

Lista 3

Problem 5 Let M be a manifold and $\omega \in \Omega^k(M)$. Suppose that $\pi : M \rightarrow B$ is a surjective submersion with connected fibers. We say that ω is *basic* (with respect to π) if there exists a form $\bar{\omega} \in \Omega^k(B)$ such that $\pi^*\bar{\omega} = \omega$.

- Show that ω is basic iff $i_X\omega = 0$ and $\mathcal{L}_X\omega = 0$ for all vector fields X tangent to the fibers of π . In particular, if ω is closed, show that it is basic if $\ker(T\pi) \subseteq \ker \omega$ (pointwise in M).
- Suppose that ω is a closed 2-form on M and $\ker(T\pi) = \ker \omega$. Show that $\omega = \pi^*\bar{\omega}$ and $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$ is symplectic.
-

Solution.

- Primeiro note que se X é tangente às fibras de π , a projeção de X é zero já que o espaço tangente a um ponto é vazio. Daí a implicação \implies é imediata.

Para \Leftarrow vamos provar primeiro localmente

(Ver [StackExchange](#)) Para \Leftarrow o mais natural é definir uma forma em B como

$$\bar{\omega}(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_k) := \omega(X_1, \dots, X_k)$$

assim o pullback dela está dado por

$$\pi^*\bar{\omega}(X_1, \dots, X_n) = \omega(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_n)$$

mais não é imediato para mim que isso faz sentido, pois devo comprovar todo campo vetorial em B pode ser visto como o pushforward de um campo vetorial em

(Ver [StackExchange](#)) Para \Leftarrow defina uma forma $\bar{\omega} \in \Omega^k(B)$ usando que a derivada de π é surjetiva em todo ponto de M da seguinte forma:

$$\bar{\omega}(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_k) := \omega(X_1, \dots, X_k)$$

Devemos mostrar que $\bar{\omega}$ está bem definida.

- $\pi_*X_1 = \pi_*X'_1 \implies \omega(X_1, X_2, \dots, X_k) = \omega(X'_1, X_2, \dots, X_k).$

Isso segue de que

□