Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 4

Contents

Problema 1 Let M be a compact, connected, orientable n-dimensional manifold. Let $\Lambda_0, \Lambda_1 \in \Omega^n(M)$ be two volume forms on M such that $\int_M \Lambda_0 = \int_M \Lambda_1$. Show that there is a diffeomorphism $\phi \in \mathrm{Dif}(M)$ such that $\phi^*(\Lambda_1) = \Lambda_0$.

Solução. Aqui sigo as definições em Lee, p. 380. Como M é orientada, em cada ponto podemos pegar um marco orientado (i.e. que em cada ponto pertence à clase de equivalencia dada pela orientação) $E_1, \dots, E_n$ tal que as formas Λ_0 e Λ_1 são sempre positivas ou sempre negativas. Mas ainda, como $\int_M \Lambda_0 = \int_M \Lambda_1 > 0$,

$$\Lambda_0(E_1, \dots, E_0), \Lambda(E_1, \dots, E_n) > 0$$

para qualquer marco orientado. Daí é claro que $\Lambda_t(E_1, \dots, E_n) > 0$, de modo que Λ_t não pode ser a forma zero em nenhum ponto de M, i.e. é uma forma de volumen.

Para ver que $[\Lambda_0] = [\Lambda_1]$ lembre que $H^n(M)$ tem dimensão 1. Daí existe um escalar α tal que $[\Lambda_0] = \alpha[\Lambda_1]$. Mas, como a integral está bem definida em classes de cohomologia, $\int_M [\Lambda_0] = \int_M [\Lambda_1] \implies \alpha = 1$.

Esse argumento pode ser usado direitamente em $\Omega^n(M)$ em lugar de $H^n(M)$, concluindo que $\Lambda_0 = \Lambda_1$. Mas acho que isso nem sempre é verdade.

Para concluir só devemos aplicar o Método de Moser. Já temos uma família de formas cohomologas, assim existe uma isotopía φ_t tal que $\varphi_t^* \Lambda_t = \Lambda_0$. Pegando $t = 1$ obtemos o difeomorfismo buscado. □

Problem 2 Give an example of two symplectic forms on $\mathbb{R}^4$ that induce the same orientation, but admit a convex combination that is degenerate. Is it possible to find an example like that, but admitting another of *symplectic* forms from one to the other? What happens if we consider $\mathbb{R}^2$ instead of $\mathbb{R}^4$?

Solução. (See StackExchange. Here can also be found a nice general explanation of this problem where degenerate forms are seen as a hypersurface in the space of 2-forms.) Lembre que no problema 1 da lista 1 vimos que uma 2-forma ω é não degenerada se é só se $\omega^n \neq 0$. No nosso caso, qualquer 2-forma em $\mathbb{R}^4$ pode ser expressada como

$$\omega = \alpha\, dx \wedge dy + \beta\, dx \wedge dz + \gamma\, dx \wedge dw + \delta\, dy \wedge dz + \varepsilon\, dy \wedge dw + \phi\, dz \wedge dw\,.$$

Daí,

$$\omega \wedge \omega = 2F\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw$$

onde $F = \alpha\phi - \beta\varepsilon + \gamma\delta$ (vou fazer essa conta num caso análogo abaixo). Segue que ω é não degenerada se e só se $F \neq 0$. (Então as formas degeneradas são a conica $F = 0$)

Nosso primeiro problema é achar ω_0 e ω_1 tais que as suas funções associadas como acima, F_1 e F_2, sejam não-zero, mas que exista uma combinação convexa delas ω_t cuja função F_t sim seja zero. Note que se $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$,

$$\begin{aligned}
\omega_t \wedge \omega_t &= \Big((1-t)\omega_0 + t\omega_1\Big) \wedge \Big((1-t)\omega_0 + t\omega_1\Big) \\
&= (1-t)^2\omega_0 \wedge \omega_0 + t(1-t)\Big(\omega_0 \wedge \omega_1 + \omega_1 \wedge \omega_0\Big) + t^2\omega_1 \wedge \omega_1 \\
&= (1-t)^2\omega_0 \wedge \omega_0 + \Big(2t(1-t)\Big)\omega_0 \wedge \omega_1 + t^2\omega_1 \wedge \omega_1
\end{aligned}$$

de forma que estamos interessados em calcular $\omega_0 \wedge \omega_1$:

$$\begin{aligned}
&\omega_0 \wedge \omega_1 \\
&= \Big(\alpha_1\, dx \wedge dy + \beta_1\, dx \wedge dz + \gamma_1\, dx \wedge dw + \delta_1\, dy \wedge dz + \varepsilon_1\, dy \wedge dw + \phi_1\, dz \wedge dw\Big) \\
&\wedge \Big(\alpha_2\, dx \wedge dy + \beta_2\, dx \wedge dz + \gamma_2\, dx \wedge dw + \delta_2\, dy \wedge dz + \varepsilon_2\, dy \wedge dw + \phi_2\, dz \wedge dw\Big) \\
&= 2\alpha_1\phi_2 dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw + \ 2\beta_1\varepsilon_2 dx \wedge dz \wedge dy \wedge dw + \ 2\gamma_1\delta_2 dx \wedge dw \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

de forma que

$$\omega_0 \wedge \omega_1 = 2\Big(\alpha_1\phi_2 - \beta_1\varepsilon_2 + \gamma_1\delta_2\Big) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw$$

Então pegue $\alpha_1 = \alpha_2 = \phi_1 = \phi_2 = \beta_1 = \gamma_2 = 1$ e o resto zero. Obtemos

$$\omega_t \wedge \omega_t = 2\left(2(1-t)^2 + 2\right)$$

The best proof that there exists a path of symplectic forms joining ω_0 to ω_1 consists in showing that the hypersurface $[F = 0]$ separates $\mathbb{R}^4$ into two connected components given by $[F > 0]$ and $F < 0$ (which is proved in StackEchange). Then showing that there is a path joining ω_0 and ω_1 ammounts to showing that they belong to the same connected component, i.e. F_i is positive or negative for both $i = 1, 2$, which is indeed the case since we have $F_1 = F_2 = 1$.

Para o nosso propósito basta achar notar o seguinte: os valores de β e γ não alteram a conta anterior, de modo que

$\square$

Problem 3 Let (V, Ω) be a symplectic vector space (or vector bundle) and let $W \subseteq V$ be a coisotropic subspace (or bundle).

a. Let E be a complement of W^Ω in W, i.e., $W = W^\Omega \oplus E$. Show that the restriction of Ω to E is nondegenerate.

b. Let J be a Ω-compatible complex structure, with g the associated inner product. Show that Ω induces an identification of $J(W^\Omega) = W^\perp$ with $(W^\Omega)^*$. Taking E as the orthogonal complement (with respect to g) to W^Ω in W (this means that $W = W^\Omega \oplus E$), show that the identification

$$V \cong E \oplus (W^\Omega \oplus (W^\Omega)^*),$$

is an isomorphism of symplectiv vector spaces (bundles)—on the right-hand-side, E is equipped with its induced symplectic form (see a. above) and $W^\Omega \oplus (W^\Omega)^*$ with its canonical symplectic form.

Solução.

a. Basta ver que $\ker \Omega|_E = 0$. Se $e \in \ker \Omega|_E$, então eu gostaria de ver que $e \in W^\Omega$. Seja $w \in W$. Enão $\Omega(e, w) = \Omega(e, w_1 + w_2)$ com $w_1 \in W^\Omega$ e $w_2 \in E$. Daí $\Omega(e, w) = \Omega(e, w_1)$. Se $e \in W$ acabamos. Se $e \notin W\ldots$

b. Considere o mapa

$$\begin{aligned} J(W^\Omega) &\longrightarrow (W^\Omega)^* \\ Jw &\longmapsto i_w\Omega = \Omega(w, \cdot) \end{aligned}$$

Note que $J(W^\Omega)$ e W^Ω são espaços vetorias de dimensões iguais, e que esse mapa tem kernel trivial pela não degeneração de Ω. Isso explica que é um isomorfismo.

$\square$