Daniel González Casanova Azuela
Prof. Luis Florit github.com/danimalabares/rg

Exercícios de Geometria Riemanniana

Índice

1 Lista 1

Exercício 2 Seja $f : M^n \to N^m$ um mapa suave. Os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ são ditos f-relacionados se $df_p X_p = \tilde{X}_{f(p)}$, $\forall p \in M$. Mostre que se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são, respetivamente, f-relacionados com $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ então $[X, Y]$ é f-relacionado com $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

Solução. Pegue $p \in M$. Queremos ver que

$$f_{*,p}[X, Y] \overset{\text{quero}}{=} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)}.$$

Pegue $g \in \mathcal{F}(N)$.

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)} &\overset{\text{def}}{=} \tilde{X}_{f(p)}(\tilde{Y}g) - \tilde{Y}_{f(p)}(\tilde{X}g) \\
&\overset{\text{hip}}{=} f_{*,p}(X_p)(\tilde{Y}g) - f_{*,p}(Y_p)(\tilde{X}g) \\
&= X_p\Big((\tilde{Y}g) \circ f\Big) - Y_p\Big((\tilde{X}g) \circ f\Big) \\
&\overset{\text{hip}}{=} X_p\Big(\big(f_{*,p}(Y)\big)g \circ f\Big) - Y_p\Big(\big(f_{*,p}(X_p)\big)g \circ f\Big)
\end{aligned}$$

□

2 Exercícios do do Carmo

2.1 Capítulo 0

Exercise 2 Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não seja).

Solution. Es porque la diferencial de los cambios de coordenadas está dada por la identidad y una matriz lineal. Sí, porque por definición las trivializaciones locales de TM preservan la primera coordenada **y** son isomorfismos lineales en la parte del espacio vectorial. Entonces queda que

$$d(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & \xi \in \mathsf{GL}(n) \end{array}\right)$$

pero no estoy seguro de por qué ξ preservaría orientación, i.e. que tenga determinante positivo... a menos de que... □

Exercise 5 (Mergulho de $P^2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^4$) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \qquad (x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Oberve que a restrição $\varphi := F|_{S^2}$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \qquad [p]\text{=clase de equivalência de } p = \{p, -p\}$$

Prove que

(a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.

(b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de $\mathbb{R}P^2$, isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

Solution.

(a) Considere a carta $\{z = 1\}$. A representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, xy, x, y)$$

cuja derivada como mapa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ é

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é injetiva. Agora pegue a carta $\{x = 1\}$. Então a representão coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(y, z) \longmapsto (1 - y^2, y, z, yz)$$

e tem derivada

$$\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & y \end{pmatrix}$$

que também é injetiva. Seguramente algo análogo acontece na carta $\{y = 1\}$.

(b) $\tilde{\varphi}$ é injetiva. Pegue dois pontos $p_1 := [x_1 : y_1 : z_1]$ e $p_2 := [x_2 : y_2 : z_2]$ e suponha que $\tilde{\varphi}(p_1) = \tilde{\varphi}(p_2)$. I.e.,

$$x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \qquad x_1 y_1 = x_2 y_2, \qquad x_1 z_1 = x_2 z_2, \qquad y_1 z_1 = y_2 z_2$$

Suponha primeiro que $z_1 \neq 0$. Segue que

$$x_1 = \frac{z_2}{z_1} x_2, \qquad y_1 = \frac{z_2}{z_1} y_2$$

logo

$$x_2^2 - y_2^2 = x_1^2 - y_1^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 (x_2^2 - y_2^2) \implies z_2 = z_1 \implies x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2$$

Em fim, uma imersão injetiva com domínio compacto é um mergulho porque é fechada: pegue um fechado no domínio, vira compacto, imagem é compacta, que é fechado. Pronto. .

□

Exercício 8 $\varphi : M_1 \to M_2$ difeo local. Se M_2 é orientável, então M_1 é orientável.

Solução. Defina: uma base $\beta \subset T_p M$ é orientada se $\varphi_* \beta$ é orientada em $T_{\varphi(p)} M$. Tá bem definida porque φ é um difeomorfismo em p, i.e. φ_* é isomorfismo. Para mostrar que é contínua à la Lee, qualquer vizinhança de um ponto $p \in M_1$, a correspondente carta coordenada em $\varphi(p)$, um marco coordenado nela e puxe (pushforward baix φ^{-1}) de volta para U. Difeomorfismo e muito bom: o pushforward the campos vetoriais está bem definido. E por construção está orientado. □

2.2 Capítulo 1

Exercise 1 Prove que a aplicação antípoda $A : S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ tal que a projeção natural $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ seja uma isometria local.

Solution. Lembre que a métrica de S^n é a induzida pela métrica euclidiana, onde pensamos que $T_p S^n \hookrightarrow T_p \mathbb{R}^{n+1}$. É claro que A é uma isometría de $\mathbb{R}^n$, pois ela é a sua derivada (pois ela é linear), de forma que $\langle v, w \rangle_p = \langle -v, -w \rangle_{A(p)} = \langle v, w \rangle_{-p}$.

É um fato geral que se as transformações de coberta preservam a métrica, obtemos uma métrica no quociente de maneira natural, i.e. para dois vetores $v, w \in T_p \mathbb{R}P^n$ definimos $\langle v, w \rangle_p^{\mathbb{R}P^n} := \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)}$.

Para ver que a projeção natural é uma isometria local basta ver que a diferencial de A é um isomorfismo em cada ponto. Mas como ela é $-A$, isso é claro. □

Exercício 7 Seja G um grupo de Lie compacto e conexo ($\dim(G) = n$). O objetivo do exercício é provar que G possui uma métrica bi-invariante. Para isto, prove as seguintes etapas:

(a) Seja ω uma n-forma diferencial em G invariante à esquerda, isto é, $L_x^*\omega = \omega$, para todo $x \in G$. Prove que ω é invariante à direita.

Sugestão: Para cada $a \in Ga$, $R_a^*\omega$ é invariante à esqueda. Decorre daí que $R_a^*\omega = f(a)\omega$. Verifique que $f(ab) = f(a)f(b)$, isto é, $f : G \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é um homomorfismo (contínuo) de G no grupo multiplicativo dos números reais. Como $f(G)$ é um subgrupo compacto compacto e conexo, conclui-se que $f(G) = 1$. Logo $R_a^*\omega = \omega$.

(b) Mostre que existe uma n-forma diferencial invariante à esquerda ω em G.

(c) Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G. Seja ω uma n-forma diferencial positiva invariante à esqueda em G, é defina uma nova métrica Riemanniana $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ em G por

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_p = \int_G \langle (dR_x)_y u, (dR_x)_y v\rangle_{yx}\, \omega,$$
$$x, y \in G, \qquad u, v \in T_y G$$

Prove que $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é bi-invariante.

Solução.

(a)

(b)

(c) Vou usar outra notação. Suponha que g é uma métrica invariante à esquerda em G. Definimos
$$\tilde{g} := \int_{x\in G} (R_x^* g)\omega$$
como operador $\mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathscr{F}(G)$.

Agora vamos ver que $\tilde{g}$ é invariante à esquerda, i.e. queremos ver que para todo $a \in G$,
$$\tilde{g} \overset{\text{quero}}{=} L_a^*\tilde{g} \overset{\text{def}}{=} L_a^* \int_G (R_x^* g)\omega.$$
Vamos ver que o pullback L_a^* pode "entrar na integral" e trocar de lugar com R_x^*, daí o resultado segue porque g é L_a-invariante. As contas acabam sendo que

$$\begin{aligned} L_a^* \int_G (R_x^* g)\omega &= \int_G L_a^* R_x^* g\omega = \int_G (L_a \circ R_x)^* g\omega = \int_G (R_x \circ L_a)^* g\omega \\ &= \int_G R_x^* L_a^* g\omega = \int_G R_x^* g\omega = \tilde{g} \end{aligned}$$

Para ver que $\tilde{g}$ também é invariante à direita fazemos:

$$\tilde{g} \overset{\text{quero}}{=} R_a^*\tilde{g} \overset{\text{def}}{=} R_a^* \int_G (R_x^*) g\omega = \int_G R_a^* R_x^* g\omega = \int_G R_{ax}^* g\omega = \int_G R_x^* g\omega = \tilde{g}$$

porque estamos integrando em todo G e $G \curvearrowright G$ transitivamente.

Para todo aquele que tem dúvida, aqui estão as contas da invarianza à esquerda super explicitas:

Fixe $y \in G$ e $u, v \in T_y G$. Temos que

$$
\begin{aligned}
(L_a^* \tilde{g})(u,v) &= L_a^* \left(\int_g (R_x^* g)\omega \right)(u,v) \\
&= \left(\int_G (R_x^* g)\omega \right) \Big((L_a)_{*,a^{-1}y} u, (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big) \\
&= \int_G (R_x^* g) \Big((L_a)_{*,a^{-1}y} u, (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big) \omega \\
&= \int_G g \Big((R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (L_a)_{*,a^{-1}y} u, (R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big) \omega \\
&= \int_G g \Big((R_x \circ L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} u, (R_x \circ L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} v \Big) \omega \\
\text{associatividade em G} \qquad &= \int_G g \Big((L_a \circ R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} u, (L_a \circ R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} v \Big) \omega \\
&= \int_G g \Big((L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (R_x)_{*,yx^{-1}} u, (L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big) \omega \\
&= \int_G \Big((L_a)^* g \Big) \Big((R_x)_{*,yx^{-1}} u, (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big) \omega \\
g \text{ invariante à esquerda} \qquad &= \int_G g \Big((R_x)_{*,yx^{-1}} u, (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big) \omega \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}(u,v).
\end{aligned}
$$

onde $R_x \circ L_a = L_a \circ R_x$ por associatividade de produto no grupo.

$\square$