Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 3

Contents

Problem 1 Consider a symplectic manifold (M^{2n}, ω) with hamiltonian $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Let $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ be first integrals of the flow of H, i.e., $\{H, f_i\} = 0$. Let $F = (f_1, \dots, f_k) : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$, and let $c \in \mathbb{R}^k$ be a regular value. Note that $M_c := F^{-1}(c)$ is invariant by the flow of H. We will show that M_c carries a natural invariant volume form.

a. Take a neighborhood $\mathcal{U}$ of M_c where $df_1, \dots, df_k$ are linearly independent pointwise. Show that the Liouville volume form $\Lambda_\omega = \omega^n/n!$ can be written in $\mathcal{U}$ as $\Lambda_\omega = df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \sigma$ for some $\sigma \in \Omega^{2n-k}(M)$. We then define a volume form $\Lambda_c := i\sigma \in \Omega^{2n-k}(M_c)$ where $i : M_c \to M$ is the inclusion.

b. Show that $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \mathcal{L}_{X_H}\sigma = 0$ and use this fact to see that we can write $\mathcal{L}_{X_H}\sigma = \sum_{i=1}^k df_i \wedge \rho_i$. Conclude that Λ_c is invariant by the flow of H.

c. Show that Λ_c does not depend on the choice of σ.

Solution.

a. (Ver StackExchange.) Note que como $\dim \Omega^{2n}(M) = 1$, basta mostrar que existe $\sigma \in \Omega^{2n-k}(M)$ tal que $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \sigma \in \Omega^{2n}(W)$.

   Sabemos que para qualquer ponto $p \in M_c$ existe uma vizinhança V de p com coodenadas locais $(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_{2n})$. Daí, uma base de T^*_xV é $df_1, \dots, df_k$, $dx_{k+1}, \dots, dx_{2n}$. Defina $\sigma_V = dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_{2n}$. Pegue uma coberta aberta V_α de $\mathcal{U}$ e defina uma partição da unidade ρ_α para estender cada forma σ_{V_α} a uma forma em $\mathcal{U}$, $\sigma_{V_\alpha}\rho_\alpha$. A forma $\sum_\alpha \sigma_{V_\alpha}\rho_\alpha$ é a buscada.

   Outra ideia que tive: pegue um ponto $p \in \mathcal{U} \subset M$. Podemos completar $(df_1)_p, \dots, (df_k)_p$ a uma base de T^*M. Também podemos extender essa base para uma vizinhança $p \in V \subset \mathcal{U}$ como segue: extenda os covectores a toda M usando uma função "quindim" (=bump function) que seja 1 num compacto perto de p—i.e. estamos extendedo essas formas que achamos em p para um campo covetorial constante. Daí, como os covectores são linearmente independentes em p, o determinante da função de coeficentes deles é não zero em p, mas como o determinante é contínuo, existe uma vizinhança de p onde é não zero. Defina $\tilde{\sigma}$ como o wedge product dos covectores que acabamos de achar. Daí, de novo, é so estender cada $\tilde{\sigma}$ a uma forma em $\mathcal{U}$. O problema aquí é comprovar que a escolha dos covetores coincide nas interseções dos abertos—algo que não acontece na construção anterior porque estamos usando un atlas de M.

b. Pela fórmula de Cartan, em cada vizinhança V como no item anterior,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_H}\sigma_V &= \mathcal{L}_{X_H}(dx_{k+1}\wedge\ldots\wedge dx_{2n})\\ &= \mathcal{L}_{X_H}dx_{k+1}\wedge dx_{k+2}\wedge\ldots\wedge dx_{2n}\\ &+ dx_{k+1}\wedge\mathcal{L}_{X_H}x_{k+2}\wedge\ldots\wedge dx_{2n}\\ &+\ldots+dx_{k+1}\wedge\ldots\wedge\mathcal{L}_{X_H}dx_{2n}.\end{aligned}$$

Só note que cada termo dessa suma que não é zero deve conter um múltiplo de alguma df_j porque essa é a única maneira de ter formas linealmente independentes no wedge product.

Sabendo que $\mathcal{L}_{X_H}\sigma = \sum_j df_j\wedge\rho_j$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_H}i^*\sigma &= i^*\mathcal{L}_{X_H}\sigma\\ &= i^*\left(\sum_j df_j\wedge\rho_j\right)\\ &= \sum_j di^*f_j\wedge i^*\rho\\ &= 0\end{aligned}$$

já que f_i é constante em M_c.

c. Suponha que $\tilde{\sigma}\in\Omega^{2n-k}(M)$ também é tal que $\Lambda_\omega = df_1\wedge\ldots df_k\wedge\tilde{\sigma}$. Então

$$\begin{aligned}&df_1\wedge\ldots\wedge df_k\wedge(\sigma-\tilde{\sigma})=0\\ \implies\quad &\sigma\wedge\tilde{\sigma} = df_1\wedge\ldots df_{k+1}\wedge\gamma,\qquad \gamma\in\Omega^{2n-k}(M)\\ \implies\quad &i^*(\sigma-\tilde{\sigma}) = i^*(df_1\wedge\ldots df_{k+1}\wedge\gamma)=0\\ \implies\quad &i^*\sigma = i^*\tilde{\sigma}\end{aligned}$$

já que o wedge product igual a zero e equivalente a dependendência linear e de novo porque f_j são constantes em M_c.

$\square$

Problem 2 Let M be a symplectic manifold, $\Psi = (\psi^1,\ldots,\psi^k): M\to\mathbb{R}^k$ a smooth map, and c a regular value. Consider a submanifold $N = \Psi^{-1}(c)\hookrightarrow M$.

a. Show that N is coisotropic if and only if $\{\psi^i,\psi^j\}|_N = 0$ for all $i,j=1,\ldots,k$.

b. Show that N is symplectic if and only if the matrix (c^{ij}), with $c^{ij} = \{\psi^i, \psi^j\}$, is invertible for all $x \in N$. In this case, verify that we have the following expression for the Poisson bracket $\{\cdot, \cdot\}_N$ on N (known as ***Dirac's bracket***):

$$\{f, g\}_N = \left(\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \sum_{ij} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} c_{ij} \{\psi^j, \tilde{g}\} \right) \Bigg|_N$$

where $(c_{ij}) = (c^{ij})^{-1}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, and $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ are arbitrary extensions of f and g.

Solution.

a. Since M is symplectic we have a bundle isomorphism

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ v &\longmapsto i_v \omega \end{aligned}$$

Then

$$TN^\omega = (\omega^\flat)^{-1}(\mathrm{Ann}(TN)).$$

Since M is the level set of a regular value, there are local coordinates of the form $(\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$. Vectors tangent to N are expressed only in terms of the vectors $\partial_{k+1}, \dots, \partial_{2n}$ and thus covectors that vanish on TN are those which vanish on $\partial_{k+1}, \dots, \partial_{2n}$. This means that a basis for Ann(TN) is given by $d\psi^1, \dots, d\psi^k$ (an explanation of this might be that the canonical basic covectors for the coordinates ψ^i are the differentials $d\psi^i$, which maybe can be checked using the usual change of coordinates formula). These generators map to their hamiltonian vector fields under $(\omega^\flat)^{-1}$:

$$\left(\omega^\flat\right)^{-1} (d\psi^i) = X_{\psi^i}$$

So TN^ω is generated by the X_{ψ^i}. Notice that any vector $v \in TM$ is actually in TN iff $\alpha(v) = 0 \ \forall \alpha \in \mathrm{Ann}(TN)$. Then we see that

$$\begin{aligned} TN^\omega \subset TM &\iff X_{\psi^i} \in TN \quad i = 1, \dots, k \\ &\iff d\psi^j(X_{\psi^i})|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \\ &\iff \omega(X_{\psi^i}, X_{\psi^j})|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \\ &\iff \{\psi^i, \psi^j\}|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

b. Em qualquer sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^{2n})$, os vetores hamilatonianos $X_{x^1}, \dots, X_{x^{2n}}$ formam uma base do espaço tangente. Nessa base, os coeficientes da matriz que representa $\omega^\flat$ são exatamente os colchetes de Poisson $\{x^i, x^j\}$. A forma ω é não degenerada se e somente se a sua matriz é invertível (já que nesse caso temos o isomofismo $\omega^\flat$ bem definido). Então, o que queremos é ver que a restrição $\omega|_N$ é invertível em cada ponto de N.

Nas coordenadas de subvariedade $(\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$, a matrix que representa $\omega^\flat$ é

$$\begin{pmatrix} \{\psi^1,\psi^1\} & \cdots & \{\psi^k,\psi^1\} & \{x^{k+1},\psi^1\} & \cdots & \{x^{2n},\psi^1\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1,\psi^k\} & \cdots & \{\psi^k,\psi^k\} & \{x^{k+1},\psi^k\} & \cdots & \{x^{2n},\psi^k\} \\ \{\psi^1,x^{k+1}\} & \cdots & \{\psi^k,x^{k+1}\} & \{x^{k+1},x^{k+1}\} & \cdots & \{x^{2n},x^{k+1}\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1,x^{2n}\} & \cdots & \{\psi^k,x^{2n}\} & \{x^{k+1},x^{2n}\} & \cdots & \{x^{2n},x^{2n}\} \end{pmatrix}$$

No entanto,

$$\{x^i, \psi^j\} = dx^i(X_{\psi^j}) = 0$$
$$\{\psi^j, x^i\} = d\psi^j(X_{x^i}) = 0$$

se os covetores dx^i e $d\psi^j$ são de fato a base dual de X_{x^i}, X_{ψ^j}. Se isso for certo, podemos escrever a matriz representada acima como

$$\left(\begin{array}{c|c} \{\psi^i,\psi^j\} & 0 \\ \hline 0 & \{x^i,x^j\} \end{array}\right),$$

cujo determinante é o produto dos determinantes das matrizes de bloco não zero. Algo neste argumento não funcionona, pois o determinante da matriz $\{x^i, x^j\}$ pode ser zero se $k = n$ e tomamos uma carta coordenada de Darboux. Perguntei no StackExchange, mas sem resposta por enquanto.

Para a última parte do exercício suponha por enquanto que dadas as projeções

$$\begin{tikzcd} & TM|_N = TN \oplus TN^\omega \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ TN & & TN^\omega \end{tikzcd}$$

é verdade que

$$X_f = q_1(X_{\tilde{f}}), \qquad q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y) c_{ij} X_{\psi^j}.$$

Então, (para facilitar leitura não escrevo a resitrição à N, mas isso só tem sentido em N)

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} &= \omega(X_{\tilde{f}}, X_{\tilde{g}}) \\ &= \omega(q_1(X_{\tilde{f}}), q_1(X_{\tilde{g}})) + \omega(q_1(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &+ \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_1(X_{\tilde{g}})) + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &= \omega(X_f, X_g) + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &= \{f, g\}_N + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \end{aligned}$$

para calcular o último termo notamos que

$$q_2(X_{\tilde f}) = \sum_{i,j} d\psi^i(X_{\tilde f})c_{ij}X_{\psi^j} \qquad q_2(X_{\tilde g}) = \sum_{k,\ell} d\psi^k(X_{\tilde g})c_{k\ell}X_{\psi^\ell}$$
$$= \sum_{ij} -\{\tilde f, \psi^i\}c_{ij}X_{\psi^j} \qquad = \sum_{k,\ell}\{\psi^k, \tilde g\}c_{k\ell}X_{\psi^\ell}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\omega(q_2(X_{\tilde f}), q_2(X_{\tilde g})) &= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde f, \psi^i\}c_{ij}\{\psi^k, \tilde g\}c_{k\ell}\omega(X_{\psi^j}, X_{\psi^\ell}) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde f, \psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{k\ell}\{\psi^k, \tilde g\} \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} \{\tilde f, \psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{\ell k}\{\psi^k, \tilde g\} \\ &= \sum_{i,k}\{\tilde f, \psi^i\}c_{ik}\{\psi^k, \tilde g\}\end{aligned}$$

usando que a $c_{\ell k} = -c_{k\ell}$ por ser uma matriz antisimétrica. Com isso seria demonstrado o exercício.

O fato de que $X_f = q_1(X_{\tilde f})$ segue de que tanto M quanto N são variedades simpléticas, de modo que existe um único campo vetorial associado à $df = d\tilde f|_N$ em N.

A falta de uma prova rigurosa, a equação $q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y)c_{ij}X_{\psi^j}$ é simplesmente a expresão em coordenadas de Y na base de vetores Hamiltonianos X_{ψ^j} do espaço TN^ω. □

Problem 3 Let $D \subseteq TM$ be a vector subbundle, and let $\mathrm{Ann}(D) \subseteq T^*M$ be its annihilator. Show that D is involutive iff $\mathrm{Ann}(D)$ is a coisotropic submanifold of T^*M.

Solution. For the implication $\Longrightarrow$ we use Frobenius theorem to obtain an integral manifold of D, which means that $\mathrm{Ann}(D)$ is just the conormal bundle of such a manifold. We have seen in class that the conormal bundle of any manifold is a lagrangian submanifold of the cotangent bundle, so in particular it is coisotropic.

Para a implicação $\Longleftarrow$ proponho o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccc} D \subset TM & \longrightarrow & \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(D)) \subset T^*(T^*M) & \xrightarrow{\omega^\sharp} & \mathrm{Ann}(D)^\omega \subset T(T^*M) \\ X & \longmapsto & \begin{array}{c} X^* : T^*M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \eta \longmapsto \eta(X) \end{array} & \longmapsto & \omega^\sharp(X^*) \end{array}$$

Por um argumento análogo ao Problema 2a, sabemos que $\mathrm{Ann}(D)^\omega$ está generado pelas diferenciais de funções que se anulam em $\mathrm{Ann}(D)$. Isso significa que $\omega^\sharp X^*$ é uma combinação linear de campos Hamiltonianos X_f com $f|_{\mathrm{Ann}(D)} = 0$, digamos $X = \sum_i X_{f_i}$.

Como $\mathrm{Ann}(D)$ é coisotrópica, o colchete de Poisson de duas funções que se anulam em $\mathrm{Ann}(D)$ é zero (isso também é análogo ao Problema 2a). Segue que, para $X, Y \in D$,

$$\begin{aligned}
[\omega^\sharp X^*, \omega^\sharp Y^*]_{T(T^*M)} &= \left[\sum_i X_{f_i}, \sum_j X_{g_j}\right]_{T(T^*M)} \\
&= \sum_{i,j} [X_{f_i}, X_{g_j}]_{T(T^*M)} \\
&= -\sum_{i,j} X_{\{f_i, g_j\}} \\
&= -\sum_{i,j} X_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos restringir o colchete $[\cdot,\cdot]_{T(T^*M)}$ à D vendo D como subvariedade de T^*M na seção zero. Isso implica que de fato o colchete de Lie em D é zero.

$\square$

Problem 4 Consider a smooth map $\phi : Q_1 \to Q_2$, and let

$$R_\phi := \{((x,\xi),(y,\eta)) : y = \phi(x),\ \xi = (T\phi)^*\eta\} \subset T^*Q_1 \times T^*Q_2.$$

Verify that R_ϕ is a lagrangian submanifold of $T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$. Whenever ϕ is a diffeo, what is the relation between R_ϕ and the cotangent lift $\hat{\phi}$?

Denote by $\Gamma_\phi \subset Q_1 \times Q_2$ the graph of ϕ. What is the relation between N^*T_ϕ (the conormal bundle of Γ_ϕ) and R_ϕ?

Solution. A notação $(T\phi)^*$ é um pouco confusa, mas terminhei por interpreta-lá como simplesmente a precomposição, ie. $(T\phi)^* = \phi \circ T\phi$, ou seja, o pullback usual ϕ^*. Daí, é fácil ver que se ϕ é um difeomorfismo, R_ϕ é justamente o grafo do pullback

$$\begin{aligned}
\phi^* : T^*Q_2 &\longrightarrow T^*Q_1 \\
(\phi(x), \eta) &\longmapsto (x, \phi^*\eta)
\end{aligned}$$

que por definição é o inverso do levantamento cotangente de ϕ. Porém, se ϕ não é injetiva, esse mapa não está bem definido. Mas ainda, parece que R_ϕ é lagrangiana além disso. É facil ver que a dimensão de R_ϕ é a metade do espaço ambiente, já que está parametrizado por pares $(x,\eta) \in Q_1 \times T^*Q_2$. Isso significa que a dimensão dele é $\dim Q_1 + \dim Q_2 = \frac{1}{2}\dim(T^*Q_1 \times T^*Q_2)$. Para comprovar que é um subvariedade lagrangiana basta ver que o mergulho $\gamma : R^\phi \hookrightarrow T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$ puxa a forma canónica em zero (ie. é isotrópica).

(Ver StackExchange.)A forma canónica em $T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$ é $\omega := \mathrm{pr}_1^*\,\omega_1 - \mathrm{pr}_2^*\,\omega_2$ onde ω_1, ω_2 são as formas canónicas nos fibrados cotangentes. Queremos ver que $\gamma^*\omega = 0$.

Temos que:

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega &= \gamma^*(\mathrm{pr}_1^*\,\omega_1 - \mathrm{pr}_2^*\,\omega_2)\\ &= (\mathrm{pr}_1\circ\gamma)^*\omega_1 - (\mathrm{pr}_2\circ\gamma)^*\omega_2\\ &= \sum_i dx^i \wedge d((T\phi)^*\eta) - d\phi \wedge d\eta^i\end{aligned}$$

e isso deve dar zero. Não fiquei muito seguro de por que, mas a idea e assim: quando derivamos o termo que inclui $(T\phi)^*$ vira uma soma de dois termos, um dos quais se cancela com $d\phi \wedge d\eta^i$, e o outro é zero por antisimetría.

Por último vejamos a relação de R_ϕ com o anulador $N^*\Gamma_\phi$:

$$N^*\Gamma_\phi = \{\big((x,\xi),(y,\eta)\big) \in T^*Q_1 \times T^*Q_2 \cong T^*(Q_1 \times Q_2) : \text{se anula em } T_{(x,\phi(x))}\Gamma_\phi\}$$

Agora note que o espaço tangente $T_{(x,\phi(x))}\Gamma_\phi$ está generado por pares de vetores da forma $\frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}$. Isso segue simplesmente do fato de que em coordenadas locais, os vetores canónicos são as derivadas de curvas $(x_i, \phi(x_i))$. Então, um elemento $\big((x,\xi),(y,\eta)\big)$ em $N^*\Gamma_\phi$ deve satisfacer que quando $y = \phi(x)$, essas formas se anulan no subespaço tangente generado por $\frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}$. Em símbolos:

$$\begin{aligned} 0 &= \xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \eta\left(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\ \iff \quad \xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= -\eta\left(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\ \iff \quad \xi &= -(T\phi)^*\eta\end{aligned}$$

notando que a reflexão $(T\phi)^*\eta \mapsto -(T\phi)^*\eta$ é um simplectomorfismo, vemos que $N^*\Gamma_\phi$ de fato é simplectomorfo à R_ϕ. $\square$