Un Poco de Notación Matemática

txemagon

11 de marzo de 2020

Resumen

Vamos a poner por escrito en lenguaje matemático los ejemplos de vectores que hemos ido haciendo hasta ahora.

Notación de Vectores y Matrices

Decimos que un vector es algo de la forma $\vec{v} = (1, 2, 3)$ o también $\vec{v} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Y generalizamos diciendo: $\vec{v} = (x, y, z)$ o $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Cuando tenemos muchos vectores solemos poner los componentes así:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{y} &= (y_1, y_2, y_3) \\ \vec{z} &= (z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

Pero el señor Einstein inventó una notación que nos es muy adecuada para programar. Para él un vector quedaba representado por un elemento genérico x_i donde i toma todos los valores de 1 a 3.

Así que para Einstein un vector es algo así:

$$x_i \qquad \forall\, i = 1..,3$$

Donde $\forall$ se lee: *para todo*.

Y que nosotros escribimos muy fácilmente en programación.

```
for (int i=0; i<3; i++)
   a[i]
```

Y su tipo de datos: `double a[3];`

Decimos que la dimensión de este vector es: 3

Las matrices tienen una forma más o menos así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz de dimensión 2×3 que quiere decir que tiene 2 filas y 3 columnas.

La matriz $\mathscr{A}$ genérica sería algo así:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que el señor Einstein en su timepo representara como a_{ij} que para el representaba cualquier elemento genérico de la matriz.

Un elemento genérico representa a toda la matriz pues basta con concretar un valor para i y otro para j para obtener todos y cada uno de los valores.

Presentamos un cuadro resumen de las dos notaciones.

	Euclides	Einstein
Vector	$\vec{v}$	v_i
Matriz	$\mathscr{A}$	a_{ij}

Operaciones

Suma de Vectores

Sean los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$
$$\vec{z} = \vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

En notación de Einstein:

$$z_i = v_i + w_i$$

Y en c:

```c
for (int i=0; i<3; i++)
   z[i] = v[i] + w[i]
```

Que, como se ve, es una notación muy conveniente para un programador.

Producto Escalar

Sean los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$
$$p = \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

En la notación tradicional ponemos:

$$p = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$$

El símbolo $\sum$ se llama sumatorio y quiere decir que se le van dando valores a i y se van sumando a otros valores.

Einstein diría:

$$p = v_i w_i$$

Y se dice que hay una contracción en i. Como p no tiene subíndice i hay que ir dándole todos los valores y acumulando.

En programación hacemos:

```
for (int i=0; i<3; i++)
   z += v[i] * w[i]
```

Determinante

Sea la matriz $\mathscr{A}$. Su determinante es la suma de los productos de sus diagonales principales menos la resta de sus secundarias.

$$det \mathrm{A} = |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|\mathrm{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Que si hacemos el truco de que cuando salimos por abajo entramos por arriba:

$$|\mathrm{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{53} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{41} + a_{33}a_{42}a_{51})$$

Suma de la diagonal

$$\mathrm{S} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Einstein:

$$\mathrm{S} = a_{ii}$$

En C:

```
for (int i=0; i<3; i++)
   s += a[i][i]
```

Multiplicación de Matrices

Sea la multiplicación: $\mathscr{C} = \mathscr{A} \times \mathscr{B}$

El elemento c_{23} se obtine multiplicando la fila 2 de $\mathscr{A}$ por la columna 3 de $\mathscr{B}$.

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$

O como Einstein diría.

$$c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj}$$