  $f(X)$  tem medida nula.

*Demonstração.* Aqui se usa o corolário: usar a inclusão  $\iota : X \rightarrow X \times \mathbb{R}^{n-m}, x \mapsto (x, 0)$ , compor com  $\tilde{f} : X \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow Y, (x, y) \mapsto f(x)$ . Então  $\tilde{f}(\iota(X)) = f(X)$ . O lance é que  $\iota(X)$  é uma subvariedade de codimensão positiva, então pela prop anterior tem medida nula. Daí  $f(X)$  também.  $\square$

**Corolário (Versão fácil do teorema de mergulho de Whitney)** Se  $X^n$  variedade diferenciável compacta, então existem

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}, \quad X \xrightarrow{\circ} \mathbb{R}^{2n}$$

**Teorema (Difícil de Sard)**

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad X \xrightarrow{\circ} \mathbb{R}^{2n-1}$$

*Demonstração.*

**Step 1** Mergulhar a variedade num espaço euclidiano *grande*. Pegue um atlas finito  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^k$ , note que  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  são mergulhos.

**Ideia**

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{nk} \\ p &\longmapsto (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \dots) \end{aligned}$$

Isso não dá. Para fazer bem precisamos de uma partição da unidade  $\{\rho_i\}_{i=1}^k$  subordinada a  $\{U_i\}_{i=1}^k$  sobertura. Defina  $\rho_i \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo zero fora do conjunto bom; note que essa função não é mais um mergulho, mas tudo bem. Agora faça  $X \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k}$

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k} \\ p &\longmapsto \left( (\rho_1 \varphi_1)(p), \dots, (\rho_k \varphi_k)(p) \right) \end{aligned}$$

**Exercício (Importante)** Mostre que  $\Phi$  é uma imersão injetiva.

**Step 2 Afirmação:**

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^n \implies \begin{cases} X \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n + 1 \\ X \xrightarrow{\circ} \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n. \end{cases}$$

*Prova da afirmação.* Vamos projetar a variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^n$  no plano ortogonal a algum vetor  $a \in \mathbb{R}^n$ . Resulta que

### Exercício

$$\begin{aligned} g : X \times X \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, y, t) &\longmapsto \text{pr}_a \circ f \end{aligned}$$

é injetiva.

□

**Step 3 Ideia:** ver que em quase todo ponto podemos projetar.

Considere agora o mapa pushforward que pega um vetor tangente e manda mediante  $f$ :

$$\begin{aligned} h : TX &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, v) &\longmapsto (Df)_x v \end{aligned}$$

Agora note que

**Afirmação**  $a \notin \text{Im}(h) \iff \text{pr}_a \circ f$  é uma imersão  $\iff D(\text{pr}_a \circ f)_a$  é injetiva para toda  $x$ .

**Step 4** A prova termina usando minisard: as imagens de  $g$  e de  $h$  tem medida nula. Mesmo a união delas. Então existe um ponto fora dessa união.

□

**Definição** Sejam  $X^m, Y^k$  variedades,  $f : X \rightarrow Y$  suave, dizemos que

- (a)  $x \in X$  é **ponto crítico** se o posto de  $Df_x$  é menor do que  $\min(m, n)$ . (  $\iff$  não é surjetiva I think) *Aula 7: essa definição é que a derivada não é de posto máximo. Isso permite que o domínio tenha pontos regulares, así fez Sard e [GG74], mas não [Lee13], [GP10].*
- (b)  $x \in X$  é **ponto regular** se  $\text{posto } Df_x = \min(m, n)$ .
- (c)  $y \in Y$  é **valor crítico** se existe um ponto crítico tal que  $f(x) = y$ .
- (d)  $y \in Y$  é **valor regular** se  $\forall x \in f^{-1}(y)$ ,  $x$  é valor regular.

**Teorema (Sard)**  $f : X \rightarrow Y$  suave. Então  $\{\text{valores críticos}\}$  tem medida nula.

### Observação

1. Teorema vale se  $f$  é  $C^\ell$ , onde  $\ell > \max(m - n, 0)$ .

.

*Demonstração.*

**Step 1 Redução para a versão local.** Supomos que  $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ .  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  aberto.

$$\text{Crit } f = \{x \in 0 : \text{posto } f'(x) < \min(m, n)\}$$

Então  $f(\text{Crit}(f))$  tem medida nula. Para isso fazemos **indução em  $m$** .  $m = 0$  trivial.

$C_i$  vai ser o conjunto onde as derivadas parciais se anulam até  $i$ :

$$C_i = \left\{ p \in U : \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^\alpha} f_k(p) = 0 \forall \alpha, 0 < |\alpha| \leq i, \forall k \right\}.$$

Note que  $C_{i+1} \subset C_i \subset C_{i-1} \subset \dots \subset C_1 \subset C := \text{Crit } f$ .

**Objetivo**  $f(C)$  tem medida nula.

**Paso 1**  $f(C_N)$  tem medida nula para algum  $N \gg 0$ . **Crucial**

**Paso 2**  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula para toda  $i$ .

**Paso 3**  $f(C \setminus C_i)$  tem medida nula.

**Paso 1** Podemos supor sem perda de generalidade que  $U \subset$  cubo, a fórmula de Taylor diz que

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq K \cdot \|x - y\|_\infty^{i+1}$$

para todo  $x, y \in C_i$ .

Tem que botar  $C_i$  den' de um cubo  $D_j$  que se divide em  $r^m$  cubos de lado  $b/r$ .

Então  $f(D_j)$  está contido num cubo em  $\mathbb{R}^n$  de lado  $K \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{i+1} := R_j$ . Também note que pontos den' de  $D_j$  são tq.  $\|x - y\|_\infty \leq \frac{b}{r}$ .

Agora

$$f(C_i) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{r^m} D_j\right) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} f(D_j) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} R_j.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r^m} \text{Vol}(R_j) &= r^m \cdot K^n \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{(i+1) \cdot n} \\ &= \frac{K^n \cdot b^{n(N+1)}}{r^{n(N+1)-m}} \end{aligned}$$

**Step 2**

□

## 4 Aula 4§

### 4.1 Teorema de Sard

**Teorema (Sard)**  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^\ell$ ,  $\ell > \max(m - n, 0)$ . Então  $\{\text{valores críticos}\}$  tem medida nula.

*Demonstração.* **Note que**  $\{\text{valores críticos}\} = f(\{\text{ptos críticos}\})$ .

Seja  $C = \{\text{ptos críticos de } f\}$ . Então aproximamos a conjunto onde todas as derivadas parciais são zero com o conjunto  $C_i$  onde as derivadas parciais até  $i$  se anulam.

**Passo 1**  $f(C_N)$  tem medida nula se  $N > \max(m - n, 0)$ . (Feito na aula pasada.)

**Passo 2**  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula

**Passo 3**  $f(C \setminus C_1)$  tem medida nula.

Concluimos porque  $f(C)$  é a união de três conjuntos de medida nula: um por cada passo. Segundo e terceiro passos são com indução em  $m$ .

Prova:

**Passo 1** Feito ontem.

**Passo 2** A ideia é que podemos dar coordenadas de dimensão 1 menos usando que a derivada  $i + 1$  não se anula. (Acho.)

**Passo 3** É parecido só que um pouco mas difícil. No caso anterior os valores da função  $h$  são zero, aqui não (ver foto). Aqui usamos

**Lemma** A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero:

$A \subset \mathbb{R}^n$  compacto tal que  $A \cap \{x\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^{n-1}$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $A$  tem medida nula.

*Prova do lema.* A ideia é pegar uma faixinha de altura  $x$  e cobrir esse pedaço de  $A$  com quadradinhos naquele plano  $C_j^x$ . Dai, “como  $A$  é compacto” podemos pegar um  $I_x \subset \mathbb{R}$  intervalo tal que para todo  $y \in I_x$  ( $y$  perto de  $x$ ), a faixinha de altura  $y$  fique contida em  $\bigcup_j I_x \times C_j^x$

**Ideia.** Como  $A$  é compacto podemos pegar um mini intervalo tal que todas as faixinhas muito pertinho (bom, a parte de  $A$  em cada faixinha) fica dentro dos quadradinhos  $C_j^x$  multiplicados por esse mini-intervalo.

Agora calculamos os volumes. Lembre de análise na reta (ver [Lee13] lem 6.2, tem que shrink os intervalos) que a soma dos comprimentos dos intervalos  $I_{x_i}$  que conformam uma cobertura essencial (não pode tirar nenhum dos abertos da coberta) de um intervalo  $L$  é menor do que duas vezes o tamanho do intervalo:  $\sum \text{compr}(I_{x_i}) < 2(2L) = 4L$ .

Em fim, a soma dos comprimentos é um número finito. Então fica que

$$\sum_{i,j} \text{Vol}(I_{x_i} \times C_j^{x_i}) = \sum_i \sum_j \text{Vol}_1(I_{x_i}) \text{Vol}_{n-1}(C_j^{x_i}) < \varepsilon \sum \text{Vol}_1(I_{x_i}) < 4L\varepsilon.$$

□

□

## 4.2 Espaço de jatos

Son como vectores de orden de diferenciabilidade más grande: a ideia é generalizar o espaço tangente e o espaço cotangente **para derivadas de ordem maior**.

### Definição

Dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  suaves que mandan  $p$  al mismo punto son equivalentes si existem cartas tales que las derivadas parciais de sus representaciones en coordenadas coinciden hasta orden  $k$ .

Sejam  $X, Y$  variedades diferenciaveis suaves e  $f, g : X \rightarrow Y$  suaves. Dizmos que  $f \sim_k g$  em  $p \in X$  se, intuitivamente, as derivadas parciais de  $f$  e  $g$  coincidem até ordem  $k$ . Isso é intuitivo porque precisamos pegar cartas para isso ficar bem definido: precisamos que existam cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  aoredor de  $p$  e  $f(p)$  tais que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)))$$

Los **jatos** son gérmes:

$$J^k(X, Y)_{p,q} = \{f : X \rightarrow Y : f(p) = q\} / \sim_k.$$

Isso generaliza o espaço tangente do seguinte jeito:

$$J^1(\mathbb{R}, Y)_{0,q} \cong T_q Y.$$

### Exercício

$$J_1(X, \mathbb{R})_{p,0} \cong T_p^* \cong T_p^* Y.$$

Daí definimos o **espaço de  $k$ -jatos**:

$$J^k(X, Y) := \bigsqcup_{\substack{p \in X \\ q \in Y}} J^k(X, Y)_{p,q}$$

Então pega um jato  $\sigma \in J^k(X, Y)$ . Isso cuspe um  $p$  e um  $q$  tais que  $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$ . Definamos as funções

$$\begin{aligned} \alpha : J^k(X, Y) &\longrightarrow X & \beta : J^k(X, Y) &\longrightarrow Y \\ \sigma &\longmapsto p & 0 &\longmapsto q \end{aligned}$$

**Exemplo**  $X = U \subset \mathbb{R}^n, Y = V \subset \mathbb{R}^m$  abertos. O que é o espaço de jatos neste caso?

Tem uma bijeção

$$\begin{aligned} : J^k(U, V)_{x,y} &\xrightarrow{\cong} B_{n,m}^k \\ f &\longmapsto (f_1^k, \dots, f_m^k) \end{aligned}$$

Lance: pode pensar que esas funções são polinomias de grau maximo  $k$ .

$$B_{n,m}^k = \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : p \text{ polinomial de grau } \leq k \text{ tal que } p(0) = 0\}.$$

**Exercício** Calcule a dimensão de  $B_{n,m}^k$ .

$$\begin{array}{ccc} J^k(U, V) & \xrightarrow{\cong} & U \times V \times B_{n,m}^k \\ & \searrow \alpha & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

Creio que: definimos  $f_i^k$  como as "partes sem constante dos polinômios de Taylor de ordem  $k$  das coordenadas de  $f$ ", **CREO QUE la idea es que la clase de equivalencia  $[f]$  está determinada por los principios de los polinomios de Taylor de sus funciones coordenadas.**

No entendí esto pero va:

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{polinomial}$$

$x_0 \in U, y_0 \in V$ , entre aspas:

$$f(x - x_0) = y_0 + p(x - x_0),$$

$f(U) \subset V$ . En fim, temos que

$$2. J^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times T^*M.$$

$$3. J^1(\mathbb{R}, M) \cong \mathbb{R} \times TM.$$

Agora o pushforward e o pullback, que basicamente é precompôr e poscompôr:

### Definição

1.  $\varphi : Y \rightarrow Z$  suave,  $X$  variedade suave. O **pushforward** é

$$\begin{aligned} \varphi_* : J^k(X, Y) &\longrightarrow J^k(X, Z) \\ [f]_x &\longmapsto [\varphi \circ f]_x \end{aligned}$$

2. O **pullback** é... mas aqui **precisamos que  $\psi$  seja difeomorfismo**

$$\begin{aligned} \psi^* : J^k(X, Y) &\longrightarrow J^k(Z, Y) \\ [f]_x &\longmapsto [f \circ \psi]_{\psi(x)} \end{aligned}$$

### Observação

1.  $\sigma \in J^k(X, Y)_{x,y}, \varphi_* \sigma \in J^k(X, Z)_{x,\varphi(y)}$
2.  $\sigma \in J^k(X, Y), \psi^* \sigma \in J^k(Z, Y)_{\psi^{-1}(x),y}$

#### 4.2.1 Estrutura diferenciável no espaço de jatos

Pegue  $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$  e cartas  $(U, \varphi)$  de  $p$  e  $(V, \psi)$  de  $q$ . **Ideia:** usar o pushforward e o pullback das cartas para levar o problema no  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercício** Considere

$$J^k(U, V) = \bigsqcup_{\substack{p \in U \\ q \in V}} J^k(X, Y)_{p,q}.$$

Então

$$\begin{aligned} J^k(U, V) &\longrightarrow J^k(\varphi(U), \psi(V)) \\ \sigma &\longmapsto \psi_*(\varphi^{-1})^* \sigma \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Então para dar uma estrutura de variedade topológica no espaço de jatos note que também

$$J^k(\varphi(0), \varphi(V)) \cong \varphi(0) \times \varphi(V) \times B_{n,m}^k \subset \mathbb{R}^{n+m+\dim B_{n,m}^k}$$

(lo bueno es que ya sabes cual es la dimension de  $B_{n,m}^k$ . Mas não interessa qual é a dimensão: o importante é que o  $B_{n,m}^k$  tem uma base, é um espaço vetorial.) ) Em fim, tudo isso dá uma estrutura de variedade topológica. Para terminar só temos que ver o que acontece com as mudanças de coordenadas.

$$\begin{aligned} \varphi(U) \times \psi(V) \times B_{n,m}^k &\longrightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \times \tilde{\psi}(\tilde{V}) \times B_{n,m}^k \\ (p, q, f) &\longmapsto \left( \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(p), \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}(q) \right) \end{aligned}$$

**Isso é suave!** E isso implica que  $J^k(X, Y)$  é uma  $C^\infty$  variedade de dimensão  $n + m + \dim B_{n,m}^k$ .

E daí que  $\alpha$  e  $\beta$  são submersões sobrejetivas.

## References

- [GG74] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1974.
- [GP10] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub., 2010.
- [Hir12] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, second edition edition, 2013.



- [Mil65] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.
- [Tu10] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010.