Daniel González Casanova Azuela
Prof. Luis Florit github.com/danimalabares/rg

Exercícios de Geometria Riemanniana

Índice

1 Exercícios de do Carmo

1.1 Capítulo 0

Exercise 2 Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não seja).

Solution. Es porque la diferencial de los cambios de coordenadas está dada por la identidad y una matriz lineal. Sí, porque por definición las trivializaciones locales de TM preservan la primera coordenada **y** son isomorfismos lineales en la parte del espacio vectorial. Entonces queda que

$$d(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & \xi \in \mathsf{GL}(n) \end{array}\right)$$

pero no estoy seguro de por qué ξ preservaría orientación, i.e. que tenga determinante positivo… a menos de que… □

Exercise 5 (Mergulho de $P^2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^4$) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \qquad (x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Oberve que a restrição $\varphi := F|_{S^2}$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \qquad [p]\text{=clase de equivalência de } p = \{p, -p\}$$

Prove que

(a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.

(b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de $\mathbb{R}P^2$, isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

Solution.

(a) Considere a carta $\{z = 1\}$. A representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, xy, x, y)$$

cuja derivada como mapa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ é

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é injetiva. Agora pegue a carta $\{x = 1\}$. Então a representão coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(y, z) \longmapsto (1 - y^2, y, z, yz)$$

e tem derivada

$$\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & y \end{pmatrix}$$

que também é injetiva. Seguramente algo análogo acontece na carta $\{y = 1\}$.

(b) $\tilde{\varphi}$ é injetiva. Pegue dois pontos $p_1 := [x_1 : y_1 : z_1]$ e $p_2 := [x_2 : y_2 : z_2]$ e suponha que $\tilde{\varphi}(p_1) = \tilde{\varphi}(p_2)$. I.e.,

$$x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \qquad x_1 y_1 = x_2 y_2, \qquad x_1 z_1 = x_2 z_2, \qquad y_1 z_1 = y_2 z_2$$

Suponha primeiro que $z_1 \neq 0$. Segue que

$$x_1 = \frac{z_2}{z_1} x_2, \qquad y_1 = \frac{z_2}{z_1} y_2$$

logo

$$x_2^2 - y_2^2 = x_1^2 - y_1^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 (x_2^2 - y_2^2) \implies z_2 = z_1 \implies x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2$$

Em fim, uma imersão injetiva com domínio compacto é um mergulho porque é fechada: pegue um fechado no domínio, vira compacto, imagem é compacta, que é fechado. Pronto. .

□

1.2 Capítulo 1

Exercise 1 Prove que a aplicação antípoda $A : S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ tal que a projeção natural $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ seja uma isometria local.

Solution. Lembre que a métrica de S^n é a induzida pela métrica euclidiana, onde pensamos que $T_p S^n \hookrightarrow T_p \mathbb{R}^{n+1}$. É claro que A é uma isometría de $\mathbb{R}^n$, pois ela é a sua derivada (pois ela é linear), de forma que $\langle v, w \rangle_p = \langle -v, -w \rangle_{A(p)} = \langle v, w \rangle_{-p}$.

É um fato geral que se as transformações de coberta preservam a métrica, obtemos uma métrica no quociente de maneira natural, i.e. para dois vetores $v, w \in T_p \mathbb{R}P^n$ definimos $\langle v, w \rangle_p^{\mathbb{R}P^n} := \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)}$.

Para ver que a projeção natural é uma isometria local basta ver que a diferencial de A é um isomorfismo em cada ponto. Mas como ela é $-A$, isso é claro. $\square$