Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Projeto final

Pré-quantização geométrica

Índice

1 Introdução **1**

2 Motivação **2**

2.1 Mecânica clássica numa variedade simplética 2

2.2 Mecânica quântica num espaço de Hilbert 2

2.3 O axioma de Dirac 3

3 Fibrados lineares complexos **4**

4 Pré-quantização geométrica **6**

1 Introdução

Uma quantização é um procedimento que associa um sistema mecânico quântico a um sistema clássico. Entre outros tipos de quantizações, a quantização geométrica está focada em passar de uma variedade simplética, entendida como o cenário da mecânica clássica, para um espaço de Hilbert do lado quântico. Esse programa foi desenvolvivo por B. Kostant e J-M Soriau, de acordo com os axiomas de Dirac.

Neste trabalho vamos explorar a primeira parte do processo de quantização geométrica, chamado de pré-quantização. Começaremos com uma discusão informal onde explicamos brevemente o *background* físico subjacente ao processo de quantização. Despois, vamos introduzir os objetos matemáticos necessários para construir o espaço de Hilbert que podemos associar a uma variedade simplética. Encerramos com a seção mais importante, onde definimos a correspondência entre observáveis clássicos e quânticos, e demonstramos que tal correspondência satisfaz os axiomas de pré-quantização de Dirac.

Os passos finais da quantização geométrica, entre outros tópicos interessantes como o teorema de Groenewold, não serão explicados em detalhes; apenas incluiremos referências onde podem ser consultados.

2 Motivação

2.1 Mecânica clássica numa variedade simplética

Lembre da primeira aula desse curso que a origem da geometria simplética é a formulação Hamiltoniana da mecânica clássica. Isso é porque podemos pensar que um sistema mecânico é uma variedade simplética com uma função Hamiltoniana: os pontos da variedade são interpretados como *estados* (posição e momento) e a *evolução* do sistema é o fluxo Hamiltoniano. A evolução de um estado em particular é a curva integral que passa por esse ponto. As curvas integrais são soluções das equações de Hamilton, que em coordenadas de Darboux são

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Lembre que em aula definimos uma integral primeira de H como uma função suave f tal que $\{f, H\} = 0$. As integrais primeiras são constantes ao longo do fluxo Hamiltoniano. No scenário da mecânica, dizemos que as funções suaves são *observáveis*, no sentido de que são quantidades que podemos medir (como posição, momento e energia). Assim, definimos para um observável f a sua *evolução* como $\{f, H\}$.

2.2 Mecânica quântica num espaço de Hilbert

Na mecânica quântica, o estado de uma partícula está dado por uma *função de onda* $\psi(x, t)$, que é um vetor unitário em um espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Assim como na mecânica clássica podemos determinar o estado de uma partícula sabendo a posição e o momento em algum tempo dado, para saber o estado de uma partícula quântica no tempo t basta conhecer a função de onda em algum tempo t_0.

A equação que determina a evolução do sistema é a equação de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{d\psi(t)}{dt} = \hat{H}\psi,$$

onde o *hamiltoniano quântico* $\hat{H}$ é um operador autoadjunto agindo em $\mathcal{H}$ e $\hbar$ é uma constante.

Um *observável quântico* é um operador autoadjunto A agindo em $\mathcal{H}$. O valor esperado de A é

$$\langle A\rangle_\psi := \langle A\psi, \psi\rangle .$$

Uma motivação linda para essa definição, usando o operador de posição, pode ser consultada em Hall sec. 3.3. Por motivos de tempo não vamos desenvolver aqui.

O valor esperado nos permite assinar um número a um observavél quântico quando aplicado a uma função de onda, do mesmo jeito em que um observável clássico pode ser avaliado num estado clássico. Assim como a evolução de um observável clássico f é $\{f, H\}$,

Proposição 1.1 (Em Wang) A *evolução* de um observável quântico é

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi = \frac{1}{i\hbar}\left\langle [A, \hat{H}]\right\rangle_\psi .$$

Demostração.

$$\frac{d}{dt}\langle A\psi(t), \psi(t)\rangle = \left\langle \frac{1}{i\hbar}A\hat{H}\psi, \psi \right\rangle + \left\langle A\psi, \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\psi \right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle [A, \hat{H}]\psi, \psi \right\rangle.$$

□

Isso justifica que o commutador é o análogo do colchete de Poisson.

2.3 O axioma de Dirac

A discussão feita até agora nos conduiz à seguinte ideia do que deveria ser uma quantização: uma correspondência

$$\begin{aligned} (M, \omega) &\rightsquigarrow (\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ H &\rightsquigarrow \hat{H} \\ f &\rightsquigarrow A \\ \{\cdot, \cdot\} &\rightsquigarrow [\cdot, \cdot]. \end{aligned}$$

O axioma de Dirac (chamado assim em Wang) nos diz a propriedades que essa correspondencia deve satisfacer:

Axioma de Dirac Uma quantização associa um operador auto-adjunto $Q(f)$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ a um observável $f \in C^\infty(M)$ satisfazendo

1. (Linearidade) $Q(\lambda f + \mu g) = \lambda Q(f) + \mu Q(b)$.
2. (Normalização) $Q(1) = \mathsf{Id}$.
3. (Condição quântica) $Q(\{f, g\}) = \frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)]$.
4. (Minimalidade) Um conjunto completo de funções que comutam respeito ao colchete de Poisson é quantizado em um conjunto completo de operadores que comutam respeito ao colchete de Lie.

Uma correspondência satisfazendo só os pontos (1)-(3) se chama de ***pré-quantização***.

Tem muito para dizer sobre estes postulados. Em primeiro lugar, o teorema "No Go" de Groenewold mostra que uma quantização não pode existir. O leitor pode consultar Hall, sec. 13.4 para um enunciado preciso e a prova dele, assim como uma discussão do que significa.

Em segundo lugar, a condição (4) está relacionada com o teorema de Stone-von Neumann, e tem uma motivação tanto física quanto matemática. Embora a construção matemática que permete passar da pré-quantização que presentaremos aseguir a uma quantização completa é pertinente num curso como o nosso, não vamos presentá-la. Referimos à Lecture 13 de Wang e as seções 23.3-7 de Hall.

3 Fibrados lineares complexos

Nesta seção definimos os objetos necessários para construir a prequantização associada a uma variedade simplética. O espaço de Hilbert será o espaço de seções de um fibrado linear complexa; aseguir vamos explicar as condições que deven ser satisfeitas para esse fibrado existir.

Começamos lembrando que um ***fibrado linear complexo*** é um fibrado vetorial cujas fibras são espaços vetoriais complexos de dimensão 1. Um fibrado linear complexo L sobre uma variedade M é ***Hermitiano*** se em cada fibra existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ que varia suavemente, i.e. para cada seção s, temos que $\langle s,s\rangle$ é uma função suave em M.

O espaço de k***-formas em*** M ***com coeficientes em*** L é

$$\Omega^k(M,L) := \Gamma(M,\Lambda^k(T^*M)\otimes L).$$

Note que como L é um fibrado complexo, $(T^*M)\otimes L$ também é complexo—mas pra frente vamos usar a estrutura complexa deste fibrado. Uma ***conexão*** ∇ em L é um mapa linear

$$\nabla : \Gamma(M,L) \to \Omega^1(M,L)$$

tal que para toda $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(M,L)$ vale a regra de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

Pegando um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos contraer X com ∇ para obter a ***derivada covariante*** na direção de X:

$$\nabla_X : \Gamma(M,L) \to \Gamma(M,L), \qquad \nabla_X s := i_X \nabla s.$$

A conexão ∇ pode ser extendida de maneira única a um mapa linear

$$\hat{\nabla} : \Omega^1(M,L) \longrightarrow \Omega^2(M,L)$$

tal que para qualquer $\alpha\otimes s \in \Omega^1(M,L)$,

$$\hat{\nabla}(\alpha\otimes s) = d\alpha\otimes s - \alpha\wedge\nabla s.$$

De fato, isso pode ser mostrado fácilmente no caso de um fibrado vetorial geral definindo em coordenadas locais $\hat{\nabla}$ como satisfazendo a condição anterior em combinações lineares de um marco local (ver Milnor and Stasheff, lem. C.4). Dessa definição também segue que para qualquer função suave f,

$$\hat{\nabla}(f(\alpha\otimes s)) = df\wedge(\theta\otimes s) + f\hat{\nabla}(\theta\otimes s).$$

Usando essa regra de Leibniz, podemos ver que $\nabla^2 := \hat{\nabla}\circ\nabla$ é $C^\infty(M)$-linear, i.e. para qualquer função suave f e seção $s \in \Gamma(M,L)$,

$$\nabla^2(fs) = \hat{\nabla}(df\otimes s + f\nabla s) = 0 - df\wedge\nabla s + df\wedge\nabla s + f\nabla^2 s = f\nabla^2 s.$$

Isso significa que existe uma 2-forma $\Omega \in \Omega^2(M)$ tal que para toda $s \in \Gamma(M, L)$,

$$\nabla^2 s = \Omega s.$$

Os detalhes disso vem de álgebra multilinear: a $C^\infty(M)$-linearidade nos diz que $\nabla^2 s$ é um $(0,2)$-campo tensorial valuado em L, e existe uma correspondência entre esses campos tensoriais e 2-formas em M (ver Tu exem. 21.9 e prop. 21.11). Essa forma se chama ***curvatura*** de ∇. Um resultado que não provaremos (ver Ornea and Verbitsky, claim 2.10) é que

$$\Omega(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

Usando isso podemos mostrar que Ω é fechada seguindo a prova do teo. 11.1 Tu). Lembre que para qualquer fibrado vetorial, em coordenadas locais sempre podemos achar um marco de seções, i.e. uma coleção de seções linearmente independentes que geram o espaço de seções. No nosso caso, como estamos trabalhando com um fibrado linear, o marco consiste de uma seção só. Assim, em qualqer vizinhança coordenada U sabemos que existe uma seção $e \in \Gamma(U, L)$ que não se anula e

$$\nabla e = \theta \otimes e$$

para alguma 1-forma $\theta \in \Omega^1(U, L)$.

Agora vamos calcular a curvatura localmente. Pegando $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y e &= \nabla_X(\theta(Y)e) \\
&= X\theta(Y)e + \theta(Y)\nabla_X e \\
&= X\theta(Y)e + \theta(Y)\theta(X)e.
\end{aligned}$$

E isso vale trocando os lugares de X e Y. E como também $\nabla_{[X,Y]}e = \theta[X, Y]e$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y)e &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})e \\
&= (X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta[X, Y])e \\
&= d\theta(X, Y)e.
\end{aligned}$$

Isso mostra que localmente,

$$\Omega = d\theta,$$

e isso implica que Ω é fechada. Também podemos usar essa expresão para mostrar que Ω é imaginaria. O argumento é bastante simples usando um produto hermitiano em L ***compatível*** com ∇, ou seja, satisfazendo

$$d\langle s, s'\rangle = \langle \nabla s, s'\rangle + \langle s, \nabla s'\rangle$$

para quaisquer s, s' seções de L.

Suponha que nosso "marco local" e é unitário. Então

$$\begin{aligned}
0 = d\langle e, e\rangle &= \langle \nabla e, e\rangle + \langle e, \nabla e\rangle \\
&= \langle \theta \otimes e, e\rangle + \langle e, \theta \otimes e\rangle \\
&= \theta + \overline{\theta}.
\end{aligned}$$

Isso significa que θ é uma forma puramente imaginária, e de fato implica que $d\theta$ também já que a derivada exterior complexa está definida como a extensão $\mathbb{C}$-linear da derivada exterior real. Os detalhes da construção da álgebra exterior complexa podem ser consultados, por exemplo, em Lee cap. 7. Note que a nossa variedade M não é a priori complexa; apenas o fibrado $T^*M \otimes L$ é complexo.

Finalmente podemos definir ***primeira classe de Chern*** de L como

$$c_1(L) := \left[\frac{1}{2\pi i}\Omega\right] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R}).$$

O teorema de Chern-Weil mostra que $c_1(L)$ é independente da escolha de conexão é métrica hermitiana em L, i.e. é um invariante topológico (ver teo. 23. 3 Tu, teo. 7.12 Lee).

Usando a aplicação de de Rham de $H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ a $H^2_{Ch}(M, \mathbb{R})$ é possível mostrar que $c_1(L)$ é uma classe de cohomologia ***integral***, i.e. $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Ao contrário,

Teorema 2.6 (Weil, em Wang) Seja M uma variedade suave e ω uma forma real fechada cuja classe de cohomologia $[c]$ é integral. Então existe um único fibrado linear Hermitiano L sobre M com conexão unitária ∇ tal que $c_1(L) = [c]$.

Esse é o resultado chave que precisamos para a seguinte seção. Contudo, parece que a prova dele não é tão simples: Wang da apenas um esbozo da demostração usando argumentos parecidos aos da implicação contrária, enquanto Hall indica o leitor para Woodhouse.

4 Pré-quantização geométrica

Dizemos que uma variedade simplética (M, ω) é pré-quantizável se

$$\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Um fibrado linear Hermitiano (L, h, ∇) sobre (M, ω) com $\Omega = \frac{\omega}{i\hbar}$ se chama ***fibrado linear pré-quântico***.

Dada (M, ω) uma variedade pre-quantizável e (L, h, ∇) um fibrado linear pré-quântico sobre M, o espaço de Hilbert onde vamos trabalhar é $\mathcal{H} := L^2(M, L)$ com o produto interior

$$\langle s_1, s_2 \rangle := \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_M h(s_1, s_2) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Formalmente, $L^2(M, L)$ é o espaço de classes de equivalência de seções quadrado-integráveis de L (i.e. $\|s\| = \sqrt{\langle s, s\rangle} < \infty$) identificando duas seções que são iguais en quase todo ponto respeito à medida de Liouville. A construção desse espaço tem sutilezas que não vamos especificar aqui (ver Hall sec. 7.3).

Finalmente vamos definir o operador que quântiza funções suaves. Dada $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, denotamos por m_f o operador que multiplica uma seção em $\mathcal{H}$ por f. O operador ***pré-quântico*** é

$$Q(f) = -i\hbar\nabla_{X_f} + m_f.$$

Proposição 3.3 (Em Wang) $Q(a)$ é autoadjunto em $\mathcal{H}$.

Demostração. Como f é uma função suave com valores em $\mathbb{R}$, é suficente mostrar a proposição para o operador $i\nabla_{X_f}$.

$$\begin{aligned}
\langle i\nabla_{X_f} s_1, s_2\rangle &= \int_M h(i\nabla_{X_f} s_1, s_2)\frac{\omega^n}{n!} \\
&= i\int_M X_f(h(s_1,s_2))\frac{\omega^n}{n!} + \int_M h(s_1, i\nabla_{X_f} s_2))\frac{\omega^n}{n!} \\
&= i\int_M X_f(h(s_1,s_2))\frac{\omega^n}{n!} + \langle s_1, i\nabla_{X_f} s_2\rangle \\
&= i\int_M \{f, h(s_1,s_2)\}\frac{\omega^n}{n!} + \langle s_1, i\nabla_{X_f} s_2\rangle\,.
\end{aligned}$$

Para concluir precisamos mostrar que a integral na última igualdade se anula. Supondo que M não tem bordo, poderemos usar o teorema de Stokes se mostramos que

Afirmação Para $g, h \in C^\infty(M)$, a forma $\{g,h\}\omega^n$ é exata.

Prova da afirmação. O seguinte argumento vem de StackExchange. Primeiro note que

$$\{g,h\}\omega^n = -X_g(h)\omega^n. \tag{1}$$

Agora vamos expressar isso como derivada de Lie. Lembre que para $Y_1,\ldots,Y_{2n} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{X_g} h\omega^n\right)(Y_1,\ldots,Y_{2n}) = X_g\left(h\omega^n\left(Y_1,\ldots,Y_{2n}\right)\right) - h\omega^n\left([X_f,Y_1],Y_2,\ldots,Y_{2n}\right) \\
- \ldots - h\omega^n\left(Y_1,\ldots,Y_{2n-1},[X,Y_{2n}]\right).
\end{aligned}$$

Aplicando a regra de Leibiniz na primeira parcela obtemos

$$X_g\left(h\omega^n\left(Y_1,\ldots,Y_{2n}\right)\right) = (X_g h)\omega^n(Y_1,\ldots,Y_{2n}) + hX_f\left(\omega^n(Y_1,\ldots,Y_{2n})\right),$$

e desse jeito podemos expresar simplesmente

$$\mathcal{L}_{X_g} h\omega^n = (X_g h)\omega^n + \cancelto{0}{h\mathcal{L}_{X_g}\omega^n}.$$

Voltando à eq. (1),

$$\{g,h\}\omega^n = -\mathcal{L}_{X_g} h\omega^n = -d(i_{X_f} h\omega^n) - \cancelto{0}{i_{X_g} d(h\omega^n)}$$

□

Voltando a nossa prova inicial, obtemos o resultado simplesmente porque

$$\int_M \{f, h(s_1,s_2)\}\frac{\omega^n}{n!} = -\int_{\partial M} i_{X_f} h(s_1,s_2)\frac{\omega^n}{n!} = 0.$$

□

Teorema 3.4 (Kostant-Souriau, em Wang) A assignação $f \rightsquigarrow Q(f)$ é uma prequantização. Em particular, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$,

$$\frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)] = Q(\{f, g\}). \tag{2}$$

Demostração. As propriedades (1) e (2), de linearidade, na definição de prequantização são obvias. Só resta mostrar eq. (2).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)] &= \frac{1}{i\hbar}\Big(Q(f)Q(g) - Q(g)Q(f)\Big) \\
&= \frac{1}{i\hbar}\Big(- i\hbar\nabla_{X_f} + m_f)(-i\hbar\nabla_{X_g} + m_g) \\
&\quad - (-i\hbar\nabla_{X_g} + m_g)(-i\hbar\nabla_{X_f} + m_f)\Big) \\
&= \frac{1}{i\hbar}\Big((-i\hbar)^2(\nabla_{X_f}\nabla_{X_g} - \nabla_{X_g}\nabla_{X_f}) \\
&\quad - i\hbar(\nabla_{X_f} m_g + m_f\nabla_{X_g} - \nabla_{X_g} m_f - m_g\nabla_{X_f})\Big).
\end{aligned} \tag{3}$$

A última parcela da última igualdade se simplifica notando que em qualquer seção s,

$$(\nabla_{X_f} m_g)(s) = \nabla_{X_f}(gs) = dg(X_f)s + g\nabla_{X_f} s;$$

daí segundo termo se cancela com $m_g\nabla_{X_f}$. A eq. (3) é

$$\begin{aligned}
&= i\hbar[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] - \Big(dg(X_f) - df(X_g)\Big) \\
&= i\hbar[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] + 2\{f, g\}.
\end{aligned}$$

Como $\Omega(X_f, X_g) = [\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] - \nabla_{[X_f, X_g]}$, obtemos

$$\begin{aligned}
[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] &= \Omega(X_f, X_g) + \nabla_{[X_f, X_g]} \\
&= \frac{1}{i\hbar}\omega(X_f, X_g) + \nabla_{[X_f, X_g]} \\
&= -\frac{1}{i\hbar}\{f, g\} + \nabla_{X_{f,g}}.
\end{aligned}$$

□

Referências

Hall, B.C. *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781461471165.

Lee, J.M. *Introduction to Complex Manifolds*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2024. ISBN: 9781470476953.

Milnor, J.W. and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974. ISBN: 9780691081229.

Ornea, Liviu and Misha Verbitsky. *Principles of Locally Conformally Kahler Geometry*. 2024. arXiv: 2208.07188 [math.DG]. URL: https://arxiv.org/abs/2208.07188.

Tu, L.W. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017. ISBN: 9783319550848.

Wang, Quoqin. *Lecture notes in Symplectic Geometry (Lecture 12)*. URL: http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/15S-Symp/SympGeom.html.

Woodhouse, N.M.J. *Geometric Quantization*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1980. ISBN: 9780198535287.