

Lista 3

Contents

Problem 1	1
Problem 2	2
Problem 3	5
Problem 4	6

Problem 1 Consider a symplectic manifold (M^{2n}, ω) with hamiltonian $H \in C^\infty(M)$. Let $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$ be first integrals of the flow of H , i.e., $\{H, f_i\} = 0$. Let $F = (f_1, \dots, f_k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, and let $c \in \mathbb{R}^k$ be a regular value. Note that $M_c := F^{-1}(c)$ is invariant by the flow of H . We will show that M_c carries a natural invariant volume form.

- Take a neighborhood \mathcal{U} of M_c where df_1, \dots, df_k are linearly independent point-wise. Show that the Liouville volume form $\Lambda_\omega = \omega^n/n!$ can be written in \mathcal{U} as $\Lambda_\omega = df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \sigma$ for some $\sigma \in \Omega^{2n-k}(M)$. We then define a volume form $\Lambda_c := i\sigma \in \Omega^{2n-k}(M_c)$ where $i : M_c \rightarrow M$ is the inclusion.
- Show that $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \mathcal{L}_{X_H} \sigma = 0$ and use this fact to see that we can write $\mathcal{L}_{X_H} \sigma = \sum_{i=1}^k df_i \wedge \rho_i$. Conclude that Λ_c is invariant by the flow of H .
- Show that Λ_c does not depend on the choice of σ .

Solution.

- (Idea certa de parcialmente inspirada em [StackExchange](https://stackoverflow.com/questions/44444444).) Note que como $\dim \Omega^{2n}(M) = 1$, basta mostrar que existe $\sigma \in \Omega^{2n-k}(M)$ tal que $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \sigma \in \Omega^{2n}(W)$.

Sabemos que para qualquer ponto $p \in M_c$ existe uma vizinhança V de p com coordenadas locais $(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_{2n})$. Daí, uma base de T_x^*V é $df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_{2n}$. Defina $\sigma_V = dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_{2n}$. Pegue uma coberta aberta V_α de \mathcal{U} e defina uma partição da unidade ρ_α para estender cada forma σ_{V_α} a uma forma em \mathcal{U} , $\sigma_{V_\alpha} \rho_\alpha$. A forma $\sum_\alpha \sigma_{V_\alpha} \rho_\alpha$ é a buscada.

Outra ideia que tive: pegue um ponto $p \in \mathcal{U} \subset M$. Podemos completar $(df_1)_p, \dots, (df_k)_p$ a uma base de T^*M . Também podemos estender essa base para uma vizinhança $p \in V \subset \mathcal{U}$ como segue: extenda os covectores a toda M usando uma função "quindim" (=bump function) que seja 1 num compacto perto de p —i.e. estamos extendedo essas formas que achamos em p para um campo covetorial constante. Daí, como os covectores são linearmente independentes em p , o determinante da função de coeficientes deles é não zero em p , mas como o determinante é contínuo, existe uma vizinhança de p onde é não zero. Defina $\tilde{\sigma}$ como o wedge product dos

covectores que acabamos de achar. Daí, de novo, é só estender cada $\tilde{\sigma}$ a uma forma em \mathcal{U} . O problema aqui é comprovar que a escolha dos covetores coincide nas interseções dos abertos—algo que acontece na construção anterior porque estamos usando um atlas de M .

b. Pela fórmula de Cartan, em cada vizinhança V como no item anterior,

$$\begin{aligned} df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \mathcal{L}_{X_H} \sigma &= df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge (i_{X_H} d\sigma + d(i_{X_H} \sigma)) \\ &= \end{aligned}$$

Pela fórmula de Cartan, em cada vizinhança V como no item anterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_H} \sigma_V &= \mathcal{L}_{X_H} (dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_{2n}) \\ &= \mathcal{L}_{X_H} dx_{k+1} \wedge dx_{k+2} \wedge \dots \wedge dx_{2n} \\ &\quad + dx_{k+1} \wedge \mathcal{L}_{X_H} dx_{k+2} \wedge \dots \wedge dx_{2n} \\ &\quad + \dots + dx_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_{X_H} dx_{2n}. \end{aligned}$$

Só note que cada termo dessa soma que não é zero deve conter um múltiplo de alguma df_j porque essa é a única maneira de ter formas linealmente independentes no wedge product.

Sabendo que $\mathcal{L}_{X_H} \sigma = \sum_j df_j \wedge \rho_j$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_H} i^* \sigma &= i^* \mathcal{L}_{X_H} \sigma \\ &= i^* \left(\sum_j df_j \wedge \rho_j \right) \\ &= \sum_j di^* f_j \wedge i^* \rho_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

já que f_i é constante em M_c .

c. Suponha que $\tilde{\sigma} \in \Omega^{2n-k}(M)$ também é tal que $\Lambda_\omega = df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \tilde{\sigma}$. Então

$$\begin{aligned} df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge (\sigma - \tilde{\sigma}) &= 0 \\ \implies \sigma \wedge \tilde{\sigma} &= df_1 \wedge \dots \wedge df_{k+1} \wedge \gamma, \quad \gamma \in \Omega^{2n-k}(M) \\ \implies i^*(\sigma - \tilde{\sigma}) &= i^*(df_1 \wedge \dots \wedge df_{k+1} \wedge \gamma) = 0 \\ \implies i^* \sigma &= i^* \tilde{\sigma} \end{aligned}$$

já que wedge product igual a zero e equivalente a dependência linear e de novo porque f_j são constantes em M_c .

□

Problem 2 Let M be a symplectic manifold, $\Psi = (\psi^1, \dots, \psi^k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ a smooth map, and c a regular value. Consider a submanifold $N = \Psi^{-1}(c) \hookrightarrow M$.

- Show that N is coisotropic if and only if $\{\psi^i, \psi^j\}|_N = 0$ for all $i, j = 1, \dots, k$.
- Show that N is symplectic if and only if the matrix (c^{ij}) , with $c^{ij} = \{\psi^i, \psi^j\}$, is invertible for all $x \in N$. In this case, verify that we have the following expression for the Poisson bracket $\{\cdot, \cdot\}_N$ on N (known as *Dirac's bracket*):

$$\{f, g\}_N = \left(\{\tilde{f}, \tilde{g}\} - \sum_{ij} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} c_{ij} \{\psi^j, \tilde{g}\} \right) \Big|_N$$

where $(c_{ij}) = (c^{ij})^{-1}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, and $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ are arbitrary extensions of f and g .

Solution.

- Since M is symplectic we have a bundle isomorphism

$$\begin{aligned} \omega^b : TM &\longrightarrow T^*M \\ v &\longmapsto i_v \omega \end{aligned}$$

Then

$$TN^\omega = (\omega^b)^{-1}(\text{Ann}(TN)).$$

Since M is the level set of a regular value, there are local coordinates of the form $(\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$. Vectors tangent to N are expressed only in terms of the vectors $\partial_{k+1}, \dots, \partial_{2n}$ and thus covectors that vanish on TN are those which vanish on $\partial_{k+1}, \dots, \partial_{2n}$. This means that a basis for $\text{Ann}(TN)$ is given by $d\psi^1, \dots, d\psi^k$ (an explanation of this might be that the canonical basic covectors for the coordinates ψ^i are the differentials $d\psi^i$, which maybe can be checked using the usual change of coordinates formula). These generators map to their hamiltonian vector fields under $(\omega^b)^{-1}$:

$$(\omega^b)^{-1}(d\psi^i) = X_{\psi^i}$$

So TN^ω is generated by the X_{ψ^i} . Notice that any vector $v \in TM$ is actually in TN iff $\alpha(v) = 0 \forall \alpha \in \text{Ann}(TN)$. Then we see that

$$\begin{aligned} TN^\omega \subset TM &\iff X_{\psi^i} \in TN \quad i = 1, \dots, k \\ &\iff d\psi^j(X_{\psi^i})|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \\ &\iff \omega(X_{\psi^i}, X_{\psi^j})|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \\ &\iff \{\psi^i, \psi^j\}|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

- Em qualquer sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^{2n}) , os vetores hamiltonianos $X_{x^1}, \dots, X_{x^{2n}}$ formam uma base do espaço tangente. Nessa base, os coeficientes da matriz que representa ω são exatamente os colchetes de Poisson $\{x^i, x^j\}$. A forma ω é não

degenerada se e somente se a sua matriz é invertível (já que nesse caso temos o isomorfismo ω^b bem definido). Então, o que queremos é ver que a restrição $\omega|_N$ é invertível em cada ponto de N .

Nas coordenadas de subvariedade $(\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$, a matriz que representa ω^b é

$$\begin{pmatrix} \{\psi^1, \psi^1\} & \dots & \{\psi^k, \psi^1\} & \{x^{k+1}, \psi^1\} & \dots & \{x^{2n}, \psi^1\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1, \psi^k\} & \dots & \{\psi^k, \psi^k\} & \{x^{k+1}, \psi^k\} & \dots & \{x^{2n}, \psi^k\} \\ \{\psi^1, x^{k+1}\} & \dots & \{\psi^k, x^{k+1}\} & \{x^{k+1}, x^{k+1}\} & \dots & \{x^{2n}, x^{k+1}\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1, x^{2n}\} & \dots & \{\psi^k, x^{2n}\} & \{x^{k+1}, x^{2n}\} & \dots & \{x^{2n}, x^{2n}\} \end{pmatrix}$$

No entanto,

$$\{x^i, \psi^j\} = dx^i(X_{\psi^j}) = 0$$

$$\{\psi^j, x^i\} = d\psi^j(X_{x^i}) = 0$$

se os covetores dx^i e $d\psi^j$ são de fato a base dual de X_{x^i} , X_{ψ^j} . Se isso for certo, podemos escrever a matriz representada acima como

$$\left(\begin{array}{c|c} \{\psi^i, \psi^j\} & 0 \\ \hline 0 & \{x^i, x^j\} \end{array} \right),$$

cujo determinante é o produto dos determinantes das matrizes de bloco não zero. Infelizmente o determinante da matriz $\{x^i, x^j\}$ pode ser zero se $k = n$ e tomamos uma carta coordenada de Darboux...

Suponha por enquanto que dadas as projeções

$$\begin{array}{ccc} & TM|_N = TN \oplus TN^\omega & \\ q_1 \swarrow & & \searrow q_2 \\ TN & & TN^\omega \end{array}$$

é verdade que

$$X_f = q_1(X_{\tilde{f}}), \quad q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y) c_{ij} X_{\psi^j}.$$

Então, (para facilitar leitura não escrevemos a restrição a N , mas isso só tem sentido em N)

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} &= \omega(X_{\tilde{f}}, X_{\tilde{g}}) \\ &= \omega(q_1(X_{\tilde{f}}), q_1(X_{\tilde{g}})) + \omega(q_1(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &\quad + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_1(X_{\tilde{g}})) + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &= \omega(X_f, X_g) + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &= \{f, g\}_N + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \end{aligned}$$

para calcular o último termo notamos que

$$\begin{aligned} q_2(X_{\tilde{f}}) &= \sum_{i,j} d\psi^i(X_{\tilde{f}})c_{ij}X_{\psi^j} & q_2(X_{\tilde{g}}) &= \sum_{k,\ell} d\psi^k(X_{\tilde{g}})c_{k\ell}X_{\psi^\ell} \\ &= \sum_{ij} -\{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}X_{\psi^j} & &= \sum_{k,\ell} \{\psi^k, \tilde{g}\}c_{k\ell}X_{\psi^\ell} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) &= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}\{\psi^k, \tilde{g}\}c_{k\ell}\omega(X_{\psi^j}, X_{\psi^\ell}) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{k\ell}\{\psi^k, \tilde{g}\} \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} \{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{\ell k}\{\psi^k, \tilde{g}\} \\ &= \sum_{i,k} \{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ik}\{\psi^k, \tilde{g}\} \end{aligned}$$

usando que a $c_{\ell k} = -c_{k\ell}$ por ser uma matriz antisimétrica. Com isso seria demonstrado o exercício.

O fato de que $X_{\tilde{f}} = q_1(X_{\tilde{f}})$ segue de que tanto M quanto N são variedades simpléticas, de modo que existe um único campo vetorial associado à $df = d\tilde{f}|_N$ em N .

A equação $q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y)c_{ij}X_{\psi^j}$ pode ser explicada como segue. Primeiro considere o caso simples do vetor $\frac{\partial}{\partial x^i} \in TM|_N$ para $i \leq k$ fixa. A mudança de coordenadas $\Psi \times \text{id}_{2n-k} = (\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$ disse que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} V^j$$

onde V^j é o marco de campos vetoriais associado as novas coordenadas. Qual é esse marco? Sabemos que uma base k kk

pegue um vetor tangente a M ancorado sobre N . Podemos expressá-lo em coordenadas locais:

$$TM|_N \ni Y = \sum_{i=1}^k Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=k+1}^{2n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Daí,

$$Y = \sum_{i=1}^k Y^i \sum_{j=1}^k \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \psi^j}$$

□

Problem 3

Solution. By an analogue argument to Problem 2a we know that $\text{Ann}(D)$ is a coisotropic submanifold iff $\{f, g\} = 0$ for all $f, g \in I_{\text{Ann}(D)}$. Now a vector field X corresponds naturally to an element of the double dual $\xi \in T^*(T^*(M))$ given by $\xi\eta(X) = \eta(X)$ for $\eta \in T^*M$. Notice that if $X \in D$ then $\xi \in \text{Ann}(\text{Ann}(D))$. \square

Problem 4 Consider a smooth map $\phi : Q_1 \rightarrow Q_2$, and let

$$R_\phi := \{((x, \xi), (y, \eta)) : y = \phi(x), \xi = (T\phi)^*\eta\} \subset T^*Q_1 \times T^*Q_2.$$

Verify that R_ϕ is a lagrangian submanifold of $T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$. Whenever ϕ is a diffeo, what is the relation between R_ϕ and the cotangent lift $\hat{\phi}$?

Denote by $\Gamma_\phi \subset Q_1 \times Q_2$ the graph of ϕ . What is the relation between $N^*\Gamma_\phi$ (the conormal bundle of Γ_ϕ) and R_ϕ ?

Solution. A notação $(T\phi)^*$ é um pouco confusa, mas terminei por interpreta-lá como simplesmente a precomposição, ie. $(T\phi)^* = \phi \circ T\phi$, ou seja, o pullback usual ϕ^* . Daí, é fácil ver que se ϕ é um difeomorfismo, R_ϕ é justamente o grafo do pullback

$$\begin{aligned} \phi^* : T^*Q_2 &\longrightarrow T^*Q_1 \\ (\phi(x), \eta) &\longmapsto (x, \phi^*\eta) \end{aligned}$$

que por definição é o inverso do levantamento cotangente de ϕ . Porém, se ϕ não é injetiva, esse mapa não está bem definido. Mas ainda, parece que R_ϕ é lagrangiana além disso. É fácil ver que a dimensão de R_ϕ é a metade do espaço ambiente, já que está parametrizado por pares $(x, \eta) \in Q_1 \times T^*Q_2$. Isso significa que a dimensão dele é $\dim Q_1 + \dim Q_2 = \frac{1}{2} \dim(T^*Q_1 \times T^*Q_2)$. Para comprovar que é um subvariedade lagrangiana basta ver que o mergulho $\gamma : R_\phi \hookrightarrow T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$ puxa a forma canónica em zero (ie. é isotrópica).

(Ver [StackExchange](#).) A forma canónica em $T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$ é $\omega := \text{pr}_1^* \omega_1 - \text{pr}_2^* \omega_2$ onde ω_1, ω_2 são as formas canónicas nos fibrados cotangentes. Queremos ver que $\gamma^* \omega = 0$. Temos que:

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega &= \gamma^*(\text{pr}_1^* \omega_1 - \text{pr}_2^* \omega_2) \\ &= (\text{pr}_1 \circ \gamma)^* \omega_1 - (\text{pr}_2 \circ \gamma)^* \omega_2 \\ &= \sum_i dx^i \wedge d((T\phi)^*\eta) - d\phi \wedge d\eta^i \end{aligned}$$

e isso deve dar zero. Não fiquei muito seguro de por que, mas a ideia é assim: quando derivamos o termo que inclui $(T\phi)^*$ vira uma soma de dois termos, um dos quais se cancela com $d\phi \wedge d\eta^i$, e o outro é zero por antisimetria.

Por último vejamos a relação de R_ϕ com o anulador $N^*\Gamma_\phi$:

$$N^*\Gamma_\phi = \{((x, \xi), (y, \eta)) \in T^*Q_1 \times T^*Q_2 \cong T^*(Q_1 \times Q_2) : \text{se anula em } T_{(x, \phi(x))}\Gamma_\phi\}$$

Agora note que o espaço tangente $T_{(x, \phi(x))} \Gamma_\phi$ está gerado por pares de vetores da forma $\frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}$. Isso segue simplesmente do fato de que em coordenadas locais, os vetores canônicos são as derivadas de curvas $(x_i, \phi(x_i))$. Então, um elemento $((x, \xi), (y, \eta))$ em $N^* \Gamma_\phi$ deve satisfazer que quando $y = \phi(x)$, essas formas se anulam no subespaço tangente gerado por $\frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}$. Em símbolos:

$$\begin{aligned} 0 &= \xi \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \eta \left(\phi_* \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ \iff \xi \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= -\eta \left(\phi_* \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ \iff \xi &= -(\mathrm{T}\phi)^* \eta \end{aligned}$$

notando que a reflexão $(\mathrm{T}\phi)^* \eta \mapsto -(\mathrm{T}\phi)^* \eta$ é um symplectomorfismo, vemos que $N^* \Gamma_\phi$ de fato é symplectomorfo à \mathbb{R}_ϕ . \square