Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Projeto final

Pré-quantização geométrica

Índice

1 Introdução

Uma quantização é um procedimento que associa um sistema mecânico quântico a um sistema clássico. Entre outros tipos de quantizações, a quantização geométrica está focada em passar de uma variedade simplética, entendida como o cenário da mecânica clássica, para um espaço de Hilbert do lado quântico. Esse programa foi desenvolvivo por B. Kostant e J-M Soriau, de acordo com os axiomas de Dirac.

Neste trabalho vamos explorar a primeira parte do processo de quantização geométrica, chamado de pré-quantização. Começaremos com uma discusão informal onde explicamos brevemente o *background* físico subjacente ao processo de quantização. Depois, vamos introduzir os objetos matemáticos necessários para construir o espaço de Hilbert que podemos associar a uma variedade simplética. Encerramos com a seção mais importante, onde definimos a correspondência entre observáveis clássicos e quânticos, e demonstramos que tal correspondência satisfaz os axiomas de pré-quantização de Dirac.

Os passos finais da quantização geométrica, entre outros tópicos interessantes como o teorema de Groenewold, não serão explicados em detalhes; apenas incluiremos referências onde podem ser consultados.

2 Motivação

2.1 Mecânica clássica numa variedade simplética

Lembre da primeira aula desse curso que a origem da geometria simplética é a formulação Hamiltoniana da mecânica clássica. Neste contexto, o *espaço de fases* de um sistema clássico é uma variedade simplética. Os pontos da variedade são interpretados como *estados* (posição e momento) e a *evolução do sistema* é o fluxo de uma função Hamiltoniana. A *evolução de um estado* é a curva integral que passa por esse ponto. As curvas integrais são soluções das equações de Hamilton, que em coordenadas de Darboux são

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Lembre que em aula definimos uma integral primeira de H como uma função suave f tal que $\{f, H\} = 0$. As integrais primeiras são constantes ao longo do fluxo Hamiltoniano. Em mecânica dizemos que as funções suaves são *observáveis*, no sentido de que são quantidades que podemos medir (como posição, momento e energia). Assim, a *evolução de um observável* f está dada por $\{f, H\}$.

2.2 Mecânica quântica num espaço de Hilbert

Na representação de Schrödinger da mecânica quântica, o *estado* de uma partícula está dado por uma função de onda $\psi(x,t)$, que é um vetor unitário num espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Assim como na mecânica clássica podemos determinar o estado de uma partícula sabendo a posição e o momento em algum tempo dado, para saber o estado de uma partícula quântica no tempo t basta conhecer a função de onda em algum tempo t_0.

A equação que determina a evolução do sistema é a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H_q \psi,$$

onde o *Hamiltoniano quântico* H_q é um operador autoadjunto agindo em $\mathcal{H}$ e $\hbar$ é uma constante.

Um *observável quântico* é um operador autoadjunto A agindo em $\mathcal{H}$. O *valor esperado* de A é

$$\langle A \rangle_\psi := \langle A\psi, \psi \rangle .$$

Uma motivação linda para essa definição, usando o operador de posição, pode ser consultada em Hall sec. 3.3. Por motivos de tempo não vamos desenvolver aqui.

O valor esperado nos permite assinar um número a um observavél quântico quando aplicado a uma função de onda, do mesmo jeito em que um observável clássico pode ser avaliado num estado clássico. Assim como a evolução de um observável clássico f é $\{f, H\}$,

Proposição 1.1 (Em Wang) A *evolução de um observável quântico* é

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H_q] \rangle_\psi .$$

Demostração.

$$\frac{d}{dt}\langle A\psi(t), \psi(t)\rangle = \left\langle \frac{1}{i\hbar} A H_q \psi, \psi \right\rangle + \left\langle A\psi, \frac{1}{i\hbar} H_q \psi \right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H_q]\psi, \psi\rangle .$$

□

Isso justifica que o commutador é o análogo do colchete de Poisson.

2.3 O axioma de Dirac

A discussão feita até agora nos conduiz à seguinte ideia do que deveria ser uma quantização: uma correspondência

$$\begin{aligned} (M, \omega) &\rightsquigarrow (\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ H &\rightsquigarrow H_q \\ f &\rightsquigarrow A \\ \{\cdot, \cdot\} &\rightsquigarrow [\cdot, \cdot]. \end{aligned}$$

O axioma de Dirac (chamado assim em Wang) nos diz a propriedades que essa correspondencia deve satisfacer:

Axioma de Dirac Uma quantização associa um operador auto-adjunto $Q(f)$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ a um observável $f \in C^\infty(M)$ satisfazendo

1. (Linearidade) $Q(\lambda f + \mu g) = \lambda Q(f) + \mu Q(b)$.
2. (Normalização) $Q(1) = \mathsf{Id}$.
3. (Condição quântica) $Q(\{f, g\}) = \frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)]$.
4. (Minimalidade) Um conjunto completo de funções que comutam respeito ao colchete de Poisson é quantizado em um conjunto completo de operadores que comutam respeito ao colchete de Lie.

Uma correspondência satisfazendo só os pontos (1)-(3) se chama de ***pré-quantização***.

Tem muito para dizer sobre estes postulados. Em primeiro lugar, o teorema "No Go" de Groenewold mostra que uma quantização não pode existir. O leitor pode consultar Hall, sec. 13.4 para um enunciado preciso e a prova dele, assim como uma discussão do que significa.

Em segundo lugar, a condição (4) está relacionada com o teorema de Stone-von Neumann, e tem uma motivação tanto física quanto matemática. Embora a construção matemática que permite passar da pré-quantização que apresentaremos a seguir a uma quantização completa é pertinente num curso como o nosso, não vamos apresentá-la. Referimos à Lecture 13 de Wang e as seções 23.3-7 de Hall.

3 Fibrados de linhas complexos

Nesta seção definimos os objetos necessários para construir a pré-quantização associada a uma variedade simplética. O espaço de Hilbert será o espaço de seções de um fibrado de linhas complexo; a seguir vamos explicar as condições que devem ser satisfeitas para esse fibrado existir.

Começamos lembrando que um ***fibrado de linhas complexo*** é um fibrado vetorial cujas fibras são espaços vetoriais complexos de dimensão 1. Um fibrado de linhas complexo L sobre uma variedade M é ***Hermitiano*** se em cada fibra existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ que varia suavemente, i.e. para cada seção s, temos que $\langle s, s\rangle$ é uma função suave em M.

O espaço de k***-formas em*** M ***com coeficientes em*** L é

$$\Omega^k(M, L) := \Gamma(M, \Lambda^k(T^*M) \otimes L).$$

Note que como L é um fibrado complexo, $(T^*M) \otimes L$ também é complexo—mais pra frente vamos usar a estrutura complexa deste fibrado. Uma ***conexão*** ∇ em L é um mapa linear

$$\nabla : \Gamma(M, L) \to \Omega^1(M, L)$$

tal que para toda $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(M, L)$ vale a regra de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

Pegando um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos contrair X com ∇ para obter a ***derivada covariante*** na direção de X:

$$\nabla_X : \Gamma(M, L) \to \Gamma(M, L), \qquad \nabla_X s := i_X \nabla s.$$

A conexão ∇ pode ser extendida de maneira única a um mapa linear

$$\widehat{\nabla} : \Omega^1(M, L) \longrightarrow \Omega^2(M, L)$$

tal que para qualquer $\alpha \otimes s \in \Omega^1(M, L)$,

$$\widehat{\nabla}(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s - \alpha \wedge \nabla s.$$

De fato, isso pode ser mostrado fácilmente no caso de um fibrado vetorial geral definindo em coordenadas locais $\widehat{\nabla}$ como satisfazendo a condição anterior em combinações lineares de um marco local (ver Milnor and Stasheff, lem. C.4). Dessa definição também segue que para qualquer função suave f,

$$\widehat{\nabla}(f(\alpha \otimes s)) = df \wedge (\theta \otimes s) + f \cdot \widehat{\nabla}(\theta \otimes s).$$

Usando essa regra de Leibniz, podemos ver que $\nabla^2 := \widehat{\nabla} \circ \nabla$ é $C^\infty(M)$-linear, i.e. para qualquer função suave f e seção $s \in \Gamma(M, L)$,

$$\nabla^2(fs) = \widehat{\nabla}(df \otimes s + f\nabla s) = 0 - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s = f\nabla^2 s.$$

Isso significa que existe uma 2-forma $\Omega \in \Omega^2(M)$ tal que para toda $s \in \Gamma(M, L)$,

$$\nabla^2 s = \Omega s.$$

Os detalhes disso vem de álgebra multilinear: a $C^\infty(M)$-linearidade nos diz que $\nabla^2 s$ é um $(0,2)$-campo tensorial avaliado em L, e existe uma correspondência entre esses campos tensoriais e 2-formas em M (ver Tu exem. 21.9 e prop. 21.11).

Essa forma se chama ***curvatura*** de ∇. Um resultado que não provaremos (ver Ornea and Verbitsky, claim 2.10) é que

$$\Omega(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

Usando isso podemos mostrar que Ω é fechada (imitando a prova do teo. 11.1 em Tu). Lembre que para qualquer fibrado vetorial, em coordenadas locais sempre podemos achar um marco de seções, i.e. uma coleção de seções linearmente independentes que geram o espaço de seções. No nosso caso, como estamos trabalhando com um fibrado de linhas, o marco consiste de uma seção só. Assim, em qualqer vizinhança coordenada U sabemos que existe uma seção $e \in \Gamma(U, L)$ que não se anula e

$$\nabla e = \theta \otimes e$$

para alguma 1-forma $\theta \in \Omega^1(U, L)$.

Agora vamos calcular a curvatura localmente. Pegando $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y e &= \nabla_X(\theta(Y)e) \\
&= X\theta(Y)e + \theta(Y)\nabla_X e \\
&= X\theta(Y)e + \theta(Y)\theta(X)e.
\end{aligned}$$

E isso vale trocando os lugares de X e Y. E como também $\nabla_{[X,Y]}e = \theta[X, Y]e$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y)e &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})e \\
&= (X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta[X, Y])e \\
&= d\theta(X, Y)e.
\end{aligned}$$

Isso mostra que localmente,

$$\Omega = d\theta,$$

e isso implica que Ω é fechada. Também podemos usar essa expresão para mostrar que Ω é imaginaria. O argumento é bastante simples usando um produto hermitiano em L ***compatível*** com ∇, ou seja, satisfazendo

$$d\langle s, s'\rangle = \langle \nabla s, s'\rangle + \langle s, \nabla s'\rangle$$

para quaisquer s, s' seções de L.

Suponha que nosso marco local e é unitário. Então

$$\begin{aligned}
0 = d\langle e, e\rangle &= \langle \nabla e, e\rangle + \langle e, \nabla e\rangle \\
&= \langle \theta \otimes e, e\rangle + \langle e, \theta \otimes e\rangle \\
&= \theta + \overline{\theta}.
\end{aligned}$$

Isso significa que θ é uma forma puramente imaginária, e de fato implica que $d\theta$ também já que a derivada exterior complexa está definida como a extensão $\mathbb{C}$-linear da derivada exterior real. Os detalhes da construção da álgebra exterior complexa podem ser consultados, por exemplo, em Lee cap. 7. (Note que a nossa variedade M não é a priori complexa; apenas o fibrado $T^*M \otimes L$ é complexo.)

Finalmente podemos definir ***primeira classe de Chern*** de L como

$$c_1(L) := \left[\frac{1}{2\pi i}\Omega\right] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R}).$$

O teorema de Chern-Weil mostra que $c_1(L)$ é independende da escolha de conexão é métrica hermitiana em L, i.e. é um invariante topológico (ver Tu teo. 23. 3, Lee teo. 7.12).

Usando a aplicação de de Rham de $H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ a $H^2_{Ch}(M, \mathbb{R})$ é possível mostrar que $c_1(L)$ é uma classe de cohomologia ***inteira***, i.e. $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Ao contrário,

Teorema 2.6 (Weil, em Wang) Seja M uma variedade suave e ω uma forma real fechada cuja classe de cohomologia $[\omega]$ é inteira. Então existe um único (salvo isomorfismo) fibrado de linhas Hermitiano L sobre M com conexão unitária ∇ tal que $c_1(L) = [\omega]$.

Esse é o resultado chave que precisamos para a seguinte seção. Em Wang temos um esboço da demostração usando argumentos parecidos aos da implicação contrária, i.e. usando cohomologia de Čech e o homomorfismo de de Rham. Uma prova completa se acha na sec. 8.3 de Woodhouse.

Note que o fibrado de linhas resultante não é estritamente único. De fato, pegando o produto tensorial com um fibrado de linhas plano L' (i.e. cuja curvatura é zero) obtemos um fibrado de linhas com a mesma classe de Chern; isso segue de que a curvatura do produto tensorial obedece a regra $\Omega_{L\otimes L'} = \Omega_L + \Omega_{L'}$ (ver Lee prop. 7.19). A comprovação de que os fibrados lineares resultantes são de fato isomorfos pode ser feita usando as funções de transição deles (ver Wang).

4 Pré-quantização geométrica

Dizemos que uma variedade simplética (M, ω) é ***pré-quantizável*** se

$$\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Um fibrado de linhas Hermitiano (L, h, ∇) sobre (M, ω) com $\Omega = \frac{\omega}{i\hbar}$ se chama ***fibrado de linhas pré-quântico***.

Dada (M, ω) uma variedade pre-quantizável e (L, h, ∇) um fibrado de linhas pré-quântico sobre M, o espaço de Hilbert onde vamos trabalhar é $\mathcal{H} := L^2(M, L)$ com o produto interno

$$\langle s_1, s_2 \rangle := \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_M h(s_1, s_2) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Formalmente, $L^2(M, L)$ é o espaço de classes de equivalência de seções quadrado-integráveis de L (i.e. $\|s\| = \sqrt{\langle s, s\rangle} < \infty$) identificando duas seções que são iguais en quase todo ponto respeito à medida de Liouville. A construção desse espaço tem sutilezas que não vamos especificar aqui (ver Hall sec. 7.3).

Finalmente vamos definir o operador que quântiza funções suaves. Dada $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, denotamos por m_f o operador que multiplica uma seção em $\mathscr{H}$ por f. O operador ***pré-quântico*** é

$$Q(f) = -i\hbar\nabla_{X_f} + m_f.$$

Proposição 3.3 (Em Wang) $Q(a)$ é autoadjunto em $\mathscr{H}$.

Demostração. Como f é uma função suave com valores em $\mathbb{R}$, é suficente mostrar a proposição para o operador $i\nabla_{X_f}$.

$$\begin{aligned}
\langle i\nabla_{X_f} s_1, s_2\rangle &= \int_M h(i\nabla_{X_f} s_1, s_2)\frac{\omega^n}{n!} \\
&= i\int_M X_f(h(s_1, s_2))\frac{\omega^n}{n!} + \int_M h(s_1, i\nabla_{X_f} s_2))\frac{\omega^n}{n!} \\
&= i\int_M X_f(h(s_1, s_2))\frac{\omega^n}{n!} + \langle s_1, i\nabla_{X_f} s_2\rangle \\
&= i\int_M \{f, h(s_1, s_2)\}\frac{\omega^n}{n!} + \langle s_1, i\nabla_{X_f} s_2\rangle .
\end{aligned}$$

Para concluir precisamos mostrar que a integral na última igualdade se anula. Supondo que M não tem bordo, poderemos usar o teorema de Stokes se mostramos que

Afirmação Para $g, h \in C^\infty(M)$, a forma $\{g, h\}\omega^n$ é exata.

Prova da afirmação. O seguinte argumento vem de StackExchange. Primeiro note que

$$\{g, h\}\omega^n = -X_g(h)\omega^n. \tag{1}$$

Agora vamos expressar isso como derivada de Lie. Lembre que para $Y_1, \ldots, Y_{2n} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{X_g} h\omega^n\right)(Y_1, \ldots, Y_{2n}) = X_g\left(h\omega^n\left(Y_1, \ldots, Y_{2n}\right)\right) - h\omega^n\left([X_f, Y_1], Y_2, \ldots, Y_{2n}\right) \\
- \ldots - h\omega^n\left(Y_1, \ldots, Y_{2n-1}, [X, Y_{2n}]\right).
\end{aligned}$$

Aplicando a regra de Leibiniz na primeira parcela obtemos

$$X_g\left(h\omega^n\left(Y_1, \ldots, Y_{2n}\right)\right) = (X_g h)\omega^n(Y_1, \ldots, Y_{2n}) + hX_f\left(\omega^n(Y_1, \ldots, Y_{2n})\right),$$

e desse jeito podemos expresar simplesmente

$$\mathcal{L}_{X_g} h\omega^n = (X_g h)\omega^n + \cancelto{0}{h\mathcal{L}_{X_g}\omega^n}.$$

Voltando à eq. (1),

$$\{g, h\}\omega^n = -\mathcal{L}_{X_g} h\omega^n = -d(i_{X_f} h\omega^n) - \cancelto{0}{i_{X_g} d(h\omega^n)}$$

□

Voltando a nossa prova inicial, obtemos o resultado simplesmente porque

$$\int_M \{f, h(s_1, s_2)\} \frac{\omega^n}{n!} = -\int_{\partial M} i_{X_f} h(s_1, s_2) \frac{\omega^n}{n!} = 0.$$

□

Teorema 3.4 (Kostant-Souriau, em Wang) A assignação $f \rightsquigarrow Q(f)$ é uma pré-quantização. Em particular, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)] = Q(\{f, g\}). \tag{2}$$

Demostração. As propriedades (1) e (2), de linearidade e normalização, na definição de pré-quantização são obvias. Só resta mostrar eq. (2).

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)] &= \frac{1}{i\hbar}\Big(Q(f)Q(g) - Q(g)Q(f)\Big) \\ &= \frac{1}{i\hbar}\Big(- i\hbar\nabla_{X_f} + m_f)(-i\hbar\nabla_{X_g} + m_g) \\ &\quad - (-i\hbar\nabla_{X_g} + m_g)(-i\hbar\nabla_{X_f} + m_f)\Big) \\ &= \frac{1}{i\hbar}\Big((-i\hbar)^2(\nabla_{X_f}\nabla_{X_g} - \nabla_{X_g}\nabla_{X_f}) \\ &\quad - i\hbar(\nabla_{X_f} m_g + m_f\nabla_{X_g} - \nabla_{X_g} m_f - m_g\nabla_{X_f})\Big).\end{aligned} \tag{3}$$

A última parcela da última igualdade se simplifica notando que em qualquer seção s,

$$(\nabla_{X_f} m_g)(s) = \nabla_{X_f}(gs) = dg(X_f)s + g\nabla_{X_f} s;$$

daí segundo termo se cancela com $m_g\nabla_{X_f}$. A eq. (3) é

$$\begin{aligned}&= i\hbar[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] - \Big(dg(X_f) - df(X_g)\Big) \\ &= i\hbar[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] + 2\{f, g\}.\end{aligned}$$

Como $\Omega(X_f, X_g) = [\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] - \nabla_{[X_f, X_g]}$, obtemos

$$\begin{aligned}[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] &= \Omega(X_f, X_g) + \nabla_{[X_f, X_g]} \\ &= \frac{1}{i\hbar}\omega(X_f, X_g) + \nabla_{[X_f, X_g]} \\ &= -\frac{1}{i\hbar}\{f, g\} + \nabla_{X_{f,g}}.\end{aligned}$$

□

Referências

Hall, B.C. *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781461471165.

Lee, J.M. *Introduction to Complex Manifolds*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2024. ISBN: 9781470476953.

Milnor, J.W. and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974. ISBN: 9780691081229.

Ornea, Liviu and Misha Verbitsky. *Principles of Locally Conformally Kahler Geometry*. 2024. arXiv: 2208.07188 [math.DG]. URL: https://arxiv.org/abs/2208.07188.

Tu, L.W. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017. ISBN: 9783319550848.

Wang, Quoqin. *Lecture notes in Symplectic Geometry (Lecture 12)*. URL: http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/15S-Symp/SympGeom.html.

Woodhouse, N.M.J. *Geometric Quantization*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1980. ISBN: 9780198535287.