Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/dt

Lista 4

Comentários de V.R. Pode ver que o índice de duas variedades complexas (que sempre são orientáveis) de dimensões complementares é sempre 1.

Problem 1 Para $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, seja $f : kP^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big([z_0 : \dots : z_n]\Big) = \frac{\sum_{j=0}^{n} j|z_j|^2}{\sum_{j=0}^{n} |z_j|^2}.$$

Prove que f é uma função de Morse e calcule o índice de todos os pontos críticos de f para $k = \mathbb{R}$ e $k = \mathbb{C}$.

Solution. **(Caso $k = \mathbb{R}$.)** Fixe $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Consideremos a carta coordenada $\varphi_r([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n)$ definida em $U_r = \{x_r \neq 0\} = \{x_r = 1\}$. Nossa função fica

$$f \circ \varphi_r^{-1}(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{1 + \sum_{i \neq r} x_i^2}$$

Para facilitar notação defina $\vec{x} := (x_0, \dots, x_{r-1}, 1, x_{r+1}, \dots, x_n)$. A nossa função se escreve como

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i x_i^2}{\|\vec{x}\|^2}$$

Derivemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) &= \frac{\|\vec{x}\|^2 \cdot 2ix_i - \frac{\partial \|\vec{x}\|^2}{\partial x_i}\Big(r + \sum_{j \neq r} i x_i^2\Big)}{\|\vec{x}\|^4} \\ &= 2x_i \cdot \frac{i\|\vec{x}\|^2 - \Big(r + \sum_{j \neq r} j x_j^2\Big)}{\|\vec{x}\|^4} \end{aligned}$$

É claro que se $x_i = 0$ para toda i temos um ponto crítico, i.e. em $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Note que não podemos ter outros pontos críticos...

Se tivessemos um índice só em que $x_k \neq 0$, a parcial respeito a essa variável não se anula. Assim, para ter um ponto crítico distinto de $\vec{0}$ é necessário que as coordenadas em pelo menos dois índices k e k' foram distintas de zero. Porém, nesse caso a parcial respeito de alguma delas não se anula (falta argumentar).

Derivando de novo e avaliando em $\vec{0}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 2\delta_{ij}(i - r), \qquad r \neq i, j$$

Isso fica pela regra do produto: obtemos a derivada de $2x_i$ multiplicada pelo quociente, somado com $2x_i$ multiplcado pela derivada do quociente. É só notar que, por um lado, a derivada de $2x_i$ respeito de x_j é $2\delta_{ij}$ e o quociente avaliado em $\vec{0}$ da $i - r$. Por outro lado, a derivada do quociente em $\vec{0}$ se anula.

Então a matriz de segundas derivadas fica

$$2\begin{pmatrix} -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-r \end{pmatrix}$$

que é não singular. Ela tem r autovalores negativos. Concluimos que os pontos $[0 : \ldots : \underbrace{1}_{r\text{-th place}} : \ldots : 0]$ são críticos de índice r para cada $r = 0, \ldots, n$.

(Caso $k = \mathbb{C}$**.)** Fixe $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos a carta coordenada $\varphi_r([z_0 : \ldots : z_n]) = (z_0, \ldots, \widehat{z_r}, \ldots, z_n)$ definida em $U_r = \{z_r \neq 0\} = \{z_r = 1\}$. Nossa função fica

$$f \circ \varphi_r^{-1}(z_0, \ldots, \widehat{z_r}, \ldots, z_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i z_i \overline{z_i}}{1 + \sum_{i \neq r} z_i \overline{z_i}}$$

Para facilitar notação defina $\vec{z} := (z_0, \ldots, z_{r-1}, 1, z_{r+1}, \ldots, z_n)$. A nossa função se escreve como

$$(f \circ \varphi_r^{-1})(z_0, \ldots, \widehat{z_r}, \ldots, z_n) = \frac{r + \sum_{i \neq r} i z_i \overline{z_i}}{\|\vec{z}\|^2}$$

Derivemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) &= \frac{\|\vec{z}\|^2 \cdot 2i\overline{z_i} - \frac{\partial \|\vec{z}\|^2}{\partial z_i}\left(r + \sum_{j \neq r} i z_i \overline{z_i}\right)}{\|\vec{z}\|^4} \\ &= 2\overline{z_i} \cdot \frac{i\|\vec{z}\|^2 - \left(r + \sum_{j \neq r} j z_j \overline{z_j}\right)}{\|\vec{z}\|^4} \end{aligned}$$

E analogamente

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}(f \circ \varphi_r^{-1}) = 2z_i \cdot \frac{i\|\vec{z}\|^2 - \left(r + \sum_{j \neq r} j z_j \overline{z_j}\right)}{\|\vec{z}\|^4}$$

Como antes, a derivada só pode ser zero quando $z_i = 0 \iff \overline{z_i} = 0\ \forall i$, i.e. no ponto $\vec{0} \in \mathbb{C}^n$.

Para calcular a Hessiana note que as parciais cruzadas $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$ são as únicas que podem sobrevivir! De fato, quando derivamos de novo y avaliamos em $\vec{0}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j}(f \circ \varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(f\circ\varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial z_j}(f\circ\varphi_r^{-1})\Big|_{\vec{0}} = 2\delta_{ij}(i-r), \qquad r\neq i,j$$

Essa matriz é

$$2\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & 1-r & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & & 0 & 0 & 2-r & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-r \\ \hline -r & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 1-r & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 2-r & \cdots & 0 & & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-r & & & & & \end{array}\right)$$

que é não singular. Vemos que, como no caso real, os pontos $[0:\ldots:\underbrace{1}_{\text{r-th place}}:\ldots:0]$ são críticos não degenerados, só que agora de índice $2r$. □

Problema 2 Seja m um número inteiro positivo $f:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{R}$ definida por

$$f\Big([z_0:z_1]\Big) = \frac{|z_0^m+z_1^m|^2}{(|z_0|^2+|z_1|^2)^m}.$$

Determine para quais valores de m a função f é de Morse e calcule o índice de todos os seus pontos críticos.

Proof. Considere a carta $\varphi_0:\{z_0=1\}\subset\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}$, $[1:z]\mapsto z$. Como $z\in\mathbb{C}$ realmente é $r(\cos\theta,\sin\theta)$ para $r\geqslant 0$, $\theta\in[0,2\pi)$, nossa função fica

$$\begin{aligned}
f\circ\varphi_0^{-1}(z) &= \frac{\Big|(1,0)-r^m\Big(\cos(\theta m),\sin(\theta m)\Big)\Big|^2}{(1+r^2)^m} \\
&= \frac{\Big|\Big(1-r^m\cos(\theta m),-r^m\sin(\theta m)\Big)\Big|^2}{(1+r)^2} \\
&= \frac{\Big(1-r^m\cos(\theta m)\Big)^2+r^{2m}\sin^2(\theta m)}{(1+r^2)^m} \\
&= \frac{1-2r^m\cos(\theta m)+r^{2m}\cos^2(\theta m)+r^{2m}\sin^2(\theta m)}{(1+r^2)^m} \\
&= \frac{1-2r^m\cos(\theta m)+r^{2m}}{(1+r^2)^m}
\end{aligned}$$

Agora derivamos, primeiro respeito a θ:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^m \cdot 2r^m \sin(\theta m)m}{(1+r^2)^{2m}}$$

que vai se anular quando $\sin(\theta m) = 0$, i.e. $\theta = 0, \pi$.

Agora derivamos respeito a r:

$$\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^m \cdot \Big(2\cos(\theta m)mr^{m-1} + 2mr^{2m-1}\Big) - m(1+r^2)^{m-1} \cdot \Big(1 - 2r^m\cos(\theta m) + r^{2m}\Big)}{(1+r^2)^{2m}}$$

Como precisamos que no ponto que buscamos $\theta = 0, \pi$, $\cos(\theta m)$ pode ser 1 ou -1. Então temos

$$\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \varphi_0^{-1}) = \frac{(1+r^2)^m \cdot \Big(2(\pm 1)mr^{m-1} + 2mr^{2m-1}\Big) - m(1+r^2)^{m-1}2r \cdot \Big(1 - 2r^m(\pm 1) + r^{2m}\Big)}{(1+r^2)^{2m}}$$

Para que isso seja 0 preciso que o numerador se anule. Então me interessa

$$(1+r^2)^m \cdot \Big(2(\pm 1)mr^{m-1} + 2mr^{2m-1}\Big) = m(1+r^2)^{m-1}2r \cdot \Big(1 - 2r^m(\pm 1) + r^{2m}\Big)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2mr(1+r^2)^m \cdot \Big(\pm r^{m-2} + r^{2m-2}\Big) = 2mr(1+r^2)^{m-1}\Big(1 \mp 2r^m + r^{2m}\Big)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(1+r^2)\Big(\pm r^{m-2} + r^{2m-2}\Big) = 1 \mp 2r^m + r^{2m}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\pm r^{m-2} + r^{2m-2}) + (\pm r^m + \cancelto{0}{r^{2m}}) = 1 \mp 2r^m + \cancelto{0}{r^{2m}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\pm r^{m-2} + r^{2m-2} \pm r^m = 1 \mp 2r^m$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r^{2m-2} \pm 3r^m \pm r^{m-2} - 1 = 0$$

Então essa é a condição que deve satisfacer r. (Lembre que a condição para θ é ser igual a $0, \pi$.) Note que os signos da equação anterior dependen não só da escolha de θ, senão também de m, pois quando m é par o signo é positivo porque obtemos um coseno avaliado num múltiplo de 2π.

Por exemplo para $m = 1$ não temos pontos críticos. Para $r = 2$ também não. $\square$

Problema 4 Seja $m < n$ e sejam $\mathbb{C}P^m \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}P^{n-m} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ as inclusões naturais. Prove que $I(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^{n-m}) = 1$, onde um espaço projetivo complexo tem a orientação induzida como quociente de uma esfera de dimensão ímpar. Mostre que vale um resultado similar para espaços projetivos reais usando a versão $\mathrm{mod}\, 2$ de I.

Solution. The natural embeddings are

$$\begin{aligned} i_1 : \mathbb{C}P^m &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ [z_0 : z_1 : \ldots : z_m] &\longmapsto [z_0 : z_1 : \ldots : z_m : 0 : \ldots : 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 : \mathbb{C}P^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ [z_m : z_{m+1} : \ldots : z_n] &\longmapsto [0 : \ldots : 0 : z_m : z_{m+1} : \ldots : z_n] \end{aligned}$$

which clearly intersect at the point $p := [0 : \ldots : 0 : z_m : 0 : \ldots : 0]$.

To compute the intersection index we check whether the base obtained from an oriented base of $\mathbb{C}P^m$ along with an oriented base of $\mathbb{C}P^{n-m}$ give an oriented base of $\mathbb{C}P^n$ given that

$$\underbrace{i_*(T_p\mathbb{C}P^m)}_{=T_p\mathbb{C}P^m} \oplus T_p\mathbb{C}P^{n-m} = T_p\mathbb{C}P^n$$

Let's try to use the coordinates at $U_m = \{z_m = 1\}$. The first embedding reads

$$(z_0, \ldots, z_{m-1}) \mapsto (z_0, \ldots, z_{m-1}, 0, \ldots, 0)$$

while the second

$$(z_{m+1}, \ldots, z_n) \mapsto (0, \ldots, z_{m+1}, \ldots, z_n).$$

So we are looking at the standard euclidean base of $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, with the only caveat that we use the variable z_0 and instead of z_m. That is we need to check if the basis

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \\ &\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n} \end{aligned}$$

is oriented.

$$\frac{\partial}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial z_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$$

is oriented for $\mathbb{C}P^n$ at $[0 : \ldots : 0 : z_m : 0 : \ldots : 0]$. But it is, because a local parametrization of S^n at $(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{m\text{-th place}}, 0, \ldots, 0)$ is given as a map from $\mathbb{C}^n$ to the half-space containing $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ by

$$(z_0, \ldots, \widehat{z_m}, \ldots, z_n) \longmapsto \left(z_0, \ldots, z_{m-1}, \sqrt{1 - \sum_{i \neq m} z_i^2}, z_{m+1}, \ldots, z_n \right)$$

so that the tangent vectors are precisely the differential operators with respect to all variables but z_m. (Since the dimension of the sphere is odd, an oriented basis of the sphere gives an oriented basis of $\mathbb{C}P^n$.)

For the real case we can't use oriented intersection number because $\mathbb{R}P^n$ is not orientable for even n. But the computations might be quite similar:

The natural embeddings are

$$\begin{aligned} i_1 : \mathbb{R}P^m &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ [x_0 : x_1 : \ldots : x_m] &\longmapsto [x_0 : x_1 : \ldots : x_m : 0 : \ldots : 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 : \mathbb{R}P^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ [x_m : x_{m+1} : \ldots : x_n] &\longmapsto [0 : \ldots : 0 : x_m : x_{m+1} : \ldots : x_n] \end{aligned}$$

which clearly intersect at the point $p := [0 : \ldots : 0 : x_m : 0 : \ldots : 0]$.

Now we don't need to check the orientations of the bases, but barely count the number of intersection points, which as we have said is 1.

$\square$