Prof. Luis Florit

Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/rg

Geometria Riemanniana

Índice

1 Aula 1

1.1 Lembrando

Definição ***Variedade diferenciável***

1. M espaço topológico Hausdorff (T^2), base enumerável. Essas duas condições são equivalentes à existência de partições da unidade.
2. M localmente euclídeo, i.e. $\mathcal{A} = \{(\chi_\lambda, U_\lambda)\}$, $\chi_\lambda : U_\lambda \subset M \to \chi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$, com $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$. Dizemos que n é a ***dimensão*** de M.
3. Restringindo dois abertos U_λ, U_μ com $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$, a ***mudança de coordenadas*** $\chi_\mu \circ \chi_\lambda^{-1} : \chi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \chi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ deve ser diferenciável. (Nesse curso diferenciável é C^∞ a menos que especifiquemos).
4. Maximalidade, i.e. $\mathcal{A}$ é maximal.

Definição (Mapa diferenciável) $f : M^n \to N^m$ se para todo ponto com cartas (x, U) de M e (y, V) de N o mapa $y \circ f \circ x^{-1}$ é diferenciável. Denotaremos o conjunto de funções diferenciaveis por $\mathcal{F}(M, N)$. Em particular $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$.

Definição (Espaço tangente) $\mathcal{F}_p(M)$ é o espaço de funções definidas num aberto de p identificando duas delas se coincidem em qualquer aberto contendo p.

$$T_pM := \{v \in \mathcal{F}_p(M)^* : v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)\}$$

Pergunta $\mathcal{F}_p(M)$ es el stalk de la gavilla de funciones suaves? Qué pasa si definimos algo como las derivaciones en $\mathcal{F}(U)$.

A la hora de definir base de T_pM con los operadores ∂_i necesitamos fijar una carta, así que en realidad no hay una base canónica de T_pM.

Definição (Diferencial de uma função)

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

definida para $g \in T_{f(p)}N$ como

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f)$$

Observação A regra da cadeia é uma tautologia dessa definição!

Definição (Base canônica do espaço tangente) Definimos

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pM$$

como, para $g \in T_pM$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(g) = \frac{\partial(g \circ x^{-1})}{\partial u_i}$$

Exercício Mostre que $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ é uma base de T_pM.

Solution. Primeiro note que $\{\partial_i|_p\}$ é linearmente independente. Suponha que

$$\sum a_i \partial_i|_p = 0$$

Then for every function this gives zero, so in particular for coordinate functions $x_i : U \to \mathbb{R}$, so

$$0 = \left(\sum a_i \partial_i\right) x_j = \sum a_i \delta_{ij} = a_j \qquad \text{for all } j.$$

Now let's check span $\partial_i|_p = T_pM$. Choose a vector $v \in T_pM$ and let

$$w := v - \sum_i v(x_i)\partial_i|_p.$$

We wish to show that $w = 0$.

Then there's the following trick: a function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $g(0) = 0$ can be written $g(t) = th(t)$ for some continuous function h (subexercise: construct h, it's an integral). So if we define $\tilde{g}(t) = g(t) - g(0)$ we can write for any $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (without asking that $g(0) = 0$) just $g(t) = g(0) + th(t)$

Subexercise Mostre que para toda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g(t) = g(0) - th(t)$. **Solution.** Let $m_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the function that multiplies t times a fixed number x. Notice that, for a fixed x, by fundamental theorem of Calculus

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(x) - g(0)$$

and also

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 g'(xt) \cdot x = x \int_0^1 g'(xt)dt$$

Then we define

$$h(x) := \int_0^1 g'(xt)dt$$

and immediately we get $g(x) = g(0) - xh(x)$.

Subsubexercise Now do that for $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. I think the correct claim is that there exists $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ such that for every $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ we have $g(\vec{x}) = g(\vec{0}) + \vec{x} \cdot h(\vec{x})$. **Solution.** Now m_x multiplies the vector x times the real number t, it is a function $m_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. We get

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(\vec{x}) - g(\vec{0}).$$

And also

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 \nabla_{t\vec{x}}g \cdot \vec{x}dt = \int_0^1 \sum \frac{\partial}{\partial x_i} g\Big|_{t\vec{x}} x_i dt = \sum x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{t\vec{x}}.$$

Definimos

$$h(\vec{x}) := \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1}\Big|_{t\vec{x}} dt, \ldots, \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_n}\Big|_{t\vec{x}} dt \right)$$

Back to the original exercise... Let's try to use this trick to conclude that $w(g) = 0$ for all $g \in \mathcal{F}_p$. Since it's a local statement I just suppose that g is a function $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Then there is a function $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ such that for every $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = g(0) + x \cdot h(x)$.

Right so remember that I chose an arbitrary vector $v \in T_pM$ and defined $w = v - \sum v(x_i)\partial_i|_p$. I can see that $w(x_i) = 0$ for all coordinate functions x_i. But also for g as above I get

$$\begin{aligned} w(g) &= w(g(0) + x \cdot h(x)) = w(x \cdot h(x)) = w\left(\sum x_i h_i(x)\right) = \sum w(x_i h_i(x)) \\ &= \sum \cancelto{0}{w(x_i)} h_i(x) + x_i h_i(x) \end{aligned}$$

and the second term also vanishes if we suppose that the coordinates of our point, x_i, are all zero. Which makes me think: I think that's the point of the trick, that it somehow manages to put the coordinates of the point inside the whole thing, and then we can suppose the coordinates are 0 and simplify everything. ∎

Definição (Fibrado tangente) Como os $\mathcal{F}_p(M)$ são disjuntos, porque M é Hausdorff, os espaços tangentes são disjuntos para pontos distintos.

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM$$

com a estrutura diferenciável que você já conhece.

A projeção natural $\pi : TM \to M$ é uma sumersão no sentido da seguinte definição. (Exercício?)

Definição (Imersão e sumersão)

1. Imersão se para todo $p \in M$, df_p é injetiva (e isso implica que $n \leqslant m$).
2. ***Sumersão*** de df_p é sobrejetiva para todo p, implicaq ue $n \geqslant m$.
3. ***Difeomorfismo local*** se para todo ponto df_p é um isomorfismo. Isso é equivalente a que para todo ponto existe um aberto tal que $f|_U : U \to V$ é um difemorfismo (teo. função inversa). (Checar.)

Note que $f : M \to N$ contínua é como dizer que a topologia induzida por f, $\tau_f \subset \tau_M$. Mas a igualdade nem sempre tem (e.g. figura 8). f é um ***mergulho*** se $\tau_f = \tau_M$. Isso é equivalente a que $f(M) \subset N$ seja uma subvariedade e $f : M \overset{\text{difeo}}{\simeq} f(M) \subset N$.

Definição (Campo coordenado) Numa vizinhança U de p,

$$\begin{aligned} \partial : U &\longrightarrow TU \subset TM \\ p &\longmapsto \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pM \end{aligned}$$

Observação Podemos quase extender esse campo. Num aberto $V \subset U$ cujo fecho $\bar{V} \subset U$. Pega a coberta $\{M\backslash\bar{V}, U\}$. Então existe part. unidade (ξ, φ). Por definição, $\varphi|_V = 1$. Defina $x = \varphi\partial_i$.

Definição (Fibrado vetorial) Um ***fibrado vetorial*** E^k sobre M^n de posto $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é

1. $\pi : E \to M^n$ submersão sobrejetiva.
2. $\forall p \in M$, $E_p = \pi^{-1}(p)$ é um $\mathbb{R}$-e.v. de dimensão k.
3. $\forall p \in M$, existe $p \in U \subset M$ y φ_U tal que
   (a) $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \overset{\text{dif}}{\simeq} U \times \mathbb{R}^k$.
   (b) φ_U conmuta con la proyección, i.e.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

(c) $\forall q \in U$, $\varphi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo linear.

Isso é equivalente a pedir que exista um ***atlas trivializante*** de E. É $\{(\varphi, \underbrace{\pi(U)}_{\subseteq E} : U \in \Lambda \subset \tau_M\}$ es decir una familia de abiertos en E indexada por una familia de abiertos de M. Considere dos de estos abiertos con $W := U \cap V \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{ccc} \varphi_U|_{\pi(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \times \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \\ \varphi_V|_{\pi^{-1}(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

onde estamos parametrizando numa variedade! Ou seja, implícitamente estamos pegando cartas nela, mas podemos deixá-lo assim.

Temos as funções de transição

$$\varphi_{VU} = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{W\times\mathbb{R}^k} : W \times \mathbb{R}^k \to W \times \mathbb{R}^k$$

que realmente estão determinadas por a parte linear:

$$\varphi_{VU}(Q, v) = (Q, \xi_{VU}(Q)(v))$$

onde

$$\xi_{VU} : W \to \mathsf{GL}(k, \mathbb{R})$$

e são chamadas de ***funções de transição*** de E. Elas satisfacem

$$\xi_{VU} \circ \xi_{SV} = \xi_{SU} \qquad \text{cocycle condition}$$

$$\text{no seria}\ldots \qquad \xi_{VU} \circ \xi_{US} = \xi_{VS}$$

Então podemos formar um fibrado vetorial a partir das funções de transição só.

2 Aula 2

2.1 Fibrados vetoriais

Definição Um ***fibrado vetorial*** é uma submersão sobrejetora

$$\pi : E \to M$$

onde π é a ***projeção***, E o ***espaço total*** e M a ***base***. Satisfazendo

1. E possui um ***atlas trivializante***, i.e. para todo $p \in M$ existe $U \ni p$ aberto e carta

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \overset{\text{difeo}}{\to} U \times \mathbb{R}^k$$

tal que

- $\pi \circ \varphi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$
- Se $W = U \cap V \neq \varnothing$,

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{W \times \mathbb{R}^k} : W \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow W \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\longmapsto (p, \xi_W(p)(v)) \end{aligned}$$

  onde pedimos que $\xi_{VU} : W \to \mathsf{GL}(k, \mathbb{R})$, e chamamos esas funções de ***funções de transição*** de E.

Note que as fibras são espaços vetoriais: para $Q \in U$, $E_Q \overset{\text{def}}{=} \pi^{-1}(Q) \subset E$. Pegue dois elementos $x, y \in E_Q$. Definimos a soma deles a traves de

$$\varphi(x + y) = (Q, \bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)) = (Q, \bar{\varphi}(x + y))$$

onde $\bar{\varphi}$ é a parte "linear". Note que isso faz automaticamente que as trivializações sejam lineares nas fibras, i.e. $E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ linear.

Definição As ***seções de*** E são

$$\Gamma(E) = \left\{ \begin{tikzcd} \lambda : M \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & E \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd} \right\}$$

Pergunta Existe uma coleção de k seções que são uma base de T_pM em cada ponto? Não.

Observação Existe uma base de seções iff $E \cong M \times \mathbb{R}^k$. Mas isso ainda nem tem sentido...

Definição Um ***mapa de fibrados*** é

$$\begin{tikzcd} F : E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & E \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

que é linear nas fibras, i.e.

$$F|_{E_Q} : E_Q \to E'_{f(Q)}.$$

F é um ***isomorfismo*** de fibrados vetoriais iff F é um difeomorfismo e um mapa de fibrados. (Obviamente isso implica que a inversa é um mapa de fibrados.)

Observação Todo fibrado vetorial possui uma base *local* de seções. Porque pego uma base em $U \times \mathbb{R}^k$ numa trivialização local e pusho ela pra $\pi^{-1}(U)$.

Exemplo (Fibrado dual) A observação anterior nos da um jeito super simples de construir o fibrado dual: para cada trivializacão local, e para cada ponto definimos a base dual do espaço vetorial original no ponto, e é isso, tudo segue.

Outros exemplos podem ser construidos do mesmo jeito: $\mathrm{End}(E)$, $\Lambda^r(\mathbb{V})$. A ideia e que "a álgebra linear pode ser fibralizada por causa de que temos bases locais".

Exemplo

Outro exemplo, embora não é um fibrado vetorial, é o conjunto de orientações de $\mathbb{V}$, $\mathcal{O}(\mathbb{V}) := \{\text{bases de } \mathbb{V}\}\big/\sim$. Definimos um ***fibrado orientável*** se $\mathcal{O}(E)$ tem uma seção global. Isso se traduz a que em cada ponto exista uma carta tal que a orientaçao.. seja compatível?

Também podemos definir M ***orientável*** se TM orientavel *como fibrado*. TM sempre é orientavel *como variedade* porque TTM é orientável *como fibrado*.

Exemplo (Tensores=aplicações multilineares) Pega $\mathbb{V}$ esp. vect e considere os tensores $\{T : \mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}\} := \mathrm{Multi}(E)$. As seções disso são $\mathfrak{X}^r(E)$. No caso do fibrado tangente se denotam $T \in \mathfrak{X}^r(M) \overset{\text{def}}{=} \Gamma TM$, e se chamam ***campos tensoriais***.

2.1.1 Tensores

Ver [Tu17], prop. 21.11 "The tensor criterion": acho que em aula definimos $\mathfrak{X}^r(M)$ como sendo o conjunto de mapas r-multilineares $T : M \to \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{r\text{ vezes}}$, mas na verdade deveria ser $(T^*M)^r := \bigotimes_r T^*M$. (Devemos pegar produto tensorial para construir um fibrado vetorial certinho.)

Exercício Mostre que os seguintes dois $\mathcal{F}(M)$-módulos são isomorfos:

$$\left\{\begin{array}{l} T : M \longrightarrow (T^*M)^r \\ \qquad p \longmapsto \underbrace{T(p) : (T_pM)^r \longrightarrow \mathbb{R}}_{r\text{-}\mathbb{R}\text{-multilinear}} \end{array} \quad \text{suave} \right\} = \Gamma((T^*M)^r) = \{\text{seções suaves de } (T^*M)^r\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{T} : \mathfrak{X}^r(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ X_1, \ldots, X_r \longmapsto \hat{T} : M \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \quad r\text{-}\mathcal{F}(M)\text{-multilinear} \right\}$$

Solução. Defina o primeiro conjunto como A e o segundo como B. Pegue $T \in A$ e defina

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathfrak{X}^r(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ V_1, \ldots, V_r &\longmapsto \hat{T} : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad p \longmapsto T(p)(V_{1,p}, \ldots, V_{r,p}) \end{aligned}$$

Ao contrário, pegue $\hat{T} \in B$ e defina

$$\begin{aligned} T : M &\longrightarrow (T^*M)^r \\ p &\longmapsto \begin{array}{l} T(p) : (T_pM)^r \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (v_1, \ldots, v_r) \longmapsto \hat{T}(V_1, \ldots, V_r) \end{array} \end{aligned}$$

onde V_i é uma extensão de v_i usando partição da unidade.

O lance em [Tu17] é usar a propriedade universal do tensor product (qualquer mapa $A \times B \to X$ se factora por um único mapa $A \otimes B \to X \dots$) para comprovar a suavidade daquele mapa. $\square$

Upshot (del ejercicio) Que es lo mismo pensar en un operador que come campos vectoriales y da funciones, o un campo *covectorial*, una cosa que en cada punto me da un operador que come vectores.

Siguiente cosa (A dupla personalidade dos campos vetoriais) Que podemos pensar que los campos vectoriales son derivaciones. $\hat{X} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$. Sí porque un campo de vectores en un punto puede ser evaluado en una función y da un número, y bueno satisface Leibniz.

Va otra construcción:

E, pega $\Lambda^r(E)$, os mapas r-alternantes de E, que é um fibrado vetorial. As seções dele, $\Gamma(\Lambda^r E)$. No caso do fibrado tangente, $\Omega^r(M) := \Lambda^r(TM)$. Entonces a ver de nuevo: pega $\omega \in \Lambda^r TM$. En cada punto me da una aplicación e-multiniear alternante, pero también lo puedo ver como un mapa $\omega : \mathfrak{X}M \times .. \times \mathfrak{X}M \to \mathcal{F}M$.

Exercício M^n é orientável $\iff$ $\Lambda^n M$ possui seção nunca nula.

Solution. ($\Longrightarrow$) Em cada ponto $p \in M$ temos uma base orientada $\{e_i\}$ de T_pM. Essa base me permite expressar qualquer coleção de n vetores $v_1, \dots, v_n \in T_pM$ como uma matriz (v_j^i). O determinante dessa matriz é uma n-forma alternante.

Note que essa função está bem definida na classe Definindo $\omega_p(v_1, \dots, v_n) = \det v_j^i$ obtemos uma seção não nula de $\Lambda^n M$.

Para argumentar que essa é uma correspondência suave devemos argumentar que o mapa $\mathcal{O}(M) = \{\text{bases}\}/\sim \longrightarrow \Lambda^n TM$ é suave. Para isso deveríamos olhar para a estrutura diferenciável de $\mathcal{O}(M)$.

($\Longleftarrow$) Pegue $\omega \in \Lambda^n TM$, qualquer ponto $p \in M$ e uma base $\{v_i\} \subset T_pM$ tal que $\omega_p(v_i) = 1$. Afirmo que $p \mapsto [\{v_i\}] \in \mathcal{O}(M)$ é uma seção global de $\mathcal{O}(M)$. $\square$

Lembre que $\Omega_c^n(M)$ é o espaço de formas cujo suporte tem fecho compacto.

Observação M orientada $\Longrightarrow$ integral está bem definida. Sim, porque o teorema de mudança de variáveis diz que para $\varphi : U \to V$, $\omega \in \Omega^n(V)$, $\int_U \varphi^* \omega =$ *sinal!* $\int_V \omega$. Então para que não se faça uma bagunça precisamos que os determinantes das mudanças de coordenadas coincidam.

Definição (Fibrado pullback)

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

onde

$$f^*(E) = \{(p,v) \in M \times E : \pi(v) = f(p)\}$$

(Note que botamos o p em (p,v) para obter que o espaço total de $f^*(E)$ seja uma coleção *disjunta* de fibras.)

Essa é uma definição ótima. Note que π_2 é um mapa de fibrados que aparece de graça. (Não é um isomorfismo.)

Observação O pullback é mágico porque ele leva todas as propriedades de E como curvatura, conexão, etc.

Observação Se f é constante obtemos o fibrado trivial.

Pergunta Me queda claro que si f es constante, la fibra de f^*E siempre es $(f^*E)_p \cong E_{f(*)} \ldots$

Observação Pega $\xi \in \Gamma(f^*E)$. Então temos para $p \in M$ um elemento $\xi(p) = (p, \bar{\xi}(p))$. Então olha

$$\begin{tikzcd} \bar{\xi} : M \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

então essas seções se chamam de $\mathfrak{X}_f \cong \Gamma(f^*(E))$ ***seções ao longo de*** f.

Entonces el punto es que, por construcción cada sección del pullback me da un elemento en el otro vb y de ahi quiero que la proyección me devuelva f.

Note que para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos um campo f_*X que *não é* um campo vetorial em N. É um campo vetorial com base M e espaço total f^*TN. Parecidamente, se $Y \in \mathfrak{X}(N)$, obtemos um campo sobre M com valores em f^*TN mediante $Y \circ f$.

Definição Dos campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están f-***relacionados*** $X \overset{f}{\sim} Y$ se $Y \circ f = f_*X$ donde $f : M \to N$. Pero pérame porque a mí me habían dicho que no siempre f_*X está bien definido. Ah, porque aquí f_*X es un campo *ao longo de* f; así *siempre* está bien definido. Entonces tiene sentido la definición y el ejercicio:

Exercício Pegue $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$, $i = 1, 2$. Mostre que

$$X_i \overset{f}{\sim} Y_i \implies [X_1, X_2] \overset{f}{\sim} [Y_1, Y_2]$$

Hint. Pensa que um campo é uma coisa que pega uma função e me da uma função.

Solução. Queremos ver que

$$f_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ f \in \mathfrak{X}_f$$

i.e. que esses campos são iguais *como campos vetoriais ao longo de* f, que é um negócio bem estranho porque, de novo, o espaço base é M e o espaço total é f^*TN (que é bem parecido a TN mas não é TN—pode ser incluído eu acho).

E isso é super importante porque esclarece o jeito de proceder que é: pega $p \in M$ e $g \in \mathcal{F}(N)$. Beleza então temos

$$\begin{aligned}\Big([Y_1, Y_2] \circ f\Big)_p(g) &= Y_{1,f(p)}\Big(Y_2(g)\Big) - Y_{2,f(p)}\Big(Y_1(g)\Big) \qquad \text{blz} \\ &\overset{\text{hip}}{=} f_* X_{1,p}\Big(Y_2(g)\Big) - f_* X_{2,p}\Big(Y_1(g)\Big) \\ &\overset{\text{hip}}{=} f_* X_{1,p}\Big(f_* X_2(g)\Big) - f_* X_{2,p}\Big(f_* X_2(g)\Big) \\ &= f_*[X_1, X_2]_p(g).\end{aligned}$$

□

2.2 Grupos de Lie

Definição Um ***grupo de Lie*** é um grupo G que é uma variedade diferenciável tal que

$$\cdot : G \times G \to G \qquad\qquad {}^{-1} : G \to G$$

são diferenciaveis.

Os grupos de Lie tem um monte de difeomorfismos dados pela multiplicacão a esquerda: $h \in G \rightsquigarrow L_h : G \to G$, $L_h(g) = h \cdot g$. Como $L_{h^{-1}} \circ L_h = \mathrm{Id}$, $L_h \in \mathrm{Dif}\, G$.

Exercício $v \in T_e G$, $X_v(g) = d(L_g)_e(v) \in T_g G$, $\implies X_v \in \mathfrak{X}(G)$. **Note** que vai precisar usar que o produto do grupo é diferenciável.

Solução. Basta mostrar que, pegando qualquer vizinhança coordenada de qualquer ponto $g \in G$, as funções coordenadas de X_v são diferenciáveis.

Pegue um sistema de coordenadas em $g \in G$, digamos (U, x). Como L_g é um difeomorfismo, obtemos um sistema de coordenadas $(L_{g^{-1}}(U), x')$ de $e \in G$. Suponha que $v = \sum v^i \partial_i$ nessas coordenadas. Então

$$\begin{aligned}(d_e L_g)v &= (d_e L_g)\left(\sum v^i \partial_i\right) \\ &= \sum (v^i \circ L_g) d_e L_g \partial_i\end{aligned}$$

Então essas funções coordenadas são suaves: para $h \in G$ temos

$$(v^i \circ L_g)(h) = v^i(gh)$$

que é suave porque é a composição de duas funções suaves, e porque o produto do grupo de Lie é suave. □

E aí fica que uma base $\{v_i\} \subset T_e G$ nos da uma base global de seções. Em outras palavras, o fibrado tangente de um grupo de Lie é trivial. Isso é raríssimo, uma variedade com fibrado tangente trivial, se chama variedade paralelizável.

Observação $\forall g \in G, X_v \overset{L_g}{\sim} X_v$ para todo $v \in T_eG$. Acho que é por regra da cadeia. Queremos ver que em todo ponto $g \in G$,

$$\Big((L_g)_*(X_v)\Big)_h = (X_v)_h$$

então fica que

$$\Big((L_g)_*(X_v)\Big)_h = \Big((d_{g^{-1}h}L_g)(d_eL_{g^{-1}h})v\Big)_h = \Big(d_e(L_g \circ L_{g^{-1}h})v\Big)_h = \Big(d_eL_hv\Big)_h = (X_v)_h$$

Mas ainda, se um campo vetorial X está L_g relacionado com ele mesmo para todo $g \in G$ (isso se chama ser ***invariante à esquerda***), então ele é um X_v para algum v. Conta:

$$v := X_e \implies X_h = (L_{h,*}X)_h = (d_eL_hX_e)_h = d_eL_hv.$$

Então ai fica essa equivalência, e ademais, se pegamos $v, w \in T_eG$ podemos pensar em X_v, X_w, e *definimos* $X_{[v,w]} := [X_v, X_w]$. E ai obtemos a ***álgebra de Lie*** de G, que é $(T_eG, [,]) := \mathfrak{g}$.

Mais um Pegue $X \in \mathfrak{g}$ e γ curva integral de X passando por e, i.e. $\gamma(0) = e$. Prove que

1. Se φ_t é o fluxo de $X \implies L_g \circ \varphi_t = \varphi_t \circ L_g$, $\varphi_t = R_{\gamma(t)}$.
2. γ é homomorfismo de grupos $\mathbb{R} \to G$. Isso permite definir $\exp^G : \mathfrak{g} \to G$ dada por $\exp^G(X) = \gamma(1)$. Prove que $\exp^G(tX) = \gamma(t)$.

   Hint. O último implica os outros.

Solução.

1. Pegue $h \in G$. O único que sei de φ_t é que

   $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(h) = X_h$$

   E quero ver que

   $$\varphi_t(gh) = (\varphi_t \circ L_g)(h) \overset{\text{quero}}{=} (L_g \circ \varphi_t)(h) = g\varphi_t(h) = L_g(\varphi_t(h))$$

   Então derivo:

   $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(gh) = X_{gh} \overset{\text{def}}{=} d_eL_{gh}(X_e) \overset{\substack{\text{chain}\\\text{rule}}}{=} d_hL_gd_eL_h(X_e) \overset{\text{def}}{=} d_hL_gX_h = d_hL_g\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(h)\right)$$

   de forma que as derivadas das coisas que quero que sejam iguais coincidem. Avaliando em $t = 0$ vemos que as funções devem ser iguais.

   A comprovação de que $\varphi_t = R_{\gamma(t)}$ é análoga: definindo $X := X_X$ (e é assim porque $X \in \mathfrak{g}$), tenho duas funções

   $$\begin{aligned} R_{\gamma(t)} : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g \cdot \gamma(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_t : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto \substack{\text{integro } X_g \\ \text{e avanço } t} \end{aligned}$$

Derivo:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g\cdot\gamma(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (L_g\circ\gamma)(t) \overset{\substack{\text{chain}\\ \text{rule}}}{=} d_eL_g\cdot\gamma'(0) = X_g = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi_t(g)$$

avaliando em $t = 0$ obtemos a igualdade.

2. Talvez tô errado mas acho que é o mesmo: queremos ver que

$$\gamma(t_1+t_2) \overset{\text{quero}}{=} \gamma(t_1)\gamma(t_2) \overset{\text{def}}{=} L_{\gamma(t_1)}\gamma(t_2)$$

então derivo respeito a t_2

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt_2}\right|_{t_2=0} L_{\gamma(t_1)}\gamma(t_2) &\overset{\substack{\text{chain}\\ \text{rule}}}{=} d_{\gamma(0)}L_{\gamma(t_1)}\gamma'(0) = d_eL_{\gamma(t_1)}X_e\\ &= X_{\gamma(t_1)} \overset{\substack{\gamma\text{ curva}\\ \text{integral}}}{=} \gamma'(t_1) = \left.\frac{d}{dt_2}\right|_{t_2=0}\gamma(t_1+t_2)\end{aligned}$$

e de novo, avaliando em $t_2 = 0$ obtemos a igualdade.

Por fim, para o último exercício queremos achar uma curva integral de tX, t fixo, i.e.

$$\tilde{\gamma}:\mathbb{R}\to G \qquad \text{tal que} \qquad \tilde{\gamma}'(s) = (tX)_{\gamma(\tilde{s})}\forall s\in\mathbb{R}.$$

Sinto no cora que

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(ts) \qquad \text{vai dar certo.}$$

Então derivo

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s}\tilde{\gamma}(s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s}\gamma(ts) = \gamma'(ts)t = X_{\gamma(ts)}t = (tX)_{\gamma(ts)} = (tX)_{\tilde{\gamma}(s)}$$

olha só

$$\exp^G(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t).$$

□

3 Aula 3: A primeira aula

3.1 Lembrando geometria diferencial de curvas e superfícies

A história começa com o Gauss em 1827.

A geometria de superfícies se faz assim. Pega $p\in M^2\subset\mathbb{R}^3$. Pode botar uma métrica canônica usando a inclusão i, i.e.

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_p : T_pM^2\times T_pM^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (v,w) &\longmapsto \langle i_{*,p}v, i_{*,p}w\rangle_p\end{aligned}$$

Também pode só derivar curvas na superfície, obtendo vetores em $\mathbb{R}^3$, e usando o produto usual de $\mathbb{R}^3$.

O Gauss definiu o mapa normal $N(p)$, derivando ele para obter

$$A := d_p N : T_p M^2 \to T_p M^2$$

que ressoltou ser um endomorfismo autoadjunto (respeito a aquela métrica que a gente falou). Dai apareceram

$$\operatorname{tr} A = H \qquad \text{curvatura média}$$

$$\det A = K \qquad \text{curvatura Gaussiana}$$

E ai o Gauss descobriu que K depende s ó da métrica, i.e. $K = K(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. A curvatura média não. (E.g. um plano pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^3$ como um cilindro, K fica igual, enquanto H muda.)

3.2 Riemann

Definição Uma ***variedade Riemanniana*** é uma variedade diferenciável M^n junto com um tensor

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

simétrico e positivo definido. Isso significa que para cada $p \in M$ temos uma forma bilinear simétrica positiva definida $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$.

A variedade é ***semi-Riemanniana*** se, em lugar de positivo definido, o tensor é não degenerado, i.e. $\forall v \in T_p M$, se $\langle v, w \rangle_p = 0 \ \forall w \in T_p M$, então $v = 0$. Nesse caso, definimos o ***índice*** da forma como sendo

$$i(\langle \cdot, \cdot \rangle_p := \max \left\{ \dim \mathbb{L} \overset{\text{sub}}{\subset} T_p M : \langle \cdot, \cdot \rangle |_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}} < 0 \right\}$$

Bom pegue um sistema coordenado (x, U). Podemos definir para $Q \in M$

$$g_{ij}(Q) := \langle \partial_i(Q), \partial_j(Q) \rangle \in \mathcal{F}(U)$$

i.e.

$$(g_{ij})_Q : U \longrightarrow \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathsf{Sym}(n)$$

ou seja, a variedade é Riemanniana quando essas funções são positivas.

Se a variedade é Riemanniana temos uma norma $\|v\| := \sqrt{v, v}$. (Se não não.)

Observação A definição de variedade Riemanniana foi dada por Weil nos anos 30.

Definição (Isometrias) $f : M \to N$. Primeiro note que podemos definir o pullback de qualquer tensor. Para $f : M \to N$ e T tensor da forma $T : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathcal{F}(N)$, definimos

$$f^*(T)_p(u, v)_p := T(f(p))(f_* u, f_* v)$$

Note que de graça é simétrico se o tensor em N é simétrico.

Para ver positivo definido temos que o pullback é positivo definido $\iff$ f é um imersão. Prova: considera a norma. A norma de $f_{*,p}u$ é positiva $\iff$ $u \neq 0$. Para asegurar que a preimagem desse vetor também não é zero precisamos que seja imersão (=diferencial injetiva).

Conclusão: apenas as imersões podem ser isometrias.

$f : (N^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_N) \longrightarrow (M^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ é uma ***imersão isométrica*** se $\langle \cdot, \cdot \rangle_N = f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_M$.

Uma ***isometria*** entre variedades Riemannianas é $f : M^n \to \tilde{M}^n$ difeomorfismo e isometria (como imersão).

Uma ***isometria local*** é um difeo local e isometria.

Observação (Isomorfismos canônicos) Para qualquer espaço vetorial $\mathbb{V}$, temos um *isomorfismo canônico* (i.e. não depende de escolha de base) $\mathbb{V}^n \cong T_p\mathbb{V}^n$ dado por

$$\mathbb{V}^n \ni v \longmapsto \alpha'_{p,v}(0), \qquad \alpha_{p,v}(t) = p + tv$$

Tem outro isomorfismo canônico: $M \ni p, M' \ni p'$,

$$T_{(p,p')}(M \times M') \cong T_pM \times T_{p'}M'$$
$$w \longmapsto (\pi_{*,(p,p')}(w), \pi'_{*,(p,p')}(w))$$

onde

$$\begin{tikzcd} & M \times M' \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ M & & M' \end{tikzcd}$$

Exercício Mostre que o inverso desse mapa ai é

$$(\pi_{*,(p,p')}(w), \pi'_{*,(p,p')}(w)) \longmapsto (i_p)_{*p'}(v') + (i'_{p'})_{*p}(v)$$

com as inclusoes naturais.

Solução. Acho que as definições certinhas das inclusões são assim:

$$\begin{aligned} i_{p'} : M &\longrightarrow M \times M' & \qquad i'_p : M' &\longrightarrow M \times M' \\ q &\longmapsto (q, p') & q' &\longmapsto (p, q') \end{aligned}$$

que tem diferenciais

$$\begin{aligned} (i_{p'})_p : T_pM &\longrightarrow T_{(p,p')(M \times M')} & \qquad (i_p)_{p'} : T_pM &\longrightarrow T_{(p,p')}(M \times M') \\ v &\longmapsto ? & v' &\longmapsto ? \end{aligned}$$

Intento 1 Para visualizar melhor como funcionam esses mapas considere pegue coordenadas (x, x') de $M \times M'$ (o que significa por definição da variedade produto que x são coordenadas de M e x' de M'). Fica que $\{\partial_i\}$ é base de T_pM e $\{\partial'_i\}$ de $T_{p'}M$. Então

$$v = \sum v_i \partial_i \xmapsto{(i_{p'})_{*p}} \sum v_i \partial_i + \sum 0 \partial'_i \leftrightsquigarrow (v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0)$$

O resultado é bastante claro daí. Mas... não é ponto de tudo isso que o isomorfismo é *independente da escolha de base...*?

Intento 2 Copiemos a prova de que $\mathbb{V}^n \cong T_p\mathbb{V}^n$ canonicamente... acho que só escrevendo

$$v := \gamma'(0), \qquad \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M, \gamma(0) = p$$

Obtemos

$$(di_{p'})_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(i_{p'} \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\gamma(t), p) = (\gamma_*(0), 0)$$

definindo analogamente γ' (aqui $'$ não é derivada...) de forma que

$$v + v' = (\gamma_*(0), \gamma'_*(0))$$

é projetado "canonicamente" (=sem usar bases...) em v e v' quando aplicamos $\pi_{*,(p,p')}(v+v')$ e $\pi'_{*(p,p')}(v+v')$, respetivamente. (É só escrever igualzinho que acima compondo com a projeção...) E acho que é isso. $\square$

Cuidado (Não entendi muito isso aqui) Nem sempre é certo que $T(M \times M') \cong$"$TM \times TM$". Porque as funções coordenadas dependem de dois parámetros: $Z \in \mathfrak{X}(M \times M')$, $Z = X + X'$,

$$\sum a_i(p, p')\partial_i|_p + \sum_j b_j(p, p')\partial_j$$

Exemplo

1. $\mathbb{R}^n$ com o produto canônico usando o isomorfismo canônico de $\mathbb{R}^n \cong T_p\mathbb{R}^n$ acima.
2. (Grupo de Lie.) $h \in G$, L_h traslação a esquerda. Usemos as traslações a esquerda para definir uma métrica em G. Pegue qualquer produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ em $\mathfrak{g}$. E traslade:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_h := L_h^* \langle\cdot,\cdot\rangle_e$$

i.e.,

$$\langle v, w\rangle_h = \langle dL_{h^{-1}}(v), dL_{h^{-1}}(w)\rangle_e$$

Exercício

(a) Isto define uma métrica Riemanniana em G.

(b) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $\langle X, Y\rangle = $ cte.

(c) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é ***invariante a esquerda***, i.e. $\forall h \in G$, L_h é isometria de $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Observação Essa métrica é invariante a *a esquerda*. Nem tem que ser invariante a direita.

Observação Vai ter um exercício de do Carmo dizendo que se G é compacto vai ter uma métrica bi-invariante, i.e. o promédio.

dani: parece que sempre que temos uma ação homogênea podemos transportar a métrica de $\mathfrak{g}$ pra todos lados.

Solução.

(a) Acho que aqui sale facilzinho porque L_h é um difeomorfismo, i.e. os espaços tangentes são isomorfos, então temos a propriedade de ser positiva definida.

(b) É por definição de campo vetorial gerado por traslações a esquerda.

(c) Por definição de isometria... tipo–essa métrica está feita para que as traslações sejam isometrias.

$\square$

3. $M^n \subset \mathbb{R}^{n+p}$ subvariedade regular (=inclusão é um mergulho). Podemos fazer o que Gauss fez:
$$\langle u, v\rangle_p := \langle i_{*,p}u, i_{*,p}v\rangle_{\text{can}}^{\mathbb{R}^{n+p}}$$

Pergunta Será que toda variedade Riemanniana admite um mergulho isométrico em algum $\mathbb{R}^{n+p}$? Quem é p?

Nash O caso C^1 é fácil,

Pergunta (dani) Em topo dif vimos primeiro uma prova de que pode mergulhar qualquer variedade em um $\mathbb{R}^N$ com N muito grande. Depois os teoremas de Whitney mostrarem que N pode ser mais o menos pequeno. Aqui podemos mostrar que o mergulho/imersão existe para $N \gg$ mais o menos facilmente?

Proposição (Existência de métricas Riemannianas) Se M é uma variedade diferenciável, existe uma métrica Riemanniana em M.

What que em toda variedade tem um aberto denso difeomorfo a uma bola.

Demostração. Pegue um atlas $\{(X_\lambda, U_\lambda)\}$ localmente finito para usar uma partição da unidade subordinada $\{\rho_\lambda\}$. Pega qualquer carta e puxe a métrica de $\mathbb{R}^n$, i.e. se $x_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x_\lambda^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$ é uma métrica riemanniana em U_λ.

$\rho_\lambda x_\lambda^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$. Fica um tensor simétrico *semi* positivo definido, i.e. $\geqslant 0$.

No final define para $p \in M$, $v \in T_pM$,
$$\langle v, v\rangle := \sum_{\lambda | \rho_\lambda(?)>0} \rho_\lambda(p)\|(x_\lambda)_{*,p}v\|^2 > 0$$
i.e. fica positiva. $\square$

Definimos o angulo entre $v, w \in T_pM$ como satisfazendo
$$\cos(\text{angulo}(v, w)) := \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

Soft exercise Ortogonalize Gram-Schmidt uma base $\{v_i\}$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ para obter uma base ortonormal $\{e_i\}$ (com a mesma orientação).

Observação O processo pode ser feito igualzinho para campos vetoriais: se $X_1, \dots, X_n$ é uma base local de campos, $\exists!$ base ortonormal de campos $\{e_i\}$. **Cuidado:** em geral, o colchete desses campos não é zero, i.e. $[e_i, e_j] \neq 0$.

Proposição (Elemento de volume) M^n variedade Riemanniana orientada $\implies$ $\exists!\ \omega \in \Omega^n(M^n)$ tal que

$$\omega(\text{bon+}) = 1$$

bon+=base ortonormal orientada.

Lembre Para duas top-forms, uma se expressa como a outra multiplicando pelo determinante da mudança de base.

Demostração. Como M é orientada, sabemos que $\exists \sigma \in \Omega^n(M^n)$ positiva. Buscamos a função f tal que $\omega = f\sigma$. Pega um ponto, bases coordenadas $\{\partial_i\}$ e ortonormaliza para obter $\{e_i\}$. Como queremos que

$$\omega(e_1, \dots, e_n) \overset{\text{quero}}{=} 1 \overset{\text{quero}}{=} f|_U \sigma(e_1, \dots, e_n)$$

só tem um jeito de definir f:

$$f|_U = \sigma(e_1, \dots, e_n).$$

E isso determina por completo f como uma função global suave, e portanto temos ω. □

References

[Tu17] L.W. Tu. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017.