

Projeto

Índice

1	Noções básicas de mecânica quântica	1
1.1	Clásica	1
1.2	Quântica	1
2	Quantização	3
2.1	Prequantização	3
2.2	Polarização	3
2.3	k3quant.pdf	3

1 Noções básicas de mecânica quântica

1.1 Clásica

Sistema físico é uma variedade com estrutura adicional. A variedade consiste dos estados do sistema (posição, momento), e a estrutura adicional são as leis de movimento. A dinâmica do sistema está determinada por uma função, o Hamiltoniano. Por medio de uma forma simplética podemos obter um campo vetorial associado a H

- ω não degenerada implica que sempre podemos achar esse campo vetorial
- ω alternante (sg.pdf prop. 6.11) implica que H é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano (X_H aponta na direção de energia constante).
- Fórmula de Cartan implica que ω é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano, ie. fluxo Hamiltoniano simplético (independente do tempo?) ie. $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$ se e somente se ω é fechada.

As equações de Hamilton são só outra formulação da segunda lei do Newton. O campo vetorial Hamiltoniano é uma formulação geométrica das equações de Hamilton.

Proposição (18.9 das.pdf) $\{f, H\} = 0$ (f é primeira integral do fluxo de X) se e somente se f é constante ao longo das curvas integrais de X_F .

1.2 Quântica

Equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Distintas escolhas de Hamiltoniano \hat{H} descrevem diferentes leis da natureza. Para partículas não relativistas em três dimensões com energia potencial $V(\mathbf{x})$, o Hamiltoniano é

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}).$$

É um operador diferencial. O Laplaciano é

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z^2}.$$

Na mecânica clássica, o Hamiltoniano está relacionado com a energia do sistema, que para nós é

$$E = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x})$$

onde $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$ o momentum da partícula.

Nem toda teoria física pode ser descrita usando um Hamiltoniano. (Em termos gerais, só as teorias que tem conservação da energia podem ser descritas com o Hamiltoniano.) Importaneamente, isso mesmo acontece na mecânica quântica.

O experimento do buraco duplo: a função de onda se comporta como partícula e como onda.

Definição Um *estado quântico* é uma função de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ normalizável, ie.

$$\int d^3x |\psi|^2 < \infty.$$

Esses estados quânticos moram num espaço de Hilbert (tem produto Hermitiano): se a partícula está num espaço M , o espaço de Hilbert relevante é $L^2(M)$.

Definição *Observável*: são funções de \mathbf{x} e \mathbf{p} . Por exemplo, \mathbf{x} e \mathbf{p} mesmas, ou o *momento angular* $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ ou a *energia* $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$.

Os observáveis são representados por *operadores* no espaço de Hilbert. Agem numa função de onda e dão outra função.

Observação O reemplazo das matrizes nos espaços de dimensão infinita são os operadores diferenciais.

Observação O resultado de qualquer medição de um operador está no seu espectro (conjunto de eigenvalores).

O espectro do Hamiltoniano determina os possíveis níveis de energia do sistema quântico.

Todo observável físico corresponde a um operador Hermitiano (autoadjunto).

2 Quantização

[Aqui](#) tem uma pergunta de StackExchange: "Need help understanding the proof of Dirac's famous relation between commutators and Poisson brackets". So maybe that could be kind of an exercise/proof to carry out in the talk.

No seguinte vou ler sobre tudo [wiki](#) e um pouco de `quank3.pdf`

2.1 Prequantização

Passar de uma variedade simplética a um espaço de Hilbert assinalando operadores autoadjuntos às funções suaves na variedade, ie. observáveis clássicos a observáveis quânticos, satisfazendo:

1. Linearidade: $\widehat{f + g} = \hat{f} + \hat{g}$, $\widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f}$.
2. Morfismo de álgebras de Lie a menos de uma constante.
3. Identidade vai para identidade.
4. Os operadores \hat{q}_i e \hat{p}_i agem irreduzivelmente no espaço de Hilbert.

Por exemplo, o espaço de funções integráveis respeito à forma de Liouville. Manda uma função suave f em $Q(f) := -i\hbar (X_f + \frac{1}{i\hbar} \theta(X_f)) + f$.

Otro exemplo: um fibrado linear L munido de uma conexão tal que a sua forma de curvatura é ω/\hbar . Aqui o espaço de Hilbert é o espaço de seções quadrado-integráveis de L como o operador $Q(f) = -i\hbar \nabla_{X_f} + f$. Neste caso temos que $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$.

2.2 Polarização

É a escolha de um subespaço Lagrangiano em cada ponto de M .

Definição (nLab) Uma *polarização* de uma variedade simplética (X, ω) é a escolha de um subfibrado Lagrangiano involutivo $\mathcal{P} \hookrightarrow T_{\mathbb{C}}X$ do fibrado tangente complexificado de X .

Exemplo O fibrado holomorfo ou antiholomorfo caso (X, ω, g, I) seja Kähler.

A polarização no `k3quant.pdf` é a escolha de um fibrado linear; a gente vai tomar seções holomorfas para construir o espaço de Hilbert.

2.3 `k3quant.pdf`

After the definition of *full quantization* written above, we have definition of *quantizable* manifold in terms of curvature in the subbundle. And construction of Berezin-Toeplitz operators, which includes the construction of the Hilbert space of L^2 -measurable sections of the bundle. Then *Hardy space*, should I read this? Is there a proof that the operators are good?