

Substitution dynamics on infinite alphabets

Ali Messaoudi
UNESP

November 28, 2024

Abstract A substitution is a map from an alphabet A to the set of finite words in A . To any substitution we can naturally associate a symbolic dynamical system that is well studied in the literature when the alphabet is a finite set and connected to several areas such as ergodic theory and number theory among others. In this work, we study ergodic and geometric properties of dynamical systems associated to substitutions in infinite alphabets. This study involves finite and infinite invariant measures, countably infinite matrices and Rauzy Fractals.

Contents

1	Physical measures	1
2	Exemplos	2

1 Physical measures

X compact measure space, m a reference measure, $f : X \rightarrow X$, $x \in X$.

$$e_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$$

é a *sequência canônica de empirical measures*.

Se $e_n(x)$ converge a μ . Então μ descreve a *estatística* de x . O *basin* de μ \mathcal{B}_μ é o conjunto de pontos $x \in X$ tal que $e_n(x) \rightarrow \mu$. μ é uma *physical measure* se $m(\mathcal{B}_\mu) > 0$.

Question O que acontece se $e_n(x)$ não converge?

Devem existir duas medidas μ, ν e $n_i, n_j \rightarrow \infty$ tais que $e_{n_i}(x) \rightarrow \mu$ e $e_{n_j} \rightarrow \nu$. Dizemos que x tem um comportamento *não estatístico*. Se m é tal que quase todo ponto é não estatístico, m é *não estatística*.

2 Exemplos

Bota muitos zeros, depois muito mais uns, depois muuuito mais zeros...