Daniel González Casanova Azuela
github.com/danimalabares/sg

Lista 3

Problem 5 Let M be a manifold and $\omega \in \Omega^k(M)$. Suppose that $\pi : M \to B$ is a surjective submersion with connected fibers. We say that ω is ***basic*** (with respect to π) if there exists a form $\overline{\omega} \in \Omega^k(B)$ such that $\pi^*\overline{\omega} = \omega$.

a. Show that ω is basic iff $i_X\omega = 0$ and $\mathcal{L}_X\omega = 0$ for all vector fields X tangent to the fibers of π. In particular, if ω is closed, show that it is basic if $\ker(T\pi) \subseteq \ker\omega$ (pointwise in M).

b. Suppose that ω is a closed 2-form on M and $\ker(T\pi) = \ker\omega$. Show that $\omega = \pi^*\overline{\omega}$ and $\overline{\omega} \in \Omega^2(B)$ is symplectic.

c.

Solution.

a. Primeiro note que se X é tangente às fibras de π, a projeção de X é zero já que o espaço tangente a um ponto é vazio. Daí a implicação $\implies$ é imediata.

   Para $\impliedby$ vamos provar primeiro localmente

   (Ver StackExchange) Para $\impliedby$ defina uma forma $\overline{\omega} \in \Omega^k(B)$ usando que a derivada de π é surjetiva em todo ponto de M da seguinte forma:

$$\overline{\omega}(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_k) := \omega(X_1, \dots, X_1)$$

   Devemos mostrar que $\overline{\omega}$ está bem definida.

   - $\pi_*X_1 = \pi_*X_1' \implies \omega(X_1, X_2, \dots, X_k) = \omega(X_1', X_2, \dots, X_k)$.

     Isso segue de que

$\square$