Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 4

Contents

Problema 1 Let M be a compact, connected, orientable n-dimensional manifold. Let $\Lambda_0, \Lambda_1 \in \Omega^n(M)$ be two volume forms on M such that $\int_M \Lambda_0 = \int_M \Lambda_1$. Show that there is a diffeomorphism $\phi \in \mathrm{Dif}(M)$ such that $\phi^*(\Lambda_1) = \Lambda_0$.

Solução. Aqui sigo as definições em Lee, p. 380. Como M é orientada, em cada ponto podemos pegar um marco orientado (i.e. que em cada ponto pertence à clase de equivalencia dada pela orientação) $E_1, \dots, E_n$ tal que as formas Λ_0 e Λ_1 são sempre positivas ou sempre negativas. Mas ainda, como $\int_M \Lambda_0 = \int_M \Lambda_1 > 0$,

$$\Lambda_0(E_1, \dots, E_0), \Lambda(E_1, \dots, E_n) > 0$$

para qualquer marco orientado. Daí é claro que $\Lambda_t(E_1, \dots, E_n) > 0$, de modo que Λ_t não pode ser a forma zero em nenhum ponto de M, i.e. é uma forma de volumen.

Para ver que $[\Lambda_0] = [\Lambda_1]$ lembre que $H^n(M)$ tem dimensão 1. Daí existe um escalar α tal que $[\Lambda_0] = \alpha [\Lambda_1]$. Mas, como a integral está bem definida em classes de cohomologia, $\int_M [\Lambda_0] = \int_M [\Lambda_1] \implies \alpha = 1$.

Para concluir só devemos aplicar o Método de Moser. Já temos uma família de formas cohomologas, assim existe uma isotopía φ_t tal que $\varphi_t^* \Lambda_t = \Lambda_0$. Pegando $t = 1$ obtemos o difeomorfismo buscado. □

Problem 2 Give an example of two symplectic forms on $\mathbb{R}^4$ that induce the same orientation, but admit a convex combination that is degenerate. Is it possible to find an example like that, but admitting another of *symplectic* forms from one to the other? What happens if we consider $\mathbb{R}^2$ instead of $\mathbb{R}^4$?

Solução. (See StackExchange.) Lembre que no problema 1 da lista 1 vimos que uma 2-forma ω é não degenerada se é só se $\omega^n \neq 0$. No nosso caso, qualquer 2-forma em $\mathbb{R}^4$ pode ser expressada como

$$\omega = \alpha\, dx \wedge dy + \beta\, dx \wedge dz + \gamma\, dx \wedge dw + \delta\, dy \wedge dz + \varepsilon\, dy \wedge dw + \phi\, dz \wedge dw\,.$$

Daí,

$$\omega \wedge \omega = 2F\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw$$

onde $F = \alpha\phi - \beta\varepsilon + \gamma\delta$ (vou fazer essa conta num caso análogo abaixo). Segue que ω é não degenerada se e só se $F \neq 0$.

Nosso primeiro problema é achar ω_0 e ω_1 tais que as suas funções associadas como acima, F_0 e F_1, sejam não-zero, mas que exista uma combinação convexa delas ω_t cuja função F_t sim seja zero. Note que se $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$,

$$\begin{aligned}
\omega_t \wedge \omega_t &= \Big((1-t)\omega_0 + t\omega_1\Big) \wedge \Big((1-t)\omega_0 + t\omega_1\Big) \\
&= (1-t)^2\omega_0 \wedge \omega_0 + t(1-t)\Big(\omega_0 \wedge \omega_1 + \omega_1 \wedge \omega_0\Big) + t^2\omega_1 \wedge \omega_1 \\
&= (1-t)^2\omega_0 \wedge \omega_0 + \Big(2t(1-t)\Big)\omega_0 \wedge \omega_1 + t^2\omega_1 \wedge \omega_1
\end{aligned}$$

Agora vou calcular $\omega_0 \wedge \omega_1$:

$$\begin{aligned}
&\omega_0 \wedge \omega_1 \\
&= \Big(\alpha_1\, dx \wedge dy + \beta_1\, dx \wedge dz + \gamma_1\, dx \wedge dw + \delta_1\, dy \wedge dz + \varepsilon_1\, dy \wedge dw + \phi_1\, dz \wedge dw\Big) \\
&\wedge \Big(\alpha_2\, dx \wedge dy + \beta_2\, dx \wedge dz + \gamma_2\, dx \wedge dw + \delta_2\, dy \wedge dz + \varepsilon_2\, dy \wedge dw + \phi_2\, dz \wedge dw\Big) \\
&= 2\alpha_1\phi_2 dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw + \ 2\beta_1\varepsilon_2 dx \wedge dz \wedge dy \wedge dw + \ 2\gamma_1\delta_2 dx \wedge dw \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

de forma que

$$\omega_0 \wedge \omega_1 = 2\Big(\alpha_1\phi_2 - \beta_1\varepsilon_2 + \gamma_1\delta_2\Big) dx \wedge dy \wedge dz \wedge d$$

Definamos $F_{01} := \alpha_1\phi_2 - \beta_1\varepsilon_2 + \gamma_1\delta_2$.

Agora pegue $\alpha_1 = \alpha_2 = \phi_1 = \phi_2 = \beta_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$ e o resto zero. Obtemosque $F_0 = F_1 = 1$, e que $F_{01} = -1$. Então

$$\begin{aligned}
\omega_t \wedge \omega_t &= 2\left((1-t)^2 - 2t(1-t) + t^2\right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
&= 2\Big(1 - 2t + t^2 - 2t + 2t^2 + t^2\Big) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
&= 2\Big(1 - 4t + 4t^2\Big) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
&= 2(1-2t)^2 dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw
\end{aligned}$$

Por fim, ω_t é degenerada quando $t = 1/2$.

Para mostrar que existe uma trajetória de formas simpléticas conectando ω_0 e ω_1 note que o espaço de 2-formas pode ser identificado com $\mathbb{R}^6$ com coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi)$. Pelas observações anteriores, vemos que o conjunto de formas degeneradas é a variedade (algébrica) $[F = 0]$. Duas formas determinan a mesma orientação quando estão no mesmo conjunto $[F > 0]$ ou $[F < 0]$. Por exemplo, as formas ω_0 e ω_1 estão em $[F > 0]$.

Mostrar que existe um caminho que conecta essas formas (o quaisquer duas que induzam a mesma orientação) é tanto como mostrar que $[F > 0]$ (e $[F < 0]$) é un conjunto conexo. Aseguir mostrarei que de fato a variedade $[F = 0]$ separa $\mathbb{R}^6$ em duas componentes conexas $[F > 0]$ e $[F < 0]$.

Primeiro note que o gradiente de F é $\nabla F = (\phi, -\varepsilon, \delta, \gamma, -\beta, \alpha)$. Ele é não-zero em $\mathbb{R}^6 \setminus 0$, de modo que, $[F = 0] \setminus 0$ é uma variedade suave. Como $0 \in [F = 0]$, podemos fixar nossa atenção em $\mathbb{R}^6 \setminus 0$, que é um retrato por deformação de $S^5 \subset \mathbb{R}^6$ e mostrar que $F|_{S^5}$ induiz duas componentes conexas.

Como S^5 é compacto, $F|_{S^5}$ tem pelo menos um máximo local em $[F > 0]$ e um mínimo local em $[F < 0]$. Note que dado um ponto no conjunto $[F > 0]$, existe um caminho, determinado pelo gradiente, que conduiz até um ponto máximo local dentro de $[F > 0]$. Dados dois pontos em $[F > 0]$, podemos achar um caminho entre eles dentro de $[F > 0]$ se conseguimos mostrar que qualquer par de maximos locais está conectado por um caminho dentro de $[F > 0]$. O mesmo acontece para pontos em $[F < 0]$. Então a prova está concluida se mostramos que os pontos críticos (máximos ou mínimos) de F estão na mesma componente conexa (i.e. $[F > 0]$ ou $[F < 0]$, respectivamente).

Como ∇F é um vetor que aponta na direção de maior pendente, um ponto $p \in S^5$ é critico se e só se ∇F_p é paralelo p. Podemos ver ∇F como uma transformação linear $\mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$, $p \mapsto \nabla_p F$. De fato, ela é dada pela matriz H que tem $(1, -1, 1, -1, 1)$ na antidiagonal e zero no resto. Então vemos que os pontos críticos são exatamente os vetores próprios dessa matriz.

Fazendo as contas de álgebra linear, pode comprovar que os valores próprios de H são ± 1, cada um com multiplicade 3. Assim, temos dois espaços próprios de dimensão 3. Quando intersectamos esses espaços com S^5, obtemos duas esferas de dimensão 2. Essas esferas são disjuntas e conexas, e representas os conjuntos de pontos críticos de F.

Uma solução mais terrenal. Contudo, uma prova mais directa consiste em observar o seguinte: os valores de β_1 e ε_2 não alteram o fato de que as formas ω_0 e ω_1 sejam formas não degeneradas (e que induzem a mesma orientação), enquanto que $\omega_t \wedge \omega_t$ sí pode mudar. Vamos mostrar que as formas ω_0 e ω_1 definidas acima podem ser conectadas por um caminho de formas simpléticas trocando β_1 e ε_0 por funções de t.

Primeiro fixe os mesmos valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ como no caso anterior, mas deixe β_1 e ε_2 sem definir. Obtemos que:

$$\begin{aligned}
\omega_t \wedge \omega_t &= 2\left((1-t)^2 + 2t(1-t)\beta_1\varepsilon_2 + t^2\right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
&= 2\Big(1 - 2t + t^2 + 2t\beta_1\varepsilon_2 - 2t^2\beta_1\varepsilon_2 + t^2\Big) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
&= 2\Big((2 - 2\beta_1\varepsilon_2)t^2 - 2t(\beta_1\varepsilon_2 - 1)t + 1\Big) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw
\end{aligned}$$

Agora defina

$$\beta_1 = -2(t - 1/2), \qquad \varepsilon_0 = 4(t - 1/2)$$

e considere a família de formas $\omega_t' = (1-t)\omega_0(t)\omega_1(t)$. Note que $\omega_0' = \omega_0$ e $\omega_1' = \omega_1$.

Daí,

$$\begin{aligned}\omega_t \wedge \omega_t = 2\Bigg(&\Big((2-2\big(\underbrace{-2(t-1/2)}_{\beta_1}\big)\underbrace{4(t-1/2)}_{\varepsilon_2}\Big)t^2 \\ &- 2t\Big(\big(\underbrace{-2(t-1/2)}_{\beta_1}\big)\underbrace{4(t-1/2)}_{\varepsilon_2}-1\Big)t+1\Bigg)dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw\end{aligned}$$

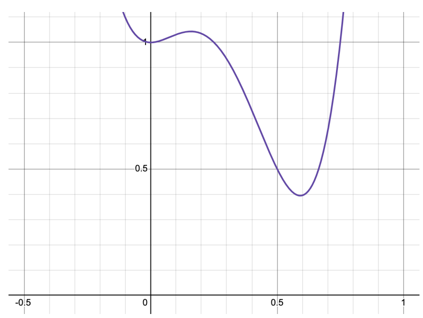
Para calcular isso calculei que

$$\beta_1 \varepsilon_2 = -8t^2 - 4t + 1$$

daí cheguei a que

$$\omega_t \wedge \omega_t = 2\big(32t^4 - 32t^3 + 6t^2 + 1\big)dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw$$

de modo que F_t nunca se anula.



F_t

Em fim, no caso de $\mathbb{R}^2$, suponha que ω_0 e ω_1 são duas formas não degeneradas. Sabemos que em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$ elas são um múltiplo da outra. Portanto, uma combinação convexa delas não pode ser degenerada porque é da forma

$$\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\lambda\omega_0 = (1-t+\lambda t)\omega_0.$$

□

Problem 3 Let (V, Ω) be a symplectic vector space (or vector bundle) and let $W \subseteq V$ be a coisotropic subspace (or bundle).

a. Let E be a complement of W^Ω in W, i.e., $W = W^\Omega \oplus E$. Show that the restriction of Ω to E is nondegenerate.

b. Let J be a Ω-compatible complex structure, with g the associated inner product. Show that Ω induces an identification of $J(W^\Omega) = W^\perp$ with $(W^\Omega)^*$. Taking E

as the orthogonal complement (with respect to g) to W^Ω in W (this means that $W = W^\Omega \oplus E$), show that the identification

$$V \cong E \oplus (W^\Omega \oplus (W^\Omega)^*),$$

is an isomorphism of symplectiv vector spaces (bundles)—on the right-hand-side, E is equipped with its induced symplectic form (see a. above) and $W^\Omega \oplus (W^\Omega)^*$ with its canonical symplectic form.

Solução.

a. Basta ver que $\ker \Omega|_E = 0$. Se $e \in \ker \Omega|_E$, então eu gostaria de ver que $e \in W^\Omega$ para concluir que $e = 0$. Seja $w \in W$. Então $\Omega(e, w) = \Omega(e, w_1 + w_2)$ com $w_1 \in W^\Omega$ e $w_2 \in E$. Daí $\Omega(e, w) = 0$ já que tanto $\Omega(e, w_1) = 0$ porque $e \in E \subset W$ quanto $\Omega(e, w_2) = 0$ porque $w_2 \in E$.

b. Considere o mapa

$$\begin{aligned} J(W^\Omega) &\longrightarrow (W^\Omega)^* \\ Jw &\longmapsto i_w\Omega = \Omega(w, \cdot) \end{aligned}$$

Note que $J(W^\Omega)$ e W^Ω são espaços vetorias de dimensões iguais, e que esse mapa tem kernel trivial pela não degeneração de Ω. Isso explica que é um isomorfismo.

Para construir o isomorfismo requerido note que por definição $W \cong E \oplus W^\Omega$. E como mostramos que $W^\perp \cong (W^\Omega)^*$, sabemos que $V \cong W \oplus (W^\Omega)^*$. Daí o isomorfismo algébrico está comprovado por causa de que a soma direita é associativa. Issto é, temos um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow E \oplus W^\Omega \oplus (W^\Omega)^* \\ v &\longmapsto (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

onde $g(v_1, v_2) = 0$ e $g(v_1 + v_2, v_3) = 0$.

Agora vamos comprovar que esse mapa é um simplectomorfismo,

$\square$

Problem 4 Prove the following generalizaion of Weinstein's lagrangian neighbourhood theorem to coisotropic submanifolds (due to Gotay, 1982): Let (M_0, ω_0) be and (M_1, ω_1) be symplectic manifolds, and $\iota_0 : Q \longrightarrow M_0$, $\iota_1 : Q \longrightarrow M_1$ be coisotropic embeddings. If $\iota_0^*\omega_0 = \iota_1^*\omega_1$ then there exist open neighbourhoods $\mathcal{U}_0$ and $\mathcal{U}_1$ of Q, in M_0 and M_1, and a diffeomorphism $\varphi : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{U}_1$ such that $\varphi(p) = p$ for all $p \in Q$ and $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.

Solução. Estamos aqui:

$$\begin{tikzcd} (M_0, \omega_0) & & (M_1, \omega_1) \\ & Q \arrow[ul, hook, "\iota_0"] \arrow[ur, hook', "\iota_1"'] & \end{tikzcd}$$

Em aula demostramos que:

Theorem (Teorema de Darboux generalizado Versão 2.0) Suponha que, além do diagrama anterior, temos um isomorfismo de fibrados simplécticos

$$\begin{tikzcd} TM_0|_Q \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & TM_1|_Q \arrow[dl] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

tal que $\phi|_{TQ} : TQ \to TQ$ é id_{TQ}.

Então ϕ estende a derivada de um simplectomorfismo

$$\begin{tikzcd} U_0 \subset M_0 \arrow[rr, "\varphi"] & & U_1 \subset M_1 \\ & Q \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

i.e.,

$$d\varphi|_Q = \phi : TM_0|_Q \to TM_1|_Q$$

Em palavras: a derivada do simplectomofismo (entre as vizinhanças de M_1 e M_2) que obtemos é estendida pelo isomorfismo simplético dos fibrados tangentes que nos foi dado.

Portanto, para nosso exercício só precisamos achar um simplectomorfismo ϕ de fibrados tangentes que restringe a identidade no TQ.

Também é bom lembrar que na prova do teorema das vizinhanças lagrangianas construiimos esse simplectomorfismo de fibrados do seguinte jeito:

$$\begin{tikzcd} & T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^* \arrow[dr, "\cong"] & \\ TM|_{\mathcal{L}} \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "\phi"] & & T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}} \end{tikzcd}$$

Isto é, mostrando que, no caso lagragiano, existe um isomorfismo de fibrados tangentes entre o fibrado tangente da variedade ambiente restrito à subvariedade lagrangiana e a soma direita $T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^*$. Aplicando isso usando como variedade ambiente tanto M quanto T^*M construimos o diagrama anterior.

A estrutura complexa foi usada para obter a descomposição $T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^*$: o que fizemos foi construir o complemento ortogonal usando a métrica compatível e daí mostramos que esse complemento é de fato isomorfo a $(T\mathcal{L})^*$.

No caso coisotrópico temos, pelo exercício anterior, dois isomorfismos de fibrados

$$TM_1 \cong E_1 \oplus \left(TQ^\omega \oplus (TQ^\omega)^*\right), \qquad TM_2 \cong E_2 \oplus \left(TQ^\omega \oplus (TQ^\omega)^*\right)$$

então é claro que se $E_1 \cong E_2$ terminhamos. Mas E_i é só o complemento ortogonal de TQ^ω respeito à métrica compatível g_i em TQ, enquanto g_1 e g_2 coincidem em TQ já que $\omega_1|_Q = \omega_2|_Q$ por hipótese (o pullback das inclusões coincide). Note que também é imediato que a restrição desse isomorfismo a TQ é a identidade. $\square$