Prof. Henrique Bursztyn

Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Geometria de Poisson

Índice

1 Aula 1

Livros:

- Lectures em PG, Carnic-Gernandes-Marcit
- A brief introduction to PG, HB

1.1 História

Em 1809, Poisson buscava uma formulação geométrica da mecânica clássica (celeste). Espaço fase, função Hamiltoniana, campo Hamiltoniano, equações de Hamilton. O primeiro colchete de Poisson é

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$
$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Interpretação dinâmica: $\{H, f\} = \mathcal{L}_{X_H} f$, que como temos antisimetria, é o mesmo que $-\mathcal{L}_{X_f} H$.

Conhecer a dinâmica do sistema é resolver às equações de Hamilton, EDOs. Integrais primeiras. Aí nasce a área de *sistemas completamente integraveis*.

Teorema (de Poisson, 1809) O colchete de Poisson de duas integrais primeiras é uma integral primeira, i.e.

$$\{H, f\} = 0, \{H, g\} = 0 \implies \{\{f, g\}, H\} = 0$$

Mas foi o Jacobi que descobreu o meolho daquele teorema:

Teorema (Jacobi, 1842)

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0$$

De fato, o teorema de Poisson segue do teorema de Jacobi.

Em 1880 S. Lie trabalha em *álgebras de Lie*. Ele mostra que toda álgebra de Lie vem de um grupo de Lie localmente. Isso levou à *teoria de Lie* onde foram definidas as estruturas de Poisson.

Em 1970, Kirillov, Sourieau e Kostant voltam a trabalhar no colchete de Poisson. Dois artigos que marcaram a era moderna da geometria de Poisson são Lichnerowicz (?) e Weinstein (1983).

1.2 Motivação para a geometria de Poisson

- Mecânica geometrica (plasmas)/Teoria de campos.
- Sistemas integráveis $\rightarrow$ sistemas bihamiltonianos Poisson-Nijenhuis (algum scenário onde temos duas estruturas de Poisson compatíveis…).
- Teoria de representações/grupos quânticos (Drinfeld, Fadeev) $\rightsquigarrow$ grupos de Lie/Poisson.
- Quantização por deformação. Passagem do formalismo clássico com o colchete de Poisson, para um formalismo com uma álgebra não comutativa $\mathbb{A}, *$.

1.3 Definições

Definição M variedade diferenciável. Um ***colchete de Poisson*** em M é uma operação $\mathbb{R}$-bilinear

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

tal que

1. (Antisimetria.) $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
2. (Jacobi.) $\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0$.
3. (Leibniz.) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

Observação As condicões (1) e (2) dizem que $(C^\infty(M), \{\})$ é uma álgebra de Lie. Como ainda é uma álgebra comutativa com o produto usual, a condição (3) diz como é que interagem esses dois produtos.

Observação Para qualquer álgebra comutativa $\mathcal{A}$ podemos introduzir um colchete de Lie e pedir a condição Leibniz, e isso se chama de ***álgebra de Poisson***. E se o colchete satisfaz (1) e (3), se chama de ***estrutura quase Poisson***, que já tem um significado geométrico.

Definição ***Aplicação (ou morfismo) de Poisson*** entre $(M_1, \{\cdot,\cdot\}_1)$ e $(M_2, \{\cdot,\cdot\}_2)$ é $\varphi : M_1 \to M_2$ que preserva colchetes, i.e. o pullback

$$\begin{aligned} \varphi^* : C^\infty(M_2) &\longrightarrow C^\infty(M_1) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

preserva colchete no sentido de que

$$\{f, g\}_2 \circ \varphi = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1.$$

Temos um campo que chamamos de ***hamiltoniano*** que podemos tirar da condição leibniz do colchete. Isso é porque $\{f, \cdot\} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é uma derivação! Definindo esse campo como X_f obtemos

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f} f = dg(X_f) = -df(X_g)$$

Observação Os colchetes são locais no sentido de que podemos restringir num aberto.

Observação $\{f, f\} = 0$ (f é preservada por seu campo hamiltoniano).

Terminologia

- $f, g \in C^\infty(M)$ estão em ***involução*** se $\{f, g\} = 0$.
- Se f é tal que $\{f, g\} = 0 \forall g \iff X_f = 0$, então f é dita de ***Casimir***. No caso simplético isso não faz muito sentido—todas as funções são Casimir porque a forma simplética é não degenerada. Mas no caso geral isso pode mudar. (What?) Aula 2: as Casimir são constantes ao longo da foleação dada por $\pi^\sharp$.

Exemplo

- $(M, \{\cdot,\cdot\} \equiv 0)$.

  Outro de jeito de definir funções $f_1, \ldots, f_k$ com $\{f_i, f_j\} = 0$ é simplesmente dizer $(M, \{\cdot,\cdot\}) \xrightarrow{F} (\mathbb{R}^k, \{\cdot,\cdot\} \equiv 0)$ é uma aplicação de Poisson.
- $\mathbb{R}^{2n} = \{(q, p)\}$, o colchete de Poisson de Poisson é um colchete de Poisson.
- Mais geralmente, toda vez que tenha uma variedade simmplética (M, ω), então temos o campo hamiltoniano, e podemos definir como você já sabe $\{f, g\} := \omega(X_g, X_f) = dg(X_f) = -df(X_g)$. É isso é um colchete de Poisson, para vê-lo vai notar que Jacobi é equivalente a $d\omega = 0$.

  Qualquer colchete de Poisson que vem de uma estrutura simplética pode ser escrito como o colchete de Poisson de Poisson em coordenadas locais pelo teorema de Darboux.
- Considere o produto de $(M_1, \{\cdot,\cdot\}_1)$ e $(M_2, \{\cdot,\cdot\}_2)$ é $\varphi : M_1 \to M_2$, $M_1 \times M_2$. Então

$$\{f, g\}(x_1, x_2) = \{f(\cdot, x_2), g(\cdot, x_2)\}_1(x_1) + \{f(x_1, \cdot), g(x_1, \cdot)\}_2(x_2).$$

Exercício! Mostre que esse é um colchete de Poisson. Ainda, que as projeções são mapas de Poisson e os pullbacks de funções em cada M_i Poisson-comutam no produto, i.e.

$$\{p_1^* C^\infty(M_1), p_2^* C^\infty(M_2)\} = 0$$

$$\begin{tikzcd} & M_1 \times M_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd}$$

Solution. A antisimetria é imediata desde que $\{\cdot,\cdot\}_1$ e $\cdot,\cdot_2$ são antisimétricos. A condição de Jacobi não é imediata para mim:

$$\{f,\{g,h,\}\}(x_1,x_2) + \{g,\{h,f\}\}(x_1,x_2) + \{h,\{f,g\}\}(x_1,x_2) = ?$$

Bom calculemos

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\}(x_1,x_2) &= \{f(\cdot,x_2),\{g,h\}(\cdot,x_2)\}_1(x_1) + \{f(x_1,\cdot),\{g,h\}(x_1,\cdot)\}_2(x_2)\\
\{g,\{h,f\}\}(x_1,x_2) &= \{g(\cdot,x_2),\{h,f\}(\cdot,x_2)\}_1(x_1) + \{g(x_1,\cdot),\{h,f\}(x_1,\cdot)\}_2(x_2)\\
\{h,\{f,g\}\}(x_1,x_2) &= \{h(\cdot,x_2),\{f,g\}(\cdot,x_2)\}_1(x_1) + \{h(x_1,\cdot),\{f,g\}(x_1,\cdot)\}_2(x_2)
\end{aligned}$$

lo que yo digo es que puedo usar Jacobi en $\{,\}_1$ si veo que $\{g,h\}(\cdot,x_2)$ es igual a $\{g(\cdot,x_2),h(\cdot,x_2)\}_1$. Entonces calculo

$$\{g,h\}(\circ,x_2) \overset{\text{def}}{=} \{g(\cdot,x_2),h(\cdot,x_2)\}_1(\circ) + \{g(\circ,\cdot),h(\circ,\cdot)\}_2(x_2)\ldots$$

Por otro lado, creo que Leibniz sí jala:

$$\{f,gh\}(x_1,x_2) = \{f(\cdot,x_2),gh(\cdot,x_2)\}_1(x_1) + \text{otro lado}$$

mientras que

$$\Big(\{f,g\}h\Big)(x_1,x_2) = \{f(\cdot,x_2),g(\cdot,x_2)\}_1(x_1)h(x_1,x_2)\ldots$$

Em fim, ver que as projeções são mapas de Poisson significa que $p_1^*\{\cdot,\cdot\}$ $\square$

S variedade, considere uma família suave de estruturas simpléticas, i.e. $\omega_t \in \Omega^2(S)$ simpléticas. Considere as estruturas de Poisson associadas a cada uma delas, i.e. $\{\cdot,\cdot\}_t$. Então pode produzir um colchete em $M := S \times \mathbb{R}$ dado por

$$\{f,g\}(x,t) := \{f(\cdot,t),g(\cdot,t)\}_t(x).$$

Creo que es sólo pegar la estructura de Poisson para cada t.

1.4 Ponto de vista tensorial

Para isso precisamos de ***multivetores***, que é o análogo das formas diferenciais para campos vetoriais, i.e. seções do fibrado $\Lambda^\bullet(TM)$. I.e., $\mathfrak{X}^\bullet(M) = \Gamma(\Lambda^\bullet(TM))$.

Considere uma estrutura $\{\cdot,\cdot\}$ quase-Poisson em M. Então existe um único bivetor $\pi \in \Gamma(\Lambda^2(TM))$ tal que

$$\{f, g\} = \pi(df, dg)$$

O lance é que o colchete quase-Poisson não depende das funções, mas sim das diferenciais delas.

De fato,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{colchetes quase-P} \\ \{\cdot,\cdot\} \end{array} \right\} \leftrightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{campos de bivetores em } M \\ \pi \in \Gamma(\Lambda^2(TM)) \end{array} \right\}$$

Dizemos que $\pi \in \Gamma(\Lambda^2(TM))$ é um ***bivetor de Poisson*** se $\{f, g\} = \pi(df, dg)$ satisfaz Jacobi. Em coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n)$, um bivetor π sempre pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i<j} \pi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

de modo que qualquer colchete quase-Poisson, localmente se escreve desse jeito:

$$\{f, g\}(x) = \sum_{i,j} \pi_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

onde (creo que), em coordenadas locais, $\pi_{ij}(x) = \{x_i, x_j\}$.

Observação A condição de ser Jacobi nas funções π_{ij} é uma EDP muito difícil, tem outras formas de mostrar que algo é Jacobi além de resolvê-la.

2 Aula 2

Extra Estamos seguindo as notas de H. Burstzyn.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{colchetes quase-P} \\ \{\cdot,\cdot\} \end{array} \right\} \leftrightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{campos de bivetores em } M \\ \pi \in \Gamma(\Lambda^2(TM)) \end{array} \right\} \leftrightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \pi^\sharp : T^*M \to TM, \alpha \mapsto \pi(\alpha,\cdot), \\ \text{t.q.} (\pi^\sharp)^* = -\pi^\sharp \end{array} \right\}$$

Além disso, os mapas $\pi^\sharp$ são equivalentement pensados como mapas que mandam

$$df \mapsto X_f$$

$$\alpha \mapsto \pi(\alpha, \cdot)$$

Exercício Para (M_1, π_1), (M_2, π_2) de Poisson e $\varphi : M_1 \to M_2$, são equivalentes

- $\varphi : M_1 \to M_2$ é de Poisson.
- $X_{\varphi * f} \overset{\varphi}{\sim} X_f$ (os campos hamiltonianos são φ-relacionados)
- O seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
T_x M_1 \arrow[r, "d_x \varphi"] & T_{\varphi(x)} M_2 \\
T_x^* M_1 \arrow[u, "\pi_1"] & T_{\varphi(x)}^* M_2 \arrow[u, "\pi_2^\sharp"'] \arrow[l, "(d_x \varphi)^*"']
\end{tikzcd}$$

O ponto de vista tensioral nos da um jeito de definir a estrutura Poisson no produto mais natural

Terminologia ***Integrabilidade*** significa que $\{\cdot, \cdot\}$ é Jacobi.

2.1 Jacobiador

Dado um bivetor (sem condição de integrabilidade ainda) $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$, considere o colchete de Poisson associado, $\{f, g\} = \pi(df, dg)$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}_\pi : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \mathrm{Jac}_\pi(f, g, h) &= \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} \end{aligned}$$

Exercício

$$\mathrm{Jac}(f, g, h) = \mathcal{L}_{[X_f, X_g]} h - \mathcal{L}_{X_{\{f,g\}}} h = (\mathcal{L}_{X_f})(dg, dh)$$

Hint Use a regra geral para derivada de Lie de tensores.

Vamos ver que consequências temos.

Consequência π é de Poisson $\iff$

- $$\begin{aligned} C^\infty(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}^1(X) \\ f &\longmapsto X_f \end{aligned}$$

  é um morfismo de álgebras de Lie, i.e. $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$
- $L_{X_f} \pi = 0$.
- Temos um trivetor que vai ser zero $\iff$ o colchete é Poisson:

  $$\exists! \gamma_\pi \in \mathfrak{X}^3(M) = \Gamma(\Lambda^3 TM)$$

  $$\mathrm{Jac}(f, g, h) = \gamma_\pi(df, dg, dh)$$

  (para achar γ usamos que o Jacobiador só depende das diferenciais das funções).

Observação Em coordenadas locais, Jac $= 0 \iff \mathrm{Jac}(x_i, x_j, x_k) = 0$. I.e. como Jac é na verdade um tensor, pordemos pegar coordenadas locais e comprovar que é zero nas funções coordenadas.

Exemplo $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, coordenadas $(x_1, \dots, x_n$, se um bivetor

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

(lembre que $\pi_{ij} = \{x_i, x_j\}$) é tal que π_{ij} são constantes, automáticamente π é de Poisson, porque $\{x_k, \{x_i, x_j\}\} = 0$ já que é uma derivacão.

Exemplo (O colchete de Poisson é de Poisson) Porque

$$\pi_{\text{can}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}$$

tem π_{ij} constantes.

Exemplo (Toda superfície é de Poisson) Porque todo trivetor é zero.

Exemplo (Colchetes de Poisson em $\mathbb{R}^2$ são funções) Vamos falar mais disso depois. O Arnold tava estudando singularidades de funções desse jeito.

Exemplo ($\mathbb{R}^3$) Pensemos que $\mathbb{R}^3 = \{\xi = (x, y, z)\}$ e definamos

$$\{f, g\}(\xi) := \langle \xi, \nabla f|_\xi \times \nabla|_\xi \rangle$$

Você está convidado a ver que

$$\pi = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x}$$

Propriedade geral O colchete de Poisson sempre desce para o quociente (quando temos uma ação de um grupo de Lie).

Um exemplo disso é o espaço cotangente de um grupo de Lie, T^*G, onde aparece $\mathfrak{g}^*$. Sim, porque o fibrado (co)tangente de um grupo de Lie é trivial, então $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$.

2.2 Não temos derivada exterior mas…

Lembre: $\mathfrak{X}^k(M) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(\Lambda^k TM)$. Já temos uma coisa graduada:

$$\mathfrak{X}^\bullet(M) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \mathfrak{X}^k(M)$$

onde definimos $\mathfrak{X}^0(M) := C^\infty(M)$.

Definição (Colchete de Shouten-Nijenhuis)

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}^k(M) \times \mathfrak{X}^\ell(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^{k+\ell-1}(M)$$

satisfazendo

- $\mathbb{R}$-bilinear
- $[X,Y] = -(-1)^{(k-1)(\ell-1)}[Y,X]$
- $[X, Y \wedge Z] = [X,Y] \wedge Z + (-1)^{(k-1)\ell} Y \wedge [X,Z]$
- (Nos campos vetoriais é o colchete de Lie.) $Z \in \mathfrak{X}^1(M), \implies [Z,X] = \mathcal{L}_Z X$.

Teorema Existe um único colchete com essas propriedades. Além disso,

$$(-1)^{(k-1)(m-1)}[X,[Y,Z]] + (-1)^{(m-1)(\ell-1)}[Z,[X,Y]] + (-1)^{(\ell-1)(k-1)}[Y,[Z,X]] = 0$$

onde $|X| = k$, $|Y| = \ell$ e $|Z| = m$.

Isso significa que $(\mathfrak{X}^\bullet, [\cdot,\cdot])$ é uma ***álgebra de Poisson graduada*** (com grau -1). O Gerstenhaber faz uma teoria de deforma ção de lagneras de Lie onde aparem esses objetos.

Lance (Extra) Pode ver $[\pi,\cdot]$ como uma derivação $\mathfrak{X}^\bullet \to \mathfrak{X}^{\bullet+1}$ quando π é um bivetor.

Bom, queremos usar esse colchete para estudar as estruturas de Poisson de um jeito mais intrínseco.

Exercício Pegue um bivetor $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$.

- $[\pi, f] = -X_f \ \forall f \in C^\infty(M)$.
- (Todo mundo teria a capacidade de fazer essa conta.) Vale:

  $$\frac{1}{2}[\pi,\pi] = \gamma_\pi \qquad \text{(o Jacobiador)}$$

  Não é obvio mas a equação $[\pi,\pi] = 0$ é extremamante não trivial porque temos uma loucura de sinais. Mas o ponto é que se $[\pi,\pi] = 0$.

Observação Temos uma analogia para estruturas complexas, usando o colchete de Neihujaus, que é um colchete que mora em $\Omega^\bullet(M, TM)$ (TM-valued differential forms). Então quando ele se anula a estrutura quase-complexa vira complexa...

Observação $(x_1, \ldots, x_m)$ coordanadas, $\xi_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$, $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, $Y \in \mathfrak{X}^\ell(M)$.

$$X = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(x)\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} Y = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} b_{i_1 \ldots i_k}(x)\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}$$

pensando que isso daqui é só notação...

$$[X,Y] = \sum_i \frac{\partial X}{\partial \xi_i}\frac{\partial Y}{\partial x_i} - (-1)^{(k-1)(\ell-1)}\frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial Y}{\partial \xi_i}$$

que te lembra do colchete de Poisson original.