

Geometria simplética

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e [Tong, Lectures on Classical Mechanics](#).

1 Aula 1

1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geometria da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descrições da mecânica clássica:
 - Newtoniano: $F = ma$, equação diferencial ordinária de segunda ordem.
 - Lagrangiano: princípio gravitacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
 - Hamiltoniano.

1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$ (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$.
- Campo Hamiltoniano: $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \text{Id}_n \\ \hline -\text{Id}_n & 0 \end{array} \right)$$

Which coincides with Lee's formula

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)),$$

$$\dot{y}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t))$$

where Lee defined the **Hamiltonian vector field** as the *analogue of the gradient with respect to the symplectic form*, that is, satisfying $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$ for any vector field Y .

Also look at Tong's formulation:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

where L is the Lagrangian and the Hamiltonian function H is obtained as the Legendre transform of the Lagrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the n 2nd order differential equations by $2n$ 1st order differential equations for q_i and p_i .

In practice, for solving problems, this isn't particularly helpful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de X_H , ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as *Equações de Hamilton* (de novo).

Exemplo. Partícula de massa m em $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$ sujeita a campo de força conservativa

$$F = -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$q(t) = (q_1, q_2, q_3)$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaço de fase $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$.
- Hamiltoniano: $H(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \xrightarrow{-J_0 \nabla H} X_H$$

where $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of H and then applying J_0 . So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo ∇H e X_H : taxa de variação de H ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais? Tal vez é a derivada exterior de H , dH em lugar do gradiente de H .

- **Fluxo gradiente**

$$c'(t) = \nabla H(c(t))$$

$$\frac{d}{dt} H(c(t)) = \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2$$

∇H aponta na direção que H variação.

- **Fluxo hamiltoniano**

$$c'(t) = X_H(c(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0 \nabla H(c(t)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

?, $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$.

- **Gradiente.** $\nabla H(x) \in T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

onde g_0 é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

Analogamente, $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$ é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \quad \Omega_0(u, v) = -dJ_0 V,$$

ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

Observação. Note que Ω_q define uma 2-forma (c...?) em $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$.

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

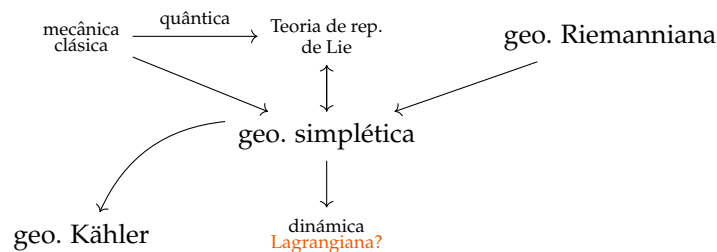
X_H é único tal que $i_{X_H} \omega_0 = dH$. So this was Lee's definition ☺.

Definição (temporária). Uma *variedade simplética* é (M, ω) , $\omega \in \Omega^2(M)$ localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$.

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva ω em $\sum_i dq_i \wedge dp_i$.

Teorema (de Darboux, em Lee). Let (M, ω) be a $2n$ -dimensional symplectic manifold. For any $p \in M$ there are smooth coordinates $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ centered at p in which ω has the coordinate representation $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$.

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.



1.4 Álgebra linear simplética

V espaço vetorial real, $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear ansimétrica, i.e. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$.

Definição. Ω é não degenerada se $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$.

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero $v \in V$ there exists $w \in V$ such that $\omega(v, w) \neq 0$; and it is equivalent to the linear map $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$ being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix (ω_{ij}) representing ω is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0 \forall v\}$$

então Ω é não degenerada se e somente se $\ker(\Omega) = \{0\}$.

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada é chamada simplética. (V, Ω) é um *espaço vectorial simplético*.

Observação.

1. $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de V , Ω é representado por uma matriz antisimétrica

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \quad \Omega(u, v) = u^t A v.$$

2. Ω é não degenerada se e somente se $\det(A) \neq 0$.

Note que

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det(A)$$

implica que $\det A \neq 0 \implies m = \dim V = 2n$

3. $\Omega \in \Lambda^2 V^*$. Defina

$$\begin{aligned}\Omega^\flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$

note que $\ker \Omega = \ker(\Omega^\flat)$, assim Ω é não degenerada se e somente se Ω^\flat é isomorfismo.

2 Aula 2

2.1 Subespaços de evs

Sejam (V, Ω) evs e $W \subseteq V$ subespaço.

Definição.

$$W^\Omega := \{u \in V \mid \Omega(u, w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

Considere a restrição de Ω à W :

$$i : W \hookrightarrow V \quad i^* \Omega|_W \in \Lambda^2 W^*,$$

então

$$\ker(\Omega|_W) = \{w \in W \mid \Omega(w, w') = 0 \ \forall w' \in W\} = W \cap W^\Omega$$

Casos de interesse:

- **Isotrópico:** $W \subseteq W^\Omega$ ($\iff \Omega|_W \equiv 0$).
- **Coisotrópico:** $W^\Omega \subseteq W$.
- **Lagrangiano:** $W = W^\Omega$.
- **Simplético:** $W \cap W^\Omega = \{0\}$ ($\Omega|_W$ é não degenerado (=simplético)).

Lema. $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}\Omega^1 : V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$

Note que $W^\Omega \mapsto \text{Ann}(W)$, assim

$$\dim W + \dim \text{Ann}(W)' = \dim V$$

□

Observação.

- $W \subseteq V$ subespaço simplético se e somente se $V = W \oplus W^\Omega$.
- W isotrópico $\implies \dim W \leq \frac{\dim V}{2}$.
- W coisotrópico $\implies \dim W \geq \frac{\dim V}{2}$.
- W Lagrangiano se $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

De fato, W é Lagrangiano se e somente se W é isotrópico e $\dim W = \frac{\dim V}{2}$.

Exercício.

- $(W^\Omega)^\Omega = W$ (W isotrópico se e somente se W^Ω).
- $(W_1 \cap W_2)^\Omega = W_1^\Omega + W_2^\Omega$.

Exemplo.

- Subespaços de dimensão 1 são isotrópicos (subespaços de codimensão 1 são coisotrópicos).
- $V = V \oplus W^*$, onde V tem a forma Ω_{can} e W e W^* são Lagrangianos.
- \mathbb{R}^{2n} , $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ base simplética, então $\text{span}\{e_i, f_i\}$ é simplético, e $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ é isotrópico (se $k = n$ é Lagrangiano).
- (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) evs's, $T : V_1 \rightarrow V_2$ isometria linear, $\text{graf}(T) := \{(u, Tu) : u \in V_1\} \subseteq V_1 \times V_2$. T é symplectomorfismo se e somente se $\text{graf}(T)$ é um subespaço Lagrangiano em $V_1 \times V_2$.
- $\dim \text{graf}(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2} \dim(V_1 \times V_2)$.
- $\Omega_{V_1 \times V_2}((u, Tu), (v, Tv)) = \Omega(u, v) - \underbrace{\Omega_2(Tu, Tv)}_{= T^* \Omega_2(u, v)} (= 0 \iff \Omega_1 = T^* \Omega_2)$.

Teorema (Existência das bases simpléticas). Para qualquer (V, Ω) evs existe uma base simplética.

Demonstração. Seja $e_1 \in V \setminus \{0\}$. Como Ω é não degenerada, existe $f_1 \in V$ tal que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Considere $W_1 = \text{span}\{e_1, f_1\}$. Então $\Omega|_{W_1}$ é não degenerado (ie. W_1 é simplético), o que acontece se e somente se $V = W_1 \oplus W_1^\Omega$. Assim, existem $e_2 \neq 0$ in W_1^Ω e $f_2 \in W_1^\Omega$ tal que $\Omega(e_2, f_2) = 1$, etc... ($V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$). O conjunto $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é uma base simplética. \square

Exercício. V ev de dimensão $2n$ e $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ é não degenerada se e somente se $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \in \Lambda^{2n} V^* \neq 0$.

2.2 Equivalência entre ev's simpléticos

(V, Ω) e (V', Ω') são *equivalentes* se existe um *simplectomorfismo* linear $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ (isometria linear) tal que

$$\varphi^* \Omega' = \Omega \in \Lambda^2 V^*$$

onde

$$\varphi^* \Omega'(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Dado (V, Ω) evs, definimos

$$\text{Sp}(V) := \{T \in \text{GL}(V) \mid T^* \Omega = \Omega\}$$

Exemplo.

1. $V = \mathbb{R}^{2n}$, $\Omega_0(u, v) = -u^T J_0 v$ onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, com base canônica $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$. Temos

$$\begin{cases} \Omega_0(e_i, e_j) = 0 \\ \Omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \Omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Definição. Uma base de (V, Ω) satisfazendo eq. (1) é chamada *base simplética*.

Following Lee, Example. 22.2, the condition may be that $\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$ where α^i and β^i are just the dual basis covectors of the base $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n\}$ of V .

Observação. Escolher/Achar uma base simplética é equivalente à escolher/achar um simplectomorfismo

$$(V, \Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$$

2. W espaço vetorial sobre \mathbb{R} , sejam $V = W \oplus W^*$, $w, w' \in W$ e $\alpha, \alpha' \in W^*$

$$\Omega_?((w, \alpha), (w', \alpha')) := \alpha'(w) - \alpha(w')$$

é não degenerada e anti-simétrica. Assim,

$$(W \oplus W^*, \Omega_?)$$

é um espaço vetorial simplético.

Observação. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base simplética de W e $\{f_1, \dots, f_n\}$ é a base dual de W^* , então

$$(W \oplus W^*, \Omega_? \cong (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)).$$

Note que ainda que dado

$$A : W \xrightarrow{\sim} W$$

automorfismo ?,

$$T_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} : W \oplus W^* \rightarrow W \oplus W^*$$

é symplectomorfismo, $(T_A = A \oplus (A^*)^{-1})$.

Moral: $GL(W) \hookrightarrow Sp(W \oplus W^*)$

$$\begin{array}{ccc} EV & \xrightarrow{\text{functor}} & EVS \\ A \circ W & \longmapsto & W \oplus W^* \circ T_A \end{array}$$

3. V ev sobre \mathbb{C} , $\dim_{\mathbb{C}} = n$, com produto interno hermitiano

$$h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

i.e. satisfazendo

- (a) $h(u, \lambda v) = \lambda h(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- (b) $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$,
- (c) $h(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$,

pode ser escrito como

$$h(u, v) = g(u, v) + i\Omega(u, v)$$

Agora considere V como espaço vetorial sobre \mathbb{R} (de dimensão $2n$).

Exercício.

- g é produto interno positivo definido.
- Ω é antisimétrica, não degenerada (simplética).
- Ache uma base de V (dica: extensão de base ortonormal de h ...)
- $U(n) \subset SP(V, \Omega)$.

4. Produto direto: $(V_1, \Omega_1), (V_2, \Omega_2)$ espaços vetoriais.

$$\begin{array}{ccc} & V_1 \times V_2 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ V_1 & & V_2 \end{array}$$

Tem a forma simplética é o pullback:

$$\Omega := \pi_1^* \Omega_1 + \pi_2^* \Omega_2$$

ou seja,

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2),$$

que é não degenerado e antissimétrico também.

Notação: se (V, Ω) é um espaço vetorial simplético, denotamos por $(V, -\Omega) := \bar{V}$, que também é um evs.

3 Aula 3

4 Aula 4

5 Aula 5

Lembrança da última aula:

1. Definição de variedade simplética.
2. Pelo menos dois exemplos.
3. Forma de volume/orientabilidade.
4. Campos simpléticos/campos hamiltonianos.
5. Obstrução cohomológica de para estrutura simplética.

Hoje: Fibrados cotangentes.

5.1 Forma tautológica no fibrado cotangente

Seja Q uma variedade e $M := T^*Q$ o fibrado cotangente.

Lembrando Se Q é uma variedade, $x \in Q$. O *espaço tangente* em x são derivações ou classes de equivalência de curvas... base local do espaço tangente ∂_{x_i} ... base dual disso é base do espaço cotangente nesse ponto... o fibrado cotangente $\bigsqcup_{x \in Q} T_x^*Q$ é variedade suave.

O fibrado cotangente possui uma 1-forma tautológica definida assim:

Definição. $\alpha \in \Omega^1(M)$, onde $M := T^*Q$, dada por

$$\alpha_p(X) = p(\pi_*(X))$$

ou seja, como X é tangente ao fibrado cotangente, ele está anclado a algum covetor, assim a gente pode avaliar ele no covetor. Também pode ser pensado como o pullback de um covetor em Q baixo a projeção cotangente usual.

Definição (Monitoria).

$$\begin{array}{c} T^*M = \{(p, \xi) | \xi : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

A *forma tautológica* é λ dada por

$$\lambda_{(p, \xi)}(v) \in \mathbb{R}, \quad v \in T_{(p, \xi)}(T^*M)$$

é igual a

$$\xi(d\pi_{(q, \xi)}(v))$$

usando o mapa

$$T_{(p, \xi)}(T^*M) \xrightarrow{d\pi_{(p, \xi)}} T_p M$$

Em coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ do espaço cotangente, temos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n A_i dx_i + \sum_{i=1}^n B_i dy_i$$

Avaliando λ nos vectores canónicos $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(p, \xi)}$ e $\frac{\partial}{\partial y_j}$ notamos que $A_i = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ pois a diferencial de π faz as B_j ser zero.

Exercício.

1. A 1-forma tautológica $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$ é a única 1-forma satisfazendo

$$\forall \mu \in \Omega^1(Q), \quad \mu^* \alpha = \mu$$

onde pensamos a μ do lado esquerdo como um mapa $\mu : Q \rightarrow T^*Q$, ie. uma secção do fibrado cotangente, e do lado direito simplesmente como uma 1-forma em Q .

Definição. $M = T^*Q$, $\alpha \in \Omega^1(M)$ então a *forma simplética canónica* de T^*Q é

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha$$

Observação.

- $d\omega_{\text{can}} = -d^2\alpha = 0$.
- Formalmente $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$

Assim, temos uma variedade simplética canónica associada a toda variedade, $(T^*Q, \omega_{\text{can}})$.

Observação.

- Dado $B \in \Omega^2(Q)$ com $dB = 0$, a forma

$$\omega_B \omega_{\text{can}} + \pi^* B$$

é simplética e o termo $\pi^* B$ se chama de *magnético*.

- Se Q é Riemanniana com métrica g temos o mapa induzido

$$\begin{aligned} g^\sharp : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ u &\longmapsto g(u, \cdot) \end{aligned}$$

Assim, o pullback the ω_{can} é uma forma simplética em TQ .

Além disso, a métrica nos fornece de uma função Hamiltoniana dada por $H \in C^\infty(TQ)$, $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$.

Veremos que o fluxo Hamiltoniano de H em (TQ, ω) é fluxo geodésico em Q .

Tem dois generalizações naturais:

- $\tilde{H}(v) = \frac{1}{2}g(u, v) + V(x)$ com $V \in C^\infty(Q)$, mecânica clássica.
- $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ com respeito a ω_B .

Pergunta (Projeto?). Existência de órbitas periódicas em níveis de energia?

Definição. O *levantamento cotangente* de um difeomorfismo (na mesma direção do difeomorfismo) é $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$ é $\hat{\varphi} = ((T\varphi)^*)^{-1}$.

Pergunta. Preserva a forma canônica?

Proposição. Sim. $\hat{\varphi} : T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$ satisfaz $\hat{\varphi}^* \alpha_2 = \alpha_1$ onde α_i é a forma tautológica, para $i = 1, 2$. Isso implica que $\hat{\varphi}^* \omega_2 = \omega_1$.

Isso implica que temos um funtor $Q \rightsquigarrow T^*Q$ que se chama de *funtor cotangente* e permite levar problemas de geometria diferencial para a geometria simplética.

Demonstração.

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & T^*Q_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array}$$

A chave dessa prova é que o diagrama commuta, assim pode se-trocar um termo $\pi_2 \circ \hat{\varphi}$ por $\varphi \circ \pi_1$. \square

O funtor que produzimos $\text{Dif}(Q) \hookrightarrow \text{Simp}(T^*Q)$ não é fiel (surjetivo), ie. existem symplectomorfismos no fibrado cotangente que não vem de difeomorfismos na variedade.

Observação. Dada uma 1-forma $A \in \Omega^1$. Pode se produzir um mapa no cotangente simplesmente trasladando por A :

$$\begin{aligned} T_A : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, \xi + A_x) \end{aligned}$$

que não pode ser um levantamento porque se projecta na identidade!

Exercício. T_A é um symplectomorfismo $\iff dA = 0$.

Mas, como sabemos quais symplectomorfismos no cotangente são sim levantamentos de difeomorfismos na variedade?

Exercício. Seja $F : T^*Q \rightarrow T^*Q$ um symplectomorfismo. Quando $F = \hat{\varphi}$ é levantamento de algum $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} Q$. Pois, isso acontece $\iff F$ preserva a forma tautológica, ie. $F^*\alpha = \alpha$.

Observação. Levantamento cotangente de campos de vetores. Começa com um campo $X \in \mathfrak{X}(Q)$, integra para obter um fluxo φ_t , que é uma família de difeomorfismos na variedade, você sabe levantar isso com o funtor obtendo outro fluxo (porque levantamento de fluxo é fluxo) $\hat{\varphi}_t$, e diferenciando obtém $\hat{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$.

Observação. Para qualquer fibrado vetorial $E \rightarrow M$, podemos ver as seções $\Gamma(E)$ como um subconjunto das funções suaves na variedade $C^\infty(E)$ —são as funções lineares nas fibras. Aí tem um modo natural de definir para qualquer campo vetorial $X \in \Gamma(TQ) \subseteq C^\infty(T^*Q)$ uma função, $H_X(p) = p(X_{\pi(p)}) = \alpha(\hat{X})$.

Proposição. \hat{X} = campo Hamiltoniano de H_X .

6 Aula 6

Hoje: Colchete de Poisson, Darboux.

6.1 Colchete de Poisson

M variedade, $\omega \in \Omega^2(M)$ não degenerada (quase-simplética). Podemos fazer

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto i_X \omega \end{aligned}$$

So that

$$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow X_f \in \mathfrak{X}(M)$$

e

$$i_{X_f} \omega = df.$$

Definição. $f, g \in C^\infty(M)$.

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$\{f, g\} = \omega(X_g, X_f) = dg(X_f) = \mathcal{L}_{X_f}g = -\mathcal{L}_{X_g}f$$

Proposição (Exercício). $d\omega = 0 \iff \{\cdot, \cdot\}$ satisfaz identidade de Jacobi. $\implies (M, \omega)$ simplética, $\{\cdot, \cdot\}$ é colchete de Lie em $C^\infty(M)$ e isso se chama de um *colchete de Poisson* em (M, ω) .

Exercício. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

Exemplo. \mathbb{R}^{2n} .

Definição. $f, g \in C^\infty(M)$ estão em *involução* se $\{f, g\} = 0$. ie. X_g é tangente aos níveis $f = \text{const}$ (e vice versa).

Observação. Nesse caso, a derivada de g ao longo das curvas integrais de X_f é zero.

Motivação (M, ω) simplética, $H \in C^\infty(M)$ queremos integrar X_H (ie. resolver $c'(t) = X_H(c(t))$). Suponha que existe $f \in C^\infty(M)$ com $\{f, H\} = 0$, chamada *integral primeira*. ie. f é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano.

No século XIX, quando Poisson vivia, a ideia era que se temos um número suficiente de integrais primeiras "independentes", podemos "integrar" X_H . (Aqui "integrar" significa dar uma solução a equação diferencial do fluxo Hamiltoniano).

Em 1810, Poisson deu a fórmula

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Teorema (Poisson). $\{f, H\} = 0 = \{g, H\} \implies \{\{f, g\}, H\} = 0$.

Teorema (Jacobi).

$$\{H, \{f, g\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} = 0$$

1880 Lie usou essa identidade no seu trabalho de transformações (álgebras de Lie).

Versão moderna (sec. XX) de integrabilidade Veremos adiante...

Teorema (Arnold-Liouville). (M, ω) de dimensão $2n$ e seu Hamiltoniano $H = f_1$ que é a primeira de uma sequência de $n = \dim M/2$ funções independentes (as derivadas são linearmente independentes) $f_2, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ tais que $\{f_i, f_j\} = 0$ e que $(f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma submersão. Então

$$N = \{(f_1, \dots, f_n) = \text{cte}\} \cong \mathbb{T}^n$$

se compacto e conexo. Além disso, a dinâmica de X_H em \mathbb{T}^n é quase periódica (=é um fluxo linear no toro, que pode ser racional ou irracional).

Observação (Projeto?). Qué acontece com essa dinâmica no toro se perturbamos o sistema? O problema de dois corpos é completamente integrável. Por exemplo, a dinâmica da Terra e o Sol pode se resolver, mas o problema adicionando a Lua é o problema de 3 corpos, que ninguém sabe como resolver. Aqui a Lua é uma perturbação.

Teorema KAM, quanto mais irracional é o fluxo, mais robusto é o toro, mais inestável.

Em fim, tudo isso para motivar os colchetes de Poisson.

6.2 Teorema de Darboux

(M, ω) variedade simplética com o colchete $\{\cdot, \cdot\}$.

Observação.

1. ω está completamente determinada por $\{\cdot, \cdot\}$, ie. se duas estruturas simpléticas dão lugar ao mesmo colchete de Poisson, elas são iguais. Por que?

$$\omega^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$$

está dada em cada ponto por

$$(\omega^\sharp)_{ij} = \{x_i, x_j\}$$

por definição.

2. A estrutura simplética canônica $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ em \mathbb{R}^{2n} está determinada (é a única tal que) por

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

É como se tivesse uma base simplética boa em todos os pontos...

Teorema (Darboux). (M, ω) simplética, ent...ão ao redor de todo ponto $x \in M$ existem coordenadas locais $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ tais que $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$, ou, equivalentemente vale

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Tem um lema que va a provar essencialmente tudo.

Lema (Primeiro passo da indução). Ao redor de qualquer ponto $x \in M$ existem coordenadas $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$ tais que

$$1 = \{p, q\}, \quad \{p, y_j\} = 0 = \{q, y_j\}, \quad \{y_i, y_j\} = \varphi_{ij}(y).$$

Ou seja, a matriz da forma é

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A(y) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

ou seja, temos uma expressão

$$\omega = dq \wedge dp + \omega_N$$

onde ω_N é dada por $A(y)$ e é simplética.

Demonstração do Lema **Paso 1** Seja p uma função tal que $X_p(x) \neq 0$. Pelo teorema de fluxo tabular (retificação) existe uma função q tal que $X_p = \frac{\partial}{\partial q}$, de modo que $\{p, q\} = dq(X_p) = 1$ e $dp(X_q) = -1$.

Paso 2 Então X_p e X_q são linearmente independentes, pois $1 = \{p, q\} = \omega(X_p, X_q) \neq 0$, o que aconteceria por antisimetria se são linearmente dependentes. Além disso, comutam, pois

$$[X_p, X_q] \stackrel{\text{aula passada?}}{=} X_{\{p, q\}=1} = 0.$$

Agora usamos a generalização do teorema do fluxo tabular: se X_1, \dots, X_k são campos linearmente independentes e que comutam, então existem coordenadas (x_1, \dots, x_n) tais que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. (Teo. função inversa.) Assim, existem coordenadas locais y_1, \dots, y_{2n} tais que

$$X_q = \frac{\partial}{\partial y_{2n-1}}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial y_{2n}}.$$

Logo

$$dy_j(X_q) = 0 = dy_j(X_p)$$

para $j = 1, \dots, 2n - 2$.

Paso 3 As diferenciais

$$dq, dp, dy_1, \dots, dy_{2n-2}$$

são linearmente independentes, pois se

$$adq + bdp + \sum_i c_{ij} dy_i = 0$$

pois as y_i já são LI, e avaliando em X_i obtemos $a = 0$, e no X_q que $b = 0$.

Temos um sistema de coordenadas $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$ ao redor de x tal que as condições do teorema salvo a última se cumprem. Agora veamos que $\{y_i, y_j\}$ não depende de p, q .

Paso 4 Só lembrar que

$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial q}$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial p} \{y_i, y_j\} = -\{q, \{y_i, y_j\}\} = 0$$

onde a segunda igualdade é jacobi. Fim.

□

Demonstração do Teo. Darboux. Segue do lema por indução

□

Definição. Uma *estrutura de Poisson* em uma variedade M é

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

\mathbb{R} -bilinear, antissimétrica, Jacobi e Leibniz, ie. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

Exemplo.

- (M, ω) simplética com $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$.

7 Aula 7

Na aula passada vimos:

- Colchetes de Poisson.
- Teorema de Darboux. Prova: demonstrar que tem relações que caracterizam a forma de maneira única.
- É possível descrever estruturas simpléticas em termos de colchete de Poisson.: Variedades de Poisson. Isso é axiomatizar as propriedades básicas do colchete de Poisson. Esses objetos podem ser entendidos como foliações simpléticas.

7.1 Subvariedades

Seja (M, ω) simplética e $N \xrightarrow{i} (M, \omega)$. Então temos

$$\omega_N = i^* \omega \in \Omega^2(N)$$

que é fechada porque o pullback comuta com derivada exterior.

$$\begin{aligned} \ker(\omega_N) &= \{X \in TN : \omega(X, Y) = 0 \ \forall Y \in TN\} \\ &= TN \cap TN^\omega \subseteq TN \end{aligned}$$

7.2 Pausa para distribuições

P variedade.

Definição. Uma *distribuição (generalizada)* em P é

$$P \ni x \longmapsto D_x \subseteq T_x P \text{ subespaço}$$

e o posto da distribuição em $x := \dim D_x$.

A distribuição é *suave* se para todo $x_0 \in P$, $\forall v \in D_{x_0}$ existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(P)$ que estende a v e está contido na distribuição no sentido de que $X_x \subseteq D_x \forall x$ e $X_{x_0} = v$.

Exemplo. Núcleo de 2-formas é um exemplo de distribuição, mas não é suave em geral.

Definição. Uma distribuição suave $D \subseteq TP$ é dita *integrável* se $\forall x \in P$ existe uma subvariedade $S \ni x$, $TS = D|_S$

No caso de uma distribuição (suave) integrável, por todo ponto passa uma subvariedade integral conexa maximal chamadas *folhas*.

Observação.

- Distribuição suave, de posto constante é a mesma coisa que um subfibrado vetorial $D \subseteq TP$. Nesse caso,

Teorema (Frobenius). D é integrável se e somente se é *involutivo*, ou seja

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

Demonstração. Note que \implies é trivial porque se tem uma variedade que realiza a distribuição, o colchete de Lie sempre vai ser outro campo vetorial tangente. \square

- Suponha que $D = \ker(\omega)$ com $\omega \in \Omega^2(P)$ é suave $\iff D$ tem posto constante. Aqui \impliedby é fácil.
- Se $d\omega = 0 \implies D = \ker \omega$ é involutivo.

Conclusão Se ω é uma 2-forma fechada e $D = \ker \omega$ tem posto constante, dá lugar a uma folheação (regular=folhas de mesma dimensão) em P .

7.3 Voltando

Definição. N é dita

- *isotrópica* quando $T_x N \subseteq T_x N^\omega \iff \omega_N = 0 \iff \ker \omega_N = TN$.
- *coisotrópica* quando $T_x N^\omega \subseteq T_x N$.
- *lagrangiana* quando $T_x N = T_x N^\omega \iff i^* \omega = \omega_N = 0$ e $\dim N = \dim M/2$.
- *simplética* $T_x N \cap (T_x N)^\omega = \{0\} \forall x \in N \iff \omega_N$ é simplética.
- *posto constante* $T_x N \cap T_x N^\omega \subseteq T_x N \forall N$ tem posto constante.

Exemplo.

- curvas são isotrópicas.
- hipersuperfícies são coisotrópicas.
- Veremos vários exemplos de subespaços lagrangianos.

7.3.1 Sobre subvariedades coisotrópicas

Isto também vale para subvariedades de posto constante.

Vamos ver uma versão geométrica de um exercício da lista 1, onde pegávamos o quociente de um espaço vetorial por el núcleo de uma forma para obter um espaço vetorial simplético.

Exercício. Suponha que as folhas da folheação são fibras de uma submersão

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & (M, \omega) \\ q \downarrow & & \\ B = N / \sim & & \end{array}$$

então existe uma forma simplética $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$ tal que $q^* \bar{\omega} = \omega_N$.

Exemplo. O fluxo hamiltoniano do oscilador harmónico $H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_i q_i^2 + p_i^2$ com $c = 1/2$ da \mathbb{CP}^{n-1}

Exercício. $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$. $N = \psi^{-1}(c)$ para c valor regular.

- N coisotrópico $\iff \{\psi_i, \psi_j\}|_N = 0$.
- N simplético $\iff (\{\psi_i, \psi_j\}|_N)_{ij}$ é invertível.

8 Aula 8

Lembre:

- Subvariedades lagrangianas, (co-)isotrópicas, simpléticas. Aprofundamos nas coisotrópicas (posto constante), como as hipersuperfícies ou conjuntos de nível, que tem uma folheação, e com condições de regularidade pode passar para o espaço quociente, que é simplético, como \mathbb{CP}^n .

8.1 Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas

Exemplo. Dois variedades simpléticas e um difeomorfismo entre elas. Então φ é symplectomorfismo se e só se seu gráfico é lagrangiano. Talvez isso pode ser usado para pensar em symplectomorfismos em um objeto quântico.

Observação. Considere

$$\begin{aligned} \varepsilon : M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\ x &\longmapsto (x, \varphi x) \end{aligned}$$

então o grafo de φ é lagrangiano $\iff \omega_1 - \varphi^* \omega_2$.

Exemplo (no fibrado cotangente).

- A seção zero $Q \hookrightarrow T^*Q$ é nos mostra que Q é uma subvariedade lagrangiana.
- A fibra (cotangente) de um ponto também é uma subvariedade lagrangiana de T^*Q .
- Logo, o espaço de fibras?
- Pegue uma subvariedade da base $S \subset Q$. Considere o *fibrado conormal* N^*S, ν_S^* . É o dual do fibrado tangente. É o anulador de $TS, \{(x, \xi) \in T^*Q : x \in S, \xi|_{T_x S} = 0\}$. Note que é um subfibrado do fibrado cotangente.

Os dois exemplos anteriores são $S = Q$ e $S = \{x\}$ da seguinte prop:

Proposição. $N^*S \hookrightarrow T^*Q$ é (um subfibrado) uma subvariedade lagrangiana.

Demonstração. Usando coordenadas adaptadas e a forma tautológica do T^*Q , damos coordenadas N^*Q da forma $(x_1, \dots, x_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ e assim o pullback da forma tautológica é zero porque ele avalia os covectores ξ_{grande} em vectores x_{pequeno} . \square

Exemplo. Uma forma μ vista como seção do fibrado cotangente pode ser pensada como um mergulho de Q em T^*Q .

Proposição. Essa subvariedade é lagrangiana $\iff d\mu = 0$.

8.2 Método de Moser

Dadas duas formas simpléticas numa variedade, como podemos achar um simplectomorfismo entre elas? A ideia do método é assim:

- Step 1** Interpolar as duas formas mediante uma família contínua ω_t de formas simpléticas.
- Step 2** Buscar uma (isotopia) família de difeomorfismos φ_t com $\varphi_0 = \text{id}$ e tal que $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$. Com isso a gente procura levar o problema para uma EDO.
- Step 3** Os fluxos são isotopias com uma relação de comutatividade. Eles correspondem com campos vetoriais. As isotopias em geral estão em correspondência com *campos de vetores não autónomos*.

Definição. Uma família suave de difeomorfismos $\{\varphi_t\}$ com $\varphi_0 = \text{id}$ é chamada *isotopia*. Suave significa que $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ é suave.

Exemplo. Fluxos (complets) são isotopias tq $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

Definição. Um *campo de vetor t-dependente* ou *não autónomo* é família suave de campos $X_t \in \mathfrak{X}(M)$. De novo, suave é que $(t, x) \mapsto X_t(x)$ é suave.

isotopia \leftrightarrow campos t-dependentes

A diferenciação sempre é simples né? Fixa um ponto e varia o tempo, obtém uma curva.

$$\phi_t \mapsto X_t(\phi_t(x)) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{t=\tau} \phi_\tau(x).$$

A recíproca é mais difícil. A ideia é estender a variedade a $M \times \mathbb{R}$, e considerar $\bar{X}(x, t) = (X_t(x), \frac{d}{dt})$. Esse depende do tempo, assim podemos achar um fluxo ϕ_t de \bar{X}_t . Aqui se deve estender o fluxo usando bump functions, assim a gente tem que ϕ_t está definido para toda t .

Note que $\phi_t(x, s) = (G_t, t + s)$ para alguma função G na variedade. Podemos achar uma inversa dela assim:

$$(x, s) = \phi_{-t}(\phi_t(x, s)) = G_{-t}(G_t(x, s), t + s), s)$$

ie. a inversa de

$$x \mapsto G_t(x, s)$$

é

$$y \mapsto G_{-t}(y, s + t)$$

Logo,

$$\phi_t(x) = G_t(x, 0)$$

é uma isotopia e como a derivada do fluxo

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x, 0) = \bar{X}(G_t(x, 0), t) \implies \frac{d}{dt} G_t(x, 0) = X_t(x, 0).$$

E é isso. Temos a correspondencia.

Voltando ao método de Moser, para achar $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$, pegamos uma isotopia que puxa ω_t em ω_0 , e queremos diferenciar a isotopia. No caso de um fluxo, trata-se da derivada de Lie por definição.

Lema. $\{\varphi_t\}$ isotopia em M , $\{X_t\}$ campo autónomo. Sejam $\eta \in \Omega^k(M)$, $\beta_t \in \Omega^k(M)$. Então vale:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \epsilon) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \eta$$

onde estamos pegando a derivada num tempo t fixo. Daí veremos que pela regra da cadeia segue que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \beta_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \beta_t + \frac{d}{dt} \beta_t)$$

Demonstração. a. Considere os seguintes operadores em Ω^\bullet :

$$Q_1(\eta) = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \eta, \quad Q_2(\eta) = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \eta$$

Daí note que esses operadores comutam com a derivada exterior, são Leibniz respeito ao producto cunha e coincidem em funções. Daí segue que $Q_1 = Q_2$.

b. A regra da cadeia diz que para uma função $F(a, b)$,

$$\frac{d}{dt}F(t, t) = \frac{\partial}{\partial a}F(t, t) + \frac{\partial}{\partial b}F(t, t)$$

e olha para $\varphi_a^* \beta_b$ como a F . Sustituindo e usando a., o resultado segue.

□

Uma aplicação disso é

Teorema (de estabilidade de Moser). M compacta, $\{\omega_t\}$ formas simpléticas, $t \in [0, 1]$. Se as formas são todas cohomologas então elas são symplectomorfas, i.e. $[\omega_t] = [\omega_0] \implies \exists \phi_t$ tq $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$. Ou, de outra forma, se existe uma família suave de formas β_t tais que

$$\omega_t = \omega_0 + d\beta_t$$

então existe uma isotopia $\{\varphi_t\}$ tal que $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$.

Demonstração. Note que não é imediato que as classes de cohomologia nos deem uma família suave, mas é equivalente sim (usando decomposição de Hodge? Tem algo mais simples?). O método é achar um campo de vetores autónomo resolvendo

$$i_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \beta_t$$

pois dela segue que

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = -d \left(\frac{d}{dt} \beta_t \right)$$

E daí a segunda afirmação do lema.

□