Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/rg

Lista 7

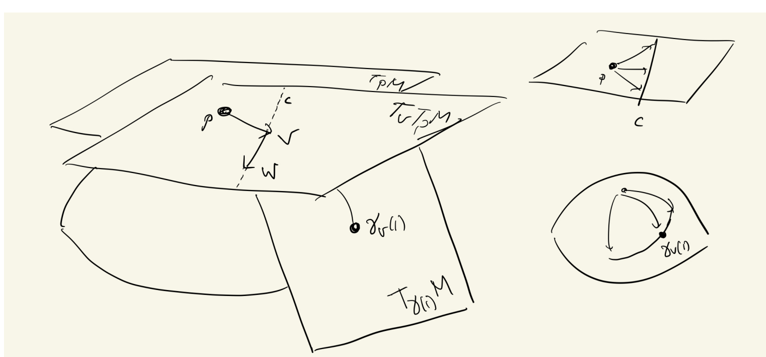
Exercício 1 (Lema de Klingenberg, [dC79], Cap. X, Exer. 1) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leqslant K_0$ onde K_0 é uma constante positiva. Sejam $p, q \in M$ e seja γ_0 e γ_1 duas geodésicas distinas unindo p a q com $\ell(\gamma_0) \leqslant \ell(\gamma_1)$. Admita que γ_0 é homotópica a γ_1, isto é, existe uma família contínua de curvas α_t, $t \in [0,1]$ tal que $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_1 = \gamma_1$. Prove que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\ell(\gamma_0) + \ell(\alpha_{t_0}) \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}$$

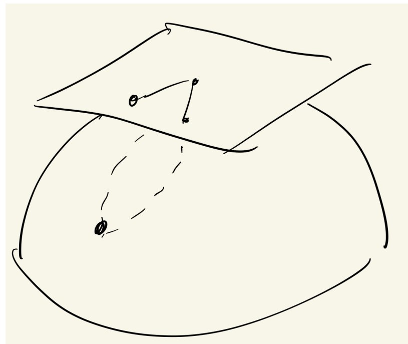
Solução. Primeiro vou mostrar como usar o teorema de Rauch para assegurar que para qualquer $p \in M$, a exponencial em $p \in M$ não possui pontos críticos na bola de raio $\pi/\sqrt{K_0}$ centrada em $0 \in T_pM$.

O seguinte argumento mostra que qualquer geodésica γ com velocidade unitária partindo de p não possui pontos conjugados antes de alcançar comprimento $\pi/\sqrt{K_0}$. Fixe um campo de Jacobi $J \in \mathfrak{X}^J_\gamma$ tal que $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. Para aplicar Rauch, considere uma geodésica unitária $\tilde{\gamma}$ em $S^n_{K_0}$, a esfera de curvatura constante K_0, e um campo de Jacobi $\tilde{J} \in \mathfrak{X}^J_{\tilde{\gamma}}$ tal que $\tilde{J}(0) = 0$, $\langle \tilde{J}, \tilde{\gamma}' \rangle = 0$ e $|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|$. ($\tilde{J}$ existe por ser a solução da equação de Jacobi junto com a condição de ortogonalidade com $\tilde{\gamma}'$.) Como $K \leqslant K_0$, pelo lema de Rauch concluímos que $0 \leqslant |\tilde{J}| \leqslant |J|$ para $t < \pi/\sqrt{K_0}$.

Agora vou argumentar por que isso assegura que $\exp_p$ não pode ter pontos críticos em $p \in M$. Por contrapositiva, suponha que $\exp_p$ tem um ponto crítico em $v \in T_pM$ e vamos mostrar que existe um ponto conjugado q a p ao longo de γ. Como v é um ponto crítico de $\exp_p$, existe um vetor não nulo $w \in \ker d_v \exp_p$. Considere uma curva $c(s)$ tal que $c(0) = v$ e $c'(0) = w$. Temos a seguinte variação por geodésicas de γ: $\gamma_{c(s)}(t) = \exp_p(tc(s))$. Note que em $t = 0$ todas as geodésicas ficam em p, pelo que o campo variacional J se anula em p. O fato de que $d_v \exp_p(w) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \exp_p(c(s)) = 0$, é exatamente o fato de que o campo variacional J se anula em $q = \gamma_v(1)$.



Portanto, $\exp_p$ é um difeomorfismo local sobrejetivo em $B_{\pi/\sqrt{K_0}}$, mas pode não ser injetivo:



Note que podemos levantar tanto γ_0 quanto γ_1 por ser geodésicas, i.e. pegamos os vetores velocidade de cada uma e as linhas que eles geram no espaço tangente a p; é claro que essas curvas são levantamentos de $\exp_p$. Note que se levantássemos a homotopia completa, necessariamente $\gamma_0 = \gamma_1$. Isso segue simplesmente de que não pode ter uma família contínua de curvas começando em um ponto e terminando em outro.

Dúvida Realmente meu argumento chegou até aqui: como estão construídos os levantamentos das curvas perto de γ_0? Em [dC79] simplesmente se afirma que é claro que podemos levantar as curvas perto de γ_0, mas que não será possível levantar a homotopia completa.

Eu só sei que podemos levantar γ_0 e γ_1 usando as velocidades delas e o fato de que $\exp_p$ manda esses vetores em essas curvas; mas as outras curvas da homotopia não são geodésicas e esse argumento não aplica.

□

Exercício 2 ([dC79], Cap. X, Exer. 2) Use o lema de Klingenberg do exercício anterior para provar o Teorema de Hadamard.

Solução. Suponha que M é uma variedade completa, simplesmente conexa e com curvatura positiva. Por completitude, sabemos que para qualquer $p \in M$ o domínio de $\exp_p$ é todo T_pM. Como $K \leqslant 0$ sabemos que M não pode ter pontos conjugados, de modo que $\exp_p$ é um difeomorfismo local. Também por completitude sabemos que $\exp_p$ é sobrejetiva: qualquer ponto q está ligado a p mediante uma geodésica, e essa geodésica coincide com uma geodésica partindo de p dada como a imagem de uma reta em T_pM sob $\exp_p$.

Portanto, o desafio é provar que $\exp_p$ também é injetiva. Suponha que não é o caso, i.e. considere dois pontos v_1 e v_2 em T_pM tais que $\exp_p v_1 = \exp_p v_2 := q$. As imagens das retas geradas por v_1 e v_2 sob $\exp_p$ são duas geodésicas γ_1 e γ_2 em M ligando p e q.

Como M é simplesmente conexa, existe uma homotopia entre γ_1 e γ_2. Podemos aplicar o lema de Klinenberg para obter uma curva α_{K_0} tal que

$$\ell(\gamma_1) + \ell(\alpha_{K_0}) \geqslant 2\pi/\sqrt{K_0}$$

para qualquer $K_0 > 0$. Isso mostra que o comprimento das curvas na homotopia não está limitado, o que não é possível já que a homotopia é uma função contínua definida em um compacto, pelo qual a sua imagem debe ser compacto e portanto limitado. $\square$

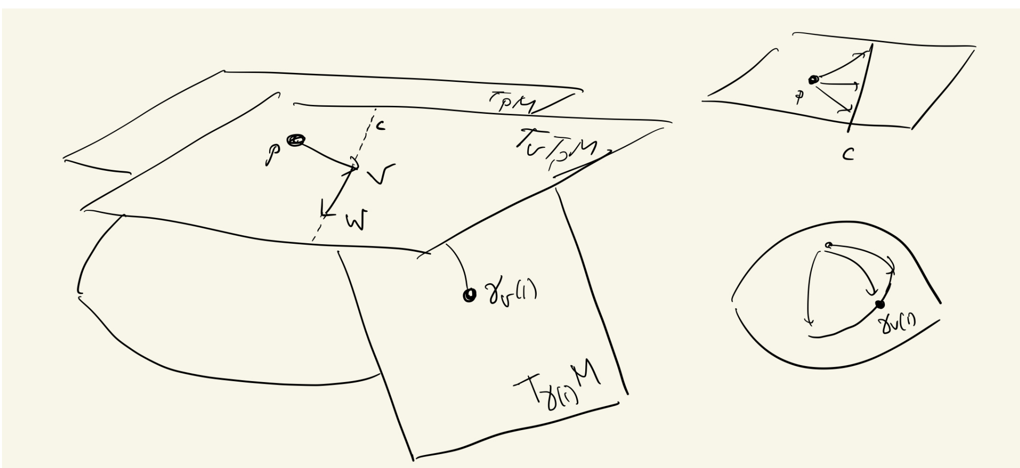
Dúvida Teve um comentário discutido na monitoria com respeito à necessidade de usar o teorema de Whitney para assegurar que a homotopia seja suave: não usei esse fato.

Exercício 3 ([dC79], Cap. X, Exer. 3) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não positiva. Prove que

$$|(d\exp_p)_v(w)| \geqslant |w|$$

para todo $p \in M$, $v \in T_pM$ e $w \in T_v(T_pM)$.

Solução. Considere novamente a figura que usei no exercício 1:



Vamos usar o teorema de Rauch para comparar um campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t) = tv$ no T_pM com um campo de Jacobi ao longo da curva $\tilde{\gamma}(t) := \exp_p(tv)$. Pegue a variação no T_pM dada por $f(t) := t(v + sw)$ onde estamos identificando T_vT_pM com T_pM. É immediato que o campo variacional J é de Jacobi. De forma parecida, defina a variação $\tilde{f}(s,t) := \exp_p(t(v + sw))$. Note que $\tilde{f}$ é uma variação por geodésicas e portanto o campo variacional $\tilde{J}$ é de Jacobi. Mais explicitamente, os campos de Jacobi são dados por

$$J(t) = tw, \qquad \tilde{J}(t) = d_{tv}\exp_p(tw)$$

Agora note que estamos nas condições do teorema de Rauch. Em primeiro lugar, é imediato que $J(0) = 0$ e $\tilde{J}(0) = 0$. Depois, $|J'(0)| = |w|$ e $|\tilde{J}'(0)| = |d_0 \exp_p(w)| = |w|$. Por último, a condição de ortogonalidade é consequência do lema de Gauss, pois as curvas "verticais" da variação em M percorrem esferas geodésicas.

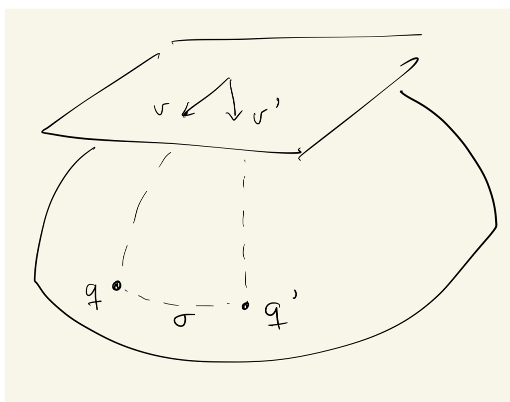
Como a curvatura seccional de M é não negativa, concluímos que

$$|tw| = |\tilde{J}| \leqslant |J| = |d_{tv} \exp_p tw|$$

para toda t, incluindo $t = 1$. $\square$

Complemento Suponha adicionalmente que M é simplesmente conexa e prove que o mapa exponencial é uma expansão métrica, i.e. aumenta distâncias. Além disso, se M não é simplesmente conexa, o mapa exponencial pode não ser uma expansão métrica.

Solução. Considere um ponto arbitrário $p \in M$, dos vetores $v, v' \in T_pM$ e as imagens deles sob $\exp_p$, digamos q e q'. A distância entre q e q' é a norma do vetor velocidade de alguma geodésica minimizante σ tal que $\sigma(0) = q$ e $\sigma(1) = q'$. (Essa geodésica existe porque M é completa.)



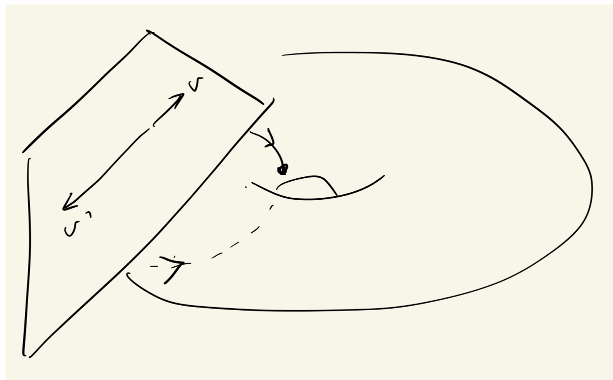
Queremos comprovar que essa curva σ é a curva "vertical" da variação por geodésicas do exercício anterior pegando $w := v' - v$. Essa curva que chamo de vertical é

$$\sigma(s) := \exp_p(v + sw) = \exp_p(v + s(v' - v))$$

(Ou seja, fixamos $t = 1$ e variamos s.) Então é claro que ela chega em q' no tempo $s = 1$. Então a construção do exercício anterior aplica, e para concluir só basta mostrar que σ é minimizante.

Se σ não for minimizante, teria que existir uma outra geodésica $\tilde{\sigma}$ ligando q e q' com comprimento menor. Como M é simplesmente conexa, essas duas curvas são homotópicas. Com um argumento análogo ao que usei no exercício 2, usando o lema de Klinenberg obtemos uma contradição usando que a curvatura de M é não positiva.

Para um contraexemplo simples podemos usar o toro plano, que tem curvatura não positiva. É claro que a exponencial não é uma expansão métrica porque não é injetiva.



□

Exercício 4 Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica em uma variedade Riemanniana M. Prove que se γ é minimizante, então γ não possui pontos conjugados em $(0, a)$. Encontre um exemplo de geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ sem pontos conjugados que não é minimizante.

Solução. Primeiro mostro um exemplo de geodésica sem pontos conjugados que não é minimzante. Considere o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Ele tem curvatura seccional constante igual a zero por ser um quociente de $\mathbb{R}^2$. Isso significa que a equação de Jacobi vira $J'' + \cancelto{0}{R_{\gamma'} J} = 0$. Pegando um marco referencial paralelo $E_i \in \mathfrak{X}_\gamma$, vemos que as funções coordenadas de J são lineares:

$$J'' = (J^i E_i)'' = (J^i)'' E_i$$

ou seja, $J^i = tu^i + v^i$. Agora sim, como $J(t) = 0$ então $v^i = 0$ para toda i, e como $J(t_{\text{final}}) = 0$, também $u^i = 0$ e portanto $J = 0$. Isto é: não tem pontos conjugados em espaços de curvatura constante igual a zero.

Porém, tem geodésicas se intersectam em $S^1 \times \mathbb{R}$, que portanto não são minimizantes depois dos pontos de interseção.

Agora vamos mostrar que se γ é uma geodésica minimizante, não possui pontos conjugados em $(0, a)$. Suponha que $b \in (0, a)$ é tal que $\gamma(b)$ é conjugado a $\gamma(0)$. Seguindo a prova do teorema de Jacobi dada em aula, vamos mostrar que existe uma variação própria diferenciável por partes de γ tal que $E''(0) < 0$ onde E denota o funcional de energia.

Considere o campo de Jacobi J tal que $J(0) = 0, J(b) = 0$ que existe porque $\gamma(b)$ é conjugado a $\gamma(0)$. Estenda esse campo a $\bar{J}$ como sendo 0 depois de b. Considere um outro campo $Z \in \mathfrak{X}_\gamma$. Temos que

$$I_a(\bar{J} + Z, \bar{J} + Z) = \cancelto{0}{I_a(\bar{J}, \bar{J})} + 2I_a(\bar{J}, Z) + I_a(Z, Z) \tag{1}$$

onde a primeira parcela se anula porque $\bar{J}$ satisfaz a equação de Jacobi antes de b e é constante zero depois de b. (E usamos que I_a é simétrica, que segue das simetrias de R.)

Agora vou fazer uma pausa para lembrar como se escreve a forma do índica em geral. Por definição, a forma de índice é

$$I_a(V, W) := \int_0^a \langle V'W' \rangle - \int_0^a \langle R_{\gamma'} V, W \rangle$$

para quaisquer campos $V, W \in \mathfrak{X}_\gamma$.

Então reescrevemos isso usando que a conexão ao longo de γ é métrica:

$$\begin{aligned} \langle V, W' \rangle' &= \langle V', W' \rangle + \langle V, W'' \rangle \\ \implies \langle V', W' \rangle &= \langle V, W' \rangle' - \langle V, W'' \rangle \end{aligned}$$

Substituindo obtemos que

$$\begin{aligned} I_a(V, W) &= \int_0^a \langle V, W' \rangle' - \int_0^a \langle V, W'' \rangle - \int_0^a \langle R_{\gamma'} V, W \rangle \\ &= \langle V, W' \rangle |_0^a - \int_0^a \langle V, W'' \rangle - \int_0^a \langle R_{\gamma'} W, V \rangle \\ &= \langle V, W' \rangle |_0^a - \int_0^a \langle V, R_{\gamma'} W \rangle \end{aligned}$$

Voltando ao nosso exercício, fixemos nossa atenção na parcela que está no meio em eq. (1). Pegando $V = Z$ e $W = \bar{J}$ obtemos

$$\begin{aligned} I_a(\bar{J}, Z) &= \int_0^a \cancelto{0}{\left\langle Z, \bar{J}'' + R_{\gamma'} \bar{J} \right\rangle} + \int_0^a \left\langle Z, \bar{J}' \right\rangle' \\ &= \int_0^b \left\langle Z, \bar{J}' \right\rangle' + \int_b^a \left\langle Z, \bar{J}' \right\rangle' = \left\langle Z(b), \bar{J}'(b) \right\rangle \end{aligned}$$

Agora pegue $\delta > 0$ arbitrário e considere a vizinhança de b dada por $(b-\delta, b+\delta)$. Defina Z como sendo

$$Z := \bar{J}\varphi$$

onde φ é uma função suave que vale 1 em b e zero fora de $(b - \delta, b + \delta)$.

Então fica claro que $I_a(Z, Z)$ vai ser tão pequena quanto quisermos. Note ainda que a conta que já fizemos com a quantidade $I_a(\bar{J}, Z)$ fica inalterada com essa restrição em Z; não temos problemas de diferenciabilidade e as fórmulas continuam validas.

Concluímos que

$$I_a(\bar{J} + Z, \bar{J} + Z) = -\left\langle \bar{J}(b)', \bar{J}(b)' \right\rangle + \text{constante pequena}$$

Segue que γ não é um ponto mínimo da energia, e portanto não minimiza distância. $\square$

Exercício 6 ([dC79], Exer. 1, Cap XI) Prove a seguinte versão do Teorema de Bonnet-Myers: *se* M *é completa e a curvatura seccional* K *satisfaz* $K \geqslant \delta > 0$*, então* M *é compacta e* $\operatorname{diam} M \leqslant \pi/\sqrt{\delta}$, usando o Teorema de Comparação de Rauch e o teorema de Jacobi.

Solução. Vamos mostrar que nenhuma geodésica pode ser minimizante depois de alcançar comprimento $\pi/\sqrt{\delta}$. Buscando uma contradição, suponha que γ é uma geodésica parametrizada por comprimento de arco até algum tempo maior que $\pi/\sqrt{\delta}$. Escolha um campo de Jacobi J ao longo de γ ortogonal a γ' e tal que $J(0) = 0$. Compare esse campo com um outro campo $\tilde{J}$ ao longo de alguma geodésica $\tilde{\gamma}$ em S^n_δ satisfazendo que $\tilde{J}(0)$, $\tilde{J} \perp \tilde{\gamma}'$ e $|J| = |\tilde{J}|$. (De novo, esse campo existe porque é a solução da equação de Jacobi em S^n_δ junto com a condição de ortogonalidade.)

Como $K \geqslant \delta$ e $\tilde{\gamma}$ não tem pontos conjugados, concluímos que $|J| \leqslant |\tilde{J}|$. Mas $\tilde{J}(\pi/\sqrt{\delta}) = 0$, de modo que também J se anula quando γ nesse tempo. Então J é um campo de Jacobi ao longo de γ, e pelo exercício anterior não é minimizante depois desse tempo. Como γ é parametrizada por comprimento de arco, segue o resultado. (O fato de M ser compacta segue de que ela tem um diâmetro finito, pois ela é um conjunto fechado e limitado.) $\square$

Observação A diferença com o teorema de Bonnet-Myers é que aquele é para Ric.

Exercício 7 Suponha M^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional $K_M \geqslant 1$. Suponha que γ é uma geodésica em M de comprimento $\ell(\gamma) > \pi$. Prove que $i(\gamma) \geqslant n - 1$, onde $i(\gamma)$ denota o índice de Morse de γ.

Solução. Lembre o seguinte fato geral mostrado em aula:

$$\dim\{J \in \mathfrak{X}^J_\gamma : J(0) = 0, J \perp \gamma\} = n - 1 \tag{2}$$

Isso segue das seguintes observações:

(a) $\dim \mathfrak{X}^J_\gamma = 2n$ porque são soluções de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, i.e. cada campo de Jacobi está determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$.

(b) $\dim\{J \in \mathfrak{X}^J_\gamma : J(0) = 0\} = n$.

(c) $\dim\{J \in \mathfrak{X}^J_\gamma : J \perp \gamma'\} = 2n - 2$. Para confirmar isso note que pelas simetrias de R e a equação de Jacobi tem-se que $\langle J, \gamma' \rangle'' = 0$, pelo que $\langle J, \gamma' \rangle = a + bt$ para dois números reais a, b. Segue que qualquer $J \in \mathfrak{X}^J_\gamma$ se escreve como $J(t) = a\gamma'(t) + bt\gamma'(t) + \hat{J}(t)$ para algum $\hat{J}$ perpendicular a γ'. (Supondo que $|\gamma'| = 1$.) Então se $J \perp \gamma$, temos que $a = b = 0$, então tiramos dois números do $2n$ que tínhamos.

(d) Segue eq. (2).

Lembre também que o teorema do índice de Morse (cf. [dC79]) diz que o índice $i(\gamma)$ é igual ao numero de pontos $\gamma(t)$, $0 < t < a$ conjugados a $\gamma(0)$ ao longo de γ contando a multiplicidade (a multiplicidade de um ponto conjugado é a dimensão do espaço de campos de Jacobi que se anulam nos extremos).

Portanto para nosso exercício basta achar $n - 1$ pontos conjugados a $\gamma(0)$. Isso fica resolvido tomando $n - 1$ campos de Jacobi ortogonais a γ', que sabemos que existem pelo comentário anterior. Aplicando para cada um deles o teorema de comparação de Rauch como no exercício anterior comprovamos que eles se anulam quando γ atinge comprimento π, obtendo assim os $n - 1$ pontos conjugados que buscávamos.

Note que γ pode ter ainda mais pontos conjugados depois de $\gamma(\pi)$, de modo que o índice $i(\gamma)$ pode ser ainda maior. $\square$

Dúvida Estudando a prova do teorema do índice de Morse, usamos que kernel da forma do índice I_γ consiste exatamente dos campos de Jacobi (usando conta que fiz no exercício 4, e graças à simetria de I_γ). Então *parece* que não estamos buscando $n - 1$ campos de campos de Jacobi linearmente independes: estamos buscando $n - 1$ campos linearmente independentes tais que I_a restrita ao espaço gerado por esses campos seja negativa definida.

References

[dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.