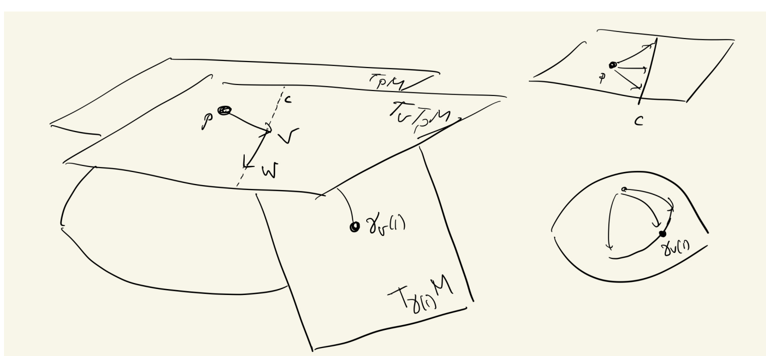
Exercício 1 (Lema de Klingenberg, [?], Cap. X, Exer. 1) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leqslant K_0$ onde K_0 é uma constante positiva. Sejam $p, q \in M$ e seja γ_0 e γ_1 duas geodésicas distinas unindo p a q com $\ell(\gamma_0) \leqslant \ell(\gamma_1)$. Admita que γ_0 é homotópica a γ_1, isto é, existe uma família contínua de curvas α_t, $t \in [0,1]$ tal que $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_1 = \gamma_1$. Prove que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\ell(\gamma_0) + \ell(\alpha_{t_0}) \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}$$

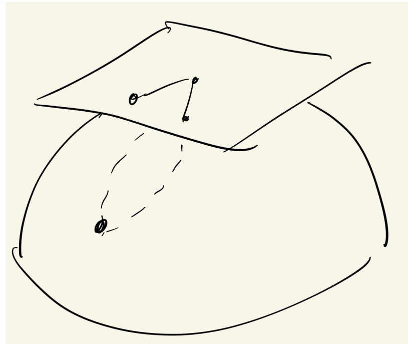
Solução. Primeiro vou mostrar como usar o teorema de Rauch para assegurar que para qualquer $p \in M$, a exponencial em $p \in M$ não possui pontos críticos na bola de raio $\pi/\sqrt{K_0}$ centrada em $0 \in T_pM$.

O seguinte argumento mostra que qualquer geodésica γ com velocidade unitária partindo de p não possui pontos conjugados antes de alcançar comprimento $\pi/\sqrt{K_0}$. Fixe um campo de Jacobi $J \in \mathfrak{X}^J_\gamma$ tal que $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. Para aplicar Rauch, considere uma geodésica unitária $\tilde{\gamma}$ em $S^n_{K_0}$, a esfera de curvatura constante K_0, e um campo de Jacobi $\tilde{J} \in \mathfrak{X}^J_{\tilde{\gamma}}$ tal que $\tilde{J}(0) = 0$, $\langle \tilde{J}, \tilde{\gamma}' \rangle = 0$ e $|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|$. ($\tilde{J}$ existe por ser a solução da equação de Jacobi junto com a condição de ortogonalidade com $\tilde{\gamma}'$.) Como $K \leqslant K_0$, pelo lema de Rauch concluímos que $0 \leqslant |\tilde{J}| \leqslant |J|$ para $t < \pi/\sqrt{K_0}$.

Agora vou argumentar por que isso assegura que $\exp_p$ não pode ter pontos críticos em $p \in M$. Por contrapositiva, suponha que $\exp_p$ tem um ponto crítico em $v \in T_pM$ e vamos mostrar que existe um ponto conjugado q a p ao longo de γ. Como v é um ponto crítico de $\exp_p$, existe um vetor não nulo $w \in \ker d_v \exp_p$. Considere uma curva $c(s)$ tal que $c(0) = v$ e $c'(0) = w$. Temos a seguinte variação por geodésicas de γ: $\gamma_{c(s)}(t) = \exp_p(tc(s))$. Note que em $t = 0$ todas as geodésicas ficam em p, pelo que o campo variacional J se anula em p. O fato de que $d_v \exp_p(w) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(c(s)) = 0$, é exatamente o fato de que o campo variacional J se anula em $q = \gamma_v(1)$.



Portanto, $\exp_p$ é um difeomorfismo local sobrejetivo em $B_{\pi/\sqrt{K_0}}$, mas pode não ser injetivo:



Note que podemos levantar tanto γ_0 quanto γ_1 por ser geodésicas, i.e. pegamos os vetores velocidade de cada uma e as linhas que eles geram no espaço tangente a p; é claro que essas curvas são levantamentos de $\exp_p$. Note que se levantássemos a homotopia completa, necessariamente $\gamma_0 = \gamma_1$. Isso segue simplesmente de que não pode ter uma família contínua de curvas começando em um ponto e terminando em outro.

Dúvida Como estão construídos os levantamentos das curvas perto de γ_0? Em [**?**] simplesmente se afirma que é claro que podemos levantar as curvas perto de γ_0, mas que não será possível levantar a homotopia completa.

Eu só sei que podemos levantar γ_0 e γ_1 usando as velocidades delas e o fato de que $\exp_p$ manda esses vetores em essas curvas; mas as outras curvas da homotopia não são geodésicas e esse argumento não aplica.

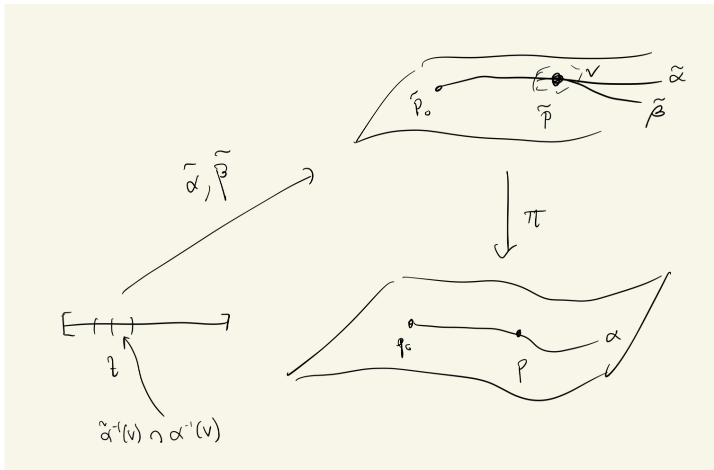
Para entender melhor a construção consultei [**?**]. Cap. 5., sec. 6. Prop. 2, que estabelece a existência e unicidade dos levantamentos de curvas (ou "caminhos") *no caso das aplicações de recobrimento*. A prova da unicidade parece válida para homeomorfismos locais, e como é parecida ao argumento de achar um conjunto aberto e fechado dentro do intervalo (como na sugestão do nosso exercício), achei bom passar em limpo. Mas **pode pular**, essa prova não é importante para a discussão que segue.

Unicidade de levantamentos para aplicações de recobrimentos Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ é homeomorfismo local, $\alpha : [0, \ell] \to B$ um caminho em B e $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ um ponto de $\tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Se existe um levantamento $\tilde{\alpha} : [0, \ell] \to \tilde{B}$ de α com origem em $\tilde{p}_0$, **ele é único**.

Demostração. Suponha que existe outro levantamento $\tilde{\beta} : [0, \ell] \to \tilde{B}$ de α com origem em $\tilde{p}_0$. Seja $A \subset [0, \ell]$ o conjunto de pontos onde $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ coincidem. Ele é fechado porque se pegamos uma sequência de pontos dentro de ele, por continuidade tanto de $\tilde{\alpha}$ quanto de $\tilde{\beta}$ o ponto limite irá ficar dentro de A.

Para ver que é aberto considere um ponto $t \in A \subset I$. Vamos mostrar que existe uma vizinhança dele totalmente contida em A. Defina $\tilde{p} := \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}$ (que vale porque pegamos $t \in A$). Pegue uma vizinhança V de $\tilde{p}$ onde π seja um homeomorfismo. Como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são contínuas, as imagens inversas de V sob $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ podem ser intersectadas para produzir uma vizinhança I_t de t.

Só falta ver que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ coincidem em I_t. Como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são levantamentos, sabemos que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \pi \circ \tilde{\beta}$. Como π é um homeomorfismo em V, podemos inverter ele para concluir que $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ nessa vizinhança.



□

Porém o que realmente nos compete aqui é a existência dos levantamentos. O problema é que isso não vale para difeomorfismos (ou homeomorfismos) locais arbitrários. A prova de existência de levantamentos em **[?]** para aplicações de recobrimento pode ser resumida assim:

(a) Para cada $t \in I$ podemos considerar uma **vizinhança distinguida** de $\alpha(t)$. Ou seja, uma vizinhança de $V_t \ni \alpha(t)$ tal que $\pi^{-1}(U_t)$ é uma união disjunta de abertos de $\tilde{M}$ onde π se restringe a um homeomorfismo. Note que isso não existe em nosso caso; apenas podemos garantir a existência de uma vizinhança de $\alpha(t)$ onde π se restringe a um difeomorfismo.

(b) Usando a compacidade do intervalo junto com a continuidade de α podemos cobrir o caminho $\alpha(I)$ com uma quantidade finita de abertos.

(c) Considere o primeiro deles, I_0. Como π se restringe a um homeomorfismo nessa vizinhança, podemos levantar esse pedacinho da curva α como sendo simplesmente a preimagem de $\alpha(I_0)$ sob π a algum dos abertos disjuntos que são a preimagem da vizinhança distinguida. Isso vale para nosso difeomorfismo local na preimagem do aberto em que $\exp_p$ é um difeomorfismo.

(d) Considere agora I_1, o seguinte intervalo. Deve existir um ponto $t \in I_1 \cap I_0$. A imagem inversa de π em V_1 é uma união disjunta de abertos distinguidos, **um dos quais deve intersectar** V_0 simplesmente por definição de conjunto. O lance é que **toda** a imagem inversa de V_0 é uma união de abertos distinguidos e por isso podemos garantir que um deles intersecta o aberto distinguido onde começamos nosso levantamento.

No caso de $\exp_p$, embora podemos garantir que existe um aberto onde $\exp_p$ se restringe a um homeomorfismo, não temos como garantir que essa vizinhança intersecta vizinhança onde começou o levantamento.

Continuando com a construção, como π se restringe a um homeomorfismo em V_1 podemos definir um levantamento novamente como a imagem inversa sob π.

Como já provamos unicidade e **os levantamentos coincidem num ponto**, o segundo levantamento coincide com o primeiro na interseção $I_0 \cap I_1$.

(e) Podemos fazer esse processo para o número de intervalos, que é finito, obtendo um único levantamento de α.

Finalmente vamos dar uma olhada à prova do levantamento de homotopias para homeomorfismos locais com a propriedade de levantamento de curvas, Prop. 3 em [**?**], Cap. 5, Sec. 6. A estratégia é clara: dada uma homotopia no espaço base, definimos a homotopia no espaço total como sendo o levantamento de cada uma das curvas na base usando fortissimamente a propriedade de levantamento de curvas. A prova consiste em provar unicidade (análoga à unicidade de levantamentos de curvas) e a continuidade da homotopia levantada.

Então parece que essa prova não vai ajudar no nosso caso: **não vejo como garantir o levantamento de nenhuma curva além de γ_0 ou γ_1, mesmo que esteja perto de γ_0 com respeito ao parâmetro da homotopia**.

Por fim, esse problema fica resolvido se fixamos nossa atenção só nos abertos que obtemos usando que $\exp_p$ é um difeomorfismo local ao longo de γ_0. Desse jeito conseguimos construir por pedaços, usando que $\exp_p$ é um homeomorfismo em cada aberto e a unicidade dos levantamentos em cada interseção, um levantamento de qualquer curva que esteja completamente contida na união dos abertos gerados ao longo de γ_0.

Note que esse processo pode ser feito de novo para qualquer curva que já tenhamos conseguido levantar. É tentador pensar que se todas as curvas da homotopia estivessem contidas em $B_{\pi/\sqrt{K_0}}(p) \subset M$ poderíamos levantar toda a homotopia. Porém,

afirmação (extra) nem todo difeomorfismo local tem a propriedade de levantamento de homotopias, i.e. dada uma homotopia $h : I \times I \to M$ e um levantamento da primeira curva, não temos como garantir que existe um levantamento da homotopia completa.

Contraexemplo. Considere

$$\begin{aligned} (0,2) &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Considere uma homotopia entre um caminho constante e um caminho que da 100 voltas ao círculo:

$$\begin{aligned} h : I \times I &\longrightarrow S^1 \\ h_s(t) &= e^{2\pi i 100 s t} \end{aligned}$$

O primeiro caminho $h_0(t)$ é o caminho constante 1. O último caminho $h_1(t)$ é o laço que da 100 voltas ao círculo. É possível levantar o primeiro caminho, mas não o último:

$$\begin{tikzcd} & (0,2) \arrow[d, "e^{2\pi i t}"] \\ I \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] \arrow[r, "h"] & S^1 \end{tikzcd}$$

se existisse um caminho $\tilde{h}_1(t)$ que comuta com a projeção, teríamos

$$e^{2\pi i \tilde{h}_1(t)} = e^{2\pi i 100 t} \implies e^{2\pi i(\tilde{h}_1(t) - 100t)} = 1 \implies \tilde{h}_1(t) - 100t \in \mathbb{Z}$$

Então deve existir um número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{h}_1(t) = 100t + n$, absurdo, pois $\tilde{h}_1(t) \in (0,2)$, e essa função começa em n e termina em $100 + n$. □

Então **não podemos garantir que existe uma curva que sai da bola** $B_{\pi/\sqrt{K_0}}(p) \subset M$. Porém, como aponta Manfredo, podemos garantir que existem curvas arbitrariamente perto do bordo dela.

Então suponha que existe um $\varepsilon > 0$ que tal que o levantamento de toda curva (da nossa homotopia) que possa ser levantada esteja a distância $\geqslant \varepsilon$ do bordo de $B_{\pi/\sqrt{K_0}} \subset T_p M$. Isso muda completamente o scenario porque o espaço total agora é completo.

Lembre que a prova do teorema de Hadamard feita em sala recai sobre o seguinte lema:

lema 2 Seja $f : \tilde{M} \to M$ é um difeomorfismo local, onde $\tilde{M}$ **é completo**, e suponha que $|f_{*,p} v| \geqslant |v|$ para todo $v \in T_p M$ e todo $p \in M$. Então f levanta curvas e portanto é uma aplicação de recobrimento.

Mas isso não é exatamente o que precisamos, pois o novo domínio da exponencial, $B_\varepsilon(0)$, embora compacto, não é completo, pois ele tem bordo e o domínio maximal das geodésicas não é $\mathbb{R}$. Porém, a prova do lema 2 usa só a **completude métrica** do espaço total:

Prova do lema 2. Suponha que uma curva $\alpha : I \to M$ pode ser levantada a uma curva $\tilde{\alpha} : [0, r) \to \tilde{M}$. Considere uma sequência $t_n \to r$, e as sequências $\alpha(t_n)$ e $\tilde{\alpha}(t_n)$. Note que $\alpha(t_n)$ é de Cauchy, pois $\alpha(r)$ está bem definito. Então $\tilde{\alpha}(t_n)$ também é de Cauchy:

$$d(\tilde{\alpha}(t_n), \tilde{\alpha}(t_m)) \leqslant \int_{t_n}^{t_m} |\tilde{\alpha}'| \leqslant \int_{t_n}^{t_m} |f_* \tilde{\alpha}'| = \int_{t_n}^{t_m} |(f \circ \tilde{\alpha})'| = \int_{t_n}^{t_m} |\alpha'|$$

Quando $n, m \to \infty$, o número da direita vai pra zero. Como $\tilde{M}$ é completa, a sequência de Cauchy $\tilde{\alpha}(t_n)$ é convergente a um ponto $\tilde{\alpha}(r)$.

Isso mostra que o conjunto de parâmetros tais que α pode ser levantada é fechado. Mas também é aberto: se $\alpha(t)$ é levantado, como f é um difeomorfismo local, podemos levantar um vizinhança pequena de α definindo-a como a imagem inversa local de f. $\square$

A parte do argumento que prova que o conjunto de parâmetros levantáveis é fechado pode ser usado no nosso exercício para mostrar que podemos levantar qualquer curva cujo parâmetro seja um ponto limite do conjunto de curvas levantáveis; i.e. que **o conjunto de parâmetros de curvas levantáveis é fechado**.

Também é aberto: podemos achar uma vizinhança pequena de qualquer parâmetro tal que toda curva dentro dessa vizinhança esteja contida na união das vizinhanças onde $\exp_p$ é um difeomorfismo local ao longo da curva levantável—como já fizemos antes.

Então o conjunto de curvas levantáveis seria todo o intervalo, absurdo, e concluímos que existem curvas cujos levantamentos estão arbitrariamente próximos a $\partial B_{\pi/\sqrt{K_0}}(0)$.

Nessa hora da nossa discussão já usamos a propriedade expansora da exponencial: $|d_v \exp_p w| \geqslant |w|$. Então repare: o tamanho dos vetores em cima é arbitrariamente próximo a $\pi/\sqrt{K_0}$. Então o comprimento das curvas em baixo está forçado a se aproximar ao mesmo número:

$$\ell(\alpha) = \int_0^1 |\alpha_t'| = \int_0^1 |(\exp_p \circ \tilde{\alpha})'| = \int_0^1 |d_{\tilde{\alpha}} \exp_p(\tilde{\alpha}')| \geqslant \int_0^1 |\tilde{\alpha}'| = \ell(\tilde{\alpha}) > \frac{\pi}{\sqrt{K_0}} - \varepsilon$$

(em algum momento me esqueci de que a constante realmente era $2\pi/\sqrt{K_0}\ldots$)