Daniel González Casanova Azuela
Prof. Luis Florit github.com/danimalabares/rg

Exercícios de Geometria Riemanniana

Índice

1 Lista 1

1.1 Revisão

Exercício 1 Dada uma subvariedade $M \subseteq \tilde{M}$ uma subvariedade mergulhada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mostre que existe um aberto $U \subset \tilde{M}$ contendo M e um campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\tilde{X}|_M = X$. Caso M seja subconjunto fechado de $\tilde{M}$, prove que U pode ser tomado igual a $\tilde{M}$. Se M não é subconjunto fechado de $\tilde{M}$, pode não existir extensão de X definida em todo $\tilde{M}$.

Solução. Acho que a prova canônica é tomar coordenadas de subvariedade de $M \subset \tilde{M}$, i.e. onde M está dada localmente como o lugar onde se anulam as últimas $n-m$ funções coordenadas.

Pegamos uma vizinhança rectificante U de X em $p \in M$, i.e. $X = \partial_1$ em U. Daí pega para cada vetor normal a exponencial, que percorre pela geodésica um pouqinho. Isso da uma vizinhança em $\tilde{M}$... □

Exercício 2 Seja $f : M^n \to N^m$ um mapa suave. Os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ são ditos f-relacionados se $df_p X_p = \tilde{X}_{f(p)}$, $\forall p \in M$. Mostre que se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são, respetivamente, f-relacionados com $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ então $[X, Y]$ é f-relacionado com $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

Solução. **Intento 2.** $s_1 \in \Gamma(\tau_N)$ está f-***relacionado*** com $s \in \Gamma(\tau_M)$ se $s = s_1 \oplus s^\perp$ para algum $s^\perp \in \nu$. Queremos ver que se $s \overset{f}{\sim} s_1$ e $t \overset{f}{\sim} t_1$, $[s,t] \overset{f}{\sim} [s_1, t_1]$, ou seja $[s,t] = [s_1, t_1] \oplus [s,t]^\perp$ onde $[s,t]^\perp$ é um vetor em ν cuja cara não é muito importante.

$$[s,t] = [s_1 \oplus s^\perp, t_1 \oplus t^\perp] = [s_1, t_1] + \underbrace{[s_1, t^\perp]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t_1]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t^\perp]}_{\in \nu}$$

Falta un argumentín para ver que esos colchetes se anulan...

Intento 1 (incompleto). Pegue $p \in M$. Queremos ver que

$$f_{*,p}[X,Y] \overset{\text{quero}}{=} [\tilde{X},\tilde{Y}]_{f(p)}.$$

Pegue $g \in \mathscr{F}(N)$.

$$\begin{aligned}
[\tilde{X},\tilde{Y}]_{f(p)} &\overset{\text{def}}{=} \tilde{X}_{f(p)}(\tilde{Y}g) - \tilde{Y}_{f(p)}(\tilde{X}g) \\
&\overset{\text{hip}}{=} f_{*,p}(X_p)(\tilde{Y}g) - f_{*,p}(Y_p)(\tilde{X}g) \\
&= X_p\Big((\tilde{Y}g) \circ f\Big) - Y_p\Big((\tilde{X}g) \circ f\Big) \\
&\overset{\text{hip}}{=} X_p\Big(\big(f_{*,p}(Y)\big)g \circ f\Big) - Y_p\Big(\big(f_{*,p}(X_p)\big)g \circ f\Big)
\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 3 Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva. Dado $Y \in \mathfrak{X}(N)$, mostre que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X é π-relacionado com Y.

Solução. O resultado segue de que $\tau_M \cong \pi^*\tau_N \oplus \nu$, tomando $X := Y \oplus 0$. $\square$

Exercício 4 (Fibrado pullback) Suponha que M^n, N^m são variedades suaves, $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial suave de posto k e $f : N \to M$ é um mapa suave. Considere o espaço

$$f^*E = \{(p,e) \in N \times E : f(p) = \pi(e)\},$$

e $\tilde{\pi} : E \to N$ a projeção na primeira coordenada. Mostre que f^*E tem uma estrutura de variedade suave de forma que a tripla $\tilde{\pi} : f^*E \to N$ é um fibrado vetorial suave de posto k.

Solução. Para mostrar que $\tilde{\pi}$ é um fibrado vetorial devemos dar trivializações locais. Pegue um ponto $p \in M$ e uma vizinhança trivializante de E perto de $f(p)$, i.e. um aberto $U \ni f(p)$ e um difeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$. Pegue também um aberto $V \ni p$ tal que $f(V) \subset U$. Defina

$$\begin{aligned}
h_1 : \tilde{\pi}^{-1}(V) &\longrightarrow V \times \mathbb{R}^k \\
(q,v) &\longmapsto (q, \pi_2 \circ h(f(q),v))
\end{aligned}$$

Como estamos usando a estrutura de fibrado vetorial de E, segue imediatamente a coleção de funções desse tipo formam um atlas trivializante de f^*E. $\square$

1.2 Métricas Riemannianas

Exercício 6 Seja (N^n, g) uma variedade Riemanniana e $M^m \subset N$ uma subvariedade mergulhada. Mostre que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset N$ de p e campos vetoriais $E_1, \ldots, E_n$ em U tal que $E_1(q), \ldots, E_n(q)$ é uma base ortonormal de T_qN para todo $q \in U$ e $E_1(r), \ldots, E_m(r)$ são tangentes a M para todo $r \in U \cap M$.

Solução. **(Intento 1.)**Pegue $p \in M$ e uma vizinhança aberta de $U \subset N$ de p tal que $U \cap M$ é suficientemente pequeno como para ter um marco ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$. Considere esses campos como campos tangentes a N. Usando o exercício 1 podemos estender esses campos a uma vizinhança de $U \subset N$. Aplicando Gram-Schmidt obtemos um marco ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$.

(Intento 2, [MS74] thm. 3.3, p. 36.) Take orthonormal frames $\{E_i\}_{i=1}^m \subset \mathfrak{X}(U \cap M)$ and $\{E_i'\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{X}(U)$. Notice that the matrix $(E_i \cdot E_j')$ has rank m at p. (I think that two orthonormal frames are related up to an orthogonal matrix.) Suppose that the first m columns are linearly independent at p. Then there is an open neighbourhood V of p where the first m columns of this matrix are linearly independent. Then a slightly confusing part arguing that $E_1, \ldots, E_m, E_{m+1}', \ldots, E_n'$ are linearly independent in V. Then apply Gram-Schmidt. And that's it.

Then Milnor shows that this is a vector bundle called the ***orthogonal bundle***. The lance is that the orthonormal frame we have found gives the local trivialization. For a subbundle $\xi \subset \eta$ define the fiber of the orthogonal complement of ξ by $F_b(\xi^\perp) := F_b(\xi)^\perp$ with respect to the metric of η. Define local trivializations by

$$\begin{aligned} \overline{h} : \overline{\pi}^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n-m} \\ \left(q, \sum x_i E_i\right) &\longmapsto (q, x_{m+1}, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

□

Definição 1 Sejam (M^m, g_M) e (N^n, g_N) variedades Riemannianas. Seja $F : M \to N$ uma submersão. Dizemos que F é uma ***submersão Riemanniana*** quando para todo $p \in M$, $DF : \ker(DF)^\perp \to T_{F(p)}N$ é uma isometría linear. Em outras palavras, sempre que $v, w \in T_pM$ são perpendiculares ao núcleo de DF, vale

$$g_M(v, w) = g_N(DF(v), DF(w)).$$

Exercício 7 Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Suponha que existe um grupo de Lie G agindo por isometrias em (M, g) de tal forma que M/G admite uma estrutura de variedade suave, onde a projeção $\pi : M \to M/G$ é uma submersão. Mostre que existe uma métrica Riemanniana $\overline{g}$ em M/G tal que $\pi : (M, g) \to (M/G, \overline{g})$ é uma submersão Riemanniana.

Solução. **(Seguindo notação e ideias de [MS74].)** Fazemos assim para definir a métrica em G/M. Primeiro lembre que $\tau_{G/M} \cong \pi^*\tau_{M/G}$. Considere o fibrado ν normal a $\pi^*\tau_{M/G}$, que é um fibrado sobre M satisfazendo $\pi^*\tau_{G/M} \oplus \nu \cong \tau_M$. Então qualquer vetor tangente a M/G pode ser pensado como um vetor tangente a M se anulamos a parte normal dele, mostrando que podemos usar a mesma métrica em M para introduzir uma métrica em G/M.

Para resolver o exercício devemos analisar como age π_* em τ_M quando este es visto como soma direita $\pi^* \oplus \nu$: $\pi_*(\nu_1 \oplus \nu^\perp) = \nu_1$. Daí segue trivialmente que $\ker \pi := \kappa \subset \nu$. Conversamente se $\nu_1 \oplus \nu^\perp \in \kappa$, fazemos para $w \in \pi^*$

$$(\nu_1 \oplus \nu^\perp) \cdot w = \nu_1 \cdot w + \cancelto{0}{\nu^\perp \cdot w} = \pi_* \nu_1 \cdot \pi_* w = 0.$$

Então $\kappa = \nu$, então $\kappa^\perp \cong \pi^* \cong \tau_{M/G}$ isometricamente.

Intento 1 (errado). Defina a seguinte métrica em M/G:

$$g_{M/G} := g_M|_{\pi^* \tau_{M/G}}$$

i.e. a restrição da métrica em M ao fibrado pullback de $\tau_{M/G} := T(G/M)$, que sabemos que é isomorfo (como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Para ver que $\pi : M \to M/G$ é uma submersão Riemanniana devemos mostrar que o complemento ortogonal de $\kappa_\pi := \ker(\pi)$ é isomorfo (como fibrado Riemanniano, i.e. isométrico como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Como M é Riemanniana, o fibrado pullback tem um complemento ortogonal $(\pi^* \tau_{M/G})^\perp := \nu$. Basta mostrar que $\nu \cong \kappa$ isometricamente.

□

2 Exercícios do do Carmo

2.1 Capítulo 0

Exercise 2 Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não seja).

Solution. Es porque la diferencial de los cambios de coordenadas está dada por la identidad y una matriz lineal. Sí, porque por definición las trivializaciones locales de TM preservan la primera coordenada **y** son isomorfismos lineales en la parte del espacio vectorial. Entonces queda que

$$d(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & \xi \in \mathrm{GL}(n) \end{array}\right)$$

pero no estoy seguro de por qué ξ preservaría orientación, i.e. que tenga determinante positivo… a menos de que… □

Exercise 5 (Mergulho de $P^2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^4$) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \qquad (x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Oberve que a restrição $\varphi := F|_{S^2}$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \qquad [p]\text{=clase de equivalência de } p = \{p, -p\}$$

Prove que

(a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.

(b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de $\mathbb{R}P^2$, isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

Solution.

(a) Considere a carta $\{z = 1\}$. A representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, xy, x, y)$$

cuja derivada como mapa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ é

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é injetiva. Agora pegue a carta $\{x = 1\}$. Então a representão coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(y, z) \longmapsto (1 - y^2, y, z, yz)$$

e tem derivada

$$\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & y \end{pmatrix}$$

que também é injetiva. Seguramente algo análogo acontece na carta $\{y = 1\}$.

(b) $\tilde{\varphi}$ é injetiva. Pegue dois pontos $p_1 := [x_1 : y_1 : z_1]$ e $p_2 := [x_2 : y_2 : z_2]$ e suponha que $\tilde{\varphi}(p_1) = \tilde{\varphi}(p_2)$. I.e.,

$$x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \qquad x_1y_1 = x_2y_2, \qquad x_1z_1 = x_2z_2, \qquad y_1z_1 = y_2z_2$$

Suponha primeiro que $z_1 \neq 0$. Segue que

$$x_1 = \frac{z_2}{z_1}x_2, \qquad y_1 = \frac{z_2}{z_1}y_2$$

logo

$$x_2^2 - y_2^2 = x_1^2 - y_1^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 (x_2^2 - y_2^2) \implies z_2 = z_1 \implies x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2$$

Em fim, uma imersão injetiva com domínio compacto é um mergulho porque é fechada: pegue um fechado no domínio, vira compacto, imagem é compacta, que é fechado. Pronto. .

$\square$

Exercício 8 $\varphi : M_1 \to M_2$ difeo local. Se M_2 é orientável, então M_1 é orientável.

Solução. Defina: uma base $\beta \subset T_pM$ é orientada se $\varphi_*\beta$ é orientada em $T_{\varphi(p)}M$. Tá bem definida porque φ é um difeomorfismo em p, i.e. φ_* é isomorfismo. Para mostrar que é contínua à la Lee, qualquer vizinhança de um ponto $p \in M_1$, a correspondente carta coordenada em $\varphi(p)$, um marco coordenado nela e puxe (pushforward baix φ^{-1}) de volta para U. Difeomorfismo e muito bom: o pushforward the campos vetoriais está bem definido. E por construção está orientado. $\square$

2.2 Capítulo 1

Exercise 1 Prove que a aplicação antípoda $A : S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ tal que a projeção natural $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ seja uma isometria local.

Solution. Lembre que a métrica de S^n é a induzida pela métrica euclidiana, onde pensamos que $T_pS^n \hookrightarrow T_p\mathbb{R}^{n+1}$. É claro que A é uma isometría de $\mathbb{R}^n$, pois ela é a sua derivada (pois ela é linear), de forma que $\langle v, w\rangle_p = \langle -v, -w\rangle_{A(p)} = \langle v, w\rangle_{-p}$.

É um fato geral que se as transformações de coberta preservam a métrica, obtemos uma métrica no quociente de maneira natural, i.e. para dois vetores $v, w \in T_p\mathbb{R}P^n$ definimos $\langle v, w\rangle_p^{\mathbb{R}P^n} := \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_{\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)}$.

Para ver que a projeção natural é uma isometria local basta ver que a diferencial de A é um isomorfismo em cada ponto. Mas como ela é $-A$, isso é claro. $\square$

Exercício 7 Seja G um grupo de Lie compacto e conexo ($\dim(G) = n$). O objetivo do exercício é provar que G possui uma métrica bi-invariante. Para isto, prove as seguintes etapas:

(a) Seja ω uma n-forma diferencial em G invariante à esquerda, isto é, $L_x^*\omega = \omega$, para todo $x \in G$. Prove que ω é invariante à direita.

Sugestão: Para cada $a \in Ga$, $R_a^*\omega$ é invariante à esqueda. Decorre daí que $R_a^*\omega = f(a)\omega$. Verifique que $f(ab) = f(a)f(b)$, isto é, $f : G \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é um homomorfismo (contínuo) de G no grupo multiplicativo dos números reais. Como $f(G)$ é um subgrupo compacto compacto e conexo, conclui-se que $f(G) = 1$. Logo $R_a^*\omega = \omega$.

(b) Mostre que existe uma n-forma diferencial invariante à esquerda ω em G.

(c) Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G. Seja ω uma n-forma diferencial positiva invariante à esqueda em G, é defina uma nova métrica Riemanniana $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ em G por

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_p = \int_G \langle (dR_x)_y u, (dR_x)_y v\rangle_{yx}\, \omega,$$
$$x, y \in G, \qquad u, v \in T_yG$$

Prove que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é bi-invariante.

Solução.

(a)

(b)

(c) Vou usar outra notação. Suponha que g é uma métrica invariante à esquerda em G. Definimos

$$\tilde{g} := \int_{x \in G} (R_x^* g)\omega$$

como operador $\mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathscr{F}(G)$.

Agora vamos ver que $\tilde{g}$ é invariante à esquerda, i.e. queremos ver que para todo $a \in G$,

$$\tilde{g} \overset{\text{quero}}{=} L_a^* \tilde{g} \overset{\text{def}}{=} L_a^* \int_G (R_x^* g)\omega.$$

Vamos ver que o pullback L_a^* pode "entrar na integral" e trocar de lugar com R_x^*, daí o resultado segue porque g é L_a-invariante. As contas acabam sendo que

$$\begin{aligned} L_a^* \int_G (R_x^* g)\omega &= \int_G L_a^* R_x^* g\omega = \int_G (L_a \circ R_x)^* g\omega = \int_G (R_x \circ L_a)^* g\omega \\ &= \int_G R_x^* L_a^* g\omega = \int_G R_x^* g\omega = \tilde{g} \end{aligned}$$

Para ver que $\tilde{g}$ também é invariante à direita fazemos:

$$\tilde{g} \overset{\text{quero}}{=} R_a^* \tilde{g} \overset{\text{def}}{=} R_a^* \int_G (R_x^*) g\omega = \int_G R_a^* R_x^* g\omega = \int_G R_{ax}^* g\omega = \int_G R_x^* g\omega = \tilde{g}$$

porque estamos integrando em todo G e $G \curvearrowright G$ transitivamente.

Para todo aquele que tem dúvida, aqui estão as contas da invarianza à esquerda super explicitas:

Fixe $y \in G$ e $u, v \in T_y G$. Temos que

$$
\begin{aligned}
& (L_a^* \tilde{g})(u,v) && = L_a^* \left(\int_g (R_x^* g) \omega \right) (u,v) \\
& && = \left(\int_G (R_x^* g) \omega \right) \Big((L_a)_{*,a^{-1}y} u, (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big) \\
& && = \int_G (R_x^* g) \Big((L_a)_{*,a^{-1}y} u, (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big) \omega \\
& && = \int_G g \Big((R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (L_a)_{*,a^{-1}y} u, (R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big) \omega \\
& && = \int_G g \Big((R_x \circ L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} u, (R_x \circ L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} v \Big) \omega \\
& \text{associatividade em } G && = \int_G g \Big((L_a \circ R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} u, (L_a \circ R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} v \Big) \omega \\
& && = \int_G g \Big((L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (R_x)_{*,yx^{-1}} u, (L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big) \omega \\
& && = \int_G \Big((L_a)^* g \Big) \Big((R_x)_{*,yx^{-1}} u, (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big) \omega \\
& g \text{ invariante à esquerda} && = \int_G g \Big((R_x)_{*,yx^{-1}} u, (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big) \omega \\
& && \overset{\text{def}}{=} \tilde{g}(u,v).
\end{aligned}
$$

onde $R_x \circ L_a = L_a \circ R_x$ por associatividade de produto no grupo.

$\square$

References

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Princeton University Press, 1974.