Exercício Para $f : M \to \tilde{M}$ defina

$$T_{\nabla^f}(X, Y) = \nabla^f_X f_* Y - \nabla^f_Y f_* X - f_*[X, Y]$$

que é uma seção do fibrado pullback. Avaliada em $p \in M$, obtemos um vetor em $T\tilde{M}$. Agora pegue dois campos $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ que estendem $f_{*,p}X_p$ e $f_{*,p}Y_p$. Mostre que $(T_{\nabla^f}(X, Y))(p)$ é o mesmo vetor que o campo

$$(f^*T)(X, Y) := \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

avaliado em $f(p)$.

Solution. Essa aqui é a conta do Florit. Pegue coordenadas ∂_i de M e $\tilde{\partial}_i$ de $\tilde{M}$. Primeiro lembre que

$$f_*\partial_i = \partial_i f^k \partial_k \circ f$$

onde abusando de notação $f = (f^1, \ldots, f^{\tilde{n}})$ são as funções coordenadas de f naquelas cartas.

A conta presentada em aula é:

$$\begin{aligned}
\nabla^f_{\partial_i} f_*\partial_j &= \nabla^f_{\partial_i} \partial_j f^k \tilde{\partial}_k \circ f \\
&= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial}_k \circ f + \partial_j f^k \nabla^f_{\partial_i} \tilde{\partial}_k \circ f \\
\text{all I know\ldots} \qquad &= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial}_k \circ f + \partial_j f^k \nabla_{f_*\partial_i} \tilde{\partial}_k \\
&= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial}_k \circ f + \partial_j f^k \nabla_{\partial_i f^\ell \tilde{\partial}_\ell f} \tilde{\partial}_k \\
&= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial} \circ f + \partial_j f^k \partial_i f^\ell \nabla_{\tilde{\partial}_\ell \circ f} \tilde{\partial}_k \\
\text{tensorial embaixo} \qquad &= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial} \circ f + \partial_j f^k \partial_i f^\ell \left(\nabla_{\tilde{\partial}_\ell} \tilde{\partial}_k\right) \circ f
\end{aligned}$$

O que faço com isso? Mmm…

$$\nabla^f_{\partial_j} f_*\partial_i = \partial_j\partial_i f^k \tilde{\partial} \circ f + \partial_i f^k \partial_j f^\ell \left(\nabla_{\tilde{\partial}_\ell} \tilde{\partial}_k\right) \circ f$$

Parece que

$$\nabla^f_{\partial_i} f_*\partial_j - \nabla^f_{\partial_j} f_*\partial_i = 0$$

porque as parciais comutam mas… é isso o que queremos? $\square$

Exercício 8 (Curvas minimizantes)

(a) Seja γ uma curva suave por partes parametrizada por comprimento de arco (this is important, velocity is 1) conectando p a q. Mostre que se $d(p,q) = \ell(\gamma)$ então γ é uma geodésica.

Solution. Imagino que podemos só usar a primeira fórmula da variação:

$$S'(0) = -\int_a^b \langle V, \gamma'' \rangle \, dt.$$

(na página que segue anexo uma prova dela, mas isso é extra.)

É claro que se γ é minimizante, estamos num ponto crítico do funcional de distância S, é se cumple a primeira fórmula da variação.

Pergunta Para mim parece que daí segue que $\gamma'' = 0$, porque a métrica é não degenerada. Porém, [Lee19], thm. 6.4 afirma que devemos usar $V = \gamma''$ para concluir esse exercício. Isso não entendo por que.

□

Explanation of first variation formula. Não precisa ler :)

Consider a ***variation*** of γ, which is like a homotopy:

$$\Gamma : (a,b) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$
$$\Gamma(t,s) = \gamma(t) + sV(\gamma(t))$$

where $V \in \mathfrak{X}_\gamma$ is a vector field along γ called the ***variation field***, and it has to vanish on the endpoints. Then there's the ***length functional***

$$S(s) := \ell(\Gamma(t,s)) = \int_a^b |\nabla_{\frac{d}{dt}} \Gamma(t,s)| dt.$$

Because $\gamma = \Gamma(t,0)$ is minimizing, we know that $S'(0) = 0$. Then we compute that and hope that it will say $\gamma'' = 0$.

$$\begin{aligned}
S'(0) &= \int_a^b \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \nabla_t \Gamma(t,s), \nabla_t \Gamma(t,s) \rangle^{1/2} \, dt \\
&= \int_a^b \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cancel{|\Gamma(s,t)|}^{1}} \langle \nabla_s \nabla_t \Gamma(t,s), \nabla_t \Gamma(t,s) \rangle \, dt \\
&\overset{\substack{\text{symmetry}\\\text{lemma}}}{=} \int_a^b \left\langle \nabla_t \underbrace{\nabla_s \Gamma(t,s)}_{=V}, \nabla_t \Gamma(t,s) \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle V, \nabla_t \Gamma(t,s) \rangle - \int_a^b \left\langle V, \underbrace{\nabla_t \nabla_t \Gamma(t,s)}_{\gamma''} \right\rangle dt
\end{aligned}$$

and the first one vanished out fundamental theorem of calculus and the fact that V is zero on the endpoints.

So we get that if γ minimizes distance, this integral is zero for any variation of γ.

Remarks

- Symmetry lemma basically follows from commutativity of partial derivatives in $\mathbb{R}^n$. Florit used pullback connection (as in the previous exercise!) and [Lee19] used Christoffel symbols.
- The true version of the variation formula admits that Γ is only piecewise smooth. The formula becomes less nice and the proof a little more involved, I won't do it, but something nice comes out of that: the fact that you realise that geodesics can't have corners because:

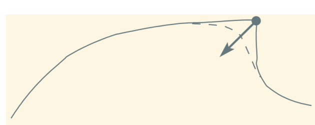


Fig. 6.5: Rounding the corner

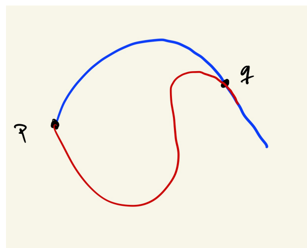
so it would be nice to understand that precisely but OK.

Mais um:

Exercício 8 (Curvas minimizantes)

(b) Suponha que $\gamma, \sigma : [0, 2] \to M$ são geodésicas distintas e satisfazem: $\gamma(0) = \sigma(0) :=$ p, $\gamma(1) = \sigma(1) := q$, γ e σ realizam a distância entre p e q. Mostre que γ não realiza a distância entre p e $\gamma(1 + s)$ para nenhum $s > 0$.

Demostração. Argumentamos na monitoria que teriamos um problema de diferenciabilidade. Pela explicação dada em [Lee19] sobre a suavização de quinas, sabemos que as geodésicas devem ser suaves. Porém, que não poderia acontecer algo assim?



$\square$