3 Dudas

Exercício (Para revisión, creo que está bien) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Suponga que $R, R' : \mathbb{V}^4 \to \mathbb{R}$ son dos tensores tipo curvatura. Si $K = K' \implies R = R'$. **Sugerencia:** polarizar.

Solution. Polarizamos así:

$$\begin{aligned} 4R(X,Y,Z,W) = & R(X+Z, Y+W, X+Z, Y+W) \\ & - R(X-Z, Y-W, X-Z, Y-W) \end{aligned} \tag{1}$$

donde el truco es simplemente que $\mathbb{V}^4 \cong \mathbb{V}^2 \times \mathbb{V}^2$. Entonces la polarización usual para formas bilineales simétricas arbitrarias $T : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$, que nos dice que

$$4T(X,Y) = T(X+Y, X+Y) - T(X-Y, X-Y),$$

aplica para R con $\mathbb{W} = \mathbb{V}^2$. Para llegar de eq. (1) a la curvatura escalar simplemente aplicamos la antisimetría en las primeras dos o las últimas dos entradas. De ahí podremos sustituir K por K' y recuperar R'. □

Exercício Si la curvatura seccional de (M, g) es idénticamente cero, la exponencial $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to B_\varepsilon(p)$ es una isometría.

Ideas

- **(Idea 1.)** Considerar dos vectores tangentes $u, v \in T_pM$ a algún punto de M, y la superficie Σ generada por ellos mediante la exponencial. Es decir, definimos $V := \operatorname{span}\{u, v\}$ y $\Sigma := \exp_p(V \cap B_\varepsilon(0))$ donde $B_\varepsilon(0)$ es el dominio de definición de la exponencial en p. Trabajar en una superficie nos permite usar el lema de simetría para curvatura, i.e. que

  $$\nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}X - \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}X = R(\partial_s, \partial_t)X,$$

  donde se trata de la conexión inducida por la exponencial y el tensor de curvatura inducido por la exponencial; s y t son los parámetros de la exponencial restringida a $V \cap B_\varepsilon(0)$ y X es un campo ao longo de $\exp_p$.

  Por el ejercicio anterior sabemos el tensor de curvatura R de M es idénticamente cero. (Porque también la curvatura seccional del tensor $R' := 0$ es cero.) Como $R_{\nabla^{\exp}} = \exp_p^* R = 0$, tenemos que

  $$\nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}X = \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}X$$

  ¿Esta idea tiene futuro?

- **(Idea 2.)** Sabemos que el pullback de la curvatura de M coincide con la curvatura de T_pM, que también es cero por ser un espacio euclidiano. Es decir: tenemos dos variedades con el mismo tensor de curvatura, ¿podemos concluir desde aquí que sus métricas también coinciden? (Cf. pregunta de Arthur: curvaturas iguales $\implies$ métricas iguales?).

- **(Idea 3.)** Consultando notas de monitoria, la idea correcta es demostrar que

$$|d_v \exp_p(w)| = |w|, \qquad v \in T_pM, \quad w \in T_v(T_pM)$$

Para eso consideramos la variación por geodésicas

$$f(s,t) := \exp_p\Big(t(v+sw)\Big)$$

cuyo campo variacional J es de Jacobi. Como $R \equiv 0$, $J'' = 0$. De acuerdo a mis notas: esto significa que

"coordenada a coordenada tenemos líneas."

Pero no entiendo esto qué quiere decir. El siguiente paso es aplicar el lema de Gauss.

Exercício Provar que são equivalentes:

(a) M é localmente isométrica a $\mathbb{R}^n$.

(b) A traslação ao longo de curvas é localmente independente das curvas.

(c) $K = 0$.

Solução. **(c) $\Longrightarrow$ (a)** Ejercicio anterior.

(a) $\Longrightarrow$ (b) (Para revisión.) Considere un vector $X(p) \in T_pM$ y su traslación paralela $X(q)$ a lo largo de la curva γ. Análogamente sea $\tilde{X}(q)$ la traslación paralela de $X(p)$ a lo largo de σ. Considere una isometría local $\varphi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$.

Considere el transporte paralelo de $\varphi_* X(p)$ a lo largo de $\varphi \circ \gamma$, y compare con $\varphi_* X(q)$. Afirmo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & T_qM \arrow[d, "\varphi_*"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "P"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

porque:

- El transporte paralelo de $X(p)$ a lo largo de γ es el único campo $X \in \mathfrak{X}_\gamma$ satisfaciendo que $X(0) = X(p)$ y $\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} X(t) = 0$.

- El transporte paralelo de $\varphi_* X(p)$ a lo largo de $\varphi \circ \gamma$ es el único campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}_{\varphi\circ\gamma}$ satisfaciendo que $\tilde{X}(0) = \varphi_* X(p)$ y $\nabla^{\varphi\circ\gamma}_{\frac{d}{dt}} \tilde{X}(t) = 0$.

- Entonces $\tilde{X}(t) = \varphi_* X(t)$ porque $\varphi_* X(t)$ también es un campo paralelo a lo largo de $\varphi \circ \gamma$:

$$0 = \varphi_*\left(\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} X(t)\right) = \nabla^{\varphi\circ\gamma}_{\frac{d}{dt}} \varphi_* X(t)$$

En particular $\varphi_* X(q)$ es el transporte paralelo de $\varphi_* X(p)$ a lo largo de $\varphi \circ \gamma$.

Para concluir note que el transporte paralelo de $\mathbb{R}^n$ no depende de la curva. De hecho, el transporte paralelo de cualquier vector en $\mathbb{R}^n$ es el campo constante. Esto es porque la derivada covariante a lo largo de cualquier curva consiste en derivar el campo entrada a entrada. Que esa derivada se anule significa que las coordenadas del campo deben ser constantes.

Para confirmar que de hecho esa es la derivada covariante en $\mathbb{R}^n$, recuerde que la derivada covariante de campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$ definida como

$$D_{V_p} W = V_p W^i \partial_i$$

es métrica y simétrica (lo comprobé).

(b) $\Longrightarrow$ **(c)** (Tengo duda.) Éste es el ejercicio 4 del capítulo IV del libro de Manfredo. La sugerencia Manfredo es parecida a la idea de construir una superfície Σ como en la Idea 1 del ejercicio anterior. De acuerdo a la notación de la Idea 1, sabemos que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} X - \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} X = R(\partial_s, \partial_t) X.$$

Queremos demostrar que el lado izquierdo de la ecuación anterior es cero.

La sugerencia de Manfredo es definir un campo X como la traslación paralela de un vector cualquiera $v \in T_p M$, a lo largo de curvas verticales $t \mapsto (s,t)$; bajo la suposición de que la superficie Σ está parametrizada de tal forma que la recta $(s, 0)$ va a dar a un sólo punto de Σ. Me parece que para argumentar que $\nabla_{\partial_t} X = 0$ usa el lema 4.1 sobre cómo las geodésicas tangentes a las esferas geodésicas permanecen fuera de las respectivas bolas geodésicas.

No consigo ver exactamente cómo se usa este lema, y me pregunto si hay otra forma más simple de resolver esta pregunta.

□

Exercício Suponha que M tem curvatura seccional não-positiva, $K \leqslant 0$. Mostre que M é uma variedade sem pontos conjugados, isto é, para todo $p \in M$, o conjunto dos pontos conjugados a p é vazio.

Solução. Suponga que existen dos puntos conjugados p y q. Es decir, existe una geodésica $\gamma : (a, b) \to M$ uniendo p y q, y un campo de Jacobi $J \in \mathfrak{X}_\gamma^J$ tal que $J(a) = 0$, $J(b) = 0$. De acuerdo a las cuentas hechas en aula, sabemos que

$$\|J(t)\|^2 = \|w\|^2 t^2 - \frac{1}{3} K(w, v) t^4 + O(t^4)$$

donde $v = \gamma'(0)$ y $w = J'(0)$. Evaluando en b y pasando la curvatura seccional (que es negativa) del lado izquierdo, obtenemos que $\|w\|^2 b^2 + O(b^4)$ es un número negativo.

Pregunta: puedo tener problemas con los términos $O(b^4)$? La sugerencia de Manfredo (ex. 5 cap. V) es diferente (también logré seguirla). □