

Geometria Riemanniana

Índice

1	Aula 1	1
1.1	Lembrando	1
2	Aula 2	5
2.1	Fibrados vetoriais	5
2.1.1	Tensores	7
2.2	Grupos de Lie	11
3	Aula 3: A primeira aula	13
3.1	Lembrando geometria diferencial de curvas e superfícies	13
3.2	Riemann	14
4	Aula 5	19
4.1	Todo fibrado vetorial pode ter métrica	19
4.2	Comprimento de curvas, distancia, M como espaço métrico	19
4.3	Conexão afim	20

1 Aula 1

1.1 Lembrando

Definição *Variedade diferenciável*

1. M espaço topológico Hausdorff (T^2), base enumerável. Essas duas condições são equivalentes à existência de partições da unidade.
2. M localmente euclídeo, i.e. $\mathcal{A} = \{(\chi_\lambda, U_\lambda)\}$, $\chi_\lambda : U_\lambda \subset M \rightarrow \chi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$, com $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$. Dizemos que n é a **dimensão** de M .
3. Restringindo dois abertos U_λ, U_μ com $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, a **mudança de coordenadas** $\chi_\mu \circ \chi_\lambda^{-1} : \chi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \chi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ deve ser diferenciável. (Nesse curso diferenciável é C^∞ a menos que especifiquemos).
4. Maximalidade, i.e. \mathcal{A} é maximal.

Definição (Mapa diferenciável) $f : M^n \rightarrow N^m$ se para todo ponto com cartas (x, U) de M e (y, V) de N o mapa $y \circ f \circ x^{-1}$ é diferenciável. Denotaremos o conjunto de funções diferenciáveis por $\mathcal{F}(M, N)$. Em particular $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$.

Definição (Espaço tangente) $\mathcal{F}_p(M)$ é o espaço de funções definidas num aberto de p identificando duas delas se coincidem em qualquer aberto contendo p .

$$T_p M := \{v \in \mathcal{F}_p(M)^* : v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)\}$$

Pergunta $\mathcal{F}_p(M)$ es el stalk de la gavilla de funciones suaves? Qué pasa si definimos algo como las derivaciones en $\mathcal{F}(U)$.

A la hora de definir base de $T_p M$ con los operadores ∂_i necesitamos fijar una carta, así que en realidad no hay una base canónica de $T_p M$.

Definição (Diferencial de uma função)

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

definida para $g \in T_{f(p)} N$ como

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f)$$

Observação A regra da cadeia é uma tautologia dessa definição!

Definição (Base canônica do espaço tangente) Definimos

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M$$

como, para $g \in T_p M$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (g) = \frac{\partial(g \circ x^{-1})}{\partial u_i}$$

Exercício Mostre que $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ é uma base de $T_p M$.

Solution. Primeiro note que $\{\partial_i|_p\}$ é linearmente independente. Suponha que

$$\sum a_i \partial_i|_p = 0$$

Then for every function this gives zero, so in particular for coordinate functions $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, so

$$0 = \left(\sum a_i \partial_i \right) x_j = \sum a_i \delta_{ij} = a_j \quad \text{for all } j.$$

Now let's check $\text{span } \partial_i|_p = T_p M$. Choose a vector $v \in T_p M$ and let

$$w := v - \sum_i v(x_i) \partial_i|_p.$$

We wish to show that $w = 0$.

Then there's the following trick: a function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with $g(0) = 0$ can be written $g(t) = th(t)$ for some continuous function h (subexercise: construct h , it's an integral). So if we define $\tilde{g}(t) = g(t) - g(0)$ we can write for any $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (without asking that $g(0) = 0$) just $g(t) = g(0) + th(t)$

Subexercise Mostre que para toda $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $g(t) = g(0) - th(t)$. **Solution.** Let $m_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the function that multiplies t times a fixed number x . Notice that, for a fixed x , by fundamental theorem of Calculus

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(x) - g(0)$$

and also

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 g'(xt) \cdot x = x \int_0^1 g'(xt)dt$$

Then we define

$$h(x) := \int_0^1 g'(xt)dt$$

and immediately we get $g(x) = g(0) - xh(x)$.

Subsubexercise Now do that for $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. I think the correct claim is that there exists $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that for every $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ we have $g(\vec{x}) = g(\vec{0}) + \vec{x} \cdot h(\vec{x})$. **Solution.** Now m_x multiplies the vector x times the real number t , it is a function $m_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. We get

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(\vec{x}) - g(\vec{0}).$$

And also

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 \nabla_{t\vec{x}} g \cdot \vec{x} dt = \int_0^1 \sum \frac{\partial}{\partial x_i} g \Big|_{t\vec{x}} x_i dt = \sum x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{t\vec{x}} dt.$$

Definimos

$$h(\vec{x}) := \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{t\vec{x}} dt, \dots, \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{t\vec{x}} dt \right)$$

Back to the original exercise... Let's try to use this trick to conclude that $w(g) = 0$ for all $g \in \mathcal{F}_p$. Since it's a local statement I just suppose that g is a function $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Then there is a function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that for every $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = g(0) + x \cdot h(x)$.

Right so remember that I chose an arbitrary vector $v \in T_p M$ and defined $w = v - \sum v(x_i) \partial_i|_p$. I can see that $w(x_i) = 0$ for all coordinate functions x_i . But also for g as above I get

$$\begin{aligned} w(g) &= w(g(0) + x \cdot h(x)) = w(x \cdot h(x)) = w\left(\sum x_i h_i(x)\right) = \sum w(x_i h_i(x)) \\ &= \sum \cancel{w(x_i)}^0 h_i(x) + x_i h_i(x) \end{aligned}$$

and the second term also vanishes if we suppose that the coordinates of our point, x_i , are all zero. **Which makes me think: I think that's the point of the trick, that it somehow manages to put the coordinates of the point inside the whole thing, and then we can suppose the coordinates are 0 and simplify everything.** \square

Definição (Fibrado tangente) Como os $\mathcal{F}_p(M)$ são disjuntos, porque M é Hausdorff, os espaços tangentes são disjuntos para pontos distintos.

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

com a estrutura diferenciável que você já conhece.

A projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ é uma sumersão no sentido da seguinte definição. (Exercício?)

Definição (Imersão e sumersão)

1. Imersão se para todo $p \in M$, df_p é injetiva (e isso implica que $n \leq m$).
2. *Sumersão* de df_p é sobrejetiva para todo p , implica que $n \geq m$.
3. *Difeomorfismo local* se para todo ponto p df_p é um isomorfismo. Isso é equivalente a que para todo ponto existe um aberto tal que $f|_U : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo (teo. função inversa). (Checar.)

Note que $f : M \rightarrow N$ contínua é como dizer que a topologia induzida por f , $\tau_f \subset \tau_M$. Mas a igualdade nem sempre tem (e.g. figura 8). f é um *mergulho* se $\tau_f = \tau_M$. Isso é equivalente a que $f(M) \subset N$ seja uma subvariedade e $f : M \xrightarrow{\text{difeo}} f(M) \subset N$.

Definição (Campo coordenado) Numa vizinhança U de p ,

$$\begin{aligned} \partial : U &\longrightarrow TU \subset TM \\ p &\longmapsto \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \in T_p M \end{aligned}$$

Observação Podemos quase estender esse campo. Num aberto $V \subset U$ cujo fecho $\bar{V} \subset U$. Pega a cobertura $\{M \setminus \bar{V}, U\}$. Então existe part. unidade (ξ, φ) . Por definição, $\varphi|_V = 1$. Defina $x = \varphi \partial_i$.

Definição (Fibrado vetorial) Um *fibrado vetorial* E^k sobre M^n de posto $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é

1. $\pi : E \rightarrow M^n$ submersão sobrejetiva.
2. $\forall p \in M, E_p = \pi^{-1}(p)$ é um \mathbb{R} -e.v. de dimensão k .
3. $\forall p \in M$, existe $U \subset M$ e φ_U tal que
 - (a) $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\text{dif}} U \times \mathbb{R}^k$.
 - (b) φ_U conmuta con la proyección, i.e.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

(c) $\forall q \in U, \varphi|_{E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo linear.

Isso é equivalente a pedir que exista um *atlas trivializante* de E . É $\{(\varphi, \underbrace{\pi(U)}_{\subseteq E}) : U \in \Lambda \subset \tau_M\}$ es decir una familia de abertos en E indexada por una familia de abertos de M . Considere dos de estos abertos con $W := U \cap V \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{ccc} \varphi_U|_{\pi^{-1}(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \times \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \\ \varphi_V|_{\pi^{-1}(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

onde estamos parametrizando numa variedade! Ou seja, implicitamente estamos pegando cartas nela, mas podemos deixá-lo assim.

Temos as funções de transição

$$\varphi_{VU} = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{W \times \mathbb{R}^k} : W \times \mathbb{R}^k \rightarrow W \times \mathbb{R}^k$$

que realmente estão determinadas por a parte linear:

$$\varphi_{VU}(Q, v) = (Q, \xi_{VU}(Q)(v))$$

onde

$$\xi_{VU} : W \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

e são chamadas de *funções de transição* de E . Elas satisfazem

$$\xi_{VU} \circ \xi_{SV} = \xi_{SU} \quad \text{cocycle condition}$$

$$\text{no seria...} \quad \xi_{VU} \circ \xi_{US} = \xi_{VS}$$

Então podemos formar um fibrado vetorial a partir das funções de transição só.

2 Aula 2

2.1 Fibrados vetoriais

Definição Um *fibrado vetorial* é uma submersão sobrejetora

$$\pi : E \rightarrow M$$

onde π é a *projeção*, E o *espaço total* e M a *base*. Satisfazendo

1. E possui um *atlas trivializante*, i.e. para todo $p \in M$ existe $U \ni p$ aberto e carta

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\text{difeo}} U \times \mathbb{R}^k$$

tal que

- $\pi \circ \varphi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$
- Se $W = U \cap V \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{W \times \mathbb{R}^k} : W \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow W \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\longmapsto (p, \xi_W(p)(v)) \end{aligned}$$

onde pedimos que $\xi_{V \cap U} : W \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$, e chamamos essas funções de **funções de transição** de E .

Note que as fibras são espaços vetoriais: para $Q \in U$, $E_Q \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(Q) \subset E$. Pegue dois elementos $x, y \in E_Q$. Definimos a soma deles a través de

$$\varphi(x + y) = (Q, \bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)) = (Q, \bar{\varphi}(x + y))$$

onde $\bar{\varphi}$ é a parte “linear”. Note que isso faz automaticamente que as trivializações sejam lineares nas fibras, i.e. $E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ linear.

Definição As **seções** de E são

$$\Gamma(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda : M & \xrightarrow{\quad} & E \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \\ & & M \end{array} \right\}$$

Pergunta Existe uma coleção de k seções que são uma base de $T_p M$ em cada ponto? Não.

Observação Existe uma base de seções iff $E \cong M \times \mathbb{R}^k$. Mas isso ainda nem tem sentido...

Definição Um **mapa de fibrados** é

$$\begin{array}{ccc} F : E & \longrightarrow & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

que é linear nas fibras, i.e.

$$F|_{E_Q} : E_Q \rightarrow E'_{f(Q)}.$$

F é um **isomorfismo** de fibrados vetoriais iff F é um difeomorfismo e um mapa de fibrados. (Obviamente isso implica que a inversa é um mapa de fibrados.)

Observação Todo fibrado vetorial possui uma base *local* de seções. Porque pego uma base em $U \times \mathbb{R}^k$ numa trivialização local e pusho ela pra $\pi^{-1}(U)$.

Exemplo (Fibrado dual) A observação anterior nos dá um jeito super simples de construir o fibrado dual: para cada trivialização local, e para cada ponto definimos a base dual do espaço vetorial original no ponto, e é isso, tudo segue.

Outros exemplos podem ser construídos do mesmo jeito: $\text{End}(E)$, $\Lambda^r(\mathbb{V})$. A ideia é que “a álgebra linear pode ser fibrada por causa de que temos bases locais”.

Exemplo

Outro exemplo, embora não é um fibrado vetorial, é o conjunto de orientações de \mathbb{V} , $\mathcal{O}(\mathbb{V}) := \{\text{bases de } \mathbb{V}\} / \sim$. Definimos um **fibrado orientável** se $\mathcal{O}(E)$ tem uma seção global. Isso se traduz a que em cada ponto exista uma carta tal que a orientação.. seja compatível?

Também podemos definir M **orientável** se TM orientável *como fibrado*. TM sempre é orientável *como variedade* porque TTM é orientável *como fibrado*.

Exemplo (Tensores=aplicações multilineares) Pega \mathbb{V} esp. vect e considere os tensores $\{T : \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}\} := \text{Multi}(E)$. As seções disso são $\mathfrak{X}^r(E)$. No caso do fibrado tangente se denotam $T \in \mathfrak{X}^r(M) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma TM$, e se chamam **campos tensoriais**.

2.1.1 Tensores

Ver [Tu17], prop. 21.11 “The tensor criterion”: acho que em aula definimos $\mathfrak{X}^r(M)$ como sendo o conjunto de mapas r -multilineares $T : M \rightarrow \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{r \text{ vezes}}$, mas na verdade

deveria ser $(T^*M)^r := \bigotimes_r T^*M$. (Devemos pegar produto tensorial para construir um fibrado vetorial certinho.)

Exercício Mostre que os seguintes dois $\mathcal{F}(M)$ -módulos são isomorfos:

$$\left\{ \begin{array}{l} T : M \longrightarrow (T^*M)^r \\ p \longmapsto \underbrace{T(p) : (T_p M)^r \longrightarrow \mathbb{R}}_{r\text{-}\mathbb{R}\text{-multilinear}} \quad \text{suave} \end{array} \right\} = \Gamma((T^*M)^r) = \{\text{seções suaves de } (T^*M)^r\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T} : \mathfrak{X}^r(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ X_1, \dots, X_r \longmapsto \hat{T} : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad r\text{-}\mathcal{F}(M)\text{-multilinear} \end{array} \right\}$$

Solução. Defina o primeiro conjunto como A e o segundo como B . Pegue $T \in A$ e defina

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathfrak{X}^r(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ V_1, \dots, V_r &\longmapsto \hat{T} : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto T(p)(V_{1,p}, \dots, V_{r,p}) \end{aligned}$$

Ao contrário, pegue $\hat{T} \in B$ e defina

$$\begin{aligned} T : M &\longrightarrow (T^*M)^r \\ p &\longmapsto \begin{array}{l} T(p) : (T_p M)^r \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_r) \longmapsto \hat{T}(V_1, \dots, V_r) \end{array} \end{aligned}$$

onde V_i é uma extensão de v_i usando partição da unidade.

O lance em [Tu17] é usar a propriedade universal do tensor product (qualquer mapa $A \times B \rightarrow X$ se factora por um único mapa $A \otimes B \rightarrow X$...) para comprovar a suavidade daquele mapa. \square

Upshot (del ejercicio) Que es lo mismo pensar en un operador que come campos vectoriales y da funciones, o un campo **covectorial**, una cosa que en cada punto me da un operador que come vectores.

Siguiente cosa (A dupla personalidade dos campos vectoriais) Que podemos pensar que los campos vectoriales son derivaciones. $\hat{X} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$. Sí porque un campo de vectores en un punto puede ser evaluado en una función y da un número, y bueno satisface Leibniz.

Va otra construcción:

E, pega $\Lambda^r(E)$, os mapas r -alternantes de E , que é um fibrado vetorial. As seções dele, $\Gamma(\Lambda^r E)$. No caso do fibrado tangente, $\Omega^r(M) := \Lambda^r(TM)$. Entonces a ver de nuevo: pega $\omega \in \Lambda^r TM$. En cada punto me da una aplicación r -multilinear alternante, pero también lo puedo ver como un mapa $\omega : \mathcal{X}M \times \dots \times \mathcal{X}M \rightarrow \mathcal{F}M$.

Exercício M^n é orientável $\iff \Lambda^n M$ possui seção nunca nula.

Desastre. (\implies) Em cada ponto $p \in M$ temos uma base orientada $\{e_i\}$ de $T_p M$. Essa base me permite expressar qualquer coleção de n vetores $v_1, \dots, v_n \in T_p M$ como uma matriz (v_j^i) . O determinante dessa matriz é uma n -forma alternante.

Note que essa função **não** está bem definida na classe de equivalência: bases diferentes que estão na mesma orientação podem ter determinantes bem diferentes. Definindo $\omega_p(v_1, \dots, v_n) = \det v_j^i$ eu queria uma seção não nula de $\Lambda^n M$... e daí mostrar que ela é suave...

(\impliedby) Pegue $\omega \in \Lambda^n TM$, qualquer ponto $p \in M$ e uma base $\{v_i\} \subset T_p M$ tal que $\omega_p(v_i) = 1$. Afirmando que $p \mapsto [\{v_i\}] \in \mathcal{O}(M)$ é uma seção global de $\mathcal{O}(M)$. **Falta bastante...**

\square

Solução. (\implies) It's a local-to-global situation, use partition of unity! É como a construção da métrica Riemanniana: pega um atlas localmente finito $\{(U_\lambda, \chi_\lambda)\}$ e uma partição da unidade subordinada $\{\rho_\lambda\}$. Pega qualquer um desses abertos e define

$$\omega_{U_\lambda} := dx_1^\lambda \wedge \dots \wedge dx_n^\lambda$$

Some:

$$\omega := \sum_\lambda \omega_{U_\lambda}$$

Note que tá errado, isso pode dar zero em algum ponto. Some bem:

$$\omega := \sum_{\substack{\lambda \text{ t.q.} \\ \rho_\lambda > 0}} \omega_{U_\lambda}$$

(\Leftarrow) (Inspirado por [Lee13].) Pegue $\omega \in \Lambda^n TM$, qualquer ponto $p \in M$. Como ω nunca é zero, não é zero em p , e por linearidade existe uma base $\{v_i^p\} \subset T_p M$ tal que $\omega_p(v_i^p) = 1$. Defina uma orientação pontual (i.e. uma seção de $\mathcal{O}(M)$, *não necessariamente contínua* da seguinte forma: uma base qualquer de $T_p M$ é orientada se está na mesma classe de equivalência que $\{v_i^p\}$.

Para ver que essa seção de $\mathcal{O}(M)$ é contínua devemos mostrar (de acordo a [Lee13]) que em cada ponto $p \in M$ existe um marco local que dá uma base orientada em cada ponto. Então pegue uma vizinhança coordenada de qualquer ponto p e considere a função f tal que

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Então

$$\omega(\partial_1, \dots, \partial_n) = f \rightsquigarrow \text{nunca se anula}$$

Então a base coordenada é sempre positiva ou sempre negativa (em U). Pode supor que é sempre positiva botando um menos em qualquer função coordenada. Aí note que f também é

$$\omega(\partial_1, \dots, \partial_n) = \underbrace{\det C}_{=f} \omega(v_1^q, \dots, v_n^q) \quad \forall q \in U$$

Porque é assim o assunto da mudança de base... e aí acabou porque $f = \det C > 0$.

□

Lembre que $\Omega_c^n(M)$ é o espaço de formas cujo suporte tem fecho compacto.

Observação M orientada \implies integral está bem definida. Sim, porque o teorema de mudança de variáveis diz que para $\varphi : U \rightarrow V$, $\omega \in \Omega^n(V)$, $\int_U \varphi^* \omega = \text{sign}(\varphi) \int_V \omega$. Então para que não se faça uma bagunça precisamos que os determinantes das mudanças de coordenadas coincidam.

Definição (Fibrado pullback)

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

onde

$$f^*(E) = \{(p, v) \in M \times E : \pi(v) = f(p)\}$$

(Note que botamos o p em (p, v) para obter que o espaço total de $f^*(E)$ seja uma coleção *disjunta* de fibras.)

Essa é uma definição ótima. Note que π_2 é um mapa de fibrados que aparece de graça. (Não é um isomorfismo.)

Observação O pullback é mágico porque ele leva todas as propriedades de E como curvatura, conexão, etc.

Observação Se f é constante obtemos o fibrado trivial.

Pergunta Me queda claro que si f es constante, la fibra de f^*E siempre es $(f^*E)_p \cong E_{f(*)} \dots$

Observação Pega $\xi \in \Gamma(f^*E)$. Então temos para $p \in M$ um elemento $\xi(p) = (p, \tilde{\xi}(p))$. Então olha

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\xi} : M & \longrightarrow & E \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & N \end{array}$$

então essas seções se chamam de $\mathfrak{X}_f \cong \Gamma(f^*(E))$ *seções ao longo de f* .

Entonces el punto es que, por construcción cada sección del pullback me da un elemento en el otro vb y de ahí quiero que la proyección me devuelva f .

Note que para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos um campo f_*X que *não é* um campo vetorial em N . É um campo vetorial com base M e espaço total f^*TN . Parecidamente, se $Y \in \mathfrak{X}(N)$, obtemos um campo sobre M com valores em f^*TN mediante $Y \circ f$.

Definição Dos campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están *f -relacionados* $X \overset{f}{\sim} Y$ se $Y \circ f = f_*X$ donde $f : M \rightarrow N$. Pero pérame porque a mí me habían dicho que no siempre f_*X está bien definido. Ah, porque aquí f_*X es un campo *ao longo de f* ; así *siempre* está bien definido. Entonces tiene sentido la definición y el ejercicio:

Exercício Pegue $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$, $i = 1, 2$. Mostre que

$$X_i \overset{f}{\sim} Y_i \implies [X_1, X_2] \overset{f}{\sim} [Y_1, Y_2]$$

Hint. Pensa que um campo é uma coisa que pega uma função e me da uma função.

Solução. Queremos ver que

$$f_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ f \in \mathfrak{X}_f$$

i.e. que esses campos são iguais *como campos vetoriais ao longo de f* , que é um negócio bem estranho porque, de novo, o espaço base é M e o espaço total é f^*TN (que é bem parecido a TN mas não é TN —pode ser incluído eu acho).

E isso é super importante porque esclarece o jeito de proceder que é: pega $p \in M$ e $g \in \mathcal{F}(N)$. Beleza então temos

$$\begin{aligned} \left([Y_1, Y_2] \circ f \right)_p (g) &= Y_{1, f(p)}(Y_2(g)) - Y_{2, f(p)}(Y_1(g)) \quad \text{blz} \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} f_* X_{1,p}(Y_2(g)) - f_* X_{2,p}(Y_1(g)) \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} f_* X_{1,p}(f_* X_2(g)) - f_* X_{2,p}(f_* X_1(g)) \\ &= f_* [X_1, X_2]_p(g). \end{aligned}$$

□

2.2 Grupos de Lie

Definição Um grupo de Lie é um grupo G que é uma variedade diferenciável tal que

$$\cdot : G \times G \rightarrow G \quad {}^{-1} : G \rightarrow G$$

são diferenciáveis.

Os grupos de Lie tem um monte de difeomorfismos dados pela multiplicação a esquerda: $h \in G \rightsquigarrow L_h : G \rightarrow G, L_h(g) = h \cdot g$. Como $L_{h^{-1}} \circ L_h = \text{Id}$, $L_h \in \text{Dif } G$.

Exercício $v \in T_e G, X_v(g) = d(L_g)_e(v) \in T_g G, \implies X_v \in \mathfrak{X}(G)$. **Note** que vai precisar usar que o produto do grupo é diferenciável.

Solução. Basta mostrar que, pegando qualquer vizinhança coordenada de qualquer ponto $g \in G$, as funções coordenadas de X_v são diferenciáveis.

Pegue um sistema de coordenadas em $g \in G$, digamos (U, x) . Como L_g é um difeomorfismo, obtemos um sistema de coordenadas $(L_{g^{-1}}(U), x')$ de $e \in G$. Suponha que $v = \sum v^i \partial_i$ nessas coordenadas. Então

$$\begin{aligned} (d_e L_g)v &= (d_e L_g) \left(\sum v^i \partial_i \right) \\ &= \sum (v^i \circ L_g) d_e L_g \partial_i \end{aligned}$$

Então essas funções coordenadas são suaves: para $h \in G$ temos

$$(v^i \circ L_g)(h) = v^i(gh)$$

que é suave porque é a composição de duas funções suaves, e porque o produto do grupo de Lie é suave. □

E aí fica que uma base $\{v_i\} \subset T_e G$ nos dá uma base global de seções. Em outras palavras, o fibrado tangente de um grupo de Lie é trivial. Isso é raríssimo, uma variedade com fibrado tangente trivial, se chama variedade paralelizável.

Observação $\forall g \in G, X_v \stackrel{L_g}{\sim} X_v$ para todo $v \in T_e G$. Acho que é por regra da cadeia. Queremos ver que em todo ponto $g \in G$,

$$\left((L_g)_* (X_v) \right)_h = (X_v)_h$$

então fica que

$$\left((L_g)_* (X_v) \right)_h = \left((d_{g^{-1}h} L_g)(d_e L_{g^{-1}h})v \right)_h = \left(d_e (L_g \circ L_{g^{-1}h})v \right)_h = \left(d_e L_h v \right)_h = (X_v)_h$$

Mas ainda, se um campo vetorial X está L_g relacionado com ele mesmo para todo $g \in G$ (isso se chama ser *invariante à esquerda*), então ele é um X_v para algum v . Conta:

$$v := X_e \implies X_h = (L_{h,*} X)_h = (d_e L_h X_e)_h = d_e L_h v.$$

Então ai fica essa equivalência, e ademais, se pegamos $v, w \in T_e G$ podemos pensar em X_v, X_w , e definimos $X_{[v,w]} := [X_v, X_w]$. E ai obtemos a *álgebra de Lie* de G , que é $(T_e G, [,]) := \mathfrak{g}$.

Mais um Pegue $X \in \mathfrak{g}$ e γ curva integral de X passando por e , i.e. $\gamma(0) = e$. Prove que

1. Se φ_t é o fluxo de $X \implies L_g \circ \varphi_t = \varphi_t \circ L_g, \varphi_t = R_{\gamma(t)}$.
2. γ é homomorfismo de grupos $\mathbb{R} \rightarrow G$. Isso permite definir $\exp^G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ dada por $\exp^G(X) = \gamma(1)$. Prove que $\exp^G(tX) = \gamma(t)$.

Hint. O último implica os outros.

Solução.

1. Pegue $h \in G$. O único que sei de φ_t é que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(h) = X_h$$

E quero ver que

$$\varphi_t(gh) = (\varphi_t \circ L_g)(h) \stackrel{\text{quero}}{=} (L_g \circ \varphi_t)(h) = g\varphi_t(h) = L_g(\varphi_t(h))$$

Então derivo:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(gh) = X_{gh} \stackrel{\text{def}}{=} d_e L_{gh}(X_e) \stackrel{\text{chain rule}}{=} d_h L_g d_e L_h(X_e) \stackrel{\text{def}}{=} d_h L_g X_h = d_h L_g \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(h) \right)$$

de forma que as derivadas das coisas que quero que sejam iguais coincidem. Avaliando em $t = 0$ vemos que as funções devem ser iguais.

A comprovação de que $\varphi_t = R_{\gamma(t)}$ é análoga: definindo $X := X_X$ (e é assim porque $X \in \mathfrak{g}$), tenho duas funções

$$\begin{array}{ll} R_{\gamma(t)} : G \longrightarrow G & \varphi_t : G \longrightarrow G \\ g \longmapsto g \cdot \gamma(t) & g \longmapsto \text{integrar } X_g \text{ e avançar } t \end{array}$$

Derivo:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \cdot \gamma(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (L_g \circ \gamma)(t) \stackrel{\text{chain rule}}{=} d_e L_g \cdot \gamma'(0) = X_g = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(g)$$

avaliando em $t = 0$ obtemos a igualdade.

2. Talvez tô errado mas acho que é o mesmo: queremos ver que

$$\gamma(t_1 + t_2) \stackrel{\text{quero}}{=} \gamma(t_1)\gamma(t_2) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\gamma(t_1)}\gamma(t_2)$$

então derivo respeito a t_2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_2}\Big|_{t_2=0} L_{\gamma(t_1)}\gamma(t_2) &\stackrel{\text{chain rule}}{=} d_{\gamma(0)} L_{\gamma(t_1)}\gamma'(0) = d_e L_{\gamma(t_1)} X_e \\ &= X_{\gamma(t_1)} \stackrel{\gamma \text{ curva integral}}{=} \gamma'(t_1) = \frac{d}{dt_2}\Big|_{t_2=0} \gamma(t_1 + t_2) \end{aligned}$$

e de novo, avaliando em $t_2 = 0$ obtemos a igualdade.

Por fim, para o último exercício queremos achar uma curva integral de tX , t fixo, i.e.

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow G \quad \text{tal que} \quad \tilde{\gamma}'(s) = (tX)_{\tilde{\gamma}(s)} \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sinto no cora que

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(ts) \quad \text{vai dar certo.}$$

Então derivo

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=s} \tilde{\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=s} \gamma(ts) = \gamma'(ts)t = X_{\gamma(ts)}t = (tX)_{\gamma(ts)} = (tX)_{\tilde{\gamma}(s)}$$

olha só

$$\exp^G(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t).$$

□

3 Aula 3: A primeira aula

3.1 Lembrando geometria diferencial de curvas e superfícies

A história começa com o Gauss em 1827.

A geometria de superfícies se faz assim. Pega $p \in M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Pode botar uma métrica canônica usando a inclusão i , i.e.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M^2 \times T_p M^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle i_{*,p} v, i_{*,p} w \rangle_p \end{aligned}$$

Também pode só derivar curvas na superfície, obtendo vetores em \mathbb{R}^3 , e usando o produto usual de \mathbb{R}^3 .

O Gauss definiu o mapa normal $N(p)$, derivando ele para obter

$$A := d_p N : T_p M^2 \rightarrow T_p M^2$$

que ressaltou ser um endomorfismo autoadjunto (respeito a aquela métrica que a gente falou). Dai apareceram

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= H && \text{curvatura média} \\ \det A &= K && \text{curvatura Gaussiana} \end{aligned}$$

E aí o Gauss descobriu que K depende só da métrica, i.e. $K = K(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. A curvatura média não. (E.g. um plano pode ser mergulhado em \mathbb{R}^3 como um cilindro, K fica igual, enquanto H muda.)

3.2 Riemann

Definição Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável M^n junto com um tensor

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

simétrico e positivo definido. Isso significa que para cada $p \in M$ temos uma forma bilinear simétrica positiva definida $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$.

A variedade é *semi-Riemanniana* se, em lugar de positivo definido, o tensor é não degenerado, i.e. $\forall v \in T_p M$, se $\langle v, w \rangle_p = 0 \ \forall w \in T_p M$, então $v = 0$. Nesse caso, definimos o *índice* da forma como sendo

$$i(\langle \cdot, \cdot \rangle_p) := \max \left\{ \dim \mathbb{L} \stackrel{\text{sub}}{\subset} T_p M : \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}} < 0 \right\}$$

Bom pegue um sistema coordenado (x, U) . Podemos definir para $Q \in M$

$$g_{ij}(Q) := \langle \partial_i(Q), \partial_j(Q) \rangle \in \mathcal{F}(U)$$

i.e.

$$(g_{ij})_Q : U \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \cap \text{Sym}(n)$$

ou seja, a variedade é Riemanniana quando essas funções são positivas.

Se a variedade é Riemanniana temos uma norma $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$. (Se não não.)

Observação A definição de variedade Riemanniana foi dada por Weil nos anos 30.

Definição (Isometrias) $f : M \rightarrow N$. Primeiro note que podemos definir o pullback de qualquer tensor. Para $f : M \rightarrow N$ e T tensor da forma $T : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathcal{F}(N)$, definimos

$$f^*(T)_p(u, v)_p := T(f(p))(f_*u, f_*v)$$

Note que de graça é simétrico se o tensor em N é simétrico.

Para ver positivo definido temos que o pullback é positivo definido $\iff f$ é um imersão. Prova: considera a norma. A norma de $f_{*,p}u$ é positiva $\iff u \neq 0$. Para assegurar que a preimagem desse vetor também não é zero precisamos que seja imersão (=diferencial injetiva).

Conclusão: apenas as imersões podem ser isometrias.

$f : (N^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_N) \longrightarrow (M^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ é uma **imersão isométrica** se $\langle \cdot, \cdot \rangle_N = f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_M$.

Uma **isometria** entre variedades Riemannianas é $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^n$ difeomorfismo e isometria (como imersão).

Uma **isometria local** é um difeo local e isometria.

Observação (Isomorfismos canônicos) Para qualquer espaço vetorial V , temos um **isomorfismo canônico** (i.e. não depende de escolha de base) $V^n \cong T_p V^n$ dado por

$$V^n \ni v \longmapsto \alpha'_{p,v}(0), \quad \alpha_{p,v}(t) = p + tv$$

Tem outro isomorfismo canônico: $M \ni p, M' \ni p'$,

$$\begin{aligned} T_{(p,p')}(M \times M') &\cong T_p M \times T_{p'} M' \\ w &\longmapsto (\pi_{*,(p,p')}(w), \pi'_{*,(p,p')}(w)) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{array}{ccc} & M \times M' & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ M & & M' \end{array}$$

Exercício Mostre que o inverso desse mapa ai é

$$(\pi_{*,(p,p')}(w), \pi'_{*,(p,p')}(w)) \longmapsto (i_p)_* p'(v') + (i_{p'})_* p(v)$$

com as inclusões naturais.

Solução. Acho que as definições certinhas das inclusões são assim:

$$\begin{aligned} i_{p'} : M &\longrightarrow M \times M' & i'_p : M' &\longrightarrow M \times M' \\ q &\longmapsto (q, p') & q' &\longmapsto (p, q') \end{aligned}$$

que tem diferenciais

$$\begin{aligned} (i_{p'})_p : T_p M &\longrightarrow T_{(p,p')}(M \times M') & (i_p)_{p'} : T_{p'} M' &\longrightarrow T_{(p,p')}(M \times M') \\ v &\longmapsto ? & v' &\longmapsto ? \end{aligned}$$

Intento 1 Para visualizar melhor como funcionam esses mapas considere pegue coordenadas (x, x') de $M \times M'$ (o que significa por definição da variedade produto que x são coordenadas de M e x' de M'). Fica que $\{\partial_i\}$ é base de $T_p M$ e $\{\partial'_i\}$ de $T_{p'} M'$. Então

$$v = \sum v_i \partial_i \xrightarrow{(i_{p'})_* p} \sum v_i \partial_i + \sum 0 \partial'_i \rightsquigarrow (v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0)$$

O resultado é bastante claro daí. Mas... não é ponto de tudo isso que o isomorfismo é independente da escolha de base...?

Intento 2 Copiemos a prova de que $\mathbb{V}^n \cong T_p \mathbb{V}^n$ canonicamente... acho que só escrevendo

$$v := \gamma'(0), \quad \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M, \gamma(0) = p$$

Obtemos

$$(di_{p'})_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (i_{p'} \circ \gamma)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma(t), p) = (\gamma_*(0), 0)$$

definindo analogamente γ' (aqui ' não é derivada...) de forma que

$$v + v' = (\gamma_*(0), \gamma'_*(0))$$

é projetado “canonicamente” (=sem usar bases...) em v e v' quando aplicamos $\pi_{*(p,p')}(v + v')$ e $\pi'_{*(p,p')}(v + v')$, respetivamente. (É só escrever igualzinho que acima compondo com a projeção...) E acho que é isso. \square

Cuidado (Não entendi muito isso aqui) Nem sempre é certo que $T(M \times M') \cong TM \times TM'$. Porque as funções coordenadas dependem de dois parâmetros: $Z \in \mathcal{X}(M \times M')$, $Z = X + X'$,

$$\sum_i a_i(p, p') \partial_i|_p + \sum_j b_j(p, p') \partial_j$$

Exemplo

1. \mathbb{R}^n com o produto canônico usando o isomorfismo canônico de $\mathbb{R}^n \cong T_p \mathbb{R}^n$ acima.
2. (Grupo de Lie.) $h \in G$, L_h traslação a esquerda. Usemos as traslações a esquerda para definir uma métrica em G . Pegue qualquer produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ em \mathfrak{g} . E traslade:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h := L_h^* \langle \cdot, \cdot \rangle_e$$

i.e.,

$$\langle v, w \rangle_h = \langle dL_{h^{-1}}(v), dL_{h^{-1}}(w) \rangle_e$$

Exercício

- (a) Isto define uma métrica Riemanniana em G .
- (b) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \langle X, Y \rangle = \text{cte}$.
- (c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é *invariante a esquerda*, i.e. $\forall h \in G, L_h$ é isometria de $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Observação Essa métrica é invariante a *a esquerda*. Nem tem que ser invariante a direita.

Observação Vai ter um exercício de do Carmo dizendo que se G é compacto vai ter uma métrica bi-invariante, i.e. o promédio.

dani: parece que sempre que temos uma ação homogênea podemos transportar a métrica de \mathfrak{g} pra todos lados.

Solução.

- (a) Acho que aqui sale facilzinho porque L_h é um difeomorfismo, i.e. os espaços tangentes são isomorfos, então temos a propriedade de ser positiva definida.
- (b) É por definição de campo vetorial gerado por traslações a esquerda.
- (c) Por definição de isometria... tipo—essa métrica está feita para que as traslações sejam isometrias.

□

3. $M^n \subset \mathbb{R}^{n+p}$ subvariedade regular (=inclusão é um mergulho). Podemos fazer o que Gauss fez:

$$\langle u, v \rangle_p := \langle i_{*,p} u, i_{*,p} v \rangle_{\text{can}}^{\mathbb{R}^{n+p}}$$

Pergunta Será que toda variedade Riemanniana admite um mergulho isométrico em algum \mathbb{R}^{n+p} ? Quem é p ?

Nash O caso C^1 é fácil,

Pergunta (dani) Em topo dif vimos primeiro uma prova de que pode mergulhar qualquer variedade em um \mathbb{R}^N com N muito grande. Depois os teoremas de Whitney mostram que N pode ser mais o menos pequeno. Aqui podemos mostrar que o mergulho/imersão existe para $N \gg$ mais o menos facilmente?

Proposição (Existência de métricas Riemannianas) Se M é uma variedade diferenciável, existe uma métrica Riemanniana em M .

What que em toda variedade tem um aberto denso difeomorfo a uma bola.

Demonstração. Pegue um atlas $\{(X_\lambda, U_\lambda)\}$ localmente finito para usar uma partição da unidade subordinada $\{\rho_\lambda\}$. Pega qualquer carta e puxe a métrica de \mathbb{R}^n , i.e. se $x_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_\lambda^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$ é uma métrica riemanniana em U_λ .

$$\rho_\lambda x_\lambda^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$$

Fica um tensor simétrico *semi* positivo definido, i.e. ≥ 0 . (Acho que é porque os valores das ρ podem ser negativos.) Para resolver isso some só os positivos: para $p \in M$, $v \in T_p M$,

$$\langle v, v \rangle := \sum_{\substack{\lambda \text{ t.q.} \\ \rho_\lambda(p) > 0}} \rho_\lambda(p) \| (x_\lambda)_* v \|^2 > 0$$

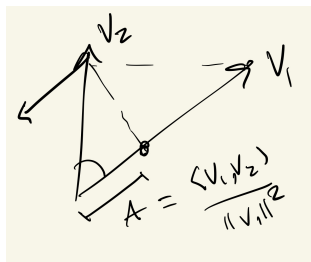
□

Definimos o ângulo entre $v, w \in T_p M$ como satisfazendo

$$\cos(\text{ângulo}(v, w)) := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

Soft exercise Ortogonalize Gram-Schmidt uma base $\{v_i\}$ de um espaço vetorial \mathbb{V} para obter uma base ortonormal $\{e_i\}$ (com a mesma orientação).

Solução. In the reality the solution is this:



The vector you are looking for is

$$v_2 - Av_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

And most importantly never forget how to find A: “dot product measures alignment—it’s small when vector are almost perpendicular, and large when they are almost parallel—, to project a vector onto the other you need to know how much aligned they are, and normalize by the size of v_1 because the size of v_1 doesn’t matter for projection”.

□

Observação O processo pode ser feito igualzinho para campos vetoriais: se X_1, \dots, X_n é uma base local de campos, $\exists!$ base ortonormal de campos $\{e_i\}$. **Cuidado:** em geral, o colchete desses campos não é zero, i.e. $[e_i, e_j] \neq 0$.

Proposição (Elemento de volume) M^n variedade Riemanniana orientada $\implies \exists! \omega \in \Omega^n(M^n)$ tal que

$$\omega(\text{bon+}) = 1$$

bon+=base ortonormal orientada.

Lembre Para duas top-forms, uma se expressa como a outra multiplicando pelo determinante da mudança de base.

Demonstração. Como M é orientada, sabemos que $\exists \sigma \in \Omega^n(M^n)$ positiva. Buscamos a função f tal que $\omega = f\sigma$. Pega um ponto, bases coordenadas $\{\partial_i\}$ e ortonormaliza para obter $\{e_i\}$. Como queremos que

$$\omega(e_1, \dots, e_n) \stackrel{\text{quero}}{=} 1 \stackrel{\text{quero}}{=} f|_U \sigma(e_1, \dots, e_n)$$

só tem um jeito de definir f :

$$f|_U = \sigma(e_1, \dots, e_n).$$

E isso determina por completo f como uma função global suave, e portanto temos ω . \square

4 Aula 5

4.1 Todo fibrado vetorial pode ter métrica

Observação (Todo fibrado vetorial pode ter métrica) Se E é um fibrado vetorial sobre M , então também podemos pegar seções de

$$\begin{array}{c} \text{BilSim } E \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

qualquer um dessas seções é uma *métrica Riemanniana* em E :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

A prova de que tais métricas sempre existem é análoga à prova para o fibrado tangente.

4.2 Comprimento de curvas, distancia, M como espaço métrico

Pegue $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ diferenciável por partes, i.e. existe uma partição do intervalo $[a, b]$ em que α é diferenciável em cada pedacinho. Isso significa que cada intervalzinho pode ser estendido um pouquinho para cada lado, de tal jeito que temos um intervalo aberto, que é uma variedade, então aí está definida a diferencial.

Então definimos

$$\ell(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Observação (A função comprimento não vê a parametrização da curva) Se $\varphi : I \rightarrow I'$, com $\varphi' \geq 0$, então

$$\ell(\alpha \circ \varphi) = \ell(\alpha)$$

É só fórmula de mudança de variáveis, ver [Tu17], prop. 16.1.

Como M^n é conexa (todas as nossas coisas são conexas) quaisquer dois pontos $p, q \in M$ estão ligados por uma curva, então podemos definir

$$d(p, q) := \inf\{\ell(\alpha), \alpha : [a, b] \rightarrow M \text{ d.p.p., } \alpha(a) = p, \alpha(b) = q\}$$

Para ver que d é simétrica pode usar a mesma curva em sentido contrário. Para ver desigualdade triangular usamos diferenciabilidade por partes e definição de ínfimo (tinha um ε).

Para ver que $d(p, p) = 0$ pegue uma carta (χ, U) em $p \in M$. Existe $B_r(\chi(p)) \subset \chi(U)$ cujo fecho queda dentro de $\chi(U)$. Então $\overline{\chi^{-1}(B)} \subset U$ compacto.

Os autovalores da matrix $(g)_{ij}$ são sempre positivos porque a métrica é positiva definida. Então como estamos num compacto existe uma cota inferior. Fica que existe $\delta > 0$ tal que $\forall v \in T(\chi^{-1}(B))$

A ver entonces aparece una δ que es la cota de los autovalores de la métrica. [Checar](#) ese asunto de que los autovalores son positivos. El chiste es que ahí la métrica en el espacio tangente se vuelve equivalente a la métrica aplicando la diferencial (foto)

Em conclusão, (M^n, d) é um espaço métrico.

Exercício Mostre que a topologia métrica coincide com a topologia métrica. **Hint.** usar a desigualdade da foto, e meter uma bola dentro de outra.)

Segue do exercício que d é contínua.

Observação Em variedades semi-Riemannianas não podemos fazer essa construção!

4.3 Conexão afim

Pegue $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $Z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Podemos derivar— nomas deriva coordenada a coordenada ([pegando uma base!](#)):

Checar derivada covariante em \mathbb{R}^n com [Tu17]

Definição Uma *conexão* ou *derivada covariante* em M é um operador \mathbb{R} -bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (Y, Z) &\longmapsto \nabla_Y Z \end{aligned}$$

que é tensorial em Y e uma derivação em Z , ou seja,

$$\nabla_Y(hZ) = Y(h)Z + h\nabla_Y Z \quad \forall Y, Z \forall h \in \mathcal{F}(M)$$

Olhando o exemplo de \mathbb{R}^n , os espaços vetoriais tem uma conexão canônica.

O que falta a uma conexão para ser um tensor e uma coisa que não depende de D . Então a diferença de duas derivações é um tensor! Por isso se chama conexão afim.

Definição Uma *conexão* ou *derivada covariante* no fibrado vetorial E é um operador \mathbb{R} -bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (Y, Z) &\longmapsto \nabla_Y Z \end{aligned}$$

que é tensorial em Y e uma derivação em Z , ou seja,

$$\nabla_Y(hZ) = Y(h)Z + h\nabla_Y Z \quad \forall Y, Z \forall h \in \mathcal{F}(M)$$

A diferencia fundamental com a conexão em \mathbb{R}^n é que essa é canônica. Em geral não!

Note essa propriedade aqui da conexão afim real:

$$\begin{aligned} Y \langle Z, Z' \rangle &= \sum Y(z_i)z'_i + \sum z_i Y(z'_i) \\ &= \langle D_Y Z, Z' \rangle + \langle Z, D_Y Z' \rangle \end{aligned}$$

Essa é uma propriedade bacana. Você pode conferir, só escrevendo, que

$$D_Y Z - D_Z Y = [Y, Z]$$

Aqui tem que fazer a conta (“o que falha para Y em $D_Y Z$, é o que falha para Y em $[Y, Z]$ ”), mas fica que

$$D_Y Z - D_Z Y - [Y, Z] := T(Y, Z)$$

é **tensorial**. Esse tensor se chama *torsão*.

No caso de \mathbb{R}^n , fica que isso é zero. Essa conexão é bem especial.

Agora vamos fazer algumas observações. A primeira é uma brincadeira que fica “pela tensorialidade”:

Seja ∇ uma conexão em M (ou E), então escrevemos para $p \in M, v \in T_p M$,

$$\nabla_v Y = (\nabla_X Y)(p)$$

Em particular, $f : N \rightarrow M$, $(\nabla_{X \circ f} Y) = (\nabla_X Y) \circ f \in \mathfrak{X}_f$, ou seja podemos obter um campo *ao longo de* f ...

Proposição ∇ é um *operador local*, i.e. $\forall X, X' \in \mathfrak{X}(M), Y, Y' \in \mathfrak{X}(M)$ e $U \subset M$ aberto, se

$$X|_U = X'|_U, \quad Y|_U = Y'|_U$$

então

$$(\nabla_X Y)|_U = (\nabla_{X'} Y')|_U$$

Tentação Defina $Z := Y - Y'$ então como $Y|_U = Y'|_U$, Z é constante e $\nabla Z = 0$. Porém, que Y coincida com Y' em U não significa que Z é zero como campo *em toda* M .

Demonstração. Pegue $p \in U, p \in V \subset \bar{V} \subset U$.

Antes de chegar a que é zero em p vimos que era zero em todo V ... y antes acho que tinha escrito que era zero em U ... \square

Corolário Dada uma conexão ∇ numa variedade M , existe uma única conexão ∇^U em U que faz

$$\nabla^U_{X|_U} Y|_U = (\nabla_X Y)|_U$$

Observação Note que nem todo campo em U pode ser escrito assim: pode ter um campo que faz coisas estranhas em ∂U e acaba que não se estende.

Beleza

Agora pegue (x, U) carta em (M, ∇) . Sabemos que devem existir as seguintes funções:

$$\nabla_{\partial_i}^U \partial_j := \sum \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

que se chamam *símbolos de Christoffel* de ∇ na carta (x, U) .

Agora vamos ver que esses símbolos determinam ∇ *se echa la cuenta del O'Neill*

Proposition 3.13 ([O'N83]) For a coordinate system x^1, \dots, x^n on U ,

1. Essa aqui ele provou, é só escrever:

$$D_{\partial_i} \left(\sum W^j \partial_j \right) = \sum_k \left(\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j \right) \partial_k.$$

2. Essa aqui ainda não usamos:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

contas

E no final note que pode restringir tudo beleza então fica que “os símbolos de Christoffel determinam a conexão”.

Bom agora, como se vê isso em fibrados? Pegue

$$\begin{array}{c} E^k \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

uma carta trivializante $(\varphi, \pi^{-1}(U))$, $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ base de $\Gamma(\pi^{-1}(U))$. Pegue $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(E)$, com $\xi = \sum \lambda_i \xi_i$, então (as contas são todas iguais...)

$$(\nabla_X \xi)|_U = \nabla_{\sum x_i \partial_i} \sum \lambda_j \xi_j$$

e no final fica que

$$\nabla_{\partial_i} \xi_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \xi_k$$

Lo que sigue es importantísimo (existe una única sección que le hace así...): pegue um fibrado afim

$$\begin{array}{ccc} f^*E & & (E, \nabla) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Para $X \in \mathfrak{X}(N)$ e $\xi \in \Gamma(E)$ podemos construir uma seção a longo de f , namely $\xi \circ f \in \Gamma(f^*E)$. É claro também temos $f_*X \in \mathfrak{X}_f$. E também

$$\nabla_{f_*X} \xi$$

é uma seção desse fibrado pullback.

Proposição Para todo fibrado sobre M e função f , existe uma única conexão ∇^f tal que

$$\nabla_X^f(\xi \circ f) = \nabla_{f_*X} \xi \in \Gamma(f^*E)$$

Observação Nem toda seção de f^*E se escreve como $\xi \circ f$. Pense em f constante. Então as seções $\xi \circ f$ são seções constantes (porque f^*E é o fibrado trivial, faz sentido dizer “seção constante”). Mas nem toda seção do fibrado trivial é constante...

Mas localmente sim (isso é o lance! A prova é: pega uma trivialização local de E , ali tem um marco $\{\xi_i\}$, pega um aberto coordenado $V \subset N$ t.q. $f(V) \subset U$, e vai ter que as seções ao longo de f , cujos vetores estão em $\pi^{-1}(U) \subset E$, são combinação linear das ξ_i , então por definição de pullback bundle as seções ao longo de f em V são combinação linear de $\xi_i \circ f$.)

Demonstração. Seja $p \in N$, $U \subset M$ aberto, (φ, U) carta trivializante de E em $f(p)$. Primeiro suponha que essa coisa existe para ver que cara tem. Vamos definir para $\lambda \in \Gamma(f^*E)$ e $X \in \mathfrak{X}(N)$

$$(\nabla_X^f \lambda)|_U = \nabla_{X|_U}^f \lambda|_U$$

Queremos ver qual é o valor em $p \in V \subset N$, $f(V) \subset U \subset M$. Em U temos $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ base de seções de $\pi^{-1}(U)$.

Seja $q \in V$. Então

$$\lambda(q) = \sum \lambda_i(q) \xi_i(f(q))$$

E que ficou?

$$\lambda|_V = \sum \lambda_i|_V (\xi_i \circ f)|_V$$

Usando a definição de ∇ como derivação em Y ... podemos provar unicidade local.

Como estamos supondo que ∇^f existe, deve ser um operador local, i.e. existe

$$\nabla^f \rightsquigarrow (\nabla^f)^V,$$

mas ainda, estamos supondo que ∇^f é boa nas seções da forma $\xi_i \circ f$:

$$\nabla_{X|_V}^f(\lambda|_V) = \sum \nabla_{X|_V} \lambda|_V (\xi_i \circ f)|_V \stackrel{\text{hip}}{=} \sum X(\lambda_i)(\xi_i \circ f) + \lambda_i \nabla_{f_*X} \xi_i$$

Ou seja, isso define uma unicamente uma conexão em $(f|_V)^*(\pi^{-1}(U))$.

Mas, como a conexão é um operador local, isso prova também unicidade global.

Para ver existência, pois é, como sabemos que é única localmente e coincide nas interseções, existe.

Definimos ∇^f localmente, i.e. como uma conexão em $(f|_V)^*(\pi^{-1}(U))$.

Exercício Verifique que satisfaz as propriedades de conexão (\mathbb{R} -linear, tensorial e derivação).

Solução.

1. (**\mathbb{R} -linear em λ .**) Acho que o mais importante é o setting: pegamos $U \subset M$, $V \subset N$ com $f(V) \subset U$. Pegue $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lambda, \mu \in \Gamma(f^*E)$. E dizemos bom, já construímos ∇^f como operador global, então podemos restringi-lo a V :

$$\nabla_X^f(\alpha\lambda + \mu)|_V \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{X|_V}^f(\alpha\lambda + \mu)|_V$$

E dizemos bom, de fato ele foi definido como sendo o cara que localmente é o que queremos, então naturalmente, em V ,

$$\nabla_{X|_V}^f(\alpha\lambda + \mu)|_V = \alpha\nabla_{X|_V}^f\lambda|_V + \nabla_{X|_V}^f\mu|_V$$

E dizemos que como é único em V , e está bem definido localmente, essa igualdade é verdade globalmente.

2. (**Leibniz em λ .**) Pegue $g \in \mathcal{F}(N)$, $\lambda \in \Gamma(f^*E)$, os conjuntinhos que faz tudo funcionar localmente e diga:

$$\nabla_X^f(g\lambda)|_V = \nabla_{X|_V}^f((g\lambda)|_V) = X|_V(g|_V)\lambda|_V + g|_V\nabla_{X|_V}^f\lambda|_V$$

3. (**$\mathcal{F}(N)$ -linear em X .**) Pegue $g \in \mathcal{F}(N)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ e $\lambda \in \Gamma(f^*E)$. Localmente,

$$\nabla_{gX+Y}^f\lambda|_V \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{(gX+Y)|_V}^f\lambda|_V = g|_V\nabla_{X|_V}^f\lambda|_V + \nabla_{Y|_V}^f\lambda|_V = (g\nabla_X^f\lambda + \nabla_Y^f\lambda)|_V$$

todo mundo cola e pronto.

□

□

Sendo assim que demostramos a primeira propriedade mágica do pullback: ele puxa conexões. Também podemos puxar a métrica.

Exemplo (Isto é equivalente à localidade da conexão)

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) = \text{inc}^*(E) & & E \\ \downarrow & \xrightarrow{\text{inc}} & \downarrow \pi \\ U & \hookrightarrow & M \end{array}$$

References

- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second edition edition, 2013.
- [O’N83] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [Tu17] L.W. Tu. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017.