

Exercícios de Geometria Riemanniana

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1 Exercícios do do Carmo | 2 |
| 1.1 Capítulo 0 | 2 |
| 1.2 Capítulo 1 | 4 |
| 1.3 Capítulo III | 6 |
| 1.3.1 maximum principle! | 6 |
| 2 Exercícios de aulas .pdf | 9 |
| 2.1 Pullback da torsão (e da curvatura) | 9 |
| 3 Dudas | 12 |
| 3.1 Minimizante \implies geodésica | 15 |
| 3.2 First variation formula explained | 15 |
| 3.3 Duas geodésicas | 16 |
| 3.4 minimal submanifolds | 18 |
| 3.5 minimal submanifolds good | 21 |
| 3.6 ponto focal hipersuperfície | 23 |
| 3.7 pontos focais da esfera | 23 |
| 3.8 distance and second variation | 24 |
| 3.9 lema do índice | 24 |
| 3.10 sturm y rauch | 24 |
| 4 Monitorias | 24 |
| 4.1 Abril 25 | 24 |
| 4.2 21 maio | 26 |
| 4.3 4 junho | 26 |
| 5 Exercícios das listas (não entregue) | 27 |
| 5.1 Lista 3 | 27 |
| 5.1.1 Complemento | 27 |
| 5.2 Lista 4 | 28 |
| 5.2.1 Mean curvature | 29 |
| 6 Lista 1 | 30 |
| 6.1 Revisão | 30 |
| 6.2 Métricas Riemannianas | 31 |
| 7 Lista 2 | 33 |

| | |
|-----------------------------|----|
| Lista 3 | 34 |
| Lista 4 | 43 |
| Campos de Killing | 48 |
| Lista 6 | 56 |
| 8 Variações de Energia | 62 |
| Lista 7 | 65 |

1 Exercícios do do Carmo

1.1 Capítulo 0

Exercise 2 Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não seja).

Solution. Es porque la diferencial de los cambios de coordenadas está dada por la identidad y una matriz lineal. Sí, porque por definición las trivializaciones locales de TM preservan la primera coordenada y son isomorfismos lineales en la parte del espacio vectorial. Entonces queda que

$$d(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} \text{Id} & 0 \\ \hline 0 & \xi \in \text{GL}(n) \end{array} \right)$$

pero no estoy seguro de por qué ξ preservaría orientación, i.e. que tenga determinante positivo... a menos de que... \square

Exercise 5 (Mergulho de $P^2(\mathbb{R})$ em \mathbb{R}^4) Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \quad (x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Observe que a restrição $\varphi := F|_{S^2}$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \quad [p] = \text{clase de equivalência de } p = \{p, -p\}$$

Prove que

- (a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.
- (b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de $\mathbb{R}P^2$, isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

Solution.

(a) Considere a carta $\{z = 1\}$. A representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy, x, y)$$

cuja derivada como mapa $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é injetiva. Agora pegue a carta $\{x = 1\}$. Então a representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(y, z) \mapsto (1 - y^2, y, z, yz)$$

e tem derivada

$$\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & y \end{pmatrix}$$

que também é injetiva. Seguramente algo análogo acontece na carta $\{y = 1\}$.

(b) $\tilde{\varphi}$ é injetiva. Pegue dois pontos $p_1 := [x_1 : y_1 : z_1]$ e $p_2 := [x_2 : y_2 : z_2]$ e suponha que $\tilde{\varphi}(p_1) = \tilde{\varphi}(p_2)$. I.e.,

$$x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \quad x_1 y_1 = x_2 y_2, \quad x_1 z_1 = x_2 z_2, \quad y_1 z_1 = y_2 z_2$$

Suponha primeiro que $z_1 \neq 0$. Segue que

$$x_1 = \frac{z_2}{z_1} x_2, \quad y_1 = \frac{z_2}{z_1} y_2$$

logo

$$x_2^2 - y_2^2 = x_1^2 - y_1^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 (x_2^2 - y_2^2) \implies z_2 = z_1 \implies x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

Em fim, uma imersão injetiva com domínio compacto é um mergulho porque é fechada: pegue um fechado no domínio, vira compacto, imagem é compacta, que é fechado. Pronto. .

□

Exercício 8 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ difeo local. Se M_2 é orientável, então M_1 é orientável.

Solução. Defina: uma base $\beta \subset T_p M$ é orientada se $\varphi_* \beta$ é orientada em $T_{\varphi(p)} M$. Tá bem definida porque φ é um difeomorfismo em p , i.e. φ_* é isomorfismo. Para mostrar que é contínua à la Lee, qualquer vizinhança de um ponto $p \in M_1$, a correspondente carta coordenada em $\varphi(p)$, um marco coordenado nela e puxe (pushforward baix φ^{-1}) de volta para U . Difeomorfismo e muito bom: o pushforward the campos vetoriais está bem definido. E por construção está orientado. □

1.2 Capítulo 1

Exercise 1 Prove que a aplicação antípoda $A : S^n \rightarrow S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n . Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real \mathbb{RP}^n tal que a projeção natural $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ seja uma isometria local.

Solution. Lembre que a métrica de S^n é a induzida pela métrica euclidiana, onde pensamos que $T_p S^n \hookrightarrow T_p \mathbb{R}^{n+1}$. É claro que A é uma isometria de \mathbb{R}^n , pois ela é a sua derivada (pois ela é linear), de forma que $\langle v, w \rangle_p = \langle -v, -w \rangle_{A(p)} = \langle v, w \rangle_{-p}$.

É um fato geral que se as transformações de coberta preservam a métrica, obtemos uma métrica no quociente de maneira natural, i.e. para dois vetores $v, w \in T_p \mathbb{RP}^n$ definimos $\langle v, w \rangle_p^{\mathbb{RP}^n} := \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)}$.

Para ver que a projeção natural é uma isometria local basta ver que a diferencial de A é um isomorfismo em cada ponto. Mas como ela é $-A$, isso é claro. \square

Exercício 7 Seja G um grupo de Lie compacto e conexo ($\dim(G) = n$). O objetivo do exercício é provar que G possui uma métrica bi-invariante. Para isto, prove as seguintes etapas:

- (a) Seja ω uma n -forma diferencial em G invariante à esquerda, isto é, $L_x^* \omega = \omega$, para todo $x \in G$. Prove que ω é invariante à direita.

Sugestão: Para cada $a \in G$, $R_a^* \omega$ é invariante à esquerda. Decorre daí que $R_a^* \omega = f(a)\omega$. Verifique que $f(ab) = f(a)f(b)$, isto é, $f : G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um homomorfismo (contínuo) de G no grupo multiplicativo dos números reais. Como $f(G)$ é um subgrupo compacto conexo, conclui-se que $f(G) = 1$. Logo $R_a^* \omega = \omega$.

- (b) Mostre que existe uma n -forma diferencial invariante à esquerda ω em G .
- (c) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G . Seja ω uma n -forma diferencial positiva invariante à esquerda em G , é defina uma nova métrica Riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ em G por

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_p = \int_G \langle (dR_x)_y u, (dR_x)_y v \rangle_{y_x} \omega, \\ x, y \in G, \quad u, v \in T_y G$$

Prove que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é bi-invariante.

Solução.

- (a)
- (b)
- (c) Vou usar outra notação. Suponha que g é uma métrica invariante à esquerda em G . Definimos

$$\tilde{g} := \int_{x \in G} (R_x^* g) \omega$$

como operador $\mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathcal{F}(G)$.

Lance final Essa definição tá errada! Para que R_x^*g seja uma função que acompanhe ω em cada ponto, **também temos que puxar** ω . Ou seja, a definição correta é:

$$\tilde{g} := \int_{x \in G} R_x^*(g\omega)$$

E ai entra que tem que considerar $R_x^*\omega$, que por definição é invariante à esquerda, mas tu já provou que também é invariante à direita então beleza: $R_x^*\omega = \omega$.

A partir daqui contas confusamente mexidas entre a primeira vez que escrevi e depois... mas a definição acima deve ser suficiente para provar em um par de linhas...

Agora vamos ver que \tilde{g} é invariante à esquerda, i.e. queremos ver que para todo $a \in G$,

$$\tilde{g} \stackrel{\text{quero}}{=} L_a^* \tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} L_a^* \int_G (R_x^*g)\omega.$$

Vamos ver que o pullback L_a^* pode “entrar na integral” e trocar de lugar com R_x^* , daí o resultado segue porque g é L_a -invariante. As contas acabam sendo que

$$\begin{aligned} L_a^* \int_G (R_x^*g)\omega &= \int_G L_a^* R_x^*g\omega = \int_G (L_a \circ R_x)^*g\omega = \int_G (R_x \circ L_a)^*g\omega \\ &= \int_G R_x^* L_a^*g\omega = \int_G R_x^*g\omega = \tilde{g} \end{aligned}$$

Para ver que \tilde{g} também é invariante à direita fazemos:

$$\tilde{g} \stackrel{\text{quero}}{=} R_a^* \tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} R_a^* \int_G (R_x^*g)\omega = \int_G R_a^* R_x^*g\omega = \int_G R_{ax}^*g\omega = \int_G R_x^*g\omega = \tilde{g}$$

porque estamos integrando em todo G e $G \cap G$ transitivamente. **Catch!** Como é o pullback? $F^*(f\omega) = F^*f \wedge F^*\omega$ então temos

$$R_a^*(R_x^*g\omega) = R_a^*(R_x^*g)R^*\omega$$

Então beleza só que: para que essa forma ai seja invariante à direita, não é suficiente que $R_a^*(R_x^*g)$ seja invariante à direita: também o pullback de ω ! É ai que entra o inciso (a): você provou que ω invariante à esquerda é invariante à direita, i.e. $R^*\omega = \omega$.

Para todo aquele que tem dúvida, aqui estão as contas da invarianza à esquerda super explicitas:

Fixe $y \in G$ e $u, v \in T_y G$. Temos que

$$\begin{aligned}
(L_a^* \tilde{g})(u, v) &= L_a^* \left(\int_G (R_x^* g) \omega \right) (u, v) \\
&= \left(\int_G (R_x^* g) \omega \right) \left((L_a)_* a^{-1} u, (L_a)_* a^{-1} v \right) \\
&= \int_G (R_x^* g) \left((L_a)_* a^{-1} u, (L_a)_* a^{-1} v \right) \omega \\
&= \int_G g \left((R_x)_* a^{-1} y x^{-1} (L_a)_* a^{-1} u, (R_x)_* a^{-1} y x^{-1} (L_a)_* a^{-1} v \right) \omega \\
&= \int_G g \left((R_x \circ L_a)_* a^{-1} y x^{-1} u, (R_x \circ L_a)_* a^{-1} y x^{-1} v \right) \omega \\
\text{associatividade em } G &= \int_G g \left((L_a \circ R_x)_* a^{-1} y x^{-1} u, (L_a \circ R_x)_* a^{-1} y x^{-1} v \right) \omega \\
&= \int_G g \left((L_a)_* a^{-1} y x^{-1} (R_x)_* y x^{-1} u, (L_a)_* a^{-1} y x^{-1} (R_x)_* y x^{-1} v \right) \omega \\
&= \int_G \left((L_a)^* g \right) \left((R_x)_* y x^{-1} u, (R_x)_* y x^{-1} v \right) \omega \\
g \text{ invariante à esquerda} &= \int_G g \left((R_x)_* y x^{-1} u, (R_x)_* y x^{-1} v \right) \omega \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}(u, v).
\end{aligned}$$

onde $R_x \circ L_a = L_a \circ R_x$ por associatividade de produto no grupo.

□

1.3 Capítulo III

1.3.1 maximum principle!

Maximum principle (E. Hopf) (Minimal surface course statement.) For any (M, g) , harmonic functions satisfy *maximum principle*: any harmonic function $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ for U connected and open, if $\exists p \in U$ that is a local maximum or local minimum, then f is constant on U .

We shall show Do Carmo's version that f *subharmonic*, i.e. $\Delta f \geq 0$, on M compact connected $\implies f$ constant. (This is Exercise 12, Chapter III.)

Demonstração.

Step 1 (Exercise 7, Chapter III of [dC79].) Make sure you can pick a *referencial geodésico* about every point of M . This is an orthonormal frame $\{E_i\} \subset \mathfrak{X}(U)$, where $p \in U$ such that $\left(\nabla_{E_i} E_j \right)_p = 0$. This frame can be obtained by taking geodesic coordinates at the point, an orthonormal base $\{e_i\}$ of $T_p M$, and taking parallel transport of the vectors e_i along radial geodesics emanating from p . This immediately ensures that E_i is orthonormal since parallel transport preserves angles.

To check that Christoffel symbols vanish at p we do as follows. (This is actually a basic fact about geodesic coordinates, see [Lee19] Prop. 5.24.) Take a random vector $v \in T_p M$ and its geodesic $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. I drop the subindex v for the next computations for the next computations. Then (this is Florit way of using covariant derivative along a curve; it's the *pullback* or *induced connection* ∇^γ):

$$0 = \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \gamma' = \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma v^i (E_i \circ \gamma)$$

where the $v = (v^1, \dots, v^n)$. Indeed: this is very silly but, since the coordinate chart of geodesic coordinates is \exp_p^{-1} , the coordinate representation of γ in this chart is as simple as

$$\hat{\gamma}(t) = (\underbrace{\varphi}_{\text{chart}} \circ \gamma)(t) = \exp_p^{-1} \exp_p(tv) = tv.$$

And the composition $E_i \circ \gamma$ just means that we take our local frame *along* γ . Continue:

$$\begin{aligned} &= v^i \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma E_i \circ \gamma = v^i \nabla_{\gamma_v, * \frac{d}{dt}} E_i \\ &= v^i \nabla_{v^j E_j} E_i = v^i v^j \nabla_{E_j} E_i \\ &= v^i v^j \Gamma_{ji}^k E_k \end{aligned}$$

along γ . Now choose $v = e_1$. You get $\Gamma_{11}^k = 0$ for all k along γ_{e_1} . Now choose $v = e_2$, then $\Gamma_{22}^k = 0$ along γ_{e_2} , so at least at p they both vanish. And now choose $v = e_1 + e_2$. You get

$$0 = (v^1)^2 \cancel{\Gamma_{11}^k}^0 + v^1 v^2 \Gamma_{12}^k + v^2 v^1 \Gamma_{21}^k + (v^2)^2 \cancel{\Gamma_{22}^k}^0$$

So $\Gamma_{12}^k = 0$ since Levi-Civita is torsion-free, i.e. symmetric. And so on. So the all Christoffel symbols vanish at the same time at p .

Step 2 (Exercise 11, Chapter III of [dC79].) Prove that

$$\text{div}_X \text{Vol} = \text{div } X \text{Vol}$$

To do this first recall that *divergence* and *trace* are

$$\text{div } X := \text{tr}(v \mapsto \nabla_v X)$$

$$\text{tr}(T) := \sum_i \langle T E_i, E_i \rangle, \quad T \in \text{End}(V), E_i \text{ orthonormal frame}$$

Now pick a Geodesic frame E_i and its dual coframe ε^i , i.e. satisfying $\varepsilon^i(E_j) = \delta_{ij}$. Then $\text{Vol} = \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n$. Then for any $X = X^i E_i \in \mathfrak{X}(U)$,

$$i_X \text{Vol} = \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n (X^i E_i, \cdot, \dots, \cdot) = X^i \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n (E_i, \cdot, \dots, \cdot)$$

How to compute that? Recall that for top-forms we have

$$\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n (Z_1, \dots, Z_n) = \det(\varepsilon^i(Z_j))$$

so for example if $n = 3$

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3(E_1, Z_2, Z_3) &= \begin{vmatrix} \varepsilon^1(E_1) & \varepsilon^1(Z_2) & \varepsilon^1(Z_3) \\ \varepsilon^2(E_1) & \varepsilon^2(Z_2) & \varepsilon^2(Z_3) \\ \varepsilon^3(E_1) & \varepsilon^3(Z_2) & \varepsilon^3(Z_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^1(Z_2) & \varepsilon^1(Z_3) \\ 0 & \varepsilon^2(Z_2) & \varepsilon^2(Z_3) \\ 0 & \varepsilon^3(Z_2) & \varepsilon^3(Z_3) \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon^2(Z_2)\varepsilon^3(Z_3) - \varepsilon^2(Z_3)\varepsilon^3(Z_2) = \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3(Z_2, Z_3), \\ \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3(E_2, Z_2, Z_3) &= \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon^1(Z_2) & \varepsilon^1(Z_3) \\ 1 & \varepsilon^2(Z_2) & \varepsilon^2(Z_3) \\ 0 & \varepsilon^3(Z_2) & \varepsilon^3(Z_3) \end{vmatrix} = -\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3(Z_2, Z_3)\end{aligned}$$

and so on. When we sum over all i , we get

$$X^i \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n(E_i, \cdot, \dots, \cdot) = \sum_i (-1)^{i+1} X^i \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \hat{\varepsilon}^i \wedge \dots \wedge \varepsilon^n.$$

Now take exterior derivative of that, we get

$$\begin{aligned}d_X \text{Vol} &= \sum_i (-1)^{i+1} (dX^i) \wedge \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \hat{\varepsilon}^i \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \\ &\quad + \sum_i (-1)^{i+1} X^i \wedge d(\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \hat{\varepsilon}^i \wedge \dots \wedge \varepsilon^n)\end{aligned}$$

And then the first term actually is

$$\sum_i (-1)^{i+1} E_j X^i \varepsilon^j \wedge \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \hat{\varepsilon}^i \wedge \dots \wedge \varepsilon^n = E_i X^i \text{Vol}$$

while the second term vanishes because look,

$$\begin{aligned}d\varepsilon^i(E_j, E_k) &= E_j \varepsilon^i(E_k) - E_k \varepsilon^i(E_j) - \varepsilon^i([E_j, E_k]) \\ &= -\varepsilon^i(\nabla_{E_j} E_k - \nabla_{E_k} E_j) \quad \text{torsion!}\end{aligned}$$

which vanishes at p because we said that this geodesic frame would have vanishing Christoffel symbols at p . So we conclude:

$$d_X \text{Vol} = E_i X^i \text{Vol}$$

Now you just have to think what is divergence:

$$\begin{aligned}\text{div } X &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} X^j E_j, E_i \rangle = \sum_i \langle E_i X^j E_j, E_i \rangle + X^j \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle \\ &= \sum_i \langle E_i X^j E_j, E_i \rangle = \sum_i E_i X^j \langle E_j, E_i \rangle = E_i X^i\end{aligned}$$

again using that we are a geodesic frame with vanishing covariant derivative at p .

Step 3 (Exercise 9(b), Chapter III of [dC79].) You realise that

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Recall that *Laplacian* is

$$\Delta f := \operatorname{div} \nabla f$$

This is just a computation no problem, I'll say how it starts. For any $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle \nabla(fg), X \rangle = X(fg) = fXg + gXf = f \langle \nabla g, X \rangle + g \langle \nabla f, X \rangle.$$

which says that

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

So, for an orthonormal frame E_i

$$\Delta(fg) = \operatorname{div} \nabla(fg) = \sum_i \langle \nabla_{E_i} (f\nabla g + g\nabla f), E_i \rangle$$

Then use Leibniz rule and definition of gradient, you get there.

Step 4 (Exercise 12, Chapter III of [dC79].) To prove the theorem for subharmonic functions first we show that in fact they are harmonic via step 2 on $X := \nabla f$ and Stokes:

$$\int_M \Delta f \operatorname{Vol} = \int_M \operatorname{div} X \operatorname{Vol} = \int_M d(i_X \operatorname{Vol}) = \int_{\partial M} i_X \operatorname{Vol} = 0$$

meaning that the non-negative function Δf is in fact 0, i.e. f is harmonic. Now we do it again for $X := \nabla(f^2/2)$:

$$\int_M \Delta(f^2/2) \operatorname{Vol} = \int_M d(i_X \operatorname{Vol}) = \int_{\partial M} i_X \operatorname{Vol} = 0$$

And then apply step 3:

$$0 = \int_M \Delta(f^2/2) \operatorname{Vol} = \int_M f \Delta f \operatorname{Vol} + \int_M \langle \nabla f, \nabla f \rangle \operatorname{Vol}$$

First one vanishes because f is harmonic, so second one is zero which says f is constant!

□

2 Exercícios de aulas .pdf

2.1 Pullback da torsão (e da curvatura)

Exercício Mostre que $T_{\nabla f} = f^*T$.

Explanation of the notation

Let $f : M \rightarrow \tilde{M}$ be a map of manifolds and $p \in \tilde{M}$. Recall that the differential of f at p is a map

$$\begin{aligned} f_{*,p} : T_p M &\longrightarrow T_p M \\ X(p) &\longmapsto f_{*,p} X_p \end{aligned}$$

defined by

$$(f_{*,p}X_p)g := X_p(g \circ f)$$

for all $g \in \mathcal{F}(\tilde{M})$.

Then we have a tensor

$$f_* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_f$$

that maps a vector field of M to a section of the pullback bundle $f^*T\tilde{M}$ that at every point of M gives you the vector of \tilde{M} just defined as $f_{*,p}X_p$.

There is an exercise that says that the vector fields ∂_i defined as doing $\partial_i x^j = \delta_i^j$ are a local basis of sections of $T\tilde{M}$, so you can write

$$f_*X = X^i(\partial_i \circ f).$$

The question arises:

who is X^i ?

The answer reads: on one hand,

$$(f_*X)_{f(p)}(x^j) = (X^i \partial_i)_{f(p)}(x^j) = X^i(f(p))(\partial_i)_{f(p)}x^j = X^i(f(p))$$

and on the other hand, by definition of differential

$$(f_*X)_{f(p)}(x^j) = X_p(x^j \circ f) = X_p(f^j)$$

where we denote $f^j = x^j \circ f$ the coordinate functions of f . So we conclude, for once and for all, that

$$X_{f(p)}(f^j) = X^j(f(p))$$

So we can write

$$f_*X = X(f^i)\partial_i.$$

Solução

Exercício Mostre que $T_{\nabla f} = f^*T$.

Solution.

$$\begin{aligned}
T_{\nabla f}(X, Y) &= \nabla_X f_* Y - \nabla_Y f_* X - f_*[X, Y] \\
&= \nabla_X Y(f^i) \partial_i \circ f - \nabla_Y X(f^j) \partial_j \circ f - f_*[X, Y] \\
&= X(Y f^i) \partial_i \circ f + Y(f^i) \nabla_X \partial_i \circ f - Y(X f^j) \partial_j - X f^j \nabla_Y \partial_j - f_*(XY - YX) \\
&= \left(X(Y f^i) - Y(X f^i) \right) \partial_i + Y f^i \nabla_X \partial_i - X f^j \nabla_Y \partial_j - (XY - YX)(f^i) \partial_i \\
&= Y f^i \nabla_{f_* X} \partial_i - X f^j \nabla_{f_* Y} \partial_j \\
&= Y f^i X f^k \nabla_{\partial_k} \partial_i - X f^j Y f^\ell \nabla_{\partial_\ell} \partial_j \\
&= Y f^i X f^k \nabla_{\partial_k} \partial_i - X f^k Y f^i \nabla_{\partial_i} \partial_k \\
&= Y f^i X f^k (\nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_i} \partial_k) \\
&= Y f^i X f^k (\nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_i} \partial_k - [\partial_k, \partial_i]) \\
&= Y f^i X f^k T(\partial_k, \partial_i) \\
&= T(f_* X, f_* Y)
\end{aligned}$$

□

3 Dudas

Exercício (Para revisión, creo que está bien) Sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Suponga que $R, R' : \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ son dos tensores tipo curvatura. Si $K = K' \implies R = R'$. **Sugerencia:** polarizar.

Solution. Polarizamos así:

$$4R(X, Y, Z, W) = R(X + Z, Y + W, X + Z, Y + W) - R(X - Z, Y - W, X - Z, Y - W) \quad (1)$$

donde el truco es simplemente que $\mathbb{V}^4 \cong \mathbb{V}^2 \times \mathbb{V}^2$. Entonces la polarización usual para formas bilineales simétricas arbitrarias $T : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$, que nos dice que

$$4T(X, Y) = T(X + Y, X + Y) - T(X - Y, X - Y),$$

aplica para R con $\mathbb{W} = \mathbb{V}^2$. Para llegar de eq. (1) a la curvatura escalar simplemente aplicamos la antisimetría en las primeras dos o las últimas dos entradas. De ahí podremos sustituir K por K' y recuperar R' . \square

Exercício Si la curvatura seccional de (M, g) es idénticamente cero, la exponencial $\exp_p : B_\epsilon(0) \rightarrow B_\epsilon(p)$ es una isometría.

Ideas

- **(Idea 1.)** Considerar dos vectores tangentes $u, v \in T_p M$ a algún punto de M , y la superficie Σ generada por ellos mediante la exponencial. Es decir, definimos $V := \text{span}\{u, v\}$ y $\Sigma := \exp_p(V \cap B_\epsilon(0))$ donde $B_\epsilon(0)$ es el dominio de definición de la exponencial en p . Trabajar en una superficie nos permite usar el lema de simetría para curvatura, i.e. que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} X - \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} X = R(\partial_s, \partial_t)X,$$

donde se trata de la conexión inducida por la exponencial y el tensor de curvatura inducido por la exponencial; s y t son los parámetros de la exponencial restringida a $V \cap B_\epsilon(0)$ y X es un campo a lo largo de \exp_p .

Por el ejercicio anterior sabemos el tensor de curvatura R de M es idénticamente cero. (Porque también la curvatura seccional del tensor $R' := 0$ es cero.) Como $R_{\nabla^{\exp}} = \exp_p^* R = 0$, tenemos que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} X = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} X$$

¿Esta idea tiene futuro?

- **(Idea 2.)** Sabemos que el pullback de la curvatura de M coincide con la curvatura de $T_p M$, que también es cero por ser un espacio euclidiano. Es decir: tenemos dos variedades con el mismo tensor de curvatura, ¿podemos concluir desde aquí que sus métricas también coinciden? (Cf. pregunta de Arthur: curvaturas iguales \implies métricas iguales?).

- **(Idea 3.)** Consultando notas de monitoria, la idea correcta es demostrar que

$$|d_v \exp_p(w)| = |w|, \quad v \in T_p M, \quad w \in T_v(T_p M)$$

Para eso consideramos la variación por geodésicas

$$f(s, t) := \exp_p(t(v + sw))$$

cuyo campo variacional J es de Jacobi. Como $R \equiv 0$, $J'' = 0$. De acuerdo a mis notas: esto significa que

“coordenada a coordenada tenemos líneas.”

Pero no entiendo esto qué quiere decir. El siguiente paso es aplicar el lema de Gauss.

Exercício Provar que são equivalentes:

- (a) M é localmente isométrica a \mathbb{R}^n .
- (b) A traslação ao longo de curvas é localmente independente das curvas.
- (c) $K = 0$.

Solução. (c) \implies (a) Ejercicio anterior.

(a) \implies (b) **(Para revisión.)** Considere un vector $X(p) \in T_p M$ y su traslación paralela $X(q)$ a lo largo de la curva γ . Análogamente sea $\tilde{X}(q)$ la traslación paralela de $X(p)$ a lo largo de σ . Considere una isometría local $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$.

Considere el transporte paralelo de $\varphi_* X(p)$ a lo largo de $\varphi \circ \gamma$, y compare con $\varphi_* X(q)$. Afirmo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{p} & T_q M \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

porque:

- El transporte paralelo de $X(p)$ a lo largo de γ es el único campo $X \in \mathfrak{X}_\gamma$ satisfaciendo que $X(0) = X(p)$ y $\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X(t) = 0$.
- El transporte paralelo de $\varphi_* X(p)$ a lo largo de $\varphi \circ \gamma$ es el único campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}_{\varphi \circ \gamma}$ satisfaciendo que $\tilde{X}(0) = \varphi_* X(p)$ y $\nabla_{\frac{d}{dt}}^{\varphi \circ \gamma} \tilde{X}(t) = 0$.
- Entonces $\tilde{X}(t) = \varphi_* X(t)$ porque $\varphi_* X(t)$ también es un campo paralelo a lo largo de $\varphi \circ \gamma$:

$$0 = \varphi_* \left(\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X(t) \right) = \nabla_{\frac{d}{dt}}^{\varphi \circ \gamma} \varphi_* X(t)$$

En particular $\varphi_*X(q)$ es el transporte paralelo de $\varphi_*X(p)$ a lo largo de $\varphi \circ \gamma$.

Para concluir note que el transporte paralelo de \mathbb{R}^n no depende de la curva. De hecho, el transporte paralelo de cualquier vector en \mathbb{R}^n es el campo constante. Esto es porque la derivada covariante a lo largo de cualquier curva consiste en derivar el campo entrada a entrada. Que esa derivada se anule significa que las coordenadas del campo deben ser constantes.

Para confirmar que de hecho esa es la derivada covariante en \mathbb{R}^n , recuerde que la derivada covariante de campos vectoriales en \mathbb{R}^n definida como

$$D_{V_p} W = V_p W^i \partial_i$$

es métrica y simétrica (lo comprobé).

(b) \implies (c) (Tengo duda.) Éste es el ejercicio 4 del capítulo IV del libro de Manfredo. La sugerencia Manfredo es parecida a la idea de construir una superficie Σ como en la Idea 1 del ejercicio anterior. De acuerdo a la notación de la Idea 1, sabemos que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} X - \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} X = R(\partial_s, \partial_t)X.$$

Queremos demostrar que el lado izquierdo de la ecuación anterior es cero.

La sugerencia de Manfredo es definir un campo X como la traslación paralela de un vector cualquiera $v \in T_p M$, a lo largo de curvas verticales $t \mapsto (s, t)$; bajo la suposición de que la superficie Σ está parametrizada de tal forma que la recta $(s, 0)$ va a dar a un sólo punto de Σ . Me parece que para argumentar que $\nabla_{\partial_t} X = 0$ usa el lema 4.1 sobre cómo las geodésicas tangentes a las esferas geodésicas permanecen fuera de las respectivas bolas geodésicas.

No consigo ver exactamente cómo se usa este lema, y me pregunto si hay otra forma más simple de resolver esta pregunta.

□

Exercício Suponha que M tem curvatura seccional não-positiva, $K \leq 0$. Mostre que M é uma variedade sem pontos conjugados, isto é, para todo $p \in M$, o conjunto dos pontos conjugados a p é vazio.

Solução. Suponga que existen dos puntos conjugados p y q . Es decir, existe una geodésica $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ uniendo p y q , y un campo de Jacobi $J \in \mathcal{X}_\gamma^J$ tal que $J(a) = 0$, $J(b) = 0$. De acuerdo a las cuentas hechas en aula, sabemos que

$$\|J(t)\|^2 = \|w\|^2 t^2 - \frac{1}{3} K(w, v) t^4 + O(t^4)$$

donde $v = \gamma'(0)$ y $w = J'(0)$. Evaluando en b y pasando la curvatura seccional (que es negativa) del lado izquierdo, obtenemos que $\|w\|^2 b^2 + O(b^4)$ es un número negativo.

Pregunta: puedo tener problemas con los términos $O(b^4)$? La sugerencia de Manfredo (ex. 5 cap. V) es diferente (también logré seguirla). □

3.1 Minimizante \implies geodésica

Exercício 8 (Curvas minimizantes)

- (a) Seja γ uma curva suave por partes parametrizada por comprimento de arco (this is important, velocity is 1) conectando p a q . Mostre que se $d(p, q) = \ell(\gamma)$ então γ é uma geodésica.

Solution. Imagino que podemos só usar a primeira fórmula da variação:

$$S'(0) = - \int_a^b \langle V, \gamma'' \rangle dt.$$

(na página que segue anexo uma prova dela, mas isso é extra.)

É claro que se γ é minimizante, estamos num ponto crítico do funcional de distância S , é se cumpre a primeira fórmula da variação.

Pergunta Para mim parece que daí segue que $\gamma'' = 0$, porque a métrica é não degenerada. Porém, [Lee19], thm. 6.4 afirma que devemos usar $V = \gamma''$ para concluir esse exercício. Isso não entendo por que.

□

3.2 First variation formula explained

Explanation of first variation formula. Não precisa ler :)

Consider a *variation* of γ , which is like a homotopy:

$$\begin{aligned} \Gamma : (a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ \Gamma(t, s) &= \gamma(t) + sV(\gamma(t)) \end{aligned}$$

where $V \in \mathfrak{X}_\gamma$ is a vector field along γ called the *variation field*, and it has to vanish on the endpoints. Then there's the *length functional*

$$S(s) := \ell(\Gamma(t, s)) = \int_a^b \left| \nabla_{\frac{d}{dt}} \Gamma(t, s) \right| dt.$$

Because $\gamma = \Gamma(t, 0)$ is minimizing, we know that $S'(0) = 0$. Then we compute that and

hope that it will say $\gamma'' = 0$.

$$\begin{aligned}
S'(0) &= \int_a^b \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \langle \nabla_t \Gamma(t, s), \nabla_t \Gamma(t, s) \rangle^{1/2} dt \\
&= \int_a^b \frac{2}{2|\dot{\Gamma}(t, 0)|} \langle \nabla_s \nabla_t \Gamma(t, s), \nabla_t \Gamma(t, s) \rangle dt \\
&\stackrel{\text{symmetry lemma}}{=} \int_a^b \left\langle \nabla_t \underbrace{\nabla_s \Gamma(t, s)}_{=V}, \nabla_t \Gamma(t, s) \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle V, \nabla_t \Gamma(t, s) \rangle - \int_a^b \left\langle V, \underbrace{\nabla_t \nabla_t \Gamma(t, s)}_{\gamma''} \right\rangle dt
\end{aligned}$$

and the first one vanished out fundamental theorem of calculus and the fact that V is zero on the endpoints.

So we get that if γ minimizes distance, this integral is zero for any variation of γ .

Remarks

- Symmetry lemma basically follows from commutativity of partial derivatives in \mathbb{R}^n . Florit used pullback connection (as in the previous exercise!) and [Lee19] used Christoffel symbols.
- The true version of the variation formula admits that Γ is only piecewise smooth. The formula becomes less nice and the proof a little more involved, I won't do it, but something nice comes out of that: the fact that you realise that geodesics can't have corners because:

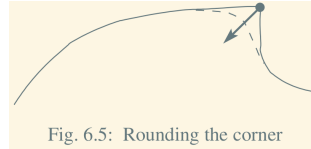


Fig. 6.5: Rounding the corner

so it would be nice to understand that precisely but OK.

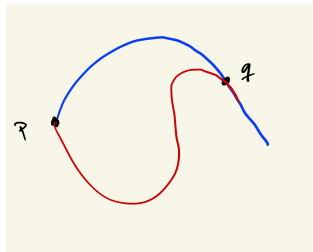
3.3 Duas geodésicas

Mais um:

Exercício 8 (Curvas minimizantes)

- (b) Suponha que $\gamma, \sigma : [0, 2] \rightarrow M$ são geodésicas distintas e satisfazem: $\gamma(0) = \sigma(0) := p$, $\gamma(1) = \sigma(1) := q$, γ e σ realizam a distância entre p e q . Mostre que γ não realiza a distância entre p e $\gamma(1 + s)$ para nenhum $s > 0$.

Demonstração. Argumentamos na monitoria que teríamos um problema de diferenciabilidade. Pela explicação dada em [Lee19] sobre a suavização de quinas, sabemos que as geodésicas devem ser suaves. Porém, que não poderia acontecer algo assim?



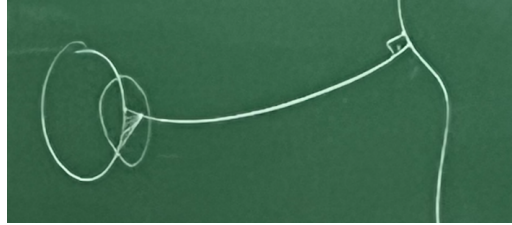
□

Exercício Show that for a bi-invariant metric on a Lie Group, it holds that $\exp_e = \exp^G$.

Solution. After delving into the abyss of definitions, I think it boils down to showing that $\nabla_{X_v} X_v = 0$, where $v \in \mathfrak{g}$. So we have to use that the metric is bi-invariant. But it's not necessarily Levi-Civita connection... □

Exercício Seja M completa, $S \subset M$ compacta, $L \subset M$ completa. Mostre que existe uma geodésica minimizante unindo S e L (isso é fácil), e que toda geodésica minimizante unindo S e L intersecta S e L perpendicularmente.

Sugestão



3.4 minimal submanifolds

Consider an isometric immersion $(M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$. Let ξ be a normal unit vector field—so this only works “nice” for orientable M ; in the nonorientable case you get that the normal section vanishes, and I think the following argument doesn’t work. So maybe that’s why we’d look for local volume minimizers.

Right so the variation is this:

$$\begin{aligned} f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M &\longrightarrow \tilde{M} \\ f(s, p) &= \exp_p(s\xi) \end{aligned}$$

Then $f_s := f(s, \cdot) : M \longrightarrow \tilde{M}$ is an immersion (in general not isometric, that’s the point) whose image we denote by M_s . Now we define the *volume functional* that simply computes the volume of M_s :

$$S(s) := \int_M \text{Vol}_{f_s^* \tilde{g}} = \int_M f_s^* \text{Vol}_{\tilde{g}}.$$

(S is physics notation and s is Florit notation.)

Exercício Compute $S'(0)$.

TL;DR. The derivative of the determinant is a trace, that trace is the trace of the shape operator, which is the mean curvature.

Solution. How to express volume in any coordinate system?

$$\sqrt{\det(f_s^* g)_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Let's differentiate:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}S(s) &= \frac{d}{ds} \int_M \text{Vol}_{f_s^* \tilde{g}} = \frac{d}{ds} \int_M \sqrt{\det(f_s^* g)_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \int_M \frac{d}{ds} \sqrt{\det(f_s^* g)_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\end{aligned}$$

And that's as far as normal human beings can get. We ask for help, and find [wikipedia](#) article on Jacobi's formula:

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \cdot \text{tr} \left(A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right)$$

and using that we see that

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\det A(t)} = \frac{1}{2} \sqrt{\det A(t)} \cdot \text{tr} \left(A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right)$$

So we put $A(s) = (f_s^* \tilde{g})_{ij}$. The good news is that square root of the determinant part is exactly the local coordinate function of $\text{Vol}_{f_0^* \text{Vol}_{\tilde{g}}} = \text{Vol}_g$ ($f_0 = f$ is an isometric immersion). Then we only have to integrate that other function, which hopefully is related to the mean curvature.

Before computing recall the basic equations of submanifold theory: for $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$, $\tilde{\nabla}$ L.C. connection of \tilde{M} and ∇ LC connection of M isometrically immersed in \tilde{M} , splitting everything into normal and tangent part we get

$$\tilde{\nabla}_X Y := \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi := -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi$$

and call α the second fundamental form and A the shape operator. These two equations/definitions together imply

$$\langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle = \langle -A_\xi X, Y \rangle$$

Let's compute

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (f_s^* \tilde{g})_{ij} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f_s^* \tilde{g}(\partial_i, \partial_j) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \tilde{g}(f_s^* \partial_i, f_s^* \partial_j) \\ &= \tilde{g}(\nabla_{\partial_s} f_s^* \partial_i, f_s^* \partial_j) + \tilde{g}(f_s^* \partial_i, \nabla_{\partial_s} f_s^* \partial_j) \\ &= \tilde{g}(\nabla_{\partial_s} f_s^0 \partial_i, f_s^0 \partial_j) + \tilde{g}(f_s^0 \partial_i, \nabla_{\partial_s} f_s^0 \partial_j) \\ &= \tilde{g}(f_* \nabla_{\partial_s} \partial_i, \partial_j) + \tilde{g}(\partial_i, f_* \nabla_{\partial_s} \partial_j) \quad f = f^0 \text{ isom. imm.} \\ &= \tilde{g}(f_* \nabla_{\partial_i} \partial_s, \partial_j) + \tilde{g}(\partial_i, f_* \nabla_{\partial_j} \partial_s)\end{aligned}$$

Hmmm... the point is that we arrive at the variational field $\nabla_{\partial_s} f(s, p) = \xi(p)$. If we assume (for now) that ξ is normal to M then upon differentiation we get:

$$\nabla_{\partial_i} \xi = -A_\xi \partial_i + N$$

where the normal component N vanishes since it is orthogonal to the basic tangent vectors of M . We conclude that

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (f_s^* \tilde{g})_{ij} &= \tilde{g}(-A_\xi \partial_i, \partial_j) + \tilde{g}(\partial_i, -A_\xi \partial_j) \\ &= \tilde{g}(\xi, \alpha(\partial_i, \partial_j)) + \tilde{g}(\alpha(\partial_j, \partial_i), \xi) \\ &= 2\tilde{g}(\xi, \alpha(\partial_i, \partial_j)) \quad \alpha \text{ is symmetric} \\ &= -2\tilde{g}(A_\xi \partial_i, \partial_j) \end{aligned}$$

Now we have to multiply by the inverse matrix, which is just the inverse of the metric in M because we are at $s = 0$. It turns out that that's how the trace looks like in coordinates, see [Lee19] p. 28: if h is any covariant 2-tensor field,

$$\text{tr}_g h = g^{ij} h_{ij}$$

which is exactly what we are computing! The shape operator, seen as a $(1, 1)$ -tensor field has components $\tilde{g}(A_\xi \partial_i, \partial_j)$. So all this time we've been looking at the mean curvature—which is defined as the trace of the shape operator.

But wait a minute didn't you say that the mean curvature is defined as

$$H := \text{tr } A_\xi = \sum_i \tilde{g}(A_\xi E_i, E_i)$$

for any orthonormal frame E_i ? And that's the point— ∂_i need not be orthonormal, and the trace is defined like that in general.

We conclude

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} S(s) = - \int_M H \text{Vol}_g$$

which says: **zeroes of the mean curvature function correspond to critical points of the volume functional.** \square

Addendum. And the mean curvature vector? The mean curvature vector is $H\xi$ for unit normal ξ . And $\tilde{g}(H\xi, \xi) = H$.

Questions

- Is the computation of the difficult part correct?
- What about that part with the inverse and “the components of the shape operator as a $(1, 1)$ -tensor”?
- Why can't we just choose an orthonormal frame and that's it?

3.5 minimal submanifolds good

Consider an isometric immersion $(M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$. Let $\xi \in \mathfrak{X}(M)$.

The variation is this:

$$\begin{aligned} f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M &\longrightarrow \tilde{M} \\ f(s, p) &= \exp_p(s\xi) \end{aligned}$$

Then $f_s := f(s, \cdot) : M \longrightarrow \tilde{M}$ is an immersion (in general not isometric, that's the point) whose image we denote by M_s . Now we define the *volume functional* that simply computes the volume of M_s :

$$S(s) := \int_M \text{Vol}_{f_s^* \tilde{g}} = \int_M f_s^* \text{Vol}_{\tilde{g}}.$$

Exercício Compute $S'(0)$.

Solution. How to express volume in any coordinate system?

$$\sqrt{\det(f_s^* \tilde{g})_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Let's differentiate:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} S(s) &= \frac{d}{ds} \int_M \text{Vol}_{f_s^* \tilde{g}} = \frac{d}{ds} \int_M \sqrt{\det(f_s^* \tilde{g})_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \int_M \frac{d}{ds} \sqrt{\det(f_s^* \tilde{g})_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

And that's as far as normal human beings can get. We ask for help, and find [wikipedia](#) article on Jacobi's formula:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \cdot \text{tr} \left(A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right)}$$

and using that we see that

$$\boxed{\frac{d}{dt} \sqrt{\det A(t)} = \frac{1}{2} \sqrt{\det A(t)} \cdot \text{tr} \left(A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right)}$$

But admittedly that is cheating so here's how to compute the derivative of the determinant. We write

$$A(t) = A + tB + \mathcal{O}(t^2) = A(\text{Id} + tA^{-1}B + \mathcal{O}(t^2)) = A(t^{-1} \text{Id} + A^{-1}B + \mathcal{O}(t^2))$$

I think this is the Taylor expansion of the smooth function $A(t)$, done entry by entry. We did the two other manipulations because we remembered the characteristic polynomial,

which I think is the determinant of $C - t \text{Id}$. Suppose we can diagonalize $C = A^{-1}B$. Then t_j

So we put $A(s) = (f_s^* \tilde{g})_{ij}$. The good news is that square root of the determinant part is exactly the local coordinate function of $\text{Vol}_{f_0^* \text{Vol}_{\tilde{g}}} = \text{Vol}_g$ ($f_0 = f$ is an isometric immersion). Then we only have to integrate that other function, which hopefully is related to the mean curvature.

Before computing recall the basic equations of submanifold theory: for $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$, $\tilde{\nabla}$ L.C. connection of \tilde{M} and ∇ LC connection of M isometrically immersed in \tilde{M} , splitting everything into normal and tangent part we get

$$\tilde{\nabla}_X Y := \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi := -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi$$

and call α the second fundamental form and A the shape operator. These two equations/definitions together imply

$$\langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle = \langle -A_\xi X, Y \rangle$$

Let's compute

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (f_s^* \tilde{g})_{ij} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f_s^* \tilde{g}(\partial_i, \partial_j) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \tilde{g}(f_s^* \partial_i, f_s^* \partial_j) \\ &= \tilde{g}(\nabla_{\partial_s} f_s^* \partial_i, f_s^* \partial_j) + \tilde{g}(f_s^* \partial_i, \nabla_{\partial_s} f_s^* \partial_j) \\ &= \tilde{g}(\nabla_{\partial_s} f_s^0 \partial_i, f_s^0 \partial_j) + \tilde{g}(f_s^0 \partial_i, \nabla_{\partial_s} f_s^0 \partial_j) \\ &= \tilde{g}(f_* \nabla_{\partial_s} \partial_i, \partial_j) + \tilde{g}(\partial_i, f_* \nabla_{\partial_s} \partial_j) \quad f = f^0 \text{ isom. imm.} \\ &= \tilde{g}(f_* \nabla_{\partial_i} \partial_s, \partial_j) + \tilde{g}(\partial_i, f_* \nabla_{\partial_j} \partial_s) \end{aligned}$$

Hmmm... the point is that we arrive at the variational field $\nabla_{\partial_s} f(s, p) = \xi(p)$, which upon differentiation gives:

$$\nabla_{\partial_i} \xi = -A_\xi \partial_i + N$$

where the normal component N vanishes since it is orthogonal to the basic tangent vectors of M . We conclude that

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (f_s^* \tilde{g})_{ij} &= \tilde{g}(-A_\xi \partial_i, \partial_j) + \tilde{g}(\partial_i, -A_\xi \partial_j) \\ &= \tilde{g}(\xi, \alpha(\partial_i, \partial_j)) + \tilde{g}(\alpha(\partial_j, \partial_i), \xi) \\ &= 2\tilde{g}(\xi, \alpha(\partial_i, \partial_j)) \quad \alpha \text{ is symmetric} \\ &= -2\tilde{g}(A_\xi \partial_i, \partial_j) \end{aligned}$$

Now we have to multiply by the inverse matrix, which is just the inverse of the metric in M because we are at $s = 0$. It turns out that that's how the trace looks like in coordinates, see [Lee19] p. 28: if h is any covariant 2-tensor field,

$$\text{tr}_g h = g^{ij} h_{ij}$$

which is exactly what we are computing! The shape operator, seen as a $(1, 1)$ -tensor field has components $\tilde{g}(A_\xi \partial_i, \partial_j)$. So all this time we've been looking at the mean curvature—which is defined as the trace of the shape operator.

But wait a minute didn't you say that the mean curvature is defined as

$$H := \text{tr } A_\xi = \sum_i \tilde{g}(A_\xi E_i, E_i)$$

for any orthonormal frame E_i ? And that's the point— ∂_i need not be orthonormal, and the trace is defined like that in general.

We conclude

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} S(s) = - \int_M H \text{Vol}_g$$

which says: **zeroes of the mean curvature function correspond to critical points of the volume functional.** \square

Addendum. And the mean curvature vector? The mean curvature vector is $H\xi$ for unit normal ξ . And $\tilde{g}(H\xi, \xi) = H$.

Questions

- Is the computation of the difficult part correct?
- What about that part with the inverse and “the components of the shape operator as a $(1, 1)$ -tensor”?
- Why can't we just choose an orthonormal frame and that's it?

3.6 ponto focal hipersuperfície

$M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Calcule os pontos focais em função das curvaturas principais de M .

collect your knowledge. $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el punto focal. γ geodesic joining $p \in M^n$ and q . So it's a geodesic in \mathbb{R}^{n+1} , it must be $\gamma(t) = (1-t)p + tq$. $\gamma'(0) \perp M$. A Jacobi field $J \in \mathfrak{X}_\gamma^J$. So it's a Jacobi field in \mathbb{R}^{n+1} , it must be of the form $J(t) = tu + v$ for some $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$. And finally, for q to be a **focal point** we require that

$$J'(0) + A_{\gamma'(0)} J(0) \in T_p^\perp M, \quad \text{and} \quad J(r) = 0$$

for some r .

3.7 pontos focais da esfera

Calcule os pontos focais de $S^n \subset S^{n+1}$

3.8 distance and second variation

Exercício Show that $d(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) = \|v - w\|t + O(t^2)$. Suggestion: consider the variation given by minimizing geodesics joining $\gamma_v(t)$ and $\gamma_w(t)$ for each small t , differentiate.

3.9 lema do índice

Exercício reescreva a prova do lema do índice usando o tensor \bar{J} instead of J .

lema do índice

$$I_a(V, V) \geq I_a(J, J)$$

onde J é de jacobi e V é

Demonstração. FAZER!

□

3.10 sturm y rauch

Exercício Prove Sturm usando Rauch.

Exercício continua que preserva distancia es diferenciabile

Exercício brutal

4 Monitorias

4.1 Abril 25

Kobayashi theorem (Also [Pet16] prop. 5.6.5) $\sigma : M \rightarrow M$ isometria. Prove que cada componente conexa do conjunto dos pontos fixos de σ é uma subvariedade totalmente geodésica.

Solução. Primeiro mostramos que os pontos fixos de σ , M^σ tem estrutura de subvariedade. Pegue uma bola geodésica $B_\varepsilon(p)$ e um ponto $q \in B_\varepsilon(p)$. Existe um vetor $v \in B_\varepsilon(0) \subset T_p M$ tal que $\exp_p(v) = q$. Então q tem coordenadas v porque

$$\underbrace{\exp_p^{-1}}_{\text{carta}}(\underbrace{\exp_p(v)}_q) = v$$

Agora aplique $d_p \sigma$. Aqui usamos o diagrama de naturalidade da exponencial:

$$\begin{array}{ccc} B_\varepsilon(0) \subset T_p M & \xrightarrow{d_p \sigma} & B_\varepsilon(0) \subset T_p M \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_p \\ B_\varepsilon(p) \subset M & \xrightarrow{\sigma} & B_\varepsilon(p) \subset M \end{array}$$

esse diagrama comuta se σ é uma isometria.

Lembre por que esse diagrama comuta: por um lado, como σ é isometria, $(\sigma \circ \exp_p)(tv)$ é uma geodésica. Por outro lado, por definição da exponencial, $(\exp_p \circ d_p \sigma)(tv)$ também é uma geodésica. Então basta ver que essas duas geodésicas são a solução da mesma EDO (a condição inicial é a mesma: que as curvas começam em p , claro, pois p é ponto fixo). Então derive cada uma delas em $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sigma \circ \exp_p)(tv) &= d_{\exp_p(0)} \sigma \cdot d_0 \exp_p(v) = d_p \sigma \text{Id}(v) \\ &= \text{Id } d_p \sigma(v) = d_0 \exp_p d_p \sigma(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp_p \circ d_p \sigma)(tv) \end{aligned}$$

O fato do diagrama comutar significa que

$$\exp_p(d_p \sigma(v)) = \sigma(\exp_p(v)) = \sigma(q)$$

Note que se $d_p \sigma$ fixa v , automaticamente σ fixa q . Mas ainda, se q é um ponto fixo de σ , aplicando \exp_p^{-1} obtemos que

$$d_p \sigma(v) = \exp_p^{-1}(\sigma(q)) = \exp_p^{-1}(q) = v$$

ou seja, $d_p \sigma$ fixa v . Isso significa que o conjunto de pontos fixos está em bijeção com os vetores que $d_p \sigma$ fixa. Em particular o conjunto de pontos fixos de σ está localmente parametrizado como o subespaço vetorial de $T_p M$ dos pontos fixos de $d_p \sigma$, ou seja, tem cartas de subvariedade.

Mas ainda, considerando a geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, como

$$d_p \sigma(tv) = t d_p \sigma(v) = tv$$

o mesmo argumento mostra que $\sigma(\gamma(t)) = \gamma(t)$. Ou seja, σ fixa toda a geodésica que liga p e q desde que fixe qualquer ponto nela. Isso conclui a prova: se $M^\sigma \cap B_\varepsilon(p) = \{p\}$, pronto! $\{p\}$ já é uma subvariedade totalmente geodésica. \square

Exercício 2 ([Pet16]) $F : (M, g) \rightarrow (M, g)$ conexa, F isometria, $p \in M$. Prove que

$$DF_p = -\text{Id} |_{T_p M} \iff \begin{cases} F^2 = \text{Id}_M \\ p \text{ é ponto fixo isolado} \end{cases}$$

Exercício 3 (Petersen) $N_1, N_2 \subset M$ totalmente geodésicas. Prove que cada componente conexa de $N_1 \cap N_2$ é uma subvariedade totalmente geodésica.

Exercício 4 Que se tem uma superfície (dimensão 2 só!) com um plano de simetria no sentido de que pode reflexar nela, então a curva que essa reflexão fixa é geodésica. Ou seja: se tem uma isometria que não é a identidade

Exercício 0 Curvatura negativa implica que...?

4.2 21 maio

Exercício -1 Para (M, g_M) e (N, g_N) e $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, definimos o *warped product* como sendo o produto cartesiano $M \times N$ com a métrica $g_M + f^2 g_N$.

Se os fatores são completos o warped product é completo.

Exercício 0 M completa, $K \subset M$ compacto, $\text{Ric} \geq \varepsilon > 0$ em $M \setminus K$, então M completa. Estime o diâmetro de M .

Exercício 1 Troque scal por K_M no statement de teo. Hadamard. Prove que não da. (Também não da trocando por Ric , isso é mais difícil de ver.)

Exercício 2 (M^n, g) completa, $\text{Ric}_M > 0$. A, B hipersuperfícies mínimas completas (i.e. traço da segunda forma é zero). Então $A \cap B \neq \emptyset$.

4.3 4 junho

Exercício calcule o diâmetro de $S^2, \mathbb{T}^2, \mathbb{RP}^2$.

5 Exercícios das listas (não entregue)

5.1 Lista 3

5.1.1 Complemento

Exercício 21 (Geodésicas e conexões afins)

- (a) Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva regular definida sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Prove que γ é uma reparametrização de uma geodésica se e somente se existe $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \gamma' = f(t)\gamma'$$

para todo $t \in I$.

- (b) Seja ∇ uma conexão afim em M . Prove que existe uma conexão $\bar{\nabla}$ em M que é livre de torção e admite as mesmas geodésicas que ∇ . Há unicidade?

- (c) Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ conexões afins em M , livres de torção. Mostre que ∇ e $\bar{\nabla}$ possuem as mesmas geodésicas (a menos de reparametrizações) se e somente se existe uma 1-forma ω tal que

$$\nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y = \omega(X)Y + \omega(Y)X$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Solução.

- (a) (\implies) Suponha que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ u$ para alguma geodésica $\tilde{\gamma}$ e $u : J \rightarrow I$ onde J é outro intervalo aberto.

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \gamma' &= \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma (\tilde{\gamma} \circ u)' = \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma (\tilde{\gamma}' \circ u)u' \\ &= \frac{d}{dt} u' \tilde{\gamma}' \circ u + u' \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \tilde{\gamma}' \circ u \end{aligned}$$

Para aplicar tudo que você sabe de conexões respire fundo e escreva:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \tilde{\gamma} \circ u &= \nabla_{\frac{d}{dt}}^{\tilde{\gamma} \circ u} \tilde{\gamma} \circ u && \text{porque } \gamma = \tilde{\gamma} \circ u \\ &= (\nabla^{\tilde{\gamma}})_{\frac{d}{dt}}^u \tilde{\gamma} \circ u && \text{exercício \#475} \\ &= \nabla_{u_* \frac{d}{dt}}^{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma} && \text{tudo que eu sei} \\ &= \nabla_{u' \frac{d}{dt} \circ u}^{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma} && \text{posso explicar} \\ &= u' \nabla_{\frac{d}{dt} \circ u}^{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma} \end{aligned}$$

Ah, é porque para qualquer função $g \in \mathcal{F}(M)$,

$$\left(u_* \frac{d}{dt}\right)_t g = \frac{d}{dt} \Big|_t (g \circ u) = g'(u(t))u'(t) = u'(t) \frac{d}{dt} \Big|_{u(t)} g$$

So you may want to always remember that

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}^{\tilde{\gamma} \circ u} (\tilde{\gamma} \circ u)' = u'' \tilde{\gamma}' \circ u + (u')^2 \nabla_{\frac{d}{dt} \circ u}^{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}'$$

Clearly if $\tilde{\gamma}$ is a geodesic we get the desired result.

- (b) For the converse we do this: suppose there is a function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\nabla_{\frac{d}{dt}}^{\gamma} \gamma' = f(t) \gamma'$. I want to prove γ is of the form $\gamma = \tilde{\gamma} \circ u$ for some $\tilde{\gamma}$ and function u . But hey, if they existed (who could tell?) they would satisfy the equation in that box over there.

□

5.2 Lista 4

5.2.1 Mean curvature

Exercício 8 Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Suponha que existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $0 \in \mathbb{R}$ é um valor regular e seja $\Sigma := f^{-1}(0)$.

(a) Seja $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$. Mostre que

$$\langle \alpha_\Sigma(X, Y), N \rangle = -\frac{\text{Hess}(f)(X, Y)}{|\nabla f|}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. (Aqui α é a segunda forma fundamental de Σ .)

(b) Mostre que a curvatura média de Σ (definida como o traço do operador de forma A) é dada por

$$H_\Sigma = -\frac{1}{n} \text{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right)$$

Solução.

(a) On one hand,

$$\langle \alpha(X, Y), \nabla f \rangle = -\langle Y, A_{\nabla f} X \rangle$$

and on the other,

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X \nabla f, Y \rangle = \langle -A_{\nabla f} X + \nabla_X^\perp \nabla f, Y \rangle$$

then multiply by $\frac{1}{|\nabla f|}$. ($\tilde{\nabla}$ é a conexão LC da variedade ambiente.)

(b) Para calcular a divergência como o traço do gradiente precisamos de uma base ortonormal de M . Pegue uma base ortonormal E_i de Σ e agregue $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Então temos:

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) &= \sum \left\langle \tilde{\nabla}_{E_i} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, E_i \right\rangle + \underbrace{\left\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right\rangle}_{=\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla f|^2 = 0} \\ &= \sum \left\langle -A_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} E_i, E_i \right\rangle \\ &= -\text{tr}(X \mapsto A_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} X) = -nH_\Sigma(p) \end{aligned}$$

□

6 Lista 1

6.1 Revisão

Exercício 1 Dada uma subvariedade $M \subseteq \tilde{M}$ uma subvariedade mergulhada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mostre que existe um aberto $U \subset \tilde{M}$ contendo M e um campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\tilde{X}|_M = X$. Caso M seja subconjunto fechado de \tilde{M} , prove que U pode ser tomado igual a \tilde{M} . Se M não é subconjunto fechado de \tilde{M} , pode não existir extensão de X definida em todo \tilde{M} .

Solução. Acho que a prova canônica é tomar coordenadas de subvariedade de $M \subset \tilde{M}$, i.e. onde M está dada localmente como o lugar onde se anulam as últimas $n - m$ funções coordenadas.

Pegamos uma vizinhança rectificante U de X em $p \in M$, i.e. $X = \partial_1$ em U . Daí pega para cada vetor normal a exponencial, que percorre pela geodésica um pouquinho. Isso dá uma vizinhança em \tilde{M} ... \square

Exercício 2 Seja $f : M^n \rightarrow N^m$ um mapa suave. Os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ são ditos f -relacionados se $df_p X_p = \tilde{X}_{f(p)}$, $\forall p \in M$. Mostre que se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são, respetivamente, f -relacionados com $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ então $[X, Y]$ é f -relacionado com $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

Solução. Intento 2. $s_1 \in \Gamma(\tau_N)$ está f -relacionado com $s \in \Gamma(\tau_M)$ se $s = s_1 \oplus s^\perp$ para algum $s^\perp \in \nu$. Queremos ver que se $s \stackrel{f}{\sim} s_1$ e $t \stackrel{f}{\sim} t_1$, $[s, t] \stackrel{f}{\sim} [s_1, t_1]$, ou seja $[s, t] = [s_1, t_1] \oplus [s, t]^\perp$ onde $[s, t]^\perp$ é um vetor em ν cuja cara não é muito importante.

$$[s, t] = [s_1 \oplus s^\perp, t_1 \oplus t^\perp] = [s_1, t_1] + \underbrace{[s_1, t^\perp]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t_1]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t^\perp]}_{\in \nu}$$

Falta un argumentín para ver que esos colchetes se anulan...

Intento 1 (incompleto). Pegue $p \in M$. Queremos ver que

$$(f_*[X, Y])_p \stackrel{\text{quero}}{=} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)}.$$

Pegue $g \in \mathcal{F}(N)$.

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)} &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{X}_{f(p)}(\tilde{Y}g) - \tilde{Y}_{f(p)}(\tilde{X}g) \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} f_{*,p}(X_p)(\tilde{Y}g) - f_{*,p}(Y_p)(\tilde{X}g) \\ &= X_p((\tilde{Y}g) \circ f) - Y_p((\tilde{X}g) \circ f) \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} X_p((f_{*,p}(Y))g \circ f) - Y_p((f_{*,p}(X_p))g \circ f) \end{aligned}$$

\square

Exercício 3 Seja $\pi : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetiva. Dado $Y \in \mathfrak{X}(N)$, mostre que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X é π -relacionado com Y .

Solução. O resultado segue de que $\tau_M \cong \pi^* \tau_N \oplus \nu$, tomando $X := Y \oplus 0$. □

Exercício 4 (Fibrado pullback) Suponha que M^n, N^m são variedades suaves, $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial suave de posto k e $f : N \rightarrow M$ é um mapa suave. Considere o espaço

$$f^*E = \{(p, e) \in N \times E : f(p) = \pi(e)\},$$

e $\tilde{\pi} : E \rightarrow N$ a projeção na primeira coordenada. Mostre que f^*E tem uma estrutura de variedade suave de forma que a tripla $\tilde{\pi} : f^*E \rightarrow N$ é um fibrado vetorial suave de posto k .

Solução. Para mostrar que $\tilde{\pi}$ é um fibrado vetorial devemos dar trivializações locais. Pegue um ponto $p \in M$ e uma vizinhança trivializante de E perto de $f(p)$, i.e. um aberto $U \ni f(p)$ e um difeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$. Pegue também um aberto $V \ni p$ tal que $f(V) \subset U$. Defina

$$\begin{aligned} h_1 : \tilde{\pi}^{-1}(V) &\longrightarrow V \times \mathbb{R}^k \\ (q, v) &\longmapsto (q, \pi_2 \circ h(f(q), v)) \end{aligned}$$

Como estamos usando a estrutura de fibrado vetorial de E , segue imediatamente a coleção de funções desse tipo formam um atlas trivializante de f^*E . □

6.2 Métricas Riemannianas

Exercício 6 Seja (N^n, g) uma variedade Riemanniana e $M^m \subset N$ uma subvariedade mergulhada. Mostre que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset N$ de p e campos vetoriais E_1, \dots, E_n em U tal que $E_1(q), \dots, E_n(q)$ é uma base ortonormal de $T_q N$ para todo $q \in U$ e $E_1(r), \dots, E_m(r)$ são tangentes a M para todo $r \in U \cap M$.

Solução. (Intento 1.) Pegue $p \in M$ e uma vizinhança aberta de $U \subset N$ de p tal que $U \cap M$ é suficientemente pequeno como para ter um marco ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$. Considere esses campos como campos tangentes a N . Usando o exercício 1 podemos estender esses campos a uma vizinhança de $U \subset N$. Aplicando Gram-Schmidt obtemos um marco ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$.

(Intento 2, [MS74] thm. 3.3, p. 36.) Take orthonormal frames $\{E_i\}_{i=1}^m \subset \mathfrak{X}(U \cap M)$ and $\{E'_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{X}(U)$. Notice that the matrix $(E_i \cdot E'_j)$ has rank m at p . (I think that two orthonormal frames are related up to an orthogonal matrix.) Suppose that the first m columns are linearly independent at p . Then there is an open neighbourhood V of p where the first m columns of this matrix are linearly independent. Then a slightly confusing part arguing that $E_1, \dots, E_m, E'_{m+1}, \dots, E'_n$ are linearly independent in V . Then apply Gram-Schmidt. And that's it.

Then Milnor shows that this is a vector bundle called the *orthogonal bundle*. The lance is that the orthonormal frame we have found gives the local trivialization. For a subbundle

$\xi \subset \eta$ define the fiber of the orthogonal complement of ξ by $F_b(\xi^\perp) := F_b(\xi)^\perp$ with respect to the metric of η . Define local trivializations by

$$\begin{aligned} \bar{h} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n-m} \\ \left(q, \sum x_i E_i\right) &\longmapsto (q, x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

Definição 1 Sejam (M^m, g_M) e (N^n, g_N) variedades Riemannianas. Seja $F : M \rightarrow N$ uma submersão. Dizemos que F é uma **submersão Riemanniana** quando para todo $p \in M$, $DF : \ker(DF)^\perp \rightarrow T_{F(p)}N$ é uma isometria linear. Em outras palavras, sempre que $v, w \in T_p M$ são perpendiculares ao núcleo de DF , vale

$$g_M(v, w) = g_N(DF(v), DF(w)).$$

Exercício 7 Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Suponha que existe um grupo de Lie G agindo por isometrias em (M, g) de tal forma que M/G admite uma estrutura de variedade suave, onde a projeção $\pi : M \rightarrow M/G$ é uma submersão. Mostre que existe uma métrica Riemanniana \bar{g} em M/G tal que $\pi : (M, g) \rightarrow (M/G, \bar{g})$ é uma submersão Riemanniana.

Solução. (Seguindo notação e ideias de [MS74].) Fazemos assim para definir a métrica em G/M . Primeiro lembre que $\tau_{G/M} \cong \pi^* \tau_{M/G}$. Considere o fibrado ν normal a $\pi^* \tau_{M/G}$, que é um fibrado sobre M satisfazendo $\pi^* \tau_{G/M} \oplus \nu \cong \tau_M$. Então qualquer vetor tangente a M/G pode ser pensado como um vetor tangente a M se anulamos a parte normal dele, mostrando que podemos usar a mesma métrica em M para introduzir uma métrica em G/M .

Para resolver o exercício devemos analisar como age π_* em τ_M quando este é visto como soma direta $\pi^* \oplus \nu$: $\pi_*(v_1 \oplus v^\perp) = v_1$. Daí segue trivialmente que $\ker \pi := \kappa \subset \nu$. Conversamente se $v_1 \oplus v^\perp \in \kappa$, fazemos para $w \in \pi^*$

$$(v_1 \oplus v^\perp) \cdot w = v_1 \cdot w + \cancel{v^\perp \cdot w}^0 = \pi_* v_1 \cdot \pi_* w = 0.$$

Então $\kappa = \nu$, então $\kappa^\perp \cong \pi^* \cong \tau_{M/G}$ isometricamente.

Intento 1 (errado). Defina a seguinte métrica em M/G :

$$g_{M/G} := g_M|_{\pi^* \tau_{M/G}}$$

i.e. a restrição da métrica em M ao fibrado pullback de $\tau_{M/G} := T(G/M)$, que sabemos que é isomorfo (como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Para ver que $\pi : M \rightarrow M/G$ é uma submersão Riemanniana devemos mostrar que o complemento ortogonal de $\kappa_\pi := \ker(\pi)$ é isomorfo (como fibrado Riemanniano, i.e. isométrico como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Como M é Riemanniana, o fibrado pullback tem um complemento ortogonal $(\pi^* \tau_{M/G})^\perp := \nu$. Basta mostrar que $\nu \cong \kappa$ isometricamente.

□

7 Lista 2

Exercício 1 Mostre que todo fibrado vetorial admite uma conexão.

Exercício 3 Exercício 2 do Capítulo 2 do livro do professor Manfredo:

Sejam X e Y campos de vetores numa variedade Riemanniana M . Sejam $p \in M$ e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva integral de X por p , i.e. $\gamma(t_0) = p$ e $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$. Prove que a conexão Riemanniana de M é

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt} \left(P_{\gamma, t_0, t}^{-1} (Y(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=t_0} \quad (2)$$

onde $P_{\gamma, t_0, t} : T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ é o transporte paralelo ao longo de γ de t_0 a t .

Solução. Primeiro devemos escrever o lado direito da eq. (2) em termos do fibrado pull-back ao longo de γ :

$$\frac{d}{dt} \left(P_{\gamma, t_0, t}^{-1} (Y(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=t_0} \longleftrightarrow \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}^\gamma$$

□

Lista 3

Exercício 4 Exemplo: esfera.

- (a) Determine as geodésicas da esfera \mathbb{S}^n com sua métrica canônica.
- (b) Determine o grupo de isometrias da esfera \mathbb{S}^n com sua métrica canônica.

Solution.

- (a) **Ideia essencial.** Suponha que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma geodésica. Podemos pensar que $\gamma' : I \rightarrow T\mathbb{S}^n \subset T\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e analogamente $\gamma'' : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Espaço tangente à esfera é perpendicular ao vetor posição, i.e. $\gamma \perp \gamma'$. Também $\gamma'' \perp \gamma'$; isso é porque $\gamma'' = (\gamma'')^\top + (\gamma'')^\perp$, e como γ é geodésica sabemos que $(\gamma'')^\top = 0$. Por fim, $\gamma'' = \lambda\gamma$, então concluímos que γ está dada por senos e cosenos.

Para escrever isso formalmente precisamos de uma expressão experta para γ . Em [Lee19] Prop. 5.27 achamos inspiração: damos a volta ao problema e começamos propondo uma curva que vai acabar sendo geodésica. Pegue um ponto $p \in \mathbb{S}^n$ e um vetor unitário $v \in T_p\mathbb{S}^n$. Considere

$$\gamma(t) = \cos t p + \sin t v$$

Derivando como uma simples curva em \mathbb{R}^{n+1} , vemos que $\gamma'' = -\gamma$, o que significa que $(\gamma'')^\top = 0$, i.e. γ é uma geodésica de \mathbb{S}^n . Mais precisamente,

$$\gamma''(t) = \left(\nabla_{\frac{d}{dt}}^{\gamma} \gamma' \right)_t \in (i \circ \gamma)^* T\mathbb{R}^{n+1} \cong \gamma^*(T\mathbb{S}^n \oplus N)$$

não tem componente tangente, e portanto

$$0 = \nabla_{\frac{d}{dt}}^{\gamma} \gamma' \in \gamma^* T\mathbb{S}^n.$$

Sendo essa uma geodésica partindo de um ponto arbitrário numa direção arbitrária, concluímos por unicidade das geodésicas e *rescaling lemma* que todas as geodésicas de \mathbb{S}^n são como γ .

Note que a geodésica γ é uma parametrização do círculo unitário no plano gerado pelos vetores p e v , i.e. um círculo máximo. Em conclusão, as geodésicas são os círculos máximos de \mathbb{S}^n .

- (b) Afirimo que $\text{Isom } \mathbb{S}^n = \text{O}(n+1) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \text{GL}(n+1) : AA^\top = \text{Id}\}$. É claro que $\text{O}(n+1) \subset \text{Isom } \mathbb{S}^n$, pois as transformações $A \in \text{O}(n+1)$ preservam o produto interno euclidiano:

$$\begin{aligned} AA^\top = \text{Id} &\iff \sum_k A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \iff A e_i \cdot A e_j = \delta_{ij} \\ &\iff A v \cdot A w = A(v^i e_i) \cdot A(w^j e_j) = v^i w^j e_i \cdot e_j = v \cdot w. \end{aligned}$$

Para ver que $\text{Isom } \mathbb{S}^n \subset O(n+1)$ suponha que $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma isometria. Vamos mostrar que A é a restrição de uma função $\tilde{A} \in O(n+1)$. Defina

$$\begin{aligned}\tilde{A} : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (r, \theta) &\longmapsto rA(1, \theta) \\ 0 &\longmapsto 0\end{aligned}$$

Se mostramos que \tilde{A} é uma isometria linear, é claro que ela é um elemento de $O(n+1)$ pela conta anterior. De fato, basta mostrar que \tilde{A} é uma isometria, pois toda isometria de espaços de Banach que fixa a origem é linear ([?] Teo. 7.11).

Para ver que \tilde{A} é uma isometria de \mathbb{R}^{n+1} , **afirmo** que a distância de p a q está totalmente determinada pelas normas $\|p\|$ e $\|q\|$, e pela distância esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$. Note que essa afirmação é na verdade um problema de geometria plana, pois todas essas quantidades podem ser descritas dentro do único plano que contém 0 , p e q .

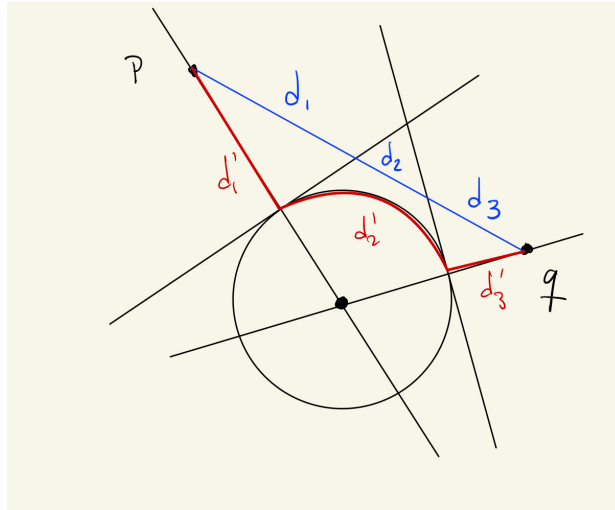


Figure 1: Intento de prova

Acabou que essa afirmação é simplesmente a lei dos cosenos, já que a distância esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$ é exatamente o ângulo entre p e q (poque essa distância é um segmento de círculo máximo!):

$$\text{lei dos cosenos:} \quad d(p, q)^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2 - 2\|p\|\|q\| \cos \angle(p, q)$$

Em fim, \tilde{A} é uma isometria porque $d_{\mathbb{R}^{n+1}}(p, q) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\tilde{A}p, \tilde{A}q)$ pelo argumento anterior.

□

Exercício 12 Seja (G, g) um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante e ∇ sua conexão de Levi-Civita.

(a) Mostre que

$$\nabla_u v = \frac{1}{2}[u, v],$$

para cada $u, v \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$.

(b) Seja $\bar{\nabla}$ uma conexão agim simétrica em G . Mostre que $\bar{\nabla} = \nabla$ se e somente se $\bar{\nabla}_u u = 0$ para todo $u \in \mathfrak{g}$.

Solution.

(a) Como ∇ é Levi-Civita, temos Koszul, i.e. $\forall u, v, w \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_u v, w \rangle &= u \langle v, w \rangle + v \langle u, w \rangle - w \langle u, v \rangle \\ &\quad - \langle u, [v, w] \rangle + \langle v, [w, u] \rangle + \langle w, [u, v] \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é invariante à esquerda, é constante quando avaliamos em elementos de \mathfrak{g} , e portanto os primeiros três termos se anulam. Então o exercício acaba quando mostramos que

$$\langle v, [w, u] \rangle = \langle u, [v, w] \rangle = - \langle u, [w, v] \rangle.$$

Seguindo [dC79], p. 45., a ideia é usar o fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ de w para expressar o colchete de Lie. Primeiro precisamos de

Afirmção O fluxo φ de um campo invariante à esquerda w comuta com a traslação à esquerda, i.e.,

$$\varphi_t(e) \circ L_h = L_h \circ \varphi_t(e) \quad \forall t \in \mathbb{R} \forall h \in G.$$

Prova da afirmação. Derivamos de ambos lados. Por um lado,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(e) \circ L_h = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(h) = v_h$$

Por outro lado,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_h \circ \varphi_t(e) = (L_h)_{*, \varphi_t(e)} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(e) = (L_h)_{*, e} v_e = v_h.$$

Por unicidade das soluções de EDOs, acabou. \square

Então repare:

$$\varphi_t(h) = (\varphi_t \circ L_h)(e) = (L_h \circ \varphi_t)(e) = h \varphi_t(e) = R_{\varphi_t(e)} h,$$

ou seja, qualquer curva integral de w é simplesmente a curva integral que passa por e trasladada.

Agora lembre que o colchete de Lie pode ser expressado como

$$[w, v]_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\varphi_{-t} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

(Onde fixamos o parâmetro $-t$ e deixamos livre o outro para ver φ_{-t} como um difeomorfismo de G .)

Juntando com a discussão anterior obtemos

$$[w, v]_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

Agora repare: como a métrica é bi-invariante,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} \left(L_{\varphi_t(e)} \right)_{*, e} u_e, \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} \left(L_{\varphi_t(e)} \right)_{*, e} v_e \right\rangle \\ &= \left\langle \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right\rangle \end{aligned}$$

Agora derivemos como funções de t (dentro de $T_e G$, i.e. não precisamos derivada covariante), e avaliemos em $t = 0$. (Note que quando avaliamos em $t = 0$ o factor que não derivamos não muda—estamos trasladando à direita e à esquerda por $\varphi_0(e)$!) Obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left\langle \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right\rangle \\ &= \left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \left[\left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right]_{t=0} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left[\left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)} \right]_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(R_{\varphi_{-t}(e)} \right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)} \right\rangle \\ &= \langle [w, u]_e, v_e \rangle + \langle u_e, [w, v]_e \rangle. \end{aligned}$$

Pelo inciso (a), é claro que se $\bar{\nabla} = \nabla$, $\bar{\nabla}_u u = 0$. Para a implicação contrária, vejamos que

$$\bar{\nabla}_u v = \frac{1}{2} [u, v], \quad u, v \in \mathfrak{g}$$

que é conveniente porque sabemos que isso é igual a $\nabla_u v$ pelo inciso (a). É só fazer:

$$0 = \bar{\nabla}_{u+v} u + v = \cancel{\bar{\nabla}_u u}^0 + \bar{\nabla}_u v + \bar{\nabla}_v u + \cancel{\bar{\nabla}_v v}^0$$

Lembre que $\bar{\nabla}$ é simétrica, i.e. $\bar{\nabla}_u v - \bar{\nabla}_v u = [u, v]$. Somando com a equação anterior:

$$\bar{\nabla}_u v - \bar{\nabla}_v u + \bar{\nabla}_u v + \bar{\nabla}_v u = [u, v]$$

como queríamos. Para concluir é só ver que ∇ e $\bar{\nabla}$ também coincidem em campos vectoriais que não são invariantes à esquerda. Então pegue uma base $\{u_i\} \subset \mathfrak{g}$ e dois campos $X = X^i u_i, Y = Y^j u_j$ quaisquer. Então:

$$\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{X^i u_i} Y^j u_j = X^i u_i Y^j u_j + Y^j \bar{\nabla}_{u_i} u_j = X^i u_i Y^j u_j + Y^j \nabla_{u_i} u_j = \nabla_X Y.$$

Pergunta Tem algum argumento super simples para argumentar essa última parte sem pegar uma base de \mathfrak{g} ?

□

Exercício 13 (Exercício 3, Cap. III, [dC79]) Sejam G um grupo de Lie, \mathfrak{g} sua álgebra de Lie, e $X \in \mathfrak{g}$. As trajetórias de X determinam uma aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ com $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$.

- (a) Prove que $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$, ($\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ é então chamado um *subgrupo a 1-parâmetro* de G).
- (b) Prove que se G tem uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ então as geodésicas de G que partem de e são os subgrupos a 1-parâmetro de G .

Solution.

- (a) Lembre que no exercício anterior mostramos que

$$\varphi_t(h) = R_{\varphi_t(e)}(h) = h \cdot \varphi_t(e), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \forall h \in G.$$

Fixe um $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e pegue $h = \varphi_{t_0}(e)^{-1}$. Obtemos que

$$\varphi_t(\varphi_{t_0}(e)^{-1}) = \varphi_{t_0}(e)^{-1} \varphi_t(e).$$

Ou seja, $\varphi_{t_0}(e)^{-1} \varphi_t(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$. Como também $\varphi_{t-t_0}(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$, por unicidade de EDOs obtemos

$$\varphi_{t_0}(e)^{-1} \varphi_t(e) = \varphi_{t-t_0}(e) \quad (3)$$

Avaliando o lado esquerdo em $t' = t - t_0$, do lado direito chegamos até $\varphi_{t-2t_0}(e)$. Repetindo esse processo cobrimos todo \mathbb{R} .

Para confirmar a segunda propriedade avaliamos eq. (3) em $t = 0$ para obter $\varphi_{t_0}(e)^{-1} = \varphi_{-t_0}(e)$. Para concluir pegue $t, s \in \mathbb{R}$ quaisquer e escreva:

$$\varphi_{t+s}(e) = \varphi_{t-(-s)}(e) = \varphi_{-s}^{-1} \varphi_t(e) = \varphi_s(e) \varphi_t(e).$$

- (b) Pegue $X \in \mathfrak{g}$ e considere a curva integral que passa por e , φ . Pelo exercício anterior,

$$0 = \nabla_X X = \nabla_{\varphi_* \frac{d}{dt}} X = \nabla_{\frac{d}{dt}}^{\varphi} X \circ \varphi = \nabla_{\varphi'} \varphi'$$

Então as curvas integrais de X que passam por e são geodésicas. Como isso é para qualquer vetor em \mathfrak{g} , por unicidade das soluções a EDOs, acabou.

□

Exercício 14 Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) denotamos por d_g a distância induzida por g .

- (a) Sejam g, h duas métricas Riemannianas em M^n . Mostre que se $d_g = d_h$ então $g = h$.
- (b) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Mostre que F é uma isometria se e somente se $d_g(F(\cdot), F(\cdot)) = d_g(\cdot, \cdot)$.

Demonstração.

- (a) Prova por contrapositiva.

Afirmção Se $g \neq h$, existem um aberto $U \subset M$ e um marco $\{E_i\} \subset \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0}) \quad \text{para algum } i_0 \in \{1, \dots, n\}.$$

Prova da afirmação. Se $g(E_i, E_i) = h(E_i, E_i)$ para todo marco em todo aberto de M , é claro que

$$g(X, Y) = g(X^i E_i, Y^j E_j) = X^i Y^j g(E_i, E_j) = h(X, Y)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

Então pegue um marco $\{E_i\} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0})$ em U . Sendo a diferença dessas quantidades uma função distinta da constante zero, podemos supô-la estritamente positiva dentro de U . Pegue $p \in U$ e uma vizinhança geodésica contendo p , que renomeamos U por simplicidade. Dentro de uma vizinhança geodésica, a distância de p aos outros pontos dentro de U está realizada por geodésicas, então podemos pegar $q \in U$ e γ geodésica ligando p e q .

Considere uma extensão de $\gamma' \in \mathfrak{X}_\gamma$ dentro de U , digamos $G = G^i E_i$. Então:

$$\begin{aligned} d_g(p, q) &= \int_a^b g(G^i E_i, G^i E_i) \circ \gamma dt = \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 g(E_i, E_i) \circ \gamma dt \\ &\neq \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 h(E_i, E_i) \circ \gamma dt = d_h(p, q). \end{aligned}$$

- (b) Primeiro suponha que $F^* d_g = d_g$. Para mostrar que F é uma isometria usamos o inciso anterior: consideramos as métricas g e $F^* g$ em M . Basta mostrar que $d_g = d_{F^* g}$. Por um tempo pensei que era para usar um câmbio de variáveis, mas acabei pensando assim: Pegue uma curva γ ligando p e q . Note que

$$\underbrace{\int_a^b F^* g(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } p \text{ a } q)} = \underbrace{\int_a^b g(F_{*, \gamma(t)} \gamma'(t), F_{*, \gamma(t)} \gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } F(p) \text{ a } F(q))}$$

Ou seja, do lado esquerdo estamos medindo o comprimento (respeito à métrica $F^* g$) de uma curva ligando p a q , enquanto que do lado direito estamos medindo o comprimento (respeito à métrica g) da curva $F \circ \gamma$, que liga $F(p)$ a $F(q)$.

Pegando o ínfimo de ambas quantidades, concluímos que a distância d_{F^*g} coincide com a distância F^*d_g , que por hipótese é igual a d_g . A implicação contrária também fica clara: supondo que $F^*g = g$, levando em conta a igualdade das integrais acima e pegando o ínfimo, concluímos que $F^*d_g = d_g$.

□

Exercício 15 Suponha que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa.

- (a) (M, g) simétrica $\implies (M, g)$ homogênea.
- (b) (M, g) 2-homogênea $\implies (M, g)$ isotrópica.

Solution.

- (a) **Ideia.** Pegamos dois pontos $q, q' \in M$. Para usar que M é simétrica buscamos o “ponto meio”. Esse deve ser $p \in M$ que esteja no meio do caminho de uma curva minimizante γ ligando q e q' . Daí, pegamos $F \in \text{Iso}_p := \{ \text{isometrias de } M \text{ que fixam } p \}$ com a propriedade de que $d_p F = -\text{Id}$. Daí devemos provar que F preserva γ e não fixa q . Daí, só existem dois pontos em γ que guardam a mesma distância com p : q e q' . Como $F(q) \neq q$ também guarda essa distância, concluímos que $F(q) = q'$.

Infelizmente fui incapaz de levar minha ideia até uma prova sem ajuda externa. Primeiramente me pareceu improvável a possibilidade de construir a geodésica minimizante (pode não existir para variedades não completas; mostrar que a propriedade de simetria implica a existência de curvas minimizantes parecia muito forte).

Conjectura Para quaisquer $q, q' \in M$ existe uma curva minimizante γ ligando q e q' .

Supondo que existe γ , podemos pegar $F \in \text{Iso}_p$ tal que $d_p F = -\text{Id}$ onde p é ponto meio sobre γ respeito q e q' .

Tentei mostrar que F preserva γ perto de p usando um marco geodésico, onde a geodésicas são curvas integrais de linhas, mas depois descobri que minha prova estava errada (pois dF só age como $-\text{Id}$ em p):

Afirmção Perto de p , $F(\gamma(t)) \in \text{img } \gamma$.

Prova da afirmação. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p , de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em $T_p M$ baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t F \circ \gamma = F_{*, \gamma(t)} \gamma'(t) = -\gamma'(t).$$

Portanto, a derivada da curva $F \circ \gamma$ coincide com a derivada de γ . Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F \circ \gamma(t) \in \text{img } \gamma$ dentro desta bola geodésica. □

Depois desse ponto comecei a buscar ajuda em livros, internet e ChatGPT. Rapidamente reparei que minhas ideias eram boas, e consegui:

Prova da afirmação reforçada. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p , de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em $T_p M$ baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$ em $t = 0$ (supondo que $\gamma(0) = p$):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F \circ \gamma = F_{*,p} \gamma'(0) = -\gamma'(0).$$

Portanto, a derivada da curva $(F \circ \gamma)(t)$ coincide com a derivada de $\gamma(-t)$. Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F \circ \gamma(t) \in \text{img } \gamma$ dentro desta bola geodésica. \square

Seguindo com esse raciocínio, $F \circ \gamma$ é uma curva definida em todo o domínio de γ , e portanto deve coincidir com $\gamma(-t)$ ao longo desse domínio. Ou seja, $F \circ \gamma$ é γ percorrida em sentido oposto. Isso significa, por definição de p como ponto meio, e desde que supomos que $\gamma(0) = p$, que, se $\gamma(t_0) = q$, necessariamente $q' = \gamma(-t_0) = (F \circ \gamma)(t_0) = F(q)$, como queríamos. (Note que meu desejo inicial de mostrar que $F(q) \neq q'$ não foi necessário.)

Então tudo fica resolvido se mostramos a conjectura. O motivo inicial para conjecturar isso foi notar que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, onde os pontos antípodas (entre outros) não podem ser ligados por curvas minimizantes, parece perder a propriedade de ser um espaço simétrico (que \mathbb{R}^2 tem). Com efeito, a intuição mostra que $\text{Iso}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = O(2)$, de modo que o grupo de isotropia Iso_p é trivial para todo ponto.

A inspiração final chega de [MathOverflow](#): parece que, com efeito, toda variedade simétrica é completa:

“Consider a local geodesic and use the symmetry to flip it, effectively doubling the length of the geodesic, ad infinitum”

A ideia nos lembra do exercício que fizemos com grupos de Lie. Pegamos uma geodésica definida perto de p . Pegamos $q \neq p$ dentro da bola geodésica centrada em p . Agora considere $F \in \text{Iso}_q$ tal que $F_q = \text{Id}$. Sabemos que γ está definida entre p e q , e, pela afirmação mostrada acima, compondo com F obtemos γ reparametrizada em sentido oposto. Isso permite chegar a um ponto sobre a curva original que fica à mesma distância de q que p , só que no sentido oposto. Repetindo esse processo, vemos que a geodésica pode ser estendida infinitamente.

De fato, isso parece mostrar a conjectura via teorema de Hopf-Rinow, por exemplo em [\[Lee19\]](#), Lemma 6.18 e Coro. 6.20. Tem uma prova sem usar esse teorema?

- (b) Queremos ver que $\forall p \in M$ e $\forall v, w \in T_p^1 M$ existe $F \in \text{Iso}_p(M)$ tal que $F_{*,p} v = w$. Para usar a propriedade de ser 2-homogênea, defina $p_1 := q_1 := p$, e $p_2 := \exp_p(v)$, $q_2 := \exp_p(w)$. (Isto é, supondo por enquanto que \exp_p está definida em vetores de norma 1.) Então existe $F \in \text{Iso}(M)$ tal que $F(p_1) = F(q_1)$, i.e. $F \in \text{Iso}_p(M)$, e tal que $F(p_2) = F(q_2)$.

Para ver que $F_{*,p} v = w$, note que $(F \circ \gamma_v)(1) = F(\gamma_v(1)) = F(p_2) = q_2$. Então $F \circ \gamma_v$ é uma curva ligando p e q . Pelo exercício 14(b) dessa lista, como F é uma isometria, sabemos que preserva a distância, de modo a $F \circ \gamma_v$ é minimizante e portanto uma geodésica. Daí $F \circ \gamma_v$ é uma reparametrização de γ_w ; mas como F é isometria,

preserva a norma dos vetores velocidade e portanto as curvas coincidem. Isso significa que $w = \gamma'_w(0) = (F \circ \gamma_v)'(0) = F_{*,p} \gamma'_v(0) = F_{*,p} v$.

Por último só note que se \exp_p não está definida em vetores de norma 1, podemos fazer a mesma construção em vetores que estejam dentro do domínio dela, obtendo uma função cuja diferencial envia um múltiplo pequeno de v em um múltiplo de igual proporção respeito a w . A diferencial dessa função também envia v em w , pois é uma isometria linear.

□

Lista 4

Exercício 1 (Cap. IV Exer. 1, [dC79]) Seja G um grupo de Lie com uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-invariante. Seja $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ campos unitários e invariantes à esquerda em G .

- (a) Mostre que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$. (Feito na lista 3.)
- (b) Conclua de (a) que $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.
- (c) Prove que, se X e Y são ortonormais, a curvatura seccional $K(\sigma)$ de G segundo o plano σ gerado por X e Y é dada por

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\| [X, Y] \|^2.$$

Portanto, a curvatura seccional $K(\sigma)$ de um grupo de Lie com métrica bi-invariante é não negativa e é zero se e só se σ é gerado por vetores X, Y tais que $[X, Y] = 0$.

Solution.

(b)

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \frac{1}{2} \nabla_X [Y, Z] - \frac{1}{2} \nabla_Y [X, Z] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4} [X, [Y, Z]] - \frac{1}{4} [Y, [X, Z]] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4} ([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]) + \frac{1}{4} [Z, [X, Y]] \\ \text{identidade de Jacobi} \quad &= \frac{1}{4} [Z, [X, Y]] \end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos a menos de um signo que muda com a convenção de [dC79] para R .

(c)

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \frac{R(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= R(X, Y, Y, X) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle \quad X, Y \text{ ortonormais} \\ &= \frac{1}{4} \langle [[X, Y], Y], X \rangle \quad \text{inciso (b) (convenção [dC79])} \end{aligned}$$

Agora lembre que na lista 3 provei que

$$\langle [w, u], v \rangle = -\langle u, [w, v] \rangle \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}$$

Pegue $u = [X, Y]$, $v = X$ e $w = Y$ para obter

$$\langle [Y, [X, Y]], X \rangle = -\langle [X, Y], [Y, X] \rangle = \langle [X, Y], [X, Y] \rangle$$

a por outra parte

$$\langle [Y, [X, Y]], X \rangle = -\langle [[X, Y], Y], X \rangle$$

Então parece de novo que tá errado por um signo mas resulta que a definição de K também é outra em [dC79], então por antisimetria de R nas últimas duas entradas o signo vira e tudo tá certo.

□

Exercício 2 Seja (M, g) uma variedade Riemanniana.

- (a) Se (M, g) é homogênea, então M possui curvatura escalar constante.
- (b) Se (M, g) é 2-homogênea, então M é Einstein.
- (c) Se (M, g) é 3-homogênea, então M possui curvatura seccional constante.

Solução.

- (a) (Começarei com o inciso (b), pois foi o que consegui fazer melhor.)
- (b) **(Intento sem ajuda externa. Com pouco de pena mas da para mostrar, pode poular.)** Queremos ver que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \text{Ric} = g$. Como tanto Ric quanto g são tensores, basta mostrar o resultado numa base do espaço tangente a qualquer ponto. Usamos o exercício 15(b) da lista 3 para obter que M é isotrópica, i.e. $\forall u, v \in T_p^1 M$ existe $f \in \text{Iso}(M)$ tal que $f_{*,p} u = v$.

Para uma base ortonormal E_i de $T_p M$ temos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(E_i, E_j) &= \sum_k \langle R(E_k, E_i)E_j, E_k \rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k)E_k, E_j \rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k)E_k, f_* E_i \rangle \end{aligned}$$

onde existe $f \in \text{Iso}$ tal que $f_* E_i = E_j$ porque M é isotrópica. Daí (aqui começo a ter dúvida) usamos que $f^* R = R$, ou seja

$$R(f_* E_i, f_* E_k) f_* E_k = R(E_i, E_k) E_k$$

isso é porque f é uma isometria e R depende da métrica e suas derivadas. Então a

equação acima vira

$$\begin{aligned}\text{Ric}(E_i, E_j) &= \sum_k \langle R(f_* E_i, f_* E_k) f_* E_k, f_* E_i \rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k) E_k, E_i \rangle \\ &= \sum_k K(E_i, E_k)\end{aligned}$$

que não faz sentido.

(Solução depois de consultar o professor + ChatGPT.) A observação central feita pelo professor é considerar o endomorfismo associado a Ric , que definimos como $\widehat{\text{Ric}}$ satisfazendo

$$\langle \widehat{\text{Ric}}(v), w \rangle = \text{Ric}(v, w)$$

A observação central feita pelo ChatGPT é que para uma isometria f temos que

$$f^* \text{Ric} = \text{Ric} \implies f_* \circ \widehat{\text{Ric}} = \widehat{\text{Ric}} \circ f_*$$

De fato, para $v, w \in T_p M$,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\text{Ric}}(f_* v), w \rangle &= \text{Ric}(f_* v, w) = f^* \text{Ric}(v, f_*^{-1} w) = \text{Ric}(v, f_*^{-1} w) \\ &= \langle \widehat{\text{Ric}} v, f_*^{-1} w \rangle = \langle f_* \widehat{\text{Ric}} v, w \rangle\end{aligned}$$

Agora mostramos que $\widehat{\text{Ric}} = \lambda \text{Id}$. Então como Ric é simétrico, $\widehat{\text{Ric}}$ é diagonalizável e dá para calcular o seus eigenvalores. Vamos ver todos eles coincidem. Pegue v, w eigenvetores de norma 1. Como M é 2-homogênea, sabemos que é isotrópica e existe f isometria tal que $f_* w = v$.

$$\lambda_v v = \widehat{\text{Ric}} v = \widehat{\text{Ric}}(f_* w) = f_* \widehat{\text{Ric}}(w) = f_* \lambda_w w = \lambda_w f_* w = \lambda_w v$$

então $\lambda_v = \lambda_w$ como queríamos. E isso mostra que em cada ponto,

$$\text{Ric}(v, w) = \langle \widehat{\text{Ric}} v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

ou seja, λ é na verdade uma função em M . Para ver que ela é constante, note que a condição de 2-homogeneidade implica homogeneidade, então Iso age transitivamente em M . Ou seja para $p \neq q$ pontos em M existe f isometria tal que $f(p) = q$. Como essa isometria preserva tanto o tensor de Ricci quanto a métrica, obtemos que

$$\begin{aligned}\lambda(q) g_q &= \text{Ric}_q = \text{Ric}_{f(p)} = (f^* \text{Ric})_p = \text{Ric}_p \\ &= \lambda(p) g_p = \lambda(p) (f^* g)_p = \lambda(p) g_{f(p)} = \lambda(p) g_q.\end{aligned}$$

- (c) **(Sem ajuda externa nem muito tempo para aprofundar!)** Minha ideia é assim: para controlar a curvatura seccional a partir da 3-homogeneidade realizamos dois vetores arbitrários $v, w \in T_p M$ como sendo as derivadas de duas curvas: uma ligando p a q , e outra ligando p a q' . Agora nos perguntamos como é a curvatura em outro ponto \hat{p} . Transportamos a terna (p, q, q') com uma isometria a alguma terna $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{q}')$. Essa segunda terna pode ser escolhida de maneira que as correspondentes derivadas sejam quaisquer outros vetores \hat{v} e \hat{w} tangentes a \hat{p} . As curvaturas seccionais coincidem porque f é uma isometria.
- (a) **(Sem ajuda externa nem muito tempo para aprofundar!)** Uma isometria preserva a curvatura escalar. Como para todo $p \neq q$ em M existe isometria f tal que $f(p) = q$, obtemos que

$$\text{Scal}(q) = \text{Scal}(f(p)) = (f^* \text{Scal})(p) = \text{Scal}(p).$$

□

Exercício 5 (Exer. 4, Cap IV, [dC79]) Seja M uma variedade Riemanniana com a seguinte propriedade: dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, o transporte paralelo de p a q não depende da curva que liga p a q . Prove que a curvatura de M é identicamente nula, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y)Z = 0$.

Demonstração. Parece que a sugestão é a prova quase por completo. Começarei explicando os pontos que achei que era necessário destrinchar para chegar a uma prova formal, e depois escrevo o argumento completo (que é basicamente uma cópia da sugestão).

Concluir o exercício só depende de duas coisas:

1. **(Mostrar que f sempre existe.)** A prova formalmente começa pegando três vetores $X(p), Y(p), Z(p)$ no espaço tangente a um ponto arbitrário $p \in M$. Primeiro devemos mostrar que existe $f : U \rightarrow M$ tal que $\partial_s|_{(0,1)} = X(p)$, $\partial_t|_{(0,1)} = Y(p)$, e que $f(s, 0) = f(0, 0)$.

Primeiro usamos a exponencial \exp_p de M para definir a superfície como a imagem do subespaço vetorial gerado por $X(p)$ e $Y(p)$. A exponencial fica determinada numa bola aberta $B_\epsilon(0) \subset T_p M$. Note $X(p)$ e $Y(p)$ podem não estar contidos em $B_\epsilon(0)$, mas podemos consertar isso redefinindo a exponencial avaliando as geodésicas em valores menores do que 1. Agora compomos com uma função suave $g : U \rightarrow B_\epsilon(0)$ tal que

- $g(0, 1) = (0, 0)$, de modo que $p = (\widetilde{\exp}_p^{-1} \circ g)(0, 1)$.
- $g(s, 0) = g(0, 0)$.
- $g_{*,(0,1)} e_1 = X(p)$.
- $g_{*,(0,1)} e_2 = Y(p)$.

Então $f = \widetilde{\exp}_p^{-1} \circ g$. **(Faltou: por que sempre existe g ?)**

2. **(Mostrar que $Z(p)$ pode ser atingido como o transporte paralelo de $V(0,0)$.)** Isso é simples: definimos $V(0,0)$ como o transporte paralelo de $Z(p)$ a $f(0,0)$. Por unicidade do transporte paralelo, acabou.

Agora escrevo a prova completa. Como R é um tensor, basta mostrar o resultado num ponto só. R depende de três vetores.

Para escolher os primeiros dois consideramos a superfície dada como a imagem do mapa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ construído acima, cujo domínio U é um quadrado aberto contendo o quadrado unitário:

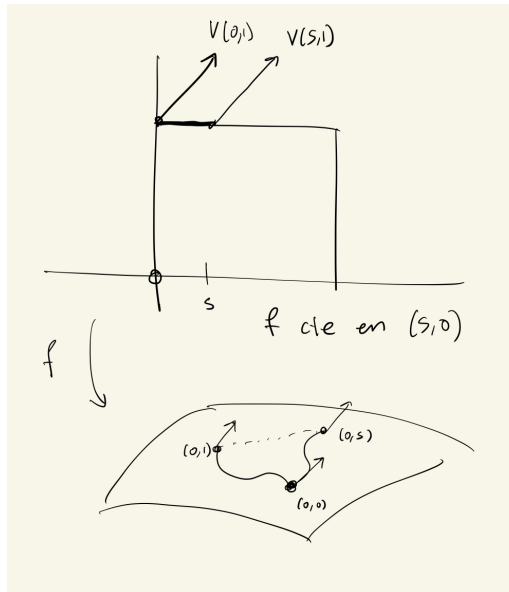
$$U := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; -\varepsilon < t < 1 + \varepsilon, -\varepsilon < s < 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

Definimos um campo vetorial pegando um vetor arbitrário $V_0 \in T_{f(0,0)}M$ e transportamos paralelamente ao longo das curvas verticais $t \mapsto (s, t)$. Isso significa que $\nabla_{\partial_t} V = 0$, e concluímos que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} V = 0 = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} V + R(\partial_t, \partial_s)V$$

onde todos os campos são seções ao longo de f e R realmente é $R_{\nabla f} = f^*R$.

Agora notamos que $V(1,0)$ deve ser, além do transporte paralelo de $V(0,0)$ ao longo de $t \mapsto (0, t)$, o transporte paralelo de $V(0,0)$ ao longo de $t \mapsto (s, t)$ seguido de $s \mapsto (s, 1)$ para qualquer s . Concluímos que $\nabla_{\partial_s} V(s, 1) = 0$. Isso significa que $R_{f(0,1)} = 0$.



□

Campos de Killing

Exercício 11 (Exer. 5, Cap. III, [dC79]) Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p , e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. X é chamado um **campo de Killing** (ou uma **isometria infinitesimal**) se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset M \rightarrow M$ é uma isometria. Prove que

- (a) Um campo linear em \mathbb{R}^n , definido por uma matriz A é um campo de Killing se e só se A é anti-simétrica.
- (b) Seja X um campo de Killing em M , $p \in M$ e U uma vizinhança normal de p em M . Admita que p é o único ponto de U que satisfaz $X(p) = 0$. Então, em U , X é tangente às esferas geodésicas centradas em p .
- (c) Sejam X um campo diferenciável de vetores em M e $f : M \rightarrow N$ uma isometria. Seja Y o campo de vetores em N definido por $Y(f(p)) = df_p(X(p))$, $p \in M$. Então Y é um campo de Killing se e somente se X também o for.
- (d) X é de Killing $\iff \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (a equação acima é chamada **equação de Killing**).
- (e) Seja X um campo de Killing em M com $X(q) \neq 0$, $q \in M$. Então existe um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em uma vizinhança de q , de modo que os coeficientes g_{ij} da métrica neste sistema de coordenadas não dependem de x_n .

Solução.

- (d) Seguimos a sugestão usando [Lee12].

Observação Note que X é de Killing $\iff \mathcal{L}_X g = 0$. A ideia para escrever com a definição de derivada de Lie de campos tensoriais covariantes:

$$(\mathcal{L}_X g)_p(Y, Z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_{\varphi_t(p)}(\varphi_{*,p}^t Y_p, \varphi_{*,p}^t Z_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_p(Y_p, Z_p) = 0$$

onde escrevo o fluxo como φ_t ou φ^t a vontade para facilitar notação. A volta também é simples usando Thm 12.37 [Lee12]: $(\varphi_t^* g)_p = g_p \iff \mathcal{L}_X g = 0$.

Usando essa observação o inciso (d) pode ser resolvido assim: X killing $\iff \mathcal{L}_X g = 0$. Desenrolamos essa definição usando Prop. 12.32(d) [Lee12]:

$$\begin{aligned} 0 = (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= L_X(g(Y, Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= X \langle Y, Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrica,

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, Z \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_X Z, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é métrica, acabou.

(a) Noto que para todo $p = (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t, p) = X_p = A(p).$$

Consegui escrever

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t, p)^i = a_{ij} p^j$$

pensando nas funções coordenadas de $\varphi(t, p)$. Porém, não vi que isso é um sistema de equações diferenciais! Divaguei um tempo sem chegar a nada. Consultando ChatGPT, da para escrever

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t, p) = A\varphi(t, p) \\ \varphi(0, p) = p \end{cases}$$

que tem solução

$$\varphi(t, p) = e^{tA} \varphi(0, p).$$

Isso faz sentido pelas propriedades da exponencial de matrizes, em particular o fato que que

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad [\text{Hal15}], \text{ Prop. 2.4}$$

que implica que efetivamente a função $e^{tA} \varphi(0, t)$ é solução do sistema dado acima. (Explorei outras formas de resolver o sistema, mas achei essa explicação mais familiar.)

Então concluímos que o fluxo é um mapa linear (a exponencial de matrizes é uma matriz). Como além disso é uma isometria, segue que é um elemento de $O(n)$. Agora lembre que a exponencial de grupos de Lie, que coincide com a exponencial de matrizes nesse caso, é um mapa da álgebra de Lie ao grupo. Como $\exp(tA) \in O(n)$, concluímos que $A \in \mathfrak{o}(n)$. Para concluir só devemos confirmar que $\mathfrak{o}(n)$ consta das matrizes antisimétricas. Note que

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \exp(tA)x, \exp(tA)y \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto ponto euclidiano. De fato, podemos reescrever as parcelas como

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y, \quad \langle x, Ay \rangle = x^T (Ay)$$

obtendo que

$$0 = x^T (A^T + A) y$$

ou seja, $A^T + A = 0$. (Argumento do Misha; também era natural pegar uma curva em $O(n)$ e derivar.)

(b) Note que φ_t é uma isometria de $B_\varepsilon(p)$. Isso segue de que $\varphi_t(p) = p$ para todo t . Isso segue de que a curva constante p satisfaz a equação do fluxo $0 = X_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p)$ e a mesma condição inicial. Daí segue que, como φ preserva a métrica

riemanniana e portanto a distância riemanniana, ele manda esferas geodésicas em esferas geodésicas. Segue que as derivadas do fluxo, i.e. vetores de X são tangentes às esferas geodésicas.

- (c) Parece que segue da “Propriedade de naturalidade dos fluxos”, uma proposição em [Lee12]. Vejamos se posso escrever o essencial: basta mostrar que o fluxo de $\tilde{X} := f_*X$ é dado por $f \circ \varphi$ onde φ é o fluxo de X . Basta diferenciar $f \circ \varphi$ e comprovar que sua derivada coincide com \tilde{X} em cada ponto. Por unicidade de EDOs, acabou. E sim: $(f \circ \varphi_p)'(0)$ é, por definição de vetores como velocidades de curvas, $f_*(\varphi_p'(0)) = f_*X$.

Seja $\tilde{\varphi}$ o fluxo de \tilde{X} . Para ver que $\tilde{\varphi}_t$ é uma isometria para todo t , note que para todo $\tilde{p} = f(p) \in \tilde{M}$ temos que

$$\tilde{\varphi}_t(\tilde{p}) = \tilde{\varphi}_{\tilde{p}}(t) = (f \circ \varphi_p)(t) = f(\varphi_t(p))$$

é isometria porque f e φ_t são isometrias. (A troca do subíndice no fluxo me serve para pensar o fluxo como curva ou como isometria.)

- (e) Queremos mostrar que $\frac{\partial}{\partial x^n} g_{ij} = 0$ para todo i, j naquele sistema coordenado. A escolha natural é o sistema coordenado onde $X = \partial_n$. Como X é Killing vemos que:

$$0 = L_{\partial_n}(g_{ij} dx^i dx^j) = (\partial_n g_{ij}) dx^i dx^j + g_{ij} L_{\partial_n} dx^i dx^j$$

de novo pelas propriedades da derivada de Lie para campos tensoriais em [Lee12]. Lembre que $dx^i dx^j$ denota a simetrização de $dx^i \otimes dx^j \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, que é igual a $\frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$ (quase) por definição—é uma conta pequena com a definição de simetrização de tensores. Basta argumentar que a segunda parcela da equação anterior se anula. Então temos que

$$\begin{aligned} 2L_{\partial_n}(dx^i dx^j) &= (L_{\partial_n} dx^i) \otimes dx^j + dx^i \otimes (L_{\partial_n} dx^j) \\ &\quad + (L_{\partial_n} dx^j) \otimes dx^i + dx^j \otimes (L_X dx^i) \end{aligned}$$

Lembremos a definição da derivada de Lie de campos tensoriais:

$$L_{\partial_n} dx^i := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* dx^i$$

onde para $V \in \mathfrak{X}(M)$ o pullback de campos tensoriais é definido por

$$(\varphi_t^* dx_i)_p := (dx^i)_{\varphi(t,p)}(\varphi_{*,p}^t V_p)$$

Minha intuição é que o fluxo de ∂_n não modifica as coordenadas de V distintas de V^n , mas talvez essa última sim. No caminho para comprovar isso descobri que de fato o pushforward é a identidade. Vamos calcular o fluxo de $X = \partial_n$ (aqui usei ChatGPT):

$$x \circ \varphi_p(t) = \left((x^1 \circ \varphi_p)(t), \dots, (x^n \circ \varphi_p)(t) \right) := (\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$$

obtemos o sistema

$$\dot{\varphi}^i(t) \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases}$$

que implica que

$$\varphi^i(t) = \begin{cases} x(p) & i \neq n \\ x(p) + t & i = n \end{cases}$$

dada a condição inicial $x \circ \varphi(0) = x(p)$. Então aqui, para minha surpresa, acaba que, dado t fixo, a derivada do fluxo φ_t é a identidade. E sim, porque como difeomorfismo de M vemos em coordenadas que trata-se do mapa

$$(x^1(p), \dots, x^n(p)) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p) + t),$$

e quando derivamos, como t é fixo, obtemos a matrix identidade. Concluimos que φ_t^*V é constante respeito a t , de modo que a derivada de Lie é zero. Note que o fato de que a derivada do fluxo é a identidade não significa que $L_{\partial_n}\omega = 0$ para outros campos tensoriais, pois embora o pushforward dos campos vetoriais não é modificado por φ , outros campos tensoriais podem variar de ponto a ponto, de modo que o pullback não é constante.

□

Exercício 14 (Exer. 12, Cap. VI, [dC79], Singularidades de um campo de Killing) Seja X um campo de Killing em uma variedade Riemanniana M . Seja $N = \{p \in M; X(p) = 0\}$. Prove que

- (a) Se $p \in N$, $V \subset M$ é uma vizinhança normal de p , e $q \in N \cap V$, então o segmento de geodésica radial γ ligando p a q está contido em N . Conclua que $\gamma \cap V \subset N$.
- (b) Se $p \in N$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que $V \cap N$ é uma subvariedade de M (Isto implica que toda componente conexa de N é uma subvariedade de M).
- (c) A codimensão, como subvariedade de M , de uma componente conexa N_k de N é par. Admita o seguinte fato: se uma esfera possui um campo diferenciável não nulo então sua dimensão é ímpar.

Solução.

- (a) Suponha que existe um ponto $\gamma(t_0)$ sobre γ onde X não é nulo. Como X é de Killing, o fluxo preserva a distância, i.e. sabemos que para qualquer s ,

$$\varepsilon_1 := d(\gamma(t_0), p) = d(\varphi_s(\gamma(t_0)), \varphi_s(p)) = d(\varphi_s(\gamma(t_0)), p)$$

de modo que $\varphi_s(\gamma(t_0))$ está na esfera de raio ε_1 centrada em p . Porém, o mesmo acontece com q , i.e. $\varphi_s(\gamma(t_0))$ está na esfera de raio $\varepsilon_2 := d(\gamma(t_0), q)$ centrada em q . Essas duas esferas se intersectam tangencialmente em $\gamma(t_0)$ pelo lema de Gauss, e portanto o ponto de interseção é único numa vizinhança dele. Isso significa que o fluxo é constante em $\gamma(t_0)$ e portanto $X(\gamma(t_0)) = 0$.

- (b) **(Solução seguindo a sugestão.)** Devemos mostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$, a restrição da diferencial do fluxo φ_t^* a $Q := \text{span}(\exp_p^{-1}(q_1), \exp_p^{-1}(q_2))$ é a identidade. Isso resulta claro pelo exercício 3 da lista 3: como φ^t é uma isometria,

$$\varphi^t \circ \exp_p = \varphi_t^* \circ \exp_p$$

Defina $v_1 = \exp_p^{-1}(q_1)$. Como q_1 é um ponto fixo de φ_t ,

$$\varphi^t(\exp_p(v_1)) = \exp_p(v_1)$$

Pela observação da lista 3, esse ponto também é

$$\exp_p(\varphi_t^*(v_1)) = \exp_p(v_1)$$

Então, como \exp_p é bijetiva,

$$\varphi_t^*(v_1) = v_1$$

Agora defina $v_2 = \exp_p^{-1}(q_2)$; o mesmo argumento funciona. E mesmo para qualquer $v := av_1 + bv_2 \in \text{span}(v_1, v_2)$. Segue que em qualquer ponto de $N_2 := \exp(\text{span}(v_1, v_2))$ o fluxo tem derivada zero e portanto X se anula. O procedimento funciona igual em dimensões maiores.

- (c) **(Seguindo a sugestão.)** A ideia é construir um campo vetorial diferenciável não nulo em alguma esfera contida no espaço N^\perp . Isso significa que a dimensão da esfera é ímpar, e portanto a dimensão de N^\perp deve ser par.

A prova acaba sendo bem parecida ao argumento que eu dei para o inciso (a), onde mostrei que os vetores não nulos de um campo de Killing num ponto q perto de $p \in N$ devem ser tangentes a alguma esfera centrada em p . Além disso, o campo X não pode se anular em pontos dessa esfera (**por que?** :!). Portanto, a restrição de X a essa esfera é um campo que não se anula.

Além disso, como φ^t é uma isometria, notamos que preserva o espaço normal $E_p := (T_p N)^\perp$. Isso implica (**por que?**) que todo vetor de um campo de Killing que não seja zero deve ser tangente a N^\perp .

□

Exercício 15 (Fórmula de Bochner para campos de Killing) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, $X \in \text{Kil}(M, g)$ e $f := \frac{1}{2}|X|^2 \in C^\infty(M)$. Mostre que

$$\Delta f = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X)$$

onde $|\nabla X|(p)$ denota a norma do operador $T_p M \ni v \mapsto \nabla_v X \in T_p M$.

Ideias. Certamente não consegui resolver esse exercício. Aqui vão algumas ideias e perguntas:

0. A “norma do operador $T_p M \ni v \mapsto \nabla_v X \in T_p M$ ” é

$$|X| := \sup_{|v|=1} \nabla_v X \quad ?$$

1. Tentei fazer algumas contas:

$$\Delta f = \Delta \left(\frac{1}{2} |X|^2 \right) = \frac{1}{2} \nabla \langle X, X \rangle$$

Onde, para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, sabemos que

$$\langle \nabla \langle X, X \rangle, Y \rangle = Y \langle X, X \rangle = 2 \langle \nabla_Y X, X \rangle.$$

Agora pegue um marco ortonormal E_i , de modo que

$$\Delta f = \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle$$

Agora tendo em mente a conta anterior, estou motivado a calcular

$$E_i \langle \nabla f, E_i \rangle = \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{E_i} E_i \rangle$$

Ou seja, podemos expressar o Laplaciano de f como

$$\Delta f = \sum_i \left(E_i \langle \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{E_i} E_i \rangle \right).$$

Em que momento aparece uma segunda derivada do tipo $\nabla \nabla$ i.e. ∇^2 ?

2. Outra ideia foi usar a notação de índices para os tensores em coordenadas. Consultando [Lee19],

$$\nabla f = g^{ij} E_i f E_j \quad \text{(quase consegui escrever sem consultar o livro)}$$

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (X^i \sqrt{\det g})$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_j f \right)$$

De modo que estou interessado em calcular as derivadas parciais de f :

$$\begin{aligned} \partial_i f &= \partial_i \left(\frac{1}{2} g(X, X) \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial_i (g_{jk} X^j X^k) \\ &= \frac{1}{2} (X^j X^k \partial_i g_{jk} + g_{jk} \partial_i X^j X^k) \\ &= \frac{1}{2} (X^i X^k \partial_i g_{jk} + g_{jk} (X^i \partial_i X^k + X^k \partial_i X_j)) \end{aligned}$$

Depois teria que calcular as derivadas disso multiplicado com $g^{ij} \sqrt{\det g}$. A dificuldade maior seria identificar onde aparecem os coeficientes do tensor de Ricci.

3. Finalmente consultei [dC79] e [Lee19] em busca de alguma ajuda. Em [dC79] não encontrei nada, quanto em [Lee19] aparece uma fórmula extremamente parecida na questão 7-7: para $u \in C^\infty(M)$,

$$\Delta \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) = |\nabla^2 u|^2 + \langle \nabla \Delta u, \Delta u \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u).$$

que a principio não tem a ver com campos de Killing. Então uma expectativa óbvia é que no caso de ∇u ser um campo de Killing,

$$\langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle = 0$$

mas não é claro o que Δu nesse caso. Consultando os resultados indicados para resolver o problema em [Lee19], reparei nas fórmulas que parecem generalizar o resultado de que

$$\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} V - \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} V = R(f_* \partial_t, f_* \partial_s) V$$

para tensores em geral: são as *Ricci identities*, Thm. 7.14. Em particular, a fórmula para 1-formas é a sugestão para provar a fórmula de Bochner.

References

- [dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [dC12] M.P. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superficies*. Textos universitários. SBM, 2012.
- [Hal15] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, New York, NY, second edition edition, 2012.
- [Lee19] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.
- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Princeton University Press, 1974.
- [Pet16] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 3 edition, 2016.

Lista 6

Exercício 1 (Curvatura do espaço projetivo complexo, [dC79] VIII.12) Defina uma métrica Riemanniana em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ do seguinte modo. Se $Z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $V, W \in T_Z(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$,

$$\langle V, W \rangle_Z = \frac{\operatorname{Re}(V, W)}{(Z, Z)}$$

onde

$$(Z, W) = z_0 \bar{w}_0 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

é o produto hermitiano em \mathbb{C}^{n+1} . Observe que a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restrita a $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ coincide com a métrica induzida por \mathbb{R}^{2n+2} .

- (a) Mostre que, para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $e^{i\theta} : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ é uma isometria, e que, portanto, é possível definir uma métrica Riemanniana em $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de modo que a submersão f seja Riemanniana.
- (b) Mostre que, nesta métrica, a curvatura seccional de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ é dada por

$$K(\sigma) = 1 + 3 \cos^2 \varphi,$$

onde σ é gerado pelo par ortonormal X, Y , $\cos \varphi = \langle \bar{X}, i\bar{Y} \rangle$, e \bar{X}, \bar{Y} são os levantamentos horizontais de X e Y , respectivamente. Em particular, $1 \leq K(\sigma) \leq 4$.

Solução. Começo notando que a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restrita a S^{2n+1} coincide com a métrica induzida por \mathbb{R}^{2n+2} : pegue $Z \in S^{2n+1}$ e $V, W \in T_Z(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$. Então

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle_Z &= \operatorname{Re}(V, W) \\ &= \operatorname{Re} \sum v^i \bar{w}^i \\ &= \operatorname{Re} \sum \left(\operatorname{Re} v^i + \sqrt{-1} \operatorname{Im} v^i \right) \left(\operatorname{Re} w^i - \sqrt{-1} \operatorname{Im} w^i \right) \\ &= \operatorname{Re} \sum \left(\operatorname{Re} v^i \operatorname{Re} w^i + \sqrt{-1} (\operatorname{Im} v^i \operatorname{Re} w^i - \operatorname{Re} v^i \operatorname{Im} w^i) + \operatorname{Im} v^i \operatorname{Im} w^i \right) \\ &= \operatorname{Re} \sum \left(\operatorname{Re} v^i \operatorname{Re} w^i + \operatorname{Im} v^i \operatorname{Im} w^i \right) + \operatorname{Re} \left(\sqrt{-1} (\dots) \right) \\ &= \sum \operatorname{Re} v^i \operatorname{Re} w^i + \operatorname{Im} v^i \operatorname{Im} w^i \\ &= \langle V, W \rangle_{\mathbb{R}^{2n+2}} \end{aligned}$$

- (a) Pela observação anterior, basta mostrar que $e^{i\theta}$ é uma isometria de S^{2n+1} com a métrica esférica usual. Sabemos que o grupo de isometrias dessa esfera é $O(2n+2)$.

De fato, o mapa $e^{i\theta} \in O(n+1, \mathbb{C}) \subset O(2n+2)$ onde o primeiro grupo são as isometrias da forma Hermitiana. Para ver por que, defina h como a forma hermitiana canônica de \mathbb{C}^{n+1} . Das contas feitas acima fica claro que podemos escrever

$h = g + \sqrt{-1}\omega$, onde g é a métrica Riemanniana (produto ponto) canônica de \mathbb{R}^{2n+2} e ω é uma outra forma bilinear.

Primeiro note que $e^{i\theta}$ é uma isometria de h . Para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$h(e^{i\theta}z, e^{i\theta}z) = e^{i\theta} \overline{e^{i\theta}} h(z, z) = |e^{i\theta}|^2 h(z, z) = h(z, z)$$

separando em parte real e imaginária, segue que $g(e^{i\theta}z, e^{i\theta}z) = g(z, z)$. Como $e^{i\theta}$ é linear, concluímos que é uma isometria de g .

- (b) Seguindo a sugestão, defina N como o vetor de posição de S^{2n+1} . Pensando $\theta \mapsto e^{i\theta}N$ como uma curva usual em \mathbb{C}^{2n+1} , sabemos pelas propriedades da exponencial complexa, i.e. derivando entrada a entrada, que $(\frac{d}{d\theta} e^{i\theta}N)_{\theta=0} = iN$.

Note que esse vetor é vertical, i.e. está no kernel da projeção π . Isso está quase feito: como iN é a derivada de uma curva, basta compor essa curva com π e derivar em $\theta = 0$. A derivada é zero porque no quociente essa curva é constante.

Daí simplesmente escrevemos a fórmula do Manfredo para uma curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^{2n+1}$ realizando o levantamento \bar{X} de $X \in \mathcal{X}(\mathbb{CP}^n)$ em N , i.e. com $\alpha(0) = N$ e $\alpha'(0) = \bar{X}$:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{\bar{X}} iN)_N &= \left. \frac{d}{dt} iN \circ \alpha(t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} i\alpha(t) \right|_{t=0} \quad \text{já que } N \text{ é o vetor posição} \\ &= i\alpha'(0) = i\bar{X}, \quad \text{derivada complexa usual} \end{aligned}$$

Agora note que

$$\bar{X} \langle \bar{Y}, iN \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, iN \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} iN \rangle$$

de modo que

$$\begin{aligned} \langle [\bar{X}, \bar{Y}], iN \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, iN \rangle \\ &= -\langle i\bar{X}, \bar{Y} \rangle + \langle i\bar{Y}, \bar{X} \rangle \\ &= 2 \cos \varphi \end{aligned} \tag{4}$$

por definição de φ como satisfazendo $\cos \varphi = \langle \bar{X}, i\bar{Y} \rangle$, e porque

$$\langle i\bar{X}, \bar{Y} \rangle = \operatorname{Re} h(i\bar{X}, \bar{Y}) = \operatorname{Re} h(\bar{X}, i\bar{Y}) = \operatorname{Re} h(\bar{X}, -i\bar{Y}) = -\langle \bar{X}, i\bar{Y} \rangle$$

Finalmente, o **exercício 10(b)** diz que para $\sigma = \operatorname{span}\{X, Y\}$ e $\bar{\sigma} = \operatorname{span}\{\bar{X}, \bar{Y}\}$,

$$\boxed{K(\sigma) = \bar{K}(\bar{\sigma}) + \frac{3}{4} \left| [\bar{X}, \bar{Y}]^\vee \right|^2}$$

onde \bar{K} é a curvatura de $S^{2n+1} \setminus \{0\}$, que é constante 1. Portanto, o desafio final acaba sendo mostrar que

$$3 \cos^2 \varphi = \frac{3}{4} \left| [\bar{X}, \bar{Y}]^\vee \right|^2$$

Mas já tá quase: elevando eq. (4) ao quadrado,

$$4 \cos^2 \varphi = \langle [\bar{X}, \bar{Y}], iN \rangle^2$$

Ou seja, basta mostrar que

$$|[\bar{X}, \bar{Y}]^v|^2 \stackrel{?}{=} \langle [\bar{X}, \bar{Y}], iN \rangle^2$$

Como iN é vertical, o lado direito é igual a $\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, iN \rangle^2$.

Como N é um vetor unitário, podemos expressar

$$[\bar{X}, \bar{Y}]^v = |[\bar{X}, \bar{Y}]^v| iN$$

Então acaba que

$$\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, iN \rangle^2 = \langle |[\bar{X}, \bar{Y}]^v| iN, iN \rangle^2 = |[\bar{X}, \bar{Y}]^v|^2 \langle iN, iN \rangle = |[\bar{X}, \bar{Y}]^v|^2$$

□

Exercício 2 (Espaços lenticulares)

- (a) Definição e geodésicas (exer 4. cap. VIII [dC79]). Identifique \mathbb{R}^4 com \mathbb{C}^2 fazendo corresponder (x_1, x_2, x_3, x_4) a $(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$. Seja

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

e seja $h : S^3 \rightarrow S^3$ dada por

$$h(z_1, z_2) = \left(e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1, e^{\frac{2\pi i}{r}} z_2 \right), \quad (z_1, z_2) \in S^3$$

onde q e r são primos entre si, $q > 2$.

- (i) Mostre que $G = \{\text{id}, h, \dots, h^{q-1}\}$ é um grupo de isometrias da esfera S^3 , com a métrica usual, que opera de modo totalmente descontínuo. A variedade S^3/G é chamada um *espaço lenticular*.
 - (ii) Considere S^3/G com a métrica induzida pela projeção $p : S^3 \rightarrow S^3/G$. Mostre que todas as geodésicas de S^3/G são fechadas mas podem ter comprimentos diferentes.
- (b) Calcule o volume de um espaço lenticular.
- (c) Exiba uma sequência de variedades Riemannianas completas com curvatura seccional constante igual a 1 de modo que a sequência dos volumes seja uma sequência que converge a zero.

Demonstração.

- (a) (i) Para ver que G age por isometrias usamos o mesmo argumento que no exercício anterior: denote agora por $\eta = g + i\omega$ a forma hermitiana canônica de \mathbb{C}^2 . Basta mostrar que $h : S^3 \rightarrow S^3$ preserva η . Nesse caso fica mais fácil usar a definição de η como somando as entradas dos vetores (conjugando as entradas do segundo vetor):

$$\begin{aligned}
 \eta(h(z_1, z_2), h(w_1, w_2)) &= \eta\left(\left(e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1, e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_2\right), \left(e^{\frac{2\pi i}{q}} w_1, e^{\frac{2\pi i r}{q}} w_2\right)\right) \\
 &= e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1 \overline{e^{\frac{2\pi i}{q}} w_1} + e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_2 \overline{e^{\frac{2\pi i r}{q}} w_2} \\
 &= e^{\frac{2\pi i}{q}} e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1 \overline{w_1} + e^{\frac{2\pi i r}{q}} e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_2 \overline{w_2} \\
 &= \left|e^{\frac{2\pi i}{q}}\right|^2 z_1 \overline{w_1} + \left|e^{\frac{2\pi i r}{q}}\right|^2 z_2 \overline{w_2} \\
 &= z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} \\
 &= \eta((z_1, z_2), (w_1, w_2))
 \end{aligned}$$

É claro que $h^q = \text{id}$. Também é simples conferir que a ação é discreta: como a órbita é finita, defina d como sendo a mínima distância entre os elementos da órbita de qualquer ponto. As bolas de raio $d/2$ são disjuntas baixo a ação de G .

Para conferir que a ação é própria de acordo à definição dada em aula devemos ver que dadas duas órbitas, existe uma vizinhança de qualquer uma delas que não intersecta a outra. Novamente como a ação é finita podemos tomar a mínima distância entre todos os pontos das duas órbitas para produzir um raio tão pequeno que as bolas com esse raio são a vizinhança desejada.

- (ii) Para mostrar que todas as geodésicas de S^3/G são fechadas usamos as geodésicas de S^3 , que são círculos máximos. Como a projeção quociente é uma isometria local, sabemos que toda geodésica de S^3/G corresponde com um círculo máximo. É claro que esses círculos são curvas fechadas em S^3 , ou seja, conjuntos compactos. Como a projeção é contínua, a imagem de cada uma deve ser compacta, ou seja, uma curva fechada.

Para achar duas geodésicas em S^3/G com comprimentos diferentes, buscamos uma curva que “feche antes do que outra”. Note que a relação de equivalência no quociente é

$$(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2) \iff \exists n \text{ tal que } h^n(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2)$$

ou seja se

$$\left(e^{\frac{n2\pi i}{q}} z_1, e^{\frac{n2\pi i r}{q}} z_2\right) = (z'_1, z'_2) \quad (5)$$

Lembre que as geodésicas da esfera são da forma $\gamma(t) = P \cos t + Q \sin t$ para

$P, Q \in S^3$. Isso significa que

$$\begin{aligned}\gamma_{z_1, z_2}(t) &:= e^{it}(z_1, z_2) = (\cos t + i \sin t)(z_1, z_2) \\ &= \cos t(z_1, z_2) + \sin t(iz_1, iz_2)\end{aligned}$$

é uma geodésica. É claro que essa geodésica fecha em $t = 2\pi$, mas no quociente pode fechar antes. Nosso objetivo é achar um t tal que

$$\gamma(t) = h^n(z_1, z_2), \quad \text{para alguma } n \leq q-1.$$

A dificuldade aqui é que h modifica as duas entradas de formas diferentes, então a solução natural é considerar as geodésicas associadas a $(z_1, 0)$ e $(0, z_2)$.

No primeiro caso fica que

$$\gamma_{z_1, 0}\left(\frac{2i\pi}{q}\right) = \left(e^{\frac{2i\pi}{q}} z_1, 0\right) = h(z_1, 0) = (z_1, 0) = \gamma_{z_1, 0}(0)$$

ou seja, $\gamma_{z_1, 0}$ fecha em $t = \frac{2i\pi}{q}$.

Agora pegue $(0, z_2)$. A situação agora é que, para $1 \leq n \leq q-1$,

$$h^n(0, z_2) = \left(0, e^{rn\frac{2i\pi}{q}} z_2\right), \quad \text{quanto que} \quad \gamma\left(n\frac{2i\pi}{q}\right) = \left(0, e^{n\frac{2i\pi}{q}} z_2\right).$$

Então queremos que esses dois pontos sejam o mesmo, ou seja, que

$$\begin{aligned}e^{rn\frac{2i\pi}{q}} &= e^{n\frac{2i\pi}{q}} \implies e^{2i\pi\frac{r n - n}{q}} = 1 \\ &\implies \frac{n(r-1)}{q} \in \mathbb{Z} \\ &\implies n(r-1) \equiv 0 \pmod{q}\end{aligned}$$

Afirmção Existem escolhas de q e r tais que $n(r-1) \equiv 0 \pmod{q} \implies n > 1$.

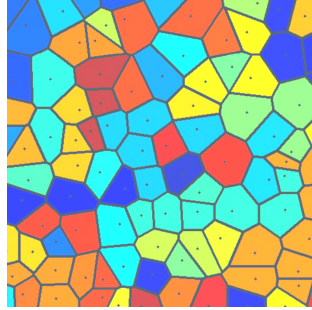
Infelizmente isso não é verdadeiro em geral. Porém, suspeito que não para todas as escolhas de q e r o resultado vai ser certo. Para outras, como por exemplo $q = 7$ e $r = 5$, a afirmação é válida: $n > 1$ já que $r-1 = 4$ não divide a 7. Nesses casos, concluímos que essa curva não pode fechar no mesmo que tempo que a primeira curva exibida, e portanto tem comprimento maior.

- (b) Intuitivamente, o volume de um quociente discreto é o volume do domínio fundamental, que é a região $D \subset M$ mais pequena tal que $G \cdot D = M$. Se conseguimos definir formalmente D , concluímos dizendo que como π é um quociente riemanniano, $\text{Vol } D = \text{Vol } S^3/G$ e portanto

$$\text{Vol}(S^3/G)|G| = \text{Vol}(S^3) \implies \text{Vol } S^3/G = \frac{1}{q} \text{Vol } S^3$$

Uma construção formal do domínio D pode ser feita a traves da “Voronoi cell” (cf. Complex manifolds in dimension 1, lecture 14): para qualquer espaço métrico M e subconjunto discreto $\{p_i\} \subset M$, a *Voronoi cell* associada a p_i é

$$D_i := \{z \in M : d(z, p_i) \leq d(z, p_j) \forall j \neq i\}$$



Para finalizar o argumento pegue D como a Voronoi cell da órbita de qualquer ponto $p \in M$. Note que pode sim ter dois elementos na mesma classe de equivalência dentro de D . Porém, nesse caso eles devem ficar na fronteira ∂D já que G age por isometrias. Para concluir note que $\pi|_{\text{Int } D}$ é uma isometria, e portanto $\text{Vol } D = \text{Vol } S^3/G$ como queríamos.

- (c) Lembre a pergunta: *exibir uma sequência de variedades Riemannianas completas com curvatura constante igual a 1 de modo que a sequência dos volumes seja uma sequência que converge a zero*. A resposta natural é S^3/G_q onde G_q é o grupo que determina o espaço lenticular, podendo mudar o valor de r livremente desde que para cada q fique r primo relativo com q .

Então só falta mostrar que a curvatura seccional de S^3/G é constante igual a 1, e que é completa. O último é imediato porque S^3 é completa. Para ver o primeiro usamos de novo o exercício 10(b) que diz que para $X, Y \in \mathfrak{X}(S^3/G)$, $\sigma = \text{span}\{X, Y\}$ e $\bar{\sigma} = \text{span}\{\bar{X}, \bar{Y}\}$,

$$K(\sigma) = \bar{K}(\bar{\sigma}) + \frac{3}{4} \left| [\bar{X}, \bar{Y}]^v \right|^2$$

onde \bar{K} é a curvatura de S^3 , que 1. Ou seja, queremos ver que

$$[\bar{X}, \bar{Y}]^v = 0.$$

Mas isso segue de que a ação é discreta! Temos uma decomposição $TS^3 \cong \kappa \oplus \pi^*T(S^3/G)$, onde κ é o kernel de π_* . Como a dimensão do grupo é zero, a dimensão do espaço lenticular é 3, e o kernel dever ter dimensão zero. Então não tem componentes verticais em geral. (Então aprendi que a curvatura seccional é preservada em quocientes sob ações discretas.)

□

Exercício 3 Encontre um exemplo de variedade suave que admite uma métrica Riemanniana com curvatura escalar positiva, mas não admite uma métrica Riemanniana com Ricci positivo.

Solução. É parecida à solução de “Hadamard não vale para curvatura escalar” que o Rafael diu na monitoria: pegue \mathbb{H}_{100}^2 , i.e. espaço de curvatura seccional constante negativa e pequeníssima, e faça produto com uma esfera. Então a curvatura escalar é positiva porque é a soma dos pullbacks das curvaturas escalares, que coincidem com as curvaturas seccionais. Porém, a curvatura de Ricci, que também é a soma dos pullbacks das curvaturas de Ricci, não pode ser positiva porque em qualquer ponto podemos pegar um vetor cuja componente em S^2 é zero, e a componente hiperbólica vai dar um número negativo. Para confirmar isso último lembre a definição de Ric negativo ou positivo: é a definição para uma forma bilinear, que está dada como o signo da forma avaliada no mesmo vetor nas duas entradas. Então só note que $\text{Ric}(X, X) = \sum K(E_i, X) < 0$.

□

Exercício 4 Encontre um exemplo de variedade suave que admite uma métrica Riemanniana com Ricci positivo, mas não admite uma métrica Riemanniana com curvatura seccional positiva.

Solução. $S^2 \times S^1$, porque pelo teorema de Synge, se $S^2 \times S^1$ admitisse uma métrica com $K > 0$, teria que ter $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}_2$ porque tem dimensão ímpar e é orientável. A métrica produto tem Ricci positivo já que $\text{Ric } S^2 > 0$, e, como no exercício anterior, sabemos que Ricci de um produto é a soma dos pullbacks das Ricci’s em cada componente.

□

8 Variações de Energia

Exercício 5 Sejam (M^n, g) completa, conexa e com curvatura positiva e A, B subvariedades totalmente geodésicas e compactas tais que $\dim A + \dim B \geq n$. Mostre que $A \cap B \neq \emptyset$.

Solução. Suponha que a interseção não é vazia. Então existe uma geodésica minimizante não trivial que minimiza a distância entre A e B . Sabemos que essa geodésica intersecta tanto A quanto B ortogonalmente. Queremos ver que $E''(0) < 0$, ou seja que γ não pode ser minimizante, uma contradição.

Suponha que conseguimos construir uma variação de γ tal que todos os pontos iniciais $f(s, 0)$ estão em A , e o mesmo acontece com os pontos finais, i.e. $f(s, \ell) \in B$. Então as derivadas das curvas $f(s, 0)$ e $f(s, \ell)$ em $s = 0$ são perpendiculares a $\gamma'(0)$ e $\gamma'(\ell)$. Ou seja, temos que $\langle \gamma'(0), \nabla_{\partial_s} V \rangle|_0^\ell = 0$.

Suponha ainda que essa variação tem campo variacional paralelo. Então acabou porque a segunda fórmula da variação diz que

$$E''(0) = - \int_0^\ell \langle R_{\gamma'} V, V \rangle < 0$$

Vamos construir essa variação. O passo inicial é fácil: pegamos qualquer vetor $v \in T_a A$ e transportamos paralelamente ao longo de γ para obter o campo paralelo $V \in \mathfrak{X}_\gamma$. Como A é totalmente geodésica, a variação $f(s, t) := \exp_{\gamma(0)}(sV(0))$ fica dentro de A .

Para concluir basta ver que $V(\ell) \in T_b B$, já que B também é totalmente geodésica. Isso segue da última hipótese. Podemos realizar esse processo para cada vetor básico de $T_a A$, obtendo $\dim A$ vetores linearmente independentes em $T_b B$ (já que o transporte paralelo é uma isometria). Se nenhum deles ficasse em $T_b B$, poderíamos construir um espaço de dimensão $\dim A$ estritamente contido em $T_b M \setminus T_b B$, absurdo pois isso implicaria que $\dim A < \text{codim } B$, porém, $\dim A + \dim B \geq n$.

Edit. Depois de reler a prova do exercício seguinte, parece que não era necessário usar que γ intersecta ortogonalmente A e B , pois a variação que usei foi por geodésicas, então $\nabla_{\partial_s} V = 0$. Então fiquei com a dúvida de que parece que não usei compacidade de A e B . \square

Exercício 6 Seja M^{2n} uma variedade Riemanniana de dimensão par, completa, orientável e com curvatura seccional $K > 0$. Seja γ uma geodésica fechada em M de comprimento $\ell(\gamma)$. Mostre que existem curvas livremente homotópicas a γ em M , arbitrariamente próximas de γ , que possuem comprimento menor que $\ell(\gamma)$.

Sugestão. Estude variações de γ com campo variacional paralelo ao longo de γ .

Solução. Considere qualquer vector unitário ortogonal a $\dot{\gamma}$, defina $V \in \mathfrak{X}_\gamma$ como sendo o transporte paralelo de v ao longo de γ . Note que $\dot{V} = 0$. Defina a variação $f(s, t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t)$. Note que $\nabla_{\partial_s} f_s = 0$.

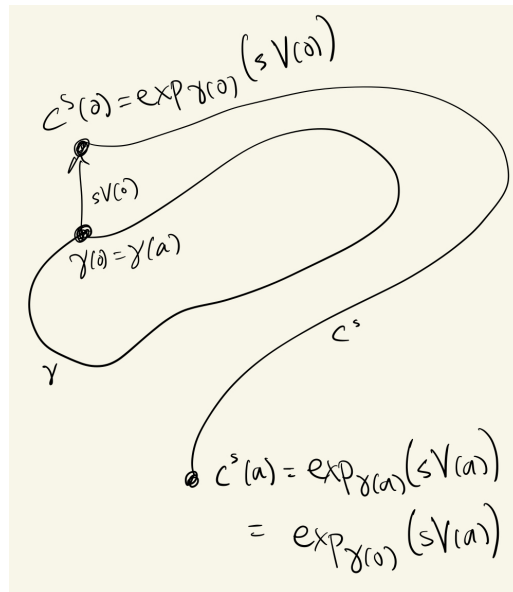
A segunda fórmula da variação nos diz que

$$E''(0) = - \int_0^a \langle R_{\dot{\gamma}} V, V \rangle = - \int_0^a K < 0$$

já que $K > 0$. Como γ é uma geodésica, temos que para s pequeno

$$\frac{1}{a} \ell^2(c^s) \leq E(s) < E(0) = \frac{1}{a} \ell^2(\gamma)$$

Note que essa variação pode não preservar o fechamento das curvas. Para resolver isso olhemos ao seguinte desenho:



Fica claro que se $V(0) = V(a)$ as curvas c^s são fechadas para toda s . Então a condição que precisamos é que

$$P_{0,a}^\gamma V(0) = V(a)$$

onde P é o transporte paralelo. Dito de outra forma, basta ver que P tem um ponto fixo—além de $\gamma'(0) = \gamma'(a)$, que já é um ponto fixo. Esse argumento é uma imitação da prova do teorema de Weinstein: como P preserva orientação, o determinante dele deve ser positivo, ou seja, o produto dos seus autovalores deve ser positivo. Restringindo-nos ao subespaço $\gamma'(0)^\perp$, que tem dimensão ímpar, concluímos que para que o produto dos autovalores de P seja positivo, deve ter pelo menos um que seja 1. \square

Lista 7

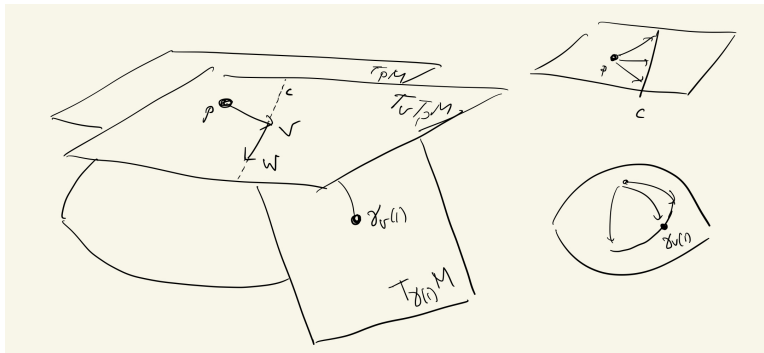
Exercício 1 (Lema de Klingenberg, [dC79], Cap. X, Exer. 1) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leq K_0$ onde K_0 é uma constante positiva. Sejam $p, q \in M$ e seja γ_0 e γ_1 duas geodésicas distintas unindo p a q com $\ell(\gamma_0) \leq \ell(\gamma_1)$. Admita que γ_0 é homotópica a γ_1 , isto é, existe uma família contínua de curvas α_t , $t \in [0, 1]$ tal que $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_1 = \gamma_1$. Prove que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\ell(\gamma_0) + \ell(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}$$

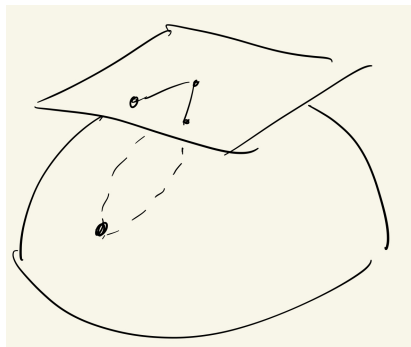
Solução. Primeiro vou mostrar como usar o teorema de Rauch para assegurar que para qualquer $p \in M$, a exponencial em $p \in M$ não possui pontos críticos na bola de raio $\pi/\sqrt{K_0}$ centrada em $0 \in T_p M$.

O seguinte argumento mostra que qualquer geodésica γ com velocidade unitária partindo de p não possui pontos conjugados antes de alcançar comprimento $\pi/\sqrt{K_0}$. Fixe um campo de Jacobi $J \in \mathfrak{X}_\gamma^J$ tal que $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. Para aplicar Rauch, considere uma geodésica unitária $\tilde{\gamma}$ em $S_{K_0}^n$, a esfera de curvatura constante K_0 , e um campo de Jacobi $\tilde{J} \in \mathfrak{X}_{\tilde{\gamma}}^J$ tal que $\tilde{J}(0) = 0$, $\langle \tilde{J}, \tilde{\gamma}' \rangle = 0$ e $|\tilde{J}'(0)| = |J'(0)|$. (\tilde{J} existe por ser a solução da equação de Jacobi junto com a condição de ortogonalidade com $\tilde{\gamma}'$.) Como $K \leq K_0$, pelo lema de Rauch concluímos que $0 \leq |\tilde{J}| \leq |J|$ para $t < \pi/\sqrt{K_0}$.

Agora vou argumentar por que isso assegura que \exp_p não pode ter pontos críticos em $p \in M$. Por contrapositiva, suponha que \exp_p tem um ponto crítico em $v \in T_p M$ e vamos mostrar que existe um ponto conjugado q a p ao longo de γ . Como v é um ponto crítico de \exp_p , existe um vetor não nulo $w \in \ker d_v \exp_p$. Considere uma curva $c(s)$ tal que $c(0) = v$ e $c'(0) = w$. Temos a seguinte variação por geodésicas de γ : $\gamma_{c(s)}(t) = \exp_p(tc(s))$. Note que em $t = 0$ todas as geodésicas ficam em p , pelo que o campo variacional J se anula em p . O fato de que $d_v \exp_p(w) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_p(c(s)) = 0$, é exatamente o fato de que o campo variacional J se anula em $q = \gamma_v(1)$.



Portanto, \exp_p é um difeomorfismo local sobrejetivo em $B_{\pi/\sqrt{K_0}}$, mas pode não ser injetivo:



Note que podemos levantar tanto γ_0 quanto γ_1 por ser geodésicas, i.e. pegamos os vetores velocidade de cada uma e as linhas que eles geram no espaço tangente a p ; é claro que essas curvas são levantamentos de \exp_p . Note que se levantássemos a homotopia completa, necessariamente $\gamma_0 = \gamma_1$. Isso segue simplesmente de que não pode ter uma família contínua de curvas começando em um ponto e terminando em outro.

Dúvida Como estão construídos os levantamentos das curvas perto de γ_0 ? Em [dC79] simplesmente se afirma que é claro que podemos levantar as curvas perto de γ_0 , mas que não será possível levantar a homotopia completa.

Eu só sei que podemos levantar γ_0 e γ_1 usando as velocidades delas e o fato de que \exp_p manda esses vetores em essas curvas; mas as outras curvas da homotopia não são geodésicas e esse argumento não aplica.

Para entender melhor a construção consultei [dC12]. Cap. 5., sec. 6. Prop. 2, que estabelece a existência e unicidade dos levantamentos de curvas (ou “caminhos”) *no caso das aplicações de recobrimento*. A prova da unicidade parece válida para homeomorfismos locais, e como é parecida ao argumento de achar um conjunto aberto e fechado dentro do intervalo (como na sugestão do nosso exercício), achei bom passar em limpo. Mas **pode pular**, essa prova não é importante para a discussão que segue.

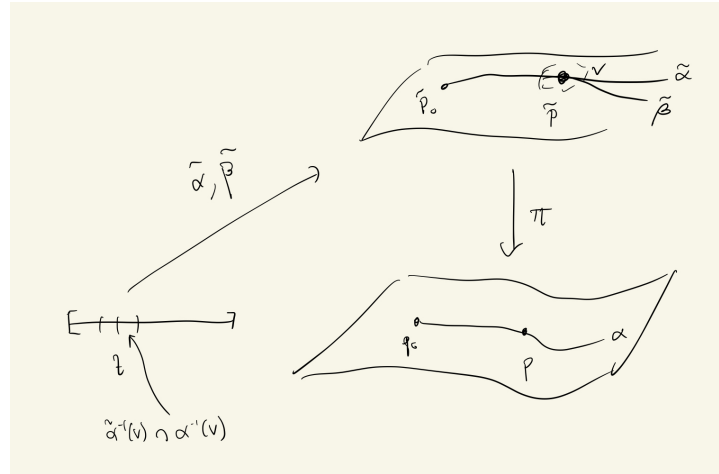
Unicidade de levantamentos para aplicações de recobrimentos Seja $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ é homeomorfismo local, $\alpha : [0, \ell] \rightarrow B$ um caminho em B e $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ um ponto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Se existe um levantamento $\tilde{\alpha} : [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}$ de α com origem em \tilde{p}_0 , **ele é único**.

Demonstração. Suponha que existe outro levantamento $\tilde{\beta} : [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}$ de α com origem em \tilde{p}_0 . Seja $A \subset [0, \ell]$ o conjunto de pontos onde $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ coincidem. Ele é fechado porque se pegamos uma sequência de pontos dentro de ele, por continuidade tanto de $\tilde{\alpha}$ quanto de $\tilde{\beta}$ o ponto limite irá ficar dentro de A .

Para ver que é aberto considere um ponto $t \in A \subset I$. Vamos mostrar que existe uma vizinhança dele totalmente contida em A . Defina $\tilde{p} := \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t)$ (que vale porque peg-

amos $t \in A$). Pegue uma vizinhança V de \tilde{p} onde π seja um homeomorfismo. Como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são contínuas, as imagens inversas de V sob $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ podem ser intersectadas para produzir uma vizinhança I_t de t .

Só falta ver que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ coincidem em I_t . Como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são levantamentos, sabemos que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \pi \circ \tilde{\beta}$. Como π é um homeomorfismo em V , podemos inverter ele para concluir que $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ nessa vizinhança.



□

Porém o que realmente nos compete aqui é a existência dos levantamentos. O problema é que isso não vale para difeomorfismos (ou homeomorfismos) locais arbitrários. A prova de existência de levantamentos em [dC12] para aplicações de recobrimento pode ser resumida assim:

- Para cada $t \in I$ podemos considerar uma **vizinhança distinguida** de $\alpha(t)$. Ou seja, uma vizinhança de $V_t \ni \alpha(t)$ tal que $\pi^{-1}(U_t)$ é uma união disjunta de abertos de \tilde{M} onde π se restringe a um homeomorfismo. Note que isso não existe em nosso caso; apenas podemos garantir a existência de uma vizinhança de $\alpha(t)$ onde π se restringe a um difeomorfismo.
- Usando a compacidade do intervalo junto com a continuidade de α podemos cobrir o caminho $\alpha(I)$ com uma quantidade finita de abertos.
- Considere o primeiro deles, I_0 . Como π se restringe a um homeomorfismo nessa vizinhança, podemos levantar esse pedacinho da curva α como sendo simplesmente a preimagem de $\alpha(I_0)$ sob π a algum dos abertos disjuntos que são a preimagem da vizinhança distinguida. Isso vale para nosso difeomorfismo local na preimagem do aberto em que \exp_p é um difeomorfismo.

- (d) Considere agora I_1 , o seguinte intervalo. Deve existir um ponto $t \in I_1 \cap I_0$. A imagem inversa de π em V_1 é uma união disjunta de abertos distinguidos, **um dos quais deve intersectar** V_0 simplesmente por definição de conjunto. O lance é que **toda** a imagem inversa de V_0 é uma união de abertos distinguidos e por isso podemos garantir que um deles intersecta o aberto distinguido onde começamos nosso levantamento.

No caso de \exp_p , embora podemos garantir que existe um aberto onde \exp_p se restringe a um homeomorfismo, não temos como garantir que essa vizinhança intersecta vizinhança onde começou o levantamento.

Continuando com a construção, como π se restringe a um homeomorfismo em V_1 podemos definir um levantamento novamente como a imagem inversa sob π .

Como já provamos unicidade e **os levantamentos coincidem num ponto**, o segundo levantamento coincide com o primeiro na interseção $I_0 \cap I_1$.

- (e) Podemos fazer esse processo para o número de intervalos, que é finito, obtendo um único levantamento de α .

Finalmente vamos dar uma olhada à prova do levantamento de homotopias para homeomorfismos locais com a propriedade de levantamento de curvas, Prop. 3 em [dC12], Cap. 5, Sec. 6. A estratégia é clara: dada uma homotopia no espaço base, definimos a homotopia no espaço total como sendo o levantamento de cada uma das curvas na base usando fortissimamente a propriedade de levantamento de curvas. A prova consiste em provar unicidade (análoga à unicidade de levantamentos de curvas) e a continuidade da homotopia levantada.

Então parece que essa prova não vai ajudar no nosso caso: **não vejo como garantir o levantamento de nenhuma curva além de γ_0 ou γ_1 , mesmo que esteja perto de γ_0 com respeito ao parâmetro da homotopia.**

Por fim, esse problema fica resolvido se fixamos nossa atenção só nos abertos que obtemos usando que \exp_p é um difeomorfismo local ao longo de γ_0 . Desse jeito conseguimos construir por pedaços, usando que \exp_p é um homeomorfismo em cada aberto e a unicidade dos levantamentos em cada interseção, um levantamento de qualquer curva que esteja completamente contida na união dos abertos gerados ao longo de γ_0 .

Note que esse processo pode ser feito de novo para qualquer curva que já tenhamos conseguido levantar. É tentador pensar que se todas as curvas da homotopia estivessem contidas em $B_{\pi/\sqrt{K_0}}(p) \subset M$ poderíamos levantar toda a homotopia. Porém,

afirmação (extra) nem todo difeomorfismo local tem a propriedade de levantamento de homotopias, i.e. dada uma homotopia $h : I \times I \rightarrow M$ e um levantamento da primeira curva, não temos como garantir que existe um levantamento da homotopia completa.

Contraexemplo. Considere

$$\begin{aligned} (0, 2) &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Considere uma homotopia entre um caminho constante e um caminho que dá 100 voltas ao círculo:

$$\begin{aligned} h : I \times I &\longrightarrow S^1 \\ h_s(t) &= e^{2\pi i 100st} \end{aligned}$$

O primeiro caminho $h_0(t)$ é o caminho constante 1. O último caminho $h_1(t)$ é o laço que dá 100 voltas ao círculo. É possível levantar o primeiro caminho, mas não o último:

$$\begin{array}{ccc} & & (0, 2) \\ & \nearrow \tilde{h} & \downarrow e^{2\pi i t} \\ I \times I & \xrightarrow{h} & S^1 \end{array}$$

se existisse um caminho $\tilde{h}_1(t)$ que comuta com a projeção, teríamos

$$e^{2\pi i \tilde{h}_1(t)} = e^{2\pi i 100t} \implies e^{2\pi i (\tilde{h}_1(t) - 100t)} = 1 \implies \tilde{h}_1(t) - 100t \in \mathbb{Z}$$

Então deve existir um número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{h}_1(t) = 100t + n$, absurdo, pois $\tilde{h}_1(t) \in (0, 2)$, e essa função começa em n e termina em $100 + n$. \square

Então **não podemos garantir que existe uma curva que sai da bola** $B_{\pi/\sqrt{K_0}}(p) \subset M$. Porém, como aponta Manfredo, podemos garantir que existem curvas arbitrariamente perto do bordo dela.

Então suponha que existe um $\varepsilon > 0$ que tal que o levantamento de toda curva (da nossa homotopia) que possa ser levantada esteja a distância $\geq \varepsilon$ do bordo de $B_{\pi/\sqrt{K_0}} \subset T_p M$. Isso muda completamente o cenário porque o espaço total agora é completo.

Lembre que a prova do teorema de Hadamard feita em sala recai sobre o seguinte lema:

lema 2 Seja $f : \tilde{M} \rightarrow M$ um difeomorfismo local, onde \tilde{M} é **completo**, e suponha que $|f_{*,p}v| \geq |v|$ para todo $v \in T_p M$ e todo $p \in M$. Então f levanta curvas e portanto é uma aplicação de recobrimento.

Mas isso não é exatamente o que precisamos, pois o novo domínio da exponencial, $B_\varepsilon(0)$, embora compacto, não é completo, pois ele tem bordo e o domínio maximal das geodésicas não é \mathbb{R} . Porém, a prova do lema 2 usa só a **completude métrica** do espaço total:

Prova do lema 2. Suponha que uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ pode ser levantada a uma curva $\tilde{\alpha} : [0, r) \rightarrow \tilde{M}$. Considere uma sequência $t_n \rightarrow r$, e as sequências $\alpha(t_n)$ e $\tilde{\alpha}(t_n)$. Note que $\alpha(t_n)$ é de Cauchy, pois $\alpha(r)$ está bem definido. Então $\tilde{\alpha}(t_n)$ também é de Cauchy:

$$d(\tilde{\alpha}(t_n), \tilde{\alpha}(t_m)) \leq \int_{t_n}^{t_m} |\tilde{\alpha}'| \leq \int_{t_n}^{t_m} |f_* \tilde{\alpha}'| = \int_{t_n}^{t_m} |(f \circ \tilde{\alpha})'| = \int_{t_n}^{t_m} |\alpha'|$$

Quando $n, m \rightarrow \infty$, o número da direita vai pra zero. Como \tilde{M} é completa, a sequência de Cauchy $\tilde{\alpha}(t_n)$ é convergente a um ponto $\tilde{\alpha}(r)$.

Isso mostra que o conjunto de parâmetros tais que α pode ser levantada é fechado. Mas também é aberto: se $\alpha(t)$ é levantado, como f é um difeomorfismo local, podemos levantar um vizinhança pequena de α definindo-a como a imagem inversa local de f . \square

A parte do argumento que prova que o conjunto de parâmetros levantáveis é fechado pode ser usado no nosso exercício para mostrar que podemos levantar qualquer curva cujo parâmetro seja um ponto limite do conjunto de curvas levantáveis; i.e. que **o conjunto de parâmetros de curvas levantáveis é fechado**.

Também é aberto: podemos achar uma vizinhança pequena de qualquer parâmetro tal que toda curva dentro dessa vizinhança esteja contida na união das vizinhanças onde \exp_p é um difeomorfismo local ao longo da curva levantável—como já fizemos antes.

Então o conjunto de curvas levantáveis seria todo o intervalo, absurdo, e concluímos que existem curvas cujos levantamentos estão arbitrariamente próximos a $\partial B_{\pi/\sqrt{K_0}}(0)$.

Nessa hora da nossa discussão já usamos a propriedade expansora da exponencial: $|d_v \exp_p w| \geq |w|$. Então repare: o tamanho dos vetores em cima é arbitrariamente próximo a $\pi/\sqrt{K_0}$. Então o comprimento das curvas em baixo está forçado a se aproximar ao mesmo número:

$$\ell(\alpha) = \int_0^1 |\alpha'_t| = \int_0^1 |(\exp_p \circ \tilde{\alpha})'| = \int_0^1 |d_{\tilde{\alpha}} \exp_p(\tilde{\alpha}')| \geq \int_0^1 |\tilde{\alpha}'| = \ell(\tilde{\alpha}) > \frac{\pi}{\sqrt{K_0}} - \varepsilon$$

(em algum momento me esqueci de que a constante realmente era $2\pi/\sqrt{K_0}$...)

\square

Exercício 2 ([dC79], Cap. X, Exer. 2) Use o lema de Klingenberg do exercício anterior para provar o Teorema de Hadamard.

Solução. Suponha que M é uma variedade completa, simplesmente conexa e com curvatura positiva. Por completitude, sabemos que para qualquer $p \in M$ o domínio de \exp_p é todo $T_p M$. Como $K \leq 0$ sabemos que M não pode ter pontos conjugados, de modo que \exp_p é um difeomorfismo local. Também por completitude sabemos que \exp_p é sobrejetiva: qualquer ponto q está ligado a p mediante uma geodésica, e essa geodésica coincide com uma geodésica partindo de p dada como a imagem de uma reta em $T_p M$ sob \exp_p .

Portanto, o desafio é provar que \exp_p também é injetiva. Suponha que não é o caso, i.e. considere dois pontos v_1 e v_2 em $T_p M$ tais que $\exp_p v_1 = \exp_p v_2 := q$. As imagens das retas geradas por v_1 e v_2 sob \exp_p são duas geodésicas γ_1 e γ_2 em M ligando p e q .

Como M é simplesmente conexa, existe uma homotopia entre γ_1 e γ_2 . Podemos aplicar o lema de Klinenberg para obter uma curva α_{K_0} tal que

$$\ell(\gamma_1) + \ell(\alpha_{K_0}) \geq 2\pi/\sqrt{K_0}$$

para qualquer $K_0 > 0$. Isso mostra que o comprimento das curvas na homotopia não está limitado, o que não é possível já que a homotopia é uma função contínua definida em um compacto, pelo qual a sua imagem deve ser compacto e portanto limitado. \square

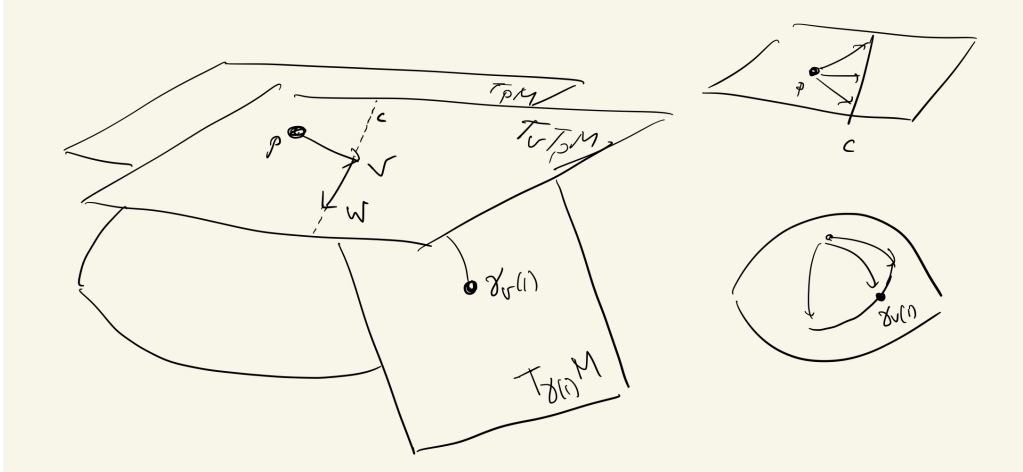
Dúvida Teve um comentário discutido na monitoria com respeito à necessidade de usar o teorema de Whitney para assegurar que a homotopia seja suave: não usei esse fato.

Exercício 3 ([dC79], Cap. X, Exer. 3) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não positiva. Prove que

$$|(d \exp_p)_v(w)| \geq |w|$$

para todo $p \in M$, $v \in T_p M$ e $w \in T_v(T_p M)$.

Solução. Considere novamente a figura que usei no exercício 1:



Vamos usar o teorema de Rauch para comparar um campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ no $T_p M$ com um campo de Jacobi ao longo da curva $\tilde{\gamma}(t) := \exp_p(tv)$. Pegue a variação no $T_p M$ dada por $f(t) := t(v + sw)$ onde estamos identificando $T_v T_p M$ com $T_p M$. É imediato que o campo variacional J é de Jacobi. De forma parecida, defina a variação $\tilde{f}(s, t) := \exp_p(t(v + sw))$. Note que \tilde{f} é uma variação por geodésicas e portanto o campo variacional \tilde{J} é de Jacobi. Mais explicitamente, os campos de Jacobi são dados por

$$J(t) = tw, \quad \tilde{J}(t) = d_{tv} \exp_p(tw)$$

Agora note que estamos nas condições do teorema de Rauch. Em primeiro lugar, é imediato que $J(0) = 0$ e $\tilde{J}(0) = 0$. Depois, $|J'(0)| = |w|$ e $|\tilde{J}'(0)| = |d_0 \exp_p(w)| = |w|$. Por último, a condição de ortogonalidade é consequência do lema de Gauss, pois as curvas “verticais” da variação em M percorrem esferas geodésicas.

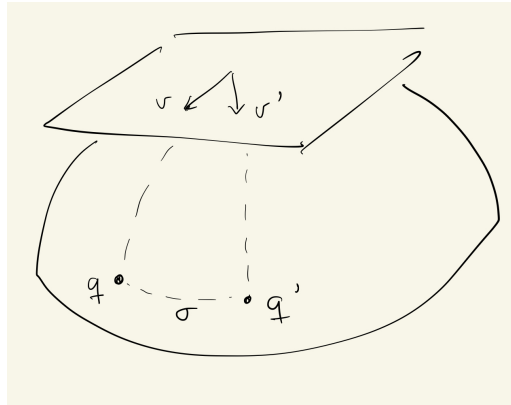
Como a curvatura seccional de M é não negativa, concluímos que

$$|tw| = |\tilde{J}| \leq |J| = |d_{tv} \exp_p tw|$$

para toda t , incluindo $t = 1$. □

Complemento Suponha adicionalmente que M é simplesmente conexa e prove que o mapa exponencial é uma expansão métrica, i.e. aumenta distâncias. Além disso, se M não é simplesmente conexa, o mapa exponencial pode não ser uma expansão métrica.

Solução. Considere um ponto arbitrário $p \in M$, dos vetores $v, v' \in T_p M$ e as imagens deles sob \exp_p , digamos q e q' . A distância entre q e q' é a norma do vetor velocidade de alguma geodésica minimizante σ tal que $\sigma(0) = q$ e $\sigma(1) = q'$. (Essa geodésica existe porque M é completa.)



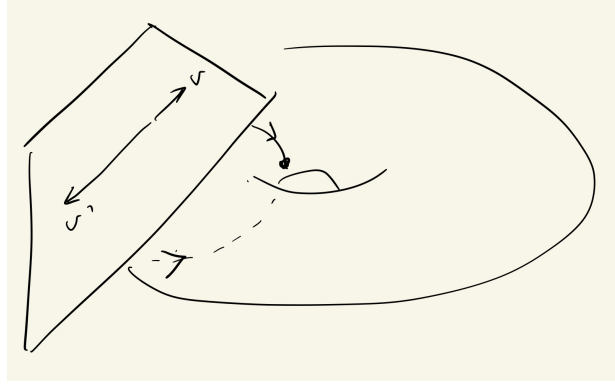
Queremos comprovar que essa curva σ é a curva “vertical” da variação por geodésicas do exercício anterior pegando $w := v' - v$. Essa curva que chamo de vertical é

$$\sigma(s) := \exp_p(v + sw) = \exp_p(v + s(v' - v))$$

(Ou seja, fixamos $t = 1$ e variamos s .) Então é claro que ela chega em q' no tempo $s = 1$. Então a construção do exercício anterior aplica, e para concluir só basta mostrar que σ é minimizante.

Se σ não for minimizante, teria que existir uma outra geodésica $\tilde{\sigma}$ ligando q e q' com comprimento menor. Como M é simplesmente conexa, essas duas curvas são homotópicas. Com um argumento análogo ao que usei no exercício 2, usando o lema de Klíenberg obtemos uma contradição usando que a curvatura de M é não positiva.

Para um contraexemplo simples podemos usar o toro plano, que tem curvatura não positiva. É claro que a exponencial não é uma expansão métrica porque não é injetiva.



□

Exercício 4 Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica em uma variedade Riemanniana M . Prove que se γ é minimizante, então γ não possui pontos conjugados em $(0, a)$. Encontre um exemplo de geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ sem pontos conjugados que não é minimizante.

Solução. Primeiro mostro um exemplo de geodésica sem pontos conjugados que não é minimizante. Considere o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Ele tem curvatura seccional constante igual a zero por ser um quociente de \mathbb{R}^2 . Isso significa que a equação de Jacobi vira $J'' + R_{\gamma} J = 0$. Pegando um marco referencial paralelo $E_i \in \mathcal{X}_\gamma$, vemos que as funções coordenadas de J são lineares:

$$J'' = (J^i E_i)'' = (J^i)'' E_i$$

ou seja, $J^i = t u^i + v^i$. Agora sim, como $J(t) = 0$ então $v^i = 0$ para toda i , e como $J(t_{\text{final}}) = 0$, também $u^i = 0$ e portanto $J = 0$. Isto é: não tem pontos conjugados em espaços de curvatura constante igual a zero.

Porém, tem geodésicas se intersectam em $S^1 \times \mathbb{R}$, que portanto não são minimizantes depois dos pontos de interseção.

Agora vamos mostrar que se γ é uma geodésica minimizante, não possui pontos conjugados em $(0, a)$. Suponha que $b \in (0, a)$ é tal que $\gamma(b)$ é conjugado a $\gamma(0)$. Seguindo a prova do teorema de Jacobi dada em aula, vamos mostrar que existe uma variação própria diferenciável por partes de γ tal que $E''(0) < 0$ onde E denota o funcional de energia.

Considere o campo de Jacobi J tal que $J(0) = 0, J(b) = 0$ que existe porque $\gamma(b)$ é conjugado a $\gamma(0)$. Estenda esse campo a \bar{J} como sendo 0 depois de b . Considere um outro campo $Z \in \mathcal{X}_\gamma$. Temos que

$$I_a(\bar{J} + Z, \bar{J} + Z) = I_a(\bar{J}, \bar{J}) + 2I_a(\bar{J}, Z) + I_a(Z, Z) \quad (6)$$

onde a primeira parcela se anula porque \bar{J} satisfaz a equação de Jacobi antes de b e é constante zero depois de b . (E usamos que I_a é simétrica, que segue das simetrias de R .)

Agora vou fazer uma pausa para lembrar como se escreve a forma do índice em geral. Por definição, a forma de índice é

$$I_a(V, W) := \int_0^a \langle V' W' \rangle - \int_0^a \langle R_{\gamma'} V, W \rangle$$

para quaisquer campos $V, W \in \mathfrak{X}_\gamma$.

Então reescrevemos isso usando que a conexão ao longo de γ é métrica:

$$\begin{aligned} \langle V, W' \rangle' &= \langle V', W' \rangle + \langle V, W'' \rangle \\ \implies \langle V', W' \rangle &= \langle V, W' \rangle' - \langle V, W'' \rangle \end{aligned}$$

Substituindo obtemos que

$$\begin{aligned} I_a(V, W) &= \int_0^a \langle V, W' \rangle' - \int_0^a \langle V, W'' \rangle - \int_0^a \langle R_{\gamma'} V, W \rangle \\ &= \langle V, W' \rangle \Big|_0^a - \int_0^a \langle V, W'' \rangle - \int_0^a \langle R_{\gamma'} W, V \rangle \\ &= \langle V, W' \rangle \Big|_0^a - \int_0^a \langle V, R_{\gamma'} W \rangle \end{aligned}$$

Voltando ao nosso exercício, fixemos nossa atenção na parcela que está no meio em eq. (6). Pegando $V = Z$ e $W = \bar{J}$ obtemos

$$\begin{aligned} I_a(\bar{J}, Z) &= \int_0^a \left\langle Z, \bar{J}'' + R_{\gamma'} \bar{J} \right\rangle + \int_0^a \langle Z, \bar{J}' \rangle' \\ &= \int_0^b \langle Z, \bar{J}' \rangle' + \int_b^a \langle Z, \bar{J}' \rangle' = \langle Z(b), \bar{J}'(b) \rangle \end{aligned}$$

Agora pegue $\delta > 0$ arbitrário e considere a vizinhança de b dada por $(b - \delta, b + \delta)$. Defina Z como sendo

$$Z := \bar{J}\varphi$$

onde φ é uma função suave que vale 1 em b e zero fora de $(b - \delta, b + \delta)$.

Então fica claro que $I_a(Z, Z)$ vai ser tão pequena quanto quisermos. Note ainda que a conta que já fizemos com a quantidade $I_a(\bar{J}, Z)$ fica inalterada com essa restrição em Z ; não temos problemas de diferenciabilidade e as fórmulas continuam validas.

Concluimos que

$$I_a(\bar{J} + Z, \bar{J} + Z) = -\langle \bar{J}(b)', \bar{J}(b)' \rangle + \text{constante pequena}$$

Segue que γ não é um ponto mínimo da energia, e portanto não minimiza distância. \square

Exercício 6 ([dC79], Exer. 1, Cap XI) Prove a seguinte versão do Teorema de Bonnet-Myers: se M é completa e a curvatura seccional K satisfaz $K \geq \delta > 0$, então M é compacta e $\text{diam } M \leq \pi/\sqrt{\delta}$, usando o Teorema de Comparação de Rauch e o teorema de Jacobi.

Solução. Vamos mostrar que nenhuma geodésica pode ser minimizante depois de alcançar comprimento $\pi/\sqrt{\delta}$. Buscando uma contradição, suponha que γ é uma geodésica parametrizada por comprimento de arco até algum tempo maior que $\pi/\sqrt{\delta}$. Escolha um campo de Jacobi J ao longo de γ ortogonal a γ' e tal que $J(0) = 0$. Compare esse campo com um outro campo \tilde{J} ao longo de alguma geodésica $\tilde{\gamma}$ em S_δ^n satisfazendo que $\tilde{J}(0), \tilde{J} \perp \tilde{\gamma}'$ e $|J| = |\tilde{J}|$. (De novo, esse campo existe porque é a solução da equação de Jacobi em S_δ^n junto com a condição de ortogonalidade.)

Como $K \geq \delta$ e $\tilde{\gamma}$ não tem pontos conjugados, concluímos que $|J| \leq |\tilde{J}|$. Mas $\tilde{J}(\pi/\sqrt{\delta}) = 0$, de modo que também J se anula quando γ nesse tempo. Então J é um campo de Jacobi ao longo de γ , e pelo exercício anterior não é minimizante depois desse tempo. Como γ é parametrizada por comprimento de arco, segue o resultado. (O fato de M ser compacta segue de que ela tem um diâmetro finito, pois ela é um conjunto fechado e limitado.) \square

Observação A diferença com o teorema de Bonnet-Myers é que aquele é para Ric.

Exercício 7 Suponha M^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional $K_M \geq 1$. Suponha que γ é uma geodésica em M de comprimento $\ell(\gamma) > \pi$. Prove que $i(\gamma) \geq n - 1$, onde $i(\gamma)$ denota o índice de Morse de γ .

Solução. Lembre o seguinte fato geral mostrado em aula:

$$\dim\{J \in \mathfrak{X}_\gamma^J : J(0) = 0, J \perp \gamma'\} = n - 1 \quad (7)$$

Isso segue das seguintes observações:

- (a) $\dim \mathfrak{X}_\gamma^J = 2n$ porque são soluções de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, i.e. cada campo de Jacobi está determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$.
- (b) $\dim\{J \in \mathfrak{X}_\gamma^J : J(0) = 0\} = n$.
- (c) $\dim\{J \in \mathfrak{X}_\gamma^J : J \perp \gamma'\} = 2n - 2$. Para confirmar isso note que pelas simetrias de R e a equação de Jacobi tem-se que $\langle J, \gamma' \rangle'' = 0$, pelo que $\langle J, \gamma' \rangle = a + bt$ para dois números reais a, b . Segue que qualquer $J \in \mathfrak{X}_\gamma^J$ se escreve como $J(t) = a\gamma'(t) + b\gamma'(t) + \hat{J}(t)$ para algum \hat{J} perpendicular a γ' . (Supondo que $|\gamma'| = 1$.) Então se $J \perp \gamma$, temos que $a = b = 0$, então tiramos dois números do $2n$ que tínhamos.
- (d) Segue eq. (7).

Lembre também que o teorema do índice de Morse (cf. [dC79]) diz que o índice $i(\gamma)$ é igual ao número de pontos $\gamma(t)$, $0 < t < a$ conjugados a $\gamma(0)$ ao longo de γ contando a multiplicidade (a multiplicidade de um ponto conjugado é a dimensão do espaço de campos de Jacobi que se anulam nos extremos).

Portanto para nosso exercício basta achar $n - 1$ pontos conjugados a $\gamma(0)$. Isso fica resolvido tomando $n - 1$ campos de Jacobi ortogonais a γ' , que sabemos que existem pelo comentário anterior. Aplicando para cada um deles o teorema de comparação de

Rauch como no exercício anterior comprovamos que eles se anulam quando γ atinge comprimento π , obtendo assim os $n - 1$ pontos conjugados que buscávamos.

Note que γ pode ter ainda mais pontos conjugados depois de $\gamma(\pi)$, de modo que o índice $i(\gamma)$ pode ser ainda maior. \square

Dúvida Estudando a prova do teorema do índice de Morse, usamos que kernel da forma do índice I_γ consiste exatamente dos campos de Jacobi (usando conta que fiz no exercício 4, e graças à simetria de I_γ). Então *parece* que não estamos buscando $n - 1$ campos de campos de Jacobi linearmente independentes: estamos buscando $n - 1$ campos linearmente independentes tais que I_α restrita ao espaço gerado por esses campos seja negativa definida.

References

- [dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [dC12] M.P. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superficies*. Textos universitários. SBM, 2012.
- [Hal15] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, New York, NY, second edition edition, 2012.
- [Lee19] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.
- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Princeton University Press, 1974.
- [Pet16] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 3 edition, 2016.