

Lista 6 de Geometria Riemanniana

IMPA, Mar/Jun 2025- Monitor: Ivan Miranda

1 Exemplos

Exercício 1. *Curvatura do espaço projetivo complexo: exercício 12 do Capítulo 8 do livro do professor Manfredo, quinta edição.*

Exercício 2. *Espaços lenticulares.*

- a) *Definição e geodésicas: exercício 4 do Capítulo 8 do livro do professor Manfredo, quinta edição.*
- b) *Calcule o volume de um espaço lenticular.*
- c) *Exiba uma sequência de variedades Riemannianas completas com curvatura seccional constante igual a 1 de modo que a sequência dos volumes seja uma sequência que converge a zero.*

Exercício 3. *Encontre um exemplo de variedade suave que admite uma métrica Riemanniana com curvatura escalar positiva, mas não admite uma métrica Riemanniana com Ricci positivo.*

Exercício 4. *Encontre um exemplo de variedade suave que admite uma métrica Riemanniana com Ricci positivo, mas não admite uma métrica Riemanniana com curvatura seccional positiva.*

2 Variações de Energia

Exercício 5. *Sejam (M^n, g) completa, conexa e com curvatura positiva e A, B subvariedades totalmente geodésicas e compactas tais que $\dim(A) + \dim(B) \geq n$. Mostre que $A \cap B \neq \emptyset$.*

Exercício 6. *Seja M^{2n} uma variedade Riemanniana de dimensão par, completa, orientável e com curvatura seccional $K > 0$. Seja γ uma geodésica fechada em M de comprimento $l(\gamma)$. Mostre que existem curvas livremente homotópicas a γ em M , arbitrariamente próximas de γ , que possuem comprimento menor que $l(\gamma)$.*

Sugestão: estude variações de γ com campo variacional paralelo ao longo de γ .

Referências

Livro do professor Manfredo, Geometria Riemanniana.

Exercícios do professor Luis Florit, <https://luis.impa.br/>.

Listas de exercícios do Diego Guajardo, <https://luis.impa.br/>.

Listas de exercícios do Luciano Luzzi, <https://sites.google.com/impa.br/lucianojunior/>.

Livro do professor P. Petersen, *Riemannian Geometry*.

Livro do professor J. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*.