Prof. Luis Florit
Monitor. Ivan Miranda

Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/rg

Lista 3

Exercício 4 Exemplo: esfera.

(a) Determine as geodésicas da esfera $\mathbb{S}^n$ com sua métrica canônica.

(b) Determine o grupo de isometrias da esfera $\mathbb{S}^n$ com sua métrica canônica.

Solution.

(a) **Ideia essencial.** Suponha que $\gamma : I \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma geodésica. Podemos pensar que $\gamma' : I \to T\mathbb{S}^n \subset T\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e analogamente $\gamma'' : I \to \mathbb{R}^{n+1}$. Espaço tangente à esfera é perpendicular ao vetor posição, i.e. $\gamma \perp \gamma'$. Também $\gamma'' \perp \gamma'$; isso é porque $\gamma'' = (\gamma'')^\top + (\gamma'')^\perp$, e como γ é geodésica sabemos que $(\gamma'')^\top = 0$. Por fim, $\gamma'' = \lambda\gamma$, então concluímos que γ está dada por senos e cosenos.

Para escrever isso formalmente precisamos de uma expressão experta para γ. Em [Lee19] Prop. 5.27 achamos inspiração: damos a volta ao problema e começamos propondo uma curva que vai acabar sendo geodésica. Pegue um ponto $p \in \mathbb{S}^n$ e um vetor unitário $v \in T_p\mathbb{S}^n$. Considere

$$\gamma(t) = \cos tp + \sin tv$$

Derivando como uma simples curva em $\mathbb{R}^{n+1}$, vemos que $\gamma'' = -\gamma$, o que significa que $(\gamma'')^\top = 0$, i.e. γ é uma geodésica de $\mathbb{S}^n$. Mais precisamente,

$$\gamma''(t) = \left(\nabla^{i\circ\gamma}_{\frac{d}{dt}}\gamma'\right)_t \in (i\circ\gamma)^*T\mathbb{R}^{n+1} \cong \gamma^*(T\mathbb{S}^n \oplus N)$$

não tem componente tangente, e portanto

$$0 = \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\gamma' \in \gamma^*T\mathbb{S}^n.$$

Sendo essa uma geodésica partindo de um ponto arbitrário numa direção arbitrária, concluimos por unicidade das geodésicas e *rescaling lemma* que todas as geodésicas de $\mathbb{S}^n$ são como γ.

Note que a geodésica γ é uma parametrização do círculo unitário no plano gerado pelos vetores p e v, i.e. um círculo máximo. Em conclusão, as geodésicas são os círculos máximos de $\mathbb{S}^n$.

(b) Afirmo que $\operatorname{Isom}\mathbb{S}^n = \mathsf{O}(n+1) \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathsf{GL}(n+1) : AA^\mathsf{T} = \mathrm{Id}\}$. É claro que $\mathsf{O}(n+1) \subset \operatorname{Isom}\mathbb{S}^n$, pois as transformações $A \in \mathsf{O}(n+1)$ preservam o produto interno euclideano:

$$AA^\mathsf{T} = \mathrm{Id} \iff \sum_k A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \iff Ae_i \cdot Ae_j = \delta_{ij}$$
$$\iff Av \cdot Aw = A\left(v^i e_i\right) \cdot A\left(w^j e_j\right) = v^i w^j e_i \cdot e_j = v \cdot w.$$

Para ver que $\mathrm{Isom}\,\mathbb{S}^n \subset \mathsf{O}(n+1)$ suponha que $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é uma isometria. Vamos mostrar que A é a restrição de uma função $\tilde{A} \in \mathsf{O}(n+1)$. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (r, \theta) &\longmapsto rA(1, \theta) \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Se mostramos que $\tilde{A}$ é uma isometria linear, é claro que ela é um elemento de $\mathsf{O}(n+1)$ pela conta anterior. De fato, basta mostrar que $\tilde{A}$ é uma isometria, pois toda isometria de espaços de Banach que fixa a origem é linear ([**?**] Teo. 7.11).

Para ver que $\tilde{A}$ é uma isometria de $\mathbb{R}^{n+1}$, **afirmo** que a distância de p a q está totalmente determinada pelas normas $\|p\|$ e $\|q\|$, e pela distancia esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$. Note que essa afirmação é na verdade um problema de geometria plana, pois todas essas quantidades podem ser descritas dentro do único plano que contém 0, p e q.

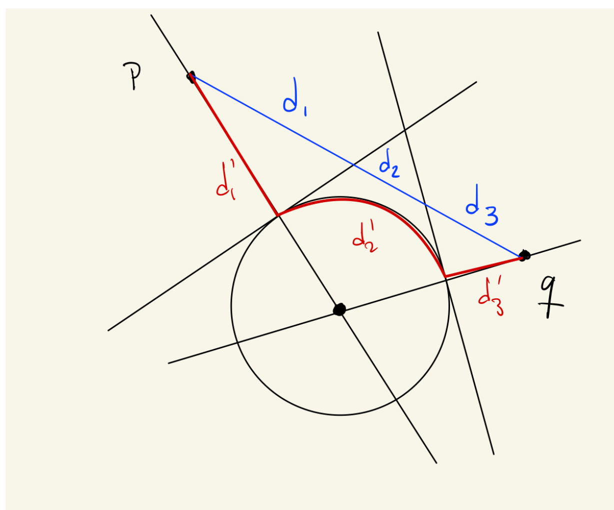

Figure 1: Intento de prova

Acabou que essa afirmação é simplesmente a lei dos cosenos, já que a distância esférica entre $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$ é exatamente o angulo entre p e q (poque essa distância é um segmento de círculo máximo!):

$$\text{lei dos cosenos:} \qquad d(p,q)^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2 - 2\|p\|\|q\| \cos\angle(p,q)$$

Em fim, $\tilde{A}$ é uma isometria porque $d_{\mathbb{R}^{n+1}}(p,q) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\tilde{A}p, \tilde{A}q)$ pelo argumento anterior.

$\square$

Exercício 12 Seja (G, g) um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invatiante e ∇ sua conexão de Levi-Civita.

(a) Mostre que
$$\nabla_u v = \frac{1}{2}[u, v],$$
para cada $u, v \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$.

(b) Seja $\overline{\nabla}$ uma conexão agim simétrica em G. Mostre que $\overline{\nabla} = \nabla$ se e somente se $\overline{\nabla}_u u = 0$ para todo $u \in \mathfrak{g}$.

Solution.

(a) Como ∇ é Levi-Civita, temos Koszul, i.e. $\forall u, v, w \in \mathfrak{g}$,
$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_u v, w\rangle &= u\langle v, w\rangle + v\langle u, w\rangle - w\langle u, v\rangle \\ &\quad - \langle u, [v, w]\rangle + \langle v, [w, u]\rangle + \langle w, [u, v]\rangle \end{aligned}$$
Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é invariante à esquerda, é constante quando avaliamos em elementos de $\mathfrak{g}$, e portanto os primeiros três termos se anulam. Então o exercício acaba quando mostramos que
$$\langle v, [w, u]\rangle = \langle u, [v, w]\rangle = -\langle u, [w, v]\rangle .$$
Seguindo [dC79], p. 45., a ideia é usar o fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times G \to G$ de w para expressar o colchete de Lie. Primeiro precisamos de

Afirmação O fluxo φ de um campo invariante à esquerda w comuta com a traslação à esquerda, i.e.,
$$\varphi_t(e) \circ L_h = L_h \circ \varphi_t(e) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \forall h \in G.$$
Prova da afirmação. Derivamos de ambos lados. Por um lado,
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(e) \circ L_h = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(h) = v_h$$
Por outro lado,
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_h \circ \varphi_t(e) = (L_h)_{*,\varphi_t(e)} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(e) = (L_h)_{*,e} v_e = v_h.$$
Por unicidade das soluções de EDOs, acabou. ☐

Então repare:
$$\varphi_t(h) = (\varphi_t \circ L_h)(e) = (L_h \circ \varphi_t)(e) = h\varphi_t(e) = R_{\varphi_t(e)} h,$$
ou seja, qualquer curva integral de w é simplesmente a curva integral que passa por e trasladada.

Agora lembre que o colchete de Lie pode ser expressado como
$$[w, v]_e = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\varphi_{-t}\right)_{*,\varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

(Onde fixamos o parámetro $-t$ e deixamos livre o outro para ver φ_{-t} como um difeomorfismo de G.)

Juntando com a discussão anterior obtemos

$$[w,v]_e = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)} v_{\varphi_t(e)}.$$

Agora repare: como a métrica é bi-invariante,

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= \left\langle \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}\Big(L_{\varphi_t(e)}\Big)_{*,e}u_e, \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}\Big(L_{\varphi_t(e)}\Big)_{*,e}v_e\right\rangle \\ &= \left\langle \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}u_{\varphi_t(e)}, \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}v_{\varphi_t(e)}\right\rangle\end{aligned}$$

Agora derivemos como funções de t (dentro de T_eG, i.e. não precisamos derivada covariante), e avaliemos em $t=0$. (Note que quando avaliamos em $t=0$ o factor que não derivamos não muda—estamos trasladando à direita e à esquerda por $\varphi_0(e)$!) Obtemos:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left\langle \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}u_{\varphi_t(e)}, \Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}v_{\varphi_t(e)}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}u_{\varphi_t(e)}, \left[\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}v_{\varphi_t(e)}\right]_{t=0}\right\rangle \\ &+ \left\langle \left[\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}u_{\varphi_t(e)}\right]_{t=0}, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(R_{\varphi_{-t}(e)}\Big)_{*,\varphi_t(e)}v_{\varphi_t(e)}\right\rangle \\ &= \langle [w,u]_e, v_e\rangle + \langle u_e, [w,v]_e\rangle\,.\end{aligned}$$

Pelo inciso (a), é claro que se $\overline{\nabla}=\nabla$, $\overline{\nabla}_u u = 0$. Para a implicação contrária, vejamos que

$$\overline{\nabla}_u v = \frac{1}{2}[u,v], \qquad u,v\in\mathfrak{g}$$

que é conveniente porque sabemos que isso é igual a $\nabla_u v$ pelo inciso (a). É só fazer:

$$0 = \overline{\nabla}_{u+v}u+v = \cancelto{0}{\overline{\nabla}_u u} + \overline{\nabla}_u v + \overline{\nabla}_v u + \cancelto{0}{\overline{\nabla}_v v}$$

Lembre que $\overline{\nabla}$ é simétrica, i.e. $\overline{\nabla}_u v - \overline{\nabla}_v u = [u,v]$. Somando com a equação anterior:

$$\overline{\nabla}_u v - \overline{\nabla}_v u + \overline{\nabla}_u v + \overline{\nabla}_v u = [u,v]$$

como queríamos. Para concluir é só ver que ∇ e $\overline{\nabla}$ também coincidem em campos vetoriais que não são invariantes à esquerda. Então pegue uma base $\{u_i\}\subset\mathfrak{g}$ e dois campos $X=X^iu_i$,$Y=Y^ju_j$ quaisquer. Então:

$$\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_{X^iu_i}Y^ju_j = X^iu_iY_ju_j + Y^j\overline{\nabla}_{u_i}u_j = X^iu_iY_ju_j + Y^j\nabla_{u_i}u_j = \nabla_X Y.$$

Pergunta Tem algum argumento super simples para argumentar essa última parte sem pegar uma base de $\mathfrak{g}$?

$\square$

Exercício 13 (Exercício 3, Cap. III, [dC79]) Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, e $X \in \mathfrak{g}$. As trajetórias de X determinam uma aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ com $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$.

(a) Prove que $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\varphi(t+s) = \varphi(t)\cdot\varphi(s)$, ($\varphi : \mathbb{R} \to G$ é então chamado um ***subgrupo a 1-parâmetro de*** G.

(b) Prove que se G tem uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ então as geodésicas de G que partem de e são os subgrupos a 1-parâmetro de G.

Solution.

(a) Lembre que no exercício anterior mostramos que

$$\varphi_t(h) = R_{\varphi_t(e)}(h) = h \cdot \varphi_t(e), \qquad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \forall h \in G.$$

Fixe um $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e pegue $h = \varphi_{t_0}(e)^{-1}$. Obtemos que

$$\varphi_t(\varphi_{t_0}(e)^{-1}) = \varphi_{t_0}(e)^{-1}\varphi_t(e).$$

Ou seja, $\varphi_{t_0}(e)^{-1}\varphi_t(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$. Como também $\varphi_{t-t_0}(e)$ é uma curva integral de X que passa por e no tempo $t = t_0$, por unicidade de EDOs obtemos

$$\varphi_{t_0}(e)^{-1}\varphi_t(e) = \varphi_{t-t_0}(e) \tag{1}$$

Avaliando o lado esquerdo em $t' = t - t_0$, do lado direito chegamos até $\varphi_{t-2t_0}(e)$. Repetindo esse processo cobrimos todo $\mathbb{R}$.

Para confirmar a segunda propriedade avaliamos eq. (1) em $t = 0$ para obter $\varphi_{t_0}(e)^{-1} = \varphi_{-t_0}(e)$. Para concluir pegue $t, s \in \mathbb{R}$ quaisquer e escreva:

$$\varphi_{t+s}(e) = \varphi_{t-(-s)}(e) = \varphi_{-s}^{-1}\varphi_t(e) = \varphi_s(e)\varphi_t(e).$$

(b) Pegue $X \in \mathfrak{g}$ e considere a curva integral que passa por e, φ. Pelo exercício anterior,

$$0 = \nabla_X X = \nabla_{\varphi_* \frac{d}{dt}} X = \nabla^{\varphi}_{\frac{d}{dt}} X \circ \varphi = \nabla_{\varphi'} \varphi'$$

Então as curvas integrais de X que passam por e são geodésicas. Como isso é para qualquer vetor em $\mathfrak{g}$, por unicidade das soluções a EDOs, acabou.

$\square$

Exercício 14 Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) denotamos por d_g a distância induzida por g.

(a) Sejam g, h duas métricas Riemannianas em M^n. Mostre que se $d_g = d_h$ então $g = h$.

(b) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F : M \to M$ um difeomorfismo. Mostre que F é uma isometria se e somente se $d_g(F(\cdot), F(\cdot)) = d_g(\cdot, \cdot)$.

Demostração.

(a) Prova por contrapositiva.

Afirmação Se $g \neq h$, existem um aberto $U \subset M$ e um marco $\{E_i\} \subset \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0}) \qquad \text{para algum } i_0 \in \{1, \dots, n\}.$$

Prova da afirmação. Se $g(E_i, E_i) = h(E_i, E_i)$ para todo marco em todo aberto de M, é claro que

$$g(X, Y) = g(X^i E_i, Y^j E_j) = X^i Y^j g(E_i, E_j) = h(X, Y)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

Então pegue um marco $\{E_i\} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $g(E_{i_0}, E_{i_0}) \neq h(E_{i_0}, E_{i_0})$ em U. Sendo a diferença dessas quantidades uma função distinta da constante zero, podemos supô-la estritamente positiva dentro de U. Pegue $p \in U$ e uma vizinhança geodésica contendo p, que renomeamos U por simplicidade. Dentro de uma vizinhança geodésica, a distância de p aos outros pontos dentro de U está realizada por geodésicas, então podemos pegar $q \in U$ e γ geodésica ligando p e q.

Considere uma extensão de $\gamma' \in \mathfrak{X}_\gamma$ dentro de U, digamos $G = G^i E_i$. Então:

$$\begin{aligned} d_g(p, q) &= \int_a^b g(G^i E_i, G^i E_i) \circ \gamma dt = \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 g(E_i, E_i) \circ \gamma dt \\ &\neq \int_a^b (G^i \circ \gamma)^2 h(E_i, E_i) \circ \gamma dt = d_h(p, q). \end{aligned}$$

(b) Primeiro suponha que $F^* d_g = d_g$. Para mostrar que F é uma isometria usamos o inciso anterior: consideramos as métricas g e F^*g em M. Basta mostrar que $d_g = d_{F^*g}$. Por um tempo pensei que era para usar um câmbio de variáveis, mas acabei pensando assim: Pegue uma curva γ ligando p e q. Note que

$$\underbrace{\int_a^b F^*g(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } p \text{ a } q)} = \underbrace{\int_a^b g(F_{*,\gamma(t)}\gamma'(t), F_{*,\gamma(t)}\gamma'(t)) dt}_{\ell(\text{curva de } F(p) \text{ a } F(q))}$$

Ou seja, do lado esquerdo estamos medindo o comprimento (respeito à métrica F^*g) de uma curva ligando p a q, enquanto que do lado direito estamos medindo o comprimento (respeito à métrica g) da curva $F \circ \gamma$, que liga $F(p)$ a $F(q)$.

Pegando o ínfimo de ambas quantidades, concluímos que a distância d_{F^*g} coincide com a distância F^*d_g, que por hipótese é igual a d_g. A implicação contrária também fica clara: supondo que $F^*g = g$, levando em conta a igualdade das integrais acima e pegando o ínfimo, concluímos que $F^*d_g = d_g$.

$\square$

Exercício 15 Suponha que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa.

(a) (M, g) simétrica $\implies$ (M, g) homogênea.

(b) (M, g) 2-homogênea $\implies$ (M, g) isotrópica.

Solution.

(a) **Ideia.** Pegamos dois pontos $q, q' \in M$. Para usar que M é simétrica buscamos o "ponto meio". Esse deve ser $p \in M$ que esteja no meio do caminho de uma curva minimizante γ ligando q e q'. Daí, pegamos $F \in \mathrm{Iso}_p := \{$ isometrias de M que fixam $p\}$ com a propriedade de que $d_pF = -\mathrm{Id}$. Daí devemos provar que F preserva γ e não fixa q. Daí, só existem dois pontos em γ que guardam a mesma distância com p: q e q'. Como $F(q) \neq q$ também guarda essa distância, concluímos que $F(q) = q'$.

Infelizmente fui incapaz de levar minha ideia até uma prova sem ajuda externa. Primeiramente me pareceu improvável a possibilidade de construir a geodésica minimizante (pode não existir para variedades não completas; mostrar que a propriedade de simetria implica a existência de curvas minimizantes parecia muito forte).

Conjectura Para quaisquer $q, q' \in M$ existe uma curva minimizante γ ligando q e q'.

Supondo que existe γ, podemos pegar $F \in \mathrm{Iso}_p$ tal que $d_pF = -\mathrm{Id}$ onde p é ponto meio sobre γ respeito q e q'.

Tentei mostrar que F preserva γ perto de p usando um marco geodésico, onde a geodésicas são curvas integrais de linhas, mas depois descobri que minha prova estava errada (pois dF só age como $-\mathrm{Id}$ em p):

Afirmação Perto de p, $F(\gamma(t)) \in \mathrm{img}\,\gamma$.

Prova da afirmação. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p, de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em T_pM baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t F \circ \gamma = F_{*,\gamma(t)}\gamma'(t) = -\gamma'(t).$$

Portanto, a derivada da curva $F\circ\gamma$ coincide com a derivada de γ. Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F\circ\gamma(t) \in \mathrm{img}\,\gamma$ dentro desta bola geodésica. $\square$

Depois desse ponto comecei a buscar ajuda em livros, internet e ChatGPT. Rapidamente reparei que minhas ideias eram boas, e consegui:

Prova da afirmação reforçada. Pegue coordenadas geodésicas centradas em p, de modo que as curvas minimizantes como γ são imagens de retas em T_pM baixo a exponencial. Agora derivamos: $F \circ \gamma$ em $t = 0$ (supondo que $\gamma(0) = p$):

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F \circ \gamma = F_{*,p}\gamma'(0) = -\gamma'(0).$$

Portanto, a derivada da curva $(F \circ \gamma)(t)$ coincide com a derivada de $\gamma(-t)$. Por unicidade de soluções de EDOs, concluímos que $F \circ \gamma(t) \in \operatorname{img} \gamma$ dentro desta bola geodésica. $\square$

Seguindo com esse raciocínio, $F \circ \gamma$ é uma curva definida em todo o domínio de γ, e portanto deve coincidir com $\gamma(-t)$ ao longo desse domínio. Ou seja, $F \circ \gamma$ é γ percorrida em sentido oposto. Isso significa, por definição de p como ponto meio, e desde que supomos que $\gamma(0) = p$, que, se $\gamma(t_0) = q$, necessariamente $q' = \gamma(-t_0) = (F \circ \gamma)(t_0) = F(q)$, como queríamos. (Note que meu desejo inicial de mostrar que $F(q) \neq q'$ não foi necessário.)

Então tudo fica resolvido se mostramos a conjetura. O motivo inicial para conjeturar isso foi notar que $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, onde os pontos antípodas (entre outros) não podem ser ligados por curvas minimizantes, parece perder a propriedade de ser um espaço simétrico (que $\mathbb{R}^2$ tem). Com efeito, a intuição mostra que $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) = O(2)$, de modo que o grupo de isotropia Iso_p é trivial para todo ponto.

A inspiração final chega de MathOverflow: parece que, com efeito, toda variedade simétrica é completa:

> "Consider a local geodesic and use the symmetry to flip it, effectively doubling the length of the geodesic, ad infinitum"

A ideia nos lembra do exercício que fizemos com grupos de Lie. Pegamos uma geodésica definida perto de p. Pegamos $q \neq p$ dentro da bola geodésica centrada em p. Agora considere $F \in \operatorname{Iso}_q$ tal que $F_q == \operatorname{Id}$. Sabemos que γ está definida entre p e q, e, pela afirmação mostrada acima, compondo com F obtemos γ reparametrizada em sentido oposto. Isso permite chegar a um ponto sobre a curva original que fica à mesma distância de q que p, só que no sentido oposto. Repetindo esse processo, vemos que a geodésica pode ser estendida infinitamente.

De fato, isso parece mostrar a conjetura via teorema de Hopf-Rinow, por exemplo em [Lee19], Lemma 6.18 e Coro. 6.20. Tem uma prova sem usar esse teorema?

(b) Queremos ver que $\forall p \in M$ e $\forall v, w \in T_p^1 M$ existe $F \in \operatorname{Iso}_p(M)$ tal que $F_{*,p}v = w$. Para usar a propriedade de ser 2-homogênea, defina $p_1 := q_1 := p$, e $p_2 := \exp_p(v)$, $q_2 := \exp_p(w)$. (Isto é, supondo por enquanto que $\exp_p$ está definida em vetores de norma 1.) Então existe $F \in \operatorname{Iso}(M)$ tal que $F(p_1) = F(q_1)$, i.e. $F \in \operatorname{Iso}_p(M)$, e tal que $F(p_2) = F(q_2)$.

Para ver que $F_{*,p}v = w$, note que $(F \circ \gamma_v)(1) = F(\gamma_v(1)) = F(p_2) = q_2$. Então $F \circ \gamma_v$ é uma curva ligando p e q. Pelo exercício 14(b) dessa lista, como F é uma isometria, sabemos que preserva a distância, de modo a $F \circ \gamma_v$ é minimizimante e portanto uma geodésica. Daí $F \circ \gamma_v$ é uma reparametrização de γ_w; mas como F é isometria, preserva a norma dos vetores velocidade e portanto as curvas coincidem. Isso significa que $w = \gamma_w'(0) = (F \circ \gamma_v)'(0) = F_{*,p}\gamma_v'(0) = F_{*,p}v$.

Por último só note que se $\exp_p$ não está definida em vetores de norma 1, podemos fazer a mesma construção em vetores que estejam dentro do domínio dela, obtendo uma função cuja diferencial envia um múltiplo pequeno de v em um múltiplo de igual proporção respeito a w. A diferencial dessa função também envia v em w, pois é uma isometria linear.

$\square$

References

[dC79] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[Lee19] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.