Lista 2 de Geometria Riemanniana

IMPA, Mar/Jun 2025 - Monitor: Ivan Miranda

Conexões Afins e Métricas Riemannianas.

Exercício 1. *Mostre que todo fibrado vetorial admite uma conexão.*

Exercício 2. *Sejam $\nabla, \nabla^0, \nabla^1$ conexões afins em uma variedade suave M.*

a) *Mostre que τ, definido abaixo, é um tensor.*

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\to \tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

*Esse é o **Tensor de Torção** de ∇.*

b) *Mostre que a diferença*

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\to A(X, Y) = \nabla^1_X Y - \nabla^0_X Y. \end{aligned}$$

define um tensor.

c) *Mostre que as conexões ∇^0, ∇^1 possuem o mesmo tensor de torção se, e somente se, A é simétrico.*

d) *Seja $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ um tensor. Mostre que $\overline{\nabla}$ definida por $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + T(X, Y)$ define uma conexão afim.*

Exercício 3. *Exercício 2 do Capítulo 2 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre como a conexão pode ser reobtida da noção de paralelismo.*

Exercício 4. *Exercícios 1 e 6 do Capítulo 2 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre propriedades básicas do transporte paralelo e da conexão pullback ao longo de curvas.*

Exercício 5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana munida de uma conexão afim ∇. Mostre que são equivalentes:*

a) *∇ é compatível com g.*

b) *$\nabla g = 0$.*

c) *Dada uma curva γ e campos ao longo de γ, $X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma$, temos:*

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} Y \right\rangle.$$

d) *Se X, Y são campos paralelos ao longo de uma curva γ, então $\langle X, Y\rangle$ é constante.*

e) *O transporte paralelo, ao longo de qualquer curva, é uma isometria.*

Exercício 6. *Sejam duas métricas relacionadas por $\overline{g} = e^{2\varphi} g$ onde $\varphi \in C^\infty(M)$, mostre que as conexões de Levi-Civita estão relacionadas por:*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (d\varphi(X)Y + d\varphi(Y)X - g(X, Y)grad(\varphi)).$$

Em particular, se φ é constante, então a conexão é a mesma.

Exercício 7. *Exercício 4 do Capítulo 1 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre a definição do plano hiperbólico e suas isometrias.*

Exercício 8. *Exercício 8 do Capítulo 2 do livro do professor Manfredo, quinta edição, sobre o transporte paralelo no plano hiperbólico.*

Complemento.

Exercício 9. *Revisão sobre o Colchete de Lie.*
Prove os seguintes fatos, válidos para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^{\infty}(M)$.

a) $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$.

b) $[gX, Y] = -Y(g)X + [X, Y]$

c) *Identidade de Jacobi:* $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

d) $[X, Y](p) = \frac{d}{dt}_{|t=0} d(\varphi_{-t})_{\varphi(p,t)} Y(\varphi(p,t)) = \lim_{t\to 0} \frac{d(\varphi_{-t})_{\varphi(p,t)} Y(\varphi(p,t)) - Y(p)}{t}$*, onde φ denota o fluxo do campo X.*

Comentário: esses resultados estão provados no Capítulo 0 do livro do professor Manfredo P. do Carmo, quinta edição.

Definição 1. *Seja G um grupo de Lie. Dado $g \in G$, definimos o* ***mapa de conjugação*** *por g como $C_g := R_{g^{-1}} \circ L_g$, i.e.*

$$C_g(h) = ghg^{-1}, \forall h \in G.$$

Note que C_g é um difeomorfismo de G que fixa o elemento neutro de $e \in G$. Portanto, a diferencial

$$Ad(g) := (dC_g)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

é um isomorfismo linear, onde $\mathfrak{g}$ denota T_eG, a álgebra de Lie de G. Isso define a ***representação adjunta*** *de G*

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad(g). \end{aligned}$$

Exercício 10. *Seja $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda. Prove que essa métrica é bi-invariante se, e somente se,*

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Comentário: esse é um bom exercício para se familiarizar com as definições.

Exercício 11. *Prove que o mapa Ad que define a representação adjunta de G é suave e*

$$\Big(d(Ad)_e(X)\Big)(Y) = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Comentário: para provar a suavidade, você pode consultar a proposição 20.24 do livro *Introduction to Smooth Manifolds*, segunda edição, do professor John M. Lee. O cálculo da derivada está feito no Capítulo 1 do livro do professor Manfredo P. do Carmo, quinta edição. Esse resultado também é conteúdo da proposição 20.27 do livro do professor John M. Lee citado acima.

Exercício 12. *Seja $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante. Prove que*

$$\langle [u, v], w \rangle = \langle u, [v, w] \rangle, \forall u, v, w \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

.

Sugestão: utilize os exercícios 9 e 10.

Exercício 13. *Seja G um grupo de Lie conexo. Suponha que exista um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G de modo que $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisfaça a condição (1). Prove que G admite uma métrica bi-invariante.*