Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 3

Contents

Problem 1

Solution.

a. Ideia inicial: mostrar que uma base de T_x^*M é $df_1, \ldots, df_k, dx_{k+1}, \ldots, dx_{2n}$. Daí, toda $2n$-forma é um múltiplo de $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge d_{2n}$. Mas esse argumento não da porque a equação deve ser válida numa vizinhança de M_c.

   Segunda ideia: pegue um ponto $p \in \mathcal{U} \subset M$. Podemos completar $(df_1)_p, \ldots, (df_k)_p$ a uma base de T^*M. Também podemos extender essa base para uma vizinhança $p \in V \subset \mathcal{U}$ como segue: extenda os covectores a toda M usando uma função "quindim" (=bump function) que seja 1 num compacto perto de p. Daí, como os covectores são linearmente independentes em p, o determinante da função de coeficentes deles é não zero em p, mas como o determinante é contínuo, existe uma vizinhança de p onde é não zero. Defina $\tilde{\sigma}$ como o wedge product dos covectores que acabamos de const ruir.

   Essa prova não tá funcionando bem porque só definimos σ numa vizinhança do ponto p. Falta construir uma forma definida em todo $\mathcal{U}$.

b. Pela fórmula de Cartan,

$$df_1 \wedge \ldots df_k \wedge \mathcal{L}_{X_H} \sigma = df_1 \wedge \ldots df_k \wedge (i_{X_H} d\sigma + d(i_{X_H} \sigma))$$
$$=$$

□

Problem 2 Let M be a symplectic manifold, $\Psi = (\psi^1, \ldots, \psi^k) : M \to \mathbb{R}^k$ a smooth map, and c a regular value. Consider a submanifold $N = \Psi^{-1}(c) \hookrightarrow M$.

a. Show that N is coisotropic if and only if $\{\psi^i, \psi^j\}|_N = 0$ for all $i, j = 1, \ldots, k$.

b. Show that N is symplectic if and only if the matrix (c^{ij}), with $c^{ij} = \{\psi^i, \psi^j\}$, is invertible for all $x \in N$. In this case, verify that we have the following expression for the Poisson bracket $\{\cdot, \cdot\}_N$ on N (known as ***Dirac's bracket***):

$$\{f, g\}_N = \left(\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \sum_{ij} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} c_{ij} \{\psi^j, \tilde{g}\} \right) \Bigg|_N$$

where $(c_{ij}) = (c^{ij})^{-1}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, and $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ are arbitrary extensions of f and g.

Solution.

a. Since M is symplectic we have a bundle isomorphism

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ \nu &\longmapsto i_\nu \omega \end{aligned}$$

Then

$$TN^\omega = (\omega^\flat)^{-1}(\mathrm{Ann}(TN)).$$

Since M is the level set of a regular value, there are local coordinates of the form $(\psi^1, \ldots, \psi^k, x^{k+1}, \ldots, x^{2n})$. Vectors tangent to N are expressed only in terms of the vectors $\partial_{k+1}, \ldots, \partial_{2n}$ and thus covectors that vanish on TN are those which vanish on $\partial_{k+1}, \ldots, \partial_{2n}$. This means that a basis for Ann(TN) is given by $d\psi^1, \ldots, d\psi^k$ (an explanation of this might be that the canonical basic covectors for the coordinates ψ^i are the differentials $d\psi^i$, which maybe can be checked using the usual change of coordinates formula). These generators map to their hamiltonian vector fields under $(\omega^\flat)^{-1}$:

$$\left(\omega^\flat\right)^{-1} (d\psi^i) = X_{\psi^i}$$

So TN^ω is generated by the X_{ψ^i}. Notice that any vector $\nu \in TM$ is actually in TN iff $\alpha(\nu) = 0 \; \forall \alpha \in \mathrm{Ann}(TN)$. Then we see that

$$\begin{aligned} TN^\omega \subset TM &\iff X_{\psi^i} \in TN \quad i = 1, \ldots, k \\ &\iff d\psi^j(X_{\psi^i})|_N = 0 \quad i, j = 1, \ldots, k \\ &\iff \omega(X_{\psi^i}, X_{\psi^j})|_N = 0 \quad i, j = 1, \ldots, k \\ &\iff \{\psi^i, \psi^j\}|_N = 0 \quad i, j = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

b. Em qualquer sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^{2n})$, os vetores hamilatonianos $X_{x^1}, \ldots, X_{x^{2n}}$ formam uma base do espaço tangente. Nessa base, os coeficientes da matriz que representa ω são exatamente os colchetes de Poisson $\{x^i, x^j\}$. A forma ω é não degenerada se e somente se a sua matriz é invertível (já que nesse caso temos o isomofismo $\omega^\flat$ bem definido). Então, o que queremos é ver que a restrição $\omega|_N$ é invertível em cada ponto de N.

Nas coordenadas de subvariedade $(\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$, a matrix que representa $\omega^\flat$ é

$$\begin{pmatrix} \{\psi^1,\psi^1\} & \cdots & \{\psi^k,\psi^1\} & \{x^{k+1},\psi^1\} & \cdots & \{x^{2n},\psi^1\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1,\psi^k\} & \cdots & \{\psi^k,\psi^k\} & \{x^{k+1},\psi^k\} & \cdots & \{x^{2n},\psi^k\} \\ \{\psi^1,x^{k+1}\} & \cdots & \{\psi^k,x^{k+1}\} & \{x^{k+1},x^{k+1}\} & \cdots & \{x^{2n},x^{k+1}\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1,x^{2n}\} & \cdots & \{\psi^k,x^{2n}\} & \{x^{k+1},x^{2n}\} & \cdots & \{x^{2n},x^{2n}\} \end{pmatrix}$$

No entanto,

$$\{x^i, \psi^j\} = dx^i(X_{\psi^j}) = 0$$
$$\{\psi^j, x^i\} = d\psi^j(X_{x^i}) = 0$$

se os covetores dx^i e $d\psi^j$ são de fato a base dual de X_{x^i}, X_{ψ^j}. Se isso for certo, podemos escrever a matriz representada acima como

$$\left(\begin{array}{c|c} \{\psi^i,\psi^j\} & 0 \\ \hline 0 & \{x^i,x^j\} \end{array}\right),$$

cujo determinante é o produto dos determinantes das matrizes de bloco não zero. Infelizmente o determinante da matriz $\{x^i, x^j\}$ pode ser zero se $k = n$ e tomamos uma carta coordenada de Darboux. . .

Suponha por enquanto que dadas as projeções

$$\begin{tikzcd} & TM|_N = TN \oplus TN^\omega \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ TN & & TN^\omega \end{tikzcd}$$

é verdade que

$$X_f = q_1(X_{\tilde f}), \qquad q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y) c_{ij} X_{\psi^j}.$$

Então, (para facilitar leitura não escrevemos a resitrição a N, mas isso só tem sentido em N)

$$\begin{aligned} \{\tilde f, \tilde g\} &= \omega(X_{\tilde f}, X_{\tilde g}) \\ &= \omega(q_1(X_{\tilde f}), q_1(X_{\tilde g})) + \omega(q_1(X_{\tilde f}), q_2(X_{\tilde g})) \\ &\quad + \omega(q_2(X_{\tilde f}), q_1(X_{\tilde g})) + \omega(q_2(X_{\tilde f}), q_2(X_{\tilde g})) \\ &= \omega(X_f, X_g) + \omega(q_2(X_{\tilde f}), q_2(X_{\tilde g})) \\ &= \{f, g\}_N + \omega(q_2(X_{\tilde f}), q_2(X_{\tilde g})) \end{aligned}$$

para calcular o último termo notamos que

$$q_2(X_{\tilde{f}}) = \sum_{i,j} d\psi^i(X_{\tilde{f}})c_{ij}X_{\psi^j} \qquad\qquad q_2(X_{\tilde{g}}) = \sum_{k,\ell} d\psi^k(X_{\tilde{g}})c_{k\ell}X_{\psi^\ell}$$
$$= \sum_{ij} -\{\tilde{f},\psi^i\}c_{ij}X_{\psi^j} \qquad\qquad = \sum_{k,\ell}\{\psi^k,\tilde{g}\}c_{k\ell}X_{\psi^\ell}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) &= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde{f},\psi^i\}c_{ij}\{\psi^k,\tilde{g}\}c_{k\ell}\,\omega(X_{\psi^j}, X_{\psi^\ell}) \\
&= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde{f},\psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{k\ell}\{\psi^k,\tilde{g}\} \\
&= \sum_{i,j,k,\ell} \{\tilde{f},\psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{\ell k}\{\psi^k,\tilde{g}\} \\
&= \sum_{i,k}\{\tilde{f},\psi^i\}c_{ik}\{\psi^k,\tilde{g}\}
\end{aligned}$$

usando que a $c_{\ell k} = -c_{k\ell}$ por ser uma matriz antisimétrica. Com isso seria demonstrado o exercício.

O fato de que $X_f = q_1(X_{\tilde{f}})$ segue de que tanto M quanto N são variedades simpléticas, de modo que existe um único campo vetorial associado à $df = d\tilde{f}|_N$ em N.

A equação $q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y)c_{ij}X_{\psi^j}$ pode ser explicada como segue. Primeiro considere o caso simples do vetor $\frac{\partial}{\partial x^i} \in TM|_N$ para $i \leqslant k$ fixa. A mudança de coordenadas $\Psi \times \mathrm{id}_{2n-k} = (\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$ disse que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} V^j$$

onde V^j é o marco de campos vetorias associado as novas coordenadas. Qual é esse marco? Sabemos que uma base k kk

pegue um vetor tangente a M ancorado sobre N. Podemos expressá-lo em coordenadas locais:

$$TM|_N \ni Y = \sum_{i=1}^{k} Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^{2n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Daí,

$$Y = \sum_{i=1}^{k} Y^i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial}$$

□

Problem 3

Solution. By an analogue argument to Problem 2a we know that $\mathrm{Ann}(D)$ is a coisotropic submanifold iff $\{f, g\} = 0$ for all $f, g \in I_{\mathrm{Ann}(D)}$. Now a vector field X corresponds naturally to an element of the double dual $\xi \in T^*(T^*(M))$ given by $\xi\eta(X) = \eta(X)$ for $\eta \in T^*M$. Notice that if $X \in D$ then $\xi \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(D))$. □

Problem 4 Consider a smooth map $\phi : Q_1 \to Q_2$, and let

$$R_\phi := \{((x, \xi), (y, \eta)) : y = \phi(x),\ \xi = ((T\phi)^*\eta\} \subset T^*Q_1 \times T^*Q_2.$$

Verify that R_ϕ is a lagrangian submanifold of $T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$. Whenever ϕ is a diffeo, what is the relation between R_ϕ and the cotangent lift $\hat{\phi}$?

Denote by $\Gamma_\phi \subset Q_1 \times Q_2$ the graph of ϕ. What is the relation between N^*T_ϕ (the conormal bundle of Γ_ϕ) and R_ϕ?

Solution. Parece que o pullback $(T\phi)^*$ coincide com o pullback usual ϕ^*, pois o primeiro é só composição de funções enquanto o segundo é composição com a diferencial de ϕ.

Note que R_ϕ é o produto cartesiano dos grafos de ϕ e do seu pullback ϕ^* :

$$\begin{aligned}\Gamma_\phi &= \{(x, \phi(x)) : x \in Q_1\} \\ \Gamma_{\phi^*} &= \{(\phi^*\eta, \eta) : \eta \in T^*Q_2\}\end{aligned}$$

esses dois são variedades suaves de dimensões

$$\begin{aligned}\dim \Gamma_\phi &= \dim Q_1 \\ \dim \Gamma_{\phi^*} &= (\dim Q_2)^2\end{aligned}$$

□