

# Topologia Diferencial

## Índice

<b>1</b>	<b>Aula 1</b>	<b>2</b>
1.1	Plano do curso, bibliografia	2
1.2	Resumo da aula 1	3
<b>2</b>	<b>Aula 2</b>	<b>3</b>
2.1	Lembre	3
2.2	Fórmula de mudança de bases	4
2.3	Fibrado tangente	4
2.4	Imersões e mergulhos	5
2.4.1	Valores regulares	6
2.5	Fibrados vetoriais	7
2.6	Seções	8
<b>3</b>	<b>Aula 3: Teorema de Sard</b>	<b>9</b>
3.1	Transversalidade: Teorema de Sard	9
<b>4</b>	<b>Aula 4</b>	<b>14</b>
4.1	Teorema de Sard	14
4.2	Espaço de jatos	15
4.2.1	Estrutura diferenciável no espaço de jatos	18
4.2.2	When dani finally understood this	18
4.2.3	how this can also be something else	18
4.2.4	Lecture notes	20
<b>5</b>	<b>Aula 5: topologia de Whitney</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Aula 6: topologia de Whitney (cont.). Teoremas de transversalidade.</b>	<b>22</b>
6.1	Topologica de Whitney (cont.)	22
6.2	Teoremas de transversalidade	22
<b>7</b>	<b>Aula 7</b>	<b>23</b>
<b>8</b>	<b>Aula 8: teorema de transversalidade de Thom; multijatos</b>	<b>24</b>
8.1	Teorema de transversalidade de Thom	24
8.2	Multijatos	28
8.3	Imersão e mergulho de Whitney	28
<b>9</b>	<b>Aula 9</b>	<b>30</b>

9.1	Teorema das imersões injetivas	30
9.2	Teorema do mergulho de Whitney	31
9.2.1	Funções de Morse	31
9.3	Teoria de interseção	31
9.3.1	Preliminares: variedades com bordo e orientação	31
<b>10</b>	<b>Aula 10</b>	<b>33</b>
10.1	Mais variedades com bordo	33
10.2	Teorema de Sard com bordo	33
10.3	Teorema de transversalidade de Thom com bordo	33
10.4	Orientação	34
<b>11</b>	<b>Aula 11</b>	<b>35</b>
11.1	ii. Número de interseção	36
11.2	Grau	38
<b>12</b>	<b>Aula 12</b>	<b>39</b>
12.1	Orientando o bordo de $Q = f^{-1}(W)$	39
12.2	Exemplos: calculando o grau	39
12.2.1	Teorema fundamental da álgebra com teoria do grau	40
12.3	Winding number	41
12.4	Prova do teorema de Jordan-Brouwer	42
<b>13</b>	<b>Prova 1!</b>	<b>42</b>
<b>14</b>	<b>Aula 13</b>	<b>45</b>
14.1	Teorema de Borsuk-Ulam	46
14.2	Poincaré-Hopf theorem	47
<b>15</b>	<b>Aula 14: Teorema de Poincaré-Hopf e teorema de Hopf</b>	<b>48</b>
15.1	Teorema de Poincaré-Hopf	48
15.2	Triangulações	49
15.3	Teorema de Hopf	50
<b>16</b>	<b>Aula 15: Teorema de Hopf, Pontryagin-Hopf</b>	<b>51</b>
16.1	Teorema de Hopf	51
16.2	Construção de Pontryagin-Thom	52

## 1 Aula 1

### 1.1 Plano do curso, bibliografia

#### Cronograma

0. Revisão de variedades.
1. Transversalidade: Sard, top. forte, fraca, aproximação.

2. Teoria da interseção e índice.
3. Teoria de Morse.
4. Tópicos adicionais (possíveis): h-cobordismo, top. de baixa dimensão, Poincaré  $n \geq 5$ .

Bibliografia: [Mil65] (intuição), [GP10] (tranqui, tem muito), [Hir12] (pesado, tem tudo, e importante ler, usa Análise Funcional).

## 1.2 Resumo da aula 1

1. Revisão de variedades, espaço topológico, 2-enumerável, 2-contável, Hausdorff, loc. euclidiano, dimensão é fixa nas componentes conexas, def. de carta, atlas, atlas  $C^k$ , atlas maximal. **Obs.** Existem atlas que não contém sub atlas  $C^k$ .
2. **Teorema.**  $k = 1, \dots, +\infty$  toda  $C^k$ -variedade é  $C^k$ -difeomorfa a uma  $C^\infty$ -variedade.
3. **Teorema.**  $1 \leq \ell \leq k \leq +\infty$ , se  $M, N$  são  $C^k$ -variedades,  $C^\ell$ -difeomorfas, então  $M$  e  $N$  são  $C^k$ -difeomorfas. **No será  $\ell$ ?**
4. **Partições da unidade.** Definição. **Exercício:** toda variedade topológica é paracompacta. **Teorema:**  $M$  variedade  $C^\infty$  e  $\{U_i\}$  cobertura, então existe  $C^\infty$  partição da unidade subordinada.

## 2 Aula 2

### 2.1 Lembre

Dada uma variedade suave  $M$ . Definimos como velocidades de curvas ou como derivações:  $T_p M$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ , onde para  $p \in U$ ,  $(U, \varphi)$  carta,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  com base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ . O *espaço cotangente* é

$$T_p^* M = (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}).$$

A base dual é  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$  dada por

$$dx^i|_p = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Big|_p = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

e ai extendemos por linearidade a todos os demais covetores.

**Observação** Note que mudando de carta a gente muda de base—não tem uma base canônica do espaço cotangente.

## 2.2 Fórmula de mudança de bases

**Fórmula de mudança de bases (Exercício)**  $(U, \varphi), (V, \psi), p \in U \cap V, \varphi = (x^1, \dots, x^n, \psi(y^1, \dots, y^n)$  com bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_p \right\},$$

mostre que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

## 2.3 Fibrado tangente

$M$  variedade,

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Note que para toda carta  $(U, \varphi)$  existe uma bijeção

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (p, (v_1, \dots, v_n)) &\longmapsto \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

usando essa bijeção, topologizamos  $TM$ . Mas ainda, induz uma estrutura de variedade topológica com cartas dadas pelas  $\phi$ . Mas exatamente, as cartas são

$$\begin{aligned} \phi_{(U, \varphi)} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \sum v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &\longmapsto (\varphi(p), (v_i)) \end{aligned}$$

e a mudança de coordenadas também é  $C^\infty$ , i.e. esa estrutura é diferenciável.

**Observação** Se variedade é  $C^k$ , o fibrado tangente é  $C^{k-1}$ .

A gente vai fazer isso mesmo com o fibrado cotangente:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M.$$

O mesmo procedimento mostra que  $T^*M$  é uma  $C^\infty$ -variedade de dimensão  $2n$ .

**Observação** Para todo  $p \in M$  existe  $U \ni p$  vizinhança tal que  $\pi_1(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ . Mas  $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^n$  em geral; nesse caso dizemos que  $M$  é *paralelizável*.

**Casos onde  $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$**

1.  $M \cong \mathbb{R}^n, TM \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
2.  $M = S^1, TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ .
3.  $M$  3-variedade orientável, então  $TM \cong M \times \mathbb{R}^3$ . (Difícil mas verdadeiro.) **Hint.** Usando quaternions não é difícil obter uma base global.

## 2.4 Imersões e mergulhos

Até agora definimos funções suaves, mas não o que é a diferencial delas.

**Definição**  $M, N$  variedades suaves e  $f : M \rightarrow N$  suave. A *derivada de  $f$*  é

$$Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N,$$

uma aplicação linear que pode ser definida usando a definição do espaço tangente de curvas ou de derivações. Se pensamos que  $v$  é uma classe de equivalência de curvas,  $Df_p[\gamma] = [f \circ \gamma]$ . Se  $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma derivação, a definição é o pushforward

$$\begin{aligned} Df_p v : C^\infty(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (Df_p v)g &\longmapsto v(g \circ f). \end{aligned}$$

Tem outra forma de definir, que usando cartas coordenadas, onde  $Df_p$  está dada como uma matriz em termos das bases locais: em cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  de  $p$  e  $f(p)$ ,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  e  $\psi = (y^1, \dots, y^m)$ . A notação fica

$$Df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{f(p)}$$

onde  $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$  é definida como

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

**Definição** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função suave.  $f$  é uma *imersão em  $p$*  se a derivada  $Df_p$  é injetiva.  $f$  é uma *submersão em  $p$*  se  $Df_p$  é sobrejetiva.  $f$  é um *mergulho* se é uma imersão injetiva tem inversa  $g : f(M) \rightarrow M$  contínua.

**Exemplo** O exemplo mais fácil é o caso das inclusões em variedades produto:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow M \times N \\ p &\longmapsto (p, q) \end{aligned}$$

E as projecções:

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M \\ (p, q) &\longmapsto p \end{aligned}$$

Outros exemplos de submersões são as projecções dos fibrados tangente e cotangente.

Para ver por que na definição de mergulho pedimos que a inversa seja contínua, considere o seguinte contraexemplo:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva que tem um ponto limite demais: a topologia no domínio é uma linha, mas a topologia no contradomínio é de um outro espaço, mas  $f$  é um mergulho injetivo! A inversa de  $f$  não é contínua (não manda limites em limites).

**Observação** Se  $f : M \rightarrow N$  é um mergulho, então  $f(M)$  herda uma estrutura de variedade diferenciável e  $f$  é um difeomorfismo entre  $M$  e  $f(M)$ .

**Upshot** Mergulho são as três condições que precisamos para que a imagem de  $f(M)$  tenha estrutura diferenciável e  $f$  um difeomorfismo entre  $M$  e  $f(M)$ . O lance é usar o teorema da função inversa.  $f(M)$  é chamada de uma *subvariedade* de  $N$ .

Uma definição alternativa de *subvariedade* é que para cada ponto  $p \in Q \subset M$ ,  $Q$  subespaço topológico, existe uma carta de  $N$  tal que  $\varphi(U \cap Q) = \mathbb{R}^k$ . (Misha's) In Misha's handouts:

**Exercise 2.23** Let  $N_1, N_2$  be two manifolds and let  $\varphi_i : N_i \rightarrow M$  be smooth embeddings. Suppose that the image of  $N_1$  coincides with that of  $N_2$ . Show that  $N_1$  and  $N_2$  are isomorphic.

**Remark 2.10** By the above problem, in order to define a smooth structure on  $N$ , it suffices to embed  $N$  into  $\mathbb{R}^n$ . As it will be clear in the next handout, every manifold is embeddable into  $\mathbb{R}^n$  (assuming it admits partition of unity). Therefore, in place of a smooth manifold, we can use “manifolds that are smoothly embedded into  $\mathbb{R}^n$ ”.

**Notação** Se  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão escrevemos  $M \rightarrowtail N$ , se é mergulho  $M \hookrightarrow N$  e se é submersão  $f : M \twoheadrightarrow N$ .

Uma *subvariedade imersa* é a imagem de uma imersão (que pode nem ser variedade...)

**Observação**  $Q \subset M$  subvariedade, então existe uma inclusão natural  $T_q Q \subset T_q M$  (linear injetiva) para todo  $q \in Q$ . Claro, a derivada da inclusão  $\iota : Q \rightarrow M$ , i.e.  $D\iota_q : T_q Q \rightarrow T_q M$ .

kj Dado  $q \in Q$ , existe  $(U, \varphi)$  carta de  $M$  tal que  $\varphi|_{U \cap Q}$  é uma carta de  $Q$ , é só botar a base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$  dentro da base de  $M$ .

#### 2.4.1 Valores regulares

**Definição** Seja  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$ , um ponto  $y \in N$  é dito *valor regular* se  $f$  é uma submersão em  $x$  para todo  $x \in f^{-1}(y)$  i.e.  $Df_x$  é sobrejetiva para todo  $x \in f^{-1}(y)$ .

**Teorema (Do valor regular)** Se  $y$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(y)$  é uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $\dim M - \dim N$ . (Se  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ .)

**Observação** Isso é só outra encarnação do teorema da função implícita.

*Demonstração.*  $x \in f^{-1}(y) := Q$ . Pega cartas  $\varphi$  de  $x$  e  $\psi$  de  $y$ . Supondo que  $f(U) \subset V$ , e

que  $x, y$  tem coordenadas 0.

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\Phi: \psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Note que  $\Phi(0) = 0$  e que  $\Phi^{-1}(0) = \varphi(f^{-1}(y) \cap U)$ .

**Afirmção**  $\Phi^{-1}(0)$  é uma subvariedade.

Para tudo ficar claro vamos reescrever o teorema de função implícita.  $\Phi'(0)$  é sobrejetiva. Temos que

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ &z \longmapsto \Phi(z) \end{aligned}$$

A ideia é que existe uma vizinhança  $W$  de  $0 \in \mathbb{R}^m$  e um difeomorfismo  $\eta : W \rightarrow W^\sim$  tal que

$$\begin{aligned} \phi \circ \eta : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

□

## 2.5 Fibrados vetoriais

Um fibrado vetorial é uma coisa que generaliza os fibrados tangente e cotangente.

**Definição** Sejam  $E, M$  variedades e  $\pi : E \rightarrow M$  submersão sobrejetiva. Dizemos que  $\pi$  é um **fibrado vetorial** se para todo  $p \in M$ ,  $\pi^{-1}(p) = E_p$  possui uma estrutura de espaço vetorial tal que para todo  $p \in M$  existe  $U \ni p$  aberto e um difeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array}$$

e

$$\varphi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo.

**Exemplo**  $TM, T^*M, TM \oplus TM, TM \otimes TM, \Lambda^k(TM), \Lambda^k(T^*M), \text{Sym}^k(TM)$ .

## 2.6 Seções

**Definição** Uma *seção* de  $\pi : E \rightarrow M$  é  $s : M \rightarrow E$  suave tal que  $\pi \circ s = \text{id}$

$$\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \uparrow s \\ M \end{array}$$

Uma seção de  $TM$  é uma função  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $X(p) \in T_p M$ , um *campo vetorial*.

**Teorema (da bola cabeluda)**  $M = S^n$ ,  $n$  par,  $X : M \rightarrow TM$  campo vetorial, então existe  $p \in M$  tal que  $X(p) = 0 \in T_p M$ .

**Notação**  $\Gamma(E) = \{\text{seções de } \pi : E \rightarrow M\}$ ,  $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ ,  $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ ,  $\Gamma(\wedge^k(T^*M)) = \Omega^k(M)$ .

Para qualquer espaço vetorial  $V$ ,

$$\text{Sym}^2(V^*) = \{f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bilinear}, f(x, y) = f(y, x)\} \subset V^* \otimes V^*.$$

E para fibrado vetorial  $E$ ,

$$\text{Sym}^2(E) = \bigsqcup_{p \in M} \text{Sym}^2(E_p^*).$$

**Definição** Uma *métrica Riemanniana* em  $E$  é uma seção  $s : M \rightarrow \text{Sym}^2(E)$  tal que  $s(p) : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$  é positiva definida, i.e.  $s(p)(x, x) > 0$  se  $x \neq 0$ .

**Observação (Aprox.)** Todo fibrado vetorial tem uma métrica Riemanniana: usando a métrica euclidiana dada em cada carta, usamos uma partição da unidade para estender a uma seção global, somar e notar que fica positiva definida.

É muito fácil construir seções do fibrado cotangente: para  $f \in C^\infty(M)$ , a diferencial  $df : M \rightarrow T^*M$  é uma seção do fibrado cotangente, i.e.  $df \in \Gamma(T^*M)$  porque

$$df_p = Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)}^* \mathbb{R}$$

**Exercício** Qualquer seção é um mergulho de  $M$  em  $E$ .

**Mais uma**  $g$  uma métrica Riemanniana em  $TM$ .

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g_p^\# : T_p M &\longrightarrow T_p^* M \\ v &\longmapsto g(v, \cdot) \end{aligned}$$

Então o *gradiente* de  $f$  é

$$(g_p^\#)^{-1}(df_p) := \text{grad}_p f$$



### 3 Aula 3: Teorema de Sard

#### Teorema da função implícita (aula pasada)

**Upshot** Think of the circle as the zero-set of  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . If the Jacobian matrix of  $f$  has enough rank at a given point  $(x, y)$ , we can find a function  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  that parametrizes the circle locally. That is:  $(x, g(x))$  is in the circle, i.e.  $f(x, g(x)) = 0$ . (So the zero-set is the graph of  $g$ ).

So you have the zero-set of a function at a point, which is a subset of the domain. It is a geometric object. You want to parametrize it. If the derivative has rank  $k$ , you can put  $k$  of the variables of the domain in terms of the remaining ones.

So the real upshot is that this geometric thing is truly determined by  $k$  variables, so we don't need the other variables. That's it. The theorem says how to get rid of the excess of info locally:  $g$  needs less variables and produces the geometric thing locally.

Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  suave tal que  $f(0) = 0$  e  $f'(0)$  é sobrejetiva ( $\implies n \geq m$ ). Então existe uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$   $U$  e  $\tilde{U}$  e um **difeomorfismo**  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  tal que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

*Demonstração.* Parecido à prova de [Tu10] no teorema do valor regular, usando uma matriz com um  $*$ , a identidade, e uma matriz invertível.  $\square$

#### 3.1 Transversalidade: Teorema de Sard

A prova do teorema de Sard é muito técnica. Porém, a parte difícil é só análise em  $\mathbb{R}^n$ .

Pegue  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , defina um **cubo** como sendo

$$c(a, b) = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n.$$

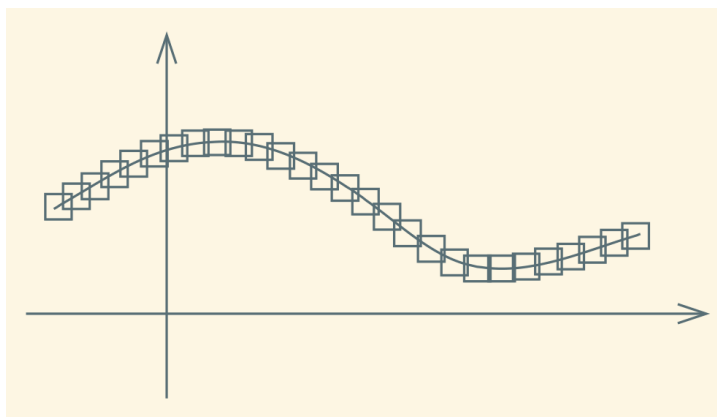
Note que  $\text{Vol}(a, b) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ .

**What [Lee13] does**

1. A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero.
2. Graph of continuous function has measure zero.
3. Affine subspaces of  $\mathbb{R}^n$  have measure zero.
4. Smooth map from manifold to  $\mathbb{R}^n$  maps measure zero to measure zero.
5. A set in a manifold has **measure zero** if it(s intersection with the respective domain) is mapped to a set of measure zero by any chart.
6. Confusing lemma.

7. Complement of zero measure is dense (in manifolds).
8. Smooth map of *manifolds* maps measure zero to measure zero.
9. Sard's theorem (heavy proof): critical value set of smooth map has measure zero.
10. Corollary (**minisard**): image of smaller dimension manifolds under smooth map has measure zero (Esto fue aclarado en clase: ¿por qué nosotros probamos minisard antes de sard? nuestra definición de punto crítico no permite aplicar este corolario; lo probamos de otra forma). Corollary 2: smaller dimension immersed submanifolds have measure zero.
11. Up next: Whitney embedding theorem.

### Definição



$S \subset \mathbb{R}^n$  possui **medida nula** se  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$  cubos (ou bolas) tais que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(c_i) < \varepsilon$$

### Proposição

1. Uma união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
2.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$  e  $S \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula, então  $f(S)$  tem medida nula.

*Demonstração.*

1.  $\{S_i\}$  enumerável de medida nula, para cada  $i$  você pode escolher cubos  $C_1^i, C_2^i, \dots$  que cobrem  $S_i$  e tal que a soma dos volumes deles é menor do que  $\sum_j \text{Vol}(C_j^i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ . Vai ver que a soma dos volumeis variando tanto  $i$  como  $j$  da  $\varepsilon$ .
2. (Foto)

□

**Definição**  $X$  variedade diferenciável.  $S \subset X$ . Dizemos que  $S$  tem *medida nula* se  $\exists \{U_i\}_{i=1}^\infty$  cobertura aberta de  $S$ , i.e.  $\bigcup_{i=1}^\infty S_i \supset S$ , e cartas  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S_i \subset U_i$  e  $\varphi(S)$  tem medida nula.

O más bien: sólo el chiste es que cada conjunto tiene medida en  $\mathbb{R}^n$  cuando projectas con cualquier carta.

### Corolário

1.  $\{S_i\}_{i=1}^\infty$ .  $S_i \subset X$  medida nula, então  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  tem medida nula.
2.  $X^n, Y^n$  variedades,  $f : X \rightarrow Y$  suave,  $S \subset X$  medida nula. Então  $f(S)$  tem medida nula.

**Proposição**  $Y^n$  variedade,  $X^m \subset Y^n$  subvariedade de dimensão  $m < n$ . Então  $X$  tem medida nula.

*Demonstração.* É simplesmente levar para  $\mathbb{R}^n$ : considera  $X_i$  como a parte de  $X$  que está den' de cada  $U_i$  no atlas de  $Y$  e vai ver que ele tem dimensão menor. Daí é só provar que subespaços (acho que lineares) de dimensão menor em  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão menor. □

**Corolário (Minisard)**  $X^m, Y^n$  variedades  $m < n$  e  $f : X \rightarrow Y$  suave. Então  $f(X)$  tem medida nula.

*Demonstração.* Aqui se usa o corolário: usar a inclusão  $\iota : X \rightarrow X \times \mathbb{R}^{n-m}, x \mapsto (x, 0)$ , compor com  $\tilde{f} : X \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow Y, (x, y) \mapsto f(x)$ . Então  $\tilde{f}(\iota(X)) = f(X)$ . O lance é que  $\iota(X)$  é uma subvariedade de codimensão positiva, então pela prop anterior tem medida nula. Daí  $f(X)$  também. □

**Corolário (Versão fácil do teorema de mergulho de Whitney)** Se  $X^n$  variedade diferenciável compacta, então existem

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}, \quad X \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{R}^{2n}$$

**Teorema (Difícil de Sard)**

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad X \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{R}^{2n-1}$$

*Prova do corolário.*

**Step 1** Mergulhar a variedade num espaço euclidiano *grande*. Pegue um atlas finito  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^k$ , note que  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  são mergulhos.

**Ideia**

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{nk} \\ p &\longmapsto (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \dots) \end{aligned}$$

Isso não dá. Para fazer bem precisamos de uma partição da unidade  $\{\rho_i\}_{i=1}^k$  subordinada a  $\{U_i\}_{i=1}^k$  cobertura. Defina  $\rho_i \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo zero fora do conjunto bom; note que essa função não é mais um mergulho, mas tudo bem. Agora faça  $X \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k}$

$$\begin{aligned}\Phi : X &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{nk+k} \\ p &\longmapsto \left( (\rho_1 \varphi_1)(p), \dots, (\rho_k \varphi_k)(p) \right)\end{aligned}$$

**Exercício (Importante)** Mostre que  $\Phi$  é uma imersão injetiva.

**Step 2 Afirmação:**

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^n \implies \begin{cases} X \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n + 1 \\ X \xrightarrow{\circ} \mathbb{R}^{N-1} & \text{se } N > 2n. \end{cases}$$

*Prova da afirmação.* Vamos projetar a variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^n$  no plano ortogonal a algum vetor  $a \in \mathbb{R}^n$ . Resulta que

**Exercício**

$$\begin{aligned}g : X \times X \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, y, t) &\longmapsto \text{pr}_a \circ f\end{aligned}$$

é injetiva.

□

**Step 3 Ideia:** ver que em quase todo ponto podemos projetar.

Considere agora o mapa pushforward que pega um vetor tangente e manda mediante  $f$ :

$$\begin{aligned}h : TX &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, v) &\longmapsto (Df)_x v\end{aligned}$$

Agora note que

**Afirmção**  $a \notin \text{Im}(h) \iff \text{pr}_a \circ f$  é uma imersão  $\iff D(\text{pr}_a \circ f)_a$  é injetiva para toda  $x$ .

**Step 4** A prova termina usando minisard: as imagens de  $g$  e de  $h$  tem medida nula. Mesmo a união delas. Então existe um ponto fora dessa união.

□

**Definição** Sejam  $X^m, Y^k$  variedades,  $f : X \rightarrow Y$  suave, dizemos que

- (a)  $x \in X$  é **ponto crítico** se o posto de  $Df_x$  é menor do que  $\min(m, n)$ . (  $\iff$  não é surjetiva I think) *Aula 7: essa definição é que a derivada não é de posto máximo. Isso permite que o domínio tenha pontos regulares, así fez Sard e [GG74], mas não [Lee13], [GP10].*
- (b)  $x \in X$  é **ponto regular** se  $\text{posto } Df_x = \min(m, n)$ .
- (c)  $y \in Y$  é **valor crítico** se existe um ponto crítico tal que  $f(x) = y$ .
- (d)  $y \in Y$  é **valor regular** se  $\forall x \in f^{-1}(y)$ ,  $x$  é valor regular.

**Teorema (Sard)**  $f : X \rightarrow Y$  suave. Então  $\{\text{valores críticos}\}$  tem medida nula.

### Observação

1. Teorema vale se  $f$  é  $C^\ell$ , onde  $\ell > \max(m - n, 0)$ .

*Demonstração.*

**Step 1 Redução para a versão local.** Supomos que  $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ .  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  aberto.

$$\text{Crit } f = \{x \in U : \text{posto } f'(x) < \min(m, n)\}$$

Então  $f(\text{Crit}(f))$  tem medida nula. Para isso fazemos **indução em m**.  $m = 0$  trivial.

$C_i$  vai ser o conjunto onde as derivadas parciais se anulam até  $i$ :

$$C_i = \left\{ p \in U : \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^\alpha} f_k(p) = 0 \forall \alpha, 0 < |\alpha| \leq i, \forall k \right\}.$$

Note que  $C_{i+1} \subset C_i \subset C_{i-1} \subset \dots \subset C_1 \subset C := \text{Crit } f$ .

**Objetivo**  $f(C)$  tem medida nula.

**Paso 1**  $f(C_N)$  tem medida nula para algum  $N \gg 0$ . **Crucial**

**Paso 2**  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula para toda  $i$ .

**Paso 3**  $f(C \setminus C_i)$  tem medida nula.

**Paso 1** Podemos supor sem perda de generalidade que  $U \subset$  cubo, a fórmula de Taylor diz que

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq K \cdot \|x - y\|_\infty^{i+1}$$

para todo  $x, y \in C_i$ .

Tem que botar  $C_i$  den' de um cubo  $D_j$  que se divide em  $r^m$  cubos de lado  $b/r$ . Então  $f(D_j)$  está contido num cubo em  $\mathbb{R}^n$  de lado  $K \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{i+1} := R_j$ . Também note que pontos den' de  $D_j$  são tq.  $\|x - y\|_\infty \leq \frac{b}{r}$ .

Agora

$$f(C_i) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{r^m} D_j\right) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} f(D_j) \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} R_j.$$

Então

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r^m} \text{Vol}(R_j) &= r^m \cdot K^n \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{(i+1) \cdot n} \\ &= \frac{K^n \cdot b^{n(N+1)}}{r^{n(N+1)-m}}\end{aligned}$$

Step 2

□

## 4 Aula 4

### 4.1 Teorema de Sard

**Teorema (Sard)**  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^\ell$ ,  $\ell > \max(m - n, 0)$ . Então  $\{\text{valores críticos}\}$  tem medida nula.

*Demonstração.* **Note que**  $\{\text{valores críticos}\} = f(\{\text{ptos críticos}\})$ .

Seja  $C = \{\text{ptos críticos de } f\}$ . Então aproximamos a conjunto onde todas as derivadas parciais são zero com o conjunto  $C_i$  onde as derivadas parciais até  $i$  se anulam.

**Passo 1**  $f(C_N)$  tem medida nula se  $N > \max(m - n, 0)$ . (Feito na aula pasada.)

**Passo 2**  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula

**Passo 3**  $f(C \setminus C_1)$  tem medida nula.

Concluimos porque  $f(C)$  é a união de três conjuntos de medida nula: um por cada passo. Segundo e terceiro passos são com indução em  $m$ .

Prova:

**Passo 1** Feito ontem.

**Passo 2** A ideia é que podemos dar coordenadas de dimensão 1 menos usando que a derivada  $i + 1$  não se anula. (Acho.)

**Passo 3** É parecido só que um pouco mas difícil. No caso anterior os valores da função  $h$  são zero, aqui não (ver foto). Aqui usamos

**Lemma** A compact subset whose intersection with every hyperplane has measure zero has measure zero:

$A \subset \mathbb{R}^n$  compacto tal que  $X \cap \{x\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^{n-1}$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $A$  tem medida nula.

*Prova do lema.* A ideia es pegar uma faixinha de altura  $x$  e cobrir esse pedaço de  $A$  com quadradinhos naquele plano  $C_j^x$ . Dai, “como  $A$  é compacto” podemos pegar

um  $I_x \subset \mathbb{R}$  intervalo tal que para todo  $y \in I_x$  ( $y$  perto de  $x$ ), a faixinha de altura  $y$  fique contida em  $\bigcup I_x \times C_j^x$

**Ideia.** Como  $A$  é compacto podemos pegar um mini intervalo tal que todas as faixinhas muito pertinho (bom, a parte de  $A$  em cada faixinha) fica dentro dos quadrados  $C_j^x$  multiplicados por esse mini-intervalo.

Agora calculamos os volumes. Lembre de análise na reta (ver [Lee13] lem 6.2, tem que shrink os intervalos) que a soma dos comprimentos dos intervalos  $I_{x_i}$  que conformam uma cobertura essencial (não pode tirar nenhum dos abertos da coberta) de um intervalo  $L$  é **menor do que duas vezes o tamanho do intervalo**:  $\sum \text{compr}(I_{x_i}) < 2(2L) = 4L$ .

Em fim, a soma dos comprimentos é um número finito. Então fica que

$$\sum_{i,j} \text{Vol}(I_{x_i} \times C_j^{x_i}) = \sum_i \sum_j \text{Vol}_1(I_{x_i}) \text{Vol}_{n-1}(C_j^{x_i}) < \varepsilon \sum \text{Vol}_1(I_{x_i}) < 4L\varepsilon.$$

□

□

## 4.2 Espaço de jatos

Son como vectores de orden de diferenciabilidad más grande: a ideia é generalizar o espaço tangente e o espaço cotangente **para derivadas de ordem maior**.

### Definição

Dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  suaves que mandan  $p$  al mismo punto son equivalentes si existen cartas tales que las derivadas parciales de sus representaciones en coordenadas coinciden hasta orden  $k$ .

Sejam  $X, Y$  variedades diferenciáveis suaves e  $f, g : X \rightarrow Y$  suaves. Dizmos que  $f \sim_k g$  em  $p \in X$  se, intuitivamente, as derivadas parciais de  $f$  e  $g$  coincidem até ordem  $k$ . Isso é intuitivo porque precisamos pegar cartas para isso ficar bem definido: precisamos que existam cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  aoredor de  $p$  e  $f(p)$  tais que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)))$$

Los *jatos* son gémenes:

$$J^k(X, Y)_{p,q} = \{f : X \rightarrow Y : f(p) = q\} / \sim_k.$$

Isso generaliza o espaço tangente do seguinte jeito:

$$J^1(\mathbb{R}, Y)_{0,q} \cong T_q Y.$$

### Exercício

$$J^1(X, \mathbb{R})_{p,0} \cong T_p^* X.$$

*Solution.* Vamos definir uma correspondência que a cada jato associa um funcional em  $T_p^*M$  pensando que os vetores são classes de equivalência de curvas  $[\gamma]$ . Pegue um jato  $\sigma$ . Esse jato  $\sigma$  tem um representante  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (que manda  $p$  a zero). Pegue  $d_p f : T_p X \rightarrow \mathbb{R}$ , um elemento de  $T_p^*X$ . É claro que esta correspondência está bem definida: se  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  está relacionada com  $f$ , as derivadas parciais delas coincidem em  $p$ , de forma que  $d_p f = d_p g$ . A contenção oposta é evidente: toda forma em  $T_p^*X$  é a diferencial de algum jato já que a base canônica de  $T_p^*X$  está dada por diferenciais de funções em  $p$ .  $\square$

Daí definimos o *espaço de k-jatos*:

$$J^k(X, Y) := \bigsqcup_{\substack{p \in X \\ q \in Y}} J^k(X, Y)_{p,q}$$

Então pega um jato  $\sigma \in J^k(X, Y)$ . Isso cuspe um  $p$  e um  $q$  tais que  $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$ . Definamos as funções

$$\begin{aligned} \alpha : J^k(X, Y) &\longrightarrow X & \beta : J^k(X, Y) &\longrightarrow Y \\ \sigma &\longmapsto p & 0 &\longmapsto q \end{aligned}$$

**Exemplo**  $X = U \subset \mathbb{R}^n, Y = V \subset \mathbb{R}^m$  abertos. O que é o espaço de jatos neste caso?

Tem uma bijeção

$$\begin{aligned} : J^k(U, V)_{x,y} &\xrightarrow{\cong} B_{n,m}^k \\ f &\longmapsto (f_1^k, \dots, f_m^k) \end{aligned}$$

Lance: pode pensar que esas funções são polinômios de grau máximo  $k$ .

$$B_{n,m}^k = \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : p \text{ polinomial de grau } \leq k \text{ tal que } p(0) = 0\}.$$

**Exercício** Calcule a dimensão de  $B_{n,m}^k$ .

*Solution.* Enquanto eu achei que a dimensão era  $k^m$ , porque cada espaço de polinômios (em uma variável, sem termo constante) está gerado por  $\langle x, x^2, \dots, x^k \rangle$  e temos  $m$  deles, errei. Porque são polinômios em  $n$  variáveis. Então a base do espaço de polinômios em  $n$  variáveis de grau máximo  $k$  e sem termo constante e... o conjunto de monômios linearmente independentes de grau máximo  $k$

Façamos um polinômio de  $n$  variáveis de grau máximo  $k$ . Tendo  $n$  variáveis, pode pegar só uma delas, aí tem  $n$  opções. Pode pegar duas delas, aí tem mais  $n^2$  opções. Três, quatro, até  $k$  delas. Tem  $\sum_{i=1}^k n^i$  diferentes monômios. **Mas...** o que acontece com a ordem?

De acordo com ChatGPT, o problema fica melhor quando pensamos que a cada variável (=indeterminada  $x_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ ) de um monômio associamos um número inteiro maior ou igual de que 0, o expoente da variável. Daí a quantidade de monômios de grau



$i$  é simplesmente a quantidade de vetores inteiros não negativos  $a_j$  tais que  $\sum a_j = i$ . Isso é o mesmo que a quantidade de formas de acomodar  $i$  bolinhas em  $n$  caixinhas. Isso é o mesmo que a quantidade de formas de acomodar  $n - 1$  divisionsinhas numa lista de  $i$  bolinhas (porque todas as bolinhas são iguais). Então são  $i + n - 1$  coisas (divisionsinhas ou bolinhas) numa linha, e nesses  $i + n - 1$  lugares escolhemos  $n - 1$  para botar as divisionsinhas. O resultado é  $\binom{i+n-1}{n-1}$ . Somar sobre  $i$ . Elevar à  $m$ .  $\square$

$$\begin{array}{ccc} J^k(U, V) & \xrightarrow{\cong} & U \times V \times B_{n,m}^k \\ & \searrow \alpha \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array}$$

Creio que: definimos  $f_i^k$  como as "partes sem constante dos polinômios de Taylor de ordem  $k$  das coordenadas de  $f$ ", [CREO QUE la idea es que la clase de equivalencia  \$\[f\]\$  está determinada por los principios de los polinomios de Taylor de sus funciones coordenadas.](#)

No entendí esto pero va:

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{polinomial}$$

$x_0 \in U, y_0 \in V$ , entre aspas:

$$f(x - x_0) = y_0 + p(x - x_0),$$

$f(U) \subset V$ . En fim, temos que

2.  $J^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times T^*M$ .
3.  $J^1(\mathbb{R}, M) \cong \mathbb{R} \times TM$ .

Agora o pushforward e o pullback, que basicamente é precompôr e poscompôr:

### Definição

1.  $\varphi : Y \rightarrow Z$  suave,  $X$  variedade suave. O **pushforward** é

$$\begin{aligned} \varphi_* : J^k(X, Y) &\longrightarrow J^k(X, Z) \\ [f]_x &\longmapsto [\varphi \circ f]_x \end{aligned}$$

2. O **pullback** é... mas aqui **precisamos que  $\psi$  seja difeomorfismo**

$$\begin{aligned} \psi^* : J^k(X, Y) &\longrightarrow J^k(Z, Y) \\ [f]_x &\longmapsto [f \circ \psi]_{\psi(x)} \end{aligned}$$

### Observação

1.  $\sigma \in J^k(X, Y)_{x,y}, \varphi_* \sigma \in J^k(X, Z)_{x, \varphi(y)}$
2.  $\sigma \in J^k(X, Y), \psi^* \sigma \in J^k(Z, Y)_{\psi^{-1}(x), y}$

#### 4.2.1 Estrutura diferenciável no espaço de jatos

#### 4.2.2 When dani finally understood this

Here's how the charts (and the topology) of  $J^k(X, Y)$  is constructed.

1. Choose charts  $(U, \varphi)$  of  $X$  and  $(V, \psi)$  of  $Y$ .
2. Take the jet space  $J^k(U, V)$  to an euclidean jet space via the induced maps of the charts:

$$(\psi^{-1})^* \varphi_* : J^k(U, V) \rightarrow J^k(U', V')$$

where  $U' = \varphi(U)$  and  $V' = \psi(V)$ .

3. Now that you are in euclidean space you can compute Taylor polynomials: a  $k$ -jet  $[f] \in J^k(U', V')$  has coordinate functions, the Taylor polynomials of which are well-defined up to order  $k$ :

$$\begin{aligned} f : U' \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow V' \subset \mathbb{R}^m \\ x_0 &\longmapsto (f_1(x_0), \dots, f_m(x_0)) \end{aligned}$$

Define

$$T_k f_i(x_0) := \text{Taylor polynomial of } f_i \text{ at } x_0 \text{ up to degree } k.$$

4. Realise: for every  $k$ -jet  $[f] \in J^k(U', V')$  its coordinates are:

$$\begin{aligned} (\alpha[f], \beta[f], T_k f_1(\alpha[f]), \dots, T_k f_m(\alpha[f])) &\in U' \times V' \times P_n^k \times \dots \times P_n^k \\ &= U' \times V' \times B_{n,m}^k. \end{aligned}$$

where  $\alpha[f]$  is (the coordinates of) the source,  $\beta[f]$  its target.

**The point is** that when you take an open set of  $J^k(X, Y)$  you are basically taking an open set of  $X$ , an open set of  $Y$ , and *an open set in some crazy polynomial space (that is not crazy at all: it's euclidean space!)*. So, its just a product of

$$\text{open set in } X \times \text{open set in } Y \times \text{crazy euclidean space } \mathbb{R}^N$$

Never forget that this is what a basic open set in  $J^k(X, Y)$  looks like.

#### 4.2.3 how this can also be something else

Now we read the book of Mukherjee

The space of polynomials of degree  $\leq r$  with constant term equal to zero defined on  $\mathbb{R}^n$  with values in  $\mathbb{R}^m$  is

$$P^r(n, m) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times L_s^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \dots \times L_s^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

where  $L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  is the space of  $k$ -multilinear maps  $L(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  and the little  $s$  means they are symmetric.

So we also have

$$P^r(n, m) = \underbrace{P_n^r \oplus \dots \oplus P_n^r}_{m \text{ summands}}$$

where  $P_n^r$  is the set of all polynomial functions in  $n$  variables.

**Superlemma 8.1.3 (Mukherjee)** Let  $U \subset \mathbb{R}_+^n$  and  $V \subset \mathbb{R}^m$  be open subsets. Then there is a canonical bijection

$$\begin{aligned} h_{U,V} : J^r(U, V) &\longrightarrow U \times V \times P^r(n, m) \\ j^r f &\longmapsto (p, f(p), Df(p), \dots, D^r f(p)) \end{aligned}$$

where  $D^k f$  is the  $k$ th total derivative of  $f$ , a  $k$ -multilinear map from  $\mathbb{R}^n$  to  $\mathbb{R}^m$ , i.e. an element of  $L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  defined inductively by taking the derivative of the derivative etc. (Symmetric I think because partial derivatives commute.)

**Now we see** that two things that are similar and yet very different can be used interchangeably: the “differential coordinates” of a jet (=the part of the coordinates that is not the coordinates in  $X$  nor  $Y$ ) can be seen as:

- the truncated Taylor polynomials of the  $m$  coordinate functions of  $f$  at some local charts,
- the total differentials of  $f$  from 1 to  $k$ .

**Last but not least** these open sets are in fact jet spaces of the form  $J^k(U, V)$ .

#### 4.2.4 Lecture notes

Pegue  $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$  e cartas  $(U, \varphi)$  de  $p$  e  $(V, \psi)$  de  $q$ . **Ideia:** usar o pushforward e o pullback das cartas para levar o problema no  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercício** Considere

$$J^k(U, V) = \bigsqcup_{\substack{p \in U \\ q \in V}} J^k(X, Y)_{p,q}.$$

Então

$$\begin{aligned} J^k(U, V) &\longrightarrow J^k(\varphi(U), \psi(V)) \\ \sigma &\longmapsto \psi_*(\varphi^{-1})^* \sigma \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Então para dar uma estrutura de variedade topológica no espaço de jatos note que também

$$J^k(\varphi(0), \varphi(V)) \cong \varphi(0) \times \varphi(V) \times B_{n,m}^k \subset \mathbb{R}^{n+m+\dim B_{n,m}^k}$$

(lo bueno es que ya sabes cual es la dimension de  $B_{n,m}^k$ . Mas não interessa qual é a dimensão: o importante é que o  $B_{n,m}^k$  tem uma base, é um espaço vetorial.) ) Em fim, tudo isso dá uma estrutura de variedade topológica. Para terminar só temos que ver o que acontece com as mudanças de coordenadas.

$$\begin{aligned} \varphi(U) \times \psi(V) \times B_{n,m}^k &\longrightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \times \tilde{\psi}(\tilde{V}) \times B_{n,m}^k \\ (p, q, f) &\longmapsto (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(p), \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}(q)) \end{aligned}$$

**Isso é suave!** E isso implica que  $J^k(X, Y)$  é uma  $C^\infty$  variedade de dimensão  $n + m + \dim B_{n,m}^k$ .

## 5 Aula 5: topologia de Whitney

1. Terminamos a estrutura de variedade diferenciável do espaço de jatos. As cartas são

$$J^k(\varphi(U), \psi(V)) \xrightarrow{\text{bijeção}} \varphi(U) \times \psi(U) \times B_{n,m}^k \subset \mathbb{R}^N$$

lembramos como ver que as funções de transição são suaves (**exercício: fazer detalhes**)

- 2.

**Definição** Sejam  $E, B, F$  variedades dif.  $\pi : E \rightarrow B$  suave é um *fibrado* com fibra  $F$  se

- $\pi$  é uma submersão sobrejetiva.

- para todo  $b \in B$  existe  $U \subset B$  aberto  $U \ni b$  e um difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\text{dif}} & U \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array}$$

3.  $\alpha$  e  $\beta$  são fibrados. Também  $\alpha \times \beta : J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y$ . As fibras do último são difeomorfismos a um espaço vetorial (polinômios  $B$ ) mas esse difeomorfismo não induz estrutura de espaço vetorial. Caso  $Y = \mathbb{R}^n$  pode sim pq os jatos são funções em  $m\mathbb{R}^n$ , assim pode botar estrutura de espaço vetorial nas fibras.
4. Para cada função  $f \in C^\infty(X, Y)$  temos uma **seção** de  $J^k(X, Y)$  chamada  $j^k f : X \rightarrow J^k(X, Y)$  dada por  $x \mapsto [f]_x$ .
5. Topologia de Whitney  $C^k$  defn.
6. Lema:  $k \leq \ell \implies W_k \subset W_\ell$ .
7. Def: a topologia  $C^\infty$  **de Whitney** é a topologia gerada por  $\bigcup_{k=1}^\infty W_k$  onde  $W_k$  é a  $k$ -ésima. “ $U$  é aberto em  $C^\infty$ ” se para todo  $x \in U$  existe  $V$  aberto em algum  $C^k$  (para todo  $x$  existe  $V$  e existe  $k$ ) tais que  $x \in V \subset U$ .
8. Def: Seja  $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  e  $f \in C^\infty(X, Y)$  definimos a  $\delta$ -bola como

$$D_\delta(f) = \{f \in C^\infty(X, Y) \mid d(j^k f(x), j^k g(x)) < \delta(x) \forall x \in X\}$$

onde  $d$  é qualquer métrica em  $J^k(X, Y)$ . (A distancia entre as derivadas é muito pequena.)

9. Prop:  $\{B_\delta(f) : \delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+\}$  é uma base local centrada em  $f$  da topologia  $C^k$ , i.e.
  - $B_\delta(f)$  é aberto.
  - $\forall \mathcal{W} \ni f$  aberto, existe  $\delta$  tal que  $B_\delta(f) \subset \mathcal{W}$ .
10. Fix: a locally finite atlas  $\Phi$  of  $X$  with a  $\subseteq$  cover (every open set of the cover contains an open subset whose closure is compact and contained in the original open set), an atlas  $\Psi$  of  $Y$ , e uns números positivos  $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$ , e uma função  $f \in C^\infty(X, Y)$ . Então a topologia gereada por (foto) coincide com a topologia  $C^k$ .
11. Obs: quando  $X$  é compacto,  $\delta_n = \frac{1}{n}$ ,  $\{B_{\delta_n}(f)\}$  é uma base local da topologia  $C^k$ .
12. Prop: seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(X, Y)$ ,  $f_n \xrightarrow{C^k} f$ . Então existe  $K \subset X$  compacto tal que  $f_n \equiv f$  em  $X \setminus K$  e  $j^k f_n \xrightarrow{u} j^k f$  em  $K$ .

## 6 Aula 6: topologia de Whitney (cont.). Teoremas de transversalidade.

### 6.1 Topologica de Whitney (cont.)

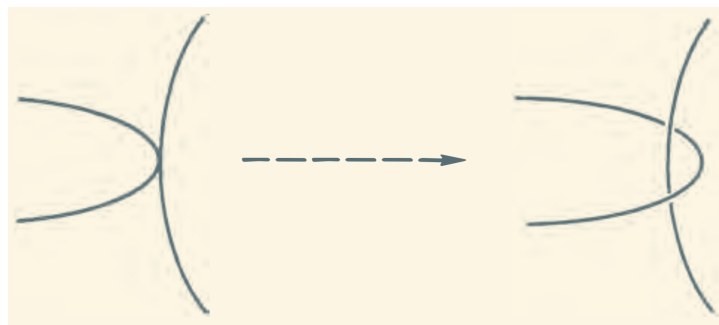
1. Lembrança das topologias  $C^k$  e  $C^\infty$ .
2.  $X$  variedade não compacta existe  $\{K_n\}$  compactos tais que  $K_n \subset \mathring{(K_{n+1} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n)} = X$ . Também existe  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\rho|_{K_{2n+1} \setminus K_{2n}} = 2$ .  $\rho$  é própria.
3. Em toda variedade existe uma métrica completa (análise em variedades...).
4. Definição de espaço de Baire.
5. Teo (Prop 3.3). Se  $X, Y$  são variedades suaves, então  $C^\infty(X, Y)$  é um espaço de Baire na topologia  $k = 1, 2, \dots, +\infty$ .
6. Prop 3.X,  $Y$  variedades diferenciáveis  $j^k : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, J^k(X, Y))$  é contínua em  $C^\infty$ .
7.  $\phi : Y \rightarrow Z$  suave então  $\phi_* : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, Z)$ ,  $f \mapsto \phi \circ f$  é contínua em  $C^\infty$ . Também  $C^\infty(X, Y) \times C^\infty(X, Z) \rightarrow C^\infty(X, Y \times Z)$ ,  $(f, g) \mapsto f \times g$ .

### 6.2 Teoremas de transversalidade

A ideia é que a transversalidade é uma condição genérica.

1. Def:  $X, Y, f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $W \subset Y$  subvariedade.  $f$  é **transversal** a  $W$  se para todo  $x \in f^{-1}(W)$ ,
$$df_x(T_x W) + T_{f(x)} W = T_{f(x)} Y.$$
2. Obs. Isso impoe restrições sobre as dimensoes: se  $f \pitchfork W$  e  $f^{-1}(W) \neq \emptyset$ . Então  $\dim X + \dim W \geq \dim Y$ .

**Observação** ([GP10], p. 35) Why can't two curves in  $\mathbb{R}^3$  never intersect transversally (except if they do not intersect at all)? Doesn't make sense because of course they can intersect transversally, right? what happens is that *by a small deformation of either curve, one can abruptly pull the two entirely apart; their intersection is not stable*:



3. Teorema muito importante.  $X, Y$  variedades suaves  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $W \subset Y$  subvariedade,  $f \pitchfork W$  e  $f^{-1}(W) \neq \emptyset$ . Então  $f^{-1}(W) \subset X$  é uma subvariedade e  $\text{codim } f^{-1}(W) = \text{codim}(W)$ .

Outra encarnação do teorema da função inversa.

**Observação** ([GP10], p. 29) When  $W$  is just a single point, its tangent space is the zero subspace of  $T_y(Y)$ . Thus  $f$  is transversal to  $y$  if  $df_x[T_x(X)] = T_y(Y)$  for all  $x \in f^{-1}(y)$  **which is to say that  $y$  is a regular value of  $f$** . So transversality includes the notion of regularity as a special case.

## 7 Aula 7

1. Prop: Sejam  $X, Y$  variedades e  $W \subset Y$  subvariedade fechada como subconjunto.

$$T_W := \{f \in C^\infty(X, Y) : f \pitchfork W\}$$

é aberto em  $C^\infty$ .

A ideia é que podemos perturbar variedades que se intersectam transversalmente, e isso fica transversal que podemos perturbar variedades que se intersectam transversalmente, e isso fica transversal.

2. Prop: Sejam  $X, Y, B$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade,  $j : B \rightarrow C^\infty(X, Y)$  (não podemos supor que  $j$  é contínua. Considere também

$$\begin{aligned} \Phi : X \times B &\longrightarrow Y \\ (x, b) &\longmapsto j(b)(x). \end{aligned}$$

Suponha que  $\Phi \pitchfork W$ .

Então  $\{b \in B : j(b) \pitchfork W\}$  é denso em  $B$ . (Também é verdade que esse conjunto tem medida total.)

3. Corolário 4.7.

4. Teorema de transversalidade de Thom. (Formulação.)

5. Coro 4.11. (Formulação.)

## 8 Aula 8: teorema de transversalidade de Thom; multi-jatos

### 8.1 Teorema de transversalidade de Thom

**Teorema (de transversalidade de Thom)** Sejam  $X, Y$  variedades diferenciáveis,  $W \subset J^k(X, Y)$  subvariedade. Então

$$\{d \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W\}$$

é residual (=interseção de abertos densos).

(Se  $W$  é fechado, então o conjunto também é aberto.)

*Demonstração.* Primeiro, para o último comentário ali entre parêntese, note que se  $W$  é fechado,

$$U = \{g \in C^\infty(X, J^k(X, Y)) : g \pitchfork W\}$$

é aberto. Note que  $T_W = (j^k)^{-1}(U)$ .

Como  $j^k : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, J^k(X, Y))$  é contínua,  $T_W$  é aberto.

**Começa a prova.** OK então pegue  $\sigma \in W$ . Seja  $W_\sigma \subset W$  uma vizinhança, e cartas  $\varphi_\sigma : U_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi_\sigma : V_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$  tais que

1.  $\alpha(\sigma) \in U_\sigma$ ,  $\beta(\sigma) \in V_\sigma$ .
2.  $\overline{W}_\sigma, \overline{U}_\sigma$  compactos.
3.  $\alpha(\overline{W}_\sigma) \subset U_\sigma$ ,  $\beta(\overline{W}_\sigma) \subset V_\sigma$ .
4.  $\psi_\sigma(V_\sigma) = \mathbb{R}^m$ .

Então beleza. Agora pegue

$$T_\sigma = \{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W \text{ em } \overline{W}_\sigma\}$$

Então

$$\bigcap_{\sigma \in W} T_\sigma = T_W.$$

Como  $W$  é 2-enumerável, podemos escolher  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_{\sigma_n} = W$ . Logo

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_{\sigma_n} = T_W.$$

**Afirmção**  $T_\sigma$  é aberto e denso.



*Prova da afirmação.*

**Proposição (da aula passada modificada)**  $X, Y$  variedades dif.  $W \subset Y$  subvariedade,  $W' \subset W$  fechado em  $Y$ . Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W \text{ em } W'\}$$

é aberto.

Ussando essa proposição é o fato de que  $j^k$  é contínua, mostramos que  $T_\sigma$  é aberto.

Para ver que  $T_\sigma$  é denso considere  $f \in C^\infty(X, Y)$ . Vamos construir  $\{g_n\} \subset C^\infty(X, Y)$  tal que  $g_n \xrightarrow{C^\infty} f$  e  $g_n \in T_\sigma$ .

Vamos escolher

$$\rho_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \quad \rho_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$$

suaves,  $\rho_1 \equiv 1$  numa vizinhança de  $\varphi_\sigma(\alpha(\overline{W}_\sigma))$ ,  $\rho_2 \equiv 1$  numa viz. de  $\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma))$ ,  $\text{supp } \rho_1, \text{supp } \rho_2$  compactos (partição da unidade).

Seja  $B = \{\text{funções polinomiais de } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de grau } \leq k\} \cong \mathbb{R}^m \oplus B_{n,m}^k$ .

Para  $b \in B$ , definimos  $g_b : X \rightarrow Y$ ,

$$g_b = \begin{cases} \psi_\sigma^{-1}(\psi_\sigma(f(x)) + \rho_2(\psi_\sigma(f(x)))\rho_1(\varphi_\sigma(x)) \cdot b(\varphi_\sigma(x))), & \text{se } x \in U_\sigma \text{ e } f(x) \in V_\sigma \\ f(x) & \text{se } x \notin U_\sigma \text{ e } f(x) \notin V_\sigma \end{cases}$$

$g_0 = f$ .

**Intuition for  $g_b$  by ChatGPT.** The function  $g_b$  is a smooth perturbation of  $f$  designed to ensure  $j^k g_b \pitchfork W$  in  $\overline{W}_\sigma$ . Locally, near  $\overline{W}_\sigma$ ,  $g_b$  behaves like  $f$  plus a polynomial perturbation  $b(\varphi_\sigma(x))$ , where  $b \in B$  spans the  $k$ -jet space. The partition of unity functions  $\rho_1, \rho_2$  localize the perturbation to a compact region, ensuring  $g_b$  is globally smooth and matches  $f$  outside this neighborhood.

Agora:

$$\begin{aligned} \Phi : X \times B &\longrightarrow J^k(X, Y) \\ (x, b) &\longmapsto j^k g_b(x) \end{aligned}$$

**Dependence of  $g_b$  on  $b$ .** For each  $b \in B$ , where  $B$  is the space of polynomials of degree  $\leq k$  in the local coordinates  $\varphi_\sigma(x)$ , there is a corresponding perturbation  $g_b$ . The choice of  $b$  determines how  $g_b$  modifies  $f$  locally near  $\overline{W}_\sigma$ . The perturbation:

- Is localized to  $\overline{W}_\sigma$  by the partition of unity functions  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , ensuring  $g_b = f$  outside  $U_\sigma$ .
- Explores all possible modifications in the  $k$ -jet space  $B_{n,m}^k$ , making the construction rich enough to enforce transversality.

While  $b$  can be chosen freely from  $B$ , the perturbation is controlled, smooth, and compactly supported, ensuring  $g_b$  remains globally well-behaved.

**Ideia:**  $\Phi \models W$ .

Seja  $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma)), \rho_2^{-1}([0, 1])) > 0$ .

$$\tilde{B} = \{b \in B : \|b(x)\| < \varepsilon \forall x \in \text{supp } \rho_1\}$$

aberto,  $0 \in \tilde{B}$ .

**The subset  $\tilde{B}$  (GPT).** The set  $\tilde{B}$  is a subset of the polynomial space  $B$ , defined as:

$$\tilde{B} = \{b \in B : \|b(x)\| < \varepsilon \forall x \in \text{supp } \rho_1\},$$

where  $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma)), \rho_2^{-1}([0, 1])) > 0$ . This means that  $\tilde{B}$  contains only those polynomials  $b(x)$  whose values are bounded by  $\varepsilon$  within the support of  $\rho_1$ . The set  $\tilde{B}$  is open in  $B$ , and  $0 \in \tilde{B}$ .

$\tilde{\Phi} : \Phi|_{X \times \tilde{B}} : X \times \tilde{B} \rightarrow J^k(X, Y)$  é um difeomorfismo local numa viz. de  $(x, 0)$ , onde  $\Phi(x, b) \in \overline{W}_\sigma$ .

$(x, b)$  t.q.  $\Phi(x, b) \in \overline{W}_\sigma$ .  $j^k g_b(x) \implies x \in \alpha(\overline{W}_\sigma)$ ,  $g_b(x) = \beta(\Phi(x, b))$ .

$$\Psi_b(g_b(x)) = \Psi_\sigma(f(x)) + \rho_2(\psi_\sigma(f(x)))\rho_1(\varphi_\sigma(x))b(\varphi_\sigma(x)).$$

$$\|\Psi_\sigma(g_b(x)) - \psi_\sigma(f(x))\| \leq \|b(\varphi_\sigma(x))\| < \varepsilon.$$

Então

$$\rho_2(b(\varphi_\sigma(x))) = 1.$$

$$g_b(x) = \psi_\sigma^{-1}(\psi_\sigma(f(x)) + b(\varphi_\sigma(x)))$$

$$g'_b(x) = \psi_\sigma^{-1}(\psi_\sigma(f(x)) + b'(\varphi_\sigma(x)))$$

para  $b'$  suficientemente próxima de  $b$ . **Isso implica que  $\Phi$  é um difeomorfismo local para todo  $(x, b) \in \Phi^{-1}(\overline{W}_\sigma)$ .**

**Summary of  $\tilde{B}$  and its Role (GPT).** The set  $\tilde{B} = \{b \in B : \|b(x)\| < \varepsilon \forall x \in \text{supp } \rho_1\}$ , where  $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(\psi_\sigma(\beta(\overline{W}_\sigma)), \rho_2^{-1}([0, 1])) > 0$ , defines a controlled subset of perturbations. Perturbations  $b \in \tilde{B}$  ensure that:

- The map  $\tilde{\Phi} = \Phi|_{X \times \tilde{B}} : X \times \tilde{B} \rightarrow J^k(X, Y)$  is a local diffeomorphism near  $(x, 0)$ , allowing smooth control of  $j^k g_b$ .
- For  $(x, b)$  such that  $\Phi(x, b) \in \overline{W}_\sigma$ , we have  $x \in \alpha(\overline{W}_\sigma)$  and  $g_b(x) = \beta(\Phi(x, b))$ , ensuring the perturbation is relevant to  $\overline{W}_\sigma$ .
- The bound  $\|\Psi_\sigma(g_b(x)) - \psi_\sigma(f(x))\| < \varepsilon$  ensures the perturbation remains localized, with  $\rho_2 = 1$  in the active region, maintaining smoothness and compact support.

This construction ensures  $g_b$  perturbs  $f$  only where needed, while staying smooth and controlled globally.

Logo  $\tilde{\Phi}$  é submersão para todo  $x \in \tilde{\Phi}^{-1}(\overline{W}_\sigma)$ .

Logo  $d\tilde{\Phi}_{(x,b)}(T_{(x,b)}(X \times \tilde{B}) + T_{\tilde{\Phi}(x,b)}W = T_{\tilde{\Phi}(x,b)}(J^k(X, Y)) \implies \tilde{\Phi} \pitchfork W$  em  $X \times \tilde{B}$ .

Pelo lema da aula passada

$$j^k g_b = \Phi_b \pitchfork W$$

para um conjunto denso de  $b \in \tilde{B}$ . Então existe  $b_n \rightarrow 0$  tal que  $j^k g_{b_n} \pitchfork W$  em  $\overline{W}_\sigma$ ,  $g_{b_n} \xrightarrow{C^\infty} f$ . (Tem uma conta aqui para ser feita.)

**Final Step of the Proof.** The map  $\tilde{\Phi} : X \times \tilde{B} \rightarrow J^k(X, Y)$  is a submersion on  $\tilde{\Phi}^{-1}(\overline{W}_\sigma)$ , meaning:

$$d\tilde{\Phi}_{(x,b)}(T_{(x,b)}(X \times \tilde{B})) + T_{\tilde{\Phi}(x,b)}W = T_{\tilde{\Phi}(x,b)}(J^k(X, Y)).$$

This implies  $\tilde{\Phi} \pitchfork W$  on  $X \times \tilde{B}$ .

By a previous lemma, for a dense subset of  $b \in \tilde{B}$ , we have:

$$j^k g_b = \tilde{\Phi}_b \pitchfork W \text{ on } \overline{W}_\sigma.$$

Thus, there exists a sequence  $b_n \rightarrow 0$  in  $\tilde{B}$  such that:

$$j^k g_{b_n} \pitchfork W \text{ on } \overline{W}_\sigma, \quad \text{and} \quad g_{b_n} \xrightarrow{C^\infty} f.$$

This concludes the proof by showing that  $f$  can be approximated arbitrarily closely by maps achieving transversality.

□

□

**Corolário (da demonstração)** Sejam  $X, Y$  variedades,  $W \subset J^k(X, Y)$  subvariedade, agora já sei que  $\alpha(\overline{W}) \subset U$ ,  $U$  aberto de  $X$ . “So preciso modificar a função num conjunto aberto, não preciso modificar a função globalmente.”

Então existe  $g \in \mathcal{V}$  tal que  $j^k g \pitchfork W$  e  $g \equiv f$  em  $X \setminus U$ .

**Corolário (Versão simples da transversalidade)**

(a)  $X, Y$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade. Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : f \pitchfork W\}$$

é denso.

Se  $W$  é fechado, então esse conjunto é aberto.

(b)  $U_1, U_2 \subset X$  abertos,  $\overline{U_1} \subset U_2$ . Então existe  $g \in C^\infty(X, Y)$  tal que  $f \equiv g$  em  $U_1$ ,  $g \pitchfork W$  em  $X \setminus U_2$ . (É só aplicar o corolário para caso de 0-jatos.

## 8.2 Multijatos

Um pouco mais de teoria para obter corolários bonitos.

$X, Y$  variedades,  $s \in \mathbb{N}$ .

$$X^{(s)} = \{(x_1, x_s) \in X^s : x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

(são os pontos que não tem duas coordenadas iguais). Isso é claramente aberto em  $X^s$ .

$$\begin{aligned} \alpha^s : J^k(X, Y)^s &\longrightarrow X^s \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) &\longmapsto (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) \end{aligned}$$

O espaço de *multijatos* é o espaço de  $s$ -jatos tal que cada jato está num ponto diferente:

$$J_s^k(X, Y) := (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$$

i.e.  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in J_s^k(X, Y)$  sse  $\sigma_i = j^k f_i(x_i)$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ .

Note que

$$J_s^k(X, Y) \subset J^k(X, Y)^s$$

é aberto.

E agora

$$\alpha^s : J_s^k(X, Y) \rightarrow X^{(s)}$$

fibrado.

Para  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,

$$\begin{aligned} j_s^k f : X^{(s)} &\longrightarrow J_s^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_s) &\longmapsto (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)) \end{aligned}$$

**Teorema (transversalidade para multijatos)** Sejam  $X, Y$  variedades e  $W \subset J_s^k(X, Y)$  sub-variedade.

$$T_w = \{f \in C^\infty(X, Y) : j_s^k f \pitchfork W\}$$

é residual. Além disso, se  $W$  é **compacto**, então  $T_W$  é aberto.

## 8.3 Imersão e mergulho de Whitney

Sejam  $X, Y$  variedades,  $\sigma = j^1 f(x) \in J^1(X, Y)$ ,  $\text{rk } \sigma = \text{rk}(df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y)$ . Definimos o *coposto* como sendo

$$\text{corank} = \min(n, m) - \text{rk } \sigma$$

**Lemma** Seja  $S_r = \{\sigma \in J^1(X, Y) : \text{corank } \sigma = r\}$ .  $f$  é imersão ( $n \leq m$ ) ou submersão ( $n \geq m$ ) sse  $j^1 f(X) \cap \bigcup_{r \geq 1} S_r = \emptyset$ .

**Teorema (Imersão de Whitney)** Sejam  $X, Y$  variedades tais que  $m \geq 2n$ . Então

$$\text{Im}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ é imersão}\}$$

é aberto e denso.

**Proposição**  $S_r$  é uma subvariedade de codimensão  $(n - q + r)(m - q + r)$ , onde  $q = \min(m, n)$  (o posto máximo).

*Demonstração.*  $S_r$  é um fibrado sobre  $X \times Y$  cuja fibra é

$$\{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \text{corank } k = r\}$$

Pega uma transformação linear de posto  $r$ ,  $M \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ,  $q = \min(n, m)$ ,  $k = \text{rk } M = q - r$ . Então

$$[M] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Seja  $U$  uma viz. de  $M$  em  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Pegue  $M' \in U$ . Então

$$[M'] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Vamos multiplicar  $M'$  por uma matriz que preserva o rank:

$$\begin{aligned} \text{rk } M' &= \text{rk} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -C'(A')^{-1} & I_{m-k} \end{bmatrix}_{m \times m} M' \\ &= \text{rk} \begin{bmatrix} A' & B' \\ 0 & D' - C'(A')^{-1}B' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como é que o posto dessa matriz é  $k$ ? Isso acontece se  $D' - C'(A')^{-1}B' = 0$ .

Ou seja,  $M' \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \iff D' - C'(A')^{-1}B' = 0$ .

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^{m-k}) \\ [M'] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} &\longmapsto [D' - C'(A')^{-1}B'] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cap U = \varphi^{-1}(0).$$

Submersão, pois

$$\varphi \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & * \end{bmatrix} = \text{Id} - C'(A')^{-1}B'$$

$$\text{codim } \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = (n - k)(m - k) = (m - q + r)(n - q + r)$$

□

Do teorema de imersão de Whitney.

$$\begin{aligned}\text{Im}(X, Y) &= \{f : j^1 f(X) \subset S^0\} \\ &= \{f : j^1 f(X) \cap \bigcup_{r \geq 1} S_r = \emptyset\}.\end{aligned}$$

□

## 9 Aula 9

### 9.1 Teorema das imersões injetivas

**Teorema (das imersões injetivas)**  $X^n, Y^m$  variedades dif.  $m \geq 2n + 1$ ,

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : f \text{ imersão injetiva}\}$$

é residual.

*Demonstração.* Note que  $f$  não é injetiva pode ser dito na linguagem de multijatos assim:  $\exists (x_1, x_2) \in X^{(2)}$  tal que  $j_2^0 f(x_1, x_2) \in X^{(2)} \times \Delta_Y$ .

Logramos argumentar que  $f$  é injetiva se  $j_2^0 f(X^{(2)}) \cap W = \emptyset$  para  $W = X^{(2)} \times \Delta_Y \subset J_2^0(X, Y)$ , note que  $\text{codim } W = \dim Y = m$ . Dai  $\dim X^{(2)} = 2n < m = \text{codim } W$ . Dai  $j_2^0 f \cap W \iff j_2^0 f(X^{(2)}) \cap W = \emptyset$ .

aplicamos teorema de transversalidade de multijatos, obtendo que  $\text{Inj}(X, Y)$  é residual, e o resultado segue. □

**Lemma** Seja  $X$  variedade.

$$\text{Prop}(X, \mathbb{R}^m) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}^m : f \text{ é própria}\}$$

é não-vazio e aberto.

*Demonstração.*

- **(Não vazio.)** Pegue  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  própria. Dai  $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (x, 0, \dots, 0)$  é injetiva e linear, asi  $i \circ \rho$  é própria.
- **(Aberto.)** Pegue  $f \in \text{Prop}(X, \mathbb{R}^m)$ . Pegue  $V \subset J^0(X, \mathbb{R}^m) \cong X \times \mathbb{R}^m$  aberto. Queremos ver que  $f \in M(V) \subset \text{Prop}(X, \mathbb{R}^m)$ .

Defina  $V_x = \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, f(x)) < 1\}$ . O truque é esse!

$$g \in M(V) \iff d(g(x), f(x)) < 1 \forall x \in X \iff j^0 g(X) \subset V$$

então para  $g \in M(V)$  com  $d(g(x), f(x)) < 1 \forall x \in X$ , e asi

$$g^{-1}(\overline{B_r(0)}) \subset f^{-1}(\overline{B_r(0)})$$

e isso implica que  $g$  é própria.

□

## 9.2 Teorema do mergulho de Whitney

**Corolário (Teorema do mergulho de Whitney)**  $X^m$  variedade,  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Demonstração.*  $\text{Im}(X, Y) \cap \text{Inj}(X, Y)$  é residual, logo denso. Então  $\text{Im}(X, Y) \cap \text{Inj}(X, Y) \cap \text{Prop}(X, Y) \neq \emptyset$ , which implies that  $X \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^{2n+1}$ .  $\square$

### 9.2.1 Funções de Morse

**Definição**  $f \in C^\infty(X) = C^\infty(X, \mathbb{R})$ . Um ponto crítico de  $f$  é quando a derivada não tem posto máximo, neste caso isso implica que a derivada tem posto 0, ou seja,  $d_p f = 0$ .

$$D_p^2 f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma forma bilinear simétrica. Para mostrar que isso está bem definido quando mudamos de coordenadas precisamos usar que  $d_p f = 0$ . Também pode ver isso usando “conexões”: quando a derivada é zero, temos uma eleição canônica de horizontal bundle e podemos identificar  $T_{(p, \underbrace{v}_{=0})}(TM) \cong T_p M \times T_p M$

**Definição**  $p \in \text{Crit}(f)$  é não degenerado se  $D^2 f_p$  é não degenerada, i.e. para todo  $v \in T_p M \setminus \{0\}$  existe  $w$  tal que  $D^2 f_p(v, w) \neq 0 \iff \left( \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j} \right)$  é residual.

$$S^1 := \{j^1 g(x) \in J^1(X, \mathbb{R}) : dg_x = 0 \iff \text{corank } \sigma = 1\}$$

**Proposição**  $p \in \text{Crit}(f)$  é não degenerada  $\iff j^1 f \pitchfork S^1$  em  $p$ .  $p \in (j^1 f)^{-1}(S^1)$

*Demonstração.* Se usa que a dimensão de  $X$  é a mesma do que a dimensão de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Definição**  $f \in C^\infty(X)$  é uma *função de Morse* se todo ponto crítico de  $f$  é não degenerado.

**Corolário (da proposição)**  $f$  é de Morse  $\iff j^1 f \pitchfork S^1$ .

**Teorema**  $\{f \in C^\infty(X) : f \text{ é de Morse}\}$  é aberto denso de  $C^\infty(X, \mathbb{R})$ .

*Demonstração.*  $S^1$  é fechado porque é subvariedade, logo o conjunto das funções de Morse é igual a  $\{f : j^1 f \pitchfork S^1\}$  é aberto e denso pelo teorema de Thom.  $\square$

## 9.3 Teoria de interseção

### 9.3.1 Preliminares: variedades com bordo e orientação

**Definição** Uma *variedade topológica  $X$  com bordo* é um espaço topológico Hausdorff 2-enumerável tal que todo ponto possui uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ .  $\partial \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = 0\}$ .

**Proposição**  $X$  variedade topológica com bordo,  $p \in X$  tal que existe cart  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$  tal que  $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ . Seja  $(V, \psi)$  outra carta,  $p \in V$ . Então  $\psi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ .

*Demonstração.* Suponha que existe  $(V, \psi)$  tal que  $\psi(p) \in \text{int } \mathbb{H}^n$ . Pega a bolinha pequenina que está contida no interior do  $\mathbb{H}^n$  e a preimagem dela está dentro de  $U$ . Então obtemos um difeomorfismo entre uma bola cortada e uma bola. Tira o ponto: de um lado obtemos um conjunto contrátil, do outro lado não. Usar topologia algébrica.  $\square$

**Definição** O *bordo* de uma variedade com bordo é

$$\partial X = \{p \in X : \exists (U, \varphi) \text{ carta}, U \ni p, \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n\}$$

O *interior* é

$$\text{int } X \setminus \partial X = \{p \in X : \exists (U, \varphi) \text{ carta}, U \ni p, \varphi(p) \in \text{int } \mathbb{H}^n\}.$$

**Observação**  $\text{int } X, \partial X$  são variedades topológicas sem bordo.

**Definição**  $f : U \subset \overset{\text{op}}{\mathbb{H}^n} \rightarrow \mathbb{H}^n$  é *suave* se existe uma extensão suave  $\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{U} \supset U$ ,  $\tilde{U}$  aberto.

**Intuição** É uma função que era suave e vc trabou. Não que ela acaba aí.

**Definição**  $X$  é uma *variedade diferenciável com bordo* se está munida de um atlas suave maximal. (Tem que definir compatibilidade de cartas em  $\mathbb{H}^n$ .)

**Exemplo (Look!)**  $B^n$  the unit ball is  $f^{-1}((-\infty, 1])$  where  $f$  is the norm function.

**Proposição**  $f \in C^\infty(X)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  valor regular de  $f$ . Então  $f^{-1}(-\infty, a]$  e  $f^{-1}([a, +\infty))$  são variedades com bordo.

*Demonstração.*  $f^{-1}(-\infty, a)$  é aberto porque  $f$  é contínua, então é uma subvariedade do domínio. Seja  $p \in f^{-1}(a)$ . Usando TFI podemos upor que  $\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = -x_1 + a$ . Pegue  $y \in f^{-1}(-\infty, a]$ ...

**Definição**  $X$  variedade dif. com bordo. O *espaço tangente* em pontos interiores é o mesmo que em variedades sem bordo, e no bordo fica um espaço vetorial da mesma dimensão: porque com curvas que moram no interior e podem ser extendidas podemos obter muitos vetores.

Se  $X$  é uma variedade com bordo, também é podemos definir:

- *submersão* em  $x \in X$  se a derivada for sobrejetiva.

**Proposição (level set for manifolds with boundary)** Sejam  $X, Y$  variedades com bordo,  $\dim X > \dim Y$ , pega um ponto  $y \in \text{int } Y$ ,  $f \in C^\infty(X, Y)$  tal que  $y$  valor regular de  $f$  e  $y$  **valor regular de**  $\partial f := f|_{\partial X}$  (isso é mais forte). Então  $f^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo e  $\partial f^{-1}(y) = (\partial f)^{-1}(y)$ .



## 10 Aula 10

### 10.1 Mais variedades com bordo

Lembre que o espaço tangente em pontos do bordo não tem mistério:  $T_x X = \text{span } \frac{\partial}{\partial x^i}$ , porque é gerado pelas derivadas de curvas que realmente continuam sendo suaves em  $\mathbb{R}^n$ .

Como o bordo de  $X$  é uma subvariedade, note que, olhando essas curvas tangentes no bordo como curvas em  $M$ , obtemos uma inclusão natural

$$T_x(\partial X) \subset T_x X$$

**Proposição**  $X, Y$  variedades  $X$  tem bordo,  $\dim X > \dim Y$  e  $\partial Y \neq \emptyset$ .  $y \in Y$  valor regular de  $f$ , e valor regular de  $\partial f := f|_{\partial X}$ .

Então  $f^{-1}(y)$  é uma variedade com bordo de codimensão  $m$  e  $\partial f^{-1}(y) = (\partial f)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial X$ .

“Não é só que a imagem inversa é uma subvariedade; é que a fronteira dela é *exatamente a parte que esta tocando a fronteira*”

**Proposição**  $X, Y$  variedades,  $\partial Y = \emptyset$ .  $W \subset Y$  subvariedade sem bordo.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f \pitchfork W$ ,  $\partial f \pitchfork W$ .

Então  $f^{-1}(W)$  é uma subvariedade com bordo  $\partial(f^{-1}(W)) = (\partial f)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap \partial X$  e  $\text{codim } f^{-1}(W) = \text{codim } W$ .

### 10.2 Teorema de Sard com bordo

**Teorema (de Sard com bordo)**  $X, Y$  variedades,  $\partial Y = \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\{y \in Y : y \text{ valor crítico de } f \text{ em } \partial f\}$  tem medida nula.

*Demonstração.*

$$f(\text{Crit } f \cup \partial f(\text{Crit } \partial f)) = f(\text{Crit}(f) \cup \text{Crit}(\partial f))$$

□

### 10.3 Teorema de transversalidade de Thom com bordo

**Teorema (de transversalidade de Thom com bordo)**  $X, Y$  variedades  $W \subset J^k(X, Y)$ ,  $\partial W \subset \alpha^{-1}(\partial X)$ . Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W \text{ e } j^k(\partial f) \pitchfork W\}$$

é residual.

*Demonstração.* Tá no interior não tem problema. Tá no bordo olha pro bordo é uma variedade sem bordo tudo bem. Interseção de residuais é residual. □

### Corolário

1.  $X, Y$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade,  $\partial Y = \partial W = \emptyset$ . Então

$$\{f \in C^\infty(X, Y) : f \pitchfork W \text{ e } \partial f \pitchfork W\}$$

é residual.

2.  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $\partial f \pitchfork W$ ,  $\forall U \ni f$  aberto  $\exists g \in U$  tal que  $g = f$  em uma vizinhança de  $\partial X$ .

**Observação** Sobre b.: mais forte que  $\partial f$  seja transversal a  $W$  do que  $f$  transversal a  $W$  nos pontos do bordo.

## 10.4 Orientação

**Definição**  $V$  espaço vetorial. Duas bases  $\{x^i\}, \{y^i\}$  são **equivalentes** se a transformação linear  $T : V \rightarrow V, x^i \mapsto y^i$  tem determinante positivo.

**Observação** Existem exatamente duas classes de equivalência.

**Definição** Uma **orientação** em uma variedade  $X$  é uma escolha de orientação de cada  $T_p X$  para todo  $p \in X$  tal que  $\forall (U, \varphi)$  carta  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  é sempre positiva ou sempre negativa ( $\forall p \in U$ ).

**Observação (Extra)** Se  $X$  é simplesmente conexa, então existe uma orientação.

**Observação**  $X$  conexa e orientável, então  $X$  possui exatamente 2 orientações.

**Observação** Existem variedades não orientáveis.

$X$  variedade orientada com bordo induz uma orientação em  $\partial X$ . É porque existe um fibrado vetorial  $N$  de dimensão 1 ao longo do  $\partial X$  tal que  $N_x \pitchfork T_x(\partial X) \forall x \in \partial X$ . Pode pegar uma métrica Riemanniana ou pode fazer assim: pega em cada carta (atlas localmente finito, usamos partição da unidade) aí pega o campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  que com a nossa definição de  $\mathbb{H}^n$  é a direção que “sae” da variedade, multiplica com a partição da unidade e some. Aí você tem um campo vetorial que não está no fibrado tangente ao bordo.

Então em cada  $x \in \partial X$  temos uma base  $\{x_1, \dots, x^{n-1}\}$  de  $T_x(\partial X)$ . Completamos a uma base de  $T_x X, \{n_x, x_1, \dots, x^{n-1}\}$ .

**Definição**  $p \in \partial X$ .  $T_p(\partial X) \subset T_p X$ .  $N_p \oplus T_p(\partial X) = T_p X$ . uma base é orientada se, e aqui tem que ter alguém que decide, a base obtida declarando que a primeira entrada vai ter um sinal  $-\frac{\partial}{\partial x_1}$ , e completando para uma base, i.e.  $(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots)$ , essa base tá na orientação de  $X$ .

**Definição**  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é **orientada** se  $\{n_x, v_1, \dots, v_n\}$  é positivamente orientada.

**Exemplo** O intervalo. Pode decidir que um ponto da borda tenha orientação positiva, aí o outro ponto fica com orientação negativa.

$X$  orientada sem bordo.  $\partial(I \times X) = \{0\} \times X \sqcup \{1\} \times X$ .  $T_{(t,x)}(I \times X) \cong I_t I \oplus T_x X$ . Então o bordo fica  $\partial(I \times X) = \{1\} \times X \sqcup (-\{0\} \times X)$ .

## 11 Aula 11

**Proposição**  $X, Y$  variedades,  $W \subset Y$  subvariedade,  $\partial W = \partial Y = \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f \pitchfork W$ ,  $(\partial f) \pitchfork W$ . Suponhamos que  $X, Y$  e  $W$  são orientadas.

Então  $Q = f^{-1}(W)$  possui uma orientação *natural*.

*Demonstração.* Sejam  $n = \dim X$ ,  $m = \dim Y$  e  $k = \dim W$ . Como é que a gente calcula?

A codimensão de  $Q = f^{-1}(W)$  é a mesma que a codimensão de  $W$ .

Ou seja,  $Q$  é uma subvariedade de dimensão  $n - m + k$  e  $\partial Q = \partial Q \cap \partial X$ .

**Também lembre que se**

$$V_1 \oplus V_2 = V_3$$

**sabendo a orientação de dois deles, já tem como saber a orientação do terceiro.**

**Dani** Creio que formalmente es así: supongamos que  $V_2$  y  $V_3$  son orientados. Para construir una base orientada de  $V_1$  sólo pegamos una base orientada  $\{e_i\}$  de  $V_1$  y la completamos a una base orientada de  $V_3$ . Los vectores completadores forman una base orientada de  $V_2$ .

Pegue o fibrado normal (lembre que não precisa de uma métrica rimeanniana para isso, qualquer complemento de  $TQ$  funciona.)

**A gente vai usar a orientação de  $X$  e  $Y$  para orientar o fibrado normal.**

Olhe pra a condição de transversalidad

$$df_p(T_p X) + T_{f(p)} W = T_{f(p)} Y$$

Tu vai poder pegar só o fibrado normal a  $Q$  e ai vai virar soma direita. Claro, porque por definição do fibrado normal temos uma decomposição em soma direita do fibrado de  $X$ , então basta com pegar a componente normal a  $W$  para gerar o mesmo bundle do que estamos falando no left hand side da equação acima.

Entao para mostrar isso argumentamos por dimensão: a dimensão da soma tem que ser maior o igual à soma das dimensoes, e quando tem igualdade é soma direita:

$$\underbrace{df_p(N_p Q)}_{\dim=m-k} + \underbrace{T_{f(p)} W}_{\dim=k} = \underbrace{T_{f(p)} Y}_{\dim=m}$$

entao a soma fica direita.

Entao tu ta na situação desse comentario acima com  $V_i$ . Entao pode orientar o terceiro espaço ( $W$  e  $Y$  são orientadas). E como  $df_p$  é injetiva, (acho que isso é por causa do aumento de dimensão,, soma direita).

Tendo uma orientação para  $d_p N_p Q$ , e que  $df_p$  é injetiva, pode voltar para a equação  $N_p Q \oplus T_p Q = T_p X$ , e como  $X$  e  $NQ$  são orientados, acabou.  $\square$

**Exercício**  $\partial(f^{-1}(W)) = (-1)^{m-1}(\partial f)^{-1}(W)$ . **Hint.** É uma continha, número de transposições.

## 11.1 ii. Número de interseção

**Teorema (Classificação das 1-variedades compactas (com bordo?))** Seja  $X$  uma 1-variedade compacta e conexa de dimensão 1. Então  $X$  é difeomorfa a  $S^1$  (caso sem bordo) ou  $[0, 1]$ .

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

**Corolário** Toda variedade (compacta) de dimensão 1 é orientável.  $\#(\partial X)$  é par. Fixando uma orientação de  $X$ ,  $\sum_{p \in \partial X} \text{sgn}(p) = 0$

**Observação** O teorema anterior pode ser feito para variedades não compactas, obtendo intervalos abertos ou meio abertos. Mas a gente não vai usar isso.

Agora pegue  $X, Y, W$  variedades [orientadas, mas vamos fazer o caso não orientado primeiro] sem bordo (agora nenhuma tem bordo),  $W \subset Y$ . Seja  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $f \pitchfork W$ . Agora vamos botar uma condição a mais: que é que as dimensões são complementares, é uma condição bem forte:

$$\dim X + \dim W = \dim Y$$

Então  $f^{-1}(W)$  é uma variedade de dimensão 0 (um conjunto de pontos).

**Definição** Suponha  $X$  compacto e  $W$  fechado. O *índice* é

$$I_\alpha(f, W) := \#f^{-1}(W) \in \mathbb{Z} \bmod 2$$

Se  $X, Y, W$  orientadas, definimos

$$I(f, W) = \sum_{p \in f^{-1}(W)} \text{sign}(p) \in \mathbb{Z}$$

a gente vai ver que esses números são estáveis baixo homotopias.

**Como e que definimos a orientação, a sinal, num ponto?** Olha aqui

$$N_p Q \oplus T_p Q = T_p X$$

se as orientações de  $N_p Q$  e  $T_p X$  batem (coincidem), aí definimos que orientação do pontinho  $T_p Q$  (a gente está supondo que isso dá um ponto), então definimos que esta *positivamente orientado*. Ou seja:

**Definição** Pega  $p \in f^{-1}(W)$ . Qual é o sinal de  $p$ ?

$$df_p(T_p X) \oplus T_{f(p)} W = T_{f(p)} Y \quad (*)$$

então

$$\text{sign } p := +$$

se  $(*)$  for base orientada, i.e.  $x_1, \dots, x_n$  base de  $T_p X$ ,  $w_1, \dots, w_k$  base de  $T_{f(p)} W$ ,

$$\{df_p(x_1), \dots, df_p(x_n), w_1, \dots, w_k\}$$

é uma base orientada de  $T_{f(p)} Y$ .

**Definição** Agora pega  $X, W \subset Y$  subvariedades. Definimos  $X \frown W \iff i_X \frown W \iff i_W \frown X$ .  
 $\dim X + \dim W = \dim Y$ .

$$I(X, W) = I(i_X, W)$$

**Observação** Se um deles  $X, W$  for compacto é suficiente para garantir que a interseção é finita

$$p \in X \cap W. i_X^{-1}(W) = i_W^{-1}(X) \cong X \cap W.$$

Resulta que

$$I(X, W) = (-1)^{nk} I(W, X)$$

porque tem que permutar a base quando considera  $T_p X \oplus T_p W = T_p Y$  ou  $T_p W \oplus T_p X = T_p Y$ .

**Observação** O índice não orientado é o índice orientado mod 2. Então tudo que vamos fazer vai ser pro caso orientado mas para passar no caso não orientado e só pegar mod 2.

**Proposição (Lema mais importante da teoria de interseção. Extremamente poderoso.)**  
 Com as hipóteses necessárias para definir número de interseção (domínio compacto, subvariedade fechada, dimensões complementares),  $X = \partial Z$ ,  $Z$  variedade compacta orientada.  $W \subset Y$ ,  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $f \frown W$ . Supongamos que podemos estender  $f$ , i.e. existe  $\text{Fin} C^\infty(Z, Y)$  tal que  $\partial F = F|_X = f$ . Então  $I(f, W) = 0$ .

*Demonstração.* Que está passando? O bordo de  $Z$  é transversal a  $W$ . Isso implica  $F \frown W$  em  $\partial Z$ . (Note que  $f \frown W \implies F \frown W$  em  $\partial Z$ . A primeira é mais forte.)

Daí

$$\dim Z + \dim W = \dim Y + 1$$

$$F^{-1}(W) \text{ variedade de dimensão 1}$$

$$\partial(F^{-1}(W)) = F^{-1}(W) \implies I_Z(f, W) = 0.$$

Se  $X, Y, W, Z$  são orientadas,

$$\partial(F^{-1}(W)) = (-1)^{nk} f^{-1}(W)$$

$$\implies I(f, W) = \sum_{p \in f^{-1}(W)} \text{sign}(p)$$

$$= \pm \sum_{\partial F^{-1}(W)} \text{sign}(p) = 0$$

□

**Teorema (em [GP10] tudo é um lemma)**  $X, Y, W$  uma subvariedade  $X$  compact,  $W \subset Y$  fechada.  $f_0, f_1 \in C^\infty(X, Y)$ ,  $f_0, f_1 \pitchfork W$ . Supondo que  $f_0 \simeq f_1$ , i.e. que existe  $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $F(0, x) = f_0(x)$ ,  $F(1, x) = f_1(x)$ . Então  $I(f_0, W) = I(f_1, W)$

*Demonstração.*  $Z = [0, 1] \times X$ ,  $\partial Z = -\{0\} \times X \sqcup \{1\} \times X$ . Note a sinal numa das componentes de  $\partial Z$ . O negocio é igual que como quando orientamos o intervalo: um pontinho do bordo do intervalo vai ter uma orientação e o outro a outra. É só levar iso para o caso de  $T_{(t,x)}([0, 1] \times X) \cong T_t[0, 1] \oplus T_x X$ .

Então ai a ideia é olhar para a preimagem de  $F^{-1}(W)$  no bordo. Por causa do lemma o numero de interseção da zero, e por causa do negocio do intervalo que muda de sinal de um lado a outro da fronteira do cilindro  $Z = [0, 1] \times X$ , teremos que

$$\begin{aligned} F|_{\partial Z}^{-1} &= \{1\} \times f_1^{-1}(W) \sqcup -\{0\} \times f_0^{-1}(W) \\ \implies I(f_0, W) &= I(f_1, W). \end{aligned}$$

□

**Observação (dani)** Me recuerda al cobordismo: para estudiar una variedad nos imaginamos una variedad mas grande cuya frontera es la variedad inicial.

Isso permite definir transversalidade sem necessidade de que a função seja transversal usando o teorema de Thom:

$X$  compacta,  $W \subset Y$  fechado.  $f \in C^\infty(X, Y)$ ,  $I(f, W) := I(\tilde{f}, W)$  onde  $\tilde{f} \simeq f$ ,  $\tilde{f} \pitchfork W$ . **Explicación:** perturbamos um pouquinho  $f$  para que fique transversal a  $W$ .

**Observação (dani)** So how to pass from “dense in Whitney  $C^\infty$ ” to “homotopic”.

**Exemplo (muito bom)** Pega dois circulos tangentes. Parece que a interseção é  $\pm 1$ , mas *eles não se intersectam transversalmente!* Preciso perturbar. Perturbo. Ou bem ficam sem se intersectar ( $I = 0$ ), o se intersectan duas vezes, e ai tb da zero.

**Observação**  $\dim Y = 2n$ ,  $X \subset Y$ ,  $\dim X = n$ , podemos definir o número de interseção de  $X$  com  $X$ ! porque perturbamos o embedding de  $X$  em  $Y$ .

Note que se  $n$  é ímpar,  $I(X, X) = (-1)^{nm} I(X, X) = -I(X, X)$ , o número de interseção dele é zero!

**Exemplo** O número de interseção de um círculo em  $\mathbb{R}^n$  é zero. O número de interseção de um círculo numa faixa de Möbius é 1!

## 11.2 Grau

**Definição**  $X, Y$  variedades,  $\partial X = \partial Y = \emptyset$ ,  $\dim X = \dim Y$ ,  $X$  compacto,  $Y$  **conexo**.  $W = \{a\}$ ,  $a \in Y$ .  $f \in C^\infty(X, Y)$ . O **grau** de  $f$  é

$$\deg f := I(f, \{a\})$$

**Proposição** O grau está bem definido, ou seja, não depende de  $a$ .

*Demonstração.* Podemos supor que  $f \nmid \{a\}$ ,  
iff  $a$  é valor regular de  $f$ .

**Afirmção**  $I(f, \{a\})$  é localmente constante, i.e. em uma vizinhança de  $a$  esse número não muda.

*Prova da afirmação.* Como  $a$  é valor regular e supusimos que  $\dim X = \dim Y$ ,  $f^{-1}(a)$  é uma quantidade finita de pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . E pelo TFI temos uma vizinhança de cada um desses pontinhos a uma vizinhança de  $a$ . Cada ponto nessa vizinhança de  $a$  tem uma preimagem perto de cada  $x_i$ .  $\square$

Em fim. O teorema acaba desde que  $Y$  é conexo.  $\square$

**Observação** Se  $f_0 \simeq f_1$  então  $\deg f_0 \simeq \deg f_1$ .

## 12 Aula 12

### 12.1 Orientando o bordo de $Q = f^{-1}(W)$

A gente mostrou ontem como é que  $Q = f^{-1}(W)$  tem uma orientação *natural* induzida pelas orientações deos demais espaços. Hoje vamos orientar o bordo.

**A primeira coisa a entender** é esa igualdade daqui:  $N_p \tilde{Q} = N_q Q$ , onde  $\tilde{Q} = \partial Q$ . É claro que  $\subset$ , e a igualdade fica porque são espaços da mesma dimensão.

**dani** Acho que o claim ai é que  $\partial f^{-1}(W) = (-1)^{\text{codim } W} (\partial f)^{-1}(W)$ , ver [GP10] p. 101.

### 12.2 Exemplos: calculando o grau

**Exemplo** Grau de  $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, z \mapsto z^n$ , I think it is  $n$ , because at 0 there's only one preimage, but zero is not regular value, so in regular values you have  $n$  preimages.

Considere  $f(z) = \bar{z}^n$ . Podemos ver isso como uma composição. Para isso convém escrever

**Afirmção (Leminha do produto)**  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ,  $Y, Z$  conexas, então

$$\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$$

Usando isso, podemos calcular  $\deg \bar{z}^n$  calculando simplesmente os graus de  $z \mapsto \bar{z}$  e  $z \mapsto z^{-1}$ . Então por exemplo  $\bar{z}$  é muito fácil porque é uma reflexão em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, sua derivada é ela mesma, que troca orientação. Segue que  $\deg(\bar{z}) = -1$

**Observação (Algo que não falamos a vez passada)** é que se uma função não é sobrejetiva, o grau dela é zero. Porque entao pode pegar um valor que não está na imagem, que é regular por definição, e aí tem zero preimagens.

### 12.2.1 Teorema fundamental da álgebra com teoria do grau

Suponha que  $p$  é um polinômio de grau  $\geq 1$  e, por contradição, suponha que não tem raízes. Suponha que  $p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_0$ . Seja  $R > 0$  tal que  $R^n > |a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_0|$ . Defina

$$p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0).$$

$$\begin{aligned} f : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

é claro que  $\deg(z^n) = n \in \mathbb{Z}$ .

Agora pega

$$p_t : \partial B(R) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Note que

$$\begin{aligned} |p_t(z)| &\geq |z^n| - t|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &\geq |z|^n - t(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_0|) \\ &= R^n - t(|a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_0|) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned} \frac{p_t}{|p_t|} : \partial B(R) &\rightarrow S^1, \\ \deg\left(\frac{p}{|p|}\right) &= \deg\left(\frac{z^n}{R^n}\right) = n > 0 \end{aligned}$$

Então  $\frac{p}{|p|}$  é sobrejetiva. Temos

$$\frac{p}{|p|} : \partial B(R) \rightarrow S^1$$

Podemos estender a

$$\frac{p}{|p|} : B(R) \rightarrow S^1$$

E concluímos que

$$I\left(\frac{p}{|p|}, \{\alpha\}\right) = 0.$$

acho que isso é porque:

**Proposição** Se tem uma função definida numa variedade, e consegue estender essa função para outra variedade cujo bordo é a variedade inicial, o grau da função é zero.

$X, Y, W, f : X \rightarrow Y, \dim X + \dim W = \dim Y$ .  $f = F|_X, F : Z \rightarrow Y, Z$  compacta,  $\partial Z = X$ . Então  $I(f, W) = 0$ .



### 12.3 Winding number

Começamos com esse teorema muito bom, que Jordan provou para curvas e Brouwer generalizou a toda dimensão:

**Teorema (Jordan-Brouwer)**  $X \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície (subvariedade de codimensão 1) compacta conexa. Então  $\mathbb{R}^n \setminus X = U_1 \sqcup U_2$  onde  $U_1$  é uma variedade compacta com bordo  $\partial \overline{U_1} = X$  e  $U_2$  é não compacta com bordo também  $\partial \overline{U_2} = X$ .

Para definir o Winding number usando teoria de grau pegue  $X$  compacto sem bordo,  $\dim X = 0$ . Vamos começar definindo para funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Pegue  $p \notin f(X)$ . Então definimos

$$\text{wind}_p(f) = \deg \frac{f - p}{\|f - p\|}$$

A ideia é que essa função vai de  $X \rightarrow S^n$ . É como se fosse  $S^1 \rightarrow S^1$ , mandando  $z \mapsto z^n$ .

**Observação (Invariança homotópica do wind)**  $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $p \notin f_t(X) \forall t$ , então  $\text{wind}_p(f_0) = \text{wind}_p(f_1)$ .

**Exemplo**  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de grau  $n$ .  $p|_{\partial B(R)} : \partial B(R) \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\text{wind}_0(p|_{\partial B(R)}) = n \quad \text{se } R \text{ é muito grande}$$

**Proposição** Suponha que  $X = \partial Z$ ,  $Z$  compacto e  $f$  se estende para  $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Então  $\text{wind}_p(f) = I(F, \{p\})$ , para  $p \notin f(X)$ .

*Demonstração.*  $f \pitchfork \{p\}$  porque  $p \notin f(X)$ . Então podemos supor que  $F \pitchfork \{p\}$ . Casos:

1.  $F^{-1}(p) = \emptyset$ . Então  $I(F, \{p\}) = 0$ .

$$\text{wind}_p f = \deg \left( \frac{f - p}{\|f - p\|} \right) = I \left( \frac{f - p}{\|f - p\|}, \{a\} \right)$$

que é zero usando aquele lema de que se podemos estender a função  $\frac{f-p}{\|f-p\|}$  a  $Z$  compacta com  $\partial Z = X$ , o índice da equação anterior é zero.

2.  $F^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . **Ideia: pegar bolinhas ao redor de cada pontinho e calcular o grau aí, depois somar.** Considere

$$u = \frac{F - p}{\|F - p\|} : Z \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow S^n$$

Pegue umas bolinhas  $B_i \ni x_i$ . Olhemos para

$$u|_{Z \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i} : Z \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i \rightarrow S^n$$

Obtemos

$$\partial(Z \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i) = X \sqcup - \bigsqcup_{i=1}^N \partial B_i$$

Pela proposição da aula passada de que quando logramos estender o índice vale zero, o índice vale zero aqui, assim que

$$\deg(u|_{X \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n \partial B_i}) = 0$$

mas isso daí é

$$\deg(u|_X) + \sum_{i=1}^N \deg(u|_{\partial B_i})$$

Concluimos que

$$\text{wind}_p f = \sum_{i=1}^N \text{wind}_p f_i.$$

Então queremos calcular  $\text{wind}_p f_i$ . Usamos TFI. Mas precisamos de uma versão do TFI orientado.

**Teorema (TFI orientado)** Se  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g'(0)$  é inversível, existe um difeomorfismo  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , mandando  $0 \mapsto 0$ , que **preserva orientação** e tal que  $g \circ \varphi$  é a identidade ou uma reflexão, i.e.

$$g \circ \varphi = \begin{cases} \text{id} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Usando isso concluimos que

$$\text{wind}_p f_i = \text{sign}_F(x_i) = I(F, \{p\}).$$

□

## 12.4 Prova do teorema de Jordan-Brouwer

*Demonstração.*

1.  $\mathbb{R}^n \setminus X$  possui, no máximo, duas componentes conexas. Pegue  $x \in X$ ,  $U \ni x$  vizinhança.

□

## 13 Prova 1!

Here's Dani's summary of everything needed to succeed in the test:

1. **(How to use the IFT to make  $f^{-1}(x)$  a submanifold if  $f : X^n \rightarrow Y^m$  is a submersion.)** You choose charts of  $x$  and  $f(x)$ , and because  $f$  is a submersion you get that the coordinate functions of  $f$  are locally invertible. Then you make new coordinates around  $x$  like this:  $(f_1, \dots, f_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ . If a point is in  $f^{-1}(x)$  then the first  $m$  coordinates vanish!

Of course there are several ways this can happen but that's basically it. In fact the intuition is to simply "solve for the variables" so "despejar" las variables que definen la variedad del dominio: intersectar una variedad algebraica con otra significa decir que los puntos deben satisfacer las ecuaciones que definen las dos variedades. La condición *ser sumersión* significa *puedo despejar* (teorema de la función inversa). Entonces qué hago? Uso esas ecuaciones para expresar unas variables en términos de las otras (teorema de la función implícita), que funciona *en la intersección de las variedades*. Entonces al final tengo menos variables realmente, ¿cuántas? Tantas como las que no despejé. Esa es la dimensión de la intersección: lo que no pude despejar. Y ese es el trip con las codimensiones por todos lados.

2. Sard's theorem.

3. Jet spaces with the topology.

4. Whitney topologies.

(a) How to show that a set is open or closed in this topology? See prop 4.5

(b) Here's an idea on how to prove the parametric version of the transversality theorem: check that if  $s \in S$  is a regular value, then  $F_s \pitchfork W$ .

So the idea for these theorems it boils down to some fried arithmetic on the dimensions. You just have to find the correct map to apply this to, in this case the projection since these functions depend on  $s$ .

5. Thom transversality theorem.

6. Whitney Embedding Theorem. Immersions are dense if  $m \geq 2n$ . Idea of proof: express immersion condition as jet transversality.  $\bigcup_r S_r$  is just the set where  $f$  is singular! So  $S_r$  is like it is not singular of size  $r$  or something.

Whitney 1-1 immersion theorem. If  $m \geq 2n + 1$  1-1 immersions is a residual set. Proof using multijets for injectivity.

Whitney embedding theorem.  $\exists X^n \hookrightarrow X^{2n+1}$ . Notice that it's not the one that says  $X^n \hookrightarrow X^{2n}$  (that's another one, looks like algebraic topology was used. It's also Whitney's). So how to prove it? Use the fact that an injective proper immersion is an embedding. We already said that injective immersions are open and dense. So just show that proper maps are *nonempty* and open. Nonempty is then a simple argument extending a proper map to  $\mathbb{R}$  for other dimensions.

To show that the set of proper maps is open might be **a good example on how to deal with this crazy topology**: choose a proper map and take the unit ball with center  $f(x)$  for every  $x \in X$ . Then  $V := \cup \{ (x, B_{f(x)}(1)) \}$  is open in  $J^0(X, \mathbb{R}^m) = X \times \mathbb{R}^m$  (by continuity of  $f \dots$ ). So the nghb is  $M(V)$ . The inverse image of a function  $g \in M(V)$  takes a closed ball (or any compact set I guess) with center in  $y$  *inside* a

the inverse image of a ball of radius a little larger, i.e.

$$\begin{aligned} g^{-1}(\overline{B_r(y)}) &\subset f^{-1}(\overline{B_{r+1}(y)}) \quad \text{because} \\ |g(x) - y| \leq r &\implies |f(x) - y| \leq r + 1 \quad \text{because} \\ |f(x) - y| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - y| = 1 + |g(x) - y| = 1 + r \end{aligned}$$

and  $f$  is proper so we are done :star.

Confusing Lemma 4.3: a map is transversal iff there is a coordinate chart of the codomain that composing with the map is a submersion.

7. **(No retraction from compact sets to itself theorem.)** Story goes there cannot be a retraction from the closed ball to its boundary. Not only because the cohomology groups are distinct, but because taking the inverse image of a regular value in the boundary yields a 1-submanifold of the ball, which has 2 points for a boundary. (An even number of points if you mind.) And those two points actually live in the boundary of the ball. But also the boundary points of the preimage are the inverse image of the boundary map. But the boundary map is the identity, and its preimage is a point, which cannot have an even number of points in the boundary.

So now you see, there are three things that are the same:

$$\partial(f^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z) \cap \partial X = (\partial f)^{-1}(Z)$$

**(Brouwer's fixed point theorem.)** Once convinced of that, you show that if a function from a compact set to itself (maybe this time use the unit ball) must have a fixed point. Otherwise you could construct a retraction in that funny way with a picture. And you show it's smooth. Which may not be obvious but once you read it in the book it's actually very simple.

8. Degree and index. When you have **complementary** dimension manifolds, so basically a plane and a line. (That's it. Or a plane and a curve, or a surface and a curve. But not a curve and a curve, nor a plane and a plane, nor a point and a line. But yes a point and plane.) They intersect in points as you can see. So if the domain is compact and the image is closed then the preimage is a closed set in a compact manifold that cannot be infinite for it'd have a limit point where local euclidean neighbourhood could not be found. So there's just some finite number of points.

If you consider the sign of the Jacobian you get some sense of orientation. Never forget that orientation is intrinsically confusing because it requires for an external consciousness that chooses one thing among two. Once that happens you can tell whether the sign of the Jacobian is the good one or the bad one. Also you can define positive orientation like we did in class and not like it is in wikipedia which is that Jacobian definition: you say it's positive when the base you obtain when you push a base of  $X$  at the point and look at a base of  $W$  and because they have complementary dimensions, you get a base of  $Y$  that may be the good one or the bad one, choose the good one.

So that's the **intersection number**: the sum of the orientations at every point. (So like the other concepts it's more intuitive to think this is about two submanifolds

but we phrase in terms of a map that maybe you think it's an embedding and the other submanifold inside the codomain of the map.) You can mod out by  $\mathbb{Z}_2$ .

This happens with the index:  $I(X, W) = (-1)^{-1}I(W, X)$ .

And the *degree* of a map is the index of the map and a single point. So the catch is that a nice map has constant number of preimages, so that's well defined. And it's just how many preimages the map has taking into account orientation.

9. Other concerns: what's the deal that if the manifold is closed no se que

## 14 Aula 13

**Teorema (Jordan-Brouwer)**  $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$  hipersuperfície compacta conexa sem bordo. Então  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X = U_1 \sqcup U_2$  onde

- $U_1, U_2$  são abertos conexos.
- $\overline{U_1}, \overline{U_2}$  são variedades com bordo  $X$ .
- $\overline{U_1}$  é compacto e  $\overline{U_2}$  não.

*Demonstração.*  $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Pega  $p \notin \text{img } f$ , definimos

$$\text{wind}(f, p) : X \rightarrow S^n$$

$$\text{wind}(f, p) = \deg \frac{f - p}{\|f - p\|}$$

Quando  $f$  é a inclusão  $i : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , podemos definir para  $p \notin X$  o  $\text{wind } p \in \mathbb{Z}_2$ .

Defina

$$U_i = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X : \text{wind } p = i\}, \quad i = 0, 1$$

Como o  $\text{wind}$  só pode ser 0 ou 1, é imediato que  $U_0 \sqcup U_1 = \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ .

**Lemma** Suponha que  $p$  e  $q$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ . Então  $\text{wind } p = \text{wind } q$ .

*Demonstração.*  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$  conectando  $p$  e  $q$ . Pode supor que  $\gamma$  é suave por densidade das funções suaves. Defina

$$F_t : X \longrightarrow S^n$$

$$x \longmapsto \frac{f(x) - \gamma(t)}{\|f(x) - \gamma(t)\|}.$$

Então

$$\text{wind } p = \deg(F_0) = \deg(F_1) = \text{wind } q$$

**Afirmação**  $U_0$  e  $U_1$  são conexos.

*Demonstração.*  $x_0 \in X$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $x_0$ . Vamos mostrar que dado  $z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$  pode ser conectado a uma das componentes conexas de  $V \setminus X$ .

Para vê-lo, considere primeiro um caminho que liga  $x_0$  a  $z$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pode supor que  $\sigma \cap X$ . O conjunto de interseções desse caminho com  $X$  é um número finito de pontos. Digamos que  $p$  é o último deles, o ponto mais perto a  $z$ . Então o resto do caminho não intersecta o  $X$ .

Como  $X$  é conexo, existe um caminho  $c$  em  $X$  ligando  $x_0$  a  $p$ . Existe uma vizinhança desse caminho difeomorfa a  $B^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ . (Os detalhes disso deixamos para depois... a ideia é pegar bolinhas e estender...)

Então aí a gente conclui informalmente: pega o resto do  $\sigma$  que liga  $z$  e  $p$ , sai de  $z$  mas para antes de  $p$ , e vai ao longo de  $c$  por fora de  $X$  até chegar a  $V$ .  $\square$

**Afirmção** Agora pegue  $p, q$  em dois lados diferentes de  $V \setminus X$ . Considere  $\ell$  segmento de reta que os liga e tal que  $\ell \cap X$ . Então

$$\text{wind } p - \text{wind } q = 1 \bmod 2$$

*Demonstração.* Suponha que

$$\ell(t) = tv + p$$

com  $v = p - q$ .  $\square$

considere a homotopia da inclusão com a função que põe  $X$  num ponto só:

$$\deg \left( \frac{x - z}{\|x - z\|} \right) = \deg \left( \frac{tx - z}{\|tx - z\|} \right) = \deg \left( \frac{z}{\|z\|} \right)$$

$\square$

## 14.1 Teorema de Borsuk-Ulam

**Teorema (Borsuk-Ulam)**  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suave, então  $\exists x \in S^n$  com  $f(x) = f(-x)$ .

*Demonstração.* Por absurdo: suponha que não existe esse ponto. Então considere

$$g(x) = f(x) - f(-x)$$

que é ímpar, i.e.  $g(-x) = -g(x)$  e nunca se anula. Agora considere

$$\begin{aligned} \tilde{g} : S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto (g(x), 0) \end{aligned}$$

Então  $\tilde{g}$  também é ímpar e  $0 \notin \tilde{g}(S^n)$ .

Note que  $\text{wind}(\tilde{g}, 0) = 0$  porque a imagem de  $\frac{\tilde{g}}{\|\tilde{g}\|}$  tá no equador da esfera  $S^n$  (porque  $\text{img } g$  tá ali dentro). Então quase todo ponto de  $S^n$  não está na imagem.

**Afirmção**  $\text{wind } \tilde{g}, 0 = 1$

*Demonstração.* Para  $n = 1$ :  $\tilde{g} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Considere

$$h = \tilde{g} / \|\tilde{g}\|,$$

que ainda é ímpar e vale  $h : S^1 \rightarrow S^1$ .

Lembre que uma função de  $S^1 \rightarrow S^1$  pode ser levantada a  $\mathbb{R}$ , dando uma função periódica  $\tilde{h}(t + 2\pi) = \tilde{h}(t) + 2\pi k$ , para algum  $k$  que resulta ser o grau de  $h$ . Mas tem mais: como  $\tilde{h}$  é ímpar, na verdade só precisamos da metade do período, i.e.

$$\tilde{h}(t + \pi) = \tilde{h}(t) + \pi \tilde{k}.$$

## 14.2 Poincaré-Hopf theorem

**Definição**  $x \in X$ ,  $V_x = 0$ . Dizemos que  $x$  é um **zero isolado** de  $V \in \mathfrak{X}(X)$  se existe  $U \ni x$  vizinhança tal que  $\forall y \in U \setminus \{x\} \implies V_y \neq 0$ .

Seja  $x$  um zero isolado de  $V \in \mathfrak{X}(X)$ . Seja  $(U, \varphi)$  uma carta centrada em  $x$ . Então  $\tilde{\varphi} : TM|_U \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ .

Summary: define  $\tilde{V}$  usando uma trivialização de  $TX$ :

$$\tilde{V} : \varphi U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\tilde{V}_0 = 0$ . Pode pegar uma bolinha  $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .. Definimos:

$$\text{ind}(V, x) = \text{wind}(\tilde{V}|_{\partial B_r(0)}, 0) = \deg \left( \frac{\tilde{V}}{\|\tilde{V}\|} \Big|_{\partial B_r(0)} \right).$$

**Teorema (Poincaré-Hopf)**  $X$  compacto orientado.  $V \in \mathfrak{X}(X)$  cujos zeros são isolados. Então

$$\sum_{z \text{ zero de } V} \text{ind}(V, z) = \chi(X)$$

□

□

□

**Exercício**  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$  Tem um campo vetorial, mostre que  $\text{ind}(F, 0) = n$ .

## 15 Aula 14: Teorema de Poincaré-Hopf e teorema de Hopf

### 15.1 Teorema de Poincaré-Hopf

**Teorema (Poincaré-Hopf)** Se  $X$  é uma variedade compacta (sem bordo) e  $V \in \mathfrak{X}(X)$  cujos zeros são isolados, então

$$\sum_{x \in X} \text{ind}_x = \chi(X) = I(\Delta_X, \Delta_X).$$

**Exemplo** Esfera, toro, e superfície de genero  $g$ .

**Observação**  $V \in \mathfrak{X}(X)$ ,  $V_x = 0$ ,  $x$  é dito *zero simples* se zero é um valor regular de  $\tilde{V}$  (o “pullback” de  $V$  no  $\mathbb{R}^n$  usando cartas).

**Observação** SE  $x$  é zero simples de  $V$ , então  $\text{ind}_x V = \pm 1$ . (Dani: porque a diferencial tem que ser bijetiva.) Porque a menos de uma mudança de coordenadas podemos supor que  $\tilde{V}$  é a identidade ou uma reflexão.

**Exercício** Pega  $x$  um zero isolado (não necessariamente simples) de  $V$ . Existe um  $U$  tal que  $x$  é o único zero de  $V$  em  $U$ . Então existe  $\tilde{V}$  que coincide com  $V$  fora de  $U$  tal que

- todos os zeros de  $\tilde{V}$  em  $U$  são simples.
- $\sum_{V_y=0} \text{ind}_y \tilde{V} = \text{ind}_x V$

**Exemplo (Intuição do exercício)** Considere  $z \mapsto z^n$  e faz uma perturbação, i.e. considere  $V(z) = z + \varepsilon$ . Então obtemos  $n$  zeros simples bem pertinho do 0.

*Prova do Poincaré-Hopf.* Podemos supor que os zeros de  $V$  são simples. Vamos usar o fluxo de  $V$  para perturbar a diagonal. Considere

$$\text{Fix} = \{x \in X : \varphi_t(x) = x\}$$

se  $t$  é suficientemente pequeno, o conjunto de pontos fixos do fluxo coincide com o conjunto de zeros de  $V$ .

Note que o grafo de  $\varphi_t$  é homotópico à diagonal  $\Delta$ . Daí

$$I(\Delta, \Delta) = I(\Delta, \text{graf } \varphi_t)$$

**Afirmção**  $\Delta \pitchfork \text{gr } \varphi_t$  e  $\text{sign}((x, x)) = \text{ind}_x(V) \in \{1, -1\}$

Note que isso mostra o teorema.

*Prova da afirmação.* Como os zeros de  $V$  são simples, podemos supor que numa vizinhança deles,  $V$  é a identidade ou uma reflexão. Daí, o índice de  $V$  é 1 ou -1.



Podemos integrar esse campo vetorial:

$$\varphi_t(x_1, \dots, x_n) = (e^t x_1, \dots, e^t x_{n-1}, e^{qt} x_n)$$

onde  $q = \pm 1$ .

Pegue um ponto  $(x, x) \in \Delta \cap \text{Gr}(\varphi_t)$  e considere as bases

$$T_{(x,x)}\Delta = \text{span}\{e_1 \times e_1, \dots, e_n \times e_n\}$$

$$T_{(x,x)}\text{Gr}(\varphi_t) = \text{span}(e_1 \times e^t e_1, \dots, e_n \times e^{qt} e_n)$$

**Lance:** botar todos os vetores básicos numa matriz e ver qual é o determinante dela: se o determinante não é zero então as variedades são transversais, porque a união das bases é uma base do espaço tangente da imagem. Se o determinante é positivo, são orientadas (de acordo com a “orientação direct image do grafo”, que é, em geral para  $f : X \rightarrow X$ ,  $\{e_i, (df)_{xe_i}\}$ ), e se o determinante é negativo, é negativa.

Tá, a matriz é:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & e^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & e^t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & e^{qt} \end{array} \right)$$

Pode triangular isso para obter

$$\left( \begin{array}{cccc} \text{Id} & & \text{Id} & \\ & e^t - 1 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \dots & e^{qt} - 1 \end{array} \right)$$

Em fim, o determinante depende de  $q$ .

□

□

## 15.2 Triangulações

$\Delta^n :=$  fecho convexo de  $n + 1$  pontos genéricos em  $\mathbb{R}^N$ .

Pode construir um campo vetorial em uma variedade triangulada botando zeros (fontes) nos centros de cada simplexo.

**Exercício**  $\chi(X) = \sum_{V_x=0} \text{ind}_x(V) = \sum_k (-1)^k \#k\text{-simplexos}$

### 15.3 Teorema de Hopf

**Teorema (de Hopf)** Seja  $X$  uma variedade compacta, orientada e conexa (sem bordo). Sejam  $f, g : X \rightarrow S^n$ . (O grau está bem definido porque  $X$  compacta e  $S^n$  conexa.) Então

$$f \simeq g \iff \deg f = \deg g.$$

*Demonstração.* Só a volta. Pegue  $f, g : X \rightarrow S^n$  com  $\deg f = \deg g \in \mathbb{Z}$ .

Seja  $y$  um valor regular de  $f$  e  $g$ . Temos duas variedades:  $Q_0 := f^{-1}(y)$  e  $Q_1 := g^{-1}(y)$ .

Lembre que

$$\deg f = \#Q_0, \deg g = \#Q_1 \text{ orientadamente}$$

Pense em  $X \times I$ . em  $\{0\} \times Q_1$  temos uma copia de  $Q_0$  e no outro extremo a copia de  $Q_1$ . Em cada um deles temos as preimagens de qualquer ponto, munidos das suas sinais. Agora **pense em curvas  $C$  que ligam cada ponto em  $Q_0$  com seu respectivo em  $Q_1$** . Ou seja, positivo com positivo e negativo com negativo. Mas pode ser que de um lado tenha mas pontos que do outro lado; apenas é a coma com sinal que coincide. E por isso, se tiver de um lado mais pontos, vao ser tantos positivos quantos negativos, e vai conseguir ligar eles mesmo.

Entao a ver suponha que em  $Q_0$  temos os pontos  $p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_\ell$ . E em  $Q_1$  temos  $q_1, \dots, q_k$ .

Agora vamos construir

$$\begin{aligned} H : I \times X &\longrightarrow S^n \\ \text{tal que } H^{-1}(y) &= C \\ H(0, \cdot) &= f \\ H(1, \cdot) &= g \end{aligned}$$

Agora temos que pegar uma vizinhança tubular de  $C$ . Resulta que dada qualquer sub-variedade, existe uma vizinhança dela que é difeomorfa ao fibrado normal  $NQ$ . (Nao provamos isso neste curso.) Ou seja tem

$$\varphi : C \times \mathbb{R}^n \longrightarrow I \times X$$

Agora pega a projeção estereográfica

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \setminus \{-y\}$$

Ou a inversa dela. O ponto é que leva o zero no  $y$ .

E o mapa é

$$H(z) = \begin{cases} \psi(w) & z = \varphi(x, w), \text{ onde } (x, w) \in (C \times \mathbb{R}^n) \\ -y & z \notin \text{img } \varphi \end{cases}$$

**Lance:** que no bordo da vizinhança tubular temos  $-y$  porque  $-y$  é quando tamos no infinito, ou, pegando um difeo bola  $\rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ , quando chegamos no bordo da bola.

**Exercício** Podemos escolher  $\psi$  tal que  $H$  é  $C^\infty$ ,  $y$  valor regular de  $H$  e  $H^{-1}(y) = C$ .

Falta mostrar que  $\tilde{f} = H(0, \cdot)$ ,  $\tilde{g} = H(1, \cdot)$ . Já temos que  $f^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(y) = Q_0$  e que  $g^{-1}(y) = \tilde{g}^{-1}(y) = Q_1$ .

Então temos

$$\begin{aligned} f, \tilde{f} : X &\rightarrow S^n \quad y \text{ valor regular para } f \text{ e } \tilde{f} \\ f^{-1}(y) &= \tilde{f}^{-1}(y) \quad \text{com orientação} \\ \varphi : Q_0 \times \mathbb{R}^n &\rightarrow X \\ \rho : \mathbb{R}^n &\rightarrow [0, 1] \quad C^\infty, \text{supp } \rho \subset B_\varepsilon^n(0), \rho \equiv 1 \text{ em } B_{\varepsilon/2}^n(0) \\ \psi : S^n \setminus \{-y\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Vou para  $\mathbb{R}^n$ , faço homotopia e volto (entro em pânico não):

$$F_t(z) = \begin{cases} \psi^{-1}\left((1 - \rho(u)t)\psi(f(z)) + \rho(u)t\psi(\tilde{f}(z))\right) & z = \varphi(x, u) \\ f(z) & z \notin \text{img } \varphi \end{cases}$$

□

## 16 Aula 15: Teorema de Hopf, Pontryagin-Hopf

### 16.1 Teorema de Hopf

**Observação** (Na aula anterior mostramos injetividade)

**Teorema (Hopf)**  $X$  de dimensão  $n$ , conexa, compacta e sem bordo. O conjunto de classes de homotopia de mapas de  $X \rightarrow S^n$  é bijectable a  $\mathbb{Z}$ , i.e.

$$\begin{aligned} [X, S^n] &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [f] &\mapsto \deg f \end{aligned}$$

é bijetiva.

*Demonstração.* Que a função está bem definida é por invarianza homotópica de grau.

Construir uma homotopia entre  $f$  e  $\tilde{f}$  só sado que a preimagem de  $y$  é a mesma, e a orientação é a mesma.

Primeira coisa que vamos fazer é considerar  $Q_0$ , um conjunto de pontos. Todo ponto possui uma vizinhança...

Sobrejetividade: para construir um mapa com grau  $k$  pega  $k$  pontos em  $X$ , com umas bolinhas aoredor de cada um, e pega a projeção esstereográfica  $\mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{p\}$ , e no exterior das bolinhas só define o mapa como sendo  $p$ . E ai só concertar que tudo fique orientado e suave. □

## 16.2 Construção de Pontryagin-Thom

Como classificar mapas  $f : X^m \rightarrow S^n$ , com  $m \geq n$ . Pegue um valor regular  $y$  de  $f$ .

**Observação** Quando  $m = n$ , já mostramos que exist euma homotópia se e somente se a contagem de preimagens é mesma.

Pegue dois mapas homotópicos  $f, g : X^m \rightarrow S^n$  e um valor regular dos dois  $y$ . Então a ver que que é a homotópia?

$$\begin{aligned} H : I \times X &\longrightarrow S^n \\ H(0, \cdot) &= f \\ H(1, \cdot) &= g \\ H \pitchfork \{y\} \end{aligned}$$

Então pela  $n$ -ésima versão do teorema da função inversa, sabemos que

$$\partial H^{-1}(y) = \{1\} \times Q_1 \sqcup (-\{0\} \times Q_0)$$

i.e.  $H^{-1}(y)$  variedade compacta de dimensão  $m - n + 1$  metida den de  $I \times X$ .

**Definição**  $X$  variedade orientada compacta sem bordo.  $Q_0, Q_1 \subset X$  subvariedades compactas orientadas sem bordo. Um **cobordismo (orientado)**  $C$  entre  $Q_0$  e  $Q_1$  é uma subvariedade compacta orientada den de  $I \times X$  tal que  $\partial C = \{1\} \times Q_1 \cup (-\{0\} \times Q_0$ .

Ahora suponte que cerca de los puntos de  $Q_0$  y  $Q_1$  dentro del cilindro  $I \times X$  la curva  $C$  es constante. Eso lo escribimos así:

$$\begin{aligned} C \cap (1 - \varepsilon, 1] \times X &= (1 - \varepsilon, 1] \times Q_1 \\ C \cap ([0, \varepsilon) \times X) &= [0, \varepsilon) \times Q_0 \end{aligned}$$

De fato isso faz que seja mais facil colar dois cobordismos. Porque cobordismo é relação de equivalência.

**Definição**  $Q \subset X$  subvariedade. Um **frame (referencial)** de  $Q$  é uma trivialização do fibrado normal  $NQ$ . Se é dimensão 1 é só pegar uma seção nonvanishing. Uma hipersuperfície é orientável se somente se o fibrado normal é trivializável.

**Observação** A outra maneira de definir o fibrado normal, além de usando uma métrica Riemanniana, é deinindo ele como  $NQ = TX|_Q/TQ$ . Com métrica Riemanniana é  $(TQ)^\perp$ .

**Observação**  $f : X^m \rightarrow Y^n$  com  $m \geq n$ ,  $y$  valor regular. Então  $Q = f^{-1}(y)$  possui um referencial. Sim, porque como  $NQ$  é o complementar de  $X$ , ele tem a mesma dimensão que  $Y \dots$ ? acho que sim, o fato é que (citando o quadro)  $N_x Q \cong T_y Y$ . Então pegando um frame em  $TY$  podemos puxar ele pra  $NQ$ .

Então  $Q_0$  e  $Q_1$ , as preimagens de  $f \simeq g$  são referenciadas e cobordantes.

**Definição**  $(Q_0, \tau_0), (Q_1, \tau_1)$  duas subvariedades compactas sem bordo referenciadas de  $X$ . Um **cobordismo referenciado** é  $(X, \tau)$ , onde  $C \subset I \times X$  é um cobordismo entre  $Q_0$  e

$Q_1$ , onde  $\tau$  é uma trivialização de NC tal que [Es constante cerquita de los extremos como hicimos arriba](#):

$$\tau|_{\{t\} \times Q_0} = \tau_0 \quad \forall t \in [0, \varepsilon) \quad \tau|_{(1-\varepsilon, 1] \times Q_1} = \tau_1$$

**Exemplo** Um mapa  $f : S^2 \rightarrow S^2$  com um valor regular  $q$  e  $p_1, \dots, p_3$  preimagens. Mostre que tem um cobordismo entre  $\{p_i\}$  e  $q$ .

$f, g : X^m \rightarrow S^n$ ,  $f \simeq g$  cobordismo referenciado entre  $f^{-1}(y)$  e  $g^{-1}(y)$  ( $y$  valor regular). Pega homotopia

$$H : I \times X \rightarrow S^n$$

$$H(t, \cdot) = \begin{cases} f & t \in [0, \varepsilon) \\ g & t \in (1 - \varepsilon, 1] \end{cases}$$

ou seja  $H$  é constante perto dos extremos. Também pode supor que  $H \cap \{y\}$ ,  $C = H^{-1}(y)$ . Como antes, temos que

$$dH_x : N_x C \xrightarrow{\cong} T_y S^n$$

E de fato nos extremos obtemos o framing que dão  $f$  e  $g$ .

Qué está pasando?

$$C^\infty(X^m, Y^n) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{subvariedades orientadas} \\ \text{referenciadas de dim} = m - n \end{array} \right\}$$

$$f \mapsto f^{-1}(y)$$

Posso fazer mais do que isso:

$$\Phi : C^\infty(X^m, Y^n) / \text{homotopia} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{subvariedades orientadas} \\ \text{referenciadas de dim} = m - n \end{array} \right\} / \begin{array}{l} \text{cobordismo} \\ \text{referenciado} \end{array}$$

$$f \mapsto f^{-1}(y)$$

A gente mostra que dadas duas homotopias, obtemos um cobordismo no se que. Agora o lance é

**Teorema (Pontryagin-Thom)**  $Y = S^n \implies$  esse mapa é uma bijeção.

*Demonstração.*

1. **(Vale para qualquer contradomínio.)** De novo: a gente já mostrou que  $f, g \cap \{y\} \implies f^{-1}(y)$  e  $g^{-1}(y)$  são cobordantes por referencial.
2. **(Precisa contradomínio conexo e compacto.)**  $y$  e  $z$  são valores regulares de  $f$ , então  $f^{-1}(y)$  e  $f^{-1}(z)$  são cobordantes por referencial. Então como  $Y$  é conexo por caminhos pega um caminho  $\gamma$  de  $y$  a  $z$  e estende  $\gamma'$  a um campo vetorial  $V$  (pode fazer isso, tipo definindo  $V$  constante fora de uma vizinhança ou algo.)  $V$  possui um

fluxo. Como  $Y$  é compacto esse fluxo tá bem definido para toda  $t$ . E pode pedir que esse fluxo mande  $\varphi_1(y) = z$ .

Agora considere

$$\begin{aligned}\varphi_1 \circ f : X &\longrightarrow S^n \\ (\varphi_1 \circ f)^{-1}(z) &\longmapsto f^{-1}(y)\end{aligned}$$

Então o que é bom é que  $\varphi_1 \circ f \simeq \varphi \circ f$ . Por 1.,  $(\varphi \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$  e  $f^{-1}(z)$  são cobordantes por referencial (“frame cobordant”).

3. **Codominio é esfera**,  $Y = S^n$ . Vamos ver que  $\Phi$  é sobrejetiva. Pegue uma subvariedade  $(W, \eta)$  uma subvariedade referencial de  $X$  de dimensão  $m - n$ . Queremos uma função  $f : X \rightarrow S^n$  com  $f^{-1}(y) = w$ .

Pelo teorema da vizinhança tubular, consigo mergulhar  $\varphi : NW \rightarrow X$ . E tem um referencial, i.e. uma trivialização do fibrado normal:

$$\begin{array}{ccc}\varphi : NW & \longrightarrow & X \\ \eta \downarrow \cong & & \\ W \times \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Então que segue?

$$f(z) := \begin{cases} \psi^{-1}(u) & z = \varphi(x, u) \\ p, & z \notin \text{Im } \varphi \end{cases}$$

onde  $\psi : S^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então  $f^{-1}(-p) = W$ .

4. Agora vamos mostrar que  $\Phi$  é injetiva. Pegue  $f, g : X \rightarrow S^n$ . A prova ficou parecida como a prova do teorema de Hopf: construímos umas funções  $\tilde{f}, \tilde{g}$  homotópicas...

□

## References

- [GG74] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1974.
- [GP10] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub., 2010.
- [Hir12] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, second edition edition, 2013.
- [Mil65] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.
- [Tu10] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010.