Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 6

Contents

Problem 1

a. Consider hamiltonian actions of G on two symplectic manifolds (M_i, ω_i), $i = 1, 2$ with moment maps $\mu_i : M_i \to \mathfrak{g}^*$, $i = 1, 2$. Show that the diagonal action of G on $M_1 \times M_2$ ($g(x_1, x_2) \mapsto (gx_1, gx_2)$) is hamiltonian, with moment map $\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1) + \mu_2(x_2)$.

b. Suppose that $G \curvearrowright M$ is a hamiltonian action with moment map μ, and let $H \subseteq G$ be a Lie subgroup. Show that the restriction of the action to H, $H \curvearrowright M$ is hamiltonian with moment map $\iota^* \circ \mu$, where $\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ is the inclusion.

Solution.

a. Primeiro vamos mostrar que

$$d \langle \mu, u \rangle = i_{u_M} \omega \tag{1}$$

para $u \in \mathfrak{g}^*$. Suponha que π_1, π_2 são as projeções de $M_1 \times M_2$. Etão o lado direito de eq. (1) é:

$$\begin{aligned}
i_{u_{M_1\times M_2}}\omega &= \omega(u_{M_1\times M_2},\cdot)\\
&= \pi_1^*\omega_1(u_{M_1\times M_2},\cdot) + \pi_2^*\omega_2(u_{M_1\times M_2},\cdot)\\
&= \omega_1\Big(\pi_1(u_{M_1\times M_2}),\pi_1(\cdot)\Big) + \omega_2\Big(\pi_2(u_{M_1\times M_2}),\pi_2(\cdot)\Big)\\
&= \omega_1(u_{M_1},\cdot) + \omega_2(u_{M_2},\cdot)\\
&= i_{u_{M_1}}\omega + i_{u_{M_2}}\omega
\end{aligned}$$

Enquanto que o lado direito é a derivada exterior da função

$$\langle \mu, u\rangle = \mu(\cdot)(u) = \mu_1(\cdot)u + \mu_2(\cdot)u = \langle \mu_1, u\rangle + \langle \mu_2, u\rangle\,.$$

Agora vamos provar equivariância. Queremos ver que

$$\mu\circ\psi_g = (\mathsf{Ad}^*)_g(\mu).$$

onde ψ é a ação $G\curvearrowright M$. Pegando $(x_1,x_2)\in M_1\times M_2$ vemos que

$$\begin{aligned}
\mu\circ\psi_g(x_1,x_2) &= \mu(gx_1,gx_2)\\
&= \mu_1(gx_1) + \mu_2(gx_2)\\
&= (\mathsf{Ad}^*)_g(\mu_1(x_1)) + (\mathsf{Ad}^*)_g(\mu_2(x_2))
\end{aligned}$$

E pegando $Y\in\mathfrak{g}$ vemos que

$$\begin{aligned}
(\mathsf{Ad}^*)_g(\mu_1(x_1))(Y) &= (\mu_1(x_1))(\mathsf{Ad}_{g^{-1}}(Y))\\
(\mathsf{Ad}^*)_g(\mu_2(x_2))(Y) &= (\mu_2(x_2))(\mathsf{Ad}_{g^{-1}}(Y))
\end{aligned}$$

e a soma delas é

$$\begin{aligned}
(\mu_1(x_1))(\mathsf{Ad}_{g^{-1}}Y) + (\mu_2(x_2))(\mathsf{Ad}_{g_1}Y) &= \Big(\mu(x_1,x_2)\Big)(\mathsf{Ad}_{g^{-1}}Y)\\
&= (\mathsf{Ad}^*)_g\Big(\mu(x_1,x_2)\Big)(Y).
\end{aligned}$$

b. Neste caso queremos ver que

$$d\,\langle \iota^*\circ\mu, u\rangle = i_{u_M}\omega.$$

Isso vai ser immediato assim que tivermos esclarecido duas coisas. Primeiro, que o generador infinitesimal de u como elemento de $\mathfrak{h}$ coincide com o generador infinitesimal de u como elemento de $\mathfrak{g}$ (isso é simplesmente porque a curva integral de u em $H\subset G$ fica contida em H, então a ação em M genera o mesmo campo vetorial). Segundo, que a derivada exterior de $\langle \iota^*\circ\mu, u\rangle$ coincide com a derivada exterior de $\langle \mu, u\rangle$ já que ι^* é a restrição dos funcionais em $\mathfrak{g}^*$ a $\mathfrak{h}^*$ e vamos a avaliar em vetores de $\mathfrak{h}$. Então podemos simplesmente escrever:

$$d\,\langle \iota^*\circ\mu\rangle = d\,\langle \mu, u\rangle = i_{u_M}\omega.$$

Para ver equivariância, pegue $h \in H$ e $x \in M$. Então

$$(\iota^* \circ \mu) \circ \psi_h(x) = (\iota^* \circ \mu)(hx) = \iota^*(\mu(hx)) = \iota^*(\mathrm{Ad}_h^*(\mu(hx))) = (\mathrm{Ad}^*)_h(\mu(hx))\Big|_{\mathfrak{h}}$$

Avaliando em $Y \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}^*)_h(\mu(x))(Y) &= (\mu(x))(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(Y)) \\ &= \Big(\iota^* \circ \mu(x)\Big)(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(Y)) \\ &= \mathrm{Ad}_h^*\Big((\mu \circ \iota)(x)\Big),\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade podemos substituir μ por $\iota^* \circ \mu$ porque estamos avaliando em um vetor $Y \in \mathfrak{h}$ e a imagem de Ad restrito a $\mathfrak{h}$ está contida em $\mathfrak{h}$. Isso último pode ser feito explícito calculando $\mathrm{Ad}_{h^{-1}} = dI_h$ usando uma curva totalmente contida em H que cuja velocidad em $t = 0$ seja Y.

□

Problem 2 Consider the group $\mathrm{SO}(3)$ acting on $T^*\mathbb{R}^3$ by the the cotangent lift of the usual action of $\mathrm{SO}(3)$ on $\mathbb{R}^3$.

a. For $u \in \mathfrak{so}(3)$, compute the corresponding infinitesimal generator $u_{T^*\mathbb{R}} \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R}^3)$.

b. Identify $\mathfrak{so}(3)$ with $\mathbb{R}^3$ as in Lista 5. Show that, with this identification, we have $u_{T^*\mathbb{R}^e}(q,p) = (u \times q, u \times p)$.

c. Identifying $\mathfrak{so}(3)^* \cong (\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3$ using the usial inner product, show that the moment map for the action of $\mathrm{SO}(3)$ on $T^*\mathbb{R}^3$ is $\mu(q,p) = q \times p$. Conclude (by Noether's theorem) that if $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ is $\mathrm{SO}(3)$-invariant, then the flow of the Hamiltonian $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ preserves "angular momentum" $q \times p$.

Solution.

a. Pegue $U \in \mathfrak{so}(3)$ e vamos calcular $u_M \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R}^3)$ num ponto $(p,q) \in T^*\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}u_M &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tU)\cdot(q,p) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\exp(tU)q, \exp(-tU)^*p\Big)\end{aligned} \tag{2}$$

Vamos explicar isso antes de seguir. O levantamento cotangente da ação $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ está dado por

$$\begin{tikzcd} T^*\mathbb{R}^3 \arrow[r, "((dA)^*)^{-1}"] \arrow[d] & T^*\mathbb{R}^3 \arrow[d] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Isso é, para um elemento $A \in \mathrm{SO}(3)$, o levantamento cotangente é: (1) agir com A nas primeiras coordenadas e (2) agir com a inversa do pullback da derivada dele na componente em $T^*\mathbb{R}^3$; mas a derivada dele é ele mesmo por ser uma transformação linear. Daí a eq. (2) segue pegando $A = \exp(tU)$. (E já sabemos super bem que $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$.)

Continuando com a conta, derivando obtemos

$$\begin{aligned} &= \Big(U\exp(tU)q, -U\exp(-tU)p\Big)\Big|_{t=0} \\ &= (Uq, -Up). \end{aligned}$$

b. Aqui é simplesmente identificar U com um vetor e calcular Uq. Então digamos que

$$U := \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow (a, b, c)$$

Daí

$$Up = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cq_2 + bq_3 \\ cq_1 - aq_3 \\ -bq_1 + aq_2 \end{pmatrix}$$

que são as coordenadas de $(a, b, c) \times (q_1, q_2, q_3)$.

Agora a mesma conta funciona para a coordenada em p, só que de acordo ao item anterior temos um signo $-$, o que significa que em realidade

$$u_{T*\mathbb{R}^3}(q, p) = (u \times q, -u \times p).$$

c. Vamos ver que

$$d\,\langle \mu, u\rangle = i_{u_{T*\mathbb{R}^3}}\omega.$$

A idenficação $\mu(q, p) \leftrightsquigarrow q \times p$, significa que $\mu(q, p) = (q \times p, \cdot)$ onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno canônico. Para calcular o lado esquerdo lembre que a derivada exterior de uma função f é a 1-forma $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Neste caso temos a função $f(q, p) = (q \times p, u)$. A derivada parcial respecto a, por exemplo, q^1 é

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q^1} &= \frac{\partial}{\partial q^1}(q \times p, u) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q^1} q \times p, u\right) + \cancelto{0}{\left(q \times p, \frac{\partial u}{\partial q^1}\right)} \\ &= \left(\frac{\partial q}{\partial q^1} \times p, u\right) + \cancelto{0}{\left(q \times \frac{\partial p}{\partial q^1}, u\right)} \\ &= (e_1 \times p, u), \qquad \text{onde } e_1 := (1, 0, 0) \\ &= (p \times u, e_1) \\ &= (-u \times p, e_1) := (-u \times p)^1 \end{aligned}$$

onde $(-u \times p)^1$ denota a primeira coordenada do vetor $-u \times p$. Note que quando derivemos respecto das coordenadas em p não vamos ter que botar um signo $-$ para obter as coordenadas do vetor $u \times q$.

Então vamos ter que

$$\begin{aligned} d\langle \mu, u\rangle (q,p) &= d(q \times p, u) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (-u \times p)^i dq^i + \sum_{i=1}^{3} (u \times q)^i dp^i. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular $\omega(u_{T*\mathbb{R}^3}, \cdot)$. Para isso podemos expressar

$$u_{T*\mathbb{R}^3}(q,p) = (u \times q, -u \times p) \leftrightsquigarrow \sum (u \times q)^i \partial_{q^i} - \sum (u \times p)^i \partial_{p^i}$$

Obtemos que:

$$\begin{aligned} i_{u_{T*\mathbb{R}^3}} \omega_{\mathsf{can}} &= \sum dq^i \wedge dp^i \Big((u \times q, -u \times p), \cdot \Big) \\ &= \sum dq^i \wedge dp^i \Big(\sum (u \times q)^i \partial_{q^i} - \sum (u \times p)^i \partial_{p^i}, \ \cdot \Big) \\ &= \sum (u \times q)^i dp^i(\cdot) - \sum (u \times p)^i dq^i(\cdot) \end{aligned}$$

que coincide com a conta feita acima.

Para ver que essa ação também é equivariante, queremos mostrar que

$$\Big((\mathsf{Ad}^*)_A \mu(q,p) \Big)(u) = \Big(\mu(A(q,p)) \Big)(u)$$

para $(q,p) \in \mathsf{T}^*\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$. O lado esquerdo é

$$\begin{aligned} \Big((\mathsf{Ad}^*)_A \mu(q,p) \Big)(u) = \Big(\mu(q,p) \Big)(\mathsf{Ad}_{A^{-1}} u) \leftrightsquigarrow (q \times p, A^{-1} u) &= (A(q \times p), u) \\ &= (Aq \times Ap, u) \end{aligned}$$

Eu queria ter A^{-1} alí

usando da Lista 5 que a ação adjunta age como multiplicação da matriz por vetor quando identificamos $\mathfrak{so}(3)$ com $\mathbb{R}^3$. O lado direito é

$$\Big(\mu(A(q,p)) \Big)(u) = \Big(\mu(Aq, A^{-1}p) \Big)(u) \leftrightsquigarrow (Aq \times A^{-1}p, u)$$

Para ver que o fluxo de $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ preserva o momento angular basta ver que H é $\mathsf{SO}(3)$-invariante, i.e. $\mathcal{L}_{u_{T*\mathbb{R}^3}} H = 0$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{u_{T*\mathbb{R}^3}} H &= u_{T*\mathbb{R}^3} H \\
&= \sum (u \times q)^i \partial_{q^i} H + \sum (u \times p)^i \partial_{p^i} H \\
&= \cancelto{0}{\sum (u \times q)^i \partial_{q^i} \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right)} + \sum (u \times p)^i \partial_{p^i} \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \\
&= \sum (u \times p)^i \partial_{p^i} \frac{p^2}{2m} \\
&= \sum (u \times p)^i \frac{p^i}{m}
\end{aligned}$$

Olhando a expressão do produto vetorial do item anterior, vemos que

$$\begin{pmatrix} -cp_2 + bp_3 \\ cp_1 - ap_3 \\ -bp_1 + ap_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = -cp_1p_2 + bp_1p_3 + cp_1p_2 - ap_3p_2 - bp_1p_3 + ap_2p_3 = 0$$

$\square$

Problem 3 Consider $G = \mathbb{R}^2$ acting on $\mathbb{R}^2$ by $g \cdot (x, y) = (x + a, y + b)$ where $g = (a, b)$. Show that this action is weakly hamiltonian (i.e., there exists $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ such that $i_{u_M} \omega = d \langle \mu, u \rangle$ but id does not admit an equivariant moment map).

Solution. Fix $u = (u_1, u_2) \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$. The infinitesimal generator of this action is given by

$$\begin{aligned}
u_{\mathbb{R}^2} &= \frac{d}{dt} \mathsf{exp}(tu) \cdot (p, q) \\
&= \frac{d}{dt} \Big(p + \mathsf{exp}(tu)^1, q + \mathsf{exp}(tu)^2 \Big) \\
&= (u_1, u_2) \leftrightsquigarrow u_1 \partial_q + u_2 \partial_p .
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
i_{u_{\mathbb{R}^2}} \omega &= dq \wedge dp(u_2 \partial_q + u_2 \partial_p, \cdot) \\
&= dq(u_1 \partial_q + u_2 \partial_q) p(\cdot) - dq(\cdot) dp(u_1 \partial_q + u_2 \partial_q) \\
&= u_1 dp - u_2 dq.
\end{aligned}$$

So a good candidate for the moment map is

$$\mu(p, q) = (p, -q)$$

because, denoting again euclidean product by $(\cdot, \cdot)$, that way we get

$$d \langle \mu, u \rangle (p, q) = d\Big((p, -q), (u_1, u_2) \Big) = d(u_1 p - u_2 q) = u_1 dp - u_2 dq.$$

Moreover, *any* moment function for this action should be of this kind. Indeed, any such such function $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ must statisfy

$$
\begin{aligned}
u_1 dp - u_2 d_1 &= d\Big((\mu_1, \mu_2), (u_1, u_2)\Big) \\
&= d\mu_1 u_1 + d\mu_2 u_2 \\
&= \Big(\partial_q \mu_1 dq + \partial_p \mu_2 dp\Big) u_1 + \Big(\partial_q \mu_1 dq + \partial_p \mu_2 dp\Big) u_2
\end{aligned}
$$

Which means that

$$
\begin{aligned}
\partial_q \mu_1 &= 0, \qquad \partial_p \mu_2 = 1 \\
\partial_q \mu_1 &= -1, \qquad \partial_p \mu_2 = 0
\end{aligned}
$$

Which forces μ to be as we have proposed up to adding a constant vector. I'll do the next computations without adding a constant and at the end argue why the constant term wouldn't make a difference.

Pick an element $g = (a, b)$ in the group $G = \mathbb{R}^2$. Showing equivariance ammounts to checking

$$\mu \circ \psi_g = (\mathsf{Ad}^*)_g(\mu)$$

To see better what the left-hand-side means we evaluate at (q, p) to obtain the functional

$$\mathfrak{g}^* \ni (\mu \circ \psi_g)(q, p) = \mu(q + a, p + b) \leftrightsquigarrow \Big((q + a, p + b), \cdot\Big) \tag{3}$$

And to compute the right-hand-side we first notice that

$$\mu(q, p) \leftrightsquigarrow \Big((p, -q), \cdot\Big)$$

And then write its pullback under the coadjoint action evaluating at a vector $u = (u_1, u_2) \in \mathfrak{g}$ to see what's going on:

$$(\mathsf{Ad}^*)_{g^{-1}}\Big(\mu(q, p)\Big)(u_1, u_2) \leftrightsquigarrow \Big((p, -q), (u_1 - a, u_2 - b)\Big)$$

And evaluating such a functional in $\mathsf{Ad}_{g^{-1}} u$ for $u = (u_1, u_2) \in \mathfrak{g}$ we get

$$\Big((q + a, p + b), (u_1 - a, u_2 - b)\Big) = (q + a)(u_1 - a) + (p + b)(u_2 - b) \tag{4}$$

So, if we evaluate eq. (3) at a vector $u = 0$ we get 0, *even* if we consider a more general μ by adding a constant vector. This need not be the case for eq. (4) $\square$

Problem 4 Consider a weakly hamiltonian G-action on (M, ω), with moment map $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ (i.e. not necessarily equivariant). We now see two independent cases in which we can always find a moment map which is equivariant.

(a) For each $g \in G$, define $g \cdot \mu := (\mathsf{Ad}^*)_g(\mu \circ g^{-1})$ (in such a way that μ is equivariant if and only if $g \cdot \mu = \mu$ for all g). Show that $g \cdot \mu$ is also a moment map (not necessarily equivariant) for the action.

(b) Suppose that G is compact. In this case, we can take a left-invariant volume form Λ on G (i.e., $L_g^*\Lambda = \Lambda$) satisfying $\int_G \Lambda = 1$ (why?). Consider the "average" $\overline{\mu} := \int_G g \cdot \mu$ (integral with respect to Λ). Show that $\overline{\mu}$ is an equivariant moment map.

(c) Suppose that Mis compact and connected. Then there is an equivariant moment map.

Solution.

(a) Pegando $u \in \mathfrak{g}$ temos

$$\langle g \cdot \mu, u\rangle = \langle \mu, u\rangle \circ L_{g^{-1}}$$

de modo que

$$d\,\langle g \cdot \mu, u\rangle = d\Big(\langle \mu, u\rangle \circ L_{g^{-1}}\Big) = d\,\langle \mu, u\rangle\, dL_{g^{-1}}$$

Agora como μ é fracamente hamiltoniana, $i_{u_M}\omega = d\,\langle \mu, u\rangle$ e assim

$$d\,\langle \mu, u\rangle\, dL_{g^{-1}} = \omega(u_M, dL_{g^{-1}}\cdot) = \omega(dL_g u_M, \cdot)$$

já que como a ação é fracamente hamiltoniana, em particular é simplética. Porém, não sei se em geral $u_M = dL_g u_M \dots$

(b) The construction of an invariant volume form on a Lie group (found in StackExchange) is as follows. Pick a basis $v_1, \dots, v_n$ of T_eG, pass to a basis $\theta_1, \dots, \theta_n$ of T_e^*G and consider the top-degree form $\Lambda_e = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n$. Then define $\Lambda_g = L_{g^{-1}}^*\Lambda_e$, which grants left-invariance and turns out to be smooth by smoothness of $L_{g^{-1}}$. Then $\int_G \Lambda$ is finite because G is compact, so we may normalize to 1.

$\square$

Problem 5 Consider the torus $\mathbb{T}^n$ acting on $\mathbb{C}^n$ (the canonical symplectic form reads $\frac{i}{2}\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ by:

$$\left(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}\right) \cdot (z_1, \dots, z_n) = \left(e^{ik_1\theta_1} z_1, \dots, e^{ik_n\theta_n} z_n\right),$$

where $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ are fixed.

(a) Show that this action is hamiltonian, with moment map $\mu : \mathbb{C}^n \to (\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$,

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = -\frac{1}{2}\left(k_1|z_1|^2, \dots, k_n|z_n|^2\right).$$

(b) Conclude (see Problem 1) that the action of S^1 on $\mathbb{C}^n$ given by multiplication by $e^{i\theta}$ on each coordinate is hamiltonian with moment map $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mu(z) = -\frac{1}{2}|z|^2$.

Solution.

(a) Primeiro note que o campo vetorial fundamental de $(\theta_1, \dots, \theta_n) = u \in \mathfrak{t}^n \cong \mathbb{R}^n$ em $z = (z_1, \dots, z_n)$ é

$$\begin{aligned}
u_{\mathbb{T}^n} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(u) \cdot z \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\theta_1, \dots, t\theta_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_n}\right) \cdot (z_1, \dots, z_n) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(e^{itk_1\theta_1} z_1, \dots, e^{itk_n\theta_n} z_n\right) \\
&= i\,(k_1\theta_1 z_1, \dots, k_n\theta_n z_n)
\end{aligned}$$

Antes de seguir lembre que se $z_j = x_j + iy_j$ são coordenadas de um ponto em $\mathbb{C}$, definimos

$$dz^j = dx^j + i dy^j, \qquad d\bar{z}^j = dx^j - i dy^j,$$
$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

como bases duais dos espaços cotangente e tangente de $\mathbb{C}^n$. (Ver Griffiths and Harris p. 2.)

Isso significa que

$$\begin{aligned}
i_{u_{\mathbb{T}^n}}\omega &= \omega\left(i\sum_j k_j\theta_j z_j \frac{\partial}{\partial z^j}, \cdot\right) \\
&= \frac{i}{2}\sum_\ell dz^\ell \wedge d\bar{z}^\ell \left(i\sum_j k_j\theta_j z_j \frac{\partial}{\partial z^j}, \cdot\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_j k_j\theta_j z_j\, d\bar{z}^j
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
d\langle \mu, u\rangle(z) &= d(\mu(z), u) \\
&= d\Big(-\frac{1}{2}(k_1|z_1|^2, \dots, k_n|z_n|^2), u\Big) \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial z^j}\Big(-\frac{1}{2}(k_1|z_1|^2, \dots, k_n|z_n|^2), u\Big) dz^j \\
&\quad + \sum_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\Big(-\frac{1}{2}(k_1|z_1|^2, \dots, k_n|z_n|^2), u\Big) d\bar{z}^j
\end{aligned}$$

que segue das definições acima. Para calcular isso note que para toda $j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial z^j}|z_j|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\left(\sum_k (x^k)^2 + (y^k)^2\right) = x^j - iy^j = \bar{z}^j$$

e que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}|z_j|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)(x^2+y^2) = z^j$$

assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
-2d\langle \mu, u\rangle(z) &= \Big((k_1\overline{z_1}, 0, \ldots, 0), u\Big)dz^1 + \ldots + \Big((0,\ldots,0,k_n\overline{z}_n), u\Big)dz^n \\
&\quad + \Big((k_1 z_1, 0, \ldots, 0), u\Big)d\overline{z}^1 + \ldots + \Big((0,\ldots,0,k_n z_n), u\Big)d\overline{z}^n \\
&= \sum_j k_j \overline{z}_j \theta_j\, dz^j + k_j z_j \theta_j\, d\overline{z}^j \\
&= \sum_j k_j \theta_j (\overline{z}_j\, dz^j + z_j\, d\overline{z}^j)
\end{aligned}$$

(b) Para aplicar o exercício 1 considere o caso $n = 1$. Obtemos uma ação $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}$ com mapa momento $\mu(z) = -\frac{1}{2}|z|^2$. Tomando a variedade produto $\mathbb{C}^n$, obtemos a ação por multiplicação de $e^{i\theta}$ em cada coordenada e o mapa momento

$$\mu(z_1,\ldots,z_n) = \sum \mu(z_i) = \sum -\frac{1}{2}|z_i|^2 = \frac{1}{2}|z|^2.$$

$\square$

Problem 6 $\ddot{\frown}$

Problem 7 Consider a hamiltonian action $\psi : G \curvearrowright (M, \omega)$, with moment map $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$. Consider the co-moment map $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M)$, $\hat{\mu}(u) = \langle \mu, u\rangle$, and consider $\mathcal{C}^\infty(M)$ equipped with the Poisson bracket.

(a) We saw in class that the equivariance of μ implies that $\hat{\mu}$ is an anti-homomorphism of Lie algebras. Show that the converse holds when G is connected.

(b) Show that for G connected, the fact that $\psi_g^*\omega = \omega$ follows from the condition $i_{u_M}\omega = d\langle \mu, u\rangle$.

Solution.

(a) (Vou fazer a prova de Wang, lecture 8. Embora demorei para entender, gostei muito do argumento.)

Suponha que

$$\hat{\mu}(u), \hat{\mu}(v)\} = \hat{\mu}\Big([u, -v]\Big) \tag{5}$$

A hipótese de conexidade de G é usada para expresar cualquer elemento do grupo como produto de elementos $\exp(X)$ para $X \in \mathfrak{g}$. Isso segue do exercício 2 da lista 5 (todo grupo de Lie conexo está generado por uma vizinhança da identidade) e do fato de que $\exp$ é um difeomorfismo em vizinhanças de $e \in G$ e $0 \in \mathfrak{g}$.

Assim, o nosso objetivo é mostrar que

$$\mu(\exp(tX)x) = \mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}\,\mu(x)$$

Lembre que $\exp(tX)$ é o fluxo de X_M. Considere também o campo vetorial $X_{\mathfrak{g}^*}$ em $\mathfrak{g}^*$ que seja o generador do fluxo $\mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}$—isso se obtém simplesmente derivando respeito a t. O lance vai ser mostrar que esses campos vetoriais estão μ-relacionados, já que isso implica que os fluxos comutam, i.e. o seguinte diagrama commuta (Lee, prop. 9.13):

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \\ {\scriptstyle \exp(tX)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}} \\ G & \xrightarrow[\mu]{} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

que é exatamente o que precisamos mostrar.

A condição dos fluxos serem μ-relacionados significa que

$$d\mu(X) = X_{\mathfrak{g}^*} \circ \mu.$$

(ponto a ponto, $d\mu(X_p) = (X_{\mathfrak{g}^*})_{\mu(p)}$.) Mas, o que é a diferencial de μ? Tata-se de um mapa

$$d\mu : TM \to T\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$$

Então pegue $m \in M$ e $Y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{**}$. Pensando que Y é um funcional linear em $\mathfrak{g}^* \ni d\mu(X_M)(m)$, podemos calcular

$$\begin{aligned} \langle d\mu(X_M(m)), Y\rangle &= Y \circ d\mu(X_M(m)) \\ &= d(Y \circ \mu)X_M(m), \qquad \text{pois } Y \in (\mathfrak{g}^*)^* \text{ é linear} \\ &= X_M(Y \circ \mu)(m), \qquad \text{em geral } Xf = dfX \\ &= X_M(\langle \mu(m), Y\rangle) \end{aligned}$$

Agora usemos a hipotese eq. (5) de que $\hat{\mu}$ é um antihomomorfismo de álgebras de Lie :

$$X_M(\hat{\mu}(Y)) = X_{\hat{\mu}(X)}(Y) = \{\hat{\mu}(Y), \hat{\mu}(X)\} = \hat{\mu}([Y, X]) = -\langle \mu, [X, Y]\rangle.$$

Para concluir note que

$$-\langle \mu, [X, Y]\rangle = \left\langle X_{\mathfrak{g}^*}(\mu), Y\right\rangle,$$

que vem de diferenciar ambos lados de

$$\left\langle \mu, \mathrm{Ad}_{\exp(-tX)}\, Y\right\rangle = \left\langle \mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}\,\mu, Y\right\rangle$$

e evaluar em $t = 0$. Concluimos que

$$\langle d\mu(X_M(m)), Y\rangle = \left\langle X_{\mathfrak{g}^*}(\mu(m)), Y\right\rangle.$$

Ou seja, X_M e $X_{\mathfrak{g}^*}$ estão μ-relacionados.

(b) De novo, como G é conexo, podemos supor que qualquer $g \in G$ como $g = \exp(u)$ para $u \in \mathfrak{g}$. Isso permete expressar a invariância da multiplicação por g com respeito a ω em termos da derivada de Lie de u_M:

$$\mathcal{L}_{u_M}\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tu_M)^*\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^*_{\exp(tu)}\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^*_g\omega.$$

Agora lembre que $i_{u_M}\omega = d\langle \mu, u\rangle$ implica $u_M = X_{\langle \mu, u\rangle}$ por definição do campo vetorial hamiltoniano. Isso implica que a derivada de Lie dele com respeito a ω se anula. Lembremos por que:

$$\mathcal{L}_{u_M}\omega \overset{\text{Cartan}}{=} di_{u_M}\omega + \cancelto{0}{i_{u_M} d\omega} = di_{u_M}\omega = dd\langle \mu, u\rangle = 0$$

□

Problem 8 Let G be a Lie group and consider the action by multiplication on the left: $G \times G \to G$, $(g, a) \mapsto L_g(a) = ga$. Take the G-action on T^*G by cotangent lift, $\psi : G \times T^*G \to T^*G$.

(a) Consider the action of G_ξ on G by left multiplication, and the map $q : G to \mathcal{O}_\xi$, $g \mapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\xi$ (where $\mathcal{O}_\xi$ is the coadjoint orbit through ξ). Note that we have an induced bijection $G/G_\xi \to \mathcal{O}_\xi$. (It is a general fact that the quotient G/G_ξ is naturally a smooth manifold, and we equip $\mathcal{O}_\xi$ with the smooth structure for which this bijection is a diffeomorphism.)

Verify that $q(R_h(g)) = \mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}(q(g))$, and conclude that $dq(u^L|_g = u_{\mathfrak{g}^*}|_{q(g)}$ and $dq\left(u^R|_g\right) = \left(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(u)\right)_{\mathfrak{g}^*}|_{q(g)}$.

Solution.

(a) Temos que

$$\begin{aligned} q(R_h(g)) &= q(gh) = \mathrm{Ad}^*_{(gh)^{-1}}\xi = \mathrm{Ad}^*_{h^{-1}g^{-1}}\xi \\ &= \mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\xi = \mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}q(g). \end{aligned}$$

Diferenciando no lado esquerdo dessa expresão e avaliando em $u \in \mathfrak{g} = T_eG$

$$d_e(qR_h)(u) = d_h q\Big(d_e R_h(u)\Big) = d_h q(u^L|_h),$$

enquanto que o lado direito nos da

$$d_e(\mathrm{Ad}^*_{h^{-1}} q)(u) = d_{q(e)}\mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}\Big(d_e q(u)\Big) = d_\xi \mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}\Big(\mathrm{ad}^*_u(\xi)\Big).$$

Parece que algo tá errado aqui… ⍨

□

Problem 9 (Shift trick) Let (M, ω, μ) be a hamiltonian G-space. Take a coadjoint orbit $\overline{\mathcal{O}_\xi}$ with symplectic form $-\omega_{\mathsf{kks}}$. Verify that the diagonal G-action on $M \times \overline{\mathcal{O}_\xi}$ is hamiltonian with moment map

$$\tilde{\mu} : M \times \overline{\mathcal{O}_\xi} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \qquad \tilde{\mu}(x, \eta) = \mu(x) - \eta,$$

and that ξ is a regular value for μ if and only if 0 is a regular value for $\tilde{\mu}$.

Note that we have a natural inclusion $j : \mu^{-1}(\xi) \hookrightarrow \tilde{\mu}^{-1}(0)$, $x \mapsto (x, \xi)$. Show that this inclusion induces a diffeomorphism $\mu^{-1}(\xi)/G_\xi \xrightarrow{\sim} \tilde{\mu}^{-1}(0)/G$ preserving the reduced symplectic forms.

Solution. Vamos denotar $Q := M \times \overline{\mathcal{O}_\xi}$Primeiro vamos ver que a ação $\tilde{\mu}$ é fracamante hamiltoniana, i.e., que

$$i_{u_Q} \omega_Q = d \langle \tilde{\mu}, u \rangle .$$

O resultado e bastante imediato assim que identifiquemos cada elemento na equação anterior. Em primeiro lugar, note que a forma simplética na variedade produto $Q = M \times \overline{\mathcal{O}_\xi}$ está dada por

$$\omega_Q\Big((v, w), (v', w')\Big) = \omega(v, v') - \omega_{\mathsf{kks}}(w, w').$$

Em segundo lugar, lembre que a ação de G em $\mathcal{O}_\xi$ é hamiltoniana com mapa momento

$$\mu_{\mathcal{O}_\xi}(\eta) = \eta.$$

Em terceiro lugar note que para qualquer $u \in \mathfrak{g}^*$, o campo u_Q está dado como $(u_M, u_{\mathcal{O}_\xi})$. Isso é simplesmente porque a ação de G em Q está dada entrada a entrada.

Então podemos simplesmente escrever

$$\begin{aligned} d \langle \tilde{\mu}, u \rangle &= d\Big(\langle \mu, u \rangle - \big\langle \mu_{\mathcal{O}_\xi}, u \big\rangle \Big) \\ &= i_{u_M} \omega - i_{u_{\mathcal{O}_\xi}} \omega_{\mathsf{kks}} \\ &= i_{u_Q} \omega_Q . \end{aligned}$$

A prova da equivariância também segue das observações anteriores: para todo $g \in G$,

$$\tilde{\mu}(gx, g\eta) = \mu(gx) - \mu_{\mathcal{O}_\xi}(g\eta) = \mathsf{Ad}^*_g(\mu(x)) - \mathsf{Ad}^*_g\left(\mu_{\mathcal{O}_\xi}(\eta)\right) = \mathsf{Ad}^*_g\left(\tilde{\mu}(x, \eta)\right).$$

A prova de que ξ é um valor regular de μ se e somente se 0 é um valor regular de $\tilde{\mu}$ segue do fato de que (Silva, p. 168)

$$\mathfrak{g}_p = \{0\} \iff d\mu_p \text{ é surjetiva}$$

onde $\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} : X_M(p) = 0\}$ é a algebra de Lie do estabilizador de p.

Para nosso exercício suponha primeiro que 0 é um valor regular de $\tilde{\mu}$. Então $\mathfrak{g}_{(p,\eta)} = \{0\}$ para qualquer $(p, \eta) \in \tilde{\mu}^{-1}(0)$. Isso significa que se $X \in \mathfrak{g}_{(p,\eta)}$, $X = 0$. Ou seja, se $X_Q(p, \eta) = 0$ então $X = 0$.

Para ver que $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ se $p \in \mu^{-1}(\xi)$, pegue $p \in M$ tal que $\mu(p) = \xi$ e $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X_M(p) = 0$. Então $(p, \xi) \in \tilde{\mu}^{-1}(0)$, e então, se $X_Q(p, \xi) = 0$ teremos que $X = 0$. De fato, $X_Q(p, \xi) = (X_M p, X_{\overline{\mathcal{O}}_\xi}(\xi)) = (0, 0)$. (Não consegui ver por que tem 0 alí.)

A implicação conversa é mais simples: imitando o argumento, concluimos notando que o fato de $X_Q(p, \eta) = 0$ implica trivialmente que $X_M(p) = 0$.

$\square$

References

Griffiths, Phillip and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. New York: John Wiley & Sons, 1978.

Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition. 2013.

Silva, A.C. da. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics no. 1764. Springer, 2001. ISBN: 9783540421955.

Wang, Quoqin. *Lecture notes in Symplectic Geometry*. URL: http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/15S-Symp/SympGeom.html.