Prof. Luis Florit
Monitor. Ivan Miranda

Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/rg

Lista 4

Exercício 1 (Cap. IV Exer. 1, [dC79]) Seja G um grupo de Lie com uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-invariante. Seja $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ campos unitários e invariantes à esquerda em G.

(a) Mostre que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$. (Feito na lista 3.)

(b) Conclua de (a) que $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.

(c) Prove que, se X e Y são ortonormais, a curvatura seccional $K(\sigma)$ de G segundo o plano σ gerado por X e Y é dada por

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^{\cdot}$$

Portanto, *a curvatura seccional $K(\sigma)$ de um grupo de Lie com métrica bi-invariante é não negativa e é zero se e só se σ é gerado por vetores X, Y tais que $[X, Y] = 0$.*

Solution.

(b)

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \frac{1}{2}\nabla_X[Y,Z] - \frac{1}{2}\nabla_Y[X,Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\
&= \frac{1}{4}[X,[Y,Z] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\
&= \frac{1}{4}\Big([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X] + [Z,[X,Y]]\Big) + \frac{1}{4}[Z,[X,Y]] \\
\text{identidade de Jacobi} \qquad &= \frac{1}{4}[Z,[X,Y]]
\end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos a menos de um signo que muda com a convenção de [dC79] para R.

(c)

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= \frac{R(X,Y,Y,X)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\
&= R(X,Y,Y,X) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle && \text{X,Y ortonormais} \\
&= \frac{1}{4}\langle [[X,Y],Y],X\rangle && \text{inciso (b) (convenção [dC79])}
\end{aligned}$$

Agora lembre que na lista 3 provei que

$$\langle [w,u],v\rangle = -\langle u,[w,v]\rangle \qquad \forall u,v,w \in \mathfrak{g}$$

Pegue $u = [X, Y]$, $v = X$ e $w = Y$ para obter

$$\langle [Y, [X, Y]], X \rangle = -\langle [X, Y], [Y, X] \rangle = \langle [X, Y], [X, Y] \rangle$$

a por outra parte

$$\langle [Y, [X, Y]], X \rangle = -\langle [[X, Y], Y], X \rangle$$

Então parece de novo que tá errado por um signo mas resulta que a definição de K também é outra em [dC79], então por antisimetria de R nas últimas duas entradas o signo vira e tudo tá certo.

$\square$

Exercício 2 Seja (M, g) uma variedade Riemanniana.

(a) Se (M, g) é homogênea, então M possui curvatura escalar constante.

(b) Se (M, g) é 2-homogênea, então M é Einstein.

(c) Se (M, g) é 3-homogênea, então M possui curvatura seccional constante.

Solução.

(a) (Começarei com o inciso (b), pois foi o que consegui fazer melhor.)

(b) **(Intento sem ajuda externa. Com pouco de pena mas da para mostrar, pode poular.)** Queremos ver que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \operatorname{Ric} = g$. Como tanto Ric quanto g são tensores, basta mostrar o resultado numa base do espaço tangente a qualquer ponto. Usamos o exercício 15(b) da lista 3 para obter que M é isotrópica, i.e. $\forall u, v \in T_p^1 M$ existe $f \in \operatorname{Iso}(M)$ tal que $f_{*,p} u = v$.

Para uma base ortonormal E_i de $T_p M$ temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(E_i, E_j) &= \sum_k \langle R(E_k, E_i)E_j, E_k \rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k)E_k, E_j \rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k)E_k, f_* E_i \rangle \end{aligned}$$

onde existe $f \in \operatorname{Iso}$ tal que $f_* E_i = E_j$ porque M é isotrópica. Daí (aqui começo a ter dúvida) usamos que $f^* R = R$, ou seja

$$R(f_* E_i, f_* E_k) f_* E_k = R(E_i, E_k) E_k$$

isso é porque f é uma isometria e R depende da métrica e suas derivadas. Então a equação acima vira

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_i, E_j) &= \sum_k \langle R(f_* E_i, f_* E_k) f_* E_k, f_* E_i \rangle \\
&= \sum_k \langle R(E_i, E_k) E_k, E_i \rangle \\
&= \sum_k K(E_i, E_k)
\end{aligned}$$

que não faz sentido.

(Solução depois de consultar o professor + ChatGPT.) A observação central feita pelo professor é considerar o endomorfismo associado a Ric, que definimos como $\widehat{\mathrm{Ric}}$ satisfazendo

$$\left\langle \widehat{\mathrm{Ric}}(v), w \right\rangle = \mathrm{Ric}(v, w)$$

A observação central feita pelo ChatGPT é que para uma isometria f temos que

$$f^* \mathrm{Ric} = \mathrm{Ric} \implies f_* \circ \widehat{\mathrm{Ric}} = \widehat{\mathrm{Ric}} \circ f_*$$

De fato, para $v, w \in T_p M$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\mathrm{Ric}}(f_* v), w \right\rangle &= \mathrm{Ric}(f_* v, w) = f^* \mathrm{Ric}(v, f_*^{-1} w) = \mathrm{Ric}(v, f_*^{-1} w) \\
&= \left\langle \widehat{\mathrm{Ric}} v, f_*^{-1} w \right\rangle = \left\langle f_* \widehat{\mathrm{Ric}} v, w \right\rangle
\end{aligned}$$

Agora mostramos que $\widehat{\mathrm{Ric}} = \lambda\, \mathrm{Id}$. Então como Ric é simétrico, $\widehat{\mathrm{Ric}}$ é diagonalizável e da para calcular o seus eigenvalores. Vamos ver todos eles coincidem. Pegue v, w eigenvetores de norma 1. Como M é 2-homogênea, sabemos que é isotrópica e existe f isometria tal que $f_* w = v$.

$$\lambda_v v = \widehat{\mathrm{Ric}} v = \widehat{\mathrm{Ric}}(f_* w) = f_* \widehat{\mathrm{Ric}}(w) = f_* \lambda_w w = \lambda_w f_* w = \lambda_w v$$

então $\lambda_v = \lambda_w$ como queríamos. E isso mostra que em cada ponto,

$$\mathrm{Ric}(v, w) = \left\langle \widehat{\mathrm{Ric}} v, w \right\rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

ou seja, λ é na verdade uma função em M. Para ver que ela é constante, note que a condição de 2-homogeneidade implica homogeneidade, então Iso age transitivamente em M. Ou seja para $p \neq q$ pontos em M existe f isometria tal que $f(p) = q$. Como essa isometria preserva tanto o tensor de Ricci quanto a métrica, obtemos que

$$\begin{aligned}
\lambda(q) g_q = \mathrm{Ric}_q &= \mathrm{Ric}_{f(p)} = (f^* \mathrm{Ric})_p = \mathrm{Ric}_p \\
&= \lambda(p) g_p = \lambda(p)(f^* g)_p = \lambda(p) g_{f(p)} = \lambda(p) g_q.
\end{aligned}$$

(c) **(Sem ajuda externa nem muito tempo para aprofundar!)** Minha ideia é assim: para controlar a curvatura seccional a partir da 3-homogeneidade realizamos dois vetores arbitrários $v, w \in T_pM$ como sendo as derivadas de duas curvas: uma ligando p a q, e outra ligando p a q'. Agora nos perguntamos como é a curvatura em outro ponto $\hat{p}$. Transportamos a terna (p, q, q') com uma isometria a alguma terna $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{q'})$. Essa segunda terna pode ser escolhida de maneira que as correspondentes derivadas sejam quaisquer outros vetores $\hat{v}$ e $\hat{w}$ tangentes a $\hat{p}$. As curvaturas seccionais coincidem porque f é uma isometria.

(a) **(Sem ajuda externa nem muito tempo para aprofundar!)** Uma isometria preserva a curvatura escalar. Como para todo $p \neq q$ em M existe isometria f tal que $f(p) = q$, obtemos que

$$\mathrm{Scal}(q) = \mathrm{Scal}(f(p)) = (f^* \mathrm{Scal})(p) = \mathrm{Scal}(p).$$

□

Exercício 5 (Exer. 4, Cap IV, [dC79]) Seja M uma variedade Riemanniana com a seguinte propriedade: dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, o transporte paralelo de p a q não depende da curva que liga p a q. Prove que a curvatura de M é identicamente nula, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y)Z = 0$.

Demostração. Parece que a sugestão é a prova quase por completo. Começarei explicando os pontos que achei que era necessário destrinchar para chegar a uma prova formal, e depois escrevo o argumento completo (que é basicamente uma copia da sugestão).

Concluir o exercício só depende de duas coisas:

1. **(Mostrar que f sempre existe.)** A prova formalmente começa pegando três vetores $X(p), Y(p), Z(p)$ no espaço tangente a um ponto arbitrário $p \in M$. Primeiro devemos mostrar que existe $f : U \to M$ tal que $\partial_s|_{(0,1)} = X(p)$, $\partial_t|_{(0,1)} = Y(p)$, e que $f(s, 0) = f(0, 0)$.

   Primeiro usamos a exponencial $\exp_p$ de M para definir a superfície como a imagem do subespaço vetorial gerado por $X(p)$ e $Y(p)$. A exponencial fica determinada numa bola aberta $B_\varepsilon(0) \subset T_pM$. Note $X(p)$ e $Y(p)$ podem não estar contidos em $B_\varepsilon(0)$, mas podemos consertar isso redefinindo a exponencial avaliando as geodésicas em valores menores do que 1. Agora compomos com uma função suave $g : U \to B_\varepsilon(0)$ tal que

   - $g(0, 1) = (0, 0)$, de modo que $p = (\widetilde{\exp}_p^{-1} \circ g)(0, 1)$.
   - $g(s, 0) = g(0, 0)$.
   - $g_{*,(0,1)} e_1 = X(p)$.
   - $g_{*,(0,1)} e_2 = Y(p)$.

   Então $f = \widetilde{\exp}_p^{-1} \circ g$. **(Faltou: por que sempre existe g?)**

2. **(Mostrar que $Z(p)$ pode ser atingido como o transporte paralelo de $V(0,0)$.)** Isso é simples: definimos $V(0,0)$ como o transporte paralelo de $Z(p)$ a $f(0,0)$. Por unicidade do transporte paralelo, acabou.

Agora escrevo a prova completa. Como R é um tensor, basta mostrar o resultado num ponto só. R depende de três vetores.

Para escolher os primeiros dois consideramos a superfície dada como a imagem do mapa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ construído acima, cujo domínio U é um quadrado aberto contendo o quadrado unitário:

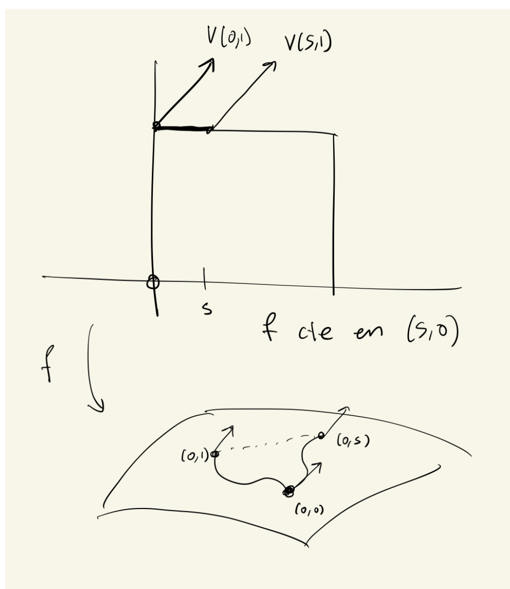
$$U := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2; -\varepsilon < t < 1+\varepsilon, -\varepsilon < s < 1+\varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

Definimos um campo vetorial pegando um vetor arbitrário $V_0 \in T_{f(0,0)}M$ e transportamos paralelamente ao longo das curvas verticais $t \mapsto (s,t)$. Isso significa que $\nabla_{\partial_t} V = 0$, e concluimos que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} = 0 = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} V + R(\partial_t, \partial_s)V$$

onde todos os campos são seções ao longo de f e R realmente é $R_{\nabla^f} = f^*R$.

Agora notamos que $V(1,0)$ deve ser, além do transporte paralelo de $V(0,0)$ ao longo de $t \mapsto (0,t)$, o transporte paralelo de $V(0,0)$ ao longo de $t \mapsto (s,t)$ seguido de $s \mapsto (s,1)$ para qualquer s. Concluímos que $\nabla_{\partial_s} V(s,1) = 0$. Isso significa que $R_{f(0,1)} = 0$.



□

Campos de Killing

Exercício 11 (Exer. 5, Cap. III, [dC79]) Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p, e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon-) \times U \to M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. X é chamado um ***campo de Killing*** (ou uma ***isometria infinitesimal***) se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset M \to M$ é uma isometria. Prove que

(a) Um campo linear em $\mathbb{R}^n$, definido por uma matriz A é um campo de Killing se e só se A é anti-simétrica.

(b) Seja X um campo de Killing em M, $p \in M$ e U uma vizinhança normal de p em M. Admita que p é o único ponto de U que satisfaz $X(p) = 0$. Então, em U, X é tangente às esferas geodésicas centradas em p.

(c) Sejam X um campo diferenciável de vetores em M e $f : M \to N$ uma isometria. Seja Y o campo de vetores em N definido por $Y(f(p)) = df_p(X(p))$, $p \in M$. Então Y é um campo de Killing se e somente se X também o for.

(d) X é de Killing $\iff \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (a equaçao acima é chamada ***equação de Killing***).

(e) Seja X um campo de Killing em M com $X(q) \neq 0$, $q \in M$. Então existe um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ em uma vizinhança de q, de modo que os coeficientes g_{ij} da métrica neste sistema de coordenadas não dependem de x_n.

Solução.

(d) Seguimos a sugestão usando [Lee13].

Observação Note que X é de Killing $\iff \mathcal{L}_X g = 0$. A ida da para escrever com a definição de derivada de Lie de campos tensoriales covariantes:

$$(\mathcal{L}_X g)_p(Y, Z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_{\varphi_t(p)}(\varphi^t_{*,p} Y_p, \varphi^t_{*,p} Z_p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_p(Y_p, Z_p) = 0$$

onde escrevo o fluxo como φ_t ou φ^t a vontade para facilitar notação. A volta também é simples usando Thm 12.37 [Lee13]: $(\varphi_t^* g)_p = g_p \iff L_X g = 0$.

Usando essa observação o inciso (d) pode ser resolvido assim: X killing $\iff$ $L_X g = 0$. Desenrolamos essa definição usando Prop. 12.32(d) [Lee13]:

$$\begin{aligned} 0 = (L_X g)(Y, Z) &= L_X(g(Y, Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= X\langle Y, Z\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle Y, [X, Y]\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrica,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle = &\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle \\ &+ \langle \nabla_X Z, Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é métrica, acabou.

(a) Noto que para todo $p = (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(t,p) = X_p = A(p).$$

Consegui escrever

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(t,p)^i = a_{ij} p^j$$

pensando nas funções coordenadas de $\varphi(t,p)$. Porém, não vi que isso é um sistema de equações diferenciais! Divaguei um tempo sem chegar a nada. Consultando ChatGPT, da para escrever

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t,p) = A\varphi(t,p) \\ \varphi(0,p) = p \end{cases}$$

que tem solução

$$\varphi(t,p) = e^{tA}\varphi(0,p).$$

Isso faz sentido pelas propriedades da exponencial de matrizes, en particular o fato que que

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} \qquad \text{[Hal15], Prop. 2.4}$$

que implica que efetivamente a função $e^{tA}\varphi(0,t)$ é solução do sistema dado acima. (Explorei outras formas de resolver o sistema, mas achei essa explicação mais familiar.)

Então concluímos que o fluxo é um mapa linear (a exponencial de matrizes é uma matriz). Como além disso é uma isometria, segue que é um elemento de $\mathsf{O}(n)$. Agora lembre que a exponencial de grupos de Lie, que coincide com a exponencial de matrizes nesse caso, é um mapa da álgebra de Lie ao grupo. Como $\exp(tA) \in \mathsf{O}(n)$, concluímos que $A \in \mathfrak{o}(n)$. Para concluir só devemos confirmar que $\mathfrak{o}(n)$ consta das matrizes antisimetricas. Note que

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \exp(tA)x, \exp(tA)y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto ponto euclidiano. De fato, podemos reescrever as parcelas como

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^{\mathsf{T}} y = x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} y, \qquad \langle x, Ax\rangle = x^{\mathsf{T}}(Ay)$$

obtendo que

$$0 = x^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}} + A)y$$

ou seja, $A^{\mathsf{T}} + A = 0$. (Argumento do Misha; também era natural pegar uma curva em $\mathsf{O}(n)$ e derivar.)

(b) Note que φ_t é uma isometria de $B_\varepsilon(p)$. Isso segue de que $\varphi_t(p) = p$ para todo t. Isso segue de que a curva constante p satisfaz a equação do fluxo $0 = X_p = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \varphi_t(p)$ e a mesma condição inicial. Daí segue que, como φ preserva a métrica riemanniana e portanto a distância riemanniana, ele manda esferas geodésicas em esferas geodésicas. Segue que as derivadas do fluxo, i.e. vetores de X são tangentes às esferas geodésicas.

(c) Parece que segue da "Propriedade de naturalidade dos fluxos", uma proposição em [Lee13]. Vejamos se posso escrever o essencial: basta mostrar que o fluxo de $\tilde{X} := f_*X$ é dado por $f \circ \varphi$ onde φ é o fluxo de X. Basta diferenciar $f \circ \varphi$ e comprovar que sua derivada coincide com $\tilde{X}$ em cada ponto. Por unicidade de EDOs, acabou. E sim: $(f \circ \varphi_p)'(0)$ é, por definição de vetores como velocidades de curvas, $f_*(\varphi_p'(0)) = f_*X$.

Seja $\tilde{\varphi}$ o fluxo de $\tilde{X}$. Para ver que $\tilde{\varphi}_t$ é uma isometria para todo t, note que para todo $\tilde{p} = f(p) \in \tilde{M}$ temos que

$$\tilde{\varphi}_t(\tilde{p}) = \tilde{\varphi}_{\tilde{p}}(t) = (f \circ \varphi_p)(t) = f(\varphi_t(p))$$

é isometria porque f e φ_t são isometrias. (A troca do subíndice no fluxo me serve para pensar o fluxo como curva ou como isometria.)

(e) Queremos mostrar que $\frac{\partial}{\partial x^n} g_{ij} = 0$ para todo i, j naquele sistema coordenado. A escolha natural é o sistema coordenado onde $X = \partial_n$. Como X é Killing vemos que:

$$0 = L_{\partial_n}(g_{ij} dx^i dx^j) = (\partial_n g_{ij}) dx^i dx^j + g_{ij} L_{\partial_n} dx^i dx^j$$

de novo pelas propriedades da derivada de Lie para campos tensoriais em [Lee13]. Lembre que $dx^i dx^j$ denota a simetrização de $dx^i \otimes dx^j \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, que é igual a $\frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$ (quase) por definição—é uma conta pequena com a definição de simetrização de tensores. Basta argumentar que a segunda parcela da equação anterior se anula. Então temos que

$$\begin{aligned} 2L_{\partial_n}(dx^i dx^j) = (L_{\partial_n} dx^i) \otimes dx^i + dx^i \otimes (L_{\partial_n} dx^j) \\ + (L_{\partial_n} dx^j) \otimes dx^i + dx^j \otimes (L_X dx^i) \end{aligned}$$

Lembremos a definição da derivada de Lie de campos tensoriais:

$$L_{\partial_n} dx^i := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_t^* dx^i$$

onde para $V \in \mathfrak{X}(M)$ o pullback de campos tensoriais é definido por

$$(\varphi_t^* dx_i)_p := (dx^i)_{\varphi(t,p)}(\varphi_{*,p}^t V_p)$$

Minha intuição é que o fluxo de ∂_n não modifica as coordenadas de V distintas de V^n, mas talvez essa última sim. No caminho para comprovar isso descobri que de fato o pushforward é a identidade. Vamos calcular o fluxo de $X = \partial_n$ (aqui usei ChatGPT):

$$x \circ \varphi_p(t) = \Big((x^1 \circ \varphi_p)(t), \ldots, (x^n \circ \varphi_p)(t)\Big) := (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$$

obtemos o sistema

$$\dot{\varphi}^i(t)\begin{cases}0 & i \neq n\\ 1 & i = n\end{cases}$$

que implica que

$$\varphi^i(t) = \begin{cases}x(p) & i \neq n\\ x(p)+t & i = n\end{cases}$$

dada a condição inicial $x \circ \varphi(0) = x(p)$. Então aqui, para minha surpresa, acaba que, dado t fixo, a derivada do fluxo φ_t é a identidade. E sim, porque como difeomorfismo de M vemos em coordenadas que trata-se do mapa

$$(x^1(p), \ldots, x^n(p)) \longmapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p) + t),$$

e quando derivamos, como t é fixo, obtemos a matrix identidade. Concluimos que $\varphi_t^* V$ é constante respeito a t, de modo que a derivada de Lie é zero. Note que o fato de que a derivada do fluxo é a identidade não significa que $L_{\partial_n}\omega = 0$ para outros campos tensoriais, pois embora o pushforward dos campos vetoriais não é modificado por φ, outros campos tensoriais podem variar de ponto a ponto, de modo que o pullback não é constante.

□

Exercício 14 (Exer. 12, Cap. VI, [dC79], Singularidades de um campo de Killing) Seja X um campo de Killing em uma variedade Riemanniana M. Seja $N = \{p \in M; X(p) = 0\}$. Prove que

(a) Se $p \in N$, $V \subset M$ é uma vizinhança normal de p, e $q \in N \cap V$, então o segmento de geodésica radial γ ligando p a q está contido em N. Conclua que $\gamma \cap V \subset N$.

(b) Se $p \in N$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que $V \cap N$ é uma subvariedade de M (Isto implica que toda componente conexa de N é uma subvariedade de M).

(c) A codimensão, como subvariedade de M, de uma componente conexa N_k de N é par. Admita o seguinte fato: se uma esfera possui um campo diferenciável não nulo então sua dimensão é ímpar.

Solução.

(a) Suponha que existe um ponto $\gamma(t_0)$ sobre γ onde X não é nulo. Como X é de Killing, o fluxo preserva a distância, i.e. sabemos que para qualquer s,

$$\varepsilon_1 := d(\gamma(t_0), p) = d(\varphi_s(\gamma(t_0)), \varphi_s(p)) = d(\varphi_s(\gamma(t_0)), p)$$

de modo que $\varphi_s(\gamma(t_0))$ está na esfera de raio ε_1 centrada em p. Porém, o mesmo acontece com q, i.e. $\varphi_s(\gamma(t_0))$ está na esfera de raio $\varepsilon_2 := d(\gamma(t_0), q)$ centrada em q. Essas duas esferas se intersectam tangencialmente em $\gamma(t_0)$ pelo lema de Gauss, e portanto o ponto de interseção é único numa vizinhança dele. Isso significa que o fluxo é constante em $\gamma(t_0)$ e portanto $X(\gamma(t_0)) = 0$.

(b) **(Solução seguindo a sugestão.)** Devemos mostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$, a restrição da diferencial do fluxo φ^t_* a $Q := \mathrm{span}(\exp_p^{-1}(q_1), \exp_p^{-1}(q_2))$ é a identidade. Isso resulta claro pelo exercício 3 da lista 3: como φ^t é uma isometria,

$$\varphi^t \circ \exp_p = \varphi^t_* \circ \exp_p$$

Defina $\nu_1 = \exp^{-1}(q_1)$. Como q_1 é um ponto fixo de φ_t,

$$\varphi^t(\exp_p(\nu_1)) = \exp_p(\nu_1)$$

Pela observação da lista 3, esse ponto também é

$$\exp_p(\varphi^t_*(\nu_1)) = \exp_p(\nu_1)$$

Então, como $\exp_p$ é bijetiva,

$$\varphi^t_*(\nu_1) = \nu_1$$

Agora defina $\nu_2 = \exp^{-1}(q_2)$; o mesmo argumento funciona. E mesmo para qualquer $\nu := a\nu_1 + b\nu_2 \in \mathrm{span}(\nu_1, \nu_2)$. Segue que em qualquer ponto de $N_2 := \exp\Big(\mathrm{span}(\nu_1, \nu_2)\Big)$ o fluxo tem derivada zero e portanto X se anula. O procedimento funciona igual em dimensões maiores.

(c) **(Seguindo a sugestão.)** A ideia é construir um campo vetorial diferenciável não nulo em alguma esfera contida no espaço $N^\perp$. Isso significa que a dimensão da esfera é ímpar, e portanto a dimensão de $N^\perp$ deve ser par.

A prova acaba sendo bem parecida ao argumento que eu dei para o inciso (a), onde mostrei que os vetores não nulos de um campo de Killing num ponto q perto de $p \in N$ devem ser tangentes a alguma esfera centrada em p. Além disso, o campo X não pode se anular em pontos dessa esfera **(por que? :( )**. Portanto, a restrição de X a essa esfera é um campo que não se anula.

Além disso, como φ^t é uma isometria, notamos que preserva o espaço normal $E_p := (T_pN)^\perp$. Isso implica **(por que?)** que todo vetor de um campo de Killing que não seja zero deve ser tangente a $N^\perp$.

□

Exercício 15 (Fórmula de Bochner para campos de Killing) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, $X \in \mathrm{Kil}(M, g)$ e $f := \frac{1}{2}|X|^2 \in C^\infty(M)$. Mostre que

$$\Delta f = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X, X)$$

onde $|\nabla X|(p)$ denota a norma do operador $T_pM \ni \nu \mapsto \nabla_\nu X \in T_pM$.

Ideias. Certamente não consegui resolver esse exercício. Aqui vão algumas ideias e perguntas:

0. A “norma do operador $T_pM \ni v \mapsto \nabla_v X \in T_pM$” é

$$|X| := \sup_{|v|=1} \nabla_v X \qquad ?$$

1. Tentei fazer algumas contas:

$$\Delta f = \Delta\left(\frac{1}{2}|X|^2\right) = \frac{1}{2}\nabla\langle X, X\rangle$$

Onde, para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, sabemos que

$$\langle \nabla\langle X, X\rangle, Y\rangle = Y\langle X, X\rangle = 2\langle \nabla_Y X, X\rangle.$$

Agora pegue um marco ortonormal E_i, de modo que

$$\Delta f = \sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle$$

Agora tendo em mente a conta anterior, estou motivado a calcular

$$E_i\langle \nabla f, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle + \langle \nabla f, \nabla_{E_i}E_i\rangle$$

Ou seja, podemos expressar o Laplaciano de f como

$$\Delta f = \sum_i \Big(E_i\langle \nabla f, E_i\rangle - \langle \nabla f, \nabla_{E_i}E_i\rangle\Big).$$

Em que momento aparece uma segunda derivada do tipo $\nabla\nabla$ i.e. ∇^2?

2. Outra ideia foi usar a notação de índices para os tensores em coordenadas. Consultando [Lee19],

$$\begin{aligned} \nabla f &= g^{ij}E_i f E_j \qquad \text{(quase consegui escrever sem consultar o livro)} \\ \operatorname{div} X &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i(X^i\sqrt{\det g}) \\ \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{\det g}\,\partial_j f\right) \end{aligned}$$

De modo que estou interessado em calcular as derivadas parciais de f:

$$\begin{aligned} \partial_i f &= \partial_i\left(\frac{1}{2}g(X, X)\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_i(g_{jk}X^jX^k) \\ &= \frac{1}{2}\left(X^jX^k\partial_i g_{jk} + g_{jk}\partial_i X^jX^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(X^iX^k\partial_i g_{jk} + g_{jk}(X^i\partial_i X^k + X^k\partial_i X_j)\big) \end{aligned}$$

Depois teria que calcular os as derivadas disso multiplicado com $g^{ij}\sqrt{\det g}$. A dificuldade maior seria identificar onde aparecem os coeficientes do tensor de Ricci.

3. Finalmente consultei [dC79] e [Lee19] em busca de alguma ajuda. Em [dC79] não encontrei nada, quanto em [Lee19] aparece uma fórmula extremamente parecida na questão 7-7: para $u \in C^\infty(M)$,

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = |\nabla^2 u|^2 + \langle \nabla \Delta u, \Delta u \rangle + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u).$$

que a principio não tem a ver com campos de Killing. Então uma expetativa obvia é que no caso de ∇u ser um campo de Killing,

$$\langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle = 0$$

mas não é claro o que Δu nesse caso. Consultando os resultados indicados para resolver o problema em [Lee19], reparei nas fórmulas que parecem generalizar o resultado de que

$$\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} V - \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} V = R(f_* \partial_t, f_* \partial_s) V$$

para tensores em geral: são as ***Ricci identities***, Thm. 7.14. Em particular, a fórmula para 1-formas é a sugestão para provar a fórmula de Bochner.

References

[dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[Hal15] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer International Publishing, Cham, 2015.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second edition edition, 2013.

[Lee19] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.