Geometria simplética

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e Tong, Lectures on Classical Mechanics.

1 Aula 1

1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geométrica da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descripções da mecânica clásica:
  - Newtoniano: $F = ma$, ecuação diferencial ordinária de segunda ordem.
  - Lagrangiano: princípio gravitacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
  - Hamiltoniano.

1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$ (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$.
- Campo Hamiltoniano: $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$$

  Which coincides with Lee's formula

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)),$$
$$\dot{y}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t))$$

  where Lee defined the ***Hamiltonian vector field*** as the *analogue of the gradient with respect to the symplectic form*, that is, satisfying $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$ for any vector field Y.

Also look at Tong's formulation:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

where L is the Lagrangian and the Hamiltonian function H is obtained as the Legendre transform of the Langrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the n 2^{nd} order differential equations by $2n$ 1^{st} order differential equations for q_i and p_i.

> In practice, for solving problems, this isn't particularly helful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de X_H, ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as ***Equações de Hamilton*** (de novo).

Exemplo. Partícula de massa m em $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$ sujeita a campo de força conservativa

$$F = -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3$$
$$q(t) = (q_1, q_2, q_3)$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaçode fase $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$.
- Hamiltoniano: $H(p, q) = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \overset{-J_0\nabla H}{\rightsquigarrow} X_H$$

where $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of H and then applying J_0. So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo ∇H e X_H : taxa de variação de H ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais? Tal vez é a derivada exterior de H, dH em lugar do gradiente de H.

- ***Fluxo gradiente***

$$\begin{aligned} c'(t) &= \nabla H(c(t)) \\ \frac{d}{dt}H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t)\rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2 \end{aligned}$$

  ∇H aponta na direção que H variação.

- ***Fluxo hamiltoniano***

$$\begin{aligned} c'(t) &= X_H(c(t)) \\ \frac{d}{dt}H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t)\rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0\nabla H(c(t))\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

  ?, $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$.

- ***Gradiente.*** $\nabla H(x) \in T_x\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

  onde g_0 é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

  assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

  Analogamente, $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$ é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \qquad \Omega_0(u, v) = -dJ_0V,$$

  ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

Observação. Note que Ω_q define uma 2-forma (c. . . ?) em $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$.

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

X_H é único tal que $i_{X_H}\omega_0 = dH$. So this was Lee's definition ◡̈.

Definição (temporária). Uma ***variedade simplética*** é (M, ω), $\omega \in \Omega^2(M)$ localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$.

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva ω em $\sum_i dq_i \wedge dp_i$.

Teorema (de Darboux, em Lee). Let (M, ω) be a $2n$-dimensional symplectic manifold. For any $p \in M$ there are smooth coordinates $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ centered at p in which ω has the coordinate representation $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$.

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.

$$\begin{tikzcd}
\text{mecânica clásica} \arrow[r, "\text{quântica}"] \arrow[dr] & \text{Teoria de rep. de Lie} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{geo. Riemanniana} \arrow[dl] \\
& \text{geo. simplética} \arrow[dl, bend right] \arrow[d] & \\
\text{geo. Kähler} & \text{dinámica Lagrangiana?} &
\end{tikzcd}$$

1.4 Álgebra linear simplética

V espaço vetorial real, $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilinea ansimétrica, i.e. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$.

Definição. Ω é não degenerada se $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$.

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero $v \in V$ there exists $w \in V$ such that $\omega(v, w) \neq 0$; and it is equivalent to the linear map $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$ being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix (ω_{ij}) representing ω is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0 \ \forall v\}$$

então Ω é não degenerada se e somente se $\ker(\Omega) = \{0\}$.

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada é chamada simplética. (V, Ω) é um ***espaço vectorial simplético***.

Observação.

1. $\{e_1, .., e_n\}$ base de V, Ω é representado por uma matriz antisimétrica

$$A = (A_{ij}), \qquad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \qquad \Omega(u, v) = u^t A, v.$$

2. Ω é não degenerada se e somente se $\det(A) \neq 0$.

   Note que

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det(A)$$
$$\text{implica que} \quad \det A \neq 0 \implies m = \dim V = 2n$$

3. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$. Defina

$$\begin{aligned} \Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

   note que $\ker \Omega = \ker(\Omega^\flat)$, assim Ω é não degenerada se e somente se $\Omega^\flat$ é isomorfismo.

2 Aula 2

2.1 Subespaços de evs

Sejam (V, Ω) evs e $V \subseteq V$ subespaço.

Definição.

$$W^\Omega := \{u \in |\Omega(u, w) = 0 \; \forall w \in W\}$$

Considere a restrição de Ω à W:

$$i : W \hookrightarrow V \qquad i^*\Omega(\Omega|_W \in \Lambda_2 W^*,$$

então

$$\ker(\Omega|_W) = \{w \in W | \Omega(w, w') = 0 \; \forall w' \in W\} = W \cap W^\Omega$$

Casos de interesse:

- ***Isotrópico***: $W \subseteq W^\Omega$ ($\iff \Omega|_W \equiv 0$).
- ***Coisotrópico***: $W^\Omega \subseteq W$.
- ***Lagrangiano***: $W = W^\Omega$.
- ***Simplético***: $W \cap W^\Omega = \{0\}$ ($\Omega|_W$ é não degenerado (=simplético)).

Lema. $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$.

Demostração.

$$\begin{aligned} \Omega^1 : V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

Note que $W^\Omega \mapsto \text{Ann}(W)$, assim

$$\dim W + \dim \text{Ann}(W)' = \dim V$$

□

Observação.

- $W \subseteq V$ subespaço simplético se e somente se $V = W \oplus W^{\Omega}$.
- W isotrópico $\implies \dim W \leqslant \frac{\dim V}{2}$.
- W coisotrópico $\implies \dim W \geqslant \frac{\dim V}{2}$.
- W Lagrangiano se $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

De fato, W é Lagrangiano se e somente se W é isotrópico e $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

Exercício.

- $(W^{\Omega})^{\Omega} = \Omega$ (W isotrópico se e somente se W^{Ω}).
- $(W_1 \cap W_2)^{\Omega} = W_1^{\Omega} + W_2^{\Omega}$.

Exemplo.

- Subespaços de dimensão 1 são isotrópicos (subespaços de codimensão 1 são coisotrópicos).
- $V = V \oplus W^*$, onde V tem a forma $\Omega_{can?}$ e W e W^* são Lagrangianos.
- $\mathbb{R}^{2n}$, $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ base simplética, então $\operatorname{span}\{e_i, f_i\}$ é simplético, e $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ é isotrópico (se $k = n$ é Lagrangiano).
- (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) evs's, $T : V_1 \to V_2$ isometría linear, $\operatorname{graf}(T) := \{(u, Tu) : u \in V_1\} \subseteq V_1 \times V_2$. T é simplectomorfismo se e somente se $\operatorname{graf}(T)$ é um subespaço Lagrangiano em $V_1 \times V_2$.
- $\dim \operatorname{graf}(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2}\dim(V_1 \times V_2)$.
- $\Omega_{V_1 \times V_2}((u, Tu), (v, Tv)) = \Omega(u, v) - \underbrace{\Omega_2(Tu, Tv)}_{=T^*\Omega_2(u,v)}$ $(= 0 \iff \Omega_1 = T^*\Omega_2)$.

Teorema (Existência das bases simpléticas)**.** Para cualquer (V, Ω) evs existe uma base simplética.

Demostração. Seja $e_1 \in V \backslash \{0\}$. Como Ω é não degenerada, existe $f_1 \in V$ tal que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Considere $W_1 = \operatorname{span}\{e_1, f_1\}$. Então $\Omega|_{W_1}$ é não degenerado (ie. W_1 é simplético), o que acontece se e somente se $V = W_1 \oplus W_1^{\Omega}$. Assim, existem $e_2 \neq 0$ in W_1^{Ω} e $f_2 \in W_1^{\Omega}$ tal que $\Omega(e_2, f_2) = 1$, etc... $(V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n)$. O conjunto $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é uma base simplética. $\square$

Exercício. V ev de dimensão $2n$ e $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada se e somente se $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \in \Lambda^{2n} V^* \neq 0$.

2.2 Equivalência entre ev's simpléticos

(V, Ω) e (V', Ω') são ***equivalentes*** se existe um ***simplectomorfismo*** linear $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ (isometría linear) tal que

$$\varphi^*\Omega' = \Omega \in \Lambda^2 V^*$$

onde

$$\varphi^*\Omega'(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Dado (V, Ω) evs, definimos

$$\mathrm{Sp}(V) := \{T \in GL(V) | T^*\Omega = \Omega\}$$

Exemplo.

1. $V = \mathbb{R}^{2n}$, $\Omega_0(u, v) = -u^T J_0 v$ onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, com base canônica $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$. Temos

$$\begin{cases} \Omega_0(e_i, e_j) = 0 \\ \Omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \Omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

   Definição. Uma base de (V, Ω) satisfazendo eq. (1) é chamada ***base simplética***.

   Following Lee, Example. 22.2, the condition may be that $\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$ where α^i and β^i are just the dual basis covectors of the base $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}$ of V.

   Observação. Escolher/Achar uma base simplética é equivalente à escolher/achar um simplectomorfismo

$$(V, \Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$$

2. W espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, sejam $V = W \oplus W^*$, $w, w \in W$ e $\alpha, \alpha \in W^*$

$$\Omega_?((w, \alpha), (w', \alpha')) := \alpha'(w) - \alpha(w')$$

   é não degenerada e anti-simétrica. Assim,

$$(W \oplus W^*, \Omega_?)$$

   é um espaço vetorial simplético.

   Observação. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base simplética de W e $\{f_1, \ldots f_n\}$ é a base dual de W^*, então

$$(W \oplus W^*, \Omega_? \cong (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0).$$

Note que ainda que dado
$$A : W \xrightarrow{\sim} W$$
automorfismo ?,
$$T_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} : W \oplus W^* \to W \oplus W^*$$
é simplectomorfismo, ($T_A = A \oplus (A^*)^{-1}$).

Moral: $\mathrm{GL}(W) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(W \oplus W^*)$

$$\mathsf{EV} \overset{\text{funtor}}{\rightsquigarrow} \mathsf{EVS}$$
$$A \circlearrowleft W \longmapsto W \oplus W^* \circlearrowright T_A$$

3. V ev sobre $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} = n$, com produto interno hermitiano
$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$
i.e. satisfazendo
   (a) $h(u, \lambda v) = \lambda h(u, v)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
   (b) $h(u, v) = \overline{h(v, w)}$,
   (c) $h(u, u) > 0\ \forall u \neq 0$,

   pode ser escrito como
$$h(u, v) = g(u, v) + i\Omega(u, v)$$
Agora considere V como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (de dimensão $2n$).

Exercício.

- g é produto interno positivo definido.
- Ω é antisimétrica, não degenerada (simplética).
- Ache uma base de V (dica: extensão de base ortonormal de $h\ldots$)
- $U(n) \subset SP(V, \Omega)$.

4. Produto direto: (V_1, Ω_1), (V_2, Ω_2) espaços vetoriais.

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ V_1 & & V_2 \end{tikzcd}$$

Tem a forma simplética é o pullback:
$$\Omega := \pi_1^* \Omega_1 + \pi_2^* \Omega_2$$

ou seja,

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2),$$

que é não degenerado e antsimétrico também.

Notação: se (V, Ω) é um espaço vetorial simplético, denotamos por $(V, -\Omega) := \bar{V}$, que também é um evs.

3 Aula 3

4 Aula 4

5 Aula 5

Lembranza da última aula:

1. Definição de variedade simplética.
2. Pelo menos dois exemplos.
3. Forma de volume/orientabilidade.
4. Campos simpléticos/campos hamiltonianos.
5. Obstrução cohomológica de para estrutura simplética.

Hoje: Fibrados cotangentes.

Seja Q uma variedade e $M := T^*Q$ o fibrado cotangente.

Lembrando Se Q é uma variedade, $x \in Q$. O ***espaço tangente*** em x são derivações ou clases de equivalencia de curvas... base local do espa ço tangente ∂_{x_i}...base dual disso é base do espaço cotangente nesse ponto... o fibrado cotangente $\bigsqcup_{x \in Q} T_x^*Q$ é variedade suave.

O fibrado cotangente possui uma 1-forma tautológica definida assim:

Definição. $\alpha \in \Omega^1(M)$, onde $M := T^*Q$, dada por

$$\alpha_p(X) = p(\pi_*(X))$$

ou seja, como X é tangente ao fibrado cotangente, ele está anclado a algum covetor, assim a gente pode evaluar ele no covector. Também pode ser pensado como o pullback de um covector em Q baixo a projeção cotangente usual.

Em coordenadas locais $(x_1, ...,$

Exercício.

1. A 1-forma tautológica $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$ é a única 1-forma satisfazendo

$$\forall \mu \in \Omega^1(Q), \qquad \mu^*\alpha = \mu$$

onde pensamos a μ do lado izquerdo como um mapa $\mu : Q \to T^*Q$, ie. uma seç ão do fibrado cotangente, e do lado direito simplesmente como uma 1-corma em Q.

Definição. $M = T^*Q$, $\alpha \in \Omega^1(M)$ então a ***forma simplética canónica*** de T^*Q é

$$\omega_{can} = -d\alpha$$

Observação.

- $d\omega_{can} = -d^2\alpha = 0$.
- Formalmente $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$

Assim, temos uma variedade simplética canónica associada a toda variedade, $(T^*Q, \omega_{can}$.

Observação.

- Dado $B \in \Omega^2(Q)$ com $dB = 0$, a forma

$$\omega_B \omega_{can} + \pi^* B$$

  é simplética e o termo $\pi^* B$ se chama de ***magnético***.
- Se Q é Riemanniana com métrica g temos o mapa induzido

$$\begin{aligned} g^\sharp : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ u &\longmapsto g(u, \cdot) \end{aligned}$$

  Assim, o pullback the ω_{can} é uma forma simplética em TQ.

  Al ém disso, a métrica nos fornece de uma função Hamiltoniana dada por $H \in C^\infty(TQ)$, $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$.

  Veremos que o fluxo Hamiltoniano de H em (TQ, ω) é fluxo geodésico em Q.

  Tem dois generalizações naturais:

  - $\bar{H}(v) = \frac{1}{2}g(u, v) + V(x)$ com $V \in C^\infty(Q)$, mecânica clásica.
  - $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ com respeito a ω_B.

Pergunta (Projeto?). Existência de órbitas periódicas em níveis de energia?

Definição. O ***levantamiento cotangente*** de um difeomorfismo (na mesma direção do difeomorfismo) é $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$ é $\hat{\varphi} = ((T\varphi)^*)^{-1}$.

Pergunta. Preserva a forma canónica?

Proposição. Sim. $\hat{\varphi} : T^*Q_1 \to T^*Q_2$ satisfaz $\hat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1$ onde α_i é a forma tautológica, para $i = 1, 2$. Isso implica que $\hat{\varphi}^*\omega_2 = \omega_1$.

Isso implica que temos um funtor $Q \rightsquigarrow T^*Q$ que se chama de ***funtor cotagente*** e permite levar problemas de geometria diferencial para a geometria simpl ética.

Demostração.

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & T^*Q_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array}$$

A clave dessa prova é que o diagrama commuta, assim pode se-trocar um termo $\pi_2 \circ \hat{\varphi}$ por $\varphi \circ \pi_1$. $\square$

O funtor que produzimos $\mathrm{Dif}(Q) \hookrightarrow \mathrm{Simp}(T^*Q$ não e fiel (surjetivo), ie. existem simplectomorfismos no fibrado cotangente que não vem de difeomorfismos na variedade.

Observação. Dada uma 1-forma $A \in \Omega^1$. Pode se-produzir um mapa no cotangente simplesmente trasladando por A:

$$\begin{aligned} T_A : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, \xi + A_x) \end{aligned}$$

que não pode ser um levantamento porque se projecta na identidade!

Exercício. T_A é um simplectomofrismo $\iff dA = 0$.

Mas, como sabemos quais simplectomorfismos no cotangente são sim levantamentos de difeomorfismos na variedade?

Exercício. Seja $F : T^*Q \to T^*Q$ um simplectomorfismo. Quando $F = \hat{\varphi}$ é levantamento de algum $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} Q$. Pois, isso acontece $\iff$ F preserva a forma tautológica, ie. $F^*\alpha = \alpha$.

Observação. Levantamento cotangente de campos de vetores. Começa com um campo $X \in \mathfrak{X}(Q)$, integra para obter um fluxo φ_t, que é uma família de difeomorfismos na variedada, você sabe levantar isso com o funtor obtendo outro fluxo (porque levantamento de fluxo é fluxo) $\hat{\varphi}_t$, e diferenciando obtém $\hat{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$.

Observação. Para cualquer fibrado vetorial $E \to M$, podemos ver a seções $\Gamma(E)$ como um subconjunto das fun ções suaves na variedade $C^\infty(E)$—são as funções lineares nas fibras. Aí tem um modo natural de definir para cualquer campo vetorial $X \in \Gamma(TQ) \subseteq C^\infty(T^*Q)$ uma função, $H_X(p) = p(X_{\pi(p)} = \alpha(\hat{X})$.

Proposição. $\hat{X}$ = campo Hamiltoniano de H_X.

6 Aula 6

Hoje: Colchete de Poisson, Darboux.

6.1 Colchete de Poisson

M variedade, $\omega \in \Omega^2(M)$ não degenerada (quase-simplética). Podemos fazer

$$\begin{aligned} w^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto i_X\omega \end{aligned}$$

So that

$$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow X_f \in \mathfrak{X}(M)$$

e

$$i_{X_f}\omega = df.$$

Definição. $f, g \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} \{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \{f, g\} = \omega(X_g, X_f) &= dg(X_f) = \mathcal{L}_{X_f} g = -\mathcal{L}_{X_g} f \end{aligned}$$

Proposicição (Exercício)**.** $d\omega = 0 \iff \{\cdot,\cdot\}$ satisfaz identidade de Jacobi. $\implies (M, \omega)$ simplética, $\{\cdot,\cdot\}$ é colchete de Lie em $C^\infty(M)$ e isso se chama de um ***colchete de Poisson em*** (M, ω).

Exercício. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

Exemplo. $\mathbb{R}^{2n}$.

Definição. $f, g \in C^\infty(M)$ estão em ***involução*** se $\{f, g\} = 0$. ie. X_g é tangente aos níveis f =const (e vice versa).

Observação. Nesse caso, a derivada de g ao longo das curvas integrais de X_f é zero.

Motivação (M, ω) simplética, $H \in C^\infty(M)$ queremos integrar X_H (ie. resolver $c'(t) = X_H(c(t))$). Suponha que existe $f \in C^\infty(M)$ com $\{f, H\} = 0$, chamada ***integral primeira***. ie. f é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano.

No século XIX, quando Poisson vivia, a ideia era que se temos um número sufieiente de integrais primeiras "independentes", podemos "integrar" X_H. (Aqui "integrar" significa dar uma solução a equação diferencial do fluxo Hamiltoniano).

Em 1810, Poisson deu a fórmula

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Teorema (Poisson). $\{f, H\} = 0 = \{g, H\} \implies \{\{f, g\}, H\} = 0$.

Teorema (Jacobi).

$$\{H, \{f, g\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} = 0$$

1880 Lie usou essa identidade no seu trabalho de transformações (álgebras de Lie).

Versão moderna (sec. XX) de integrabilidade Veremos adiante…

Teorema (Arnold-Liouville). (M, ω) de dimensão $2n$ e seu Hamiltoniano $H = f_1$ que é a primeira de uma sequencia de $n = \dim M/2$ funções independentes (as derivadas são linearmente independentes) $f_2, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ tais que $\{f_i, f_j\} = 0$ e que $(f_1, \dots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão. Então

$$N = \{(f_1, \dots, f_n) = \text{cte}\} \cong \mathbb{T}^n$$

se compacto e conexo. Além disso, a dinâmica de X_H em $\mathbb{T}^n$ é quase periódica (=é um fluxo linear no toro, que pode ser racional ou irracional).

Observação (Projeto?). Qué acontece com essa dinâmica no toro se perturbamos o sistema? O problema de dois corpos é completamente integravel. Por exemplo, a dinâmica da Terra e o Sol pode se-resolver, mas o problema adicionando a Lua é o problema de 3 corpos, que ninguém sabe cómo resolver. Aqui a Lua é uma perturbação.

Teorema KAM, quanto mais irracional é o fluxo, mais robusto é o toro, mais inestável.

Em fim, tudo isso para motivar os colchetes de Poisson.

6.2 Teorema de Darboux

(M, ω) variedade simplética com o colchete $\{\cdot, \cdot\}$.

Observação.

1. ω está completamente determinada por $\{\cdot, \cdot\}$, ie. se duas estruturas simpléticas dão lugar ao mesmo colchete de Poisson, elas são iguais.Por que?

   $$\omega^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$$

   está dada em cada ponto por

   $$(\omega^\sharp)_{ij} = \{x_i, x_j\}$$

   por definição.

2. A estrutura simplética canónica $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dp_i$ em $\mathbb{R}^{2n}$ está determinada (é a única tal que) por

   $$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

   É como se tivesse uma base simplética boa em todos os pontos…

Teorema (Darboux)**.** (M,ω) simplética, ent...åo ao redor de todo ponto $x \in M$ existem coordenadas locais $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ tais que $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$, ou, equivalentemente vale
$$\{q_i,q_j\} = 0 = \{p_i,p_j\}, \qquad \{p_i,q_j\} = \delta_{ij}.$$

Tem um lema que va a provar essencialmente tudo.

Lema (Primeiro paso da indução)**.** Ao redor de qualquer ponto $x \in M$ existem coordenadas $(q,p,y_1,\dots,y_{2n-2}$ tais que
$$1 = \{p,q\}, \quad \{p,y_j\} = 0 = \{q,y_j\}, \qquad \{y_i,y_j\} = \varphi_{ij}(y).$$

Ou seja, a matriz da forma é
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A(y) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

ou seja, temos uma expresão
$$\omega = dq \wedge dp + \omega_N$$
onde ω_N é dada por $A(y)$ e é simplética.

Demostração do Lema
Paso 1 Seja p uma função tal que $X_p(x) \neq 0$. Pelo teorema de fluxo tabular (retificação) existe uma função q tal que $X_p = \frac{\partial}{\partial q}$, de modo que $\{p,q\} = dq(X_p) = 1$ e $dp(X_q) = -1$.

Paso 2 Enão X_p e X_q são linearmente independentes, pois $1 = \{p,q\} = \omega(X_p,X_q) \neq 0$, o que aconteceria por antisimetria se são linearmente dependentes. Além disso, comutam, pois
$$[X_p,X_q] \overset{\text{aula pasada?}}{=} X_{\{p,q\}=1} = 0.$$

Agora usamos a generalização do teorema do fluxo abular: se $X_1,\dots,X_k$ são campos linearmente independentes e que comutam, então existem coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$ dais que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. (Teo. função inversa.) Assim, existem coordenadas locais $y_1,\dots,y_{2n}$ tais que
$$X_q = \frac{\partial}{\partial y_{2n-1}} \qquad X_p = \frac{\partial}{\partial y_{2n}}.$$

Logo
$$dy_j(X_q) = 0 = dy_j(X_p)$$
para $j = 1,\dots,2n-2$.

Paso 3 As diferenciais
$$dq, dp, dy_1, \dots, dy_{2n-2}$$

são linearmente independentes, pois se

$$adq + bdp + \sum_i c_{ij} y_i = 0$$

pois as y_i já são LI, e avaliando em X_i obtemos $a = 0$, e no X_q que $b = 0$.

Temos um sistema de coordenadas $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2}$ ao redor de x tal que as condições do teorema salvo a última se cumplem. Agora veamos que $\{y_i, y_j\}$ não depende de p, q.

Paso 4 Só lembrar que

$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \qquad X_q = \frac{\partial}{\partial q}$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial p}\{y_i, y_j\} = -\{q, \{y_i, y_j\}\} = 0$$

onde a segunda igualdade é jacobi. Fim.

□

Demostração do Teo. Darboux. Segue do lema por indução □

Definição. Uma ***estrutura de Poissom*** em uma variedade M é

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$\mathbb{R}$-bilinear, antisimétrica, Jacobi e Leibniz, ie. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

Exemplo.

- (M, ω) simpl ética com $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$.