

Lista 3

Problem 5 Let M be a manifold and $\omega \in \Omega^k(M)$. Suppose that $\pi : M \rightarrow B$ is a surjective submersion with connected fibers. We say that ω is *basic* (with respect to π) if there exists a form $\bar{\omega} \in \Omega^k(B)$ such that $\pi^*\bar{\omega} = \omega$.

- Show that ω is basic iff $i_X\omega = 0$ and $\mathcal{L}_X\omega = 0$ for all vector fields X tangent to the fibers of π . In particular, if ω is closed, show that it is basic if $\ker(T\pi) \subseteq \ker \omega$ (pointwise in M).
- Suppose that ω is a closed 2-form on M and $\ker(T\pi) = \ker \omega$. Show that $\omega = \pi^*\bar{\omega}$ and $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$ is symplectic.
- (Application to reduction.) Let (M, ω) be a symplectic manifold and $\iota : N \hookrightarrow M$ a submanifold such that $D = TN \cap TN^\omega \subset TN$ has constant rank (e.g. N could be coisotropic). We saw in class that D is an integrable distribution (by Frobenius); suppose that the leafspace $B := N/\sim$ is smooth so that the natural projection $\pi : N \rightarrow B$ is a submersion. Show that B inherits a unique symplectic form ω_{red} with the property that $\pi^*\omega_{\text{red}} = \iota^*\omega$.

Solution.

- Depois de muita confusão, descobri em [nLab](#) que para qualquer submersão surjetiva como π , temos uma decomposição

$$TM = \pi^*TB \oplus \ker \pi_*,$$

que segue do fato de que $\pi_* : TM \rightarrow \pi^*TB$ é surjetiva. Aqui π^*TB é o pullback bundle, definido como $\pi^*TB = \{(m, v) \in M \times TB : v \in T_{\pi(m)}B\}$. Então temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \ker \pi_* \longrightarrow TM \longrightarrow \pi^*TB \longrightarrow 0$$

que, como toda sequência exata curta de fibrados vetoriais sobre variedades, se divide.

Primeiro note que se X é tangente às fibras de π , o pushforward dele baixo π é zero já que o espaço tangente a um ponto é trivial (podemos ver X como um campo em cada fibra, que é uma subvariedade, e a projeção manda ele no vetor zero na base). Daí a implicação \implies é imediata.

Para \Leftarrow vamos provar primeiro localmente

(Ver [StackExchange](#)) Para \Leftarrow o mais natural é definir uma forma em B como

$$\bar{\omega}(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_k) := \omega(X_1, \dots, X_k)$$

já que assim $\pi^*\bar{\omega} = \omega$. Mais não é imediato para mim que isso faz sentido, pois devo comprovar todo campo vetorial em B pode ser visto como o pushforward de um campo vetorial em M. Finalmente descobri em [nLab](#) que para qualquer submersão surjetiva como π , temos uma decomposição

$$TM = \pi^*TB \oplus \ker \pi_*$$

Agora vamos mostrar que $\bar{\omega}$ está bem definida. Primeiro vamos verificar que $\pi_*X_1 = \pi_*X'_1 \implies \omega(X_1, X_2, \dots, X_k) = \omega(X'_1, X_2, \dots, X_k)$.

Agora suponha que ω é fechada e que $\ker \pi_* \subseteq \ker \omega$. Pegue X tangente às fibras de π ; vimos acima que $\pi_*X = 0$, então $X \in \ker \omega$, i.e. $i_X\omega = 0$ e também $0 = \mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega$.

- b. Usando o item anterior, basta mostrar que $i_X\omega = 0 = \mathcal{L}_X\omega$ para todo X tangente às fibras de π . Mas, se X é tangente às fibras de π , ele tá no $\ker \pi_* = \ker \omega$. Daí, $i_X\omega = 0$ e também $0 = \mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega$. Para ver que $\bar{\omega}$ é simplética lembre que $\ker \bar{\omega} = \{v \in TM : i_v\bar{\omega} = 0\}$, logo se $v \in \ker \bar{\omega}$ sabemos que existe $u \in TM$ tal que $\pi_*u = v$, e daí $i_u\omega = i_u\pi^*\bar{\omega} = \bar{\omega}(v, \cdot) = i_v\bar{\omega} = 0$. Isso mostra que $u \in \ker \omega = \ker \pi_* \implies \pi_*u = v = 0$.
- c. De acordo com o inciso b., basta ver que $\ker \pi_* = \ker \omega|_N$ (já que $\omega|_N$ é uma forma fechada, pois é o pullback de ω baixo a inclusão). Como $TN \cap TN^\omega$ é uma distribuição integrável, por cada ponto de N pasa uma folha de uma folheação. Pegue V tangente às folhas da distribuição, de modo que $\pi_*V = 0$ já que as folhas são pontos em B. Mas ainda, por definição dessa distribuição, que V seja tangente às folhas significa que $V \in TN \cap TN^\omega$. Mas já sabemos que $TN \cap TN^\omega$ é o kernel de $\omega|_N$.

...Mas talvez existe outro campo vetorial $V \in \ker \pi_*$ que não é tangente às folhas da distribuição. Nesse caso V não pode estar em TN^ω, \dots

Pegue $V \in \ker \omega|_N = TN \cap TN^\omega$, então V é tangente às fibras da distribuição e portanto está em $\ker \pi_*$.

Com isso, usando o inciso b., sabemos que existe uma forma $\bar{\omega} := \omega_{\text{red}}$ tal que $\pi^*\bar{\omega} = \omega|_N = \iota^*\omega$.

□