Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 7

Contents

Problem 1

(a) Let $\alpha \in \Omega^1(N)$ be a contact form. Consider $N \times \mathbb{R}$ equipped with the 2-form $d(e^t\alpha)$ (where t is the coordinate on $\mathbb{R}$). Verify that this 2-form is symplectic, and conclude that any (N, α) can be viewed as a hypersurface of contact type of a symplectic manifold.

(b) On the other hand: Let (M, ω) be symplectic and $\iota : S \hookrightarrow M$ a hypersurface of contact, with contact form α. Suppose that S is compact. Show that there is a neighbourhood U of S in M that is symplectomorphic to a neighbourhood of S in its symplectization, $(S \times (-\varepsilon, \varepsilon), d(e^t\alpha))$, for an $\varepsilon > 0$.

(c) Let $\xi \in \Omega^1(N)$ be a contact form on N and $D = \ker \xi \subset TN$. Let $L \subset N$ be a submanifold such that $TL \subset D|_L$.

(1) Check that T_xL is an isotropic subspace of the symplectic vector space $(D_x, d\xi|_x$ for all $x \in L$, so $\dim L \leqslant \frac{1}{2\,\mathrm{rk}(D)}$. In case of equality, we call L ***legendrian***.

(2) Very that L is legendrian iff $L \times \mathbb{R}$ is a lagrangian submanifold of the symplectization $N \times \mathbb{R}$.

Solution.

(a) By Lista 1, exercise 1, it's enough to show that $\Big(d(e^t\alpha)\Big)^n \neq 0$. Since

$$d(e^t\alpha) = e^t(dt \wedge \alpha + d\alpha),$$

it's enough to show that $(dt \wedge \alpha + d\alpha)^n \neq 0$. Since the wedge product of 2-forms commutes, we may apply binomial theorem to get

$$\Big((dt \wedge \alpha) + d\alpha\Big)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (dt \wedge \alpha)^{n-i} \wedge (d\alpha)^i.$$

(With a little help from StackExchange.) When $i = n-1$ we find the term $n(dt \wedge \alpha) \wedge (d\alpha)^{n-1}$, which must be nowhere vanishing since so is dt and α is a contact form. Further, when $i = n$ we have $(d\alpha)^n$, which vanishes since α is a form on the $(n-1)$-dimensional manifold M. Likeways, $(dt \wedge \alpha)^2$ vanishes since $(dt)^2$ vanishes on $\mathbb{R}$. We conclude that the only term that survives is when $i = n-1$.

To see that $N \subset N \times \mathbb{R}$ is a hypersurface of contact type consider the inclusion $i : N \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (x, 0)$. Then

$$i^* d(e^t \alpha) = d i^*(e^t \alpha) = d\alpha$$

since for any point $x \in N$ and vector $v \in T_x N$ we see that

$$i^*(e^t \alpha)_x(v) = (e^t \alpha)_{i(x)}(i_* v) = (e^t \alpha)_{(x,0)}(v) = \alpha(v).$$

(b) O teorema da vizinhança tubular nos diz que existe uma vizinhança U de S em M e um difeomorfismo $\psi : U \to S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $f|_S = \mathrm{id}$. Como o campo vetorial conformemente simplético X é transversal a S, podemos supor que em coordenadas locais de $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, $X = \frac{\partial}{\partial t}$.

Seguindo o hint (e a prova em Bursztyn and Macarini, thm. 5.2.1), seja Y o campo de Reeb de S e defina $W_1 = \ker \alpha$ e $W_2 = \mathrm{span}(X, Y)$. Para ver que W_1 e W_2 são ω-ortogonais pegue $V \in \ker \alpha$. Por um lado, $\omega = d\alpha$ por ser S uma hiperfície, e como Y é o campo de Reeb, $\omega(Y, V) = 0$. Por outro lado, $\iota^*(i_X \omega) = \alpha$, de modo que $\omega(X, V) = 0$.

Para confirmar que também são $\psi^*(de^t \alpha)$-ortogonais, note que

$$\psi^*(de^t \alpha) = e^t \psi^* dt \wedge \alpha + d\alpha$$

já que $\psi^* \alpha = \alpha$. Daí, como no parágrafo anterior, $d\alpha(Y, V) = 0$ por ser Y de Reeb, e

$$\alpha \wedge \psi^* dt(Y, V) = \cancelto{0}{\alpha(V)} \psi^* dt(Y) - \cancelto{1}{\alpha(Y)} \psi^* dt(V) = 0 \tag{1}$$

já que V e tangente a S.

Para o caso de X, como antes, $d\alpha(X, V) = 0$ e temos

$$\alpha \wedge \psi^* dt(X, V) = \cancelto{0}{\alpha(V)} \psi^*(X) - \cancelto{0}{\alpha(X)} \psi^* dt(V) = 0 \tag{2}$$

de novo porque $\alpha = \iota^*(i_X \omega)$ e ω é simplética.

Para concluir queremos ver que $\psi^* d(e^t \alpha) = \omega$. O teorema de Darboux-Weinstein nos da exatamente esse resultado (possivelmente numa vizinhança mais pequena que U) se mostramos que $\psi^* d(e^t \alpha)|_x = \omega|_x$ em todo ponto $x \in S$. Lembre que, em pontos de S,

$$\psi^* d(e^t \alpha) = \psi^* dt \wedge \alpha + d\alpha$$

Basta comprovar o resultado em W_1 e W_2. Para W_1 é claro já que $W_1 = \ker \alpha$ e $d\alpha = \omega$ em S. Para W_2 note que o fator $\psi^* dt \wedge \alpha$ se anula em pares de campos vetoriais se um deles é X ou Y; isso segue das eqs. (1) and (2).

(c) (1) (Com ajuda de ChatGPT) A observação chave é que como $TL \subset D = \ker \xi$, quando escrevemos $d\xi$ na fórmula sem coordenadas obtemos

$$d\xi(X, Y) = X(\xi(Y)) - Y(\xi(x)) - \xi([X, Y]) = 0 \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(L)$$

já que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(L)$ por ser L uma subvariedade.

(2) Suponha que L é legendriana. Primeiro note que $\dim(L \times \mathbb{R}) = \frac{1}{2}\dim(N \times \mathbb{R})$: como D é de codimensão 1,

$$\dim(L \times \mathbb{R}) = \dim L + 1 = \frac{1}{2}\operatorname{rk} D + 1 = \frac{1}{2}(\dim N - 1) + 1 = \frac{1}{2}\dim(N \times \mathbb{R}).$$

Além disso, por (1) sabemos que L é isotrópica.

Supondo que $L \times \mathbb{R}$ é uma subvariedade lagrangiana de $N \times \mathbb{R}$, por uma conta análoga sabemos que $\dim L = \frac{1}{2}\operatorname{rk}(D)$. Para ver que $T_x L$ é um subespaço isotrópico de $T_x N$ devemos usar que $T_{(x,t)}(L \times \mathbb{R})$ é um subespaço lagrangiano de $T_{(x,t)}(N \times \mathbb{R})$; isso significa que a forma simplética $d(e^t\xi) = e^t(dt \wedge \xi + d\xi)$ se anula em $T_{(x,t)}(L \times \mathbb{R})$. Mediante o mergulho $\iota : L \hookrightarrow L \times \mathbb{R}$, $\iota(x) = (x, 0)$, obtemos que $d\xi|_{T_x L} = 0$.

□

Problem 2 Show the Darboux theorem for contact manifolds: Given contact manifold (N^{2n-1}, α), around any point there exist local coordinates $q^1, \ldots, q^{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, z$ such that $\alpha = \sum_i q^i dp_i + dz$.

Ideia de prova. Em Arnold, Vogtmann, and Weinstein, apéndice 4, temos uma prova deste teorema usando simplectificação. Porém, Arnold define a simplectifiação de uma variedade de contato como o conjunto de das formas de contato na variedade. (As formas de contacto são todas proporcionais, de forma que esse conjunto é um fibrado linear.) A forma simplética é a diferencial da “forma tautológica” definida neste fibrado—a definição dessa forma é idéntica à da forma tatutológica no fibrado cotangente:

$$\alpha_{(x,\xi)} = (d\pi_{(p,\xi)})^* \xi,$$

para $(x, \xi) \in T^*N$ com ξ de contato, i.e. $d\xi$ é simplética em $\ker \xi$.

Para mostrar o teorema de Darboux para variedades de contato, pegue um ponto na variedade de contato N e um ponto na fibra dele na simplectização. Alí usamos o teorema de Darboux para expressar a forma simplética da simplectização como

$$d\alpha = dp_0 \wedge dq_0 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

Mas ainda, podemos pegar essas coordenadas tais que a hiperfície $p_0 = 0$ é a variedade de contato. (Faltou checar.)

Como a diferencial da forma $\sum_{i=0}^n p_i dq_i$ é $d\alpha$, segue que

$$\alpha = p_0 dq_0 + \ldots + p_n dq_n + dw$$

para alguma função w. Daí, a restrição a N é

$$\alpha|_N = p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n + dw.$$

Para concluir devemos ver que $\alpha|_N$ é uma forma de contato, i.e., que a diferencial dela $d\alpha|_N$ é simplética em $\ker \alpha|_N$. Porém, não consegui descrever $\ker \alpha|_N$ tomando em conta o sumando dw.

□

Problem 4 The ***manifold of contact elements*** of an n-dimensional manifold X is $\mathcal{C} = \{(x, \chi_x) : x \in X \text{ and } \chi_x \text{ is a hyperplane in } T_xX\}$. On the other hand, the projectivization of the cotangent bundle of X is $\mathbb{P}^*X = (T^*X \backslash \text{zero section})/\sim$, where $(x, \xi) \sim (x, \xi')$ whenever $\xi = \lambda\xi'$ for some $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(a) Show that $\mathcal{C}$ is naturally isomorphic to $\mathbb{P}^*X$ as a bundle over X.

(b) There is on $\mathcal{C}$ a canonical field of hyperplanes $\mathcal{H}$: $\mathcal{H}$ at the point $p = (x, \chi_x) \in \mathcal{C}$ is the hyperplane $\mathcal{H}_p = (d\pi_p)^{-1}\chi)_x$, where $\pi : \mathcal{C} \to X$ is the projection. Therefore, by item (a), $\mathcal{H}$ induces a field of hyperplanes $\mathbb{H}$ on $\mathbb{P}^*X$. Describe $\mathcal{H}$.

(c) Check that $(\mathbb{P}^*X, \mathbb{H})$ is a contact manifold, and therefore $(\mathcal{C}, \mathcal{H})$ is a contact maifold.

(d) What is the symplectization of $\mathcal{C}$?

Solution.

(a) Consultando Silva e Arnold, Vogtmann, and Weinstein confirmei que os hiperplanos χ_x passam pela origem, i.e. são subespaços lineares. Segue do teorema da dimensão que o kernel de uma 1-forma é um subespaço de codimensão 1, i.e. um hiperplano, e de fato esse hiperplano é invariante quando multiplicamos a forma por um escalar não zero. Isso garante que a seguinte correspondência está bem definida em cada ponto $x \in X$:

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}^*X)_x &\longrightarrow \mathcal{C}_x \\ [\xi_x] &\longmapsto \ker \xi_x \end{aligned}$$

Para ver injectividade, suponha que $\xi_x, \xi'_x \in T^*_xM$ tem o mesmo kernel em algum ponto $x \in X$. Queremos ver que $\xi'_x(v) = \lambda\xi_x(v)$ para todo $v \in V\backslash \ker \xi_x$. Fixe um v fora do kernel e defina $\lambda = \xi'_x(v)/\xi_x(v)$. Como o kernel e de codimensão 1, todo vetor $w \in V\backslash \ker \xi$ é da forma $w = \mu v$. Daí $\xi'_x(w) = \xi'_x(\mu v) = \lambda\xi_x(\mu v) = \lambda\xi_x(w)$.

A surjetividade segue de que os espaços $(\mathbb{P}^*X)_x$ e $\mathcal{C}_x$ tem a mesma dimensão: $\dim X - 1$. Isso é claro no caso de $\mathbb{P}^*X$. Para $\mathcal{C}$ também es simples já que podemos identificar cada hiperplano em $\mathcal{C}_x$ com a reta normal a ele respeito a produto ponto usual, o que nos diz que de fato $\dim \mathcal{C}_x = \dim \mathbb{R}\mathbb{P}^{\dim X} = \dim X - 1$.

(b) Denotando por φ o isomorfismo do item anterior, temos o seguintes dados:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{P}^*X \arrow[dl, "\pi_0"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_x \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{P}^*X)_x & \qquad & T_{(x,\chi_x)}\mathcal{C} \xrightarrow{d\varphi} T_{(x,[\xi])}\mathbb{P}^*X \\ (x,\chi_x) \longmapsto [\xi], \ \ker \xi = \chi_x & & \mathcal{H}_{(x,\chi_x)} \rightsquigarrow \qquad ? \end{array}$$

Onde

$$\mathcal{H}_{(x,\chi_x)} = (d\pi_{(x,\chi_x)})^{-1}\chi_x.$$

O hint em Silva é considerar o pullback de ξ baixo π_0, que é uma 1-forma em $\mathbb{P}^*X$, cujo kernel é um hiperplano de $T_{(x,[\xi])}\mathbb{P}^*X$. Só queda comprovar que de fato esse hiperplano é $d\varphi(\mathcal{H}_{(x,\chi_x)})$.

$d\varphi$ manda um vetor tangente $v \in T\mathcal{C}$ em um vetor tangente $d\varphi := w \in T\mathbb{P}^*M$. Como $d\pi v$ está no kernel de ξ, segue que $d\pi_0 w$ também. (Isso segue de que tanto φ quanto as projeções π, π_0 não alteram as primeiras n coordenadas.) Concluimos que os vetores em $d\pi\left(\mathcal{H}_{(x,\chi_x)}\right)$ são aqueles que se anulam baixo $\xi \circ d\pi_0 = (d\pi_0)^*\xi$.

Agora note que o pullback de ξ baixo π_0 é a forma tautológica α do fibrado cotangente em $(x, [\xi])$. Lembre a expressão em coordenadas locais de α no fibrado cotangente sem projetivizar:

$$\alpha = \sum \xi_i \, dx_i \tag{3}$$

onde $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ são coordenadas do espaço cotangente perto de (x, ξ). Segue que os vetores no kernel de α são os vetores *verticais*: aqueles que não tem coordenadas ∂_{x_i}. O hiperplano $\mathbb{H}_{(x,[\xi])}$ é a projetivização desse espaço de vetores verticais.

(c) Mostrar que $(\mathbb{P}^*X, \mathbb{H})$ é de contato significa achar uma 1-forma α em $\mathbb{P}^*X$ tal que $\ker \alpha = \mathbb{H}$ e $d\alpha$ é simplética em $\mathbb{H}$. De fato, a escolha de α é exatamente a forma tautológica em eq. (3).

O detalhe aqui é que a definição de estrutura de contato em Silva é um campo de hiperplanos definidos *localmente* como o kernel de uma 1-forma cuja derivada exterior é simplética no hiperplano. Já sabemos que $\ker \alpha_{(x,[\xi])} = \mathbb{H}_{(x,[\xi])}$. Para ver que $d\alpha$ é simplética em $\mathbb{H}_{(x,[\xi])}$ considere um sistema de coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n, [\xi_1, \dots, \xi_n])$ em $\mathbb{P}^*X$. Mas ainda, fixe coordenadas afins $\xi_1 = 1$. Nessas coordenadas, a forma tautológica na eq. (3) tem a forma

$$\alpha = dx_1 + \sum_{i=2}^{n} \xi_i \, dx_i. \tag{4}$$

Segue que

$$d\alpha = \sum_{i=2}^{n} d\xi_i \wedge dx_i,$$

que é simplética.

(d) (Ideia) A simplectização de $\mathcal{C}$ é o fibrado cotangente. A forma simpléica na simplectização de $\mathcal{C}$ é

$$d(e^t\alpha) = e^t(dt \wedge \alpha + d\alpha).$$

Sustituindo eq. (4) obtemos que

$$d(e^t\alpha) = e^t\Big(dt \wedge dx_1 + \sum_{i\geqslant 2}\xi_i dt \wedge x_i + \sum_{i\geqslant 2} d\xi_i \wedge dx_i\Big)$$

Daí eu queria chegar à forma simplética canônica no espaço cotangente...

□

Problem 5 Let (M, α) be a contact manifold with contact structure $\xi = \ker \alpha$. A ***contact vector field*** X on M is a vector field whose (linearized) flow preserves ξ.

(a) Let R_α be the Reeb vector field of α. Prove that R_α is a contact vector field.

(b) Suppose that X is a contact vector field transverse to ξ. Show that it can be written as a Reeb vector field for some 1-form α_X defining the contact structure ξ.

Solution.

(a) Pela fórmula de Cartan e as propriedades que definem R_α, é imediato que

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = di_{R_\alpha}\alpha + i_{R_\alpha}d\alpha = 0.$$

Segue que, se φ_t é o fluxo de R_α,

$$v \in \ker\alpha \iff 0 = \alpha(v) = \varphi_t^*\alpha(v) = \alpha(d\varphi_t(v)) \iff d\varphi_t v \in \ker\alpha$$

□

References

Arnold, V.I., K. Vogtmann, and A. Weinstein. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781475716931.

Bursztyn, H. and L. Macarini. *Introdução a Geomeria Simplética*. 2006. URL: https://w3.impa.br/~henrique/papers/EGD2806.pdf.

Silva, A.C. da. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics no. 1764. Springer, 2001. ISBN: 9783540421955.