Ação de homeos sobre o grafo fino de curvas: uma classificação

Pierre-Antoine Guihéneuf
Sorbonne Université
24 de Outubro de 2024

1 Grafo fino de curvas

Fixe S uma superfície fechada de género $g \geqslant 1$. O ***grafo fino de curvas*** $C^{+}(S)$ (tem um grafo que não é fino que é exatamente a mesma coisa só que *up to homotopy*) é:

- Vértices: curvas simples fechadas não homotopicamente triviais em S.
- Arestas: $\alpha - \beta$ sse $\#(\alpha \cap \beta) \leqslant 1$.

Tem uma distância natural em $C^{+}(S)$.

Observação Homeo$(S) \curvearrowright C^{+}(S)$ dada por $h\alpha = h(\alpha)$ é uma ação por isometrias.

Observação $C^{+}(S)$ não é localmente compacto.

Teorema (BHW21 ◡̈) $C^{+}(S)$ é conexo, de diametro infinito e Gromov-hiperbólico.

Definição Um grafo é ***Gromov-hiperbólico*** se $\exists \delta > 0$ tal que todos os triangulos geodésicos são δ-finos.

Definição Triangulo δ-fino: que pode pegar uma vizinhança de raio δ de qualquer par de lados, e o lado restante fica conteúdo na união daquelas vizinhanças.

2 Um pouco sobre espaços Gromov-hiperbólicos

Exemplo

- Arvores
- $\mathbb{H}^2$

Classificação das isometrias

- ***Eliptica*** se existe uma órbita de diametro finito, i.e. $\exists x \in X$ tal que $\operatorname{diam}\{f^n(x)\} < +\infty$.
- ***Loxodrómica*** se $\exists x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(f^n(x), x)}{n}$$

- ***Parabólica*** o resto.

Definição Uma ***quase-isometria*** de X é $g : X \to X$ tal que $\exists \lambda, c$

$$\lambda^{-1} d(x, y) - c \leqslant d(g(x), g(y)) \leqslant \lambda d(x, y) + c$$

O bordo de X

Definição O ***bordo de*** X é

$$\begin{aligned} \partial X &= \{\text{ mergulhos } Q \text{ de } R_+ \text{ em } X\} \big/ \text{ dist. Hausdorff finita} \\ &= \{\text{conjunto de direções no infinito}\} \end{aligned}$$

Proposição $X \cup \partial X$ é completo.

Pergunta Forma de $\partial C^+(S)$?

Observação Toda isometria de X se extende em um homeo de $X \cup \partial X$.

Teorema (Gromov)

- Se f é parabólica então f tem um único ponto fixo em $X \cup \partial X$, qué esta em ∂X.
- Se f é loxodrómico, então f tem dois pontos fixos em $X \cup \partial X$ que estão no bordo e a dinámica é norte-sul. $f\big|_{\partial X \setminus \{a^-\}}$ é uma contração.

Observação (Dani) Parece que tem uma dinâmica dada simplesmente pela iteração da f. Supongo que essa f é um isomorfismo.

$f^{-1}|_{\partial X \setminus \{a^+\}}$ é uma contração. Isso permete jogar ping-pong.

Exercício $\exists n$ tal que $\langle f^n, g^n \rangle$ é livre.

Teorema (Hensel, le Raux (private communication)) Se $f, g \in \mathrm{Homeo}(\Pi^2)$, $\rho(f), \rho(g)$ com interior não vazio, $\rho(f), \rho(g)$ não são os mesmos ao menos de homotecia/traslação. Então existe n tal que $\langle f^n, g^n \rangle$ é livre e $\forall h \in \langle f^n, g^n \rangle$, $\mathrm{int}(\rho(h)) \neq \varnothing$.

3 Classificação

Teorema $f \in \mathrm{Homeo}_0(S)$. Então aspse

(i) f age sobre $C^+(S)$ de maneira loxodromica.

(ii) $\exists P \subset S$ finito, f-invariante tal que $f|_{S \setminus P}$ é pseudo-Anosov.

(iii) $\mathrm{int}\, \rho_{\mathrm{erg}}(f) \neq \varnothing$.

Teorema $f \in \mathrm{Homeo}_0(\Pi^2)$. Então f age de maneira elíptica see f tem desvios limitados em uma direção racional $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, $\exists C, p \in \mathbb{R}^2$ tais que $\forall n, x$,

$$|\left\langle \tilde{f}^n(x) - n\rho, v \right\rangle| \leqslant C$$