# Geometria simplética

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e Tong, Lectures on Classical Mechanics.

## 1 Aula 1

### 1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geométrica da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descripções da mecânica clásica:
  - Newtoniano: $F = ma$, ecuação diferencial ordinária de segunda ordem.
  - Lagrangiano: princípio gravitacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
  - Hamiltoniano.

### 1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$ (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$.
- Campo Hamiltoniano: $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$$

  Which coincides with Lee's formula

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)),$$
$$\dot{y}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t))$$

  where Lee defined the ***Hamiltonian vector field*** as the *analogue of the gradient with respect to the symplectic form*, that is, satisfying $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$ for any vector field $Y$.

Also look at Tong's formulation:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

where L is the Lagrangian and the Hamiltonian function H is obtained as the Legendre transform of the Langrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the $n$ $2^{\text{nd}}$ order differential equations by $2n$ $1^{\text{st}}$ order differential equations for $q_i$ and $p_i$.

> In practice, for solving problems, this isn't particularly helful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

## 1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de $X_H$, ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as ***Equações de Hamilton*** (de novo).

**Exemplo.** Partícula de massa $m$ em $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$ sujeita a campo de força conservativa

$$F = -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3$$
$$q(t) = (q_1, q_2, q_3)$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaçode fase $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$.
- Hamiltoniano: $H(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \overset{-J_0\nabla H}{\rightsquigarrow} X_H$$

where $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of $H$ and then applying $J_0$. So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo $\nabla H$ e $X_H$ : taxa de variação de $H$ ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais? Tal vez é a derivada exterior de $H$, $dH$ em lugar do gradiente de $H$.

- ***Fluxo gradiente***

$$\begin{aligned} c'(t) &= \nabla H(c(t)) \\ \frac{d}{dt}H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t)\rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2 \end{aligned}$$

  $\nabla H$ aponta na direção que $H$ variação.

- ***Fluxo hamiltoniano***

$$\begin{aligned} c'(t) &= X_H(c(t)) \\ \frac{d}{dt}H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t)\rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0\nabla H(c(t))\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

  ?, $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$.

- ***Gradiente.*** $\nabla H(x) \in T_x\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

  onde $g_0$ é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

  assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

  Analogamente, $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$ é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \qquad \Omega_0(u, v) = -dJ_0V,$$

  ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

**Observação.** Note que $\Omega_q$ define uma 2-forma (c. . . ?) em $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$.

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

$X_H$ é único tal que $i_{X_H}\omega_0 = dH$. So this was Lee's definition ◡̈.

**Definição** (temporária). Uma ***variedade simplética*** é $(M, \omega)$, $\omega \in \Omega^2(M)$ localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$.

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva $\omega$ em $\sum_i dq_i \wedge dp_i$.

**Teorema** (de Darboux, em Lee). Let $(M, \omega)$ be a $2n$-dimensional symplectic manifold. For any $p \in M$ there are smooth coordinates $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ centered at $p$ in which $\omega$ has the coordinate representation $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$.

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.

$$\begin{tikzcd}
\text{mecânica clásica} \arrow[r, "\text{quântica}"] \arrow[dr] & \text{Teoria de rep. de Lie} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{geo. Riemanniana} \arrow[dl] \\
& \text{geo. simplética} \arrow[dl, bend right] \arrow[d] & \\
\text{geo. Kähler} & \text{dinámica Lagrangiana?} &
\end{tikzcd}$$

## 1.4 Álgebra linear simplética

$V$ espaço vetorial real, $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilinea ansimétrica, i.e. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$.

**Definição.** $\Omega$ é não degenerada se $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$.

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero $v \in V$ there exists $w \in V$ such that $\omega(v, w) \neq 0$; and it is equivalent to the linear map $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$ being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix $(\omega_{ij})$ representing $\omega$ is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0 \ \forall v\}$$

então $\Omega$ é não degenerada se e somente se $\ker(\Omega) = \{0\}$.

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada é chamada simplética. $(V, \Omega)$ é um ***espaço vectorial simplético***.

**Observação.**

1. $\{e_1, .., e_n\}$ base de $V$, $\Omega$ é representado por uma matriz antisimétrica

$$A = (A_{ij}), \qquad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \qquad \Omega(u, v) = u^t A, v.$$

2. $\Omega$ é não degenerada se e somente se $\det(A) \neq 0$.

   Note que

$$\begin{aligned} \det A = \det A^t = \det(-A) &= (-1)^{\dim V} \det(A) \\ \text{implica que} \quad \det A \neq 0 &\implies m = \dim V = 2n \end{aligned}$$

3. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$. Defina

$$\begin{aligned} \Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

   note que $\ker \Omega = \ker(\Omega^\flat)$, assim $\Omega$ é não degenerada se e somente se $\Omega^\flat$ é isomorfismo.

# 2 Aula 2

## 2.1 Subespaços de evs

Sejam $(V, \Omega)$ evs e $V \subseteq V$ subespaço.

**Definição.**

$$W^\Omega := \{u \in |\Omega(u, w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

Considere a restrição de $\Omega$ à W:

$$i : W \hookrightarrow V \qquad i^*\Omega(\Omega|_W \in \Lambda_2 W^*,$$

então

$$\ker(\Omega|_W) = \{w \in W | \Omega(w, w') = 0 \ \forall w' \in W\} = W \cap W^\Omega$$

Casos de interesse:

- ***Isotrópico***: $W \subseteq W^\Omega$ ( $\iff \Omega|_W \equiv 0$).
- ***Coisotrópico***: $W^\Omega \subseteq W$.
- ***Lagrangiano***: $W = W^\Omega$.
- ***Simplético***: $W \cap W^\Omega = \{0\}$ ($\Omega|_W$ é não degenerado (=simplético)).

**Lema.** $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$.

*Demostração.*

$$\begin{aligned} \Omega^1 : V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

Note que $W^\Omega \mapsto \mathrm{Ann}(W)$, assim

$$\dim W + \dim \mathrm{Ann}(W)' = \dim V$$

□

**Observação.**

- $W \subseteq V$ subespaço simplético se e somente se $V = W \oplus W^{\Omega}$.
- $W$ isotrópico $\implies \dim W \leqslant \frac{\dim V}{2}$.
- $W$ coisotrópico $\implies \dim W \geqslant \frac{\dim V}{2}$.
- $W$ Lagrangiano se $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

De fato, $W$ é Lagrangiano se e somente se $W$ é isotrópico e $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

**Exercício.**

- $(W^{\Omega})^{\Omega} = \Omega$ ($W$ isotrópico se e somente se $W^{\Omega}$).
- $(W_1 \cap W_2)^{\Omega} = W_1^{\Omega} + W_2^{\Omega}$.

**Exemplo.**

- Subespaços de dimensão 1 são isotrópicos (subespaços de codimensão 1 são coisotrópicos).
- $V = V \oplus W^*$, onde $V$ tem a forma $\Omega_{can?}$ e $W$ e $W^*$ são Lagrangianos.
- $\mathbb{R}^{2n}$, $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ base simplética, então $\operatorname{span}\{e_i, f_i\}$ é simplético, e $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ é isotrópico (se $k = n$ é Lagrangiano).
- $(V_1, \Omega_1)$ e $(V_2, \Omega_2)$ evs's, $T : V_1 \to V_2$ isometría linear, $\operatorname{graf}(T) := \{(u, Tu) : u \in V_1\} \subseteq V_1 \times V_2$. $T$ é simplectomorfismo se e somente se $\operatorname{graf}(T)$ é um subespaço Lagrangiano em $V_1 \times V_2$.
- $\dim \operatorname{graf}(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2}\dim(V_1 \times V_2)$.
- $\Omega_{V_1 \times \tilde{V}_2}((u, Tu), (v, Tv)) = \Omega(u, v) - \underbrace{\Omega_2(Tu, Tv)}_{=T^*\Omega_2(u,v)}$ $(= 0 \iff \Omega_1 = T^*\Omega_2)$.

**Teorema** (Existência das bases simpléticas). Para cualquer $(V, \Omega)$ evs existe uma base simplética.

*Demostração.* Seja $e_1 \in V \setminus \{0\}$. Como $\Omega$ é não degenerada, existe $f_1 \in V$ tal que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Considere $W_1 = \operatorname{span}\{e_1, f_1\}$. Então $\Omega|_{W_1}$ é não degenerado (ie. $W_1$ é simplético), o que acontece se e somente se $V = W_1 \oplus W_1^{\Omega}$. Assim, existem $e_2 \neq 0$ in $W_1^{\Omega}$ e $f_2 \in W_1^{\Omega}$ tal que $\Omega(e_2, f_2) = 1$, etc... $(V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n)$. O conjunto $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base simplética. $\square$

**Exercício.** $V$ ev de dimensão $2n$ e $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada se e somente se $\Omega^n = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega \in \Lambda^{2n} V^* \neq 0$.

## 2.2 Equivalência entre ev's simpléticos

$(V, \Omega)$ e $(V', \Omega')$ são ***equivalentes*** se existe um ***simplectomorfismo*** linear $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ (isometría linear) tal que

$$\varphi^*\Omega' = \Omega \in \Lambda^2 V^*$$

onde

$$\varphi^*\Omega'(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Dado $(V, \Omega)$ evs, definimos

$$Sp(V) := \{T \in GL(V) | T^*\Omega = \Omega\}$$

**Exemplo.**

1. $V = \mathbb{R}^{2n}$, $\Omega_0(u, v) = -u^T J_0 v$ onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, com base canônica $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$. Temos

$$\begin{cases} \Omega_0(e_i, e_j) = 0 \\ \Omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \Omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

   **Definição.** Uma base de $(V, \Omega)$ satisfazendo eq. (1) é chamada ***base simplética***.

   Following Lee, Example. 22.2, the condition may be that $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \wedge \beta^i$ where $\alpha^i$ and $\beta^i$ are just the dual basis covectors of the base $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}$ of V.

   **Observação.** Escolher/Achar uma base simplética é equivalente à escolher/achar um simplectomorfismo

$$(V, \Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$$

2. $W$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, sejam $V = W \oplus W^*$, $w, w \in W$ e $\alpha, \alpha \in W^*$

$$\Omega_?((w, \alpha), (w', \alpha')) := \alpha'(w) - \alpha(w')$$

   é não degenerada e anti-simétrica. Assim,

$$(W \oplus W^*, \Omega_?)$$

   é um espaço vetorial simplético.

   **Observação.** Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base simplética de $W$ e $\{f_1, \ldots f_n\}$ é a base dual de $W^*$, então

$$(W \oplus W^*, \Omega_? \cong (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0).$$

Note que ainda que dado

$$A : W \xrightarrow{\sim} W$$

automorfismo ?,

$$T_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} : W \oplus W^* \to W \oplus W^*$$

é simplectomorfismo, ($T_A = A \oplus (A^*)^{-1}$ ).

**Moral:** $\mathrm{GL}(W) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(W \oplus W^*)$

$$\mathsf{EV} \overset{\text{funtor}}{\rightsquigarrow} \mathsf{EVS}$$
$$A \circlearrowleft W \longmapsto W \oplus W^* \circlearrowright T_A$$

3. V ev sobre $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} = n$, com produto interno hermitiano

$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$

i.e. satisfazendo

(a) $h(u, \lambda v) = \lambda h(u, v)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

(b) $h(u, v) = \overline{h(v, w)}$,

(c) $h(u, u) > 0\ \forall u \neq 0$,

pode ser escrito como

$$h(u, v) = g(u, v) + i\Omega(u, v)$$

Agora considere V como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (de dimensão $2n$ ).

**Exercício.**

- $g$ é produto interno positivo definido.
- $\Omega$ é antisimétrica, não degenerada (simplética).
- Ache uma base de V (dica: extensão de base ortonormal de $h\ldots$)
- $U(n) \subset SP(V, \Omega)$.

4. Produto direto: $(V_1, \Omega_1)$, $(V_2, \Omega_2)$ espaços vetoriais.

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ V_1 & & V_2 \end{tikzcd}$$

Tem a forma simplética é o pullback:

$$\Omega := \pi_1^*\Omega_1 + \pi_2^*\Omega_2$$

ou seja,

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2),$$

que é não degenerado e antsimétrico também.

**Notação:** se $(V, \Omega)$ é um espaço vetorial simplético, denotamos por $(V, -\Omega) := \bar{V}$, que também é um evs.

# 3 Aula 3

# 4 Aula 4

# 5 Aula 5

Lembranza da última aula:

1. Definição de variedade simplética.
2. Pelo menos dois exemplos.
3. Forma de volume/orientabilidade.
4. Campos simpléticos/campos hamiltonianos.
5. Obstrução cohomológica de para estrutura simplética.

**Hoje:** Fibrados cotangentes.

Seja $Q$ uma variedade e $M := T^*Q$ o fibrado cotangente.

**Lembrando** Se $Q$ é uma variedade, $x \in Q$. O ***espaço tangente*** em $x$ são derivações ou clases de equivalencia de curvas... base local do espa ço tangente $\partial_{x_i}$...base dual disso é base do espaço cotangente nesse ponto... o fibrado cotangente $\bigsqcup_{x \in Q} T_x^*Q$ é variedade suave.

O fibrado cotangente possui uma 1-forma tautológica definida assim:

**Definição.** $\alpha \in \Omega^1(M)$, onde $M := T^*Q$, dada por

$$\alpha_p(X) = p(\pi_*(X))$$

ou seja, como X é tangente ao fibrado cotangente, ele está anclado a algum covetor, assim a gente pode evaluar ele no covector. Também pode ser pensado como o pullback de um covector em Q baixo a projeção cotangente usual.

Em coordenadas locais $(x_1, ...,$

**Exercício.**

1. A 1-forma tautológica $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$ é a única 1-forma satisfazendo

$$\forall \mu \in \Omega^1(Q), \qquad \mu^*\alpha = \mu$$

onde pensamos a $\mu$ do lado izquerdo como um mapa $\mu : Q \to T^*Q$, ie. uma seç ão do fibrado cotangente, e do lado direito simplesmente como uma 1-corma em $Q$.

**Definição.** $M = T^*Q$, $\alpha \in \Omega^1(M)$ então a ***forma simplética canónica*** de $T^*Q$ é

$$\omega_{can} = -d\alpha$$

**Observação.**

- $d\omega_{can} = -d^2\alpha = 0$.
- Formalmente $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$

Assim, temos uma variedade simplética canónica associada a toda variedade, $(T^*Q, \omega_{can}$.

**Observação.**

- Dado $B \in \Omega^2(Q)$ com $dB = 0$, a forma

$$\omega_B \omega_{can} + \pi^*B$$

  é simplética e o termo $\pi^*B$ se chama de ***magnético***.
- Se $Q$ é Riemanniana com métrica $g$ temos o mapa induzido

$$\begin{aligned} g^\sharp : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ u &\longmapsto g(u, \cdot) \end{aligned}$$

  Assim, o pullback the $\omega_{can}$ é uma forma simplética em $TQ$.

  Al ém disso, a métrica nos fornece de uma função Hamiltoniana dada por $H \in C^\infty(TQ)$, $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$.

  Veremos que o fluxo Hamiltoniano de $H$ em $(TQ, \omega)$ é fluxo geodésico em $Q$.

  Tem dois generalizações naturais:
  - $\bar{H}(v) = \frac{1}{2}g(u, v) + V(x)$ com $V \in C^\infty(Q)$, mecânica clásica.
  - $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ com respeito a $\omega_B$.

**Pergunta** (Projeto?). Existência de órbitas periódicas em níveis de energia?

**Definição.** O ***levantamiento cotangente*** de um difeomorfismo (na mesma direção do difeomorfismo) é $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$ é $\hat{\varphi} = ((T\varphi)^*)^{-1}$.

**Pergunta.** Preserva a forma canónica?

**Proposicição.** Sim. $\hat{\varphi} : T^*Q_1 \to T^*Q_2$ satisfaz $\hat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1$ onde $\alpha_i$ é a forma tautológica, para $i = 1, 2$. Isso implica que $\hat{\varphi}^*\omega_2 = \omega_1$.

Isso implica que temos um funtor $Q \rightsquigarrow T^*Q$ que se chama de ***funtor cotagente*** e permite levar problemas de geometria diferencial para a geometria simpl ética.

*Demostração.*

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & T^*Q_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array}$$

A clave dessa prova é que o diagrama commuta, assim pode se-trocar um termo $\pi_2 \circ \hat{\varphi}$ por $\varphi \circ \pi_1$. □

O funtor que produzimos $\mathrm{Dif}(Q) \hookrightarrow \mathrm{Simp}(T^*Q$ não e fiel (surjetivo), ie. existem simplectomorfismos no fibrado cotangente que não vem de difeomorfismos na variedade.

**Observação.** Dada uma 1-forma $A \in \Omega^1$. Pode se-produzir um mapa no cotangente simplesmente trasladando por $A$:

$$\begin{aligned} T_A : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, \xi + A_x) \end{aligned}$$

que não pode ser um levantamento porque se projecta na identidade!

**Exercício.** $T_A$ é um simplectomofrismo $\iff$ $dA = 0$.

Mas, como sabemos quais simplectomorfismos no cotangente são sim levantamentos de difeomorfismos na variedade?

**Exercício.** Seja $F : T^*Q \to T^*Q$ um simplectomorfismo. Quando $F = \hat{\varphi}$ é levantamento de algum $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} Q$. Pois, isso acontece $\iff$ $F$ preserva a forma tautológica, ie. $F^*\alpha = \alpha$.

**Observação.** Levantamento cotangente de campos de vetores. Começa com um campo $X \in \mathfrak{X}(Q)$, integra para obter um fluxo $\varphi_t$, que é uma família de difeomorfismos na variedade, você sabe levantar isso com o funtor obtendo outro fluxo (porque levantamento de fluxo é fluxo) $\hat{\varphi}_t$, e diferenciando obtém $\hat{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$.

**Observação.** Para cualquer fibrado vetorial $E \to M$, podemos ver a seções $\Gamma(E)$ como um subconjunto das fun ções suaves na variedade $C^\infty(E)$—são as funções lineares nas fibras. Aí tem um modo natural de definir para cualquer campo vetorial $X \in \Gamma(TQ) \subseteq C^\infty(T^*Q)$ uma função, $H_X(p) = p(X_{\pi(p)} = \alpha(\hat{X})$.

**Proposicição.** $\hat{X} =$ campo Hamiltoniano de $H_X$.