# Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP-3CP)

**Aula #10 - Grafos: Problema do(s) Caminhos(s) Mínimo(s)**

Profª Luciene de Oliveira Marin
lucienemarin@utfpr.edu.br

# Problema do(s) Caminho(s) Mínimo(s)

# Problema do(s) Caminho(s) Mínimo(s)

Seja $G$ um grafo orientado e suponha que para cada aresta $(u, v)$ associamos um peso (custo, distância) $(u, v)$. Usaremos a notação $(G, w)$.

- **Problema do Caminho Mínimo entre Dois Vértices:** Dados dois vértices $s$ e $t$ em $(G, w)$, encontrar um caminho (de peso) mínimo de $s$ a $t$.
- Aparentemente, este problema não é mais fácil do que o **Problema dos Caminhos Mínimos com Mesma Origem:** Dados $(G, w)$ e $s \in V[G]$, encontrar para cada vértice $v$ de $G$, um caminho mínimo de $s$ a $v$.

**Teorema**. Seja $(G, w)$ um grafo orientado e seja

$$P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

um **caminho mínimo** de $v_1$ a $v_k$ .
Então para quaisquer $i, j$ com $1 \leq i \leq j \leq k$

$$P_{ij} = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$$

é um **caminho mínimo** de $v_i$ a $v_j$ .

# Representação de caminhos mínimos

- Usamos uma idéia similar à usada em **Busca em Largura** no algoritmo de caminhos mínimos que veremos.
- Para cada vértice $v \in V[G]$ associamos um predecessor $\pi[v]$.
- Ao final do algoritmo obtemos uma Árvore de Caminhos Mínimos com raiz $s$.
- Um caminho de $s$ a $v$ nesta árvore é um caminho mínimo de $s$ a $v$ em $(G, w)$.

# Estimativa de distâncias

- Para cada $v \in V[G]$ queremos determinar $dist(s, v)$, o peso de um caminho mínimo de $s$ a $v$ em $(G, w)$ (distância de $s$ a $v$.)
- Os algoritmos de caminhos mínimos associam a cada $v \in V[G]$ um valor $d[v]$ que é uma estimativa da distância $dist(s, v)$.

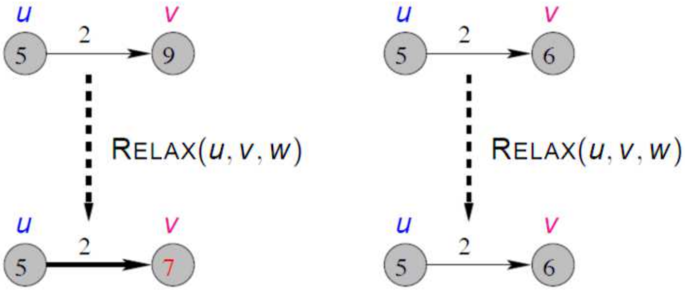
# Algoritmo - inicialização

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
para cada vértice v ∈ V[G] faça
    d[v] ← ∞
    π[v] ← NIL
d[s] ← 0
```

- O valor $d[v]$ é uma estimativa superior para o peso de um caminho mínimo de $s$ a $v$.
- Ele indica que o algoritmo encontrou até aquele momento um caminho de $s$ a $v$ com peso $d[v]$.
- O caminho pode ser recuperado por meio dos predecessores $\pi[]$.

# Algoritmo - relaxação

Tenta melhorar a estimativa $d[v]$ examinando $(u, v)$.




RELAX$(u, v, w)$

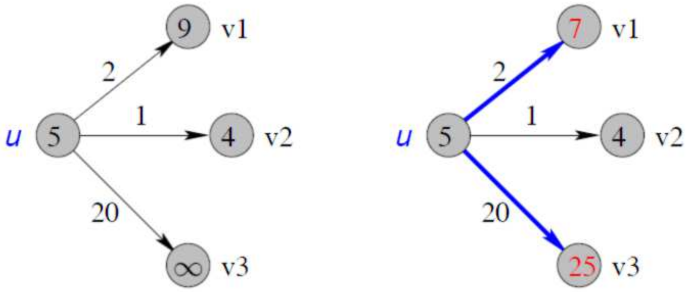
**se** $d[v] > d[u] + w(u, v)$

  **então** $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

    $\pi[v] \leftarrow u$

# Algoritmo - relaxação dos vizinhos

Em cada iteração o algoritmo seleciona um vértice $u$ e para cada vizinho $v$ de $u$ aplica RELAX$(u, v, w)$.




RELAX$(u, v, w)$

**se** $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **faça**

$\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\quad \pi[v] \leftarrow u$

# Algoritmos - Caminhos Mínimos

Existem três algoritmos baseados em relaxação para tipos de instâncias diferentes de **Problemas de Caminhos Mínimos**.

- $G$ é acíclico: aplicação de ordenação topológica
- $(G, w)$ não tem arestas de peso negativo: **algoritmo de Dijkstra**
- $(G, w)$ tem arestas de peso negativo, mas não contém ciclos negativos: algoritmo de Bellman-Ford.

# Algoritmo de Dijkstra

# Algoritmo de Dijkstra

**Objetivo:**

- encontrar o caminho de distância mínima de um vértice origem $x$ a um vértice destino $y$.
- resolve o problema do caminho mínimo em um grafo direcionado ou não direcionado com arestas de peso não negativo
- É semelhante ao **algoritmo BFS (busca em largura)**, utilizando uma estratégia gulosa.

# Algoritmo de Dijkstra

**Entrada**

O algoritmo de Dijkstra recebe um grafo orientado (ou não) $(G, w)$ (sem arestas de peso negativo) e um vértice $s$ de $G$

e devolve

**Saída**

- para cada $v \in V[G]$, o peso de um caminho mínimo de $s$ a $v$
- e uma Árvore de Caminhos Mínimos com raiz $s$.
  Um caminho de $s$ a $v$ nesta árvore é um caminho mínimo de $s$ a $v$ em $(G, w)$.

# Algoritmo de Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s)
    INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
    S ← ∅
    Q ← V[G]
    enquanto Q ≠ ∅ faça
        u ← EXTRACT-MIN(Q)
        S ← S ∪ {u}
        para cada vértice v ∈ Adj[u] faça
            RELAX(u, v, w)
```

O conjunto $Q$ é implementado como uma fila de prioridade.

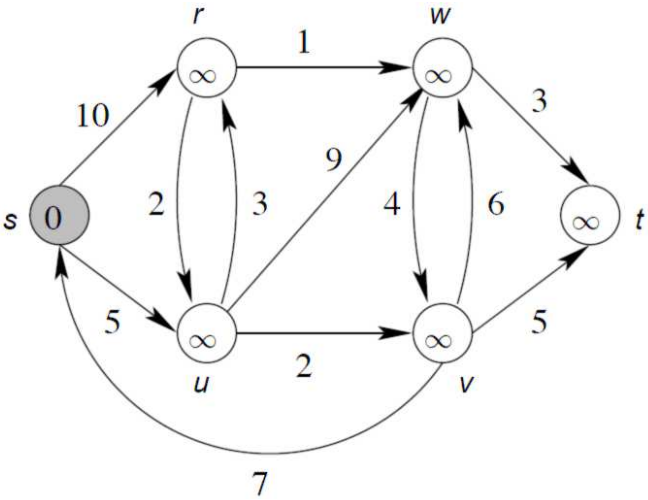
O conjunto $S$ não é realmente necessário, mas simplifica a análise do algoritmo.

# Algoritmo de Dijkstra - intuição do algoritmo

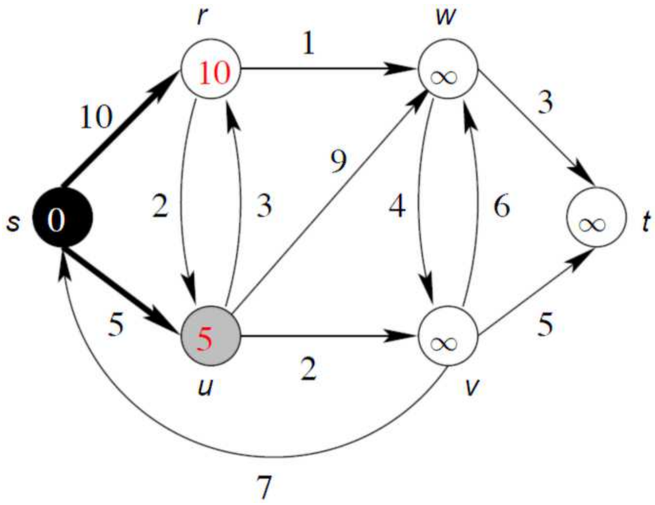
Em cada iteração, o algoritmo de DIJKSTRA

- escolhe um vértice $u$ fora do conjunto $S$ que esteja mais próximo a esse e acrescenta-o a $S$,
- atualiza as distâncias estimadas dos vizinhos de $u$ e
- atualiza a **Árvore dos Caminhos Mínimos**.

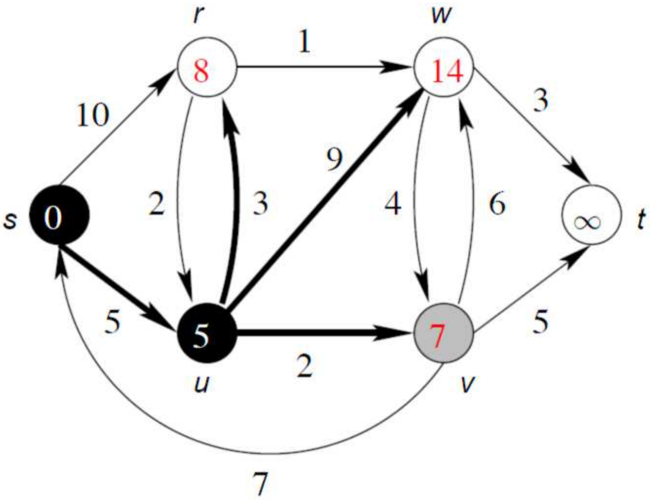
# Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



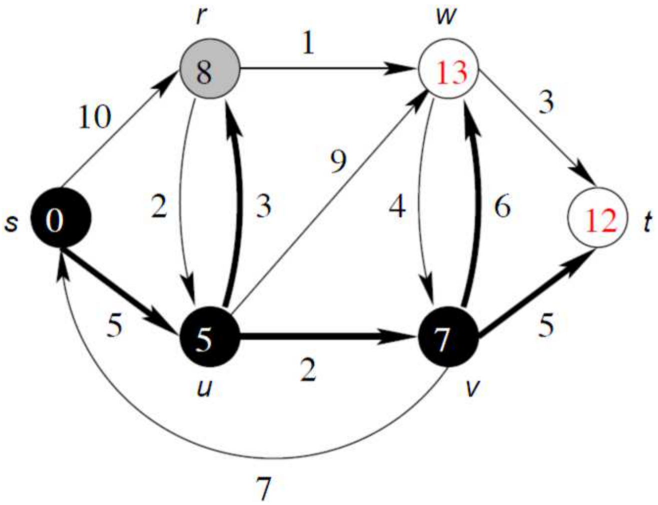
# Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



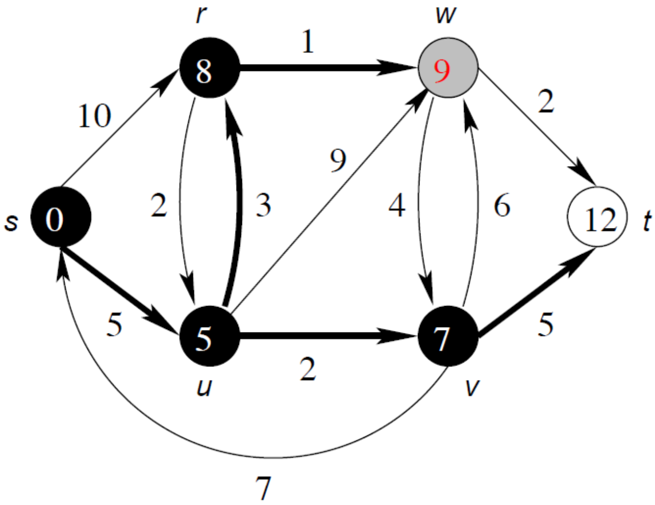
# Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



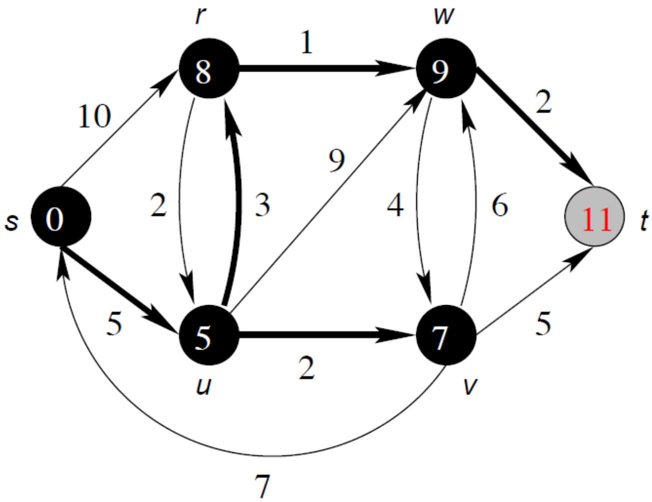
# Algoritmo de Dijkstra - Exemplo

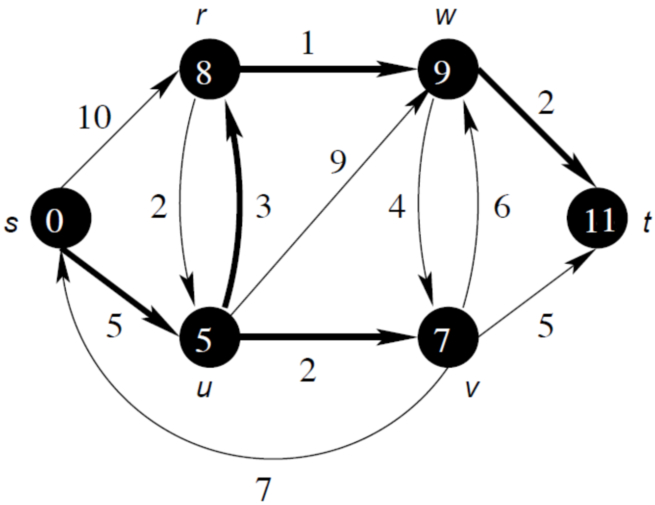


# Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



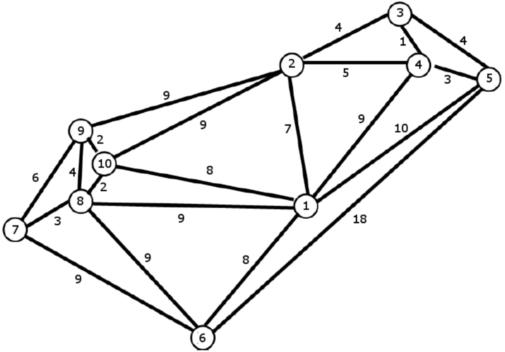
# Algoritmo de Dijkstra - Exemplo




r
w
1
8
9
10
2
9
s
0
2
3
4
6
11
t
5
5
7
5
2
u
v
7

# Exercício

Considere o grafo abaixo, em seguida faça:




- Execute o algoritmo de Dijkstra e encontre a árvore de caminhos mínimos do grafo acima, considerando o nó 1 como origem.
- Implemente o algoritmo de Dijkstra em linguagem C.

# Referências


- Cormen et. al. *Algoritmos - Teoria e Prática*.
- Nivio Ziviani. *Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C*.