Lista 5 de Geometria Riemanniana

IMPA, Mar/Jun 2025 - Monitor: Ivan Miranda

Exercício 1. *Suponha que* (M_1, g_1) *e* (M_2, g_2) *são variedades Riemannianas e considere* $M_1 \times M_2$ *com a métrica produto* $g = g_1 \oplus g_2$. *Mostre que a curvatura Riemanniana, a curvatura de Ricci, e a curvatura escalar de* g *são dadas pelas seguintes fórmulas:*

a) $R = \pi_1^* R_1 + \pi_2^* R_2$

b) $Ric = \pi_1^* Ric_1 + \pi_2^* Ric_2$

c) $S = \pi_1^* S_1 + \pi_2^* S_2$

onde R_i, Ric_i, S_i *denotam as curvaturas de Riemann, de Ricci e escalar de* (M_i, g_i), *e* $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ *é a projeção.*

Exercício 2. *Exercício 5 do Capítulo 7 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre as curvas divergentes.*

Exercício 3. *Ferramentas.*

a) Mostre que toda variedade Riemanniana homogênea é completa.

b) Mostre que toda variedade Riemanniana simétrica é completa.

c) Suponha que $\pi : \tilde{M} \to M$ *é um mapa de recobrimento entre variedades Riemannianas que é uma isometria local. Prove que* $\tilde{M}$ *é completa se, e somente se,* M *é completa.*

d) Seja (M^n, g) *completa. Mostre que todo campo de Killing em* M *é completo.*

Exercício 4. *Exercício 8 do Capítulo 7 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre completude, geodésicas e isometrias.*

Exercício 5. *Exercício 6 do Capítulo 7 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre a existência de* ***raios*** *em variedades Riemannianas não compactas.*

Definição 1. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana então uma geodésica* $\gamma : \mathbb{R} \to M$ *é dita uma* ***linha*** *quando* $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$, *para cada* $t, s \in \mathbb{R}$.

Exercício 6. *Mostre que toda métrica completa em* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *admite uma linha.*

Exercício 7. *Seja* (M^n, g) *completa e* $N \subset M$ *subvariedade mergulhada.*

a) Mostre que se N *é um subconjunto fechado de* M, *então* N *é completa com a métrica induzida.*

b) Prove que a recíproca do item (a) *é falsa.*

c) Mostre que se N *é apenas imersa em* M, *então o resultado do item* (a) *é falso.*

Exercício 8. *Mostre que se uma variedade Riemanniana* (M, g) *admite uma função* $f : M \to \mathbb{R}$ *própria e Lipschitz, então* M *é completa.*

Exercício 9. *Exercício 3 do Capítulo 8 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre um modelo do espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$.

Referências

[1] Livro do professor Manfredo, Geometria Riemanniana.

[2] Exercícios do professor Luis Florit, https://luis.impa.br/.

[3] Listas de exercícios do Diego Guajardo, https://luis.impa.br/.

[4] Listas de exercícios do Luciano Luzzi, https://sites.google.com/impa.br/lucianojunior/.

[5] Livro do professor P. Petersen, *Riemannian Geometry*.

[6] Livro do professor J. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*.