Vertex Algebra by Jethro

Resumo das aulas 1 e 2

Resumo

Suscintamente as aulas traçam um caminho desde inspirações da Teoria Quântica de Campos (QFT) até a célebre conjectura "Monstrous Moonshine", como inspiração para Álgebras de Vértice.

Visão Geral

Essencialmente se traça conexão entre três áreas aparentemente distintas: a Teoria Quântica de Campos, as Funções Modulares e a Teoria de Grupos Finitos. Ele usa o oscilador harmônico como um modelo fundamental para introduzir operadores de criação e aniquilação, cujas divergências motivam a criação das Álgebras de Vértice. Em paralelo, apresenta a j-invariante (uma função modular) e o grupo Monstro (o maior grupo esporádico simples). A culminação é a Conjectura Monstrous Moonshine, que postula uma profunda relação entre as representações do grupo Monstro e os coeficientes da j-invariante, uma relação formalizada pelas Álgebras de Vértice.

- **Motivação**: Introduz o uso de "Modelos de Brinquedo"(Toy Models) para estudar Campos Quânticos.
- **Mecânica Quântica (QM)**: Revisa os postulados básicos: estados são vetores em um espaço de Hilbert, observáveis são operadores auto-adjuntos e os resultados das medições são seus autovalores.
- **Teoria Quântica de Campos (QFT)**: Apresenta a ideia de que os "Campos"são observáveis em cada ponto do espaço-tempo.

- **Álgebras de Vértice**: São introduzidas como um modelo para entender as divergências em QFT e sua renormalização.
- **Exemplo (Vibrações de uma Corda)**: Compara os modos de vibração a "partículas"que podem aparecer um número discreto de vezes $(0, 1, 2, \dots)$.

- **Representação de Estados**: O espaço de estados V é comparado a um anel de polinômios, $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Um estado como $|1, 3, 5^2\rangle$ corresponde ao monômio $x_1x_3x_5^2$.
- **Operadores**: São definidos os operadores de aniquilação, $a_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$, e de criação, $a_n^\dagger =$ (multiplicação por x_n).

- **Oscilador Harmônico Quântico**: Apresenta o Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)$ com o potencial $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.
- **Equação de Autovalor**: A equação de Schrödinger independente do tempo para este sistema é $-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi + \frac{1}{2}kx^2\Psi = E\Psi$. As soluções envolvem os polinômios de Hermite.

- **Propriedades do Oscilador**: Os autovalores de energia são $E_n = n + \frac{1}{2}$.
- **Operadores de Escada**: São introduzidos novos operadores de aniquilação (a) e criação ($a^\dagger$) que simplificam o problema. O Hamiltoniano é reescrito como $\hat{H} = aa^\dagger + 1/2$.
- **Ações dos Operadores**: São listadas as propriedades fundamentais, como $a|0\rangle = 0$ e $a^\dagger|n-1\rangle = |n\rangle$.

- **QFT da Corda**: A ideia central é que cada ponto da corda se comporta como um oscilador harmônico.
- **Modos de Fourier**: Em vez de um espaço de estados para cada ponto, a abordagem correta é usar os modos de Fourier da onda, $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{2\pi i n t}$.

- **Sistema de Osciladores**: O Hamiltoniano da corda vibrante se decompõe em uma soma infinita de Hamiltonianos de osciladores harmônicos não interagentes, $\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{H}_n$.

- **Definição de Campo**: Um "campo"quântico é formalmente definido como uma série de Laurent cujos coeficientes são operadores de criação e aniquilação:

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$$

- **Objetivo**: O interesse reside em entender os coeficientes de produtos de campos, como $a(z)^2$.

- **Operadores de Virasoro**: Os coeficientes L_n da expansão de $\frac{1}{2}a(z)^2$ são os geradores da álgebra de Virasoro.
- **Problema da Divergência**: O cálculo de L_0 leva à soma divergente $\frac{1}{2}(1+2+3+\dots)$.
- **Renormalização**: A solução é a "ordenação normal"(denotada por $::$), que move todos os operadores de aniquilação para a direita. Este procedimento é rigorosamente definido no formalismo das **Álgebras de Vértice**.

- **Interlúdio sobre Álgebras de Lie**: Revisão do elemento de Casimir, Ω, que comuta com todos os elementos da álgebra. Pelo Lema de Schur, em uma representação irredutível W, Ω atua como um escalar, $\rho(\Omega) = C_W Id_W$.

- **Funções Modulares**: São definidas como funções holomorfas no semiplano superior $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$, invariantes sob a ação de $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ e meromorfas no infinito.
- **Expansão em q**: A periodicidade $f(\tau+1) = f(\tau)$ permite uma expansão em série de Fourier na variável $q = e^{2\pi i \tau}$.
- **A j-Invariante**: É afirmado que toda função modular é uma função racional da j-invariante, $j(\tau)$. Sua expansão é:

$$j(\tau) = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

- **Hauptmodul**: Para certos subgrupos Γ, existe um gerador do corpo de funções modulares, chamado de Hauptmodul.
- **Grupos Finitos Simples**: Menciona a classificação, que inclui famílias infinitas e 26 grupos esporádicos.
- **O Grupo Monstro ($\mathbb{M}$)**: É introduzido como o maior grupo esporádico. Ele possui 194 representações irredutíveis (irreps).
- **A Pista "Moonshine"**: As dimensões das menores irreps não triviais são 1, 196883, 21296876, ... O número 196883 é notavelmente próximo do primeiro coeficiente da j-invariante (196884).
- **A Conjectura**: Postula-se a existência de uma representação graduada de dimensão infinita do Monstro, $V^{\#} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n^{\#}$, tal que a função geradora de suas dimensões é a j-invariante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim(V_n^{\#}) q^{n-1} = j(\tau)$$

Onde $dim(V_2^{\#}) = 196884 = 196883 + 1$, conectando os dois números.

- **Conjectura Monstrous Moonshine**: Generaliza a ideia anterior. Para cada elemento $g \in \mathbb{M}$, a "série de McKay-Thompson"$T_g(q)$ (uma função de traço) é um Hauptmodul.
- **A Prova**: A representação $V^{\#}$ foi construída por Frenkel-Lepowsky-Meurman como uma **Álgebra de Vértice**. A conjectura foi provada por Richard Borcherds em 1992, usando esta construção e a teoria de Álgebras de Kac-Moody Generalizadas.