Prof. Luis Florit
Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/rg

Geometria Riemanniana

Índice

1 Aula 1

1.1 Lembrando

Definição ***Variedade diferenciável***

1. M espaço topológico Hausdorff (T^2), base enumerável. Essas duas condições são equivalentes à existência de partições da unidade.
2. M localmente euclídeo, i.e. $\mathcal{A} = \{(\chi_\lambda, U_\lambda)\}$, $\chi_\lambda : U_\lambda \subset M \to \chi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$, com $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$. Dizemos que n é a ***dimensão*** de M.
3. Restringindo dois abertos U_λ, U_μ com $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, a ***mudança de coordenadas*** $\chi_\mu \circ \chi_\lambda^{-1} : \chi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \chi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ deve ser diferenciável. (Nesse curso diferenciável é C^∞ a menos que especifiquemos).
4. Maximalidade, i.e. $\mathcal{A}$ é maximal.

Definição (Mapa diferenciável) $f : M^n \to N^m$ se para todo ponto com cartas (x, U) de M e (y, V) de N o mapa $y \circ f \circ x^{-1}$ é diferenciável. Denotaremos o conjunto de funções diferenciaveis por $\mathcal{F}(M, N)$. Em particular $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$.

Definição (Espaço tangente) $\mathcal{F}_p(M)$ é o espaço de funções definidas num aberto de p identificando duas delas se coincidem em qualquer aberto contendo p.

$$T_pM := \{v \in \mathcal{F}_p(M)^* : v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)\}$$

Pergunta $\mathcal{F}_p(M)$ es el stalk de la gavilla de funciones suaves? Qué pasa si definimos algo como las derivaciones en $\mathcal{F}(U)$.

A la hora de definir base de T_pM con los operadores ∂_i necesitamos fijar una carta, así que en realidad no hay una base canónica de T_pM.

Definição (Diferencial de uma função)

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

definida para $g \in T_{f(p)}N$ como

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f)$$

Observação A regra da cadeia é uma tautologia dessa definição!

Definição (Base canônica do espaço tangente) Definimos

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pM$$

como, para $g \in T_pM$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(g) = \frac{\partial(g \circ x^{-1})}{\partial u_i}$$

Exercício Mostre que $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ é uma base de T_pM.

Solution. Primeiro note que $\{\partial_i|_p\}$ é linearmente independente. Suponha que

$$\sum a_i \partial_i|_p = 0$$

Then for every function this gives zero, so in particular for coordinate functions $x_i : U \to \mathbb{R}$, so

$$0 = \left(\sum a_i \partial_i\right) x_j = \sum a_i \delta_{ij} = a_j \qquad \text{for all } j.$$

Now let's check span $\partial_i|_p = T_pM$. Choose a vector $v \in T_pM$ and let

$$w := v - \sum_i v(x_i)\partial_i|_p.$$

We wish to show that $w = 0$.

Then there's the following trick: a function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $g(0) = 0$ can be written $g(t) = th(t)$ for some continuous function h (subexercise: construct h, it's an integral). So if we define $\tilde{g}(t) = g(t) - g(0)$ we can write for any $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (without asking that $g(0) = 0$) just $g(t) = g(0) + th(t)$

Subexercise Mostre que para toda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g(t) = g(0) - th(t)$. **Solution.** Let $m_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the function that multiplies t times a fixed number x. Notice that, for a fixed x, by fundamental theorem of Calculus

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(x) - g(0)$$

and also

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 g'(xt) \cdot x = x \int_0^1 g'(xt)dt$$

Then we define
$$h(x) := \int_0^1 g'(xt)dt$$
and immediately we get $g(x) = g(0) - xh(x)$.

Subsubexercise Now do that for $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. I think the correct claim is that there exists $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ such that for every $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ we have $g(\vec{x}) = g(\vec{0}) + \vec{x} \cdot h(\vec{x})$. **Solution.** Now m_x multiplies the vector x times the real number t, it is a function $m_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. We get
$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(\vec{x}) - g(\vec{0}).$$
And also
$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 \nabla_{t\vec{x}} g \cdot \vec{x} dt = \int_0^1 \sum \frac{\partial}{\partial x_i} g\Big|_{t\vec{x}} x_i dt = \sum x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{t\vec{x}}.$$
Definimos
$$h(\vec{x}) := \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1}\Big|_{t\vec{x}} dt, \ldots, \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_n}\Big|_{t\vec{x}} dt \right)$$

Back to the original exercise... Let's try to use this trick to conclude that $w(g) = 0$ for all $g \in \mathcal{F}_p$. Since it's a local statement I just suppose that g is a function $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Then there is a function $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ such that for every $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = g(0) + x \cdot h(x)$.

Right so remember that I chose an arbitrary vector $v \in T_pM$ and defined $w = v - \sum v(x_i)\partial_i|_p$. I can see that $w(x_i) = 0$ for all coordinate functions x_i. But also for g as above I get
$$w(g) = w(g(0) + x \cdot h(x)) = w(x \cdot h(x)) = w\left(\sum x_i h_i(x)\right) = \sum w(x_i h_i(x))$$
$$= \sum \cancelto{0}{w(x_i)} h_i(x) + x_i h_i(x)$$
and the second term also vanishes if we suppose that the coordinates of our point, x_i, are all zero. Which makes me think: I think that's the point of the trick, that it somehow manages to put the coordinates of the point inside the whole thing, and then we can suppose the coordinates are 0 and simplify everything. $\square$

Definição (Fibrado tangente) Como os $\mathcal{F}_p(M)$ são disjuntos, porque M é Hausdorff, os espaços tangentes são disjuntos para pontos distintos.
$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$
com a estrutura diferenciável que você já conhece.

A projeção natural $\pi : TM \to M$ é uma sumersão no sentido da seguinte definição. (Exercício?)

Definição (Imersão e sumersão)

1. Imersão se para todo $p \in M$, df_p é injetiva (e isso implica que $n \leqslant m$).
2. ***Sumersão*** de df_p é sobrejetiva para todo p, implicaq ue $n \geqslant m$.
3. ***Difeomorfismo local*** se para todo ponto df_p é um isomorfismo. Isso é equivalente a que para todo ponto existe um aberto tal que $f|_U : U \to V$ é um difemorfismo (teo. função inversa). (Checar.)

Note que $f : M \to N$ contínua é como dizer que a topologia induzida por f, $\tau_f \subset \tau_M$. Mas a igualdade nem sempre tem (e.g. figura 8). f é um ***mergulho*** se $\tau_f = \tau_M$. Isso é equivalente a que $f(M) \subset N$ seja uma subvariedade e $f : M \overset{\text{difeo}}{\simeq} f(M) \subset N$.

Definição (Campo coordenado) Numa vizinhança U de p,

$$\begin{aligned} \partial : U &\longrightarrow TU \subset TM \\ p &\longmapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_pM \end{aligned}$$

Observação Podemos quase extender esse campo. Num aberto $V \subset U$ cujo fecho $\bar{V} \subset U$. Pega a coberta $\{M \backslash \bar{V}, U\}$. Então existe part. unidade (ξ, φ). Por definição, $\varphi|_V = 1$. Defina $x = \varphi \partial_i$.

Definição (Fibrado vetorial) Um ***fibrado vetorial*** E^k sobre M^n de posto $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é

1. $\pi : E \to M^n$ submersão sobrejetiva.
2. $\forall p \in M$, $E_p = \pi^{-1}(p)$ é um $\mathbb{R}$-e.v. de dimensão k.
3. $\forall p \in M$, existe $p \in U \subset M$ y φ_U tal que
   (a) $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \overset{\text{dif}}{\simeq} U \times \mathbb{R}^k$.
   (b) φ_U conmuta con la proyección, i.e.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

   (c) $\forall q \in U$, $\varphi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo linear.

   Isso é equivalente a pedir que exista um ***atlas trivializante*** de E. É $\{(\varphi, \underbrace{\pi(U)}_{\subseteq E} : U \in \Lambda \subset \tau_M\}$ es decir una familia de abiertos en E indexada por una familia de abiertos de M. Considere dos de estos abiertos con $W := U \cap V \neq \varnothing$.

$$\begin{array}{ccc} \varphi_U|_{\pi(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \times \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \\ \varphi_V|_{\pi^{-1}(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

onde estamos parametrizando numa variedade! Ou seja, implícitamente estamos pegando cartas nela, mas podemos deixá-lo assim.

Temos as funções de transição

$$\varphi_{VU} = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{W \times \mathbb{R}^k} : W \times \mathbb{R}^k \to W \times \mathbb{R}^k$$

que realmente estão determinadas por a parte linear:

$$\varphi_{VU}(Q, v) = (Q, \xi_{VU}(Q)(v)$$

onde

$$\xi_{VU} : W \to \mathsf{GL}(k, \mathbb{R})$$

e são chamadas de ***funções de transição*** de E. Elas satisfacem

$$\xi_{VU} \circ \xi_{SV} = \xi_{SU} \qquad \text{cocycle condition}$$

$$\text{no seria}\ldots \qquad \xi_{VU} \circ \xi_{US} = \xi_{VS}$$

Então podemos formar um fibrado vetorial a partir das funções de transição só.

2 Exercícios de do Carmo

2.1 Capítulo 0

Exercise 2 Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não seja).

Solution. Es porque la diferencial de los cambios de coordenadas está dada por la identidad y una matriz lineal. Sí, porque por definición las trivializaciones locales de TM preservan la primera coordenada **y** son isomorfismos lineales en la parte del espacio vectorial. Entonces queda que

$$d(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & \xi \in \mathsf{GL}(n) \end{array}\right)$$

pero no estoy seguro de por qué ξ preservaría orientación, i.e. que tenga determinante positivo… a menos de que… □

2.2 Capítulo 1

Exercise 1 Prove que a aplicação antípoda $A : S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ tal que a projeção natural $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ seja uma isometria local.

Solution. Lembre que a métrica de S^n é a induzida pela métrica euclidiana, onde pensamos que $T_pS^n \hookrightarrow T_p\mathbb{R}^{n+1}$. É claro que A é uma isometría de $\mathbb{R}^n$, pois ela é a sua derivada (pois ela é linear), de forma que $\langle v, w\rangle_p = \langle -v, -w\rangle_{A(p)} = \langle v, w\rangle_{-p}$.

É um fato geral que se as transformações de coberta preservam a métrica, obtemos uma métrica no quociente de maneira natural, i.e. para dois vetores $v, w \in T_p\mathbb{R}P^n$ definimos $\langle v, w\rangle_p^{\mathbb{R}P^n} := \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_{\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)}$.

Para ver que a projeção natural é uma isometria local basta ver que a diferencial de A é um isomorfismo em cada ponto. Mas como ela é $-A$, isso é claro. $\square$