Medidas estacionárias de um Sistema Dinâmico Aleatório no círculo

Graccyela Rosybell Salcedo Pirela
ICMC
26 de Septembro de 2024

1 Exemplos

Rotações com pendente racional ou irracional. Sistema com pontos atratores e repulsores.

2 Conf

$\mathcal{F} \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{S}^1)$, ν probabilidade, $\mathrm{Hom}(\mathbb{S}^1)$, $\mathrm{supp}(\nu) = \mathcal{F}$. Espaço de probabilidade:

$$(\Omega, \mathbb{P}) = (\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \nu^{\mathbb{N}})$$

Caminho aleatório:

$$\Omega \ni \omega \longmapsto (f_\omega^n)_{n \geqslant 0}$$

onde $\omega = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_\omega^n := f_n \circ \ldots \circ f_1$, $f_\omega^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

3 Ponto de vista topológico

$$S = \{f_\omega^n : \omega \in \Omega, n \geqslant 0\}$$

$A \subset \mathbb{S}$ é ***invariante*** se $f(A) \subset A$, $\forall f \in S$. Um conjunto fechado $A \subset \mathbb{S}^1$ é chamado ***minimal*** invariante se $\forall B \subset A$ tal que B é invariante então $B = A$ ou $B = \varnothing$.

$$O(x) = \{f(x) : f \in S\}$$

4 Ponto de vista probabilístico

$(f_\omega^n(x))$. $\eta \in \mathrm{Prob}(\mathbb{S}^1)$, dizemos que é ν-***estacionária*** se

$$\eta = \int f_* \eta d\nu(f).$$

$$T : (\omega, x) \longmapsto (\sigma\omega, f'_\omega(x))$$

η é ν-estacionária $\iff$ $\mathbb{P} \otimes \eta$ e T-invariante. Dizemos que η é ν-***ergódica e estacionaria*** se $\mathbb{P} \otimes \eta$ é T-ergódica.

5 Resultados previos

Resultado previo (Furst, 63) $\forall x : \mathbb{P}\ \omega$

$$d\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta_{p_\omega^n x}\right) \subset \nu\text{-estacionária}$$

Resultado previo (Malicet '17) Tricotomía:

1. $\nexists m \in \mathrm{Prob}(\mathbb{S}^1)$, $f_* m = m\ \forall f \in \mathcal{F} \implies$ contração local $\implies \exists d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Prob}_\nu^{\mathrm{erg}}(\mathbb{S}^1) = \{\eta_1, \dots, \eta_d\}$

$$k := \mathrm{supp}(\eta)$$

$$\implies U_i(x) = \mathbb{P}\left(\omega \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta_{p_\omega^n}\right) \xrightarrow{\omega} \eta_1$$

2. O semigrupo δ é topológico conjugado como um semigrupo das isometrías atuando minimalmente ($\mathbb{S}^1$ é mínima).

$$\exists!\ \text{medida } \nu\text{-esacionária}$$

3. $\exists x\ O(x) = \{f(x), \dots, f \in \mathbb{S}\}$ infinita.

Exemplos

1. $f_1 = R_{p/q}$.
2. Círculo con atrator no polo norte e repulsor no polo sul.

Desenho Parece que são círculos com dois pontos mais o fluxo sai de cada ponto a um lado dele e entra do outro lado.

6 $|O(x)| = \infty\ \forall x$

$$m_x^* = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int \delta_{\rho_\omega^n x} d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{d} U_i(x)\eta_i$$

$x \longrightarrow m_x$ contínua.

$d =$ **1** $x \longrightarrow \eta_1$.

$d =$ **2** $x \longrightarrow m_x$

$d > 2$ [Desnhos de triangulo e quadrado]

Teorema 1 $\forall x\ |O(x)| = \infty\ \forall i = 1, \ldots, d\ \exists \mathcal{A}_i$ família finita de intervalos fechados tal que

1. $K_1 \subset \{U = 1\} = \bigcup_{I \in A_i} I$
2. $i \neq j, I \cap J = \varnothing,\ \forall J \in A_i, J \in A_j$.
3. $\forall a, b,\ a \in J \in A_i,\ b \in J \in A_j$ tal que $(a, b) \cap \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{J \in A_i} I \neq \varnothing$.
   (i) $U_k = 0$ em $[a, b]\ \forall k \neq 1, 0$.
   (ii) U_i, U_j são monótonos sobre (a, b).

Corolário $\forall x\ |O(x)| = \infty, \{\eta_x : x \in \mathbb{S}^1\} \subset \{t\eta_1 + (1 - t)\eta_j : N \in \{1, \ldots, d\}, t \in [0, 1]\}$.

Proposição 2 $I \subset \mathbb{S}^1$ intervalo, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Se $U_1|_I \equiv C_f$

Do teorema 1. $\square$