

Lista 3

Contents

Problem 1	1
Problem 2	1
Problem 3	4
Problem 4	5

Problem 1

Solution.

- a. Ideia inicial: mostrar que uma base de T_x^*M é $df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_{2n}$. Daí, toda $2n$ -forma é um múltiplo de $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_{2n}$. Mas esse argumento não dá porque a equação deve ser válida numa vizinhança de M_c .

Segunda ideia: pegue um ponto $p \in \mathcal{U} \subset M$. Podemos completar $(df_1)_p, \dots, (df_k)_p$ a uma base de T^*M . Também podemos estender essa base para uma vizinhança $p \in V \subset \mathcal{U}$ como segue: estenda os covectores a toda M usando uma função "quindim" (=bump function) que seja 1 num compacto perto de p . Daí, como os covectores são linearmente independentes em p , o determinante da função de coeficientes deles é não zero em p , mas como o determinante é contínuo, existe uma vizinhança de p onde é não zero. Defina $\tilde{\sigma}$ como o wedge product dos covectores que acabamos de construir.

Essa prova não tá funcionando bem porque só definimos σ numa vizinhança do ponto p . Falta construir uma forma definida em todo \mathcal{U} .

- b. Pela fórmula de Cartan,

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \mathcal{L}_{X_H} \sigma = df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge (i_{X_H} d\sigma + d(i_{X_H} \sigma))$$

=

□

Problem 2 Let M be a symplectic manifold, $\Psi = (\psi^1, \dots, \psi^k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ a smooth map, and c a regular value. Consider a submanifold $N = \Psi^{-1}(c) \hookrightarrow M$.

- a. Show that N is coisotropic if and only if $\{\psi^i, \psi^j\}|_N = 0$ for all $i, j = 1, \dots, k$.

- b. Show that N is symplectic if and only if the matrix (c^{ij}) , with $c^{ij} = \{\psi^i, \psi^j\}$, is invertible for all $x \in N$. In this case, verify that we have the following expression for the Poisson bracket $\{\cdot, \cdot\}_N$ on N (known as *Dirac's bracket*):

$$\{f, g\}_N = \left(\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \sum_{ij} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} c_{ij} \{\psi^j, \tilde{g}\} \right) \Big|_N$$

where $(c_{ij}) = (c^{ij})^{-1}$, $f, g \in C^\infty(N)$, and $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(M)$ are arbitrary extensions of f and g .

Solution.

- a. Since M is symplectic we have a bundle isomorphism

$$\begin{aligned} \omega^b : TM &\longrightarrow T^*M \\ v &\longmapsto i_v \omega \end{aligned}$$

Then

$$TN^\omega = (\omega^b)^{-1}(\text{Ann}(TN)).$$

Since M is the level set of a regular value, there are local coordinates of the form $(\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$. Vectors tangent to N are expressed only in terms of the vectors $\partial_{k+1}, \dots, \partial_{2n}$ and thus covectors that vanish on TN are those which vanish on $\partial_{k+1}, \dots, \partial_{2n}$. This means that a basis for $\text{Ann}(TN)$ is given by $d\psi^1, \dots, d\psi^k$ (an explanation of this might be that the canonical basic covectors for the coordinates ψ^i are the differentials $d\psi^i$, which maybe can be checked using the usual change of coordinates formula). These generators map to their hamiltonian vector fields under $(\omega^b)^{-1}$:

$$(\omega^b)^{-1}(d\psi^i) = X_{\psi^i}$$

So TN^ω is generated by the X_{ψ^i} . Notice that any vector $v \in TM$ is actually in TN iff $\alpha(v) = 0 \forall \alpha \in \text{Ann}(TN)$. Then we see that

$$\begin{aligned} TN^\omega \subset TM &\iff X_{\psi^i} \in TN \quad i = 1, \dots, k \\ &\iff d\psi^j(X_{\psi^i})|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \\ &\iff \omega(X_{\psi^i}, X_{\psi^j})|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \\ &\iff \{\psi^i, \psi^j\}|_N = 0 \quad i, j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

- b. Em qualquer sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^{2n}) , os vetores hamiltonianos $X_{x^1}, \dots, X_{x^{2n}}$ formam uma base do espaço tangente. Nessa base, os coeficientes da matriz que representa ω são exatamente os colchetes de Poisson $\{x^i, x^j\}$. A forma ω é não degenerada se e somente se a sua matriz é invertível (já que nesse caso temos o isomorfismo ω^b bem definido). Então, o que queremos é ver que a restrição $\omega|_N$ é invertível em cada ponto de N .

Nas coordenadas de subvariedade $(\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$, a matrix que representa ω^b é

$$\begin{pmatrix} \{\psi^1, \psi^1\} & \dots & \{\psi^k, \psi^1\} & \{x^{k+1}, \psi^1\} & \dots & \{x^{2n}, \psi^1\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1, \psi^k\} & \dots & \{\psi^k, \psi^k\} & \{x^{k+1}, \psi^k\} & \dots & \{x^{2n}, \psi^k\} \\ \{\psi^1, x^{k+1}\} & \dots & \{\psi^k, x^{k+1}\} & \{x^{k+1}, x^{k+1}\} & \dots & \{x^{2n}, x^{k+1}\} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \{\psi^1, x^{2n}\} & \dots & \{\psi^k, x^{2n}\} & \{x^{k+1}, x^{2n}\} & \dots & \{x^{2n}, x^{2n}\} \end{pmatrix}$$

No entanto,

$$\{x^i, \psi^j\} = dx^i(X_{\psi^j}) = 0$$

$$\{\psi^j, x^i\} = d\psi^j(X_{x^i}) = 0$$

se os covetores dx^i e $d\psi^j$ são de fato a base dual de X_{x^i} , X_{ψ^j} . Se isso for certo, podemos escrever a matriz representada acima como

$$\left(\begin{array}{c|c} \{\psi^i, \psi^j\} & 0 \\ \hline 0 & \{x^i, x^j\} \end{array} \right),$$

cujo determinante é o produto dos determinantes das matrizes de bloco não zero. Infelizmente o determinante da matriz $\{x^i, x^j\}$ pode ser zero se $k = n$ e tomamos uma carta coordenada de Darboux...

Suponha por enquanto que dadas as projeções

$$\begin{array}{ccc} & TM|_N = TN \oplus TN^\omega & \\ q_1 \swarrow & & \searrow q_2 \\ TN & & TN^\omega \end{array}$$

é verdade que

$$X_f = q_1(X_{\tilde{f}}), \quad q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y) c_{ij} X_{\psi^j}.$$

Então, (para facilitar leitura não escrevemos a resitrição a N , mas isso só tem sentido em N)

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} &= \omega(X_{\tilde{f}}, X_{\tilde{g}}) \\ &= \omega(q_1(X_{\tilde{f}}), q_1(X_{\tilde{g}})) + \omega(q_1(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &\quad + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_1(X_{\tilde{g}})) + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &= \omega(X_f, X_g) + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \\ &= \{f, g\}_N + \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) \end{aligned}$$

para calcular o último termo notamos que

$$\begin{aligned} q_2(X_{\tilde{f}}) &= \sum_{i,j} d\psi^i(X_{\tilde{f}})c_{ij}X_{\psi^j} & q_2(X_{\tilde{g}}) &= \sum_{k,\ell} d\psi^k(X_{\tilde{g}})c_{k\ell}X_{\psi^\ell} \\ &= \sum_{ij} -\{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}X_{\psi^j} & &= \sum_{k,\ell} \{\psi^k, \tilde{g}\}c_{k\ell}X_{\psi^\ell} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \omega(q_2(X_{\tilde{f}}), q_2(X_{\tilde{g}})) &= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}\{\psi^k, \tilde{g}\}c_{k\ell}\omega(X_{\psi^j}, X_{\psi^\ell}) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} -\{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{k\ell}\{\psi^k, \tilde{g}\} \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} \{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ij}c^{j\ell}c_{\ell k}\{\psi^k, \tilde{g}\} \\ &= \sum_{i,k} \{\tilde{f}, \psi^i\}c_{ik}\{\psi^k, \tilde{g}\} \end{aligned}$$

usando que a $c_{\ell k} = -c_{k\ell}$ por ser uma matriz antisimétrica. Com isso seria demonstrado o exercício.

O fato de que $X_{\tilde{f}} = q_1(X_{\tilde{f}})$ segue de que tanto M quanto N são variedades simpléticas, de modo que existe um único campo vetorial associado à $df = d\tilde{f}|_N$ em N .

A equação $q_2(Y) = \sum_{i,j} d\psi^i(Y)c_{ij}X_{\psi^j}$ pode ser explicada como segue. Primeiro considere o caso simples do vetor $\frac{\partial}{\partial x^i} \in TM|_N$ para $i \leq k$ fixa. A mudança de coordenadas $\Psi \times \text{id}_{2n-k} = (\psi^1, \dots, \psi^k, x^{k+1}, \dots, x^{2n})$ disse que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} V^j$$

onde V^j é o marco de campos vetoriais associado as novas coordenadas. Qual é esse marco? Sabemos que uma base k kk

pegue um vetor tangente a M ancorado sobre N . Podemos expressá-lo em coordenadas locais:

$$TM|_N \ni Y = \sum_{i=1}^k Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=k+1}^{2n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Daí,

$$Y = \sum_{i=1}^k Y^i \sum_{j=1}^k \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \psi^j}$$

□

Problem 3

Solution. By an analogue argument to Problem 2a we know that $\text{Ann}(D)$ is a coisotropic submanifold iff $\{f, g\} = 0$ for all $f, g \in I_{\text{Ann}(D)}$. Now a vector field X corresponds naturally to an element of the double dual $\xi \in T^*(T^*(M))$ given by $\xi\eta(X) = \eta(X)$ for $\eta \in T^*M$. Notice that if $X \in D$ then $\xi \in \text{Ann}(\text{Ann}(D))$. \square

Problem 4 Consider a smooth map $\phi : Q_1 \rightarrow Q_2$, and let

$$R_\phi := \{((x, \xi), (y, \eta)) : y = \phi(x), \xi = (T\phi)^*\eta\} \subset T^*Q_1 \times T^*Q_2.$$

Verify that R_ϕ is a lagrangian submanifold of $T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$. Whenever ϕ is a diffeo, what is the relation between R_ϕ and the cotangent lift $\hat{\phi}$?

Denote by $\Gamma_\phi \subset Q_1 \times Q_2$ the graph of ϕ . What is the relation between N^*T_ϕ (the conormal bundle of Γ_ϕ) and R_ϕ ?

Solution. Podemos escrever

$$R_\phi = \{((x, (T\phi)^*\eta), (\phi(x), \eta)) : x \in Q_1, \eta \in T^*Q_2\}$$

de forma que

$$\Gamma_{\phi^*} = \{(\phi^*\eta, \eta) : \eta \in T^*Q_2\}$$

(já que a primeira entrada, o ponto base, está determinada pelos covectores).

$$\dim \Gamma_{\phi^*} = \dim T^*Q_2 = (\dim Q_2)^2.$$

Porém, se Q_1 não tem a mesma dimensão que Q_2 , então a dimensão de R_ϕ não pode ser a metade da dimensão do espaço ambiente $T^*Q_1 \times \overline{T^*Q_2}$. Isso acontece quando ϕ é um difeomorfismo. Nesse caso, R_ϕ é simplesmente a variedade que representa a inversa do levantamento cotangente de ϕ , já que esse levantamento é definido usando o mapa inverso do pullback "para que siga na mesma direção". Nesse caso é imediato que R_ϕ é lagrangiano, pois já sabemos que o levantamento cotangente preserva as formas canônicas e que o grafo de um symplectomorfismo é uma variedade lagrangiana (i.e. que a restrição da forma simplética no produto cartesiano se anula no grafo). \square