Lista 8 de Geometria Riemanniana

IMPA, Mar/Jun 2025 - Monitor: Ivan Miranda

Exercício 1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e d sua distância Riemanniana. Dados $v, w \in T_pM$, mostre que*

$$d(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) = ||v - w||t - \frac{1}{6}\frac{\langle R(w, v)v, w\rangle}{||v - w||}t^3 + O(t^4).$$

Comentário: essas contas estão feitas nas notas do professor W. Meyer, *Toponogov's Theorem and Applications*. O resultado aparece na equação 9, página 5.

Exercício 2. *Compute o cut locus de $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$ e $\mathbb{RP}^2$ com suas métricas canônicas. Calcule o diâmetro dessas variedades Riemannianas.*

Comentário: após resolver esse exercício, pode ser uma boa ideia ler os exemplos 2.3, 2.4, 2.5 e a observação 2.6 do livro do capítulo XIII do livro do professor Manfredo de Geometria Riemannina, quinta edição.

Exercício 3. *Prove os Corolários 2.7 e 2.8 do capítulo XIII do livro do professor Manfredo, quinta edição, que são corolários da caracterização do cut locus em termos de pontos conjugados e geodésicas minimizantes.*

Exercício 4. *Prove a Proposição 2.12 do capítulo XIII do livro do professor Manfredo, quinta edição, que relaciona o cut locus com a existência de loops geodésicos.*

Exercício 5. *Prove a Proposição 2.13 do capítulo XIII do livro do professor Manfredo, quinta edição, que relaciona o raio de injetividade com a curvatura seccional e a existência de geodésicas fechadas.*

Exercício 6. *Prove a Proposição 3.4 do capítulo XIII do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre uma estimativa importante de raio de injetividade para variedades Riemannianas compactas de curvatura positiva.*

Exercício 7. *Prove o Lema 4.1 do capítulo XIII do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre as direções minimizantes em pares de pontos que realizam o diâmetro.*

Exercício 8. *Prove o Lema 4.2 do capítulo XIII do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre a topologia de uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, cuja curvatura seccional K satisfaz $\frac{1}{4} < K \leq 1$.*

Comentário: usando resultados de topologia, a partir do resultado desse Lema 4.2 é possível garantir que tal variedade Riemanniana é homeomorfa a uma esfera. Mas é bem interessante ver a prova original, que constrói esse homeomorfismo, usando o Lema 4.3 que vem a seguir no livro.

Exercício 9. *Prove a Lei dos Cossenos para as formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$: Proposição 12.2.3 do livro do professor P. Petersen, Riemannian Geometry, terceira edição.*

Comentário: esse resultado é útil para as equivalências entre as versões do Teorema de Toponogov, por exemplo.

Exercício 10. *Prove que a recíproca do Teorema de Toponogov é verdadeira: se para uma variedade Riemanniana M vale a conclusão do Teorema de Toponogov para algum $k \in \mathbb{R}$, então a curvatura seccional de M satisfaz $K_M \geq k$.*

Exercício 11. *Seja M uma variedade Riemanniana completa, de curvatura seccional não negativa. Sejam $\gamma, \sigma : [0, \infty) \to M$ geodésicas tais que $\gamma(0) = \sigma(0)$. Se γ é um raio e $\sphericalangle(\gamma'(0), \sigma'(0)) < \frac{1}{2}\pi$, então $\lim_{t\to\infty} \rho(\sigma(0), \sigma(t)) = \infty$ (i.e. σ vai para o infinito).*

Um teorema importante sobre as variedades Riemannianas completas de curvatura seccional não negativa é o Teorema da Alma. Esse resultado (ou um de seus corolários) garante que toda variedade Riemanniana M completa de curvatura seccional $K \geq 0$ é difeomorfa a um fibrado vetorial sobre uma variedade Riemanniana compacta S (a alma de M), com $K_S \geq 0$. Logo, a menos de homotopia, o estudo da topologia dessas variedades se restringe ao estudo das compactas. O Teorema de Toponogov é uma ferramenta importante na prova original desse teorema. Um passo da prova é o seguinte exercício.

Exercício 12. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e não compacta, com $K_M \geq 0$. Seja σ um raio em M. Defina, para $t > 0$, o "semiespaço"*

$$H_t^\sigma := M \setminus \bigcup_{s>0} B(\sigma(t+s), s).$$

Prove que H_t^σ é fechado e totalmente convexo, i.e. se um segmento de geodésica $\alpha : [0,1] \to M$ tem seus extremos em H_t^σ, $\alpha(0), \alpha(1) \in H_t^\sigma$, então esse segmento está inteiramente contido em H_t^σ: $\alpha([0,1]) \subset H_t^\sigma$.

Sugestão: suponha o contrário, por absurdo, e utilize o teorema de Toponogov para comparar M com o espaço euclidiano.

Complemento: dado $p \in M$, defina para $t > 0$, $K_t := \cap_\sigma H_t^\sigma$, onde σ percorre todos os raios partindo de p. Prove que K_t é um compacto totalmente convexo. A existência de compactos totalmente convexos já coloca fortes restrições topológicas na variedade Riemanniana. Pense nessas construções nos exemplos do cilindro e do parabolóide em $\mathbb{R}^3$.

Referências

Livro do professor Manfredo, Geometria Riemanniana.

Exercícios do professor Luis Florit, https://luis.impa.br/.

Listas de exercícios do Diego Guajardo, https://luis.impa.br/.

Listas de exercícios do Luciano Luzzi, https://sites.google.com/impa.br/lucianojunior/.

Livro do professor P. Petersen, *Riemannian Geometry*.

Livro do professor J. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*.