

Exercícios de Geometria Riemanniana

Índice

1 Exercícios do do Carmo	1
1.1 Capítulo 0	1
1.2 Capítulo 1	3
2 Exercícios de aulas .pdf	5
3 Lista 1	6
3.1 Revisão	6
3.2 Métricas Riemannianas	7
4 Lista 2	9
Lista 3	10

1 Exercícios do do Carmo

1.1 Capítulo 0

Exercise 2 Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não seja).

Solution. Es porque la diferencial de los cambios de coordenadas está dada por la identidad y una matriz lineal. Sí, porque por definición las trivializaciones locales de TM preservan la primera coordenada y son isomorfismos lineales en la parte del espacio vectorial. Entonces queda que

$$d(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \xi \in \text{GL}(n) \end{pmatrix}$$

pero no estoy seguro de por qué ξ preservaría orientación, i.e. que tenga determinante positivo... a menos de que... \square

Exercise 5 (Mergulho de $P^2(\mathbb{R})$ em \mathbb{R}^4) Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \quad (x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Observe que a restrição $\varphi := F|_{S^2}$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \quad [p] = \text{clase de equivalência de } p = \{p, -p\}$$

Prove que

- (a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.
- (b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de \mathbb{RP}^2 , isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

Solution.

- (a) Considere a carta $\{z = 1\}$. A representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy, x, y)$$

cuja derivada como mapa $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é injetiva. Agora pegue a carta $\{x = 1\}$. Então a representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(y, z) \mapsto (1 - y^2, y, z, yz)$$

e tem derivada

$$\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & y \end{pmatrix}$$

que também é injetiva. Seguramente algo análogo acontece na carta $\{y = 1\}$.

- (b) $\tilde{\varphi}$ é injetiva. Pegue dois pontos $p_1 := [x_1 : y_1 : z_1]$ e $p_2 := [x_2 : y_2 : z_2]$ e suponha que $\tilde{\varphi}(p_1) = \tilde{\varphi}(p_2)$. I.e.,

$$x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \quad x_1 y_1 = x_2 y_2, \quad x_1 z_1 = x_2 z_2, \quad y_1 z_1 = y_2 z_2$$

Suponha primeiro que $z_1 \neq 0$. Segue que

$$x_1 = \frac{z_2}{z_1} x_2, \quad y_1 = \frac{z_2}{z_1} y_2$$

logo

$$x_2^2 - y_2^2 = x_1^2 - y_1^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 (x_2^2 - y_2^2) \implies z_2 = z_1 \implies x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

Em fim, uma imersão injetiva com domínio compacto é um mergulho porque é fechada: pegue um fechado no domínio, vira compacto, imagem é compacta, que é fechado. Pronto. .

□

Exercício 8 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ difeo local. Se M_2 é orientável, então M_1 é orientável.

Solução. Defina: uma base $\beta \subset T_p M$ é orientada se $\varphi_* \beta$ é orientada em $T_{\varphi(p)} M$. Também definida porque φ é um difeomorfismo em p , i.e. φ_* é isomorfismo. Para mostrar que é contínua à la Lee, qualquer vizinhança de um ponto $p \in M_1$, a correspondente carta coordenada em $\varphi(p)$, um marco coordenado nela e puxe (pushforward) por φ^{-1} de volta para U . Difeomorfismo é muito bom: o pushforward dos campos vetoriais está bem definido. E por construção está orientado. \square

1.2 Capítulo 1

Exercise 1 Prove que a aplicação antípoda $A : S^n \rightarrow S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n . Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ tal que a projeção natural $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ seja uma isometria local.

Solution. Lembre que a métrica de S^n é a induzida pela métrica euclidiana, onde pensamos que $T_p S^n \hookrightarrow T_p \mathbb{R}^{n+1}$. É claro que A é uma isometria de \mathbb{R}^n , pois ela é a sua derivada (pois ela é linear), de forma que $\langle v, w \rangle_p = \langle -v, -w \rangle_{A(p)} = \langle v, w \rangle_{-p}$.

É um fato geral que se as transformações de coberta preservam a métrica, obtemos uma métrica no quociente de maneira natural, i.e. para dois vetores $v, w \in T_p \mathbb{R}P^n$ definimos $\langle v, w \rangle_p^{\mathbb{R}P^n} := \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)}$.

Para ver que a projeção natural é uma isometria local basta ver que a diferencial de A é um isomorfismo em cada ponto. Mas como ela é $-A$, isso é claro. \square

Exercício 7 Seja G um grupo de Lie compacto e conexo ($\dim(G) = n$). O objetivo do exercício é provar que G possui uma métrica bi-invariante. Para isto, prove as seguintes etapas:

- (a) Seja ω uma n -forma diferencial em G invariante à esquerda, isto é, $L_x^* \omega = \omega$, para todo $x \in G$. Prove que ω é invariante à direita.

Sugestão: Para cada $a \in G$, $R_a^* \omega$ é invariante à esquerda. Decorre daí que $R_a^* \omega = f(a)\omega$. Verifique que $f(ab) = f(a)f(b)$, isto é, $f : G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um homomorfismo (contínuo) de G no grupo multiplicativo dos números reais. Como $f(G)$ é um subgrupo compacto e conexo, conclui-se que $f(G) = 1$. Logo $R_a^* \omega = \omega$.

- (b) Mostre que existe uma n -forma diferencial invariante à esquerda ω em G .
- (c) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G . Seja ω uma n -forma diferencial positiva invariante à esquerda em G , é defina uma nova métrica Riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ em G por

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_p = \int_G \langle (dR_x)_y u, (dR_x)_y v \rangle_{y_x} \omega,$$

$$x, y \in G, \quad u, v \in T_y G$$

Prove que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é bi-invariante.

Solução.

(a)

(b)

(c) Vou usar outra notação. Suponha que g é uma métrica invariante à esquerda em G . Definimos

$$\tilde{g} := \int_{x \in G} (R_x^* g) \omega$$

como operador $\mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathcal{F}(G)$.

Agora vamos ver que \tilde{g} é invariante à esquerda, i.e. queremos ver que para todo $a \in G$,

$$\tilde{g} \stackrel{\text{quero}}{=} L_a^* \tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} L_a^* \int_G (R_x^* g) \omega.$$

Vamos ver que o pullback L_a^* pode “entrar na integral” e trocar de lugar com R_x^* , daí o resultado segue porque g é L_a -invariante. As contas acabam sendo que

$$\begin{aligned} L_a^* \int_G (R_x^* g) \omega &= \int_G L_a^* R_x^* g \omega = \int_G (L_a \circ R_x)^* g \omega = \int_G (R_x \circ L_a)^* g \omega \\ &= \int_G R_x^* L_a^* g \omega = \int_G R_x^* g \omega = \tilde{g} \end{aligned}$$

Para ver que \tilde{g} também é invariante à direita fazemos:

$$\tilde{g} \stackrel{\text{quero}}{=} R_a^* \tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} R_a^* \int_G (R_x^* g) \omega = \int_G R_a^* R_x^* g \omega = \int_G R_{ax}^* g \omega = \int_G R_x^* g \omega = \tilde{g}$$

porque estamos integrando em todo G e $G \curvearrowright G$ transitivamente.

Para todo aquele que tem dúvida, aqui estão as contas da invarianza à esquerda super explícitas:

Fixe $y \in G$ e $u, v \in T_y G$. Temos que

$$\begin{aligned}
(L_a^* \tilde{g})(u, v) &= L_a^* \left(\int_G (R_x^* g) \omega \right) (u, v) \\
&= \left(\int_G (R_x^* g) \omega \right) ((L_a)_* u, (L_a)_* v) \\
&= \int_G (R_x^* g) ((L_a)_* u, (L_a)_* v) \omega \\
&= \int_G g((R_x)_* (L_a)^{-1} u, (R_x)_* (L_a)^{-1} v) \omega \\
&= \int_G g((R_x \circ L_a)_* u, (R_x \circ L_a)_* v) \omega \\
&\stackrel{\text{associatividade em } G}{=} \int_G g((L_a \circ R_x)_* u, (L_a \circ R_x)_* v) \omega \\
&= \int_G g((L_a)_* (R_x)^{-1} u, (L_a)_* (R_x)^{-1} v) \omega \\
&= \int_G ((L_a)^* g)((R_x)_* u, (R_x)_* v) \omega \\
&\stackrel{g \text{ invariante à esquerda}}{=} \int_G g((R_x)_* u, (R_x)_* v) \omega \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}(u, v).
\end{aligned}$$

onde $R_x \circ L_a = L_a \circ R_x$ por associatividade de produto no grupo.

□

2 Exercícios de aulas.pdf

Exercício Show that for a bi-invariant metric on a Lie Group, it holds that $\exp_e = \exp^G$.

Solution. After delving into the abyss of definitions, I think it boils down to showing that $\nabla_{X_v} X_v = 0$, where $v \in \mathfrak{g}$. So we have to use that the metric is bi-invariant. But it's not necessarily Levi-Civita connection. . .

□

3 Lista 1

3.1 Revisão

Exercício 1 Dada uma subvariedade $M \subseteq \tilde{M}$ uma subvariedade mergulhada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mostre que existe um aberto $U \subset \tilde{M}$ contendo M e um campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\tilde{X}|_M = X$. Caso M seja subconjunto fechado de \tilde{M} , prove que U pode ser tomado igual a \tilde{M} . Se M não é subconjunto fechado de \tilde{M} , pode não existir extensão de X definida em todo \tilde{M} .

Solução. Acho que a prova canônica é tomar coordenadas de subvariedade de $M \subset \tilde{M}$, i.e. onde M está dada localmente como o lugar onde se anulam as últimas $n - m$ funções coordenadas.

Pegamos uma vizinhança rectificante U de X em $p \in M$, i.e. $X = \partial_1$ em U . Daí pega para cada vetor normal a exponencial, que percorre pela geodésica um pouquinho. Isso dá uma vizinhança em \tilde{M} ... \square

Exercício 2 Seja $f : M^n \rightarrow N^m$ um mapa suave. Os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ são ditos f -relacionados se $df_p X_p = \tilde{X}_{f(p)}$, $\forall p \in M$. Mostre que se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são, respetivamente, f -relacionados com $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ então $[X, Y]$ é f -relacionado com $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

Solução. Intento 2. $s_1 \in \Gamma(\tau_N)$ está f -relacionado com $s \in \Gamma(\tau_M)$ se $s = s_1 \oplus s^\perp$ para algum $s^\perp \in \nu$. Queremos ver que se $s \stackrel{f}{\sim} s_1$ e $t \stackrel{f}{\sim} t_1$, $[s, t] \stackrel{f}{\sim} [s_1, t_1]$, ou seja $[s, t] = [s_1, t_1] \oplus [s, t]^\perp$ onde $[s, t]^\perp$ é um vetor em ν cuja cara não é muito importante.

$$[s, t] = [s_1 \oplus s^\perp, t_1 \oplus t^\perp] = [s_1, t_1] + \underbrace{[s_1, t^\perp]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t_1]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t^\perp]}_{\in \nu}$$

Falta un argumentín para ver que esos colchetes se anulan...

Intento 1 (incompleto). Pegue $p \in M$. Queremos ver que

$$(f_*[X, Y])_p \stackrel{\text{quero}}{=} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)}.$$

Pegue $g \in \mathcal{F}(N)$.

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)} &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{X}_{f(p)}(\tilde{Y}g) - \tilde{Y}_{f(p)}(\tilde{X}g) \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} f_{*,p}(X_p)(\tilde{Y}g) - f_{*,p}(Y_p)(\tilde{X}g) \\ &= X_p((\tilde{Y}g) \circ f) - Y_p((\tilde{X}g) \circ f) \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} X_p((f_{*,p}(Y))g \circ f) - Y_p((f_{*,p}(X_p))g \circ f) \end{aligned}$$

\square

Exercício 3 Seja $\pi : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetiva. Dado $Y \in \mathfrak{X}(N)$, mostre que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X é π -relacionado com Y .

Solução. O resultado segue de que $\tau_M \cong \pi^* \tau_N \oplus \nu$, tomando $X := Y \oplus 0$. □

Exercício 4 (Fibrado pullback) Suponha que M^n, N^m são variedades suaves, $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial suave de posto k e $f : N \rightarrow M$ é um mapa suave. Considere o espaço

$$f^*E = \{(p, e) \in N \times E : f(p) = \pi(e)\},$$

e $\tilde{\pi} : E \rightarrow N$ a projeção na primeira coordenada. Mostre que f^*E tem uma estrutura de variedade suave de forma que a tripla $\tilde{\pi} : f^*E \rightarrow N$ é um fibrado vetorial suave de posto k .

Solução. Para mostrar que $\tilde{\pi}$ é um fibrado vetorial devemos dar trivializações locais. Pegue um ponto $p \in M$ e uma vizinhança trivializante de E perto de $f(p)$, i.e. um aberto $U \ni f(p)$ e um difeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$. Pegue também um aberto $V \ni p$ tal que $f(V) \subset U$. Defina

$$\begin{aligned} h_1 : \tilde{\pi}^{-1}(V) &\longrightarrow V \times \mathbb{R}^k \\ (q, v) &\longmapsto (q, \pi_2 \circ h(f(q), v)) \end{aligned}$$

Como estamos usando a estrutura de fibrado vetorial de E , segue imediatamente a coleção de funções desse tipo formam um atlas trivializante de f^*E . □

3.2 Métricas Riemannianas

Exercício 6 Seja (N^n, g) uma variedade Riemanniana e $M^m \subset N$ uma subvariedade mergulhada. Mostre que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset N$ de p e campos vetoriais E_1, \dots, E_n em U tal que $E_1(q), \dots, E_n(q)$ é uma base ortonormal de $T_q N$ para todo $q \in U$ e $E_1(r), \dots, E_m(r)$ são tangentes a M para todo $r \in U \cap M$.

Solução. (Intento 1.) Pegue $p \in M$ e uma vizinhança aberta de $U \subset N$ de p tal que $U \cap M$ é suficientemente pequeno como para ter um marco ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$. Considere esses campos como campos tangentes a N . Usando o exercício 1 podemos estender esses campos a uma vizinhança de $U \subset N$. Aplicando Gram-Schmidt obtemos um marco ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$.

(Intento 2, [MS74] thm. 3.3, p. 36.) Take orthonormal frames $\{E_i\}_{i=1}^m \subset \mathfrak{X}(U \cap M)$ and $\{E'_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{X}(U)$. Notice that the matrix $(E_i \cdot E'_j)$ has rank m at p . (I think that two orthonormal frames are related up to an orthogonal matrix.) Suppose that the first m columns are linearly independent at p . Then there is an open neighbourhood V of p where the first m columns of this matrix are linearly independent. Then a slightly confusing part arguing that $E_1, \dots, E_m, E'_{m+1}, \dots, E'_n$ are linearly independent in V . Then apply Gram-Schmidt. And that's it.

Then Milnor shows that this is a vector bundle called the *orthogonal bundle*. The lance is that the orthonormal frame we have found gives the local trivialization. For a subbundle

$\xi \subset \eta$ define the fiber of the orthogonal complement of ξ by $F_b(\xi^\perp) := F_b(\xi)^\perp$ with respect to the metric of η . Define local trivializations by

$$\begin{aligned} \bar{h} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n-m} \\ \left(q, \sum x_i E_i\right) &\longmapsto (q, x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

Definição 1 Sejam (M^m, g_M) e (N^n, g_N) variedades Riemannianas. Seja $F : M \rightarrow N$ uma submersão. Dizemos que F é uma **submersão Riemanniana** quando para todo $p \in M$, $DF : \ker(DF)^\perp \rightarrow T_{F(p)}N$ é uma isometria linear. Em outras palavras, sempre que $v, w \in T_p M$ são perpendiculares ao núcleo de DF , vale

$$g_M(v, w) = g_N(DF(v), DF(w)).$$

Exercício 7 Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Suponha que existe um grupo de Lie G agindo por isometrias em (M, g) de tal forma que M/G admite uma estrutura de variedade suave, onde a projeção $\pi : M \rightarrow M/G$ é uma submersão. Mostre que existe uma métrica Riemanniana \bar{g} em M/G tal que $\pi : (M, g) \rightarrow (M/G, \bar{g})$ é uma submersão Riemanniana.

Solução. (Seguindo notação e ideias de [MS74].) Fazemos assim para definir a métrica em G/M . Primeiro lembre que $\tau_{G/M} \cong \pi^* \tau_{M/G}$. Considere o fibrado ν normal a $\pi^* \tau_{M/G}$, que é um fibrado sobre M satisfazendo $\pi^* \tau_{G/M} \oplus \nu \cong \tau_M$. Então qualquer vetor tangente a M/G pode ser pensado como um vetor tangente a M se anulamos a parte normal dele, mostrando que podemos usar a mesma métrica em M para introduzir uma métrica em G/M .

Para resolver o exercício devemos analisar como age π_* em τ_M quando este es visto como soma direita $\pi^* \oplus \nu$: $\pi_*(v_1 \oplus v^\perp) = v_1$. Daí segue trivialmente que $\ker \pi := \kappa \subset \nu$. Conversamente se $v_1 \oplus v^\perp \in \kappa$, fazemos para $w \in \pi^*$

$$(v_1 \oplus v^\perp) \cdot w = v_1 \cdot w + \cancel{v^\perp \cdot w}^0 = \pi_* v_1 \cdot \pi_* w = 0.$$

Então $\kappa = \nu$, então $\kappa^\perp \cong \pi^* \cong \tau_{M/G}$ isometricamente.

Intento 1 (errado). Defina a seguinte métrica em M/G :

$$g_{M/G} := g_M|_{\pi^* \tau_{M/G}}$$

i.e. a restrição da métrica em M ao fibrado pullback de $\tau_{M/G} := T(G/M)$, que sabemos que é isomorfo (como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Para ver que $\pi : M \rightarrow M/G$ é uma submersão Riemanniana devemos mostrar que o complemento ortogonal de $\kappa_\pi := \ker(\pi)$ é isomorfo (como fibrado Riemanniano, i.e. isométrico como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Como M é Riemanniana, o fibrado pullback tem um complemento ortogonal $(\pi^* \tau_{M/G})^\perp := \nu$. Basta mostrar que $\nu \cong \kappa$ isometricamente.

□

4 Lista 2

Exercício 1 Mostre que todo fibrado vetorial admite uma conexão.

Exercício 3 Exercício 2 do Capítulo 2 do livro do professor Manfredo:

Sejam X e Y campos de vetores numa variedade Riemanniana M . Sejam $p \in M$ e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva integral de X por p , i.e. $\gamma(t_0) = p$ e $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$. Prove que a conexão Riemanniana de M é

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt} \left(P_{\gamma, t_0, t}^{-1} (Y(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=t_0} \quad (1)$$

onde $P_{\gamma, t_0, t} : T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ é o transporte paralelo ao longo de γ de t_0 a t .

Solução. Primeiro devemos escrever o lado direito da eq. (1) em termos do fibrado pull-back ao longo de γ :

$$\frac{d}{dt} \left(P_{\gamma, t_0, t}^{-1} (Y(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=t_0} \longleftrightarrow \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma$$

□

Lista 3

Exercício 4 Exemplo: esfera.

- (a) Determine as geodésicas da esfera \mathbb{S}^n com sua métrica canônica.
- (b) Determine o grupo de isometrias da esfera \mathbb{S}^n com sua métrica canônica.

Solution.

- (a) **Ideia essencial.** Suponha que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma geodésica. Podemos pensar que $\gamma' : I \rightarrow T\mathbb{S}^n \subset T\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e analogamente $\gamma'' : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Espaço tangente à esfera é perpendicular ao vetor posição, i.e. $\gamma \perp \gamma'$. Também $\gamma'' \perp \gamma'$; isso é porque $\gamma'' = (\gamma'')^\top + (\gamma'')^\perp$, e como γ é geodésica sabemos que $(\gamma'')^\top = 0$. Por fim, $\gamma'' = \lambda\gamma$, então concluímos que γ está dada por senos e cosenos.

Para escrever isso formalmente precisamos de uma expressão experta para γ . Em [Lee19] Prop. 5.27 achamos inspiração: damos a volta ao problema e começamos propondo uma curva que vai acabar sendo geodésica. Pegue um ponto $p \in \mathbb{S}^n$ e um vetor unitário $v \in T_p\mathbb{S}^n$. Considere

$$\gamma(t) = \cos t p + \sin t v$$

Derivando como uma simples curva em \mathbb{R}^{n+1} , vemos que $\gamma'' = -\gamma$, o que significa que $(\gamma'')^\top = 0$, i.e. γ é uma geodésica de \mathbb{S}^n . Mais precisamente,

$$\gamma''(t) = \left(\nabla_{\frac{d}{dt}}^{\gamma} \gamma' \right)_t \in (i \circ \gamma)^* T\mathbb{R}^{n+1} \cong \gamma^*(T\mathbb{S}^n \oplus N)$$

não tem componente tangente, e portanto

$$0 = \nabla_{\frac{d}{dt}}^{\gamma} \gamma' \in \gamma^* T\mathbb{S}^n.$$

Sendo essa uma geodésica partindo de um ponto arbitrário numa direção arbitrária, concluímos por unicidade das geodésicas e *rescaling lemma* que todas as geodésicas de \mathbb{S}^n são como γ .

Note que a geodésica γ é uma parametrização do círculo unitário no plano gerado pelos vetores p e v , i.e. um círculo máximo. Em conclusão, as geodésicas são os círculos máximos de \mathbb{S}^n .

- (b) Afirimo que $\text{Isom } \mathbb{S}^n = O(n+1) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in GL(n+1) : AA^\top = \text{Id}\}$. É claro que $O(n+1) \subset \text{Isom } \mathbb{S}^n$, pois as transformações $A \in O(n+1)$ preservam o produto interno euclidiano:

$$\begin{aligned} AA^\top = \text{Id} &\iff \sum_k A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \iff A e_i \cdot A e_j = \delta_{ij} \\ &\iff A v \cdot A w = A(v^i e_i) \cdot A(w^j e_j) = v^i w^j e_i \cdot e_j = v \cdot w. \end{aligned}$$

Para ver que $\text{Isom } \mathbb{S}^n \subset O(n+1)$ suponha que $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma isometria. Vamos mostrar que A é a restrição de uma função $\tilde{A} \in O(n+1)$. Defina

$$\begin{aligned}\tilde{A} : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (r, \theta) &\longmapsto rA(1, \theta) \\ 0 &\longmapsto 0\end{aligned}$$

Se mostramos que \tilde{A} é uma isometria linear, é claro que ela é um elemento de $O(n+1)$ pela conta anterior. De fato, basta mostrar que \tilde{A} é uma isometria, pois toda isometria de espaços de Banach que fixa a origem é linear ([?] Teo. 7.11).

Para ver que \tilde{A} é uma isometria de \mathbb{R}^{n+1} , **afirmo** que a distância de p a q está totalmente determinada pelas normas $\|p\|$ e $\|q\|$, e pela distância esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$. Note que essa afirmação é na verdade um problema de geometria plana, pois todas essas quantidades podem ser descritas dentro do único plano que contém 0 , p e q .

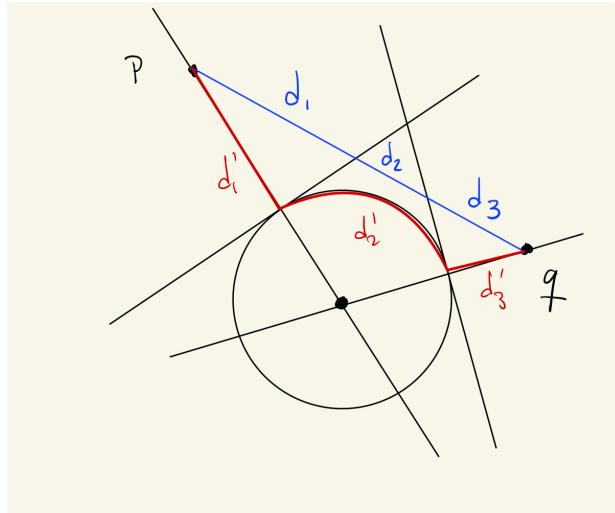


Figure 1: Intento de prova

Acabou que essa afirmação é simplesmente a lei dos cossenos, já que a distância esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$ é exatamente o ângulo entre p e q (poque essa distância é um segmento de círculo máximo!):

$$\text{lei dos cossenos: } d(p, q)^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2 - 2\|p\|\|q\| \cos \angle(p, q)$$

Em fim, \tilde{A} é uma isometria porque $d_{\mathbb{R}^{n+1}}(p, q) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\tilde{A}p, \tilde{A}q)$ pelo argumento anterior.

□

Exercício 12 Seja (G, g) um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante e ∇ sua conexão de Levi-Civita.

(a) Mostre que

$$\nabla_u v = \frac{1}{2}[u, v],$$

para cada $u, v \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$.

(b) Seja $\bar{\nabla}$ uma conexão agim simétrica em G . Mostre que $\bar{\nabla} = \nabla$ se e somente se $\bar{\nabla}_u u = 0$ para todo $u \in \mathfrak{g}$.

Solution.

(a) Como ∇ é Levi-Civita, temos Koszul, i.e. $\forall u, v, w \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_u v, w \rangle &= u \langle v, w \rangle + v \langle u, w \rangle - w \langle u, v \rangle \\ &\quad - \langle u, [v, w] \rangle + \langle v, [w, u] \rangle + \langle w, [u, v] \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é invariante à esquerda, é constante quando avaliamos em elementos de \mathfrak{g} , e portanto os primeiros três termos se anulam. Então o exercício acaba quando mostramos que

$$\langle v, [w, u] \rangle = \langle u, [v, w] \rangle = - \langle u, [w, v] \rangle.$$

Seguindo [dC79], p. 45., a ideia é usar o fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ de w para expressar o colchete de Lie. Primeiro precisamos de

Afirmção O fluxo φ de um campo invariante à esquerda w comuta com a traslação à esquerda, i.e.,

$$\varphi_t(e) \circ L_h = L_h \circ \varphi_t(e) \quad \forall t \in \mathbb{R} \forall h \in G.$$

Prova da afirmação. Derivamos de ambos lados. Por um lado,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(e) \circ L_h = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(h) = v_h$$

Por outro lado,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_h \circ \varphi_t(e) = (L_h)_{*, \varphi_t(e)} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(e) = (L_h)_{*, e} v_e = v_h.$$

Por unicidade das soluções de EDOs, acabou. \square

Então repare:

$$\varphi_t(h) = (\varphi_t \circ L_h)(e) = (L_h \circ \varphi_t)(e) = h \varphi_t(e) = R_{\varphi_t(e)} h,$$

ou seja, qualquer curva integral de w é simplesmente a curva integral que passa por e trasladada.

Agora lembre que o colchete de Lie pode ser expressado como

$$[w, v]_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\varphi_{-t} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

(Onde fixamos o parâmetro $-t$ e deixamos livre o outro para ver φ_{-t} como um difeomorfismo de G .)

Juntando com a discussão anterior obtemos

$$[w, v]_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

Agora repare: como a métrica é bi-invariante,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} \left(L_{\varphi_t(e)} \right)_{*, e} u_e, \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} \left(L_{\varphi_t(e)} \right)_{*, e} v_e \right\rangle \\ &= \left\langle \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right\rangle \end{aligned}$$

Agora derivemos como funções de t (dentro de $T_e G$, i.e. não precisamos derivada covariante), e avaliemos em $t = 0$. (Note que quando avaliamos em $t = 0$ o factor que não derivamos não muda—estamos trasladando à direita e à esquerda por $\varphi_0(e)$!) Obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left\langle \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right\rangle \\ &= \left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \left[\left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right]_{t=0} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left[\left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)} \right]_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right\rangle \\ &= \langle [w, u]_e, v_e \rangle + \langle u_e, [w, v]_e \rangle. \end{aligned}$$

Pelo inciso (a), é claro que se $\bar{\nabla} = \nabla$, $\bar{\nabla}_u u = 0$. Para a implicação contrária, vejamos que

$$\bar{\nabla}_u v = \frac{1}{2} [u, v], \quad u, v \in \mathfrak{g}$$

que é conveniente porque sabemos que isso é igual a $\nabla_u v$ pelo inciso (a). É só fazer:

$$0 = \bar{\nabla}_{u+v} u + v = \cancel{\bar{\nabla}_u u}^0 + \bar{\nabla}_u v + \bar{\nabla}_v u + \cancel{\bar{\nabla}_v v}^0$$

Lembre que $\bar{\nabla}$ é simétrica, i.e. $\bar{\nabla}_u v - \bar{\nabla}_v u = [u, v]$. Somando com a equação anterior:

$$\bar{\nabla}_u v - \bar{\nabla}_v u + \bar{\nabla}_u v + \bar{\nabla}_v u = [u, v]$$

como queríamos. Para concluir é só ver que ∇ e $\bar{\nabla}$ também coincidem em campos vectoriais que não são invariantes à esquerda. Então pegue uma base $\{u_i\} \subset \mathfrak{g}$ e dois campos $X = X^i u_i, Y = Y^j u_j$ quaisquer. Então:

$$\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{X^i u_i} Y^j u_j = X^i u_i Y^j u_j + Y^j \bar{\nabla}_{u_i} u_j = X^i u_i Y^j u_j + Y^j \nabla_{u_i} u_j = \nabla_X Y.$$

Pergunta Tem algum argumento super simples para argumentar essa última parte sem pegar uma base de \mathfrak{g} ?

□

Exercício 13 (Exercício 3, Cap. III, [dC79]) Sejam G um grupo de Lie, \mathfrak{g} sua álgebra de Lie, e $X \in \mathfrak{g}$. As trajetórias de X determinam uma aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ com $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$.

- (a) Prove que $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$, ($\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ é então chamado um *subgrupo a 1-parâmetro* de G).
- (b) Prove que se G tem uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ então as geodésicas de G que partem de e são os subgrupos a 1-parâmetro de G .

Solution.

- (a) Lembre que no exercício anterior mostramos que

$$\varphi_t(h) = R_{\varphi_t(e)}(h) = h \cdot \varphi_t(e), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \forall h \in G.$$

Fixe um $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e pegue $h = \varphi_{t_0}(e)^{-1}$. Obtemos que

$$\varphi_t(\varphi_{t_0}(e)^{-1}) = \varphi_{t_0}(e)^{-1} \varphi_t(e).$$

Ou seja, $\varphi_{t_0}(e)^{-1} \varphi_t(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$. Como também $\varphi_{t-t_0}(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$, por unicidade de EDOs obtemos

$$\varphi_{t_0}(e)^{-1} \varphi_t(e) = \varphi_{t-t_0}(e) \quad (2)$$

Avaliando o lado esquerdo em $t' = t - t_0$, do lado direito chegamos até $\varphi_{t-2t_0}(e)$. Repetindo esse processo cobrimos todo \mathbb{R} .

Para confirmar a segunda propriedade avaliamos eq. (2) em $t = 0$ para obter $\varphi_{t_0}(e)^{-1} = \varphi_{-t_0}(e)$. Para concluir pegue $t, s \in \mathbb{R}$ quaisquer e escreva:

$$\varphi_{t+s}(e) = \varphi_{t-(-s)}(e) = \varphi_{-s}^{-1} \varphi_t(e) = \varphi_s(e) \varphi_t(e).$$

- (b) Pegue $X \in \mathfrak{g}$ e considere a curva integral que passa por e , φ . Pelo exercício anterior,

$$0 = \nabla_X X = \nabla_{\varphi_* \frac{d}{dt}} X = \nabla_{\frac{d}{dt}}^{\varphi} X \circ \varphi = \nabla_{\varphi'} \varphi'$$

Então as curvas integrais de X que passam por e são geodésicas. Como isso é para qualquer vetor em \mathfrak{g} , por unicidade das soluções a EDOs, acabou.

□

Exercício 14 Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) denotamos por d_g a distância induzida por g .

- (a) Sejam g, h duas métricas Riemannianas em M^n . Mostre que se $d_g = d_h$ então $g = h$.
- (b) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Mostre que F é uma isometria se e somente se $d_g(F(\cdot), F(\cdot)) = d_g(\cdot, \cdot)$.

Demonstração.

- (a) Prova por contrapositiva.

Afirmção Se $g \neq h$, existem um aberto $U \subset M$ e um marco $\{E_i\} \subset \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0}) \quad \text{para algum } i_0 \in \{1, \dots, n\}.$$

Prova da afirmação. Se $g(E_i, E_i) = h(E_i, E_i)$ para todo marco em todo aberto de M , é claro que

$$g(X, Y) = g(X^i E_i, Y^j E_j) = X^i Y^j g(E_i, E_j) = h(X, Y)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

Então pegue um marco $\{E_i\} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0})$ em U . Sendo a diferença dessas quantidades uma função distinta da constante zero, podemos supô-la estritamente positiva dentro de U . Pegue $p \in U$ e uma vizinhança geodésica contendo p , que renomeamos U por simplicidade. Dentro de uma vizinhança geodésica, a distância de p aos outros pontos dentro de U está realizada por geodésicas, então podemos pegar $q \in U$ e γ geodésica ligando p e q .

Considere uma extensão de $\gamma' \in \mathfrak{X}_\gamma$ dentro de U , digamos $G = G^i E_i$. Então:

$$\begin{aligned} d_g(p, q) &= \int_a^b g(G^i E_i, G^i E_i) \circ \gamma dt = \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 g(E_i, E_i) \circ \gamma dt \\ &\neq \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 h(E_i, E_i) \circ \gamma dt = d_h(p, q). \end{aligned}$$

- (b) Primeiro suponha que $F^* d_g = d_g$. Para mostrar que F é uma isometria usamos o inciso anterior: consideramos as métricas g e $F^* g$ em M . Basta mostrar que $d_g = d_{F^* g}$. Por um tempo pensei que era para usar um câmbio de variáveis, mas acabei pensando assim: Pegue uma curva γ ligando p e q . Note que

$$\underbrace{\int_a^b F^* g(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } p \text{ a } q)} = \underbrace{\int_a^b g(F_{*, \gamma(t)} \gamma'(t), F_{*, \gamma(t)} \gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } F(p) \text{ a } F(q))}$$

Ou seja, do lado esquerdo estamos medindo o comprimento (respeito à métrica $F^* g$) de uma curva ligando p a q , enquanto que do lado direito estamos medindo o comprimento (respeito à métrica g) da curva $F \circ \gamma$, que liga $F(p)$ a $F(q)$.

Pegando o ínfimo de ambas quantidades, concluímos que a distância d_{F^*g} coincide com a distância F^*d_g , que por hipótese é igual a d_g . A implicação contrária também fica clara: supondo que $F^*g = g$, levando em conta a igualdade das integrais acima e pegando o ínfimo, concluímos que $F^*d_g = d_g$.

□

Exercício 15 Suponha que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa.

- (a) (M, g) simétrica $\implies (M, g)$ homogênea.
- (b) (M, g) 2-homogênea $\implies (M, g)$ isotrópica.

Solution.

- (a) **Ideia.** Pegamos dois pontos $q, q' \in M$. Para usar que M é simétrica buscamos o “ponto meio”. Esse deve ser $p \in M$ que esteja no meio do caminho de uma curva minimizante γ ligando q e q' . Daí, pegamos $F \in \text{Iso}_p := \{ \text{isometrias de } M \text{ que fixam } p \}$ com a propriedade de que $d_p F = -\text{Id}$. Daí devemos provar que F preserva γ e não fixa q . Daí, só existem dois pontos em γ que guardam a mesma distância com p : q e q' . Como $F(q) \neq q$ também guarda essa distância, concluímos que $F(q) = q'$.

Infelizmente fui incapaz de levar minha ideia até uma prova sem ajuda externa. Primeiramente me pareceu improvável a possibilidade de construir a geodésica minimizante (pode não existir para variedades não completas; mostrar que a propriedade de simetria implica a existência de curvas minimizantes parecia muito forte).

Conjectura Para quaisquer $q, q' \in M$ existe uma curva minimizante γ ligando q e q' .

Supondo que existe γ , podemos pegar $F \in \text{Iso}_p$ tal que $d_p F = -\text{Id}$ onde p é ponto meio sobre γ respeito q e q' .

Tentei mostrar que F preserva γ perto de p usando um marco geodésico, onde a geodésicas são curvas integrais de linhas, mas depois descobri que minha prova estava errada (pois dF só age como $-\text{Id}$ em p):

Afirmção Perto de p , $F(\gamma(t)) \in \text{img } \gamma$.

Prova da afirmação. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p , de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em $T_p M$ baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t F \circ \gamma = F_{*, \gamma(t)} \gamma'(t) = -\gamma'(t).$$

Portanto, a derivada da curva $F \circ \gamma$ coincide com a derivada de γ . Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F \circ \gamma(t) \in \text{img } \gamma$ dentro desta bola geodésica. □

Depois desse ponto comecei a buscar ajuda em livros, internet e ChatGPT. Rapidamente reparei que minhas ideias eram boas, e consegui:

Prova da afirmação reforçada. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p , de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em $T_p M$ baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$ em $t = 0$ (supondo que $\gamma(0) = p$):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F \circ \gamma = F_{*,p} \gamma'(0) = -\gamma'(0).$$

Portanto, a derivada da curva $(F \circ \gamma)(t)$ coincide com a derivada de $\gamma(-t)$. Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F \circ \gamma(t) \in \text{img } \gamma$ dentro desta bola geodésica. \square

Seguindo com esse raciocínio, $F \circ \gamma$ é uma curva definida em todo o domínio de γ , e portanto deve coincidir com $\gamma(-t)$ ao longo desse domínio. Ou seja, $F \circ \gamma$ é γ percorrida em sentido oposto. Isso significa, por definição de p como ponto meio, e desde que supomos que $\gamma(0) = p$, que, se $\gamma(t_0) = q$, necessariamente $q' = \gamma(-t_0) = (F \circ \gamma)(t_0) = F(q)$, como queríamos. (Note que meu desejo inicial de mostrar que $F(q) \neq q'$ não foi necessário.)

Então tudo fica resolvido se mostramos a conjectura. O motivo inicial para conjecturar isso foi notar que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, onde os pontos antípodas (entre outros) não podem ser ligados por curvas minimizantes, parece perder a propriedade de ser um espaço simétrico (que \mathbb{R}^2 tem). Com efeito, a intuição mostra que $\text{Iso}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = O(2)$, de modo que o grupo de isotropia Iso_p é trivial para todo ponto.

A inspiração final chega de [MathOverflow](#): parece que, com efeito, toda variedade simétrica é completa:

“Consider a local geodesic and use the symmetry to flip it, effectively doubling the length of the geodesic, ad infinitum”

A ideia nos lembra do exercício que fizemos com grupos de Lie. Pegamos uma geodésica definida perto de p . Pegamos $q \neq p$ dentro da bola geodésica centrada em p . Agora considere $F \in \text{Iso}_q$ tal que $F_q = \text{Id}$. Sabemos que γ está definida entre p e q , e, pela afirmação mostrada acima, compondo com F obtemos γ reparametrizada em sentido oposto. Isso permite chegar a um ponto sobre a curva original que fica à mesma distância de q que p , só que no sentido oposto. Repetindo esse processo, vemos que a geodésica pode ser estendida infinitamente.

De fato, isso parece mostrar a conjectura via teorema de Hopf-Rinow, por exemplo em [\[Lee19\]](#), Lemma 6.18 e Coro. 6.20. Tem uma prova sem usar esse teorema?

- (b) Queremos ver que $\forall p \in M$ e $\forall v, w \in T_p^1 M$ existe $F \in \text{Iso}_p(M)$ tal que $F_{*,p} v = w$. Para usar a propriedade de ser 2-homogênea, defina $p_1 := q_1 := p$, e $p_2 := \exp_p(v)$, $q_2 := \exp_p(w)$. (Isto é, supondo por enquanto que \exp_p está definida em vetores de norma 1.) Então existe $F \in \text{Iso}(M)$ tal que $F(p_1) = F(q_1)$, i.e. $F \in \text{Iso}_p(M)$, e tal que $F(p_2) = F(q_2)$.

Para ver que $F_{*,p} v = w$, note que $(F \circ \gamma_v)(1) = F(\gamma_v(1)) = F(p_2) = q_2$. Então $F \circ \gamma_v$ é uma curva ligando p e q . Pelo exercício 14(b) dessa lista, como F é uma isometria, sabemos que preserva a distância, de modo a $F \circ \gamma_v$ é minimizante e portanto uma geodésica. Daí $F \circ \gamma_v$ é uma reparametrização de γ_w ; mas como F é isometria,

preserva a norma dos vetores velocidade e portanto as curvas coincidem. Isso significa que $w = \gamma'_w(0) = (F \circ \gamma_v)'(0) = F_{*,p} \gamma'_v(0) = F_{*,p} v$.

Por último só note que se \exp_p não está definida em vetores de norma 1, podemos fazer a mesma construção em vetores que estejam dentro do domínio dela, obtendo uma função cuja diferencial envia um múltiplo pequeno de v em um múltiplo de igual proporção respeito a w . A diferencial dessa função também envia v em w , pois é uma isometria linear.

□

References

- [dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [Lee19] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.
- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Princeton University Press, 1974.