Notas de aula: Análise Funcional

Prof. Bruno Braga

github.com/danimalabares/functional-analysis

Este documento contém as notas das aulas do curso ministrado pelo Prof. Bruno Braga no Programa de Verão do IMPA, 2024.

Índice

Plano do curso

Provas:

- 29 de fevereiro.
- 1 de março.

Tópicos:

1. Espaços de Banach
2. Operadores.
3. Espaço dual
4. Topologia fraca e fraca*.
5. 4 teoremas:
   (a) Hahn-Banach.
   (b) Banach-Alaglou.
   (c) Banach-Steinhouse.
   (d) Aplicação aberta.
6. Espaços de Hilbert.

7. Teoria espectral de operadores compactos.

1 Espaços de Banach

Definição. Seja X un espaço vetorial sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma função $\| \ \| : X \to [0, \infty)$ é uma ***norma*** se

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

O par $(X, \| \ \|)$ é um ***espaço normado***. $(X, \| \ \|)$ é um espaço métrico normado com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

No caso em que $(X, \| \ \|)$ é completo, chama-se um ***espaço de Banach***.

Exemplo.

1. $\ell_p = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ com a norma $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ é um espaço de Banach.
2. $\ell_\infty = \{(x_n) \in \mathbb{K}^\infty : \sup |x_n| < \infty\}$ com a norma $\|(x_n)\|_\infty = \sup |x_n|$.
3. $c_0 = \{(x_n) \in \ell_\infty : \lim_n x_n = 0\}$, com a norma de ℓ_∞.
4. Seja K um compacto Housdorff, $C(K) = \{f : K \to K : f \text{ é contínua}\}$, com a norma $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Então $(C(K), \| \ \|)$ é de Banach.
5. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. O conjunto das clases de equivalença de funções $f : X \to \mathbb{K}$ tais que
$$\|f\| = \left(\int_K |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$$
é Banach.

Exercício 1.0.1. Vamos mostrar que ℓ_p é Banach.

Demostração. $\| \ \|_p$ é uma norma. Se $p = 1$ já está. Suponha que $1 \in (0, \infty)$.

Afirmação 1.1 (Desigualdade de Young)**.** Sejam a, b numeros reais no negativos e p, q numeros reais maiores que 1 tais que $1/p + 1/q = 1$. Então
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}.$$

Demostração. (Prova por figura disponível em Narici p. 110.) A idea é que as integrais da função $f(x) = x^{p-1}$ e da sua inversa sumam uma área maior do que a área do rectángulo de lados a, b. □

Afirmação 1.2 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $p, q \in (1, \infty)$ tais que $1/p + 1/q = 1$, $(x_n) \in \ell_p$, $(y_n) \in \ell_q$. Temos que $(xy) \in \ell_1$.

$$\|(x_n y_n)\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$$

Demostração. Suponha $\|(x_n)\| = \|(y_m)\|_q = 1$. Aplicando a desigualdade de Young, temos que

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|x_n|^p}{p} + \frac{|y_n|^q}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

E se os vetoreis não são de norma 1 também está tranquilo pois podemos tomar $\tilde{x}_m = \frac{x_m}{\|x\|_p}$ é $\tilde{y}_m = \frac{y_m}{\|y\|_q}$. Nesse caso podemos factorizar os números $\|(x_n)\|_p$ e $\|(y_n)\|_p$ para obter que $\|(\tilde{x}_n)\|_p = \|(\tilde{y}_n)\|_q = 1$ e aplicar o passo anterior. $\square$

Afirmação 1.3 (Desigualdade de Minkowsky)**.** Sejam $(x_n), (y_n) \in \ell_p$. Então $(x_n) + (y_n) \in \ell_p$ e

$$\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|x_n\|_p + \|y_n\|_p.$$

Demostração. Em geral, se $a, b > 0$, então $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$?. De fato, $(a+b)^p \leq (2\max\{a, b\})^p \leq 2^p(a^p + b^p)$. Logo $\|(x_n + y_n)\|_p \leq 2^p(\|x_n\|_p + \|y_n\|_p)$, assim $(x_n + y_n) \in \ell_p$.

$$\begin{aligned}
\|(x_n + y_n)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n||x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n+1}^{\infty} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \\
&= \|(x_n)(x_n + y_n)^{p/q})\|_1 + \|(y_n)x_n + y_n)^{p/q})\|_1 \qquad \left(p - 1 = \frac{p}{q}\right) \\
&\leq \|(x_n)\|_p \|(x_n + y_n)^{p/q}\|_q + \|(y_n)\|_p \|(x_n + y_n)^{p/q}\|_q \quad \text{(Hölder)} \\
&= (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) \|(x_n + y_n)\|_q^{p/q} \\
&= (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) \frac{\|(x_n + y_n)\|_p^p}{\|(x_n + y_n)\|_p^q}
\end{aligned}$$

Usando que $(p-1)q = pq - q = p$. Dividindo entre $\|?\|$ obtemos

$$\|(x_n + y_n)\|_p^q \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p$$

Finalmente,

$$\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|x_n\|_p + \|y_n\|_p.$$

$\square$

Afirmação 1.4. $\| \; \|_p$ é completa.

Demostração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ_p.

Note que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$|x_n^k - x_m^k| \leq \|x_m - x_m\|$$

Assim, $(x_n^k)_k$ é Cauchy para toda $k \in \mathbb{N}$. Defina

$$x = (x^k) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^k\right)$$

Objetivo: $x \in \ell_p$ e $x_n \to x$. Defina $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ pois (x_n) é Cauchy, assim é limitada. Temos para $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^k|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^k|^p + |x_m^k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^k|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^k - x_m^k|^p\right)^{1/p} + M\end{aligned}$$

isto é, "uniformemente finito". Tomando $m >> 1$,

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon + M \quad \forall N, \forall$$

Logo $\|x\| \leq M$.

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n - x_m|^p &= \lim_{m} \sum_{n=1}^{N} |x_m(c) - x_m(x)|^p \\ &\leq \lim \|x_m - x_n\|^p\end{aligned}$$

A partir daqui está bem: Como (x_n) é Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m, n > n_0$ implica $\|x_n - x_m\|^p < \varepsilon^p$.

Logo, seja $n > n_0$,

$$\sum_{k=1}^{N} |x^k - x_n^k|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Isto é, $\|x - x_n\| < \varepsilon \quad \forall m > n_0$. □

□

Observação 1.1.

1. $\ell_p \leq \ell_q$, $p \leq q$.
2. (X, μ) medida finita, $L_q \leq L_p$, $p \leq q$.
3. $c_{00} = \{(x_n) \in K^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n = 0,\ \forall m > n_0\}$.

1.1 Transformações lineares

Sejam X, Y espacos normados. Uma função $T : X \to Y$ é ***linear*** se

1. $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{K}, x, y \in X$.

Observação 1.2. Num espaço linear de dimensão finita os operadores lineares sempre são contínuos.

Proposição 1.1. Sejam X, Y espaços vetorias normados e $T : X \to Y$ linear. São equivalentes:

1. T é continua em $x_0 \in X$.
2. T é continua.
3. T é ***limitada***, isto é,
$$\|T\| := \sup_{x \in B_X} \|Tx\| < \infty$$
onde $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.
4. $\exists C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$. Além disso,
$$\|T\| = \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}.$$
5. T é uniformemente contínua.

Demostração. $(1 \implies 2)$. Seja $x_n \to x$. Note que

$$(x_n - x + x_0)_n \to x_0,$$

de forma que

$$T(x_0) = \lim_n T(x_n - x + x_0) = \lim_n T(x_n) - T(x) + T(x_0).$$

$(2 \implies 3)$ Caso contrário, $\exists (x_n) \subset B_X$ tal que $\lim \|Tx_n\| \to \infty$. Logo

$$\left(\frac{x_n}{\|Tx_n\|}\right)_n \to 0.$$

então,

$$\left\|T\left(\frac{x_n}{\|Tx_n\|}\right)\right\| \to 0,$$

que é impossível já que

$$\left\|T\left(\frac{x_n}{\|Tx_n\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|Tx_n\|}\|T(x_n)\| = 1.$$

$(3 \implies 4)$. Pegue $C = \|T\|$. De fato, se $x \neq 0$,

$$\frac{x}{\|x\|} \in B_X \implies T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \|T\| \implies \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Isso mostra que $\|T\| \in \{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$, de forma que

$$\inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\|\} \leq \|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|.$$

Para ver a outra desigualdade, basta ver que $\inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$ é uma cota superior do conjunto $\{\|Tx\| : x \in B_X\}$. De fato, se $x \in B_X$, para cualquer $C \in \{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$ temos que $\|Tx\| \leq C\|x\| \leq C$, pois $\|x\| \leq 1$. Isso implica que $\|Tx\|$ é uma cota inferior do conjunto $\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$, porém

$$\|Tx\| \leq \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\|\} \qquad \forall x \in B_X.$$

$(4 \implies 5)$ Lembre que T é unformemente contínua se

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \implies \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Tendo (4), observe que tomando $\delta = \varepsilon / C$ temos a continuidade em 0, que podemos trasladar a todo punto de X como em $(1 \implies 2)$.

$(5 \implies 1)$ Imediato. □

Definição. Sejam X e Y espaços normados. Denotarmos por

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ limitado}\}$$

Exercício 1.1.1 (Tareia).

1. $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$.
2. Se Y for Banach, então $\mathcal{L}(X, Y)$ é Banach.
3. $\|T\| = \sup_{x \in \partial B_X} \|Tx\|$ onde $\partial B_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Teorema 1.2. Todo espaço de dimensão finita é Banach.

Para isto vamos provar um lemma muito importante para muitas coisas.

Lema 1.3 (Riesz). Seja X um espaço normado, $Y \subset X$ subespaço próprio fechado, $a \in (0, 1)$. Então existe un $x \in \partial B_X$ tal que $d(x, Y) \geq a$.

Demostração. Seja $x \in X \backslash Y$. Como $\frac{d(x,Y)}{a} > d(x, Y)$, podemos pegar um $y \in Y$ tal que $\|x - y\| \leq \frac{d(x,Y)}{a}$. Defina $z = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. Seja $w \in Y$

$$\begin{aligned}
\|w - z\| &= \left\| w - \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|x - y\|} \, \|\|x - y\|w + y - x\| \\
&\geq \frac{d(x, Y)}{\|x - y\|} \\
&\geq a
\end{aligned}$$

pois $\|x - y\|w + y \in Y$ por ser Y um espaço vetorial. □

Prova de que todo espaço de dimensão finita é Banach. Incompleta! Seja $n = \dim X$. Se $X = \mathbb{K}$ terminhamos. Fazendo indução, suponha certo para n e mostraremos para $n+1$. Seja $Y \subseteq X$ espaço de dimensão n. Por hipótesis de indução, Y é fechado. Pegamos $x \in X \backslash Y$ com $d(x, Y) > 1/2$. Para todo $y \in Y$ e para todo $x \in X$ no $\operatorname{span}\{x\}$.

$$\begin{aligned}
\|y + z\| &= \|y + \left\| \|z\| \frac{1}{\|y\|} \right\| \\
&= \|z\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|y\|} \right\| \\
&\geq \frac{\|z\|}{z}
\end{aligned}$$

O que estou falando aquim? Temos que $X = Y \oplus Z$, $\pi_Y : Y \to Z$, $\pi_Z : X \to Z$. Logo

$$\|\pi_Z(x_n)\| \leq z\|(x_n)\|$$

Logo π_Y) Id $-\pi_Z$?

Ahora seja $(x_n)_n \subseteq X$ de Cauchy. Logo $(\pi_Y(x_n))_n)$, $(\pi_Z(x_n))_n$ são Cauachy, logo $x_Y = \lim \pi_Z(x_n)$ e

$$x_n = \lim \pi_Z(x_n)$$

existe, logo

$$\pi_Z(x_n) + \pi_Y(y_n) \to x_Z + x_Y.$$

□

Proposição 1.4. Seja $T : X \to Y$ um operador entre espaços normados. Se $\dim(X) < \infty$ então T é contínua.

Demostração. Fazemos indução. Caso $n = 0$ é fácil. Suponha verdade para $n \in \mathbb{N}$. Pegue $Z \subseteq X$ com $\dim Z = n - 1$ e $w \in X \backslash Z$. Seja $W = \operatorname{span}\{w\}$. Então temos que $X = Z \oplus W$.

Se

$$\pi_Y = X \to Z \quad \text{e} \quad \pi_W : X \to W$$

são as projeções canónicas, então

$$\mathrm{Id}_X = \pi_Z + \pi_W$$

e ambas são contínuas, terminhamos. Como $T = T \circ \pi_Z + T \circ \pi_W$. □

Teorema 1.5. Um espaço normado X tem dimensão finita se e somente se B_X for compacto.

Demostração. ($\implies$) Defina $n = \dim X$. Fixe um isomorfismo *algébrico* $T : \mathbb{K}^n \to X$. Munindo $\mathbb{K}^n$ com sua norma , é imediato que $B_{\mathbb{K}^n}$ é compacto. En consequência, $T(B_{\mathbb{K}^n})$ é compacto.

Note que $B_X \subseteq N.\ T(B_{\mathbb{K}^n})$ para N grande. Seja $e_1, \ldots, e_n \in X$ uma base, e para cada $i \leq n$ seja um mapa

$$f_i : X \mapsto \mathbb{K}^n$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_j e_j \mapsto a_i$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\left\| T^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right)\right\| &\leq \|T^{-1}\| \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right\| \\
&\leq \max_j \|e_j\| \|T^{-1}\| \left(\sum |a_j|\right) \\
&\leq \max \|e_j\| \|T^{-1}\| \left(\sum_j \|f_j\|\right) \left\|\sum_j e_j\right\|.
\end{aligned}$$

De forma que $\exists L > 0$ tal que $\|T^{-1}(x)\| \leq L\|x\|$ para toda $x \in X$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\dim X = \infty$. Por indução, existe (usando o lema de Riesz muitas vezes e o fato de que cualquer subespaço linear de dimensão finita é fechado) $(x_n)_n \subseteq \partial B_X$ tal que $\|x_n - x_m\| > 1/2$. $\square$

1.2 Normas equivalentes

Definição. Seja X um espaço vetorial e $\| \ \|, ||| \ |||$ normas em X. Diremos que $\| \ \|$ e $||| \ |||$ são ***equivalentes*** se existe $L > 0$ tal que

$$\frac{1}{L}|||x||| \leq \|x\| \leq L|||x||| \qquad \forall x \in X.$$

Equivalentemente, se

$$\mathrm{Id} : (X, \| \ \|) \to (X, ||| \ |||)$$

for um homeomorfismo.

Observação 1.3.

1. Se X tiver dimensão finita todas as nomas são equivalentes.
2. Seja $T : (X, \| \ \|) \to (X, ||| \ |||)$ limitado. Então

$$|||x||| = \|x\| + \|T(x)\|$$

nos da uma norma equivalente, pois $\|x\| \leq |||x||| \leq (1 + \|T\|)\|x\|$.

Definição.

1. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador bijetivo. T é um ***isomorfismo*** se T e T^{-1} forem contínuas.

2. Se T for contínuo, injetivo e $T^{-1} : \operatorname{img}(X) \to X$ for contínua, T é um ***mergulho isomórfico***.
3. Se T for uma bijeção linear e
$$\|T(x)\| = \|x\| \qquad \forall x \in X, \tag{1}$$
T é uma ***equivalencia isomórfica***.
4. Se T for linear e eq. (1) vale, T é uma ***isometría.***

Observação 1.4. T é um mergulho isomórfico se e somente se $\exists L > 0$ tal que
$$\frac{1}{L}\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq L\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

1.3 Espaços duais

Relembrando, anteriormente definimos
$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ linear e contínuo}\}$$
com a norma
$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$
Denotamos $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ e $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

Definição. X^* é o ***dual (topológico)*** de X.

Duais de ℓ_p e c_0 ($p < \infty$)

Teorema 1.6. Se $p, q \in (1, \infty)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\ell_p^* = \ell_q$.

Demostração. Definamos $\phi : \ell_q \to \ell_p^*$ por
$$\phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$
para $y = (y_n) \in \ell_q$ e $x = (x_n) \in \ell_p$. Observe que, pela desigualdade de Hölder, $\phi(y)(x)$ é uma série convergente, pois a convergencia absoluta
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$
implica a convergencia em espaços completos.

(ϕ é uma isometria.) Temos que $\|\phi(y)\|_{\ell_p^*} \leq \|y\|_{\ell_q}$ usando Hölder novamente:
$$\|\phi(y)\|_{\ell_p^*} = \sup_{x \in B_{\ell_p}} |\phi(y)(x)| = \sup_{x \in B_{\ell_p}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \|y\|_q.$$

E $\|\phi(y)\|_{\ell_q^*} \geq \|y\|_{\ell_q}$.

Defina $x \in \ell_p$ como

$$x_n = \operatorname{sign}(y_n)\frac{|y_n|}{\|y\|_{\ell_q}^{q/p}}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}\|x\|_{\ell_p}^p &= \sum |x_n|^p \\ &= \sum \frac{|y_n|^{pq-p}}{\|y\|_{\ell_q}^q}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\phi(y)(x) &= \sum \frac{\operatorname{sign}(y_n)|y_n|^{q-1}}{\|y\|_{\ell_q}^{q/p}} y_n \\ &= \frac{\|y\|_{\ell_q}^q}{\|y\|_{\ell_q}^{q/p}}.\end{aligned}$$

(ϕ é sobrejetiva.) Seja $f \in \ell_p^*$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$y = f(e_n) \qquad \text{é} \qquad y = (y_n)_n.$$

Vamos ver que $y \in \ell_q$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$z_n = \sum_{n=1}^k y_n e_n = (y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

Para $n \leq k$, $x_n = \operatorname{sign}(y_n)|y_n|^{q-1}$,

$$\begin{aligned}\|z_k\|_{\ell_q}^p &= \sum_{n=1}^k |y_n|^q \\ &= \sum_{n=1}^k y_n \operatorname{sign}(y_n)|y_n|^{q-1} \\ &= f\left(\sum_{n=1}^k x_n e_n\right) \\ &\leq \|f\| \left\|\sum_{n=1}^k x_n e_n\right\|_{\ell_p}\end{aligned}$$

Agora computamos a norma desse cara:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{k} x_n e_n \right\|_{\ell_p} &= \sum_{n=1}^{k} |y_n|^{(q-1)p} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^q \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\|y\|_{\ell_q}^q \right)^{1/p} \\
&\leq \|z_k\|_p^{q/p}
\end{aligned}$$

Assim que a desigualdade anterior termina em que

$$\|z_k\|_{\ell_q}^q \leq \|f\| \|z_k\|_{\ell_q}^{q/p}$$

de forma que $\|z_k\|_{\ell_q} \leq \|f\|$. □

Teorema 1.7. Sejam $p, q \in (1, \infty)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. O mapa $\phi : \ell_p \to \ell_q^*$ dado por

$$\phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para $y = (y_n)_n \in \ell_q$ e todo $x = (x_n)_n \in \ell_p$ é uma isometría sobrejetiva.

Exemplos.

1. $c_0^* \equiv \ell_1$.
2. $\ell_1^* \equiv \ell_\infty$.
3. $\ell_\infty^* \not\equiv \ell_1$ (entenda o problema na prova).
4. Se $p \in (1, \infty)$, $\ell_p^{**} \equiv \ell_p$.

Lembre que $c_0 \subseteq \ell_\infty$, e que $\ell_p \subseteq \ell_q$ quando $p \leq q$.

Pergunta. Considere a inclução $I : \ell_p \to \ell_q$. Será que existe $L > 0$ tal que

$$\frac{1}{L} \leq \|I(x)\|_q \leq L\|x\| \ ?$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n = e_q + \ldots + e_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ é tal que $\|x_n\|_p = n^{1/p}$ e que $\|I(s_n)\||_q = \|x_n\|_q = n^{1/q}$ assim que essa inclução boba não é uma isometría.

Teorema 1.8 (Pitt). Sejam $p, q \in (1, \infty)$ com $p \neq q$. Não existe um mergulho isomórfico $\ell_p \to \ell_q$.

Definição. Seja X um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_n \subseteq X$ ***converge fracamente*** a $x \in X$ se $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$.

Exemplo. $(e_n)_n \subseteq \ell_p$, $p \in (1,\infty)$, $e_n \xrightarrow{w} 0$. Quando pegamos $f \in \ell_p^*$, sabemos que $f = \phi(y)$ para algum $y \in \ell_q$. Logo $f(e_n) = y_n$.

Observação 1.5. Se $T : X \to Y$ é limitado e $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $x_n \overset{w}{\to} x$, $x \in X$, então $T(x_n) \overset{w}{\to} T(x)$.

Demostração. Queremos mostrar que para cualquer $f \in Y^*$, temos que $f(T(x_n)) \to f(T(x))$. Seja $f \in Y^*$ cualquer e considere o seu *pullback* baixo T, ie. o funcional

$$
\begin{gathered}
T^* f : X \to \mathbb{K} \\
(T^* f)(x) = f(T(x))
\end{gathered}
$$

De fato, $T^* f$ é linear e contínuo se T é linear e contínuo. Como $x_n \xrightarrow{w} x$, é concluimos que $f(T(x_n)) \to f(T(x))$. $\square$

Definição. Dado $p \in [1,\infty]$, o funcional

$$
\begin{gathered}
e_n^* : \ell_p^* \to \mathbb{K} \\
\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \mapsto x_n
\end{gathered}
$$

é tal que $\|e_n^*\| = 1$ e que $e_n^*(e_m) = \delta_{nm}$.

Prova do teorema de Pitt. Suponha que $T : \ell_p \to \ell_q$ é um mergulho isomórfico. Suponha $p > q$. Como $e_n \overset{w}{\to} 0$ em ℓ_p, $T(e_n) \overset{w}{\to} 0$ em ℓ_q.

Passando para uma subsequência podemos supor que $(\operatorname{supp}(T(x_n)))_n$ são "disjuntos". Pode tentar, lembre que $\operatorname{supp} = \{i \in \mathbb{N} | y_i \neq 0\}$.

Note que se $(y_n)_n \subseteq \ell_q$ é tal que $\operatorname{supp}(y_n) \cap \operatorname{supp}(y_m) \neq \varnothing$ quando $n \neq m$, então

$$
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \right\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^q \right)^{1/q}
$$

É para vocês analizar quais são os épsilons.

Logo, escolhendo a subsequência de $(T(x_n))_n$ de forma apropriada, podemos escolher $L \geq 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{k} T(x_n) \right\|_q &\geq \frac{1}{L} \left(\sum_{n=1}^{k} \|T(e_n)\|^q \right)^{1/q} \\
&\geq \frac{a}{L} n^{1/q}.
\end{aligned}
$$

onde $a = \inf_n \|T(e_n)\|$.

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{k} T(e_n) \right\| &= \left\| T\left(\sum_{n=1}^{k} e_n \right) \right\|_q \\
&\leq \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{k} e_n \right\|_p \\
&= \|T\| k^{1/p}.
\end{aligned}$$

Em conclusão,

$$\frac{a}{L} k^{1/q} \leq \|T\| k^{1/p} \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

que não é possível. $\square$

Observação 1.6. Vamos ver que

1. $\ell_p \hookrightarrow \ell_\infty$ para toda $p \in [1, \infty)$.
2. $\ell_p \not\hookrightarrow \ell_1$ para toda $p \neq 1$.
3. Nossa prova não serve para ver que $\ell_1 \not\hookrightarrow \ell_p$, $p > 1$. O problema ta no momento de escolher a sequência e_n, que converge fracamente em ℓ_p. O enunciado é verdadeiro, só precisa mais um pouco de cuidado.
4. Por curiosidade, tem o seguinte resultado:

   Teorema 1.9. Se $X \not\hookrightarrow \ell_q$.

1.4 Completamentos

Definição. Sejam (X, d) e $(\tilde{X}, \tilde{d})$ espaços métricos. $\tilde{X}$ é um ***completamento*** de X se

1. X é um subespaço métrico de $\tilde{X}$, ie., $X \subseteq \tilde{X}$ e $d = \tilde{d}|_{X \times X}$.
2. $\tilde{X}$ é completo, ie. $\bar{X} = \tilde{X}$.

Se $(X, \| \ \|)$ e $(\tilde{X}, ||| \ |||)$ forem espaços normados, $(\tilde{X}, ||| \ |||)$ é um ***completamento*** de $(X, \| \ \|)$ se

1. $(X, \| \ \|) \subseteq (\tilde{X}, ||| \ |||)$.
2. $\overline{X} = \tilde{X}$.

Teorema 1.10. Os completamentos existem e são únicos. Seja $(X, \| \ \|)$ um espaço normado. Existe $(\tilde{X}, ||| \ |||)$ Banach tal que

1. $(X, \| \ \|) \subseteq (\tilde{X}, ||| \ |||)$.
2. $\overline{X}^{||| \ |||} = \tilde{X}$.
3. $(\tilde{X}, ||| \ |||)$ é Banach.

(Equivalentemente, existe uma isometria $I : X \to \tilde{X}$ tal que $I(X)) = \tilde{X}$.)

Demostração. Considere

$$\tilde{\tilde{X}} = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ é Cauchy}\},$$

que têm uma estructura vetioral bacana. Defina uma relação de equivalencia em $\tilde{\tilde{X}}$, como

$$(x_n) \sim (y_m) \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Defina

$$\tilde{X} = \tilde{\tilde{X}} / \sim$$

e ainda defina as operações

$$\alpha[(x_n)] + \beta[(y_n)] = [(\alpha x_n + \beta_n)],$$

que estão bem definidas. Finalmente defina a norma

$$|||[(x_n)]||| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

que também está bem definida.

Para mostrar 1., basta notar que o mapa que manda cada ponto para a sequência constante,

$$x \in X \mapsto [(x)] \in \tilde{X},$$

é uma isometria linear.

Para ver 2., fixe $[(x_n)] \in \tilde{X}$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, temos $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Logo

$$|||[(x_{n_0})] - [(x_n)]||| < \varepsilon.$$

Ahora vejamos que $\tilde{X}$ é Banach. Pegue uma sequência de Cauchy $([(x_n^k)])_k$ em $\tilde{X}$. Passando para uma subseqência se é necessário, podemos pegar (x^k) em X tal que

$$\left|\left|\left|[(x_n^m)] - [(x^k)]\right|\right|\right| < 1/k$$

para $m \geq k$. Issto é, usando a densidade de X podemos avanzar na sequência e achar para cada $k \in \mathbb{N}$ um elemento de X que fique muito perto. Queremos que a sequência resultante seja de Cauchy e ainda que seja o límite da sequência com a qual começamos.

Note que (x^k) é Cauchy em X, pois

$$\begin{aligned}
\|x^k - x^m\| &= \left|\left|\left|[(x^k)] - [(x^n)]\right|\right|\right| \quad \text{(sequências constantes)} \\
&\leq \left|\left|\left|[(x^k)] - [(x_n^m)]\right|\right|\right| + |||[(x_n^m)] - [(x^m)]||| \\
&\leq 1/k + 1/m \leq 2/k
\end{aligned}$$

escolhendo $m \geq k$.

Finalmente note que
$$[(x^n)] = \lim_{m\to\infty} [(x_n^m)],$$
pois
$$\lim_{m\to\infty} \|\|[(x^n)_n] - [(x_n^m)_n]\|\| = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|x^n - x^m\| = 0.$$
Deixamos provar a unicidade como exercício. □

1.5 Cardinalidades de bases de Hamel

Proposição 1.11. Seja X um espaço de Banach com dimensão infinita. Então sua base de Hamel é não numerável.

Observação 1.7. E necésario pedir que espaço sea Banach na proposição anterior.

Demostração. Seja X um espaço de Banach separável de dimensão infinita. Então a cardinalidade de suas bases de Hamel é a mesma de $\mathbb{R}$. Além disso, $\dim X = \#X$. □

2 Espaços cocientes

Dado um espaço vetorial X, cualquer subespaço Y é um subgrupo normal do grupo aditivo $(X, +)$. Gente quer ver que o espaço cociente é normado se X for normado, e é Banach se X for Banach.

Seja $(X, \| \|)$ normado e $Y \subseteq X$ subespaço. Denotemos $[x] = x + Y$, e temos a relação de equivalencia no cociente dada por $x \sim y \iff x - y \in Y$. As operações de suma e produto escalar estão bem definidas. Defina uma norma em X/Y como
$$\|x + Y\|_{X/Y} = d(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}.$$
que está bem definida pois a distancia de cualquer ponto na clase de x para o kernel é igual. Para ver-o note que $\forall z \in x + \ker T$, temos que $z - x + y \in \ker T$, de modo que
$$d(z, K) = \inf_{y\in K} \|z - y\| \leq \|z - (z - x + y)\| = \inf_{y\in K} \|x - y\|$$
e a desigualdade contrária é análoga.

Vejamos que de fato $\| \|_{X/Y}$ é uma norma:

1. $\|\lambda x + Y\| = |\lambda| \|x + Y\|$ é clara.
2. $\|x + z + Y\| = \inf\{\|x + z + y\| : y \in Y\}$. Pegue sequências (x_n) e (z_n) em Y tais que
$$\|x + Y\| = \lim_n \|x + x_n\| \qquad \|z + Y\| = \lim_n \|z + z_n\|.$$
Então, $\|x + z + Y\| \leq \|x + x_n\| + \|z + z_n\|$ para toda n, e de fato $\|x + z + Y\| \leq \|x + Y\| + \|z + Y\|$.

3. Para provar que $\|x+Y\| = 0 \implies x+Y = 0 \iff x \in Y$, temos que supor que Y é fechado. Então, $\exists (y_n) \subseteq Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0$, assim, $y_n \to x$ e $x \in Y$.

4. Finalmente suponhamos que X é Banach e Y fechado, e peguemos $(x_n + Y)$ uma sequência de Cuachy em X/Y. Queremos achar outra sequência em X na mesma clase de equivalencia, mais que seja Cauchy. Pegue uma subsequência tal que

$$\|x_n - x_{n+1} + Y\| < 2^{-n}.$$

Pegue $(w_n) \subseteq Y$ tal que

$$\|x_n - x_{n+1} - w_n\| < 2^{-n}.$$

Defina (z_n) como

- $z_1 = x_1$.
- $z_2 = x_2 + w_1$.

  $\vdots$
- $z_n = x_n + w_{n-1} + \ldots + w_1$.

Temos então que

$$\|z_n - z_{n+1}\| = \|x_n - x_{n-1} - w_n\| < 2^n.$$

Logo (z_n) é Cauchy e $z_n \in x_n + Y$. Defina $z = \lim_{n\to\infty} z_n$. Agora vejamos que $\|z - x_n + Y\| \to 0$. Temos que

$$\|z - x_n + Y\| = \|z - z_n + Y\| \le \|z - z_n\| \to 0.$$

Temos mostrado que

Teorema 2.1. Seja $(X, \|\ \|)$ um espaço normado e $Y \subseteq X$ um subespacço fechado. Então $(X/Y, \|\ \|_{X/Y})$ é um espaço normado e se X for Banach, X/Y também.

Ahora vamos mostrar que a projeção canónica é um operador de norma 1. De fato, escolhendo o vetor 0 pode ver que $\|Q\| \le 1$, e usando o Lema de Riesz pode ver pegar uma sequência $(x_n) \subset B_X$ tal que $d(x_n, Y) \ge 1 - \frac{1}{n}$, o que implica que $\|Q\| = \sup_{x\in B_X} d(x, Y) \ge 1$.

Teorema 2.2 (Primer teorema de isomorfismo)**.** Existe um único $T' : X/T \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "Q"'] & & Y \\ & X/\ker T \arrow[ur, "T'"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $T = T' \circ Q$.

Exercício. $\|T'\| = \|T\|$.

Demostração. Temos que

$$\begin{aligned}\|T'\| &= \sup\left\{\|T(x+\ker T)\| : x+\ker T \in B_{X/\ker T}\right\}\\ &= \sup\left\{\|Tz\| : z \in x+\ker T \text{ para algum } x+\ker T \in B_{X/\ker T}\right\}\end{aligned}$$

de tal forma que fixando $x+\ker T \in B_{X/\ker T}$, temos para cualquer $z \in x+\ker T$ que

$$\|T'\| \leq \|T\|\|z\|,$$

assim que bastaria achar um representante z em B_X. Note que como $\|x+\ker T\| = d(x, \ker T) = \inf_{y\in Y}\|x-y\|$, para cualquer $n \in \mathbb{N}$ podemos achar $y_n \in \ker T$ tal que

$$\|x-y_n\| < \inf_{y\in Y}\|x-y\| + \frac{1}{n}$$

tomando o limite obtemos um ponto $y \in Y$ tal que $\|x-y\| \leq \|x+\ker T\| \leq 1$. Notemos que $z = x-y \in x+\ker T$, pois $T(x-y-x) = Ty = 0$, assim que de fato $\|T'\| \leq \|T\|$.

A desigualdade contrária e quasi imediata:

$$\|Tx\| = \|T'(x+\ker T)\| \leq \|T'\|\|x+\ker T\| = \|T'\| \inf_{y\in\ker T}\|x-y\| \leq \|T'\|\|x\|.$$

$\square$

Observação 2.1. Se $f \in X^*$, $X/\ker f$ tem dimensão 1, pois $X/\ker f \approx \mathbb{K}$.

Teorema 2.3 (Spoiler, precisa o Teorema da Aplicação Aberta)**.** Se T for sobrejetiva,

$$T' : X/\ker T \to Y$$

é um isomorfismo algébrico. Se X e Y forem Banach, é um isomorfismo.

Vimos que X/Y é um espaço de Banach.

Pergunta. Quais espaços de Banach podem ser obtidos como X/Y?

Teorema 2.4. Seja X um espaço de Banach separável (existe um conjunto numerável que é denso). Então existe um subespaço fechado $Y \subseteq \ell_1$ tal que X é linearlmente isométrico a ℓ_1/Y.

Demostração. Basta ver que existe $T : \ell_1 \to X$ linear e surjetiva para obter $T' : \ell_1/\ker T \to X$. Seja X separável. Pegue $(x_n) \subseteq B_X$ denso e defina $T : \ell_1 \to X$ como

$$T((\lambda_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

Note que como $\sum_{n=0}^{\infty}\|\lambda_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| < \infty$, segue-se que $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n x_n$ converge.

Vejamos que $\|T\| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\|T((\lambda_n))\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n x_n\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \\
&= \|(\lambda_n)\|_{\ell_1}
\end{aligned}$$

Vejamos que T é sobrejetiva. Fixe $x \in B_X$ e $\varepsilon \in (0,1)$. Como (x_n) é denso em B_X, existe $y_1 \in B_{\ell_1}$ tal que

$$\|x - T(y_1)\| < \varepsilon.$$

Como $\left\| \frac{x - T(y_1)}{\varepsilon} \right\| < 1$, pegue $\tilde{y}_2 \in B_{\ell_1}$ com

$$\left\| \frac{x - T(y_1)}{\varepsilon} - T(\tilde{y}_2) \right\| < \varepsilon.$$

Logo $\|x - T(y_1 + \varepsilon \tilde{y}_2)\| < \varepsilon^2$. Agora defina

$$y_2 = \varepsilon \tilde{y}_2.$$

Por indução, pegamos (y_n) tal que

1. $\|y_n\| \leq \varepsilon^{n-1}$.
2. $\|x - T(y_1 + \ldots + y_n)\| < \varepsilon^n$.

Como $\|y_n\| < \varepsilon^{n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ existe. Como T é contínuo,

$$\|T(y) - x\| = \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} T(y_i) - x \right\| = 0$$

Seja $T' : \ell_1 / \ker(T) \to X$ tal que $\|T'\| = \|T\|$ e tal que

$$\begin{tikzcd}
\ell_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "Q"'] & & X \\
& \ell_1 / \ker T \arrow[ur, "T'"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, ie. $T = T' \circ Q$.

Para concluir falta mostrar que T' é isometria. Para isso lembre que

$$\|y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

por se tratar de uma série geométrica. Agora provaremos que $\forall x \in B_X$ e $\forall \varepsilon \in (0,1)$ existe $y_{x,\varepsilon} \in \ell_1$ tal que

1. $\|y_{x,\varepsilon}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$.
2. $T(y_{x,\varepsilon}) = x$.

Pegue $x \in B_X$ e $y \in \ell_1$ com $T'(y + \ker T) = x$. Logo

$$\|y + \ker T\| = \inf\{\|y + w\| : w \in \ker T\} = \inf_{\varepsilon > 0} \|y - y + y_{x,\varepsilon}\| = 1.$$

□

Observação 2.2. ℓ_∞ não é separável. Considere para $A \subset \mathbb{N}$ a sequência $\chi_A \in \ell_\infty$. Note que se $B \neq A$, $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$, de forma que $\mathcal{B} = \{B(\chi_A, 1/2) : A \subseteq \mathbb{N}\}$ é uma coleção não numéravel de conjuntos abertos *disjuntos*. Como cualquer conjunto denso de ℓ_∞ deve intersetar cada bola em $\mathcal{B}$, não pode ser numérvel.

3 Teorema de Hahn-Banach

Por ahora tomemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definição. Seja X um espaço vetorial e $p : X \to [0, \infty)$. Dizemos que p é um ***funcional sublinear*** se

1. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geq 0$.
2. $p(x, y) \leq p(x) + p(y)$ para $x, y \in X$.

Teorema 3.1. Seja X um espaço vetorial e $Y \subseteq X$ subespaço. Seja $f : Y \to \mathbb{R}$ linear e $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Então existe $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\tilde{f}|_Y = f$.
2. $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Lema 3.2. Suponha as mesmas hipoteses que no teorema. Seja $x_0 \in X \backslash Y$. Então existe $\tilde{f} : E = \operatorname{span}\{Y \cup \{x_0\}\} \to \mathbb{R}$ linear tal que

1. $\tilde{f}|_Y = f$.
2. $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demostração. Começamos por ver quais são as condições que tiver que satisfacer $\tilde{f}$ se existese, e logo definimos de acordo a isso.

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(y) + \tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(y + x_0) \leq p(y + x_0) \quad \forall y \in Y \\ \implies &f(y) + \tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(y + x_0) \leq p(y + x_0) \quad \forall y \in Y \end{aligned}$$

então
$$\tilde{f}(x_0) \leq p(y + x_0) - f(y) \quad \forall y \in Y.$$
Defina
$$\tilde{f}(x_0) = \inf_{y \in Y} p(y + x_0) - f(y).$$
Temos que ver que está bem definido, ie. que $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$. Tome $y_1, y_2 \in Y$, assim
$$\begin{aligned} f(y_1) - f(y_2) &= f(y_1 - y_2) \\ &\leq p(y_1 - y_2) \\ &= p(y_1 + x_0 - y_2 - x_0) \\ &\leq p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0) \end{aligned}$$
Assim,
$$-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1) \quad \forall y_1, y_2 \in Y,$$
e como definimos $\tilde{f}(x)$ como o ínfimo dos termos na dereita desta desigualdade, temos que
$$-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \leq \tilde{f}(x_0) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1) \quad \forall y_1, y_2 \in Y.$$
Definamos $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ como
$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0) \quad \forall y \in Y \; \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
Para mostrar 2. queremos ver que
$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leq p(y + \alpha x_0) \quad \forall y \in Y \; \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
Se $\alpha = 0$ tá. Se $\alpha > 0$, podemos fazer
$$\begin{aligned} \tilde{f}(y + \alpha x_0) &= f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0) \\ &\leq f(y) + \alpha \left(p(y_1 + x_0) - f(y_1) \right) \quad \forall y_1 \in Y. \end{aligned}$$
Pegando $y_1 = \frac{y}{\alpha}$ temos
$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leq f(y) + \alpha \left(p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0 \right) - f\left(\frac{y}{\alpha} \right) \right) = p(y + \alpha x_0).$$
Finalmente se $\alpha < 0$,
$$\begin{aligned} \tilde{f}(y + \alpha x_0) &= f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0) \\ &\leq f(y) + |\alpha| \left(p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \right) \quad \forall y_1 \in Y. \end{aligned}$$
Fazendo $y_2 = \frac{y}{|\alpha|}$ obtemos
$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leq p(y + \alpha x_0).$$
□

Lema 3.3 (de Zorn)**.** Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado no vazío. Se toda cadeia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}$ tem um supremo $\mathcal{C} \in \mathbb{P}$, então $(\mathbb{P}, \leq)$ possui um elemento maximal.

Demostração de Hahn-Banach. Defina

$$\mathbb{P} = \{(E, g) : Y \subseteq E \subseteq X,\ g : E \to \mathbb{R} \text{ é linear}, g|_Y = f,\ g(x) \leq p(x)\ \forall x \in E\}$$

Defna $(E, g) \leq (E', g')$ se "(E', g') é uma extensão mais proxima de resolver o nosso problema", isto é, quando $E \subseteq E'$ e $g'|_E = g$. Claramente as cadeias de $\mathbb{P}$ tem supremos em $\mathbb{P}$:

$$F = \bigcup_{g \in \mathcal{C}} g$$

como definen-se as funções em teoria de conjuntos (como conjuntos). Peguemos então pelo lema de Zorn um elemento maximal (E, F).

Afirmação. F é o que procuramos.

Demostração. De fato, temos que $E = X$, pois caso contrário o lema anterior genera uma contradição a maximalidade de (E, F). □

□

Corolário 3.4. Seja X espaço normado, $Y \subseteq X$ subespaço e $f : Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe $F \in X^*$ tal que

1. $F|_Y = f$.
2. $\|F\| = \|f\|$.

Demostração. Defina

$$p(x) = \|f\|\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Por Hahn-Banach, existe um funcional $F : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $F|_Y = f$.
2. $|F(x)| \leq \|f\|\|x\|$ para todo $x \in X$.

Então, $\|F\| \leq \|f\|$. A outra desigualdade tá dada por ser F uma extensão: $|f(x)| = |F(x)| \leq \|F\|\|x\|$ quando $x \in Y$. □

Corolário 3.5. Seja X espaço normado e $x_0 \in X \backslash \{0\}$. Então existe $F \in X^*$ tal que

1. $F(x_0) = \|x_0\|$.
2. $\|F\| = 1$.

Demostração. Defina $Y = \text{span}\{x_0\}$ e $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que $\|f\| = 1$, pois

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\|,$$

logo $\|f\| \leq 1$. Como $f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = 1$, segue-se que $\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)| \geq 1$ e que $f(x_0) = \|x_0\|$. O resultado se obtém aplicando o corolário anterior. □

Corolário 3.6. Seja X espaço normado e $Y \subseteq X$ subespaço vetorial fechado e $x_0 \in X \backslash Y$. Existe $f \in X^*$ tal que

1. $f|_Y = 0$.
2. $f(x_0) = d(x_0, Y)$.
3. $\|f\| = 1$.

Demostração. Tome $E = \text{span}\{Y \cup \{x_0\}\}$. Defina $f(y + \alpha x_0) = \alpha d$ com $d = d(x_0, Y)$. Por Hahn-Banach, precisamos só mostrar que $\|f\| = 1$.

($\|f\| \leq 1$) Note que

$$\begin{aligned}
|f(y + \alpha x_0)| &= |\alpha| d \\
&= |\alpha| \inf\{\|x_0 - z\| : z \in Y\} \\
&\leq |\alpha| \left\| x_0 - \frac{y}{\alpha} \right\| \qquad (z = -y/\alpha) \\
&= \|\alpha x_0 + y\|.
\end{aligned}$$

($\|f\| \geq 1$) Pegue $(y_n) \subseteq Y$ tal que $d = \lim_n \|x - y_n\|$. Logo

$$f\left(\frac{x - y_m}{\|x - y_m\|}\right) = \frac{d}{\|x - y_n\|} \to 1.$$

□

Teorema 3.7. Seja X um espaço de Banach. Se X^* for separável, X é separável.

Demostração. Pegue $(f_m) \subseteq \partial B_{X^*}$ denso. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pegue $x_m \in \partial B_X$ tal que $f_n(x_n) \geq 1 - \frac{1}{m}$ (a gente não pode garantir que é 1). Defina $Y = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Afirmação. $Y = X$.

Demostração. Suponha falso, ie. existe $x \in X \backslash Y$. Pegue $f \in \partial B_{X^*}$ tal que

1. $f|_Y = 0$.
2. $f(x) \neq 0$. (De fato, esta propriedade não é usada na prova.)

Pegue uma subsequência $(f_{m_k})_k$ de (f_n) tal que $f_{m_k} \xrightarrow{k} f$. Então

$$|f(x_{n_k})| = |f_{n_k}(x_{m_k}) - f_{n_k}(x_{n_k} + f)$$

logo

$$|f(x_{n_k})| \geq |f_{n_k}(x_{m_k})| - f_{n_k}(x_{n_k} + f)$$

que converge a 1, pois

$$|f_{m_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) = |(f_{n_k} - f)(x_{m/k})| \leq \|f_{n_k} - f\| \to 0$$

mais isso não é possível pois x_n está em Y. $\square$

$\square$

Teorema 3.8 (Hahn-Banach complexo)**.** Seja X um espaço vetorial complexo, $Y \subseteq X$ subespaço, $f : X \to \mathbb{C}$ linear e $p : X \to [0, \infty)$ tal que

1. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todos $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in X$.
3. $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Então existe $F : X \to \mathbb{C}$ tal que

1. $F|_Y = f$.
2. $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demostração.

Exercício. Existem funcionais $\mathbb{R}$-lineares $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Note que a relação entre f_1 e f_2 é que

$$\begin{aligned} if_1(x) - f_2(x) &= if(x) \\ &= f(ix) \\ &= f_1(ix) + if_2(ix) \end{aligned}$$

Logo

$$f_2(x) = -f_1(ix), \quad \forall x \in Y.$$

Como $|f_1(x)| \leq p(x)$ para toda $x \in Y$, podemos usar Hahn-Banach real para pegar $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\tilde{f}|_Y = f_1$.
2. $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.

Defina $F : X \to \mathbb{C}$ como

$$F(x) = \tilde{f}(x) + i\tilde{f}(ix) \quad \forall x \in X.$$

(F é linear) De fato, temos que F é $\mathbb{R}$-linear. Resta ver que $F(ix) = iF(x)$ (Exercício).

($F|_Y = f$) Tá certo.

($|F(x) \leq p(x)$) Fixe $x \in X$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$|F(x)| = e^{i\theta}F(x).$$

Note que, denotando $\tilde{f}(x) = F$ e $-\tilde{f}(ix) = F_2$ para que $F = F_1 + iF_2$, temos que $F_2(e^{i\theta}) = 0$. Finalmente

$$\begin{aligned} |F(x)| &= F_1(e^{i\theta}x) \\ &= \tilde{f}(e^{i\theta}x) \\ &\leq p(e^{i\theta}x) \\ &= p(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.9. Seja X um espaço normado separável. X mergulha-se linermente e isometricámente em ℓ_∞.

Demostração. Seja $(x_m) \subseteq X$ denso. Pelo teorema de Hahn-Banach existe uma sequência de funcionais $(f_n) \subseteq \partial B_{X^*}$ tal que $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Logo, o mapa

$$\begin{aligned} T : X &\to \ell_\infty \\ x &\mapsto (f_n(x)) \end{aligned}$$

esta bem definido e é tal que $\|T\| \leq 1$. Então, $\|Tx\| \leq \|x\|$.

Para ver que T é uma isometria note que, como (x_n) é denso, para cualquer $x \in X$ podemos pegar uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \to x$. Então

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \\ &\geq |f_n(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\geq \big| |f_{n_k}(x_{n_k})| - |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x)| \big| \\ &= \big| \|x_{n_k}\| - |f_{n_k}(x_{n_k} - x)| \big| \xrightarrow{k} \|x\|. \end{aligned}$$

□

4 Reflexivilidade

Notemos que, entre aspas, $X \subseteq X^{**}$. Considere o mapa $J : X \to X^{**}$ como $(Jx)f = fx$ para toda $x \in X$ e $f \in X^*$.

Proposição 4.1. J é uma isometria.

Demostração. Por um lado,

$$\|J\| = \sup_{x \in B_X} \|Jx\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{X^*}} |fx| \leq 1.$$

Seja agora $x \in X \backslash \{0\}$. Pegue $f \in X^*$ com $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$. Logo

$$\|Jx\| \geq |(Jx)f| = |fx| = \|x\|.$$

$\square$

Definição. Se J for sobrejetiva, então X é ***reflexivo***.

Exemplos.

1. Dimensão finita.
2. ℓ_p, $p \in (1, \infty)$. Para comprovar issto tem que comprovar que na nossa prova da dualidade de ℓ_p de fato usamos o mapa J. Considere os mapas

$$\varphi : \ell_p \to \ell_q^* \qquad \psi : \ell_p^* \to \ell_q \qquad \varphi^* : \ell_q^* \to \ell_p^{**}$$

para obter

$$\begin{tikzcd} \ell_p \arrow[rr, "J"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \ell_p^{**} \\ & \ell_q^* \arrow[ur, "\psi^*"'] & \end{tikzcd}$$

Definição. Seja $T : X \to Y$ operador contínuo entre espaços normados. O ***adjunto*** de T é $T^* : Y^* \to X^*$ dado por

$$(T^* y^*)x = y^*(Tx).$$

Exemplos. Não são reflexivos: $C[0,1], c_0, \ell_\infty$ usando que se o dual de um espaço é reflexivo, então o espaço é reflexivo.

Exercício. Seja X reflexivo e Y isomórfico a X. Então Y é reflexivo.

Demostração. Primeiro mostramos que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "J_X"'] & Y \arrow[d, "J_Y"] \\ X^{**} \arrow[r, "(\varphi^*)^*"'] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

e logo que, em geral, o operador adjunto de um isomorfismo é um isomorfismo, assim $(\varphi^*)^*$ é um isomorfismo. $\square$

Proposição 4.2. Seja X reflexivo e $Y \subseteq X$ subespaço fechado. Então Y é reflexivo.

Demostração. Queremos mostrar que $J_Y : Y \to Y^{**}$ é sobrejetivo. Pegue $\xi \in Y^{**}$ e defina $\bar{\xi} \in X^{**}$ como

$$\bar{\xi} f = \xi f|_Y \quad \forall f \in X^*.$$

Como X é reflexivo, existe $x \in X$ tal que $J_X x = \bar{\xi}$.

$(x \in Y)$. Caso contrário, como Y é fechado, existe um funcional $f \in X^*$ tal que

1. $fx \neq 0$. (De acordo com o corolário de Hahn-Banach, $fx = d(x, Y)$.)
2. $f|Y = 0$.

Logo

$$\bar{\xi} f = \xi f|_Y = \xi 0 = 0.$$

Mais,

$$\bar{\xi} f = (Jx) f = fx \neq 0.$$

$(J_Y x = \xi)$. Pegue $g \in Y^*$ e usando Hahn-Banach defina $\bar{g} \in X^*$ extensão de g. Logo

$$\begin{aligned}(J_Y x) g &= gx \\ &= \bar{g} x \\ &= (J_X x) \bar{g} \\ &= \bar{\xi} \bar{g} \\ &= \xi g\end{aligned}$$

$\square$

Exercício. Se X é reflexivo e $Y \subseteq X$ fechado, então X/Y é reflexivo.

5 Topologia fraca e fraca*

Considere X um conjunto e uma família de mapas $\mathcal{F}$ de X para alguns espaços topológicos, $X \to (Y, \tau)$. A ***topologia fraca*** de X em relação a $\mathcal{F}$, denotada por $\sigma(X, \mathcal{F})$, é a menor topologia em X que faz todos elementos de $\mathcal{F}$ contínuos. Em outras palavras, é a topologia gerada por os conjuntos da forma $f^{-1}(U)$ para $f \in \mathcal{F}$ e $U \subseteq \operatorname{codom} f$ aberto.

Lembre que uma ***base*** um espaço topológico é uma coleção de abertos tal que todo aberto da topologia pode se-expresar como união arbitrária de abertos da base. (E ainda, que todo elemento do espaço tem uma ***base local***, (todo aberto que contém o punto contém um aberto da base local) de abertos da base.) Uma base para $\sigma(X, \mathcal{F})$ é

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i)$$

para $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ e $U_i \subseteq \operatorname{codom} f_i$ aberto.

Voltando para espaços vetoriais,

Definição. Se X é um espaço normado, $\sigma(X, X^*)$ é a ***topologia fraca de*** X. Uma base para $\sigma(X, X^*)$ é

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i x_i - f_i x| < \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1} B(f x_i, \varepsilon) \stackrel{?}{=} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1} B(f x_i, \varepsilon_i)$$

para $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Exercício. Seja $x_0 \in X$. Mostre que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i x_0 - f_i x| < \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1} B(f x_0, \varepsilon)$$

para $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$ é uma base local para essa topologia em x_0.

Demostração. Pega um conjunto da forma da primeira base e mostra que dentro dele tem um elemento da base local. Consideremos primeiro o caso $n = 1$. Supongamos que

$$x_0 \in f^{-1} B(f x_1, \varepsilon), \quad f \in X^*,\ x_1 \in X,\ \varepsilon > 0.$$

Defina

$$d = d(f x_0, \partial B(f x_1, \varepsilon) = \min\{|f x_0 - (f x_1 + \varepsilon)|, |f x_0 - (f x_1 - \varepsilon)|\}.$$

Afirmação. $f^{-1} B(f x_0, d/2) \subseteq f^{-1} B(f x_1, \varepsilon)$

De fato, para cualquer $x \in f^{-1} B(f x_0, d/2)$,

$$|f x - f x_1| \leq |f x - f x_0| + |f x_0 + f x_1| < d/2$$

□

O concepto de rede ajuda-nos a caracterizar propriedades de espaços topologicos arbitrários:

Definição.

1. Lembre que dado $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, I é ***direcionado*** se para todos $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Esa definição implica a existencia de um elemento maior do que cualquer cantidade finita de elementos, mais não para uma quantidade infinita.
2. $(x_i)_{i \in I}$ é uma ***rede*** se I é direcionado.

3. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $(x_i)_{i \in I}$ uma rede e $x \in X$. Decimos que $x_i \to x$ se para todo $O \in \tau$ como $x \in O$ existe $i_0 \in I$ tal que se $i \geq i_0$ então $x_i \in O$.
4. Uma rede $(x_i)_{i \in I}$ ***converge fracamente*** se para todo $f \in X^*$, $fx_i \to fx$.

k

Definição. Seja X um espaço normado. A topologia $\sigma(X^*, J(X)) := \sigma(X^*, X)$ é a ***topologia fraca**** de X^*. Trata-se da menor topologia de X^* tal que Jx é contínuo para todo $x \in X$.

Observação 5.1. Se X for reflexivo, $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$.

Uma base de topologia fraca* é

$$\begin{aligned} &\bigcap_{i=1}^{n} \{f \in X^* : |fx_i - f_i x_i| < \varepsilon\} \\ =&\bigcap_{i=1}^{n} \{f \in X^* : |(Jx_i)f - (Jx_i)f_i| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$.

(f_i) converge fracamente para f se $f_i x \to fx$ para toda $x \in X$.

Denotamos

1. $x_i \xrightarrow{w} x$ se (x_i) converge fracamente para x.
2. $f_i \xrightarrow{w^*}$ se (f_i) converge fraca-* para f.

Exemplo.

1. Sejam $p \in (1, \infty)$ e $(e_m) \subseteq \ell_p$. Então $e_n \xrightarrow{w} 0$.
2. Mesmo para c_0.
3. Se $p = 1$, não converge a zero.
4. Se $f_n \xrightarrow{w} f$ em X^* então $f_n \xrightarrow{w}$?. O recíproco não é certo, pois.

Teorema 5.1. Seja X um espaço normado. X é reflexivo se e somente se $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.

Proposição 5.2. Seja $\xi \in X^{**}$. Se ξ for contínuo para a topologia $\sigma(X^*, X)$, então $\xi \in X$.

Lema 5.3. Sejam $f, f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ lineares. Se

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq f$$

então $f \in \operatorname{span}\{f_i | i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Demostração. Tem um truco—defina a seguinte função auxiliar:

$$L : X \to \mathbb{R}^m$$

como $L(x) = (f_1 x, \ldots, f_n x)$ para $x \in X$. Como $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$, podemos definir $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "L"'] & & \mathbb{R} \\ & \mathbb{R}^n \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

que fica bem definida e é linear pela propriedade dos kernels. Logo, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$g(x_1, \ldots, x_n)) \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

E assim,

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i.$$

$\square$

Prova da proposição. Queremos achar funcionais $\xi_i \approx x_i$ que satisfaiz a condição dos kernels. Como ξ é $\sigma(X^*, X)$-contínuo,

$$\xi^{-1}(-1, 1) \in \sigma(X^*, X).$$

Logo $\xi^{-1}((-1, 1))$ é uma vizinhanza de zero na topologia fraca*. Logo existe $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que

$$\bigcap_{i=1}^n \{f \in X^* : |f_i x_i| < \varepsilon\} \subseteq ((-1, 1))$$

pois

Exercício. Se $f_0 \in X^*$ então

$$\bigcap_{i=1}^n \{f \in X^* : |f x_i - f_i x_i| < \varepsilon\}$$

$x_1, \ldots, x_n \in X$, $\varepsilon > 0$ é uma base de abertos locais para f_0. (É o mesmo exercício que o da base local para a topologia fraca.)

Logo,

$$\bigcap \ker(x_i) \subseteq \xi^{-1}((-1, 1)).$$

E pela linearidade do kernel e do operador ξ, temos que

$$\bigcap \ker(x_i) \subseteq \ker \xi$$

assim, pelo lema

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

com $x_1, \ldots, x_n \in X$. □

Prova do teorema.

($\implies$). Se X é reflexivo, $X = X^{**}$ e $\sigma(X*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.

($\impliedby$). Suponha $\sigma(X*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.

$$\begin{aligned} X^{**} &= \{\xi : X^* \to \mathbb{R} : \xi \text{ é linear e contínuo para } \sigma(X^*, X^{**})\} \\ &= \{\xi : X^* \to \mathbb{R} : \xi \text{ é linear e contínuo para } \sigma(X^*, X)\} \\ &= X \end{aligned}$$

□

6 Formas geometricas de Hahn-Banach

Definição. Sejam X um espaço vetorial e τ uma topologia em X. (X, τ) é um ***espaço vetorial topologico (EVT)*** se

1. $+$ e $\cdot$ são τ-contínuas.
2. Os pontos são fechados.

Exemplo. $(X, \| \|)$, $(X, \sigma(X, X^*))$ e $(X, \sigma(X^*, X))$ são EVT.

Definição. Para (X, τ) EVT,

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ linear e contínuo}\}.$$

Observação 6.1. $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X = JX$.

Definição. Sejam X um espaço vetorial e $A \subseteq X$ um subconjunto. O ***funcional de Minkowski de*** A é

$$\mu_A(x) = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in A \right\}.$$

É que tão longe posso ir na direção de x sem sair de A.

Definição. Seja $A \subseteq X$.

1. A é ***absorbente*** se $\forall x \in X$ $\exists t > 0$ tal que $\frac{x}{t} \in A$. (Note que essa condição implica que $0 \in A$.)

2. A é ***balançado*** se $\forall x \in A\ \forall \lambda \in B_{\mathbb{K}}$ temos que $\lambda x \in A$.

Proposição 6.1. Seja $(X, \| \ \|)$ normado e $A = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Então A é convexo, balanceado, absorbente e $\mu_A = \| \ \|$.

Demostração. Vamos mostrar que $\mu_A = \| \ \|$. Pegue $x \in X$ e $t > \|x\|$, assim $\frac{x}{t} \in A$. Logo, $\mu_A(x) \leq t$ e de fato $\mu_A(x) \leq \|x\|$.

Se $0 < t < \|x\|$, $\frac{x}{t} \notin A$, e logo $t \leq \mu_A(x)$. □

Proposição 6.2. Sejam X um EVT e $A \subseteq X$ absorbente e conexo. Então μ_A é sublinear e

$$B := \{x \in X : \mu_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\} := C$$

e

$$\mu_A = \mu_B = \mu_C.$$

Se A também for balanceado, μ_A é uma pseudonorma.

Demostração. (Sublinearidade). Sejam $x, y \in X$. Pegue $t > \mu_A(x)$ e $s > \mu_A(y)$. Como

$$\frac{x+y}{t+s} = \frac{t}{t+s}t^{-1}x + \frac{s}{t+s}s^{-1}s,$$

$\frac{x}{t} \in A$ é $\frac{y}{s} \in A$ pois A é convexo. Logo $\mu_A(x+y) \leq t+s$.

(Homogenidade). $\mu_A(\lambda x) = \lambda \mu_A(x)$, $\lambda > 0$. Logo se A for balanceado,

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x).$$

($B \subseteq A$). Sai como A é convexo e $0 \in A$.

($A \subseteq C$). Imediato

($\mu_A = \mu_B = \mu_C$) Como $B \subseteq A \subseteq C$, segue que

$$\mu_C \leq \mu_A \leq \mu_B.$$

Para ver que $\mu_B \leq \mu_C$, pegue $t > \mu_C(x)$. Logo $t^{-1}x \in C$. Logo $\mu_A(t^{-1}x) \leq 1$. Logo, se $s > t$,

$$\begin{aligned}\mu_A(s^{-1}x) &= \mu_A(s^{-1}tt^{-1}x)\\ &= s^{-1}t\mu_A(t^{-1}x)\\ &< 1,\end{aligned}$$

de modo que $s^{-1}x \in B$, e assim $\mu_B(x) \leq s$. □

Teorema 6.3 (Primeira forma geométrica de Hahn-Banach.)**.** Sejam X EVT real, $A, B \subseteq X$ convexos e disjuntos. Se A é aberto, existe $f \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$fx < \gamma \leq fy \quad \forall x \in A \text{ e } y \in B.$$

(Interpretamos $f^{-1}\gamma$ como um hiperplano, assim, o conjunto A fica num lado desse hiperplano, e o conjunto B do outro lado. Observe que o fecho deles pode se intersectar.)

Demostração. Pegue $a \in A$ e $b \in B$. Defina $x_0 = a - b$ e

$$C = x_0 + A - B.$$

(C é aberto). De fato, pois C é uma união de traslaçoes de A por ementos de B.

(C é absorbente). Por ser um aberto que contém zero.

(C é convexo). Por ser soma de convexos.

Considere μ_C. Note que $x_0 \notin C$ e $E = \text{span}\{x_0\}$. Defina $f : E \to \mathbb{R}$ como $f(\alpha x_0) = \alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Temos $f(\alpha x_0) \leq \mu_X(\alpha x_0)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha < 0$, terminhamos. Se $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0) &= \alpha \cdot 1 \\ &\leq \alpha \mu_C(x_0) \\ &= \mu_C(\alpha x_0) \end{aligned}$$

Por Hahn-Banach, existe $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ linear tal que

1. $\tilde{f}|_E = f$.
2. $\tilde{f}(x) \leq \mu_C(x)$ $\forall x \in X$.

($\tilde{f}$ é contínuo). Por 2.,

$$\tilde{f}(x) \leq \mu_C(x) \leq 1 \quad \forall x \in C \cap \{-C\}.$$

Exercício. Sejam X EVT e $f : X \to \mathbb{R}$ linear e limitado em um aberto. Então f é contínuo.

Assim, $\tilde{f}$ é contínuo. Pegue $y \in A$ e $x \in B$. Temos:

$$\begin{aligned} 1 + \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) &= \tilde{f}(x_0) + \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) \\ &= f(x_0 + y + x) \\ &= \mu_C(x_0 + y - x) < 1 \end{aligned}$$

Logo $f(y) < \tilde{f}(x)$ para todo $y \in A$ e toda $x \in B$. Defina

$$\gamma = \inf_{x \in B} \tilde{f}(x)$$

Nota que $\tilde{f}(A)$ e $\tilde{f}(B)$ são conexos e, pelo exercício 1 da Lista II, $\tilde{f}(A)$ é aberto. Logo

$$\tilde{f}y < \gamma \quad \forall y \in A.$$

□

Teorema 6.4 (Segunda forma geometrica de Hahn-Banach)**.** Sejam X EVT, $A, B \subseteq X$ convexos disjuntos, A compacto e B fechado. Então existe $f \in X^*$ tal que

$$\sup_{x\in A} f(x) < \inf_{x\in B} f(x).$$

(Mais uma vez, a f divide o espaço em dois hiperespaços, em cada um dos quais reside um dos conjuntos A ou B. Porém, agora ficam mais distantes um do outro, e seus fechos não irão se intersectar.)

Alternativamente, existem $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b) \qquad \forall a \in A\ \forall b \in B.$$

Exercício. Construa um conjunto convexo e absorbente $C \subseteq c_0$ com $(\lambda_n) \subseteq (0, \infty)$ $\lambda_n \to 0$ tal que

1. $(\lambda_n c_n, 0) \subseteq C$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
2. Para todo $x \in c_0$ existe λ_x tal que $\lambda x \notin C$ para toda $\lambda > \lambda_x$.

Lema 6.5. Sejam $A, B \subseteq X$ com A compacto e B fechado. Então existe um aberto V contendo zero tal que

$$(A + V) \cap (B + V) = \varnothing.$$

Prova do lemma. Como B^C é aberto e ainda $+$ é contínua, $\forall x \in B^c\ \exists V_x \subseteq X$ aberto, $0 \in V_x$ tal que

$$v + V_x + V_x + V_x + \subseteq B^c.$$

Trocando V_x por $V_x \cap (-V_x)$, V_x é simétrico. Como A é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n \in A$ tais que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i + V_{x_i}.$$

Defina

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}.$$

Vamos mostrar que $(A + V) \cap (B + V) = \varnothing$. Suponha $x \in (A + V) \cap (B + V)$. Como

$$A + V \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i + V_{x_i} + V_{x_i}.$$

Então existe $i \leq n$ tal que

$$x \in (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (B + V_{x_i}).$$

Isso implica que $x \in (x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap B$, o que contradiz a nossa escolha de V_x. □

Prova do teorema. Exercício. □

Corolário 6.6. Sejam $(X, \| \, \|)$ um espaço normado e $X \subseteq X$ convexo. Temos

$$\overline{C}^{\| \, \|} = \overline{C}^{w}.$$

Demostração. Como $\sigma(X, X') \subseteq \tau_{\| \, \|}$, $\overline{C}^{\| \, \|} \subseteq \overline{C}^{w}$. Pegue $x \notin \overline{C}^{\| \, \|}$ e defina

$$A = \{x\}, \quad B = \overline{C}^{\| \, \|}.$$

Por Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que

$$f(x) < \inf_{y \in \overline{C}^{\| \, \|}} f(y) = \gamma.$$

Logo

$$x \in f^{-1}((-\infty, \gamma)) \subseteq C^c,$$

e assim $x \notin \overline{C}^{w}$. $\square$

Pergunta. $\overline{C}^{w} = \overline{C}^{\| \, \|} = \overline{C}^{w^*}$?

Não, $c_0 \subseteq \ell_\infty$ é convexo. Defina para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = e_1 + \ldots + e_n.$$

Exercício. $s_n \xrightarrow{w^*} (1, 1, \ldots) \notin \overline{C}^{\| \, \|}$.

7 Teorema de Banach-Steinhaus

Teorema 7.1 (Baire). Seja (M, d) um espaço métrico completo. Considere $\{F_n\}$ uma família de fechados em M tais que

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} F_n.$$

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{int} F_{n_0} = \varnothing.$$

Demostração. Ver Elon. $\square$

Teorema 7.2 (Banach-Steinhaus). Sejam $(X, \| \, \|_X)$ um espaço de Banach, $(Y, \| \, \|_Y)$ um espaço normado e $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tais que para cada $x \in X$ existe $0 < c = c_x < \infty$ tal que

$$\|T_n x\|_Y \leq c_x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então existe $c > 0$ tal que

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostração. Comencemos definindo os conjuntos

$$\begin{aligned} X_m^n &:= \{x \in X : \|T_n x\|_Y \leq m\} \\ &= (\|\ \| \circ T_n)^{-1} ([0, m]). \end{aligned}$$

Segue-se que X_m^n é fechado. Com isso, conjunto

$$X_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_m^n \subseteq X$$

é fechado.

Afirmação. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_m$.

Demostração. $\subseteq$ é imediato. Recíprocamente, seja $x \in X$. Então existe $c_x > 0$ tal que

$$\|T_n x\| \leq c_x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pegue $m_x \in \mathbb{N}$ com $m_x > C$

$$\|T_n x\|_Y < m_x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja $x \in X_{m_x}^n$ para toda $n \in N$. Logo

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{m_x}^n = X_{m_x} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} X_m$$

$\square$

Logo, pelo teorema de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{int} X_{m_0} \neq \varnothing.$$

Considere $y \in \operatorname{int} X_{m_0}$ e $r > 0$ tal que

$$B_r^x[y] \subseteq \operatorname{int} X_{m_0}.$$

Seja $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$. Logo, $z = y + rx \in B_r^x[y]$. Daí,

$$\begin{aligned} \|T_m(z - y)\| &= \|T_m z - T_m y\| \\ &\leq \|T_n z\| + \|T_n y\| \\ &\leq m_0 + m_0 = 2m_0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &= \|T_n \left(\frac{rx}{r}\right) \\ &= \frac{1}{r} \|T_n(rx)\| \\ &= \frac{1}{r} \|T_n(z - y)\| \\ &\leq \frac{2m_0}{r} \end{aligned}$$

Assim, $\|T_n x\| \leq \frac{2m_0}{r}$ para toda $x \in X$ e $\|x\| \leq 1$. $\square$

Exemplo (Limitação uniforme "otimo"). Considere

$$X = \{(x_n) \subseteq c_0 : \exists k_0 \in \mathbb{N},\ x_k = 0\ \forall k > k_0\}$$

Exercício. $(X, \| \|_\infty)$ não é completo.

Tome $Y = \mathbb{R}$ e defina a sequência de operadores

$$\begin{aligned} f_n : X &\mapsto \mathbb{R} \\ x = (x_n) &\mapsto f_n(x) = nx_n \end{aligned}$$

Note que f_n é limitado. Pegando a sequência que vale 1 na n-esima entrada vemos que $\|f_n\| = 1$.

Seja $x = (x_k) \subseteq X$, assim existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = 0$ para $k > k_0$. Desse modo

$$f_n(x) = nx_n = 0 \quad \forall n > k_0.$$

Issto é, $|f_n x| \leq c_x$ para toda $n \in \mathbb{N}$, mas,

$$\|f_n\| = n \to \infty,$$

assim que a completude é essencial no teorema.

Corolário 7.3. Sejam X um espaço Banach, Y normado e $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Então o operador

$$\begin{aligned} T : X &\to Y \\ x &\to Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \end{aligned}$$

é contínuo.

Demostração. De fato,

1. T é linear: para $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + T_n y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y \\ &= \alpha Tx + Ty \end{aligned}$$

2. T é contínuo. Seja $x \in X$. Como $(T_n x)$ converge em Y, então $\|T_n x\|$ converge em $\mathbb{R}$, assim que é um conjunto limitado. Por Banach-Steinhaus, existe $c > 0$ tal que $\|T_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq c\|x\|.$$

Tomando limite como $\| \ \|$ é contínua, terminhamos.

□

Corolário 7.4. Seja X espaço Banach, Y normado e $(f_n) \subseteq X^*$ tal que $f_n \xrightarrow{w^*} f \in X^*$. Então (f_n) é limitada.

Teorema 7.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). Seja X um espaço de Banach. Então B_{X^*} é compacta na topologia fraca*.

Demostração. Para cada $x \in X$ defina

$$I_X = [-\|x\|, \|x\|],$$

que é compacto em $\mathbb{R}$. Pelo teorema de Tychonoff, o conjunto

$$I = \prod_{x \in X} I_x$$

é compacto em $\mathbb{R}^X$. Considere o mapa

$$\begin{aligned} \varphi : X^* &\to \mathbb{R}^X \\ f &\mapsto \varphi f = (f(x))_{x \in X} \end{aligned}$$

Dado $f \in B_{X^*}$,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies |f(x)| \in I_x.$$

Logo

$$\varphi(B_{X^*}) \subseteq I.$$

Afirmação. φ é um homeomorfismo (sobre sua imagem) da topologia fraca* para a topologia produto.

Demostração. A injetividade é clara: se $\varphi g = \varphi f$, então $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Para a continuidade, considere a projeção

$$\begin{aligned} \pi_X : \mathbb{R}^X &\to \mathbb{R} \\ y = (y_\alpha)_{\alpha \in X} &\mapsto \pi_x(y) = y_x \end{aligned}$$

Daí, observe que para toda $f \in X^*$,

$$\begin{aligned}(\pi_X \circ \varphi)f &= \pi_X(\varphi f)\\ &= \pi_X((f(y))_{y\in X})\\ &= f(x)\\ &= J_x f,\end{aligned}$$

e como J_x e contínua, também $\pi_X \circ \varphi$ para todo $x \in X$. $\square$

Agora vamos mostrar que $\varphi^{-1} : \varphi(X^*) \to X^*$ é contínua em $\sigma(X^*, X)$. Lembremos que $\varphi : Y \to (X^*, \sigma(X^*, X))$ linear é contínuo se é só se

$$J_x \circ \varphi : Y \to \mathbb{R}$$

é contínua para todo $x \in X$. Assim, mostraremos que

$$(J_x \circ \varphi) = \pi_x|_{\varphi(X^*)}$$

é contínuo.

Com isso, temos que φ é homeomorfismo. Com isso, vamos mostrar que

$$\varphi(B_{X^*}) \subseteq I$$

é fechado. De fato, seja $F = (F_x) \in \overline{\varphi(B_{X^*})}$. Vamos mostrar que existe $f \in B_{X^*}$ tal que $F_x = f(x)$ para todo $x \in X$. Defina

$$\begin{aligned}f : X &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = F_x\end{aligned}$$

1. f é linear. Sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a vizinhança aberta de F dada por

   $$V := \{(w_z)_{z\in X} : w_x - F_x| < \varepsilon,\ |w_y - F_y| < \varepsilon,\ |w_{\alpha x+y} - F_{\alpha x+y}| < \varepsilon\}.$$

   Como $F \in \overline{\varphi(B_{X^*})}$, temos $V \cap \varphi(B_{X^*}) \neq \varnothing$. Seja $g \in B_{X^*}$ tal que $\varphi g \in V$. Logo, $(g(w))_{w\in X} \in V$, ou seja,

   $$|g(x) - F_x| < \varepsilon, \qquad |g(y) - F_y| < \varepsilon, \qquad |g(\alpha x + y) - F_{\alpha x+y}| < \varepsilon$$

   Dai,

   $$\begin{aligned}|f(\alpha x + y) - (\alpha f(x) + f(y)| &= |F_{\alpha x+y}\\ &< (|\alpha| + 2)\varepsilon)\end{aligned}$$

2. $f \in B_X$, pois

   $$|f(x) = |F_x| \leq \|x\|$$

   pois $F \in I$.

Por tanto,

$$\overline{\varphi(B_{X^*})} = \varphi(B_{X^*}) \subseteq I$$

é compacto. Como φ é um homeomorfismo, temos que $B_{X^*} \subseteq X^*$ é compacto na topologia fraca*. $\square$

Corolário 7.6. Seja X Banach. Se X é reflexivo, B_X é compacta na topologia fraca.

Demostração. De fato, como X é reflexivo, então $J(B_X) = B_{X^{**}}$. (De fato, issto caracteriza o espaço ser reflexivo.) Por BAB, $B_{X^{**}}$ é compacto na fraca*, basta mostrar que

$$J^{-1} : X^{**} \to X$$

é contínua da topologia fraca* para fraca. De fato, basta mostrar que

$$f \circ J^{-1} : X^{**} \to \mathbb{R}$$

é contínua para todo $f \in X^*$. Seja $F \in X^{**}$,

$$J^{-1}(F) = x$$

então,

$$(f \circ J^{-1})(F) = f(x) = J_X(f) = f(x) := F(f)$$

Mais a aplicação

$$X^{**} \ni F \overset{f}{\mapsto} F(f)$$

é contínua para todo $f \in X^*$. Logo, J^{-1} é contínua. $\square$

Teorema 7.7 (Goldstine). Seja X Banach. Então $J(B_X) \subseteq X^{**}$ é denso em $B_{X^{**}}$ na topologia fraca*.

Demostração. Suponha que

$$\overline{B_X}^{w^*} \neq B_{X^{**}}.$$

Então, existe $\xi \in B_{X^{**}} \backslash \overline{B_X}^{w^*}$. Por Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que

$$f(\xi) < \inf_{z \in \overline{B_X}^{w^*}} f(z) \leq -\|f\|.$$

Logo,

$$\|f\| < |f(\xi)| \leq \|f\| \|\xi\|.$$

$\square$

Corolário 7.8. X é reflexivo se e só se $(B_X, \sigma(X, X^*))$ é compacto.

8 Krein-Milman

Definição. Sejam X um espaço vetorial e $K \subseteq X$ um convexo.

1. Um subconjunto de $L \subseteq K$ é ***extremo*** em K se para todos $x, y \in K$ e $\lambda \in (0,1)$,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in L \implies x, y \in L$$

2. Um ponto $x \in K$ é ***extremo*** se $\{x\}$ for extremo em K. Denotamos por $E(K) := \{x \in K : x \text{ é extremo em } K\}$.

   Issto é, não posso escrever um ponto extremo como combinação convexa de dois pontos em K. (O unico jeito de fazer-o é a combinação convexa trivial.)

Exemplos.

1. $X = c_0$, então e_1 não é extremo. De fato, $E(B_{c_0}) = \varnothing$.
2. $E(B_{\ell_\infty}) = \{(\varepsilon_n) \in \ell_\infty : \varepsilon_n \in \{-1,1\}\ \forall n\}$. Só note que ± 1 são pontos extremos do intervalo $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$. Assim, quando $z_n = \pm 1$ é necessário que $x_n = y_n = z_n$. Pedindo para toda n, os vetores são iguais.
3. $E(B_{\ell_1}) = \{\pm e_n : n \in \mathbb{N}\}$. A contenção $\supseteq$ é análoga ao anterior.
4. $E(B_{\ell_p}) = \partial B_{\ell_p}$. Começa com $z, x, y \in \partial B_{\ell_p}$, suponha $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in (0,1)$. Meta: $x, y = z$. Faiz:

$$1 = \|z\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| = 1,$$

   de fato, basta comprender que a desigualdade triangular no ℓ_p é igualdade se e só se um é multiplo do outro.

Teorema 8.1 (Krein-Milman)**.** Sejam X um EVT e $K \subseteq X$ compacto e convexo. Então,

$$K = \overline{\operatorname{conv}}(E(K)).$$

Observação 8.1. Lembre que

$$\begin{aligned}\operatorname{conv} A &= \bigcap_{\substack{A \subseteq B \\ B \text{ é convexo}}} B \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \lambda_i \in [0,1], \sum_i \lambda_i = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Demostração. Como K é convexo, a contenção $(\supseteq)$ é clara. Considere

$$\mathbb{P} = \{L \subseteq K : L \neq \varnothing, L \text{ é extremo em } K\}.$$

Meta:

$$\forall L \in \mathbb{P}\ \exists x \in E(K) : \quad x \in L,$$

em outras palabras, procuramos $x \in L$ e $\{x\} \in \mathbb{P}$.

Note que $\mathbb{P}$ é um conjunto parcialmente ordenado com a inclução inversa:

$$L \leq L' \iff L' \subseteq L.$$

Pelo lema de Zorn aplicado a

$$\mathbb{P}_L = \{L' \in \mathbb{P} : L' \subseteq L\}.$$

Obtemos que $\forall L \in \mathbb{P}\ \exists S_L \subseteq L$ tal que $S_L \in \mathbb{P}$.

Afirmação. S_L só tem um elemento.

Suponha $|S_L| \geq 2$, então, por Hahn-Banach existe $f \in X^*$ tal que $f|_{S_L}$ não é constante (pegando dos pontos, cada um como un conjunto compacto). Defina

$$\mu = \sup_{x \in S_L} f(x) = \max_{x \in S_L} f(x)$$

e

$$S_L = \{x \in S_L : f(x) = \mu\}.$$

Note que como f não é constante em S_L, temos que $S_L \subsetneq S_L$.

Ainda, note que S_f é extremo em K. Para ver isto, suponha que $x, y \in K$, $\lambda \in (0,1)$ e $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_f$. Como $S_f \subseteq S_L$ e S_L é extremo em K, então $x, y \in S_L$. Como

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \mu = \max_{z \in S_L} f(z),$$

segue que $f(x) = f(y) = \mu$, logo $x, y \in S_f$. Isto contradiz a minimilaidade de S_L em $\mathbb{P}_L$, assim $|S_L| = 1$.

Suponha que existe $x_0 \in K \backslash \overline{\mathrm{conv}}(E(K))$. Por Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que

$$\sup_{x \in \overline{\mathrm{conv}}(E(K))} f(x) < f(x_0).$$

Vamos mostrar que

$$K_f = \{x \in K : f(x) = \max_{z \in K} f(z)\}$$

é um conjunto extremo em K.

Note que $K_f \in \mathbb{P}$, logo $E(K) \cap K_f \neq \varnothing$. Se $y \in E(K) \cap K_f$,

$$f(y) \leq \sup_{x \in E(K)} f(x) < f(x_0) \leq f(y).$$

Contradição. □

Corolário 8.2. Se X é um espaço de Banach, $E(B_{X^*}) \neq \varnothing$.

Corolário 8.3. Como $E(B_{c_0}) = \varnothing$, c_0 não é dual de um espaço de Banach.

Corolário 8.4. $C[0,1]$ não é um dual, pois $E(C[0,1]) = \{-1, 1\}$.

9 Teorema da aplicação aberta

Definição. Seja (X, τ) um espaço topologico e $Y \subseteq X$ um subconjunto.

1. Y é ***denso em lugar nenhum*** se $\mathring{\overline{Y}} = \varnothing$.
2. Se $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_n$ e cada Y_n é denso em lugar nenhum, então Y é de ***primeria categoria*** ou ***magro***.
3. Y e de ***segunda categoria*** se não for de primeria categoria.

Teorema 9.1 (da aplicação aberta)**.** Sejam X e Y espaços normados com X Banach, $T : X \to Y$ linear e limitado e $T(X)$ de segunda categoria. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, se T é sobrejetiva, é aberta.

Demostração. Meta: $T(U)$ é aberto se $U \subseteq X$ é aberto. Note que é suficiente mostrar que

$$0 \in \operatorname{int}(T(rB_X)) \quad \forall r > 0.$$

Pegue $x \in U$, assim existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$. Como $0 \in \operatorname{int} T(rB_X)$, pode pegar $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon B_Y \subseteq T(rB_X)$. Assim, $T(x) + \varepsilon B_Y \subseteq T(x + rB_X) \subseteq T(U)$.

Afirmação.

$$\operatorname{int} \overline{T(rB_X)} \neq \varnothing \quad \forall r > 0.$$

Demostração. Como $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB_X)$, como $T(X)$ não é magro, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\operatorname{int}(\overline{T(n_0 B_X)}) \neq \varnothing$. □

Afirmação.

$$0 \in \operatorname{int}(\overline{T(rB_X)}) \quad \forall r > 0.$$

Demostração. Note que

$$\overline{T(\frac{r}{2}B_X)} - \overline{T(\frac{r}{2}B_X)} \subseteq \overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right) - T\left(\frac{r}{2}B_X\right)} \subseteq \overline{T(rB_X)}.$$

Pela afirmação anterior, existe um aberto magro não vazío com $U \subseteq \overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)}$. Logo

$$0 \in U - U \subseteq \overline{T(rB_X)}$$

□

Afirmação.

$$\overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)} \subseteq T(rB_X) \quad \forall r > 0.$$

Demostração. Fixe $y \in \overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)}$. Vamos construir uma sequência (x_n) em X e (y_n) em Y tais que

1. $y_1 = y$.
2. $y_n \in \overline{T\left(\frac{r}{2^n} B_X\right)}$.
3. $x_n \in \frac{r}{2^n} B_X$.
4. $y_{n+1} = y_n - T(X_n)$.

Suponha $y_1, \ldots y_n$ e $x_1, \ldots, x_{n+1}$ foram escolhidos. Note que

$$y_n - \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}} B_X\right)}$$

é uma vizinhança de y_n. Issto é, $y_n \in \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}} B_X\right)}$, asimm existe x_n que aproxima y_n do seguinte jeito:

$$\exists x_n \in \frac{r}{2^n} B_X : \quad T(x_n) \in y_n - \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}} B_X\right)}.$$

Logo,

$$y_{n+1} = y_n - T(x_n) \in \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}} B_X\right)}.$$

Como X é Banach,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge. Mais ainda, $x \in r B_X$. Como T é contínuo,

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(x_n)$$

Para calcular isso a gente calcula somas parciais:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} T(x_n) &= \sum_{n=1}^{N} y_n - y_{n+1} \\ &= y_1 - y_{N+1}. \end{aligned}$$

Como $y_n \to 0$, concluimos que $T(x) = y$. $\square$

Assim, zero tem uma vizinhança em $T(r, B_X)$. $\square$

Corolário 9.2. Sejam X e Y espaços de Banach, $T : X \to Y$ operador limitado sobrejetivo. Então T é aberto. Logo, existe $c > 0$ tal que $\forall y \in Y$ existe $x \in X$ tal que

$$Tx = y \qquad \text{e} \qquad \|x\| \leq c\|y\|.$$

Demostração. Teorema de categoría de Baire. $\square$

Corolário 9.3. Se ainda T for injetivo, então T^{-1} é limitado.

Corolário 9.4. Seja $(X, \| \ \|)$ espaço de Banach e $(\|| \ \||)$ uma norma Banach em X. Se $T : (X, \| \ \|) \to (X, \|| \ \||)$ for contínua, então $\| \ \| \sim \|| \ \||$.

Definição. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. T é ***compacto*** se $\overline{T(B_X)}$ for compacto.

Exemplos.

1. Se $\dim Y < \infty$, T é compacto.
2. $K(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ é compacto}\}$ é um espaço de Banach.
3. Note que "$\ell_\infty \subseteq \mathcal{L}(\ell_2)$" de forma canónica: para $a \in \ell_\infty$,

$$(Ta)x = (a_n x_n)_n$$

Note que Ta é compacto se e só se $a \in c_0$.

Corolário 9.5. Se X e Y forem Banach e $\dim Y = \infty$, então nenhum operador compacto $X \to Y$ é sobrejetivo.

10 Teorema do gráfico fechado

Teorema 10.1. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ linear (não necesariamente contínuo). Se

$$\operatorname{graph}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

for fechado, então T é limitado.

Demostração. Definimos uma norma $\| \ \|$ em $X \times Y$ como

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Como todas as normas são equivalentes no produto (pois ele é "dimensão 2"), $\operatorname{graph} T$ é fecahdo em $(X \times Y, \| \ \|)$. Logo, como T é linear $\operatorname{graph} T$ é um espaço vetorial e por ser fechado, é Banach. Para usar o teorema da aplicação aberte precisamos um mapa contínuo: usaremos as projeções.

Note que a projeção $\pi_1 : \operatorname{graph} T \to X$ dada por $(x, Tx) \mapsto x$ é contínuo. De fato, trata-se de um operador sobrejetivo, injetivo e contínuo, é um isomorfismo de espaços de Banach, ie. π_1^{-1} é contínua.

Como $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, onde $\pi_2 : X \times Y \to Y$ é a projeção canónica, T é contínuo. $\square$

11 Espaços complementados

Definição. Seja X um espaço de Banach e $Y \subseteq X$ um subespaço fechado. Y é ***complementado*** em X se existe $Z \subseteq X$ subespaço fechado tal que

$$X = Y \oplus X,$$

ie., $X = Y + Z$ é $Z \cap Z = \{0\}$.

Proposição 11.1.

1. Se $\dim Y < \infty$, Y é complementado.
2. Se Y é fechado e $\operatorname{codim} Y < \infty$, Y é complementado.

Demostração.

1. Seja $y_1, \ldots, y_n$ uma base de Y. Defina $\tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_n^* \in Y^*$ por $\tilde{y}_i^*(y_j) = \delta_{ij}$. Por Hahn-Banach, existem $y_1, \ldots, y_n \in X^*$ extensões. Defina

$$Z = \bigcap_{i=1}^{n} \ker y_i^*.$$

Logo Z é fechado. Mais ainda, $X = Y \oplus Z$. De fato, dado $x \in X$, defina

$$y = \sum_{i=1}^{n} y^*(x) y_i.$$

2. $\operatorname{codim} Y = \dim (X/Y) < \infty$. Seja

$$y_1 + Y, \ldots, y_n + Y$$

uma base para X/Y. Pegue $f_1, \ldots, f_n \in (X/Y)^*$ tais que $f_i(y_i + Y) = \delta_{ij}$. Então, se $\pi : X \to X/Y$ é o mapa quociente, temos

$$Y = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i \circ \pi).$$

Defina $Z = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Z é fechado. Como $y_1 + Y, \ldots, y_n + Y$ é base de X/Y, $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \in Y \implies \alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$. Logo, $Y \cap Z = \{0\}$.

Para ver que $X = Y + Z$, faça: $x \in X$, escreva

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\pi x)(y_i + Y),$$

defina

$$z = \sum_{i=1}^{n} f_i(\pi x) y_i \in Z,$$

e obtenha $y = x - z$.

□

Observação 11.1. Nem todos os subespaços fechados são complementados: $c_0 \subseteq \ell_\infty$ não é complementado.

Definição. Seja X um espaço de Banach, um operador linear limitado $p : X \to X$ é uma ***projeção*** se $p^2 = p$.

Proposição 11.2. X Banach, $Y \subseteq X$ é complementado se e só se $Y = \operatorname{img} p$ para alguma projeção $p : X \to X$.

Demostração.

($\Longleftarrow$) Defina $Z = \operatorname{img}(\operatorname{Id} - p)$. Então $Y = \ker(\operatorname{Id} - p)$ e $Z = \ker p$, que são fechados.

($\Longrightarrow$) Seja $Z \subseteq X$ fechado tal que

$$X = Y \oplus Z.$$

Definamos $p : X \to X$ como

$$px = y_x$$

onde y_x é o único elemento de X tal que $x - y_x \in Z$.

p é linear.

p é contínuo. Considere o quociente

$$\pi : X = Y \oplus Z \to X/Z.$$

Note que

$$\pi|_Y : Y \to X/Z$$

é uma bijeção. Pelo teorema da aplicação aberta, $(\pi|_Y)^{-1}$ é contínuo. Como $p = (\pi_Y)^{-1} \circ \pi$, p é contínuo. □

12 Operadores adjuntos

Definição. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador. O ***adjunto*** de T é o operador

$$T^* : Y^* \to X^*$$

dado por

$$(Tf)x = f(Tx) \quad \forall f \in Y^*,\ \forall x \in X.$$

Exercício. $\|T\| = \|T^*\|$.

Demostração. content... □

Proposição 12.1. Sejam X e Y espaços de Banach e considere $T : X \to Y$ linear.

$$T \text{ é contínuo } \iff T^* \text{ e fracamante contínuo.}$$

Demostração. Exer. □

Proposição 12.2. Sejam X e Y espaços de Banach e considere $S : Y^* \to X^*$ linear.

$$S \text{ é fraco* contínuo } \iff \exists T \in \mathcal{L}(X, Y) : S = T^*.$$

Demostração. ($\Longleftarrow$). Já está.

($\Longrightarrow$). Queremos: $(Sf)x = f(Tx)$. Para cada $x \in X$, defina

$$\begin{aligned} \xi_x : Y^* &\mapsto \mathbb{R} \\ f &\mapsto (Sf)x \end{aligned}$$

Como S é contínua*, cada ξ_x é contínuo*.

Logo $\forall x \in X$, existe um único $y \in Y$ tal que

$$\xi_x = J_Y y.$$

Defina $Tx = y$.

(T é linear.)

$$\begin{aligned} J_Y(T(\lambda x + y)) &= \xi_{\lambda x + y} \\ &= \lambda \xi_x + \xi_y \\ &= \lambda J_Y(Tx) + J_(Tx) \\ &= J_Y(\lambda Tx + Ty) \end{aligned}$$

(T é limitado)

$$\|Tx\| = \|J_Y(Tx)\| = \|\xi_{Tx}\| \leq \|\xi\|\|x\|$$

($S = T^*$)

$$(T^* f)x = f(Tx) = J_Y(tx)f = \xi_X f = (Sf)x$$

□

13 Universalidade

Sabemos que para cualquer espaço separável X existe uma isometria de $X \hookrightarrow \ell_\infty$. Seria bom ter um mergulho num espaço mais pequeno do que ℓ_∞, umo que fosse separável.

Teorema 13.1 (Banach-Mazur)**.** Seja X um espaço de Banach separável. Então existe uma isometria (não necesariamente surjetiva)

$$X \to C(\Delta)$$

onde $\Delta = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Observação 13.1. Relembre. Seja K um espaço métrico compacto. Então existe uma sobrejeção contínua $\Delta \to K$.

Demostração. Seja X separável. Por Banach-Alaouglu, $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ é compacto. Defina para $x \in X$, $\varphi x \in C(B_{X^*})$ dada por $(\varphi x)f = fx$. Então φ é uma isometria linear.

Como X é separável, $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável e podemos pegar $\alpha : \Delta \to B_{X^*}$ uma sobrejeção contínua. Defina
$$\psi : C(B_{X^*}) \to C(\Delta))$$
como
$$(\psi\xi)x = \xi(\alpha x) \quad \forall \xi \in C(B_{X^*})\ \forall x \in \Delta.$$
Então, ψ é uma isometria e em conclução, $\psi \circ \varphi : X \to C(\Delta)$ é a isometria procurada. □

Exercício. Se X é um espaço metrico compacto, $C(X)$ é separável.

Demostração. Como X é compacto, ele é separável. Seja $(x_n) \subset X$ denso. Defina para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n(x) = d(x, x_n)$. Ela é contínua, pois
$$|d(x, x_n) - d(x_n, y)| < d(x, y)$$
pela desigualdade triangular inversa. Ainda, o conjunto de funções geradas por (f_n) e identidade em X e um álgebra que separa pontos pela densidade de (x_n) e contém as constantes. Logo, pelo teorema de Weierstrass, (f_n) é denso em $C(K)$. □

14 Teorema de representação

Teorema 14.1. Sejam K compacto e Housdorff e $F \in C(K)^*$. Então existe uma medida de Borel com signal de variação limitada μ em K tal que
$$Ff = \int_K f d\mu$$
e
$$\|F\| = |\mu|(K).$$

Daqui em diante (X, d) um espaço métrico compacto. Uma ***σ-álgebra de Borel*** sobre X é a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de X. Uma medida definida sobre $(X, \mathcal{B})$ é chamada ***medida Boreliana***. Diremos que uma medida de Borel μ é ***regular*** se
$$\mu(B) = \sup_{\substack{K \subseteq B \\ \text{compacto}}} \{\mu(K)\}.$$

Uma medida é dita ter ***signal*** se assume valores negativos. Definimos a ***variação total*** de μ como $|\mu| : \mathcal{B} \to [-\infty, \infty]$ dada por
$$|\mu|(B) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_n)| : \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B} \text{ que particionan a } B \right\}.$$

Sabemos que $|\mu|$ é uma medida positiva finita em $(X, \mathcal{B})$. Definimos o seguinte conjunto:
$$M(X) := \{\mu : \mu \text{ é Boreliana, finita e com signal}\}.$$

Definimos $\| \|_M : M(X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|\mu\|_M = |\mu|(X).$$

Note que $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$.

Exercício. $(M, \| \|_M)$ é Banach.

Exemplo. Considere $C(X)$, $\mu \in M(X)$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : C(X) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_X f(x)\mu(X) \end{aligned}$$

Então φ é linear e

$$|\varphi f| = \left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| \leq \int |f(x)| d|\mu|(x) \leq \|f\|_\infty \int_X d|\mu|(x) = \|f\|_\infty |\mu|(X) = \|f\|_\infty \|\mu\|_M.$$

Isto é

$$|\varphi f| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|_M.$$

Daí $\|\varphi\| \leq \|\mu\|_M$. De fato, escolhendo f adequada, obtemos que $\|\varphi\| = \|\mu\|_M$.

Definição. Seja $\varphi \in C(X)^*$. Dizemos que φ é ***positivo*** se $\varphi f \geq 0$ sempre que $f(x) \geq 0 \; \forall x \in X$.

Observe que

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty,$$

assim definimos

$$g_\pm(x) = \|f\|_\infty \pm f(x) \in C(X)$$

de forma que

$$g_\pm(x) \geq 0.$$

Assim, $\varphi g_\pm$. Daí

$$\|f\|_\infty \varphi(1) \pm \varphi f \geq .$$

Ou seja

$$|\varphi f| \leq \varphi(1) \|f\|_\infty \quad \forall f \in C(X).$$

Além disso, $\|f\|_* = \varphi(1)$.

Teorema 14.2. Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $\varphi \in C(X)^*$. Se φ é positivo, então existe uma medida $\mu \in M(X)$ positiva tal que

$$\varphi f = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \forall f \in C(X).$$

Demostração. Fixe $\varphi \in C(X)^*$. Seja $A \subseteq X$ aberto. Deja a função

$$r_\varphi(A) = \sup\{\varphi f : \operatorname{supp} f \subseteq A, 0 \leq f(x) \leq 1\}.$$

Com isso defina a aplicação

$$\mu_* : \mathscr{P}(X) \to [-\infty, \infty]$$

dada por

$$\mu_*(B) = \inf\{r_\varphi(A) : B \subseteq A \text{ e } A \text{ é aberto}\}.$$

Vamos mostrar que μ_* é uma medida exterior em X, ie.,

1. $\mu_*(\varnothing) = 0$.
2. $\mu_*(B_1) \leq \mu_*(B_2)$ sempre que $B_1 \subseteq B_2$.
3. Se $(B_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$, então

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_*(B_n).$$

1. Já está. Para 2. considere $B_1 \subseteq B_2$. Para A aberto tal que $B_2 \subseteq A$ temos

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq A,$$

logo

$$\{r_\varphi(A) : B \subseteq A \text{ aberto}\} \subseteq \{r_\varphi(A) : B_1 \subseteq A, \text{ aberto}\}.$$

Assim, $\mu_*(B_1) \leq \mu_*(B_2)$.

Para 3. considere $(B_n)_{n=1}^\infty$ uma coleção de abertos e

$$B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n.$$

Considere $f \in C(X)$ tal que

$$\operatorname{supp} f \subseteq B, \quad \text{ e } \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

Como X é compacto e $\operatorname{supp} f$ é fechado (por definição), temos que $\operatorname{supp} f$ é compacto. Como $\operatorname{supp} f \subseteq B$, a menos de reordenação existem $B_1, \ldots, B_n$ tais que

$$\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_n.$$

Considere $\{\eta_n\}_{n=1}^N$ uma partição da unidade para $\{B_1, \ldots, B_N\}$. Issto é, as η_i são funções contínuas em $\operatorname{supp} f$ tais que

1. $0 \leq \eta_i(x) \leq 1 \quad \forall i$.
2. $\operatorname{supp} \eta_i \subseteq B_i \qquad \forall i$.

3. $\sum_{i=1}^{N} \eta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \operatorname{supp} f$.

Com isso,

$$\varphi f = \varphi(f * 1) = \varphi\left(f \sum_{i=1}^{N} \eta_i(x)\right) = \varphi\left(f\eta_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(f\eta_i) \leq \sum_{i=1}^{N} r_\varphi(B_1) \leq \sum_{i=1}^{\infty} r_\varphi(B_i).$$

Pois, $\operatorname{supp}(f\eta_i) \subseteq B_i$ e $0 \leq f\eta_i \leq 1$ para toda $i = 1, \ldots, N$. Logo,

$$r_\varphi(B) \leq \sum_{i=1}^{N} r_\varphi(B_i)$$
$$\Longrightarrow \ r_\varphi\left(\bigcup_i B_i\right) \leq \sum_i r\varphi(B_i).$$

Como cada B_i é aberto,

$$\mu_*\left(\bigcup_i B_i\right) \leq \sum_i \mu_*(B_i).$$

Agora seja $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ uma coleção de conjuntos. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escolha B_k aberto tal que

$$X_k \subseteq B_k \quad \text{ e que } \quad \mu_*(B_k) \leq \mu_*(X_k) + \varepsilon 2^{-k}$$

que é possivel pela definição dada por um infimo.

Como a $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, pela propriedade 2., temos que

$$\mu_*\left(\bigcup_k X_k\right) \leq \mu_*\left(\bigcup_k B_k\right) \leq \sum_k \mu_*(B_k) \leq \sum_k (\mu_*(x)) + \varepsilon 2^{-k} = \sum_k \mu_*(x_k) + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Logo, $\mu_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(X_k)$. Portanto, μ_* é uma medida exterior. Vamos probar que μ_* é métrica, ou seja, se $X_1, X_2 \subseteq X$ com $d(X_1, X_2) > 0$, então

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

De fato, sejam $X_1, X_2 \subseteq X$ com $d(X_1, X_2) > 0$. Como X é métrico, existem abertos B_1, B_2 tais que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ e $X_i \subseteq B_i$ para $i = 1, 2$. Daí, considerando B um aberto com $X_1 \cup X_2 \subseteq B$, então

$$(B \cap B_1) \sqcup (B \cap B_2) \subseteq B.$$

Desde que $X_i \subseteq B \cap B_i$ para $i = 1, 2$, temos que

$$\begin{aligned} \mu_*(B) &\geq \mu_*((B \cap B_1) \sqcup (B \cap B_2)) \\ &= \mu_*(B \cap B_1) + \mu_*(B \cap B_2) \\ &\geq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu_*(B) \geq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2) \quad \forall \text{aberto } B \supseteq X_1 \cup X_2.$$

assim,

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) \geq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

Como μ_* é exterior,

$$\mu_*(X_1 \cup C_2) \leq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

Portanto,

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

Em concluҫão, μ_* é uma medida métrica exterior em X. Desse modo, existe uma medida μ em (X, B) finita, tal que $\mu_*|_B = \mu$. Como $\mu(X) = \mu_*(X) = \|\varphi\|_* = \varphi(1)$. Nos resta mostrar que μ representa φ. Considere $f \in C(X)$. Desde que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, onde f^+ e f^- são as partes positivas e negativas de f. Assuma sem perda de generalidade que $0 \leq f(x) \leq 1$ (usando ainda que f é limitada por ser definida num compacto).

Vamos descompor f da seguinte maneira. Fixe $N \in \mathbb{N}$ e denote $B_0 = X$. Para cada $n \geq 1$, seja

$$B_n = \left\{ x \in X : f(x) > \frac{n-1}{n} \right\}.$$

Temos $B_{n+1} \subseteq B_n$ e $B_{N+1} = \varnothing$. Defina

$$f_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, \quad x \in B_{n+1} \\ f(x) - \frac{n-1}{N}, \quad x \in B_n \backslash B_{n+1} \\ 0, \quad x \in X \backslash B_n \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \in C(X)$, vale

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Pela definição de f_n, temos

- $Nf_n(x) = 1$ em B_{n+1}.
- $\text{supp}(Nf_n) \subseteq \overline{B_n} \subseteq B_{n+1}$.
- $0 \leq Nf_n(x) \leq 1$.

Como cada B_n é aberto,

$$\mu(B_{n+1}) \leq \varphi(Nf_n) \leq \mu(B_{n-1})$$

Por linearidade,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_{n+1}) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi(N \cdot f_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_{n-1}) \tag{2}$$

É possível mostrar que

$$\mu(B_{n+1}) \leq \int_X Nf_n(x) d\mu(x) \leq \mu(B_n).$$

Basta observar que

$$\int_X Nf_n(x)d\mu(x) = N\int_{B_n\backslash B_{n+1}} f(x)d\mu(x) - (n-1)\mu(B_n\backslash B_{n+1}) + \mu(B_{n+1}).$$

Daí,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(B_{n+1}) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_X Nf_n(x)d\mu(x) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(B_n) \tag{3}$$

Juntando eqs. (2) and (3) podemos obter

$$\left|\varphi f \int_x f(x)d\mu(x)\right| \leq \frac{2\mu(x)}{N} \quad \forall N > 0.$$

Tomando $N \to \infty$,

$$\varphi = \int_X f(x)d\mu(x).$$

Para unicidade, considere $\mu' \in M(X)$ positiva e finita tal que

$$\varphi f = \int_X f(x)d\mu(x) \quad \forall f \in C(X).$$

Como μ, μ' são Borelianas, basta verificar que

$$\mu = \mu' \text{ em abertos.}$$

Considere B aberto e $f \in C(X)$ com $0 \leq f(x) \leq 1$ e $\operatorname{supp} f \subseteq B$. Então

$$\varphi f = \int_X f(x)d\mu'(x) = \int_B f(x)d\mu'(x) \leq \int_B d\mu'(x) = \mu'(B).$$

Tomando o supremo sobre f,

$$\mu(B) = \mu_*(B) = r_\varphi(B) \leq \mu'(B).$$

Recíprocamente, como μ é Boreliana e finita, μ é regular. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \subseteq B$ compacto tal que

$$\mu'(B) = \mu'(K) + \varepsilon$$

por definição de supremo.

Como $K \int (X\backslash B) = \varnothing$, considere $f \in C(X)$, com $0 \leq f(x) \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subseteq B$ e $f(x) = 1\ \forall x \in K$. Daí

$$\begin{aligned}
\mu'(B) &\leq \mu'(K) + \varepsilon \\
&= \int_X 1 d\mu'(x) + \varepsilon \\
&= \int_X f(x)d\mu!`(x) + \varepsilon \\
&\leq \int_X f(x)d\mu'(x) + \varepsilon \\
&= \varphi f + \varepsilon \\
&\leq \mu(B) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\mu'(B) \leq \mu(B)$. $\square$

Proposição 14.3. Sejam (X, d) espaço metrico compacto e $\varphi \in C(X)^*$. Então existem funcionais $\varphi^* \in C(X)^*$ positivos tais que

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

além disso,

$$\|\varphi\|_* = \varphi^+(1) + \varphi^-(1).$$

Teorema 14.4. Seja (X, d) espaço métrico compacto e $\varphi \in C(X)^*$. Então existe $\mu \in M(X)$ única tal que

$$\varphi f = \int_X f(x)\mu(x) \quad \forall f \in C(X).$$

Além disso,

$$\|\varphi\|_* = \|\mu\|_M \qquad (M(X) \cong C(X)^*).$$

Demostração. Seja $\varphi \in C(X)^*$. Pela proposição anterior, existem funcionais contínuos positivos $\varphi^\pm \in C(X)^*$ tais que $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Pelo teorema anterior existem medidas positivas $\mu_\pm \in M(X)$ tais que

$$\varphi^\pm f = \int_X f(x)\mu_\pm(x).$$

Defina

$$\mu = \mu_+ - \mu_-.$$

Então $\mu \in M(X)$ é tal que

$$\varphi f = \varphi^+ f - \varphi^- f = \int_X f(x)d\mu(x) - \int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d(\mu_+ - \mu_-)(x) = \int_X f(x)d\mu(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\varphi f| &= \left|\int_X f(x)d\mu(x)\right| \\
&\leq \int_X |f(x)|d|\mu|(x) \\
&\leq \|f\|_\infty |\mu|(X)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\varphi\| \leq \|\mu|(X) = \|\mu\|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\mu|(X) &\leq |\mu_+|(X) + |\mu_-|(X) \\
&= \varphi^+(1) + \varphi^-(1) \\
&= \|\varphi\|_* \\
\implies \|\varphi\|_* &= |\mu|(X) = \|\mu\|_M.
\end{aligned}$$

Para provar uncidade, seja $\mu' \in M(X)$ tal que

$$\int_X f(x)d\mu(X) = \varphi f = \int_X f(x)d\mu'(x).$$

Definindo

$$\nu = \mu - \mu'$$

obtemos

$$\int_X f(x)d\nu(x) = 0. \tag{4}$$

Definindo

$$\nu = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu) - \frac{1}{2}(|\nu| - \nu) = \nu^+ - \nu^-,$$

são medidas positivas. Definindo $\psi^\pm \in C(X)^*$,

$$\psi^\pm f = \int_X f(x)d\nu^\pm(x).$$

Por eq. (4) temos que

$$\psi^+ f = \psi^- f, \quad \forall f \in C(X).$$

Pela uncidade da medida $\nu^+ = \nu^-$. Então,

$$\nu = \nu^+ - \nu^- = 0 \implies \mu = \mu'.$$

□

15 Teorema de convexidade de Lyapunov

Definição. Uma medida com sinal $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ é ***não atômica*** se para todo $A \in \mathcal{A}$ com $|\mu|(A) > 0$ existe $B \in \mathcal{A}$ com $B \subseteq A$ e $|\mu|(B) < |\mu|(A)$.

Teorema 15.1. Sejam $\mu_1, \ldots, \mu_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ medidas com sinal não atômicas. Então a imagem de $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mu(A) = (\mu_1(A), \ldots, \mu_n(A))$$

é compacta e convexa. (Isso é, uma medida vetorial de dimensão finita não atômica tem imagem compacta e convexa.)

Observação 15.1. Relembre. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito. Considere $L_1(\mu)$ e $L_\infty(\mu)$. Onde $f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Temos que

$$f \in L_1 \text{ se } \|f\|_1 = \int |f| d\mu < \infty.$$

A norma em L_∞ é o ***supremo essencial***,

$$\|f\|_\infty = \inf\{t > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) = 0\}.$$

O dual de $L_1(\mu)$ é $L_\infty(\mu)$ pois asociamos a $f \in L_\infty(\mu)$ e $g \in L_1(\mu)$ o numero $f(g) = \int fgd\mu$. O dual de $L_\infty(\mu)$ são as medidas com sinal ***finitamente aditivas*** (na verdade não são medidas pois não são numeravelmente adivitas), ***absolutamente contínuas*** em relação a μ com a norma da variação limitada.

Existe uma correspondença entre funções contínuas $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ limitadas com funções contínuas na compactificação de Stone-Čech dos naturais $\beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Assim $\ell_\infty \approx C(\beta\mathbb{N})$. Assim, o seu dual pode ser interpretado mediante o teorema de representação da seção anterior.

Demostração. Defina

$$\nu = |\mu_1| + \ldots + |\mu_n|.$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda : L_\infty(0) &\to \mathbb{R}^n \\ f &\mapsto \left(\int f d\mu_1, \ldots, \int f\mu_n \right), \end{aligned}$$

que é um operador legal entre espaços de Banach.

Afirmação. Λ é fracamente* contínua.

Lembre que

Teorema 15.2 (Radon-Nikodym)**.** Como cada μ_i é absolutamente contínua em relação a ν, existem $f_i \in L_1(\nu)$ tais que

$$\int f d\mu_i = \int f f_i d\nu.$$

A afirmação segue de que ao tomar funcionais e evaluar em elementos de uma rede e simplesmente integrar, assim aplicamos o teorema de Radon-Nikodym.

Para aplicar Krein-Milman, considere o conjunto convexo e fracamente* fechado:

$$K = \{f \in L_\infty(\nu) : 0 \leq f \leq 1\}.$$

Exercício. De fato, K e fracamente* fechado. (Pegue uma rede convergente. Ao aplicar um funcional (integrar), se esse funcional não converge vai obter um conjunto de medida positiva onde os valores de f están por arriba de 1, assim comparando as integrais, vai obter uma contradição).

Por B-A, K é convexo e fracamente* compacto. Assim, $\Lambda(K)$ é convexo e compacto.

Afirmação. A imagem da nossa medida é $\Lambda(K)$.

($\subseteq$). Fixe $A \in \mathcal{A}$. Então,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= (\mu_1(A), \ldots, \mu_n(A)) \\ &= \left(\int \chi_A d\mu_1, \ldots, \int \chi_A d\mu_n \right) \\ &= \Lambda(\chi_A)\end{aligned}$$

e $\chi_A \in K$.

($\supseteq$). Fixe $\xi \in \Lambda(K)$ e considere

$$K_\xi = \Lambda^{-1}(\{\xi\}) \cap K.$$

Como K_ξ é convexo e fraco*-compacto, existem pontos extremos, ie. $E(K_\xi) \neq \varnothing$.

Seja $f \in E(K_\xi)$ e vamos mostrar que $f = \chi_A$ para algum $A \in \mathcal{A}$. Caso contrário, existe $A \in \mathcal{A}$ com $\nu(A) > 0$ e $r > 0$ tal que

$$r \leq f(x) \leq 1 - r \quad \forall x \in A.$$

Vamos mostrar que é possível "perturbar" f em A. Defina

$$X = L_\infty(A, \mu) \subseteq L_\infty(\mu).$$

Como ν é não atômica (pois á uma soma de medidas não atômicas), temos que $\dim(X) = \infty$. Como $\operatorname{codim}(\ker \Lambda) < \infty$, temos que $X \cap \ker \Lambda \neq \varnothing$. Pegue $g \in X \cap \ker \Lambda \backslash \{0\}$ com

$$\|g\|_\infty < r.$$

Logo $f \pm g \in K_\xi \backslash \{f\}$. Como

$$f = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}(f-g),$$

f não está em $E(K_\xi)$. □

Teorema 15.3 (Markov-Kakutani). Seja X um espaço de Banach, $K \subseteq X$ convexo e (fracamente) compacto. Considere $\mathcal{T}$ uma família de mapas (w) contínuos $K \to K$ tais que

1. $T \in \mathcal{T}$ é ***afim***, ie.

$$T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda Tx + (1-\lambda)Ty \quad \forall x, y \in K \; \forall \lambda \in [0,1].$$

2. $TS = ST \quad \forall S, T \in \mathcal{T}$.

Então existe $x \in K$ tal que $Tx = x$ para toda $T \in \mathcal{T}$.

Demostração. Seja $T \in \mathcal{T}$. Vamos mostrar que T tem um ponto fixo. Defina

$$\begin{aligned}A &= \{(x,x) : x \in K\} \\ B &= \{(x,Tx) : x \in K\}\end{aligned}$$

Note que T tem um ponto fixo se e só se $A \cap B \neq \varnothing$. Suponha $A \cap B = \varnothing$. Considere $X \times X$ com a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Como T é afim, B é convexo. A também, assim, como T é contínua, A e B são compactos. Por Hahn-Banach, existe $f \in (X \times X)^*$ e $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x, x) < \alpha < \beta < f(x, Tx) \quad \forall x \in K.$$

Logo,

$$f(x, Tx) - f(x, x) > \beta - \alpha \quad \forall x \in K.$$

Que pode ser escrito como

$$f(0, Tx) - f(0, x) > \beta - \alpha \quad \forall x \in K.$$

Logo, para toda n e para toda $x \in K$, temos

$$f(0, T^n(x)) - f(0, T^{n-1}(x)) > \beta - \alpha.$$

Usando uma soma telescôpica, obtemos que

$$f(0, T^n x) - f(0, x) > n(\beta - \alpha)$$

ou seja, que f não pode ser limitado em K. Mais f é contínuo em K compacto.

Para o caso de muitos funcionais, consideramos para todo $T \in \mathcal{T}$

$$K_T = \{x \in K : Tx = x\}.$$

que são compactos e não vazíos. Basta mostrar que a interseção deles e não vazía. Por compacidade, basta mostrar que cualquer quantidade finita deles tem interseção não vazía, ie.

$$\bigcap_{T \in S} K_T \neq \varnothing \quad \forall S \subseteq \mathcal{T} \text{ finito.}$$

Pegue $S = \{T_1, \ldots, T_n\}$. Fazemos assim:

$$\begin{aligned} &\text{Aplica o teorema a } T_1 : K \to K. \\ &\text{Aplica o teorema a } T_2 : K_T \to K_T \quad T_1 T_2 = T_2 T_1. \\ &\vdots \\ \varnothing = ((K_{T_1})) \subseteq \bigcap K_T. & \end{aligned}$$

$\square$

16 Grupos amenos

Definição. Uma ***média*** em um conjunto X é um elemento $f \in \ell_\infty(X)^*$ tal que f é ***positivo*** ($F = (F_x)_{x\in X} \in \ell_\infty(X)$ com $F_x \geq 0\ \forall x \implies f(F) \geq 0$) e $\|f\| = 1$.

Exercício. f é simplesmente uma ***medida finitamente aditiva de probablidade*** em X. μ medida de probabilidade de X, $\mu(F) = \int F d\mu$.

Definição.

1. Se G é um grupo, G age em $\ell_\infty(G)$ com
$$g \cdot a(h) = a(g^{-1}h),$$
$\forall a \in \ell_\infty(G)\ \forall h \in G$.

2. Uma média $f \in \ell_\infty(G)^*$ é ***invariante*** se
$$f(a) = f(g \cdot a) \quad \forall a \in \ell_\infty(G)\ \forall g \in G.$$
Issto é,
$$f(\chi_A) = f(g(\chi_A)) = f(\chi_{gA}).$$

3. Um grupo G é ***ameno*** se existe uma média invariante f em G.

Exemplos.

1. Grupos finitos com a medida de contágem promediada.

2. $\mathbb{F}_n$ não é ameno para $n > 1$.

   Afirmação. $\mathbb{F}_2$ não é ameno.

   Suponha $\mathbb{F}_2 = \langle a, b\rangle$. Para cada $c \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, $\mathbb{F}_2^c = \{x \in \mathbb{F}_2 : x = c\ldots \text{(começa com } c)\}$. Note que
$$a^{-1}\mathbb{F}_2^a = \mathbb{F}_2^a \sqcup \mathbb{F}_2^b \sqcup \mathbb{F}_2^{b^{-1}} \sqcup \{e\}.$$
   Logo,
$$\mu(\mathbb{F}_2^b \sqcup \mathbb{F}_2^{b^{-1}} \sqcup \{e\}) = 0.$$
   de forma análoga
$$\mu(\mathbb{F}_2^a \sqcup \mathbb{F}_2^{a^{-1}}) = 0,$$
   mais então $\mu(\mathbb{F}_2) = 0$, que não é possível.

3. $\mathbb{Z}$ é ameno.

Teorema 16.1. Grupos abelianos são amenos.

Demostração. Seja $M(G) \subseteq \ell_\infty(G)^*$ o espaço dos mas médias.

Exercício. $M(G)$ é convexo e fracamente* compacto.

Para aplicar o teorema de Markov-Kakutani precisamos uma família de operadores, cujo ponto fixo será a média invariante. Defina para cada $g \in G$, o operador $T_g : G \to G$ como

$$T_g f = f(g \cdot -),$$

Exercício. T_g está bem definido, é fraco* contínuo, afim e $(T_g)_{g \in G}$ comutam.

Por Markov-Kakutani, existe uma média $f \in M(G)$ tal que

$$T_g f = f \quad \forall g \in G.$$

Exercício. f é invariante.

□

17 Espaços de Hilbert

Definição. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$$

é um produto interno se

1. $\langle x, x \rangle \geq 0 \; \forall x \in X$.
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
4. $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \; \forall \alpha \in \mathbb{K} \; \forall x, y, z \in \mathbb{K}$.

Exemplos.

1. $\mathbb{R}^n$. Se $(x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ com o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
2. $\mathbb{C}^n$. Se $(x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ com o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.
3. ℓ_2 com $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}$ que é finito por Hölder.
4. $C([0, 1])$ com $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g}$.
5. L_2 com $\int f \bar{g}$.

Definição.

1. Em um espaço $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno, dois elementos $x, y \in X$ são ***ortogonais*** se $\langle x, y \rangle = 0$ e escrevemos $x \perp y$.
2. Definimos $\| \; \| : X \to \mathbb{K}$ como

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Proposição 17.1 (Pitágoras)**.** Se $x \perp y$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Proposição 17.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Para todos $x, y \in X$, temos

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Mais ainda, a igualdade acontece se e só se x e y forem linearmente dependentes.

Demostração. Consideramos a projeção de x em y. Supondo que $y \neq 0$, temos que

$$y \perp \left(x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right) y.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \left\| x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \right\|^2 \\
&= \left\| x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\|^2 + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\|y\|^2 \\
&\geq \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 17.3. $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ é uma norma.

Observação 17.1.

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ é contínua.
2. Se $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ e $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ foram espaços de produto interno, $X \times Y$ também e munido de
$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_{X \times Y} = \langle x, x \rangle_X + \langle y, x \rangle_Y.$$
E de fato, a norma induzida por esse produto interno é $\|(x, y)\| = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2}$.

Definição. Um espaço de prouto interno $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert se $(X, \| \, \|_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ for Banach.

Exercício 17.0.1. Formule e prove o teorema de completação adequado para espaços de produto interno.

Pergunta. Quando um espaço normado é um espaço de produto interno disforçado? Issto é, quando existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em X tal que $\| \, \| = \| \, \|_{\langle \cdot, \cdot, \rangle}$?

Teorema 17.4 (Lei do paralelogramo)**.** Uma norma $\| \, \|$ em um espaço vetorial X é proveniente de um produto interno se e só se

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X.$$

Demostração. ($\Longrightarrow$). Escreva.

($\Longleftarrow$). Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, defina

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right).$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, defina

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

□

Definição. Seja $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espaço de produto interno.

1. Um subconjunto $S \subseteq X$ é ***ortogonal*** se para todos $x, y \in S$ distintos, $x \perp y$.
2. Um subconjunto $S \subseteq X$ é ***ortonormal*** se for ortogonal e $S \subseteq \partial B_X$.

Proposição 17.5. Se $S \subseteq X$ é ortogonal (ortonormal), então existe $S' \subseteq X$ ortogonal (ortonormal) maximal tal que $S \subseteq S'$.

Demostração. Zorn:

$$\mathbb{P} = \{S' \subseteq X : S' \text{ é ortogonal e } S \subseteq S'\}.$$

□

Exercício. Seja $S \subseteq X$ ortogonal. S é maximal se e só se para todo $x \in X$ vale

$$\forall y \in S, x \perp y \implies x = 0.$$

17.1 Desigualdade de Bessel

Provaremos que se $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço de produto interno e $(x_i)_{i\in I} \subseteq X$ um conjunto ortogonal, para todo $x \in X$,

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Definição. Seja $(X, \|\ \|)$ um espaço normado, $(x_i)_{i\in I} \subseteq X$ e $x \in X$. Dizemos que $(x_i)_{i\in I}$ é ***somável a*** x e escrevemos $\sum_{i\in I} x_i = x$ se $\forall \varepsilon > 0$ existe $I_0 \subseteq I$ finito tal que para todo $J \subseteq I$ finito com $I_0 \subseteq J$ temos

$$\left\| x - \sum_{i\in J} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Ou seja, se a rede

$$\left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{J\in\mathcal{F}}$$

com $\mathcal{F} = \{J \subseteq I : I \text{ finito}\}$ converge.

Observação 17.2. No caso dos numeros reais podemos definir

$$x = \sup_{\substack{F \subseteq I \\ F \text{ finito}}} \sum_{i \in F} x_i.$$

Exercício.

1. Se $\sum_{i \in I} x_i = x$ e $\sum_{i \in I} y_i = y$ então

$$\sum_{i \in I} \alpha x_i + y_i = \alpha x + y.$$

2. Seja $(x_n)_n \subseteq X$ uma sequência, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Considere $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ existe mais $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ não existe. Considere $I_k = \{2j : j \leq k\}$: resulta que $\lim_{k \to \infty} \sum_{i \in I_k} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$.

3. Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ existe, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

4. O conjunto

$$\{1, \sqrt{2} \cos n\pi x, \sqrt{2} \operatorname{sen} n\pi x\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é um ***sistema ortonormal maximal*** (um conjunto ortonormal maximal) em $L^2(0,1)$.

Proposição 17.6. Se $(x_i)_{i \in I}$ é somável, então

$$|\{i \in I : x_i \neq 0\}| \leq \aleph_0.$$

Demostração. Note que

$$\{i \in I : x_i \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i \in I : \|x_n\| > 1/n\}.$$

Vamos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$|\{i \in I : \|x_i\| > \varepsilon\}| < \infty.$$

Como $(x_i)_{i \in I}$ é somável, pegue $x \in X$ com $x = \sum_{i \in I} x_i$. Pegue $I_0 \subseteq I$ finito tal que para todo $I_1 \subseteq I_0$ finito com $I_1 \supseteq I_0$,

$$\left\| x - \sum_{i \in I_1} x_i \right\| < \varepsilon/2.$$

Logo, se $i_0 \notin I_0$,

$$\|x_{i_0}\| \leq \left\| x - \sum_{i \in I_0 \cup \{i_0\}} x_i \right\| + \left\| x - \sum_{i \in I_0} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Logo, $\{i \in I : \|x_i\| > \varepsilon\} \subseteq I_0$. $\square$

Teorema 17.7 (Bessel). Sejam X um espaço de Hilbert e $(x_i)_{i\in I} \subseteq X$ um subconjunto ortonormal.

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in X.$$

Demostração. Exercício. É suficiente mostrar que

$$\sum_{i\in J} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall J \subseteq I \text{ finito.}$$

Exercício. Seja $a > 0$ e $(x_i)_{i\in I} \subseteq [0, \infty)$. Se $\sum_{i\in J} x_i \leq a$ para todo $J \subseteq I$ finito, então $(x_i)_{i\in I}$ é somável e $\sum_{i\in I} x_i \leq a$.

Demostração. Considere

$$x = \sup_{J\subseteq \mathcal{F}} \sum_{i\in J} x_i \leq a$$

onde $\mathcal{F} = \{J \subseteq I : J \text{ é finito}\}$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $I_0 \in \mathcal{F}$ tal que

$$x - \varepsilon < \sum_{i\in I_0} x_i \leq x.$$

Mais ainda, se $J \supseteq I_0$ é finito, como $\left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{J\in\mathcal{F}}$ é uma rede crescente e limitada,

$$x - \varepsilon < \sum_{i\in I_0} x_i \leq \sum_{i\in J} x_i \leq x \implies x - \sum_{i\in J} x_i < \varepsilon.$$

□

Fixe $J \subseteq I$ finito.

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i\in J} \langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i\in J} \langle x, x_j\rangle x_i \right\|^2 &= \langle x, x\rangle - \left\langle x, \sum_{i\in J} \langle x, x_j\rangle x_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i\in J} \langle x, x_i\rangle x_i, x \right\rangle + \left\langle \sum_{i\in J} \langle x, x_i\rangle x_i, \sum_{i\in J} \langle x_i, x\rangle x \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i\in J} \overline{\langle x, x_i\rangle} \langle x, x_i\rangle - \sum_{i\in J} \langle x, x_i\rangle \langle x_i, x\rangle + \sum_{i\in J}\sum_{j\in J} \langle x, x_i\rangle \overline{\langle x, x_j\rangle} \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i\in J} |\langle x, x_i\rangle|^2 + \sum_{i\in J} |\langle x, x_i\rangle|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i\in J} |\langle x, x_i\rangle|^2.
\end{aligned}$$

□

17.2 Igualdade de Parseval

Agora vamos estudar em qué casos tem a igualdade.

Teorema 17.8. Seja X um espaço de Hilbert e $S \subseteq X$ ortonormal. Então

1. $\sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y$ existe para todo $x \in X$.
2. São equivalentes:

$$\begin{aligned} S \text{ é maximal } &\iff \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y = x \quad \forall x \in X \\ &\iff \overline{\operatorname{span}}\{S\} = X \\ &\iff \|x\|^2 = \sum_{y \in S} |\langle x, y \rangle|^2 \quad \forall x \in X \qquad \text{(Parseval)} \end{aligned}$$

Demostração.

1.

   Exercício (Critério de Cauchy). É suficiente mostrar que $\forall \varepsilon > 0$ existe S_0 tal que para todo $S_1 \subseteq S \backslash S_0$ finito temos que

$$\left\| \sum_{y \in S_1} \langle x, y \rangle y \right\| < \varepsilon$$

   Nesse caso, por Pitágoras,

$$\left\| \sum_{y \in S_1} \langle x, y \rangle y \right\|^2 = \sum_{y \in S_1} |\langle x, y \rangle|^2.$$

   Por Bessel,

$$(|\langle x, y \rangle|^2)_{y \in S}$$

   e uma família somável, logo o critério de Cauchy vale.

2. Suponha S maximal. Temos

$$x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \perp S$$

   Logo, pelo exercício passado, $x = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y$.

   Para a seguinte, note que se S não é maximal, existe $y_0 \in \partial B_X$ tal que $y \perp S$. Logo, $y_0 \in \perp \overline{\operatorname{span}}\{s\}$, e logo $y_0 \notin \overline{\operatorname{span}}\{s\}$.

   Em particular,

$$1 = \|y_0\|^2 \neq \sum_{y \in S} |\langle y_0, y \rangle|^2 = 0.$$

Note que se
$$x = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y$$
então
$$\|x\|^2 = \sum_{y \in S} |\langle x, y \rangle|^2.$$

□

Proposição 17.9. Se $S \subseteq X$ é ortonormal, então
$$\|x - y\| = \sqrt{2} \quad \forall x, y \in S \text{ distintos.}$$
Logo se X é separável, S é enumerável.

Corolário 17.10. Sejam H e H' espaços de Hilbert e $S \subseteq H$, $S' \subseteq H'$ ortonormais maximais. Seja $j : S \to S'$ uma injeção. Então $T : H \to H'$ dado por
$$T\left(\sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y\right) = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle jy$$
é uma isometria. Se j for sobrejetiva, T é uma isometria sobrejetiva.

Demostração. Escreva. □

Corolário 17.11. Todo espaço de Hilbert é da forma $\ell_2(S)$ para algúm conjunto S, onde $|S|$ é a cardinalidadde de um subconjunto ortonormal maximal de H.

17.3 Teorema de representação

Definição. Seja H um espaço de Hilbert. Definimos o ***conjugado de*** H, denotado $\overline{H}$ como sendo H com a ação de H e produto
$$\lambda . x = \bar{\lambda} x \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \; \forall x \in H.$$
Definimos o produto interno
$$\langle x, y \rangle_{\overline{H}} = \langle y, x \rangle_H .$$

Proposição 17.12. Seja H um espaço de Hilbert. Então o mapa
$$\phi : \overline{H} \to H^*$$
dado por
$$(\phi x) y = \langle y, x \rangle_H \quad \forall x, y \in \overline{H}$$
é uma isometria.

Demostração. (ϕ é linear).

$$[content...]$$

($\|\phi x\| \leq \|x\| \; \forall x \in X$). Por Cauchy-Schwarz.

($\|\phi x\| \geq \|x\| \; \forall x \in X$). Quem é de norma 1?

(ϕ é injetiva). $\langle \cdot, y_1 \rangle = \langle \dot{;} y_2 \rangle \implies \|x - y\| = 0$.

(ϕ é sobrejetiva). Seja $f \in H^*$. Por Zorn, pegue $S \subseteq H$ ortonormal maximal. Defina

$$x = \sum_{y \in S} \overline{f(y)} y.$$

Se x está bem definido, então

$$\phi(x) = f,$$

pois

$$\begin{aligned}
\phi(x)(y) &= \left\langle z, \sum_{y \in S} \overline{f(y)} y \right\rangle_H \\
&= \sum_{y \in S} f(y) \langle z, y \rangle_H
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
f(z) &= f\left(\sum_{y \in S} \langle z, y \rangle y \right) \\
&= \sum_{y \in S} f(y) \langle z, y \rangle.
\end{aligned}$$

Para ver que de fato trata-se de uma família somável, considere $S_0 \subseteq S$ finito, então

$$\begin{aligned}
\|f\| &\geq \left| \frac{f\left(\sum_{y \in S_0} \overline{f(y)} y \right)}{\left\| \sum_{y \in S_0} \overline{f(y)} y \right\|} \right| \\
&= \frac{\sum_{y \in S_0} |g(y)|^2}{\left(\sum_{y \in S_0} |f(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\sum_{y \in S_0} |f(y)|^2 \leq \|gf\| \right).$$

$\square$

Corolário 17.13. H^* é Hilbert.

$$\langle f, g\rangle_{H^*} = \langle \phi^{-1}(f), \phi^{-1}(g)\rangle_{\overline{H}} = \langle \phi^{-1}(g), \phi^{-1}(f)\rangle_H.$$

Ou seja

$$\langle\langle\cdot, x\rangle, \langle\cdot, y\rangle_{H^*}\rangle = \langle y, x\rangle_H.$$

Corolário 17.14. Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Demostração. Queremos mostrar que

$$J : H \to H^{**}$$

é sobrejetivo. Fixe isometrias sobrejetivas

$$\phi : \overline{H} \to H^*, \quad \psi : \overline{H^*} \to H^*.$$

Defina

$$\overline{\phi} : H \to H^*$$

como

$$\overline{\phi}(x) = \phi(x) \quad \forall x \in H.$$

Queremos mostrar que $J = \psi \circ \overline{\phi}$.

Fixe $x \in H$, $f \in H^*$ e $y \in H$ com $f = \langle\cdot, y\rangle_H$. Logo

$$\begin{aligned}
\psi(\overline{\phi}(x))(f) &= \langle f, \langle\cdot, x\rangle_H\rangle_{H^*} \\
&= \langle\langle\cdot, y\rangle_H, \langle\cdot, x\rangle_H\rangle_{H^*} \\
&= \langle x, y\rangle_H \\
&= f(x) \\
&= J(x)(f).
\end{aligned}$$

□

17.4 Exemplo e conjuntos ortonormais em L_2

Proposição 17.15.

$$\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

é ortonormal maximal em $L_2[0, 2\pi]$.

Demostração. Só veremos maximalidade. Seja $f \in L_2[0, 2\pi]$ tal que

$$f \perp S.$$

Vamos mostrar que $f = 0$.

Primero sustituimos f por uma função contínua. Defina

$$G(x) = \int_0^x f d\mu.$$

Logo, ela é absolutamente contínua, assim $G' = f$. Daí,

$$(G+k)' \perp S \quad \forall k.$$

Vamos computar

$$\begin{aligned} 0 &= \int (G+k)' e^{int} d\mu \\ &= G(2\pi) - G(0) - \int_0^{2\pi} (G+k)(in) e^{int} d\mu \\ &= -\int_0^{2\pi} (G+k)(in) e^{int} d\mu \end{aligned}$$

assim

$$\int (G+k) e^{int} d\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

Escolha $k \in \mathbb{C}$ tal que

$$H = G + k \perp S.$$

Como H é contínuo, pelo teorema de Weierstrass, para todo $\varepsilon > 0$ existe $T \in \operatorname{span}\{s\}$ tal que

$$\sup_{t \in [0,1]} |H(t) - T(t)| < \varepsilon.$$

Logo $H \in \overline{\operatorname{span}}\{s\}$. Como $H \perp S$, $H = 0$. Mais como $H = f$, então $f = 0$. $\square$

17.5 Projeções em espaços de Hilbert

Definição. Um espaço de Banach X é ***estritamente convexo*** se para todo $x, y \in \partial B_X$,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Exemplos.

1. ℓ_p para $p \in (1, \infty)$ é estritamente convexo.
2. Se X for Hilbert, sabemos que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = 2\left\| \frac{x}{2} \right\|^2 + 2\left\| \frac{y}{2} \right\|^2 = 1$$

para $x, y \in \partial B_X$ distintos. Logo,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = 1 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 < 1.$$

Proposição 17.16. Seja H um espaço de Hilbert e $H' \subseteq H$ um subespaço fechado. Para todo $x \in H$, existe um único $y \in H'$ tal que

$$d(x, H') = \|x - y\|.$$

Mais ainda, $x - y \perp H'$.

Demostração. Fixe $x \in H$. Como H é reflexivo, y existe. Suponha que $z \neq y$ em H' tal que

$$\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, H).$$

Então

$$\left\| x - \frac{y+z}{2} \right\| = \left\| \frac{x - y + x - z}{2} \right\| < d(x, H').$$

Agora vejamos que $x - y \perp H'$. Suponha que existe $h \in H' \backslash \{0\}$ que não seja ortogonal, ie. $\langle x - y, h \rangle \neq 0$.

Sem perda de generalidade, assuma que

$$\langle x - y, h \rangle > 0.$$

Para contradizer que y minimza, buscamos un multiplo de h que faça uma menor distancia. Pegue $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|x - y + \lambda h\|^2 = \|x - y\|^2 + 2\langle x - y, \lambda h \rangle + |\lambda|^2 \|h\|^2.$$

Pegue $\lambda < 0$ tal que

$$2\langle x - y, \lambda h \rangle + |\lambda|^2 \|h\|^2 > \|x - \lambda h\|^2 - \|x - y\|^2.$$

$\square$

Definição. O resultado antérior nos dá um mapa

$$\begin{aligned} P : H &\to H' \\ x &\mapsto y_x \end{aligned}$$

chamado a ***projeção de H sobre H'*** tal que

1. $\|x - P(x)\| = d(x, H')$.
2. $x - P(x) \perp H'$.

Proposição 17.17. Seja H Hilbert, $H' \subseteq H$ fechado, $S \subseteq H'$ ortonormal maximal. Então

$$P(x) = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \quad \forall x \in H.$$

Em particular, P é linear é $\|P\| = 1$ (o não ser que $H' = 0$, caso em que a norma é 0).

Demostração. Note que

$$H' \oplus (H')^{\perp} = H$$

Onde

$$(H')^{\perp} = \{x \in H : x \perp H'\}.$$

Então, como

$$P(x), \sum_{y \in S} \langle y, x \rangle y \in H'.$$

Mais ainda,

$$x - P(x), x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \in (H')^{\perp}.$$

Como

$$\begin{aligned} x &= x - P(x) + P(x) \\ x &= x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y + \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y. \end{aligned}$$

Então, para todo $y \in H'$,

$$\begin{aligned} \langle x - Px + Px, y \rangle &= \left\langle x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y + \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle \\ \implies \langle x - Px, y \rangle + \langle Px, y \rangle &= \left\langle x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle + \left\langle \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle \\ \implies \langle Px, y \rangle &= \left\langle \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle \\ \implies \left\langle Px - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle &= 0 \\ \implies Px &= \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \end{aligned}$$

□

Corolário 17.18. Seja H um espaço de Hilbert e $H' \subset H$ um subespaço fechado. Então H' é complementado em H.

De fato,

Teorema 17.19 (Lindestrauss-Tzafini, 71)**.** Se todo subespaço fechado de um espaço de Banach X for complementado, então X é isomorfo a um espaço de Hilbert.

Teorema 17.20. c_0 não é complementado em ℓ_∞.

Definição. Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma famíla de subconjuntos de um conjunto X. Dizemos que $(A_i)_{i\in I}$ é ***quase-disjunto*** se

$$|A_i \cap A_j| < \infty \qquad \forall i, j \in I \text{ disjuntos}.$$

Proposição 17.21. Existe uma família $(A_i)_{i\in I}$ quase-disjunta de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tal que $|I| = 2^{\aleph_0}$.

Demostração. Para cada $i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ escolha $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $q_n^i \to i$.

Fixe uma bijeção $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ e defina

$$A_i = \{\varphi(q_n^i) : n \in \mathbb{N}\} \qquad \forall i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

$\square$

Proposição 17.22. Seja $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ um operador limitado tal que $T|_{c_0} = 0$. Então existe $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $T|_{\ell_\infty(A)} = 0$ (extendedo com zeros para ver $\ell_\infty(A)$ como subconjunto de ℓ_∞).

Demostração. Seja $(A_i)_{\imath\in I}$ uma família quase-disjunta de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tal que $|I| = 2^{\aleph_0}$.

Afirmação. Existe $i \in I$ tal que $T|_{\ell_\infty(A)} = 0$.

Para cada $i \in I$, pegue $x_i \in \partial B_{\ell_\infty(A_i)}$ tal que

$$T(x_i) \neq 0.$$

Como $|I| = 2^{\aleph_0}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\{i \in I : e_n^*(Tx_i) \neq 0\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Sem perda de generalidade, assumamos que

$$\{i \in I : e_n^*(Tx_i) > 0\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Mais ainda, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\{i \in I : e_n^*(Tx_i) > \delta\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Se $F \subseteq J$ for finito,

$$\begin{aligned}
\left\| T\left(\sum_{i\in F} x_i\right)\right\| &= \left\|\sum_{i\in F} T(x_i)\right\| \\
&\geq \sum_{i\in F} e_n^*(Tx_i) \\
&\geq |F|\delta
\end{aligned}$$

Como $(A_i)_{i\in I}$ çe quase-disjunto, podemos escrever

$$\sum_{i\in F} x_i = x + y$$

onde

$$|\operatorname{supp} x| < \infty \quad \text{e} \quad \|y\| \leq 1$$

Logo

$$\left\| T\left(\sum_{i\in I} x_i\right) \right\| = \|Ty\| \leq \|T\|$$

Alesindo. □

Prova de que c_0 não é complementado. Suponha que existe uma projecção $p : \ell_\infty \to c_0$ (limitada). Logo, $(\operatorname{Id} - p)|_{c_0} \equiv 0$. Pela proposição, existe $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que

$$(\operatorname{Id} - p)_{\ell_\infty(A)} = 0,$$

assim $p|_{\ell_\infty(A)} = \operatorname{Id}_{\ell_\infty(A)}$, que é absurdo. □

18 Bases de Schauder

Definição. Seja X um espaço de Banach e $(x_n)_n \subseteq X$. Dizemos que $(x_n)_n$ é uma ***base de Schauder*** de X se para todo $x \in X$ existe uma única sequência $(\alpha_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Exemplos.

1. (e_n) é uma base de ℓ_p para todo $p \in [1, \infty)$, e de c_0.
2. Para ℓ_∞ não, pois todo espaço com base é separável.
3. Existem espaços de Banach separáveis sem base (Enflo, '73).

Teorema 18.1. Seja X Banach e $(x_n) \subseteq X$. São equivalentes

1. (x_n) é uma base de X.
2. Existe $(x_n^*) \subseteq X^*$ tal que

$$x_n^*(x_m) = \delta_{nm} \qquad \text{e} \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n \quad \forall x \in X.$$

Demostração. $(2 \implies 1)$. Só baste ver unicidade. Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n,$$

então

$$\alpha_k = x^* \left(\sum \alpha_n x_n \right) = x^* \left(\sum \beta_n x_n \right) = \beta_k$$

$(1 \implies 2)$. Note segue da unicidade da representação da base que existe uma sequência $(x_n^*)_n$ de funções lineares $x_n^* : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tais que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_i^*(x) x \qquad \forall x \in X.$$

Resta mostrar que $x_n^* \in X^*$ é contínuo para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina para cada $N \in \mathbb{N}$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x) x_n.$$

Como

$$x_n^*(x) x_n = S_n(x) - S_{n-1}(x),$$

basta mostrar que cada S_n é contínuo.

Defina uma norma $||| \ |||$ em X como

$$|||x||| = \sup_n \|S_n(x)\|.$$

Note que

1. Como $S_n(x) \to x$, $|||x||| < \infty$.
2. $\|x\| \leq |||x|||$ para todo $x \in X$.
3. Se $(X, ||| \ |||)$ é Banach, $||| \ ||| \sim \| \ \|$ e a prova segue.

Afirmação. $(X, ||| \ |||)$ é Banach.

Seja $(y_n) \subset X$ de Cauchy para $||| \ |||$. Como $\| \ \| < ||| \ |||$, (y_n) é Cauchy para $\| \ \|$. Defina

$$y = \| \cdot \| - \lim_n y_n.$$

Queremos mostrar que $y_n \xrightarrow{||| \ |||} y$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina

$$z_k = \| \cdot \| - \lim_n S_k(y_n).$$

Afirmação. $z_k \xrightarrow{|||\,|||}$.

Fixe $\varepsilon > 0$. Como (y_n) são $\|\!| \ \|\!|$-Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\!|y_n - y_m\|\!| < \varepsilon$ para todo $n, m > n_0$.

Fixe $m = n_0$. Pegue $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_k(y_m) - y_m\| < \varepsilon$ para toda $k > k_0$. Então,

$$\begin{aligned}\|z_k - y\| &= \lim_n \|S_k(y_n) - y_n\| \\ &\leq \lim_n \|S_k(y_n) - S_k(y_n)\| + \|S_k(y_n) - y_m\| + \lim_n \|y_m - y_n\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\end{aligned}$$

Afirmação. Para todo $n \geq k$, temos

$$S_k(z_m) = z_k.$$

Como operadores lineares são contínuos em subespaços de dimensão finita, temos

$$\begin{aligned} z_k &= \| \ \| - \lim_n S_k(y_n) \\ &= \| \ \| - \lim_n S_k(S_m(y_k)) \\ &= \| \ \| - \lim_n S_k|_{\operatorname{span}\{x_i : i \leq n\}} \\ &= S_k(z_m)\end{aligned}$$

Em conclusão, $S_k(y) = z_k$, ie. temos unicidade.

Por fim,

$$\begin{aligned}\|\!|y - y_n\|\!| &= \sup_k \|S_k(y) - S_k(y_n)\| \\ &= \sup_k \|z_k - S_k(y_n)\| \\ &= \sup_k \limsup_m \|S_k(y_n) - S_k(y_n)\| \\ &\leq \limsup_n \sup_k \|S_k(y_m) - S_k(y_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

$\square$

Observação 18.1.

1. $\sup_n \|S_n\| < \infty$
2. $k = \sup_n \|S_n\|$ é a ***constante básica*** da base (x_n).
3. Se $k = 1$, dizemos que a base (x_n) e ***monótona***.

Definição. Uma sequência $(x_n) \subseteq X$ é ***básica*** se (x_n) for de Schauder para $\overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Proposição 18.2. $(x_n) \subseteq X \backslash \{0\}$ é básica se e só se existe $L \geq 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \leq L \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n \right\|$$

para todo $k \geq m$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

Demostração.

$(\implies)$ Segue.

$(\impliedby)$ Defina

$$Y = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $S_n : Y \to Y$ como

$$S_n \left(\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\min\{n,k\}} \alpha_n x_n.$$

Por hipótese, temos que

$$\|S_n\| \leq L \quad \forall m.$$

Podemos então estender cada S_n para $\overline{Y}$.

Note:

1. S_n é limitado.
2. $\dim \operatorname{img} S_n = n \; \forall n \in N$.
3. $S_n \circ S_m = S_m \circ S_n = S_{\min\{m,n\}}$.
4. $S_n(x) \to x \; \forall x \in X$.

Esas observações implicam que (x_n) é base de $\overline{Y}$. □

Teorema 18.3. Sejam $(x_n) \subset X$ e $(y_n) \subset Y$ básicas. São equivalentes

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge em X se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ em Y.
2. Existe um isomorfismo

   $$T : \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\text{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

   tal que

   $$T x_n = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostração. $(\impliedby)$. Segue

($\implies$). Por 1, T está bem definido e é uma bijeção. Falta mostrar que T e T^{-1} são contínuas. Sejam $(z_n) \subset \operatorname{dom} T$ tal que $z_n \to z$ e $Tz_n \to w$. Queremos mostrar que $Tz = w$. Se $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} y_j^*(w) &= \lim_n y_k^*(Tz_n) \\ &\lim_n x_j^*(z_n) \\ &= x_j^*(z) \\ &= y_j^*(Tz) \end{aligned}$$

□

Definição. Os funcionais (x_n^*) são os ***funcionais biortogonais*** de (x_n).

Corolário 18.4. Se $(x_n), (y_n)$ são basicas, existe $L > 0$ tal que

$$\frac{1}{L}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\| \leq L\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right\|$$

para todos n e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

18.1 Construindo sequências basicas

Teorema 18.5. Se $\dim(X) = \infty$, existe uma sequência básica em X.

Teorema 18.6. Se $S \subseteq X$ tal que $0 \notin \overline{S}^{\|\ \|}$ e $0 \in \overline{S}^w$ então existe uma sequência básica em S.

Lema 18.7. Seja X Banach, $E \subseteq X^*$ um subespaço de dimensão finita e $S \subseteq X^*$ tal que tal que $0 \notin \overline{S}^{\|\ \|}$ e $0 \in \overline{S}^w$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $x *^{\in} X^*$ tal que

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq (1-\varepsilon)\|e^*\| \quad \forall e^* \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Demostração. Fixe $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$. Como $\dim E < \infty$, por compacidad a bola é totalmente limitada, assim existe $e_1^*, \ldots, e_n^* \in \partial B_E$ tal que para cualquer $e^* \in \partial B_E$ existe $c \leq n$ tal que $\|e^* - e_i^*\| < \delta$.

Para cada $i \leq n$ pegue $e_i \in X$ tal que

$$e_i^*(e_i) > 1 - \delta.$$

Como $0 \in 0 \in \overline{S}^w$, existe $x^* \in S$ tal que

$$|x^*(e_i)| < \delta \quad \forall i \leq n.$$

Vamos estimar

$$\|e^* + \lambda x^*\|.$$

Fixe $e^* \in \partial B_E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina $\alpha = \inf_{y^* \in \overline{S}} \|y^*\|$, que é positivo porque $0 \notin \overline{S}$.

1. Se $|\lambda| > 2/\alpha$, temos $\|e^* + \lambda x^*\| \geq |\lambda||x^*| - 1 \geq 1?\|e^*\|$.
2. Se $|\lambda| > 2/\alpha$, temos

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq \|e_i^* + \lambda x^*\| - \delta \geq 1 - \delta - |\lambda|\delta - \delta \geq 1 - 2\delta - \frac{2\delta}{\alpha}.$$

O resultado segue se $2\delta + \frac{2\delta}{\alpha} < \varepsilon$.

$\square$

Prova do teorema 18.6. Seja $S \subseteq X$ com $0 \notin \overline{S}^{\|\ \|}$ e $0 \in \overline{S}^{w}$. Então, vendo $S \subseteq X^{**}$, temos $0 \notin \overline{S}^{\|\ \|}$ e $0 \in \overline{S}^{w}$. Fixe $\varepsilon > 0$. Pegue uma sequência (δ_n) de numeros positivos tais que

$$\prod_n (1 - \delta_n) > \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Pelo lema, existe $(e_n^*) \subseteq S$ tal que para todS $n \in \mathbb{N}$ e $a_, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$(1 - d_n)\left\|\sum_{n=1}^{m} a_m e_n^*\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m+1} a_n e_n^*\right\| \approx \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n e_n^* + a_{m+1} e_{m+1}^*\right\|.$$

Assim, para toda $m \leq k$ e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n e_n^*\right\| \leq \frac{1}{\pi(1 - \delta_n)}\left\|\sum_{n=1}^{k} a_n e_n^*\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{n=1}^{k} a_n e_n^*\right\|.$$

$\square$

Corolário 18.8. Se $(x_n) \subseteq X$ é tal que $x \xrightarrow{w}$ mas $\inf \|x_n\| > 0$, então (x_n) possui uma subsequência basica.

Prova de teorema 18.5. Note que $0 \notin \overline{\partial B_X}^{\|\ \|}$ e $0 \in \overline{\partial B_X}^{w}$. Pata comprovar o segundo, suponha o contrário, ie. que existe $\varepsilon > 0$ e $x_1^*, \ldots, x_2^* \in X^*$ tal que

$$\{x \in X : |x_i^*(x_i)\} \cap \partial B_X = \varnothing.$$

Como $\bigcap \ker x_i^* \neq \{0\}$, pegue $x \in \bigcap \ker(x_i^*) \backslash \{0\}$. Logo

$$\frac{x}{\|x\|} \in \{y \in X : |x_i^*(y) < \varepsilon\} \cap \partial B_X \quad \forall i \leq n,$$

que é absurdo. $\square$

Pergunta. X, Y espaços de Banach, se $X \hookrightarrow Y$ e $Y \hookrightarrow X$ mergulhos isomófricos, então $X \overset{\text{isomor}}{\approx} Y$. Falso. E se pedimos que a sejam mergulhos de espaços complementados?

Gouees. Existe espaço de Banach tal que $X \approx X^3$ mais $X \not\approx X^2$.

19 Técnica de descomposição de Pełcyński

Teorema 19.1. Sejam X e Y espaços de Banach e $X \overset{\perp}{\hookrightarrow} Y$ e $Y \overset{\perp}{\hookrightarrow} X$.

1. Se $X \approx X^2$ e $Y \approx Y^2$ então $X \approx Y$.
2. Se $X \approx \ell_p(X)$, então $X \approx Y$. ($X \approx c_0(X)$.)

Definição. Seja X um espaço de Banach.

1. $p \in [1, \infty)$.
$$\ell_p(X) = \left\{ (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : \sum \|x\|^p < \infty \right\}$$
onde
$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. $$c_0(X) = \left\{ (x_n) \in \ell_\infty(X) : \lim_n \|x_n\| = 0 \right\}$$
com a norma
$$\|(x_n)\| = \sup_n x_n.$$

Demostração. Por hipótese existe um subespaço fechado $E \subseteq X$ e $F \subseteq Y$ tais que

$$X = Y \oplus E \quad \text{e} \quad Y \oplus F.$$

1. $$X \approx Y \oplus E \approx Y \oplus Y \oplus E \approx X \oplus F \oplus Y \oplus E \approx X \oplus F \oplus X \approx X \oplus F \approx Y.$$

2. Suponha $X \approx \ell_p(X)$.
$$Y \approx X \oplus F \approx X \oplus \ell_p(X) \oplus F \approx Y \oplus X.$$
Logo
$$X \approx \ell_p(X) \approx \ell_p(Y \oplus E) \approx \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \approx Y \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \approx Y.$$

□

20 Algebras de Banach

Definição.

1. Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de um produto associativo é uma ***álgebra***.

2. Se A é uma álgebra, $\| \ \|$ uma norma em A e

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in A,$$

   A é uma ***álgebra normada***.

3. Se uma álgebra normada for completa, é uma ***álgebra de Banach***.

4. Se existe um elemento $1 \in A$ tal que

$$a1 = 1a = a \quad \forall a \in A,$$

   1 é a ***unidade*** de A e A é uma ***álgebra com unidade***.

Exemplos (bobos)**.**

1. Seja K compacto Housdorff, $C(K)$ é uma álgebra de Banach com unidade onde

$$(fg)x = f(x)g(x) \quad \forall x \in K.$$

2. Se K é localmente compacto e Housdorff,

$$C_0(K) = \{f : K \to \mathbb{K} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists K' \subseteq K \text{ tal que } |f(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \notin K'\}$$

   não tem unidade a não ser que K for compacto.

3. ℓ_∞.

4. c_0.

5. L_∞.

6. Se X for Banach, $\mathcal{L}(X)$ é uma álgebra de Banach com unidade (a identidade) que não é conmutativa.

$$\|ab\| = \sup_{x \in B_X} \|ab(x)\| \leq \|a\|\|b\|.$$

7. $K(X) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T \text{ compacto}\}$ eles são fechados com a composição (de fato a composição com cualquer outro operador), é uma álgebra de Banach não commutativa e sem unidade se $\dim(X) = \infty$.

8. $L_1(-\infty, \infty)$ com

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x)g(x)dx$$

   prove que satisfaz as propriedades.

Definição. Seja A uma álgebra e $I \subseteq A$ um subespaço vetorial.

1. I é um ***ideal à direita*** de A se $ab \in I$ para todos $a \in A$ e $b \in I$.

2. I é um ***ideal à izquerda*** de A se $ab \in I$ para todos $a \in I$ e $b \in A$.

3. Se ambos valem, I é um ***ideal*** de A.

Exemplos.

1. Se $x_0 \in K$,
$$I_0 = \{f \in C(K) : f(x_0) = 0\}$$
é um ideal de $C(K)$.
2. $K(X)$ é um ideal de $\mathcal{L}(X)$.
3. c_0 é ideal de ℓ_∞.

Proposição 20.1. Se A é uma álgebra normada e $I \subseteq A$ é um ideal fechado de A, então A/I é uma álgebra normada com produto

$$(a+I)(b+I) = ab + I.$$

Demostração. (O produto está bem definido.) Seja $a + I = a' + I$ e $b + I = b' + I$. Temos

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= ab - ab' + ab' - a'b' \\ &= a(b - b') + (a - a')b' \in I \end{aligned}$$

($\| \; \|$ é compatível como o produto.)

$$\begin{aligned} \|ab + I\| &= \inf_c \|ab + c\| \\ &= \inf_{a',b' \in I} \|ab + ab' + a'b + a'b'\| \\ &= \inf a', b' \in I \|(a + a')(b + b')\| \\ &= \inf a', b' \in I \|a + a'\| \|b + b'\| \\ &= \inf_{a' \in I} \|a + a'\| \inf_{b' \in I} \|b + b'\|. \end{aligned}$$

□

Exemplos.

1. ℓ_∞ / c_0. Lembre que $\ell_\infty = \approx c(\beta\mathbb{N})$ onde $\beta\mathbb{N}$ é o espaço dos ultrafiltros nos naturais.
2. $\mathcal{L}(\ell_2)/K(\ell_2)$, a ***álgebra de Caltim***.

Definição. Se A e B são álgebras, um operador linear $T : A \to B$ é um ***homomorfismo*** se $T(aa') = TaTa'$.

Exemplo. Em $C(K)$, o mapa que manda $f \mapsto f(x_0)$ é um homomorfismo.

Observação 20.1. Núcleos de homomorfismos são ideais.

21 Teoria espectral

Definição. Seja A uma álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ com unidade $1_A \in A$.

1. $\text{Inv}\, A = \{a \in A : a^{-1} \text{ existe}\}$.

2. Se $a \in A$, o ***espectro de*** a é

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ não é inversível}\}$$

isso é,

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \notin \operatorname{Inv} A\}$$

Exemplos.

1. $\operatorname{Inv}(A)$ é um grupo.
2. Se K compacto Hausdorff e $f \in C(K)$, então $\sigma(f) = f(K)$.
3. Se $f \in \ell_\infty$, então $\sigma(f) = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Ver aqui.
4. Ache $\sigma(f)$ para $f \in L_\infty$. Acredito que

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : f|_F \equiv \lambda \text{ para algum } E \notin N(\mu)\}.$$

Proposição 21.1. Seja $a \in A$ e p um polinômio em $\mathbb{C}$, então

$$p(\sigma(a)) = \sigma(p(a)).$$

Demostração. Se p for constante, segue. Caso contrário, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ podemos escrever

$$p(z) - \lambda = \lambda_0(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n)$$

onde $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ e $\lambda_0 \neq 0$. Logo

$$p(a) - \lambda = \lambda_0(a - \lambda_1) \dots (a - \lambda_n).$$

Como $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$ conmutam, $p(a) - \lambda$ é inversível se somente se cada $a - \lambda_i$ é inversível. Ou bem,

$$\lambda \in \sigma(p(a)) \iff \exists i \leq n \text{ tal que } \lambda_i \in \sigma(a) \iff \exists \mu : \lambda_i \in \mathbb{C} : p(\mu) = \lambda \text{ e } \mu \in \sigma(a).$$

□

Proposição 21.2. Se $a \in A$ e $\|a\| < 1$, então $1 - a \in \operatorname{Inv} A$ e $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

Demostração.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=m}^{n} a^n \right\| &\leq \sum_{n=m}^{k} \|a^n\| \\
&\leq \sum_{n=m}^{k} \|a\|^n \\
&\leq \frac{\|a\|}{1 - \|a\|}
\end{aligned}$$

Logo, como A é completo,

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \in A.$$

Segue que

$$\begin{aligned}(1-a)b &= \lim_{k\to\infty}(1-a)\left(\sum_{n=0}^{k} a^n\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}(1+a+\ldots+a^k-a-a^2-\ldots-a^{k+1})\\ &= \lim_{k\to\infty} 1-a^{k+1} = 1\end{aligned}$$

□

Corolário 21.3. Inv A é aberto.

Demostração. Fixe $a \in \operatorname{Inv} A$. Seja $\|a-b\| <$

$$\begin{aligned}\|1-ba^{-1}\| &= \|(a-b)a^{-1}\|\\ &\leq \|a-b\|\|a^{-1}\|\\ &< 1\end{aligned}$$

logo $b^{-1}a\operatorname{Inv}(A)\ldots, b \in \operatorname{Inv}(A)$. □

Teorema 21.4. A função

$$\operatorname{Inv} a \in \operatorname{Inv}(A) \mapsto a^{-1} \in \operatorname{Inv}(A)$$

é diferenciável.

Observação 21.1 (Relembre)**.** Sejam X e Y espaços de Banach e $f : X \to Y$. f é ***diferenciável*** en $x \in X$ se existe $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-L(n)\|}{\|h\|}.$$

Demostração. Vamos mostrar que

$$\operatorname{Inv}'(a)(b) = a^{-1}ba^{-1}.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\|(a+b)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ba^{-1}\| &= \|(1-a^{-1}b)^{-1}a^{-1} + a^{-1}ba^{-1}\| \\
&\leq \|(1+a^{-1}b)-a^{-1}-a^{-1}b\|\|a^{-1}\| \qquad\qquad (\|a^{-1}b\|<1) \\
&= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(a^{-1}b)^n - 1 + a^{-1}b\right\| \|a^{-1}\| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|a^{-1}b\|^n \|a^{-1}\| \\
&= \frac{\|a^{-1}b\|^2}{1-\|a^{-1}b\|}\|a^{-1}\| \\
&(\|a^{-1}b\| < 1/2) \\
&\leq 2\|a^{-1}\|^3\|b\|^2.
\end{aligned}
$$

Logo

$$\lim_{b\to 0} \frac{\|(a+b)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ba^{-1}}{\|b\|} = 0.$$

□

Teorema 21.5 (Gelfand). $\sigma(a)$ é um compacto não vazío para todo $a \in A$. Mais ainda,

$$\sigma(a) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\} = \|a\|B_{\mathbb{C}}.$$

Demostração. ($\subseteq$) Suponha que $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda^{-1}| > \|a\|$. Logo $\|\lambda^{-1}a\| < 1$ e portanto

$$1 - \lambda^{-1}a$$

é inversível. Portanto,

$$a - \lambda \text{ é inversível}$$

e $\lambda \notin \sigma(a)$.

($\sigma(a)$ é fechado) Como $\mathrm{Inv}(A)$ é aberto em A,

$$\mathbb{C}\backslash\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \in \text{Inv } A\}$$

é aberto em $\mathbb{C}$.

($\sigma(a) \neq \varnothing$) Suponha $\sigma(a) = \varnothing$. Podemos definir

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{C} &\to A \\
\lambda &\mapsto (a-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Como φ é diferenciável, segue que $f \circ \varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira para todo $f \in A^*$.

Pelo teorema de Liouville, se φ for limitada, então $f\circ\varphi$ seria constante para todo $f \in A^*$. Em particular, teríamos

$$f(\varphi(0)) = f(\varphi(1)) \quad \forall f \in A^*,$$

ou bem,

$$f(a^{-1}) = f((a-1)^n) \quad \forall f \in A^*.$$

Por Hahn-Banach,

$$a^{-1} = (a-1)^{-1} \implies a = a - 1$$

que é absurdo.

(φ é limitada) Seja λ com $|\lambda| > 2\|a\|$. Note que

$$\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| \leq \sum_{n=1} \infty \|\lambda^{-1}a\| < 1.$$

Logo,

$$\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2.$$

Portanto,

$$\|(a-\lambda)^{-1}\| = \|(\lambda^{-1}a - 1)\| |\lambda^{-1}| \leq \frac{2 \cdot 1}{2\|a\|} = \frac{1}{\|a\|}.$$

□

Corolário 21.6. Seja A uma álgebra de Banach com unidade tal que

$$\mathrm{Inv}(A) = A \backslash \{0\}.$$

Então

$$A \cong \mathbb{C}.$$

Definição. Seja $a \in A$. O ***raio espectral de*** a é

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

(O radio do menor circulo centrado em zero que contém o espectro.)

Exemplos.

1. $f \in C(K)$, $r(f) = \|f\|_\infty$.
2. $r\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$
3. $r(a) \leq \|a\|$.

Teorema 21.7.

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n}.$$

Demostração. Se $\lambda \in \sigma(a)$, $\lambda^n \in \sigma(a^n)$. Logo $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\lambda \leq \|a^n\|^{1/n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,
$$r(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{1/n}.$$
Resta mostrar que
$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq r(a).$$
Vamos mostrar que se $|\lambda| > r(a)$, então
$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq |\lambda|.$$
Defina
$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/r(a)\}.$$

Afirmação. Para todo $\lambda \in A$,
$$(\lambda^n a^n)_n$$
é limitada.

Demostração. Dado $f \in A^*$, defina
$$\lambda \in \Delta \mapsto f((1 - \lambda a)^{-1})$$
que está bem definido, pois
$$\lambda < 1/k \iff \lambda^{-1} > k \qquad (...?).$$
Logo existe $(\lambda_n) \in$tal que
$$f((a - \lambda a)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^n.$$
Se $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$, então
$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n.$$
Logo,
$$f((1 - \lambda a)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a^n)\lambda^n.$$
Assim, temos dos séries iguais, de modo que os coeficientes são iguais (usando análise complexa). Logo,
$$f(a^n) = \lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Logo, $(f(a^n)\lambda^n)_n$ é limitada para toda $\lambda \in \Delta$ e para todo $f \in A^*$. Pelo teorema de Banach-Steinhaus, $(\lambda^n a^n)_n$ é limitado. Com isso provamos a afirmação. $\square$

Seja $|\lambda| > R(A)$. Logo, $\lambda \in \Delta$. Pela afirmação $(\lambda^n a^n)_n$ e limitada. Pegue $M > 0$ tal que

$$\|\lambda^n a^n\| \leq M \quad \forall n \in N.$$

Então

$$\|a^n\|^{1/n} \leq M^{1/n}|\lambda^{-1} \longrightarrow |\lambda^{-1}.$$

Logo

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq |\lambda^{-1}|.$$

Por fim,

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a).$$

□

Exemplo. Considere

$$A = \{f \in C[0,1] : f \text{ é } C^1\}$$

normado de

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

A norma está bem definida e é completa. Então, considerando

$$z : z \in [0,1] \mapsto z \in \mathbb{C}.$$

Temos que

$$\|z^n\| = 1 + n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e assim

$$r(z) = \lim_n (1+n)^{1/n} = 1 < 2 = \|z\|.$$

Teorema 21.8. Seja A uma álgebra de Banach com unidade e $B \subseteq A$ subalgebra fechada com $1_A \in B$.

1. $\operatorname{Inv} B$ é fechado e aberto em $B \cap \operatorname{Inv} A$.
2. Se $b \in B$, então
$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b) \quad \text{e} \quad \partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(a).$$
3. Se $b \in B$ e $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(b)$ é conexo então
$$\sigma_A(b) = \sigma_B(b).$$

Demostração.

1. $\operatorname{Inv} B$ é aberto em B e $\operatorname{Inv} A$ é aberto em A, assim, $\operatorname{Inv} B$ é aberto em $B \cap \operatorname{Inv} A$.

   Para ver que é fechado pegue $(b_n) \subseteq \operatorname{Inv} B$ tal que $b_n \to b \in B \cap \operatorname{Inv} B$. Logo,
$$b_n^{-1} \to b^{-1}.$$
   Como B é fechada, $b^{-1} \in B$, assim $\forall n \in \mathbb{N}$, $b^{-1} \in B$, e $b \in \operatorname{Inv} B$.

2. Como $\text{Inv}\, B \subseteq \text{Inv}\, A$,
$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b).$$
Se $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$ pegue $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_B(b)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. Logo $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_A(b))$.

   Precisamos mostrar que $\lambda \in \sigma_A(b)$. Suponha que não. Então $(b - \lambda_n) \subseteq \text{Inv}(A)$ e $b - \lambda_n \to b - \lambda \in B \cap \text{Inv}\, A$. Por 1., $b - \lambda \in \text{Inv}\, B$, contradição.

3. Por 1. e 2.,
$$\mathbb{C}\backslash\sigma_B(b) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_A(b)$$
e $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(b)$ é fechado e aberto em $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(b)$.

□

Exercício. Mostre que existe uma álgebra de Banach com unidade A e uma subalgebra B com $1_A \in B$ e $b \in B$ tal que $b^{-1} \in A\backslash B$.

Exemplo. Seja A a álgebra do disco,
$$A = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f \in C(\mathbb{D}) \text{ e } f \text{ é analítica em } \mathbb{D}\}.$$
Considere o mapa
$$\phi : f \in A \mapsto f|_{\partial\mathbb{D}} \in C(\partial\mathbb{D}).$$
Seja $B = \text{img}\, \phi$. Note que $B =$ subalgebra de Banach de $C(\partial\mathbb{D})$ gerada por 1 e z.

Temos que
$$\sigma_{C(\partial\mathbb{D})}(z) = \partial\mathbb{D}$$
e
$$\sigma_A(z) = \sigma_B(z) = \mathbb{D}.$$

22 Exponencial de elementos em álgebras de Banach

Definição. Seja A um álgebra de Banach com unidade. Se $a \in A$, escrevemos
$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Teorema 22.1. A álgebra de Banach com unidade.

1. Seja $a \in A$, $f : \mathbb{R} \to A$, $f(0) = 1$, $f'(t) = af(t)\ \forall t$. Então,
$$f(t) = e^{ta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. $(e^a)^{-1} = e^{-a}$, ie. $(e^a)^{-1}$ é inversível e a sua inversa é e^{-a}.
3. $e^{ab} = e^a e^b$ se $ab = ba$.

Demostração.

1. Primeramente note que $g(t) = e^{ta}$ satisfaz as mesmas propiriedades de f. Exercício (e converge uniformemente, assim pode diferenciar...).

   Defina
$$h(t) = g(-t)f(t).$$

   A regla da cadiea função igual... usar Hahn-Banach para extender todos os funcionais... ?.

   Note que
$$h'(t) = -g'(t)f(t) + g(-t)f'(t) = -ae^{-ta}f(t) + e^{-ta}af(g) = a$$
   pois as potencias de a comutam.

   Logo,
$$e^{-ta}f(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Portanto,
$$e^{-ta}e^{ta} = e^{ta}e^{-ta} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Mais ainda,
$$= e^{ta}.$$

2. Contido no antérior argumento.

3. Defina $g(t) = e^{ta}e^{ta}$ para $t \in \mathbb{R}$. Então

   - $g(0) = 1$.
   - $$\begin{aligned} g'(t) &= ae^{ta}e^{ta} + e^{ta}be^{tb} \\ &= (a+b)e^{ta}e^{tb} \\ &= (a+b)g(t) \end{aligned}$$

   Por 1, $g(t) = e^{t(a+b)}$.

□

23 Teorema espectral para operadores compactos

A nossa meta é provar o seguinte:

Teorema 23.1. Seja X um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ compacto. Então

1. $\sigma(T)$ é enumerável.
2. Se $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, λ é um ponto isolado de $\sigma(T)$.
3. Se $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, λ é um autovalor de T.

Assim, o único ponto de acumulação de um operador compacto é zero.

Exemplos.

1. Operadores de posto finito.
2. Seja $k \in C([0,1]^2)$. Defina

$$\begin{aligned} T_k : C[0,1] &\to C[0,1] \\ (T_k f)x &= \int_0^1 k(x,t) f(y) dy \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned}$$

   (T_k está ben definido) $x, y \in [0,1]$, $f \in C[0,1]$, temos

$$\begin{aligned} |(T_k f)x - (T_k f)y| &\leq \int_0^1 |k(x,t) - k(y,t)||f(t)|dt \\ &\leq \|f\| \sup_t |k(x,t) - k(y,t)|. \end{aligned}$$

   Como k é uniformemente contínua, isso implica que $T_k(f)$ também é.

   (T_k é limitado) $|(T_n f)x| \leq \|f\| \sup_{x,t} |k(x,t)|$.

   (T_k é compacto) $T_k(B_{C[0,1]}) \subseteq C[0,1]$ é para compacto. Por Arzelá-Ascoli, basta que $T_k(B_{C[0,1]})$ é equicontínua e pontoalmente limitado. De fato, já mostramos ambas.

Exercício.

1. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Se T ou S forem compactos, a composição deles $S \circ T$ também é compacto.
2. $K(X)$ é um ideal fechado de $\mathcal{L}(X)$.
3. $K(X) = \mathcal{L}(X)$ se e somente se $\dim X < \infty$.
4. $T \in K(X,Y)$ se e somente se $T^* \in K(Y^*, X^*)$.

Teorema 23.2. Seja $T \in K(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

1. $\ker(T - \lambda)$ tem dimensão finita.
2. $\operatorname{img}(T-\lambda)$ é fechado e $\operatorname{codim} \operatorname{img}(T-\lambda) = \dim \ker(T^*-\lambda)$. Em particular $\operatorname{img}(T-\lambda)$ tem codimensão finita.

Demostração.

1. $T|_{\ker(T-\lambda)} = \lambda \operatorname{Id}|_{\ker(T-\lambda)}$. Como T é compacto e $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Id}_{\ker(T-\lambda)}$ é compacta, assim $\dim \ker(T - \lambda) < \infty$.
2. Como $Z = \ker(T - \lambda)$ tem dimensão finita, $\exists Y \subseteq X$ subespaço fechado tal que $X = Z \oplus Y$.

Note que
$$\operatorname{img}(T-\lambda) = \operatorname{img}(T-\lambda)|_Y.$$

Exercício 23.0.1. Suponha $E \to F$, $\delta > 0$ e $\|Sx\| \geq \delta\|x\|$, então $\operatorname{img}(S)$ é fechado.

Para obter uma contradição, suponha que as hipóteses do exercício não estão satisfeitas. Então existe uma sequência $(x_n) \subseteq \partial B_Y$ tal que
$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0.$$

Como T é compacto, podemos supor que (Tx_n) é Cauchy. Como $\lambda \neq 0$, podemos escrever
$$x_n = \frac{1}{\lambda}(Tx_n - (T-\lambda)x_n)$$
e concluir que (x_n) é Cauchy. Defina
$$x = \lim_n x_n.$$

Portanto, $Tx = \lambda x$, e assim $x \in \ker(T-\lambda) = Z$.

Por outro lado, como $(x_n) \subseteq Y$ e Y fechado, $x \in Y$. Assim, $x = 0$, absurdo pois a sequência está contida em ∂B_Y.

Para comprovar a seguite afirmação em 2., considere o quociente
$$\pi : X \to X/\operatorname{img}(T-\lambda).$$

Afirmação.
$$\operatorname{img}\pi^* = \ker(T^* - \lambda).$$

Demostração.

($\subseteq$) Só note que
$$\begin{aligned}(T^*-\lambda)\pi^*\xi(y) &= \pi^*\xi(Ty-\lambda y)\\ &= \xi(\pi(Ty-\lambda y)).\end{aligned}$$

($\supseteq$) Seja $x^* \in \ker(T^*-\lambda)$. Então
$$x^*|_{\operatorname{img}(T-\lambda)} = 0.$$

Logo, podemos definir um funcional $\xi \in X/\operatorname{img}(T-\lambda)^*$ tal que
$$\pi^*(\xi) = x^*.$$

$\square$

Como π^* é injetiva,
$$\dim \operatorname{img} \pi^* = \dim(X/\operatorname{img}(T-\lambda)).$$
Portanto,
$$\dim(X/\operatorname{img}(T-\lambda)) = \dim \ker(T^*-\lambda).$$
□

Definição. Seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

1. $\dim \ker T < \infty$.
2. $\operatorname{codim} \operatorname{img} T < \infty$.

Então T é chamado de um ***operador Fredholm***.

Lema 23.3. Seja $T \in K(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Então

1. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$\ker(T-\lambda)^n = \ker(T-\lambda)^{n+1}.$$
2. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$\operatorname{img}(T-\lambda)^n = \operatorname{img}(T-\lambda)^{n+1}$$

Observação 23.1. $\ker T^n \subseteq \ker T^{n+1}$ e $\operatorname{img} T^n \supseteq \operatorname{img} T^{n+1}$.

Demostração. Suponha falso, ie.
$$\ker(T-\lambda)^n \subsetneq \ker(T-\lambda)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Pelo lema de Riesz, existe $(x_n) \subseteq \partial B_X$ tal que

1. $x_n \in \ker(T-\lambda)^n$.
2. $d(x_{n+1}, \ker(T-\lambda)^n) > 1/2$.

Afirmação. (Tx_n) não possui uma subsequência convergente.

Note que
$$Tx_n - Tx_m = \lambda x_n + (T-\lambda)x_n - (T-\lambda)x_m - \lambda x_m.$$
Defina
$$z := (T-\lambda)x_n - (T-\lambda)x_m - \lambda x_m.$$
Se $n > m$,
$$z \in \ker(T-\lambda)^{n-1}.$$
Como $d(x_n, \ker(T-\lambda)^{n-1}) > 1/2$,
$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx_m\| &= \|\lambda x_n + z\| \\ &= |\lambda| \left\| x_n + \frac{z}{\lambda} \right\| \\ &> |\lambda|/2\end{aligned}$$

O item 2, exercício. ☐

Exercício. Se S é Fredholm, o lema anterior vale substituindo $T - \lambda$ por S? Considere o shift.

Definição. Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ Fredholm. O ***índice*** de T é dado por

$$\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \operatorname{codim} \operatorname{img} T.$$

Teorema 23.4. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ são Fredholm, então

1. $S \circ T$ é Fredholm.
2. $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

Primeiro vamos provar:

Proposição 23.5. Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que existe $Z \subseteq Y$ fechado tal que

$$Y = Z \oplus \operatorname{img} T \quad \text{(algebricamente)}.$$

Então $\operatorname{img} T$ é fechado.

Demostração. Substituindo T por

$$\tilde{T} : [x] \in X/\ker T \mapsto Tx \in Y,$$

podemos supor que T é injetivo. Para usar o Teorema da Aplicação Aberta, defina

$$S : X \oplus Z \to Y$$

como

$$S(x, y) = Tx + y.$$

Agora S é uma bijecção contínua, assim pelo Teorama da Aplicação Aberta ele é contínua. Logo, se $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|S^{-1}Tx\| \\ &\leq \|S^{-1}\|\|Tx\| \end{aligned}$$

Pelo exercício 23.0.1, $\operatorname{img} T$ é fechada. ☐

Prova do teorema 23.4. Usando as hipóteses e a proposição anterior, sabemos que existem subespaços fechados $Y_1, Y_2, Y_3 \subseteq Y$ tal que

- $\operatorname{img} T = (\ker S \cap \operatorname{img} T) \oplus Y_1$.
- $\ker S = (\ker S \cap \operatorname{img} T) \oplus Y_2$.
- $Y = \operatorname{img} T \oplus Y_2 \oplus Y_3$.

Logo,

$$\dim\ker(ST) = \dim\ker T + \dim S \cap \operatorname{img} T.$$

(Isso segue de que

$$x \in \ker(ST) \mapsto Tx \in \ker S \cap \operatorname{img} T$$

é sobrejetiva.)

Note que

$$\operatorname{img} S = S(Y) = S(Y_1) + S(Y_3)$$

e $\dim Y_3 < \infty$.

Logo

$$S(Y) = S(T(X)) + S(Y_3)$$

e como $\operatorname{codim} S(Y) < \infty$, segue que

$$\operatorname{codim} ST(X) < \infty.$$

Observação 23.2. Nossa meta é mostrar que

$$\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S,$$

ou seja

$$\begin{aligned}\dim\ker(ST) &+ \operatorname{codim}\operatorname{img} T + \operatorname{codim}\operatorname{img} T \\ &= \operatorname{codim}\operatorname{img}(ST) + \dim\ker T + \dim\ker S.\end{aligned}$$

O que temos até agora é que

$$\begin{aligned}
\dim\ker(ST) &+ \operatorname{codim}\operatorname{img} T + \operatorname{codim}\operatorname{img} T \\
&= \dim\ker T + \dim\ker S \cap \operatorname{img} T + \operatorname{codim}\operatorname{img} T + \operatorname{codim}\operatorname{img} S \\
&= \dim\ker T + \dim\ker S \cap \operatorname{img} T + \dim Y_2 + \dim Y_3 + \operatorname{codim}\operatorname{img} S \\
&= \dim\ker T + +\dim Y_2 + \dim Y_3 + \operatorname{codim}\operatorname{img} S \\
&= \dim\ker T + +\dim Y_2 + \dim Y_3 + \dim S(Y_3) + \operatorname{codim}\operatorname{img} S \\
&= \dim\ker T + \dim\ker S + \operatorname{codim}\operatorname{img}(ST) \\
&= \operatorname{codim}\operatorname{img}(ST) + \dim\ker T + \dim\ker S.
\end{aligned}$$

□

Corolário 23.6. Se $T \in \mathcal{L}(X)$ é Fredholm e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\operatorname{ind}(T^n) = n \operatorname{ind} T.$$

Teorema 23.7. Sejam $T \in K(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

1. $\operatorname{ind}(T - \lambda) = 0$.

2. **(Alternativa de Fredholm.)** $T-\lambda$ é injetivo se e somente se $T-\lambda$ for sobrejetivo.

3. Seja $n \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que

$$\ker(T-\lambda)^n = \ker(T-\lambda)^{n+1},$$

então

$$X = \ker(T-\lambda)^n \oplus \operatorname{img}(T-\lambda)^n.$$

Demostração.

1. Fixe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{ind}(T-\lambda)^m = \operatorname{img}(T-\lambda)^{m+1}.$$

Pegue i, j distintos e maiores que $\max\{n, m\}$.

Logo,

$$\ker(T-\lambda)^i = \ker(T-\lambda)^j$$

e

$$\operatorname{img}(T-\lambda)^i = \operatorname{img}(T-\lambda)^j,$$

assim

$$\operatorname{ind}(T-\lambda)^i = \operatorname{ind}(T-\lambda)^j$$

e

$$\operatorname{ind}(T-\lambda) = j \operatorname{ind}(T-\lambda).$$

Como $i \neq j$,

$$\operatorname{ind}(T-\lambda) = 0.$$

2. Imediato.

3.

Exercício. $\operatorname{img}(T-\lambda)^n$ é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação. $\ker(T-\lambda)^n \cap \operatorname{img}(T-\lambda)^n = \{0\}$.

Sponha que x está nessa interseção. Logo existe $y \in X$ tal que

$$x = (T-\lambda)^n y.$$

Mas $(T-\lambda)^n x = 0$, logo

$$(T-\lambda)^{2n} y = 0.$$

Como

$$\ker(T-\lambda)^{2n} = \ker(T-\lambda)^n,$$

e assim $(T-\lambda)^n y = 0$ e $x = 0$.

Por 1, e pelo corolário anterior,

$$\operatorname{ind}(T-\lambda)^n = 0.$$

Logo

$$\dim \ker(T-\lambda)^n = \operatorname{codim} \operatorname{img}(T-\lambda)^n.$$

Como

$$\ker(T-\lambda)^n \cap \operatorname{img}(T-\lambda)^n = \{0\}.$$

Segue que

$$X = \ker(T-\lambda)^n + \operatorname{img}(T-\lambda)^n.$$

□

Finalmente,

Teorema 23.8 (espectral de operadores compactos)**.** Seja X Banach e $T \in K(X)$.

1. Se $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, então λ é autovalor de T.
2. Se $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, λ é ponto isolado de $\sigma(T)$.
3. $\sigma(T)$ é enumerável.

Exercício. Sejam Y e Z Banach e $S_1 \in \mathscr{L}(Y)$ e $S_2 \in \mathscr{L}(Z)$. Defina $X := Y \oplus Z$ e um operador

$$T : (y,z) \in Y \oplus Z = X \mapsto (S_1 y, S_2 z) \in Y \oplus Z = X.$$

Então

$$\sigma_{\mathscr{L}(X)}(T) = \sigma_{\mathscr{L}(Y)}(S_1) \cup \sigma_{\mathscr{L}(Z)}(S_2).$$

Demostração.

1. Como $\lambda \in \sigma(T)$, $T-\lambda$ é não inversível. Como T é compacto e $\lambda \neq 0$, se $T-\lambda$ é injetivo, é também bijetivo. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, ele é inversível, que não é possível. Logo $T-\lambda$ não é injetivo, ou seja, λ é autovalor de T.
2. Pegue $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$X = \underbrace{\ker(T-\lambda)^n}_{Y} \oplus \underbrace{\operatorname{img}(T-\lambda)^n}_{Z}.$$
Note que $T(Y) \subseteq Y$ e $T(Z) \subseteq Z$.

   Logo,
$$T = (T|_Y, T_Z) : (y,z) \in Y \oplus Z \mapsto (T|_Y y, T|_Z z) \in Y \oplus Z.$$

   Afirmação. $\sigma_{\mathscr{L}(Y)}(T|_Y) = \{\lambda\}$.

   Por definição de Y,
$$(T|_Y - \lambda \operatorname{Id}_Y)^n = 0.$$
Como o espectro comuta com polínomios, ie., "$\sigma(p) = p\sigma$", considerando
$$p(z) = (z-\lambda)^n,$$

obtemos que

$$p(\sigma(T|_Y)) = \sigma(p(T|_Y)) = \sigma(0) = \{0\},$$

e assim

$$\sigma(T|_Y) = \{\lambda\}.$$

Note que $(T|_Z - \lambda \operatorname{Id}_Z)^n$ é inversível: segue da definição de $X = Y \oplus Z$ e do Teorema da Aplicação Aberta.

Logo $T|_Z - \lambda \operatorname{Id}_Z$ é inversível, ie.

$$\lambda \notin \sigma_{\mathcal{L}(Z)}(T|_Z).$$

Pelo exercício,

$$\sigma(T) \backslash \{\lambda\} = \sigma_{\mathcal{L}(Z)}(T|_Z).$$

Como $\sigma_{\mathcal{L}(Z)}(T|_Z)$ é fechado, $\{\lambda\}$ é aberto em $\sigma(T)$.

3. Considere a coberta aberta

$$\sigma(T) = \bigcup_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} \{\lambda\} \cup (B_{1/n} \cap \sigma(T)).$$

Concluir.

□

Teorema 23.9 (Atkinson)**.** Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e

$$\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)/K(X)$$

a projeção na álgebra de Calkin. Então $T \in \mathcal{L}(X)$ é Fredholm se e somente se $\pi(T) \in \operatorname{Inv}(X/K(X))$.

Lema 23.10. Seja $T \in \mathcal{L}(X)$ Fredholm. Existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que

1. $1 = ST$, $1 - TS$ tem posto finito.
2. $\operatorname{ind} S = -\operatorname{ind} T$.
3. $TST = S$

Demostração. Como T é Fredholm, existem $X_1, X_2 \subseteq X$ tais que

$$X = X_1 \oplus \ker T \quad \text{e} \quad X = \operatorname{img} T \oplus X_2$$

Defina $S : X \to X$ como

$$S(x_0, x_1) = ((T|_{X_1})^{-1}(x_1), 0) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \operatorname{img} T \oplus X_2.$$

□

Prova do teorema 23.9. Suponha $T \in \mathcal{L}(X)$ é Fredholm. Pegue S como no lema. Logo,

$$0 = \pi(1) - \pi(S)\pi(T) \quad \text{e} \quad 0 = \pi(1) - \pi(T)\pi(S),$$

ou seja,

$$\pi(T)^{-1} = \pi(S).$$

Suponga $\pi(T) \in \operatorname{img}(\mathcal{L}(X)(K(X))$. Logo existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\pi(S)\pi(T) = \pi(T)\pi(S) = \pi(1).$$

Portanto,

$$W = 1 - ST \quad \text{e} \quad W' = 1 - TS$$

são compactos.

Note que

$$\ker T \subseteq \ker(W - 1).$$

Como W é compacto, $\ker(W-1)$ tem dimensão finita, logo, $\dim \ker T < \infty$.

Por outro lado, como

$$\operatorname{img}(W - 1) \subseteq \operatorname{img} T,$$

segue que

$$\operatorname{codim}(\operatorname{img} T) < \infty.$$

□

Teorema 23.11. Seja X Banach de dimensão infinita e denote o conjunto de operadores Fredholm em X por Φ.

1. Φ é aberto.
2. $T \in \Phi \to \operatorname{ind} T \in \mathbb{Z}$ é contínuo.

Demostração.

1. Seja $\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)/K(X)$ o quociente. Então

$$\Phi = \pi^{-1}(\operatorname{Inv}(\mathcal{L}(X)/K(X))).$$

2. Sejam $T \in \Phi$, $S \in \Phi$ tais que $TST = T$ e $\operatorname{ind} S = -\operatorname{ind} T$, e $T' \in \Phi$ tal que $\|T - T'\| < \|S\|^{-1}$.

   Como $\|TS - T'S\| < 1$,

$$W = 1 - TS + T'S$$

   é inversível. Como $T = TST$,

$$WT = T'ST.$$

   Portanto,

$$\operatorname{ind} W + \operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T' + \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T.$$

   Como $\operatorname{ind} W = 0$, temos que

$$\operatorname{ind} T' = \operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T.$$

$\square$

Corolário 23.12. Seja $T \in \mathcal{L}(X)$ Fredholm e $S \in K(X)$. Então $\operatorname{ind}(T+S) = \operatorname{ind} T$.

Demostração. Primero notemos que pertubar um operador de Fredholm por um compacto é Fredholm, ie.

($T + S \in \Phi$) Como $T \in \Phi$, $\pi(T)$ é inversível. Como $\pi(T) = \pi(T+S)$, $T+S \in \Phi$.

Como $S \in K(X)$, $tS \in K(X)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo, como

$$t \in \mathbb{R} \mapsto T + tS \in \Phi$$

e

$$W \in \Phi \mapsto \operatorname{ind}(W) \in \mathbb{Z}$$

são contínuas,

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{ind}(T + ts) \in \mathbb{Z}$$

é constante. $\square$

Observação 23.3 (Relembre). A álgebra de Banach com unidade, então e^a existe para todo $a \in A$, ie.

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Pergunta. Quais elementos são a exponencial de alguém? Ou seja, o que é

$$\{e^a : a \in A\}?$$

Será que é $\operatorname{Inv}(A)$? Em $\mathbb{C}$ é verdade, mais em geral, não.

Corolário 23.13. Seja $X = \ell_p, c_0$ e considere o operador shift:

$$\begin{aligned} S : X &\mapsto X \\ e_n &\mapsto e_{n+1}. \end{aligned}$$

Seja

$$\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)/K(X)$$

o quociente. Então

$$\pi(S) \notin \{e^a : a \in \mathcal{L}(X)/K(X)\}.$$

Demostração. **(S é Fredholm)** $\ker S = \{0\}$ e $\operatorname{img} S = \{(x_n) \in X : x_1 = 0\}$. Logo $\operatorname{ind}(S) = -1$.

Afirmação 23.1. Se $T \in \operatorname{Inv}(X)$, então $\pi(S) \neq \pi(T)$.

Caso contrário, $S - T \in K(X)$. Logo

$$-1 = \operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T = 0.$$

Suponha $\pi(S) = e^a$ para algum $a \in \mathcal{L}(X)/K(X)$. Logo $a = \pi(T)$, $T \in \mathcal{L}(X)$. Portanto

$$\pi(S) = e^{\pi(T)} = \pi(e^T).$$

□

24 Teorema espectral para operadores compactos e autoadjuntos

Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Para cada $x \in H$, considere

$$y \in H \mapsto \langle Ty, x \rangle \in \mathbb{K}.$$

Note que ese mapa é um funcional linear. Logo, existe um único $z_x \in H$ tal que

$$\langle y, z_x \rangle = \langle Ty, x \rangle \qquad \forall y \in H.$$

Definição. O ***adjunto*** de T é o operador $T^* : H \to H$ dado por

$$Tx = z_x \qquad \forall x \in H.$$

Exercício.

1. $T^* \in \mathcal{L}(X)$.
2. Qual é a relação entre esse adjunto e o adjunto já introduzido anteriormente?

Proposição 24.1. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto.

1. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de T, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Sejam $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ autovalores distintos con autovetores x e x' respectivamente. Então $x \perp x'$.

Proposição 24.2. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Então

$$f(T) = \|T\|.$$

Demostração. Exercício. □

Corolário 24.3. Se $\sigma(T) = \{0\}$, $T = 0$.

Demostração. Sabemos que
$$r(T) = \lim_n \|T^*\|^{1/n}.$$
Note que $\|T^*T\| = \|T\|^2$, pois
$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \sup_{x \in B_X} \langle Tx, Tx\rangle \\ &= \sup_{x \in B_X} \langle T^*Tx, Tx\rangle \\ &\leq \|T^*T\|.\end{aligned}$$
Logo
$$\begin{aligned}r(T) &= \lim_n \|T^{2n}\|^{1/2n} \\ &= \lim_n \|(T^*)^n - T^n\|^{1/2n} \\ &= \lim_n \|T^{2n}\|^{1/2n} \\ &= \|T\|.\end{aligned}$$
□

Teorema 24.4 (Espectral para Operadores Auto-adjuntos Compactos)**.** Se $T \in K(H)$ é auto-adjunto então existe um conjunto maximal ortonormal composto por autovetores de T.

Em particular, existe $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ e $(x_n) \subset \partial B_X$ tais que
$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n \qquad \forall x \in H.$$

Demostração. Para cada $\lambda \in \sigma(T)$, escreva
$$H_\lambda \in \ker(T - \lambda).$$
Então,

1. $\dim H_\lambda < \infty$ se $\lambda \neq 0$.
2. $H_\lambda \perp H_{\lambda'}$, $\lambda \neq \lambda'$.
3. $\sigma(T)$ é enumerável.

Defina
$$H' = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} H_\lambda.$$

Observação 24.1. O produto interno na soma de espaços de Hilbert é soma dos produtos internos.

Resta mostrar que $H = H'$.

Afirmação. $T(H') \leq H'$.

Isso segue pois
$$T(H_\lambda) \subseteq H_\lambda \qquad \forall \lambda \in \sigma(T).$$

Afirmação. $T((H)^\perp) \subseteq (H')^\perp$.

Seja $y\, n(H')^\perp$ e $x \in H'$. Então
$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0.$$

O que podemos falar sobre
$$T|_{(H')^\perp}(H')^\perp \to (H')^\perp.$$
Como T é compacto e auto-adjunto, $T|_{(H')^\perp}$ é compacto e auto-adjunto,
$$\sigma(T|_{(H')^\perp}) = \{0\}.$$

Logo
$$T|_{(H')^\perp} = 0.$$

Portanto,
$$(H')^\perp \subseteq H_0 = \ker T.$$

Logo, $(H')^\perp = \{0\}$, ie. $H = H'$.

□

25 As melhores coisas na matemática

1. Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos a ***transformada de Fourier*** de f como

$$\mathcal{F}_{f(\xi)} = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x)dx.$$

   - Mostre que $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ é contínuo.
   - $\mathcal{F}(L^1) \subseteq C_0(\mathbb{R})$.
   - $\mathcal{F}$ é injetiva. $\mathcal{F}$ é surjetiva? Não. Supor que sí, usa aplicação aberta.

2. Considere $f \in L^1_{\text{loc}}(0,1)$. (Seguindo a Brezis, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ quando $f\chi_K \in L^1(\Omega)$ para todo $K \subseteq \Omega$ compacto.) Dizemos que g é a ***derivada fraca*** de f se

$$\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C^1_c.$$

   - Mostre que se a derivada fraca de f existe, ela é única. (Notação: $g = f'$.)
   - Dado $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$W^{1,p}(0,1) = \{f \in L^p : f' \text{ existe e } f' \in L^p\}.$$

     Então,

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \|f'\|_p.$$

     Mostre que $(W^{1,p}, \|\ \|_{1,p})$ é um espaço de Banach. Se $1 < p < \infty$, é reflexivo.

3. Dado $x = (x_n)_n$, definimos a ***distribução de*** x como

$$\begin{aligned} \gamma_x : (0,\infty) &\mapsto [0,\infty] \\ t &\mapsto \gamma_x(t) = \#\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > t\} \end{aligned}$$

   Prove que:

   - $\gamma_{x+y}(t) \leq \gamma_x\left(\frac{t}{2}\right) + \gamma_y\left(\frac{t}{2}\right)$.
   - $\gamma_x(t) \leq t^{-p}\|x\|_{\ell^p}$ para todo $x \in \ell^p$.
   - Se $x \in \ell^p$, então

$$\|x\|_{\ell^p} = p\int_0^\infty \gamma_x(t)t^{p-1}dt.$$

   Com isso, definimos o ℓ^p_w como sendo as sequências $x = (x_n)_n$ tais que

$$\sup\{\gamma_x(t)t^p : t > 0\} < \infty.$$

   Prove que

   - $\ell^p \not\subset \ell^p_w$.
   - $\ell^p_w \subseteq \ell^q + \ell^r$ para $q < p < r$. Esqueça.

4. Seja $\varphi(t)$ contínua, convexa e crescente em $[0, \infty)$ com $\varphi(0) = 0$. Defina o espaço

$$L^\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{mesruable e } \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{C}\right) dx < \infty, \ \ \text{para alguma } C > 0 \right\}$$

e a norma

$$\|f\|_\varphi = \inf_{C>0} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{C}\right) dx.$$

Mostre que

- $(L^\varphi, \| \, \|_\varphi)$ é Banach. (Espaço vetorial, normado, completo.)
- $\varphi(t) = t^p$ para $1 \leq p < \infty$,
$$L^\varphi = L^p.$$

5. Seja $F \leq C^0([0,1])$ fechado. A suma que $F \subseteq C^1([0,1])$. Prove que

- $\|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$, para toda $f \in F$ e para algum $C > 0$.
- $\dim F = 0$.