

# Geometria simplética

## Contents

<b>1</b>	<b>Aula 1</b>	<b>2</b>
1.1	Origem da geometria simplética . . . . .	2
1.2	Formalismo hamiltoniano (simplificado) . . . . .	2
1.3	Evolução temporal (equações de Hamilton) . . . . .	3
1.4	Álgebra linear simplética . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Aula 2</b>	<b>6</b>
2.1	Subespaços de evs . . . . .	6
2.2	Equivalência entre ev's simpléticos . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Aula 3</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Aula 4</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Aula 5</b>	<b>10</b>
5.1	Forma tautológica no fibrado cotangente . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Aula 6</b>	<b>13</b>
6.1	Colchete de Poisson . . . . .	13
6.2	Teorema de Darboux . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Aula 7</b>	<b>17</b>
7.1	Subvariedades . . . . .	17
7.2	Pausa para distribuições . . . . .	17
7.3	Voltando . . . . .	18
7.3.1	Sobre subvariedades coisotrópicas . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Aula 8</b>	<b>19</b>
8.1	Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas . . . . .	19
8.2	Método de Moser . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Aula 9</b>	<b>22</b>
9.1	Aplicação ao teorema de Darboux . . . . .	23
9.2	Teorema de Darboux generalizado (Weinstein) . . . . .	25
9.2.1	Sobre o Lema de Poincaré relativo . . . . .	26
9.2.2	Vizinhança tubular . . . . .	26
<b>10</b>	<b>Monitoria 2</b>	<b>27</b>
<b>11</b>	<b>Aula 10</b>	<b>27</b>
11.1	Darboux generalizado versão 2.0 . . . . .	28
11.2	Teorema das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein . . . . .	30

<b>12 Aula 11</b>	<b>31</b>
12.1 Aplicação (de Weinstein): pontos fixos de symplectomorfismos . . . . .	31
12.2 Outra classe de exemplos de variedades simpléticas: órbitas coadjuntas .	33
12.2.1 Revisão de grupos e álgebras de Lie . . . . .	33
12.2.2 Sobre SU(2) . . . . .	34
<b>13 Aula 12</b>	<b>35</b>

## 1 Aula 1

Além do material do curso, uso bastante Lee, Intro. to Smooth Manifolds, e [Tong, Lectures on Classical Mechanics](#).

### 1.1 Origem da geometria simplética

- Formulação da geometria da mecânica (séc XIX).
- Versão moderna, 1960-70.
- Diferentes descrições da mecânica clássica:
  - Newtoniano:  $F = ma$ , equação diferencial ordinária de segunda ordem.
  - Lagrangiano: princípio variacional (Eq. E-L). Following Tong, these equations are:
  - Hamiltoniano.

### 1.2 Formalismo hamiltoniano (simplificado)

This happened in the 1880's (according to Tong).

- Espaço de base  $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$  (conjunto de estados)
- Função Hamiltoniana  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ .
- Campo Hamiltoniano:  $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ .

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \text{Id}_n \\ \hline -\text{Id}_n & 0 \end{array} \right)$$

Which coincides with Lee's formula

$$\begin{aligned} \dot{x}^i(t) &= \frac{\partial H}{\partial y^i}(x(t), y(t)), \\ \dot{y}^i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

where Lee defined the **Hamiltonian vector field** as the analogue of the gradient with respect to the symplectic form, that is, satisfying  $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$  for any vector field  $Y$ .

Also look at Tong's formulation:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

where  $L$  is the Lagrangian and the Hamiltonian function  $H$  is obtained as the Legendre transform of the Lagrangian. Tong shows how the Hamiltonian formalism allows to replace the  $n$  2<sup>nd</sup> order differential equations by  $2n$  1<sup>st</sup> order differential equations for  $q_i$  and  $p_i$ .

In practice, for solving problems, this isn't particularly helpful. But, as we shall see, conceptually it's very useful!

At least for me, it looks like a first insight on why symplectic geometry lives on even-dimensional spaces.

### 1.3 Evolução temporal (equações de Hamilton)

Curvas integrais

$$c(t) = (q_i(t), p_i(t))$$

de  $X_H$ , ie.

$$c'(t) = X_H(c(t)) \iff \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que são as *Equações de Hamilton* (de novo).

**Exemplo.** Partícula de massa  $m$  em  $\mathbb{R}^3 = \{q_1, q_2, q_3\}$  sujeita a campo de força conservativa

$$\begin{aligned}F &= -\nabla V, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ q(t) &= (q_1, q_2, q_3)\end{aligned}$$

Equação de Newton:

$$m\ddot{q} = \partial V(q) \iff m\ddot{q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}(q), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponto de vista Hamiltoniano:

- Espaço de fase  $\mathbb{R}^5 = \{(q_i, p_i)\}$ .
- Hamiltoniano:  $H(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(q)$
- Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i/m \iff p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightsquigarrow \nabla H \xrightarrow{-J_0 \nabla H} X_H$$

where  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . So it looks like another way of obtaining (defining?) the Hamiltonian vector field is to take the gradient of  $H$  and then applying  $J_0$ . So it would be nice to see eventually that this is the same as Lee's definition of "symplectic gradient" so to say.

Compondo  $\nabla H$  e  $X_H$  : taxa de variação de  $H$  ao longo dos fluxos. Mas: o que é a composição de dois campos vetoriais? Tal vez é a derivada exterior de  $H$ ,  $dH$  em lugar do gradiente de  $H$ .

- **Fluxo gradiente**

$$c'(t) = \nabla H(c(t))$$

$$\frac{d}{dt} H(c(t)) = \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle = \|\nabla H(c(t))\|^2$$

$\nabla H$  aponta na direção que  $H$  variação.

- **Fluxo hamiltoniano**

$$c'(t) = X_H(c(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(c(t)) &= \langle \nabla H(c(t)), c'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla H(c(t)), -J_0 \nabla H(c(t)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

?,  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $H \rightsquigarrow dH \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ .

- **Gradiente.**  $\nabla H(x) \in T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$  é único.

$$g_0(\nabla H(x), \cdot) = \langle \nabla H(x), \cdot \rangle = dH(x)$$

onde  $g_0$  é a métrica Euclidiana. De outra forma,

$$\begin{aligned} g_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ u &\mapsto g_0(u, \cdot) \end{aligned}$$

assim,

$$\nabla H(x) \xrightarrow{\sim} dH(x).$$

Analogamente,  $X_H(x) \in \mathbb{R}^{2n}$  é único tal que?

$$\Omega_0(X_H(x), \cdot) = dH(x), \quad \Omega_0(u, v) = -dJ_0 V,$$

ou:

$$\begin{aligned} \Omega_0^b : \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n})^* \\ X_H(x) &\longleftrightarrow dH(x) \end{aligned}$$

**Observação.** Note que  $\Omega_q$  define uma 2-forma (c...?) em  $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_i, p_i)\}$ .

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \in \Omega_2(\mathbb{R}^{2n}),$$

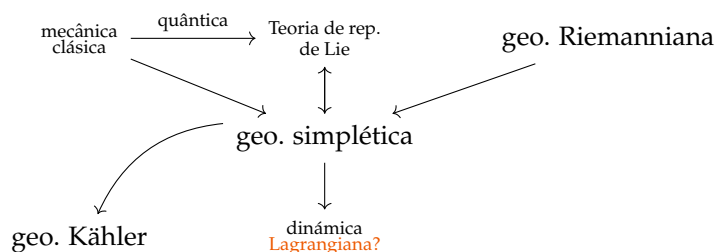
$X_H$  é único tal que  $i_{X_H} \omega_0 = dH$ . So this was Lee's definition ☺.

**Definição (temporária).** Uma *variedade simplética* é  $(M, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega^2(M)$  localmente isomorfa a  $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$ .

[Dessenho mostrando que o pullback da carta coordenada leva  $\omega$  em  $\sum_i dq_i \wedge dp_i$ .

**Teorema (de Darboux, em Lee).** Let  $(M, \omega)$  be a  $2n$ -dimensional symplectic manifold. For any  $p \in M$  there are smooth coordinates  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  centered at  $p$  in which  $\omega$  has the coordinate representation  $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ .

And Lee does a proof using the *theory of time-dependant flows*.



## 1.4 Álgebra linear simplética

$V$  espaço vetorial real,  $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  forma bilinea ansimétrica, i.e.  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ .

**Definição.**  $\Omega$  é não degenerada se  $\Omega(u, v) = 0 \forall v \iff u = 0$ .

Following Lee, this can also be stated as: for each nonzero  $v \in V$  there exists  $w \in V$  such that  $\omega(v, w) \neq 0$ ; and it is equivalent to the linear map  $v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$  being invertible, and also that in terms of some (hence every) basis, the matrix  $(\omega_{ij})$  representing  $\omega$  is nonsingular.

Ou seja, se

$$\ker \Omega := \{u \in V | \Omega(u, v) = 0 \forall v\}$$

então  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\ker(\Omega) = \{0\}$ .

$\Omega \in \Lambda^2 V^*$  é não degenerada é chamada simplética.  $(V, \Omega)$  é um *espaço vectorial simplético*.

**Observação.**

1.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $V$ ,  $\Omega$  é representado por uma matriz antisimétrica

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j), \quad \Omega(u, v) = u^t A v.$$

2.  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\det(A) \neq 0$ .

Note que

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det(A)$$

implica que  $\det A \neq 0 \implies m = \dim V = 2n$

3.  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ . Defina

$$\begin{aligned}\Omega^b : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$

note que  $\ker \Omega = \ker(\Omega^b)$ , assim  $\Omega$  é não degenerada se e somente se  $\Omega^b$  é isomorfismo.

## 2 Aula 2

### 2.1 Subespaços de evs

Sejam  $(V, \Omega)$  evs e  $W \subseteq V$  subespaço.

**Definição.**

$$W^\Omega := \{u \in V \mid \Omega(u, w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

Considere a restrição de  $\Omega$  à  $W$ :

$$i : W \hookrightarrow V \quad i^* \Omega|_W \in \Lambda^2 W^*,$$

então

$$\ker(\Omega|_W) = \{w \in W \mid \Omega(w, w') = 0 \ \forall w' \in W\} = W \cap W^\Omega$$

Casos de interesse:

- **Isotrópico:**  $W \subseteq W^\Omega$  ( $\iff \Omega|_W \equiv 0$ ).
- **Coisotrópico:**  $W^\Omega \subseteq W$ .
- **Lagrangiano:**  $W = W^\Omega$ .
- **Simplético:**  $W \cap W^\Omega = \{0\}$  ( $\Omega|_W$  é não degenerado (=simplético)).

**Lema.**  $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\Omega^1 : V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot)\end{aligned}$$

Note que  $W^\Omega \mapsto \text{Ann}(W)$ , assim

$$\dim W + \dim \text{Ann}(W)' = \dim V$$

□

**Observação.**

- $W \subseteq V$  subespaço simplético se e somente se  $V = W \oplus W^\Omega$ .
- $W$  isotrópico  $\implies \dim W \leq \frac{\dim V}{2}$ .
- $W$  coisotrópico  $\implies \dim W \geq \frac{\dim V}{2}$ .
- $W$  Lagrangiano se  $\dim W = \frac{\dim V}{2}$ .

De fato,  $W$  é Lagrangiano se e somente se  $W$  é isotrópico e  $\dim W = \frac{\dim V}{2}$ .

**Exercício.**

- $(W^\Omega)^\Omega = W$  ( $W$  isotrópico se e somente se  $W^\Omega$ ).
- $(W_1 \cap W_2)^\Omega = W_1^\Omega + W_2^\Omega$ .

**Exemplo.**

- Subespaços de dimensão 1 são isotrópicos (subespaços de codimensão 1 são coisotrópicos).
- $V = V \oplus W^*$ , onde  $V$  tem a forma  $\Omega_{\text{can}}$  e  $W$  e  $W^*$  são Lagrangianos.
- $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  base simplética, então  $\text{span}\{e_i, f_i\}$  é simplético, e  $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$  é isotrópico (se  $k = n$  é Lagrangiano).
- $(V_1, \Omega_1)$  e  $(V_2, \Omega_2)$  evs's,  $T : V_1 \rightarrow V_2$  isometria linear,  $\text{graf}(T) := \{(u, Tu) : u \in V_1\} \subseteq V_1 \times V_2$ .  $T$  é symplectomorfismo se e somente se  $\text{graf}(T)$  é um subespaço Lagrangiano em  $V_1 \times V_2$ .
- $\dim \text{graf}(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2} \dim(V_1 \times V_2)$ .
- $\Omega_{V_1 \times V_2}((u, Tu), (v, Tv)) = \Omega(u, v) - \underbrace{\Omega_2(Tu, Tv)}_{= T^* \Omega_2(u, v)} (= 0 \iff \Omega_1 = T^* \Omega_2)$ .

**Teorema (Existência das bases simpléticas).** Para qualquer  $(V, \Omega)$  evs existe uma base simplética.

*Demonstração.* Seja  $e_1 \in V \setminus \{0\}$ . Como  $\Omega$  é não degenerada, existe  $f_1 \in V$  tal que  $\Omega(e_1, f_1) = 1$ . Considere  $W_1 = \text{span}\{e_1, f_1\}$ . Então  $\Omega|_{W_1}$  é não degenerado (ie.  $W_1$  é simplético), o que acontece se e somente se  $V = W_1 \oplus W_1^\Omega$ . Assim, existem  $e_2 \neq 0$  in  $W_1^\Omega$  e  $f_2 \in W_1^\Omega$  tal que  $\Omega(e_2, f_2) = 1$ , etc... ( $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ ). O conjunto  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  é uma base simplética.  $\square$

**Exercício.**  $V$  ev de dimensão  $2n$  e  $\Omega \in \Lambda^2 V^*$  é não degenerada se e somente se  $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \in \Lambda^{2n} V^* \neq 0$ .

## 2.2 Equivalência entre ev's simpléticos

$(V, \Omega)$  e  $(V', \Omega')$  são *equivalentes* se existe um *simplectomorfismo* linear  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$  (isometria linear) tal que

$$\varphi^* \Omega' = \Omega \in \Lambda^2 V^*$$

onde

$$\varphi^* \Omega'(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Dado  $(V, \Omega)$  evs, definimos

$$\text{Sp}(V) := \{T \in \text{GL}(V) \mid T^* \Omega = \Omega\}$$

**Exemplo.**

1.  $V = \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\Omega_0(u, v) = -u^T J_0 v$  onde  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ , com base canônica  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ . Temos

$$\begin{cases} \Omega_0(e_i, e_j) = 0 \\ \Omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \Omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

**Definição.** Uma base de  $(V, \Omega)$  satisfazendo eq. (1) é chamada *base simplética*.

Following Lee, Example. 22.2, the condition may be that  $\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$  where  $\alpha^i$  and  $\beta^i$  are just the dual basis covectors of the base  $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n\}$  of  $V$ .

**Observação.** Escolher/Achar uma base simplética é equivalente à escolher/achar um simplectomorfismo

$$(V, \Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$$

2.  $W$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , sejam  $V = W \oplus W^*$ ,  $w, w' \in W$  e  $\alpha, \alpha' \in W^*$

$$\Omega_?( (w, \alpha), (w', \alpha') ) := \alpha'(w) - \alpha(w')$$

é não degenerada e anti-simétrica. Assim,

$$(W \oplus W^*, \Omega_?)$$

é um espaço vetorial simplético.

**Observação.** Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base simplética de  $W$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é a base dual de  $W^*$ , então

$$(W \oplus W^*, \Omega_? \cong (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)).$$



Note que ainda que dado

$$A : W \xrightarrow{\sim} W$$

automorfismo ?,

$$T_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} : W \oplus W^* \rightarrow W \oplus W^*$$

é symplectomorfismo,  $(T_A = A \oplus (A^*)^{-1})$ .

**Moral:**  $GL(W) \hookrightarrow Sp(W \oplus W^*)$

$$\begin{array}{ccc} EV & \xrightarrow{\text{functor}} & EVS \\ A \circ W & \longmapsto & W \oplus W^* \circ T_A \end{array}$$

3.  $V$  ev sobre  $\mathbb{C}$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} = n$ , com produto interno hermitiano

$$h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

i.e. satisfazendo

- (a)  $h(u, \lambda v) = \lambda h(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,
- (b)  $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$ ,
- (c)  $h(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$ ,

pode ser escrito como

$$h(u, v) = g(u, v) + i\Omega(u, v)$$

Agora considere  $V$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  (de dimensão  $2n$ ).

**Exercício.**

- $g$  é produto interno positivo definido.
- $\Omega$  é antisimétrica, não degenerada (simplética).
- Ache uma base de  $V$  (dica: extensão de base ortonormal de  $h$ ...)
- $U(n) \subset SP(V, \Omega)$ .

4. Produto direto:  $(V_1, \Omega_1), (V_2, \Omega_2)$  espaços vetoriais.

$$\begin{array}{ccc} & V_1 \times V_2 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ V_1 & & V_2 \end{array}$$

Tem a forma simplética é o pullback:

$$\Omega := \pi_1^* \Omega_1 + \pi_2^* \Omega_2$$

ou seja,

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2),$$

que é não degenerado e antissimétrico também.

**Notação:** se  $(V, \Omega)$  é um espaço vetorial simplético, denotamos por  $(V, -\Omega) := \bar{V}$ , que também é um evs.

### 3 Aula 3

### 4 Aula 4

### 5 Aula 5

Lembrança da última aula:

1. Definição de variedade simplética.
2. Pelo menos dois exemplos.
3. Forma de volume/orientabilidade.
4. Campos simpléticos/campos hamiltonianos.
5. Obstrução cohomológica de para estrutura simplética.

**Hoje:** Fibrados cotangentes.

#### 5.1 Forma tautológica no fibrado cotangente

Seja  $Q$  uma variedade e  $M := T^*Q$  o fibrado cotangente.

**Lembrando** Se  $Q$  é uma variedade,  $x \in Q$ . O *espaço tangente* em  $x$  são derivações ou classes de equivalência de curvas... base local do espaço tangente  $\partial_{x_i}$ ... base dual disso é base do espaço cotangente nesse ponto... o fibrado cotangente  $\bigsqcup_{x \in Q} T_x^*Q$  é variedade suave.

O fibrado cotangente possui uma 1-forma tautológica definida assim:

**Definição.**  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , onde  $M := T^*Q$ , dada por

$$\alpha_p(X) = p(\pi_*(X))$$

ou seja, como  $X$  é tangente ao fibrado cotangente, ele está anclado a algum covetor, assim a gente pode avaliar ele no covetor. Também pode ser pensado como o pullback de um covetor em  $Q$  baixo a projeção cotangente usual.

**Definição (Monitoria).**

$$\begin{array}{c} T^*M = \{(p, \xi) | \xi : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

A *forma tautológica* é  $\lambda$  dada por

$$\lambda_{(p, \xi)}(v) \in \mathbb{R}, \quad v \in T_{(p, \xi)}(T^*M)$$

é igual a

$$\xi(d\pi_{(q, \xi)}(v))$$

usando o mapa

$$T_{(p, \xi)}(T^*M) \xrightarrow{d\pi_{(p, \xi)}} T_p M$$

Em coordenadas locais  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  do espaço cotangente, temos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n A_i dx_i + \sum_{i=1}^n B_i dy_i$$

Avaliando  $\lambda$  nos vectores canónicos  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(p, \xi)}$  e  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  notamos que  $A_i = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$  pois a diferencial de  $\pi$  faz as  $B_j$  ser zero.

**Exercício.**

1. A 1-forma tautológica  $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$  é a única 1-forma satisfazendo

$$\forall \mu \in \Omega^1(Q), \quad \mu^* \alpha = \mu$$

onde pensamos a  $\mu$  do lado esquerdo como um mapa  $\mu : Q \rightarrow T^*Q$ , ie. uma secção do fibrado cotangente, e do lado direito simplesmente como uma 1-forma em  $Q$ .

**Definição.**  $M = T^*Q$ ,  $\alpha \in \Omega^1(M)$  então a *forma simplética canónica* de  $T^*Q$  é

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha$$

**Observação.**

- $d\omega_{\text{can}} = -d^2\alpha = 0$ .
- Formalmente  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$

Assim, temos uma variedade simplética canónica associada a toda variedade,  $(T^*Q, \omega_{\text{can}})$ .

**Observação.**

- Dado  $B \in \Omega^2(Q)$  com  $dB = 0$ , a forma

$$\omega_B \omega_{\text{can}} + \pi^* B$$

é simplética e o termo  $\pi^* B$  se chama de *magnético*.

- Se  $Q$  é Riemanniana com métrica  $g$  temos o mapa induzido

$$\begin{aligned} g^\sharp : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ u &\longmapsto g(u, \cdot) \end{aligned}$$

Assim, o pullback the  $\omega_{\text{can}}$  é uma forma simplética em  $TQ$ .

Além disso, a métrica nos fornece de uma função Hamiltoniana dada por  $H \in C^\infty(TQ)$ ,  $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ .

Veremos que o fluxo Hamiltoniano de  $H$  em  $(TQ, \omega)$  é fluxo geodésico em  $Q$ .

Tem dois generalizações naturais:

- $\tilde{H}(v) = \frac{1}{2}g(u, v) + V(x)$  com  $V \in C^\infty(Q)$ , mecânica clássica.
- $H(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$  com respeito a  $\omega_B$ .

**Pergunta (Projeto?).** Existência de órbitas periódicas em níveis de energia?

**Definição.** O *levantamento cotangente* de um difeomorfismo (na mesma direção do difeomorfismo) é  $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$  é  $\hat{\varphi} = ((T\varphi)^*)^{-1}$ .

**Pergunta.** Preserva a forma canônica?

**Proposição.** Sim.  $\hat{\varphi} : T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$  satisfaz  $\hat{\varphi}^* \alpha_2 = \alpha_1$  onde  $\alpha_i$  é a forma tautológica, para  $i = 1, 2$ . Isso implica que  $\hat{\varphi}^* \omega_2 = \omega_1$ .

Isso implica que temos um funtor  $Q \rightsquigarrow T^*Q$  que se chama de *funtor cotangente* e permite levar problemas de geometria diferencial para a geometria simplética.

*Demonstração.*

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & T^*Q_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array}$$

A chave dessa prova é que o diagrama commuta, assim pode se-trocar um termo  $\pi_2 \circ \hat{\varphi}$  por  $\varphi \circ \pi_1$ .  $\square$

O funtor que produzimos  $\text{Dif}(Q) \hookrightarrow \text{Simp}(T^*Q)$  não é fiel (surjetivo), ie. existem symplectomorfismos no fibrado cotangente que não vem de difeomorfismos na variedade.

**Observação.** Dada uma 1-forma  $A \in \Omega^1$ . Pode se produzir um mapa no cotangente simplesmente trasladando por  $A$ :

$$\begin{aligned} T_A : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, \xi + A_x) \end{aligned}$$

que não pode ser um levantamento porque se projecta na identidade!

**Exercício.**  $T_A$  é um symplectomorfismo  $\iff dA = 0$ .

Mas, como sabemos quais symplectomorfismos no cotangente são sim levantamentos de difeomorfismos na variedade?

**Exercício.** Seja  $F : T^*Q \rightarrow T^*Q$  um symplectomorfismo. Quando  $F = \hat{\varphi}$  é levantamento de algum  $\varphi : Q \xrightarrow{\sim} Q$ . Pois, isso acontece  $\iff F$  preserva a forma tautológica, ie.  $F^*\alpha = \alpha$ .

**Observação.** Levantamento cotangente de campos de vetores. Começa com um campo  $X \in \mathfrak{X}(Q)$ , integra para obter um fluxo  $\varphi_t$ , que é uma família de difeomorfismos na variedade, você sabe levantar isso com o funtor obtendo outro fluxo (porque levantamento de fluxo é fluxo)  $\hat{\varphi}_t$ , e diferenciando obtém  $\hat{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ .

**Observação.** Para qualquer fibrado vetorial  $E \rightarrow M$ , podemos ver as seções  $\Gamma(E)$  como um subconjunto das funções suaves na variedade  $C^\infty(E)$ —são as funções lineares nas fibras. Aí tem um modo natural de definir para qualquer campo vetorial  $X \in \Gamma(TQ) \subseteq C^\infty(T^*Q)$  uma função,  $H_X(p) = p(X_{\pi(p)}) = \alpha(\hat{X})$ .

**Proposição.**  $\hat{X}$  = campo Hamiltoniano de  $H_X$ .

## 6 Aula 6

Hoje: Colchete de Poisson, Darboux.

### 6.1 Colchete de Poisson

$M$  variedade,  $\omega \in \Omega^2(M)$  não degenerada (quase-simplética). Podemos fazer

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto i_X \omega \end{aligned}$$

So that

$$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow X_f \in \mathfrak{X}(M)$$

e

$$i_{X_f} \omega = df.$$

**Definição.**  $f, g \in C^\infty(M)$ .

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$\{f, g\} = \omega(X_g, X_f) = dg(X_f) = \mathcal{L}_{X_f}g = -\mathcal{L}_{X_g}f$$

**Proposição (Exercício).**  $d\omega = 0 \iff \{\cdot, \cdot\}$  satisfaz identidade de Jacobi.  $\implies (M, \omega)$  simplética,  $\{\cdot, \cdot\}$  é colchete de Lie em  $C^\infty(M)$  e isso se chama de um *colchete de Poisson* em  $(M, \omega)$ .

**Exercício.**  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ .

**Exemplo.**  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Definição.**  $f, g \in C^\infty(M)$  estão em *involução* se  $\{f, g\} = 0$ . ie.  $X_g$  é tangente aos níveis  $f = \text{const}$  (e vice versa).

**Observação.** Nesse caso, a derivada de  $g$  ao longo das curvas integrais de  $X_f$  é zero.

**Motivação**  $(M, \omega)$  simplética,  $H \in C^\infty(M)$  queremos integrar  $X_H$  (ie. resolver  $c'(t) = X_H(c(t))$ ). Suponha que existe  $f \in C^\infty(M)$  com  $\{f, H\} = 0$ , chamada *integral primeira*. ie.  $f$  é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano.

No século XIX, quando Poisson vivia, a ideia era que se temos um número suficiente de integrais primeiras "independentes", podemos "integrar"  $X_H$ . (Aqui "integrar" significa dar uma solução a equação diferencial do fluxo Hamiltoniano).

Em 1810, Poisson deu a fórmula

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

**Teorema (Poisson).**  $\{f, H\} = 0 = \{g, H\} \implies \{\{f, g\}, H\} = 0$ .

**Teorema (Jacobi).**

$$\{H, \{f, g\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} = 0$$

1880 Lie usou essa identidade no seu trabalho de transformações (álgebras de Lie).

**Versão moderna (sec. XX) de integrabilidade** Veremos adiante...

**Teorema (Arnold-Liouville).**  $(M, \omega)$  de dimensão  $2n$  e seu Hamiltoniano  $H = f_1$  que é a primeira de uma sequência de  $n = \dim M/2$  funções independentes (as derivadas são linearmente independentes)  $f_2, \dots, f_n \in C^\infty(M)$  tais que  $\{f_i, f_j\} = 0$  e que  $(f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma submersão. Então

$$N = \{(f_1, \dots, f_n) = \text{cte}\} \cong \mathbb{T}^n$$

se compacto e conexo. Além disso, a dinâmica de  $X_H$  em  $\mathbb{T}^n$  é quase periódica (=é um fluxo linear no toro, que pode ser racional ou irracional).

**Observação (Projeto?).** Qué acontece com essa dinâmica no toro se perturbamos o sistema? O problema de dois corpos é completamente integrável. Por exemplo, a dinâmica da Terra e o Sol pode se resolver, mas o problema adicionando a Lua é o problema de 3 corpos, que ninguém sabe como resolver. Aqui a Lua é uma perturbação.

Teorema KAM, quanto mais irracional é o fluxo, mais robusto é o toro, mais inestável.

Em fim, tudo isso para motivar os colchetes de Poisson.

## 6.2 Teorema de Darboux

$(M, \omega)$  variedade simplética com o colchete  $\{\cdot, \cdot\}$ .

**Observação.**

1.  $\omega$  está completamente determinada por  $\{\cdot, \cdot\}$ , ie. se duas estruturas simpléticas dão lugar ao mesmo colchete de Poisson, elas são iguais. Por que?

$$\omega^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$$

está dada em cada ponto por

$$(\omega^\sharp)_{ij} = \{x_i, x_j\}$$

por definição.

2. A estrutura simplética canônica  $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dq_i$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  está determinada (é a única tal que) por

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

É como se tivesse uma base simplética boa em todos os pontos...

**Teorema (Darboux).**  $(M, \omega)$  simplética, ent...ão ao redor de todo ponto  $x \in M$  existem coordenadas locais  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  tais que  $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ , ou, equivalentemente vale

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Tem um lema que va a provar essencialmente tudo.

**Lema (Primeiro paso da indução).** Ao redor de qualquer ponto  $x \in M$  existem coordenadas  $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$  tais que

$$1 = \{p, q\}, \quad \{p, y_j\} = 0 = \{q, y_j\}, \quad \{y_i, y_j\} = \varphi_{ij}(y).$$

Ou seja, a matriz da forma é

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A(y) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

ou seja, temos uma expressão

$$\omega = dq \wedge dp + \omega_N$$

onde  $\omega_N$  é dada por  $A(y)$  e é simplética.

**Demonstração do Lema** **Paso 1** Seja  $p$  uma função tal que  $X_p(x) \neq 0$ . Pelo teorema de fluxo tabular (retificação) existe uma função  $q$  tal que  $X_p = \frac{\partial}{\partial q}$ , de modo que  $\{p, q\} = dq(X_p) = 1$  e  $dp(X_q) = -1$ .

**Paso 2** Então  $X_p$  e  $X_q$  são linearmente independentes, pois  $1 = \{p, q\} = \omega(X_p, X_q) \neq 0$ , o que aconteceria por antisimetria se são linearmente dependentes. Além disso, comutam, pois

$$[X_p, X_q] \stackrel{\text{aula passada?}}{=} X_{\{p, q\}=1} = 0.$$

Agora usamos a generalização do teorema do fluxo tabular: se  $X_1, \dots, X_k$  são campos linearmente independentes e que comutam, então existem coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  tais que  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . (Teo. função inversa.) Assim, existem coordenadas locais  $y_1, \dots, y_{2n}$  tais que

$$X_q = \frac{\partial}{\partial y_{2n-1}}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial y_{2n}}.$$

Logo

$$dy_j(X_q) = 0 = dy_j(X_p)$$

para  $j = 1, \dots, 2n - 2$ .

**Paso 3** As diferenciais

$$dq, dp, dy_1, \dots, dy_{2n-2}$$

são linearmente independentes, pois se

$$adq + bdp + \sum_i c_{ij} dy_i = 0$$

pois as  $y_i$  já são LI, e avaliando em  $X_i$  obtemos  $a = 0$ , e no  $X_q$  que  $b = 0$ .

Temos um sistema de coordenadas  $(q, p, y_1, \dots, y_{2n-2})$  ao redor de  $x$  tal que as condições do teorema salvo a última se cumprem. Agora veamos que  $\{y_i, y_j\}$  não depende de  $p, q$ .

**Paso 4** Só lembrar que

$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial q}$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial p} \{y_i, y_j\} = -\{q, \{y_i, y_j\}\} = 0$$

onde a segunda igualdade é jacobi. Fim.

□



Demonstração do Teo. Darboux. Segue do lema por indução

□

**Definição.** Uma *estrutura de Poisson* em uma variedade  $M$  é

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$\mathbb{R}$ -bilinear, antissimétrica, Jacobi e Leibniz, ie.  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ .

**Exemplo.**

- $(M, \omega)$  simplética com  $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$ .

## 7 Aula 7

Na aula passada vimos:

- Colchetes de Poisson.
- Teorema de Darboux. Prova: demonstrar que tem relações que caracterizam a forma de maneira única.
- É possível descrever estruturas simpléticas em termos de colchete de Poisson.: Variedades de Poisson. Isso é axiomatizar as propriedades básicas do colchete de Poisson. Esses objetos podem ser entendidos como foliações simpléticas.

### 7.1 Subvariedades

Seja  $(M, \omega)$  simplética e  $N \xrightarrow{i} (M, \omega)$ . Então temos

$$\omega_N = i^* \omega \in \Omega^2(N)$$

que é fechada porque o pullback comuta com derivada exterior.

$$\begin{aligned} \ker(\omega_N) &= \{X \in TN : \omega(X, Y) = 0 \ \forall Y \in TN\} \\ &= TN \cap TN^\omega \subseteq TN \end{aligned}$$

### 7.2 Pausa para distribuições

$P$  variedade.

**Definição.** Uma *distribuição (generalizada)* em  $P$  é

$$P \ni x \longmapsto D_x \subseteq T_x P \text{ subespaço}$$

e o posto da distribuição em  $x := \dim D_x$ .

A distribuição é *suave* se para todo  $x_0 \in P$ ,  $\forall v \in D_{x_0}$  existe um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(P)$  que estende a  $v$  e está contido na distribuição no sentido de que  $X_x \subseteq D_x \forall x$  e  $X_{x_0} = v$ .

**Exemplo.** Núcleo de 2-formas é um exemplo de distribuição, mas não é suave em geral.

**Definição.** Uma distribuição suave  $D \subseteq TP$  é dita *integrável* se  $\forall x \in P$  existe uma subvariedade  $S \ni x$ ,  $TS = D|_S$

No caso de uma distribuição (suave) integrável, por todo ponto passa uma subvariedade integral conexa maximal chamadas *folhas*.

**Observação.**

- Distribuição suave, de posto constante é a mesma coisa que um subfibrado vetorial  $D \subseteq TP$ . Nesse caso,

**Teorema (Frobenius).**  $D$  é integrável se e somente se é *involutivo*, ou seja

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

*Demonstração.* Note que  $\implies$  é trivial porque se tem uma variedade que realiza a distribuição, o colchete de Lie sempre vai ser outro campo vetorial tangente.  $\square$

- Suponha que  $D = \ker(\omega)$  com  $\omega \in \Omega^2(P)$  é suave  $\iff D$  tem posto constante. Aqui  $\impliedby$  é fácil.
- Se  $d\omega = 0 \implies D = \ker \omega$  é involutivo.

**Conclusão** Se  $\omega$  é uma 2-forma fechada e  $D = \ker \omega$  tem posto constante, dá lugar a uma folheação (regular=folhas de mesma dimensão) em  $P$ .

### 7.3 Voltando

**Definição.**  $N$  é dita

- *isotrópica* quando  $T_x N \subseteq T_x N^\omega \iff \omega_N = 0 \iff \ker \omega_N = TN$ .
- *coisotrópica* quando  $T_x N^\omega \subseteq T_x N$ .
- *lagrangiana* quando  $T_x N = T_x N^\omega \iff i^* \omega = \omega_N = 0$  e  $\dim N = \dim M/2$ .
- *simplética*  $T_x N \cap (T_x N)^\omega = \{0\} \forall x \in N \iff \omega_N$  é simplética.
- *posto constante*  $T_x N \cap T_x N^\omega \subseteq T_x N \forall N$  tem posto constante.

**Exemplo.**

- curvas são isotrópicas.
- hipersuperfícies são coisotrópicas.
- Veremos vários exemplos de subespaços lagrangianos.

### 7.3.1 Sobre subvariedades coisotrópicas

Isto também vale para subvariedades de posto constante.

Vamos ver uma versão geométrica de um exercício da lista 1, onde pegávamos o quociente de um espaço vetorial por el núcleo de uma forma para obter um espaço vetorial simplético.

**Exercício.** Suponha que as folhas da folheação são fibras de uma submersão

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & (M, \omega) \\ q \downarrow & & \\ B = N / \sim & & \end{array}$$

então existe uma forma simplética  $\bar{\omega} \in \Omega^2(B)$  tal que  $q^* \bar{\omega} = \omega_N$ .

**Exemplo.** O fluxo hamiltoniano do oscilador harmónico  $H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_i q_i^2 + p_i^2$  com  $c = 1/2$  da  $\mathbb{CP}^{n-1}$

**Exercício.**  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ .  $N = \psi^{-1}(c)$  para  $c$  valor regular.

- $N$  coisotrópico  $\iff \{\psi_i, \psi_j\}|_N = 0$ .
- $N$  simplético  $\iff (\{\psi_i, \psi_j\}|_N)_{ij}$  é invertível.

## 8 Aula 8

Lembre:

- Subvariedades lagrangianas, (co-)isotrópicas, simpléticas. Aprofundamos nas coisotrópicas (posto constante), como as hipersuperfícies ou conjuntos de nível, que tem uma folheação, e com condições de regularidade pode passar para o espaço quociente, que é simplético, como  $\mathbb{CP}^n$ .

### 8.1 Alguns exemplos de subvariedades lagrangianas

**Exemplo.** Dois variedades simpléticas e um difeomorfismo entre elas. Então  $\varphi$  é symplectomorfismo se e só se seu gráfico é lagrangiano. Talvez isso pode ser usado para pensar em symplectomorfismos em um objeto quântico.

**Observação.** Considere

$$\begin{aligned} \varepsilon : M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\ x &\longmapsto (x, \varphi x) \end{aligned}$$

então o grafo de  $\varphi$  é lagrangiano  $\iff \omega_1 - \varphi^* \omega_2$ .

**Exemplo (no fibrado cotangente).**

- A seção zero  $Q \hookrightarrow T^*Q$  é nos mostra que  $Q$  é uma subvariedade lagrangiana.
- A fibra (cotangente) de um ponto também é uma subvariedade lagrangiana de  $T^*Q$ .
- Logo, o espaço de fibras?
- Pegue uma subvariedade da base  $S \subset Q$ . Considera o *fibrado conormal*  $N^*S, \nu_S^*$ . É o dual do fibrado tangente. É o anulador de  $TS, \{(x, \xi) \in T^*Q : x \in S, \xi|_{T_x S} = 0\}$ . Note que é um subfibrado do fibrado cotangente.

Os dois exemplos anteriores são  $S = Q$  e  $S = \{x\}$  da seguinte prop:

**Proposição.**  $N^*S \hookrightarrow T^*Q$  é (um subfibrado) uma subvariedade lagrangiana.

*Demonstração.* Usando coordenadas adaptadas e a forma tautológica do  $T^*Q$ , damos coordenadas  $N^*Q$  da forma  $(x_1, \dots, x_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$  e assim o pullback da forma tautológica é zero porque ele avalia os covectores  $\xi_{\text{grande}}$  em vectores  $x_{\text{pequeno}}$ .  $\square$

**Exemplo.** Uma forma  $\mu$  vista como seção do fibrado cotangente pode ser pensada como um mergulho de  $Q$  em  $T^*Q$ .

**Proposição.** Essa subvariedade é lagrangiana  $\iff d\mu = 0$ .

## 8.2 Método de Moser

**Upshot.** Moser's trick is a thing that gives you a diffeomorphism that pulls back  $\omega_2$  to  $\omega_1$ .

Dadas duas formas simpléticas numa variedade, como podemos achar um simplectomorfismo entre elas? A ideia do método é assim:

- Step 1** Interpolar as duas formas mediante uma família contínua  $\omega_t$  de formas simpléticas.
- Step 2** Buscar uma (isotopia) família de difeomorfismos  $\varphi_t$  com  $\varphi_0 = \text{id}$  e tal que  $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ . Com isso a gente procura levar o problema para uma EDO.
- Step 3** Os fluxos são isotopias com uma relação de comutatividade. Eles correspondem com campos vetoriais. As isotopias em geral estão em correspondência com *campos de vetores não autónomos*.

**Definição.** Uma família suave de difeomorfismos  $\{\phi_t\}$  com  $\phi_0 = \text{id}$  é chamada *isotopia*. Suave significa que  $(t, x) \mapsto \phi_t$  é suave.

**Exemplo.** Fluxos (complets) são isotopias tq  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ .

**Definição.** Um *campo de vetor t-dependente* ou *não autónomo* é família suave de campos  $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ . De novo, suave é que  $(t, x) \mapsto X_t(x)$  é suave.

isotopia  $\leftrightarrow$  campos t-dependentes

A diferenciação sempre é simples né? Fixa um ponto e varia o tempo, obtém uma curva.

$$\phi_t \mapsto X_t(\phi_t(x)) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{t=\tau} \phi_\tau(x).$$

A recíproca é mais difícil. A ideia é estender a variedade a  $M \times \mathbb{R}$ , e considerar  $\bar{X}(x, t) = (X_t(x), \frac{d}{dt})$ . Esse depende do tempo, assim podemos achar um fluxo  $\phi_t$  de  $\bar{X}_t$ . Aqui se deve estender o fluxo usando bump functions, assim a gente tem que  $\phi_t$  está definido para toda  $t$ .

Note que  $\phi_t(x, s) = (G_t, t + s)$  para alguma função  $G$  na variedade. Podemos achar uma inversa dela assim:

$$(x, s) = \phi_{-t}(\phi_t(x, s)) = G_{-t}(G_t(x, s), t + s), s)$$

ie. a inversa de

$$x \mapsto G_t(x, s)$$

é

$$y \mapsto G_{-t}(y, s + t)$$

Logo,

$$\phi_t(x) = G_t(x, 0)$$

é uma isotopia e como a derivada do fluxo

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x, 0) = \bar{X}(G_t(x, 0), t) \implies \frac{d}{dt} G_t(x, 0) = X_t(x, 0).$$

E é isso. Temos a correspondencia.

Voltando ao método de Moser, para achar  $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$ , pegamos uma isotopia que puxa  $\omega_t$  em  $\omega_0$ , e queremos diferenciar a isotopia. No caso de um fluxo, trata-se da derivada de Lie por definição.

**Lema.**  $\{\varphi_t\}$  isotopia em  $M$ ,  $\{X_t\}$  campo autónomo. Sejam  $\eta \in \Omega^k(M)$ ,  $\beta_t \in \Omega^k(M)$ . Então vale:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \epsilon) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \eta$$

onde estamos pegando a derivada num tempo  $t$  fixo. Daí veremos que pela regra da cadeia segue que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \beta_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \beta_t + \frac{d}{dt} \beta_t)$$

*Demonstração.* a. Considere os seguintes operadores em  $\Omega^\bullet$ :

$$Q_1(\eta) = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \eta, \quad Q_2(\eta) = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \eta$$

Daí note que esses operadores comutam com a derivada exterior, são Leibniz respeito ao producto cunha e coincidem em funções. Daí segue que  $Q_1 = Q_2$ .

b. A regra da cadeia diz que para uma função  $F(a, b)$ ,

$$\frac{d}{dt}F(t, t) = \frac{\partial}{\partial a}F(t, t) + \frac{\partial}{\partial b}F(t, t)$$

e olha para  $\varphi_a^* \beta_b$  como a  $F$ . Sustituindo e usando  $a$ ., o resultado segue.

□

Uma aplicação disso é

**Teorema (de estabilidade de Moser).**  $M$  compacta,  $\{\omega_t\}$  formas simpléticas,  $t \in [0, 1]$ . Se as formas são todas cohomologas então elas são symplectomorfas, i.e.  $[\omega_t] = [\omega_0] \implies \exists \phi_t$  tq  $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$ . Ou, de outra forma, se existe uma família suave de formas  $\beta_t$  tais que

$$\omega_t = \omega_0 + d\beta_t$$

então existe uma isotopia  $\{\varphi_t\}$  tal que  $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ .

*Demonstração.* Note que não é imediato que as classes de cohomologia nos deem uma família suave, mas é equivalente sim (usando decomposição de Hodge? Tem algo mais simples?). O método é achar um campo de vetores autónomo resolvendo

$$i_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \beta_t$$

pois dela segue que

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = -d \left( \frac{d}{dt} \beta_t \right)$$

E daí a segunda afirmação do lema.

□

## 9 Aula 9

Lembre: Método de Moser.

A prova foi:

*Demonstração.* Calcule

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega_t = 0$$

isso implica que

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = -d \left( \frac{d}{dt} \beta_t \right)$$

e isso que

$$i_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \beta_t$$

□

Com isso conseguimos associar uma isotopia a um campo  $t$ -dependente (integração).

## 9.1 Aplica ção ao teorema de Darboux

**Lema.**  $X_t$  campo de vetores  $t$ -dependente,  $t \in \mathbb{R}$ . Suponha que

$$X_t|_{x_0} = 0 \quad \forall t.$$

Então existe uma vizinhança  $U \ni x_0$  e uma família  $\varphi_t : U \rightarrow M$  de

- (Inclusão)  $\varphi_0 = \text{id}$ .
- $\frac{d}{dt} \varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$
- $\varphi_t(x_0) = x_0$
- $\varphi_t : U \xrightarrow{\text{difeo}} \varphi_t(U)$ .

*Demonstração.* Variação do caso  $M$  compacto

$$\tilde{X}(x, t) := \left( X_t(x), \frac{d}{dt} \right) \quad \text{em } M \times \mathbb{R}$$

$$\tilde{X}(x_0, t) = \left( 0, \frac{d}{dt} \right)$$

assim existe uma curva integral  $\gamma(t) = (x_0, t)$  de  $\tilde{X}$  por  $(x_0, 0)$  está definida para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

Por EDO, existe uma vizinhança  $W$  de  $(x_0, 0)$  em  $M \times \mathbb{R}$  onde o fluxo de  $\tilde{X}$  existe  $\forall t \in [0, 1]$ .

$$\text{Tome } U = \bigcap_{w \in \{M \times \{0\}\}} \cdot \quad \square$$

Valem a fórmula para  $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_t) \dots$

**Teorema (Darboux).**  $(M, \omega)$  simplética,  $\dim M = 2n$ . Para todo  $x \in M$  existe uma vizinhança  $U \ni x$ , aberto  $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  e um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : V \subseteq \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow U \subseteq M \\ 0 &\longmapsto x \end{aligned}$$

tal que

$$\phi^* \omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i.$$

[Desenho de carta coordenada]

*Demonstração.* Podemos assumir que  $M$  é bola aberta de  $\mathbb{R}^{2n}$  com estrutura simplética  $\omega$  arbitrária.

Para usar o método de Moser, definamos

$$\omega_1 = \omega$$

$$\omega_0 = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

Podemos assumir que na origem

$$\omega_1|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} \quad T_0\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$$

simplesmente porque qualquer dois formas simpléticas são equivalentes num espaço vetorial simplético usando uma mudança de coordenadas.

- Podemos assumir pelo Lema de Poincaré que

$$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_0 = 0$$

supondo pela mesma razão que antes que  $\beta|_0 = 0$ .

- $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 \iff \omega_t = \omega_0 + t d\beta$

Precisamos checar que  $\omega_t$  são não degeneradas numa vizinhança de 0.

Note que em  $x = 0$ ,  $\omega_t|_{x=0} = \omega_0|_{x=0} = \omega_1|_{x=0}$ , assim  $\omega_t|_{x=0}$  é não degenerada para toda  $t$ , mas precisamos de uma vizinhança, não só um ponto.

**Lema.** Se tem uma família  $\omega_t|_{x_0}$  é simplética  $\forall t, t \in [0, 1]$ , então existe uma vizinhança de  $x_0$  onde  $\omega_t$  é não degenerada  $\forall t \in [0, 1]$ .

*Demonstração.* Considere

$$(x, s) \rightarrow \det(\omega_s(x)) = \text{determinante da matriz que representa a forma}$$

essa função é não zero em zero, assim para cada  $t$  existe uma vizinhança onde ela não é zero. Logo, pela compacidade de  $[0, 1]$ ,  $\exists$  uma vizinhança  $B \ni x_0$  onde  $\det(\omega_s(x))$  não se anula  $\forall s \in [0, 1]$ .  $\square$

Então já temos essa vizinhança que precisavamos.

Defina  $X_t$  como a solução da equação de Moser:

$$i_{X_t} \omega_t = -\beta.$$

Como  $\beta|_0 = 0 \implies X_t|_{x=0} = 0 \implies \exists \varphi_t, t \in [0, 1]$ .

Pelo lema 1, existe uma vizinhança  $V \ni 0$  e

$$\varphi_t : V \longrightarrow B$$

$$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$$

tome  $t = 1, 0 \in U = \varphi_1(V)$ .  $\square$

Com esse mesmo método a gente consegue provar uma generalização do teorema de Darboux.



## 9.2 Teorema de Darboux generalizado (Weinstein)

**Teorema.**  $Q \xhookrightarrow{i} M$  subvariedade (mergulhada) e  $\omega_0, \omega_1$  em  $M$  simpléticas. Suponha que

$$\omega_0|_x = \omega_1|_x \quad \forall x \in Q$$

então existem vizinhanças  $U_0$  e  $U_1$  de  $Q$  em  $M$  e um difeomorfismo

$$\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$$

tal que

$$\varphi^* \omega_1 = \omega_0$$

e que  $\varphi(x) = x \quad \forall x \in Q$

**Observação.** O teorema de Darboux é quando  $Q$  é um ponto só!

**Observação.** A condição  $\omega_0|_x = \omega_1|_x$  significa que  $\omega_0$  e  $\omega_1$  coincidem em todo o espaço tangente a  $M$  nos pontos de  $Q$ , não é que o pullback em  $Q$  coincide. Tem mais vetores no espaço tangente a  $M$ .

Vamos precisar de um Lema de Poincaré relativo.

**Lema.**  $Q \hookrightarrow M$  subvariedade. Seja  $\eta \in \Omega^k(M)$ ,  $d\eta = 0$ ,  $i^* \eta = 0$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $Q$  em  $M$ ,  $\beta \in \Omega^k(U)$  tal que

$$\begin{aligned} \eta &= d\beta \\ \beta|_x &= 0, \quad \forall x \in Q \end{aligned}$$

( $\beta|_{T_x M} = 0 \quad \forall x \in Q$ ).

A ideia aqui é simplesmente que podemos achar uma vizinhança de  $Q$  que se contrae a  $Q$  (retrato por deformação?)

*Demonstração.* Em fim, pelo lema, para  $\eta = \omega_1 - \omega_0$ ,  $i^* \eta = 0$ . Compare com a demonstração anterior,  $\beta$  se anulava no 0, agora  $\eta$  se anula em toda  $Q$  (é uma versão paramétrica disso).

$Q \hookrightarrow M$  tem vizinhança  $U$  onde  $\exists \beta \in \Omega^1(U)$ ,

$$\omega_1 - \omega_0 = d\beta, \quad \beta|_x = 0$$

- Seja  $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + td\beta$ .
- $\forall t \in [0, 1], x \in Q, \omega_t|_x = \omega_0|_x = \omega_1|_x$ .

Pelo lema 2,  $x$  tem vizinhança em  $M$  onde  $\omega_t$  é simplética  $\forall t \in [0, 1]$ .

Tomando a união das vizinhanças, temos vizinhança de  $Q$  onde  $\omega_t$  simplético  $\forall t \in [0, 1]$ .

**Método**

- Define  $X_t$  por  $i_{X_t} \omega = -\beta$ . Isso implica que  $\frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega_t = 0$ .

- Como  $\beta|_x = 0$ , então  $\forall x \in Q, X_t|_x = 0 \forall x \in Q$ .
- Pelo lema 1,  $\exists U_0$  onde  $\varphi_t$  está definido  $\forall t \in [0, 1]$ .
- E mais  $X_t|_Q = 0 \implies \varphi_t|_Q = \text{id}_Q$ .
- Tome  $\phi = \varphi_1$  e  $U_1 = \varphi_1(U_0)$ .

□

### 9.2.1 Sobre o Lema de Poincaré relativo

O principal ingrediente é teorema da vizinhança tubular.

Lembre:

**Teorema (Vizinhança tubular).**  $Q \hookrightarrow M$  subvariedade mergulhada. Existe uma vizinhança  $Q \subseteq U \subseteq M$  para qual existe  $\pi : U \rightarrow Q$  tal que

$$\begin{aligned}\pi \circ i &= \text{id}_Q \\ i \circ \pi &\simeq \text{id}_U, \quad (\text{homotopia suave})\end{aligned}$$

Daí, o lema de Poincaré segue a existencia de um *operador de homotopia*.

Em geral, quando temos uma homotopia

$$\begin{aligned}F : M \times [0, 1] &\longrightarrow N \\ F_0 : M &\longrightarrow N \\ F_1 : M &\longrightarrow N\end{aligned}$$

existe um operador

$$H : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

tal que

$$F_1^* \eta - F_0^* \eta = d(H\eta) - Hd\eta$$

Note que no caso de formas fechadas, o termo da direita se anula e a gente prova a invariança homotópica da cohomologia. No nosso caso, o operador de homotopia nos dá  $\eta = dH\eta$  á que  $d\eta$  se anula em  $Q$ .

### 9.2.2 Vizinhança tubular

**Teorema.** Existe uma vizinhança  $U_0$  de  $Q$  em  $NQ$  e uma vizinhança  $U_1$  de  $Q$  em  $M$  tais que

- $U_0 \cap (NQ)_x$  é convexo  $\forall x \in Q$ .
- Existe um difeomorfismo  $\phi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$  tal que  $\phi(x) = x$ , e  $d\phi|_x : T_x(NQ) \xrightarrow{\text{id}} TM|_x$

*Demonstração.* Idea: aplicação exponencial.

□

## 10 Monitoria 2

**Proposição.**  $\phi : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^k$  suave,  $c \in \mathbb{R}^k$  valor regular.

$$N := \phi^{-1}(c) \text{ coisotrópica} \iff \{\phi_i, \phi_j\}|_N = 0$$

## 11 Aula 10

Lembre

- Darboux generalizado: duas formas numa subvariedade que coincidem nos pontos da subvariedade, existem vizinhanças da subvariedade symplectomorfas.
- A prova disso: usa método de Moser. Para usar o método de Moser:

**Lema (Poincaré relativo).**  $Q \xrightarrow{i} M$ .  $\eta \in \Omega^k(M)$  fechada e tal que  $i^*\eta = 0$ . Então existe vizinhança  $U \supset Q$  e  $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$  tal que  $\eta = d\beta$  e  $\beta|_Q = 0$ .

(O lema de Poincaré usual é quando  $Q$  é um ponto)

*Demonstração do lema de Poincaré.* Aí tem que mergulhar  $Q$  no fibrado tangente  $NQ$  que é um fibrado que não precisa de métrica para ser definido. Porém, na prova a gente introduz uma métrica em  $Q$  e identifica  $NQ$  com  $T^\perp Q$ . Daí usando a aplicação exponencial conseguimos ver que  $Q$  é um retrato por deformação de uma vizinhança dele no  $M$ —a exponencial é a ponte de  $NQ$  [a  $Q$ ].

Isso dá uma homotopia

$$\begin{aligned} F_t : U_0 &\longrightarrow U_0 \\ (x, v) &\longmapsto (x, tv) \\ F_0 &= i \circ \pi \\ F_1 &= \text{id}_{U_0} \end{aligned}$$

Daí é só pegar o operador de homotopia

$$\mathcal{H} : \Omega^k(U_0) \rightarrow \Omega^{k-1}(U_0)$$

que é tal que

$$F_1^*\eta = F_0^*\eta = \mathcal{H}(d\eta) + d(\mathcal{H}\eta)$$

**Afirmção.** O operador de homotopia é

$$H(\eta) = \int_0^1 I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} (F_t^* \eta) dt$$

onde

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times U_0 &\longrightarrow U_0 \\ (t, y) &\longmapsto F_t(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_t : U_0 &\longrightarrow [0, 1] \times U_0 \\ y &\longmapsto (t, y) \end{aligned}$$

de forma que

$$F_t = F \circ I_t$$

**Notação** Seja

$$\begin{aligned} \tau_t : \mathbb{R} \times U_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \times U_0 \\ (x, y) &\longmapsto (s + t, y) \end{aligned}$$

de forma que

$$I_t = \tau_t \circ I_0, \quad F_t = F \circ I_t = F \circ \tau_t \circ I_0$$

e a conta que a gente faz é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t^* \eta &= I_0^* \frac{d}{dt} \tau_t^* (F^* \eta) \\ &= I_0^* \tau_t^* (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta) \\ &\stackrel{\text{Cartan}}{=} I_0^* \tau_t^* \left( d i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta + i_{\frac{\partial}{\partial t}} d(F^* \eta) \right) \\ &= d \left( I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* \eta + I_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^* (d\eta) \right) \end{aligned}$$

e aí integramos para obter

$$F_1^* \eta - F_0^* \eta = d(H\eta) + H(d\eta)$$

Se  $d\eta = 0, i^* \eta = 0, \implies \eta = d(H\eta)$ . Defina  $\beta = H\eta$ . Como  $F_t(x, 0) = (x, 0) \forall x \in Q$ , assim

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(x, 0) = 0 \implies i_{\frac{\partial}{\partial t}} dF_t|_{x \in Q} = 0$$

e por fim

$$\beta|_x = 0.$$

□

Para esse teorema pode imaginar que cada vizinhança de  $Q$  é uma variedade diferente. Mas então a condição de que as duas formas são iguais acima de  $Q$  já não faz sentido. Precisamos de um isomorfismo simplético entre esses espaços tangentes.

## 11.1 Darboux generalizado versão 2.0

**Teorema** (Teorema de Darboux generalizado Versão 2.0).

$$\begin{array}{ccc} (M_0, \omega_0) & & (M_1, \omega_1) \\ & \nwarrow i_0 \quad \nearrow i_1 & \\ & Q & \end{array}$$

Suponha que temos um isomorfismo de fibrados simpléticos

$$\begin{array}{ccc} TM_0|_Q & \xrightarrow{\phi} & TM_1|_Q \\ & \searrow & \swarrow \\ & Q & \end{array}$$

e tal que  $d\phi|_{TQ} : TQ \rightarrow TQ$  e  $\text{id}_{TQ}$ .

Então  $\phi$  estende a um simplectomorfismo

$$\begin{array}{ccc} U_0 \subset M_0 & \xrightarrow{\varphi} & U_1 \subset M_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & Q & \end{array}$$

tal que

$$d\pi|_Q = \phi : TM_0|_Q \rightarrow TM_1|_Q$$

Isto é, a derivada do simplectomorfismo (entre as vizinhanças de  $M_1$  e  $M_2$ ) que obtemos estende o isomorfismo simpléticos dos fibrados tangentes.

*Demonstração.* Podemos reduzir ao caso anterior! Basta achar um difeomorfismo  $\psi : U_0 \rightarrow U_1$  tal que  $\psi|_Q = \text{id}_Q$  e que  $d\psi|_Q = \phi$ . Nesse caso,  $\omega_0$  e  $\psi^*\omega_1$  são duas formas em  $U_0$  que coincidem sobre  $TM_1|_Q$ . Vamo lá

Tome dois complementos

$$\begin{array}{l} E_0, \quad TM_0|_Q = TQ \oplus E_0 \\ E_1, \quad TM_1|_Q = TQ \oplus E_1 \end{array}$$

Então como  $\phi$  preserva  $TQ$ , ele também preserva os complementos, é só álgebra linear. Isto é,  $\phi$  se restringe a um isomorfismo

$$\bar{\phi} : E_0 \rightarrow E_1$$

Note que

$$\bar{\phi}|_Q : TE_0 \cong TQ \oplus E_0 \rightarrow TE_1 \cong TQ \oplus E_1$$

Aqui estamos pegando a derivada do isomorfismo nos fibrados. O importante é que como ele é linear, sua derivada é ele mesmo (só que aí aparecem muitas identificações):

$$d\bar{\phi}|_Q = \text{id} \oplus \bar{\phi} = \phi$$

Agora pegamos vizinhanças tubulares de  $Q$ ,  $V_0 \subset E_0$  e  $V_1 \subset E_1$  e usando a exponencial como antes podemos contraer

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{\phi} & V_1 \\ \downarrow \phi_0 = \exp & & \downarrow \phi_1 \\ U_0 \subset M_0 & \xrightarrow{\psi} & U_1 \subset M_1 \end{array}$$

e todo comuta:

$$\psi = \phi_1 \circ \bar{\phi} \circ \phi^{-1} : \mathcal{U}_0 \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1$$

e por fim

$$d\psi|_Q = \text{id} \circ d\bar{\phi} \text{id} = \phi$$

□

Agora um caso particular:

$$\begin{array}{ccc} (M, \omega) & & T^*\mathcal{L} \\ & \swarrow i & \nearrow i \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

onde  $Q$  está dentro do fibrado cotangente como a seção zero.

## 11.2 Teorema das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein

**Teorema (das vizinhanças Lagrangianas de Weinstein).** (As subvariedades Lagrangianas estão definidas "intrinsecamente", pois existe uma vizinhança delas que é simplectomorfa a ela como subvariedade no tangente dela)

Existem vizinhanças  $\mathcal{U}_0 \supseteq \mathcal{L}$  em  $T^*\mathcal{L}$  e  $\mathcal{U}_1 \supseteq \text{eq}\mathcal{L}$  em  $M$  e um simplectomorfismo

$$\varphi : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$$

*Demonstração.* Só precisamos de um  $\phi$  como no Darboux 2, i.e.,

$$\phi : TM|_{\mathcal{L}} \longrightarrow T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}}$$

tal que

$$\phi|_{T\mathcal{L}} : T\mathcal{L} \rightarrow T\mathcal{L} = \text{id}_{T\mathcal{L}}$$

**Lema.** Suponha que  $\mathcal{L} \hookrightarrow (M, \omega)$  é Lagrangiana. Considere  $TM|_{\mathcal{L}}$  um fibrado vectorial simplético. Então

1. Existe um subfibrado lagrangiano  $E \subseteq TM|_{\mathcal{L}}$  tal que  $TM|_{\mathcal{L}} = T\mathcal{L} \oplus E$ .
2. Existe um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} TM|_{\mathcal{L}} & \xrightarrow{\cong} & T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^* \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

onde no espaço  $T\mathcal{L} \oplus (T\mathcal{L})^*$  é

$$\nu((X, \alpha), (Y, \beta)) = \beta(X) - \alpha(Y)$$

Lembrando um exercício da lista 1 (de álgebra linear) que diz que um subespaço Lagrangiano é nos da uma decomposição do espaço usando o seu dual.

*Demonstração do Lema.*

**Step 1** Todo espaço simplético induz uma estrutura complexa compatível. Se  $L$  é lagrangiano,  $JL$  também e o espaço vetorial (acho que isso coincide com o complemento ortogonal na métrica compatível). Isso vale para fibrados vetoriais.

**Step 2** Note que

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow (T\mathcal{L})^* \\ u &\longmapsto \omega(\cdot, u) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Isso é super elementar de algebra linear.

Tome

$$\begin{aligned} (TM|_{\mathcal{L}}, \omega) &\longrightarrow (T\mathcal{L} \oplus T\mathcal{L}^*, \nu) \\ (x, u) &\longmapsto (X, \omega(\cdot, u)) \end{aligned}$$

que é que acontece? Então,

$$\begin{aligned} \nu(T(X, u), T(Y, v)) &= \nu((X, \omega(\cdot, u)), (Y, \omega(\cdot, v))) \\ &= \omega(X, u) - \omega(Y, u) \\ &= \omega((X, u), (Y, u)) \end{aligned}$$

□

Daí, o lema queda provado simplesmente notando que

$$\begin{array}{ccc} & T\mathcal{L} \oplus T\mathcal{L} & \\ \cong \swarrow & & \searrow \cong \\ TM|_{\mathcal{L}} & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & T(T^*\mathcal{L})|_{\mathcal{L}} \end{array}$$

(diagonal arrows reversed).

□

## 12 Aula 11

### 12.1 Aplicação (de Weinstein): pontos fixos de symplectomorfismos

Generaliza o estudo (Poincaré-Birkhoff) clássico de pontos fixos de aplicações que preservam área:

**Teorema** (Último teorema de Poincaré). Um automorfismo de um anelo que preserva orientação, área e rota a fronteira do anelo em direções opostas tem um ponto fixo.

Isso apareceu quando Poincaré estudava fluxos em  $\mathbb{R}^3$ .

Consideremos  $(M, \omega)$  simplética e  $M \xrightarrow{f} M$  simplectomorfismo. Nos interessa o caso em que  $f$  é um fluxo hamiltoniano no tempo 1, ie.  $f = \varphi_{X_H}^{t=1}$ . Sabemos que

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$$

é uma subvariedade lagrangiana, e também  $\Delta = \Gamma_{\text{id}_M} = \{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times \bar{M}$ . De forma que os pontos fixos de  $f$  são os pontos de interseção entre  $\Gamma_f$  e  $\Delta$ .

**Proposição.** Seja  $M$  compacta,  $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ . Se  $f$  é  $C^1$ -próximo (convergência uniforme, Fréchet differentiable?) da  $\text{id}_M$ , então  $f$  tem pelo menos 2 pontos fixos.

*Demonstração.* Note que  $\Delta \cong M$  pelo teorema da vizinhança lagrangiana, como  $\Delta$  é lagrangiana existe uma vizinhança  $U \supseteq \Delta$  simplectomorfa a uma vizinhança  $U'$  de  $M \hookrightarrow (T^*M, \omega_{\text{can}})$ .

- Se  $f \in \text{Simp}$  está "perto" da  $\text{id}_M$ , então  $\Gamma_f \subseteq U$ .
- $f$  é  $C^1$ -próximo da  $\text{id}_M$ , então  $\Gamma_f$  corresponde a 1-forma  $\mu$  em  $T^*M$  (a uma subvariedade  $N_\mu$  de  $T^*M$ ?). (É uma gráfica de  $M$  no fibrado cotangente!)
- $\Gamma_f$  lagrangiana  $\implies d\mu = 0$  (Lista 2)
- $H^1(M) = 0 \implies \mu = dh$
- $M$  compacta  $\implies h$  tem pelo menos 2 pontos críticos.

□

**Observação (Monitoria).** Se pedimos só  $C^0$ -próximo, é possível que a seção  $\mu$  não esteja bem definida porque um ponto de  $M$  pode não estar associado a um covetor ancorado em outro ponto, ou algum outro problema assim. A condição  $C^1$  controla isso.

**Observação.**

- Não podemos abrir mão de  $H^1(M) = 0$ . Eg. rotação no toro.
- Podemos substituir  $H^1(M) = 0$  por  $f$  ser simplectomorfismo Hamiltoniano (ver McDuff-Salomon).

**Pergunta.** Remover  $C^1$ -proximidade da identidade? (Pelo menos no caso  $f$  hamiltoniano).

**Conjetura (Arnold).**  $M$  simplética compacta,  $f$  simplectomorfismo Hamiltoniano. O número de pontos fixos de  $f$  é maior o igual que o número mínimo de pontos críticos que uma função em  $M$  deve ter:

$$\begin{aligned} \# \text{ pontos fixos de } f &\geq \text{Crit}(M) \\ &\geq \text{LS category (Lusternik Schnirelmann)} \end{aligned}$$

Isso está relacionado com o fato de tirar a hipótese de que a função esté próxima da identidade.



**Conjetura (Outra versão).** Para pontos fixos não degenerados (são os pontos onde  $N_\mu$  e  $M$  se intersectam transversalmente em  $T^*M$ ).

# pontos críticos  $\geq$  # mínimo de pontos críticos que funções de Morse devem ter.

$$\underbrace{\geq}_{\text{desig. Morse}} \sum_k \text{Betti}_k$$

## Projetos

- Conjetura de Arnold (Eliashbag (superfícies de Riemann), Hofer-Achander)
- Homologia de Floer (é uma versão de Homologia de Morse em dimensão infinita)

Professor Leonardo vai falar com mais detalhe desses temas.

## 12.2 Outra classe de exemplos de variedades simpléticas: órbitas coadjuntas

São exemplos de redução simplética. Isso está relacionado com teoria de Lie.  $G \curvearrowright (M, \omega)$  simetrias hamiltonianas. Daí vamos produzir uma nova variedade simplética.

### 12.2.1 Revisão de grupos e álgebras de Lie

Cada grupo de Lie age na sua álgebra de Lie de maneira canônica. Daí podemos pegar a álgebra dual. O fato importante é que as órbitas lá tem uma estrutura simplética.

**Definição.** Um *grupo de Lie* é uma variedade  $C^\infty$   $G$  munida de estrutura de grupo tal que o produto e a inversão são funções suaves. Os *morfismos* são homomorfismos de grupos  $C^\infty$ . *Subgrupos de Lie* são subvariedades imersas que são subgrupos.

#### Exemplo.

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$
- $V$  espaço vetorial,  $(V, +)$  é grupo de Lie abeliano.
- $S^1, S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$  são grupos de Lie abelianos.
- Grupos finitos/enumeráveis:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \dots$
- 

**Exercício.**  $G$  grupo de Lie conexo, então o seu recobrimento universal  $\tilde{G}$  é grupo de Lie.

- Subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R})$ :
    - Ortogonal  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = \text{id}\}$ .
- Mais geralmente,  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espaço vetorial de produto interno,  $O(V) = \{T : V \rightarrow V \mid \langle Tv, Tv \rangle = \langle u, v \rangle\}$ .

Considerando

$$\begin{aligned}\psi : GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Sim}(n) \\ A &\longmapsto AA^T\end{aligned}$$

temos que  $\text{id}$  é um valor regular, e assim  $O(n) = \psi^{-1}(\text{id})$  é uma subvariedade (compacta é não conexa por  $\det A = \pm 1$ )

- $SL(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ , conexo não compacto.
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$  compacto conexo
- $Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J_0 A = J_0\}$  com  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . *Grupo simplético.*
- $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : \text{invertíveis}\} \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ .
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = \text{id}\}$ , isto é  $A^* = \bar{A}^T$ , temos  $|\det A| = 1$  e o mapa

$$\det : U(n) \rightarrow S^1$$

e de fato  $U(1) \cong S^1$ .

- $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$  *grupo unitário especial*

**Observação.**

•

**Teorema (de Cartan).** (F. Warner) Subgrupo fechado de grupo de Lie é subgrupo de Lie! (mergulhado)

- Nem todo grupo de Lie é grupo de Lie de matrizes. O espaço recobridor de  $SL(2, \mathbb{R})$ , por exemplo.

### 12.2.2 Sobre $SU(2)$

Sabemos que podemos escrever

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd : i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

e como

$$S^3 \hookrightarrow \mathbb{H}$$

$S^3$  herda uma estrutura de grupo de Lie, e de fato

$$S^3 \xrightarrow{\cong} SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Daí,

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\cong} & SU(2) \\ \downarrow 2:1 & & \downarrow 2:1 \\ \mathbb{R}P^3 & \xrightarrow{\cong} & SO(3) \end{array}$$

Em geral recobrimentos duplos de  $SO(n)$  são grupos  $Spin(n)$ . Para  $n \geq 2$  são recobrimentos universais. São grupos de simetrias de partículas que se chamam fermiones. A ideia é que a gente precisa dois voltas para virar a flecha que tá parada na partícula.

Por último vamos ver por qué e que  $\mathbb{RP}^3 \cong SO(3)$ . Do mesmo jeito que  $\mathbb{RP}^2$  é o hemisfério norte da esfera com os pontos no bordo identificados,  $\mathbb{RP}^3$  é uma bola fechada em  $\mathbb{R}^3$  com pontos antipodais no bordo identificados. Podemos pensar que os pontos de  $\mathbb{RP}^3$  são rotações de ângulo  $\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

## 13 Aula 12