Lista 1 de Geometria Riemanniana

IMPA, Mar/Jun 2025 - Ivan Miranda

Revisão:

Exercício 1. *Seja $M \subset \tilde{M}$ uma subvariedade mergulhada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mostre que existe um aberto $U \subset \tilde{M}$ contendo M e um campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\tilde{X}|_M = X$. Caso M seja subconjunto fechado de $\tilde{M}$, prove que U pode ser tomado igual a $\tilde{M}$. Se M não é subconjunto fechado de $\tilde{M}$, pode não existir extensão de X definida em todo $\tilde{M}$.*

Exercício 2. *Seja $f : M^n \to N^m$ um mapa suave. Os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ são ditos f-relacionados se $df_p X_p = \tilde{X}_{f(p)}$, $\forall p \in M$. Mostre que se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são, respectivamente, f-relacionados com $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$, então $[X, Y]$ é f-relacionado com $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.*

Exercício 3. *Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva. Dado $Y \in \mathfrak{X}(N)$, mostre que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X é π relacionado com Y.*

Exercício 4. *(Fibrado Pullback) Suponha que M^n, N^m são variedades suaves, $\pi : E \mapsto M$ é um fibrado vetorial suave de posto k e $f : N \mapsto M$ é um mapa suave. Considere o espaço*

$$f^*E = \{(p, e) \in N \times E \ : \ f(p) = \pi(e)\},$$

e $\tilde{\pi} : f^*E \mapsto N$ a projeção na primeira coordenada. Mostre que f^*E tem uma estrutura de variedade suave de forma que a tripla $\tilde{\pi} : f^*E \mapsto N$ é um fibrado vetorial suave de posto k.

Métricas Riemannianas:

Exercício 5. *Exercício 7 do Capítulo 1 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre a existência de métricas Riemannianas bi-invariantes em grupos de Lie compactos.*

Exercício 6. *Seja (N^n, g) uma variedade Riemanniana e $M^m \subset N$ uma subvariedade mergulhada. Mostre que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset N$ de p e campos vetoriais $E_1, \ldots, E_n$ em U, tal que $E_1(q), \ldots, E_n(q)$ é uma base ortonormal de T_qN para todo $q \in U$ e $E_1(r), \ldots, E_m(r)$ são tangentes a M para todo $r \in U \cap M$.*

Definição 1. *Sejam (M^m, g_M) e (N^n, g_N) variedades Riemannianas. Seja $F : M \to N$ uma submersão. Dizemos que F é uma* ***submersão Riemanniana*** *quando para todo $p \in M$, $DF : ker(DF)^\perp \to T_{F(p)}N$ é uma isometria linear. Em outras palavras, sempre que $v, w \in T_pM$ são perpendiculares ao núcleo de $DF : T_pM \to T_{F(p)}N$ vale:*

$$g_M(v, w) = g_N(DF(v), DF(w)).$$

Exercício 7. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Suponha que existe um grupo de Lie G agindo por isometrias em (M, g), de tal forma que M/G admite uma estrutura de variedade suave, onde a projeção $\pi : M \to M/G$ é uma submersão. Mostre que existe uma métrica Riemanniana $\overline{g}$ em M/G, tal que $\pi : (M, g) \to (M/G, \overline{g})$ é uma submersão Riemanniana.*

Comentário: pode ser uma boa ideia consultar o capítulo 10 sobre fibrados vetoriais do livro *Introduction to Smooth Manifolds*, segunda edição, do professor John M. Lee, caso encontrem dificuldades com esses conceitos.

Exercício 8. *Exemplos.*

a) Induza uma métrica Riemanniana em $\mathbb{T}^n := \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ exigindo que a projeção natural $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ seja uma isometria local.

b) Induza uma métrica Riemanniana em $\mathbb{R}P^n$ exigindo que a projeção natural $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ seja uma isometria local.

c) Induza uma métrica Riemanniana em $\mathbb{C}P^n$ exigindo que a projeção natural $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ seja uma submersão Riemanniana. Essa é a chamada métrica de Fubini-Study.

d) Considere a faixa de Mobius M^2 definida como o quociente de $\mathbb{R}^2$ pela relação de equivalência

$$(x, y) \sim (a, b) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x = a + n, y = (-1)^n b.$$

Induza uma métrica Riemanniana em M^2 exigindo que a projeção natural $\pi : \mathbb{R}^2 \to M^2$ seja uma isometria local.

e) Descreva a garrafa de Klein como um quociente de $\mathbb{R}^2$ pela ação de um grupo e induza uma métrica Riemanniana na garrafa de Klein, como nos itens anteriores.

Exercício 9. *Exercícios 2 e 3 do capítulo 1 do livro de Geometria Riemanniana do professor Manfredo P. do Carmo, quinta edição.*

Exercício 10. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Defina o fibrado unitário de M com relação à métrica g como $T_1M := \{v \in TM : g(v, v) = 1\}$.*

a) Prove que T_1M é subvariedade suave de TM de dimensão $2n - 1$.

b) Prove que se M é compacta, então T_1M é compacta.

c) Prove que se g_1 e g_2 são métricas Riemannianas em uma variedade diferenciável M compacta, então existem números reais $A, B > 0$ tais que $Ag_1(v, v) \leq g_2(v, v) \leq Bg_1(v, v)$ para todo $v \in TM$.

Exercício 11. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita completa, se é completa como espaço métrico com a distância induzida por g. Mostre que toda variedade suave M^n admite uma métrica Riemanniana g, tal que (M, g) é uma variedade Riemanniana completa.*

Definição 2. *Seja $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana. Seja ∇ uma conexão afim em M. Dizemos que ∇ é **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

*para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dizemos que ∇ é **compatível** com a métrica Riemanniana de M quando*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Comentário: em uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, existe uma única conexão afim ∇ simétrica e compatível com sua métrica Riemanniana. Essa é a **conexão Riemanniana** de M (ou conexão de Levi-Civita) e esse resultado é um teorema do curso.

Definição 3. *Seja $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana.*

- *Dada $f \in C^\infty(M)$ definimos o **gradiente** de f, como o único campo $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que:*

  $$\langle \nabla f, X\rangle = df(X),$$

  para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

- *Dado $p \in M$ e $T \in \mathrm{Hom}(T_pM)$ definimos o **traço** do operador T como:*

  $$\mathrm{tr}(T) = \sum_{j=1}^{n} \langle TE_j, E_j\rangle,$$

  onde $\{E_j\}_{j=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM (mostre que a definição independe da base ortonormal escolhida). Definimos o traço de uma forma bilinear B em T_pM como $\mathrm{tr}(B) = \sum_{j=1}^n B(E_j, E_j)$. Note que existe um único $T_B \in \mathrm{Hom}(T_pM)$ tal que

  $$B(v, w) = \langle T_B(v), w\rangle$$

  para todo $v, w \in T_pM$ e com a definição acima temos $\mathrm{tr}(B) = tr(T_B)$.

- *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos o **divergente** de X como a função:*

$$\operatorname{div}(X)(p) = \operatorname{tr}(v \mapsto \nabla_v X).$$

Relembrando que $T_pM \ni v \mapsto \nabla_v X \in T_pM$.

- *Dada $f \in C^\infty(M)$, definimos a **Hessiana** de f como o operado:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}(f) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to C^\infty(M)\\ (X, Y) &\mapsto \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle.\end{aligned}$$

- *Definimos o **Laplaciano** como o operador:*

$$\begin{aligned}\Delta : C^\infty(M) &\to C^\infty(M)\\ f &\mapsto \Delta f \doteq \operatorname{div}(\nabla f).\end{aligned}$$

Exercício 12. *Prove que as definições acima coincidem com as usuais no espaço Euclidiano. Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana, $f \in C^\infty(M)$ e (U, χ) uma carta. Represente o gradiente de f nessa carta. Dado $p \in M$ e $T \in \operatorname{Hom}(T_pM)$, represente o traço de T nessa carta.*

Exercício 13. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Tome $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

a) *Mostre que $\operatorname{Hess}(f)$ é um tensor simétrico.*

b) *Mostre que $\Delta f = tr_g(\operatorname{Hess}(f))$.*

c) *Suponha que M é orientada. Mostre que $\operatorname{div}(X) dV_g = d(\iota_X dV_g)$.*

Comentário: para fazer o item (c), vocês podem utilizar um referencial geodésico. Essa é uma ferramenta útil para fazer contas, utilizada com frequência. A definição é conteúdo do exercício 7 do capítulo 3 do livro do professor Manfredo P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, quinta edição.

Exercício 14. *Seja $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana. Tome $f, g \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mostre que:*

a) $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X\rangle$.

b) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$.

Exercício 15. *Seja $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com bordo e orientada. Mostre que existe um único campo $N_{\partial M} \in \mathfrak{X}^\perp(\partial M)$, tal que $N_{\partial N}$ é unitário e aponta para fora.*

Observação 1. *Dizemos que um vetor $v \in T_pM \setminus T_p\partial M$ aponta para fora se existe uma curva $\gamma : (-\epsilon, 0] \to M$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = v$.*

Exercício 16. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientada e compacta, $N_{\partial M} \in \mathfrak{X}^\perp(\partial M)$ o único vetor unitário que aponta para fora. Mostre que para cada $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos:*

$$\int_M \langle \nabla f, X\rangle dV_g = \int_{\partial M} f\langle N_{\partial M}, X\rangle dV_{\partial M} - \int_M f\operatorname{div}(X) dV_g.$$

Onde $dV_{\partial M}$ é a forma de volume associada a métrica induzida pela inclusão $\partial M \hookrightarrow (M, g)$.

Exercício 17. *Forneça um exemplo de variedade Riemanniana completa, não compacta e de volume finito.*