Geometria simplética

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e Tong, Lectures on Classical Mechanics.

1 Aula 1

1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geométrica da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descripções da mecânica clásica:
  - Newtoniano: $F = ma$, ecuação diferencial ordinária de segunda ordem.
  - Lagrangiano: princípio gravitacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
  - Hamiltoniano.

1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$ (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$.
- Campo Hamiltoniano: $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$$

  Which coincides with Lee's formula

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)),$$
$$\dot{y}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t))$$

  where Lee defined the ***Hamiltonian vector field*** as the *analogue of the gradient with respect to the symplectic form*, that is, satisfying $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$ for any vector field Y.

Also look at Tong's formulation:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

where L is the Lagrangian and the Hamiltonian function H is obtained as the Legendre transform of the Langrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the n 2^{nd} order differential equations by $2n$ 1^{st} order differential equations for q_i and p_i.

> In practice, for solving problems, this isn't particularly helful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de X_H, ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as ***Equações de Hamilton*** (de novo).

Exemplo. Partícula de massa m em $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$ sujeita a campo de força conservativa

$$F = -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3$$
$$q(t) = (q_1, q_2, q_3)$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaçode fase $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$.
- Hamiltoniano: $H(p, q) = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \overset{-J_0\nabla H}{\rightsquigarrow} X_H$$

where $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of H and then applying J_0. So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo ∇H e X_H : taxa de variação de H ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais?

- ***Fluxo gradiente***

$$\begin{aligned} c'(t) &= \nabla H(c(t)) \\ \frac{d}{dt}H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t)\rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2 \end{aligned}$$

  ∇H aponta na direção que H variação.

- ***Fluxo hamiltoniano***

$$\begin{aligned} c'(t) &= X_H(c(t)) \\ \frac{d}{dt}H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t)\rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0\nabla H(c(t))\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

  ?, $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$.

- ***Gradiente.*** $\nabla H(x) \in T_x\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

  onde g_0 é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

  assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

  Analogamente, $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$ é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \qquad \Omega_0(u, v) = -dJ_0V,$$

  ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^\flat : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

Observação. Note que Ω_q define uma 2-forma (c…?) em $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$.

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

X_H é único tal que $i_{X_H}\omega_0 = dH$. So this was Lee's definition ◡̈.

Definição (temporária)**.** Uma ***variedade simplética*** é (M, ω), $\omega \in \Omega^2(M)$ localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$.

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva ω em $\sum_i dq_i \wedge dp_i$.

Teorema (de Darboux, em Lee)**.** Let (M, ω) be a $2n$-dimensional symplectic manifold. For any $p \in M$ there are smooth coordinates $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ centered at p in which ω has the coordinate representation $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$.

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.

$$\begin{tikzcd}
\text{mecânica clásica} \arrow[r, "\text{quântica}"] \arrow[dr] & \text{Teoria de rep. de Lie} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{geo. Riemanniana} \arrow[dl] \\
& \text{geo. simplética} \arrow[dl, bend right] \arrow[d] & \\
\text{geo. Kähler} & \text{dinámica Lagrangiana?} &
\end{tikzcd}$$

2 Álgebra linear simplética

V espaço vetorial real, $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilinea ansimétrica, i.e. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$.

Definição. Ω é não degenerada se $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$.

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero $v \in V$ there exists $w \in V$ such that $\omega(v, w) \neq 0$; and it is equivalent to the linear map $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$ being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix (ω_{ij}) representing ω is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0 \; \forall v\}$$

então Ω é não degenerada se e somente se $\ker(\Omega) = \{0\}$.

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada é chamada simplética. (V, Ω) é um ***espaço vectorial simplético***.

Observação.

1. $\{e_1, .., e_n\}$ base de V, Ω é representado por uma matriz antisimétrica
$$A = (A_{ij}), \qquad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \qquad \Omega(u, v) = u^t A, v.$$

2. Ω é não degenerada se e somente se $\det(A) \neq 0$.

   Note que
$$\begin{aligned} \det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det(A) \\ \text{implica que} \quad \det A \neq 0 \implies m = \dim V = 2n \end{aligned}$$

3. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$. Defina
$$\begin{aligned} \Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

   note que $\ker \Omega = \ker(\Omega^\flat)$, assim Ω é não degenerada se e somente se $\Omega^\flat$ é isomorfismo.