# Geometria simplética

## Contents

# 1 Aula 1

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e Tong, Lectures on Classical Mechanics.

## 1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geométrica da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descripções da mecânica clásica:
  - Newtoniano: $F = ma$, ecuação diferencial ordinária de segunda ordem.
  - Lagrangiano: princípio gravitacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
  - Hamiltoniano.

## 1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$ (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$.
- Campo Hamiltoniano: $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$$

  Which coincides with Lee's formula

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)),$$
$$\dot{y}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t))$$

  where Lee defined the ***Hamiltonian vector field*** as the *analogue of the gradient with respect to the symplectic form*, that is, satisfying $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$ for any vector field $Y$.

Also look at Tong's formulation:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

where L is the Lagrangian and the Hamiltonian function H is obtained as the Legendre transform of the Langrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the $n$ $2^{\text{nd}}$ order differential equations by $2n$ $1^{\text{st}}$ order differential equations for $q_i$ and $p_i$.

> In practice, for solving problems, this isn't particularly helful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

## 1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de $X_H$, ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as ***Equações de Hamilton*** (de novo).

**Exemplo.** Partícula de massa $m$ em $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$ sujeita a campo de força conservativa

$$F = -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3$$
$$q(t) = (q_1, q_2, q_3)$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaçode fase $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$.
- Hamiltoniano: $H(p, q) = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \overset{-J_0\nabla H}{\rightsquigarrow} X_H$$

where $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of $H$ and then applying $J_0$. So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo $\nabla H$ e $X_H$ : taxa de variação de $H$ ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais? Tal vez é a derivada exterior de $H$, $dH$ em lugar do gradiente de $H$.

- ***Fluxo gradiente***

$$c'(t) = \nabla H(c(t))$$
$$\frac{d}{dt} H(c(t)) = \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2$$

  $\nabla H$ aponta na direção que $H$ variação.

- ***Fluxo hamiltoniano***

$$\begin{aligned} c'(t) &= X_H(c(t)) \\ \frac{d}{dt} H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0 \nabla H(c(t)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

  ?, $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$.

- ***Gradiente.*** $\nabla H(x) \in T_x\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

  onde $g_0$ é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

  assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

  Analogamente, $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$ é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \qquad \Omega_0(u, v) = -dJ_0 V,$$

  ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

**Observação.** Note que $\Omega_q$ define uma 2-forma (c...?) em $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$.

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

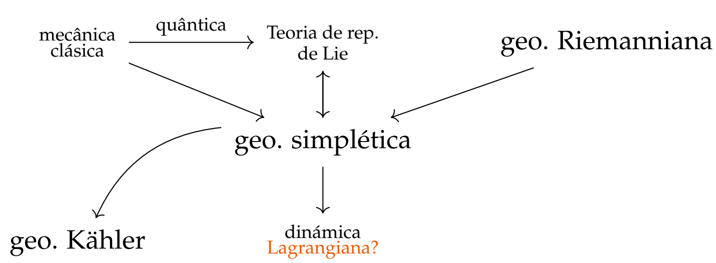
$X_H$ é único tal que $i_{X_H}\omega_0 = dH$. So this was Lee's definition ◡̈.

**Definição** (temporária)**.** Uma ***variedade simplética*** é $(M, \omega)$, $\omega \in \Omega^2(M)$ localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$.

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva $\omega$ em $\sum_i dq_i \wedge dp_i$.

**Teorema** (de Darboux, em Lee)**.** Let $(M, \omega)$ be a $2n$-dimensional symplectic manifold. For any $p \in M$ there are smooth coordinates $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ centered at $p$ in which $\omega$ has the coordinate representation $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$.

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.




## 1.4 Álgebra linear simplética

$V$ espaço vetorial real, $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilinea ansimétrica, i.e. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$.

**Definição.** $\Omega$ é não degenerada se $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$.

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero $v \in V$ there exists $w \in V$ such that $\omega(v, w) \neq 0$; and it is equivalent to the linear map $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$ being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix $(\omega_{ij})$ representing $\omega$ is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0 \ \forall v\}$$

então $\Omega$ é não degenerada se e somente se $\ker(\Omega) = \{0\}$.

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada é chamada simplética. $(V, \Omega)$ é um ***espaço vectorial simplético***.

**Observação.**

1. $\{e_1, .., e_n\}$ base de $V$, $\Omega$ é representado por uma matriz antisimétrica

$$A = (A_{ij}), \qquad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \qquad \Omega(u, v) = u^t A, v.$$

2. $\Omega$ é não degenerada se e somente se $\det(A) \neq 0$.

   Note que

$$\begin{aligned} \det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det(A) \\ \text{implica que} \quad \det A \neq 0 \implies m = \dim V = 2n \end{aligned}$$

3. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$. Defina

$$\begin{aligned} \Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

   note que $\ker \Omega = \ker(\Omega^\flat)$, assim $\Omega$ é não degenerada se e somente se $\Omega^\flat$ é isomorfismo.

# 2 Aula 2

## 2.1 Subespaços de evs

Sejam $(V, \Omega)$ evs e $V \subseteq V$ subespaço.

**Definição.**

$$W^\Omega := \{u \in |\Omega(u, w) = 0 \; \forall w \in W\}$$

Considere a restrição de $\Omega$ à W:

$$i : W \hookrightarrow V \qquad i^*\Omega(\Omega|_W \in \Lambda_2 W^*,$$

então

$$\ker(\Omega|_W) = \{w \in W | \Omega(w, w') = 0 \; \forall w' \in W\} = W \cap W^\Omega$$

Casos de interesse:

- ***Isotrópico***: $W \subseteq W^\Omega$ ( $\iff \Omega|_W \equiv 0$).
- ***Coisotrópico***: $W^\Omega \subseteq W$.
- ***Lagrangiano***: $W = W^\Omega$.
- ***Simplético***: $W \cap W^\Omega = \{0\}$ ($\Omega|_W$ é não degenerado (=simplético)).

**Lema.** $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$.

*Demostração.*

$$\begin{aligned} \Omega^1 : V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

Note que $W^\Omega \mapsto \mathrm{Ann}(W)$, assim

$$\dim W + \dim \mathrm{Ann}(W)' = \dim V$$

□

**Observação.**

- $W \subseteq V$ subespaço simplético se e somente se $V = W \oplus W^{\Omega}$.
- $W$ isotrópico $\implies \dim W \leqslant \frac{\dim V}{2}$.
- $W$ coisotrópico $\implies \dim W \geqslant \frac{\dim V}{2}$.
- $W$ Lagrangiano se $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

De fato, $W$ é Lagrangiano se e somente se $W$ é isotrópico e $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

**Exercício.**

- $(W^{\Omega})^{\Omega} = \Omega$ ($W$ isotrópico se e somente se $W^{\Omega}$).
- $(W_1 \cap W_2)^{\Omega} = W_1^{\Omega} + W_2^{\Omega}$.

**Exemplo.**

- Subespaços de dimensão 1 são isotrópicos (subespaços de codimensão 1 são coisotrópicos).
- $V = V \oplus W^*$, onde $V$ tem a forma $\Omega_{can?}$ e $W$ e $W^*$ são Lagrangianos.
- $\mathbb{R}^{2n}$, $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ base simplética, então $\operatorname{span}\{e_i, f_i\}$ é simplético, e $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ é isotrópico (se $k = n$ é Lagrangiano).
- $(V_1, \Omega_1)$ e $(V_2, \Omega_2)$ evs's, $T : V_1 \to V_2$ isometría linear, $\operatorname{graf}(T) := \{(u, Tu) : u \in V_1\} \subseteq V_1 \times V_2$. $T$ é simplectomorfismo se e somente se $\operatorname{graf}(T)$ é um subespaço Lagrangiano em $V_1 \times V_2$.
- $\dim \operatorname{graf}(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2} \dim(V_1 \times V_2)$.
- $\Omega_{V_1 \times V_2}((u, Tu), (v, Tv)) = \Omega(u, v) - \underbrace{\Omega_2(Tu, Tv)}_{= T^*\Omega_2(u,v)}$ $(= 0 \iff \Omega_1 = T^*\Omega_2)$.

**Teorema** (Existência das bases simpléticas)**.** Para cualquer $(V, \Omega)$ evs existe uma base simplética.

*Demostração.* Seja $e_1 \in V \backslash \{0\}$. Como $\Omega$ é não degenerada, existe $f_1 \in V$ tal que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Considere $W_1 = \operatorname{span}\{e_1, f_1\}$. Então $\Omega|_{W_1}$ é não degenerado (ie. $W_1$ é simplético), o que acontece se e somente se $V = W_1 \oplus W_1^{\Omega}$. Assim, existem $e_2 \neq 0$ in $W_1^{\Omega}$ e $f_2 \in W_1^{\Omega}$ tal que $\Omega(e_2, f_2) = 1$, etc… $(V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n)$. O conjunto $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é uma base simplética. □

**Exercício.** $V$ ev de dimensão $2n$ e $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada se e somente se $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \in \Lambda^{2n} V^* \neq 0$.

## 2.2 Equivalência entre ev's simpléticos

$(V,\Omega)$ e $(V',\Omega')$ são ***equivalentes*** se existe um ***simplectomorfismo*** linear $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ (isometría linear) tal que

$$\varphi^*\Omega' = \Omega \in \Lambda^2 V^*$$

onde

$$\varphi^*\Omega'(u,v) = \Omega'(\varphi(u),\varphi(v)).$$

Dado $(V,\Omega)$ evs, definimos

$$\mathrm{Sp}(V) := \{T \in GL(V) | T^*\Omega = \Omega\}$$

**Exemplo.**

1. $V = \mathbb{R}^{2n}$, $\Omega_0(u,v) = -u^T J_0 v$ onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, com base canônica $\{e_1,\dots,e_n, f_1,\dots,f_n\}$. Temos

$$\begin{cases} \Omega_0(e_i,e_j) = 0 \\ \Omega_0(e_i,f_j) = \delta_{ij} \\ \Omega_0(f_i,f_j) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

   **Definição.** Uma base de $(V,\Omega)$ satisfazendo eq. (1) é chamada ***base simplética***.

   Following Lee, Example. 22.2, the condition may be that $\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$ where $\alpha^i$ and $\beta^i$ are just the dual basis covectors of the base $\{A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n\}$ of V.

   **Observação.** Escolher/Achar uma base simplética é equivalente à escolher/achar um simplectomorfismo

$$(V,\Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n},\Omega_0)$$

2. $W$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, sejam $V = W \oplus W^*$, $w, w \in W$ e $\alpha, \alpha \in W^*$

$$\Omega_?((w,\alpha),(w',\alpha')) := \alpha'(w) - \alpha(w')$$

   é não degenerada e anti-simétrica. Assim,

$$(W \oplus W^*, \Omega_?)$$

   é um espaço vetorial simplético.

   **Observação.** Se $\{e_1,\dots,e_n\}$ é uma base simplética de $W$ e $\{f_1,\dots f_n\}$ é a base dual de $W^*$, então

$$(W \oplus W^*, \Omega_? \cong (\mathbb{R}^{2n},\Omega_0).$$

Note que ainda que dado
$$A : W \xrightarrow{\sim} W$$
automorfismo ?,
$$T_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} : W \oplus W^* \to W \oplus W^*$$
é simplectomorfismo, ($T_A = A \oplus (A^*)^{-1}$ ).

**Moral:** $\mathrm{GL}(W) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(W \oplus W^*)$
$$\mathrm{EV} \overset{\text{funtor}}{\rightsquigarrow} \mathrm{EVS}$$
$$A \circlearrowleft W \longmapsto W \oplus W^* \circlearrowright T_A$$

3. V ev sobre $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} = n$, com produto interno hermitiano
$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$
i.e. satisfazendo
   (a) $h(u, \lambda v) = \lambda h(u, v)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
   (b) $h(u, v) = \overline{h(v, w)}$,
   (c) $h(u, u) > 0\ \forall u \neq 0$,

   pode ser escrito como
$$h(u, v) = g(u, v) + i\Omega(u, v)$$
Agora considere V como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (de dimensão $2n$ ).

**Exercício.**

   - $g$ é produto interno positivo definido.
   - $\Omega$ é antisimétrica, não degenerada (simplética).
   - Ache uma base de V (dica: extensão de base ortonormal de $h\ldots$)
   - $U(n) \subset SP(V, \Omega)$.

4. Produto direto: $(V_1, \Omega_1)$, $(V_2, \Omega_2)$ espaços vetoriais.
$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ V_1 & & V_2 \end{tikzcd}$$
Tem a forma simplética é o pullback:
$$\Omega := \pi_1^* \Omega_1 + \pi_2^* \Omega_2$$

ou seja,

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2),$$

que é não degenerado e antsimétrico também.

**Notação:** se $(V, \Omega)$ é um espaço vetorial simplético, denotamos por $(V, -\Omega) := \bar{V}$, que também é um evs.

# 3 Aula 3

# 4 Aula 4

# 5 Aula 5

Lembranza da última aula:

1. Definição de variedade simplética.
2. Pelo menos dois exemplos.
3. Forma de volume/orientabilidade.
4. Campos simpléticos/campos hamiltonianos.
5. Obstrução cohomológica de para estrutura simplética.

**Hoje:** Fibrados cotangentes.

## 5.1 Forma tautológica no fibrado cotangente

Seja $Q$ uma variedade e $M := T^*Q$ o fibrado cotangente.

**Lembrando** Se $Q$ é uma variedade, $x \in Q$. O ***espaço tangente*** em $x$ são derivações ou clases de equivalencia de curvas… base local do espa ço tangente $\partial_{x_i}$… base dual disso é base do espaço cotangente nesse ponto… o fibrado cotangente $\bigsqcup_{x \in Q} T_x^*Q$ é variedade suave.

O fibrado cotangente possui uma 1-forma tautológica definida assim:

**Definição.** $\alpha \in \Omega^1(M)$, onde $M := T^*Q$, dada por

$$\alpha_p(X) = p(\pi_*(X))$$

ou seja, como $X$ é tangente ao fibrado cotangente, ele está anclado a algum covetor, assim a gente pode evaluar ele no covector. Também pode ser pensado como o pullback de um covector em $Q$ baixo a projeção cotangente usual.

**Definição** (Monitoria)**.**

$$\begin{array}{c} T^*M = \{(p,\xi) | \xi : T_pM \to \mathbb{R} \text{ linear}\} \\ \Big\downarrow \pi \\ M \end{array}$$

A ***forma tautologica*** é $\lambda$ dada por

$$\lambda_{(p,\xi)}(v) \in \mathbb{R}, \qquad v \in T_{(p,\xi)(T^*M)}$$

é igual a

$$\xi(d\pi_{(q,\xi)(v)})$$

ussando o mapa

$$T_{(p,\xi)}(T^*M) \xrightarrow{d\pi_{(p,\xi)}} T_pM$$

Em coordenadas locais $(x_1, ..., x_n, y_1, \ldots, y_n)$ do espaço cotangente, temos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i + \sum_{i=1}^{n} B_i dy_i$$

Avaliando $\lambda$ nos vectores canónicos $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{(p,\xi)}$ e $\frac{\partial}{\partial y_j}$ notamos que $A_i = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ pois a diferencial de $\pi$ faz as $B_j$ ser zero.

**Exercício.**

1. A 1-forma tautológica $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$ é a única 1-forma satisfazendo

$$\forall \mu \in \Omega^1(Q), \qquad \mu^*\alpha = \mu$$

   onde pensamos a $\mu$ do lado izquerdo como um mapa $\mu : Q \to T^*Q$, ie. uma seç ão do fibrado cotangente, e do lado direito simplesmente como uma 1-corma em Q.

**Definição.** $M = T^*Q$, $\alpha \in \Omega^1(M)$ então a ***forma simplética canónica*** de $T^*Q$ é

$$\omega_{can} = -d\alpha$$

**Observação.**

- $d\omega_{can} = -d^2\alpha = 0$.
- Formalmente $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$

Assim, temos uma variedade simplética canónica associada a toda variedade, $(T^*Q, \omega_{can}$.

**Observação.**

- Dado $B \in \Omega^2(Q)$ com $dB = 0$, a forma

$$\omega_B \omega_{can} + \pi^* B$$

é simplética e o termo $\pi^* B$ se chama de ***magnético***.

- Se $Q$ é Riemanniana com métrica $g$ temos o mapa induzido

$$\begin{aligned} g^\sharp : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ u &\longmapsto g(u, \cdot) \end{aligned}$$

Assim, o pullback the $\omega_{can}$ é uma forma simplética em $TQ$.

Al ém disso, a métrica nos fornece de uma função Hamiltoniana dada por $H \in C^\infty(TQ)$, $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$.

Veremos que o fluxo Hamiltoniano de $H$ em $(TQ, \omega)$ é fluxo geodésico em $Q$.

Tem dois generalizações naturais:

  - $\bar{H}(v) = \frac{1}{2}g(u, v) + V(x)$ com $V \in C^\infty(Q)$, mecânica clásica.
  - $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ com respeito a $\omega_B$.

**Pergunta** (Projeto?)**.** Existência de órbitas periódicas em níveis de energia?

**Definição.** O ***levantamiento cotangente*** de um difeomorfismo (na mesma direção do difeomorfismo) é $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$ é $\hat{\varphi} = ((T\varphi)^*)^{-1}$.

**Pergunta.** Preserva a forma canónica?

**Proposicição.** Sim. $\hat{\varphi} : T^*Q_1 \to T^*Q_2$ satisfaz $\hat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1$ onde $\alpha_i$ é a forma tautológica, para $i = 1, 2$. Isso implica que $\hat{\varphi}^*\omega_2 = \omega_1$.

Isso implica que temos um funtor $Q \rightsquigarrow T^*Q$ que se chama de ***funtor cotagente*** e permite levar problemas de geometria diferencial para a geometria simpl ética.

*Demostração.*

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & T^*Q_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array}$$

A clave dessa prova é que o diagrama commuta, assim pode se-trocar um termo $\pi_2 \circ \hat{\varphi}$ por $\varphi \circ \pi_1$. □

O funtor que produzimos $\mathrm{Dif}(Q) \hookrightarrow \mathrm{Simp}(T^*Q$ não e fiel (surjetivo), ie. existem simplectomorfismos no fibrado cotangente que não vem de difeomorfismos na variedade.

**Observação.** Dada uma 1-forma $A \in \Omega^1$. Pode se-produzir um mapa no cotangente simplesmente trasladando por $A$:

$$\begin{aligned} T_A : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, \xi + A_x) \end{aligned}$$

que não pode ser um levantamento porque se projecta na identidade!

**Exercício.** $T_A$ é um simplectomofrismo $\iff$ $dA = 0$.

Mas, como sabemos quais simplectomorfismos no cotangente são sim levantamentos de difeomorfismos na variedade?

**Exercício.** Seja $F : T^*Q \to T^*Q$ um simplectomorfismo. Quando $F = \hat{\varphi}$ é levantamento de algum $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} Q$. Pois, isso acontece $\iff$ $F$ preserva a forma tautológica, ie. $F^*\alpha = \alpha$.

**Observação.** Levantamento cotangente de campos de vetores. Começa com um campo $X \in \mathfrak{X}(Q)$, integra para obter um fluxo $\varphi_t$, que é uma família de difeomorfismos na variedade, você sabe levantar isso com o funtor obtendo outro fluxo (porque levantamento de fluxo é fluxo) $\hat{\varphi}_t$, e diferenciando obtém $\hat{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$.

**Observação.** Para cualquer fibrado vetorial $E \to M$, podemos ver a seções $\Gamma(E)$ como um subconjunto das fun ções suaves na variedade $C^\infty(E)$—são as funções lineares nas fibras. Aí tem um modo natural de definir para cualquer campo vetorial $X \in \Gamma(TQ) \subseteq C^\infty(T^*Q)$ uma função, $H_X(p) = p(X_{\pi(p)} = \alpha(\hat{X})$.

**Proposicição.** $\hat{X} =$ campo Hamiltoniano de $H_X$.

# 6 Aula 6

Hoje: Colchete de Poisson, Darboux.

## 6.1 Colchete de Poisson

$M$ variedade, $\omega \in \Omega^2(M)$ não degenerada (quase-simplética). Podemos fazer

$$\begin{aligned} w^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto i_X\omega \end{aligned}$$

So that

$$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow X_f \in \mathfrak{X}(M)$$

e

$$i_{X_f}\omega = df.$$

**Definição.** $f, g \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned}\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \{f, g\} &= \omega(X_g, X_f) = dg(X_f) = \mathcal{L}_{X_f} g = -\mathcal{L}_{X_g} f\end{aligned}$$

**Proposicição** (Exercício)**.** $d\omega = 0 \iff \{\cdot,\cdot\}$ satisfaz identidade de Jacobi. $\implies (M, \omega)$ simplética, $\{\cdot,\cdot\}$ é colchete de Lie em $C^\infty(M)$ e isso se chama de um ***colchete de Poisson em*** $(M, \omega)$.

**Exercício.** $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

**Exemplo.** $\mathbb{R}^{2n}$.

**Definição.** $f, g \in C^\infty(M)$ estão em ***involução*** se $\{f, g\} = 0$. ie. $X_g$ é tangente aos níveis $f =$const (e vice versa).

**Observação.** Nesse caso, a derivada de $g$ ao longo das curvas integrais de $X_f$ é zero.

**Motivação** $(M, \omega)$ simplética, $H \in C^\infty(M)$ queremos integrar $X_H$ (ie. resolver $c'(t) = X_H(c(t))$). Suponha que existe $f \in C^\infty(M)$ com $\{f, H\} = 0$, chamada ***integral primeira***. ie. $f$ é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano.

No século XIX, quando Poisson vivia, a ideia era que se temos um número sufieiente de integrais primeiras "independentes", podemos "integrar" $X_H$. (Aqui "integrar" significa dar uma solução a equação diferencial do fluxo Hamiltoniano).

Em 1810, Poisson deu a fórmula

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

**Teorema** (Poisson)**.** $\{f, H\} = 0 = \{g, H\} \implies \{\{f, g\}, H\} = 0$.

**Teorema** (Jacobi)**.**

$$\{H, \{f, g\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} = 0$$

**1880** Lie usou essa identidade no seu trabalho de transformações (álgebras de Lie).

**Versão moderna (sec. XX) de integrabilidade** Veremos adiante...

**Teorema** (Arnold-Liouville)**.** $(M, \omega)$ de dimensão $2n$ e seu Hamiltoniano $H = f_1$ que é a primeira de uma sequencia de $n = \dim M/2$ funções independentes (as derivadas são linearmente independentes) $f_2, \ldots, f_n \in C^\infty(M)$ tais que $\{f_i, f_j\} = 0$ e que $(f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão. Então

$$N = \{(f_1, \ldots, f_n) = \text{cte}\} \cong \mathbb{T}^n$$

se compacto e conexo. Além disso, a dinâmica de $X_H$ em $\mathbb{T}^n$ é quase periódica (=é um fluxo linear no toro, que pode ser racional ou irracional).

**Observação** (Projeto?). Qué acontece com essa dinâmica no toro se perturbamos o sistema? O problema de dois corpos é completamente integravel. Por exemplo, a dinâmica da Terra e o Sol pode se-resolver, mas o problema adicionando a Lua é o problema de 3 corpos, que ninguém sabe cómo resolver. Aqui a Lua é uma perturbação.

Teorema KAM, quanto mais irracional é o fluxo, mais robusto é o toro, mais inestável.

Em fim, tudo isso para motivar os colchetes de Poisson.

## 6.2 Teorema de Darboux

$(M, \omega)$ variedade simplética com o colchete $\{\cdot, \cdot\}$.

**Observação.**

1. $\omega$ está completamente determinada por $\{\cdot, \cdot\}$, ie. se duas estruturas simpléticas dão lugar ao mesmo colchete de Poisson, elas são iguais.Por que?

$$\omega^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$$

   está dada em cada ponto por

$$(\omega^\sharp)_{ij} = \{x_i, x_j\}$$

   por definição.

2. A estrutura simplética canónica $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dp_i$ em $\mathbb{R}^{2n}$ está determinada (é a única tal que) por

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

   É como se tivesse uma base simplética boa em todos os pontos...

**Teorema** (Darboux). $(M, \omega)$ simplética, ent...åo ao redor de todo ponto $x \in M$ existem coordenadas locais $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ tais que $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$, ou, equivalentemente vale

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Tem um lema que va a provar essencialmente tudo.

**Lema** (Primeiro paso da indução ). Ao redor de qualquer ponto $x \in M$ existem coordenadas $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2}$ tais que

$$1 = \{p, q\}, \quad \{p, y_j\} = 0 = \{q, y_j\}, \qquad \{y_i, y_j\} = \varphi_{ij}(y).$$

Ou seja, a matriz da forma é

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A(y) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

ou seja, temos uma expresão

$$\omega = dq \wedge dp + \omega_N$$

onde $\omega_N$ é dada por $A(y)$ e é simplética.

*Demostração do Lema* **Paso 1** Seja $p$ uma função tal que $X_p(x) \neq 0$. Pelo teorema de fluxo tabular (retificação ) existe uma função $q$ tal que $X_p = \frac{\partial}{\partial q}$, de modo que $\{p, q\} = dq(X_p) = 1$ e $dp(X_q) = -1$.

**Paso 2** Enão $X_p$ e $X_q$ são linearmente independentes, pois $1 = \{p, q\} = \omega(X_p, X_q) \neq 0$, o que aconteceria por antisimetria se são linearmente dependentes. Além disso, comutam, pois

$$[X_p, X_q] \overset{\text{aula pasada?}}{=} X_{\{p,q\}=1} = 0.$$

Agora usamos a generalização do teorema do fluxo tabular: se $X_1, \ldots, X_k$ são campos linearmente independentes e que comutam, então existem coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ dais que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. (Teo. função inversa.) Assim, existem coordenadas locais $y_1, \ldots, y_{2n}$ tais que

$$X_q = \frac{\partial}{\partial y_{2n-1}}, \qquad X_p = \frac{\partial}{\partial y_{2n}}.$$

Logo

$$dy_j(X_q) = 0 = dy_j(X_p)$$

para $j = 1, \ldots, 2n - 2$.

**Paso 3** As diferenciais

$$dq, dp, dy_1, \ldots, dy_{2n-2}$$

são linearmente independentes, pois se

$$a dq + b dp + \sum_i c_{ij} y_i = 0$$

pois as $y_i$ já são LI, e avaliando em $X_i$ obtemos $a = 0$, e no $X_q$ que $b = 0$.

Temos um sistema de coordenadas $(q, p, y_1, \ldots, y_{2n-2}$ ao redor de $x$ tal que as condições do teorema salvo a última se cumplem. Agora veamos que $\{y_i, y_j\}$ não depende de $p, q$.

**Paso 4** Só lembrar que

$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \qquad X_q = \frac{\partial}{\partial q}$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial p}\{y_i, y_j\} = -\{q, \{y_i, y_j\}\} = 0$$

onde a segunda igualdade é jacobi. Fim.

□

*Demostração do Teo. Darboux.* Segue do lema por indução □

**Definição.** Uma ***estrutura de Poisson*** em uma variedade $M$ é

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$\mathbb{R}$-bilinear, antisimétrica, Jacobi e Leibniz, ie. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

**Exemplo.**

- $(M, \omega)$ simpl ética com $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$.

# 7 Aula 7

Na aula passada vimos:

- Colchetes de Poisson.
- Teorema de Darboux. Prova: demostrar que tem relações que caractetizam a forma de maneira única.
- É possível descrever estruturas cimpléticas en termos de colchete de Poisson.: Variedades de Poisson. Isto é axiomatizar as propriedades básicas do colchete de Poisson. Esses objetos podem ser entendidos como foleações simpléticas.

## 7.1 Subvariedades

Seja $(M, \omega)$ simplética e $N \overset{i}{\hookrightarrow} (M, \omega)$. Então temos

$$\omega_N = i^*\omega \in \Omega^2(N)$$

que é fechada porque o pullback comuta com derivada exterior.

$$\begin{aligned} \ker(\omega_N) &= \{X \in TN : \omega(X, Y) = 0 \ \forall Y \in TN\} \\ &= TN \cap TN^\omega \subseteq TN \end{aligned}$$

## 7.2 Pausa para distribuições

$P$ variedade.

**Definição.** Uma ***distribuição (generalizada)*** em $P$ é

$$P \ni x \longmapsto D_x \subseteq T_xP \text{ subespaço}$$

e o posto da distribuição em $x := \dim D_x$.

A distribuição é ***suave*** se para todo $x_0 \in P$, $\forall v \in D_{x_0}$ existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(P)$ que extende a $v$ e está contido na distribiução no sentido de que $X_x \subseteq D_x \forall x$ e $X_{x_0} = v$.

**Exemplo.** Núcleo de 2-formas é um exemplo de distribuição, mas não é suave em geral.

**Definição.** Uma distribuição suave $D \subseteq TP$ é dita ***integravel*** se $\forall x \in P$ existe uma subvariedade $S \ni x$, $TS = D|_S$

No caso de uma dsitribuição (suave) integrável, por todo ponto passa uma subvariedade integral conexa maximal chamadas ***folhas***.

**Observação.**

- Distribuição suave, de posto constante é a mesma coisa que um subfibrado vetorial $D \subseteq TP$. Nesse caso,

  **Teorema** (Frobenius)**.** D é integrável se e somente se é ***involutivo***, ou seja

  $$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

  *Demostração.* Note que $\implies$ é trivial porque se tem uma variedade que realiza a distribuição, o colchete de Lie sempre vai ser outro campo vetorial tangente. $\square$

- Suponha que $D = \ker(\omega)$ com $\omega \in \Omega^2(P)$ é suave $\iff$ D tem posto constante. Aquí $\impliedby$ é fácil.

- Se $d\omega = 0 \implies D = \ker \omega$ é involutivo.

**Conclusão** Se $\omega$ é uma 2-forma fechada e $D = \ker \omega$ tem posto constante, da lugar a uma folheação (regular=folhas de mesma dimensão) em P.

## 7.3 Voltando

**Definição.** N é dita

- ***isotrópica*** quando $T_xN \subseteq T_XN^\omega \iff \omega_N = 0 \iff \ker \omega_N = TN$.
- ***coisotrópica*** quando $T_xN^\omega \subseteq T_xN$.
- ***lagrangiana*** quando $T_xN = T_xN^\omega \iff i^*\omega = \omega_N = 0$ e $\dim N = \dim M/2$.
- ***simplética*** $T_xN \cap (T_xN)^\omega = \{0\}$ $\forall x \in N \iff \omega_N$ é simplética.
- ***posto constante*** $T_xN \cap T_xN^\omega \subseteq T_xN$ $\forall N$ tem posto constante.

**Exemplo.**

- curvas são isotrópicas.
- hipersuperficies são coisotrópicas.
- Veremos vários exeplos de subespaços lagrangianos.

### 7.3.1 Sobre subvariedades coisotrópicas

**Isto também vale para subvariedades de posto constante.**

Vamos ver uma versão geométrica de um exerício da lista 1, onde pegabamos o quociente de um espaço vetorial por el núcleo de uma forma para obter um espaço vetorial simplético.

**Exercício.** Suponha que as folhas da folheação são fibras de uma sobmersão

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "q"'] & (M,\omega) \\ B = N/\sim & \end{tikzcd}$$

então existe uma forma simplética $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$ tal que $q^*\bar{\omega} = \omega_N$.

**Exemplo.** O fluxo hamiltoniano do oscilador harmónico $H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_i q_i^2 + p_i^2$ com $c = 1/2$ da $\mathbb{C}P^{n-1}$

**Exercício.** $\psi : M \to \mathbb{R}^k$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$. $N = \psi^{-1}(c)$ para c valor regular.

- N coisotrópico $\iff$ $\{\psi_i, \psi_j\}|_N = 0$.
- N simplético $\iff$ $(\{\psi_i, \psi_j\}|_N)_{ij}$ é invertível.

# 8 Aula 8

Lembre:

- Subvariedades lagrangianas, (co-)isotrópicas, simpléticas. Aprofundamos nas coisotrópicas (posto constante), como as hipersuprficies ou conjuntos de nível, que tem uma folheação, e com condições de regularidade pode passar para o espaço quociente, que é simplético, como $\mathbb{C}P^n$.

## 8.1 Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas

**Exemplo.** Dois variedades simpléticas e um difeomorfismo entre elas. Então $\varphi$ é simplectomorfismo se e só se seu gráfico é lagrangiano. Talvez isso pode ser ussado para pensar em simplectomorfismos em um objeto cuantico.

**Observação.** Considere

$$\begin{aligned} \varepsilon : M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\ x &\longmapsto (x, \varphi x) \end{aligned}$$

então o grafo de $\varphi$ é lagrangiano $\iff$ $\omega_1 - \varphi^*\omega_2$.

**Exemplo (no fibrado cotangente).**

- A seção zero $Q \hookrightarrow T^*Q$ é nos mostra que $Q$ é uma subvariedade lagrangiana.
- A fibra (cotangente) de um ponto também é uma subvariedade lagrangiana de $T^*Q$.
- Logo, o espaço de fibras?
- Pegue uma subvariedade da base $S \subset Q$. Considera o ***fibrado conormal*** $N^*S$, $\nu_S^*$. É o dual do fibrado tangente. É o anulador de $TS$, $\{(x, \xi) \in T^*Q : x \in S, \xi|_{T_xS} = 0\}$. Note que é um subfibrado do fibrado cotangente.

Os dois exemplos anteriores são $S = Q$ e $S = \{x\}$ da seguinte prop:

**Proposicição.** $N^*S \hookrightarrow T^*Q$ é (um subfibrado) uma subvariedade lagrangiana.

*Demostração.* Ussando coordenadas adaptadas e a forma tautológica do $T^*Q$, damos coordenadas $N^*Q$ da forma $(x_1, \ldots, x_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$ e assim o pullback da forma tautológica é zero porque ele evalua os covectores $\xi_{\text{grande}}$ em vectores $x_{\text{pequeno}}$. □

**Exemplo.** Uma forma $\mu$ vista como seção do fibrado cotangente pode ser pensada como um mergulho de $Q$ em $T^*Q$.

**Proposicição.** Essa subvariedade é lagrangiana $\iff$ $d\mu = 0$.

## 8.2 Método de Moser

**Upshot.** Moser's trick is a thing that gives you a diffeomorphism that pulls back $\omega_2$ to $\omega_1$.

Dadas dois formas simpléticas numa variedade, como podemos achar um simplectomorfismo entre elas? A ideia do método é assim:

**Step 1** Interpolar as dois formas mediante uma familia contínua $\omega_t$ de formas simpléticas.

**Step 2** Buscar uma (isotopía) família de difeomorfismos $\varphi_t$ com $\varphi_0 = \text{id}$ e tal que $\varphi_t^*\omega_t = \omega_0$. Com isso a gente procura levar o problema para uma EDO.

**Step 3** Os fluxos são isotopías com uma relação de comutatividade. Eles correspondem com campos vetoriais. As isotopías em geral estão em correspondência com ***campos de vetores não autónomos***.

**Definição.** Uma família suave de difeomorfismos $\{\phi_t\}$ com $\phi_0 = \text{id}$ é chamada ***isotopía***. Suave significa que $(t, x) \mapsto \varphi_t$ é suave.

**Exemplo.** Fluxos (complets) são isotopías tq $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$.

**Definição.** Um ***campo de vetor*** $t$***-dependente*** ou ***não autónomo*** é família suave de campos $X_t \in \mathfrak{X}(M)$. De novo, suave é que $(t, x) \mapsto X_t(x)$ é suave.

$$\text{isotopía} \leftrightarrow \text{campos t-dependentes}$$

A diferenciação sempre é simples né? Fixa um ponto e varia o tempo, obtém uma curva.

$$\phi_t \mapsto X_t(\varphi_t(x) = \frac{d}{d\tau}|_{t=\tau}\varphi_\tau(x).$$

A recíproca é mais difícil. A ideia e extender a variedade á $M \times \mathbb{R}$, e considerar $\overline{X}(x,t) = (X_t(x), \frac{d}{dt})$. Esse depende do tempo, assim podemos achar um fluxo $\phi_t$ de $\overline{X}_t$. Aqui se deve extender o fluxo ussando bump functions, assim a gente tem que $\phi_t$ está definido para toda t.

Note que $\phi_t(x,s) = (G_t, t+s)$ para alguma função G na variedade. Podemos achar uma inversa dela assim:

$$(x,s) = \phi_{-t}(\phi_t(x,s)) = G_{-t}(G_t(x,s), t+s), s)$$

ie. a inversa de

$$x \mapsto G_t(x,s)$$

é

$$y \mapsto G_{-t}(y, s+t)$$

Logo,

$$\phi_t(x) = G_t(x,0)$$

é uma isotopía e como a derivada do fluxo

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x,0) = \overline{X}(G_t(x,0),t) \implies \frac{d}{dt}G_t(x,0) = X_t(x,0)).$$

E é isso. Temos a correspondencia.

Voltando ao método de Moser, para achar $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$, pegamos uma isotopía que puxa $\omega_t$ em $\omega_0$, e queremos diferenciar a isotopía. No caso de um fluxo, trata-se da derivada de Lie por definição.

**Lema.** $\{\varphi_t\}$ isotopía em M, $\{X_t\}$ campo autónomo. Sejam $\eta \in \Omega^k(M)$, $\beta_t \in \Omega^k(M)$. Então vale:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\epsilon) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\eta$$

onde estamos pegando a derivada num tempo t fixo. Daí veremos que pela regra da cadeia segue que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\beta_t) = \varphi^*(\mathcal{L}_{X_t}\beta_t + \frac{d}{dt}\beta_t$$

*Demostração.* a. Considere os seguintes operadores em $\Omega^\bullet$ :

$$Q_1(\eta) = \frac{d}{dt}\varphi_t^*\eta, \qquad Q_2(\eta) = \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\eta$$

Daí note que esses operadores comutam com a derivada exterior, são Leibniz respeito ao producto cunha e coincidem em funções . Daí segue que $Q_1 = Q_2$.

b. A regra da cadeia diz que para uma função $F(a,b)$,

$$\frac{d}{dt}F(t,t) = \frac{\partial}{\partial a}F(t,t) + \frac{\partial}{\partial b}F(t,t)$$

e olha para $\varphi_a^* \beta_b$ como a $F$. Sustiuindo e ussando a., o resultado segue.

$\square$

Uma aplicação disso é

**Teorema** (de estabilidade de Moser). M compacta, $\{\omega_t\}$ formas simpléticas, $t \in [0,1]$. Se as formas são todas cohomologas então elas são simplectomorfas, i.e. $[\omega_t] = [\omega_0] \implies \exists \phi_t$ tq $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$. Ou, de outra forma, se existe uma família suave de formas $\beta_t$ tais que

$$\omega_t = \omega_0 + d\beta_t$$

então existe uma isotopía $\{\varphi_t\}$ tal que $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$.

*Demostração.* Note que não é imediato que as clases de cohomologia nos dem uma família suave, mas é equivalente sim (usando decomposição de Hodge? Tem algo mais simples?). O método é achar um campo de vetores autónomo resolvendo

$$i_{X_t}\omega_t = -\frac{d}{dt}\beta_t$$

pois dela segue que

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega_t = -d\left(\frac{d}{dt}\beta_t\right)$$

E daí a segunda afirmação do lema. $\square$

# 9 Aula 9

Lembre: Método de Moser.

A prova foi:

*Demostração.* Calcule

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t = 0$$

isso implica que

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega_t = -d\left(\frac{d}{dt}\beta_t\right)$$

e isso que

$$i_{X_t}\omega_t = -\frac{d}{dt}\beta_t$$

$\square$

Com isso conseguimos associar uma isotopía a um campo t-dependente (integração).

## 9.1 Aplica ção ao teorema de Darboux

**Lema.** $X_t$ campo de vetores t-dependente, $t \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$X_t|_{x_0} = 0 \quad \forall t.$$

Então existe uma vizinhança $U \ni x_0$ e uma familia $\varphi_t : U \to M$ de

- (Inclusão ) $\varphi_0 = \mathrm{id}$.
- $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$
- $\varphi_t(x_0) = x_0$
- $\varphi_t : U \xrightarrow{\text{difeo}} \varphi_t(U)$.

*Demostração.* Variação do caso M compacto

$$\bar{X}(x,t) := \left(X_t(x), \frac{d}{dt}\right) \quad \text{em } M \times \mathbb{R}$$

$$\bar{X}(x_0, t) = \left(0, \frac{d}{dt}\right)$$

assim existe uma curva integral $\gamma(t) = (x_0, t)$ de $\bar{X}$ por $(x_0, 0)$ está definida para toda $t \in \mathbb{R}$.

Por EDO, existe uma vizinhança $W$ de $(x_0, 0)$ em $M \times \mathbb{R}$ onde o fluxo de $\bar{X}$ existe $\forall t \in [0,1]$.

Tome $U = \bigcap_{W\{M\times\{0\}\}}$. □

Valem a fórmula para $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_t)\ldots$

**Teorema (Darboux).** $(M, \omega)$ simplética, $\dim M = 2n$. Para todo $x \in M$ existe uma vizinhança $U \ni x$, aberto $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ e um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : V \subseteq \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow U \subseteq M \\ 0 &\longmapsto x \end{aligned}$$

tal que

$$\phi^* \omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i.$$

[Desenho de carta coordenada]

*Demostração.* Podemos assumir que M é bola aberta de $\mathbb{R}^{2n}$ com estrutura sumplética $\omega$ aribtrária.

Para usar o método de Moser, definamos

$$\omega_1 = \omega$$
$$\omega_0 = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

Podemos assumir que na origem

$$\omega_1|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} \qquad T_0\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$$

simplesmente porque qualquer dois formas simpléticas são equivalentes num espaço vetorial simpletico usando uma mudança de coordenadas.

- Podemos assumir pelo Lema de Poincaré que

  $$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_0 = 0$$

  supondo pela mesma razão que antes que $\beta|_0 = 0$.

- $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 \iff \omega_t = \omega_0 + td\beta$

Precisamos checar que $\omega_t$ são não degeneradas numa vizinhança de 0.

Note que em $x = 0$, $\omega_t|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} = \omega_1|_{x=0}$, assim $\omega_t|_{x=0}$ é não degenerada para toda $t$, mas precisamos de uma vizinhança, não só um ponto.

**Lema.** Se tem uma família $\omega_t|_{x_0}$ é simplética $\forall t$, $t \in [0,1]$, então existe uma vizinhança de $x_0$ onde $\omega_t$ é não degenerada $\forall t \in [0,1]$.

*Demostração.* Considere

$$(x,s) \to \det(\omega_s(x)) = \text{determinante da matriz que representa a forma}$$

essa função é não zero em zero, assim para cada $t$ existe uma vizinhança onde ela não é zero. Logo, pela compacidade de $[0,1]$, $\exists$ uma vizinhança $B \ni x_0$ onde $\det(\omega_s(x))$ não se anula $\forall s \in [0,1]$. □

Então já temos essa vizinhança que precisavamos.

Defina $X_t$ como a solução da equação de Moser:

$$i_{X_t}\omega_t = -\beta.$$

Como $\beta|_0 = 0 \implies X_t|_{x=0} = 0 \implies \exists \varphi_t, t \in [0,1]$.

Pelo lema 1, existe uma vizinhança $V \ni 0$ e

$$\varphi_t : V \longrightarrow B$$
$$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$$

tome $t = 1$, $0 \in U = \varphi_1(V)$. □

Com esse mesmo método a gente consegue provar uma generalização do teorema de Darboux.

## 9.2 Teorema de Darboux generalizado (Weinstein)

**Teorema.** $Q \overset{i}{\hookrightarrow} M$ subvariedade (mergulhada) e $\omega_0, \omega_1$ em $M$ simpléticas. Suponha que

$$\omega_0|_x = \omega_1|_x \qquad \forall x \in Q$$

então existem vizinhanças $U_0$ e $U_1$ de $Q$ em $M$ e um difeomorfismo

$$\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$$

tal que

$$\varphi^*\omega_1 = \omega_0$$

e que $\varphi(x) = x \ \forall x \in Q$

**Observação.** O teorema de Darboux é quando $Q$ é um ponto só!

**Observação.** A condição $\omega_0|_x = \omega_1|_x$ significa que $\omega_0$ e $\omega_1$ coincidem em todo o espaço tangente a $M$ nos pontos de $Q$, não é que o pullback em $Q$ coincide. Tem mais vetores no espaço tangente a $M$.

Vamos precisar de um Lema de Poincaré relativo.

**Lema.** $Q \hookrightarrow M$ subvariedade. Seja $\eta \in \Omega^k(M)$, $d\eta = 0$, $i^*\eta = 0$. Então existe uma vizinhança $U$ de $Q$ em $M$, $\beta \in \Omega^k(U)$ tal que

$$\eta = d\beta$$
$$\beta|_x = 0, \quad \forall x \in Q$$

$(\beta|_{T_xM} = 0 \ \forall x \in Q)$.

A ideia aqui é simplesmente que podemos achar uma vizinhança de $Q$ que se contrae a $Q$ (retrato por deformação?)

*Demostração.* Em fim, pelo lema, para $\eta = \omega_1 - \omega_0$, $i^*\eta = 0$. Compare com a demostração anterior, $\beta$ se anulava no 0, agora $\eta$ se anula em toda $Q$ (é uma versão paramétrica disso).

$Q \hookrightarrow M$ tem vizinhança $U$ onde $\exists \beta \in \Omega^1(U)$,

$$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_x = 0$$

- Seja $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + t\,d\beta$.
- $\forall t \in [0,1]$, $x \in Q$, $\omega_t|_x = \omega_0|_x = \omega_1|_x$.

Pelo lema 2, $x$ tem vizinhança em $M$ onde $\omega_t$ é simplética $\forall t \in [0,1]$.

Tomando a união das vizinhanças, temos vizinhança de $Q$ onde $\omega_t$ simplético $\forall t \in [0,1]$.

**Método**

- Define $X_t$ por $i_{X_t}\omega = -\beta$. Isso implica que $\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t = 0$.

- Como $\beta|_x = 0$, então $\forall x \in Q$, $X_t|_x = 0 \ \forall x \in Q$.
- Pelo lema 1, $\exists U_0$ onde $\varphi_t$ está definido $\forall t \in [0,1]$.
- E mais $X_t|_Q = 0 \implies \varphi_t|_Q = id_Q$.
- Tome $\phi = \varphi_1$ e $U_1 = \varphi_1(U_0)$.

□

### 9.2.1 Sobre o Lema de Poincaré relativo

O principal ingrediente é teorema da vizinhança tubular.

Lembre:

**Teorema** (Vizinhança tubular)**.** $Q \hookrightarrow M$ subvariedade mergulhada. Existe uma vizinhança $Q \subseteq U \subseteq M$ para qual existe $\pi : U \to Q$ tal que

$$\begin{aligned} \pi \circ i &= id_Q \\ i \circ \pi &\simeq id_U, \quad \text{(homotopía suave)} \end{aligned}$$

Daí, o lema de Poincaré segue a existencia de um ***operador de homotopía***.

Em geral, quando temos uma homotopía

$$\begin{aligned} F : M \times [0,1] &\longrightarrow N \\ F_0 : M &\to N \\ F_1 : M &\to N \end{aligned}$$

exsite um operador

$$H : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$$

tal que

$$F_1^*\eta - F_0^*\eta = d(H\eta) - Hd\eta$$

Note que no caso de formas fechadas, o termo da direita se anula e a gente prova a invariança homotópica da cohomologia. No nosso caso, o operador de homotopía nos da $\eta = dH\eta j$ á que $d\eta$ se anula em $Q$.

### 9.2.2 Vizinhança tubular

**Teorema.** Existe uma vizinhança $U_0$ de $Q$ em $NQ$ e uma vizinhança $U_1$ de $Q$ em $M$ tais que

a. $U_0 \cap (NQ)_x$ é convexo $\forall x \in Q$.

b. Existe um difeomorfismo $\phi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$ tal que $\phi(x) = x$, e $d\phi|_x : T_x(NQ) \xrightarrow{id} TM|_x$

*Demostração.* Idea: aplicação exponencial. □

## 10 Monitoria 2

**Proposição.** $\phi : M^{2n} \to \mathbb{R}^k$ suave, $c \in \mathbb{R}^k$ valor regular.

$$N := \phi^{-1}(c) \text{ coisotrópica } \iff \{\phi_i, \phi_j\}|_N = 0$$

## 11 Aula 10

Lembre

- Darboux generalizado: duas formas numa subvariedade que coinciden nos pontos da subvariedade, existem vizinhanças da subvariedade simplectomorfas.
- A prova disso: usa método de Moser. Para usar o método de Moser:

  **Lema** (Poincaré relativo). $Q \xrightarrow{i} M$. $\eta \in \Omega^k(M)$ fechada e tal que $i^*\eta = 0$. Então existe vizinhança $U \supset Q$ e $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\eta = d\beta$ e $\beta|_Q = 0$.

  (O lema de Poincaré usual é quando Q é um ponto)

  *Demostração do lema de Poincaré.* Aí tem que mergulhar $Q$ no fibrado tangente $NQ$ que é um fibrado que não precisa de métrica para ser definido. Porém, na prova a gente intruduiz uma métrica em $Q$ e identifica $NQ$ com $T^{\perp}Q$. Daí usando a aplicação exponencial conseguimos ver que $Q$ é um retrato por deformação de uma vizinhança dele no $M$—a exponencial é a ponte de $NQ$ [a $Q$.

  Isso da uma homotopía

  $$\begin{aligned} F_t : U_0 &\longrightarrow U_0 \\ (x, v) &\longmapsto (x, tv) \\ F_0 &= i \circ \pi \\ F_1 &= \mathrm{id}_{U_0} \end{aligned}$$

  Daí é só pegar o operador de homotopía

  $$\mathcal{H} : \Omega^k(U_0) \to \Omega^{k-1}(U_0)$$

  que é tal que
  $$F_1^*\eta = F_0^*\eta = \mathcal{H}(d\eta) + d(\mathcal{H}\eta)$$

  **Afirmação.** O operador de homotopía é

  $$H(\eta) = \int_0^1 I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}}(F^*\eta)dt$$

  onde

  $$\begin{aligned} F : [0,1] \times U_0 &\longrightarrow U_0 \\ (t, y) &\longmapsto F_t(y) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
I_t : U_0 &\longrightarrow [0,1] \times U_0 \\
y &\longmapsto (t, y)
\end{aligned}
$$

de forma que

$$F_t = F \circ I_t$$

**Notação** Seja

$$
\begin{aligned}
\tau_t : \mathbb{R} \times U_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \times U- \\
(x, y) &\longmapsto (s + t, y)
\end{aligned}
$$

de forma que

$$I_t = \tau_t \circ I_0, \quad F_t = F \circ I_t = F \circ \tau_t \circ I_0$$

e a conta que a gente faz é

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F_t^* \eta &= I_0^* \frac{d}{dt} \tau_t^* (F^* \eta) \\
&= I_0^* \tau_t^* (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial} t} F_\eta^* \\
&\overset{\text{Cartan}}{=} I_0^* \tau_t^* \left( d i_{\frac{\partial}{\partial t}} F_\eta^* + i_{\frac{\partial}{\partial t}} d(F^* \eta) \right) \\
&= d \left( I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} F_\eta^* + I_t^k i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* (d\eta) \right)
\end{aligned}
$$

e aí integramos para obter

$$F_1^* \eta - F_0^* \eta = d(H\eta) + H(d\eta)$$

Se $d\eta = 0, i^* \eta = 0, \implies \eta = d(H\eta)$. Defina $\beta = H\eta$. Como $F_t(x, 0) = (x, 0)\ \forall x \in Q$, assim

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(x, 0) = 0 \implies i_{\frac{\partial}{\partial t}} dF_t|_{x \in Q} = 0$$

e por fim

$$\beta|_x = 0.$$

□

Para esse teorema pode imaginar que cada vizinhança de Q é uma variedade diferente. Mas então a condição de que as dois formas s ão iguais encima de Q já não faz sentido. Precisamos de um isomorfismo simplético entre esses espaços tangentes.

## 11.1 Darboux generalizado versão 2.0

**Teorema** (Teorema de Darboux generalizado Versão 2.0).

$$
\begin{tikzcd}
(M_0, \omega_0) \arrow[dr, hook, "i_0"'] & & (M_1, \omega_1) \arrow[dl, hook', "i_1"] \\
& Q &
\end{tikzcd}
$$

(arrows reversed)Suponha que temos um isomorfismo de fibrados simplécticos

$$\begin{tikzcd} TM_0|_Q \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & TM_1|_Q \arrow[dl] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

e tal que $d\phi|_{TQ} : TQ \to TQ$ e $\mathrm{id}_T\, Q$.

Então $\phi$ estende a um simplectomorfismo

$$\begin{tikzcd} U_0 \subset M_0 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & U_1 \subset M_1 \arrow[dl] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

(arrows backwards) tal que

$$d\pi|_Q = \phi : TM_0|_Q \to TM_1|_Q$$

Isto é, a derivada do simplectomofismo (entre as vizinhanças de $M_1$ e $M_2$) que obtemos estende o isomorfismo simpléticos dos fibrados tangentes.

*Demostração.* Podemos reduzir ao caso anterior! Basta achar um difeomorfismo $\psi : U_0 \to U_1$ tal que $\psi|_Q = \mathrm{id}_Q$ e que $d\psi|_Q = \phi$. Nesse caso, $\omega_0$ e $\psi^*\omega_1$ são dois formas em $U_0$ que coincidem sobre $TM_1|_Q$. Vamo lá

Tome dois complementos

$$\begin{aligned} E_0, &\quad TM_0|_Q = TQ \oplus E_0 \\ E_1, &\quad TM_1|_Q = T_Q \oplus E_1 \end{aligned}$$

Então como $\phi$ preserva $T_Q$, ele também preserva os complementos, é só algebra linear. Isto é, $\phi$ se restringe a um isomorfismo

$$\bar{\phi} : E_0 \to E_1$$

Note que

$$\bar{\phi}|_Q : TE_0 \cong TQ \oplus E_0 \to TE_1 \cong TQ \oplus E_1$$

Aqui estamos pegando a derivada do isomorfismo nos fibrados. O importante e que como ele é linear, sua derivada é ele mesmo (só que aí aparecem muitas identificações):

$$d\bar{\phi}|_Q = \mathrm{id} \oplus \bar{\phi} = \phi$$

Agora pegamos vizinhanças tubulares de $Q$, $V_0 \subset E_0$ e $V_1 \subset E_1$ e usando a exponencial como antes podemos contraer

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi_0 = \exp"] & V_1 \arrow[d, "\phi_1"] \\ U_0 \subset M_0 \arrow[r, dashed, "\psi"] & U_1 \subseteq M_1 \end{tikzcd}$$

e todo comuta:

$$\psi = \phi_1 \circ \bar{\phi} \circ \phi^{-1} : U_0 \xrightarrow{\cong} U_1$$

e por fim

$$d\psi|_Q = \mathrm{id} \circ d\bar{\phi}\, \mathrm{id} = \phi$$

$\square$

Agora um caso particular:

$$\begin{tikzcd}
(M,\omega) \arrow[dr, "i"'] & & (T^*\mathcal{L} \arrow[dl, "i"] \\
& \mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

(arrows reversed they are inclusions) onde Q está metida no fibrado cotangente como a seção zero.

## 11.2 Teorema das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein

**Teorema** (das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein)**.** (As subvariedades Lagrangianas estão definidas "intrinsecamente", pois existe uma vizinhança delas que é simplectomorfa a ela como subvariedade no tangente dela)

Existem vizinhanças $U_0 \supseteq \mathcal{L}$ em $T^*\mathcal{L}$ e $U_1 \supset eq\mathcal{L}$ em $M$ e um simplectomorfismo

$$\varphi : U_0 \to U_1$$

*Demostração.* Só precisamos de um $\phi$ como no Darboux 2, i.e.,

$$\phi : TM|_{\mathcal{L}} \longrightarrow T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}}$$

tal que

$$\phi|_{T\mathcal{L}} : T\mathcal{L} \to T\mathcal{L} \quad = \mathrm{id}_{T\mathcal{L}}$$

**Lema.** Suponha que $\mathcal{L} \hookrightarrow (M,\omega)$ é Lagrangiana. Considere $TM|_{\mathcal{L}}$ um fibrado vectorial simplético. Então

1. Existe um subfibrado lagrangiano $E \subseteq TM|_{\mathcal{L}}$ tal que $TM|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus E$.
2. Existe um isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
TM|_{\mathcal{L}} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^* \arrow[dl] \\
& \mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

onde no espaço $T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^*$ é

$$\nu((X,\alpha),(Y,\beta)) = \beta(X) - \alpha(Y)$$

Lembrando um exercício da lista 1 (de álebra linear) que diz que um subespaço Lagrangiano é nos da uma descomposição do espaço usando o seu dual.

*Demostração do Lema.*

**Step 1** Todo espaço simplético induiz uma estrutura complexa compatível. Se L é lagrangiano, JL também e o espaço vetorial (acho que isso coincide com o complemento ortogonal na métrica compatível). Isso vale para fibrados vetorias.

**Step 2** Note que

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow (T\mathcal{L})^* \\ u &\longmapsto \omega(\cdot, u) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Isso é super elementar de algebra linear.

Tome

$$\begin{aligned} (TM|_{\mathcal{L}}, \omega) &\longrightarrow (T\mathcal{L} \oplus T\mathcal{L}^*, \nu) \\ (x, u) &\longmapsto (X, \omega(\cdot, u)) \end{aligned}$$

que é que acontece? Então,

$$\begin{aligned} \nu(T(X,u), T(Y,v) &= \nu((X, \omega(\cdot, u)), (Y, \omega(\cdot, v)) \\ &= \omega(X, u) - \omega(Y, u) \\ &= \omega((X, u), (Y, u)) \end{aligned}$$

□

Daí, o lema queda provado simplesmente notando que

$$\begin{tikzcd} & T\mathcal{L} \oplus T\mathcal{L} \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\ TM|_{\mathcal{L}} \arrow[rr, "\phi"] & & T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}} \end{tikzcd}$$

(diagonal arrows reversed).

□

# 12 Aula 11

## 12.1 Aplicação (de Weinstein): pontos fixos de simplectomorifsmos

Generaliza o estudo (Poincaré-Birkoff) clássico de pontos fixos de aplicações que preservan área:

**Teorema** (Último teorema de Poincaré)**.** Um automorfismo de um anelo que preserva oriantação, área e rota a fronteira do anelo em direções opostas tem um ponto fixo.

Isso apareceo quando Poincaré estudava fluxos em $\mathbb{R}^3$.

Consideremos $(M, \omega)$ simpléctica e $M \xrightarrow{f} M$ simplectomorfismo. Nos interessa o caso em que f é um fluxo hamiltoniano no tempo 1, ie. $f = \varphi^{t=1}_{X_{H_t}}$. Sabemos que

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$$

é uma subvariedade lagrangiana, e também $\Delta = \Gamma_{id_M} = \{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$ De forma que os pontos fixos de f são os pontos de interseção entre $\Gamma_f$ e $\Delta$.

**Proposição.** Seja $M$ compacta, $H^1_{dR}(M) = 0$. Se $f$ é $C^1$-***próximo*** (convergencia uniforme, Fréchet differentiable?) da $id_M$, então f tem pelomenos 2 pontos fixos.

*Demostração.* Note que $\Delta \cong M$ pelo teorema da vizinhança lagrangiana, como $\Delta$ é lagrangiana existe uma vizinhança $U \supseteq \Delta$ simplectomorfa a uma vizinhança $U'$ de $M \hookrightarrow (T^*M, \omega_{can}$.

- Se $f \in$ Simp está "perto" da $id_M$, então $\Gamma_f \subseteq U$.
- $f$ é $C^1$-próximo da $id_M$, então $\Gamma_f$ corresponde a 1-forma $\mu$ em $T^*M$ (a uma subvariedade $N_\mu$ de $T^*M$?). (É uma gráfica de $M$ no fibrado cotangente!)
- $\Gamma_f$ lagrangiana $\implies$ $d\mu = 0$ (Lista 2)
- $H^1(M) = 0 \implies \mu = dh$
- $M$ compacta $\implies$ $h$ tem pelo menos 2 pontos críticos.

□

**Observação** (Monitoria). Se pedimos só $C^0$-próximo, é possível que a seção $\mu$ não esteja bem definida porque um ponto de $M$ pode não estar associado a um covector ancorado em outro ponto, ou algum outro problema assim. A condição $C^1$ controla isso.

**Observação.**

- Não podemos abrir mão de $H^1(M) = 0$. Eg. rotação no toro.
- Podemos substituir $H^1(M) = 0$ por $f$ ser simplectomorfismo Hamiltoniano (ver McDuff-Salomon).

**Pergunta.** Remover $C^1$-proximidade da identidade? (Pelo menos no caso f hamiltoniano.

**Conjetura** (Arnold)**.** $M$ simplética compacta, $f$ simplectomorfismo Hamiltoniano. O número de pontos fixos de $f$ e maior o igual que o número mínimo de pontos críticos que uma função em $M$ deve ter:

$$\begin{aligned} \#\text{ pontos fixos de } f &\geqslant \mathrm{Crit}(M) \\ &\geqslant \text{LS category (Lusternik Schninelmann} \end{aligned}$$

Isso está relacionado com o fato de tirar a hipótese de que a função esté próxima da identidade.

**Conjetura** (Outra versão). Para pontos fixos não degenerados (são os pontos onde $N_\mu$ e $M$ se intersectan transversalmente em $T^*M$).

$$\# \text{ pontos críticos} \geqslant \# \text{ mínimo de pontos críticos que funções de Morse devem ter.}$$
$$\underbrace{\geqslant}_{\text{desig. Morse}} \sum_k \text{Betti}_k$$

**Projetos**

- Conjetura de Arnold (Eliashbag (superfícies de Riemann), Hofer-Achander)
- Homologia de Floer (é uma versão de Homologia de Morse em dimensão infinita)

Professor Leonardo vai falar com mais detalhe desses temas.

## 12.2 Outra classe de exemplos de variedades simpléticas: órbitas coadjuntas

São exeplos de redução simplética. Isso está relacionado com teoría de Lie. $G \rightharpoonup (M, \omega)$ simetrías hamiltonianas. Daí vamos produzir uma nova variedade simplética.

### 12.2.1 Revisão de grupos e álgebras de Lie

Cada grupo de Lie age na sua álgebra de Lie de maneira canónica. Daí podemos pegar a álgebra dual. O fato importante é que as órbitas lá tem uma estrutura simplética.

**Definição.** Um ***grupo de Lie*** é uma variedade $C^\infty$ $G$ munida de estrutura de grupo tal que o produto e a inversão são funções suaves. Os ***morfismos*** são homomorfismos de grupos $C^\infty$. ***Subgrupos de Lie*** são subvariedades imersas que são subgrupos.

**Exemplo.**

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$
- $V$ espaço vetorial, $(V, +)$ é grupo de Lie abeliano.
- $S^1$, $S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ são grupos de Lie abelianos.
- Grupos finitos/enumeráveis: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \ldots$
- 

  **Exercício.** $G$ grupo de Lie conexo, então o seu recobrimento universal $\tilde{G}$ é grupo de Lie.
- Subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$:
  - Ortogonal $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = id\}$.

    Mais generalmente, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ espaço vetorial de produto interno, $O(V) = \{T : V \to V | \langle Tv, Tv \rangle = \langle u, v \rangle\}$.

Considerando

$$\begin{aligned}\psi : GL(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow Sim(n)\\ A &\longmapsto AA^{T}\end{aligned}$$

temos que id é um valor regular, e assim $O(n) = \psi^{-1}(id)$ é uma subvariedade (compacta é não conexa por $\det A = \pm 1$

- $SL(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$, conexo não compacto.
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$ compacto conexo
- $Sp(2n) = \{A \in GL(2,\mathbb{R}) : A^{T} J_0 A = J_0\}$ com $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. ***Grupo simplético***.
- $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : \text{invertiveis}\} \overset{\text{aberto}}{\subseteq} M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$.
- $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : AA^* = id\}$, issto é $A^* = \overline{A}^{T}$, temos $|\det A| = 1$ e o mapa
$$\det : U(n) \to S^1$$
e de fato $U(1) \cong S^1$.
- $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$ ***grupo unitário especial***

**Observação.**

•

**Teorema** (de Cartan)**.** (F. Warner) Subgrupo fechado de grupo de Lie é subgrupo de Lie! (mergulhado)

- Nem todo grupo de Lie é grupo de Lie de matrices. O espaço recobridor de $SL(2,\mathbb{R})$, por exemplo.

### 12.2.2 Sobre SU(2)

Sabemos que podemos escrever

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd : i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

e como

$$S^3 \hookrightarrow \mathbb{H}$$

$S^3$ herda uma estrutura de grupo de Lie, e de fato

$$S^3 \xrightarrow{\cong} SU(2) = \left\{ (\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{matrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Daí,

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "2:1"'] & SU(2) \arrow[d, "2:1"] \\ \mathbb{R}P^3 \arrow[r, "\cong"] & SO(3) \end{tikzcd}$$

Em geral recobrimentos duplos de $SO(n)$ são grupos $\mathrm{Spin}(n)$. Para $n \geqslant 2$ são recobrimentos universais. São grupos de simetrías de particulas que se chaman fermiones. A ideia é que a gente precisa dois voltas para virar a flecha que tá parada na particula.

Por último vamos ver por qué e que $\mathbb{R}P^3 \cong SO(3)$. Do mesmo jeito que $\mathbb{R}P^2$ é o hemisferio norte da esfera com os pontos no bordo identificados, $\mathbb{R}P^3$ é uma bola fechada em $\mathbb{R}^3$ com pontos antipodais no bordo identificados. Podemos pensar que os pontos de $\mathbb{R}P^3$ são rotações de ángulo $\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

# 13 Aula 12