

# Geometria simplética

## Índice

<b>1</b>	<b>Aula 1</b>	<b>3</b>
1.1	Origem da geometria simplética	3
1.2	Formalismo hamiltoniano (simplificado)	3
1.3	Evolução temporal (equações de Hamilton)	4
1.4	Álgebra linear simplética	6
<b>2</b>	<b>Aula 2</b>	<b>7</b>
2.1	Subespaços de evs	7
2.2	Equivalência entre ev's simpléticos	9
<b>3</b>	<b>Aula 3</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Aula 4</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Aula 5</b>	<b>11</b>
5.1	Forma tautológica no fibrado cotangente	11
<b>6</b>	<b>Aula 6</b>	<b>14</b>
6.1	Colchete de Poisson	15
6.2	Teorema de Darboux	16
<b>7</b>	<b>Aula 7</b>	<b>19</b>
7.1	Subvariedades	19
7.2	Pausa para distribuições	20
7.3	Voltando	20
7.3.1	Sobre subvariedades coisotrópicas	21
<b>8</b>	<b>Aula 8</b>	<b>21</b>
8.1	Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas	22
8.2	Método de Moser	22
<b>9</b>	<b>Aula 9</b>	<b>25</b>
9.1	Aplicação ao teorema de Darboux	25
9.2	Teorema de Darboux generalizado (Weinstein)	27
9.2.1	Sobre o Lema de Poincaré relativo	28
9.2.2	Vizinhança tubular	29
9.3	Monitoria 2	29
<b>10</b>	<b>Aula 10</b>	<b>29</b>
10.1	Darboux generalizado versão 2.0	31
10.2	Teorema das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein	32

<b>11 Aula 11</b>	<b>34</b>
11.1 Aplicação (de Weinstein): pontos fixos de symplectomorfismos . . . . .	34
11.2 Outra classe de exemplos de variedades simpléticas: órbitas coadjuntas . . . . .	35
11.2.1 Revisão de grupos e álgebras de Lie . . . . .	35
11.2.2 Sobre $SU(2)$ . . . . .	37
<b>12 Aula 12</b>	<b>37</b>
12.1 Álgebras de Lie . . . . .	37
12.2 Relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie . . . . .	38
12.3 Propriedades fundamentais . . . . .	40
12.4 Teoremas fundamentais de Lie (da álgebra para o grupo) . . . . .	41
<b>13 Aula 13</b>	<b>42</b>
13.1 Ações . . . . .	42
13.2 Descrição infinitesimal de $G$ -ações . . . . .	44
13.3 No caso de representações . . . . .	45
13.4 Geradores infinitesimais das ações adjunta e coadjunta . . . . .	45
13.4.1 Dualização . . . . .	46
<b>14 Aula 14</b>	<b>47</b>
14.1 Ações infinitesimais ( $\mathfrak{g}$ -ações) . . . . .	47
14.2 Mais sobre ações . . . . .	48
14.3 De volta à geometria simplética . . . . .	51
<b>15 Aula 15</b>	<b>52</b>
15.1 Exemplos concretos (da ação coadjunta) . . . . .	53
15.2 Ponto de vista "Poisson" . . . . .	55
15.2.1 Descrição tensorial (do colchete de Poisson) . . . . .	56
15.2.2 Distribuição característica . . . . .	56
15.2.3 Uma classe especial de variedades de Poisson . . . . .	56
<b>16 Aula 16</b>	<b>57</b>
16.1 Caso mais simples . . . . .	57
16.2 Caso geral . . . . .	58
16.3 Princípio de Noether . . . . .	59
16.4 Exemplos de ações Hamiltonianas . . . . .	60
<b>17 De forma mais geral</b>	<b>60</b>
<b>18 Aplicações momento: quando existem e o que fazer com elas</b>	<b>61</b>
<b>19 Quocientes de ações por grupos de Lie</b>	<b>62</b>
19.0.1 Critério para ações regulares . . . . .	62
<b>20 Aula 17: redução simplética (quociente simplético)</b>	<b>63</b>
20.1 Uma proposição parecida ao exercício 5 da lista 3 . . . . .	63
20.2 $G$ conexo . . . . .	63
20.3 $G$ qualquer . . . . .	64

20.4 Redução simplética . . . . .	64
20.5 Alguns comentários sobre o teorema . . . . .	66
20.6 Um exemplo muito simples . . . . .	67
<b>21 Aula 18</b>	<b>67</b>

## 1 Aula 1

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e [Tong, Lectures on Classical Mechanics](#).

### 1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geometria da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descrições da mecânica clássica:
  - Newtoniano:  $F = ma$ , equação diferencial ordinária de segunda ordem.
  - Lagrangiano: princípio variacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
  - Hamiltoniano.

### 1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base  $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$  (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ .
- Campo Hamiltoniano:  $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ .

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \text{Id}_n \\ \hline -\text{Id}_n & 0 \end{array} \right)$$

Which coincides with Lee's formula

$$\begin{aligned} \dot{x}^i(t) &= \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)), \\ \dot{y}^i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

where Lee defined the **Hamiltonian vector field** as the *analogue of the gradient with respect to the symplectic form*, that is, satisfying  $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$  for any vector field  $Y$ .

Also look at Tong's formulation:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

where  $L$  is the Lagrangian and the Hamiltonian function  $H$  is obtained as the Legendre transform of the Lagrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the  $n$  2<sup>nd</sup> order differential equations by  $2n$  1<sup>st</sup> order differential equations for  $q_i$  and  $p_i$ .

In practice, for solving problems, this isn't particularly helpful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

### 1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de  $X_H$ , ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as *Equações de Hamilton* (de novo).

**Exemplo** Partícula de massa  $m$  em  $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$  sujeita a campo de força conservativa

$$F = -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$q(t) = (q_1, q_2, q_3)$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaço de fase  $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$ .
- Hamiltoniano:  $H(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \xrightarrow{-J_0 \nabla H} X_H$$

where  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of  $H$  and then applying  $J_0$ . So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo  $\nabla H$  e  $X_H$  : taxa de variação de  $H$  ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais? Tal vez é a derivada exterior de  $H$ ,  $dH$  em lugar do gradiente de  $H$ .

- **Fluxo gradiente**

$$c'(t) = \nabla H(c(t))$$

$$\frac{d}{dt} H(c(t)) = \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2$$

$\nabla H$  aponta na direção que  $H$  variação.

- **Fluxo hamiltoniano**

$$c'(t) = X_H(c(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0 \nabla H(c(t)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

?,  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ .

- **Gradiente.**  $\nabla H(x) \in T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$  é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

onde  $g_0$  é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

Analogamente,  $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$  é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \quad \Omega_0(u, v) = -dJ_0 V,$$

ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

**Observação** Note que  $\Omega_q$  define uma 2-forma (c...?) em  $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$ .

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

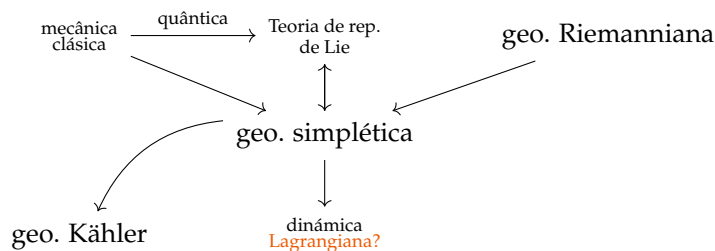
$X_H$  é único tal que  $i_{X_H} \omega_0 = dH$ . So this was Lee's definition ☺.

**Definição (temporária)** Uma *variedade simplética* é  $(M, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega^2(M)$  localmente isomorfa a  $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$ .

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva  $\omega$  em  $\sum_i dq_i \wedge dp_i$ .

**Teorema (de Darboux, em Lee)** Let  $(M, \omega)$  be a  $2n$ -dimensional symplectic manifold. For any  $p \in M$  there are smooth coordinates  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  centered at  $p$  in which  $\omega$  has the coordinate representation  $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ .

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.



## 1.4 Álgebra linear simplética

$V$  espaço vetorial real,  $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  forma bilinear ansimétrica, i.e.  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ .

**Definição**  $\Omega$  é não degenerada se  $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$ .

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero  $v \in V$  there exists  $w \in V$  such that  $\omega(v, w) \neq 0$ ; and it is equivalent to the linear map  $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$  being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix  $(\omega_{ij})$  representing  $\omega$  is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0 \forall v\}$$

então  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\ker(\Omega) = \{0\}$ .

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$  é não degenerada é chamada simplética.  $(V, \Omega)$  é um *espaço vectorial simplético*.

**Observação**

1.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $V$ ,  $\Omega$  é representado por uma matriz antisimétrica

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \quad \Omega(u, v) = u^t A v.$$

2.  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\det(A) \neq 0$ .

Note que

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det(A)$$

implica que  $\det A \neq 0 \implies m = \dim V = 2n$

3.  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ . Defina

$$\begin{aligned}\Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$

note que  $\ker \Omega = \ker(\Omega^\flat)$ , assim  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\Omega^\flat$  é isomorfismo.

## 2 Aula 2

### 2.1 Subespaços de evs

Sejam  $(V, \Omega)$  evs e  $V \subseteq V$  subespaço.

**Definição** Seja  $(V, \Omega)$  um espaço vetorial simplético. Dado um subespaço  $W \subseteq V$ , definimos seu *ortogonal simplético* como

$$W^\Omega := \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

Note que se

$$\begin{aligned}\Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto i_v \Omega = \Omega(v, \cdot)\end{aligned}$$

temos que

$$\ker \Omega := \ker \Omega^\flat = W^\Omega.$$

Considere a restrição de  $\Omega$  à  $W$ :

$$i : W \hookrightarrow V, \quad i^* \Omega = \Omega|_W \in \Lambda^2 W^*,$$

então

$$\ker(\Omega|_W) = W \cap W^\Omega$$

Casos de interesse:

- **Isotrópico:**  $W \subseteq W^\Omega$  ( $\iff \Omega|_W \equiv 0$ ).
- **Coisotrópico:**  $W^\Omega \subseteq W$ .
- **Lagrangiano:**  $W = W^\Omega$ .
- **Simplético:**  $W \cap W^\Omega = \{0\}$  ( $\Omega|_W$  é não degenerado (=simplético)).

**Lemma**  $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\Omega^1 : V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$

Note que  $W^\Omega \mapsto \text{Ann}(W)$ , assim

$$\dim W + \dim \text{Ann}(W)' = \dim V$$

□

### Observação

- $W \subseteq V$  subespaço simplético se e somente se  $V = W \oplus W^\Omega$ .
- $W$  isotrópico  $\implies \dim W \leq \frac{\dim V}{2}$ .
- $W$  coisotrópico  $\implies \dim W \geq \frac{\dim V}{2}$ .
- $W$  Lagrangiano se  $\dim W = \frac{\dim V}{2}$ .

De fato,  $W$  é Lagrangiano se e somente se  $W$  é isotrópico e  $\dim W = \frac{\dim V}{2}$ .

### Exercício

- $(W^\Omega)^\Omega = W$  ( $W$  isotrópico se e somente se  $W^\Omega$ ).
- $(W_1 \cap W_2)^\Omega = W_1^\Omega + W_2^\Omega$ .

### Exemplo

- Subespaços de dimensão 1 são isotrópicos (subespaços de codimensão 1 são coisotrópicos).
- $V = V \oplus W^*$ , onde  $V$  tem a forma  $\Omega_{\text{can}}$  e  $W$  e  $W^*$  são Lagrangianos.
- $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  base simplética, então  $\text{span}\{e_i, f_i\}$  é simplético, e  $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$  é isotrópico (se  $k = n$  é Lagrangiano).
- $(V_1, \Omega_1)$  e  $(V_2, \Omega_2)$  evs's,  $T : V_1 \rightarrow V_2$  isometria linear,  $\text{graf}(T) := \{(u, Tu) : u \in V_1\} \subseteq V_1 \times V_2$ .  $T$  é symplectomorfismo se e somente se  $\text{graf}(T)$  é um subespaço Lagrangiano em  $V_1 \times V_2$ .
- $\dim \text{graf}(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2} \dim(V_1 \times V_2)$ .
- $\Omega_{V_1 \times V_2}((u, Tu), (v, Tv)) = \Omega(u, v) - \underbrace{\Omega_2(Tu, Tv)}_{= T^* \Omega_2(u, v)} (= 0 \iff \Omega_1 = T^* \Omega_2)$ .

**Teorema (Existência das bases simpléticas)** Para qualquer  $(V, \Omega)$  evs existe uma base simplética.



*Demonstração.* Seja  $e_1 \in V \setminus \{0\}$ . Como  $\Omega$  é não degenerada, existe  $f_1 \in V$  tal que  $\Omega(e_1, f_1) = 1$ . Considere  $W_1 = \text{span}\{e_1, f_1\}$ . Então  $\Omega|_{W_1}$  é não degenerado (ie.  $W_1$  é simplético), o que acontece se e somente se  $V = W_1 \oplus W_1^\Omega$ . Assim, existem  $e_2 \neq 0$  in  $W_1^\Omega$  e  $f_2 \in W_1^\Omega$  tal que  $\Omega(e_2, f_2) = 1$ , etc... ( $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ ). O conjunto  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  é uma base simplética.  $\square$

**Exercício**  $V$  ev de dimensão  $2n$  e  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$  é não degenerada se e somente se  $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \in \Lambda^{2n} V^* \neq 0$ .

## 2.2 Equivalência entre ev's simpléticos

$(V, \Omega)$  e  $(V', \Omega')$  são *equivalentes* se existe um *simplectomorfismo* linear  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$  (isometria linear) tal que

$$\varphi^* \Omega' = \Omega \in \Lambda^2 V^*$$

onde

$$\varphi^* \Omega'(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Dado  $(V, \Omega)$  evs, definimos

$$\text{Sp}(V) := \{T \in \text{GL}(V) | T^* \Omega = \Omega\}$$

### Exemplo

1.  $V = \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\Omega_0(u, v) = -u^T J_0 v$  onde  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ , com base canônica  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ . Temos

$$\begin{cases} \Omega_0(e_i, e_j) = 0 \\ \Omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \Omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

**Definição** Uma base de  $(V, \Omega)$  satisfazendo eq. (1) é chamada *base simplética*.

Following Lee, Example. 22.2, the condition may be that  $\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$  where  $\alpha^i$  and  $\beta^i$  are just the dual basis covectors of the base  $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n\}$  of  $V$ .

**Observação** Escolher/Achar uma base simplética é equivalente à escolher/achar um simplectomorfismo

$$(V, \Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$$

2.  $W$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , sejam  $V = W \oplus W^*$ ,  $w, w' \in W$  e  $\alpha, \alpha' \in W^*$

$$\Omega_2((w, \alpha), (w', \alpha')) := \alpha'(w) - \alpha(w')$$

é não degenerada e anti-simétrica. Assim,

$$(W \oplus W^*, \Omega_2)$$

é um espaço vetorial simplético.

**Observação** Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base simplética de  $W$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é a base dual de  $W^*$ , então

$$(W \oplus W^*, \Omega) \cong (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0).$$

Note que ainda que dado

$$A : W \xrightarrow{\sim} W$$

automorfismo ?,

$$T_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} : W \oplus W^* \rightarrow W \oplus W^*$$

é symplectomorfismo,  $(T_A = A \oplus (A^*)^{-1})$ .

**Moral:**  $GL(W) \hookrightarrow Sp(W \oplus W^*)$

$$\begin{aligned} EV &\xrightarrow{\text{functor}} EVS \\ A \circ W &\longmapsto W \oplus W^* \circ T_A \end{aligned}$$

3.  $V$  ev sobre  $\mathbb{C}$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} = n$ , com produto interno hermitiano

$$h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

i.e. satisfazendo

- (a)  $h(u, \lambda v) = \lambda h(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,
- (b)  $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$ ,
- (c)  $h(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$ ,

pode ser escrito como

$$h(u, v) = g(u, v) + i\Omega(u, v)$$

Agora considere  $V$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  (de dimensão  $2n$ ).

**Exercício**

- $g$  é produto interno positivo definido.
- $\Omega$  é antisimétrica, não degenerada (simplética).
- Ache uma base de  $V$  (dica: extensão de base ortonormal de  $h$ ...)
- $U(n) \subset SP(V, \Omega)$ .

4. Produto direto:  $(V_1, \Omega_1), (V_2, \Omega_2)$  espaços vetoriais.

$$\begin{array}{ccc} & V_1 \times V_2 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ V_1 & & V_2 \end{array}$$

Tem a forma simplética é o pullback:

$$\Omega := \pi_1^* \Omega_1 + \pi_2^* \Omega_2$$

ou seja,

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2),$$

que é não degenerado e antissimétrico também.

**Notação:** se  $(V, \Omega)$  é um espaço vetorial simplético, denotamos por  $(V, -\Omega) := \bar{V}$ , que também é um evs.

### 3 Aula 3

Se  $V$  é um espaço vetorial real, uma *estrutura complexa* em  $V$  é um endomorfismo linear  $J : V \rightarrow V$  tal que  $J^2 = -\text{id}$ .

Seja  $(V, \Omega)$  um espaço vetorial simplético. Uma estrutura complexa em  $V$  é *compatível* com  $\Omega$  se para todo  $u, v \in V$ ,

$$g(u, v) := \Omega(u, Jv)$$

é um produto interno. (Acho que) isso implica que

$$\Omega(Ju, Jv) = \Omega(u, v), \quad \text{e} \quad \Omega(u, Ju) > 0 \quad \forall u \neq 0$$

### 4 Aula 4

### 5 Aula 5

Lembrança da última aula:

1. Definição de variedade simplética.
2. Pelo menos dois exemplos.
3. Forma de volume/orientabilidade.
4. Campos simpléticos/campos hamiltonianos.
5. Obstrução cohomológica de para estrutura simplética.

**Hoje:** Fibrados cotangentes.

#### 5.1 Forma tautológica no fibrado cotangente

Seja  $Q$  uma variedade e  $M := T^*Q$  o fibrado cotangente.

**Lembrando** Se  $Q$  é uma variedade,  $x \in Q$ . O *espaço tangente* em  $x$  são derivações ou classes de equivalência de curvas... base local do espaço tangente  $\partial_{x_i}$ ... base dual disso é base do espaço cotangente nesse ponto... o fibrado cotangente  $\bigsqcup_{x \in Q} T_x^*Q$  é variedade suave.

O fibrado cotangente possui uma 1-forma tautológica definida assim:

**Definição**  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , onde  $M := T^*Q$ , dada por

$$\alpha_p(X) = p(\pi_*(X))$$

ou seja, como  $X$  é tangente ao fibrado cotangente, ele está anclado a algum covetor, assim a gente pode avaliar ele no covetor. Também pode ser pensado como o pullback de um covetor em  $Q$  baixo a projeção cotangente usual.

**Definição (Monitoria)**

$$\begin{array}{c} T^*M = \{(p, \xi) | \xi : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

A *forma tautológica* é  $\lambda$  dada por

$$\lambda_{(p, \xi)}(v) \in \mathbb{R}, \quad v \in T_{(p, \xi)}(T^*M)$$

é igual a

$$\xi(d\pi_{(q, \xi)}(v))$$

usando o mapa

$$T_{(p, \xi)}(T^*M) \xrightarrow{d\pi_{(p, \xi)}} T_p M$$

Em coordenadas locais  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  do espaço cotangente, temos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n A_i dx_i + \sum_{i=1}^n B_i dy_i$$

Avaliando  $\lambda$  nos vectores canónicos  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(p, \xi)}$  e  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  notamos que  $A_i = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$  pois a diferencial de  $\pi$  faz as  $B_j$  ser zero.

**Exercício**

1. A 1-forma tautológica  $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$  é a única 1-forma satisfazendo

$$\forall \mu \in \Omega^1(Q), \quad \mu^* \alpha = \mu$$

onde pensamos a  $\mu$  do lado esquerdo como um mapa  $\mu : Q \rightarrow T^*Q$ , ie. uma secção do fibrado cotangente, e do lado direito simplesmente como uma 1-forma em  $Q$ .

**Definição**  $M = T^*Q$ ,  $\alpha \in \Omega^1(M)$  então a *forma simplética canónica* de  $T^*Q$  é

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha$$

**Observação**

- $d\omega_{\text{can}} = -d^2\alpha = 0$ .
- Formalmente  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$

Assim, temos uma variedade simplética canónica associada a toda variedade,  $(T^*Q, \omega_{\text{can}})$ .

**Observação**

- Dado  $B \in \Omega^2(Q)$  com  $dB = 0$ , a forma

$$\omega_B \omega_{\text{can}} + \pi^*B$$

é simplética e o termo  $\pi^*B$  se chama de *magnético*.

- Se  $Q$  é Riemanniana com métrica  $g$  temos o mapa induzido

$$\begin{aligned} g^\sharp : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ u &\longmapsto g(u, \cdot) \end{aligned}$$

Assim, o pullback the  $\omega_{\text{can}}$  é uma forma simplética em  $TQ$ .

Além disso, a métrica nos fornece de uma função Hamiltoniana dada por  $H \in C^\infty(TQ)$ ,  $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ .

Veremos que o fluxo Hamiltoniano de  $H$  em  $(TQ, \omega)$  é fluxo geodésico em  $Q$ .

Tem dois generalizações naturais:

- $\tilde{H}(v) = \frac{1}{2}g(u, v) + V(x)$  com  $V \in C^\infty(Q)$ , mecânica clássica.
- $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$  com respeito a  $\omega_B$ .

**Pergunta (Projeto?)** Existência de órbitas periódicas em níveis de energia?

**Definição** O *levantamento cotangente* de um difeomorfismo (na mesma direção do difeomorfismo) é  $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$  é  $\hat{\varphi} = ((T\varphi)^*)^{-1}$ .

**Pergunta** Preserva a forma canónica?

**Proposição** Sim.  $\hat{\varphi} : T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$  satisfaz  $\hat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1$  onde  $\alpha_i$  é a forma tautológica, para  $i = 1, 2$ . Isso implica que  $\hat{\varphi}^*\omega_2 = \omega_1$ .

Isso implica que temos um funtor  $Q \rightsquigarrow T^*Q$  que se chama de *funtor cotangente* e permite levar problemas de geometria diferencial para a geometria simplética.

*Demonstração.*

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & T^*Q_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array}$$

A chave dessa prova é que o diagrama commuta, assim pode se-trocar um termo  $\pi_2 \circ \hat{\varphi}$  por  $\varphi \circ \pi_1$ .  $\square$

O functor que produzimos  $\text{Dif}(Q) \hookrightarrow \text{Simp}(T^*Q)$  não é fiel (surjetivo), ie. existem symplectomorfismos no fibrado cotangente que não vem de difeomorfismos na variedade.

**Observação** Dada uma 1-forma  $A \in \Omega^1$ . Pode se-produzir um mapa no cotangente simplesmente trasladando por  $A$ :

$$\begin{aligned} T_A : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, \xi + A_x) \end{aligned}$$

que não pode ser um levantamento porque se projecta na identidade!

**Exercício**  $T_A$  é um symplectomorfismo  $\iff dA = 0$ .

Mas, como sabemos quais symplectomorfismos no cotangente são sim levantamentos de difeomorfismos na variedade?

**Exercício** Seja  $F : T^*Q \rightarrow T^*Q$  um symplectomorfismo. Quando  $F = \hat{\varphi}$  é levantamento de algum  $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} Q$ . Pois, isso acontece  $\iff F$  preserva a forma tautológica, ie.  $F^*\alpha = \alpha$ .

**Observação** Levantamento cotangente de campos de vetores. Começa com um campo  $X \in \mathfrak{X}(Q)$ , integra para obter um fluxo  $\varphi_t$ , que é uma família de difeomorfismos na variedade, você sabe levantar isso com o functor obtendo outro fluxo (porque levantamento de fluxo é fluxo)  $\hat{\varphi}_t$ , e diferenciando obtém  $\hat{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ .

**Observação** Para qualquer fibrado vetorial  $E \rightarrow M$ , podemos ver as seções  $\Gamma(E)$  como um subconjunto das funções suaves na variedade  $C^\infty(E)$ —são as funções lineares nas fibras. Aí tem um modo natural de definir para qualquer campo vetorial  $X \in \Gamma(TQ) \subseteq C^\infty(T^*Q)$  uma função,  $H_X(p) = p(X_{\pi(p)}) = \alpha(\hat{X})$ .

**Proposição**  $\hat{X}$  = campo Hamiltoniano de  $H_X$ .

## 6 Aula 6

Hoje: Colchete de Poisson, Darboux.

## 6.1 Colchete de Poisson

$M$  variedade,  $\omega \in \Omega^2(M)$  não degenerada (quase-simplética). Podemos fazer

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto i_X \omega \end{aligned}$$

So that

$$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow X_f \in \mathfrak{X}(M)$$

e

$$i_{X_f} \omega = df.$$

**Definição**  $f, g \in C^\infty(M)$ .

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \{f, g\} &= \omega(X_g, X_f) = dg(X_f) = \mathcal{L}_{X_f} g = -\mathcal{L}_{X_g} f \end{aligned}$$

**Proposição (Exercício)**  $d\omega = 0 \iff \{\cdot, \cdot\}$  satisfaz identidade de Jacobi.  $\implies (M, \omega)$  simplética,  $\{\cdot, \cdot\}$  é colchete de Lie em  $C^\infty(M)$  e isso se chama de um *colchete de Poisson* em  $(M, \omega)$ .

**Exercício**  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ .

**Exemplo**  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Definição**  $f, g \in C^\infty(M)$  estão em *involução* se  $\{f, g\} = 0$ . ie.  $X_g$  é tangente aos níveis  $f = \text{const}$  (e vice versa).

**Observação** Nesse caso, a derivada de  $g$  ao longo das curvas integrais de  $X_f$  é zero.

**Motivação**  $(M, \omega)$  simplética,  $H \in C^\infty(M)$  queremos integrar  $X_H$  (ie. resolver  $c'(t) = X_H(c(t))$ ). Suponha que existe  $f \in C^\infty(M)$  com  $\{f, H\} = 0$ , chamada *integral primeira*. ie.  $f$  é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano.

No século XIX, quando Poisson vivia, a ideia era que se temos um número suficiente de integrais primeiras "independentes", podemos "integrar"  $X_H$ . (Aqui "integrar" significa dar uma solução a equação diferencial do fluxo Hamiltoniano).

Em 1810, Poisson deu a fórmula

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

**Teorema (Poisson)**  $\{f, H\} = 0 = \{g, H\} \implies \{\{f, g\}, H\} = 0$ .

**Teorema (Jacobi)**

$$\{H, \{f, g\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} = 0$$

1880 Lie usou essa identidade no seu trabalho de transformações (álgebras de Lie).

**Versão moderna (sec. XX) de integrabilidade** Veremos adiante...

**Teorema (Arnold-Liouville)**  $(M, \omega)$  de dimensão  $2n$  e seu Hamiltoniano  $H = f_1$  que é a primeira de uma sequência de  $n = \dim M/2$  funções independentes (as derivadas são linearmente independentes)  $f_2, \dots, f_n \in C^\infty(M)$  tais que  $\{f_i, f_j\} = 0$  e que  $(f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma submersão. Então

$$N = \{(f_1, \dots, f_n) = \text{cte}\} \cong \mathbb{T}^n$$

se compacto e conexo. Além disso, a dinâmica de  $X_H$  em  $\mathbb{T}^n$  é quase periódica (=é um fluxo linear no toro, que pode ser racional ou irracional).

**Observação (Projeto?)** Qué acontece com essa dinâmica no toro se perturbamos o sistema? O problema de dois corpos é completamente integrável. Por exemplo, a dinâmica da Terra e o Sol pode se resolver, mas o problema adicionando a Lua é o problema de 3 corpos, que ninguém sabe como resolver. Aqui a Lua é uma perturbação.

Teorema KAM, quanto mais irracional é o fluxo, mais robusto é o toro, mais inestável.

Em fim, tudo isso para motivar os colchetes de Poisson.

## 6.2 Teorema de Darboux

$(M, \omega)$  variedade simplética com o colchete  $\{\cdot, \cdot\}$ .

### Observação

1.  $\omega$  está completamente determinada por  $\{\cdot, \cdot\}$ , ie. se duas estruturas simpléticas dão lugar ao mesmo colchete de Poisson, elas são iguais. Por que?

$$\omega^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$$

está dada em cada ponto por

$$(\omega^\sharp)_{ij} = \{x_i, x_j\}$$

por definição.

**(My interpretation)** Especificamente, considere coordenadas de Darboux  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  em  $M$ . Em [?], eq. 22.9 vemos que para qualquer função  $f \in C^\infty(M)$ , o seu campo Hamiltoniano está dado por

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

assim,

$$X_{x^i} = -\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad X_{y^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$



Isso é uma base do espaço tangente. De fato, para qualquer base  $v_1, \dots, v_n$  de um espaço vetorial com base dual  $v_1^*, \dots, v_n^*$ , se  $w = \sum_i w^i v_i$ , é super básico que

$$\omega(v_i, w) = \omega\left(v_i, \sum_j w^j v_j\right) = \sum_j \omega(v_i, v_j) w^j = \sum_j \omega(v_i, v_j) v_j^*(w)$$

ie.

$$i_{v_i} \omega = \omega(v_i, \cdot) = \sum_j \omega(v_i, v_j) v_j^*$$

Daí, em coordenadas,

$$\omega^b(v_i) = \begin{pmatrix} \omega(v_i, v_1) \\ \vdots \\ \omega(v_i, v_n) \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\omega^b = \begin{pmatrix} \omega(v_1, v_1) & \cdots & \omega(v_n, v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega(v_1, v_n) & \cdots & \omega(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

Agora note que os vetores Hamiltonianos associados as coordenadas de Darboux  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  satisfazem as relações do seguinte item nesta observação (pode comprovar isso usando a fórmula do colchete de Poisson em coordenadas de Darboux). Daí, nessa base de vetores Hamiltonianos,

$$\omega^b = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Mas que não é que a gente tava buscando  $\omega^\sharp$ ? Pois é, essa matriz elevada ao quadrado é  $-\text{id}$ , daí a sua inversa é só botar um signo menos...

2. A estrutura simplética canônica  $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dp_i$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  está determinada (é a única tal que) por

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

É como se tivesse uma base simplética boa em todos os pontos...

**Teorema (Darboux)**  $(M, \omega)$  simplética, ent...ão ao redor de todo ponto  $x \in M$  existem coordenadas locais  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  tais que  $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ , ou, equivalentemente vale

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Tem um lema que va a provar essencialmente tudo.

**Lemma (Primeiro paso da indução)** Ao redor de qualquer ponto  $x \in M$  existem coordenadas  $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$  tais que

$$1 = \{p, q\}, \quad \{p, y_j\} = 0 = \{q, y_j\}, \quad \{y_i, y_j\} = \varphi_{ij}(y).$$

Ou seja, a matriz da forma é

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A(y) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

ou seja, temos uma expressão

$$\omega = dq \wedge dp + \omega_N$$

onde  $\omega_N$  é dada por  $A(y)$  e é simplética.

*Demonstração do Lema* **Paso 1** Seja  $p$  uma função tal que  $X_p(x) \neq 0$ . Pelo teorema de fluxo tabular (retificação) existe uma função  $q$  tal que  $X_p = \frac{\partial}{\partial q}$ , de modo que  $\{p, q\} = dq(X_p) = 1$  e  $dp(X_q) = -1$ .

**Paso 2** Então  $X_p$  e  $X_q$  são linearmente independentes, pois  $1 = \{p, q\} = \omega(X_p, X_q) \neq 0$ , o que aconteceria por antisimetria se são linearmente dependentes. Além disso, comutam, pois

$$[X_p, X_q] \stackrel{\text{aula passada?}}{=} X_{\{p, q\}=1} = 0.$$

Agora usamos a generalização do teorema do fluxo tabular: se  $X_1, \dots, X_k$  são campos linearmente independentes e que comutam, então existem coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  tais que  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . (Teo. função inversa.) Assim, existem coordenadas locais  $y_1, \dots, y_{2n}$  tais que

$$X_q = \frac{\partial}{\partial y_{2n-1}}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial y_{2n}}.$$

Logo

$$dy_j(X_q) = 0 = dy_j(X_p)$$

para  $j = 1, \dots, 2n-2$ .

**Paso 3** As diferenciais

$$dq, dp, dy_1, \dots, dy_{2n-2}$$

são linearmente independentes, pois se

$$a dq + b dp + \sum_i c_i dy_i = 0$$

pois as  $y_i$  já são LI, e avaliando em  $X_i$  obtemos  $a = 0$ , e no  $X_q$  que  $b = 0$ .

Temos um sistema de coordenadas  $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$  ao redor de  $x$  tal que as condições do teorema salvo a última se cumprem. Agora veamos que  $\{y_i, y_j\}$  não depende de  $p, q$ .

**Paso 4** Só lembrar que

$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial q}$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial p} \{y_i, y_j\} = -\{q, \{y_i, y_j\}\} = 0$$

onde a segunda igualdade é Jacobi. Fim.

□

*Demonstração do Teo. Darboux.* Segue do lema por indução

□

**Definição** Uma *estrutura de Poisson* em uma variedade  $M$  é

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$\mathbb{R}$ -bilinear, antisimétrica, Jacobi e Leibniz, ie.  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ .

**Exemplo**

- $(M, \omega)$  simplética com  $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$ .

## 7 Aula 7

Na aula passada vimos:

- Colchetes de Poisson.
- Teorema de Darboux. Prova: demonstrar que tem relações que caracterizam a forma de maneira única.
- É possível descrever estruturas simpléticas em termos de colchete de Poisson.: Variedades de Poisson. Isso é axiomatizar as propriedades básicas do colchete de Poisson. Esses objetos podem ser entendidos como foliações simpléticas.

### 7.1 Subvariedades

Seja  $(M, \omega)$  simplética e  $N \xrightarrow{i} (M, \omega)$ . Então temos

$$\omega_N = i^* \omega \in \Omega^2(N)$$

que é fechada porque o pullback comuta com derivada exterior.

$$\begin{aligned} \ker(\omega_N) &= \{X \in TN : \omega(X, Y) = 0 \ \forall Y \in TN\} \\ &= TN \cap TN^\omega \subseteq TN \end{aligned}$$

## 7.2 Pausa para distribuições

$P$  variedade.

**Definição** Uma *distribuição (generalizada)* em  $P$  é

$$P \ni x \longmapsto D_x \subseteq T_x P \text{ subespaço}$$

e o posto da distribuição em  $x := \dim D_x$ .

A distribuição é *suave* se para todo  $x_0 \in P$ ,  $\forall v \in D_{x_0}$  existe um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(P)$  que estende a  $v$  e está contido na distribuição no sentido de que  $X_x \subseteq D_x \forall x$  e  $X_{x_0} = v$ .

**Exemplo** Núcleo de 2-formas é um exemplo de distribuição, mas não é suave em geral.

**Definição** Uma distribuição suave  $D \subseteq TP$  é dita *integrável* se  $\forall x \in P$  existe uma subvariedade  $S \ni x$ ,  $TS = D|_S$

No caso de uma distribuição (suave) integrável, por todo ponto passa uma subvariedade integral conexa maximal chamadas *folhas*.

**Observação**

- Distribuição suave, de posto constante é a mesma coisa que um subfibrado vetorial  $D \subseteq TP$ . Nesse caso,

**Teorema (Frobenius)**  $D$  é integrável se e somente se é *involutivo*, ou seja

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

*Demonstração.* Note que  $\implies$  é trivial porque se tem uma variedade que realiza a distribuição, o colchete de Lie sempre vai ser outro campo vetorial tangente.  $\square$

- Suponha que  $D = \ker(\omega)$  com  $\omega \in \Omega^2(P)$  é suave  $\iff D$  tem posto constante. Aqui  $\impliedby$  é fácil.
- Se  $d\omega = 0 \implies D = \ker \omega$  é involutivo.

**Conclusão** Se  $\omega$  é uma 2-forma fechada e  $D = \ker \omega$  tem posto constante, dá lugar a uma folheação (regular=folhas de mesma dimensão) em  $P$ .

## 7.3 Voltando

**Definição**  $N$  é dita

- *isotrópica* quando  $T_x N \subseteq T_x N^\omega \iff \omega_N = 0 \iff \ker \omega_N = TN$ .
- *coisotrópica* quando  $T_x N^\omega \subseteq T_x N$ .
- *lagrangiana* quando  $T_x N = T_x N^\omega \iff i^* \omega = \omega_N = 0$  e  $\dim N = \dim M/2$ .
- *simplética*  $T_x N \cap (T_x N)^\omega = \{0\} \forall x \in N \iff \omega_N$  é simplética.

- *posto constante*  $T_x N \cap T_x N^\omega \subseteq T_x N \ \forall N$  tem posto constante.

### Exemplo

- curvas são isotrópicas.
- hipersuperfícies são coisotrópicas.
- Veremos vários exemplos de subespaços lagrangianos.

#### 7.3.1 Sobre subvariedades coisotrópicas

**Isto também vale para subvariedades de posto constante.**

Vamos ver uma versão geométrica de um exercício da lista 1, onde pegávamos o quociente de um espaço vetorial por el núcleo de uma forma para obter um espaço vetorial simplético.

**Exercício** Suponha que as folhas da folheação são fibras de uma submersão

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & (M, \omega) \\ q \downarrow & & \\ B = N / \sim & & \end{array}$$

então existe uma forma simplética  $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$  tal que  $q^* \bar{\omega} = \omega_N$ .

**Exemplo** O fluxo hamiltoniano do oscilador harmónico  $H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_i q_i^2 + p_i^2$  com  $c = 1/2$  de  $\mathbb{CP}^{n-1}$

**Exercício**  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^k, \psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ .  $N = \psi^{-1}(c)$  para  $c$  valor regular.

- $N$  coisotrópico  $\iff \{\psi_i, \psi_j\}|_N = 0$ .
- $N$  simplético  $\iff (\{\psi_i, \psi_j\}|_N)_{ij}$  é invertível.

## 8 Aula 8

Lembre:

- Subvariedades lagrangianas, (co-)isotrópicas, simpléticas. Aprofundamos nas coisotrópicas (posto constante), como as hipersuperfícies ou conjuntos de nível, que tem uma folheação, e com condições de regularidade pode passar para o espaço quociente, que é simplético, como  $\mathbb{CP}^n$ .

## 8.1 Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas

**Exemplo** Dois variedades simpléticas e um difeomorfismo entre elas. Então  $\varphi$  é symplectomorfismo se e só se seu gráfico é lagrangiano. Talvez isso pode ser usado para pensar em symplectomorfismos em um objeto cuantico.

**Observação** Considere

$$\begin{aligned}\varepsilon : M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\ x &\longmapsto (x, \varphi x)\end{aligned}$$

então o grafo de  $\varphi$  é lagrangiano  $\iff \omega_1 - \varphi^* \omega_2$ .

**Exemplo (no fibrado cotangente)**

- A seção zero  $Q \hookrightarrow T^*Q$  é nos mostra que  $Q$  é uma subvariedade lagrangiana.
- A fibra (cotangente) de um ponto também é uma subvariedade lagrangiana de  $T^*Q$ .
- Logo, o espaço de fibras?
- Pegue uma subvariedade da base  $S \subset Q$ . Considere o *fibrado conormal*  $N^*S, \nu_S^*$ . É o dual do fibrado tangente. É o anulador de  $TS, \{(\chi, \xi) \in T^*Q : \chi \in S, \xi|_{T\chi S} = 0\}$ . Note que é um subfibrado do fibrado cotangente.

Os dois exemplos anteriores são  $S = Q$  e  $S = \{x\}$  da seguinte prop:

**Proposição**  $N^*S \hookrightarrow T^*Q$  é (um subfibrado) uma subvariedade lagrangiana.

*Demonstração.* Usando coordenadas adaptadas e a forma tautológica do  $T^*Q$ , damos coordenadas  $N^*Q$  da forma  $(x_1, \dots, x_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$  e assim o pullback da forma tautológica é zero porque ele avalia os covectores  $\xi_{\text{grande}}$  em vectores  $x_{\text{pequeno}}$ .  $\square$

**Exemplo** Uma forma  $\mu$  vista como seção do fibrado cotangente pode ser pensada como um mergulho de  $Q$  em  $T^*Q$ .

**Proposição** Essa subvariedade é lagrangiana  $\iff d\mu = 0$ .

## 8.2 Método de Moser

**Upshot** Moser's trick is a thing that gives you a diffeomorphism that pulls back  $\omega_2$  to  $\omega_1$ .

Dadas duas formas simpléticas numa variedade, como podemos achar um symplectomorfismo entre elas? A ideia do método é assim:

**Step 1** Interpolando as duas formas mediante uma família contínua  $\omega_t$  de formas simpléticas.

**Step 2** Buscar uma (isotopía) família de difeomorfismos  $\varphi_t$  com  $\varphi_0 = \text{id}$  e tal que  $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ . Com isso a gente procura levar o problema para uma EDO.

**Step 3** Os fluxos são isotopías com uma relação de comutatividade. Eles correspondem com campos vetoriais. As isotopías em geral estão em correspondência com *campos de vetores não autónomos*.

**Definição** Uma família suave de difeomorfismos  $\{\varphi_t\}$  com  $\varphi_0 = \text{id}$  é chamada *isotopía*. Suave significa que  $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$  é suave.

**Exemplo** Fluxos (complets) são isotopías tq  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ .

**Definição** Um *campo de vetor t-dependente* ou *não autónomo* é família suave de campos  $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ . De novo, suave é que  $(t, x) \mapsto X_t(x)$  é suave.

isotopía  $\leftrightarrow$  campos t-dependentes

A diferenciação sempre é simples né? Fixa um ponto e varia o tempo, obtém uma curva.

$$\phi_t \mapsto X_t(\varphi_t(x)) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{t=\tau} \varphi_\tau(x).$$

A recíproca é mais difícil. A ideia é estender a variedade a  $M \times \mathbb{R}$ , e considerar  $\bar{X}(x, t) = (X_t(x), \frac{d}{dt})$ . Esse depende do tempo, assim podemos achar um fluxo  $\phi_t$  de  $\bar{X}_t$ . Aqui se deve estender o fluxo usando bump functions, assim a gente tem que  $\phi_t$  está definido para toda  $t$ .

Note que  $\phi_t(x, s) = (G_t, t + s)$  para alguma função  $G$  na variedade. Podemos achar uma inversa dela assim:

$$(x, s) = \phi_{-t}(\phi_t(x, s)) = G_{-t}(G_t(x, s), t + s), s)$$

ie. a inversa de

$$x \mapsto G_t(x, s)$$

é

$$y \mapsto G_{-t}(y, s + t)$$

Logo,

$$\phi_t(x) = G_t(x, 0)$$

é uma isotopía e como a derivada do fluxo

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x, 0) = \bar{X}(G_t(x, 0), t) \implies \frac{d}{dt} G_t(x, 0) = X_t(x, 0).$$

E é isso. Temos a correspondencia.

Voltando ao método de Moser, para achar  $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$ , pegamos uma isotopía que puxa  $\omega_t$  em  $\omega_0$ , e queremos diferenciar a isotopía. No caso de um fluxo, trata-se da derivada de Lie por definição.

**Lemma**  $\{\varphi_t\}$  isotopia em  $M$ ,  $\{X_t\}$  campo autónomo. Sejam  $\eta \in \Omega^k(M)$ ,  $\beta_t \in \Omega^k(M)$ . Então vale:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \epsilon) = \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \eta$$

onde estamos pegando a derivada num tempo  $t$  fixo. Daí veremos que pela regra da cadeia segue que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \beta_t) = \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \beta_t + \frac{d}{dt} \beta_t$$

*Demonstração.* a. Considere os seguintes operadores em  $\Omega^\bullet$  :

$$Q_1(\eta) = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \eta, \quad Q_2(\eta) = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \eta$$

Daí note que esses operadores comutam com a derivada exterior, são Leibniz respeito ao producto cunha e coincidem em funções. Daí segue que  $Q_1 = Q_2$ .

b. A regra da cadeia diz que para uma função  $F(a, b)$ ,

$$\frac{d}{dt} F(t, t) = \frac{\partial}{\partial a} F(t, t) + \frac{\partial}{\partial b} F(t, t)$$

e olha para  $\varphi_a^* \beta_b$  como a  $F$ . Sustiundo e usando  $a$ ., o resultado segue.

□

Uma aplicação disso é

**Teorema (de estabilidade de Moser)**  $M$  compacta,  $\{\omega_t\}$  formas simpléticas,  $t \in [0, 1]$ . Se as formas são todas cohomologas então elas são symplectomorfas, i.e.  $[\omega_t] = [\omega_0] \implies \exists \phi_t$  tq  $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$ . Ou, de outra forma, se existe uma família suave de formas  $\beta_t$  tais que

$$\omega_t = \omega_0 + d\beta_t$$

então existe uma isotopia  $\{\varphi_t\}$  tal que  $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ .

*Demonstração.* Note que não é imediato que as clases de cohomologia nos dem uma família suave, mas é equivalente sim (usando decomposição de Hodge? Tem algo mais simples?). O método é achar um campo de vetores autónomo resolvendo

$$i_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \beta_t$$

pois dela segue que

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = -d \left( \frac{d}{dt} \beta_t \right)$$

E daí a segunda afirmação do lema.

□



## 9 Aula 9

Lembre: Método de Moser.

A prova foi:

*Demonstração.* Calcule

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega_t = 0$$

isso implica que

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = -d \left( \frac{d}{dt} \beta_t \right)$$

e isso que

$$i_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \beta_t$$

□

Com isso conseguimos associar uma isotopia a um campo  $t$ -dependente (integração).

### 9.1 Aplica ção ao teorema de Darboux

**Lemma**  $X_t$  campo de vetores  $t$ -dependente,  $t \in \mathbb{R}$ . Suponha que

$$X_t|_{x_0} = 0 \quad \forall t.$$

Então existe uma vizinhança  $U \ni x_0$  e uma família  $\varphi_t : U \rightarrow M$  de

- (Inclusão)  $\varphi_0 = \text{id}$ .
- $\frac{d}{dt} \varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$
- $\varphi_t(x_0) = x_0$
- $\varphi_t : U \xrightarrow{\text{difeo}} \varphi_t(U)$ .

*Demonstração.* Variação do caso  $M$  compacto

$$\bar{X}(x, t) := \left( X_t(x), \frac{d}{dt} \right) \quad \text{em } M \times \mathbb{R}$$

$$\bar{X}(x_0, t) = \left( 0, \frac{d}{dt} \right)$$

assim existe uma curva integral  $\gamma(t) = (x_0, t)$  de  $\bar{X}$  por  $(x_0, 0)$  está definida para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

Por EDO, existe uma vizinhança  $W$  de  $(x_0, 0)$  em  $M \times \mathbb{R}$  onde o fluxo de  $\bar{X}$  existe  $\forall t \in [0, 1]$ .

Tome  $U = \bigcap_{w \in \{M \times \{0\}\}} W$ .

□

Valem a fórmula para  $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_t) \dots$

**Teorema (Darboux)**  $(M, \omega)$  simplética,  $\dim M = 2n$ . Para todo  $x \in M$  existe uma vizinhança  $U \ni x$ , aberto  $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  e um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : V \subseteq \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow U \subseteq M \\ 0 &\longmapsto x \end{aligned}$$

tal que

$$\phi^* \omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i.$$

[Desenho de carta coordenada]

*Demonstração.* Podemos assumir que  $M$  é bola aberta de  $\mathbb{R}^{2n}$  com estrutura simplética  $\omega$  arbitrária.

Para usar o método de Moser, definamos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \\ \omega_0 &= \sum_i dq_i \wedge dp_i \end{aligned}$$

Podemos assumir que na origem

$$\omega_1|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} \quad T_0 \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$$

simplesmente porque qualquer dois formas simpléticas são equivalentes num espaço vetorial simplético usando uma mudança de coordenadas.

- Podemos assumir pelo Lema de Poincaré que

$$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_0 = 0$$

supondo pela mesma razão que antes que  $\beta|_0 = 0$ .

- $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 \iff \omega_t = \omega_0 + t d\beta$

Precisamos checar que  $\omega_t$  são não degeneradas numa vizinhança de 0.

Note que em  $x = 0$ ,  $\omega_t|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} = \omega_1|_{x=0}$ , assim  $\omega_t|_{x=0}$  é não degenerada para toda  $t$ , mas precisamos de uma vizinhança, não só um ponto.

**Lemma** Se tem uma família  $\omega_t|_{x_0}$  é simplética  $\forall t, t \in [0, 1]$ , então existe uma vizinhança de  $x_0$  onde  $\omega_t$  é não degenerada  $\forall t \in [0, 1]$ .

*Demonstração.* Considere

$$(x, s) \rightarrow \det(\omega_s(x)) = \text{determinante da matriz que representa a forma}$$

essa função é não zero em zero, assim para cada  $t$  existe uma vizinhança onde ela não é zero. Logo, pela compacidade de  $[0, 1]$ ,  $\exists$  uma vizinhança  $B \ni x_0$  onde  $\det(\omega_s(x))$  não se anula  $\forall s \in [0, 1]$ .  $\square$

Então já temos essa vizinhança que precisavamos.

Defina  $X_t$  como a solução da equação de Moser:

$$i_{X_t} \omega_t = -\beta.$$

Como  $\beta|_0 = 0 \implies X_t|_{x=0} = 0 \implies \exists \varphi_t, t \in [0, 1]$ .

Pelo lema 1, existe uma vizinhança  $V \ni 0$  e

$$\begin{aligned} \varphi_t : V &\longrightarrow B \\ \varphi_t^* \omega_t &= \omega_0 \end{aligned}$$

tome  $t = 1, 0 \in U = \varphi_1(V)$ . □

Com esse mesmo método a gente consegue provar uma generalização do teorema de Darboux.

## 9.2 Teorema de Darboux generalizado (Weinstein)

**Teorema**  $Q \xhookrightarrow{i} M$  subvariedade (mergulhada) e  $\omega_0, \omega_1$  em  $M$  simpléticas. Suponha que

$$\omega_0|_x = \omega_1|_x \quad \forall x \in Q$$

então existem vizinhanças  $U_0$  e  $U_1$  de  $Q$  em  $M$  e um difeomorfismo

$$\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$$

tal que

$$\varphi^* \omega_1 = \omega_0$$

e que  $\varphi(x) = x \quad \forall x \in Q$

**Observação** O teorema de Darboux é quando  $Q$  é um ponto só!

**Observação** A condição  $\omega_0|_x = \omega_1|_x$  significa que  $\omega_0$  e  $\omega_1$  coincidem em todo o espaço tangente a  $M$  nos pontos de  $Q$ , não é que o pullback em  $Q$  coincide. Tem mais vetores no espaço tangente a  $M$ .

Vamos precisar de um Lema de Poincaré relativo.

**Lemma**  $Q \hookrightarrow M$  subvariedade. Seja  $\eta \in \Omega^k(M)$ ,  $d\eta = 0$ ,  $i^* \eta = 0$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $Q$  em  $M$ ,  $\beta \in \Omega^k(U)$  tal que

$$\begin{aligned} \eta &= d\beta \\ \beta|_x &= 0, \quad \forall x \in Q \end{aligned}$$

$(\beta|_{T_x M} = 0 \quad \forall x \in Q)$ .

A ideia aqui é simplesmente que podemos achar uma vizinhança de  $Q$  que se contrae a  $Q$  (retrato por deformação?)

*Demonstração.* Em fim, pelo lema, para  $\eta = \omega_1 - \omega_0$ ,  $i^*\eta = 0$ . Compare com a demonstração anterior,  $\beta$  se anulava no 0, agora  $\eta$  se anula em toda  $Q$  (é uma versão paramétrica disso).

$Q \hookrightarrow M$  tem vizinhança  $U$  onde  $\exists \beta \in \Omega^1(U)$ ,

$$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_x = 0$$

- Seja  $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + td\beta$ .
- $\forall t \in [0, 1], x \in Q, \omega_t|_x = \omega_0|_x = \omega_1|_x$ .

Pelo lema 2,  $x$  tem vizinhança em  $M$  onde  $\omega_t$  é simplética  $\forall t \in [0, 1]$ .

Tomando a união das vizinhanças, temos vizinhança de  $Q$  onde  $\omega_t$  simplético  $\forall t \in [0, 1]$ .

#### Método

- Define  $X_t$  por  $i_{X_t}\omega = -\beta$ . Isso implica que  $\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t = 0$ .
- Como  $\beta|_x = 0$ , então  $\forall x \in Q, X_t|_x = 0 \forall x \in Q$ .
- Pelo lema 1,  $\exists U_0$  onde  $\varphi_t$  está definido  $\forall t \in [0, 1]$ .
- E mais  $X_t|_Q = 0 \implies \varphi_t|_Q = \text{id}_Q$ .
- Tome  $\phi = \varphi_1$  e  $U_1 = \varphi_1(U_0)$ .

□

### 9.2.1 Sobre o Lema de Poincaré relativo

O principal ingrediente é teorema da vizinhança tubular.

Lembre:

**Teorema (Vizinhança tubular)**  $Q \hookrightarrow M$  subvariedade mergulhada. Existe uma vizinhança  $Q \subseteq U \subseteq M$  para qual existe  $\pi : U \rightarrow Q$  tal que

$$\begin{aligned} \pi \circ i &= \text{id}_Q \\ i \circ \pi &\simeq \text{id}_U, \quad (\text{homotopia suave}) \end{aligned}$$

Daí, o lema de Poincaré segue a existencia de um *operador de homotopia*.

Em geral, quando temos uma homotopia

$$\begin{aligned} F : M \times [0, 1] &\longrightarrow N \\ F_0 : M &\longrightarrow N \\ F_1 : M &\longrightarrow N \end{aligned}$$

existe um operador

$$H : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

tal que

$$F_1^*\eta - F_0^*\eta = d(H\eta) - Hd\eta$$

Note que no caso de formas fechadas, o termo da direita se anula e a gente prova a invariança homotópica da cohomologia. No nosso caso, o operador de homotopia nos dá  $\eta = dH\eta$  á que  $d\eta$  se anula em  $Q$ .

### 9.2.2 Vizinhança tubular

**Teorema** Existe uma vizinhança  $U_0$  de  $Q$  em  $NQ$  e uma vizinhança  $U_1$  de  $Q$  em  $M$  tais que

- $U_0 \cap (NQ)_x$  é convexo  $\forall x \in Q$ .
- Existe um difeomorfismo  $\phi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$  tal que  $\phi(x) = x$ , e  $d\phi|_x : T_x(NQ) \xrightarrow{\text{id}} TM|_x$

*Demonstração.* Ideia: aplicação exponencial. □

## 9.3 Monitoria 2

**Proposição**  $\phi : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^k$  suave,  $c \in \mathbb{R}^k$  valor regular.

$$N := \phi^{-1}(c) \text{ coisotrópica} \iff \{\phi_i, \phi_j\}|_N = 0$$

## 10 Aula 10

Lembre

- Darboux generalizado: duas formas numa subvariedade que coincidem nos pontos da subvariedade, existem vizinhanças da subvariedade symplectomorfas.
- A prova disso: usa método de Moser. Para usar o método de Moser:

**Lemma (Poincaré relativo)**  $Q \xrightarrow{i} M$ .  $\eta \in \Omega^k(M)$  fechada e tal que  $i^*\eta = 0$ . Então existe vizinhança  $U \supset Q$  e  $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$  tal que  $\eta = d\beta$  e  $\beta|_Q = 0$ .

(O lema de Poincaré usual é quando  $Q$  é um ponto)

*Demonstração do lema de Poincaré.* Aí tem que mergulhar  $Q$  no fibrado tangente  $NQ$  que é um fibrado que não precisa de métrica para ser definido. Porém, na prova a gente introduz uma métrica em  $Q$  e identifica  $NQ$  com  $T^\perp Q$ . Daí usando a aplicação exponencial conseguimos ver que  $Q$  é um retrato por deformação de uma vizinhança dele no  $M$ —a exponencial é a ponte de  $NQ$  [a  $Q$ ].

Isso dá uma homotopia

$$\begin{aligned} F_t : U_0 &\longrightarrow U_0 \\ (x, v) &\longmapsto (x, tv) \\ F_0 &= i \circ \pi \\ F_1 &= \text{id}_{U_0} \end{aligned}$$

Daí é só pegar o operador de homotopia

$$\mathcal{H} : \Omega^k(\mathcal{U}_0) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathcal{U}_0)$$

que é tal que

$$F_1^* \eta = F_0^* \eta = \mathcal{H}(d\eta) + d(\mathcal{H}\eta)$$

**Afirmção** O operador de homotopia é

$$H(\eta) = \int_0^1 I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}}(F^* \eta) dt$$

onde

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times \mathcal{U}_0 &\longrightarrow \mathcal{U}_0 \\ (t, y) &\longmapsto F_t(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_t : \mathcal{U}_0 &\longrightarrow [0, 1] \times \mathcal{U}_0 \\ y &\longmapsto (t, y) \end{aligned}$$

de forma que

$$F_t = F \circ I_t$$

**Notação** Seja

$$\begin{aligned} \tau_t : \mathbb{R} \times \mathcal{U}_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{U}_0 \\ (x, y) &\longmapsto (s + t, y) \end{aligned}$$

de forma que

$$I_t = \tau_t \circ I_0, \quad F_t = F \circ I_t = F \circ \tau_t \circ I_0$$

e a conta que a gente faiz é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t^* \eta &= I_0^* \frac{d}{dt} \tau_t^* (F^* \eta) \\ &= I_0^* \tau_t^* (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta) \\ &\stackrel{\text{Cartan}}{=} I_0^* \tau_t^* \left( d i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta + i_{\frac{\partial}{\partial t}} d(F^* \eta) \right) \\ &= d \left( I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta + I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* (d\eta) \right) \end{aligned}$$

e aí integramos para obter

$$F_1^* \eta - F_0^* \eta = d(H\eta) + H(d\eta)$$

Se  $d\eta = 0$ ,  $i^* \eta = 0$ ,  $\implies \eta = d(H\eta)$ . Defina  $\beta = H\eta$ . Como  $F_t(x, 0) = (x, 0) \forall x \in Q$ , assim

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(x, 0) = 0 \implies i_{\frac{\partial}{\partial t}} dF_t|_{x \in Q} = 0$$

e por fim

$$\beta|_x = 0.$$

□

## 10.1 Darboux generalizado versão 2.0

No teorema anterior pode imaginar que cada vizinhança de  $Q$  é uma variedade diferente. Mas então a condição de que as duas formas sejam iguais acima de  $Q$  já não faz sentido. Precisamos de um isomorfismo simplético entre esses espaços tangentes.

**Teorema** (Teorema de Darboux generalizado Versão 2.0)

$$\begin{array}{ccc} (M_0, \omega_0) & & (M_1, \omega_1) \\ & \nwarrow i_0 \quad \nearrow i_1 & \\ & Q & \end{array}$$

Suponha que temos um isomorfismo de fibrados simpléticos

$$\begin{array}{ccc} TM_0|_Q & \xrightarrow{\phi} & TM_1|_Q \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Q & \end{array}$$

tal que  $\phi|_{TQ} : TQ \rightarrow TQ$  é  $\text{id}_{TQ}$ .

Então  $\phi$  estende à derivada de um symplectomorfismo

$$\begin{array}{ccc} U_0 \subset M_0 & \xrightarrow{\psi} & U_1 \subset M_1 \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & Q & \end{array}$$

i.e.,

$$d\phi|_Q = \phi : TM_0|_Q \rightarrow TM_1|_Q$$

Em palavras: a derivada do symplectomorfismo (entre as vizinhanças de  $M_1$  e  $M_2$ ) que obtemos é estendida pelo isomorfismo simplético dos fibrados tangentes dado.

*Demonstração.* Podemos reduzir ao caso anterior! Basta achar um difeomorfismo  $\psi : U_0 \rightarrow U_1$  tal que  $\psi|_Q = \text{id}_Q$  e que  $d\psi|_Q = \phi$ . Nesse caso,  $\omega_0$  e  $\psi^*\omega_1$  são duas formas em  $U_0$  que coincidem sobre  $TM_1|_Q$ . Vamo lá

Tome dois complementos

$$\begin{array}{l} E_0, \quad TM_0|_Q = TQ \oplus E_0 \\ E_1, \quad TM_1|_Q = TQ \oplus E_1 \end{array}$$

Então como  $\phi$  preserva  $TQ$ , ele também preserva os complementos, é só álgebra linear. Isto é,  $\phi$  se restringe a um isomorfismo

$$\bar{\phi} : E_0 \rightarrow E_1$$

Note que

$$\bar{\phi}|_Q : TE_0 \cong TQ \oplus E_0 \rightarrow TE_1 \cong TQ \oplus E_1$$

Aqui estamos pegando a derivada do isomorfismo nos fibrados. O importante é que como ele é linear, sua derivada é ele mesmo (só que aí aparecem muitas identificações):

$$d\bar{\phi}|_Q = \text{id} \oplus \bar{\phi} = \phi$$

Agora pegamos vizinhanças tubulares de  $Q$ ,  $V_0 \subset E_0$  e  $V_1 \subset E_1$  e usando a exponencial como antes podemos contraer

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{\phi} & V_1 \\ \downarrow \phi_0 = \text{exp} & & \downarrow \phi_1 \\ U_0 \subset M_0 & \xrightarrow{\psi} & U_1 \subset M_1 \end{array}$$

e todo comuta:

$$\psi = \phi_1 \circ \bar{\phi} \circ \phi^{-1} : U_0 \xrightarrow{\cong} U_1$$

e por fim

$$d\psi|_Q = \text{id} \circ d\bar{\phi} \text{id} = \phi$$

□

Agora um caso particular:

$$\begin{array}{ccc} (M, \omega) & & T^*\mathcal{L} \\ & \swarrow i & \nearrow i \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

onde  $Q$  está dentro do fibrado cotangente como a seção zero.

## 10.2 Teorema das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein

**Teorema (das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein)** (As subvariedades Lagrangianas estão definidas "intrinsecamente", pois existe uma vizinhança delas que é simplectomorfa a ela como subvariedade no cotangente dela)

Existem vizinhanças  $U_0 \ni \mathcal{L}$  em  $T^*\mathcal{L}$  e  $U_1 \ni \mathcal{L}$  em  $M$  e um simplectomorfismo

$$\varphi : U_0 \rightarrow U_1$$

*Demonstração.* Só precisamos de um  $\phi$  como no Darboux 2, i.e.,

$$\phi : TM|_{\mathcal{L}} \rightarrow T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}}$$

tal que

$$\phi|_{T\mathcal{L}} : T\mathcal{L} \rightarrow T\mathcal{L} = \text{id}_{T\mathcal{L}}$$



**Lemma** Suponha que  $\mathcal{L} \hookrightarrow (M, \omega)$  é Lagrangiana. Considere  $TM|_{\mathcal{L}}$  um fibrado vetorial simplético. Então

1. Existe um subfibrado lagrangiano  $E \subseteq TM|_{\mathcal{L}}$  tal que  $TM|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus E$ .
2. Existe um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} TM|_{\mathcal{L}} & \xrightarrow{\cong} & T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^* \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

onde no espaço  $T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^*$  a forma simplética é,

$$\nu((X, \alpha), (Y, \beta)) = \beta(X) - \alpha(Y),$$

lembrando um exercício da lista 1 (de álgebra linear) que diz que um subespaço Lagrangiano nos dá uma decomposição em soma direta usando o seu dual.

*Demonstração do Lema.*

**Step 1** Todo espaço simplético induz uma estrutura complexa compatível. Se  $L$  é lagrangiano,  $JL$  também e o espaço vetorial (acho que isso coincide com o complemento ortogonal na métrica compatível). Isso vale para fibrados vetoriais.

**Step 2** Note que

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow (T\mathcal{L})^* \\ u &\longmapsto \omega(\cdot, u) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Isso é super elementar de álgebra linear.

Tome

$$\begin{aligned} (TM|_{\mathcal{L}}, \omega) &\longrightarrow (T\mathcal{L} \oplus T\mathcal{L}^*, \nu) \\ (x, u) &\longmapsto (X, \omega(\cdot, u)) \end{aligned}$$

que é que acontece? Então,

$$\begin{aligned} \nu(T(X, u), T(Y, v)) &= \nu((X, \omega(\cdot, u)), (Y, \omega(\cdot, v))) \\ &= \omega(X, u) - \omega(Y, u) \\ &= \omega((X, u), (Y, u)) \end{aligned}$$

□

Daí, o teorema queda provado simplesmente aplicando o lema em  $TM|_{\mathcal{L}}$  e em  $T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}}$  para construir o isomorfismo de fibrados que buscavamos:

$$\begin{array}{ccc} & T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^* & \\ \cong \nearrow & & \searrow \cong \\ TM|_{\mathcal{L}} & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}} \end{array}$$

□

## 11 Aula 11

### 11.1 Aplicação (de Weinstein): pontos fixos de symplectomorfismos

Generaliza o estudo (Poincaré-Birkhoff) clássico de pontos fixos de aplicações que preservam área:

**Teorema (Último teorema de Poincaré)** Um automorfismo de um anelo que preserva orientação, área e rota a fronteira do anelo em direções opostas tem um ponto fixo.

Isso apareceu quando Poincaré estudava fluxos em  $\mathbb{R}^3$ .

Consideremos  $(M, \omega)$  simplética e  $M \xrightarrow{f} M$  symplectomorfismo. Nos interessa o caso em que  $f$  é um fluxo hamiltoniano no tempo 1, ie.  $f = \phi_{X_H}^{t=1}$ . Sabemos que

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$$

é uma subvariedade lagrangiana, e também  $\Delta = \Gamma_{\text{id}_M} = \{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$ . De forma que os pontos fixos de  $f$  são os pontos de interseção entre  $\Gamma_f$  e  $\Delta$ .

**Proposição** Seja  $M$  compacta,  $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ . Se  $f$  é  $C^1$ -próximo (convergência uniforme, Fréchet differentiable?) da  $\text{id}_M$ , então  $f$  tem pelo menos 2 pontos fixos.

*Demonstração.* Note que  $\Delta \cong M$  pelo teorema da vizinhança lagrangiana, como  $\Delta$  é lagrangiana existe uma vizinhança  $U \supseteq \Delta$  symplectomorfa a uma vizinhança  $U'$  de  $M \hookrightarrow (T^*M, \omega_{\text{can}})$ .

- Se  $f \in \text{Simp}$  está "perto" da  $\text{id}_M$ , então  $\Gamma_f \subseteq U$ .
- $f$  é  $C^1$ -próximo da  $\text{id}_M$ , então  $\Gamma_f$  corresponde a 1-forma  $\mu$  em  $T^*M$  (a uma subvariedade  $N_\mu$  de  $T^*M$ ?). (É uma gráfica de  $M$  no fibrado cotangente!)
- $\Gamma_f$  lagrangiana  $\implies d\mu = 0$  (Lista 2)
- $H^1(M) = 0 \implies \mu = dh$
- $M$  compacta  $\implies h$  tem pelo menos 2 pontos críticos.

□

**Observação (Monitoria)** Se pedimos só  $C^0$ -próximo, é possível que a seção  $\mu$  não esteja bem definida porque um ponto de  $M$  pode não estar associado a um covector ancorado em outro ponto, ou algum outro problema assim. A condição  $C^1$  controla isso.

#### Observação

- Não podemos abrir mão de  $H^1(M) = 0$ . Eg. rotação no toro.

- Podemos substituir  $H^1(M) = 0$  por  $f$  ser simplectomorfismo Hamiltoniano (ver McDuff-Salomon).

**Pergunta** Remover  $C^1$ -proximidade da identidade? (Pelo menos no caso  $f$  hamiltoniano).

**Conjectura (Arnold)**  $M$  simplética compacta,  $f$  simplectomorfismo Hamiltoniano. O número de pontos fixos de  $f$  é maior o igual que o número mínimo de pontos críticos que uma função em  $M$  deve ter:

$$\begin{aligned} \# \text{ pontos fixos de } f &\geq \text{Crit}(M) \\ &\geq \text{LS category (Lusternik Schnirelmann)} \end{aligned}$$

Isso está relacionado com o fato de tirar a hipótese de que a função esté próxima da identidade.

**Conjectura (Outra versão)** Para pontos fixos não degenerados (são os pontos onde  $N_\mu$  e  $M$  se intersectam transversalmente em  $T^*M$ ).

$\# \text{ pontos críticos} \geq \# \text{ mínimo de pontos críticos que funções de Morse devem ter.}$

$$\underbrace{\geq}_{\text{desig. Morse}} \sum_k \text{Betti}_k$$

## Projetos

- Conjetura de Arnold (Eliashberg (superfícies de Riemann), Hofer-Achander)
- Homologia de Floer (é uma versão de Homologia de Morse em dimensão infinita)

Professor Leonardo vai falar com mais detalhe desses temas.

## 11.2 Outra classe de exemplos de variedades simpléticas: órbitas coadjuntas

São exemplos de redução simplética. Isso está relacionado com teoria de Lie.  $G \curvearrowright (M, \omega)$  simetrias hamiltonianas. Daí vamos produzir uma nova variedade simplética.

### 11.2.1 Revisão de grupos e álgebras de Lie

Cada grupo de Lie age na sua álgebra de Lie de maneira canônica. Daí podemos pegar a álgebra dual. O fato importante é que as órbitas lá tem uma estrutura simplética.

**Definição** Um *grupo de Lie* é uma variedade  $C^\infty$   $G$  munida de estrutura de grupo tal que o produto e a inversão são funções suaves. Os *morfismos* são homomorfismos de grupos  $C^\infty$ . *Subgrupos de Lie* são subvariedades imersas que são subgrupos.

### Exemplo

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$
- $V$  espaço vetorial,  $(V, +)$  é grupo de Lie abeliano.
- $S^1, S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$  são grupos de Lie abelianos.
- Grupos finitos/enumeráveis:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \dots$
- 

**Exercício**  $G$  grupo de Lie conexo, então o seu recobrimento universal  $\tilde{G}$  é grupo de Lie.

- Subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R})$ :
  - Ortogonal  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = \text{id}\}$ .  
 Mais geralmente,  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espaço vetorial de produto interno,  $O(V) = \{T : V \rightarrow V \mid \langle Tv, Tv \rangle = \langle u, v \rangle\}$ .

Considerando

$$\begin{aligned} \psi : GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Sim}(n) \\ A &\longmapsto AA^T \end{aligned}$$

temos que  $\text{id}$  é um valor regular, e assim  $O(n) = \psi^{-1}(\text{id})$  é uma subvariedade (compacta é não conexa por  $\det A = \pm 1$ )

- $SL(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ , conexo não compacto.
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$  compacto conexo
- $Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J_0 A = J_0\}$  com  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . *Grupo simplético.*
- $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : \text{invertíveis}\} \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ .
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = \text{id}\}$ , isto é  $A^* = \overline{A}^T$ , temos  $|\det A| = 1$  e o mapa

$$\det : U(n) \rightarrow S^1$$

e de fato  $U(1) \cong S^1$ .

- $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$  *grupo unitário especial*

### Observação

- 
- **Teorema (de Cartan)** (F. Warner) Subgrupo fechado de grupo de Lie é subgrupo de Lie! (mergulhado)
- Nem todo grupo de Lie é grupo de Lie de matrizes. O espaço recobridor de  $SL(2, \mathbb{R})$ , por exemplo.

### 11.2.2 Sobre SU(2)

Sabemos que podemos escrever

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd : i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

e como

$$S^3 \hookrightarrow \mathbb{H}$$

$S^3$  herda uma estrutura de grupo de Lie, e de fato

$$S^3 \xrightarrow{\cong} \text{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Daí,

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\cong} & \text{SU}(2) \\ 2:1 \downarrow & & \downarrow 2:1 \\ \mathbb{RP}^3 & \xrightarrow{\cong} & \text{SO}(3) \end{array}$$

Em geral recobrimentos duplos de  $\text{SO}(n)$  são grupos  $\text{Spin}(n)$ . Para  $n \geq 2$  são recobrimentos universais. São grupos de simetrias de partículas que se chamam fermiões. A ideia é que a gente precisa dois voltas para virar a flecha que tá parada na partícula.

Por último vamos ver por que e que  $\mathbb{RP}^3 \cong \text{SO}(3)$ . Do mesmo jeito que  $\mathbb{RP}^2$  é o hemisfério norte da esfera com os pontos no bordo identificados,  $\mathbb{RP}^3$  é uma bola fechada em  $\mathbb{R}^3$  com pontos antipodais no bordo identificados. Podemos pensar que os pontos de  $\mathbb{RP}^3$  são rotações de ângulo  $\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

## 12 Aula 12

### 12.1 Álgebras de Lie

**Definição** Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial (sobre  $\mathbb{R}$ ) munido de uma forma bilinear

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tal que

- $[u, v] = -[v, u]$ .
- Jacobi.

Um *morfismo de Álgebras de Lie* é um mapa linear  $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que  $[Tu, Tv] = T[u, v]$ .

Uma *subálgebra de lie* é  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  subespaço tal que  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ , ie.  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$  ideal.

**Exemplo**

- $M_n(\mathbb{R})$  matrizes de  $n \times n$  com  $[A, B] = AB - BA$ . Se denota  $\mathfrak{gl}(n)$ .

- $V$  espaço vetorial com  $[\cdot, \cdot] \equiv_0$  (abelianos).
- $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = -A^T\}$ .
- $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{tr } A = 0\}$ .
- Em dimensão  $\infty$ ,  $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$  campos vetoriais, e também  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  simplética.

## 12.2 Relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie

ção

$$\text{Grupos de Lie} \xrightarrow{\text{diferenciação}} \text{Álgebras de Lie}$$

**Definição** Dado um grupo de Lie  $G$  e um elemento  $g \in G$ , a *multiplicação à esquerda* é

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto ga \end{aligned}$$

que é um difeomorfismo. Também está a *multiplicação à direita*  $R_g$ . Temos que  $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ .

**Definição** Um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}(G)$  é *invariante à esquerda* se

$$(L_g)_* X = X \quad \text{para toda } g \in G$$

ou

$$(dL_g)|_h(X_h) = X_{gh} \quad \forall g, h$$

### Observação

- O conjunto de campos invariantes à esquerda  $\mathfrak{X}^L(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$  é uma subálgebra de Lie (o colchete de Lie é fechado aqui).
- $X \in \mathfrak{X}^L(G)$  é completamente determinado por  $X_e$  onde  $e \in G$  é a unidade.
- Temos um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^L(G) &\xrightarrow{\cong} T_e G \\ X &\longmapsto X_e \end{aligned}$$

e para voltar só pegamos um vetor em  $T_e G$  e espalhamos por todos lados:

$$\begin{aligned} T_e G &\longrightarrow \mathfrak{X}^L(G) \\ u &\longmapsto u^L \end{aligned}$$

Talvez aqui devemos provar que esse espalhamento produz um campo suave.

Além disso, esse mapa induz uma estrutura de álgebra de Lie em  $T_e G$ . Essa é a *álgebra de Lie* de  $G$ , denotada por  $\text{Lie}(G)$ .

**Extra:**  $(\mathfrak{X}(M), -[\cdot, \cdot])$  é a álgebra de Lie de  $\text{Diff}(M)$ .

**Importante:** Essa associação é funtorial:

**Proposição** Se  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  é um morfismo de grupos de Lie, ele induz uma aplicação entre as álgebras de Lie dado por

$$\text{Lie}(\phi) := d_e \phi : T_e G_1 \longrightarrow T_e G_2$$

que é um morfismo de álgebras de Lie.

*Demonstração.* Muito fácil. □

Esse é chamado de *funtor de Lie*. É um funtor de diferenciação nesse sentido. Como ir na outra direção?

**Observação**

- $V$  espaço vetorial,  $G \longrightarrow \text{GL}(V)$  morfismo de grupos de Lie se chama de *representação* de  $G$  em  $V$ .
- $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$  morfismo de álgebras de Lie se chama de *representação* de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ .

**Exemplo**

- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ .
- $(V, [\cdot, \cdot] = 0) = \text{Lie}(V, +)$ .
- Pode ter grupos de Lie diferentes com a mesma álgebra de Lie, por exemplo  $(\mathbb{R}, +)$  e  $S^1$  tem álgebra de Lie  $(\mathbb{R}, [\cdot, \cdot])$ . Outro exemplo é  $\mathfrak{o}(n) = \text{Lie}(\text{O}(n))$ , e como esse grupo de Lie tem dois componentes conexas ( $\det 1$  e  $\det -1$ ), e a álgebra de Lie está determinada só pela componente da identidade, temos que  $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \text{Lie}(\text{SO}(n))$ .
- $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$  com

$$\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b - c & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- Recobrimentos  $2 : 1$ .
- Na lista 1 vimos que  $\mathfrak{sp}(2n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T J_0 + J_0 A = 0\} = \text{Lie}(\text{Sp}(2n))$
- $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})$ .
- $\text{Lie}(\text{SL}(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{tr } A = 0\}$ .
- $\text{Lie}(\text{U}(n)) = \mathfrak{u}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = -A^*\}$ .
- $\text{Lie}(\text{SU}(n)) = \mathfrak{su}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{tr } A = 0, A = -A^*\}$

### Exercício

- $u \in \mathfrak{g}$ ,  $u^L \in \mathcal{X}^L(G)$  é completo. Aqui é alongar qualquer curva integral usando a traslação a esquerda.

Seja  $\gamma_e : \mathbb{R} \rightarrow G$  curva integral de  $u^L$  com  $\gamma_u(0) = e$ .

- $\gamma_u(t+s) = \gamma_u(t)\gamma_u(s)$  ( $\gamma_u$  é um homomorfismo de grupos)
- $\gamma_{tu}(1) = \gamma_u(t)$  (homogenidade)

### Definição

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ u &\longmapsto \gamma_u(1) \end{aligned}$$

### Observação

$$\begin{aligned} \exp((t+s)u) &= \exp(tu)\exp(su) \\ \exp(-tu) &= \exp(tu)^{-1} \end{aligned}$$

### Observação

- Fluxo de  $u^L$  é  $R_{\exp(tu)}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{\exp(tu)}(g) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g \exp(tu)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_g \exp(tu) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_g(u) \\ &= u^L|_g \end{aligned}$$

- Fluxo de  $u^R$  é  $L_{\exp(tu)}$ .

## 12.3 Propriedades fundamentais

1.  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  é um difeomorfismo entre vizinhanças de  $0 \in \mathfrak{g}$  e de  $e \in G$ . ( $d_0 \exp = \text{id}$ ).
2.  $\phi : G \rightarrow H$  morfismo de grupos de Lie,  $\Phi = \text{Lie}(\phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ . O diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ \exp_G \uparrow & & \uparrow \exp_H \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{h} \end{array}$$



**Exemplo** Para  $G = GL(n)$  e  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \exp : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL(n) \\ A &\longmapsto e^A \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{array}{ccc} & \det : GL(n) \rightarrow \mathbb{R}^* & \\ & \uparrow \exp & \\ GL(n) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R}^* \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ M_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{tr}} & \end{array}$$

Lembre que  $\det(e^A) = e^{\text{tr } A}$ .

**Observação** Numa variedade Riemanniana com uma métrica invariante, a definição da exponencial usando geodésicas coincide com essa daqui.

## 12.4 Teoremas fundamentais de Lie (da álgebra para o grupo)

### Teorema (Teoremas fundamentais de Lie)

Lie I  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , existe um único grupo de Lie  $\tilde{G}$  simplesmente conexo tal que  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\tilde{G})$ . A ideia é simplificar a topologia do grupo preservando a sua álgebra. Aqui se usa o recobrimento universal da componente conexa da identidade.

Lie II  $\varphi : \mathfrak{g} = \text{Lie}(G) \rightarrow \mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ . Se  $G$  é simplesmente conexo, existe um morfismo  $\phi : G \rightarrow H$  tal que  $\varphi = \text{Lie}(\phi)$ .

**Exemplo** O fluxo irracional é um morfismo de grupos de Lie que não se factora (só se factora se a órbita fecha)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 \\ \downarrow & \nearrow & \\ S^1 & & \end{array}$$

Lie III Toda álgebra de Lie de dimensão finita é álgebra de Lie de um grupo de Lie.

**Teorema (Ado)** Qualquer álgebra de Lie pode ser vista de maneira fiel dentro de  $\mathfrak{gl}(n)$ , ie.  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n)$ . (isso acontece para grupos de Lie e  $GL(n)$ .)

Daí pode usar o teorema de Frobenius para mostrar que toda subálgebra de Lie dá um subgrupo de Lie: espalha a subálgebra (subespaço do tangente em  $e$ ) usando multiplicação a esquerda, que é Frobenius integrável porque é álgebra de Lie, assim ele vem de uma distribuição, pega a órbita que passa por  $e$ , essa daí é um subgrupo.

**Observação** Em dimensão infinita tem obstruções.

**Em resumo:**

$$\{\text{Grupos de Lie simp. conexo}\} \xrightarrow{\text{Lie}} \{\text{Álgebras de Lie}\}$$

é uma equivalencia de categorías.

## 13 Aula 13

### 13.1 Ações

**Definição** Uma *ação (à esquerda)* de  $G$  em  $M$  é aplicação suave

$$\begin{aligned} \psi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto gx = \psi(g, x) = \psi_g(x) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \psi_e(x) &= x, \quad \forall x \in M \\ \psi_{gh} &= \psi_g \cdot \psi_h \end{aligned}$$

que é equivalente a que

$$\forall g \in G, \quad \psi_g \in \text{Diff}(M), \quad G \mapsto \text{Diff}(M)$$

é homeomorfismo de grupos.

**Notação**  $G \curvearrowright M$

**Observação** Análogo para ações à direita com  $\psi_{gh} = \psi_h \cdot \psi_g$ .

**Terminologia**  $M$  + ação por  $G$  se llama *G-variedade*.

**Definição** Um *morfismo de G-variedades* é

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\phi} & M_2 \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ M_1 & \xrightarrow{\phi} & M_2 \end{array}$$

ie.,

$$\phi(g \cdot x) = g\phi(x)$$

ie., *G-equivariante*.

**Exemplo**

1.  $M = V$  espaço vetorial. Ações por transformações lineares=representações .

$$G \xrightarrow{\psi} GL(V) \subset \text{Diff}(V)$$

tem representação dual  $G \curvearrowright V^*$  dada por

$$G \xrightarrow{\psi^*} GL(V^*)$$

dada por

$$\langle (\psi^*)_g(\xi), v \rangle = \langle \xi, \psi_{g^{-1}}(v) \rangle, \quad \xi \in V^*, v \in V$$

2.  $GL(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$  restringe  $O(n) \curvearrowright S^{n-1}$ .

3.  $G = \mathbb{R} \curvearrowright M$ ,  $\mathbb{R}$ -ação  $\longleftrightarrow$  fluxo (completo) pois  $\psi_{t+s} = \psi_t \cdot \psi_s$ . Além disso,  $\mathbb{R}^n \curvearrowright M \longleftrightarrow n$ -fluxos que comutam, pois

$$\psi_{(t_1, \dots, t_n)} = \psi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \psi_{t_n}^n$$

4.  $G$  age em si mesmo de várias formas:

- $\psi_g = L_g$ ,  $L_g(a) = ga$ , ação por multiplicação à esquerda.
- $\psi_g = R_g$  à direita. (Note que  $\psi_g = R_{g^{-1}}$  é ação à esquerda.)
- $\psi_g = I_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ ,  $I_g(a) = gaq^{-1}$ , ação por cnjugação (ação por automorfismos de  $G$ ).
- **Ação ou representação adjunta.**  $G$  age em  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$

$$\text{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Diff}(\mathfrak{g})$$

$$g \longmapsto d_e I_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

- **Representação dual.**  $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ .

$$\text{Ad}^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$$

$$g \longmapsto \begin{array}{c} \psi_g : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \psi_g(\mu), v \rangle = \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}}(v) \rangle \end{array}$$

$$(\text{Ad}^*)_g = (\text{Ad}_{g^{-1}})^*.$$

5. Levantamiento tangente cotangente.  $G \xrightarrow{\psi} M$ .

- $G \curvearrowright TM$

$$g \mapsto \begin{array}{ccc} d\psi_g : TM & \xrightarrow{\cong} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\psi_g} & M \end{array}$$

- $G \curvearrowright T^*M$

$$g \longrightarrow \begin{array}{ccc} (d\psi_g)^* : T^*M & \xrightarrow{\cong} & T^*M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\psi_g} & M \end{array}$$

### 13.2 Descrição infinitesimal de G-ações

**Lembre**  $\mathbb{R}$  ação  $\longleftrightarrow$  fluxos  $\psi_t \rightsquigarrow$  campos de vetores  $X(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_t(x)$

**Generalização para G-ações**  $G$  grupo de Lie,  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ,  $G \overset{\psi}{\curvearrowright} M$ .

**Note** cada  $u \in \mathfrak{g}$  determina uma  $\mathbb{R}$ -ação = fluxo em  $M$ .

O que aqui acontece é que cada vetor no tangente à identidade de  $G$  gera um fluxo na variedade  $M$  quando  $G$  age em  $M$ .

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma_u} G \xrightarrow{\psi} \text{Diff}(M)$$

$$t \longmapsto \psi_{\exp(tu)}$$

**Definição** O *gerador infinitesimal* de  $\psi$  correspondendo a  $u \in \mathfrak{g}$  é o campo

$$u_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\exp(tu)}(x)$$

Em conclusão, uma  $G$ -ação dá lugar a um mapa

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M \end{aligned}$$

Heurísticamente (só que  $\text{Diff}(M)$  não tem dimensão finita), tendo um mapa

$$G \rightarrow \text{Diff}(M)$$

derivando obtemos

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M).$$

**Exemplo**

$$1. \quad G \overset{\psi}{\curvearrowright} G. \quad \psi_g = L_g \rightsquigarrow \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ u \longmapsto u^R \end{array} \quad \text{Aqui temos que fazer uma conta:}$$

$$\begin{aligned} u_G(a) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp(tu)}(a) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_a(\exp(tu)) \\ &= d_e R_a(u) \\ &= u^R(a) \end{aligned}$$

Analogamente, outros geradores infinitesimais são

2.

$$\begin{aligned}\psi_g = R_g &\implies u_G = u^L \\ \psi_g = R_{g^{-1}} &\implies u_G = -u^L\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\psi_g = I_g = L_g \circ R_{g^{-1}} &\implies \begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ u &\longmapsto u^R - u^L \end{aligned}\end{aligned}$$

### 13.3 No caso de representações

$$G \xrightarrow{\psi} GL(V) \subset \text{Diff}(M)$$

diferenciando,  $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \subset \mathfrak{X}(V)$

A partir de uma transformação linear podemos gerar um campo vetorial:

$$\{A : V \rightarrow V \text{ linear}\} = \mathfrak{gl}(V) \hookrightarrow \mathfrak{X}(V)$$

pega um vetor  $v$ . Em  $v$ , o vetor do campo vetorial é  $Av$ .  $X_A(v) = Av \in T_v V = V$

### 13.4 Geradores infinitesimais das ações adjunta e coadjunta

Lembre que essas ações correspondem a  $G \curvearrowright \mathfrak{g}$  e  $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ . Daí,

- $G \xrightarrow{\text{Ad}} \mathfrak{g}$  com

$$\begin{aligned}\text{Ad} : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto (\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g})\end{aligned}$$

“diferenciando” obtemos

$$\begin{aligned}\text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ u(?) &\longmapsto (\text{ad}_u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g})\end{aligned}$$

#### Lemma

$$\begin{aligned}u_{\mathfrak{g}} = \text{ad}_u \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ u &\longmapsto u_{\mathfrak{g}} = [u, \cdot]\end{aligned}$$

*Demonstração.* É so por definição e a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}u_{\mathfrak{g}}(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tu)}(v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_e(R_{\exp(-tu)} \cdot L_{\exp(tu)})(v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dR_{\exp(-tu)}(v^L(\exp(tu))) \\ &= [u^L, v^L]|_e \\ &= [u, v]\end{aligned}$$

□

### 13.4.1 Dualização

Agora considere  $G \xrightarrow{\text{Ad}} \mathfrak{g}^*$ ,

$$\langle u_{\mathfrak{g}}^*, v \rangle = -\mu([u, v])$$

com  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ,  $u_{\mathfrak{g}}^* \in \mathfrak{g}^* = T_{\mu}^* \mathfrak{g}^*$ .

**Pergunta**  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$

### Proposição

1.  $M_1, M_2$   $G$ -variedades,  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$   $G$ -equivariante, então  $u_{M_1} \xrightarrow{\varphi} u_{M_2}$ , ie;  $d\varphi(u_{M_1}(x)) = u_{M_2}(\varphi(x))$ .
2.  $M$  é  $G$ -variedad, então  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é (anti!) homomorfismo de álgebra de Lie.
3.  $M$  é  $G$ -variedade,  $(\psi_g)_*(u_M) = (\text{Ad}_g(u))$ .

*Demonstração.*

1.

$$\begin{aligned} \varphi((\exp(tu) \cdot x) &= \exp(tu), & \varphi(x) \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} &\implies d\varphi(u_{M_1}(x)) = u_{M_1}(\varphi(x)) \end{aligned}$$

2. Note: resultado vale para

$$\begin{aligned} \phi_g = R_{g^{-1}} &\rightsquigarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ u &\longmapsto -u^L \end{aligned}$$

Seja  $G \curvearrowright \overline{M} = G \times M$  uma ação,

$$g(a, z) = (R_g^{-1}(a), \quad u_{\overline{M}} = (-u^L, 0)$$

Note:  $[v_{\overline{M}}, u_{\overline{M}}] = -([u, v]_{\overline{M}})$ . Considere

$$\begin{aligned} F : G \curvearrowright \overline{M} = G \times M &\longrightarrow M \curvearrowright G \\ (a, x) &\longmapsto \bar{a}^1 x \end{aligned}$$

é  $G$ -equivariante Daí,

$$\begin{aligned} u_{\overline{M}} \xrightarrow{\sim} u_M &\implies \begin{aligned} F_*([u_{\overline{M}}, v_{\overline{M}}]) &= [u_M, v_M] \\ F_*([u, v]_{\overline{M}}) &= [u, v] \end{aligned} \end{aligned}$$

3. A fórmula que eu quero vale em  $\overline{M}$ ,  $F$  é  $G$ -equivariante,  $\implies$  vale em  $M$ .

□

**Próxima aula** Estamos usando um funtor

$$\{G\text{-variedades}\} \xrightarrow{\quad} \{\mathfrak{g}\text{-variedades}\}$$

e queremos estudar em que casos podemos voltar.

## 14 Aula 14

$G \curvearrowright^\psi$ . Um elemento da álgebra de Lie, pega o vetor na identidade, vai para o grupo, daí gera um fluxo na variedade, diferencia o fluxo e já tem um campo vetorial.

### Propriedades

- Anti-homomorfismo de álgebras de Lie.
- Se  $\phi$  é uma aplicação equivariante (preserva ação), os campos vetoriais são relacionados.

### 14.1 Ações infinitesimais ( $\mathfrak{g}$ -ações)

$\mathfrak{g}$  álgebra de Lie ( $\dim < \infty$ ).

**Definição** Uma *ação (à esquerda)* de  $\mathfrak{g}$  em  $M$  é anti-homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M \end{aligned}$$

**Notação**  $\mathfrak{g} \curvearrowright M$ ,  $M$  é  $\mathfrak{g}$ -variedade.

Para essas variedades exista uma noção de morfismo: suponha que  $\mathfrak{g} \curvearrowright M \xrightarrow{\phi} M \curvearrowright \mathfrak{g}$ , então  $\phi$  é  $\mathfrak{g}$ -equivariante se

$$u_{M_1} \stackrel{\phi}{\sim} u_{M_2} \quad \forall u \in \mathfrak{g}.$$

**Em resumo**

$$\begin{array}{ccc} G\text{-variedades} & \xrightarrow{\text{functor de diferenciação}} & \mathfrak{g}\text{-variedades, } \mathfrak{g} = \text{Lie}(G) \\ \\ \mathfrak{g} \curvearrowright M & \longmapsto & \begin{array}{cc} \mathfrak{g} & \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u & \longmapsto u_M \end{array} \\ \\ \mathfrak{g} \curvearrowright M \xrightarrow{\phi} M \curvearrowright \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \curvearrowright M \xrightarrow{\phi} M \curvearrowright \mathfrak{g} \\ & \searrow \text{integração?} \swarrow & \end{array}$$

Nem sempre pode voltar. Precisa que o campo vetorial seja **completo**, ie. precisamos de uma  $\mathbb{R}$ -ação infinitesimal  $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ . Isso dá uma  $\mathbb{R}$ -ação que é um fluxo. Mas, nem tudo campo vetorial é completo.

**Teorema (Lie-Richard Palais)** Seja uma ação

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M \end{aligned}$$

seja  $G$  um grupo de Lie simplesmente conexo tal que  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Então  $\mathfrak{g}$ -ação se integra a uma ação  $\iff$  cada  $u_M$  é completo  $\forall u \in \mathfrak{g}$ .

**Observação** Tem a ver com pensar em uma  $S^1$  ação em lugar de uma  $\mathbb{R}$ -ação. Por isso pedimos simplesmente conexo.

**Sobre sinais/convenção**

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\phi} \text{Diff}(M) & \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \psi_g \psi_h &= \phi_{gh} \end{aligned}$$

Mas esse daí é um *antihomomorfismo* de álgebra de Lie.

Também temos outros anti-homomorfismos de grupos (é muito importante que aparece uma sinal):

$$\begin{aligned} \text{Diff}(M) &\cong \text{Aut}(C^\infty(M)) \\ \phi : M &\rightarrow M \rightsquigarrow \phi^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \\ \phi \circ \psi &\rightsquigarrow \phi^* \circ \psi^* \end{aligned}$$

$$\text{Lie}(\text{Diff}(M)) \cong \mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\cong} \text{Lie}(\text{Aut}(C^\infty(M))) \cong \text{Der}(C^\infty(M))$$

Porque de fato a gente já tinha definido o colchete de Lie como uma derivação. Aí o que acontece é que quando voltamos para o lado esquerdo temos que botar uma sinal.

## 14.2 Mais sobre ações

Suponha  $G \curvearrowright M$  e seja  $x \in M$ .

**Definição** *Órbita de  $x$* :  $\mathcal{O}_x = \{\psi_g(x) = gx : g \in G\} \subseteq M$ .

A ação dá lugar a uma relação de equivalência em  $M$  :  $x \sim y \iff \exists g \in G$  tal que  $y = g \cdot x$ . Nesse caso as órbitas são as classes de equivalência (partição de  $M$ ).

**Observação** Se  $M = \mathcal{O}_x$ , a ação é dita *transitiva* e  $M$  é *espaço  $G$ -homogêneo*.

**Exemplo**



- $G \stackrel{L,R}{\curvearrowright} G$ ,  $L_g$  e  $R_g$  são transitivas.
- $G \stackrel{I}{\curvearrowright} G$ ,  $I_g(a) = gag^{-1}$  não é transitiva ( $\{e\}$  é órbita).
- $SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$  cujas órbitas são esferas e a origem.

**Definição** *Grupo de isotropia ou estabilizador:*  $G_x = \{g \in G : \psi_g = x\} \subseteq G$ .

**Observação**  $x \sim y \implies G_x \cong G_y$ .

**Exemplo**  $SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ . Para  $x = 0$ ,  $G_x = SO(3)$ , mais para  $x \neq 0$  temos  $G_x \cong S^1$ , as rotações com eixo a linha da origem a  $x$ .

Agora pegue uma ação infinitesimal  $\mathfrak{g} \curvearrowright M$ , ie. um mapa

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M \end{aligned}$$

**Definição**

1. *Distribuição orbital:*  $D \subseteq TM$  dado por

$$x \longmapsto T_x M \supseteq D_x = \{u_M(x) : u \in \mathfrak{g}\}$$

2. *Álgebra de isotropia:*  $\mathfrak{g}_x \subseteq \mathfrak{g}$  dada por

$$\mathfrak{g}_x = \{u \in \mathfrak{g} : u_M(x) = 0\}$$

Será que tudo encaixa? O estabilizador é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é a álgebra de isotropia... a distribuição orbital é o fibrado tangente das órbitas?

**Proposição (órbitas, isotropias, ... (Warner))**

- $G_x \subseteq G$  é um subgrupo de Lie e  $\text{Lie}(G_x) = \mathfrak{g}_x$ .
- O conjunto das classes laterais  $G/G_x$  é uma variedade  $C^\infty$  tal que  $G \rightarrow G/G_x$  é submersão.
- Temos uma aplicação natural

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{O}_x \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

E de fato

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{sobre}} & \mathcal{O}_x \\ g & \searrow & \downarrow \\ & G/G_x & \nearrow \\ & & g \cdot x \end{array}$$

bijeção

Assim,  $\mathcal{O}_x$  tem estrutura  $C^\infty$  tal que  $\mathcal{O}_x \stackrel{\text{dif}}{\cong} G/G_x$ .

E mais.  $\mathcal{O}_x \hookrightarrow M$  é uma imersão.

**Observação** Se  $M$  é  $G$ -variedade homogênea, então  $M \cong G/G_x$  para qualquer  $x \in M$ .

### Exemplo

- $S^{n-1}$ . Qual é grupo de isotropia de  $e_n$ ?

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & O(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de fato,

$$S^{n-1} \cong \frac{O(n)}{O(n-1)} = \frac{SO(n)}{SO(n-1)}$$

já que os dois agem transitivamente na esfera—lembre que a variedade não é mais que o quociente do grupo-estabilizador quando tem uma ação homogênea.

•

$$\mathbb{R}P^{n-1} = \frac{SO(n)}{O(n-1)}$$

Pode fazer uma leve meditação ao respeito. Agora tem que fixar uma linha, não só um ponto. Tem que fixar mais pontos, tem menos transformações. Ele colocou uma matriz assim:

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & O(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Porque pode refletir no ponto antípoda e tudo bem.

•

$$\mathbb{C}P^{n_0-1} = \frac{SU(n)}{U(n-1)}$$

**Fato geral**  $G$  grupo de Lie  $H \subseteq G$  subgrupo fechado, então  $G/H$  é  $C^\infty$ -variedade e  $G \rightarrow G/H$  é submersão.

Lembre: uma ação livre, própria... tem o Slice theorem, onde tem que pegar uma vizinhança das órbitas.

**Exemplo (Curiosidade)**  $V$  espaço vetorial,  $\text{Fr}_p(V) = \{(v_1, \dots, v_p) : \text{l.i.}\}$ . Tem uma ação  $\text{GL}(n) \curvearrowright \text{Fr}_p(V)$ . Pode calcular o grupo de isotropia  $H$ , e daí dar uma estrutura diferenciável a  $\text{Fr}_p(V)$ . Essa variedade se chama *variedade de Stiefel*.

### 14.3 De volta à geometria simplética

Queremos finalmente estudar órbitas coadjuntas e quocientes simpléticos.

Pegue um grupo de Lie  $G$  e lembre a ação coadjunta  $G \xrightarrow{\psi=\text{Ad}^*} \mathfrak{g}^*$ . É assim:

$$\begin{aligned} (\text{Ad}^*)_g : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \text{Ad}^*)_g(\xi), u \rangle &= \langle \xi, \text{Ad}_{g^{-1}}(u) \rangle \end{aligned}$$

onde  $u \in \mathfrak{g}$  e  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . De fato,

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g &= d_e I_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ I_g(a) &= g a g^{-1} \end{aligned}$$

**Observação**  $I_g : G \rightarrow G$  é um homomorfismo de grupos,  $\implies \text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é homomorfismo de álgebra de Lie, ie.  $\text{Ad}_g[u, v] = [\text{Ad}_g u, \text{Ad}_g v]$ .

Também vimos que

$$\begin{aligned} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*) \\ u &\longmapsto u_{\mathfrak{g}^*} \\ u_{\mathfrak{g}^*} &= -\xi([u, \cdot]) \end{aligned}$$

onde  $T_\xi \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$

Agora. Pegue  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  fixo. então

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = \mathcal{O}_\eta &= \{\text{Ad}^*(\eta) : g \in G\} \subseteq \mathfrak{g}^* \\ T_\xi \mathcal{O} &= \{u_{\mathfrak{g}^*}(\xi) : u \in \mathfrak{g}\} \end{aligned}$$

**Definição**  $\xi \in \mathcal{O}, \omega_\xi \in \Lambda^2(T_\xi^* \mathcal{O})$ ,

$$\omega_\xi(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) := \langle \xi, [u, v] \rangle$$

Onde tem que mostrar que isso está bem definido. Para isso poderia usar que  $\langle \xi, [u, v] \rangle = -u_{\mathfrak{g}^*}(\xi)(v) \dots$

**Teorema (KKS=Kirillov-Kostant-Sourian)**  $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O})$  é simplética.

*Demonstração.* Seja  $\xi \in \mathcal{O}$

**Paso 1**  $\omega_\xi$  está bem definido.  $u, u' \in \mathfrak{g}$  tal que  $u_{\mathfrak{g}^*} = u'_{\mathfrak{g}^*}(\xi)$ , mais isso é equivalente a que  $\xi([u, \cdot]) = \xi([u', \cdot])$ .

**Paso 2**  $\omega_\xi$  não degenerada:

$$\begin{aligned} \omega_\xi(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) &= 0 \\ \implies \xi([u, v]) &= u_{\mathfrak{g}^*}(\xi)(v) = 0 \\ \iff u_{\mathfrak{g}^*}(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

**Paso 3**  $\xi \longrightarrow \omega_\xi$  é suave. Para isso vamos mostrar que  $\omega$  é G-invariante, ie. que  $(\text{Ad}^*)_g \xi = g\xi$ .

**Exercício** Numa variedade G-homogênea, uma forma G-invariante é suave.

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^* \omega)_\xi(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \omega_{g\xi}(g_*(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi)), g_*(v_{\mathfrak{g}^*}(\xi))) \\
&= \omega_{g\xi}((\text{Ad}_g(u))_{\mathfrak{g}^*}(\xi), (\text{Ad}_g(v))_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \langle (\text{Ad}^*)_g \xi, [\text{Ad}_g(u), \text{Ad}_g(v)] \rangle \\
&= \omega_\xi(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) \\
\implies g^* \omega &= \omega
\end{aligned}$$

**Paso 4**  $\omega$  é fechada. Vamos usar invariância de novo. A invariância significa que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}_{u_{\mathfrak{g}^*}} \omega = i_{u_{\mathfrak{g}^*}} d\omega + di_{u_{\mathfrak{g}^*}} \omega \\
\implies i_{u_{\mathfrak{g}^*}} d\omega &= -d(i_{u_{\mathfrak{g}^*}} \omega)
\end{aligned}$$

**Afirmção**  $i_{u_{\mathfrak{g}^*}} \omega = du$ . Já como é o dual do dual, podemos ver a  $u$  como uma função  $u \in \mathfrak{g} = \mathcal{C}_{\text{lin}}^\infty(\mathfrak{g}^*) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})$ .

Como  $u$  é linear,  $d|_\xi(\eta) = u(\eta)$ . Daí,

$$du|_\xi(v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) = u(v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) = \langle \xi, [u, v] \rangle = \omega_\xi(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)).$$

□

## 15 Aula 15

Na aula pasada:

- Ação coadjunta de uma grupo de Lie na sua álgebra de Lie:

$$G \xrightarrow{\text{Ad}^*} \mathfrak{g}^* \quad \text{Ad}_g = dI_g, \quad I_g(a) = ga g^{-1}$$

- Numa órbita  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ ,

$$\omega(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) := \langle \xi, [u, v] \rangle$$

para  $u, v \in \mathfrak{g}, \xi \in \mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$ , é uma estrutura simplética em  $\mathcal{O}$ .

Hoje: exemplos concretos

## 15.1 Exemplos concretos (da ação coadjunta)

**Observação** Suponha que  $k = \langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma forma bilinear simplética não degenerada e Ad-invariante em  $\mathfrak{g}$ , ie.

$$\langle \text{Ad}_g(u), \text{Ad}_g(v) \rangle$$

Então podemos identificar órbitas adjuntas e coadjuntas assim:

$$\begin{aligned} k^\flat : \text{Ad} \curvearrowright \mathfrak{g} &\xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}^* \curvearrowleft \text{Ad}^* \\ u &\longmapsto \langle u, \cdot \rangle \end{aligned}$$

já que é *equivariante*.

### Exemplo concreto da órbita e ação coadjunta

$$\begin{aligned} \text{SO}(3) &= \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : AA^T = \text{id}, \det A = 1\} \\ \mathfrak{so}(3) &= \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A = -A^T\} \end{aligned}$$

Note que aqui a ação adjunta de  $\text{SO}(3)$  em  $\mathfrak{so}(3)$  é por conjugação. Agora, podemos identificar

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \\ [\cdot, \cdot] &\longmapsto (u, v) \mapsto u \times v \end{aligned}$$

Aqui a ação é por multiplicação de matrizes! I.e.,  $\text{SO}(3) \curvearrowright \mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$  é dada por

$$\begin{aligned} \text{Ad}_A(v) &= Av, \quad v \in \mathbb{R}^3 \\ \text{ad}_u(v) &= u \times v \end{aligned}$$

e além disso, se o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^3$  é  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , temos que essa ação é  $\text{Ad}_{\mathfrak{so}(3)}$ -invariante. Isso nos permite

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{so}(3) & \longrightarrow & \mathfrak{so}(3) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & (\mathbb{R}^3)^* \end{array}$$

Para entender as orbitas coadjuntas de  $\text{SO}(3)$  em  $\mathfrak{so}(3)$  basta analisar o caso em  $\mathbb{R}^3$ .

**Órbitas (co-)adjuntas em  $\mathbb{R}^3 (\cong \mathfrak{so}(3))$ .** De fato, isso vai ser um exercício. Vai concluir que a estrutura simplética nas órbitas dessa ação coincide com a estrutura simplética na esfera.

**Exercício** Mostre que a forma de área na esfera é um múltiplo constante da forma KKS. O múltiplo é  $1/r$  onde  $r$  é o raio da esfera.

### Outro exemplo concreto

$$G = U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = \text{id}\}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) = \{u \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : u = -u^*\}$$

Aqui a ação adjunta  $U(n) \curvearrowright \mathfrak{u}(n)$  é por conjugação. Agora vamos estudar a ação coadjunta.

Temos um prouto interno Ad-invariante em  $\mathfrak{u}(n)$ :

$$(u, v) \longmapsto \text{tr}(u^k v) = -\text{tr}(uv).$$

Portanto temos uma identificação

$$U(n) \curvearrowright U(n) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{u}(n)^* \curvearrowright U(n).$$

Ou seja, a forma de estudar isto é olhando para a ação de  $U(n)$ .

Note ainda que  $\mathfrak{u}(n) = i\mathcal{H}$  onde  $\mathcal{H} = \{\xi \in M_n(\mathbb{C}) : \xi = \xi^*\}$ . Com isso,

$$U(n) \xrightarrow{\text{Ad}^*} \mathfrak{u}(n)^* \cong \mathfrak{u}(n) \cong \mathcal{H} \xleftarrow{\text{Ad}^*} U(n)$$

e então

$$\text{Ad}_A^*(\xi) = A\xi^{-1}A.$$

Portanto,

$$\xi, \xi' \in \mathcal{H} \text{ estão na mesma órbita coadjunta } \mathcal{O}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{teo. espectral}} \text{spec}(\xi) = \text{spec}(\xi')$$

Ado  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Daí as órbitas são

$$\mathcal{O}_\Lambda = \{\xi \in \mathcal{H} : \text{spec}(\xi) = \Lambda\}$$

e se chamam de *isoespetrais*.

Qual é a topologia dessa órbita?

### Alguns casos

- $\lambda_1 < \lambda_2 = \dots = \lambda_n$  cada  $\xi \in \mathcal{O}_\Lambda$  é determinada pelo autoespaço de  $\lambda_1$ , ou seja, uma linha em  $\mathbb{C}^n$ . Defina  $\mu = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ . (Como o teorema espectral nos dá uma decomposição ortogonal com os autoespaços de uma transformação hermitiana, a ação de uma transformação  $\xi \in \mathcal{H}$  fica determinada por essa linha.) Daí,

$$\mathcal{O}_\Lambda \cong \mathbb{CP}^{n-1}$$

- $\lambda_1 = \dots = \lambda_k < \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n$ . Obtemos

$$\mathcal{O}_\Lambda = \text{Gr}(k, n)$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ . Aqui  $\xi \in \mathcal{O}_\Lambda$  está determinada pelos autoespaços  $L_1 \sim \lambda_1, \dots, L_n \sim \lambda_n$ . Equivalentemente,

$$\begin{aligned} E_1 &= L_1 \\ E_2 &= L_1 \oplus L_2 && \text{aqui só } L_2 \text{ e nova info.} \\ &\vdots \\ E_j &= L_1 \oplus \dots \oplus L_j \\ &\vdots \\ E_n &= \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Então temos

$$L_1 = E_1 \subseteq \dots \subseteq E_n = \mathbb{C}^n$$

isso se chama de *variedade bandeira (completa)*.

**Projeto?** Relação entre geometria simplética e álgebra linear. Tem um teorema básico sobre matrizes hermitianas:

**Teorema (Schur-Horn)**  $\mathcal{O}_\Lambda$  uma variedade isoespectral (todos os caras hermitianos cujo espectro e esse  $\Lambda$ ),  $\{\xi \in \mathcal{H} : \text{spec}(\xi) = \Lambda\}$ . Considere o mapa diagonal

$$\text{diag} : \mathcal{O}_\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(É só pegar a diagonal da matriz e colocá-la num vetor.) Então, a imagem de  $\text{diag}$  é um poítopo convexo com vertices dados pelas  $n!$  permutações de  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

**Observação** Esse teorema pode ser generalizado (Atiyah-?) trocando  $\mathcal{O}_\Lambda$  por uma variedade simplética com a ação do toro maximal.

**Horn's problem** Descrever o espectro da soma de duas matrizes hermitianas com espectros conhecidos. Tem um artigo expositório (survey) de A. Knutson, *A The symplectic and algebraic geometry of Horn's problem*. Também tem um artigo de pesquisa famoso com Terry Tao, e outro dele com Terry Tao e Chris Woodward (esses estão citados no survey).

## 15.2 Ponto de vista "Poisson"

Lembre:

### Estrutura de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

forma  $\mathbb{R}$ -bilinear antisimétrica ( $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ) Jacobi e Leibniz ( $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ ).

### Exemplos

- $\{\cdot, \cdot\} = 0$ .
- $(M, \omega)$  simplética,  $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$ .
- (Exemplo nem simplético nem trivial.)  $\mathbb{R}^3 = \{x = (x, y, z)\}$ ,

$$\{f, g\}(x) = \langle x, \nabla f(x) \times \nabla g(x) \rangle$$

onde  $\nabla$  denota gradiente.

Note que pela condição Leibniz do colchete de Poisson,  $\{f, \cdot\}$  é uma derivação, que sabemos que é equivalente a dizer que é um campo vetorial. Assim, para toda função  $f \in C^\infty(M)$  existe um campo vetorial Hamiltoniano. De fato, isso é consistente com o caso do colchete de Poisson associado a uma variedade simplética.

Pegue o Hamiltoniano

$$H(x, y, z) = \frac{x^2}{2I_1} + \frac{y^2}{2I_2} + \frac{z^2}{2I_3}$$

Daí vêm as equações de Euler-?

#### 15.2.1 Descrição tensorial (do colchete de Poisson)

Considere  $\pi \in \Gamma(\wedge^2(TM))$  e o colchete

$$\{f, g\} = \pi(df, dg).$$

Em coordenadas

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

#### 15.2.2 Distribuição característica

Os vectores são vectores hamiltonianos de alguma função :

$$R \subseteq TM, \quad R_x = \{X_f(x) : f \in C^\infty(M)\}$$

### Teorema

- $R \subseteq TM$  é integrável.
- Cada folha tem estrutura simplética natural. Obtemos a *folheação simplética*. Ela determina, caracteriza, a estrutura de Poisson.

#### 15.2.3 Uma classe especial de variedades de Poisson

Uma classe de estruturas de Poisson à que pertence o exemplo que nem é trivial nem é simplético.

$M = V$  espaço vetorial.  $C_{\text{lin}}^\infty(V) \subseteq C^\infty(M)$ . Note que  $\{\cdot, \cdot\}$  é linear. Suponha que  $\{C_{\text{lin}}^\infty(V), C_{\text{lin}}^\infty(V)\} \subseteq C_{\text{lin}}^\infty(V)$ . Note que  $C_{\text{lin}}^\infty(V) \cong V^*$ .



Por outro lado,  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \rightsquigarrow \{\cdot, \cdot\}$  é linear em  $\mathfrak{g}^*$ , e como  $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{\text{lin}}^\infty(\mathfrak{g}^*) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})$ , existe um único  $\{\cdot, \cdot\}$  tal que

$$\{\cdot, \cdot\}|_{\mathfrak{g}} = [\cdot, \cdot]$$

Agora vamos ver a fórmula para o colchete de Poisson associado a  $[\cdot, \cdot]$ :

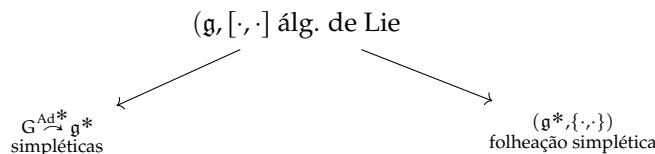
$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)] \rangle$$

para  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ .

### Conclusão

$$\begin{array}{c} \text{estruturas de Poisson} \\ \text{lineares em } V = \mathfrak{g}^* \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{álgebra de Lie} \\ \text{em } V^* = \mathfrak{g} \end{array}$$

Pode ver que



de onde as órbitas coadjuntas correspondem às folhas. O importante aqui é saber que a folheação tem estrutura de Poisson.

## 16 Aula 16

Vimos

- $G$  grupo de Lie.  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$  orbitas coadjuntas possuem uma estrutura simplética canónica. Isso na verdade é um exemplo de um objeto mais geral que a gente vai discutir hoje: ações hamiltonianas.

### 16.1 Caso mais simples

Quando  $G = \mathbb{R}$ . Seja  $(M, \omega)$  simplética. Temos:

$$\mathbb{R}\text{-ação} = \text{fluxo } \psi \rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(M) \text{ campo de vetores}$$

#### Definição

- Uma  $\mathbb{R}$ -ação é **simplética** se  $\psi_t^* \iff \mathcal{L}_X \omega = 0$ . ( $X$  é um campo simplético.)
- $\mathbb{R}$ -ação é **hamiltoniana** se  $X$  é hamiltoniano, i.e., existe uma função  $H$  tal que  $X = X_H$

Agora vamos generalizar isso.

## 16.2 Caso geral

### Definição

- Uma  $G$ -ação é *simplética* se  $\psi_g^* \omega = \omega$  para toda  $g \in G$ , i.e.

$$\begin{array}{ccc} \psi : G & \longrightarrow & \text{Dif}(M) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \text{Simp}(M, \omega) \end{array}$$

- $G$ -ação é *hamiltoniana* se existe uma *aplicação momento*.

Vamos supor a existência de um mapa

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}^\infty(M) & f \\ \mathfrak{g} \nearrow \hat{\mu} & \downarrow & \downarrow \\ & \mathfrak{X}(M) & X_f \\ u \searrow & & \\ & u_M & \end{array}$$

### Observação

- Se  $\hat{\mu}$  existe, não é unicamente determinado.
- Sempre podemos supor que  $\hat{\mu}$  é linear.

É equivalente dar  $\hat{\mu}$  como função  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  ou como uma função

$$\begin{aligned} \mu : M &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \hat{\mu}(u)(x) &= \langle \mu(x), u \rangle \end{aligned}$$

**Definição** Seja  $G \curvearrowright (M, \omega)$  uma ação simplética. Dizemos que é *fracamente hamiltoniana* se existe  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  (equivalentemente,  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  linear) tal que

$$i_{u_M} \omega = d \langle \mu, u \rangle \quad (u_M = X_{\hat{\mu}(u)}) \quad (2)$$

e a ação é *hamiltoniana* se, além disso, vale

$$\mu \text{ é equivariante} \quad (3)$$

isto é,  $\mu : G \curvearrowright M \longrightarrow \mathfrak{g}^* \xleftarrow{\text{Ad}^*} G$ ,

$$\mu \circ \psi_g = (\text{Ad}^*)_g(\mu)$$

No caso abeliano, que é o caso dos fluxos, essa segunda condição de equivariança é trivialmente satisfeita.

## Terminologia

- $(M, \omega, \mu)$  é um *G-espaco hamiltoniano*.
- $\mu$  é *aplicação momento*.
- $G$  abeliano:  $\mu$  é  $G$ -equivariante  $\iff \mu$  é  $G$ -invariante.

**Exemplo** No caso abeliano, isso vira simplesmente escolher uma função que seja a hamiltoniana do campo vetorial associado à  $\mathbb{R}$ -ação. Isso é, a aplicação momento para uma  $\mathbb{R}$ -ação com campo gerador  $X$  é uma função  $H \in C^\infty(M)$  tal que  $X = X_H$ . Note que  $H$  é constante ao longo do fluxo de  $X_H$ .

(Agora?) veremos resultados de existência/obstrução para aplicações momento adiante. (Adiante.)

**Observação** Em termos do *comomento*  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$ , a equivariância de  $\mu$  é equivalente a que

$$\begin{aligned} \iff \psi_g^*(\hat{\mu}(u)) &= \hat{\mu}(\text{Ad}_{g^{-1}}(u)) \quad \forall u \in \mathfrak{g} \\ \implies \mathcal{L}_{v_M}(\hat{\mu}(u)) &= \hat{\mu}([u, v]) \end{aligned}$$

pegando  $g = \exp(tv)$ ,  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$ . Lembre que  $\{\hat{\mu}(u), \hat{\mu}(v)\} = \mathcal{L}_{v_M}(\hat{\mu}(u))$ . i.e.  $G$ -equivariância implica que  $\hat{\mu}$  é um *antihomomorfismo* de álgebras de Lie. A conversa é verdade supondo que  $G$  é conexo.

**Observação** A primeira condição da definição diz que podemos achar a função que é o hamiltoniano do campo vetorial associado ao elemento em  $\mathfrak{g}$ . A segunda condição diz que esse mapa  $\mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$  é um antihomomorfismo de álgebras de Lie (ver diagrama)

## 16.3 Princípio de Noether

$(M, \omega, \mu)$   $G$ -espaco hamiltoniano,  $H \in C^\infty(M)$  hamiltoniano. Então,

$$H \text{ é } G\text{-invariante} \iff \mu \text{ é preservada pelo fluxo hamiltoniano de } H$$

*Demonstração.*

$$\mathcal{L}_{X_H} \langle \mu, u \rangle = i_{X_H} d(\langle \mu, u \rangle) = i_{X_H} i_{u_M} \omega = -i_{u_M} \underbrace{i_{X_H} \omega}_{dH} = -\mathcal{L}_{u_M} H$$

□

(É um desses exemplos onde a definição faz o teorema trivial.)

## 16.4 Exemplos de ações Hamiltonianas

1.  $M = \mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$ .  $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$ .  $G = \mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^{2n}$  por traslação, ie.  $g \cdot (p, q) = (q + g, p)$ . Isso claramente é uma ação. Mas, como pode achar uma aplicação momento para ela?

**Geradores infinitesimais.**  $g = tu$ ,

$$u_M|_{(q,p)} = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Queremos ver se esse campo é hamiltoniano. De fato,

$$i_{u_M} \omega = i_{u_M} \left( \sum_i dq_i \wedge dp_i \right) = \sum_i u_i dp_i = d(\langle p, u \rangle)$$

### 2. Aplicação momento.

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (q, p) &\longmapsto p \end{aligned}$$

**Teorema (Noether)**  $H$  invariante por traslação  $\iff p$  é preservado pelo fluxo de  $H$

**Observação** Lembre do ensino medio onde tinhamos energia cinética mas potencial,  $K + V$ . O teorema diz que um potencial invariante por traslação iff momento linear é preservado.

## 17 De forma mais geral

Quando temos  $(M, \omega)$  e  $\omega = -d\theta$  é exata. Com uma ação  $G \curvearrowright (M, \omega)$ , temos  $\psi_g^* \theta = \theta$ , então  $\mathcal{L}_{u_M} \theta = 0$ . Nesse caso, a ação é hamiltoniana e a aplicação momento está dada por

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \mu, \theta \rangle &= i_{u_M} \theta \end{aligned}$$

*Demonstração.*

•

$$i_{u_M} \omega \stackrel{?}{=} d\langle \mu, u \rangle = di_{u_M} \theta = \underbrace{\mathcal{L}_{u_M}}_{=0} \theta - i_{u_M} d\theta = i_{u_M} \omega$$

•

$$\begin{aligned} (\text{Ad}^*)_g \mu &\stackrel{?}{=} \langle \mu \circ \psi_g, u \rangle = \psi_g^* (\langle \mu, u \rangle) = \psi_g^* (i_{u_M} \theta) = i_{(\psi_{g^{-1}})^* u_M} (\psi_g^* \theta) \\ &= i_{(\text{Ad}_{g^{-1}}(u))_M} \theta = \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}}(u) \rangle = \langle (\text{Ad}^*)_g \mu, u \rangle \end{aligned}$$

□

**Exemplo (Levantamiento cotangente)**  $M = T^*Q$ ,  $\omega_{\text{can}} = -d\alpha$ .

$$G \xrightarrow{\psi} Q \rightsquigarrow G \xrightarrow{\hat{\psi}} T^*Q$$

$$\hat{\psi}_g = (d\hat{\psi}_{g^{-1}})^*$$

Y vimos que o levantamento cotangente preserva a forma tautológica, i.e.,  $(\hat{\psi}_g)^*\alpha = \alpha$ . Isso implica que temos uma ação hamiltoniana.

### Ação momento

$$\begin{aligned} \mu : T^*Q &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \mu, u \rangle &= i_{u_M} \alpha \end{aligned}$$

**Simplificação:**  $\langle \mu(\xi), u \rangle = \xi(u_Q)$ .

Lembre como estava definida a forma tautológica:

$$\begin{array}{ccc} \xi \in & & T^*Q \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ x \in & & Q \end{array}$$

onda simplesmente  $\alpha_\xi = \pi^*\xi$ .

### Exemplo (Outros exemplos)

- $SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{levantamento}} SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^6 \cong T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Com aplicação momento (dada pelo isomorfismo da álgebra  $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$  que já vimos?)

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3 \\ (q, p) &\longmapsto q \times p \end{aligned}$$

que se chama *momento angular*.

Produtos direitos, restrição a subgrupo (vai vir na lista).

Órbitas coadjuntas.  $G \curvearrowright (\mathcal{O}, \omega_{\text{KKS}}) \xrightarrow{\mu=i} \mathfrak{g}^*$ .

## 18 Aplicações momento: quando existem e o que fazer com elas

Nem sempre pode pegar um quociente simplético (a diferencia do mundo Riemanniano). No mundo simplético, temos que pegar conjuntos de nível da aplicação momento.

**Teorema (Marsden-Weinstein, Megre)**  $G \curvearrowright (M, \omega)$ , ação hamiltoniana,  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  aplicação momento. Suponha que  $0 \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular. Então, pela equivariância de  $\mu$  temos uma ação  $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$ :

$$\begin{aligned} x \in \mu^{-1}(0), \quad \mu(x) &= 0 \\ \mu(\psi_g(x)) &= \text{Ad}_g^* \left( \underbrace{\mu(x)}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

(isso significa que tem uma ação de  $G$  em  $\mu^{-1}(0)$ .) Suponha além disso que a ação é boa, i.e. *regular* (definido na seguinte seção), que  $\mu^{-1}(0)/G$  é suavem que a projeção é sumersão. Então, existe uma única forma  $\omega_{\text{red}}$  simplética em  $M_0$  tal que  $i^* \omega = \pi_0^* \omega_{\text{red}}$ . Isso é, a forma simplética é o pullback de uma forma no quociente,

$$\begin{array}{ccc} G \curvearrowright \mu^{-1}(0) & \longrightarrow & M \\ \downarrow \pi_0 & & \\ M_0 := \mu^{-1}(0)/G & & \end{array}$$

**Observação** Esse resultado tem muita história: primero o Meyer provou no Salvador, mas foi despercebido. Daí esse mesmo ano Marsden-Weinsten provaram. Mas também parece que tudo esta relacionado com o Smale, que depois de mostrar a conjectura de Poincaré em dimensões altas estava tentando resolver o problema de treis corpos (talvez usando redução simplética).

## 19 Quocientes de ações por grupos de Lie

### 19.0.1 Criterio para ações regulares

$G \curvearrowright P$ ,  $G$  grupo de Lie,  $P$  vareidade,  $G/P$  espaço de órbitas com topologia quociente.

$$\begin{array}{c} P \\ \downarrow \pi \\ P/G \end{array}$$

Mas ese espaço pode ser ruim. Por exemplo,  $G = \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  com  $(t, x) \mapsto e^t x$  gera um espaço de treis órbitas:  $\mathbb{R}^-$  para  $x < 0$ ,  $\mathbb{R}^+$  para  $x > 0$  e  $0$  para  $x = 0$ . Mas qualquer aberto contendo  $0$  é todo  $\mathbb{R}$ : esse espaço nem é Hausdorff.

**Definição**  $G \curvearrowright P$  é *regular* se  $P/G$  é uma  $C^\infty$ -variedade e  $p \xrightarrow{\pi} P/G$  é sumersão.

**Critério**  $G \curvearrowright P$ .

- *Livre*:  $\forall p \in P, G_p = \{e\}$  ( $g \cdot p = p \implies g = e$ ).
- *Própria*: a função

$$\begin{aligned} G \times P &\longrightarrow P \times P \\ (g, p) &\longmapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

é *própria* se a imagem inversa de compacto é compacto.

**Exemplo**  $G$  compacto  $\implies$   $G$ -ação é própria.

**Teorema (Palais)**  $G \curvearrowright P$  livre, própria, então é regular.

*Idea da prova.* Queremos construir uma estrutura suave em  $P/G$ . Pegue um ponto. É uma órbita. Pegue uma subvariedade complementar, transversal, à órbita:  $T_x S \oplus T_x \mathcal{O} = T_x P$ . Faça agir o grupo nessa variedade transversal localmente. O resultado de uma vizinhança da órbita. Essa vai ser a carta. Usar teorema da função inversa.

Também pode usar critério de Godement (isso é mais geral). Uma variedade  $M$ , uma relação de equivalência  $R \subseteq M \times M$  (pode ser foliação, ...). Então o quociente é variedade suave se e só se a relação de equivalência é fechada e mergulhada e a projeção a um dos fatores é sumersão. Então aqui a gente só prova que o mapa da definição de mapa próprio é um mergulho fechado.  $\square$

## 20 Aula 17: redução simplética (quociente simplético)

Lembre:

- **Ação hamiltoniana:** existe uma pliação momento  $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  satisfazendo duas propriedades:  $i_{u_M} \omega = \partial \langle \mu, u \rangle$  e  $G$ -equivariância de  $\mu$ , i.e.  $\mu \cdot \psi_g = (\text{Ad}^*)_g \mu$

Hoje: Redução simplética (quociente simplético)

### 20.1 Uma proposição parecida ao exercício 5 da lista 3

Precisaremos considerar a seguinte situação:

$$\begin{array}{c} G \curvearrowright P \\ \downarrow \\ B = P/G \end{array}$$

que é uma ação *regular* (livre, própria).

**Pergunta** Quando  $\omega \in \Omega^2(P)$  é *básica*, ie. da forma  $\pi^* \bar{\omega}$ ,  $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$ ?

**Definição**  $\omega$  da forma  $\pi^* \bar{\omega}$  é dita *básica* (com respeito à ação).

### 20.2 $G$ conexo

**Observação**  $G$  conexo  $\implies$  órbitas conexas  $\implies \pi$  é sumersão com fibras conexas. Nesse caso, (lista 3)

$$\omega \text{ é básica} \iff \begin{cases} \mathcal{L}_{u_M} \omega = 0, \\ i_{u_M} \omega = 0 \end{cases} \quad \forall u \in \mathfrak{g}$$

### 20.3 G qualquer

Primeiro lembre que

#### Proposição

1.  $\omega$  é básica se e somente se  $\omega$  é **G-invariante (em caso de G ser conexo isso é equivalente a  $\mathcal{L}_{u_M}\omega = 0$ )**, e  $i_{u_M}\omega = 0$ , i.e.  $\ker \pi_* \subseteq \ker \omega$ .

E mais, se  $\omega = \pi^*\bar{\omega}$ , vale

2.  $d\omega = 0 \iff d\bar{\omega} = 0$
3.  $\bar{\omega}$  não degenerada  $\iff \ker \pi_* = \ker \omega$ .

#### Proposição

1. Só tem um jeito de definir  $\bar{\omega}$ :

$$\bar{\omega}_b(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \omega_p(X, Y)$$

onde  $\pi_*(X) = \tilde{X}$  e  $\pi_*(Y) = \tilde{Y}$  e  $b = \pi(p)$ . Daí só tem que verificar que  $\bar{\omega}$  está bem definido:

- Não depende das escolhas de X e Y. Fixando p, temos que

$$X + \ker \pi_*, Y + \ker \pi_*$$

- Não depende de p tal que  $\pi(p) = b$ . Aqui usamos que  $\omega$  é G-invariante, **essa é a única diferença com o exercício 5 da lista 3**. Temos

$$\pi(p) = \pi(p') \iff p = g \cdot p'$$

$$\omega_p(X, Y) = \omega_{p'}(X', Y')$$

$$X = d\psi_g(X'), \quad Y = d\psi_g(Y')$$

assim,  $\bar{\omega}$  está bem definido, é suave e  $\pi^*\bar{\omega} = \omega$

2. Como na lista 3
3. Como na lista 3.

### 20.4 Redução simplética

Pegue  $G \curvearrowright (M, \omega)$ , a aplicação momento,  $\chi \in \mathfrak{g}^*$ , e algumas outras coisas mais que não consegui escrever (é o cenário para:)

**Teorema (Marsden-Weinstein, Meyer)** Por cada elemento no dual da algebra de Lie, temos uma variedade pegando imagem inversa do mapa momento e quotientando.

$G \curvearrowright (M, \omega)$ ,  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Seja  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  valor regular de  $\mu$ , i.e.  $\mu^{-1}(\xi) \rightarrow M_\xi = \mu^{-1}(\xi)/G_\xi$ . Suponha  $G_\xi \curvearrowright \mu^{-1}(\xi)$  é uma subvariedade regular.



Então existe uma única forma simplética  $\omega_{\text{red}}$  em  $M_\xi = \mu^{-1}(\xi)/G_\xi$  tal que

$$\pi_\xi^* \omega_{\text{red}} = i_\xi^* \omega$$

ie,

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\xi) & \xleftarrow{i_\xi} & M^\omega \\ \downarrow \pi_\xi & & \\ (M_\xi, \omega_{\text{red}}) & & \end{array}$$

**Observação** A diferença com a outra vez que enunciamos o teorema é que quando pegamos um ponto arbitrário no  $\mathfrak{g}^*$  temos que ter cuidado com qual é o grupo que é invariante na variedade para quocientar: pode não ser o  $G$  tudo.

*Demonstração.* Só temos que checar que

$$i^* \xi(\omega) \in \Omega^2(\mu^{-1}(\xi)) \text{ é básica para } G_\xi\text{-ação}$$

ou seja, de acordo com a proposição, queremos ao fim de contas, que

- $G_\xi$ -invariante. (Isso é muito simples.)
- $\ker(\pi_\xi)_* = \ker(i_\xi^* \omega)$ . Só falta ver isso. Note que

$$T_x(G_\xi \cdot x) = \ker(\pi_\xi)_*|_x, \quad \ker(i_\xi^* \omega)|_x = T_x(\mu^{-1}(\xi)) \cap T(\mu^{-1}(\xi))^\omega$$

Agora vamos trabalhar com isso na forma de um lema:

**Lemma**

1.  $T_x(\mu^{-1}(\xi)) = T_x(G \cdot x)^\omega$ .
2.  $T_x(G_x \cdot x) = T_x(G \cdot x) \cap T_x(\mu^{-1}(\xi))$

Daí podemos pegar  $\omega$ -complemento na igualdade 1., daí substituímos na igualdade 2. e o teorema segue.

*do Lema.*

1. Isso é provar que  $\ker d_x \mu = T_x(G \cdot x)^\omega$ . Isso é verdade porque (propriedades do mapa momento)

$$\begin{aligned} x \in \ker d_x \mu &\iff \langle d\mu(X), u \rangle = 0 \quad \forall u \\ &\iff i_X \underbrace{d\langle \mu, u \rangle}_{i_{u_M} \omega} = 0 \quad \forall u \\ &\iff X \in T_x(G \cdot x)^\omega \end{aligned}$$

2. Por um lado,

$$T_x(G_\xi \cdot x) = \{u_M(x) | u \in \mathfrak{g}\} = \{u_M(x) | u \text{ satisfaz } u_{\mathfrak{g}*}(\xi) = 0\}$$

Por outro lado, (equivariância de  $\mu$ )

$$T_x(G \cdot x) = \{u_M(x) | u \in \mathfrak{g}\}$$

$$\ker d_*\mu = T_x(\mu^{-1}(\xi)) = \{X | d\mu(X) = 0\}$$

Intersectando ambos obtemos

$$\{u_M(x) | d\mu(u_M(x)) = 0\}$$

e pela equivariância de  $\mu$ ,  $d\mu(u_M(x)) = 0 \iff u_{\mathfrak{g}*}(\xi) = 0$ .

□

□

## 20.5 Alguns comentários sobre o teorema

**Para que serve?** Por exemplo, para diminuir os graus de liberdade de um sistema Hamiltoniano em uma variedade. Também pode ser que o espaço de moduli seja esse quociente.

**Em vários casos a redução é "singular"** É quando a ação não é regular, não tem quociente suave. Aqui pode usar "espaços estatificados". Também pode usar um approach mais algébrico: redução "homológica". Isso último leva aos métodos BRST e BV.

**Exercício**  $x \in M$ ,  $\mathfrak{g}_x \subseteq \mathfrak{g}$ , então vale

$$\text{Ann}(\mathfrak{g}_x) = \text{img } d_x\mu$$

daí,  $\xi$  é um valor regular  $\implies \mathfrak{g}_x = \{0\} \implies G_x$  é discreta  $\implies G_\xi \curvearrowright \mu^{-1}(\xi)$  é localmente livre. Se  $G_\xi$  é compacto,  $M_\xi$  é um *orbifold simplético*.

**Outro comentário**  $\xi$  valor regular,  $M_\xi = \mu^{-1}(\xi)/G_\xi$  onde  $G_\xi$  age livremente em  $\mu^{-1}(\xi)$ .

$$\begin{aligned} \dim M_\xi &= \dim \mu^{-1}(\xi) - \dim G_\xi \\ &= \dim M - \underbrace{\dim \mathfrak{g}^*}_{\dim G} - (\dim G - \dim \mathcal{O}_\xi) \\ &= \dim M + \dim \mathcal{O}_\xi - 2 \dim G \end{aligned}$$

**Shift trick (Vai vir na lista)** ... A redução simplética depende da escolha do  $\xi$ . Se pegamos  $\xi, \xi'$  na mesma órbita coadjunta, então  $M_\xi \cong M_{\xi'}$ . Tem mais: bota tudo em um espaço mais grande para mostrar que todo quociente é um quociente do zero naquele espaço maior... vai vir na lista

**Hamiltoniano em  $M$  da hamiltoniano em  $M_\xi$**  Isso mem

## 20.6 Um exemplo muito simples

### Um exemplo muito simples

A reta agindo numa variedade simplética, que é o fluxo de algum campo  $X$ . A aplicação momento é o Hamiltoniano  $H \in C^\infty(M)$ ,  $X_H = X$ , a aplicação momento é  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Isso daqui é uma ação hamiltoniana no caso mais simples.

Agora pegue um valor regular de  $H$ ,  $\xi$ . Se a ação  $\mathbb{R} \curvearrowright H^{-1}(\xi)$  é boa, obtemos que  $H^{-1}(\xi)/\mathbb{R}$  é uma variedade simplética com  $\omega_{\text{red}}$ .

**Exemplo** Muito parecido: considere  $\mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ , a ação do círculo assim:

$$e^{i\theta}(z_0, \dots, z_n) = (e^{i\theta}z_0, \dots, e^{i\theta}z_n)$$

Agora, pelo teorema da aplicação momento (?), temos que

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu(z) &= -\frac{1}{2}\|z\|^2 + \underbrace{1/2}_{\text{opcional}} \end{aligned}$$

assim,  $\mu^{-1}(0)/\mathbb{S}^1 = \mathbb{CP}^n$ ,  $\omega_{\text{red}}$ , i.e., **pelo teorema de Marsden-Weinstein, o  $\mathbb{CP}^n$  tem uma estrutura simplética.**

**Mesmo mas mais geral** Agora pegue

$$e^{i\theta}(z_0, \dots, z_n) = (e^{ik_0\theta}z_0, \dots, e^{ik_n\theta}z_n)$$

Considere caso  $n = 1$ , temos

$$e^{i\theta}(z_0, z_1) = (e^{k\theta}z_0, e^{i\theta}z_1)$$

obtemos

$$\mu(z_0, z_1) = -\frac{1}{2}(k\|z_0\|^2 + \|z_1\|^2)$$

Pegue  $\xi < 0$  valor regular. Se  $k = 1$  obtemos um quociente que é topologicamente uma esfera, mas tem uma singularidade: a *gota de lágrima*—uma esfera com um pontinho singular.

## 21 Aula 18