Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Projeto

Índice

1 Noções básicas de mecânica quántica

1.1 Clásica

Sistema físico é uma variedade com estrutura adicional. A variedade consiste dos estados do sistema (posição, momento), e a estrutura adicional são as leis de movimento. A dinâmica do sistema está determinada por uma função, o Hamiltoniano. Por medio de uma forma simplética podemos obter um campo vetorial associado a H

- ω não degenerada implica que sempre podemos achar esse campo vetorial
- ω alternante (`sg.pdf` prop. 6.11) implica que H é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano (X_H aponta na direção de energia constante).
- Fórmula de Cartan implica que ω é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano, ie. fluxo Hamiltoniano simplético (independente do tempo?) ie. $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$ se e somente se ω é fechada.

As equações de Hamilton são só outra formulação da segunda lei do Newton. O campo vetorial Hamiltoniano é uma formulação geométrica das equações de Hamilton.

Proposição (18.9 `das.pdf`) $\{f, H\} = 0$ (f é primeira integral do fluxo de X) se e somente se f é constante ao longo das curvas integrais de X_F.

1.2 Quântica

A equação de Schrödinger é o análogo às equações de Hamilton da mecânica clásica (lembre que as equações de Hamilton são só outra formulação das segunda lei de Newton). Assim, a equação de Schrödinger determina a dinámica de um sistema quântico: "decreve como o estado de um sistema quântico muda com o tempo". Ela está determinada pelo Hamiltoniano, que no mundo quântico é um operador.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Agora:

Bruno

O operador H define uma dinamica no espaço de Hilbert, os físicos chamam de equação de Schrodinger. Esse é o analogo de fluxos Hamiltonianos; matematicamente, a gente fala de "strongly continuous one parameter unitary subgroups" no espaço de Hilbert

O dani:

Dani

Blz! Então suponho que para cada estado no espaço de Hilbert a gente consegue uma curva aplicando essa família de operadores unitários [que pelo Stone thm correponde a um operador unitário, Hamiltoniano suponho]. As soluções do oscillador armônico quântico são círculos mesmo (tipo pontos que ficam a distancia r de um ponto, ussando a metrica induzida pelo produto interno do espaço de Hilbert)?

Bruno Exatamente, Stone Theorem!! Agora as soluções do oscilador harmônico quântico não são círculos. A distância pra origem sempre é constante pra evoluções unitárias, mas isso agora diz que a dinâmica unitária preserva vetores normalizados (i.e. as órbitas de um ponto na esfera de dim infinita continuam na esfera)

Dani Maravilha, mas então em que sentido a dinâmica oscila?

Dani Na verdade não entendi bem essa parte de ***evaluação num ponto***. Cómo é que se definem os estados coerentes?

Distintas escolhas de Hamiltoniano $\hat{H}$ descrevem diferentes leis da natureza. Para partículas não relativistas em treis dimensões com energia potencial $V(x)$, o Hamiltoniano é

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x).$$

É um operador diferencial. O Laplaciano é

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z^2}.$$

Na mecânica clásica, o Hamiltoniano está relacionado com a energia do sistema, que para nós é

$$E = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(x)$$

onde $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$ o momentum da partícula.

Nem toda teoria física pode ser descrita usando um Hamiltoniano. (Em termos gerais, só as teorias que tem conservação da energia podem ser descritas com o Hamiltonano.) Importantemente, isso mesmo acontece na mecânica quântica.

O experimento do buraco duplo: a função de onda se comporta como partícula e como onda.

Definição Um ***estado quântico*** é uma função de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ normalizável, ie.

$$\int d^3x|\psi|^2 < \infty.$$

Esses estados quânticos moram num espaço de Hilbert (tem produto Hermitiano): se a partícula está num espaço M, o espaço de Hilbert relavante é $L^2(M)$.

Definição ***Observável***: são funções de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$. Por exemplo, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ mesmas, ou o *momento angular* $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ ou a *energia* $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$.

Os observáveis são representados por ***operadores*** no espaço de Hilbert. Agem numa função de onda e dão outra função.

Observação O reemplazo das matrices nos espaços de dimensão infinita são os operadores diferenciais.

Observação O resultado de qualquer medição de um operador está no seu espectro (conjunto de eigenvalores).

O espectro do Hamiltoniano determina os possíveis níveis de energia do sistema quântico.

Todo observável físico corresponde a um operador Hermitiano (autoadjunto).

2 Quantização

Aqui tem uma perguna de StackExchange: "Need help understanding the proof of Dirac's famous relation between commutators and Poisson brackets". So maybe that could be kind of an exercise/proof to carry out in the talk.

No seguinte vou ler sobre tudo wiki e um pouco de `quank3.pdf`

2.1 Prequantização

Passar de uma variedade simplética a um espaço de Hilbert assinalando operadores autoadjuntos às funções suaves na variedade, ie. oberváveis clássicos a observáveis quânticos, satisfazendo:

1. Linearidade: $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$, $\widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f}$.
2. Morfismo de álgebras de Lie a menos de uma constante.
3. Identidade vai para identidade.
4. Os operadores $\hat{q_i}$ e $\hat{p_i}$ agem irreduzivelmente no espaço de Hilbert.

Por exemplo, o espaço de funções integráveis respeito à forma de Liouville. Manda uma função suave f em $Q(f) := -i\hbar\left(X_f + \frac{1}{i\hbar}\theta(X_f)\right) + f$.

Otro exemplo: um fibrado linear L munido de uma conexão tal que a sua forma de curvatura é $\omega/\hbar$. Aqui o espaço de Hilbert é o espaço de seções quadrado-integráveis de L como o operador $Q(f) = -i\hbar\nabla_{X_f} + f$. Neste caso temos que $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$.

2.1.1 Dirac

In **dirac** we see the formula (in chapter IV, sec. 2.1)

$$uv - vu = i\hbar[u, v]$$

where he denotes the Poisson bracket by $[\cdot, \cdot]$.

> *The problem of finding quantum conditions now reduces to the problem of determining Poisson Brackets in quantum mechanics*

At least in this one-minut reading session, it seems to me that he is looking for an adequate bracket in the smooth function space, rather than in the Hilbert space operators space.

2.2 Polarização

É a escolha de um subespaço Lagrangiano em cada ponto de M.

Definição (nLab) Uma ***polarização*** de uma variedade simplética (X, ω) é a escolha de um subfibrado Lagrangiano involutivo $\mathscr{P} \hookrightarrow T_{\mathbb{C}}X$ do fibrado tangente complexificado de X.

Exemplo O fibrado holomorfo ou antiholomorfo caso (X, ω, g, I) seja Kähler.

A polarização no `k3quant.pdf` é a escolha de um fibrado linear; a gente vai tomar seções holomorfas para construir o espaço de Hilbert.

2.3 `k3quant.pdf`

After the definition of ***full quantization*** written above, we have definition of ***quantizable*** manifold in terms of curvature in the subbundle. And construction of Berezin-Toeplitz operators, which includes the construction of the Hilbert space of L^2-measuable sections of the bundle. Then ***Hardy space***, should I read this? Is there a proof that the operatrs are good?

2.4 Coherent states

Let's read a little bit of wiki. A ***family of coherent states*** is a set of vectors in some locally compact space X that satisfy the following properties in relation with some complex separable hilbert space $\mathfrak{H}$. To every element x in the family of coherent states asocciate an element $|x\rangle$ and ask that

1. the map $x \mapsto |x\rangle$ be weakly continuous (every functional evaluated on the vector is continuous... somehow)
2. Some condition called ***resolution of the identity*** that "ensures that an arbitrary vector $|\psi\rangle$ be expressible as a linear integral combination of these (the coherent states?) vectors. Indeed the resolution of the identity immediately implies that $|\psi\rangle = \int_X \Psi(x)|x\rangle d\nu(x)$" where $\Psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ and $d\nu$ is a measure on X.

But how is this related to the quantization in `raw.pdf`?

> "The Hilbert space on which th efunctions act as operators consists of holomorphic sections of a suitably chosen line bundle. Evaluation at a point is a continuous linear functional Evaluation at a point gives me a vector in the line bundle which is a functional on $\mathcal{C}^\infty(X)$ functions and gives rise to a vector in the Hilbert space How because a vector in the Hilbert space is a whole section... which is labelled by that point.

2.5 `raw.pdf`

Aqui só vou fazer um resumo do artigo. Seção 1:

1. Estrutura simplética, campo vetorial Hamiltoniano, função Hamiltoniana. Tem uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow 0\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X) \longrightarrow \mathfrak{H}(X,\omega) := \{\xi : i_\xi\omega \text{ é exata}\} \longrightarrow 0$$

   onde esse $\mathfrak{H}$ se chama ***espaço de campos hamiltonianos em*** X.

2. Fibrado linear, conexão, curvatura, forma de conexão.
3. Estrutura hermitiana, fibrado linear hermitiano com conexão (HLBC).
4. Uma ***prequantização*** de (X, ω) é um HLBC. Existe iff ω is integral (has integral periods?)

5. Um negocião para ver que tem uma sequência curta no mundo dos fibrados lineares análoga à sequência curta no mundo das funções hamiltonianas. No fim de contas, isso da uma representação de álgebras de Lie que se chama ***prequenantização***.
6. Uma ***polarização*** de (X, ω) é um subfibrado comlexo

Seção 2.

- Seja F uma polarização de (X, ω). Dizemos que a quantização é ***holomorfa*** de $F \cap \overline{F} = 0$. Since $\dim_{\mathbb{C}} F_X$ is half... Existe uma única estrutura complexa J tal que...
- ”Em resumo, a quântização holomorfa de (X, ω) da a X uma estrutura Kähler para a qual ω é a forma Kähler.

3 Operadores de Berezin-Toeplitz

Here’s a quote from Sergey in quantum surface group, 8 october.

> Anyway, this shows how hermitian Toepliz operators T_f (and Hermitian Toepliz matrices) can be understood as (matrices of) Berezin-Toepliz operators T_F for harmonic functions F on a unit disc.

4 Espaço de Fock

Consider $\mathbb{C}^n$. define

$$\mathscr{F}_n = \left\{ f(z)\text{-entire functions } \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \middle| \int_{\mathbb{C}^n} (f(x))^2 e^{-|z|^2} d\lambda(z) < \infty \right\}$$

We have an inner product:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^2} d\lambda(z)$$

Proposição $z^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{k_n}$, where $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, form an orthogonal basis (of monomials) for $\mathcal{F}_n$. Moreover, $\|z^k\|^2 = k_1! \ldots k_n!$.

Demostração. Consider the case $n = 1$ and let $k > k' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Let's first solve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} z^k \bar{z}^{k'} e^{-|z|^2} d\lambda &= \int_{\mathbb{C}} (z\bar{z})^{k'} z^{k-k'} e^{-|z|^2} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{C}} |z|^{2k} z^{k-k'} e^{-|z|^2} d\lambda\end{aligned}$$

and now perform a change of coordinates and remember that the substitution rule for integrals needs you to put the determinant of the jacobian of the change of coordinate map, which in this case is $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and the jacobian has determinant r. So the integral is now

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{k-k'} |re^{i\theta}|^{2k} e^{-|re^{i\theta}|^2} r d\theta dr \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{k-k'} r^{2k} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= \int_0^\infty r^{2k} e^{-r^2} r \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{k-k'} d\theta dr\end{aligned}$$

and the integral along the phase (=with respect to θ) vanishes since e has the same value at 0 and at 2π. Of course an analogous statement works if $k' > k$.

Now take general case n. We have that:

$$\left\langle z^{\mathbf{k}}, z^{\mathbf{k}'} \right\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} z^{\mathbf{k}} \overline{z^{\mathbf{k}'}} e^{-|z|^2} d\lambda$$

This integral will also vanish since the product $z^{\mathbf{k}} \overline{z^{\mathbf{k}'}}$ will factor into a product of modules times a product of powers of the variables $z_1, \ldots, z_n$. When changing to polar coordinates the latter terms will vanish out of periodicity of the exponential.

Agora vamos confirmar que $\|z^{\mathbf{k}}\|^2 = k_1! \ldots k_n!$. Novamente considere primeiro o caso $n = 1$. Temos que

$$\begin{aligned}\|z^k\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} z^k \overline{z^k} e^{-|z|^2} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{C}} |z^k|^2 e^{-|z|^2} d\lambda \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |(re^{i\theta})^k|^2 e^{-|(re^{i\theta})^2|} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (r^k)^2 e^{-r^2} r dr d\theta\end{aligned}$$

Pegando $u = r^2$ obtemos $du = 2rdr$ de modo que a integral vira

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} u^k e^{-u} du d\theta$$

O integrando respeito a u é exatamente a função Gamma $\Gamma(k+1) = \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = k!$. Assim, a nossa integral é

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} k! d\theta = \pi k!$$

Como tiro esse π que está sobrando?

Por fim, para o caso geral pegue $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ e $z^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|z^{\mathbf{k}}\|^2 &= \int_{\mathbb{C}^n} z^{\mathbf{k}} \overline{z^{\mathbf{k}}} e^{-|z|^2} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} |z_1^{k_1}|^2 \ldots |z_n^{k_n}|^2 e^{-(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)} d\lambda
\end{aligned}$$

que pode ser evaluado como o produto de integrais no caso de uma variável, dando o resultado desejado.

□

5 What to do next?

Look at `chernsimons.pdf`, pag. 171 *Lightning review of Kähler quantization* . There's two things that could be useful: "Bergman quantization" (what is the relation between this and Fock space? Looks like in `chernsimons.pdf` there is a nice formula for the operators. Second thing is the construction (again) for the Kähler quantization. So this is two objectives.

Structure of this project

1. Introduction. Definition of quantization. What we want. What we can and can't do. Theorem of what we can't do. Solutions.
2. Example 1. Fock space/Bergman quantization.
3. Example 2. Kähler quantization.