Prof. Luis Florit
Monitor. Ivan Miranda

Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/rg

Lista 6

Exercício 1 (Curvatura do espaço projetivo complexo, [dC79] VIII.12) Defina uma métrica Riemanniana em $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ do seguinte modo. Se $Z \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ e $V, W \in T_Z(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})$,

$$\langle V, W\rangle_Z = \frac{\operatorname{Re}(V, W)}{(Z, Z)}$$

onde

$$(Z, W) = z_0\overline{w}_0 + \ldots + z_n\overline{w}_n$$

é o produto hermitiano em $\mathbb{C}^{n+1}$. Observe que a métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ restrita a $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ coincide com a métrica induzida por $\mathbb{R}^{2n+2}$.

(a) Mostre que, para todo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $e^{i\theta} : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ é uma isometria, e que, portanto, é possível definir uma métrica Riemanniana em $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de modo que a submersão f seja Riemanniana.

(b) Mostre que, nesta métrica, a curvatura seccional de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ é dada por

$$\boxed{K(\sigma) = 1 + 3\cos^2\varphi},$$

onde σ é gerado pelo par ortonormal X, Y, $\cos\varphi = \langle\overline{X}, i\overline{Y}\rangle$, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são os levantamentos horizontais de X e Y, respetivamente. Em particular, $1 \leqslant K(\sigma) \leqslant 4$.

Solução. Começo notando que a métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ restrita a S^{2n+1} coincide com a métrica induzida por $\mathbb{R}^{2n+2}$: pegue $Z \in S^{2n+1}$ e $V, W \in T_Z(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})$. Então

$$\begin{aligned}
\langle V, W\rangle_Z &= \operatorname{Re}(V, W)\\
&= \operatorname{Re}\sum v^i\overline{w}^i\\
&= \operatorname{Re}\sum\left(\operatorname{Re}v^i + \sqrt{-1}\operatorname{Im}v^i\right)\left(\operatorname{Re}w^i - \sqrt{-1}\operatorname{Im}w^i\right)\\
&= \operatorname{Re}\sum\left(\operatorname{Re}v^i\operatorname{Re}w^i + \sqrt{-1}(\operatorname{Im}v^i\operatorname{Re}w^i - \operatorname{Re}v^i\operatorname{Im}w^i) + \operatorname{Im}v^i\operatorname{Im}w^i\right)\\
&= \operatorname{Re}\sum\left(\operatorname{Re}v^i\operatorname{Re}w^i + \operatorname{Im}v^i\operatorname{Im}w^i\right) + \operatorname{Re}\left(\sqrt{-1}(\ldots)\right)\\
&= \sum\operatorname{Re}v^i\operatorname{Re}w^i + \operatorname{Im}v^i\operatorname{Im}w^i\\
&= \langle V, W\rangle_{\mathbb{R}^{2n+2}}
\end{aligned}$$

(a) Pela observação anterior, basta mostrar que $e^{i\theta}$ é uma isometria de S^{2n+1} com a métrica esférica usual. Sabemos que o grupo de isometrias dessa esfera é $O(2n+2)$.

De fato, o mapa $e^{i\theta} \in O(n+1, \mathbb{C}) \subset O(2n+2)$ onde o primeiro grupo são as isometrias da forma Hermitiana. Para ver por que, defina h como a forma hermitiana canônica de $\mathbb{C}^{n+1}$. Das contas feitas acima fica claro que podemos escrever

$h = g + \sqrt{-1}\omega$, onde g é a métrica Riemanniana (produto ponto) canônica de $\mathbb{R}^{2n+2}$ e ω é uma outra forma bilinear.

Primeiro note que $e^{i\theta}$ é uma isometria de h. Para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$h(e^{i\theta}z, e^{i\theta}z) = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}}h(z,z) = |e^{i\theta}|^2 h(z,z) = h(z,z)$$

separando em parte real e imaginaria, segue que $g(e^{i\theta}z, e^{i\theta}z) = g(z,z)$. Como $e^{i\theta}$ é linear, concluímos que é uma isometria de g.

(b) Seguindo a sugestão, defina N como o vetor de posição de S^{2n+1}. Pensando $\theta \mapsto e^{i\theta N}$ como uma curva usual em $\mathbb{C}^{2n+1}$, sabemos pelas propriedades da exponencial complexa, i.e. derivando entrada a entrada, que $(\frac{d}{d\theta}e^{i\theta}N)_{\theta=0} = iN$.

Note que esse vetor é vertical, i.e. está no kernel da projeção π. Isso está quase feito: como iN é a derivada de uma curva, basta compor essa curva com π e derivar em $\theta = 0$. A derivada é zero porque no quociente essa curva é constante.

Daí simplesmente escrevemos a fórmula do Manfredo para uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^{2n+1}$ realizando o levantamento $\overline{X}$ de $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}P^n)$ em N, i.e. com $\alpha(0) = N$ e $\alpha'(0) = \overline{X}$:

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{\overline{X}} iN)_N &= \frac{d}{dt} iN \circ \alpha(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} i\alpha(t)\Big|_{t=0} && \text{já que } N \text{ é o vetor posição} \\
&= i\alpha'(0) = i\overline{X}, && \text{derivada complexa usual}
\end{aligned}$$

Agora note que

$$\overline{X}\cancelto{0}{\left\langle \overline{Y}, iN \right\rangle} = \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, iN \right\rangle + \left\langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}} iN \right\rangle$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\left\langle [\overline{X}, \overline{Y}], iN \right\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}, iN \right\rangle \\
&= -\left\langle i\overline{X}, \overline{Y} \right\rangle + \left\langle i\overline{Y}, \overline{X} \right\rangle \\
&= 2\cos\varphi
\end{aligned} \tag{1}$$

por definição de φ como satisfazendo $\cos\varphi = \left\langle \overline{X}, i\overline{Y} \right\rangle$, e porque

$$\left\langle i\overline{X}, \overline{Y} \right\rangle = \operatorname{Re} h(i\overline{X}, \overline{Y}) = \operatorname{Re} h(\overline{X}, \overline{i}\overline{Y}) = \operatorname{Re} h(\overline{X}, -i\overline{Y}) = -\left\langle \overline{X}, i\overline{Y} \right\rangle$$

Finalmente, o **exercício 10(b)** diz que para $\sigma = \operatorname{span}\{X, Y\}$ e $\overline{\sigma} = \operatorname{span}\{\overline{X}, \overline{Y}\}$,

$$\boxed{K(\sigma) = \overline{K}(\overline{\sigma}) + \frac{3}{4}\left|[\overline{X}, \overline{Y}]^{\nu}\right|^2}$$

onde $\overline{K}$ é a curvatura de $\mathbb{S}^{2n+1}\backslash\{0\}$, que é constante 1. Portanto, o desafio final acaba sendo mostrar que

$$3\cos^2\varphi = \frac{3}{4}\left|[\overline{X}, \overline{Y}]^{\nu}\right|^2$$

Mas já tá quase: elevando eq. (1) ao quadrado,

$$4\cos^2\varphi = \left\langle \left[\overline{X}, \overline{Y}\right], iN \right\rangle^2$$

Ou seja, basta mostrar que

$$\left|\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu\right|^2 \stackrel{?}{=} \left\langle \left[\overline{X}, \overline{Y}\right], iN \right\rangle^2$$

Como iN é vertical, o lado direito é igual a $\left\langle \left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu, iN \right\rangle^2$.

Como N é um vetor unitário, podemos expressar

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu = \left|\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu\right| iN$$

Então acaba que

$$\left\langle \left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu, iN \right\rangle^2 = \left\langle \left|\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu\right| iN, iN \right\rangle^2 = \left|\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu\right|^2 \langle iN, iN\rangle = \left|\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\nu\right|^2$$

□

Exercício 2 (Espaços lenticulares)

(a) Definição e geodésicas (exer 4. cap. VIII [dC79]). Identifique $\mathbb{R}^4$ com $\mathbb{C}^2$ fazendo corresponder (x_1, x_2, x_3, x_4) a $(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$. Seja

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

e seja $h : S^3 \to S^3$ dada por

$$h(z_1, z_2) = \left(e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1, e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_2\right), \qquad (z_2, z_2) \in S^3$$

onde q e r são primos entre si, $q > 2$.

(i) Mostre que $G = \{id, h, \dots, h^{q-1}\}$ é um grupo de isometrias da esfera S^3, com a métrica usual, que opera de modo totalmente descontínuo. A variedade S^3/G é chamada um ***espaço lenticular***.

(ii) Considere S^3/G com a métrica induzida pela projeção $p : S^3 \to S^3/G$. Mostre que todas as geodésicas de S^3/G são fechadas mas podem ter comprimentos diferentes.

(b) Calcule o volume de um espaço lenticular.

(c) Exiba uma sequência de variedades Riemannianas completas com curvatura seccional constante igual a 1 de modo que a sequência dos volumes seja uma sequência que converge a zero.

Demostração.

(a) (i) Para ver que G age por isometrias usamos o mesmo argumento que no exercício anterior: denote agora por $\eta = g + i\omega$ a forma hermitiana canônica de $\mathbb{C}^2$. Basta mostrar que $h : S^3 \to S^3$ preserva η. Nesse caso fica mais fácil usar a definição de η como somando as entradas dos vetores (conjugando as entradas do segundo vetor):

$$\begin{aligned}
\eta(h(z_1, z_2), h(w_1, w_2)) &= \eta\Big((e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1, e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_2), (e^{\frac{2\pi i}{q}} w_1, e^{\frac{2\pi i r}{q}} w_2)\Big) \\
&= e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1 \overline{e^{\frac{2\pi i}{q}} w_1} + e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_2 \overline{e^{\frac{2\pi i r}{q}} w_2} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{q}} \overline{e^{\frac{2\pi i}{q}}} z_1 \overline{w_1} + e^{\frac{2\pi i r}{q}} \overline{e^{\frac{2\pi i r}{q}}} z_2 \overline{w_2} \\
&= \left|e^{\frac{2\pi i}{q}}\right|^2 z_1 \overline{w_1} + \left|e^{\frac{2\pi i r}{q}}\right|^2 z_2 \overline{w_2} \\
&= z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} \\
&= \eta\Big((z_1, z_2), (w_1, w_2)\Big)
\end{aligned}$$

É claro que $h^q = \mathrm{id}$. Também é simples conferir que a ação é discreta: como a órbita é finita, defina d como sendo a mínima distância entre os elementos da órbita de qualquer ponto. As bolas de raio $d/2$ são disjuntas baixo a ação de G.

Para conferir que a ação é própria de acordo à definição dada em aula devemos ver que dadas duas órbitas, existe uma vizinhança de qualquer uma delas que não intersecta a outra. Novamente como a ação é finita podemos tomar a mínima distância entre todos os pontos das duas órbitas para produzir um raio tão pequeno que as bolas com esse raio são a vizinhança desejada.

(ii) Para mostrar que todas as geodésicas de S^3/G são fechadas usamos as geodésicas de S^3, que são círculos máximos. Como a projeção quociente é uma isometria local, sabemos que toda geodésica de S^3/G corresponde com um círculo máximo. É claro que esses círculos são curvas fechadas em S^3, ou seja, conjuntos compactos. Como a projeção é contínua, a imagem de cada uma deve ser compacta, ou seja, uma curva fechada.

Para achar duas geodésicas em S^3/G com comprimentos diferentes, buscamos uma curva que "feche antes do que outra". Note que a relação de equivalência no quociente é

$$(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2') \iff \exists n \text{ tal que } h^n(z_1, z_2) = (z_1', z_2')$$

ou seja se

$$\left(e^{\frac{n2\pi i}{q}} z_1, e^{\frac{n2\pi i r}{q}} z_2\right) = (z_1', z_2') \tag{2}$$

Lembre que as geodésicas da esfera são da forma $\gamma(t) = P\cos t + Q\sin t$ para

$P, Q \in S^3$. Isso significa que

$$\begin{aligned}\gamma_{z_1,z_2}(t) &:= e^{it}(z_1, z_2) = (\cos t + i \sin t)(z_1, z_2) \\ &= \cos t(z_1, z_2) + \sin t(iz_1, iz_2)\end{aligned}$$

é uma geodésica. É claro que essa geodésica fecha em $t = 2\pi$, mas no quociente pode fechar antes. Nosso objetivo é achar um t tal que

$$\gamma(t) = h^n(z_1, z_2), \qquad \text{para alguma } n \leqslant q - 1.$$

A dificuldade aqui é que h modifica as duas entradas de formas diferentes, então a solução natural é considerar as geodésicas associadas a $(z_1, 0)$ e $(0, z_2)$.

No primeiro caso fica que

$$\gamma_{z_1,0}\left(\frac{2i\pi}{q}\right) = \left(e^{\frac{2i\pi}{q}} z_1, 0\right) = h(z_1, 0) = (z_1, 0) = \gamma_{z_1,0}(0)$$

ou seja, $\gamma_{z_1,0}$ fecha em $t = \frac{2i\pi}{q}$.

Agora pegue $(0, z_2)$. A situação agora é que, para $1 \leqslant n \leqslant q - 1$,

$$h^n(0, z_2) = \left(0, e^{rn\frac{2i\pi}{q}} z_2\right), \qquad \text{quanto que} \quad \gamma\left(n\frac{2i\pi}{q}\right) = \left(0, e^{n\frac{2i\pi}{q}} z_2\right).$$

Então queremos que esses dois pontos sejam o mesmo, ou seja, que

$$\begin{aligned} e^{rn\frac{2i\pi}{q}} = e^{n\frac{2i\pi}{q}} &\implies e^{2i\pi\frac{rn-n}{q}} = 1 \\ &\implies \frac{n(r-1)}{q} \in \mathbb{Z} \\ &\implies n(r-1) \equiv 0 \mod q \end{aligned}$$

Afirmação Existem escolhas de q e r tais que $n(r-1) \equiv 0 \mod q \implies n > 1$.

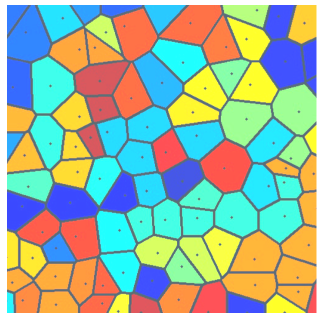
Infelizmente isso não é verdadeiro em geral. Porém, suspeito que não para todas as escolhas de q e r o resultado vai ser certo. Para outras, como por exemplo $q = 7$ e $r = 5$, a afirmação é válida: $n > 1$ já que $r - 1 = 4$ não divide a 7. Nesses casos, concluimos que essa curva não pode fechar no mesmo que tempo que a primeira curva exibida, e portanto tem comprimento maior.

(b) Intuitivamente, o volume de um quociente discreto é o volume do domínio fundamental, que é a região $D \subset M$ mais pequena tal que $G \cdot D = M$. Se conseguimos definir formalmente D, concluimos dizendo que como π é um quociente riemanniano, $\operatorname{Vol} D = \operatorname{Vol} S^3/G$ e portanto

$$\operatorname{Vol}(S^3/G)|G| = \operatorname{Vol}(S^3) \implies \operatorname{Vol} S^3/G = \frac{1}{q} \operatorname{Vol} S^3$$

Uma construção formal do domínio D pode ser feita a traves da “Voronoi cell” (cf. Complex manifolds in dimension 1, lecture 14): para qualquer espaço métrico M e subconjunto discreto $\{p_i\} \subset M$, a ***Voronoi cell*** associada a p_i é

$$D_i := \{z \in M : d(z, p_i) \leqslant d(z, p_j) \forall j \neq i\}$$



Para finalizar o argumento pegue D como a Voronoi cell da órbita de qualquer ponto $p \in M$. Note que pode sim ter dois elementos na mesma classe de equivalência dentro de D. Porém, nesse caso eles devem ficar na fronteira ∂D já que G age por isometrias. Para concluir note que $\pi|_{\mathrm{Int}\, D}$ é uma isometria, e portanto $\mathrm{Vol}\, D = \mathrm{Vol}\, S^3/G$ como queriamos.

(c) Lembre a pergunta: *exibir uma sequência de variedades Riemannianas completas com curvatura constante igual a 1 de modo que a sequência dos volumes seja uma sequencia que converge a zero.* A resposta natural é S^3/G_q onde G_q é o grupo que determina o espaço lenticular, pudendo mudar o valor de r livremente desde que para cada q fique r primo relativo com q.

Então só falta mostrar que a curvatura secional de S^3/G é constante igual a 1, e que é completa. O último é imediato porque S^3 é completa. Para ver o primeiro usamos de novo o exercício 10(b) que diz que para $X, Y \in \mathfrak{X}(S^3/G)$, $\sigma = \mathrm{span}\{X, Y\}$ e $\overline{\sigma} = \mathrm{span}\{\overline{X}, \overline{Y}\}$,

$$\boxed{K(\sigma) = \overline{K}(\overline{\sigma}) + \frac{3}{4}\left|[\overline{X}, \overline{Y}]^{\nu}\right|^2}$$

onde $\overline{K}$ é a curvatura de S^3, que 1. Ou seja, queremos ver que

$$[\overline{X}, \overline{Y}]^{\nu} = 0.$$

Mas isso segue de que a ação é discreta! Temos uma descomposição $TS^3 \cong \kappa \oplus \pi^* T(S^3/G)$, onde κ é o kernel de π_*. Como a dimensão do grupo é zero, a dimensão do espaço lenticular é 3, e o kernel dever ter dimensão zero. Então não tem componentes verticais em geral. (Então aprendi que a curvatura seccional é preservada em quocientes sob ações discretas.)

$\square$

Exercício 3 Encontre um exemplo de variedade suave que admite uma métrica Riemanniana com curvatura escalar positiva, mas não admite uma métrica Riemanniana com Ricci positivo.

Solução. É parecida à solução de "Hadamard não vale para curvatura escalar" que o Rafael diu na monitoria: pegue $\mathbb{H}^2_{\frac{1}{100}}$, i.e. espaço de curvatura seccional constante negative e pequeníssima, e faça produto com uma esfera. Então a curvatura escalar é positiva porque é a suma dos pullbacks das curvaturas escalares, que coincidem com as curvaturas seccionais. Porém, a curvatura de Ricci, que também é a soma dos pullbacks das curvaturas de Ricci, não pode ser positiva porque em qualquer ponto podemos pegar um vetor cuja componente em S^2 é zero, e a componente hiperbólica vai dar um número negativo. Para confirmar isso último lembre a definição de Ric negativo ou positivo: é a definição para uma forma bilinear, que está dada como o signo da forma avaliada no mesmo vetor nas duas entradas. Então só note que $\mathrm{Ric}(X, X) = \sum K(E_i, X) < 0$.

□

Exercício 4 Encontre um exemplo de variedade suave que admite uma métrica Riemanniana com Ricci positivo, mas não admite uma métrica Riemanniana com curvatura seccional positiva.

Solução. $S^2 \times S^1$, porque pelo teorema de Synge, se $S^2 \times S^1$ admitisse uma métrica com $K > 0$, teria que ter $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}_2$ porque tem dimensão ímpar e é orientável. A métrica produto tem Ricci positivo já que $\mathrm{Ric}\, S^2 > 0$, e, como no exercício anterior, sabemos que Ricci de um produto é a soma dos pullbacks das Ricci's em cada componente. □

1 Variações de Energia

Exercício 5 Sejam (M^n, g) completa, conexa e com curvatura positiva e A, B subvariedades totalmente geodésicas e compactas tais que $\dim A + \dim B \geqslant n$. Mostre que $A \cap B \neq \varnothing$.

Solução. Suponha que a interseção não é vazia. Então existe uma geodésica minimizante não trivial que minimiza a distância entre A e B. Sabemos que essa geodésica intersecta tanto A quanto B ortogonalmente. Queremos ver que $E''(0) < 0$, ou seja que γ não pode ser minimizante, uma contradição.

Suponha que conseguimos construir uma variação de γ tal que todos os pontos iniciais $f(s, 0)$ estão em A, e o mesmo acontece com os pontos finais, i.e. $f(s, \ell) \in B$. Então as derivadas das curvas $f(s, 0)$ e $f(s, \ell)$ em $s = 0$ são perpendiculares a $\gamma'(0)$ e $\gamma'(\ell)$. Ou seja, temos que $\langle \gamma'(0), \nabla_{\partial_s} V \rangle |_0^\ell = 0$.

Suponha ainda que essa variação tem campo variacional paralelo. Então acabou porque a segunda fórmula da variação diz que

$$E''(0) = -\int_0^\ell \langle R_{\gamma'} V, V \rangle < 0$$

Vamos construir essa variação. O passo inicial é fácil: pegamos qualquer vetor $v \in T_a A$ e transportamos paralelamente ao longo de γ para obter o campo paralelo $V \in \mathfrak{X}_\gamma$. Como A é totalmente geodésica, a variação $f(s,t) := \exp_{\gamma(0)}(sV(0))$ fica dentro de A.

Para concluir basta ver que $V(\ell) \in T_b B$, já que B também é totalmente geodésica. Isso segue da última hipótese. Podemos realizar esse processo para cada vetor básico de $T_a A$, obtendo $\dim A$ vetores linearmente independentes em $T_b B$ (já que o transporte paralelo é uma isometria). Se nenhum deles ficasse em $T_b B$, poderíamos construir um espaço de dimensão $\dim A$ estritamente contido em $T_b M \backslash T_b B$, absurdo pois isso implicaria que $\dim A < \operatorname{codim} B$, porém, $\dim A + \dim B \geqslant n$.

Edit. Depois de reler a prova do exercício seguinte, parece que não era necessário usar que γ intersecta ortogonalmente A e B, pois a variação que usei foi por geodésicas, então $\nabla_{\partial_s} V = 0$. Então fiquei com a dúvida de que parece que não usei compacidade de A e B. □

Exercício 6 Seja M^{2n} uma variedade Riemanniana de dimensão par, completa, orientável e com curvatura seccional $K > 0$. Seja γ uma geodésica fechada em M de comprimento $\ell(\gamma)$. Mostre que existem curvas livremente homotópicas a γ em M, arbitrariamente próximas de γ, que possuem comprimento menor que $\ell(\gamma)$.

Sugestão. Estude variações de γ com campo variacional paralelo ao longo de γ.

Solução. Considere qualquer vector unitário ortogonal a $\dot\gamma$, defina $V \in \mathfrak{X}_\gamma''$ como sendo o transporte paralelo de v ao longo de γ. Note que $\dot V = 0$. Defina a variação $f(s,t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t)$. Note que $\nabla_{\partial_s} f_s = 0$.

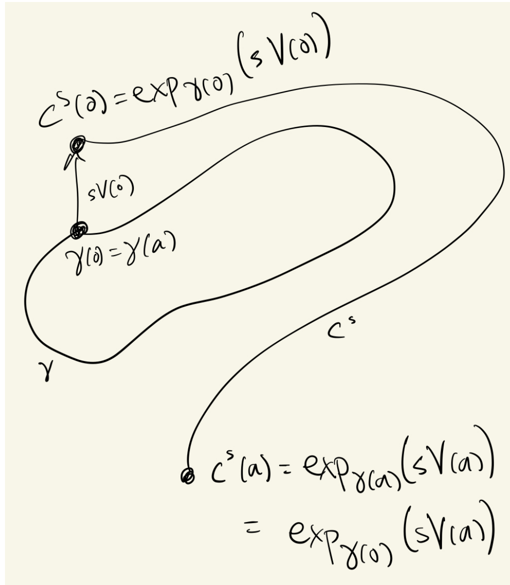
A segunda fórmula da variação nos diz que

$$E''(0) = -\int_0^a \langle R_{\dot\gamma} V, V\rangle = -\int_0^a K < 0$$

já que $K > 0$. Como γ é uma geodésica, temos que para s pequeno

$$\frac{1}{a}\ell^2(c^s) \leqslant E(s) < E(0) = \frac{1}{a}\ell^2(\gamma)$$

Note que essa variação pode não preservar o fechamento das curvas. Para resolver isso olhemos ao seguinte desenho:



Fica claro que se $V(0) = V(a)$ as curvas c^s são fechadas para toda s. Então a condição que precisamos é que

$$P_{0,a}^{\gamma} V(0) = V(a)$$

onde P é o transporte paralelo. Dito de outra forma, basta ver que P tem um ponto fixo—além de $\gamma'(0) = \gamma'(a)$, que já é um ponto fixo. Esse argumento é uma imitação da prova do teorema de Weinstein: como P preserva orientação, o determinante dele deve ser positivo, ou seja, o produto dos seus autovalores deve ser positivo. Restringindo-nos ao subespaço $\gamma'(0)^{\perp}$, que tem dimensão ímpar, concluímos que para que o produto dos autovalores de P seja positivo, deve ter pelo menos um que seja 1. □

References

[dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.