Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 3

Problem 5 Let M be a manifold and $\omega \in \Omega^k(M)$. Suppose that $\pi : M \to B$ is a surjective submersion with connected fibers. We say that ω is ***basic*** (with respect to π) if there exists a form $\overline{\omega} \in \Omega^k(B)$ such that $\pi^*\overline{\omega} = \omega$.

a. Show that ω is basic iff $i_X\omega = 0$ and $\mathcal{L}_X\omega = 0$ for all vector fields X tangent to the fibers of π. In particular, if ω is closed, show that it is basic if $\ker(T\pi) \subseteq \ker\omega$ (pointwise in M).

b. Suppose that ω is a closed 2-form on M and $\ker(T\pi) = \ker\omega$. Show that $\omega = \pi^*\overline{\omega}$ and $\overline{\omega} \in \Omega^2(B)$ is symplectic.

c. (Application to reduction.) Let (M, ω) be a symplectic manifold and $\iota : N \hookrightarrow M$ a submanifold such that $D = TN \cap TN^\omega \subset TN$ has constant rank (e.g. N could be coisotropic). We saw in class that D is an integrable distribution (by Frobenius); suppose that the leafspace $B := N/\sim$ is smooth so that the natural projection $\pi : N \longrightarrow B$ is a submersion. Show that B inherits a unique symplectic form ω_{red} with the propery that $\pi^*\omega_{\text{red}} = \iota^*\omega$

Solution.

a. Primeiro note que se X é tangente às fibras de π, o pushforward dele baixo π é zero já que o espaço tangente a um ponto é trivial (podemos ver X como um campo em cada fibra, que é uma subvariedade, e a projeção manda ele no vetor zero na base). Daí a implicação $\implies$ é imediata.

   Para $\impliedby$ vamos provar primeiro localmente

   (Ver StackExchange) Para $\impliedby$ o mais natural é definir uma forma em B como

$$\overline{\omega}(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_k) := \omega(X_1, \dots, X_k)$$

   já que assim $\pi^*\overline{\omega} = \omega$. Mais não é imediato para mim que isso faz sentido, pois devo comprovar todo campo vetorial em B pode ser visto como o pushforward de um campo vetorial em M. Finalmente descobri em nLab que para cualquer sumersão surjetiva como π, temos uma descomposição

$$TM = \pi^*TB \oplus \ker\pi_*,$$

   que segue do fato de que $\pi_* : TM \longrightarrow \pi^*TB$ é surjetiva. Aqui π^*TB é o pullback bundle, definido como $\pi^*TB = \{(m, v) \in M \times TB : v \in T_{\pi(m)}B\}$. Então temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \ker\pi_* \longrightarrow TM \longrightarrow \pi^*TB \longrightarrow 0$$

que, como toda sequência exata curta de fibrados vetoriais sobre variedades, se divide. Em fim, isso é só para comprovar que todo campo vetorial em B tem uma cópia dele em M, de modo que a definição de $\overline{\omega}$ faiz sentido.

Contudo, isso não é suficiente para mostrar que $\overline{\omega}$ está bem definida. Devemos verificar que $\pi_* X_1 = \pi_* X_1' \implies \omega(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \omega(X_1', X_2, \ldots, X_k)$. De fato, $\pi_*(X_1 - X_1') = 0$ signfica que $X_1 - X_1' \in \ker \pi_*$, de forma que $X_1 - X_1'$ é tangente às fibras de π, e portanto $i_{X_1 - X_2}\omega = 0$.

Para concluir só falta mostrar que se $X_1, \ldots, X_k$ são campos vetoriais em M, o valor de ω é constante em diferentes pontos de uma fibra de π. Isso é tanto como dizer que se Y é tangente às fibras de π, $0 = \mathcal{L}_Y \omega(X_1, \ldots, X_k) = Y(\omega(X_1, \ldots, X_k))$. Para mostrar isso usamos a equação

$$\begin{aligned} Y(\omega(X_1, \ldots, X_k)) = \mathcal{L}_Y \omega(X_1, \ldots, X_k) + \omega([Y, X_1], X_2, \ldots, X_k) + \\ + \omega(X_1, \ldots, X_{k-1}, [Y, X_k]) \end{aligned}$$

que é zero já que $\mathcal{L}_Y \omega = 0$ por hipótese, e porque $[Y, X_i] \in \ker \pi_*$ (usando de novo que $i_Z \omega = 0$ para $Z \in \ker \pi_*$). Isso último segue de que $\pi_*[Y, X_i] = [\pi_* Y, \pi_* X] = 0$.

Para concluir este exercício suponha que ω é fechada e que $\ker \pi_* \subseteq \ker \omega$. Pegue X tangente às fibras de π; vimos acima que $\pi_* X = 0$, então $X \in \ker \omega$, i.e. $i_X \omega = 0$ e também $0 = \mathcal{L}_X \omega = d i_X \omega + i_X d\omega$.

b. Usando o item anterior, basta mostrar que $i_X \omega = 0 = \mathcal{L}_X \omega$ para todo X tangente às fibras de π. Mas, se X é tangente às fibras de π, ele tá no $\ker \pi_* = \ker \omega$. Daí, $i_X \omega = 0$ e também $0 = \mathcal{L}_X \omega = d i_X \omega + i_X d\omega$. Para ver que $\overline{\omega}$ é simplética lembre que $\ker \overline{\omega} = \{v \in TM : i_v \overline{\omega} = 0\}$, logo se $v \in \ker \overline{\omega}$ sabemos que existe $u \in TM$ tal que $\pi_* u = v$, e daí $i_u \omega = i_u \pi^* \overline{\omega} = \overline{\omega}(v, \cdot) = i_v \overline{\omega} = 0$. Isso mostra que $u \in \ker \omega = \ker \pi_* \omega \implies \pi_* u = v = 0$.

c. De acordo com o inciso b., basta ver que $\ker \pi_* = \ker \omega|_N$ (já que $\omega|_N$ é uma forma fechada, pois é o pullback de ω baixo a inclusão).Como $TN \cap TN^{\omega}$ é uma distribuição intergável, por cada ponto de N pasa uma folha de uma folheação. Pegue V tangente às folhas da distribuição, de modo que $\pi_* V = 0$ já que as folhas são pontos em B. Mas ainda, por definição dessa distribuição, que V seja tangente às folhas significa que $V \in TN \cap TN^{\omega}$. Mas já sabemos que $TN \cap TN^{\omega}$ é o kernel de $\omega|_N$.

Pegue $V \in \ker \omega|_N = TN \cap TN^{\omega}$, então V é tangente às fibras da distribuição e portanto está em $\ker \pi_*$.

Com isso, usando o inciso b., sabemos que existe uma forma $\overline{\omega} := \omega_{\mathrm{red}}$ tal que $\pi^* \overline{\omega} = \omega|_N = \iota^* \omega$.

$\square$