Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/dt

Lista 3

Problema 1 Seja $f : X \to Y$ un difeomorfismo entre duas variedades orientadas conexas. Prove que df_x preserva orientação para um ponto $x \in X$ se, e somente se, df_x preserva orientação para todo ponto $x \in X$.

Demostração. Considere

$$\begin{aligned} D : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \det d_x f \end{aligned}$$

É uma funcão contínua que nunca pode ser zero. Como é positiva em x, deve ser positiva sempre. I don't even need Y connected? □

Problem 2 Seja X uma variedade orientável. Prove que a orientação induzida em $X \times X$ é independente da orientação de X.

Demostração. A orientação de $X \times X$ está dada como segue: uma base (β_1, β_2) do espaço tangente $T_(x, y)X \times X$ é orientada se β_1 e β_2 são bases orientadas de X.

Agora considere a mesma construção usando $-X$. A base $(\tilde{\beta_1}, \tilde{\beta_2})$ de $-X \times -X$ é orientada se $\tilde{\beta_1}$ e $\tilde{\beta_2}$ são bases orientadas de $-X$.

Porém, é equivalente que (β_1, β_2) seja orientada em $X \times X$ e que $(\tilde{\beta_1}, \tilde{\beta_2})$ seja orientada em $-X \times -X$: tanto a transformação que manda $\beta_1 \mapsto \tilde{\beta_1}$ quanto a transformação que manda $\beta_2 \mapsto \tilde{\beta_2}$ tem determinante negativo, de modo que a transformação que manda $(\beta_1, \beta_2) \mapsto (\tilde{\beta_1}, \tilde{\beta_2})$ tem determinante positivo! □

Problem 3 Prove que $\mathsf{SO}(n)$ é uma variedade orientável e calcule a sua dimensão. Usando teoria da interseção prove que $\chi(\mathsf{SO}(n)) = 0$.

Demostração. If it is true that $\mathsf{O}(n)$ is orthonormal frames, we can compute its dimension by taking first a vector v_1 in S^{n-1}, then a unitary vector in the orthogonal complement of v_1, i.e. a vector in S^{n-2}, and so on until we choose either of the two vectors in S^0. This means that we are choosing points in $S^{n-1} \times S^{n-2} \times \ldots S^0$, which gives $\dim \mathsf{O}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i$. The summand $i = 0$ corresponds to the choice of orientation of the base.

The tangent bundle of $\mathsf{SO}(n)$ is trivial since the orbit of any frame at the identity under the action of left translations gives a global frame. The orientation given by defining this base with positive sign is

Taking a basis at the identity matrix and moving it around our manifold using left translations generates a smooth global choice of basis; i.e. an orientation.

The fact that $\chi(\mathsf{SO}(n)) = 0$ is immediate from the fact that its tangent bundle is trivial: there is a nowhere vanishing vector field (the orbit of any nonzero vector), giving the result by Hopf theorem.

$\square$