

# Geometria simplética

## Índice

<b>1</b>	<b>Aula 1</b>	<b>4</b>
1.1	Origem da geometria simplética	4
1.2	Formalismo hamiltoniano (simplificado)	4
1.3	Evolução temporal (equações de Hamilton)	5
1.4	Álgebra linear simplética	7
<b>2</b>	<b>Aula 2</b>	<b>8</b>
2.1	Subespaços de evs	8
2.2	Equivalência entre ev's simpléticos	10
<b>3</b>	<b>Aula 3</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Aula 4</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Aula 5</b>	<b>12</b>
5.1	Forma tautológica no fibrado cotangente	12
<b>6</b>	<b>Aula 6</b>	<b>15</b>
6.1	Colchete de Poisson	15
6.2	Teorema de Darboux	17
<b>7</b>	<b>Aula 7</b>	<b>20</b>
7.1	Subvariedades	20
7.2	Pausa para distribuições	21
7.3	Voltando	21
7.3.1	Sobre subvariedades coisotrópicas	22
<b>8</b>	<b>Aula 8</b>	<b>22</b>
8.1	Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas	23
8.2	Método de Moser	23
<b>9</b>	<b>Aula 9</b>	<b>26</b>
9.1	Aplicação ao teorema de Darboux	26
9.2	Teorema de Darboux generalizado (Weinstein)	28
9.2.1	Sobre o Lema de Poincaré relativo	29
9.2.2	Vizinhança tubular	30
9.3	Monitoria 2	30
<b>10</b>	<b>Aula 10</b>	<b>30</b>
10.1	Darboux generalizado versão 2.0	32
10.2	Teorema das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein	33

<b>11 Aula 11</b>	<b>35</b>
11.1 Aplicação (de Weinstein): pontos fixos de symplectomorfismos . . . . .	35
11.2 Outra classe de exemplos de variedades simpléticas: órbitas coadjuntas . . . . .	36
11.2.1 Revisão de grupos e álgebras de Lie . . . . .	36
11.2.2 Sobre $SU(2)$ . . . . .	38
<b>12 Aula 12</b>	<b>38</b>
12.1 Álgebras de Lie . . . . .	38
12.2 Relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie . . . . .	39
12.3 Exponencial . . . . .	41
12.4 Propriedades fundamentais . . . . .	41
12.5 Teoremas fundamentais de Lie (da álgebra para o grupo) . . . . .	42
<b>13 Aula 13</b>	<b>43</b>
13.1 Ações . . . . .	43
13.2 Descrição infinitesimal de $G$ -ações . . . . .	45
13.3 No caso de representações . . . . .	46
13.4 Geradores infinitesimais das ações adjunta e coadjunta . . . . .	46
13.4.1 Dualização . . . . .	47
<b>14 Aula 14</b>	<b>48</b>
14.1 Ações infinitesimais ( $\mathfrak{g}$ -ações) . . . . .	49
14.2 Mais sobre ações . . . . .	50
14.3 De volta à geometria simplética . . . . .	52
<b>15 Aula 15</b>	<b>54</b>
15.1 Exemplos concretos (da ação coadjunta) . . . . .	54
15.2 Ponto de vista "Poisson" . . . . .	57
15.2.1 Descrição tensorial (do colchete de Poisson) . . . . .	58
15.2.2 Distribuição característica . . . . .	58
15.2.3 Uma classe especial de variedades de Poisson . . . . .	58
<b>16 Aula 16: ações Hamiltonianas e aplicação momento</b>	<b>59</b>
16.1 Caso mais simples . . . . .	59
16.2 Caso geral . . . . .	59
16.3 Princípio de Noether . . . . .	61
16.4 Exemplos de ações Hamiltonianas . . . . .	61
16.5 De forma mais geral . . . . .	62
16.6 Aplicações momento: quando existem e o que fazer com elas . . . . .	63
16.7 Quocientes de ações por grupos de Lie . . . . .	64
16.7.1 Critério para ações regulares . . . . .	64
<b>17 Aula 17: redução simplética (quociente simplético)</b>	<b>65</b>
17.1 Uma proposição parecida ao exercício 5 da lista 3 . . . . .	65
17.2 $G$ conexo . . . . .	65
17.3 $G$ qualquer . . . . .	65
17.4 Redução simplética . . . . .	66

17.5	Alguns comentários sobre o teorema	68
17.6	Exemplos simples	68
<b>18</b>	<b>Aula 18</b>	<b>69</b>
18.1	Outros exemplos	70
18.1.1	Reduções de fibrados cotangentes	70
18.1.2	Um espaço de moduli	71
18.1.3	Um exemplo de mecânica	71
18.1.4	Um exemplinho de mecânica com geometria riemanniana	73
<b>19</b>	<b>Aula 19: comentários de possíveis projetos</b>	<b>74</b>
19.1	Super exemplo (de ação hamiltoniana e redução simplética)	74
19.2	Aplicação de redução: cortes simpléticos	76
19.3	Dois resultados de ações hamiltonianas por toros	77
19.4	Variedade simpléticas tóricas	77
<b>20</b>	<b>Aula 20: Existência e unicidade de aplicações momento</b>	<b>78</b>
20.1	A primeira obstrução : um diagraminha commutativo	78
20.1.1	Interpretação cohomologica	79
20.2	A segunda obstrução: equivariância	80
20.3	Faltou falar de unicidade	81
20.4	Comentarios finais	82
<b>21</b>	<b>Aula 21</b>	<b>82</b>
21.1	Hiperfície de contato	82
21.2	Exemplos de hiperfícies de contato	84
<b>22</b>	<b>Aula 22</b>	<b>85</b>
22.1	Exemplo de hiperfície que não é de contato	85
22.2	Simplectização	86
22.3	Sistemas Hamiltonianos	87
22.4	Exemplos de campos hamiltonianos	87
<b>23</b>	<b>Aula 23: dinâmica Hamiltoniana</b>	<b>88</b>
<b>24</b>	<b>Aula 24</b>	<b>90</b>
24.1	Prova do teorema de Reocorrência de Poincaré	90
24.2	A seguinte questão: órbitas periódicas	92
24.3	Extra: a note from Graham's talk just today's evening	93
<b>25</b>	<b>Aula 25</b>	<b>94</b>
<b>26</b>	<b>Aula 26</b>	<b>96</b>
<b>27</b>	<b>Aula 27</b>	<b>96</b>

# 1 Aula 1

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e [Tong, Lectures on Classical Mechanics](#).

## 1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geometria da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descrições da mecânica clássica:
  - Newtoniano:  $F = ma$ , equação diferencial ordinária de segunda ordem.
  - Lagrangiano: princípio gravitacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
  - Hamiltoniano.

## 1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base  $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$  (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ .
- Campo Hamiltoniano:  $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ .

$$X_H = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \text{Id}_n \\ \hline -\text{Id}_n & 0 \end{array} \right)$$

Which coincides with Lee's formula

$$\begin{aligned}\dot{x}^i(t) &= \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)), \\ \dot{y}^i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t))\end{aligned}$$

where Lee defined the **Hamiltonian vector field** as the *analogue of the gradient with respect to the symplectic form*, that is, satisfying  $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$  for any vector field  $Y$ .

Also look at Tong's formulation:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

where  $L$  is the Lagrangian and the Hamiltonian function  $H$  is obtained as the Legendre transform of the Lagrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the  $n$   $2^{\text{nd}}$  order differential equations by  $2n$   $1^{\text{st}}$  order differential equations for  $q_i$  and  $p_i$ .

In practice, for solving problems, this isn't particularly helpful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

### 1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de  $X_H$ , ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as *Equações de Hamilton* (de novo).

**Exemplo** Partícula de massa  $m$  em  $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$  sujeita a campo de força conservativa

$$F = -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$q(t) = (q_1, q_2, q_3)$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaço de fase  $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$ .
- Hamiltoniano:  $H(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \xrightarrow{-J_0 \nabla H} X_H$$

where  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of  $H$  and then applying  $J_0$ . So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo  $\nabla H$  e  $X_H$  : taxa de variação de  $H$  ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais? Tal vez é a derivada exterior de  $H$ ,  $dH$  em lugar do gradiente de  $H$ .

- *Fluxo gradiente*

$$\begin{aligned} c'(t) &= \nabla H(c(t)) \\ \frac{d}{dt} H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2 \end{aligned}$$

$\nabla H$  aponta na direção que  $H$  variação.

- *Fluxo hamiltoniano*

$$\begin{aligned} c'(t) &= X_H(c(t)) \\ \frac{d}{dt} H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0 \nabla H(c(t)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

?,  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ .

- *Gradiente.*  $\nabla H(x) \in T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$  é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

onde  $g_0$  é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

Analogamente,  $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$  é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \quad \Omega_0(u, v) = -dJ_0 V,$$

ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

**Observação** Note que  $\Omega_q$  define uma 2-forma (c...?) em  $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$ .

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

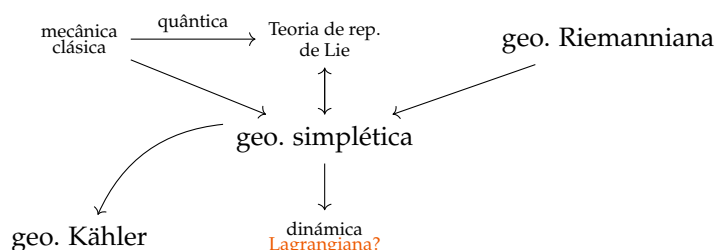
$X_H$  é único tal que  $i_{X_H} \omega_0 = dH$ . So this was Lee's definition ☺.

**Definição (temporária)** Uma *variedade simplética* é  $(M, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega^2(M)$  localmente isomorfa a  $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$ .

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva  $\omega$  em  $\sum_i dq_i \wedge dp_i$ .

**Teorema (de Darboux, em Lee)** Let  $(M, \omega)$  be a  $2n$ -dimensional symplectic manifold. For any  $p \in M$  there are smooth coordinates  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  centered at  $p$  in which  $\omega$  has the coordinate representation  $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ .

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.



## 1.4 Álgebra linear simplética

$V$  espaço vetorial real,  $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  forma bilinea ansimétrica, i.e.  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ .

**Definição**  $\Omega$  é não degenerada se  $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$ .

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero  $v \in V$  there exists  $w \in V$  such that  $\omega(v, w) \neq 0$ ; and it is equivalent to the linear map  $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$  being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix  $(\omega_{ij})$  representing  $\omega$  is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V \mid \Omega(u, v) = 0 \forall v\}$$

então  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\ker(\Omega) = \{0\}$ .

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$  é não degenerada é chamada simplética.  $(V, \Omega)$  é um *espaço vectorial simplético*.

**Observação**

1.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $V$ ,  $\Omega$  é representado por uma matriz antisimétrica

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \quad \Omega(u, v) = u^t A v.$$

2.  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\det(A) \neq 0$ .

Note que

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det(A)$$

implica que  $\det A \neq 0 \implies m = \dim V = 2n$

3.  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ . Defina

$$\begin{aligned}\Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$

note que  $\ker \Omega = \ker(\Omega^\flat)$ , assim  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\Omega^\flat$  é isomorfismo.

## 2 Aula 2

### 2.1 Subespaços de evs

Sejam  $(V, \Omega)$  evs e  $W \subseteq V$  subespaço.

**Definição** Seja  $(V, \Omega)$  um espaço vetorial simplético. Dado um subespaço  $W \subseteq V$ , definimos seu *ortogonal simplético* como

$$W^\Omega := \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

Note que se

$$\begin{aligned}\Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto i_v \Omega = \Omega(v, \cdot)\end{aligned}$$

temos que

$$\ker \Omega := \ker \Omega^\flat = W^\Omega.$$

Considere a restrição de  $\Omega$  à  $W$ :

$$i : W \hookrightarrow V, \quad i^* \Omega = \Omega|_W \in \Lambda^2 W^*,$$

então

$$\ker(\Omega|_W) = W \cap W^\Omega$$

Casos de interesse:

- **Isotrópico**:  $W \subseteq W^\Omega$  ( $\iff \Omega|_W \equiv 0$ ).
- **Coisotrópico**:  $W^\Omega \subseteq W$ .
- **Lagrangiano**:  $W = W^\Omega$ .
- **Simplético**:  $W \cap W^\Omega = \{0\}$  ( $\Omega|_W$  é não degenerado (=simplético)).

**Lemma**  $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\Omega^\flat : V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$



Note que  $W^\Omega \mapsto \text{Ann}(W)$ , assim

$$\dim W + \dim \text{Ann}(W)' = \dim V$$

□

### Observação

- $W \subseteq V$  subespaço simplético se e somente se  $V = W \oplus W^\Omega$ .
- $W$  isotrópico  $\implies \dim W \leq \frac{\dim V}{2}$ .
- $W$  coisotrópico  $\implies \dim W \geq \frac{\dim V}{2}$ .
- $W$  Lagrangiano se  $\dim W = \frac{\dim V}{2}$ .

De fato,  $W$  é Lagrangiano se e somente se  $W$  é isotrópico e  $\dim W = \frac{\dim V}{2}$ .

### Exercício

- $(W^\Omega)^\Omega = W$  ( $W$  isotrópico se e somente se  $W^\Omega$ ).
- $(W_1 \cap W_2)^\Omega = W_1^\Omega + W_2^\Omega$ .

### Exemplo

- Subespaços de dimensão 1 são isotrópicos (subespaços de codimensão 1 são coisotrópicos).
- $V = V \oplus W^*$ , onde  $V$  tem a forma  $\Omega_{\text{can}}$  e  $W$  e  $W^*$  são Lagrangianos.
- $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  base simplética, então  $\text{span}\{e_i, f_i\}$  é simplético, e  $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$  é isotrópico (se  $k = n$  é Lagrangiano).
- $(V_1, \Omega_1)$  e  $(V_2, \Omega_2)$  evs's,  $T : V_1 \rightarrow V_2$  isometria linear,  $\text{graf}(T) := \{(u, Tu) : u \in V_1\} \subseteq V_1 \times V_2$ .  $T$  é symplectomorfismo se e somente se  $\text{graf}(T)$  é um subespaço Lagrangiano em  $V_1 \times V_2$ .
- $\dim \text{graf}(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2} \dim(V_1 \times V_2)$ .
- $\Omega_{V_1 \times V_2}((u, Tu), (v, Tv)) = \Omega(u, v) - \underbrace{\Omega_2(Tu, Tv)}_{= T^* \Omega_2(u, v)} (= 0 \iff \Omega_1 = T^* \Omega_2)$ .

**Teorema (Existência das bases simpléticas)** Para qualquer  $(V, \Omega)$  evs existe uma base simplética.

*Demonstração.* Seja  $e_1 \in V \setminus \{0\}$ . Como  $\Omega$  é não degenerada, existe  $f_1 \in V$  tal que  $\Omega(e_1, f_1) = 1$ . Considere  $W_1 = \text{span}\{e_1, f_1\}$ . Então  $\Omega|_{W_1}$  é não degenerado (ie.  $W_1$  é simplético), o que acontece se e somente se  $V = W_1 \oplus W_1^\Omega$ . Assim, existem  $e_2 \neq 0$  in  $W_1^\Omega$  e  $f_2 \in W_1^\Omega$  tal que  $\Omega(e_2, f_2) = 1$ , etc... ( $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ ). O conjunto  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  é uma base simplética. □

**Exercício**  $V$  ev de dimensão  $2n$  e  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$  é não degenerada se e somente se  $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \in \Lambda^{2n} V^* \neq 0$ .

## 2.2 Equivalência entre ev's simpléticos

$(V, \Omega)$  e  $(V', \Omega')$  são *equivalentes* se existe um *simplectomorfismo* linear  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$  (isometria linear) tal que

$$\varphi^* \Omega' = \Omega \in \Lambda^2 V^*$$

onde

$$\varphi^* \Omega'(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Dado  $(V, \Omega)$  evs, definimos

$$\text{Sp}(V) := \{T \in \text{GL}(V) \mid T^* \Omega = \Omega\}$$

### Exemplo

1.  $V = \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\Omega_0(u, v) = -u^T J_0 v$  onde  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ , com base canônica  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ . Temos

$$\begin{cases} \Omega_0(e_i, e_j) = 0 \\ \Omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \Omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

**Definição** Uma base de  $(V, \Omega)$  satisfazendo eq. (1) é chamada *base simplética*.

Following Lee, Example. 22.2, the condition may be that  $\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$  where  $\alpha^i$  and  $\beta^i$  are just the dual basis covectors of the base  $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n\}$  of  $V$ .

**Observação** Escolher/Achar uma base simplética é equivalente à escolher/achar um simplectomorfismo

$$(V, \Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$$

2.  $W$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , sejam  $V = W \oplus W^*$ ,  $w, w' \in W$  e  $\alpha, \alpha' \in W^*$

$$\Omega_?( (w, \alpha), (w', \alpha') ) := \alpha'(w) - \alpha(w')$$

é não degenerada e anti-simétrica. Assim,

$$(W \oplus W^*, \Omega_?)$$

é um espaço vetorial simplético.

**Observação** Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base simplética de  $W$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é a base dual de  $W^*$ , então

$$(W \oplus W^*, \Omega_? \cong (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)).$$

Note que ainda que dado

$$A : W \xrightarrow{\sim} W$$

automorfismo ?,

$$T_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} : W \oplus W^* \rightarrow W \oplus W^*$$

é symplectomorfismo,  $(T_A = A \oplus (A^*)^{-1})$ .

**Moral:**  $GL(W) \hookrightarrow Sp(W \oplus W^*)$

$$\begin{array}{c} EV \xrightarrow{\text{functor}} EVS \\ A \circ W \longmapsto W \oplus W^* \circ T_A \end{array}$$

3.  $V$  ev sobre  $\mathbb{C}$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} = n$ , com produto interno hermitiano

$$h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

i.e. satisfazendo

$$(a) \ h(u, \lambda v) = \lambda h(u, v) \ \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$(b) \ h(u, v) = \overline{h(v, u)},$$

$$(c) \ h(u, u) > 0 \ \forall u \neq 0,$$

pode ser escrito como

$$h(u, v) = g(u, v) + i\Omega(u, v)$$

Agora considere  $V$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  (de dimensão  $2n$ ).

### Exercício

- $g$  é produto interno positivo definido.
- $\Omega$  é antisimétrica, não degenerada (simplética).
- Ache uma base de  $V$  (dica: extensão de base ortonormal de  $h \dots$ )
- $U(n) \subset SP(V, \Omega)$ .

4. Produto direto:  $(V_1, \Omega_1), (V_2, \Omega_2)$  espaços vetoriais.

$$\begin{array}{ccc} & V_1 \times V_2 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ V_1 & & V_2 \end{array}$$

Tem a forma simplética é o pullback:

$$\Omega := \pi_1^* \Omega_1 + \pi_2^* \Omega_2$$

ou seja,

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2),$$

que é não degenerado e antissimétrico também.

**Notação:** se  $(V, \Omega)$  é um espaço vetorial simplético, denotamos por  $(V, -\Omega) := \bar{V}$ , que também é um evs.

### 3 Aula 3

Se  $V$  é um espaço vetorial real, uma *estrutura complexa* em  $V$  é um endomorfismo linear  $J : V \rightarrow V$  tal que  $J^2 = -\text{id}$ .

Seja  $(V, \Omega)$  um espaço vetorial simplético. Uma estrutura complexa em  $V$  é *compatível* com  $\Omega$  se para todo  $u, v \in V$ ,

$$g(u, v) := \Omega(u, Jv)$$

é um produto interno. (Acho que) isso implica que

$$\Omega(Ju, Jv) = \Omega(u, v), \quad \text{e} \quad \Omega(u, Ju) > 0 \quad \forall u \neq 0$$

### 4 Aula 4

### 5 Aula 5

Lembrança da última aula:

1. Definição de variedade simplética.
2. Pelo menos dois exemplos.
3. Forma de volume/orientabilidade.
4. Campos simpléticos/campos hamiltonianos.
5. Obstrução cohomológica de para estrutura simplética.

**Hoje:** Fibrados cotangentes.

#### 5.1 Forma tautológica no fibrado cotangente

Seja  $Q$  uma variedade e  $M := T^*Q$  o fibrado cotangente.

**Lembrando** Se  $Q$  é uma variedade,  $x \in Q$ . O *espaço tangente* em  $x$  são derivações ou classes de equivalência de curvas... base local do espaço tangente  $\partial_{x_i}$ ... base dual disso é base do espaço cotangente nesse ponto... o fibrado cotangente  $\bigsqcup_{x \in Q} T_x^*Q$  é variedade suave.

O fibrado cotangente possui uma 1-forma tautológica definida assim:

**Definição**  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , onde  $M := T^*Q$ , dada por

$$\alpha_p(X) = p(\pi_*(X))$$

ou seja, como  $X$  é tangente ao fibrado cotangente, ele está anclado a algum covetor, assim a gente pode avaliar ele no covetor. Também pode ser pensado como o pullback de um covetor em  $Q$  baixo a projeção cotangente usual.

**Definição (Monitoria)**

$$\begin{array}{c} T^*M = \{(p, \xi) | \xi : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

A *forma tautológica* é  $\lambda$  dada por

$$\lambda_{(p, \xi)}(v) \in \mathbb{R}, \quad v \in T_{(p, \xi)}(T^*M)$$

é igual a

$$\xi(d\pi_{(q, \xi)}(v))$$

usando o mapa

$$T_{(p, \xi)}(T^*M) \xrightarrow{d\pi_{(p, \xi)}} T_p M$$

Em coordenadas locais  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  do espaço cotangente, temos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n A_i dx_i + \sum_{i=1}^n B_i dy_i$$

Avaliando  $\lambda$  nos vectores canónicos  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(p, \xi)}$  e  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  notamos que  $A_i = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$  pois a diferencial de  $\pi$  faz as  $B_j$  ser zero.

**Exercício**

1. A 1-forma tautológica  $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$  é a única 1-forma satisfazendo

$$\forall \mu \in \Omega^1(Q), \quad \mu^* \alpha = \mu$$

onde pensamos a  $\mu$  do lado izquierdo como um mapa  $\mu : Q \rightarrow T^*Q$ , ie. uma secção do fibrado cotangente, e do lado direito simplesmente como uma 1-corma em  $Q$ .

**Definição**  $M = T^*Q$ ,  $\alpha \in \Omega^1(M)$  então a *forma simplética canónica* de  $T^*Q$  é

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha$$

**Observação**

- $d\omega_{\text{can}} = -d^2\alpha = 0$ .

- Formalmente  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$

Assim, temos uma variedade simplética canônica associada a toda variedade,  $(T^*Q, \omega_{\text{can}})$ .

### Observação

- Dado  $B \in \Omega^2(Q)$  com  $dB = 0$ , a forma

$$\omega_B = \omega_{\text{can}} + \pi^*B$$

é simplética e o termo  $\pi^*B$  se chama de *magnético*.

- Se  $Q$  é Riemanniana com métrica  $g$  temos o mapa induzido

$$\begin{aligned} g^\sharp : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ u &\longmapsto g(u, \cdot) \end{aligned}$$

Assim, o pullback the  $\omega_{\text{can}}$  é uma forma simplética em  $TQ$ .

Além disso, a métrica nos fornece de uma função Hamiltoniana dada por  $H \in C^\infty(TQ)$ ,  $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ .

Veremos que o fluxo Hamiltoniano de  $H$  em  $(TQ, \omega)$  é fluxo geodésico em  $Q$ .

Tem dois generalizações naturais:

- $\tilde{H}(v) = \frac{1}{2}g(u, v) + V(x)$  com  $V \in C^\infty(Q)$ , mecânica clássica.
- $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$  com respeito a  $\omega_B$ .

**Pergunta (Projeto?)** Existência de órbitas periódicas em níveis de energia?

**Definição** O *levantamento cotangente* de um difeomorfismo (na mesma direção do difeomorfismo) é  $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$  é  $\hat{\varphi} = ((T\varphi)^*)^{-1}$ .

**Pergunta** Preserva a forma canônica?

**Proposição** Sim.  $\hat{\varphi} : T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$  satisfaz  $\hat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1$  onde  $\alpha_i$  é a forma tautológica, para  $i = 1, 2$ . Isso implica que  $\hat{\varphi}^*\omega_2 = \omega_1$ .

Isso implica que temos um funtor  $Q \rightsquigarrow T^*Q$  que se chama de *funtor cotangente* e permite levar problemas de geometria diferencial para a geometria simplética.

*Demonstração.*

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & T^*Q_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array}$$

A chave dessa prova é que o diagrama commuta, assim pode se-trocar um termo  $\pi_2 \circ \hat{\varphi}$  por  $\varphi \circ \pi_1$ .  $\square$

O funtor que produzimos  $\text{Dif}(Q) \hookrightarrow \text{Simp}(T^*Q)$  não é fiel (surjetivo), ie. existem symplectomorfismos no fibrado cotangente que não vem de difeomorfismos na variedade.

**Observação** Dada uma 1-forma  $A \in \Omega^1$ . Pode se-produzir um mapa no cotangente simplesmente trasladando por  $A$ :

$$\begin{aligned} T_A : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, \xi + A_x) \end{aligned}$$

que não pode ser um levantamento porque se projecta na identidade!

**Exercício**  $T_A$  é um symplectomorfismo  $\iff dA = 0$ .

Mas, como sabemos quais symplectomorfismos no cotangente são sim levantamentos de difeomorfismos na variedade?

**Exercício** Seja  $F : T^*Q \rightarrow T^*Q$  um symplectomorfismo. Quando  $F = \hat{\varphi}$  é levantamento de algum  $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} Q$ . Pois, isso acontece  $\iff F$  preserva a forma tautológica, ie.  $F^*\alpha = \alpha$ .

**Observação** Levantamento cotangente de campos de vetores. Começa com um campo  $X \in \mathfrak{X}(Q)$ , integra para obter um fluxo  $\varphi_t$ , que é uma família de difeomorfismos na variedade, você sabe levantar isso com o funtor obtendo outro fluxo (porque levantamento de fluxo é fluxo)  $\hat{\varphi}_t$ , e diferenciando obtém  $\hat{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ .

**Observação** Para qualquer fibrado vetorial  $E \rightarrow M$ , podemos ver as seções  $\Gamma(E)$  como um subconjunto das funções suaves na variedade  $C^\infty(E)$ —são as funções lineares nas fibras. Aí tem um modo natural de definir para qualquer campo vetorial  $X \in \Gamma(TQ) \subseteq C^\infty(T^*Q)$  uma função,  $H_X(p) = p(X_{\pi(p)}) = \alpha(\hat{X})$ .

**Proposição**  $\hat{X}$  = campo Hamiltoniano de  $H_X$ .

## 6 Aula 6

Hoje: Colchete de Poisson, Darboux.

### 6.1 Colchete de Poisson

$M$  variedade,  $\omega \in \Omega^2(M)$  não degenerada (quase-simplética). Podemos fazer

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto i_X \omega \end{aligned}$$

So that

$$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow X_f \in \mathfrak{X}(M)$$

e

$$i_{X_f} \omega = df.$$

**Definição**  $f, g \in C^\infty(M)$ .

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \{f, g\} &= \omega(X_g, X_f) = dg(X_f) = \mathcal{L}_{X_f} g = -\mathcal{L}_{X_g} f \end{aligned}$$

**Proposição (Exercício)**  $d\omega = 0 \iff \{\cdot, \cdot\}$  satisfaz identidade de Jacobi.  $\implies (M, \omega)$  simplética,  $\{\cdot, \cdot\}$  é colchete de Lie em  $C^\infty(M)$  e isso se chama de um *colchete de Poisson* em  $(M, \omega)$ .

**Exercício**  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ .

**Exemplo**  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Definição**  $f, g \in C^\infty(M)$  estão em *involução* se  $\{f, g\} = 0$ . ie.  $X_g$  é tangente aos níveis  $f = \text{const}$  (e vice versa).

**Observação** Nesse caso, a derivada de  $g$  ao longo das curvas integrais de  $X_f$  é zero.

**Motivação**  $(M, \omega)$  simplética,  $H \in C^\infty(M)$  queremos integrar  $X_H$  (ie. resolver  $c'(t) = X_H(c(t))$ ). Suponha que existe  $f \in C^\infty(M)$  com  $\{f, H\} = 0$ , chamada *integral primeira*. ie.  $f$  é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano.

No século XIX, quando Poisson vivia, a ideia era que se temos um número suficiente de integrais primeiras "independentes", podemos "integrar"  $X_H$ . (Aqui "integrar" significa dar uma solução a equação diferencial do fluxo Hamiltoniano).

Em 1810, Poisson deu a fórmula

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

**Teorema (Poisson)**  $\{f, H\} = 0 = \{g, H\} \implies \{\{f, g\}, H\} = 0$ .

**Teorema (Jacobi)**

$$\{H, \{f, g\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} = 0$$

**1880** Lie usou essa identidade no seu trabalho de transformações (álgebras de Lie).



**Versão moderna (sec. XX) de integrabilidade** Veremos adiante...

**Teorema (Arnold-Liouville)**  $(M, \omega)$  de dimensão  $2n$  e seu Hamiltoniano  $H = f_1$  que é a primeira de uma sequência de  $n = \dim M/2$  funções independentes (as derivadas são linearmente independentes)  $f_2, \dots, f_n \in C^\infty(M)$  tais que  $\{f_i, f_j\} = 0$  e que  $(f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma submersão. Então

$$N = \{(f_1, \dots, f_n) = \text{cte}\} \cong \mathbb{T}^n$$

se compacto e conexo. Além disso, a dinâmica de  $X_H$  em  $\mathbb{T}^n$  é quase periódica (=é um fluxo linear no toro, que pode ser racional ou irracional).

**Observação (Projeto?)** Qué acontece com essa dinâmica no toro se perturbamos o sistema? O problema de dois corpos é completamente integrável. Por exemplo, a dinâmica da Terra e o Sol pode se resolver, mas o problema adicionando a Lua é o problema de 3 corpos, que ninguém sabe como resolver. Aqui a Lua é uma perturbação.

Teorema KAM, quanto mais irracional é o fluxo, mais robusto é o toro, mais instável.

Em fim, tudo isso para motivar os colchetes de Poisson.

## 6.2 Teorema de Darboux

$(M, \omega)$  variedade simplética com o colchete  $\{\cdot, \cdot\}$ .

### Observação

1.  $\omega$  está completamente determinada por  $\{\cdot, \cdot\}$ , ie. se duas estruturas simpléticas dão lugar ao mesmo colchete de Poisson, elas são iguais. Por que?

$$\omega^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$$

está dada em cada ponto por

$$(\omega^\sharp)_{ij} = \{x_i, x_j\}$$

por definição.

**(My interpretation)** Especificamente, considere coordenadas de Darboux  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  em  $M$ . Em [?], eq. 22.9 vemos que para qualquer função  $f \in C^\infty(M)$ , o seu campo Hamiltoniano está dado por

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

assim,

$$X_{x^i} = -\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad X_{y^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Isso é uma base do espaço tangente. De fato, para qualquer base  $v_1, \dots, v_n$  de um espaço vetorial com base dual  $v_1^*, \dots, v_n^*$ , se  $w = \sum_i w^i v_i$ , é super básico que

$$\omega(v_i, w) = \omega\left(v_i, \sum_j w^j v_j\right) = \sum_j \omega(v_i, v_j) w^j = \sum_j \omega(v_i, v_j) v_j^*(w)$$

ie.

$$i_{v_i} \omega = \omega(v_i, \cdot) = \sum_j \omega(v_i, v_j) v_j^*$$

Daí, em coordenadas,

$$\omega^b(v_i) = \begin{pmatrix} \omega(v_i, v_1) \\ \vdots \\ \omega(v_i, v_n) \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\omega^b = \begin{pmatrix} \omega(v_1, v_1) & \cdots & \omega(v_n, v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega(v_1, v_n) & \cdots & \omega(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

Agora note que os vetores Hamiltonianos associados as coordenadas de Darboux  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  satisfazem as relações do seguinte item nesta observação (pode comprovar isso usando a fórmula do colchete de Poisson em coordenadas de Darboux). Daí, nessa base de vetores Hamiltonianos,

$$\omega^b = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Mas que não é que a gente tava buscando  $\omega^\sharp$ ? Pois é, essa matriz elevada ao quadrado é  $-id$ , daí a sua inversa é só botar um signo menos...

2. A estrutura simplética canônica  $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dp_i$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  está determinada (é a única tal que) por

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

É como se tivesse uma base simplética boa em todos os pontos...

**Teorema (Darboux)**  $(M, \omega)$  simplética, ent...ão ao redor de todo ponto  $x \in M$  existem coordenadas locais  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  tais que  $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ , ou, equivalentemente vale

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Tem um lema que va a provar essencialmente tudo.

**Lemma (Primeiro paso da indução)** Ao redor de qualquer ponto  $x \in M$  existem coordenadas  $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$  tais que

$$1 = \{p, q\}, \quad \{p, y_j\} = 0 = \{q, y_j\}, \quad \{y_i, y_j\} = \varphi_{ij}(y).$$

Ou seja, a matriz da forma é

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A(y) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

ou seja, temos uma expressão

$$\omega = dq \wedge dp + \omega_N$$

onde  $\omega_N$  é dada por  $A(y)$  e é simplética.

*Demonstração do Lema* **Paso 1** Seja  $p$  uma função tal que  $X_p(x) \neq 0$ . Pelo teorema de fluxo tabular (retificação) existe uma função  $q$  tal que  $X_p = \frac{\partial}{\partial q}$ , de modo que  $\{p, q\} = dq(X_p) = 1$  e  $dp(X_q) = -1$ .

**Paso 2** Então  $X_p$  e  $X_q$  são linearmente independentes, pois  $1 = \{p, q\} = \omega(X_p, X_q) \neq 0$ , o que aconteceria por antisimetria se são linearmente dependentes. Além disso, comutam, pois

$$[X_p, X_q] \stackrel{\text{aula passada?}}{=} X_{\{p, q\}=1} = 0.$$

Agora usamos a generalização do teorema do fluxo tabular: se  $X_1, \dots, X_k$  são campos linearmente independentes e que comutam, então existem coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  tais que  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . (Teo. função inversa.) Assim, existem coordenadas locais  $y_1, \dots, y_{2n}$  tais que

$$X_q = \frac{\partial}{\partial y_{2n-1}}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial y_{2n}}.$$

Logo

$$dy_j(X_q) = 0 = dy_j(X_p)$$

para  $j = 1, \dots, 2n-2$ .

**Paso 3** As diferenciais

$$dq, dp, dy_1, \dots, dy_{2n-2}$$

são linearmente independentes, pois se

$$adq + bdp + \sum_i c_{ij} y_i = 0$$

pois as  $y_i$  já são LI, e avaliando em  $X_i$  obtemos  $a = 0$ , e no  $X_q$  que  $b = 0$ .

Temos um sistema de coordenadas  $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$  ao redor de  $x$  tal que as condições do teorema salvo a última se cumprem. Agora veamos que  $\{y_i, y_j\}$  não depende de  $p, q$ .

**Paso 4** Só lembrar que

$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial q}$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial p} \{y_i, y_j\} = -\{q, \{y_i, y_j\}\} = 0$$

onde a segunda igualdade é Jacobi. Fim.

□

*Demonstração do Teo. Darboux.* Segue do lema por indução

□

**Definição** Uma *estrutura de Poisson* em uma variedade  $M$  é

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$\mathbb{R}$ -bilinear, antissimétrica, Jacobi e Leibniz, ie.  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ .

**Exemplo**

- $(M, \omega)$  simplética com  $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$ .

## 7 Aula 7

Na aula passada vimos:

- Colchetes de Poisson.
- Teorema de Darboux. Prova: demonstrar que tem relações que caracterizam a forma de maneira única.
- É possível descrever estruturas simpléticas em termos de colchete de Poisson.: Variedades de Poisson. Isso é axiomatizar as propriedades básicas do colchete de Poisson. Esses objetos podem ser entendidos como foliações simpléticas.

### 7.1 Subvariedades

Seja  $(M, \omega)$  simplética e  $N \xrightarrow{i} (M, \omega)$ . Então temos

$$\omega_N = i^* \omega \in \Omega^2(N)$$

que é fechada porque o pullback comuta com derivada exterior.

$$\begin{aligned} \ker(\omega_N) &= \{X \in TN : \omega(X, Y) = 0 \ \forall Y \in TN\} \\ &= TN \cap TN^\omega \subseteq TN \end{aligned}$$

## 7.2 Pausa para distribuições

$P$  variedade.

**Definição** Uma *distribuição (generalizada)* em  $P$  é

$$P \ni x \longmapsto D_x \subseteq T_x P \text{ subespaço}$$

e o posto da distribuição em  $x := \dim D_x$ .

A distribuição é *suave* se para todo  $x_0 \in P$ ,  $\forall v \in D_{x_0}$  existe um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(P)$  que estende a  $v$  e está contido na distribuição no sentido de que  $X_x \subseteq D_x \forall x$  e  $X_{x_0} = v$ .

**Exemplo** Núcleo de 2-formas é um exemplo de distribuição, mas não é suave em geral.

**Definição** Uma distribuição suave  $D \subseteq TP$  é dita *integrável* se  $\forall x \in P$  existe uma subvariedade  $S \ni x$ ,  $TS = D|_S$

No caso de uma distribuição (suave) integrável, por todo ponto passa uma subvariedade integral conexa maximal chamadas *folhas*.

**Observação**

- Distribuição suave, de posto constante é a mesma coisa que um subfibrado vetorial  $D \subseteq TP$ . Nesse caso,

**Teorema (Frobenius)**  $D$  é integrável se e somente se é *involutivo*, ou seja

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

*Demonstração.* Note que  $\implies$  é trivial porque se tem uma variedade que realiza a distribuição, o colchete de Lie sempre vai ser outro campo vetorial tangente.  $\square$

- Suponha que  $D = \ker(\omega)$  com  $\omega \in \Omega^2(P)$  é suave  $\iff D$  tem posto constante. Aqui  $\Leftarrow$  é fácil.
- Se  $d\omega = 0 \implies D = \ker \omega$  é involutivo.

**Conclusão** Se  $\omega$  é uma 2-forma fechada e  $D = \ker \omega$  tem posto constante, dá lugar a uma folheação (regular=folhas de mesma dimensão) em  $P$ .

## 7.3 Voltando

**Definição**  $N$  é dita

- *isotrópica* quando  $T_x N \subseteq T_x N^\omega \iff \omega_N = 0 \iff \ker \omega_N = TN$ .
- *coisotrópica* quando  $T_x N^\omega \subseteq T_x N$ .
- *lagrangiana* quando  $T_x N = T_x N^\omega \iff i^* \omega = \omega_N = 0$  e  $\dim N = \dim M/2$ .
- *simplética*  $T_x N \cap (T_x N)^\omega = \{0\} \forall x \in N \iff \omega_N$  é simplética.

- *posto constante*  $T_x N \cap T_x N^\omega \subseteq T_x N \ \forall N$  tem posto constante.

### Exemplo

- curvas são isotrópicas.
- hipersuperfícies são coisotrópicas.
- Veremos vários exemplos de subespaços lagrangianos.

#### 7.3.1 Sobre subvariedades coisotrópicas

**Isto também vale para subvariedades de posto constante.**

Vamos ver uma versão geométrica de um exercício da lista 1, onde pegávamos o quociente de um espaço vetorial por el núcleo de uma forma para obter um espaço vetorial simplético.

**Exercício** Suponha que as folhas da folheação são fibras de uma submersão

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & (M, \omega) \\ q \downarrow & & \\ B = N / \sim & & \end{array}$$

então existe uma forma simplética  $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$  tal que  $q^* \bar{\omega} = \omega_N$ .

**Exemplo** O fluxo hamiltoniano do oscilador harmónico  $H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_i q_i^2 + p_i^2$  com  $c = 1/2$  da  $\mathbb{CP}^{n-1}$

**Exercício**  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^k, \psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ .  $N = \psi^{-1}(c)$  para  $c$  valor regular.

- $N$  coisotrópico  $\iff \{\psi_i, \psi_j\}|_N = 0$ .
- $N$  simplético  $\iff (\{\psi_i, \psi_j\}|_N)_{ij}$  é invertível.

## 8 Aula 8

Lembre:

- Subvariedades lagrangianas, (co-)isotrópicas, simpléticas. Aprofundamos nas coisotrópicas (posto constante), como as hipersuperfícies ou conjuntos de nível, que tem uma folheação, e com condições de regularidade pode passar para o espaço quociente, que é simplético, como  $\mathbb{CP}^n$ .

## 8.1 Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas

**Exemplo** Dois variedades simpléticas e um difeomorfismo entre elas. Então  $\varphi$  é symplectomorfismo se e só se seu gráfico é lagrangiano. Talvez isso pode ser usado para pensar em symplectomorfismos em um objeto cuantico.

**Observação** Considere

$$\begin{aligned}\varepsilon : M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\ x &\longmapsto (x, \varphi x)\end{aligned}$$

então o grafo de  $\varphi$  é lagrangiano  $\iff \omega_1 - \varphi^* \omega_2$ .

**Exemplo (no fibrado cotangente)**

- A seção zero  $Q \hookrightarrow T^*Q$  é nos mostra que  $Q$  é uma subvariedade lagrangiana.
- A fibra (cotangente) de um ponto também é uma subvariedade lagrangiana de  $T^*Q$ .
- Logo, o espaço de fibras?
- Pegue uma subvariedade da base  $S \subset Q$ . Considere o *fibrado conormal*  $N^*S, \nu_S^*$ . É o dual do fibrado tangente. É o anulador de  $TS, \{(\chi, \xi) \in T^*Q : \chi \in S, \xi|_{T\chi S} = 0\}$ . Note que é um subfibrado do fibrado cotangente.

Os dois exemplos anteriores são  $S = Q$  e  $S = \{x\}$  da seguinte prop:

**Proposição**  $N^*S \hookrightarrow T^*Q$  é (um subfibrado) uma subvariedade lagrangiana.

*Demonstração.* Usando coordenadas adaptadas e a forma tautológica do  $T^*Q$ , damos coordenadas  $N^*Q$  da forma  $(x_1, \dots, x_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$  e assim o pullback da forma tautológica é zero porque ele avalia os covectores  $\xi_{\text{grande}}$  em vectores  $x_{\text{pequeno}}$ .  $\square$

**Exemplo** Uma forma  $\mu$  vista como seção do fibrado cotangente pode ser pensada como um mergulho de  $Q$  em  $T^*Q$ .

**Proposição** Essa subvariedade é lagrangiana  $\iff d\mu = 0$ .

## 8.2 Método de Moser

**Upshot** Moser's trick is a thing that gives you a diffeomorphism that pulls back  $\omega_2$  to  $\omega_1$ .

Dadas duas formas simpléticas numa variedade, como podemos achar um symplectomorfismo entre elas? A ideia do método é assim:

**Step 1** Interpolarmos as duas formas mediante uma família contínua  $\omega_t$  de formas simpléticas.

**Step 2** Buscar uma (isotopía) família de difeomorfismos  $\varphi_t$  com  $\varphi_0 = \text{id}$  e tal que  $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ . Com isso a gente procura levar o problema para uma EDO.

**Step 3** Os fluxos são isotopías com uma relação de comutatividade. Eles correspondem com campos vetoriais. As isotopías em geral estão em correspondência com *campos de vetores não autónomos*.

**Definição** Uma família suave de difeomorfismos  $\{\varphi_t\}$  com  $\varphi_0 = \text{id}$  é chamada *isotopía*. Suave significa que  $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$  é suave.

**Exemplo** Fluxos (complets) são isotopías tq  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ .

**Definição** Um *campo de vetor t-dependente* ou *não autónomo* é família suave de campos  $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ . De novo, suave é que  $(t, x) \mapsto X_t(x)$  é suave.

isotopía  $\leftrightarrow$  campos t-dependentes

A diferenciação sempre é simples né? Fixa um ponto e varia o tempo, obtém uma curva.

$$\phi_t \mapsto X_t(\varphi_t(x)) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{t=\tau} \varphi_\tau(x).$$

A recíproca é mais difícil. A ideia é estender a variedade a  $M \times \mathbb{R}$ , e considerar  $\bar{X}(x, t) = (X_t(x), \frac{d}{dt})$ . Esse depende do tempo, assim podemos achar um fluxo  $\phi_t$  de  $\bar{X}_t$ . Aqui se deve estender o fluxo usando bump functions, assim a gente tem que  $\phi_t$  está definido para toda t.

Note que  $\phi_t(x, s) = (G_t, t + s)$  para alguma função G na variedade. Podemos achar uma inversa dela assim:

$$(x, s) = \phi_{-t}(\phi_t(x, s)) = G_{-t}(G_t(x, s), t + s), s)$$

ie. a inversa de

$$x \mapsto G_t(x, s)$$

é

$$y \mapsto G_{-t}(y, s + t)$$

Logo,

$$\phi_t(x) = G_t(x, 0)$$

é uma isotopía e como a derivada do fluxo

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x, 0) = \bar{X}(G_t(x, 0), t) \implies \frac{d}{dt} G_t(x, 0) = X_t(x, 0).$$

E é isso. Temos a correspondencia.

Voltando ao método de Moser, para achar  $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$ , pegamos uma isotopía que puxa  $\omega_t$  em  $\omega_0$ , e queremos diferenciar a isotopía. No caso de um fluxo, trata-se da derivada de Lie por definição.



**Lemma**  $\{\varphi_t\}$  isotopia em  $M$ ,  $\{X_t\}$  campo autónomo. Sejam  $\eta \in \Omega^k(M)$ ,  $\beta_t \in \Omega^k(M)$ . Então vale:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \epsilon) = \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \eta$$

onde estamos pegando a derivada num tempo  $t$  fixo. Daí veremos que pela regra da cadeia segue que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \beta_t) = \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \beta_t + \frac{d}{dt} \beta_t$$

*Demonstração.* a. Considere os seguintes operadores em  $\Omega^\bullet$  :

$$Q_1(\eta) = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \eta, \quad Q_2(\eta) = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \eta$$

Daí note que esses operadores comutam com a derivada exterior, são Leibniz respeito ao producto cunha e coincidem em funções. Daí segue que  $Q_1 = Q_2$ .

b. A regra da cadeia diz que para uma função  $F(a, b)$ ,

$$\frac{d}{dt} F(t, t) = \frac{\partial}{\partial a} F(t, t) + \frac{\partial}{\partial b} F(t, t)$$

e olha para  $\varphi_a^* \beta_b$  como a  $F$ . Sustiundo e usando  $a, b$ , o resultado segue.

□

Uma aplicação disso é

**Teorema (de estabilidade de Moser)**  $M$  compacta,  $\{\omega_t\}$  formas simpléticas,  $t \in [0, 1]$ . Se as formas são todas cohomologas então elas são symplectomorfas, i.e.  $[\omega_t] = [\omega_0] \implies \exists \phi_t$  tq  $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$ . Ou, de outra forma, se existe uma família suave de formas  $\beta_t$  tais que

$$\omega_t = \omega_0 + d\beta_t$$

então existe uma isotopia  $\{\varphi_t\}$  tal que  $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ .

*Demonstração.* Note que não é imediato que as clases de cohomologia nos dem uma família suave, mas é equivalente sim (usando decomposição de Hodge? Tem algo mais simples?). O método é achar um campo de vetores autónomo resolvendo

$$i_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \beta_t$$

pois dela segue que

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = -d \left( \frac{d}{dt} \beta_t \right)$$

E daí a segunda afirmação do lema.

□

## 9 Aula 9

Lembre: Método de Moser.

A prova foi:

*Demonstração.* Calcule

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega_t = 0$$

isso implica que

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = -d \left( \frac{d}{dt} \beta_t \right)$$

e isso que

$$i_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \beta_t$$

□

Com isso conseguimos associar uma isotopia a um campo  $t$ -dependente (integração).

### 9.1 Aplica ção ao teorema de Darboux

**Lemma**  $X_t$  campo de vetores  $t$ -dependente,  $t \in \mathbb{R}$ . Suponha que

$$X_t|_{x_0} = 0 \quad \forall t.$$

Então existe uma vizinhança  $U \ni x_0$  e uma família  $\varphi_t : U \rightarrow M$  de

- (Inclusão)  $\varphi_0 = \text{id}$ .
- $\frac{d}{dt} \varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$
- $\varphi_t(x_0) = x_0$
- $\varphi_t : U \xrightarrow{\text{difeo}} \varphi_t(U)$ .

*Demonstração.* Variação do caso  $M$  compacto

$$\bar{X}(x, t) := \left( X_t(x), \frac{d}{dt} \right) \quad \text{em } M \times \mathbb{R}$$

$$\bar{X}(x_0, t) = \left( 0, \frac{d}{dt} \right)$$

assim existe uma curva integral  $\gamma(t) = (x_0, t)$  de  $\bar{X}$  por  $(x_0, 0)$  está definida para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

Por EDO, existe uma vizinhança  $W$  de  $(x_0, 0)$  em  $M \times \mathbb{R}$  onde o fluxo de  $\bar{X}$  existe  $\forall t \in [0, 1]$ .

Tome  $U = \bigcap_{w \in \{M \times \{0\}\}} W$ .

□

Valem a fórmula para  $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_t) \dots$

**Teorema (Darboux)**  $(M, \omega)$  simplética,  $\dim M = 2n$ . Para todo  $x \in M$  existe uma vizinhança  $U \ni x$ , aberto  $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  e um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : V \subseteq \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow U \subseteq M \\ 0 &\longmapsto x \end{aligned}$$

tal que

$$\phi^* \omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i.$$

[Desenho de carta coordenada]

*Demonstração.* Podemos assumir que  $M$  é bola aberta de  $\mathbb{R}^{2n}$  com estrutura simplética  $\omega$  arbitrária.

Para usar o método de Moser, definamos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \\ \omega_0 &= \sum_i dq_i \wedge dp_i \end{aligned}$$

Podemos assumir que na origem

$$\omega_1|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} \quad T_0 \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$$

simplesmente porque qualquer dois formas simpléticas são equivalentes num espaço vetorial simplético usando uma mudança de coordenadas.

- Podemos assumir pelo Lema de Poincaré que

$$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_0 = 0$$

supondo pela mesma razão que antes que  $\beta|_0 = 0$ .

- $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 \iff \omega_t = \omega_0 + t d\beta$

Precisamos checar que  $\omega_t$  são não degeneradas numa vizinhança de 0.

Note que em  $x = 0$ ,  $\omega_t|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} = \omega_1|_{x=0}$ , assim  $\omega_t|_{x=0}$  é não degenerada para toda  $t$ , mas precisamos de uma vizinhança, não só um ponto.

**Lemma** Se tem uma família  $\omega_t|_{x_0}$  é simplética  $\forall t, t \in [0, 1]$ , então existe uma vizinhança de  $x_0$  onde  $\omega_t$  é não degenerada  $\forall t \in [0, 1]$ .

*Demonstração.* Considere

$$(x, s) \rightarrow \det(\omega_s(x)) = \text{determinante da matriz que representa a forma}$$

essa função é não zero em zero, assim para cada  $t$  existe uma vizinhança onde ela não é zero. Logo, pela compacidade de  $[0, 1]$ ,  $\exists$  uma vizinhança  $B \ni x_0$  onde  $\det(\omega_s(x))$  não se anula  $\forall s \in [0, 1]$ .  $\square$

Então já temos essa vizinhança que precisavamos.

Defina  $X_t$  como a solução da equação de Moser:

$$i_{X_t} \omega_t = -\beta.$$

Como  $\beta|_0 = 0 \implies X_t|_{x=0} = 0 \implies \exists \varphi_t, t \in [0, 1]$ .

Pelo lema 1, existe uma vizinhança  $V \ni 0$  e

$$\begin{aligned} \varphi_t : V &\longrightarrow B \\ \varphi_t^* \omega_t &= \omega_0 \end{aligned}$$

tome  $t = 1, 0 \in U = \varphi_1(V)$ . □

Com esse mesmo método a gente consegue provar uma generalização do teorema de Darboux.

## 9.2 Teorema de Darboux generalizado (Weinstein)

**Teorema**  $Q \xhookrightarrow{i} M$  subvariedade (mergulhada) e  $\omega_0, \omega_1$  em  $M$  simpléticas. Suponha que

$$\omega_0|_x = \omega_1|_x \quad \forall x \in Q$$

então existem vizinhanças  $U_0$  e  $U_1$  de  $Q$  em  $M$  e um difeomorfismo

$$\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$$

tal que

$$\varphi^* \omega_1 = \omega_0$$

e que  $\varphi(x) = x \quad \forall x \in Q$

**Observação** O teorema de Darboux é quando  $Q$  é um ponto só!

**Observação** A condição  $\omega_0|_x = \omega_1|_x$  significa que  $\omega_0$  e  $\omega_1$  coincidem em todo o espaço tangente a  $M$  nos pontos de  $Q$ , não é que o pullback em  $Q$  coincide. Tem mais vetores no espaço tangente a  $M$ .

Vamos precisar de um Lema de Poincaré relativo.

**Lemma**  $Q \hookrightarrow M$  subvariedade. Seja  $\eta \in \Omega^k(M)$ ,  $d\eta = 0$ ,  $i^* \eta = 0$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $Q$  em  $M$ ,  $\beta \in \Omega^k(U)$  tal que

$$\begin{aligned} \eta &= d\beta \\ \beta|_x &= 0, \quad \forall x \in Q \end{aligned}$$

$(\beta|_{T_x M} = 0 \quad \forall x \in Q)$ .

A ideia aqui é simplesmente que podemos achar uma vizinhança de  $Q$  que se contrae a  $Q$  (retrato por deformação?)

*Demonstração.* Em fim, pelo lema, para  $\eta = \omega_1 - \omega_0$ ,  $i^*\eta = 0$ . Compare com a demonstração anterior,  $\beta$  se anulava no 0, agora  $\eta$  se anula em toda  $Q$  (é uma versão paramétrica disso).

$Q \hookrightarrow M$  tem vizinhança  $U$  onde  $\exists \beta \in \Omega^1(U)$ ,

$$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_x = 0$$

- Seja  $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + td\beta$ .
- $\forall t \in [0, 1], x \in Q, \omega_t|_x = \omega_0|_x = \omega_1|_x$ .

Pelo lema 2,  $x$  tem vizinhança em  $M$  onde  $\omega_t$  é simplética  $\forall t \in [0, 1]$ .

Tomando a união das vizinhanças, temos vizinhança de  $Q$  onde  $\omega_t$  simplético  $\forall t \in [0, 1]$ .

#### Método

- Define  $X_t$  por  $i_{X_t}\omega = -\beta$ . Isso implica que  $\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t = 0$ .
- Como  $\beta|_x = 0$ , então  $\forall x \in Q, X_t|_x = 0 \forall x \in Q$ .
- Pelo lema 1,  $\exists U_0$  onde  $\varphi_t$  está definido  $\forall t \in [0, 1]$ .
- E mais  $X_t|_Q = 0 \implies \varphi_t|_Q = \text{id}_Q$ .
- Tome  $\phi = \varphi_1$  e  $U_1 = \varphi_1(U_0)$ .

□

#### 9.2.1 Sobre o Lema de Poincaré relativo

O principal ingrediente é teorema da vizinhança tubular.

Lembre:

**Teorema (Vizinhança tubular)**  $Q \hookrightarrow M$  subvariedade mergulhada. Existe uma vizinhança  $Q \subseteq U \subseteq M$  para qual existe  $\pi : U \rightarrow Q$  tal que

$$\begin{aligned} \pi \circ i &= \text{id}_Q \\ i \circ \pi &\simeq \text{id}_U, \quad (\text{homotopia suave}) \end{aligned}$$

Daí, o lema de Poincaré segue a existencia de um *operador de homotopia*.

Em geral, quando temos uma homotopia

$$\begin{aligned} F : M \times [0, 1] &\longrightarrow N \\ F_0 : M &\longrightarrow N \\ F_1 : M &\longrightarrow N \end{aligned}$$

existe um operador

$$H : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

tal que

$$F_1^*\eta - F_0^*\eta = d(H\eta) - Hd\eta$$

Note que no caso de formas fechadas, o termo da direita se anula e a gente prova a invariância homotópica da cohomologia. No nosso caso, o operador de homotopia nos dá  $\eta = dH\eta$  á que  $d\eta$  se anula em  $Q$ .

### 9.2.2 Vizinhança tubular

**Teorema** Existe uma vizinhança  $U_0$  de  $Q$  em  $NQ$  e uma vizinhança  $U_1$  de  $Q$  em  $M$  tais que

- $U_0 \cap (NQ)_x$  é convexo  $\forall x \in Q$ .
- Existe um difeomorfismo  $\phi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$  tal que  $\phi(x) = x$ , e  $d\phi|_x : T_x(NQ) \xrightarrow{\text{id}} TM|_x$

*Demonstração.* Ideia: aplicação exponencial. □

## 9.3 Monitoria 2

**Proposição**  $\phi : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^k$  suave,  $c \in \mathbb{R}^k$  valor regular.

$$N := \phi^{-1}(c) \text{ coisotrópica} \iff \{\phi_i, \phi_j\}|_N = 0$$

## 10 Aula 10

Lembre

- Darboux generalizado: duas formas numa subvariedade que coincidem nos pontos da subvariedade, existem vizinhanças da subvariedade symplectomorfas.
- A prova disso: usa método de Moser. Para usar o método de Moser:

**Lemma (Poincaré relativo)**  $Q \xrightarrow{i} M$ .  $\eta \in \Omega^k(M)$  fechada e tal que  $i^*\eta = 0$ . Então existe vizinhança  $U \supset Q$  e  $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$  tal que  $\eta = d\beta$  e  $\beta|_Q = 0$ .

(O lema de Poincaré usual é quando  $Q$  é um ponto)

*Demonstração do lema de Poincaré.* Aí tem que mergulhar  $Q$  no fibrado tangente  $NQ$  que é um fibrado que não precisa de métrica para ser definido. Porém, na prova a gente introduz uma métrica em  $Q$  e identifica  $NQ$  com  $T^\perp Q$ . Daí usando a aplicação exponencial conseguimos ver que  $Q$  é um retrato por deformação de uma vizinhança dele no  $M$ —a exponencial é a ponte de  $NQ$  [a  $Q$ ].

Isso dá uma homotopia

$$\begin{aligned} F_t : U_0 &\longrightarrow U_0 \\ (x, v) &\longmapsto (x, tv) \\ F_0 &= i \circ \pi \\ F_1 &= \text{id}_{U_0} \end{aligned}$$

Daí é só pegar o operador de homotopia

$$\mathcal{H} : \Omega^k(\mathcal{U}_0) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathcal{U}_0)$$

que é tal que

$$F_1^* \eta = F_0^* \eta = \mathcal{H}(d\eta) + d(\mathcal{H}\eta)$$

**Afirmção** O operador de homotopia é

$$H(\eta) = \int_0^1 I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} (F^* \eta) dt$$

onde

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times \mathcal{U}_0 &\longrightarrow \mathcal{U}_0 \\ (t, y) &\longmapsto F_t(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_t : \mathcal{U}_0 &\longrightarrow [0, 1] \times \mathcal{U}_0 \\ y &\longmapsto (t, y) \end{aligned}$$

de forma que

$$F_t = F \circ I_t$$

**Notação** Seja

$$\begin{aligned} \tau_t : \mathbb{R} \times \mathcal{U}_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{U}_0 \\ (x, y) &\longmapsto (s + t, y) \end{aligned}$$

de forma que

$$I_t = \tau_t \circ I_0, \quad F_t = F \circ I_t = F \circ \tau_t \circ I_0$$

e a conta que a gente faiz é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t^* \eta &= I_0^* \frac{d}{dt} \tau_t^* (F^* \eta) \\ &= I_0^* \tau_t^* (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta) \\ &\stackrel{\text{Cartan}}{=} I_0^* \tau_t^* \left( d i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta + i_{\frac{\partial}{\partial t}} d(F^* \eta) \right) \\ &= d \left( I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta + I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* (d\eta) \right) \end{aligned}$$

e aí integramos para obter

$$F_1^* \eta - F_0^* \eta = d(H\eta) + H(d\eta)$$

Se  $d\eta = 0, i^* \eta = 0, \implies \eta = d(H\eta)$ . Defina  $\beta = H\eta$ . Como  $F_t(x, 0) = (x, 0) \forall x \in Q$ , assim

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(x, 0) = 0 \implies i_{\frac{\partial}{\partial t}} dF_t|_{x \in Q} = 0$$

e por fim

$$\beta|_x = 0.$$

□

## 10.1 Darboux generalizado versão 2.0

No teorema anterior pode imaginar que cada vizinhança de  $Q$  é uma variedade diferente. Mas então a condição de que as duas formas sejam iguais acima de  $Q$  já não faz sentido. Precisamos de um isomorfismo simplético entre esses espaços tangentes.

**Teorema** (Teorema de Darboux generalizado Versão 2.0)

$$\begin{array}{ccc} (M_0, \omega_0) & & (M_1, \omega_1) \\ & \nwarrow i_0 \quad \nearrow i_1 & \\ & Q & \end{array}$$

Suponha que temos um isomorfismo de fibrados simpléticos

$$\begin{array}{ccc} TM_0|_Q & \xrightarrow{\phi} & TM_1|_Q \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Q & \end{array}$$

tal que  $\phi|_{TQ} : TQ \rightarrow TQ$  é  $\text{id}_{TQ}$ .

Então  $\phi$  estende à derivada de um symplectomorfismo

$$\begin{array}{ccc} U_0 \subset M_0 & \xrightarrow{\psi} & U_1 \subset M_1 \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & Q & \end{array}$$

i.e.,

$$d\phi|_Q = \phi : TM_0|_Q \rightarrow TM_1|_Q$$

Em palavras: a derivada do symplectomorfismo (entre as vizinhanças de  $M_1$  e  $M_2$ ) que obtemos é estendida pelo isomorfismo simplético dos fibrados tangentes dado.

*Demonstração.* Podemos reduzir ao caso anterior! Basta achar um difeomorfismo  $\psi : U_0 \rightarrow U_1$  tal que  $\psi|_Q = \text{id}_Q$  e que  $d\psi|_Q = \phi$ . Nesse caso,  $\omega_0$  e  $\psi^*\omega_1$  são duas formas em  $U_0$  que coincidem sobre  $TM_1|_Q$ . Vamo lá

Tome dois complementos

$$\begin{aligned} E_0, \quad TM_0|_Q &= TQ \oplus E_0 \\ E_1, \quad TM_1|_Q &= TQ \oplus E_1 \end{aligned}$$

Então como  $\phi$  preserva  $TQ$ , ele também preserva os complementos, é só álgebra linear. Isto é,  $\phi$  se restringe a um isomorfismo

$$\bar{\phi} : E_0 \rightarrow E_1$$



Note que

$$\bar{\phi}|_Q : TE_0 \cong TQ \oplus E_0 \rightarrow TE_1 \cong TQ \oplus E_1$$

Aqui estamos pegando a derivada do isomorfismo nos fibrados. O importante é que como ele é linear, sua derivada é ele mesmo (só que aí aparecem muitas identificações):

$$d\bar{\phi}|_Q = \text{id} \oplus \bar{\phi} = \phi$$

Agora pegamos vizinhanças tubulares de  $Q$ ,  $V_0 \subset E_0$  e  $V_1 \subset E_1$  e usando a exponencial como antes podemos contraer

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{\phi} & V_1 \\ \downarrow \phi_0 = \text{exp} & & \downarrow \phi_1 \\ U_0 \subset M_0 & \xrightarrow{\psi} & U_1 \subset M_1 \end{array}$$

e todo comuta:

$$\psi = \phi_1 \circ \bar{\phi} \circ \phi^{-1} : U_0 \xrightarrow{\cong} U_1$$

e por fim

$$d\psi|_Q = \text{id} \circ d\bar{\phi} \text{id} = \phi$$

□

Agora um caso particular:

$$\begin{array}{ccc} (M, \omega) & & T^*\mathcal{L} \\ & \swarrow i & \nearrow i \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

onde  $Q$  está dentro do fibrado cotangente como a seção zero.

## 10.2 Teorema das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein

**Teorema (das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein)** (As subvariedades Lagrangianas estão definidas "intrinsecamente", pois existe uma vizinhança delas que é simplectomorfa a ela como subvariedade no cotangente dela)

Existem vizinhanças  $U_0 \ni \mathcal{L}$  em  $T^*\mathcal{L}$  e  $U_1 \ni \mathcal{L}$  em  $M$  e um simplectomorfismo

$$\varphi : U_0 \rightarrow U_1$$

*Demonstração.* Só precisamos de um  $\phi$  como no Darboux 2, i.e.,

$$\phi : TM|_{\mathcal{L}} \longrightarrow T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}}$$

tal que

$$\phi|_{T\mathcal{L}} : T\mathcal{L} \rightarrow T\mathcal{L} = \text{id}_{T\mathcal{L}}$$

**Lemma** Suponha que  $\mathcal{L} \hookrightarrow (M, \omega)$  é Lagrangiana. Considere  $TM|_{\mathcal{L}}$  um fibrado vetorial simplético. Então

1. Existe um subfibrado lagrangiano  $E \subseteq TM|_{\mathcal{L}}$  tal que  $TM|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus E$ .
2. Existe um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} TM|_{\mathcal{L}} & \xrightarrow{\cong} & T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^* \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

onde no espaço  $T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^*$  a forma simplética é,

$$\nu((X, \alpha), (Y, \beta)) = \beta(X) - \alpha(Y),$$

lembrando um exercício da lista 1 (de álgebra linear) que diz que um subespaço Lagrangiano nos dá uma decomposição em soma direta usando o seu dual.

*Demonstração do Lema.*

**Step 1** Todo espaço simplético induz uma estrutura complexa compatível. Se  $L$  é lagrangiano,  $JL$  também e o espaço vetorial (acho que isso coincide com o complemento ortogonal na métrica compatível). Isso vale para fibrados vetoriais.

**Step 2** Note que

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow (T\mathcal{L})^* \\ u &\longmapsto \omega(\cdot, u) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Isso é super elementar de álgebra linear.

Tome

$$\begin{aligned} (TM|_{\mathcal{L}}, \omega) &\longrightarrow (T\mathcal{L} \oplus T\mathcal{L}^*, \nu) \\ (x, u) &\longmapsto (X, \omega(\cdot, u)) \end{aligned}$$

que é que acontece? Então,

$$\begin{aligned} \nu(T(X, u), T(Y, v)) &= \nu((X, \omega(\cdot, u)), (Y, \omega(\cdot, v))) \\ &= \omega(X, u) - \omega(Y, u) \\ &= \omega((X, u), (Y, u)) \end{aligned}$$

□

Daí, o teorema queda provado simplesmente aplicando o lema em  $TM|_{\mathcal{L}}$  e em  $T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}}$  para construir o isomorfismo de fibrados que buscavamos:

$$\begin{array}{ccc} & T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^* & \\ \cong \nearrow & & \searrow \cong \\ TM|_{\mathcal{L}} & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}} \end{array}$$

□

## 11 Aula 11

### 11.1 Aplicação (de Weinstein): pontos fixos de symplectomorfismos

Generaliza o estudo (Poincaré-Birkhoff) clássico de pontos fixos de aplicações que preservam área:

**Teorema (Último teorema de Poincaré)** Um automorfismo de um anelo que preserva orientação, área e rota a fronteira do anelo em direções opostas tem um ponto fixo.

Isso apareceu quando Poincaré estudava fluxos em  $\mathbb{R}^3$ .

Consideremos  $(M, \omega)$  simplética e  $M \xrightarrow{f} M$  symplectomorfismo. Nos interessa o caso em que  $f$  é um fluxo hamiltoniano no tempo 1, ie.  $f = \phi_{X_H}^{t=1}$ . Sabemos que

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$$

é uma subvariedade lagrangiana, e também  $\Delta = \Gamma_{\text{id}_M} = \{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$ . De forma que os pontos fixos de  $f$  são os pontos de interseção entre  $\Gamma_f$  e  $\Delta$ .

**Proposição** Seja  $M$  compacta,  $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ . Se  $f$  é  $C^1$ -próximo (convergência uniforme, Fréchet differentiable?) da  $\text{id}_M$ , então  $f$  tem pelo menos 2 pontos fixos.

*Demonstração.* Note que  $\Delta \cong M$  pelo teorema da vizinhança lagrangiana, como  $\Delta$  é lagrangiana existe uma vizinhança  $U \supseteq \Delta$  symplectomorfa a uma vizinhança  $U'$  de  $M \hookrightarrow (T^*M, \omega_{\text{can}})$ .

- Se  $f \in \text{Simp}$  está "perto" da  $\text{id}_M$ , então  $\Gamma_f \subseteq U$ .
- $f$  é  $C^1$ -próximo da  $\text{id}_M$ , então  $\Gamma_f$  corresponde a 1-forma  $\mu$  em  $T^*M$  (a uma subvariedade  $N_\mu$  de  $T^*M$ ?). (É uma gráfica de  $M$  no fibrado cotangente!)
- $\Gamma_f$  lagrangiana  $\implies d\mu = 0$  (Lista 2)
- $H^1(M) = 0 \implies \mu = dh$
- $M$  compacta  $\implies h$  tem pelo menos 2 pontos críticos.

□

**Observação (Monitoria)** Se pedimos só  $C^0$ -próximo, é possível que a seção  $\mu$  não esteja bem definida porque um ponto de  $M$  pode não estar associado a um covector ancorado em outro ponto, ou algum outro problema assim. A condição  $C^1$  controla isso.

#### Observação

- Não podemos abrir mão de  $H^1(M) = 0$ . Eg. rotação no toro.

- Podemos substituir  $H^1(M) = 0$  por  $f$  ser simplectomorfismo Hamiltoniano (ver McDuff-Salomon).

**Pergunta** Remover  $C^1$ -proximidade da identidade? (Pelo menos no caso  $f$  hamiltoniano).

**Conjectura (Arnold)**  $M$  simplética compacta,  $f$  simplectomorfismo Hamiltoniano. O número de pontos fixos de  $f$  é maior o igual que o número mínimo de pontos críticos que uma função em  $M$  deve ter:

$$\begin{aligned} \# \text{ pontos fixos de } f &\geq \text{Crit}(M) \\ &\geq \text{LS category (Lusternik Schnirelmann)} \end{aligned}$$

Isso está relacionado com o fato de tirar a hipótese de que a função esté próxima da identidade.

**Conjectura (Outra versão)** Para pontos fixos não degenerados (são os pontos onde  $N_\mu$  e  $M$  se intersectam transversalmente em  $T^*M$ ).

$\# \text{ pontos críticos} \geq \# \text{ mínimo de pontos críticos que funções de Morse devem ter.}$

$$\underbrace{\geq}_{\text{desig. Morse}} \sum_k \text{Betti}_k$$

## Projetos

- Conjetura de Arnold (Eliashberg (superfícies de Riemann), Hofer-Achander)
- Homologia de Floer (é uma versão de Homologia de Morse em dimensão infinita)

Professor Leonardo vai falar com mais detalhe desses temas.

## 11.2 Outra classe de exemplos de variedades simpléticas: órbitas coadjuntas

São exemplos de redução simplética. Isso está relacionado com teoria de Lie.  $G \curvearrowright (M, \omega)$  simetrias hamiltonianas. Daí vamos produzir uma nova variedade simplética.

### 11.2.1 Revisão de grupos e álgebras de Lie

Cada grupo de Lie age na sua álgebra de Lie de maneira canônica. Daí podemos pegar a álgebra dual. O fato importante é que as órbitas lá tem uma estrutura simplética.

**Definição** Um *grupo de Lie* é uma variedade  $C^\infty$   $G$  munida de estrutura de grupo tal que o produto e a inversão são funções suaves. Os *morfismos* são homomorfismos de grupos  $C^\infty$ . *Subgrupos de Lie* são subvariedades imersas que são subgrupos.

### Exemplo

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$
- $V$  espaço vetorial,  $(V, +)$  é grupo de Lie abeliano.
- $S^1, S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$  são grupos de Lie abelianos.
- Grupos finitos/enumeráveis:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \dots$
- 

**Exercício**  $G$  grupo de Lie conexo, então o seu recobrimento universal  $\tilde{G}$  é grupo de Lie.

- Subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R})$ :
  - Ortogonal  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = \text{id}\}$ .  
 Mais geralmente,  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espaço vetorial de produto interno,  $O(V) = \{T : V \rightarrow V \mid \langle Tv, Tv \rangle = \langle u, v \rangle\}$ .  
 Considerando

$$\begin{aligned}\psi : GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Sim}(n) \\ A &\longmapsto AA^T\end{aligned}$$

temos que  $\text{id}$  é um valor regular, e assim  $O(n) = \psi^{-1}(\text{id})$  é uma subvariedade (compacta é não conexa por  $\det A = \pm 1$ )

- $SL(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ , conexo não compacto.
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$  compacto conexo
- $Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J_0 A = J_0\}$  com  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . *Grupo simplético.*
- $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : \text{invertíveis}\} \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ .
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = \text{id}\}$ , isto é  $A^* = \overline{A}^T$ , temos  $|\det A| = 1$  e o mapa

$$\det : U(n) \rightarrow S^1$$

e de fato  $U(1) \cong S^1$ .

- $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$  *grupo unitário especial*

### Observação

- 
- **Teorema (de Cartan)** (F. Warner) Subgrupo fechado de grupo de Lie é subgrupo de Lie! (mergulhado)
- Nem todo grupo de Lie é grupo de Lie de matrizes. O espaço recobridor de  $SL(2, \mathbb{R})$ , por exemplo.

### 11.2.2 Sobre $SU(2)$

Sabemos que podemos escrever

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd : i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

e como

$$S^3 \hookrightarrow \mathbb{H}$$

$S^3$  herda uma estrutura de grupo de Lie, e de fato

$$S^3 \xrightarrow{\cong} SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Daí,

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\cong} & SU(2) \\ \downarrow 2:1 & & \downarrow 2:1 \\ \mathbb{R}P^3 & \xrightarrow{\cong} & SO(3) \end{array}$$

Em geral recobrimentos duplos de  $SO(n)$  são grupos  $Spin(n)$ . Para  $n \geq 2$  são recobrimentos universais. São grupos de simetrias de partículas que se chamam fermiões. A ideia é que a gente precisa dois voltas para virar a flecha que tá parada na partícula.

Por último vamos ver por que e que  $\mathbb{R}P^3 \cong SO(3)$ . Do mesmo jeito que  $\mathbb{R}P^2$  é o hemisfério norte da esfera com os pontos no bordo identificados,  $\mathbb{R}P^3$  é uma bola fechada em  $\mathbb{R}^3$  com pontos antipodais no bordo identificados. Podemos pensar que os pontos de  $\mathbb{R}P^3$  são rotações de ângulo  $\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

## 12 Aula 12

### 12.1 Álgebras de Lie

**Definição** Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial (sobre  $\mathbb{R}$ ) munido de uma forma bilinear

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tal que

- $[u, v] = -[v, u]$ .
- Jacobi.

Um *morfismo de Álgebras de Lie* é um mapa linear  $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que  $[Tu, Tv] = T[u, v]$ .

Uma *subálgebra de lie* é  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  subespaço tal que  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ , ie.  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$  ideal.

**Exemplo**

- $M_n(\mathbb{R})$  matrizes de  $n \times n$  com  $[A, B] = AB - BA$ . Se denota  $\mathfrak{gl}(n)$ .

- $V$  espaço vetorial com  $[\cdot, \cdot] \equiv_0$  (abelianos).
- $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = -A^T\}$ .
- $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{tr } A = 0\}$ .
- Em dimensão  $\infty$ ,  $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$  campos vetoriais, e também  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  simplética.

## 12.2 Relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie

ção

$$\text{Grupos de Lie} \xrightarrow{\text{diferenciação}} \text{Álgebras de Lie}$$

**Definição** Dado um grupo de Lie  $G$  e um elemento  $g \in G$ , a *multiplicação à esquerda* é

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto ga \end{aligned}$$

que é um difeomorfismo. Também está a *multiplicação à direita*  $R_g$ . Temos que  $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ .

**Definição** Um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}(G)$  é *invariante à esquerda* se

$$(L_g)_* X = X \quad \text{para toda } g \in G$$

ou

$$(dL_g)|_h(X_h) = X_{gh} \quad \forall g, h$$

### Observação

- O conjunto de campos invariantes à esquerda  $\mathfrak{X}^L(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$  é uma subálgebra de Lie (o colchete de Lie é fechado aqui).
- $X \in \mathfrak{X}^L(G)$  é completamente determinado por  $X_e$  onde  $e \in G$  é a unidade.
- Temos um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^L(G) &\xrightarrow{\cong} T_e G \\ X &\longmapsto X_e \end{aligned}$$

e para voltar só pegamos um vetor em  $T_e G$  e espalhamos por todos lados:

$$\begin{aligned} T_e G &\longrightarrow \mathfrak{X}^L(G) \\ u &\longmapsto u^L \end{aligned}$$

Talvez aqui devemos provar que esse espalhamento produz um campo suave.

Além disso, esse mapa induz uma estrutura de álgebra de Lie em  $T_e G$ . Essa é a *álgebra de Lie* de  $G$ , denotada por  $\text{Lie}(G)$ .

**Extra:**  $(\mathfrak{X}(M), -[\cdot, \cdot])$  é a álgebra de Lie de  $\text{Diff}(M)$ .

**Importante:** Essa associação é funtorial:

**Proposição** Se  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  é um morfismo de grupos de Lie, ele induz uma aplicação entre as álgebras de Lie dado por

$$\text{Lie}(\phi) := d_e \phi : T_e G_1 \longrightarrow T_e G_2$$

que é um morfismo de álgebras de Lie.

*Demonstração.* Muito fácil. □

Esse é chamado de *funtor de Lie*. É um funtor de diferenciação nesse sentido. Como ir na outra direção?

**Observação**

- $V$  espaço vetorial,  $G \longrightarrow \text{GL}(V)$  morfismo de grupos de Lie se chama de *representação* de  $G$  em  $V$ .
- $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$  morfismo de álgebras de Lie se chama de *representação* de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ .

**Exemplo**

- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ .
- $(V, [\cdot, \cdot] = 0) = \text{Lie}(V, +)$ .
- Pode ter grupos de Lie diferentes com a mesma álgebra de Lie, por exemplo  $(\mathbb{R}, +)$  e  $S^1$  tem álgebra de Lie  $(\mathbb{R}, [\cdot, \cdot])$ . Outro exemplo é  $\mathfrak{o}(n) = \text{Lie}(\text{O}(n))$ , e como esse grupo de Lie tem dois componentes conexos ( $\det 1$  e  $\det -1$ ), e a álgebra de Lie está determinada só pela componente da identidade, temos que  $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \text{Lie}(\text{SO}(n))$ .
- $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$  com

$$\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b-c & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- Recobrimentos  $2 : 1$ .
- Na lista 1 vimos que  $\mathfrak{sp}(2n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T J_0 + J_0 A = 0\} = \text{Lie}(\text{Sp}(2n))$
- $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})$ .
- $\text{Lie}(\text{SL}(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{tr } A = 0\}$ .
- $\text{Lie}(\text{U}(n)) = \mathfrak{u}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = -A^*\}$ .
- $\text{Lie}(\text{SU}(n)) = \mathfrak{su}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{tr } A = 0, A = -A^*\}$



### Exercício

- $u \in \mathfrak{g}$ ,  $u^L \in \mathcal{X}^L(G)$  é completo. Aqui é alongar qualquer curva integral usando a traslação a esquerda.

Seja  $\gamma_e : \mathbb{R} \rightarrow G$  curva integral de  $u^L$  com  $\gamma_u(0) = e$ .

- $\gamma_u(t+s) = \gamma_u(t)\gamma_u(s)$  ( $\gamma_u$  é um homomorfismo de grupos)
- $\gamma_{tu}(1) = \gamma_u(t)$  (homogenidade)

## 12.3 Exponencial

### Definição

$$\begin{aligned}\exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ u &\longmapsto \gamma_u(1)\end{aligned}$$

### Observação

$$\begin{aligned}\exp((t+s)u) &= \exp(tu)\exp(su) \\ \exp(-tu) &= \exp(tu)^{-1}\end{aligned}$$

### Observação

- Fluxo de  $u^L$  é  $R_{\exp(tu)} :$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} R_{\exp(tu)}(g) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g \exp(tu)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_g \exp(tu) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_g(u) \\ &= u^L|_g\end{aligned}$$

- Fluxo de  $u^R$  é  $L_{\exp(tu)}.$

## 12.4 Propriedades fundamentais

1.  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  é um difeomorfismo entre vizinhanças de  $0 \in \mathfrak{g}$  e de  $e \in G$ . ( $d_0 \exp = \text{id}$ .)
2.  $\phi : G \rightarrow H$  morfismo de grupos de Lie,  $\Phi = \text{Lie}(\phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ . O diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & H \\ \exp_G \uparrow & & \uparrow \exp_H \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{h} \end{array}$$

**Exemplo** Para  $G = GL(n)$  e  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \exp : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL(n) \\ A &\longmapsto e^A \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{array}{ccc} & \det : GL(n) \rightarrow \mathbb{R}^* & \\ GL(n) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R}^* \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ M_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{tr}} & \end{array}$$

Lembre que  $\det(e^A) = e^{\text{tr } A}$ .

**Observação** Numa variedade Riemanniana com uma métrica invariante, a definição da exponencial usando geodésicas coincide com essa daqui.

## 12.5 Teoremas fundamentais de Lie (da álgebra para o grupo)

**Teorema (Teoremas fundamentais de Lie)**

Lie I  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , existe um único grupo de Lie  $\tilde{G}$  simplesmente conexo tal que  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\tilde{G})$ . A ideia é simplificar a topologia do grupo preservando a sua álgebra. Aqui se usa o recobrimento universal da componente conexa da identidade.

Lie II  $\varphi : \mathfrak{g} = \text{Lie}(G) \rightarrow \mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ . Se  $G$  é simplesmente conexo, existe um morfismo  $\phi : G \rightarrow H$  tal que  $\varphi = \text{Lie}(\phi)$ .

**Exemplo** O fluxo irracional é um morfismo de grupos de Lie que não se factora (só se factora se a órbita fecha)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 \\ \downarrow & \nearrow & \\ S^1 & & \end{array}$$

Lie III Toda álgebra de Lie de dimensão finita é álgebra de Lie de um grupo de Lie.

**Teorema (Ado)** Qualquer álgebra de Lie pode ser vista de maneira fiel dentro de  $\mathfrak{gl}(n)$ , ie.  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n)$ . (isso não acontece para grupos de Lie e  $GL(n)$ .)

Daí pode usar o teorema de Frobenius para mostrar que toda subálgebra de Lie dá um subgrupo de Lie: espalha a subálgebra (subespaço do tangente em  $e$ ) usando multiplicação a esquerda, que é Frobenius integrável porque é álgebra de Lie, assim ele vem de uma distribuição, pega a órbita que passa por  $e$ , essa daí é um subgrupo.

**Observação** Em dimensão infinita tem obstruções.

**Em resumo:**

$$\{\text{Grupos de Lie simp. conexo}\} \xrightarrow{\text{Lie}} \{\text{Álgebras de Lie}\}$$

é uma equivalencia de categorías.

## 13 Aula 13

### 13.1 Ações

**Definição** Uma *ação (à esquerda)* de  $G$  em  $M$  é aplicação suave

$$\begin{aligned} \psi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto gx = \psi(g, x) = \psi_g(x) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \psi_e(x) &= x, \quad \forall x \in M \\ \psi_{gh} &= \psi_g \cdot \psi_h \end{aligned}$$

que é equivalente a que

$$\forall g \in G, \quad \psi_g \in \text{Diff}(M), \quad G \mapsto \text{Diff}(M)$$

é homeomorfismo de grupos.

**Notação**  $G \curvearrowright^\psi M$

**Observação** Análogo para ações à direita com  $\psi_{gh} = \psi_h \cdot \psi_g$ .

**Terminologia**  $M$  + ação por  $G$  se llama *G-variedade*.

**Definição** Um *morfismo de G-variedades* é

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\phi} & M_2 \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ M_1 & \xrightarrow{\phi} & M_2 \end{array}$$

ie.,

$$\phi(g \cdot x) = g\phi(x)$$

ie., *G-equivariante*.

**Exemplo**

1.  $M = V$  espaço vetorial. Ações por transformações lineares=representações .

$$G \xrightarrow{\psi} \text{GL}(V) \subset \text{Diff}(V)$$

tem representação dual  $G \curvearrowright V^*$  dada por

$$G \xrightarrow{\psi^*} \text{GL}(V^*)$$

dada por

$$\langle (\psi^*)_g(\xi), v \rangle = \langle \xi, \psi_{g^{-1}(v)} \rangle, \quad \xi \in V^*, v \in V$$

2.  $\text{GL}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$  restringe  $O(n) \curvearrowright S^{n-1}$ .
3.  $G = \mathbb{R} \curvearrowright M$ ,  $\mathbb{R}$ -ação  $\longleftrightarrow$  fluxo (completo) pois  $\psi_{t+s} = \psi_t \cdot \psi_s$ . Além disso,  $\mathbb{R}^n \curvearrowright M \longleftrightarrow n$ -fluxos que comutam, pois

$$\psi_{(t_1, \dots, t_n)} = \psi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \psi_{t_n}^n$$

4.  $G$  age em si mesmo de várias formas:

- $\psi_g = L_g$ ,  $L_g(a) = ga$ , ação por multiplicação à esquerda.
- $\psi_g = R_g$  à direita. (Note que  $\psi_g = R_{g^{-1}}$  é ação à esquerda.)
- $\psi_g = I_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ ,  $I_g(a) = gaq^{-1}$ , ação por conjugação (ação por automorfismos de  $G$ ).
- **Ação ou representação adjunta.**  $G$  age em  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Diff}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto d_e I_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \end{aligned}$$

- **Representação dual.**  $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ . Usando [wiki](#),

$$\begin{aligned} \text{Ad}^* : G &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*) \\ (\text{Ad}_g^* \mu)_x &= \mu(\text{Ad}_{g^{-1}} x) \end{aligned}$$

Em aula,

$$\begin{aligned} \text{Ad}^* : G &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*) \\ g &\longmapsto \begin{array}{c} \psi_g : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \psi_g(\mu), v \rangle = \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}}(v) \rangle \end{array} \end{aligned}$$

$$(\text{Ad}^*)_g = (\text{Ad}_{g^{-1}})^*.$$

5. Levantamento tangente cotangente.  $G \curvearrowright^{\psi} M$ .

- $G \curvearrowright TM$

$$g \mapsto \begin{array}{ccc} d\psi_g : TM & \xrightarrow{\cong} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\psi_g} & M \end{array}$$

- $G \curvearrowright T^*M$

$$g \mapsto \begin{array}{ccc} ((d\psi_g)^{-1})^* : T^*M & \xrightarrow{\cong} & T^*M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\psi_g} & M \end{array}$$

### 13.2 Descrição infinitesimal de G-ações

**Upshot** Tem uma ação  $G \curvearrowright M$ . Pegue um vetor  $X$  na álgebra de Lie.  $\exp(tX)$  dá uma curva em  $G$ . Essa curva em  $G$  dá uma curva em  $M$  quando começamos em qualquer ponto  $p \in M$ . Isso é um fluxo global porque  $\exp((t+s)X) = \exp(tX) \exp(sX)$ . Esse fluxo global dá um campo vetorial.

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

**Lembre**  $\mathbb{R}$  ação  $\longleftrightarrow$  fluxos  $\psi_t \rightsquigarrow$  campos de vetores  $X(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_t(x)$

**Generalização para G-ações**  $G$  grupo de Lie,  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ,  $G \curvearrowright^\psi M$ .

**Note** cada  $u \in \mathfrak{g}$  determina uma  $\mathbb{R}$ -ação = fluxo em  $M$ .

O que aqui acontece é que cada vetor na tangente à identidade de  $G$  gera um fluxo na variedade  $M$  quando  $G$  age em  $M$ .

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma_u} G \xrightarrow{\psi} \text{Diff}(M)$$

$$t \longmapsto \psi_{\exp(tu)}$$

**Definição** O *gerador infinitesimal* de  $\psi$  correspondendo a  $u \in \mathfrak{g}$  é o campo

$$u_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\exp(tu)}(x)$$

Em conclusão, uma  $G$ -ação dá lugar a um mapa

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M \end{aligned}$$

Heurísticamente (só que  $\text{Diff}(M)$  não tem dimensão finita), tendo um mapa

$$G \rightarrow \text{Diff}(M)$$

derivando obtemos

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M).$$

### Exemplo

1.  $G \overset{\psi}{\curvearrowright} G$ .  $\psi_g = L_g \rightsquigarrow \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ u \longmapsto u^R \end{array}$  Aqui temos que fazer uma conta:

$$\begin{aligned} u_G(a) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp(tu)}(a) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_a(\exp(tu)) \\ &= d_e R_a(u) \\ &= u^R(a) \end{aligned}$$

Analogamente, outros geradores infinitesimais são

2.

$$\begin{aligned} \psi_g = R_g &\implies u_G = u^L \\ \psi_g = R_{g^{-1}} &\implies u_G = -u^L \end{aligned}$$

3.

$$\psi_g = I_g = L_g \circ R_{g^{-1}} \implies \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ u \longmapsto u^R - u^L \end{array}$$

### 13.3 No caso de representações

$$G \overset{\psi}{\longrightarrow} \text{GL}(V) \subset \text{Diff}(M)$$

diferenciando,  $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \subset \mathfrak{X}(V)$

A partir de uma transformação linear podemos gerar um campo vetorial:

$$\{A : V \rightarrow V \text{ linear}\} = \mathfrak{gl}(V) \hookrightarrow \mathfrak{X}(V)$$

pega um vetor  $v$ . Em  $v$ , o vetor do campo vetorial é  $Av$ .  $X_A(v) = Av \in T_v V = V$

### 13.4 Geradores infinitesimais das ações adjunta e coadjunta

Lembre que essas ações correspondem a  $G \curvearrowright \mathfrak{g}$  e  $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ . Daí,

- $G \curvearrowright^{\text{Ad}} \mathfrak{g}$  com

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto (\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

“diferenciando” (ver [?]lee, thm 20.27) obtemos

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ u(?) &\longmapsto (\text{ad}_u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

### Lemma

$$\begin{aligned} u_g &= \text{ad}_u g \longrightarrow \mathfrak{g} \\ u &\longmapsto u_g = [u, \cdot] \end{aligned}$$

*Demonstração.* É so por definição e a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} u_g(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tu)}(v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_e(\text{R}_{\exp(-tu)} \circ \text{L}_{\exp(tu)})(v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\text{R}_{\exp(-tu)}(v^L(\exp(tu))) \\ &= [u^L, v^L]|_e \\ &= [u, v] \end{aligned}$$

□

### 13.4.1 Dualização

Agora considere  $G \curvearrowright^{\text{Ad}} \mathfrak{g}^*$ ,

$$\langle u_g^*, v \rangle = -\mu([u, v])$$

com  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ,  $u_{\mathfrak{g}^*} \in \mathfrak{g}^* = T_\mu \mathfrak{g}^*$ .

**Pergunta**  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$

### Proposição

1.  $M_1, M_2$   $G$ -variedades,  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$   $G$ -equivariante, então  $u_{M_1} \stackrel{\varphi}{\sim} u_{M_2}$ , ie;  $d\varphi(u_{M_1}(x)) = u_{M_2}(\varphi(x))$ .
2.  $M$  é  $G$ -variedad, então  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é (anti!) homomorfismo de álgebra de Lie.
3.  $M$  é  $G$ -variedade,  $(\psi_g)_*(u_M) = (\text{Ad}_g(u))$ .

*Demonstração.*

1.

$$\begin{aligned} \varphi((\exp(tu) \cdot x) &= \exp(tu), & \varphi(x) \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} &\implies d\varphi(u_{M_1}(x)) = u_{M_1}(\varphi(x)) \end{aligned}$$

2. Note: resultado vale para

$$\begin{array}{ccc} \phi_g = R_{g^{-1}} & \rightsquigarrow & \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(G) \\ u \longmapsto -u^L \end{array} \end{array}$$

Seja  $G \curvearrowright \overline{M} = G \times M$  uma ação,

$$g(a, z) = (R_g^{-1}(a), \quad u_{\overline{M}} = (-u^L, 0)$$

Note:  $[v_{\overline{M}}, u_{\overline{M}}] = -([u, v]_{\overline{M}})$ . Considere

$$\begin{aligned} F : G \curvearrowright \overline{M} = G \times M &\longrightarrow M \curvearrowright G \\ (a, x) &\longmapsto \tilde{a}^1 x \end{aligned}$$

é G-equivariante Daí,

$$u_{\overline{M}} \tilde{F} u_M \implies \begin{aligned} F_*([u_{\overline{M}}, v_{\overline{M}}]) &= [u_M, v_M] \\ F_*([u, v]_{\overline{M}}) &= [u, v] \end{aligned}$$

3. A fórmula que eu quero vale em  $\overline{M}$ ,  $F$  é G-equivariante,  $\implies$  vale em  $M$ .

□

**Próxima aula** Estamos usando um funtor

$$\{G\text{-variedades}\} \longrightarrow \{g\text{-variedades}\}$$

e queremos estudar em que casos podemos voltar.

## 14 Aula 14

$G \curvearrowright^\psi$ . Um elemento da algebra de Lie, pega o vetor na identidade, vai para o grupo, daí gera um fluxo na variedade, diferencia o fluxo e já tem um campo vetorial.

### Propriedades

- Anti-homomorfismo de álgebras de Lie.
- Se  $\phi$  é uma aplicação equivariante (preserva ação), os campos vetoriais são relacionados.



## 14.1 Ações infinitesimais ( $\mathfrak{g}$ -ações)

$\mathfrak{g}$  álgebra de Lie ( $\dim < \infty$ ).

**Definição** Uma *ação (à esquerda)* de  $\mathfrak{g}$  em  $M$  é anti-homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M\end{aligned}$$

**Notação**  $\mathfrak{g} \curvearrowright M$ ,  $M$  é  $\mathfrak{g}$ -variedade.

Para essas variedades exista uma noção de morfismo: suponha que  $\mathfrak{g} \curvearrowright M \xrightarrow{\phi} M \curvearrowright \mathfrak{g}$ , então  $\phi$  é  $\mathfrak{g}$ -equivariante se

$$u_{M_1} \stackrel{\phi}{\sim} u_{M_2} \quad \forall u \in \mathfrak{g}.$$

**Em resumo**

$$\begin{array}{ccc} \text{G-variedades} & \xrightarrow{\text{functor de diferenciação}} & \mathfrak{g}\text{-variedades, } \mathfrak{g} = \text{Lie}(G) \\ \\ \mathfrak{g} \curvearrowright M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ u & \longmapsto & u_M \end{array} \\ \\ \mathfrak{g} \curvearrowright M \xrightarrow{\phi} M \curvearrowright \mathfrak{g} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathfrak{g} \curvearrowright M \xrightarrow{\phi} M \curvearrowright \mathfrak{g} \\ & \searrow \text{integração?} \swarrow & \end{array}$$

Nem sempre pode voltar. Precisa que o campo vetorial seja **completo**, ie. precisamos de uma  $\mathbb{R}$ -ação infinitesimal  $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ . Isso dá uma  $\mathbb{R}$ -ação que é um fluxo. Mas, nem tudo campo vetorial é completo.

**Teorema (Lie-Richard Palais)** Seja uma ação

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M\end{aligned}$$

seja  $G$  um grupo de Lie simplesmente conexo tal que  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Então  $\mathfrak{g}$ -ação se integra a uma ação  $\iff$  cada  $u_M$  é completo  $\forall u \in \mathfrak{g}$ .

**Observação** Tem a ver com pensar em uma  $S^1$  ação em lugar de uma  $\mathbb{R}$ -ação. Por isso pedimos simplesmente conexo.

**Sobre sinais/convenção**

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & \text{Diff}(M) \\ \psi_g \psi_h & = & \phi_{gh} \end{array} \quad \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

Mas esse daí é um *antihomomorfismo* de álgebra de Lie.

Também temos outros anti-homomorfismos de grupos (é muito importante que aparece uma sinal):

$$\begin{aligned}\text{Diff}(M) &\cong \text{Aut}(\mathcal{C}^\infty(M)) \\ \phi : M \rightarrow M &\rightsquigarrow \phi^* : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ \phi \circ \psi &\rightsquigarrow \phi^* \circ \psi^*\end{aligned}$$

$$\text{Lie}(\text{Diff}(M)) \cong \mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\cong} \text{Lie}(\text{Aut}(\mathcal{C}^\infty(M))) \cong \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$$

Porque de fato a gente já tinha definido o colchete de Lie como uma derivação. Aí o que acontece é que quando voltamos para o lado esquerdo temos que botar uma sinal.

## 14.2 Mais sobre ações

Suponha  $G \curvearrowright^\psi M$  e seja  $x \in M$ .

**Definição** *Órbita de  $x$* :  $\mathcal{O}_x = \{\psi_g(x) = gx : g \in G\} \subseteq M$ .

A ação da lugar a uma relação de equivalência em  $M$  :  $x \sim y \iff \exists g \in G$  tal que  $y = g \cdot x$ . Nesse caso as órbitas são as classes de equivalência (partição de  $M$ ).

**Observação** Se  $M = \mathcal{O}_x$ , a ação é dita *transitiva* e  $M$  é *espaço  $G$ -homogêneo*.

### Exemplo

- $G \overset{L,R}{\curvearrowright} G$ ,  $L_g$  e  $R_g$  são transitivas.
- $G \overset{I}{\curvearrowright} G$ ,  $I_g(a) = gag^{-1}$  não é transitiva ( $\{e\}$  é órbita).
- $\text{SO}(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$  cujas órbitas são esferas e a origem.

**Definição** *Grupo de isotropia ou estabilizador*:  $G_x = \{g \in G : \psi_g = x\} \subseteq G$ .

**Observação**  $x \sim y \implies G_x \cong G_y$ .

**Exemplo**  $\text{SO}(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ . Para  $x = 0$ ,  $G_x = \text{SO}(3)$ , mais para  $x \neq 0$  temos  $G_x \cong S^1$ , as rotações com eixo a linha da origem a  $x$ .

Agora pegue uma ação infinitesimal  $\mathfrak{g} \curvearrowright M$ , ie. um mapa

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ u &\longmapsto u_M\end{aligned}$$

### Definição

1. *Distribuição orbital*:  $D \subseteq TM$  dado por

$$x \mapsto T_x M \supseteq D_x = \{u_M(x) : u \in \mathfrak{g}\}$$

2. *Álgebra de isotropia*:  $\mathfrak{g}_x \subseteq \mathfrak{g}$  dada por

$$\mathfrak{g}_x = \{u \in \mathfrak{g} : u_M(x) = 0\}$$

Será que tudo encaixa? O estabilizador é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é a álgebra de isotropia... a distribuição orbital é o fibrado tangente das órbitas?

**Proposição (órbitas, isotropias, ... (Warner))**

- $G_x \subseteq G$  é um subgrupo de Lie e  $\text{Lie}(G_x) = \mathfrak{g}_x$ .
- O conjunto das classes laterais  $G/G_x$  é uma variedade  $C^\infty$  tal que  $G \rightarrow G/G_x$  é submersão.
- Temos uma aplicação natural

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{O}_x \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

E de fato

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{sobre}} & \mathcal{O}_x \\ g & \searrow & \xrightarrow{\text{bijeção}} g \cdot x \\ & G/G_x & \end{array}$$

Assim,  $\mathcal{O}_x$  tem estrutura  $C^\infty$  tal que  $\mathcal{O}_x \stackrel{\text{dif}}{\cong} G/G_x$ .

E mais.  $\mathcal{O}_x \hookrightarrow M$  é uma imersão.

**Observação** Se  $M$  é  $G$ -variedade homogênea, então  $M \cong G/G_x$  para qualquer  $x \in M$ .

**Exemplo**

- $S^{n-1}$ . Qual é grupo de isotropia de  $e_n$ ?

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & O(n-1) & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de fato,

$$S^{n-1} \cong \frac{O(n)}{O(n-1)} = \frac{SO(n)}{SO(n-1)}$$

já que os dois agem transitivamente na esfera—lembre que a variedade não é mais que o quociente do grupo-estabilizador quando tem uma ação homogênea.

•

$$\mathbb{RP}^{n-1} = \frac{SO(n)}{O(n-1)}$$

Pode fazer uma leve meditação ao respeito. Agora tem que fixar uma linha, não só um ponto. Tem que fixar mais pontos, tem menos transformações. Ele colocou uma matriz assim:

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & O(n-1) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Porque pode refletir no ponto antípoda e tudo bem.

•

$$\mathbb{CP}^{n-1} = \frac{SU(n)}{U(n-1)}$$

**Fato geral**  $G$  grupo de Lie  $H \subseteq G$  subgrupo fechado, então  $G/H$  é  $C^\infty$ -variedade e  $G \rightarrow G/H$  é submersão.

Lembre: uma ação livre, própria... tem o Slice theorem, onde tem que pegar uma vizinhança das órbitas.

**Exemplo (Curiosidade)**  $V$  espaço vetorial,  $Fr_p(V) = \{(v_1, \dots, v_p) : \text{l.i.}\}$ . Tem uma ação  $GL(n) \curvearrowright Fr_p(V)$ . Pode calcular o grupo de isotropia  $H$ , e daí dar uma estrutura diferenciável a  $Fr_p(V)$ . Essa variedade se chama *variedade de Stiefel*.

### 14.3 De volta à geometria simplética

Queremos finalmente estudar órbitas coadjuntas e quocientes simpléticos.

Pegue um grupo de Lie  $G$  e lembre a ação coadjunta  $G \overset{\psi=Ad^*}{\curvearrowright} \mathfrak{g}^*$ . É assim:

$$\begin{aligned} (Ad^*)_g : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle (Ad^*)_g(\xi), u \rangle &= \langle \xi, Ad_{g^{-1}}(u) \rangle \end{aligned}$$

onde  $u \in \mathfrak{g}$  e  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . De fato,

$$\begin{aligned} Ad_g &= d_e I_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ I_g(a) &= ga g^{-1} \end{aligned}$$

**Observação**  $I_g : G \rightarrow G$  é um homomorfismo de grupos,  $\implies Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é homomorfismo de álgebra de Lie, ie.  $Ad_g[u, v] = [Ad_g u, Ad_g v]$ .

Também vimos que

$$\begin{aligned} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*) \\ u &\longmapsto u_{\mathfrak{g}^*} \end{aligned}$$

$$u_{\mathfrak{g}^*} = -\xi([u, \cdot])$$

onde  $T_{\xi}\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$

Agora. Pegue  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  fixo. então

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\eta} = \{\text{Ad}^*(\eta) : g \in G\} \subseteq \mathfrak{g}^*$$

$$T_{\xi}\mathcal{O} = \{u_{\mathfrak{g}^*}(\xi) : u \in \mathfrak{g}\}$$

**Definição**  $\xi \in \mathcal{O}, \omega_{\xi} \in \Lambda^2(T_{\xi}^*\mathcal{O}),$

$$\omega_{\xi}(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) := \langle \xi, [u, v] \rangle$$

Onde tem que mostrar que isso está bem definido. Para isso poderia usar que  $\langle \xi, [u, v] \rangle = -u_{\mathfrak{g}^*}(\xi)(x) \dots$

**Teorema (KKS=Kirillov-Kostant-Sourian)**  $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O})$  é simplética.

*Demonstração.* Seja  $\xi \in \mathcal{O}$

**Paso 1**  $\omega_{\xi}$  **está bem definido.**  $u, u' \in \mathfrak{g}$  tal que  $u_{\mathfrak{g}^*} = u'_{\mathfrak{g}^*}(\xi)$ , mais isso é equivalente a que  $\xi([u, \cdot]) = \xi([u', \cdot])$ .

**Paso 2**  $\omega_{\xi}$  **não degenerada:**

$$\begin{aligned} \omega_{\xi}(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) &= 0 \\ \implies \xi([u, v]) &= u_{\mathfrak{g}^*}(\xi)(x) = 0 \\ \iff u_{\mathfrak{g}^*}(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

**Paso 3**  $\xi \longrightarrow \omega_{\xi}$  **é suave.** Para isso vamos mostrar que  $\omega$  é G-invariante, ie. que  $(\text{Ad}^*)_g \xi = g\xi$ .

**Exercício** Numa variedade G-homogênea, uma forma G-invariante é suave.

$$\begin{aligned} (g^*\omega)_{\xi}(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \omega_{g\xi}(g_*(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi)), g_*(v_{\mathfrak{g}^*}(\xi))) \\ &= \omega_{g\xi}((\text{Ad}_g(u))_{\mathfrak{g}^*}(\xi), (\text{Ad}_g(v))_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\xi}(\langle (\text{Ad}^*)_g \xi, [\text{Ad}_g(u), \text{Ad}_g(v)] \rangle) \\ &= \omega_{\xi}(u_{\mathfrak{g}^*}(\xi), v_{\mathfrak{g}^*}(\xi)) \\ \implies g^*\omega &= \omega \end{aligned}$$

**Paso 4**  $\omega$  **é fechada.** Vamos usar invariância de novo. A invariância significa que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{u_{\mathfrak{g}^*}} \omega = i_{u_{\mathfrak{g}^*}} d\omega + di_{u_{\mathfrak{g}^*}} \omega \\ \implies i_{u_{\mathfrak{g}^*}} d\omega &= -d(i_{u_{\mathfrak{g}^*}} \omega) \end{aligned}$$

**Afirmção**  $i_{u_g^*} \omega = du$ . Já como é o dual do dual, podemos ver a  $u$  como uma função  $u \in \mathfrak{g} = \mathcal{C}_{\text{lin}}^\infty(\mathfrak{g}^*) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})$ .

Como  $u$  é linear,  $d|_\xi(\eta) = u(\eta)$ . Daí,

$$du|_\xi(v_g^*(\xi)) = u(v_g^*(\xi)) = \langle \xi, [u, v] \rangle = \omega_\xi(u_g^*(\xi), v_g^*(\xi)).$$

□

## 15 Aula 15

Na aula pasada:

- Ação coadjunta de uma grupo de Lie na sua álgebra de Lie:

$$G \curvearrowright^{\text{Ad}^*} \mathfrak{g}^* \quad \text{Ad}_g = dI_g, \quad I_g(a) = g a g^{-1}$$

- Numa órbita  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ ,

$$\omega(u_g^*(\xi), v_g^*(\xi)) := \langle \xi, [u, v] \rangle$$

para  $u, v \in \mathfrak{g}$ ,  $\xi \in \mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$ , é uma estrutura simplética em  $\mathcal{O}$ .

Hoje: exemplos concretos

### 15.1 Exemplos concretos (da ação coadjunta)

**Observação** Suponha que  $k = \langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma forma bilinear simplética não degenerada e Ad-invariante em  $\mathfrak{g}$ , ie.

$$\langle \text{Ad}_g(u), \text{Ad}_g(v) \rangle$$

Então podemos identificar órbitas adjuntas e coadjuntas assim:

$$\begin{aligned} k^\flat : \text{Ad} \curvearrowright \mathfrak{g} &\xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}^* \curvearrowright \text{Ad}^* \\ u &\longmapsto \langle u, \cdot \rangle \end{aligned}$$

já que é *equivariante*.

#### Exemplo concreto da órbita e ação coadjunta

$$\text{SO}(3) = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A A^T = \text{id}, \det A = 1\}$$

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A = -A^T\}$$

Lembre que a ação adjunta de  $SO(3)$  em  $\mathfrak{so}(3)$  é por conjugação. Agora, podemos identificar

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \\ [\cdot, \cdot] &\longmapsto (u, v) \mapsto u \times v\end{aligned}$$

Aqui a ação é por multiplicação de matrizes! I.e.,  $SO(3) \curvearrowright \mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$  é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_A(v) &= Av, & v \in \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{ad}_u(v) &= u \times v\end{aligned}$$

e além disso, se o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^3$  é  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , temos que essa ação é  $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{so}(3)}$ -invariante. Isso nos permite

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{so}(3) & \longrightarrow & \mathfrak{so}(3) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & (\mathbb{R}^3)^*\end{array}$$

Para entender as orbitas coadjuntas de  $SO(3)$  em  $\mathfrak{so}(3)$  basta analisar o caso em  $\mathbb{R}^3$ .

**Órbitas (co-)adjuntas em  $\mathbb{R}^3 (\cong \mathfrak{so}(3))$ .** De fato, isso vai ser um exercício. Vai concluir que a estrutura simplética nas órbitas dessa ação coincide com a estrutura simplética na esfera.

**Exercício** Mostre que a forma de área na esfera é um múltiplo constante da forma KKS. O múltiplo é  $1/r$  onde  $r$  é o raio da esfera.

### Outro exemplo concreto

$$\begin{aligned}G = U(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = \mathrm{id}\} \\ \mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) &= \{u \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : u = -u^*\}\end{aligned}$$

Aqui a ação adjunta  $U(n) \curvearrowright \mathfrak{u}(n)$  é por conjugação. Agora vamos estudar a ação coadjunta.

Temos um prouto interno  $\mathrm{Ad}$ -invariante em  $\mathfrak{u}(n)$ :

$$(u, v) \longmapsto \mathrm{tr}(u^k v) = -\mathrm{tr}(uv).$$

Portanto temos uma identificação

$$U(n) \curvearrowright U(n) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{u}(n)^* \curvearrowright U(n).$$

Ou seja, a forma de estudar isto é olhando para a ação de  $U(n)$ .

Note ainda que  $\mathfrak{u}(\mathfrak{n}) = i\mathcal{H}$  onde  $\mathcal{H} = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \xi = \xi^*\}$ . Com isso,

$$\mathrm{U}(n) \overset{\mathrm{Ad}^*}{\curvearrowright} \mathfrak{u}(\mathfrak{n})^* \cong \mathfrak{u}(\mathfrak{n}) \cong \mathcal{H} \overset{\mathrm{Ad}^*}{\curvearrowright} \mathrm{U}(n)$$

e então

$$\mathrm{Ad}_A^*(\xi) = A\xi^{-1}A.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi, \xi' \in \mathcal{H} \text{ estão na mesma órbita coadjunta } \mathcal{O} \\ \overset{\text{teo. espectral}}{\iff} \mathrm{spec}(\xi) = \mathrm{spec}(\xi') \end{aligned}$$

Ado  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Daí as órbitas são

$$\mathcal{O}_\Lambda = \{\xi \in \mathcal{H} : \mathrm{spec}(\xi) = \Lambda\}$$

e se chamam de *isoespetrais*.

Qual é a topologia dessa órbita?

Alguns casos

- $\lambda_1 < \lambda_2 = \dots = \lambda_n$  cada  $\xi \in \mathcal{O}_\Lambda$  é determinada pelo autoespaço de  $\lambda_1$ , ou seja, uma linha em  $\mathbb{C}^n$ . Defina  $\mu = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ . (Como o teorema espectral nos dá uma decomposição ortogonal com os autoespaços de uma transformação hermitiana, a ação de uma transformação  $\xi \in \mathcal{H}$  fica determinada por essa linha.) Daí,

$$\mathcal{O}_\Lambda \cong \mathbb{CP}^{n-1}$$

- $\lambda_1 = \dots = \lambda_k < \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n$ . Obtemos

$$\mathcal{O}_\Lambda = \mathrm{Gr}(k, n)$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ . Aqui  $\xi \in \mathcal{O}_\Lambda$  está determinada pelos autoespaços  $L_1 \sim \lambda_1, \dots, L_n \sim \lambda_n$ . Equivalentemente,

$$\begin{aligned} E_1 &= L_1 \\ E_2 &= L_1 \oplus L_2 && \text{aqui só } L_2 \text{ e nova info.} \\ &\vdots \\ E_j &= L_1 \oplus \dots \oplus L_j \\ &\vdots \\ E_n &= \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Então temos

$$L_1 = E_1 \subseteq \dots \subseteq E_n = \mathbb{C}^n$$

isso se chama de *variedade bandeira (completa)*.



**Projeto?** Relação entre geometria simplética e álgebra linear. Tem um teorema básico sobre matrizes hermitianas:

**Teorema (Schur-Horn)**  $\mathcal{O}_\Lambda$  uma variedade isoespectral (todos os caras hermitianos cujo espectro e esse  $\Lambda$ ),  $\{\xi \in \mathcal{H} : \text{spec}(\xi) = \Lambda\}$ . Considere o mapa diagonal

$$\text{diag} : \mathcal{O}_\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(É só pegar a diagonal da matriz e colocá-la num vetor.) Então, a imagem de  $\text{diag}$  é um poítopo convexo com vertices dados pelas  $n!$  permutações de  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

**Observação** Esse teorema pode ser generalizado (Atiyah-?) trocando  $\mathcal{O}_\Lambda$  por uma variedade simplética com a ação do toro maximal.

**Horn's problem** Descrever o espectro da soma de duas matrizes hermitianas com espectros conhecidos. Tem um artigo expositório (survey) de A. Knutson, *The symplectic and algebraic geometry of Horn's problem*. Também tem um artigo de pesquisa famoso com Terry Tao, e outro dele com Terry Tao e Chris Woodward (esses estão citados no survey).

## 15.2 Ponto de vista "Poisson"

Lembre:

### Estrutura de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

forma  $\mathbb{R}$ -bilinear antisimétrica ( $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ) Jacobi e Leibniz ( $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ ).

### Exemplos

- $\{\cdot, \cdot\} = 0$ .
- $(M, \omega)$  simplética,  $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$ .
- (Exemplo nem simplético nem trivial.)  $\mathbb{R}^3 = \{\xi = (x, y, z)\}$ ,

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, \nabla f(\xi) \times \nabla g(\xi) \rangle$$

onde  $\nabla$  denota gradiente.

Note que pela condição Leibniz do colchete de Poisson,  $\{f, \cdot\}$  é uma derivação, que sabemos que é equivalente a dizer que é um campo vetorial. Assim, para toda função  $f \in C^\infty(M)$  existe um campo vetorial Hamiltoniano. De fato, isso é consistente com o caso do colchete de Poisson associado a uma variedade simplética.

Pegue o Hamiltoniano

$$H(x, y, z) = \frac{x^2}{2I_1} + \frac{y^2}{2I_2} + \frac{z^2}{2I_3}$$

Daí vêm as equações de Euler-?

### 15.2.1 Descrição tensorial (do colchete de Poisson)

Considere  $\pi \in \Gamma(\Lambda^2(TM))$  e o colchete

$$\{f, g\} = \pi(df, dg).$$

Em coordenadas

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

### 15.2.2 Distribuição característica

Os vectores são vectores hamiltonianos de alguma função :

$$R \subseteq TM, \quad R_x = \{X_f(x) : f \in C^\infty(M)\}$$

### Teorema

- $R \subseteq TM$  é integrável.
- Cada folha tem estrutura simplética natural. Obtemos a *folheação simplética*. Ela determina, caracteriza, a estrutura de Poisson.

### 15.2.3 Uma classe especial de variedades de Poisson

Uma classe de estruturas de Poisson à que pertence o exemplo que nem é trivial nem é simplético.

$M = V$  espaço vetorial.  $C_{\text{lin}}^\infty(V) \subseteq C^\infty(M)$ . Note que  $\{\cdot, \cdot\}$  é linear. Suponha que  $\{C_{\text{lin}}^\infty(V), C_{\text{lin}}^\infty(V)\} \subseteq C_{\text{lin}}^\infty(V)$ . Note que  $C_{\text{lin}}^\infty(V) \cong V^*$ .

Por outro lado,  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \rightsquigarrow \{\cdot, \cdot\}$  é linear em  $\mathfrak{g}^*$ , e como  $\mathfrak{g} = C_{\text{lin}}^\infty(\mathfrak{g}^*) \subseteq C^\infty(\mathfrak{g})$ , existe um único  $\{\cdot, \cdot\}$  tal que

$$\{\cdot, \cdot\}|_{\mathfrak{g}} = [\cdot, \cdot]$$

Agora vamos ver a fórmula para o colchete de Poisson associado a  $[\cdot, \cdot]$ :

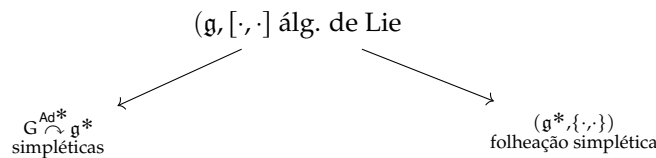
$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)] \rangle$$

para  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ .

### Conclusão

$$\text{estruturas de Poisson lineares em } V = \mathfrak{g}^* \longleftrightarrow \text{álgebra de Lie em } V^* = \mathfrak{g}$$

Pode ver que



de onde as órbitas coadjuntas correspondem às folhas. O importante aqui é saber que a folheação tem estrutura de Poisson.

## 16 Aula 16: ações Hamiltonianas e aplicação momento

Vimos

- $G$  grupo de Lie.  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$  orbitas coadjuntas possuem uma estrutura simplética canónica. Isso na verdade é um exemplo de um objeto mais geral que a gente vai discutir hoje: ações hamiltonianas.

### 16.1 Caso mais simples

Quando  $G = \mathbb{R}$ . Seja  $(M, \omega)$  simplética. Temos:

$\mathbb{R}$ -ação = fluxo  $\psi \rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(M)$  campo de vetores

#### Definição

- Uma  $\mathbb{R}$ -ação é *simplética* se  $\psi_t^* \omega = \omega \iff \mathcal{L}_X \omega = 0$ . ( $X$  é um campo simplético.)
- $\mathbb{R}$ -ação é *hamiltoniana* se  $X$  é hamiltoniano, i.e., existe uma função  $H$  tal que  $X = X_H$

Agora vamos generalizar isso.

### 16.2 Caso geral

#### Definição

- Uma  $G$ -ação é simplética se  $\psi_g^* \omega = \omega$  para toda  $g \in G$ , i.e.

$$\begin{array}{ccc} \psi : G & \longrightarrow & \text{Dif}(M) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \text{Simp}(M, \omega) \end{array}$$

- $G$ -ação é *hamiltoniana* se existe uma *aplicação momento*.

Vamos supor a existência de um mapa

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}^\infty(M) & f \\ \hat{\mu} \nearrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{g} & & X_f \\ \searrow & & \\ u & \mathfrak{X}(M) & \\ & \searrow & \\ & u_M & \end{array}$$

### Observação

- Se  $\hat{\mu}$  existe, não é unicamente determinado.
- Sempre podemos supor que  $\hat{\mu}$  é linear.

É equivalente dar  $\hat{\mu}$  como função  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$  ou como uma função

$$\begin{aligned}\mu : M &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \hat{\mu}(u)(x) &= \langle \mu(x), u \rangle\end{aligned}$$

Note que as quantidades nessa igualdade são números reais. No lado esquerdo, temos a função  $\hat{\mu}(u) \in C^\infty(M)$  avaliada no ponto  $x \in M$ . No lado direito, temos o funcional  $\mu(x) \in \mathfrak{g}^*$  avaliado no vetor  $u \in \mathfrak{g}$ .

**Definição** Seja  $G \curvearrowright (M, \omega)$  uma ação simplética. Dizemos que é *fracamente hamiltoniana* se existe  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  (equivalentemente,  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$  linear) tal que

$$i_{u_M} \omega = d \langle \mu, u \rangle \quad (u_M = X_{\hat{\mu}(u)}) \quad (2)$$

e a ação é *hamiltoniana* se, além disso, vale

$$\mu \text{ é equivariante} \quad (3)$$

isto é,  $\mu : G \curvearrowright M \longrightarrow \mathfrak{g}^* \curvearrowright^{Ad^*} G$ ,

$$\mu \circ \psi_g = (Ad^*)_g(\mu)$$

No caso abeliano, que é o caso dos fluxos, essa segunda condição de equivariância é trivialmente satisfeita.

### Terminologia

- $(M, \omega, \mu)$  é um *G-espaco hamiltoniano*.
- $\mu$  é *aplicação momento*.
- $G$  abeliano:  $\mu$  é  $G$ -equivariante  $\iff \mu$  é  $G$ -invariante.

**Exemplo** No caso abeliano, isso vira simplesmente escolher uma função que seja a hamiltoniana do campo vetorial associado à  $\mathbb{R}$ -ação. Isso é, a aplicação momento para uma  $\mathbb{R}$ -ação com campo gerador  $X$  é uma função  $H \in C^\infty(M)$  tal que  $X = X_H$ . Note que  $H$  é constante ao longo do fluxo de  $X_H$ .

(Agora?) veremos resultados de existência/obstrução para aplicações momento adiante. (Adiante.)

**Observação** Em termos do *comomento*  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ , a equivariância de  $\mu$  é equivalente a que

$$\begin{aligned} \iff \psi_g^*(\hat{\mu}(u)) &= \hat{\mu}(\text{Ad}_{g^{-1}}(u)) \quad \forall u \in \mathfrak{g} \\ \implies \mathcal{L}_{v_M}(\hat{\mu}(u)) &= \hat{\mu}([u, v]) \end{aligned}$$

pegando  $g = \exp(tv)$ ,  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ . Lembre que  $\{\hat{\mu}(u(v)), \hat{\mu}(v)\} = \mathcal{L}_{v_M}(\hat{\mu}(u))$ . i.e. G-equivariância implica que  $\hat{\mu}$  é um *antihomomorfismo* de álgebras de Lie. A conversa é verdade supondo que G é conexo.

**Observação** A primeira condição da definição diz que podemos achar a função que é o hamiltoniano do campo vetorial associado ao elemento em  $\mathfrak{g}$ . A segunda condição diz que esse mapa  $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$  é um antihomomorfismo de álgebras de Lie (ver diagrama)

### 16.3 Princípio de Noether

$(M, \omega, \mu)$  G-espaco hamiltoniano,  $H \in C^\infty(M)$  hamiltoniano. Então,

$$H \text{ é G-invariante } \iff \mu \text{ é preservada pelo fluxo hamiltoniano de } H$$

*Demonstração.*

$$\mathcal{L}_{X_H} \langle \mu, u \rangle = i_{X_H} d(\langle \mu, u \rangle) = i_{X_H} i_{u_M} \omega = -i_{u_M} \underbrace{i_{X_H} \omega}_{dH} = -\mathcal{L}_{u_M} H$$

□

(É um desses exemplos onde a definição faz o teorema trivial.)

### 16.4 Exemplos de ações Hamiltonianas

1.  $M = \mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$ .  $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$ .  $G = \mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^{2n}$  por traslação, ie.  $g \cdot (p, q) = (q + g, p)$ . Isso claramente é uma ação. Mas, como pode achar uma aplicação momento para ela?

**Geradores infinitesimais.**  $g = tu$ ,

$$u_M|_{(q,p)} = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Queremos ver se esse campo é hamiltoniano. De fato,

$$i_{u_M} \omega = i_{u_M} \left( \sum_i dq_i \wedge dp_i \right) = \sum_i u_i dp_i = d(\langle p, u \rangle)$$

## 2. Aplicação momento.

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (q, p) &\longmapsto p\end{aligned}$$

**Teorema (Noether)**  $H$  invariante por traslação  $\iff p$  é preservado pelo fluxo de  $H$

**Observação** Lembre do ensino medio onde tinhamos energia cinética mas potencial,  $K + V$ . O teorema diz que um potencial invariante por traslação iff momento linear é preservado.

## 16.5 De forma mais geral

Quando temos  $(M, \omega)$  e  $\omega = -d\theta$  é exata. Com uma ação  $G \curvearrowright^\psi (M, \omega)$ , temos  $\psi_g^* \theta = \theta$ , então  $\mathcal{L}_{u_M} \theta = 0$ . Nesse caso, a ação é hamiltoniana e a aplicação momento está dada por

$$\begin{aligned}M &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \mu, \theta \rangle &= i_{u_M} \theta\end{aligned}$$

*Demonstração.*

•

$$i_{u_M} \omega \stackrel{?}{=} d \langle \mu, u \rangle = di_{u_M} \theta = \underbrace{\mathcal{L}_{u_M}}_{=0} \theta - i_{u_M} d\theta = i_{u_M} \omega$$

•

$$\begin{aligned}(\text{Ad}^*)_g \mu &\stackrel{?}{=} \langle \mu \circ \psi_g, u \rangle = \psi_g^* (\langle \mu, u \rangle) = \psi_g^* (i_{u_M} \theta) = i_{(\psi_{g^{-1}})^* u_M} (\psi_g^* \theta) \\ &= i_{(\text{Ad}_{g^{-1}}(u))_M} \theta = \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}}(u) \rangle = \langle (\text{Ad}^*)_g \mu, u \rangle\end{aligned}$$

□

**Exemplo (Levantamiento cotangente)**  $M = T^*Q$ ,  $\omega_{\text{can}} = -d\alpha$ .

$$\begin{aligned}G \curvearrowright^\psi Q &\rightsquigarrow G \curvearrowright^{\hat{\psi}} T^*Q \\ \hat{\psi}_g &= (d\hat{\psi}_{g^{-1}})^*\end{aligned}$$

Y vimos que o levantamento cotangente preserva a forma tautológica, i.e.,  $(\hat{\psi}_g)^* \alpha = \alpha$ . Isso implica que temos uma ação hamiltoniana.

## Ação momento

$$\begin{aligned}\mu : T^*Q &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \langle \mu, u \rangle &= i_{u_M} \alpha\end{aligned}$$

**Simplificação:**  $\langle \mu(\xi), u \rangle = \xi(u_Q)$ .

Lembre como estava definida a forma tautológica:

$$\begin{array}{ccc}\xi \in & T^*Q \\ \downarrow & \downarrow \pi \\ x \in & Q\end{array}$$

onda simplesmente  $\alpha_x = \pi^* \xi$ .

## Exemplo (Outros exemplos)

- $SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{levantamento}} SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^6 \cong T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Com aplicação momento (dada pelo isomorfismo da álgebra  $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$  que já vimos?)

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3 \\ (q, p) &\longmapsto q \times p\end{aligned}$$

que se chama *momento angular*.

Produtos direitos, restrição a subgrupo (vai vir na lista).

Órbitas coadjuntas.  $G \curvearrowright (\mathcal{O}, \omega_{\text{KKS}}) \xrightarrow{\mu=i} \mathfrak{g}^*$ .

## 16.6 Aplicações momento: quando existem e o que fazer com elas

Nem sempre pode pegar um quociente simplético (a diferencia do mundo Riemanniano). No mundo simplético, temos que pegar conjuntos de nível da aplicação momento.

**Teorema (Marsden-Weinstein, Megre)**  $G \curvearrowright (M, \omega)$ , ação hamiltoniana,  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  aplicação momento. Suponha que  $0 \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular. Então, pela equivariância de  $\mu$  temos uma ação  $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$ :

$$\begin{aligned}x \in \mu^{-1}(0), \quad \mu(x) &= 0 \\ \mu(\psi_g(x)) &= \text{Ad}_g^* \underbrace{(\mu(x))}_{=0} = 0\end{aligned}$$

(isso significa que tem uma ação de  $G$  em  $\mu^{-1}(0)$ .) Suponha além disso que a ação é boa, i.e. *regular* (definido na seguinte seção), que  $\mu^{-1}(0)/G$  é suavem que a projeção é sumersão. Então, existe uma única forma  $\omega_{\text{red}}$  simplética em  $M_0$  tal que  $i^* \omega = \pi_0^* \omega_{\text{red}}$ .

Isso é, a forma simplética é o pullback de uma forma no quociente,

$$\begin{array}{ccc} G \curvearrowright \mu^{-1}(0) & \hookrightarrow & M \\ \downarrow \pi_0 & & \\ M_0 := \mu^{-1}(0)/G & & \end{array}$$

**Observação** Esse resultado tem muita história: primeiro o Meyer provou no Salvador, mas foi despercebido. Daí esse mesmo ano Marsden-Weinstein provaram. Mas também parece que tudo está relacionado com o Smale, que depois de mostrar a conjectura de Poincaré em dimensões altas estava tentando resolver o problema de três corpos (talvez usando redução simplética).

## 16.7 Quocientes de ações por grupos de Lie

### 16.7.1 Critério para ações regulares

$G \curvearrowright P$ ,  $G$  grupo de Lie,  $P$  variedade,  $G/P$  espaço de órbitas com topologia quociente.

$$\begin{array}{c} P \\ \downarrow \pi \\ P/G \end{array}$$

Mas esse espaço pode ser ruim. Por exemplo,  $G = \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  com  $(t, x) \mapsto e^t x$  gera um espaço de três órbitas:  $\mathbb{R}^-$  para  $x < 0$ ,  $\mathbb{R}^+$  para  $x > 0$  e  $0$  para  $x = 0$ . Mas qualquer aberto contendo  $0$  é todo  $\mathbb{R}$ : esse espaço nem é Hausdorff.

**Definição**  $G \curvearrowright P$  é *regular* se  $P/G$  é uma  $C^\infty$ -variedade e  $p \xrightarrow{\pi} P/G$  é submersão.

**Critério**  $G \curvearrowright P$ .

- *Livre*:  $\forall p \in P, G_p = \{e\}$  ( $g \cdot p = p \implies g = e$ ).
- *Própria*: a função

$$\begin{aligned} G \times P &\longrightarrow P \times P \\ (g, p) &\longmapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

é *própria* se a imagem inversa de compacto é compacto.

**Exemplo**  $G$  compacto  $\implies G$ -ação é própria.

**Teorema (Palais)**  $G \curvearrowright P$  livre, própria, então é regular.

*Idea da prova.* Queremos construir uma estrutura suave em  $P/G$ . Pegue um ponto. É uma órbita. Pegue uma subvariedade complementar, transversal, à órbita:  $T_x S \oplus T_x \mathcal{O} = T_x P$ .



Faça agir o grupo nesa variedade transversal localmente. O resultado de uma vizinhança da órbita. Essa vai ser a carta. Usar teorema da função inversa.

Também pode usar critério de Godement (isso é mais geral). Uma variedade  $M$ , uma relação de equivalência  $R \subseteq M \times M$  (pode ser foliação, ...). Então o quociente é variedade suave se e só se a relação de equivalência é fechada e mergulhada e a projeção a um dos fatores é sumersão. Então aqui a gente só prova que o mapa da definição de mapa próprio é um mergulho fechado.  $\square$

## 17 Aula 17: redução simplética (quociente simplético)

Lembre:

- **Ação hamiltoniana:** existe uma pliação momento  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  satisfazendo duas propriedades:  $i_{u_M} \omega = \partial \langle \mu, u \rangle$  e  $G$ -equivariância de  $\mu$ , i.e.  $\mu \cdot \psi_g = (\text{Ad}^*)_g \mu$

Hoje: Redução simplética (quociente simplético)

### 17.1 Uma proposição parecida ao exercício 5 da lista 3

Precisaremos considerar a seguinte situação:

$$\begin{array}{c} G \curvearrowright P \\ \downarrow \\ B = P/G \end{array}$$

que é uma ação *regular* (livre, própria).

**Pergunta** Quando  $\omega \in \Omega^2(P)$  é *básica*, ie. da forma  $\pi^* \bar{\omega}$ ,  $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$ ?

**Definição**  $\omega$  da forma  $\pi^* \bar{\omega}$  é dita *básica* (com respeito à ação ).

### 17.2 $G$ conexo

**Observação**  $G$  conexo  $\implies$  órbitas conexas  $\implies \pi$  é sumersão com fibras conexas. Nesse caso, (lista 3)

$$\omega \text{ é básica} \iff \begin{cases} \mathcal{L}_{u_M} \omega = 0, \\ i_{u_M} \omega = 0 \end{cases} \quad \forall u \in \mathfrak{g}$$

### 17.3 $G$ qualquer

Primeiro lembre que

**Proposição**

1.  $\omega$  é básica se e somente se  $\omega$  é **G-invariante** (em caso de  $G$  ser conexo isso é equivalente a  $\mathcal{L}_{u_M}\omega = 0$ ), e  $i_{u_M}\omega = 0$ , i.e.  $\ker \pi_* \subseteq \ker \omega$ .

E mais, se  $\omega = \pi^*\bar{\omega}$ , vale

2.  $d\omega = 0 \iff d\bar{\omega} = 0$
3.  $\bar{\omega}$  não degenerada  $\iff \ker \pi_* = \ker \omega$ .

### Proposição

1. Só tem um jeito de definir  $\bar{\omega}$ :

$$\bar{\omega}_b(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \omega_p(X, Y)$$

onde  $\pi_*(X) = \tilde{X}$  e  $\pi_*(Y) = \tilde{Y}$  e  $b = \pi(p)$ . Daí só tem que verificar que  $\bar{\omega}$  está bem definido:

- Não depende das escolhas de  $X$  e  $Y$ . Fixando  $p$ , temos que

$$X + \ker \pi_*, Y + \ker \pi_*$$

- Não depende de  $p$  tal que  $\pi(p) = b$ . Aqui usamos que  $\omega$  é  $G$ -invariante, **essa é a única diferencia com o exercício 5 da lista 3**. Temos

$$\pi(p) = \pi(p') \iff p = g \cdot p'$$

$$\omega_p(X, Y) = \omega_{p'}(X', Y')$$

$$X = d\psi_g(X'), \quad Y = d\psi_g(Y')$$

assim,  $\bar{\omega}$  está bem definido, é suave e  $\pi^*\bar{\omega} = \omega$

2. Como na lista 3
3. Como na lista 3.

## 17.4 Redução simplética

Pegue  $G \curvearrowright^\psi(M, \omega)$ , a aplicação momento,  $\chi \in \mathfrak{g}^*$ , e algumas outras coisas mais que não consegui escrever (é o cenário para:)

**Teorema (Marsden-Weinstein, Meyer)** Por cada elemento no dual da algebra de Lie, temos uma variedade pegando imagem inversa do mapa momento e quotientando.

$G \curvearrowright(M, \omega)$ ,  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Seja  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  valor regular de  $\mu$ , i.e.  $\mu^{-1}(\xi) \rightarrow M_\xi = \mu^{-1}(\xi)/G_\xi$ . Suponha  $G_\xi \curvearrowright \mu^{-1}(\xi)$  é uma subvariedade regular.

Então existe uma única forma simplética  $\omega_{\text{red}}$  em  $M_\xi = \mu^{-1}(\xi)/G_\xi$  tal que

$$\pi_\xi^* \omega_{\text{red}} = i_\xi^* \omega$$

ie,

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\xi) & \xleftarrow{i_\xi} & M^\omega \\ \downarrow \pi_\xi & & \\ (M_\xi, \omega_{\text{red}}) & & \end{array}$$

**Observação** A diferença com a outra vez que enunciamos o teorema é que quando pegamos um ponto arbitrário no  $\mathfrak{g}^*$  temos que ter cuidado com qual é o grupo que é invariante na variedade para quocientar: pode não ser o  $G$  tudo.

*Demonstração.* Só temos que checar que

$$i^* \xi(\omega) \in \Omega^2(\mu^{-1}(\xi)) \text{ é básica para } G_\xi\text{-ação}$$

ou seja, de acordo com a proposição, queremos ao fim de contas, que

- $G_\xi$ -invariante. (Isso é muito simples.)
- $\ker(\pi_\xi)_* = \ker(i_\xi^* \omega)$ . Só falta ver isso. Note que

$$T_x(G_\xi \cdot x) = \ker(\pi_\xi)_*|_x, \quad \ker(i_\xi^* \omega)|_x = T_x(\mu^{-1}(\xi)) \cap T(\mu^{-1}(\xi))^\omega$$

Agora vamos trabalhar com isso na forma de um lema:

**Lemma**

1.  $T_x(\mu^{-1}(\xi)) = T_x(G \cdot x)^\omega$ .
2.  $T_x(G_x \cdot x) = T_x(G \cdot x) \cap T_x(\mu^{-1}(\xi))$

Daí podemos pegar  $\omega$ -complemento na igualdade 1., daí substituímos na igualdade 2. e o teorema segue.

*do Lema.*

1. Isso é provar que  $\ker d_x \mu = T_x(G \cdot x)^\omega$ . Isso é verdade porque (propriedades do mapa momento)

$$\begin{aligned} x \in \ker d_x \mu &\iff \langle d\mu(X), u \rangle = 0 \quad \forall u \\ &\iff i_X d \underbrace{\langle \mu, u \rangle}_{i_{u_M} \omega} = 0 \quad \forall u \\ &\iff X \in T_x(G \cdot x)^\omega \end{aligned}$$

2. Por um lado,

$$T_x(G_\xi \cdot x) = \{u_M(x) | u \in \mathfrak{g}\} = \{u_M(x) | u \text{ satisfaz } u_{\mathfrak{g}^*}(\xi) = 0\}$$

Por outro lado, (equivariância de  $\mu$ )

$$T_x(G \cdot x) = \{u_M(x) | u \in \mathfrak{g}\}$$

$$\ker d_*\mu = T_x(\mu^{-1}(\xi)) = \{X | d\mu(X) = 0\}$$

Intersectando ambos obtemos

$$\{u_M(x) | d\mu(u_M(x)) = 0\}$$

e pela equivariância de  $\mu$ ,  $d\mu(u_M(x)) = 0 \iff u_{\mathfrak{g}*}(\xi) = 0$ .

□

□

## 17.5 Alguns comentários sobre o teorema

**Para que serve?** Por exemplo, para diminuir os graus de liberdade de um sistema Hamiltoniano em uma variedade. Também pode ser que o espaço de moduli seja esse quociente.

**Em vários casos a redução é "singular"** É quando a ação não é regular, não tem quociente suave. Aqui pode usar "espaços estatificados". Também pode usar um approach mais algébrico: redução "homológica". Isso último leva aos métodos BRST e BV.

**Exercício**  $x \in M$ ,  $\mathfrak{g}_x \subseteq \mathfrak{g}$ , então vale

$$\text{Ann}(\mathfrak{g}_x) = \text{img } d_x\mu$$

daí,  $\xi$  é um valor regular  $\implies \mathfrak{g}_x = \{0\} \implies G_x$  é discreta  $\implies G_\xi \curvearrowright \mu^{-1}(\xi)$  é localmente livre. Se  $G_\xi$  é compacto,  $M_\xi$  é um *orbifold simplético*.

**Outro comentário**  $\xi$  valor regular,  $M_\xi = \mu^{-1}(\xi)/G_\xi$  onde  $G_\xi$  age livremente em  $\mu^{-1}(\xi)$ .

$$\begin{aligned} \dim M_\xi &= \dim \mu^{-1}(\xi) - \dim G_\xi \\ &= \dim M - \underbrace{\dim \mathfrak{g}^*}_{\dim G} - (\dim G - \dim \mathcal{O}_\xi) \\ &= \dim M + \dim \mathcal{O}_\xi - 2 \dim G \end{aligned}$$

**Shift trick (Vai vir na lista)** ... A redução simplética depende da escolha do  $\xi$ . Se pegamos  $\xi, \xi'$  na mesma órbita coadjunta, então  $M_\xi \cong M_{\xi'}$ . Tem mais: bota tudo em um espaço mais grande para mostrar que todo quociente é um quociente do zero naquele espaço maior... vai vir na lista

**Hamiltoniano em  $M$  da hamiltoniano em  $M_\xi$**  Isso mem

## 17.6 Exemplos simples

**Um exemplo muito simples**

A reta agindo numa variedade simplética, que é o fluxo de algum campo  $X$ . A aplicação momento é o Hamiltoniano  $H \in C^\infty(M)$ ,  $X_H = X$ , a aplicação momento é  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Isso daqui é uma ação hamiltoniana no caso mais simples.

Agora pegue um valor regular de  $H$ ,  $\xi$ . Se a ação  $\mathbb{R} \curvearrowright H^{-1}(\xi)$  é boa, obtemos que  $H^{-1}(\xi)/\mathbb{R}$  é uma variedade simplética com  $\omega_{\text{red}}$ .

**Exemplo** Muito parecido: considere  $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ , a ação do círculo assim:

$$e^{i\theta}(z_0, \dots, z_n) = (e^{i\theta}z_0, \dots, e^{i\theta}z_n)$$

Agora, pelo teorema da aplicação momento (?), temos que

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mu(z) &= -\frac{1}{2}\|z\|^2 + \underbrace{1/2}_{\text{opcional}} \end{aligned}$$

assim,  $\mu^{-1}(0)/\mathbb{S}^1 = \mathbb{CP}^n$ ,  $\omega_{\text{red}}$ , i.e., **pelo teorema de Marsden-Weinstein, o  $\mathbb{CP}^n$  tem uma estrutura simplética.**

**Mesmo mas mais geral** Agora pegue

$$e^{i\theta}(z_0, \dots, z_n) = (e^{ik_0\theta}z_0, \dots, e^{ik_n\theta}z_n)$$

Considere caso  $n = 1$ , temos

$$e^{i\theta}(z_0, z_1) = (e^{k\theta}z_0, e^{i\theta}z_1)$$

obtemos

$$\mu(z_0, z_1) = -\frac{1}{2}(k\|z_0\|^2 + \|z_1\|^2)$$

Pegue  $\xi < 0$  valor regular. Se  $k = 1$  obtemos um quociente que é topologicamente uma esfera, mas tem uma singularidade: a *gota de lágrima*—uma esfera com um pontinho singular.

## 18 Aula 18

Lembre:

- Ação de um grupo de Lie numa variedade simplética, o mapa momento  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ .
- Redução simplética
- Exemplos

## 18.1 Outros exemplos

### 18.1.1 Reduções de fibrados cotangentes

Pegue uma variedade com uma ação de grupo de Lie,  $Q \curvearrowright G$ , a gente já viu (quando?) passa para o levantamento cotangente obtendo uma ação  $G \curvearrowright T^*M$ . Se a ação em  $Q$  é livre e própria, também a ação no cotangente.

O mapa momento em  $T^*Q$  é

$$\begin{aligned}\mu : T^*Q &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \xi_x &\longmapsto \mu(\xi_x) \\ \langle \mu(\xi_x, u) \rangle &:= \xi(u_Q(x))\end{aligned}$$

Então, quando reduzimos no  $\xi = 0$  obtemos

$$(T^*Q)_{\xi=0} = T^*(Q/G)$$

Mas isso é mais interessante para  $\xi \neq 0$ . Considere a ação de um grupo de Lie  $G$  nele mesmo pela multiplicação a esquerda,  $G \curvearrowright G$ . Note que  $G/G = \text{pt}$ .

A aplicação momento é

$$\begin{aligned}\mu : T^*G &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \xi &\longmapsto (d_e R_g)^*(\xi)\end{aligned}$$

Nesse caso, todo  $\xi$  é valor regular e

$$\mu^{-1}(\xi) = \{(g, \xi^R|_g), \forall g \in G\}$$

Que é basicamente pegar uma forma e espalhar  $\xi$  por todos lados usando o grupo. Fazendo redução obtemos

$$\mu^{-1}(\xi)/G_\xi \cong G/G_\xi \cong \mathcal{O}_\xi$$

**Exercício (Vai vir na lista)** De fato,  $\omega_{\text{red}} = \omega_{\text{KKS}}$ . Mas ainda, toda órbita KKS pode ser vista desse jeito.

**Observação** Lembre que toda variedade de Poisson tem uma decomposição em folhas simpléticas (isso é totalmente geral). No caso de  $\mathfrak{g}^*$ , essas folhas são as órbitas coadjuntas. Aqui temos que de fato  $\mathfrak{g}^* = (T^*G)/G$  quando pegamos o quociente do grupo de Lie  $G$  levantado agindo em  $T^*G$ .

Isso é mais geral. Pode ter qualquer variedade simplética com uma ação Hamiltoniana boa. Pega quociente:  $M/G$  não tem por que ser simplético, mas ele tem uma estrutura de Poisson, e então uma decomposição em folhas que são simpléticas. O interessante é que essas folhas são da forma  $\mu^{-1}(\xi)/G_\xi$ , i.e. são órbitas coadjuntas.

### 18.1.2 Um espaço de moduli

Considere alguns caras positivos assim:  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ . Para  $\lambda > 0$ , defina  $\mathbb{S}_\lambda^2$  a esfera untária com forma simplética  $\lambda \omega_{\text{area}}$ . Considere a variedade  $M$  seguinte com a ação seguinte:

$$\mathrm{SO}(3) \curvearrowright \underbrace{\mathbb{S}_{\lambda_1}^2 \times \dots \times \mathbb{S}_{\lambda_n}^2}_M$$

e a hamiltoniana (tu pode ver que isso é certo)

$$\begin{aligned} \mu : M &\longrightarrow \mathfrak{so}(3)^* = \mathbb{R}^3 \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \end{aligned}$$

e agora considere o espaço reduzido em  $\xi = 0$ ,

$$m_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} := \mu^{-1}(0)/\mathrm{SO}(3) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{S}^2)^n \mid \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0\} / \mathrm{SO}(3)$$

isso tá bom pelo teorema. Vai ser o *espaço de polígonos espaciais em  $\mathbb{R}^3$* .

**Definição** Um *polígono espacial em  $\mathbb{R}^3$*  é uns pontos  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^3$ , lados  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$  que conectam vértices ciclicamente. Os  $\ell$ s são as diferencias dos  $v$ s. A condição do cara fechar é  $\ell_1 + \dots + \ell_n = 0$

Consideremos o espaço de polígonos a menos de movimentos rígidos (traslações, rotações) no  $\mathbb{R}^3$ . Agora note

- Por traslação, podemos assumir que  $v_1 = 0$ .
- Polígonos com  $v_1 = 0$  são representados pelos lados  $\ell_1, \dots, \ell_n$  a menos de rotação.
- Defina  $\lambda_i = \|\ell_i\|$ ,  $x_i = \ell_i/\lambda_i$ .
- obtemos  $m_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ . É simplético e suave a menos de polígonos degenerados. Topologia dele: Kavitch Millson. "Moment maps and GIT quotients": C. Roodwand. Até é Kähler. Relação com outros espaços moduli como espaço de conexões planas na esfera com furos. Tem ação tórica. São exemplos de variedades quiver (representações).

O ponto de tudo isso é que esse espaço aparece como uma redução simplética relativamente simples.

### 18.1.3 Um exemplo de mecânica

Lembre que tudo isso vem do trabalho do Smale quando ele tava estudando mecânica celeste.

Considere o problema de dois corpos. O espaço de fase de dois partículas é

$$Q = \{(r_1, r_2), r_i = (q_i^1, q_i^2, q_i^3)\} = \mathbb{R}^6$$

Daí,

$$M = T^*Q = \mathbb{R}^{12} = \{(r_1, r_2, p_1, p_2)\}$$

vamos denotar a estrutura canônica assim:  $\omega = \sum dr_j dP_j$ .

Vamos botar uma ação:

$$G = \mathbb{R}^3 \curvearrowright Q = \mathbb{R}^6$$

$$(r_1, r_2) \mapsto (r_1 + g, r_2 + g), \quad g \in G = \mathbb{R}^3$$

O levantamento cotangente da:

$$(r_1, r_2, P_1, P_2) \xrightarrow{g} (r_1 + g, r_2 + g, P_1, P_2)$$

E a aplicação momento é

$$\mu : \mathbb{R}^{12} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r_1, r_2, P_1, P_2) \mapsto P_1 + P_2$$

O que é  $\mu^{-1}/G_\xi$ ?

Vamos fazer uma mudança de coordenadas em Q (um difeomorfismo):

$$\mathbb{R}^6 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^6$$

$$(r_1, r_2) \mapsto (r_{\text{cm}}, r_{\text{rel}})$$

onde

$$r_{\text{cm}} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad r_{\text{rel}} = r_1 - r_2$$

são o centro de massa e a posição relativa.

Você calcula que o levantamento cotange é

$$\mathbb{R}^{12} \longrightarrow \mathbb{R}^{12}$$

$$(r_1, r_2, P_1, P_2) \mapsto \left( r_{\text{cm}} := r, r_{\text{rel}} := \bar{r}, P_1 + P_2 := P, \frac{1}{m_1 + m_2} (m_2 P_1 - m_1 P_2) := \bar{P} \right)$$

e

$$\omega = dr \cdot dP + d\bar{r} \cdot d\bar{P}$$

Temos uma ação levantada certo, as coordenadas dela nas novas coordenadas é

$$(r, \bar{r}, p, \bar{p}) \xrightarrow{g} (r + g, \bar{r}, p, \bar{p})$$

A ideia é usar um sistema de coordenadas com o centro de massa na origem, e isso simplifica o negocio. Pode reduzir a dimensão para  $\mathbb{R}^6$ .

Agora vamos botar um hamiltoniano para transportar tudo ao reduzido. Lembre a redução de hamiltoniano é quando temos uma função  $H \in C^\infty(M)$  que é G-invariante, ie. constante ao longo das órbitas, assim está bem definido no quociente  $\mu^{-1}(\xi)/G$ . Pegue o Hamiltoniano

$$H(r_1, r_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{|P_1|^2}{m_1} + \frac{|P_2|^2}{m_2} \right) - \frac{K m_1 m_2}{|r_1 - r_2|}$$



é um hamiltoniano classico para o problema de dois corpos. Note que é  $\mathbb{R}^3$ -invariante olhando a definição da ação que dimos acima. Como ele vira no quociente? Assim:

$$H_{\text{red}}(\bar{r}, \bar{P}) = \frac{1}{2} \frac{|P|^2}{\bar{m}} - \frac{K(m_1 + m_2)\bar{m}}{\bar{r}}$$

Alí o que a gente consigui foi levar um problema de dois corpos a um problema de um corpo. Mas ainda, nesse quociente tem uma  $SO(3)$ -ação, assim pode reduzir ainda mais, e resolver completamente o problema de dois corpos.

#### 18.1.4 Um exemplinho de mecânica com geometria riemanniana

Porque achar geodésica é um problema de mecânica.  $G$  grupo de Lie,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  uma métrica invariante à esquerda.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é determinada um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\mathfrak{g}$ , que por sua vez é determinado por um operador simétrico autoadjunto  $I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  de maneira que

$$\langle u, v \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle I(u), I(v) \rangle$$

i.e. é o mesmo ter esse produto interno que ter a outra coisa.

Considere  $G \curvearrowright G$ ,  $G \curvearrowright T^*G$ ,  $\mathcal{O}_{\xi} = \mu^{-1}(\xi)/G_{\xi}$  para  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ .

O sistema hamiltoniano reduzido em  $\mathcal{O}_{\xi}$  é

$$\dot{\eta}(t) = -\text{ad}_{I^{-1}(\eta(t))}^*(\eta(t))$$

que é a equação de Euler, uma versão reduzida das equações das geodésicas.

$$dH_{\text{red}}|_{\eta} = I^{-1}(\eta)$$

$$H_{\text{red}} = \frac{1}{2}(\eta(I^{-1}(\eta)))$$

a parte da mecânica entra quando consideramos  $G = SO(3)$ . Pense num corpo que tá voando por todos lados mas tem um ponto fixo num lugar. A solução desse corpo rígido é dada por geodésicas no  $SO(3)$ .

O que acontece é que

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad I_i > 0$$

é o *momento de métrica* cujos autovalores se chamam de *valores principais*?. Esse cara é o que vai determinar a métrica. No caso desse corpo rígido, temos a *equação de Euler para o corpo rígido*:

$$\frac{d\eta_i}{dt}(t) = (I_k^{-1} - I_j^{-1})\eta_j\eta_k$$

$$\dot{\eta}(t) = \eta \times I^{-1}\eta$$

que são esferas. As soluções da equação de Euler é um negocio bem bonito: pega uma esfera, tem 6 pontos de equilíbrio que estão em pares, dois em cada autoespaço. Quatro estáveis, dos instáveis. *É como rodar um livro no eixo diagonal...*

**Observação** Tem muitíssimas EDPs relacionadas a equações reduzidas de geodésicas quando  $G$  é de dimensão infinita. Por exemplo  $G = \text{Dif}_{\text{Vol}}(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Por exemplo a de Burger aparece com  $M = \mathbb{S}^1$ .

## 19 Aula 19: comentários de possíveis projetos

Lembre:

- Ações hamiltonianas e redução.
- Aplicação momento, estrutura simplética nas órbitas da ação coadjunta.
- Diversos exemplos.

Hoje:

- Super exemplo.
- $G = \mathbb{T}^n$  toro.

### 19.1 Super exemplo (de ação hamiltoniana e redução simplética)

Advertencia: os objetos não tem sentido mas são expressões de objetos geométricos.

**Objetos.**  $\Sigma$  variedade compacta conexa orientada,  $G$  grupo de Lie,  $\mathfrak{g}$  munida de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Ad-invariante.

- $\mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ . Formas que tomam valores em  $\mathfrak{g}$  em lugar de em  $\mathbb{R}$ . **Interpretação geométrica:** espaço das conexões em

$$\begin{array}{c} \Sigma \times G \\ \downarrow \\ \Sigma \end{array}$$

**Observação (Conexões)**

$$\begin{array}{c} G \curvearrowright P \\ \downarrow \pi \\ B = P/G \end{array}$$

com ação livre, própria. Temos o *fibrado vertical*, que  $\ker \pi$ , o espaço tangente às fibras de  $\pi$ . Uma *conexão* é a escolha de um subfibrado  $H$  que complemente o fibrado vertical, dizemos que é *horizontal*, e que é  $G$ -invariante. Em soma,  $TP = V \oplus H$  e  $g_* H = H$ .

A ideia é que o fibrado horizontal permite conectar fibras, transporte paralelo.

Comparando com a noção de conexão em geometria riemanniana, uma conexão em

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

no sentido riemanniano, é uma conexão no sentido daqui em

$$\begin{array}{c} \text{Fr}(E) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

onde  $\text{Fr}(E)$  é o bundle de bases das fibras de  $E$ , que é um fibrado principal com a ação de  $\text{GL}(n)$ .

A ideia será que os núcleos das formas em  $\mathcal{A}$  são conexões. Em fim, é só para manter em mente que esse  $\mathcal{A}$  define conexões em  $\Sigma \times G$ .

- $\mathcal{G} = C^\infty(\Sigma, G)$ . **Interpretação geométrica:** é um *grupo de calibre* quando temos

$$\begin{array}{ccc} G \curvearrowright P & \longrightarrow & P \curvearrowright G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\text{id}} & \Sigma \end{array}$$

- $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{A}$ ,  $gA = \text{Ad}_g(A) - g^*\theta^R$ . **Interpretação geométrica:** se chama de *ação de calibre*. São transformações muito naturais no mundo dos grupos de calibre.
- $\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$ . Dada por  $A \mapsto dA + \frac{1}{2}[A, A]$ . Aqui  $[A, A](X, Y) := [A(X), A(Y)] - [A(Y), A(X)]$

**Observação (Curvatura)** A importância da conexão e conectar fibras. É um levantamento de campos vetoriais na base. Como muda o colchete? Isso é o que mede a curvatura. Se a curvatura é zero, é plana, a distribuição no espaço total é integrável.

**Portanto**  $\mathcal{A}$  é uma variedade simplética com a forma, para  $A \in \mathcal{A}$  e  $u, v \in T_A \mathcal{A} \cong \mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$

$$\omega_A(u, v) = \int_{\Sigma} \langle u, v \rangle$$

onde definimos  $\langle u, v \rangle(X, Y) = \langle u(X), v(Y) \rangle - \langle u(Y), v(X) \rangle$  usando o produto interno que botamos em  $\mathfrak{g}$ .

**Identificações.**

- $\text{Lie}(\mathcal{G}) = \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g})$ .
- $\text{Lie}(\mathcal{G})^* = \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$ .

**Teorema (Atiyah-Bott)**  $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{A}$  é hamiltoniana. A aplicação momento é

$$\text{curv} : \mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}) \longrightarrow \text{Lie}(\mathcal{G})^* = \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$$

Fazendo redução, de acordo com o teorema de Marsden-Weinstein,

$$\text{curv}^{-1}(0) / \mathcal{G} = \mathcal{M}$$

é um espaço simplético, o espaço moduli de conexões planas.

**Onde é que isso aparece?**

- Por qué esse espaço tem dimensão finita? porque

$$m = \frac{\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)}{G}$$

- $\mathcal{M}$  é o espaço de fase de *Chern-Simons* (física).
- Em topologia, esse espaço das invariantes de 3-variedades. Corta uma 3-variedade. A interseção é uma superfície. Calcula o seu  $m$ . Olha para as conexões que são restrição de conexões planas em  $M^3$  de um lado do plano com que cortou. Isso é uma subvariedade lagrangiana de  $\mathcal{M}$ . Outro lado. Interseção das lagrangianas é invariante simplético.
- Se a variedade tem bordo,  $\mathcal{M}$  é só de Poisson. Tem um negócio que não consegui entender.
- Também pode botar mais estrutura. Em alguns casos  $\mathcal{M}$  é Kähler.

## 19.2 Aplicação de redução: cortes simpléticos

Pegue uma variedade simplética conexa com uma ação hamiltoniana de  $S^1$ .  $S^1 \curvearrowright (M, \omega) \xrightarrow{H} \mathbb{R}$ . Considere  $M \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ . Alí também pode agir com  $S^1$  onde  $S^1$  é rotação em  $\mathbb{C}$ . Você vai ver na lista que em casos assim, a aplicação momento é  $H(x) - \frac{1}{2}|z|^2$ .

Agora pode olhar para

$$\mu^{-1}(\xi) = \underbrace{H^{-1}(\xi) \times \{0\}}_{\cong H^{-1}(\xi)} \sqcup \left( \bigsqcup_{r>0} H^{-1}(\xi + r) \times \left\{ \frac{1}{2}|z|^2 = r \right\} \right)$$

Esse segundo conjunto é também  $= \{(x, z) | H(x) > \xi, z = e^{i\theta} \sqrt{H(x) - \xi}\} \cong \{H > \xi\} \times S^1$ .

Agora vamos supor que  $\xi$  é um valor regular de  $H$ , e  $S^1 \curvearrowright H^{-1}(\xi)$  é livre, própria. Mesmo para  $\mu$ . Se consigo fazer redução simplética para  $H$  e  $(M, \omega)$ , vou conseguir também para  $M \times \mathbb{C}$ . Vamos:

$$\mu^{-1}(\xi)/S^1 \cong H^{-1}(\xi)/S^1 \sqcup \left( \frac{\{H > \xi\} \times S^1}{S^1} \right) \cong M_\xi \sqcup \{H > \xi\}$$

Qué é que estou dizendo? A variedade simplética  $\mu^{-1}(\xi)/S^1$  é uma união de duas coisas: níveis da aplicação momento, e, no bordo  $\mu^{-1}(\xi)$  fazemos redução para ter também estrutura simplética. Também poderíamos olhar para níveis que estão abaixo de  $\xi$ . Uma variedade podemos chamar  $M_{\geq \xi}$  e a outra  $M_{\leq \xi}$ . Então separamos  $M$  em duas variedades ao longo de  $\mu^{-1}(\xi)$ .

**Colagem simplética (Symplectic glueing).** O Eugene Lerman introduziu essa operação muito linda para desfazer o processo anterior (acho, não será que o Lerman introduz o corte simplético mesmo?). Isso é chamado *blow-up simplético*, onde tiramos não um ponto senão uma bola e pegamos o fibrado de Hopf...

### 19.3 Dois resultados de ações hamiltonianas por toros

Lembre: tudo isso é o que a gente não vai falar.

Vamos falar rapidamente de convexidade.  $(M, \omega)$  simplética, conexa e compacta. Ação hamiltoniana de algum toro  $\mathbb{T}^n \curvearrowright (M, \omega)$   $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Teorema (Atiyah/Guilleimien-Steinberg)** A imagem da aplicação momento é convexa.

De fato, a imagem da aplicação momento é o fecho convexo da imagem dos pontos fixos da ação. Esse é o *politopo momento*.

**Exemplo (Que de fato motivou isso, Horn-Schur)** Pegue  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e olha as matrizes hermitianas que tem esse especto,  $\mathcal{O}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ . Quer saber a diagonal, ela fica na envoltura conexa dos  $\lambda_i$  (acho).

### 19.4 Variedade simpléticas tóricas

**Definição** *Variedade simplética tórica:*  $M^{2n}$  variedades conexas compactas com ação hamiltoniana (efetiva=qualquer elemento do grupo move pelo menos um elemento) de  $\mathbb{T}^n$ .

**Exemplo**

- $S^1 \curvearrowright S^2$  por rotações aplicação momento é função altura (polo norte, polo sur). O politopo momento é o intervalo  $[-1, 1]$ .
- $\mathbb{T}^2 \curvearrowright \mathbb{CP}^2$  dada por

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})([z_1 : z_2 : z_3]) = ([z_0, e^{i\theta_1}z_1, e^{i\theta_2}z_2])$$

a aplicação momento resulta ser

$$\mu([z_0, z_1, z_2]) = -\frac{1}{2} \left( \frac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}, \dots \right)$$

e o politopo momento é um triangulzinho conectando  $(-1/2, 0)$  e  $(0, -1/2)$ .

Para variedades tóricas,

- É possível caracterizar os politopos que são imagem de aplicações de momento, se chamam de *politopos de Delzant*.
- As variedades simpléticas tóricas estão classificadas por politopos de Delzant

### Teorema (Delzant)

$$\{\text{variedades simpléticas tóricas}\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{politopos de Delzant}\}$$

**Observação** Cortar variedades simpléticas como falamos antes corresponde com cortar o politopo!

**Observação** Olha para um livro de Guillemin. A Anna pede para fazer muitos exercícios se quer entender bem. Também o Audin.

## 20 Aula 20: Existência e unicidade de aplicações de momento

**Projeto final** Para este domingo: tema e uma ou duas referências. Aproximadamente um mês depois (22 novembro): primeiro rascunho. Última semana de novembro e primeira de dezembro: apresentações. Uns 40 minutos de apresentação. Não tem que apresentar tudo que está no trabalho escrito.

### 20.1 A primeira obstrução : um diagrama comutativo

Lembre:

- $G \curvearrowright (M, \omega)$  ação simplética é *Hamiltoniana* se existe  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  ou, equivalentemente,  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$  tal que
  1. (Diagrama comutativo aqui embaixo)
  2. (Seguinte seção)

Queremos achar uma aplicação  $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$  tal que

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(M) & \\ \hat{\mu} \nearrow & & \searrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{X}(M) \end{array}$$

onde o mapa  $C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é  $f \mapsto X_f$ .

**Proposição** Existe  $c_1 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 \otimes H^1(M)$  tal que

$$\hat{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M) \text{ satisfazendo o diagrama anterior} \iff c_1 = 0$$

onde  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 \subset \mathfrak{g}^*$  é o anulador do comutador de  $\mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* A existência de  $\hat{\mu}$  é equivalente a que a imagem do mapa em baixo seja de campos hamiltonianos: pegue uma base de  $\mathfrak{g}$ , chega a campos hamiltonianos e escolhe uma função para cada um deles. Alí já determinou um  $\hat{\mu}$ .

Considere

$$\begin{array}{c} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_\omega(M)/\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M) \cong H^1_{\text{dR}}(M) \\ \searrow \Psi \nearrow \end{array}$$

Note que  $\bar{\psi}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$  já que a gente viu no princípio do curso que  $\mathfrak{X}_\omega(M), \mathfrak{X}_\omega(M) \subseteq \mathfrak{X}_{\text{HAM}}(M)$ . Daí a aplicação induzida é

$$\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \xrightarrow{c_1} H^1(M)$$

se e somente se

$$c_1 \in \left( \frac{\mathfrak{g}}{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} \right)^* \otimes H^1(M)$$

já que em geral  $T : V \rightarrow W$  linear se e somente se  $T \in V^* \otimes W$

□

**Observação** Uma ação simplética fracamente hamiltoniana satisfaz isso (acho).

### 20.1.1 Interpretação cohomologica

$\mathfrak{g}$  álgebra de Lie,

$$\begin{aligned} C^k &= \Lambda^k \mathfrak{g}^*, & \delta : \Lambda^k \mathfrak{g}^* &\rightarrow \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^* \\ \delta_C(u_0, u_k) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle [u_i, u_j], u_1, \dots, \hat{u}_i, \hat{u}_j, \dots, u_k \rangle \end{aligned}$$

que é o operador de *Chavalley-Eilenberg*.

**Observação**  $\Lambda^k \mathfrak{g}^* \cong \Omega^k(G)^G \subseteq \Omega^k(G)$  onde essas na esquerda são as formas  $G$ -invariantes. Quando  $G$  é compacto tem igualdade

**Exercício**  $\delta^2 = 0 \iff$  identidade de jacobi em  $[\cdot, \cdot]$ . Desse jeito é equivalente dar um espaço vetorial que a forma colchete seja jacobi  $(V, [\cdot, \cdot])$  ou pedir que  $\Lambda^\bullet V^*$  tenha uma derivação  $\delta$  tal que  $\delta^2 = 0$

**Observação**  $\delta : \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$  é dual (com signo  $-$ ) de  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ,

$$\delta c[u, v] = -c([u, v])$$

tem o colchete tem delta, tem delta tem colchete, é só isso.

**Definição**

$$H^2(\mathfrak{g}) = \frac{\ker \delta}{\text{img } \delta}$$

### Observação

- Em grau zero  $\delta$  é zero:  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}^*, \delta = 0$
- Em grau um,  $\delta : \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}^*, \delta c(u, v) = -c([u, v])$ .

Assim,

$$H^1(\mathfrak{g}) = \ker \delta = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0$$

Por tanto, o resultado da seção anterior pode ser escrito como

$$c_1 \in H^1(\mathfrak{g}) \otimes H^1(M)$$

## 20.2 A segunda obstrução: equivariância

A outra condição da aplicação momento é que

$$\hat{\mu}([u, v]) = -\{\hat{\mu}(u), \hat{\mu}(v)\}.$$

Vamos supor que conseguimos resolver a primeira obstrução. Vimos que não existe só uma função. Agora vamos ver como fazer uma escolha de  $\hat{\mu}$  que permita satisfazer a segunda obstrução.

Fixe  $\hat{\mu}$  satisfazendo a primeira obstrução. Considere a *falha*:

$$c_2^\mu = \hat{\mu}([v, u]) - \{\hat{\mu}(u), \hat{\mu}(v)\} \in C^\infty(M)$$

for  $u, v \in \mathfrak{g}$ .

### Observação

$$X_{c_2^\mu(u, v)} = \underbrace{\psi([v, u])}_{=[\psi(u), \psi(v)]} - \underbrace{X_{\{\hat{\mu}(u), \hat{\mu}(v)\}}}_{[X_{\hat{\mu}(u)}, X_{\hat{\mu}(v)}]} = 0$$

así que  $c_2^\mu(u, v)$  é constante.

Se  $M$  é conexo,  $c_2^\mu(u, v) \in \mathbb{R}$ . temos um operador antisimétrico

$$c_2^\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

i.e., um elemento  $c_2^\mu \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ , i.e. uma classe  $[c_2^\mu] \in H^2(\mathfrak{g})$ .

**Lema (Exercício)**  $\delta c_2^\mu = 0$ . Segue da identidade de Jacobi

**Lemma**  $[c_2^\mu]$  não depende de  $\hat{\mu}$  (só depende da ação simplética).

*Demonstração.* Suponha  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$  que resolvem a primeira obstrução. Bom isso implica que  $X_{\hat{\mu}_1}(u) = X_{\hat{\mu}_2}(u) \implies \hat{\mu}_1(u) - \hat{\mu}_2(u) \in \mathbb{R}$  para toda  $u \in \mathfrak{g}$ . E isso implica que  $b := \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \in \mathfrak{g}^*$ .



Então,

$$(c_2^{\mu_1} - c_2^{\mu_2} = \hat{\mu}_1([v, u]) - \hat{\mu}_2([v, u]) - \underbrace{\{\hat{\mu}_1(u), \hat{\mu}_1(v)\} + \{\hat{\mu}_2(u), \hat{\mu}_2(v)\}}_{=0}) = \delta b(u, v)$$

Agora lembre que por definição de  $\delta$ ,  $\delta b(u, v) = ([v, u])$ . Isso implica que

$$[c_2^{\mu_1}] = [c_2^{\mu_2} = c_2 \in H^2(\mathfrak{g})$$

□

**Proposição** Seja  $G \curvearrowright (M, \omega)$  fracamente hamiltoniana (ou seja que a primeira obstrução ta resolvida) ( $\iff c_1 = 0$ ). Então existe  $\hat{\mu}$  satisfzendo as duas obstruções  $\iff c_2 = 0$ .

**Ou seja,  $c_2$  mede a segunda obstrução**

*Demonstração.* • Se  $\hat{\mu}$  satisfaz a segunda obstrução  $\implies c_2^{\mu} = 0 \implies c_2 = 0$ .

- Se  $c_2 = 0$ , então existe  $\hat{\mu}$  com  $c_2^{\mu} = \delta b$ . Tome

$$\hat{\mu}' = \hat{\mu} - b \text{ satisfaz as duas obstruções}$$

ou seja, se tem um  $\hat{\mu}$  que resolve a primeira obstrução e o  $c_2$  é  $\delta b$ , então modifica a  $\hat{\mu}$  tirando  $b$  e já com isso vai resolver também a segunda obstrução.

□

**Consequencia**  $M$  y  $G$  conexos. Toda ação simplética em  $(M, \omega)$  satisfazendo

- $H^1(\mathfrak{g}) = 0$ .
- $H^2(\mathfrak{g}) = 0$

é hamiltoniana com única aplicação momento (ainda falta falar de unicidade).

**Observação**  $\mathfrak{g}$  semisimple implica  $H^1(\mathfrak{g}) = 0$  e  $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ . Isso é um caso particular dos lemas de Whitehead.

Ou seja que tudo isso para ver quando existe a aplicação momento.

### 20.3 Faltou falar de unicidade

Suponha  $\mu_1, \mu_2$  são aplicações momento.  $b = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \in \mathfrak{g}^*$ ,  $M$  conexo. Então, pela equivarância,  $b([u, v]) = 0$ , i.e.  $b \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 = H^2(\mathfrak{g})$ .

Por outro lado,  $\mu$  aplicação momento equivarante e pegamos  $b \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0$ , então  $\hat{\mu} + b$  é uma nova aplicação momento equivariante. Portanto,

aplicações momento são únicas modulo  $H^1(\mathfrak{g})$ .

## 20.4 Comentários finais

- $G$  abeliano (e.g.  $G = \mathbb{T}^n$ ). Lembre que no princípio do curso a gente viu que rotar ao longo de um dos círculos do toro dá um campo que é simplético mas não hamiltoniano. Essa ação não admite uma aplicação momento, i.e.  $H^1(\mathbb{T}^2) \neq 0$ .
  - Ação simplética não precisa ser hamiltoniana.
  - Se aplicação momento existe, está definida a menos de  $\mathfrak{g}^*$ . (caso de um toro tem um  $\mathbb{R}^n$  de escolhas de aplicações momento;  $H^1(\mathfrak{g})$  é  $\mathbb{R}^n$  acho).
- Existem condições em  $M$  garantindo que toda ação simplética é hamiltoniana. Por exemplo, se  $H^1(\mathfrak{g}) = 0$  e além disso  $M$  conexa e compacta.

## 21 Aula 21

### 21.1 Hiperfície de contato

**Definição** Uma *variedade de contato*  $M^{2n-1}$  é uma variedade com uma **1-forma de contato**  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$  é uma forma de volume (diferente de zero em todo ponto). Chamamos  $\xi = \ker \alpha$  de *estrutura de contato*.

Note que  $d\alpha|_{\xi_p}$  é não degenerada.  $\alpha|_{\ker d\alpha}$  é não nula pelo fato de que  $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ . Aí podemos dividir essa distribuição de dimensão 1 no lado onde  $\alpha$  é positiva e onde é negativa.

**Definição** O *campo de Reeb* de  $\alpha$  é o campo vetorial  $R_\alpha$  unicamente caracterizado pelas equações

$$i_{R_\alpha} d\alpha = 0, \quad \alpha(R_\alpha) \equiv 1.$$

**Observação** Esse é um campo canonicamente associado à forma de contato. Não tem algo assim em variedades simpléticas.

**Referência** (Para quem quiser estudar mais sobre isso) Geiges, *Introduction to Contact Topology*

Agora pegue  $(M^{2n}, \omega)$  simplética e  $S \subset M$  hiperfície.

**Definição**  $S$  é uma *hiperfície de contato* se  $S$  admite uma forma de contato  $\alpha$  tal que  $d\alpha = \omega|_S = i^*\omega$ .

**Teorema** Uma hiperfície de contato compacta  $S$  de  $M$  é de contato se e somente se existe um campo vetorial  $X$  definido em uma vizinhança  $U$  de  $S$  tal que

1.  $X$  é *conformemente simplético*, ou seja,  $\mathcal{L}_X \omega = \omega$ .
2.  $X \pitchfork S$  ( $X$  é transversal a  $S$ )

**Exercício** Mostre que  $\mathcal{L}_X \omega = \omega \iff \varphi_t^* \omega = e^t \omega$ .

Compare com o caso simplético: aí a gente tinha que  $\mathcal{L}_X \omega = 0$ , i.e. que o fluxo puxa  $\omega$  em  $\omega$ . Aqui estamos multiplicando por factor, e por isso dizemos que é conforme.

*Prova do teorema.* ( $\Leftarrow$ ) Defina  $\alpha = i_X \omega$ . Vamos ver que  $\alpha$  restringida a  $S$  é uma forma de contato. Pela fórmula de Cartan,

$$d\alpha = \mathcal{L}_X \omega = \omega$$

Como  $S$  possui dimensão ímpar  $\exists T \in T_x S$  tal que  $\omega_x(Y, v) = 0 \forall x \in S$  e  $\forall v \in T_x S$ . Como  $\omega$  é não degenerada,  $\alpha_x(Y) = \omega_x(x, Y) \neq 0$ .

Portanto,

$$D_s = \{v \in T_x S; \omega_x(X(x), v) = 0\}$$

define uma distribuição de hiperplanos em  $S$  complementar a  $Y$ . (Note que  $D_x$  é o ortogonal simplético do plano simplético  $\text{span}\{X(x), Y\}$ .)

Consequentemente  $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$  em todo ponto, i.e., forma de volume.

( $\Rightarrow$ ) Vamos contruir uma primitiva de  $\alpha$  i.e. que  $d\alpha$  seja  $\omega$ . Vamos precisar do seguinte

**Lemma** Existe uma vizinhança  $U$  de  $S$  e uma 1-forma  $\tau$  em  $U$  tal que  $\tau$  é uma primitiva de  $\omega$ , i.e.  $d\tau = \omega$  e  $i^* \tau = \alpha$

*Prova do lema.* Pelo teorema da vizinhança tubular, existe uma vizinhança  $U$  de  $S$  e um difeomorfismo

$$\psi : S \times (-1, 1) \rightarrow U$$

tal que

$$\psi(x, 0) = x \quad \text{para toda } x \in S$$

. Compondo a inversa de  $\psi$  com a projecção no primeiro fator temos um mapa  $r : U \rightarrow S$ .

Seja  $\mu = i^* \alpha$ . Temos que  $i^* \mu = i^* r^* \alpha = \alpha$  pois  $\underbrace{\pi_1 \circ \psi^{-1}}_r \circ i = \text{Id}$ .

Considere a 2-forma

$$\eta := \omega - d\mu$$

Repare que  $d\eta = 0$  e  $i^* \eta = 0$ , pois

$$i^* \eta = i^* \omega - di^* \mu = d\alpha - d\alpha = 0$$

$\eta$  é uma 2-forma definida numa vizinhança  $U$  de  $S$ , ela é fechada, e restrita a  $S$  é zero. Então pode achar uma primitiva de  $\eta$  numa vizinhança de  $S$  que se anula quando restrita a  $S$  pelo lema de Poincaré generalizado.

Pelo lema de Poincaré generalizado, existe uma 1-forma  $\xi$  em  $U$  tal que

$$\eta = d\xi \quad \text{e} \quad i^* \xi = 0$$

Defina então

$$\tau := \mu + \xi.$$

Como

$$d\tau = d(\mu + \xi) = d\mu\omega - d\mu = \omega$$

e

$$i^*\tau = i^*\mu = \alpha,$$

concluimos a prova do lema.  $\square$

**Como terminamos a demonstração do teorema usando o lema?** Seja  $X$  o campo em  $U$  tal que  $i_X\omega = \tau$ . Vamos ver que esse  $X$  satisfaz a duas propriedades.

Primeira propriedade é imediata:

$$\mathcal{L}_X\omega = d(i_X\omega) = d\tau = \omega.$$

Agora vejamos que  $X \pitchfork S$ . Seja  $Y$  o campo de Reeb em  $S$  i.e. dado pelas equações

$$\alpha(Y) \equiv 1, \quad i_Y d\alpha = 0$$

Note que

$$\omega(X, Y) = \alpha(Y) = 1$$

Mas se  $X$  fosse tangente a  $S$  em algum ponto  $x \in S$ , teríamos que

$$\omega(X(x), Y(x)) = d\alpha(X(x), Y(x)) = 0$$

**A  $\alpha$  restrita a  $S$  é  $\omega$ .** Isso é uma contradição.  $\square$

## 21.2 Exemplos de hipersfícies de contato

Agora vamos usar esse teorema para construir exemplos simples de variedades de contato.

1. O campo radial  $X(x) = \frac{x}{2}$ , onde  $x = (q, \gamma) \in \mathbb{R}^2$  é claramente conformemente simplético com respeito à  $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$  pois  $i_X\omega = \frac{1}{2} \sum q_i dp_i - p_i dq_i$ .

**Portanto, qualquer hipersfície compacta star-shaped (i.e.  $\pitchfork X$ ) é tipo contato.**

Em particular, as esferas vão ser de contato.

2. Depois de  $\mathbb{R}^{2n}$ , a seguinte variedade de contato mais natural é o fibrado cotangente  $T^*Q$  com a forma simplética canônica. Seja  $X(q, p) = p$  o campo radial ao longo das fibras. Temos que

$$i_X\omega = \sum p_i dq_i = -\alpha$$

onde  $\alpha$  é a forma tautológica. Em particular o fibrado unitário  $S^*Q = \{(q, p) \in T^*Q : \|p\| = 1\}$  com qualquer métrica Riemanniana em  $Q$  é uma hipersfície tipo contato.

**Níveis de energia do fluxo geodésico são hipersuperfícies de contato. O mundo natural onde mora o fluxo geodésico é o fibrado unitário. Em Da Silva: o fluxo geodésico é um sistema Hamiltoniano.**

## 22 Aula 22

Hoje vamos terminar de falar de superfícies de contato. Interessantemente não é fácil construir exemplos de superfícies que não são de contato. Vamos dar um exemplo agora

### 22.1 Exemplo de superfície que não é de contato

**Exemplo (De superfície em  $\mathbb{R}^{2n}$  que não é de contato)** Pegue duas constantes positivas  $R > r > 0$  e considere a superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  difeomorfa a  $S^{2n-1}$  que tangencia os bordos dos cilindros  $Z(R)$  e  $Z(r)$  onde

$$Z(r) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} : q_1^2 + p_1^2 \leq r\}$$

i.e. pegue um disco de raio  $r$  no plano *simplético* (é importante que seja simplético) e varra ele por tudo o  $\mathbb{C}^{n-1}$  restante. E também tem o cilindro de raio  $R$ . Ahí pode botar uma esfera que contenha o círculo de raio  $R$ , e deformar ela de um jeito simplético para fazê-la ser tangente também ao cilindro pequeno que está dentro do cilindro grande.

A esfera normal sim é de contato. Mas essa não.

Seja  $N$  um campo normal a  $S$  que em  $S \cap Z(R)$  aponta para fora e em  $S \cap Z(r)$  aponta para dentro. (Qualquer campo normal a essa esfera tem essa propriedade, ou a inversa—dentro/fora, tanto faz.) Parece que a esfera é deformada ainda mais, de tal jeito que tem regiões onde coincide com os cilindros—com os dois. Note que tal campo pode ser dado por

$$N(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = (q_1, 0, \dots, p_2, 0, \dots), \quad \forall (q_1, p_1) \in Z(R)$$

pois é porque simplesmente é não fazer nada nas coordenadas de dimensão maior e, suponho, no círculo esse é o campo normal.

Note que  $J_0 N$  é tangente a  $S$  ( $J_0$  é a matriz simplética que usamos muito no princípio do curso). Vamos a usar a convenção (acho que coincide com a usamos antes) de que métrica compatível é quando

$$g = \omega(\cdot, J_0 \cdot)$$

é um produto interno, i.e.

$$g(\cdot, J_0 \cdot) = -\omega(\cdot, \cdot).$$

Em fim,  $J_0 N$  é tangente a  $S$  porque

$$\langle J_0 N, N \rangle = \omega(N, N) = 0$$

e como

$$\omega_0(N, J_0 v) = -\omega_0(J_0 N, v) = g(N, v) = 0 \quad \forall v \in TS$$

i.e.  $J_0 N$  gera  $\ker \omega|_S$ .

O ponto é que o núcleo dessa forma é gerado por  $J_0 N$ .

Então como  $J_0 N$  tá no kernel, se tem uma forma de contato  $\beta$ , ela é não zero no kernel, assim  $\beta J_0 N$  é sempre positiva ou sempre negativa.

A gente argumentou que  $J_0N$  ta no kernel. Como é que  $\beta(J_0N)$  é sempre positivo/negativo?

Suponha que  $S$  possui uma forma de contato  $\beta$  de forma que  $\beta(J_0N(r)) > 0$  ou  $\beta(J_0N(r)) < 0$  para toda  $r \in S$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $\beta(J_0N) > 0$ .

Ahora note que  $J_0$  rota  $N$  no sentido antihorário, i.e. vai ser tangente ao círculo, e a curva integral (ele chama de órbita) vai ser o círculo. Mas como no círculo grande/pequeno, o campo normal muda de ir pra dentro e pra fora, aí o fluxo vai mudar de direção.

Pela construção,  $S$  possui duas órbitas periódicas  $\gamma_R$  e  $\gamma_r$  em  $S \cap Z(R)$  e  $S \cap Z(r)$  no plano (afim)  $(q_1, p_1)$  quando em direções opostas.

Seja  $\alpha = \sum p_i dq_i$  de forma que  $d\alpha = -\omega_0$ . É fácil ver que

$$\int_{\gamma_r} \alpha = -\pi r^2 \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_R} \alpha = \pi R^2$$

Aqui é Stokes acho, é a área dos círculos.

Por outro lado, como  $S \cong S^{2n-1}$ ,  $H^1(S) = 0$ , então toda forma fechada é exata. A forma  $\alpha + \beta$  é exata pois  $d(\alpha + \beta) = -\omega_0 + \omega_0 = 0$ . Daí, existe  $f \in C^\infty(S)$  tal que  $\alpha + \beta = df$ . Consequentemente,

$$\int_{\gamma_r} \beta = -\int_{\gamma_r} \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_R} \beta = -\int_{\gamma_R} \alpha < 0$$

mais esses campos são soluções de  $J_0N$ , e tamos supondo que  $\beta(J_0N) > 0$ , que é absurdo. Portanto,  $\beta$  não existe e  $S$  não é de contato.

Mas qual é a contradição? A condição  $\beta(J_0N) > 0$  diz o que sobre essas integrais? Ah porque as integrais são, por definição

$$0 < \int_{\gamma_r} \beta = \int_0^{T_r} \beta(\dot{\gamma}_r) = \int_0^{T_r} \beta(J_0N)$$

onde  $T_r$  é o período de  $\gamma_r$ . A outra integral é análoga. Assim a gente vai ter que essas integrais são uma positiva e a outra negativa. Mas a gente viu que  $\beta(J_0N)$  é sempre positiva ou negativa—as integrais deveriam ser do mesmo signo.

## 22.2 Simplectização

Seja  $(N, \alpha)$  uma variedade de contato.

**Definição** A *simplectização* de  $(N, \alpha)$  é a variedade de contato

$$(N \times \mathbb{R}, d(e^t \alpha))$$

onde  $t$  é a coordenada em  $\mathbb{R}$ . **Exercício simples:** verifique que essa forma é simplética.

**Teorema** Toda hipersuperfície de contato é localmente simpléctizável. Seja  $S$  hipersuperfície de contato compacta de  $(M, \omega)$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $S$ ,  $\varepsilon > 0$  e um simpléctomorfismo

$$\psi : (U, \omega) \longrightarrow (S \times (-\varepsilon, \varepsilon), d(e^t \alpha))$$

*Demonstração.* Lista. □

## 22.3 Sistemas Hamiltonianos

$(M, \omega)$ . Pegue um campo simplético, i.e.

$$\mathcal{L}_X \omega = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d(i_X \omega) = 0$$

A gente vai ter uma função  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  e o campo hamiltoniano dela satisfazendo  $i_{X_H} \omega = dH$ .

**Observação**  $\mathcal{L}_{X_H} H = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) =$

**Corolário (Teorema de Liouville)** (Campo hamiltoniano preserva volume.)

$$\mathcal{L}_{X_H} \Lambda = 0, \quad \text{onde } \Lambda = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n$$

**Observação** Teoria ergódica tem a ver com transformações que preservam medida (como os fluxos hamiltonianos acham).

**Observação (Nem todo campo simplético é hamiltoniano)** Aqui a gente precisa de uma variedade não simplesmente conexa. Por exemplo o cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Aqui  $\omega = d\theta \wedge dh$ . Pegue  $X = \frac{\partial}{\partial h}$ . Então  $i_X \omega = d\theta$ , i.e. é simplético. Mas não é hamiltoniano.

## 22.4 Exemplos de campos hamiltonianos

1. **Função altura em  $S^2$ .** Pegue  $H = h$ . Pegue um valor regular  $k \in \mathbb{R}$ . Então a diferencial de  $H$ ,  $dH$  é surjetiva nos conjuntos de nível e por isso o campo hamiltoniano não se anula. Assim a gente tem um fluxo nos círculos da esfera paralelos ao plano  $xy$ , e nos polos tem singularidades.
2. **Levantamentos de campos.** Seja  $Q$  uma variedade diferenciável e  $X \in \mathfrak{X}(Q)$ . *Seja  $\varphi_t$  o fluxo de  $X$ . Como ele é um difeomorfismo, a gente pode levá-lo no cotangente como vimos na lista não sei o que. O levantamento preserva a 1-forma canônica.* Então seja

$$\hat{\varphi}_t(x, p) = \left( \varphi_t(x), (d\varphi_t(x))^* p \right)$$

o levantamento de  $\varphi_t$  para  $T^*Q$ .

Defina  $\hat{X} = \frac{d}{dt} \hat{\phi} t$ . Sabemos que  $\hat{X}$  preserva a forma tautológica, i.e.  $\mathcal{L}_{\hat{X}} \alpha = 0$  onde  $\alpha$  é a forma tautológica. Segue daí que  $\hat{X}$  é o campo hamiltoniano de  $H := i_{\hat{X}} \alpha$ . De fato:

$$0 = \mathcal{L}_{\hat{X}} \alpha = d(i_{\hat{X}} \alpha) + i_{\hat{X}} d\alpha \implies i_{\hat{X}} \omega = d(i_{\hat{X}} \alpha)$$

Começa com um campo que não tem nada, pode ser qualquer coisa random. Quando você levanta esse cara, ele vai preservar volume. É surpdendente.

### 3. Fibrção de Hopf. Pegue

$$H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$$

Então qual o campo hamiltoniano

$$X_H(x) = -J_0 \nabla H(x) = -J_0 x$$

$$\varphi_t(x) = e^{tJ_0} x = (\cos t)x - (\sin t)J_0 x$$

### 4. ? Pegue $(Q, g)$ Riemanniana. Pegue a energia cinética

$$H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) \longmapsto \frac{1}{2} \|p\|^2$$

onde (?)

$$\|p\| = \sup_{x \in B} \|p(x)\|$$

dada pela energia cinética

**Exercício** Mostre que o fluxo Hamiltoniano de  $H$  é o fluxo geodésico de  $Q$  via a identificação

$$: TA \xrightarrow{\cong} T^*Q \\ (q, v) \longmapsto (q, g(v, \cdot))$$

**Hint:** ver o livro da Anna. É um trabalhinho ver isso mas vale a pena.

## 23 Aula 23: dinâmica Hamiltoniana

$(M, \omega)$  variedade simplética.

**Definição** Seja  $S \subset M$  uma hipersfície. O *fibrado de linhas características*  $L_S$  ou *distribuição característica* de  $S$  é o subfibrado de  $TS$  dado por  $\ker(\omega|_S)$ .

**Observação** Como  $M$  é simplética,  $S$  tem dimensão ímpar e por isso esse kernel tem dimensão (positiva).

Note que se  $S = H^{-1}(k)$  para algum  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k$  valor regular, então

$$X_H(x) \in L_S(x) \quad \forall x \in S$$



**Proposição** Seja  $S$  um nível de energia de  $H_1$  e  $H_2$ . Então os fluxos de  $H_1$  e  $H_2$  em  $S$  diferem apenas por uma reparametrização.

**Definição** Uma *característica fechada* em  $S$  é uma curva regular (derivada não se anula)  $\gamma : S^1 \rightarrow S$  tal que

$$\dot{\gamma}(t) = L_S(\gamma(t)), \quad \forall t$$

Portanto a existência de órbitas periódicas é equivalente à existência de características fechadas.

**Definição** Sejam  $S$  e  $S'$  variedades diferenciáveis e  $X \in \mathfrak{X}(S)$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(S')$ . Dizemos que  $X$  e  $Y$  são topologicamente (resp. diferenciavelmente) equivalentes se existe um homeomorfismo (difeomorfismo)  $h : S \rightarrow S'$  **que leva curvas integrais de uma variedade em outra preservando o tempo?** tal que dado  $p \in S$  e  $\varepsilon > 0$  tais que para  $0 < t < \delta$ ,  $h_{\varphi_t}(p) = \psi_{\bar{t}}(h(p))$  para algum  $0 < \bar{t} < \varepsilon$ , onde  $\varphi_t$  e  $\psi_t$  são os fluxos de  $X$  e  $Y$ .

Quando  $\bar{t} = t$  dizemos que são *conjugados*. No caso de difeomorfismos, a condição acima significa  $dh(X) = fY$  para alguma  $f$ , e são conjugados se  $f = 1$  (i.e.  $h$ -relacionados).

**Upshot** Tem um Hamiltoniano super bom que pode espalhar numa vizinhança da subvariedade.

**Proposição** Seja  $S$  uma hipersuperfície de contato de  $M$ . Existe Hamiltoniana  $H$  definida em uma vizinhança  $U$  de  $S$  tal que  $S = H^{-1}(0)$  e  $X_H|_{H^{-1}(0)}$  é diferenciavelmente conjugado a  $X_H|_{H^{-1}(k)}$  para todo  $k$  suficientemente pequeno.

*Demonstração.* Vimos que existe uma vizinhança  $U$  de  $S$ ,  $\varepsilon > 0$  e um simplectomorfismo  $f : (U, \omega) \rightarrow (S \times (-\varepsilon, \varepsilon), d(e^t \alpha))$  onde  $\alpha$  é a forma de contato em  $S$ . **Localmente, a forma de contato é simplectomorfa à sua simplectização, isso foi um exercício a aula,, passada?**

Tome  $H$  tal que  $H \circ f^{-1}(x, t) = -e^t - 1$ . Note que  $f_* X_H = X_{-e^t}$ . **Isso é imediato pelo requerimento de que  $H \circ f^{-1} = -e^t - 1$ , pois o pushforward é Hamiltoniano da composição.**

Então agora note que  $X_{-e^t} = R_\alpha$  é o campo de Reeb. De fato:

$$\begin{aligned} i_{R_\alpha}(d(e^t \alpha)) &= i_{R_\alpha}(e^t dt \wedge \alpha + e^t d\alpha) \\ &= -e^t dt \wedge \alpha(R_\alpha) \xrightarrow{1} 1 \\ &= d(-e^t) \end{aligned}$$

□

Ahora fixe uma subvariedade  $S$  que seja o nível de energia de um Hamiltoniano i.e.,  $S = H^{-1}(k)$  para  $k$  valor regular. Defina  $\varphi_t$  o fluxo Hamiltoniano de  $H$ .

**Proposição** Então existe uma forma de volume  $\Lambda_S$  em  $S$  preservada por  $\varphi_t$ .

**Observação** Já sabemos que tem essa forma na variedade simplética: lista não sei o que. Mas não pode só restringir essa à  $S$ : porque isso vai dar uma  $(2n)$ -forma! A gente precisa de uma  $2n - 1$  forma.

*Demonstração.* Como  $dH(x) \neq 0$  para todo  $x$  em uma vizinhança  $U$  de  $S$ , existe  $(2n-1)$ -forma  $\eta$  em  $U$  tal que  $\Lambda = dH \wedge \eta$ . Seja  $i : S \hookrightarrow M$  e a inclusão é

$$\Lambda_S := i^* \eta.$$

Vamos ver que essa é boa. Claramente,  $\Lambda_S$  é uma forma de volume em  $S$ .

**Afirmção**  $\Lambda_S$  está unicamente caracterizada pela equação

$$\Lambda = dH \wedge \eta,$$

ou seja, se  $\xi$  satisfaz  $\Lambda = dH \wedge \xi$ , então

$$\Lambda_S = i^* \eta = i^* \xi.$$

*Prova da afirmação.* De fato, se  $dH \wedge (\eta - \xi) = 0$  então  $\eta - \xi = dH \wedge \kappa$  para alguma  $(2n-2)$ -forma  $\kappa$  em  $U$ . Como  $i^* dH = 0$ , concluiríamos que  $i^* \eta = i^* \xi + i^* (dH \wedge \kappa) = i^* \xi$ .  $\square$

Como  $\varphi_t^* \Lambda = \Lambda$  e  $\varphi_t^* = dH$  temos  $\varphi_t^* \Lambda_S = \Lambda_S$ . De fato,

$$\Lambda = \varphi_t^* dH = dH \wedge \varphi_t^* \eta = dH \wedge \varphi_{*t} \eta$$

portanto, pela unicidade no claim,

$$i^* \varphi_t^* = i^* \eta \implies$$

$\square$

**Definição** Dizemos que  $x \in S$  é *recorrente* para  $\varphi_t$  se existe uma sequência  $t_k$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty$$

(isso é só para realmente pensar no tempo infinito... sem isso a gente vai ficar parada eventualmente,, ou algo assim...) e tal que

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \varphi_{t_k}(x) = x$$

que a órbita passa arbitrariamente perto de  $x$ .

**Teorema (de Recorrência de Poincaré)** Seja  $\varphi_t$  um fluxo que preserva volume em uma variedade compacta  $S$ . Então quase todo ponto de  $S$  é recorrente para  $\varphi_t$ .

## 24 Aula 24

### 24.1 Prova do teorema de Recorrência de Poincaré

*Prova do teorema de recorrência.* Usaremos a medida induzida pela forma de volume, i.e.  $\mu(A) = \int_A \mu_S$ .

Seja  $\varphi = \varphi_1$ . Vamos provar inicialmente que

$$\mu \left( A \cap \underbrace{\left( \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{j \geq k} \varphi^{-j}(S) \right)}_{:=B} \right) = \mu(A) \quad (4)$$

para todo boreliano  $A$ . Observe que  $x \in B$  se para todo inteiro  $k \geq 0$  existe  $j \geq k$  tal que  $x \in \varphi^{-j}(A)$ , ou seja,  $\varphi^j(x) \in A$ .

ou seja, para tempos arbitrários o  $\varphi(x)$  já tá em  $A$ .

Para provar eq. (4), defina

$$A_k = \bigcup_{j \geq k} \varphi^{-j}(A).$$

Note que

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

Ademais, como  $\varphi(A_k) = \bigcup_{j \geq k} \varphi^{k-j}(A)$ , de modo que  $\varphi^k(A_k) = A_k$  para toda  $k$ . Além disso,  $A_k \subset A_0$ .

Isso significa, como a medida é finita, que  $A_k = A_0$  em quase todo ponto.

Portanto,  $\bigcap_{k \geq 0} A_k = A_0$  q.t.p. Como  $A \subset A_0$ , concluímos que

$$A \cap \left( \bigcap_{k \geq 0} A_k \right) = A \cap A_0 = A \quad \text{q.t.p.}$$

Isso implica eq. (4).

Agora, use o fato de que existe uma base enumerável de  $S$ . Portanto, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe um conjunto enumerável de bolas abertas  $B_j(\frac{1}{n})$  de raio  $\frac{1}{n}$  cobrindo  $S$ . Pela primeira parte do argumento, existe um conjunto de medida nula  $N_n \subset S$  tal que todo  $x \in S \setminus N_n$  retorna infinitas vezes para a bola que o contém.

Tomando  $N = \bigcup_n N_n$ , temos que  $\mu(N) = 0$  e todo  $x \in S \setminus N$  possui a propriedade de voltar infinitas vezes para a bola  $B_j(\frac{1}{n})$ , seja qual for o valor de  $n$ .

Isso prova o teorema para tempos futuros. Para tempos passados e ó mesmo usando  $\varphi^{-1}$ .  $\square$

Esse teorema é muito forte: **quase todo ponto é recorrente**. Esse teorema é valido em espaços mais gerais que variedades. Na verdade, se definir recorrência só para tempos futuros, pode usar um simlpes automorfismo que preserva medida num espaço com uma base enumerável.

## 24.2 A seguinte questão: órbitas periódicas

**Pergunta** Dado um nível de energia compacto  $S$ , existem órbitas periódicas no mesmo?

Este problema possui uma estrutura variacional. Suponha, por simplicidade, que  $\omega = -d\alpha$ . Dada uma Hamiltoniana  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  e uma curva fechada  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  defina sua *ação* como

$$A_H(\gamma) = \int_{\gamma} \alpha - H$$

e esse se chama *funcional de ação*.

**Proposição (Princípio de Hamilton)** Pontos críticos do funcional de ação (no espaço de curvas fechadas de período  $T$  fixado) estão em bijeção com as órbitas pers de  $H$  de período  $T$ . Mais precisamente, uma curva fechada  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  é uma órbita de per  $X_H$  se e somente se dada uma variação suave  $\Gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, T] \rightarrow M$  tal que  $\Gamma_0 = \gamma$ , tem-se

$$\left. \frac{dA_0(\Gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0$$

O  $\Gamma_s$  é uma curvinha pertinho de  $\gamma$ . A maneira de você pensar isso é que  $\gamma$  é um ponto no espaço  $C^\infty(S^1, M)$  e  $\Gamma$  é uma curvinha que passa por  $\gamma$  em  $s = 0$ . Deriva o funcional de ação em  $\Gamma_s$  e tem um ponto crítico em  $s = 0$ , i.e. em  $\gamma$ .

*Demonstração.* Seja  $X$  o campo vetorial ao longo de  $\gamma$  dado por  $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Gamma_s$ . Isso é como a derivada de curva no espaço de laços, um campo vetorial que poemos no  $\gamma$ . Por Stokes

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{[0, \varepsilon] \times [0, T]} \Gamma^* \alpha}_{(*)} &= \int_{\varepsilon \times [0, T]} \Gamma^* \alpha - \int_{0 \times [0, T]} \Gamma^* \alpha \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \alpha - \int_{\gamma} \alpha \end{aligned}$$

porque é uma curva fechada no rectângulo, as bordas verticais se cancelam.

Dividindo ambos lados por  $\varepsilon$  e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos que o lado direito converge para a derivada de  $\int_{\gamma} \alpha$  na direção de  $X$  e o lado esquerdo tende a  $\int_{\gamma} d\alpha(X, \dot{\gamma})$ :

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^\varepsilon \underbrace{\int_0^T \Gamma^* d\alpha_{(s,t)} \left( \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) dt}_{:=f(s)} ds \\ &= F(\varepsilon) - F(0), \quad F := \int f ds \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} &= F'(0) = f(0) \\
&= \int_0^T \Gamma^* d\alpha_{(0,t)} \left( \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) dt \\
&= \int_0^T d\alpha_{\Gamma(0,t)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \Gamma, \frac{\partial}{\partial t} \Gamma \right) dt \\
&= \int_0^T d\alpha_{\gamma(t)}(X, \dot{\gamma}) dt
\end{aligned}$$

OK. Agora vamos botar o funcional de ação:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dA_H(\Gamma_A)}{ds} \right|_{s=0} &= \int_0^T -d\alpha(\dot{\gamma}, X) - dH(\gamma)X dt \\
&= \int_0^T \omega(\dot{\gamma}, X) dt \\
&= \int_0^T \omega(\dot{\gamma} - X_H, X) dt
\end{aligned}$$

que é zero se  $\dot{\gamma} = X_H$ . □

**Observação** O argumento anterior se aplica para a prova o seguinte: se  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  é uma curva não necessariamente fechada e  $L_1, L_2 \subset M$  são subvariedades tais que  $\alpha|_{L_i} = 0$  para  $i = 1, 2$  e  $\gamma(0) \in L_1, \gamma(1) \in L_2$ . Então  $\gamma$  é uma órbita de  $X_H$  sse é um ponto crítico de  $A_H$  para qualquer variação

$$\Gamma_0 = \gamma, \quad \Gamma_s(0) \in L_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_s(1) \in L_2 \quad \forall s$$

**Exemplo**  $M = T^*Q, L_1 = T_x^*Q, L_2 = T_y^*Q$ .

### 24.3 Extra: a note from Graham's talk just today's evening

In a chart,  $U \subseteq \mathbb{R}^n, g_{ij} : U \rightarrow \text{Sym}^+(\mathbb{R}^+)$ , define the *action functional* as

$$A[\gamma] = \int_0^1 g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j dt$$

- (i) Critical points of  $A$  are geodesics.
- (ii) This is a standard Lagrangian action (with  $V = 0$ ).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} : TU &\xrightarrow{g} T^*U \\
(x, v) &\longmapsto (x, g_{ij}v^j)
\end{aligned}$$

So the moral is: Legendre transform is a musical isomorphism.

## 25 Aula 25

**Pergunta** Dado um nível de energia regular compacto  $S$  de uma Ham.  $H$  existem órbitas periódicas em  $S$ ?

**Resposta** Em geral não: existem níveis de energia compactos sem órbitas periódicas.

**Teorema (Rabinowitz, '78)** Se  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  é star-shaped (o campo radial é transversal a ele) então possui uma órbita periódica.

**Conjetura (Weinstein ~'79)** Toda hipersuperfície de contato  $S$  possui uma órbita periódica.

### Respostas parciais

- $S \subset M^4$  ( $S$  dim 3) é verdade (Taubes).
- $\dim S > 3$  resultados parciais positivos.

**Observação** É muito difícil demonstrar se numa variedade de contato arbitrária o fluxo de Reeb tem ou não tem uma órbita periódica.

### Exemplos

1. **(Dinâmica em elipsóides).** Pega a Hamiltoniana

$$H : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto \sum_{j=1}^n \frac{|z_j|^2}{r_j}$$

onde  $0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ . Como  $H$  é homogênea (as variáveis "saem" do argumento da função elevadas ao grau de homogeneidade) de grau 2, as dinâmicas em níveis de energia regulares de  $H$  são equivalentes (**Exercício**) geometricamente é claro: a função  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : z \mapsto cz$  é conformemente simplética, ela manda o fibrado característico  $L_S$  em  $L_{cS}$  (de um elipsoide pequeno a um elipsoide grande).

Portanto, basta considerar  $S = H^{-1}(1)$ . Como

$$X_H^{(z)} = J \nabla H(z) = J \left( \frac{2}{r_1} z_1, \dots, \frac{2}{r_n} z_n \right),$$

o fluxo de  $X_H$  é

$$\varphi_t(z_1, \dots, z_n) = \left( e^{t \frac{i}{r_1}} z_1, \dots, e^{t \frac{i}{r_n}} z_n \right)$$

Consequentemente, temos ao menos  $n$  órbitas periódicas em  $S$  dadas por

$$\gamma_j(t) = (0, \dots, 0, z_j(t), 0, \dots, 0)$$

onde  $z_j(t) = e^{t \frac{i}{r_j}} z$ . De fato, existem duas possíveis situações:

- $r_1, \dots, r_n$  são *racionalmente independentes*, ou seja,

$$\langle (r_1, \dots, r_n, v) \rangle \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

(geometricamente significa que a linha determinada pelo vetor não toca a lattice  $\mathbb{Z}^n$ ). Neste caso, não existem outras órbitas periódicas.

- $r_1, \dots, r_n$  são racionalmente dependentes. Neste caso, existem infinitas órbitas periódicas.

**Exercício** Prove estas afirmações.

2. **(Fluxos geodésicos).**  $(Q, g)$  variedade Riemanniana.

$$\begin{aligned} f : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ (x, v) &\longmapsto (x, i_v g) \end{aligned}$$

isomorfismo de fibrados. Então puxamos a forma simplética canônica,  $\omega = f^* \omega_0$ . Considere

$$\begin{aligned} H : TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H(x, v) &= \frac{1}{2} g(v, v) \end{aligned}$$

O fluxo Hamiltoniano  $\varphi_t$  de  $H$  é o fluxo geodésico de  $(Q, g)$ , ou seja,

$$\varphi_t(x, v) = (\gamma_{(x, v)}(t), \dot{\gamma}_{(x, v)}(t))$$

onde  $\gamma_{(x, v)}$  é a única geodésica tal que  $\gamma_{(x, v)}(0) = x$  e  $\dot{\gamma}_{(x, v)}(0) = v$ . Como  $H$  é homogênea (de grau 2) as dinâmicas em  $H^{-1}(c)$ ,  $c \neq 0$ , são dif. equivalentes. Portanto basta considerar o caso  $S = H^{-1}(1/2) = SQ$  (o fibrado esférico ou unitário). É um fato conhecido que se  $Q$  for compacta então existe uma geodésica fechada. O caso em que  $\pi_1(Q) \neq 0$  é fácil de provar e devido a Cartan. O caso  $\pi_1(Q) = 0$  é devido a Lustenik-Fet.

**What is going on?** Nesses casos tem órbita periódica

- (a) **(Fluxo geodésico em  $S^n$  curvatura seccional  $K \equiv 1$ )** Neste caso, as órbitas periódicas são todas fechadas (dadas pelos grandes círculos) e de mesmo período mínimo.

**Comentário** A redução seguinte nos diz que a Grassmaniana orientada  $Gr^+(2, n+1)$  é uma variedade simplética:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & SS^n \\ & & \downarrow \\ & & Gr^+(2, n+1) \end{array}$$

- (b) (**Curvatura seccional**  $K \equiv 0$ , **todo**). Neste caso,  $ST^2 = \bigcup_{v \in S^1} v \times T^n$ . Esses toros são invariantes pelo fluxo global, e em cada termo  $v \times T^2$  temos um campo constante igual a  $v$ . É fácil ver que se  $v = (v_1, \dots, v_n)$  é tal que  $v_1, \dots, v_n$  são racionalmente independentes então todas as órbitas em  $v \times T^n$  são densas. Se  $v_1, \dots, v_n$  são racionalmente dependentes, todas as órbitas são fechadas (em  $v \times T^n$ ). (**Exercício**).
- (c) (**Caso hierbólico, i.e.**  $K < -1$ ). Neste caso, pode-se mostrar que existe uma decomposição

$$TS = \text{span}\{X\} \oplus E^s \oplus E^u$$

onde  $\dot{X} = \dot{\varphi}_t = X_{H_t}$ , tal que  $d\varphi_t(E^{s,u} = E^{s,u}$  e existem constantes

$$\|d\varphi_t(X)\| \leq \alpha^t \|v\|, \quad \forall v \in E^1, \quad \forall t > 0,$$

$$\|d\varphi_t(v)\| \geq b^t \|v\|, \quad \forall v \in E^u, \quad \forall t > 0.$$

Fluxos com esta propriedade se chamam **Anosov**.

Utilizando teoria hiperbólica de sistemas dinâmicos, pode se provar que o conjugado das órbitas periódicas de  $\varphi_t$  é denso e, ao mesmo tempo, existem órbitas periódicas.

## 26 Aula 26

## 27 Aula 27