Lista 3 de Geometria Riemanniana

IMPA, Mar/Jun 2025 - Monitor: Ivan Miranda

Parte 1: Ferramentas e Exemplos.

Exercício 1. *Exercício 1 do Capítulo 3 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre as geodésicas de uma Superfície de Revolução.*

Exercício 2. *Imersões isométricas. Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Sejam ∇ a conexão de Levi-Civita de M e $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$.*

a) Mostre que

$$f_*(\nabla_X Y) = (\overline{\nabla}^f_X f_* Y)_{TM}$$

e que essa igualdade determina ∇ em função de $\overline{\nabla}$. Aqui, para $W \in T_{f(p)}\overline{M}$, W_{TM} denota a sua projeção ortogonal ao subespaço $f_*(T_pM) \subset T_{f(p)}\overline{M}$.

b) Seja c uma curva suave em M. Mostre que para todo $Y \in \mathfrak{X}_c$ vale

$$f_* \nabla^c_{\frac{d}{dt}} Y = (\nabla^{f \circ c}_{\frac{d}{dt}} f_* Y)_{TM}.$$

c) Seja $\gamma : I \to M$ uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco. Mostre que γ é uma geodésica de M se, e somente se, sua aceleração em $\overline{M}$ é perpendicular à variedade M, i.e.

$$\overline{\nabla}^{f\circ\gamma}_{\frac{d}{dt}|_t} (f \circ \gamma)' \perp f_*(T_{\gamma(t)}M)$$

para todo $t \in I$.

Comentário: compare o exercício 4, item (a), do Capítulo 2 do livro do professor Manfredo com o resultado do item (c) deste exercício.

Exercício 3. *Seja $F : (M^n, g) \to (N^n, h)$ uma isometria local.*

a) Suponha que $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma geodésica com condições iniciais $\gamma(0) = p \in M$ e $\dot{\gamma}(0) = v \in T_pM$. Mostre que $F \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to N$ é uma geodésica, com condições iniciais $F(p) \in N$ e $dF_p v \in T_{F(p)}N$, em N.

b) Mostre que dado $p \in M$, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_\epsilon(0) \subset T_pM \arrow[r, "dF_p"] \arrow[d, "exp_p^M"'] & B_\epsilon(0) \subset T_{F(p)}N \arrow[d, "exp_{F(p)}^N"] \\
B_\epsilon^M(p) \subset M \arrow[r, "F"] & B_\epsilon^N(F(p)) \subset N
\end{tikzcd}$$

c) Suponha que M e N são conexas. Sejam $F, G : M \to N$ isometrias. Mostre que se existe $p \in M$ tal que $F(p) = G(p)$ e $dF_p = dG_p$, então $F = G$.

Exercício 4. *Exemplo: esfera.*

a) Determine as geodésicas da esfera $\mathbb{S}^n$ com sua métrica canônica.

b) Determine o grupo de isometrias da esfera $\mathbb{S}^n$ com sua métrica canônica.

Exercício 5. *Exemplo: plano hiperbólico.*

a) *Determine as geodésicas do plano hiperbólico* $\mathbb{H}^2$ *com sua métrica canônica.*

b) *Determine o grupo de isometrias de* $\mathbb{H}^2$ *com sua métrica canônica.*

Exercício 6. *Seja* $\tilde{M}$ *um espaço de recobrimento de uma variedade Riemanniana* M.

a) *Mostre que é possível dar a* $\tilde{M}$ *uma estrutura Riemanniana de modo que a aplicação de recobrimento* $\pi : \tilde{M} \to M$ *seja uma isometria local (esta é a* ***métrica do recobrimento****).*

b) *Seja* c *uma curva suave em* M *e* $\tilde{c}$ *um levantamento, i.e.* $\pi \circ \tilde{c} = c$. *Prove que* c *é geodésica de* M *se, e somente se,* $\tilde{c}$ *é geodésica de* $\tilde{M}$.

c) *Prove que se* c *minimiza a distância entre seu ponto inicial e final, então o mesmo ocorre com* $\tilde{c}$.

d) *Prove que a recíproca do item anterior é falsa.*

e) *Suponha* $\tilde{M}$ *compacta e que* $\pi : \tilde{M} \to M$ *é um recobrimento de* k *folhas,* $k \in \mathbb{N}$. *Prove que* $vol(\tilde{M}) = k \cdot vol(M)$.

Exercício 7. *Sejam* M, N *variedades Riemannianas e considere* $E := M \times N$ *com a métrica produto.*

a) *Caracterize as curvas minimizantes de* E.

b) *Calcule o diâmetro de* E *em função dos diâmetros de* M *e* N.

c) *Calcule o volume de* E *em função dos volumes de* M *e* N.

Comentário: utilizando os exercícios anteriores, é possível determinar as geodésicas de $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, etc.

Exercício 8. *Curvas minimizantes.*

a) *Seja* γ *uma curva suave por partes parametrizada por comprimento de arco, conectado* p *a* q, *pontos de uma variedade Riemanniana* (M, g). *Mostre que se* $d(p, q) = l(\gamma)$, *então* γ *é uma geodésica. Dizemos que* γ *realiza a distância entre* p *e* q.

b) *Suponha que* $\gamma, \sigma : [0, 2] \to M$ *são geodésicas distintas e satisfazem:* $\gamma(0) = \sigma(0) =: p$, $\gamma(1) = \sigma(1) =: q$, γ *e* σ *realizam a distância entre* p *e* q. *Mostre que* γ *não realiza a distância entre* p *e* $\gamma(1 + s)$ *para nenhum* $s > 0$.

Comentário: em uma variedade Riemanniana compacta (M, g) quaisquer dois pontos podem ser conectados por uma geodésica minimizante. Isso será provado no curso como consequência do Teorema de Hopf-Rinow. Esse fato é muito útil para calcular o diâmetro de variedades Riemannianas, por exemplo.

Parte 2: Métricas Riemannianas, Conexões Afins e Geodésicas.

Exercício 9. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$.*

a) *Seja $\gamma : (a, b) \to M$ uma geodésica. Compute a primeira e segunda derivadas da função $f \circ \gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ em termos do gradiente e da hessiana de f.*

b) *Seja $p \in M$ é um ponto de máximo (mínimo) local para f. Mostre que o gradiente da f se anula em p, e sobre esse ponto a hessiana é não-positiva (não-negativa).*

c) *Mostre que f tem hessiana não-negativa se e somente, se $f \circ \gamma$ é convexa para cada geodésica em (M, g).*

Exercício 10. *Geodésicas como curvas integrais. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana.*

a) *Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função satisfazendo $|\nabla f|_g \equiv 1$. Prove que as curvas integrais de ∇f são curvas minimizantes. Conclua que as curvas integrais de ∇f são geodésicas.*

b) *Suponha que $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz $\nabla_X X \equiv 0$. Mostre que as curvas integrais de X são geodésicas.*

c) *Sob as hipóteses do item (a), mostre que $\nabla_{\nabla f} \nabla f \equiv 0$. Utilize o item (b) para concluir que as curvas integrais de ∇f são geodésicas.*

Exercício 11. *Seja $B_\varepsilon(p)$ uma bola normal da variedade Riemanniana (M, g). Calcule $|\nabla d_p|$ e as curvas integrais de ∇d_p em $B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}$.*

Exercício 12. *Seja (G, g) um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante e ∇ sua conexão de Levi-Civita.*

a) *Mostre que*
$$\nabla_u v = \frac{1}{2}[u, v],$$
para cada $u, v \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$.

b) *Seja $\overline{\nabla}$ uma conexão afim simétrica em G. Mostre que $\overline{\nabla} = \nabla$ se, e somente se, $\overline{\nabla}_u u = 0$ para todo $u \in \mathfrak{g}$.*

Exercício 13. *Exercício 3 do Capítulo 3 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre subgrupos a 1-parâmetro de um grupo de Lie.*

Exercício 14. *Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) denotamos por d_g a distância induzida por g.*

a) *Sejam g, h duas métricas Riemannianas em M^n. Mostre que se $d_g = d_h$, então $g = h$.*

b) *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F : M \to M$ um difeomorfismo. Mostre que F é uma isometria se e somente, se $d_g(F(\cdot), F(\cdot)) = d_g(\cdot, \cdot)$.*

Definição 1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana.*

a) *Denotamos por $\mathrm{Iso}(M, g)$ o grupo de isometrias de (M, g).*

b) *Dizemos que (M, g) é **homogênea** se o grupo $\mathrm{Iso}(M, g)$ age transitivamente em (M, g). Isto é, se para cada $p, q \in M$ existe $F \in \mathrm{Iso}(M, g)$, tal que $F(p) = q$.*

c) *Dizemos que (M, g) é k-**homogênea** se para toda k-uplas de pontos $(p_1, ..., p_k)$ e $(q_1, ..., q_k)$, tais que $d_g(p_i, p_j) = d_g(q_i, q_j)$, $\forall i, j$ existe $F \in \mathrm{Iso}(M, g)$, tal que $F(p_i) = q_i$, para cada i.*

d) *Dizemos que (M, g) é **isotrópica** se para cada $p \in M$ e $u, v \in T_pM$ unitários existe $F \in \mathrm{Iso}(M, g)$, tal que $F(p) = p$ e $dF_p u = v$.*

e) *Dizemos que (M, g) é **simétrica** se para cada $p \in M$ existe $F \in \mathrm{Iso}(M, g)$, tal que $F(p) = p$ e $dF_p = -\mathrm{Id}$.*

Exercício 15. *Suponha que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa.*

a) *(M, g) simétrica $\implies$ (M, g) homogênea.*

b) *(M, g) 2-homogênea $\implies$ (M, g) isotrópica.*

Exercício 16. *Forneça exemplos de variedades Riemannianas simétricas, homogêneas e isotrópicas.*

Complemento:

Exercício 17. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\{e_j\}_{j=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM. Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que o mapa $\varphi : B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^n \to M$, dado por*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = exp_p\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right),$$

*é um difeomorfismo sobre a sua imagem. Logo, podemos definir uma carta para M a partir do mapa φ, essa é a chamada **carta exponencial**. Mostre que nessa carta temos:*

a) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.

b) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

c) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0$.

Comentário: o referencial local $\{E_i := \partial\varphi_i : i = 1, \ldots, n\}$ satisfaz: $[E_i, E_j] = 0$, $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ é base ortonormal de T_pM e $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$.

Exercício 18. *Exercício 7 do capítulo 3 do livro do professor Manfredo: Referencial Geodésico. Esse exercício garante a existência de um referencial local, em vizinhança aberta U de um ponto $p \in M$ fixado, satisfazendo: $\{E_i : i = 1, \ldots, n\}$ é referencial ortonormal em U e $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$.*

Comentário: compare as propriedades do referencial geodésico com as propriedades do referencial dado pela carta exponencial. Esses referenciais são muito úteis para fazer contas.

Exercício 19. *Seja G um grupo de Lie. Mostre que existe uma única conexão afim ∇ em G tal que $\nabla_v u \equiv 0$ para todo $u, v \in \mathfrak{g}$. Mostre que essa conexão é livre de torção se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie abeliana.*

Exercício 20. *Suponha que um grupo de Lie compacto G age transitivamente na variedade M. Mostre que M admite uma métrica Riemanniana g, de modo que a variedade Riemanniana (M^n, g) seja homogênea.*

Sugestão: é possível aplicar uma ideia similar à construção de uma métrica bi-invariante em um grupo de Lie compacto.

Exercício 21. *Geodésicas e conexões afins.*

a) *Seja $\gamma : I \to M$ uma curva regular definida sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Prove que γ é uma reparametrização de uma geodésica se, e somente se, existe $f : I \to \mathbb{R}$ suave tal que $\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\gamma' = f(t)\gamma'$ para todo $t \in I$.*

b) *Seja ∇ uma conexão afim em M. Prove que existe uma conexão $\overline{\nabla}$ em M que é livre de torção e admite as mesmas geodésicas que ∇. Há unicidade?*

c) *Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ conexões afins em M, livres de torção. Mostre que ∇ e $\overline{\nabla}$ possuem as mesmas geodésicas (a menos de reparametrizações) se, e somente se, existe uma 1-forma ω tal que*

$$\nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y = \omega(X)Y + \omega(Y)X$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Referências

[1] Livro do professor Manfredo, Geometria Riemanniana.

[2] Exercícios do professor Luis Florit, https://luis.impa.br/.

[3] Listas de exercícios do Diego Guajardo, https://luis.impa.br/.

[4] Listas de exercícios do Luciano Luzzi, https://sites.google.com/impa.br/lucianojunior/.

[5] Livro do professor P. Petersen, *Riemannian Geometry*.

[6] Livro do professor J. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*.