

# Geometria Riemanniana

## Índice

<b>1</b>	<b>Aula 1</b>	<b>1</b>
1.1	Lembrando . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Aula 2</b>	<b>5</b>
2.1	Fibrados vetoriais . . . . .	5
2.1.1	Tensores . . . . .	7
2.2	Grupos de Lie . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Aula 3: A primeira aula</b>	<b>13</b>
3.1	Lembrando geometria diferencial de curvas e superfícies . . . . .	13
3.2	Riemann . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Aula 5</b>	<b>19</b>
4.1	Todo fibrado vetorial pode ter métrica . . . . .	19
4.2	Comprimento de curvas, distancia, $M$ como espaço métrico . . . . .	19
4.3	Conexão afim . . . . .	20

## 1 Aula 1

### 1.1 Lembrando

**Definição** *Variedade diferenciável*

1.  $M$  espaço topológico Hausdorff ( $T^2$ ), base enumerável. Essas duas condições são equivalentes à existência de partições da unidade.
2.  $M$  localmente euclídeo, i.e.  $\mathcal{A} = \{(\chi_\lambda, U_\lambda)\}$ ,  $\chi_\lambda : U_\lambda \subset M \rightarrow \chi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ , com  $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$ . Dizemos que  $n$  é a **dimensão** de  $M$ .
3. Restringindo dois abertos  $U_\lambda, U_\mu$  com  $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ , a **mudança de coordenadas**  $\chi_\mu \circ \chi_\lambda^{-1} : \chi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \chi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$  deve ser diferenciável. (Nesse curso diferenciável é  $C^\infty$  a menos que especifiquemos).
4. Maximalidade, i.e.  $\mathcal{A}$  é maximal.

**Definição (Mapa diferenciável)**  $f : M^n \rightarrow N^m$  se para todo ponto com cartas  $(x, U)$  de  $M$  e  $(y, V)$  de  $N$  o mapa  $y \circ f \circ x^{-1}$  é diferenciável. Denotaremos o conjunto de funções diferenciáveis por  $\mathcal{F}(M, N)$ . Em particular  $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ .

**Definição (Espaço tangente)**  $\mathcal{F}_p(M)$  é o espaço de funções definidas num aberto de  $p$  identificando duas delas se coincidem em qualquer aberto contendo  $p$ .

$$T_p M := \{v \in \mathcal{F}_p(M)^* : v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)\}$$

**Pergunta**  $\mathcal{F}_p(M)$  es el stalk de la gavilla de funciones suaves? Qué pasa si definimos algo como las derivaciones en  $\mathcal{F}(U)$ .

A la hora de definir base de  $T_p M$  con los operadores  $\partial_i$  necesitamos fijar una carta, así que en realidad no hay una base canónica de  $T_p M$ .

**Definição (Diferencial de uma função)**

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

definida para  $g \in T_{f(p)} N$  como

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f)$$

**Observação** A regra da cadeia é uma tautologia dessa definição!

**Definição (Base canônica do espaço tangente)** Definimos

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M$$

como, para  $g \in T_p M$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (g) = \frac{\partial(g \circ x^{-1})}{\partial u_i}$$

**Exercício** Mostre que  $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$  é uma base de  $T_p M$ .

*Solution.* Primeiro note que  $\{\partial_i|_p\}$  é linearmente independente. Suponha que

$$\sum a_i \partial_i|_p = 0$$

Then for every function this gives zero, so in particular for coordinate functions  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so

$$0 = \left( \sum a_i \partial_i \right) x_j = \sum a_i \delta_{ij} = a_j \quad \text{for all } j.$$

Now let's check  $\text{span } \partial_i|_p = T_p M$ . Choose a vector  $v \in T_p M$  and let

$$w := v - \sum_i v(x_i) \partial_i|_p.$$

We wish to show that  $w = 0$ .

Then there's the following trick: a function  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  with  $g(0) = 0$  can be written  $g(t) = th(t)$  for some continuous function  $h$  (subexercise: construct  $h$ , it's an integral). So if we define  $\tilde{g}(t) = g(t) - g(0)$  we can write for any  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (without asking that  $g(0) = 0$ ) just  $g(t) = g(0) + th(t)$

**Subexercise** Mostre que para toda  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existe  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $g(t) = g(0) - th(t)$ . **Solution.** Let  $m_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be the function that multiplies  $t$  times a fixed number  $x$ . Notice that, for a fixed  $x$ , by fundamental theorem of Calculus

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(x) - g(0)$$

and also

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 g'(xt) \cdot x = x \int_0^1 g'(xt)dt$$

Then we define

$$h(x) := \int_0^1 g'(xt)dt$$

and immediately we get  $g(x) = g(0) - xh(x)$ .

**Subsubexercise** Now do that for  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . I think the correct claim is that there exists  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that for every  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  we have  $g(\vec{x}) = g(\vec{0}) + \vec{x} \cdot h(\vec{x})$ . **Solution.** Now  $m_x$  multiplies the vector  $x$  times the real number  $t$ , it is a function  $m_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . We get

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = g(\vec{x}) - g(\vec{0}).$$

And also

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(g \circ m_x)(t)dt = \int_0^1 \nabla_{t\vec{x}} g \cdot \vec{x} dt = \int_0^1 \sum \frac{\partial}{\partial x_i} g \Big|_{t\vec{x}} x_i dt = \sum x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{t\vec{x}} dt.$$

Definimos

$$h(\vec{x}) := \left( \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{t\vec{x}} dt, \dots, \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{t\vec{x}} dt \right)$$

**Back to the original exercise...** Let's try to use this trick to conclude that  $w(g) = 0$  for all  $g \in \mathcal{F}_p$ . Since it's a local statement I just suppose that  $g$  is a function  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Then there is a function  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that for every  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(x) = g(0) + x \cdot h(x)$ .

Right so remember that I chose an arbitrary vector  $v \in T_p M$  and defined  $w = v - \sum v(x_i) \partial_i|_p$ . I can see that  $w(x_i) = 0$  for all coordinate functions  $x_i$ . But also for  $g$  as above I get

$$\begin{aligned} w(g) &= w(g(0) + x \cdot h(x)) = w(x \cdot h(x)) = w\left(\sum x_i h_i(x)\right) = \sum w(x_i h_i(x)) \\ &= \sum \cancel{w(x_i)}^0 h_i(x) + x_i h_i(x) \end{aligned}$$

and the second term also vanishes if we suppose that the coordinates of our point,  $x_i$ , are all zero. **Which makes me think: I think that's the point of the trick, that it somehow manages to put the coordinates of the point inside the whole thing, and then we can suppose the coordinates are 0 and simplify everything.**  $\square$

**Definição (Fibrado tangente)** Como os  $\mathcal{F}_p(M)$  são disjuntos, porque  $M$  é Hausdorff, os espaços tangentes são disjuntos para pontos distintos.

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

com a estrutura diferenciável que você já conhece.

A projeção natural  $\pi : TM \rightarrow M$  é uma sumersão no sentido da seguinte definição. (Exercício?)

**Definição (Imersão e sumersão)**

1. Imersão se para todo  $p \in M$ ,  $df_p$  é injetiva (e isso implica que  $n \leq m$ ).
2. *Sumersão* de  $df_p$  é sobrejetiva para todo  $p$ , implica que  $n \geq m$ .
3. *Difeomorfismo local* se para todo ponto  $df_p$  é um isomorfismo. Isso é equivalente a que para todo ponto existe um aberto tal que  $f|_U : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo (teo. função inversa). (Checar.)

Note que  $f : M \rightarrow N$  contínua é como dizer que a topologia induzida por  $f$ ,  $\tau_f \subset \tau_M$ . Mas a igualdade nem sempre tem (e.g. figura 8).  $f$  é um *mergulho* se  $\tau_f = \tau_M$ . Isso é equivalente a que  $f(M) \subset N$  seja uma subvariedade e  $f : M \xrightarrow{\text{difeo}} f(M) \subset N$ .

**Definição (Campo coordenado)** Numa vizinhança  $U$  de  $p$ ,

$$\begin{aligned} \partial : U &\longrightarrow TU \subset TM \\ p &\longmapsto \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \in T_p M \end{aligned}$$

**Observação** Podemos quase estender esse campo. Num aberto  $V \subset U$  cujo fecho  $\bar{V} \subset U$ . Pega a cobertura  $\{M \setminus \bar{V}, U\}$ . Então existe part. unidade  $(\xi, \varphi)$ . Por definição,  $\varphi|_V = 1$ . Defina  $x = \varphi \partial_i$ .

**Definição (Fibrado vetorial)** Um *fibrado vetorial*  $E^k$  sobre  $M^n$  de posto  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  é

1.  $\pi : E \rightarrow M^n$  submersão sobrejetiva.
2.  $\forall p \in M$ ,  $E_p = \pi^{-1}(p)$  é um  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimensão  $k$ .
3.  $\forall p \in M$ , existe  $U \subset M$  e  $\varphi_U$  tal que
  - (a)  $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\text{dif}} U \times \mathbb{R}^k$ .
  - (b)  $\varphi_U$  conmuta con la proyección, i.e.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

(c)  $\forall q \in U, \varphi|_{E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$  é um isomorfismo linear.

Isso é equivalente a pedir que exista um *atlas trivializante* de  $E$ . É  $\{(\varphi, \underbrace{\pi(U)}_{\subseteq E}) : U \in \Lambda \subset \tau_M\}$  es decir una familia de abertos en  $E$  indexada por una familia de abertos de  $M$ . Considere dos de estos abertos con  $W := U \cap V \neq \emptyset$ .

$$\begin{array}{ccc} \varphi_U|_{\pi^{-1}(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \times \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \\ \varphi_V|_{\pi^{-1}(W)}\pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

onde estamos parametrizando numa variedade! Ou seja, implicitamente estamos pegando cartas nela, mas podemos deixá-lo assim.

Temos as funções de transição

$$\varphi_{VU} = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{W \times \mathbb{R}^k} : W \times \mathbb{R}^k \rightarrow W \times \mathbb{R}^k$$

que realmente estão determinadas por a parte linear:

$$\varphi_{VU}(Q, v) = (Q, \xi_{VU}(Q)(v))$$

onde

$$\xi_{VU} : W \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

e são chamadas de *funções de transição* de  $E$ . Elas satisfazem

$$\xi_{VU} \circ \xi_{SV} = \xi_{SU} \quad \text{cocycle condition}$$

$$\text{no seria...} \quad \xi_{VU} \circ \xi_{US} = \xi_{VS}$$

Então podemos formar um fibrado vetorial a partir das funções de transição só.

## 2 Aula 2

### 2.1 Fibrados vetoriais

**Definição** Um *fibrado vetorial* é uma submersão sobrejetora

$$\pi : E \rightarrow M$$

onde  $\pi$  é a *projeção*,  $E$  o *espaço total* e  $M$  a *base*. Satisfazendo

1.  $E$  possui um *atlas trivializante*, i.e. para todo  $p \in M$  existe  $U \ni p$  aberto e carta

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\text{difeo}} U \times \mathbb{R}^k$$

tal que

- $\pi \circ \varphi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$
- Se  $W = U \cap V \neq \emptyset$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{W \times \mathbb{R}^k} : W \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow W \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\longmapsto (p, \xi_W(p)(v)) \end{aligned}$$

onde pedimos que  $\xi_{V \cap U} : W \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ , e chamamos essas funções de **funções de transição** de  $E$ .

Note que as fibras são espaços vetoriais: para  $Q \in U$ ,  $E_Q \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(Q) \subset E$ . Pegue dois elementos  $x, y \in E_Q$ . Definimos a soma deles a través de

$$\varphi(x + y) = (Q, \bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)) = (Q, \bar{\varphi}(x + y))$$

onde  $\bar{\varphi}$  é a parte “linear”. Note que isso faz automaticamente que as trivializações sejam lineares nas fibras, i.e.  $E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$  linear.

**Definição** As **seções** de  $E$  são

$$\Gamma(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda : M & \xrightarrow{\quad} & E \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \\ & & M \end{array} \right\}$$

**Pergunta** Existe uma coleção de  $k$  seções que são uma base de  $T_p M$  em cada ponto? Não.

**Observação** Existe uma base de seções iff  $E \cong M \times \mathbb{R}^k$ . Mas isso ainda nem tem sentido...

**Definição** Um **mapa de fibrados** é

$$\begin{array}{ccc} F : E & \longrightarrow & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

que é linear nas fibras, i.e.

$$F|_{E_Q} : E_Q \rightarrow E'_{f(Q)}.$$

$F$  é um **isomorfismo** de fibrados vetoriais iff  $F$  é um difeomorfismo e um mapa de fibrados. (Obviamente isso implica que a inversa é um mapa de fibrados.)

**Observação** Todo fibrado vetorial possui uma base *local* de seções. Porque pego uma base em  $U \times \mathbb{R}^k$  numa trivialização local e pusho ela pra  $\pi^{-1}(U)$ .

**Exemplo (Fibrado dual)** A observação anterior nos dá um jeito super simples de construir o fibrado dual: para cada trivialização local, e para cada ponto definimos a base dual do espaço vetorial original no ponto, e é isso, tudo segue.

Outros exemplos podem ser construídos do mesmo jeito:  $\text{End}(E)$ ,  $\Lambda^r(\mathbb{V})$ . A ideia é que “a álgebra linear pode ser fibrada por causa de que temos bases locais”.

### Exemplo

Outro exemplo, embora não é um fibrado vetorial, é o conjunto de orientações de  $\mathbb{V}$ ,  $\mathcal{O}(\mathbb{V}) := \{\text{bases de } \mathbb{V}\} / \sim$ . Definimos um **fibrado orientável** se  $\mathcal{O}(E)$  tem uma seção global. Isso se traduz a que em cada ponto exista uma carta tal que a orientação.. seja compatível?

Também podemos definir  $M$  **orientável** se  $TM$  orientável *como fibrado*.  $TM$  sempre é orientável *como variedade* porque  $TTM$  é orientável *como fibrado*.

**Exemplo (Tensores=aplicações multilineares)** Pega  $\mathbb{V}$  esp. vect e considere os tensores  $\{T : \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}\} := \text{Multi}(E)$ . As seções disso são  $\mathfrak{X}^r(E)$ . No caso do fibrado tangente se denotam  $T \in \mathfrak{X}^r(M) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma TM$ , e se chamam **campos tensoriais**.

### 2.1.1 Tensores

Ver [Tu17], prop. 21.11 “The tensor criterion”: acho que em aula definimos  $\mathfrak{X}^r(M)$  como sendo o conjunto de mapas  $r$ -multilineares  $T : M \rightarrow \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{r \text{ vezes}}$ , mas na verdade

deveria ser  $(T^*M)^r := \bigotimes_r T^*M$ . (Devemos pegar produto tensorial para construir um fibrado vetorial certinho.)

**Exercício** Mostre que os seguintes dois  $\mathcal{F}(M)$ -módulos são isomorfos:

$$\left\{ \begin{array}{l} T : M \longrightarrow (T^*M)^r \\ p \longmapsto \underbrace{T(p) : (T_p M)^r \longrightarrow \mathbb{R}}_{r\text{-}\mathbb{R}\text{-multilinear}} \quad \text{suave} \end{array} \right\} = \Gamma((T^*M)^r) = \{\text{seções suaves de } (T^*M)^r\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T} : \mathfrak{X}^r(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ X_1, \dots, X_r \longmapsto \hat{T} : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad r\text{-}\mathcal{F}(M)\text{-multilinear} \end{array} \right\}$$

*Solução.* Defina o primeiro conjunto como  $A$  e o segundo como  $B$ . Pegue  $T \in A$  e defina

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathfrak{X}^r(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ V_1, \dots, V_r &\longmapsto \hat{T} : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto T(p)(V_{1,p}, \dots, V_{r,p}) \end{aligned}$$

Ao contrário, pegue  $\hat{T} \in B$  e defina

$$\begin{aligned} T : M &\longrightarrow (T^*M)^r \\ p &\longmapsto \begin{array}{l} T(p) : (T_p M)^r \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_r) \longmapsto \hat{T}(V_1, \dots, V_r) \end{array} \end{aligned}$$

onde  $V_i$  é uma extensão de  $v_i$  usando partição da unidade.

O lance em [Tu17] é usar a propriedade universal do tensor product (qualquer mapa  $A \times B \rightarrow X$  se factora por um único mapa  $A \otimes B \rightarrow X$ ...) para comprovar a suavidade daquele mapa.  $\square$

**Upshot (del ejercicio)** Que es lo mismo pensar en un operador que come campos vectoriales y da funciones, o un campo *\*covectorial\**, una cosa que en cada punto me da un operador que come vectores.

**Siguiente cosa (A dupla personalidade dos campos vectoriais)** Que podemos pensar que los campos vectoriales son derivaciones.  $\hat{X} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ . Sí porque un campo de vectores en un punto puede ser evaluado en una función y da un número, y bueno satisface Leibniz.

Va otra construcción:

E, pega  $\Lambda^r(E)$ , os mapas  $r$ -alternantes de  $E$ , que é um fibrado vetorial. As seções dele,  $\Gamma(\Lambda^r E)$ . No caso do fibrado tangente,  $\Omega^r(M) := \Lambda^r(TM)$ . Entonces a ver de nuevo: pega  $\omega \in \Lambda^r TM$ . En cada punto me da una aplicación  $r$ -multilinear alternante, pero también lo puedo ver como un mapa  $\omega : \mathcal{X}M \times \dots \times \mathcal{X}M \rightarrow \mathcal{F}M$ .

**Exercício**  $M^n$  é orientável  $\iff \Lambda^n M$  possui seção nunca nula.

*Desastre.* ( $\implies$ ) Em cada ponto  $p \in M$  temos uma base orientada  $\{e_i\}$  de  $T_p M$ . Essa base me permite expressar qualquer coleção de  $n$  vetores  $v_1, \dots, v_n \in T_p M$  como uma matriz  $(v_j^i)$ . O determinante dessa matriz é uma  $n$ -forma alternante.

Note que essa função **não** está bem definida na classe de equivalência: bases diferentes que estão na mesma orientação podem ter determinantes bem diferentes. Definindo  $\omega_p(v_1, \dots, v_n) = \det v_j^i$  eu queria uma seção não nula de  $\Lambda^n M$ ... e daí mostrar que ela é suave...

( $\impliedby$ ) Pegue  $\omega \in \Lambda^n TM$ , qualquer ponto  $p \in M$  e uma base  $\{v_i\} \subset T_p M$  tal que  $\omega_p(v_i) = 1$ . Afirmando que  $p \mapsto [\{v_i\}] \in \mathcal{O}(M)$  é uma seção global de  $\mathcal{O}(M)$ . **Falta bastante...**

$\square$

*Solução.* ( $\implies$ ) It's a local-to-global situation, use partition of unity! É como a construção da métrica Riemanniana: pega um atlas localmente finito  $\{(U_\lambda, \chi_\lambda)\}$  e uma partição da unidade subordinada  $\{\rho_\lambda\}$ . Pega qualquer um desses abertos e define

$$\omega_{U_\lambda} := dx_1^\lambda \wedge \dots \wedge dx_n^\lambda$$

Some:

$$\omega := \sum_\lambda \omega_{U_\lambda}$$



Note que tá errado, isso pode dar zero em algum ponto. Some bem:

$$\omega := \sum_{\substack{\lambda \text{ t.q.} \\ \rho_\lambda > 0}} \omega_{U_\lambda}$$

( $\Leftarrow$ ) (Inspirado por [Lee13].) Pegue  $\omega \in \Lambda^n TM$ , qualquer ponto  $p \in M$ . Como  $\omega$  nunca é zero, não é zero em  $p$ , e por linearidade existe uma base  $\{v_i^p\} \subset T_p M$  tal que  $\omega_p(v_i^p) = 1$ . Defina uma orientação pontual (i.e. uma seção de  $\mathcal{O}(M)$ , *não necessariamente contínua* da seguinte forma: uma base qualquer de  $T_p M$  é orientada se está na mesma classe de equivalência que  $\{v_i^p\}$ .

Para ver que essa seção de  $\mathcal{O}(M)$  é contínua devemos mostrar (de acordo a [Lee13]) que em cada ponto  $p \in M$  existe um marco local que dá uma base orientada em cada ponto. Então pegue uma vizinhança coordenada de qualquer ponto  $p$  e considere a função  $f$  tal que

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Então

$$\omega(\partial_1, \dots, \partial_n) = f \text{ nunca se anula}$$

Então a base coordenada é sempre positiva ou sempre negativa (em  $U$ ). Pode supor que é sempre positiva botando um menos em qualquer função coordenada. Aí note que  $f$  também é

$$\omega(\partial_1, \dots, \partial_n) = \underbrace{\det C}_{=f} \omega(v_1^q, \dots, v_n^q) \quad \forall q \in U$$

Porque é assim o assunto da mudança de base... e aí acabou porque  $f = \det C > 0$ .

□

Lembre que  $\Omega_c^n(M)$  é o espaço de formas cujo suporte tem fecho compacto.

**Observação**  $M$  orientada  $\implies$  integral está bem definida. Sim, porque o teorema de mudança de variáveis diz que para  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\omega \in \Omega^n(V)$ ,  $\int_U \varphi^* \omega = \text{sign}(\varphi) \int_V \omega$ . Então para que não se faça uma bagunça precisamos que os determinantes das mudanças de coordenadas coincidam.

**Definição (Fibrado pullback)**

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

onde

$$f^*(E) = \{(p, v) \in M \times E : \pi(v) = f(p)\}$$

(Note que botamos o  $p$  em  $(p, v)$  para obter que o espaço total de  $f^*(E)$  seja uma coleção *disjunta* de fibras.)

Essa é uma definição ótima. Note que  $\pi_2$  é um mapa de fibrados que aparece de graça. (Não é um isomorfismo.)

**Observação** O pullback é mágico porque ele leva todas as propriedades de  $E$  como curvatura, conexão, etc.

**Observação** Se  $f$  é constante obtemos o fibrado trivial.

**Pergunta** Me queda claro que si  $f$  es constante, la fibra de  $f^*E$  siempre es  $(f^*E)_p \cong E_{f(*)} \dots$

**Observação** Pega  $\xi \in \Gamma(f^*E)$ . Então temos para  $p \in M$  um elemento  $\xi(p) = (p, \tilde{\xi}(p))$ . Então olha

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\xi} : M & \longrightarrow & E \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & N \end{array}$$

então essas seções se chamam de  $\mathfrak{X}_f \cong \Gamma(f^*(E))$  *seções ao longo de  $f$* .

Entonces el punto es que, por construcción cada sección del pullback me da un elemento en el otro vb y de ahí quiero que la proyección me devuelva  $f$ .

Note que para um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  temos um campo  $f_*X$  que *não é* um campo vetorial em  $N$ . É um campo vetorial com base  $M$  e espaço total  $f^*TN$ . Parecidamente, se  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ , obtemos um campo sobre  $M$  com valores em  $f^*TN$  mediante  $Y \circ f$ .

**Definição** Dos campos  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  están  *$f$ -relacionados*  $X \overset{f}{\sim} Y$  se  $Y \circ f = f_*X$  donde  $f : M \rightarrow N$ . Pero pérame porque a mí me habían dicho que no siempre  $f_*X$  está bien definido. Ah, porque aquí  $f_*X$  es un campo *ao longo de  $f$* ; así *siempre* está bien definido. Entonces tiene sentido la definición y el ejercicio:

**Exercício** Pegue  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $i = 1, 2$ . Mostre que

$$X_i \overset{f}{\sim} Y_i \implies [X_1, X_2] \overset{f}{\sim} [Y_1, Y_2]$$

**Hint.** Pensa que um campo é uma coisa que pega uma função e me da uma função.

*Solução.* Queremos ver que

$$f_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ f \in \mathfrak{X}_f$$

i.e. que esses campos são iguais *como campos vetoriais ao longo de  $f$* , que é um negócio bem estranho porque, de novo, o espaço base é  $M$  e o espaço total é  $f^*TN$  (que é bem parecido a  $TN$  mas não é  $TN$ —pode ser incluído eu acho).

E isso é super importante porque esclarece o jeito de proceder que é: pega  $p \in M$  e  $g \in \mathcal{F}(N)$ . Beleza então temos

$$\begin{aligned} \left( [Y_1, Y_2] \circ f \right)_p (g) &= Y_{1, f(p)}(Y_2(g)) - Y_{2, f(p)}(Y_1(g)) \quad \text{blz} \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} f_* X_{1,p}(Y_2(g)) - f_* X_{2,p}(Y_1(g)) \\ &\stackrel{\text{hip}}{=} f_* X_{1,p}(f_* X_2(g)) - f_* X_{2,p}(f_* X_1(g)) \\ &= f_* [X_1, X_2]_p(g). \end{aligned}$$

□

## 2.2 Grupos de Lie

**Definição** Um *grupo de Lie* é um grupo  $G$  que é uma variedade diferenciável tal que

$$\cdot : G \times G \rightarrow G \quad {}^{-1} : G \rightarrow G$$

são diferenciáveis.

Os grupos de Lie tem um monte de difeomorfismos dados pela multiplicação a esquerda:  $h \in G \rightsquigarrow L_h : G \rightarrow G, L_h(g) = h \cdot g$ . Como  $L_{h^{-1}} \circ L_h = \text{Id}$ ,  $L_h \in \text{Dif } G$ .

**Exercício**  $v \in T_e G, X_v(g) = d(L_g)_e(v) \in T_g G, \implies X_v \in \mathfrak{X}(G)$ . **Note** que vai precisar usar que o produto do grupo é diferenciável.

*Solução.* Basta mostrar que, pegando qualquer vizinhança coordenada de qualquer ponto  $g \in G$ , as funções coordenadas de  $X_v$  são diferenciáveis.

Pegue um sistema de coordenadas em  $g \in G$ , digamos  $(U, x)$ . Como  $L_g$  é um difeomorfismo, obtemos um sistema de coordenadas  $(L_{g^{-1}}(U), x')$  de  $e \in G$ . Suponha que  $v = \sum v^i \partial_i$  nessas coordenadas. Então

$$\begin{aligned} (d_e L_g)v &= (d_e L_g) \left( \sum v^i \partial_i \right) \\ &= \sum (v^i \circ L_g) d_e L_g \partial_i \end{aligned}$$

Então essas funções coordenadas são suaves: para  $h \in G$  temos

$$(v^i \circ L_g)(h) = v^i(gh)$$

que é suave porque é a composição de duas funções suaves, e porque o produto do grupo de Lie é suave. □

E aí fica que uma base  $\{v_i\} \subset T_e G$  nos dá uma base global de seções. Em outras palavras, o fibrado tangente de um grupo de Lie é trivial. Isso é raríssimo, uma variedade com fibrado tangente trivial, se chama variedade paralelizável.

**Observação**  $\forall g \in G, X_v \stackrel{L_g}{\sim} X_v$  para todo  $v \in T_e G$ . Acho que é por regra da cadeia. Queremos ver que em todo ponto  $g \in G$ ,

$$\left( (L_g)_* (X_v) \right)_h = (X_v)_h$$

então fica que

$$\left( (L_g)_* (X_v) \right)_h = \left( (d_{g^{-1}h} L_g)(d_e L_{g^{-1}h})v \right)_h = \left( d_e (L_g \circ L_{g^{-1}h})v \right)_h = \left( d_e L_h v \right)_h = (X_v)_h$$

Mas ainda, se um campo vetorial  $X$  está  $L_g$  relacionado com ele mesmo para todo  $g \in G$  (isso se chama ser *invariante à esquerda*), então ele é um  $X_v$  para algum  $v$ . Conta:

$$v := X_e \implies X_h = (L_{h,*} X)_h = (d_e L_h X_e)_h = d_e L_h v.$$

Então ai fica essa equivalência, e ademais, se pegamos  $v, w \in T_e G$  podemos pensar em  $X_v, X_w$ , e definimos  $X_{[v,w]} := [X_v, X_w]$ . E ai obtemos a *álgebra de Lie* de  $G$ , que é  $(T_e G, [,]) := \mathfrak{g}$ .

**Mais um** Pegue  $X \in \mathfrak{g}$  e  $\gamma$  curva integral de  $X$  passando por  $e$ , i.e.  $\gamma(0) = e$ . Prove que

1. Se  $\varphi_t$  é o fluxo de  $X \implies L_g \circ \varphi_t = \varphi_t \circ L_g, \varphi_t = R_{\gamma(t)}$ .
2.  $\gamma$  é homomorfismo de grupos  $\mathbb{R} \rightarrow G$ . Isso permite definir  $\exp^G : \mathfrak{g} \rightarrow G$  dada por  $\exp^G(X) = \gamma(1)$ . Prove que  $\exp^G(tX) = \gamma(t)$ .

**Hint.** O último implica os outros.

*Solução.*

1. Pegue  $h \in G$ . O único que sei de  $\varphi_t$  é que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(h) = X_h$$

E quero ver que

$$\varphi_t(gh) = (\varphi_t \circ L_g)(h) \stackrel{\text{quero}}{=} (L_g \circ \varphi_t)(h) = g\varphi_t(h) = L_g(\varphi_t(h))$$

Então derivo:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(gh) = X_{gh} \stackrel{\text{def}}{=} d_e L_{gh}(X_e) \stackrel{\text{chain rule}}{=} d_h L_g d_e L_h(X_e) \stackrel{\text{def}}{=} d_h L_g X_h = d_h L_g \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(h) \right)$$

de forma que as derivadas das coisas que quero que sejam iguais coincidem. Avaliando em  $t = 0$  vemos que as funções devem ser iguais.

A comprovação de que  $\varphi_t = R_{\gamma(t)}$  é análoga: definindo  $X := X_X$  (e é assim porque  $X \in \mathfrak{g}$ ), tenho duas funções

$$\begin{array}{ll} R_{\gamma(t)} : G \longrightarrow G & \varphi_t : G \longrightarrow G \\ g \longmapsto g \cdot \gamma(t) & g \longmapsto \text{integrar } X_g \text{ e avançar } t \end{array}$$

Derivo:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \cdot \gamma(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (L_g \circ \gamma)(t) \stackrel{\text{chain rule}}{=} d_e L_g \cdot \gamma'(0) = X_g = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(g)$$

avaliando em  $t = 0$  obtemos a igualdade.

2. Talvez tô errado mas acho que é o mesmo: queremos ver que

$$\gamma(t_1 + t_2) \stackrel{\text{quero}}{=} \gamma(t_1)\gamma(t_2) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\gamma(t_1)}\gamma(t_2)$$

então derivo respeito a  $t_2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_2}\Big|_{t_2=0} L_{\gamma(t_1)}\gamma(t_2) &\stackrel{\text{chain rule}}{=} d_{\gamma(0)} L_{\gamma(t_1)}\gamma'(0) = d_e L_{\gamma(t_1)} X_e \\ &= X_{\gamma(t_1)} \stackrel{\gamma \text{ curva integral}}{=} \gamma'(t_1) = \frac{d}{dt_2}\Big|_{t_2=0} \gamma(t_1 + t_2) \end{aligned}$$

e de novo, avaliando em  $t_2 = 0$  obtemos a igualdade.

Por fim, para o último exercício queremos achar uma curva integral de  $tX$ ,  $t$  fixo, i.e.

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow G \quad \text{tal que} \quad \tilde{\gamma}'(s) = (tX)_{\tilde{\gamma}(s)} \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sinto no cora que

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(ts) \quad \text{vai dar certo.}$$

Então derivo

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=s} \tilde{\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=s} \gamma(ts) = \gamma'(ts)t = X_{\gamma(ts)}t = (tX)_{\gamma(ts)} = (tX)_{\tilde{\gamma}(s)}$$

olha só

$$\exp^G(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t).$$

□

### 3 Aula 3: A primeira aula

#### 3.1 Lembrando geometria diferencial de curvas e superfícies

A história começa com o Gauss em 1827.

A geometria de superfícies se faz assim. Pega  $p \in M^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Pode botar uma métrica canônica usando a inclusão  $i$ , i.e.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M^2 \times T_p M^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle i_{*,p} v, i_{*,p} w \rangle_p \end{aligned}$$

Também pode só derivar curvas na superfície, obtendo vetores em  $\mathbb{R}^3$ , e usando o produto usual de  $\mathbb{R}^3$ .

O Gauss definiu o mapa normal  $N(p)$ , derivando ele para obter

$$A := d_p N : T_p M^2 \rightarrow T_p M^2$$

que ressaltou ser um endomorfismo autoadjunto (respeito a aquela métrica que a gente falou). Dai apareceram

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= H && \text{curvatura média} \\ \det A &= K && \text{curvatura Gaussiana} \end{aligned}$$

E aí o Gauss descobriu que  $K$  depende só da métrica, i.e.  $K = K(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ . A curvatura média não. (E.g. um plano pode ser mergulhado em  $\mathbb{R}^3$  como um cilindro,  $K$  fica igual, enquanto  $H$  muda.)

## 3.2 Riemann

**Definição** Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável  $M^n$  junto com um tensor

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

simétrico e positivo definido. Isso significa que para cada  $p \in M$  temos uma forma bilinear simétrica positiva definida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ .

A variedade é *semi-Riemanniana* se, em lugar de positivo definido, o tensor é não degenerado, i.e.  $\forall v \in T_p M$ , se  $\langle v, w \rangle_p = 0 \ \forall w \in T_p M$ , então  $v = 0$ . Nesse caso, definimos o *índice* da forma como sendo

$$i(\langle \cdot, \cdot \rangle_p) := \max \left\{ \dim \mathbb{L} \stackrel{\text{sub}}{\subset} T_p M : \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}} < 0 \right\}$$

Bom pegue um sistema coordenado  $(x, U)$ . Podemos definir para  $Q \in M$

$$g_{ij}(Q) := \langle \partial_i(Q), \partial_j(Q) \rangle \in \mathcal{F}(U)$$

i.e.

$$(g_{ij})_Q : U \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \cap \text{Sym}(n)$$

ou seja, a variedade é Riemanniana quando essas funções são positivas.

Se a variedade é Riemanniana temos uma norma  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . (Se não não.)

**Observação** A definição de variedade Riemanniana foi dada por Weil nos anos 30.

**Definição (Isometrias)**  $f : M \rightarrow N$ . Primeiro note que podemos definir o pullback de qualquer tensor. Para  $f : M \rightarrow N$  e  $T$  tensor da forma  $T : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathcal{F}(N)$ , definimos

$$f^*(T)_p(u, v)_p := T(f(p))(f_*u, f_*v)$$

Note que de graça é simétrico se o tensor em  $N$  é simétrico.

Para ver positivo definido temos que o pullback é positivo definido  $\iff f$  é um imersão. Prova: considera a norma. A norma de  $f_{*,p}u$  é positiva  $\iff u \neq 0$ . Para assegurar que a preimagem desse vetor também não é zero precisamos que seja imersão (=diferencial injetiva).

**Conclusão:** apenas as imersões podem ser isometrias.

$f : (N^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_N) \longrightarrow (M^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  é uma **imersão isométrica** se  $\langle \cdot, \cdot \rangle_N = f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_M$ .

Uma **isometria** entre variedades Riemannianas é  $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^n$  difeomorfismo e isometria (como imersão).

Uma **isometria local** é um difeo local e isometria.

**Observação (Isomorfismos canônicos)** Para qualquer espaço vetorial  $V$ , temos um **isomorfismo canônico** (i.e. não depende de escolha de base)  $V^n \cong T_p V^n$  dado por

$$V^n \ni v \longmapsto \alpha'_{p,v}(0), \quad \alpha_{p,v}(t) = p + tv$$

Tem outro isomorfismo canônico:  $M \ni p, M' \ni p'$ ,

$$\begin{aligned} T_{(p,p')}(M \times M') &\cong T_p M \times T_{p'} M' \\ w &\longmapsto (\pi_{*,(p,p')}(w), \pi'_{*,(p,p')}(w)) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{array}{ccc} & M \times M' & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ M & & M' \end{array}$$

**Exercício** Mostre que o inverso desse mapa ai é

$$(\pi_{*,(p,p')}(w), \pi'_{*,(p,p')}(w)) \longmapsto (i_p)_{*p'}(v') + (i'_{p'})_{*p}(v)$$

com as inclusões naturais.

**Solução.** Acho que as definições certinhas das inclusões são assim:

$$\begin{aligned} i_{p'} : M &\longrightarrow M \times M' & i'_p : M' &\longrightarrow M \times M' \\ q &\longmapsto (q, p') & q' &\longmapsto (p, q') \end{aligned}$$

que tem diferenciais

$$\begin{aligned} (i_{p'})_p : T_p M &\longrightarrow T_{(p,p')}(M \times M') & (i'_p)_{p'} : T_{p'} M' &\longrightarrow T_{(p,p')}(M \times M') \\ v &\longmapsto ? & v' &\longmapsto ? \end{aligned}$$

**\*Intento 1\*** Para visualizar melhor como funcionam esses mapas considere pegue coordenadas  $(x, x')$  de  $M \times M'$  (o que significa por definição da variedade produto que  $x$  são coordenadas de  $M$  e  $x'$  de  $M'$ ). Fica que  $\{\partial_i\}$  é base de  $T_p M$  e  $\{\partial'_i\}$  de  $T_{p'} M'$ . Então

$$v = \sum v_i \partial_i \xrightarrow{(i_{p'})_{*p}} \sum v_i \partial_i + \sum 0 \partial'_i \rightsquigarrow (v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0)$$

O resultado é bastante claro daí. Mas... não é ponto de tudo isso que o isomorfismo é independente da escolha de base...?

**\*Intento 2\*** Copiemos a prova de que  $\mathbb{V}^n \cong T_p \mathbb{V}^n$  canonicamente... acho que só escrevendo

$$v := \gamma'(0), \quad \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M, \gamma(0) = p$$

Obtemos

$$(di_{p'})_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (i_{p'} \circ \gamma)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma(t), p) = (\gamma_*(0), 0)$$

definindo analogamente  $\gamma'$  (aqui ' não é derivada...) de forma que

$$v + v' = (\gamma_*(0), \gamma'_*(0))$$

é projetado “canonicamente” (=sem usar bases...) em  $v$  e  $v'$  quando aplicamos  $\pi_{*(p,p')}(v + v')$  e  $\pi'_{*(p,p')}(v + v')$ , respetivamente. (É só escrever igualzinho que acima compondo com a projeção...) E acho que é isso.  $\square$

**Cuidado** (Não entendi muito isso aqui) Nem sempre é certo que  $T(M \times M') \cong TM \times TM'$ . Porque as funções coordenadas dependem de dois parâmetros:  $Z \in \mathcal{X}(M \times M')$ ,  $Z = X + X'$ ,

$$\sum_i a_i(p, p') \partial_i|_p + \sum_j b_j(p, p') \partial_j$$

### Exemplo

1.  $\mathbb{R}^n$  com o produto canônico usando o isomorfismo canônico de  $\mathbb{R}^n \cong T_p \mathbb{R}^n$  acima.
2. (Grupo de Lie.)  $h \in G$ ,  $L_h$  traslação a esquerda. Usemos as traslações a esquerda para definir uma métrica em  $G$ . Pegue qualquer produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  em  $\mathfrak{g}$ . E traslade:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h := L_h^* \langle \cdot, \cdot \rangle_e$$

i.e.,

$$\langle v, w \rangle_h = \langle dL_{h^{-1}}(v), dL_{h^{-1}}(w) \rangle_e$$

### Exercício

- (a) Isto define uma métrica Riemanniana em  $G$ .
- (b)  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\langle X, Y \rangle = \text{cte}$ .
- (c)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é *invariante a esquerda*, i.e.  $\forall h \in G$ ,  $L_h$  é isometria de  $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Observação** Essa métrica é invariante a *a esquerda*. Nem tem que ser invariante a direita.

**Observação** Vai ter um exercício de do Carmo dizendo que se  $G$  é compacto vai ter uma métrica bi-invariante, i.e. o promédio.



**dani:** parece que sempre que temos uma ação homogênea podemos transportar a métrica de  $\mathfrak{g}$  pra todos lados.

*Solução.*

- (a) Acho que aqui sale facilzinho porque  $L_h$  é um difeomorfismo, i.e. os espaços tangentes são isomorfos, então temos a propriedade de ser positiva definida.
- (b) É por definição de campo vetorial gerado por traslações a esquerda.
- (c) Por definição de isometria... tipo—essa métrica está feita para que as traslações sejam isometrias.

□

3.  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+p}$  subvariedade regular (=inclusão é um mergulho). Podemos fazer o que Gauss fez:

$$\langle u, v \rangle_p := \langle i_{*,p} u, i_{*,p} v \rangle_{\text{can}}^{\mathbb{R}^{n+p}}$$

**Pergunta** Será que toda variedade Riemanniana admite um mergulho isométrico em algum  $\mathbb{R}^{n+p}$ ? Quem é  $p$ ?

**Nash** O caso  $C^1$  é fácil,

**Pergunta (dani)** Em topo dif vimos primeiro uma prova de que pode mergulhar qualquer variedade em um  $\mathbb{R}^N$  com  $N$  muito grande. Depois os teoremas de Whitney mostram que  $N$  pode ser mais o menos pequeno. Aqui podemos mostrar que o mergulho/imersão existe para  $N \gg$  mais o menos facilmente?

**Proposição (Existência de métricas Riemannianas)** Se  $M$  é uma variedade diferenciável, existe uma métrica Riemanniana em  $M$ .

**What** que em toda variedade tem um aberto denso difeomorfo a uma bola.

*Demonstração.* Pegue um atlas  $\{(X_\lambda, U_\lambda)\}$  localmente finito para usar uma partição da unidade subordinada  $\{\rho_\lambda\}$ . Pega qualquer carta e puxe a métrica de  $\mathbb{R}^n$ , i.e. se  $x_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_\lambda^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$  é uma métrica riemanniana em  $U_\lambda$ .

$$\rho_\lambda x_\lambda^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$$

Fica um tensor simétrico *semi* positivo definido, i.e.  $\geq 0$ . (Acho que é porque os valores das  $\rho$  podem ser negativos.) Para resolver isso some só os positivos: para  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ ,

$$\langle v, v \rangle := \sum_{\substack{\lambda \text{ t.q.} \\ \rho_\lambda(p) > 0}} \rho_\lambda(p) \| (x_\lambda)_* v \|^2 > 0$$

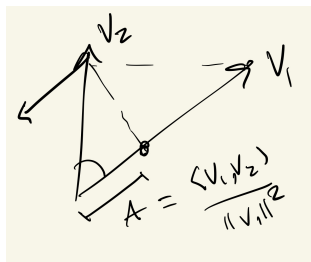
□

Definimos o ângulo entre  $v, w \in T_p M$  como satisfazendo

$$\cos(\text{ângulo}(v, w)) := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

**Soft exercise** Ortogonalize Gram-Schmidt uma base  $\{v_i\}$  de um espaço vetorial  $V$  para obter uma base ortonormal  $\{e_i\}$  (com a mesma orientação).

*Solução.* In the reality the solution is this:



The vector you are looking for is

$$v_2 - Av_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

And most importantly never forget how to find A: “dot product measures alignment—it’s small when vector are almost perpendicular, and large when they are almost parallel—, to project a vector onto the other you need to know how much aligned they are, and normalize by the size of  $v_1$  because the size of  $v_1$  doesn’t matter for projection”.

□

**Observação** O processo pode ser feito igualzinho para campos vetoriais: se  $X_1, \dots, X_n$  é uma base local de campos,  $\exists!$  base ortonormal de campos  $\{e_i\}$ . **Cuidado:** em geral, o colchete desses campos não é zero, i.e.  $[e_i, e_j] \neq 0$ .

**Proposição (Elemento de volume)**  $M^n$  variedade Riemanniana orientada  $\implies \exists! \omega \in \Omega^n(M^n)$  tal que

$$\omega(\text{bon+}) = 1$$

bon+=base ortonormal orientada.

**Lembre** Para duas top-forms, uma se expressa como a outra multiplicando pelo determinante da mudança de base.

*Demonstração.* Como  $M$  é orientada, sabemos que  $\exists \sigma \in \Omega^n(M^n)$  positiva. Buscamos a função  $f$  tal que  $\omega = f\sigma$ . Pega um ponto, bases coordenadas  $\{\partial_i\}$  e ortonormaliza para obter  $\{e_i\}$ . Como queremos que

$$\omega(e_1, \dots, e_n) \stackrel{\text{quero}}{=} 1 \stackrel{\text{quero}}{=} f|_U \sigma(e_1, \dots, e_n)$$

só tem um jeito de definir  $f$ :

$$f|_U = \sigma(e_1, \dots, e_n).$$

E isso determina por completo  $f$  como uma função global suave, e portanto temos  $\omega$ .  $\square$

## 4 Aula 5

### 4.1 Todo fibrado vetorial pode ter métrica

**Observação (Todo fibrado vetorial pode ter métrica)** Se  $E$  é um fibrado vetorial sobre  $M$ , então também podemos pegar seções de

$$\begin{array}{c} \text{BilSim } E \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

qualquer um dessas seções é uma *métrica Riemanniana* em  $E$ :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

A prova de que tais métricas sempre existem é análoga à prova para o fibrado tangente.

### 4.2 Comprimento de curvas, distancia, $M$ como espaço métrico

Pegue  $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$  diferenciável por partes, i.e. existe uma partição do intervalo  $[a, b]$  em que  $\alpha$  é diferenciável em cada pedacinho. Isso significa que cada intervalzinho pode ser estendido um pouquinho para cada lado, de tal jeito que temos um intervalo aberto, que é uma variedade, então aí está definida a diferencial.

Então definimos

$$\ell(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

**Observação (A função comprimento não vê a parametrização da curva)** Se  $\varphi : I \rightarrow I'$ , com  $\varphi' \geq 0$ , então

$$\ell(\alpha \circ \varphi) = \ell(\alpha)$$

É só fórmula de mudança de variáveis, ver [Tu17], prop. 16.1.

Como  $M^n$  é conexa (todas as nossas coisas são conexas) quaisquer dois pontos  $p, q \in M$  estão ligados por uma curva, então podemos definir

$$d(p, q) := \inf\{\ell(\alpha), \alpha : [a, b] \rightarrow M \text{ d.p.p., } \alpha(a) = p, \alpha(b) = q\}$$

Para ver que  $d$  é simétrica pode usar a mesma curva em sentido contrário. Para ver desigualdade triangular usamos diferenciabilidade por partes e definição de ínfimo (tinha um  $\varepsilon$ ).

Para ver que  $d(p, p) = 0$  pegue uma carta  $(x, U)$  em  $p \in M$ . Existe  $B_r(x(p)) \subset x(U)$  cujo fecho queda dentro de  $x(U)$ . Então  $\overline{x^{-1}(B)} \subset U$  compacto.

Os autovalores da matrix  $(g)_{ij}$  são sempre positivos porque a métrica é positiva definida. Então como estamos num compacto existe uma cota inferior. Fica que existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall v \in T(x^{-1}(B))$

A ver entonces aparece una  $\delta$  que es la cota de los autovalores de la métrica. [Checar](#) ese asunto de que los autovalores son positivos. El chiste es que ahí la métrica en el espacio tangente se vuelve equivalente a la métrica aplicando la diferencial (foto)

Em conclusão,  $(M^n, d)$  é um espaço metrico.

**Exercício** Mostre que a topologia métrica coincide com a topologia métrica. **Hint.** usar a desigualdade da foto, e meter uma bola dentro de outra.)

Segue do exercício que  $d$  é contínua.

**Observação** Em variedades semi-Riemannianas não podemos fazer essa construção!

### 4.3 Conexão afim

Pegue  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ ,  $Z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $z_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Podemos derivar— nomas deriva coordenada a coordenada ([pegando uma base!](#)):

\*Checar derivada covariante em  $\mathbb{R}^n$  com [Tu17]\*

**Definição** Uma *conexão* ou *derivada covariante* em  $M$  é um operador  $\mathbb{R}$ -bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (Y, Z) &\longmapsto \nabla_Y Z \end{aligned}$$

que é tensorial em  $Y$  e uma derivação em  $Z$ , ou seja,

$$\nabla_Y(hZ) = Y(h)Z + h\nabla_Y Z \quad \forall Y, Z \forall h \in \mathcal{F}(M)$$

Olhando o exemplo de  $\mathbb{R}^n$ , os espaços vetoriais tem uma conexão canônica.

O que falta a uma conexão para ser um tensor e uma coisa que não depende de  $D$ . Então a diferencia de duas derivações é um tensor! Por isso se chama conexão afim.

**Definição** Uma *conexão* ou *derivada covariante* no fibrado vetorial  $E$  é um operador  $\mathbb{R}$ -bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (Y, Z) &\longmapsto \nabla_Y Z \end{aligned}$$

que é tensorial em  $Y$  e uma derivação em  $Z$ , ou seja,

$$\nabla_Y(hZ) = Y(h)Z + h\nabla_Y Z \quad \forall Y, Z \forall h \in \mathcal{F}(M)$$

A diferencia fundamental con a conexão em  $\mathbb{R}^n$  é que essa é canônica. Em geral não!

Note essa propriedade aqui da conexão afim real:

$$\begin{aligned} Y \langle Z, Z' \rangle &= \sum Y(z_i)z'_i + \sum z_i Y(z'_i) \\ &= \langle D_Y Z, Z' \rangle + \langle Z, D_Y Z' \rangle \end{aligned}$$

Essa é uma propriedade bacana. Você pode conferir, só escrevendo, que

$$D_Y Z - D_Z Y = [Y, Z]$$

Aqui tem que fazer a conta (“o que falha para  $Y$  em  $D_Y Z$ , é o que falha para  $Y$  em  $[Y, Z]$ ”), mas fica que

$$D_Y Z - D_Z Y - [Y, Z] := T(Y, Z)$$

**é tensorial.** Esse tensor se chama *torsão*.

No caso de  $\mathbb{R}^n$ , fica que isso é zero. Essa conexão é bem especial.

Agora vamos fazer algumas observações. A primeira é uma brincadeira que fica “pela tensorialidade”:

Seja  $\nabla$  uma conexão em  $M$  (ou  $E$ ), então escrevemos para  $p \in M, v \in T_p M$ ,

$$\nabla_v Y = (\nabla_X Y)(p)$$

Em particular,  $f : N \rightarrow M$ ,  $(\nabla_{X \circ f} Y) = (\nabla_X Y) \circ f \in \mathfrak{X}_f$ , ou seja podemos obter um campo ao longo de  $f$ ...

**Proposição**  $\nabla$  é um *operador local*, i.e.  $\forall X, X' \in \mathfrak{X}(M), Y, Y' \in \mathfrak{X}(M)$  e  $U \subset M$  aberto, se

$$X|_U = X'|_U, \quad Y|_U = Y'|_U$$

então

$$(\nabla_X Y)|_U = (\nabla_{X'} Y')|_U$$

**Tentação** Defina  $Z := Y - Y'$  então como  $Y|_U = Y'|_U$ ,  $Z$  é constante e  $\nabla Z = 0$ . Porém, que  $Y$  coincida com  $Y'$  em  $U$  não significa que  $Z$  é zero como campo *em toda*  $M$ .

*Demonstração beleza de [MS74], p. 294 app. C.* Defina  $Z = Y - Y' \in \mathfrak{X}(M)$ . Ele não tem por que ser zero; só sabemos que é zero em  $U$ . Queremos ver que  $\nabla_X Z$  também é zero em  $U$ . Então pega um ponto  $p \in U$  e uma função  $\rho$  que vale 1 perto de  $p$  e zero fora de  $U$ .

Se tem muita vontade de pensar em como funciona isso faça assim. Pegue um aberto  $V \subset U$  tal que  $\bar{V} \subset U$ . Pegue uma partição da unidade  $\{\rho, \lambda\}$  subordinada à coberta

$\{U, M \setminus \bar{V}\}$ . Fica que

$$\begin{aligned} \text{supp } \rho &\subset U \\ \text{supp } \lambda &\subset M \setminus \bar{V} \implies \rho|_{(\text{supp } \lambda)^c} \equiv 1 \implies \rho|_V \equiv 1 \\ \rho + \lambda &\equiv 1 \end{aligned}$$

O importante é que

$$\rho Z \equiv 0 \in \mathfrak{X}(M)$$

é outra cara do campo vetorial zero. Então obviamente

$$0 = \nabla_X(\rho Z) = X(\rho)Z + \rho \nabla_X Z$$

E agora avalia em  $p$ ! Fica que  $(\nabla_X Z)_p = 0 \forall p \in U$ . □

**Corolário** Dada uma conexão  $\nabla$  numa variedade  $M$ , existe uma única conexão  $\nabla^U$  em  $U$  que faz

$$\nabla_{X|_U}^U Y|_U = (\nabla_X Y)|_U$$

**Observação** Note que nem todo campo em  $U$  pode ser escrito assim: pode ter um campo que faz coisas estranhas em  $\partial U$  y acaba que não se estende.

Beleza

Agora pegue  $(x, U)$  carta em  $(M, \nabla)$ . Sabemos que devem existir as seguintes funções:

$$\nabla_{\partial_i}^U \partial_j := \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

que se chamam *símbolos de Christoffel* de  $\nabla$  na carta  $(x, U)$ .

Agora vamos ver que esses símbolos determinam  $\nabla$  \*se echa la cuenta del O'Neill\*

**Proposition 3.13 ([O'N83])** For a coordinate system  $x^1, \dots, x^n$  on  $U$ ,

1. Essa aqui ele provou, é só escrever:

$$D_{\partial_i} \left( \sum_j W^j \partial_j \right) = \sum_k \left( \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j \right) \partial_k.$$

2. Essa aqui ainda não usamos:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

\*contas\*

E no final note que pode restringir tudo beleza então fica que “os símbolos de Christoffel determinam a conexão”.

Bom agora, como se vê isso em fibrados? Pegue

$$\begin{array}{c} E^k \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

uma carta trivializante  $(\varphi, \pi^{-1}(U))$ ,  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  base de  $\Gamma(\pi^{-1}(U))$ . Pegue  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\xi \in \Gamma(E)$ , com  $\xi = \sum \lambda_i \xi_i$ , então (as contas são todas iguais...)

$$(\nabla_X \xi)|_U = \nabla_{\sum x_i \partial_i} \sum \lambda_j \xi_j$$

e no final fica que

$$\nabla_{\partial_i} \xi_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \xi_k$$

Lo que sigue es importantísimo (existe una única sección que le hace así...): pegue um fibrado afim

$$\begin{array}{ccc} f^*E & & (E, \nabla) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Para  $X \in \mathfrak{X}(N)$  e  $\xi \in \Gamma(E)$  podemos construir uma seção a longo de  $f$ , namely  $\xi \circ f \in \Gamma(f^*E)$ . E claro também temos  $f_*X \in \mathfrak{X}_f$ . E também

$$\nabla_{f_*X} \xi$$

é uma seção desse fibrado pullback.

**Proposição** Para todo fibrado sobre  $M$  e função  $f$ , existe uma única conexão  $\nabla^f$  tal que

$$\nabla_X^f(\xi \circ f) = \nabla_{f_*X} \xi \in \Gamma(f^*E)$$

**Observação** Nem toda seção de  $f^*E$  se escreve como  $\xi \circ f$ . Pense em  $f$  constante. Então as seções  $\xi \circ f$  são seções constantes (porque  $f^*E$  é o fibrado trivial, faz sentido dizer “seção constante”). Mas nem toda seção do fibrado trivial é constante...

Mas localmente sim (isso é o lance! A prova é: pega uma trivialização local de  $E$ , ali tem um marco  $\{\xi_i\}$ , pega um aberto coordenado  $V \subset N$  t.q.  $f(V) \subset U$ , e vai ter que as seções ao longo de  $f$ , cujos vetores estão em  $\pi^{-1}(U) \subset E$ , são combinação linear das  $\xi_i$ , então por definição de pullback bundle as seções ao longo de  $f$  em  $V$  são combinação linear de  $\xi_i \circ f$ .)

*Demonstração.* Seja  $p \in N$ ,  $U \subset M$  aberto,  $(\varphi, U)$  carta trivializante de  $E$  em  $f(p)$ . Primeiro suponha que essa coisa existe para ver que cara tem. Vamos definir para  $\lambda \in \Gamma(f^*E)$  e  $X \in \mathfrak{X}(N)$

$$(\nabla_X^f \lambda)|_U = \nabla_{X|_U}^f \lambda|_U$$

Queremos ver qual é o valor em  $p \in V \subset N$ ,  $f(V) \subset U \subset M$ . Em  $U$  temos  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  base de seções de  $\pi^{-1}(U)$ .

Seja  $q \in V$ . Então

$$\lambda(q) = \sum \lambda_i(q) \xi_i(f(q))$$

E que ficou?

$$\lambda|_V = \sum \lambda_i|_V (\xi_i \circ f)|_V$$

Usando a definição de  $\nabla$  como derivação em  $Y \dots$  podemos provar unicidade local.  
**Como estamos supondo que  $\nabla^f$  existe, deve ser um operador local, i.e. existe**

$$\nabla^f \rightsquigarrow (\nabla^f)^V,$$

**mas ainda, estamos supondo que  $\nabla^f$  é boa nas seções da forma  $\xi_i \circ f$ :**

$$\nabla_{X|_V}^f(\lambda|_V) = \sum \nabla_{X|_V} \lambda|_V (\xi_i \circ f)|_V \stackrel{\text{hip}}{=} \sum X(\lambda_i)(\xi_i \circ f) + \lambda_i \nabla_{f_* X} \xi_i$$

Ou seja, isso define uma unicamente uma conexão em  $(f|_V)^*(\pi^{-1}(U))$ .

Mas, como a conexão é um operador local, isso prova também unicidade global.

Para ver existência, pois é, como sabemos que é única localmente e coincide nas interseções, existe.

Definimos  $\nabla^f$  localmente, i.e. como uma conexão em  $(f|_V)^*(\pi^{-1}(U))$ .

**Exercício** Verifique que satisfaz as propriedades de conexão ( $\mathbb{R}$ -linear, tensorial e derivação).

*Solução.*

1. ( **$\mathbb{R}$ -linear em  $\lambda$ .**) Acho que o mais importante é o setting: pegamos  $U \subset M$ ,  $V \subset N$  com  $f(V) \subset U$ . Pegue  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\lambda, \mu \in \Gamma(f^*E)$ . E dizemos bom, já construímos  $\nabla^f$  como operador global, então podemos restringi-lo a  $V$ :

$$\nabla_X^f(\alpha\lambda + \mu) \Big|_V \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{X|_V}^f(\alpha\lambda + \mu)|_V$$

E dizemos bom, de fato ele foi definido como sendo o cara que localmente é o que queremos, então naturalmente, em  $V$ ,

$$\nabla_{X|_V}^f(\alpha\lambda + \mu)|_V = \alpha \nabla_{X|_V}^f \lambda|_V + \nabla_{X|_V}^f \mu|_V$$

E dizemos que como é único em  $V$ , e está bem definido localmente, essa igualdade é verdade globalmente.

2. (**Leibniz em  $\lambda$ .**) Pegue  $g \in \mathcal{F}(N)$ ,  $\lambda \in \Gamma(f^*E)$ , os conjuntinhos que faz tudo funcionar localmente e diga:

$$\nabla_X^f(g\lambda) \Big|_V = \nabla_{X|_V}^f((g\lambda)|_V) = X|_V(g|_V)\lambda|_V + g|_V \nabla_{X|_V}^f \lambda|_V$$



3. ( $\mathcal{F}(N)$ -linear em  $X$ .) Pegue  $g \in \mathcal{F}(N)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$  e  $\lambda \in \Gamma(f^*E)$ . Localmente,

$$\nabla_{gX+Y}^f \lambda \Big|_v \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{(gX+Y)|_v}^f \lambda|_v = g|_v \nabla_{X|_v}^f \lambda|_v + \nabla_{Y|_v}^f \lambda|_v = \left( g \nabla_X^f \lambda + \nabla_Y^f \lambda \right) \Big|_v$$

todo mundo cola e pronto.

□

□

Sendo assim que demostramos a primeira propriedade mágica do pullback: ele puxa conexões. Também podemos puxar a métrica.

**Exemplo** (Isto é equivalente à localidade da conexão)

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) = \text{inc}^*(E) & & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{\text{inc}} & M \end{array}$$

**Observação** \*Comentários sobre o caso quando  $f$  é uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$ ,

$$\begin{array}{ccc} (\alpha^*(E), \nabla^\alpha) & & (E, \nabla) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ I & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

**O que aconteceu** Mostramos que a derivada covariante é um operador local e isso permite puxar a conexão para o pullback bundle.

**Miração** Vamos mostrar que a curvatura é um operador local e vamos puxá-la.

**Dúvidas para consultar**

- Pergunta sobre exercício de métrica bi-invriante em grupo de Lie compacto.
- Exercício de pullback bundle.
- Que onda con eso del espacio métrico y que la distancia de un punto a sí mismo es cero.

## References

- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second edition edition, 2013.
- [MS74] JOHN W. MILNOR and JAMES D. STASHEFF. *Characteristic Classes*. (AM-76). Princeton University Press, 1974.
- [O’N83] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [Tu17] L.W. Tu. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017.