Prof. Luis Florit

Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/rg

Exercícios de Geometria Riemanniana

Índice

1 Exercícios do do Carmo

1.1 Capítulo 0

Exercise 2 Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não seja).

Solution. Es porque la diferencial de los cambios de coordenadas está dada por la identidad y una matriz lineal. Sí, porque por definición las trivializaciones locales de TM preservan la primera coordenada **y** son isomorfismos lineales en la parte del espacio vectorial. Entonces queda que

$$d(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & \xi \in \mathsf{GL}(n) \end{array}\right)$$

pero no estoy seguro de por qué ξ preservaría orientación, i.e. que tenga determinante positivo… a menos de que… $\square$

Exercise 5 (Mergulho de $P^2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^4$) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \qquad (x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Oberve que a restrição $\varphi := F|_{S^2}$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \qquad [p]\text{=clase de equivalência de } p = \{p, -p\}$$

Prove que

(a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.

(b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de $\mathbb{R}P^2$, isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

Solution.

(a) Considere a carta $\{z = 1\}$. A representação coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, xy, x, y)$$

cuja derivada como mapa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ é

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é injetiva. Agora pegue a carta $\{x = 1\}$. Então a representão coordenada de $\tilde{\varphi}$ vira

$$(y, z) \longmapsto (1 - y^2, y, z, yz)$$

e tem derivada

$$\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & y \end{pmatrix}$$

que também é injetiva. Seguramente algo análogo acontece na carta $\{y = 1\}$.

(b) $\tilde{\varphi}$ é injetiva. Pegue dois pontos $p_1 := [x_1 : y_1 : z_1]$ e $p_2 := [x_2 : y_2 : z_2]$ e suponha que $\tilde{\varphi}(p_1) = \tilde{\varphi}(p_2)$. I.e.,

$$x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \qquad x_1 y_1 = x_2 y_2, \qquad x_1 z_1 = x_2 z_2, \qquad y_1 z_1 = y_2 z_2$$

Suponha primeiro que $z_1 \neq 0$. Segue que

$$x_1 = \frac{z_2}{z_1} x_2, \qquad y_1 = \frac{z_2}{z_1} y_2$$

logo

$$x_2^2 - y_2^2 = x_1^2 - y_1^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 (x_2^2 - y_2^2) \implies z_2 = z_1 \implies x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2$$

Em fim, uma imersão injetiva com domínio compacto é um mergulho porque é fechada: pegue um fechado no domínio, vira compacto, imagem é compacta, que é fechado. Pronto. .

$\square$

Exercício 8 $\varphi : M_1 \to M_2$ difeo local. Se M_2 é orientável, então M_1 é orientável.

Solução. Defina: uma base $\beta \subset T_p M$ é orientada se $\varphi_* \beta$ é orientada em $T_{\varphi(p)} M$. Tá bem definida porque φ é um difeomorfismo em p, i.e. φ_* é isomorfismo. Para mostrar que é contínua à la Lee, qualquer vizinhança de um ponto $p \in M_1$, a correspondente carta coordenada em $\varphi(p)$, um marco coordenado nela e puxe (pushforward baix φ^{-1}) de volta para U. Difeomorfismo e muito bom: o pushforward the campos vetoriais está bem definido. E por construção está orientado. $\square$

1.2 Capítulo 1

Exercise 1 Prove que a aplicação antípoda $A : S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ tal que a projeção natural $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ seja uma isometria local.

Solution. Lembre que a métrica de S^n é a induzida pela métrica euclidiana, onde pensamos que $T_p S^n \hookrightarrow T_p \mathbb{R}^{n+1}$. É claro que A é uma isometría de $\mathbb{R}^n$, pois ela é a sua derivada (pois ela é linear), de forma que $\langle v, w \rangle_p = \langle -v, -w \rangle_{A(p)} = \langle v, w \rangle_{-p}$.

É um fato geral que se as transformações de coberta preservam a métrica, obtemos uma métrica no quociente de maneira natural, i.e. para dois vetores $v, w \in T_p \mathbb{R}P^n$ definimos $\langle v, w \rangle_p^{\mathbb{R}P^n} := \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)}$.

Para ver que a projeção natural é uma isometria local basta ver que a diferencial de A é um isomorfismo em cada ponto. Mas como ela é $-A$, isso é claro. $\square$

Exercício 7 Seja G um grupo de Lie compacto e conexo ($\dim(G) = n$). O objetivo do exercício é provar que G possui uma métrica bi-invariante. Para isto, prove as seguintes etapas:

(a) Seja ω uma n-forma diferencial em G invariante à esquerda, isto é, $L_x^*\omega = \omega$, para todo $x \in G$. Prove que ω é invariante à direita.

Sugestão: Para cada $a \in Ga$, $R_a^*\omega$ é invariante à esqueda. Decorre daí que $R_a^*\omega = f(a)\omega$. Verifique que $f(ab) = f(a)f(b)$, isto é, $f : G \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é um homomorfismo (contínuo) de G no grupo multiplicativo dos números reais. Como $f(G)$ é um subgrupo compacto compacto e conexo, conclui-se que $f(G) = 1$. Logo $R_a^*\omega = \omega$.

(b) Mostre que existe uma n-forma diferencial invariante à esquerda ω em G.

(c) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G. Seja ω uma n-forma diferencial positiva invariante à esqueda em G, é defina uma nova métrica Riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ em G por

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_p = \int_G \langle (dR_x)_y u, (dR_x)_y v \rangle_{yx}\, \omega,$$
$$x, y \in G, \qquad u, v \in T_y G$$

Prove que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é bi-invariante.

Solução.

(a)

(b)

(c) Vou usar outra notação. Suponha que g é uma métrica invariante à esquerda em G. Definimos

$$\tilde{g} := \int_{x \in G} (R_x^* g)\omega$$

como operador $\mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathcal{F}(G)$.

Lance final Essa definição tá errada! Para que $R_x^* g$ seja uma função que acompanhe ω em cada ponto, **também temos que puxar** ω. Ou seja, a definição correta é:

$$\tilde{g} := \int_{x \in G} R_x^*(g\omega)$$

E ai entra que tem que considerar $R_x^*\omega$, que por definição é invariante à esquerda, mas tu já provou que também é invariante à direita então beleza: $R_x^*\omega = \omega$.

A partir daqui contas confusamente mexidas entre a primeira vez que escrevi e depois... mas a definição acima deve ser suficiente para provar em um par de linhas...

Agora vamos ver que $\tilde{g}$ é invariante à esquerda, i.e. queremos ver que para todo $a \in G$,

$$\tilde{g} \overset{\text{quero}}{=} L_a^* \tilde{g} \overset{\text{def}}{=} L_a^* \int_G (R_x^* g)\omega.$$

Vamos ver que o pullback L_a^* pode "entrar na integral" e trocar de lugar com R_x^*, daí o resultado segue porque g é L_a-invariante. As contas acabam sendo que

$$L_a^* \int_G (R_x^* g)\omega = \int_G L_a^* R_x^* g\omega = \int_G (L_a \circ R_x)^* g\omega = \int_G (R_x \circ L_a)^* g\omega$$
$$= \int_G R_x^* L_a^* g\omega = \int_G R_x^* g\omega = \tilde{g}$$

Para ver que $\tilde{g}$ também é invariante à direita fazemos:

$$\tilde{g} \overset{\text{quero}}{=} R_a^* \tilde{g} \overset{\text{def}}{=} R_a^* \int_G (R_x^*) g\omega = \int_G R_a^* R_x^* g\omega = \int_G R_{ax}^* g\omega = \int_G R_x^* g\omega = \tilde{g}$$

porque estamos integrando em todo G e $G \curvearrowright G$ transitivamente. Catch! Como é o pullback? $F^*(f\omega) = F^*f \wedge F^*\omega$ então temos

$$R_a^*(R_x^* g\omega) = R_a^*(R_x^* g) R^*\omega$$

Então beleza só que: para que essa forma ai seja invariante à direita, não é suficiente que $R_a^*(R_x^* g)$ seja invariante à direita: também o pullback de ω! É ai que entra o inciso (a): você provou que ω invariante à esquerda é invariante à direita, i.e. $R^*\omega = \omega$.

Para todo aquele que tem dúvida, aqui estão as contas da invarianza à esquerda super explicitas:

Fixe $y \in G$ e $u, v \in T_y G$. Temos que

$$\begin{aligned}
(L_a^* \tilde{g})(u,v) &= L_a^* \left(\int_g (R_x^* g)\omega \right)(u,v) \\
&= \left(\int_G (R_x^* g)\omega \right)\Big((L_a)_{*,a^{-1}y} u, (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big) \\
&= \int_G (R_x^* g)\Big((L_a)_{*,a^{-1}y} u, (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big)\omega \\
&= \int_G g\Big((R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (L_a)_{*,a^{-1}y} u, (R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (L_a)_{*,a^{-1}y} v \Big)\omega \\
&= \int_G g\Big((R_x \circ L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} u, (R_x \circ L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} v \Big)\omega \\
\text{associatividade em } G \quad &= \int_G g\Big((L_a \circ R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} u, (L_a \circ R_x)_{*,a^{-1}yx^{-1}} v \Big)\omega \\
&= \int_G g\Big((L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (R_x)_{*,yx^{-1}} u, (L_a)_{*,a^{-1}yx^{-1}} (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big)\omega \\
&= \int_G \Big((L_a)^* g \Big)\Big((R_x)_{*,yx^{-1}} u, (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big)\omega \\
g \text{ invariante à esquerda} \quad &= \int_G g\Big((R_x)_{*,yx^{-1}} u, (R_x)_{*,yx^{-1}} v \Big)\omega \\
&\overset{\text{def}}{=} \tilde{g}(u,v).
\end{aligned}$$

onde $R_x \circ L_a = L_a \circ R_x$ por associatividade de produto no grupo.

□

1.3 Capítulo III

1.3.1 maximum principle!

Maximum principle (E. Hopf) **(Minimal surface course statement.)** For any (M, g), harmonic functions satisfy ***maximum principle***: any harmonic function $f : U \to \mathbb{R}$ for U connected and open, if $\exists p \in U$ that is a local maximum or local minimum, then f is constant on U.

We shall show Do Carmo's version that f ***subharmonic***, i.e. $\Delta f \geqslant 0$, on M compact connected $\implies$ f constant. (This is Exercise 12, Chapter III.)

Demostração.

Step 1 **(Exercise 7, Chapter III of [dC79].)** Make sure you can pick a ***referencial geodésico*** about every point of M. This is an orthonormal frame $\{E_i\} \subset \mathfrak{X}(U)$, where $p \in U$ such that $\left(\nabla_{E_i} E_j\right)_p = 0$. This frame can be obtained by taking geodesic coordinates at the point, an orthonormal base $\{e_i\}$ of T_pM, and taking parallel transport of the vectors e_i along radial geodesics emanating from p. This immediately ensures that E_i is orthonormal since parallel transport preserves angles.

To check that Christoffel symbols vanish at p we do as follows. (This is actually a basic fact about geodesic coordinates, see [Lee19] Prop. 5.24.) Take a random vector $v \in T_pM$ and its geodesic $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. I drop the subindex v for the next computations for the next computations. Then (this is Florit way of using covariant derivative along a curve; it's the ***pullback*** or ***induced connection*** ∇^γ):

$$0 = \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \gamma' = \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} v^i (E_i \circ \gamma)$$

where the $v = (v^1, \ldots, v^n)$. Indeed: this is very silly but, since the coordinate chart of geodesic coordinates is $\exp_p^{-1}$, the coordinate representation of γ in this chart is as simple as

$$\hat{\gamma}(t) = (\underbrace{\varphi}_{\text{chart}} \circ \gamma)(t) = \exp_p^{-1} \exp_p(tv) = tv.$$

And the composition $E_i \circ \gamma$ just means that we take our local frame *along* γ. Continue:

$$\begin{aligned}
&= v^i \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} E_i \circ \gamma = v^i \nabla_{\gamma_{v,*} \frac{d}{dt}} E_i \\
&= v^i \nabla_{v^j E_j} E_i = v^i v^j \nabla_{E_j} E_i \\
&= v^i v^j \Gamma^k_{ji} E_k
\end{aligned}$$

along γ. Now choose $v = e_1$. You get $\Gamma^k_{11} = 0$ for all k along γ_{e_1}. Now choose $v = e_2$, then $\Gamma^k_{22} = 0$ along γ_{e_2}, so at least at p they both vanish. And now choose

$v = e_1 + e_2$. You get

$$0 = (v^1)^2 \cancelto{0}{\Gamma^k_{11}} + v^1 v^2 \Gamma^k_{12} + v^2 v^1 \Gamma^k_{21} + (v^2)^2 \cancelto{0}{\Gamma^k_{22}}$$

So $\Gamma^k_{12} = 0$ since Levi-Civita is torsion-free, i.e. symmetric. And so on. So the all Christoffel symbols vanish at the same time at p.

Step 2 **(Exercise 11, Chapter III of [dC79].)** Prove that

$$di_X \operatorname{Vol} = \operatorname{div} X \operatorname{Vol}$$

To do this first recall that ***divergence*** and ***trace*** are

$$\operatorname{div} X := \operatorname{tr}(v \mapsto \nabla_v X)$$

$$\operatorname{tr}(T) := \sum_i \langle TE_i, E_i \rangle, \qquad T \in \operatorname{End}(V), E_i \text{ orthonormal frame}$$

Now pick a Geodesic frame E_i and its dual coframe ε^i, i.e. satisfying $\varepsilon^i(E_j) = \delta_{ij}$. Then $\operatorname{Vol} = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n$. Then for any $X = X^i E_i \in \mathfrak{X}(U)$,

$$i_X \operatorname{Vol} = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n (X^i E_i, \cdot, \ldots, \cdot) = X^i \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n (E_i, \cdot, \ldots, \cdot)$$

How to compute that? Recall that for top-forms we have

$$\varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n (Z_1, \ldots, Z_n) = \det(\varepsilon^i(Z_j))$$

so for example if $n = 3$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 (E_1, Z_2, Z_3) &= \begin{vmatrix} \varepsilon^1(E_1) & \varepsilon^1(Z_2) & \varepsilon^1(Z_3) \\ \varepsilon^2(E_1) & \varepsilon^2(Z_2) & \varepsilon^2(Z_3) \\ \varepsilon^3(E_1) & \varepsilon^3(Z_2) & \varepsilon^3(Z_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^1(Z_2) & \varepsilon^1(Z_3) \\ 0 & \varepsilon^2(Z_2) & \varepsilon^2(Z_3) \\ 0 & \varepsilon^3(Z_2) & \varepsilon^3(Z_3) \end{vmatrix} \\
&= \varepsilon^2(Z_2)\varepsilon^3(Z_3) - \varepsilon^2(Z_3)\varepsilon^3(Z_2) = \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3(Z_2, Z_3), \\
\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 (E_2, Z_2, Z_3) &= \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon^1(Z_2) & \varepsilon^1(Z_3) \\ 1 & \varepsilon^2(Z_2) & \varepsilon^2(Z_3) \\ 0 & \varepsilon^3(Z_2) & \varepsilon^3(Z_3) \end{vmatrix} = -\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3(Z_2, Z_3)
\end{aligned}$$

and so on. When we sum over all i, we get

$$X^i \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n (E_i, \cdot, \ldots, \cdot) = \sum_i (-1)^{i+1} X^i \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varepsilon^i} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n.$$

Now take exterior derivative of that, we get

$$\begin{aligned}
di_X \operatorname{Vol} &= \sum_i (-1)^{i+1} (dX^i) \wedge \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varepsilon^i} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n \\
&+ \sum_i (-1)^{i+1} X^i \wedge d(\varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varepsilon^i} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n)
\end{aligned}$$

And then the first term actually is

$$\sum_i (-1)^{i+1} E_j X^i \varepsilon^j \wedge \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varepsilon^i} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n = E_i X^i \operatorname{Vol}$$

while the second term vanishes because look,

$$\begin{aligned} d\varepsilon^i(E_j, E_k) &= E_j \varepsilon^i(E_k) - E_k \varepsilon^i(E_j) - \varepsilon^i([E_j, E_k]) \\ &= -\varepsilon^i(\nabla_{E_j} E_k - \nabla_{E_k} E_j) \qquad \text{torsion!} \end{aligned}$$

which vanishes at p because we said that this geodesic frame would have vanishing Christoffel symbols at p. So we conclude:

$$d i_X \operatorname{Vol} = E_i X^i \operatorname{Vol}$$

Now you just have to think what is divergence:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X = \sum_i \left\langle \nabla_{E_i} X^j E_j, E_i \right\rangle &= \sum_i \left\langle E_i X^j E_j, E_i \right\rangle + X^j \left\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \right\rangle \\ = \sum_i \left\langle E_i X^j E_j, E_i \right\rangle &= \sum_i E_i X^j \left\langle E_j, E_i \right\rangle = E_i X^i \end{aligned}$$

again using that we are a geodesic frame with vanishing covariant derivative at p.

Step 3 **(Exercise 9(b), Chapter III of [dC79].)** You realise that

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\left\langle \nabla f, \nabla g \right\rangle .$$

Recall that ***Laplacian*** is

$$\Delta f := \operatorname{div} \nabla f$$

This is just a computation no problem, I'll say how it starts. For any $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\left\langle \nabla(fg), X \right\rangle = X(fg) = fXg + gXf = f\left\langle \nabla g, X \right\rangle + g\left\langle \nabla f, X \right\rangle .$$

which says that

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

So, for an orthonormal frame E_i

$$\Delta(fg) = \operatorname{div} \nabla(fg) = \sum_i \left\langle \nabla_{E_i}(f\nabla g + g\nabla f), E_i \right\rangle$$

Then use Leibniz rule and definition of gradient, you get there.

Step 4 **(Exercise 12, Chapter III of [dC79].)** To prove the theorem for subharmonic functions first we show that in fact they are harmonic via step 2 on $X := \nabla f$ and Stokes:

$$\int_M \Delta f \operatorname{Vol} = \int_M \operatorname{div} X \operatorname{Vol} = \int_M d(i_X \operatorname{Vol}) = \int_{\partial M} i_X \operatorname{Vol} = 0$$

meaning that the non-negative function Δf is in fact 0, i.e. f is harmonic. Now we do it again for $X := \nabla(f^2/2)$:

$$\int_M \Delta(f^2/2)\,\mathrm{Vol} = \int_M d(i_X \,\mathrm{Vol}) = \int_{\partial M} i_X \,\mathrm{Vol} = 0$$

And then apply step 3:

$$0 = \int_M \Delta(f^2/2)\,\mathrm{Vol} = \int_M f\Delta f\,\mathrm{Vol} + \int_M \langle \nabla f, \nabla f\rangle\,\mathrm{Vol}$$

First one vanishes because f is harmonic, so second one is zero which says f is constant!

□

2 Exercícios de `aulas.pdf`

2.1 Pullback and torsion

Exercício Para $f : M \to \tilde{M}$ defina

$$T_{\nabla^f}(X, Y) = \nabla^f_X f_* Y - \nabla^f_Y f_* X - f_*[X, Y]$$

que é uma seção do fibrado pullback. Avaliada em $p \in M$, obtemos um vetor em $T\tilde{M}$. Agora pegue dois campos $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ que estendem $f_{*,p}X_p$ e $f_{*,p}Y_p$. Mostre que $(T_{\nabla^f}(X, Y))(p)$ é o mesmo vetor que o campo

$$(f^*T)(X, Y) := \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

avaliado em $f(p)$.

Solution. Primeiro suponha que f é uma imersão em p, de modo que f_*X e f_*Y são campos vetoriais em algum aberto de $\tilde{M}$. Então, como sabemos, os colchetes estão f-relacionados. Os termos com derivada covariante também coincidem por causa da seguinte sutileza:

$$\nabla^f_X f_* Y \quad \text{na verdade é} \quad \nabla^f_X (f_* Y \circ f)$$

simplesmente porque f_*Y é um campo de $\tilde{M}$, então para ter uma seção do fibrado pullback devemos compor. Então fica que

$$\nabla^f_X f_* Y = \nabla_{f_* X} f_* Y$$

como queriamos.

Agora se f não é imersão em p faço a conta do Florit. Pegue coordenadas ∂_i de M e $\tilde{\partial}_i$ de $\tilde{M}$. Primeiro lembre que

$$f_*\partial_i = \partial_i f^k \partial_k \circ f$$

onde abusando de notação $f = (f^1, \dots, f^{\tilde{n}})$ são as funções coordenadas de f naquelas cartas.

A conta presentada em aula é:

$$\begin{aligned}
\nabla^f_{\partial_i} f_*\partial_j &= \nabla^f_{\partial_i} \partial_j f^k \tilde{\partial_k} \circ f \\
&= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial_k} \circ f + \partial_j f^k \nabla^f_{\partial_i} \tilde{\partial_k} \circ f \\
\text{all I know...} \quad &= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial_k} \circ f + \partial_j f^k \nabla_{f_*\partial_i} \tilde{\partial_k} \\
&= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial_k} \circ f + \partial_j f^k \nabla_{\partial_i f^\ell \tilde{\partial}_\ell \circ f} \tilde{\partial_k} \\
&= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial} \circ f + \partial_j f^k \partial_i f^\ell \nabla_{\tilde{\partial}_\ell \circ f} \tilde{\partial}_k \\
\text{tensorial embaixo} \quad &= \partial_i\partial_j f^k \tilde{\partial} \circ f + \partial_j f^k \partial_i f^\ell \left(\nabla_{\tilde{\partial}_\ell} \tilde{\partial}_k\right) \circ f
\end{aligned}$$

O que faço com isso? Mmm...

$$\nabla^f_{\partial_j} f_*\partial_i = \partial_j\partial_i f^k \tilde{\partial} \circ f + \partial_i f^k \partial_j f^\ell \left(\nabla_{\tilde{\partial}_\ell} \tilde{\partial}_k\right) \circ f$$

Parece que

$$\nabla^f_{\partial_i} f_*\partial_j - \nabla^f_{\partial_j} f_*\partial_i = 0$$

porque as parciais comutam mas... é isso o que queremos? $\square$

attempt of texing the solution by GPT

After several mails with Ivan and two visits with Prof. Florit, I finally could write the solution. But that was by hand so I just passed the screenshot to ChatGPT. So this isn't completely right but OK maybe later I put it right.

Solution. Queremos calcular o torsor da conexão pullback:

$$T_{\nabla^f}(X, Y) = \nabla^f_X(f_*Y) - \nabla^f_Y(f_*X) - f_*([X, Y]).$$

Expandindo:

$$\begin{aligned}
\nabla^f_X(f_*Y) &= X(f^i)\tilde{\partial}_i + f^i \nabla^f_X(\tilde{\partial}_i), \\
\nabla^f_Y(f_*X) &= Y(f^i)\tilde{\partial}_i + f^i \nabla^f_Y(\tilde{\partial}_i),
\end{aligned}$$

e

$$f_*([X, Y]) = [X, Y](f^i)\tilde{\partial}_i.$$

Então:

$$\begin{aligned}
T_{\nabla^f}(X, Y) &= \left(X(f^i)\tilde{\partial}_i + f^i \nabla^f_X(\tilde{\partial}_i)\right) - \left(Y(f^i)\tilde{\partial}_i + f^i \nabla^f_Y(\tilde{\partial}_i)\right) - [X, Y](f^i)\tilde{\partial}_i \\
&= \left(X(f^i) - Y(f^i) - [X, Y](f^i)\right) \tilde{\partial}_i + f^i \left(\nabla^f_X(\tilde{\partial}_i) - \nabla^f_Y(\tilde{\partial}_i)\right).
\end{aligned}$$

Agora, usando o fato que o pullback da conexão satisfaz

$$\nabla^f_X(\tilde{\partial}_i) = (f^*\nabla)_X(\tilde{\partial}_i) = (f^*\nabla)(X)(\tilde{\partial}_i),$$

e observando que

$$[X, Y](f^i) = X(Y(f^i)) - Y(X(f^i)),$$

concluímos que:

$$X(f^i) - Y(f^i) - [X,Y](f^i) = 0.$$

Portanto, sobra:

$$T_{\nabla^f}(X,Y) = f^i \left(\nabla^f_X(\tilde{\partial}_i) - \nabla^f_Y(\tilde{\partial}_i) \right).$$

Finalmente, usando que

$$T(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_j) = \nabla_{\tilde{\partial}_i} \tilde{\partial}_j - \nabla_{\tilde{\partial}_j} \tilde{\partial}_i - [\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_j],$$

concluímos que:

$$T_{\nabla^f}(X,Y) = T(f_* X, f_* Y),$$

como queríamos.

□

2.2 Minimizante $\implies$ geodésica

Exercício 8 (Curvas minimizantes)

(a) Seja γ uma curva suave por partes parametrizada por comprimento de arco (this is important, velocity is 1) conectando p a q. Mostre que se $d(p,q) = \ell(\gamma)$ então γ é uma geodésica.

Solution. Imagino que podemos só usar a primeira fórmula da variação:

$$S'(0) = -\int_a^b \langle V, \gamma'' \rangle \, dt.$$

(na página que segue anexo uma prova dela, mas isso é extra.)

É claro que se γ é minimizante, estamos num ponto crítico do funcional de distância S, é se cumple a primeira fórmula da variação.

Pergunta Para mim parece que daí segue que $\gamma'' = 0$, porque a métrica é não degenerada. Porém, [Lee19], thm. 6.4 afirma que devemos usar $V = \gamma''$ para concluir esse exercício. Isso não entendo por que.

□

2.3 First variation formula explained

Explanation of first variation formula. Não precisa ler :)

Consider a ***variation*** of γ, which is like a homotopy:

$$\begin{aligned} \Gamma : (a,b) \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ \Gamma(t,s) &= \gamma(t) + sV(\gamma(t)) \end{aligned}$$

where $V \in \mathfrak{X}_\gamma$ is a vector field along γ called the ***variation field***, and it has to vanish on the endpoints. Then there's the ***length functional***

$$S(s) := \ell(\Gamma(t,s)) = \int_a^b |\nabla_{\frac{d}{dt}}\Gamma(t,s)|dt.$$

Because $\gamma = \Gamma(t,0)$ is minimizing, we know that $S'(0) = 0$. Then we compute that and hope that it will say $\gamma'' = 0$.

$$\begin{aligned}
S'(0) &= \int_a^b \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \nabla_t\Gamma(t,s), \nabla_t\Gamma(t,s)\rangle^{1/2}\, dt \\
&= \int_a^b \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cancel{|\Gamma(s,t)|}^{1}} \langle \nabla_s\nabla_t\Gamma(t,s), \nabla_t\Gamma(t,s)\rangle\, dt \\
&\overset{\substack{\text{symmetry}\\\text{lemma}}}{=} \int_a^b \left\langle \nabla_t \underbrace{\nabla_s\Gamma(t,s)}_{=V}, \nabla_t\Gamma(t,s) \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle V, \nabla_t\Gamma(t,s)\rangle - \int_a^b \left\langle V, \underbrace{\nabla_t\nabla_t\Gamma(t,s)}_{\gamma''} \right\rangle dt
\end{aligned}$$

and the first one vanished out fundamental theorem of calculus and the fact that V is zero on the endpoints.

So we get that if γ minimizes distance, this integral is zero for any variation of γ.

Remarks

- Symmetry lemma basically follows from commutativity of partial derivatives in $\mathbb{R}^n$. Florit used pullback connection (as in the previous exercise!) and [Lee19] used Christoffel symbols.
- The true version of the variation formula admits that Γ is only piecewise smooth. The formula becomes less nice and the proof a little more involved, I won't do it, but something nice comes out of that: the fact that you realise that geodesics can't have corners because:

Fig. 6.5: Rounding the corner

so it would be nice to understand that precisely but OK.

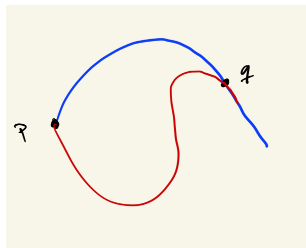
2.4 Duas geodésicas

Mais um:

Exercício 8 (Curvas minimizantes)

(b) Suponha que $\gamma, \sigma : [0,2] \to M$ são geodésicas distintas e satisfazem: $\gamma(0) = \sigma(0) := p$, $\gamma(1) = \sigma(1) := q$, γ e σ realizam a distância entre p e q. Mostre que γ não realiza a distância entre p e $\gamma(1+s)$ para nenhum $s > 0$.

Demostração. Argumentamos na monitoria que teriamos um problema de diferenciabilidade. Pela explicação dada em [Lee19] sobre a suavização de quinas, sabemos que as geodésicas devem ser suaves. Porém, que não poderia acontecer algo assim?



□

Exercício Show that for a bi-invariant metric on a Lie Group, it holds that $\exp_e = \exp^G$.

Solution. After delving into the abyss of definitions, I think it boils down to showing that $\nabla_{X_v} X_v = 0$, where $v \in \mathfrak{g}$. So we have to use that the metric is bi-invariant. But it's not necessarily Levi-Civita connection... □

3 Monitorias

3.1 Abril 25

Exercício 3 $f : M \to M$ isometria. Prove que cada componente conexa do conjunto dos pontos fixos de f é uma subvariedade totalmente geodésica.

Exercício 2 (Petersen) $F : (M, g) \to (M, g)$ conexa, F isometria, $p \in M$. Prove que

$$DF_p = -\operatorname{Id}|_{T_p M} \iff \begin{cases} F^2 = \operatorname{Id}_M \\ p \text{ é ponto fixo isolado} \end{cases}$$

Exercício 3 (Petersen) $N_1, N_2 \subset M$ totalmente geodésicas. Prove que cada componente conexa de $N_1 \cap N_2$ é uma subvariedade totalmente geodésica.

Exercício 4 Que se tem uma superfície (dimensão 2 só!) com um plano de simetria no sentido de que pode reflexar nela, então a curva que essa reflexão fixa é geodésica. Ou seja: se tem uma isometria que não é a identidade

Exercício 0 Curvatura negativa implica que…?

4 Lista 1

4.1 Revisão

Exercício 1 Dada uma subvariedade $M \subseteq \tilde{M}$ uma subvariedade mergulhada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mostre que existe um aberto $U \subset \tilde{M}$ contendo M e um campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\tilde{X}|_M = X$. Caso M seja subconjunto fechado de $\tilde{M}$, prove que U pode ser tomado igual a $\tilde{M}$. Se M não é subconjunto fechado de $\tilde{M}$, pode não existir extensão de X definida em todo $\tilde{M}$.

Solução. Acho que a prova canônica é tomar coordenadas de subvariedade de $M \subset \tilde{M}$, i.e. onde M está dada localmente como o lugar onde se anulam as últimas $n-m$ funções coordenadas.

Pegamos uma vizinhança rectificante U de X em $p \in M$, i.e. $X = \partial_1$ em U. Daí pega para cada vetor normal a exponencial, que percorre pela geodésica um pouqinho. Isso da uma vizinhança em $\tilde{M}$... □

Exercício 2 Seja $f : M^n \to N^m$ um mapa suave. Os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ são ditos f-relacionados se $df_p X_p = \tilde{X}_{f(p)}$, $\forall p \in M$. Mostre que se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são, respetivamente, f-relacionados com $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ então $[X, Y]$ é f-relacionado com $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

Solução. **Intento 2.** $s_1 \in \Gamma(\tau_N)$ está f-***relacionado*** com $s \in \Gamma(\tau_M)$ se $s = s_1 \oplus s^\perp$ para algum $s^\perp \in \nu$. Queremos ver que se $s \overset{f}{\sim} s_1$ e $t \overset{f}{\sim} t_1$, $[s,t] \overset{f}{\sim} [s_1, t_1]$, ou seja $[s,t] = [s_1,t_1] \oplus [s,t]^\perp$ onde $[s,t]^\perp$ é um vetor em ν cuja cara não é muito importante.

$$[s,t] = [s_1 \oplus s^\perp, t_1 \oplus t^\perp] = [s_1, t_1] + \underbrace{[s_1, t^\perp]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t_1]}_{=0} + \underbrace{[s^\perp, t^\perp]}_{\in \nu}$$

Falta un argumentín para ver que esos colchetes se anulan...

Intento 1 (incompleto). Pegue $p \in M$. Queremos ver que

$$(f_*[X,Y])_p \overset{\text{quero}}{=} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)}.$$

Pegue $g \in \mathcal{F}(N)$.

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)} &\overset{\text{def}}{=} \tilde{X}_{f(p)}(\tilde{Y}g) - \tilde{Y}_{f(p)}(\tilde{X}g) \\
&\overset{\text{hip}}{=} f_{*,p}(X_p)(\tilde{Y}g) - f_{*,p}(Y_p)(\tilde{X}g) \\
&= X_p\Big((\tilde{Y}g) \circ f\Big) - Y_p\Big((\tilde{X}g) \circ f\Big) \\
&\overset{\text{hip}}{=} X_p\Big(\big(f_{*,p}(Y)\big)g \circ f\Big) - Y_p\Big(\big(f_{*,p}(X_p)\big)g \circ f\Big)
\end{aligned}$$

□

Exercício 3 Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva. Dado $Y \in \mathfrak{X}(N)$, mostre que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X é π-relacionado com Y.

Solução. O resultado segue de que $\tau_M \cong \pi^*\tau_N \oplus \nu$, tomando $X := Y \oplus 0$. □

Exercício 4 (Fibrado pullback) Suponha que M^n, N^m são variedades suaves, $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial suave de posto k e $f : N \to M$ é um mapa suave. Considere o espaço
$$f^*E = \{(p, e) \in N \times E : f(p) = \pi(e)\},$$
e $\tilde{\pi} : E \to N$ a projeção na primeira coordenada. Mostre que f^*E tem uma estrutura de variedade suave de forma que a tripla $\tilde{\pi} : f^*E \to N$ é um fibrado vetorial suave de posto k.

Solução. Para mostrar que $\tilde{\pi}$ é um fibrado vetorial devemos dar trivializações locais. Pegue um ponto $p \in M$ e uma vizinhança trivializante de E perto de $f(p)$, i.e. um aberto $U \ni f(p)$ e um difeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$. Pegue também um aberto $V \ni p$ tal que $f(V) \subset U$. Defina
$$\begin{aligned} h_1 : \tilde{\pi}^{-1}(V) &\longrightarrow V \times \mathbb{R}^k \\ (q, v) &\longmapsto (q, \pi_2 \circ h(f(q), v)) \end{aligned}$$
Como estamos usando a estrutura de fibrado vetorial de E, segue imediatamente a coleção de funções desse tipo formam um atlas trivializante de f^*E. □

4.2 Métricas Riemannianas

Exercício 6 Seja (N^n, g) uma variedade Riemanniana e $M^m \subset N$ uma subvariedade mergulhada. Mostre que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset N$ de p e campos vetoriais $E_1, \dots, E_n$ em U tal que $E_1(q), \dots, E_n(q)$ é uma base ortonormal de T_qN para todo $q \in U$ e $E_1(r), \dots, E_m(r)$ são tangentes a M para todo $r \in U \cap M$.

Solução. **(Intento 1.)**Pegue $p \in M$ e uma vizinhança aberta de $U \subset N$ de p tal que $U \cap M$ é suficientemente pequeno como para ter um marco ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$. Considere esses campos como campos tangentes a N. Usando o exercício 1 podemos estender esses campos a uma vizinhança de $U \subset N$. Aplicando Gram-Schmidt obtemos um marco ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$.

(Intento 2, [MS74] thm. 3.3, p. 36.) Take orthonormal frames $\{E_i\}_{i=1}^m \subset \mathfrak{X}(U \cap M)$ and $\{E_i'\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{X}(U)$. Notice that the matrix $(E_i \cdot E_j')$ has rank m at p. (I think that two orthonormal frames are related up to an orthogonal matrix.) Suppose that the first m columns are linearly independent at p. Then there is an open neighbourhood V of p where the first m columns of this matrix are linearly independent. Then a slightly confusing part arguing that $E_1, \dots, E_m, E_{m+1}', \dots, E_n'$ are linearly independent in V. Then apply Gram-Schmidt. And that's it.

Then Milnor shows that this is a vector bundle called the ***orthogonal bundle***. The lance is that the orthonormal frame we have found gives the local trivialization. For a subbundle

$\xi \subset \eta$ define the fiber of the orthogonal complement of ξ by $F_b(\xi^\perp) := F_b(\xi)^\perp$ with respect to the metric of η. Define local trivializations by

$$\begin{aligned} \overline{h} : \overline{\pi}^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n-m} \\ \left(q, \sum x_i E_i\right) &\longmapsto (q, x_{m+1}, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

□

Definição 1 Sejam (M^m, g_M) e (N^n, g_N) variedades Riemannianas. Seja $F : M \to N$ uma submersão. Dizemos que F é uma ***submersão Riemanniana*** quando para todo $p \in M$, $DF : \ker(DF)^\perp \to T_{F(p)}N$ é uma isometría linear. Em outras palavras, sempre que $v, w \in T_pM$ são perpendiculares ao núcleo de DF, vale

$$g_M(v, w) = g_N(DF(v), DF(w)).$$

Exercício 7 Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Suponha que existe um grupo de Lie G agindo por isometrias em (M, g) de tal forma que M/G admite uma estrutura de variedade suave, onde a projeção $\pi : M \to M/G$ é uma submersão. Mostre que existe uma métrica Riemanniana $\overline{g}$ em M/G tal que $\pi : (M, g) \to (M/G, \overline{g})$ é uma submersão Riemanniana.

Solução. **(Seguindo notação e ideias de [MS74].)** Fazemos assim para definir a métrica em G/M. Primeiro lembre que $\tau_{G/M} \cong \pi^*\tau_{M/G}$. Considere o fibrado ν normal a $\pi^*\tau_{M/G}$, que é um fibrado sobre M satisfazendo $\pi^*\tau_{G/M} \oplus \nu \cong \tau_M$. Então qualquer vetor tangente a M/G pode ser pensado como um vetor tangente a M se anulamos a parte normal dele, mostrando que podemos usar a mesma métrica em M para introduzir uma métrica em G/M.

Para resolver o exercício devemos analisar como age π_* em τ_M quando este es visto como soma direita $\pi^* \oplus \nu$: $\pi_*(v_1 \oplus v^\perp) = v_1$. Daí segue trivialmente que $\ker \pi := \kappa \subset \nu$. Conversamente se $v_1 \oplus v^\perp \in \kappa$, fazemos para $w \in \pi^*$

$$(v_1 \oplus v^\perp) \cdot w = v_1 \cdot w + \cancelto{0}{v^\perp \cdot w} = \pi_* v_1 \cdot \pi_* w = 0.$$

Então $\kappa = \nu$, então $\kappa^\perp \cong \pi^* \cong \tau_{M/G}$ isometricamente.

Intento 1 (errado). Defina a seguinte métrica em M/G:

$$g_{M/G} := g_M|_{\pi^*\tau_{M/G}}$$

i.e. a restrição da métrica em M ao fibrado pullback de $\tau_{M/G} := T(G/M)$, que sabemos que é isomorfo (como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Para ver que $\pi : M \to M/G$ é uma submersão Riemanniana devemos mostrar que o complemento ortogonal de $\kappa_\pi := \ker(\pi)$ é isomorfo (como fibrado Riemanniano, i.e. isométrico como fibrado) a $\tau_{M/G}$.

Como M é Riemanniana, o fibrado pullback tem um complemento ortogonal $(\pi^*\tau_{M/G})^\perp := \nu$. Basta mostrar que $\nu \cong \kappa$ isometricamente.

□

5 Lista 2

Exercício 1 Mostre que todo fibrado vetorial admite uma conexão.

Exercício 3 Exercício 2 do Capítulo 2 do livro do professor Manfredo:

Sejam X e Y campos de vetores numa variedade Riemanniana M. Sejam $p \in M$ e $\gamma : I \to M$ uma curva integral de X por p, i.e. $\gamma(t_0) = p$ e $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$. Prove que a conexão Riemanniana de M é

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}\left(P^{-1}_{\gamma,t_0,t}(Y(\gamma(t)))\right)\Big|_{t=t_0} \tag{1}$$

onde $P_{\gamma,t_0,t} : T_{\gamma(t_0)M \to T_{\gamma(t)}M}$ é o transporte paralelo ao longo de γ de t_0 a t.

Solução. Primeiro devemos escrever o lado direito da eq. (1) em termos do fibrado pullback ao longo de γ:

$$\frac{d}{dt}\left(P^{-1}_{\gamma,t_0,t}(Y(\gamma(t)))\right)\Big|_{t=t_0} \leftrightsquigarrow \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}$$

□

Lista 3

Exercício 4 Exemplo: esfera.

(a) Determine as geodésicas da esfera $\mathbb{S}^n$ com sua métrica canônica.

(b) Determine o grupo de isometrias da esfera $\mathbb{S}^n$ com sua métrica canônica.

Solution.

(a) **Ideia essencial.** Suponha que $\gamma : I \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma geodésica. Podemos pensar que $\gamma' : I \to T\mathbb{S}^n \subset T\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e analogamente $\gamma'' : I \to \mathbb{R}^{n+1}$. Espaço tangente à esfera é perpendicular ao vetor posição, i.e. $\gamma \perp \gamma'$. Também $\gamma'' \perp \gamma'$; isso é porque $\gamma'' = (\gamma'')^\top + (\gamma'')^\perp$, e como γ é geodésica sabemos que $(\gamma'')^\top = 0$. Por fim, $\gamma'' = \lambda\gamma$, então concluímos que γ está dada por senos e cosenos.

Para escrever isso formalmente precisamos de uma expressão experta para γ. Em [Lee19] Prop. 5.27 achamos inspiração: damos a volta ao problema e começamos propondo uma curva que vai acabar sendo geodésica. Pegue um ponto $p \in \mathbb{S}^n$ e um vetor unitário $v \in T_p\mathbb{S}^n$. Considere

$$\gamma(t) = \cos tp + \sin tv$$

Derivando como uma simples curva em $\mathbb{R}^{n+1}$, vemos que $\gamma'' = -\gamma$, o que significa que $(\gamma'')^\top = 0$, i.e. γ é uma geodésica de $\mathbb{S}^n$. Mais precisamente,

$$\gamma''(t) = \left(\nabla^{i\circ\gamma}_{\frac{d}{dt}}\gamma'\right)_t \in (i\circ\gamma)^*T\mathbb{R}^{n+1} \cong \gamma^*(T\mathbb{S}^n \oplus N)$$

não tem componente tangente, e portanto

$$0 = \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\gamma' \in \gamma^*T\mathbb{S}^n.$$

Sendo essa uma geodésica partindo de um ponto arbitrário numa direção arbitrária, concluimos por unicidade das geodésicas e *rescaling lemma* que todas as geodésicas de $\mathbb{S}^n$ são como γ.

Note que a geodésica γ é uma parametrização do círculo unitário no plano gerado pelos vetores p e v, i.e. um círculo máximo. Em conclusão, as geodésicas são os círculos máximos de $\mathbb{S}^n$.

(b) Afirmo que $\operatorname{Isom}\mathbb{S}^n = \mathsf{O}(n+1) \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathsf{GL}(n+1) : AA^\mathsf{T} = \mathrm{Id}\}$. É claro que $\mathsf{O}(n+1) \subset \operatorname{Isom}\mathbb{S}^n$, pois as transformações $A \in \mathsf{O}(n+1)$ preservam o produto interno euclideano:

$$AA^\mathsf{T} = \mathrm{Id} \iff \sum_k A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \iff Ae_i \cdot Ae_j = \delta_{ij}$$
$$\iff Av \cdot Aw = A\left(v^ie_i\right) \cdot A\left(w^je_j\right) = v^iw^je_i \cdot e_j = v \cdot w.$$

Para ver que $\operatorname{Isom} \mathbb{S}^n \subset \mathsf{O}(n+1)$ suponha que $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é uma isometria. Vamos mostrar que A é a restrição de uma função $\tilde{A} \in \mathsf{O}(n+1)$. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (r, \theta) &\longmapsto rA(1, \theta) \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Se mostramos que $\tilde{A}$ é uma isometria linear, é claro que ela é um elemento de $\mathsf{O}(n+1)$ pela conta anterior. De fato, basta mostrar que $\tilde{A}$ é uma isometria, pois toda isometria de espaços de Banach que fixa a origem é linear ([**?**] Teo. 7.11).

Para ver que $\tilde{A}$ é uma isometria de $\mathbb{R}^{n+1}$, **afirmo** que a distância de p a q está totalmente determinada pelas normas $\|p\|$ e $\|q\|$, e pela distancia esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$. Note que essa afirmação é na verdade um problema de geometria plana, pois todas essas quantidades podem ser descritas dentro do único plano que contém 0, p e q.

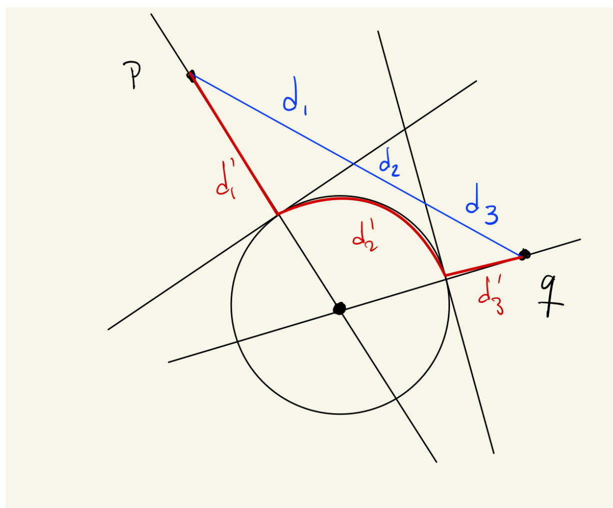


Figure 1: Intento de prova

Acabou que essa afirmação é simplesmente a lei dos cosenos, já que a distância esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$ é exatamente o angulo entre p e q (poque essa distância é um segmento de círculo máximo!):

$$\text{lei dos cosenos:} \qquad d(p,q)^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2 - 2\|p\|\|q\| \cos \angle(p,q)$$

Em fim, $\tilde{A}$ é uma isometria porque $d_{\mathbb{R}^{n+1}}(p,q) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\tilde{A}p, \tilde{A}q)$ pelo argumento anterior.

$\square$

Exercício 12 Seja (G, g) um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invatiante e ∇ sua conexão de Levi-Civita.

(a) Mostre que
$$\nabla_u v = \frac{1}{2}[u, v],$$
para cada $u, v \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$.

(b) Seja $\overline{\nabla}$ uma conexão agim simétrica em G. Mostre que $\overline{\nabla} = \nabla$ se e somente se $\overline{\nabla}_u u = 0$ para todo $u \in \mathfrak{g}$.

Solution.

(a) Como ∇ é Levi-Civita, temos Koszul, i.e. $\forall u, v, w \in \mathfrak{g}$,
$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_u v, w\rangle &= u\langle v, w\rangle + v\langle u, w\rangle - w\langle u, v\rangle \\ &\quad - \langle u, [v, w]\rangle + \langle v, [w, u]\rangle + \langle w, [u, v]\rangle \end{aligned}$$
Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é invariante à esquerda, é constante quando avaliamos em elementos de $\mathfrak{g}$, e portanto os primeiros três termos se anulam. Então o exercício acaba quando mostramos que
$$\langle v, [w, u]\rangle = \langle u, [v, w]\rangle = -\langle u, [w, v]\rangle.$$
Seguindo [dC79], p. 45., a ideia é usar o fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times G \to G$ de w para expressar o colchete de Lie. Primeiro precisamos de

Afirmação O fluxo φ de um campo invariante à esquerda w comuta com a traslação à esquerda, i.e.,
$$\varphi_t(e) \circ L_h = L_h \circ \varphi_t(e) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \forall h \in G.$$
Prova da afirmação. Derivamos de ambos lados. Por um lado,
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(e) \circ L_h = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(h) = v_h$$
Por outro lado,
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_h \circ \varphi_t(e) = (L_h)_{*, \varphi_t(e)} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(e) = (L_h)_{*,e} v_e = v_h.$$
Por unicidade das soluções de EDOs, acabou. □

Então repare:
$$\varphi_t(h) = (\varphi_t \circ L_h)(e) = (L_h \circ \varphi_t)(e) = h\varphi_t(e) = R_{\varphi_t(e)} h,$$
ou seja, qualquer curva integral de w é simplesmente a curva integral que passa por e trasladada.

Agora lembre que o colchete de Lie pode ser expressado como
$$[w, v]_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\varphi_{-t}\right)_{*, \varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

(Onde fixamos o parámetro $-t$ e deixamos livre o outro para ver φ_{-t} como um difeomorfismo de G.)

Juntando com a discussão anterior obtemos

$$[w,v]_e = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

Agora repare: como a métrica é bi-invariante,

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= \left\langle \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}\Big(L_{\varphi_t(e)}\Big)_{*,e} u_e, \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}\Big(L_{\varphi_t(e)}\Big)_{*,e} v_e\right\rangle \\ &= \left\langle \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}\right\rangle\end{aligned}$$

Agora derivemos como funções de t (dentro de T_eG, i.e. não precisamos derivada covariante), e avaliemos em $t=0$. (Note que quando avaliamos em $t=0$ o factor que não derivamos não muda—estamos trasladando à direita e à esquerda por $\varphi_0(e)$!) Obtemos:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left\langle \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}, \left[\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}\right]_{t=0}\right\rangle \\ &+ \left\langle \left[\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} u_{\varphi_t(e)}\right]_{t=0}, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}\right\rangle \\ &= \langle [w,u]_e, v_e\rangle + \langle u_e, [w,v]_e\rangle.\end{aligned}$$

Pelo inciso (a), é claro que se $\overline{\nabla} = \nabla$, $\overline{\nabla}_u u = 0$. Para a implicação contrária, vejamos que

$$\overline{\nabla}_u v = \frac{1}{2}[u,v], \qquad u,v\in\mathfrak{g}$$

que é conveniente porque sabemos que isso é igual a $\nabla_u v$ pelo inciso (a). É só fazer:

$$0 = \overline{\nabla}_{u+v} u+v = \cancelto{0}{\overline{\nabla}_u u} + \overline{\nabla}_u v + \overline{\nabla}_v u + \cancelto{0}{\overline{\nabla}_v v}$$

Lembre que $\overline{\nabla}$ é simétrica, i.e. $\overline{\nabla}_u v - \overline{\nabla}_v u = [u,v]$. Somando com a equação anterior:

$$\overline{\nabla}_u v - \overline{\nabla}_v u + \overline{\nabla}_u v + \overline{\nabla}_v u = [u,v]$$

como queríamos. Para concluir é só ver que ∇ e $\overline{\nabla}$ também coincidem em campos vetoriais que não são invariantes à esquerda. Então pegue uma base $\{u_i\}\subset\mathfrak{g}$ e dois campos $X = X^i u_i$,$Y = Y^j u_j$ quaisquer. Então:

$$\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_{X^i u_i} Y^j u_j = X^i u_i Y_j u_j + Y^j \overline{\nabla}_{u_i} u_j = X^i u_i Y_j u_j + Y^j \nabla_{u_i} u_j = \nabla_X Y.$$

Pergunta Tem algum argumento super simples para argumentar essa última parte sem pegar uma base de $\mathfrak{g}$?

□

Exercício 13 (Exercício 3, Cap. III, [dC79]) Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, e $X \in \mathfrak{g}$. As trajetórias de X determinam uma aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ com $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$.

(a) Prove que $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\varphi(t+s) = \varphi(t)\cdot\varphi(s)$, ($\varphi : \mathbb{R} \to G$ é então chamado um ***subgrupo a 1-parâmetro de*** G.

(b) Prove que se G tem uma métrica bi-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ então as geodésicas de G que partem de e são os subgrupos a 1-parâmetro de G.

Solution.

(a) Lembre que no exercício anterior mostramos que

$$\varphi_t(h) = R_{\varphi_t(e)}(h) = h \cdot \varphi_t(e), \qquad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \forall h \in G.$$

Fixe um $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e pegue $h = \varphi_{t_0}(e)^{-1}$. Obtemos que

$$\varphi_t(\varphi_{t_0}(e)^{-1}) = \varphi_{t_0}(e)^{-1}\varphi_t(e).$$

Ou seja, $\varphi_{t_0}(e)^{-1}\varphi_t(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$. Como também $\varphi_{t-t_0}(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$, por unicidade de EDOs obtemos

$$\varphi_{t_0}(e)^{-1}\varphi_t(e) = \varphi_{t-t_0}(e) \tag{2}$$

Avaliando o lado esquerdo em $t' = t - t_0$, do lado direito chegamos até $\varphi_{t-2t_0}(e)$. Repetindo esse processo cobrimos todo $\mathbb{R}$.

Para confirmar a segunda propriedade avaliamos eq. (2) em $t = 0$ para obter $\varphi_{t_0}(e)^{-1} = \varphi_{-t_0}(e)$. Para concluir pegue $t, s \in \mathbb{R}$ quaisquer e escreva:

$$\varphi_{t+s}(e) = \varphi_{t-(-s)}(e) = \varphi_{-s}^{-1}\varphi_t(e) = \varphi_s(e)\varphi_t(e).$$

(b) Pegue $X \in \mathfrak{g}$ e considere a curva integral que passa por e, φ. Pelo exercício anterior,

$$0 = \nabla_X X = \nabla_{\varphi_* \frac{d}{dt}} X = \nabla^{\varphi}_{\frac{d}{dt}} X \circ \varphi = \nabla_{\varphi'}\varphi'$$

Então as curvas integrais de X que passam por e são geodésicas. Como isso é para qualquer vetor em $\mathfrak{g}$, por unicidade das soluções a EDOs, acabou.

□

Exercício 14 Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) denotamos por d_g a distância induzida por g.

(a) Sejam g, h duas métricas Riemannianas em M^n. Mostre que se $d_g = d_h$ então $g = h$.

(b) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F : M \to M$ um difeomorfismo. Mostre que F é uma isometria se e somente se $d_g(F(\cdot), F(\cdot)) = d_g(\cdot, \cdot)$.

Demostração.

(a) Prova por contrapositiva.

Afirmação Se $g \neq h$, existem um aberto $U \subset M$ e um marco $\{E_i\} \subset \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0}) \qquad \text{para algum } i_0 \in \{1, \ldots, n\}.$$

Prova da afirmação. Se $g(E_i, E_i) = h(E_i, E_i)$ para todo marco em todo aberto de M, é claro que

$$g(X, Y) = g(X^i E_i, Y^j E_j) = X^i Y^j g(E_i, E_j) = h(X, Y)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

Então pegue um marco $\{E_i\} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0})$ em U. Sendo a diferença dessas quantidades uma função distinta da constante zero, podemos supô-la estritamente positiva dentro de U. Pegue $p \in U$ e uma vizinhança geodésica contendo p, que renomeamos U por simplicidade. Dentro de uma vizinhança geodésica, a distância de p aos outros pontos dentro de U está realizada por geodésicas, então podemos pegar $q \in U$ e γ geodésica ligando p e q.

Considere uma extensão de $\gamma' \in \mathfrak{X}_\gamma$ dentro de U, digamos $G = G^i E_i$. Então:

$$\begin{aligned} d_g(p, q) &= \int_a^b g(G^i E_i, G^i E_i) \circ \gamma dt = \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 g(E_i, E_i) \circ \gamma dt \\ &\neq \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 h(E_i, E_i) \circ \gamma dt = d_h(p, q). \end{aligned}$$

(b) Primeiro suponha que $F^* d_g = d_g$. Para mostrar que F é uma isometria usamos o inciso anterior: consideramos as métricas g e $F^* g$ em M. Basta mostrar que $d_g = d_{F^* g}$. Por um tempo pensei que era para usar um câmbio de variáveis, mas acabei pensando assim: Pegue uma curva γ ligando p e q. Note que

$$\underbrace{\int_a^b F^* g(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } p \text{ a } q)} = \underbrace{\int_a^b g(F_{*,\gamma(t)} \gamma'(t), F_{*,\gamma(t)} \gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } F(p) \text{ a } F(q))}$$

Ou seja, do lado esquerdo estamos medindo o comprimento (respeito à métrica $F^* g$) de uma curva ligando p a q, enquanto que do lado direito estamos medindo o comprimento (respeito à métrica g) da curva $F \circ \gamma$, que liga $F(p)$ a $F(q)$.

Pegando o ínfimo de ambas quantidades, concluímos que a distância d_{F^*g} coincide com a distância F^*d_g, que por hipótese é igual a d_g. A implicação contrária também fica clara: supondo que $F^*g = g$, levando em conta a igualdade das integrais acima e pegando o ínfimo, concluímos que $F^*d_g = d_g$.

□

Exercício 15 Suponha que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa.

(a) (M, g) simétrica $\implies$ (M, g) homogênea.

(b) (M, g) 2-homogênea $\implies$ (M, g) isotrópica.

Solution.

(a) **Ideia.** Pegamos dois pontos $q, q' \in M$. Para usar que M é simétrica buscamos o "ponto meio". Esse deve ser $p \in M$ que esteja no meio do caminho de uma curva minimizante γ ligando q e q'. Daí, pegamos $F \in \mathrm{Iso}_p := \{$ isometrias de M que fixam $p\}$ com a propriedade de que $d_pF = -\mathrm{Id}$. Daí devemos provar que F preserva γ e não fixa q. Daí, só existem dois pontos em γ que guardam a mesma distância com p: q e q'. Como $F(q) \neq q$ também guarda essa distância, concluímos que $F(q) = q'$.

Infelizmente fui incapaz de levar minha ideia até uma prova sem ajuda externa. Primeiramente me pareceu improvável a possibilidade de construir a geodésica minimizante (pode não existir para variedades não completas; mostrar que a propriedade de simetria implica a existência de curvas minimizantes parecia muito forte).

Conjectura Para quaisquer $q, q' \in M$ existe uma curva minimizante γ ligando q e q'.

Supondo que existe γ, podemos pegar $F \in \mathrm{Iso}_p$ tal que $d_pF = -\mathrm{Id}$ onde p é ponto meio sobre γ respeito q e q'.

Tentei mostrar que F preserva γ perto de p usando um marco geodésico, onde a geodésicas são curvas integrais de linhas, mas depois descobri que minha prova estava errada (pois dF só age como $-\mathrm{Id}$ em p):

Afirmação Perto de p, $F(\gamma(t)) \in \operatorname{img}\gamma$.

Prova da afirmação. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p, de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em T_pM baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$:

$$\frac{d}{dt}\Big|_t F \circ \gamma = F_{*,\gamma(t)}\gamma'(t) = -\gamma'(t).$$

Portanto, a derivada da curva $F\circ\gamma$ coincide com a derivada de γ. Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F\circ\gamma(t) \in \operatorname{img}\gamma$ dentro desta bola geodésica. □

Depois desse ponto comecei a buscar ajuda em livros, internet e ChatGPT. Rapidamente reparei que minhas ideias eram boas, e consegui:

Prova da afirmação reforçada. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p, de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em T_pM baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$ em $t = 0$ (supondo que $\gamma(0) = p$):

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F \circ \gamma = F_{*,p}\gamma'(0) = -\gamma'(0).$$

Portanto, a derivada da curva $(F \circ \gamma)(t)$ coincide com a derivada de $\gamma(-t)$. Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F \circ \gamma(t) \in \operatorname{img} \gamma$ dentro desta bola geodésica. $\square$

Seguindo com esse raciocínio, $F \circ \gamma$ é uma curva definida em todo o domínio de γ, e portanto deve coincidir com $\gamma(-t)$ ao longo desse domínio. Ou seja, $F \circ \gamma$ é γ percorrida em sentido oposto. Isso significa, por definição de p como ponto meio, e desde que supomos que $\gamma(0) = p$, que, se $\gamma(t_0) = q$, necessariamente $q' = \gamma(-t_0) = (F \circ \gamma)(t_0) = F(q)$, como queríamos. (Note que meu desejo inicial de mostrar que $F(q) \neq q'$ não foi necessário.)

Então tudo fica resolvido se mostramos a conjetura. O motivo inicial para conjeturar isso foi notar que $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, onde os pontos antípodas (entre outros) não podem ser ligados por curvas minimizantes, parece perder a propriedade de ser um espaço simétrico (que $\mathbb{R}^2$ tem). Com efeito, a intuição mostra que $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) = O(2)$, de modo que o grupo de isotropia Iso_p é trivial para todo ponto.

A inspiração final chega de MathOverflow: parece que, com efeito, toda variedade simétrica é completa:

> "Consider a local geodesic and use the symmetry to flip it, effectively doubling the length of the geodesic, ad infinitum"

A ideia nos lembra do exercício que fizemos com grupos de Lie. Pegamos uma geodésica definida perto de p. Pegamos $q \neq p$ dentro da bola geodésica centrada em p. Agora considere $F \in \operatorname{Iso}_q$ tal que $F_q == \mathrm{Id}$. Sabemos que γ está definida entre p e q, e, pela afirmação mostrada acima, compondo com F obtemos γ reparametrizada em sentido oposto. Isso permite chegar a um ponto sobre a curva original que fica à mesma distância de q que p, só que no sentido oposto. Repetindo esse processo, vemos que a geodésica pode ser estendida infinitamente.

De fato, isso parece mostrar a conjetura via teorema de Hopf-Rinow, por exemplo em [Lee19], Lemma 6.18 e Coro. 6.20. Tem uma prova sem usar esse teorema?

(b) Queremos ver que $\forall p \in M$ e $\forall v, w \in T^1_pM$ existe $F \in \operatorname{Iso}_p(M)$ tal que $F_{*,p}v = w$. Para usar a propriedade de ser 2-homogênea, defina $p_1 := q_1 := p$, e $p_2 := \exp_p(v)$, $q_2 := \exp_p(w)$. (Isto é, supondo por enquanto que $\exp_p$ está definida em vetores de norma 1.) Então existe $F \in \operatorname{Iso}(M)$ tal que $F(p_1) = F(q_1)$, i.e. $F \in \operatorname{Iso}_p(M)$, e tal que $F(p_2) = F(q_2)$.

Para ver que $F_{*,p}v = w$, note que $(F \circ \gamma_v)(1) = F(\gamma_v(1)) = F(p_2) = q_2$. Então $F \circ \gamma_v$ é uma curva ligando p e q. Pelo exercício 14(b) dessa lista, como F é uma isometria, sabemos que preserva a distância, de modo a $F \circ \gamma_v$ é minimizimante e portanto uma geodésica. Daí $F \circ \gamma_v$ é uma reparametrização de γ_w; mas como F é isometria, preserva a norma dos vetores velocidade e portanto as curvas coincidem. Isso significa que $w = \gamma_w'(0) = (F \circ \gamma_v)'(0) = F_{*,p}\gamma_v'(0) = F_{*,p}v$.

Por último só note que se $\exp_p$ não está definida em vetores de norma 1, podemos fazer a mesma construção em vetores que estejam dentro do domínio dela, obtendo uma função cuja diferencial envia um múltiplo pequeno de v em um múltiplo de igual proporção respeito a w. A diferencial dessa função também envia v em w, pois é uma isometria linear.

$\square$

Lista 4

Exercício 1 (Cap. IV Exer. 1, [dC79]) Seja G um grupo de Lie com uma métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bi-invariante. Seja $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ campos unitários e invariantes à esquerda em G.

(a) Mostre que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$. (Feito na lista 3.)

(b) Conclua de (a) que $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$.

(c) Prove que, se X e Y são ortonormais, a curvatura seccional $K(\sigma)$ de G segundo o plano σ gerado por X e Y é dada por

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^{\cdot}$$

Portanto, *a curvatura seccional* $K(\sigma)$ *de um grupo de Lie com métrica bi-invariante é não negativa e é zero se e só se* σ *é gerado por vetores* X, Y *tais que* $[X,Y]=0$.

Solution.

(b)

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \frac{1}{2}\nabla_X[Y,Z] - \frac{1}{2}\nabla_Y[X,Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\
&= \frac{1}{4}[X,[Y,Z] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\
&= \frac{1}{4}\Big([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X] + [Z,[X,Y]]\Big) + \frac{1}{4}[Z,[X,Y]] \\
\text{identidade de Jacobi} \qquad &= \frac{1}{4}[Z,[X,Y]]
\end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos a menos de um signo que muda com a convenção de [dC79] para R.

(c)

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= \frac{R(X,Y,Y,X)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\
&= R(X,Y,Y,X) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle \qquad \text{X,Y ortonormais} \\
&= \frac{1}{4}\langle [[X,Y],Y],X\rangle \qquad \text{inciso (b) (convenção [dC79])}
\end{aligned}$$

Agora lembre que na lista 3 provei que

$$\langle [w,u],v\rangle = -\langle u,[w,v]\rangle \qquad \forall u,v,w \in \mathfrak{g}$$

Pegue $u = [X, Y]$, $v = X$ e $w = Y$ para obter

$$\langle [Y, [X, Y]], X\rangle = -\langle [X, Y], [Y, X]\rangle = \langle [X, Y], [X, Y]\rangle$$

a por outra parte

$$\langle [Y, [X, Y]], X\rangle = -\langle [[X, Y], Y], X\rangle$$

Então parece de novo que tá errado por um signo mas resulta que a definição de K também é outra em [dC79], então por antisimetria de R nas últimas duas entradas o signo vira e tudo tá certo.

□

Exercício 2 Seja (M, g) uma variedade Riemanniana.

(a) Se (M, g) é homogênea, então M possui curvatura escalar constante.

(b) Se (M, g) é 2-homogênea, então M é Einstein.

(c) Se (M, g) é 3-homogênea, então M possui curvatura seccional constante.

Solução.

(a) (Começarei com o inciso (b), pois foi o que consegui fazer melhor.)

(b) **(Intento sem ajuda externa. Com pouco de pena mas da para mostrar, pode poular.)** Queremos ver que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \operatorname{Ric} = g$. Como tanto Ric quanto g são tensores, basta mostrar o resultado numa base do espaço tangente a qualquer ponto. Usamos o exercício 15(b) da lista 3 para obter que M é isotrópica, i.e. $\forall u, v \in T^1_pM$ existe $f \in \operatorname{Iso}(M)$ tal que $f_{*,p}u = v$.

Para uma base ortonormal E_i de T_pM temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(E_i, E_j) &= \sum_k \langle R(E_k, E_i)E_j, E_k\rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k)E_k, E_j\rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k)E_k, f_*E_i\rangle\end{aligned}$$

onde existe $f \in \operatorname{Iso}$ tal que $f_*E_i = E_j$ porque M é isotrópica. Daí (aqui começo a ter dúvida) usamos que $f^*R = R$, ou seja

$$R(f_*E_i, f_*E_k)f_*E_k = R(E_i, E_k)E_k$$

isso é porque f é uma isometria e R depende da métrica e suas derivadas. Então a equação acima vira

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_i, E_j) &= \sum_k \langle R(f_* E_i, f_* E_k) f_* E_k, f_* E_i \rangle \\ &= \sum_k \langle R(E_i, E_k) E_k, E_i \rangle \\ &= \sum_k K(E_i, E_k)\end{aligned}$$

que não faz sentido.

(Solução depois de consultar o professor + ChatGPT.) A observação central feita pelo professor é considerar o endomorfismo associado a Ric, que definimos como $\widehat{\mathrm{Ric}}$ satisfazendo

$$\left\langle \widehat{\mathrm{Ric}}(v), w \right\rangle = \mathrm{Ric}(v, w)$$

A observação central feita pelo ChatGPT é que para uma isometria f temos que

$$f^* \mathrm{Ric} = \mathrm{Ric} \implies f_* \circ \widehat{\mathrm{Ric}} = \widehat{\mathrm{Ric}} \circ f_*$$

De fato, para $v, w \in T_p M$,

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\mathrm{Ric}}(f_* v), w \right\rangle &= \mathrm{Ric}(f_* v, w) = f^* \mathrm{Ric}(v, f_*^{-1} w) = \mathrm{Ric}(v, f_*^{-1} w) \\ &= \left\langle \widehat{\mathrm{Ric}} v, f_*^{-1} w \right\rangle = \left\langle f_* \widehat{\mathrm{Ric}} v, w \right\rangle\end{aligned}$$

Agora mostramos que $\widehat{\mathrm{Ric}} = \lambda\, \mathrm{Id}$. Então como Ric é simétrico, $\widehat{\mathrm{Ric}}$ é diagonalizável e da para calcular o seus eigenvalores. Vamos ver todos eles coincidem. Pegue v, w eigenvetores de norma 1. Como M é 2-homogênea, sabemos que é isotrópica e existe f isometria tal que $f_* w = v$.

$$\lambda_v v = \widehat{\mathrm{Ric}} v = \widehat{\mathrm{Ric}}(f_* w) = f_* \widehat{\mathrm{Ric}}(w) = f_* \lambda_w w = \lambda_w f_* w = \lambda_w v$$

então $\lambda_v = \lambda_w$ como queríamos. E isso mostra que em cada ponto,

$$\mathrm{Ric}(v, w) = \left\langle \widehat{\mathrm{Ric}} v, w \right\rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

ou seja, λ é na verdade uma função em M. Para ver que ela é constante, note que a condição de 2-homogeneidade implica homogeneidade, então Iso age transitivamente em M. Ou seja para $p \neq q$ pontos em M existe f isometria tal que $f(p) = q$. Como essa isometria preserva tanto o tensor de Ricci quanto a métrica, obtemos que

$$\begin{aligned}\lambda(q) g_q &= \mathrm{Ric}_q = \mathrm{Ric}_{f(p)} = (f^* \mathrm{Ric})_p = \mathrm{Ric}_p \\ &= \lambda(p) g_p = \lambda(p)(f^* g)_p = \lambda(p) g_{f(p)} = \lambda(p) g_q.\end{aligned}$$

(c) **(Sem ajuda externa nem muito tempo para aprofundar!)** Minha ideia é assim: para controlar a curvatura seccional a partir da 3-homogeneidade realizamos dois vetores arbitrários $v, w \in T_pM$ como sendo as derivadas de duas curvas: uma ligando p a q, e outra ligando p a q'. Agora nos perguntamos como é a curvatura em outro ponto $\hat{p}$. Transportamos a terna (p, q, q') com uma isometria a alguma terna $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{q'})$. Essa segunda terna pode ser escolhida de maneira que as correspondentes derivadas sejam quaisquer outros vetores $\hat{v}$ e $\hat{w}$ tangentes a $\hat{p}$. As curvaturas seccionais coincidem porque f é uma isometria.

(a) **(Sem ajuda externa nem muito tempo para aprofundar!)** Uma isometria preserva a curvatura escalar. Como para todo $p \neq q$ em M existe isometria f tal que $f(p) = q$, obtemos que

$$\mathrm{Scal}(q) = \mathrm{Scal}(f(p)) = (f^* \mathrm{Scal})(p) = \mathrm{Scal}(p).$$

$\square$

Exercício 5 (Exer. 4, Cap IV, [dC79]) Seja M uma variedade Riemanniana com a seguinte propriedade: dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, o transporte paralelo de p a q não depende da curva que liga p a q. Prove que a curvatura de M é identicamente nula, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y)Z = 0$.

Demostração. Parece que a sugestão é a prova quase por completo. Começarei explicando os pontos que achei que era necessário destrinchar para chegar a uma prova formal, e depois escrevo o argumento completo (que é basicamente uma copia da sugestão).

Concluir o exercício só depende de duas coisas:

1. **(Mostrar que f sempre existe.)** A prova formalmente começa pegando três vetores $X(p), Y(p), Z(p)$ no espaço tangente a um ponto arbitrário $p \in M$. Primeiro devemos mostrar que existe $f : U \to M$ tal que $\partial_s|_{(0,1)} = X(p)$, $\partial_t|_{(0,1)} = Y(p)$, e que $f(s, 0) = f(0, 0)$.

   Primeiro usamos a exponencial $\exp_p$ de M para definir a superfície como a imagem do subespaço vetorial gerado por $X(p)$ e $Y(p)$. A exponencial fica determinada numa bola aberta $B_\varepsilon(0) \subset T_pM$. Note $X(p)$ e $Y(p)$ podem não estar contidos em $B_\varepsilon(0)$, mas podemos consertar isso redefinindo a exponencial avaliando as geodésicas em valores menores do que 1. Agora compomos com uma função suave $g : U \to B_\varepsilon(0)$ tal que

   - $g(0, 1) = (0, 0)$, de modo que $p = (\widetilde{\exp}_p^{-1} \circ g)(0, 1)$.
   - $g(s, 0) = g(0, 0)$.
   - $g_{*,(0,1)} e_1 = X(p)$.
   - $g_{*,(0,1)} e_2 = Y(p)$.

   Então $f = \widetilde{\exp}_p^{-1} \circ g$. **(Faltou: por que sempre existe g?)**

2. **(Mostrar que $Z(p)$ pode ser atingido como o transporte paralelo de $V(0,0)$.)** Isso é simples: definimos $V(0,0)$ como o transporte paralelo de $Z(p)$ a $f(0,0)$. Por unicidade do transporte paralelo, acabou.

Agora escrevo a prova completa. Como R é um tensor, basta mostrar o resultado num ponto só. R depende de três vetores.

Para escolher os primeiros dois consideramos a superfície dada como a imagem do mapa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ construído acima, cujo domínio U é um quadrado aberto contendo o quadrado unitário:

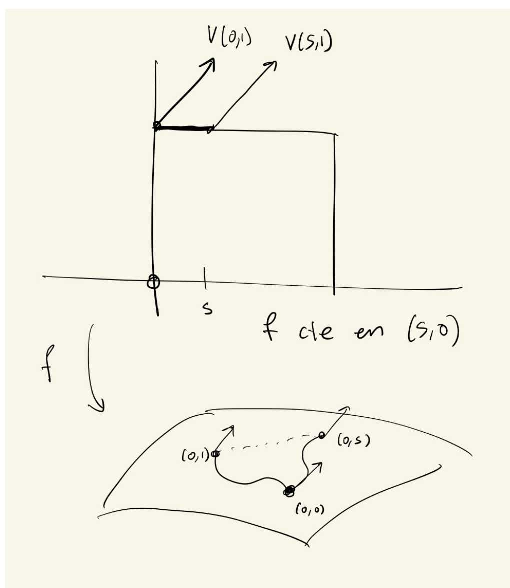
$$U := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2; -\varepsilon < t < 1+\varepsilon, -\varepsilon < s < 1+\varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

Definimos um campo vetorial pegando um vetor arbitrário $V_0 \in T_{f(0,0)}M$ e transportamos paralelamente ao longo das curvas verticais $t \mapsto (s,t)$. Isso significa que $\nabla_{\partial_t} V = 0$, e concluimos que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} = 0 = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} V + R(\partial_t, \partial_s)V$$

onde todos os campos são seções ao longo de f e R realmente é $R_{\nabla^f} = f^*R$.

Agora notamos que $V(1,0)$ deve ser, além do transporte paralelo de $V(0,0)$ ao longo de $t \mapsto (0,t)$, o transporte paralelo de $V(0,0)$ ao longo de $t \mapsto (s,t)$ seguido de $s \mapsto (s,1)$ para qualquer s. Concluímos que $\nabla_{\partial_s} V(s,1) = 0$. Isso significa que $R_{f(0,1)} = 0$.



$\square$

Campos de Killing

Exercício 11 (Exer. 5, Cap. III, [dC79]) Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p, e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon-) \times U \to M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. X é chamado um ***campo de Killing*** (ou uma ***isometria infinitesimal***) se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset M \to M$ é uma isometria. Prove que

(a) Um campo linear em $\mathbb{R}^n$, definido por uma matriz A é um campo de Killing se e só se A é anti-simétrica.

(b) Seja X um campo de Killing em M, $p \in M$ e U uma vizinhança normal de p em M. Admita que p é o único ponto de U que satisfaz $X(p) = 0$. Então, em U, X é tangente às esferas geodésicas centradas em p.

(c) Sejam X um campo diferenciável de vetores em M e $f : M \to N$ uma isometria. Seja Y o campo de vetores em N definido por $Y(f(p)) = df_p(X(p))$, $p \in M$. Então Y é um campo de Killing se e somente se X também o for.

(d) X é de Killing $\iff$ $\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (a equaçao acima é chamada ***equação de Killing***).

(e) Seja X um campo de Killing em M com $X(q) \neq 0$, $q \in M$. Então existe um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em uma vizinhança de q, de modo que os coeficientes g_{ij} da métrica neste sistema de coordenadas não dependem de x_n.

Solução.

(d) Seguimos a sugestão usando [Lee13].

Observação Note que X é de Killing $\iff$ $\mathcal{L}_X g = 0$. A ida da para escrever com a definição de derivada de Lie de campos tensoriales covariantes:

$$(\mathcal{L}_X g)_p(Y, Z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_{\varphi_t(p)}(\varphi^t_{*,p} Y_p, \varphi^t_{*,p} Z_p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_p(Y_p, Z_p) = 0$$

onde escrevo o fluxo como φ_t ou φ^t a vontade para facilitar notação. A volta também é simples usando Thm 12.37 [Lee13]: $(\varphi_t^* g)_p = g_p \iff L_X g = 0$.

Usando essa observação o inciso (d) pode ser resolvido assim: X killing $\iff$ $L_X g = 0$. Desenrolamos essa definição usando Prop. 12.32(d) [Lee13]:

$$\begin{aligned} 0 = (L_X g)(Y, Z) &= L_X(g(Y, Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= X\langle Y, Z\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle Y, [X, Y]\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrica,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle \\ &+ \langle \nabla_X Z, Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é métrica, acabou.

(a) Noto que para todo $p = (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(t,p) = X_p = A(p).$$

Consegui escrever

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(t,p)^i = a_{ij}p^j$$

pensando nas funções coordenadas de $\varphi(t,p)$. Porém, não vi que isso é um sistema de equações diferenciais! Divaguei um tempo sem chegar a nada. Consultando ChatGPT, da para escrever

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t,p) = A\varphi(t,p) \\ \varphi(0,p) = p \end{cases}$$

que tem solução

$$\varphi(t,p) = e^{tA}\varphi(0,p).$$

Isso faz sentido pelas propriedades da exponencial de matrizes, en particular o fato que que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \qquad \text{[Hal15], Prop. 2.4}$$

que implica que efetivamente a função $e^{tA}\varphi(0,t)$ é solução do sistema dado acima. (Explorei outras formas de resolver o sistema, mas achei essa explicação mais familiar.)

Então concluímos que o fluxo é um mapa linear (a exponencial de matrizes é uma matriz). Como além disso é uma isometria, segue que é um elemento de $\mathsf{O}(n)$. Agora lembre que a exponencial de grupos de Lie, que coincide com a exponencial de matrizes nesse caso, é um mapa da álgebra de Lie ao grupo. Como $\exp(tA) \in \mathsf{O}(n)$, concluímos que $A \in \mathfrak{o}(n)$. Para concluir só devemos confirmar que $\mathfrak{o}(n)$ consta das matrizes antisimetricas. Note que

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \exp(tA)x, \exp(tA)y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto ponto euclidiano. De fato, podemos reescrever as parcelas como

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^{\mathsf{T}}y = x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}y, \qquad \langle x, Ax\rangle = x^{\mathsf{T}}(Ay)$$

obtendo que

$$0 = x^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}} + A)y$$

ou seja, $A^{\mathsf{T}} + A = 0$. (Argumento do Misha; também era natural pegar uma curva em $\mathsf{O}(n)$ e derivar.)

(b) Note que φ_t é uma isometria de $B_\varepsilon(p)$. Isso segue de que $\varphi_t(p) = p$ para todo t. Isso segue de que a curva constante p satisfaz a equação do fluxo $0 = X_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(p)$ e a mesma condição inicial. Daí segue que, como φ preserva a métrica riemanniana e portanto a distância riemanniana, ele manda esferas geodésicas em esferas geodésicas. Segue que as derivadas do fluxo, i.e. vetores de X são tangentes às esferas geodésicas.

(c) Parece que segue da "Propriedade de naturalidade dos fluxos", uma proposição em [Lee13]. Vejamos se posso escrever o essencial: basta mostrar que o fluxo de $\tilde{X} := f_* X$ é dado por $f \circ \varphi$ onde φ é o fluxo de X. Basta diferenciar $f \circ \varphi$ e comprovar que sua derivada coincide com $\tilde{X}$ em cada ponto. Por unicidade de EDOs, acabou. E sim: $(f \circ \varphi_p)'(0)$ é, por definição de vetores como velocidades de curvas, $f_*(\varphi_p'(0)) = f_* X$.

Seja $\tilde{\varphi}$ o fluxo de $\tilde{X}$. Para ver que $\tilde{\varphi}_t$ é uma isometria para todo t, note que para todo $\tilde{p} = f(p) \in \tilde{M}$ temos que

$$\tilde{\varphi}_t(\tilde{p}) = \tilde{\varphi}_{\tilde{p}}(t) = (f \circ \varphi_p)(t) = f(\varphi_t(p))$$

é isometria porque f e φ_t são isometrias. (A troca do subíndice no fluxo me serve para pensar o fluxo como curva ou como isometria.)

(e) Queremos mostrar que $\frac{\partial}{\partial x^n} g_{ij} = 0$ para todo i, j naquele sistema coordenado. A escolha natural é o sistema coordenado onde $X = \partial_n$. Como X é Killing vemos que:

$$0 = L_{\partial_n}(g_{ij} dx^i dx^j) = (\partial_n g_{ij}) dx^i dx^j + g_{ij} L_{\partial_n} dx^i dx^j$$

de novo pelas propriedades da derivada de Lie para campos tensoriais em [Lee13]. Lembre que $dx^i dx^j$ denota a simetrização de $dx^i \otimes dx^j \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, que é igual a $\frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$ (quase) por definição—é uma conta pequena com a definição de simetrização de tensores. Basta argumentar que a segunda parcela da equação anterior se anula. Então temos que

$$\begin{aligned} 2L_{\partial_n}(dx^i dx^j) &= (L_{\partial_n} dx^i) \otimes dx^i + dx^i \otimes (L_{\partial_n} dx^j) \\ &\quad + (L_{\partial_n} dx^j) \otimes dx^i + dx^j \otimes (L_X dx^i) \end{aligned}$$

Lembremos a definição da derivada de Lie de campos tensoriais:

$$L_{\partial_n} dx^i := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^* dx^i$$

onde para $V \in \mathfrak{X}(M)$ o pullback de campos tensoriais é definido por

$$(\varphi_t^* dx_i)_p := (dx^i)_{\varphi(t,p)}(\varphi^t_{*,p} V_p)$$

Minha intuição é que o fluxo de ∂_n não modifica as coordenadas de V distintas de V^n, mas talvez essa última sim. No caminho para comprovar isso descobri que de fato o pushforward é a identidade. Vamos calcular o fluxo de $X = \partial_n$ (aqui usei ChatGPT):

$$x \circ \varphi_p(t) = \Big((x^1 \circ \varphi_p)(t), \ldots, (x^n \circ \varphi_p)(t)\Big) := (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$$

obtemos o sistema

$$\dot{\varphi}^i(t) \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases}$$

que implica que

$$\varphi^i(t) = \begin{cases} x(p) & i \neq n \\ x(p) + t & i = n \end{cases}$$

dada a condição inicial $x \circ \varphi(0) = x(p)$. Então aqui, para minha surpresa, acaba que, dado t fixo, a derivada do fluxo φ_t é a identidade. E sim, porque como difeomorfismo de M vemos em coordenadas que trata-se do mapa

$$(x^1(p), \dots, x^n(p)) \longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p) + t),$$

e quando derivamos, como t é fixo, obtemos a matrix identidade. Concluimos que $\varphi_t^* V$ é constante respeito a t, de modo que a derivada de Lie é zero. Note que o fato de que a derivada do fluxo é a identidade não significa que $L_{\partial_n} \omega = 0$ para outros campos tensoriais, pois embora o pushforward dos campos vetoriais não é modificado por φ, outros campos tensoriais podem variar de ponto a ponto, de modo que o pullback não é constante.

□

Exercício 14 (Exer. 12, Cap. VI, [dC79], Singularidades de um campo de Killing) Seja X um campo de Killing em uma variedade Riemanniana M. Seja $N = \{p \in M; X(p) = 0\}$. Prove que

(a) Se $p \in N$, $V \subset M$ é uma vizinhança normal de p, e $q \in N \cap V$, então o segmento de geodésica radial γ ligando p a q está contido em N. Conclua que $\gamma \cap V \subset N$.

(b) Se $p \in N$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que $V \cap N$ é uma subvariedade de M (Isto implica que toda componente conexa de N é uma subvariedade de M).

(c) A codimensão, como subvariedade de M, de uma componente conexa N_k de N é par. Admita o seguinte fato: se uma esfera possui um campo diferenciável não nulo então sua dimensão é ímpar.

Solução.

(a) Suponha que existe um ponto $\gamma(t_0)$ sobre γ onde X não é nulo. Como X é de Killing, o fluxo preserva a distância, i.e. sabemos que para qualquer s,

$$\varepsilon_1 := d(\gamma(t_0), p) = d(\varphi_s(\gamma(t_0)), \varphi_s(p)) = d(\varphi_s(\gamma(t_0)), p)$$

de modo que $\varphi_s(\gamma(t_0))$ está na esfera de raio ε_1 centrada em p. Porém, o mesmo acontece com q, i.e. $\varphi_s(\gamma(t_0))$ está na esfera de raio $\varepsilon_2 := d(\gamma(t_0), q)$ centrada em q. Essas duas esferas se intersectam tangencialmente em $\gamma(t_0)$ pelo lema de Gauss, e portanto o ponto de interseção é único numa vizinhança dele. Isso significa que o fluxo é constante em $\gamma(t_0)$ e portanto $X(\gamma(t_0)) = 0$.

(b) **(Solução seguindo a sugestão.)** Devemos mostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$, a restrição da diferencial do fluxo φ^t_* a $Q := \mathrm{span}(\exp_p^{-1}(q_1), \exp_p^{-1}(q_2))$ é a identidade. Isso resulta claro pelo exercício 3 da lista 3: como φ^t é uma isometria,

$$\varphi^t \circ \exp_p = \varphi^t_* \circ \exp_p$$

Defina $v_1 = \exp^{-1}(q_1)$. Como q_1 é um ponto fixo de φ_t,

$$\varphi^t(\exp_p(v_1)) = \exp_p(v_1)$$

Pela observação da lista 3, esse ponto também é

$$\exp_p(\varphi^t_*(v_1)) = \exp_p(v_1)$$

Então, como $\exp_p$ é bijetiva,

$$\varphi^t_*(v_1) = v_1$$

Agora defina $v_2 = \exp^{-1}(q_2)$; o mesmo argumento funciona. E mesmo para qualquer $v := av_1 + bv_2 \in \mathrm{span}(v_1, v_2)$. Segue que em qualquer ponto de $N_2 := \exp\Big(\mathrm{span}(v_1, v_2)\Big)$ o fluxo tem derivada zero e portanto X se anula. O procedimento funciona igual em dimensões maiores.

(c) **(Seguindo a sugestão.)** A ideia é construir um campo vetorial diferenciável não nulo em alguma esfera contida no espaço $N^\perp$. Isso significa que a dimensão da esfera é ímpar, e portanto a dimensão de $N^\perp$ deve ser par.

A prova acaba sendo bem parecida ao argumento que eu dei para o inciso (a), onde mostrei que os vetores não nulos de um campo de Killing num ponto q perto de $p \in N$ devem ser tangentes a alguma esfera centrada em p. Além disso, o campo X não pode se anular em pontos dessa esfera **(por que? :( )**. Portanto, a restrição de X a essa esfera é um campo que não se anula.

Além disso, como φ^t é uma isometria, notamos que preserva o espaço normal $E_p := (T_pN)^\perp$. Isso implica **(por que?)** que todo vetor de um campo de Killing que não seja zero deve ser tangente a $N^\perp$.

□

Exercício 15 (Fórmula de Bochner para campos de Killing) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, $X \in \mathrm{Kil}(M, g)$ e $f := \frac{1}{2}|X|^2 \in C^\infty(M)$. Mostre que

$$\Delta f = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X, X)$$

onde $|\nabla X|(p)$ denota a norma do operador $T_pM \ni v \mapsto \nabla_v X \in T_pM$.

Ideias. Certamente não consegui resolver esse exercício. Aqui vão algumas ideias e perguntas:

0. A “norma do operador $T_pM \ni v \mapsto \nabla_v X \in T_pM$” é

$$|X| := \sup_{|v|=1} \nabla_v X \qquad ?$$

1. Tentei fazer algumas contas:

$$\Delta f = \Delta\left(\frac{1}{2}|X|^2\right) = \frac{1}{2}\nabla\langle X, X\rangle$$

Onde, para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, sabemos que

$$\langle \nabla\langle X, X\rangle, Y\rangle = Y\langle X, X\rangle = 2\langle \nabla_Y X, X\rangle.$$

Agora pegue um marco ortonormal E_i, de modo que

$$\Delta f = \sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle$$

Agora tendo em mente a conta anterior, estou motivado a calcular

$$E_i\langle \nabla f, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle + \langle \nabla f, \nabla_{E_i}E_i\rangle$$

Ou seja, podemos expressar o Laplaciano de f como

$$\Delta f = \sum_i \Big(E_i\langle \nabla f, E_i\rangle - \langle \nabla f, \nabla_{E_i}E_i\rangle \Big).$$

Em que momento aparece uma segunda derivada do tipo $\nabla\nabla$ i.e. ∇^2?

2. Outra ideia foi usar a notação de índices para os tensores em coordenadas. Consultando [Lee19],

$$\nabla f = g^{ij} E_i f E_j \qquad \text{(quase consegui escrever sem consultar o livro)}$$

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i(X^i\sqrt{\det g})$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{\det g}\,\partial_j f\right)$$

De modo que estou interessado em calcular as derivadas parciais de f:

$$\begin{aligned}
\partial_i f &= \partial_i\left(\frac{1}{2}g(X, X)\right)\\
&= \frac{1}{2}\partial_i(g_{jk}X^jX^k)\\
&= \frac{1}{2}\left(X^jX^k\partial_i g_{jk} + g_{jk}\partial_i X^jX^k\right)\\
&= \frac{1}{2}\big(X^iX^k\partial_i g_{jk} + g_{jk}(X^i\partial_i X^k + X^k\partial_i X_j)\big)
\end{aligned}$$

Depois teria que calcular os as derivadas disso multiplicado com $g^{ij}\sqrt{\det g}$. A dificuldade maior seria identificar onde aparecem os coeficientes do tensor de Ricci.

3. Finalmente consultei [dC79] e [Lee19] em busca de alguma ajuda. Em [dC79] não encontrei nada, quanto em [Lee19] aparece uma fórmula extremamente parecida na questão 7-7: para $u \in C^\infty(M)$,

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = |\nabla^2 u|^2 + \langle \nabla\Delta u, \Delta u\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u).$$

que a principio não tem a ver com campos de Killing. Então uma expetativa obvia é que no caso de ∇u ser um campo de Killing,

$$\langle \nabla\Delta u, \nabla u\rangle = 0$$

mas não é claro o que Δu nesse caso. Consultando os resultados indicados para resolver o problema em [Lee19], reparei nas fórmulas que parecem generalizar o resultado de que

$$\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}V - \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}V = R(f_*\partial_t, f_*\partial_s)V$$

para tensores em geral: são as ***Ricci identities***, Thm. 7.14. Em particular, a fórmula para 1-formas é a sugestão para provar a fórmula de Bochner.

References

[dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[Hal15] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer International Publishing, Cham, 2015.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second edition edition, 2013.

[Lee19] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Princeton University Press, 1974.