Exercícios de Geometria Riemanniana

IMPA, Mar/Jun 2025 - Monitor: Ivan Miranda

Exercício 1. *Prove que o tensor de curvatura de uma variedade Riemanniana de dimensão 3 pode ser determinado a partir do tensor de Ricci dessa variedade. Mostre que se (M^3, g) é Einstein, então M possui curvatura seccional constante.*

Comentário: esse resultado está provado na seção 3.1.4 do livro do professor Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, terceira edição.

Exercício 2. *Exercício 7 do Capítulo 4 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre a **Segunda Identidade de Bianchi**.*

Exercício 3. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Considere o tensor $Ric(X) := \sum_{i=1}^n R(e_i, v)e_i$ onde $\{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ é uma base ortonormal. Prove que*

$$d(trRic) = 2div(Ric)$$

onde $div(Ric)(X) = tr\big(Y \mapsto (\nabla_Y Ric)(X)\big)$.

Sugestão: utilize o exercício anterior.

Exercício 4. *Exercício 8 do Capítulo 4 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre o **Teorema de Schur**.*

Sugestão: utilize o exercício 3.

Exercício 5. *Exercício 10 do Capítulo 4 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre Variedades de Einstein.*

Sugestão: utilize o exercício 3 para o item (a) desse exercício.

Exercício 6. *Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa e G um grupo de Lie que age em M por isometrias. Assuma que a ação de G em M satisfaz: $g \cdot p = p$ para todo $p \in M$ somente quando $g = e$. Mostre que $dimG \leq n(n+1)/2$ e que se acontece a igualdade então M tem curvatura seccional constante.*

Abaixo há um possível roteiro para a solução do exercício. Seja $\varphi : G \times M \to M$ a ação de G em M.

a) Dado $v \in \mathfrak{g}$, mostre que $X_v(p) := \varphi_{*(e,p)}(v, 0_p) \in T_pM$ define um campo $X_v \in \mathfrak{X}(M)$.

b) Mostre que o mapa $v \in \mathfrak{g} \mapsto X_v \in \mathfrak{X}(M)$ é linear e injetivo.

c) Prove que X_v é um campo de Killing de M para todo $v \in \mathfrak{g}$. Conclua que $dimG \leq n(n+1)/2$.

d) Fixe $p \in M$ e considere o mapa $\chi : Kill(M) \to T_pM \times \mathcal{A}(TpM)$ definido por

$$\chi(X) = (X(p), w \in T_pM \mapsto \nabla_w X \in T_pM)$$

onde $Kill(M)$ denota o espaço vetorial dos campos de Killing de M e $\mathcal{A}(T_pM)$ denota o espaço dos endomorfismos anti-simétricos de T_pM. Mostre que se $dimG = n(n+1)/2$, então χ é um isomorfismo linear.

Para os próximos itens, suponha que $dimG = n(n+1)/2$ e fixe $p \in M$.

e) Considere $H = \{h \in G : h \cdot p = p\}$. Mostre que H é subgrupo de Lie de G e $dimH = n(n-1)/2$.

f) Considere o mapa $\psi : H \to O(T_pM)$ que leva $h \in H$ em $d(\varphi_h)_p$. Mostre que ψ é um morfismo de grupos de Lie injetivo.

g) Mostre que ψ é sobrejetivo.

h) Prove que M é uma variedade simétrica e, portanto, homogênea.

i) Mostre que dados pontos $p, q \in M$ e planos $\pi_p \subset T_pM$, $\pi_q \subset T_qM$, existe uma isometria f de M tal que $f(p) = q$ e $df(\pi_1) = \pi_2$.

j) Conclua que M possui curvatura seccional constante.

Exercício 7. *Exercícios 9, 10, 11 e 12 do Capítulo 8 do livro do professor Manfredo, sobre submersões Riemannianas. O exercício 12 calcula a curvatura de $\mathbb{CP}^n$.*

Referências

[1] Livro do professor Manfredo, Geometria Riemanniana.

[2] Exercícios do professor Luis Florit, https://luis.impa.br/.

[3] Listas de exercícios do Diego Guajardo, https://luis.impa.br/.

[4] Listas de exercícios do Luciano Luzzi, https://sites.google.com/impa.br/lucianojunior/.

[5] Livro do professor P. Petersen, *Riemannian Geometry*.

[6] Livro do professor J. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*.