Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP-3CP)

Aula #06 - Grafos - Noções Básicas e Representação

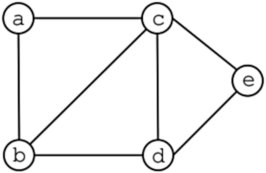
Profª Luciene de Oliveira Marin
lucienemarin@utfpr.edu.br

Grafos: Noções Básicas e Representação

Definição de Grafo

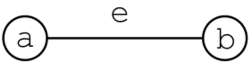
Um *grafo* é um par $G = (V, E)$ onde

- V é um conjunto finito de elementos chamados *vértices* e
- E é um conjunto finito de pares não-ordenados de vértices chamados *arestas*.
- **Exemplo:**
  $V = \{a, b, c, d, e\}$
  $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$



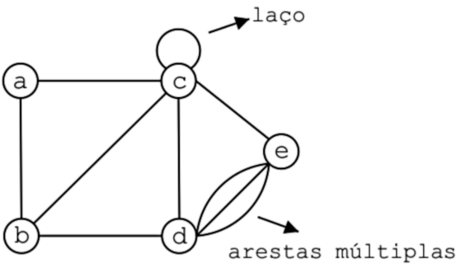
Definição de Grafo

- Dada uma aresta $e = (a, b)$, dizemos que os vértices a e b são os *extremos* da aresta e e que a e b são vértices *adjacentes*.
- Dizemos também que a aresta e é *incidente* aos vértices a e b, e que os vértices a e b são incidentes à aresta e.



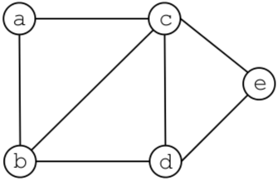
Grafo Simples

- Dizemos que um grafo é *simples* quando não possui laços ou arestas múltiplas.
- Um *laço* é uma aresta com extremos idêntico e *arestas múltiplas* são duas ou mais arestas com o mesmo par de vértices como extremos.
- **Exemplo:**



Tamanho do Grafo

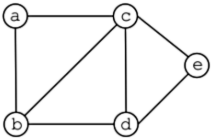
- Denotamos por $|V|$ e $|E|$ a cardinalidade dos conjuntos de vértices e arestas de um grafo G, respectivamente.
- No exemplo abaixo temos $|V| = 5$ e $|E| = 7$.



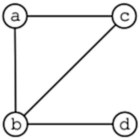
O *tamanho* do grafo G é dado por $|V| + |E|$.

Subgrafo e Subgrafo Gerador

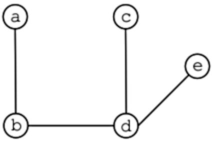
- Um *subgrafo* $H = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.
- Um *subgrafo gerador* de G é um subgrafo H com $V' = V$.
- **Exemplo:**



Grafo G

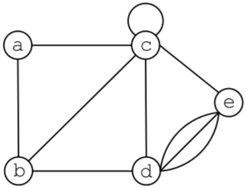


Subgrafo não gerador



Subgrafo gerador

- O *grau* (*degree*) de um vértice v, denotado por $d(v)$ é o número de arestas incidentes a v, com laços contados duas vezes.
- **Exemplo:**



d(a)=2

d(b)=3

d(c)=6

d(d)=5

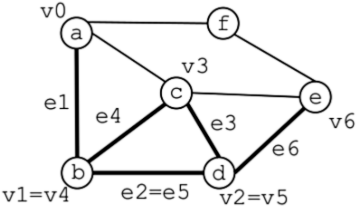
d(e)=4

Teorema (*Handshaking lemma*)

Para todo grafo $G = (V, E)$ temos:

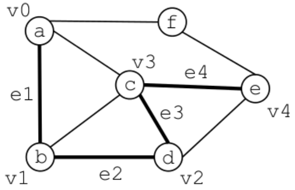
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

- Um *caminho* P de v_0 a v_n no grafo G é uma seqüência finita e não vazia $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$ cujos elementos são alternadamente vértices e arestas e tal que, para todo $1 \leq i \leq n$, v_{i-1} e v_i são os extremos de e_i.
- O *comprimento* do caminho P é dado pelo seu número de arestas, ou seja, n.
- **Exemplo:**

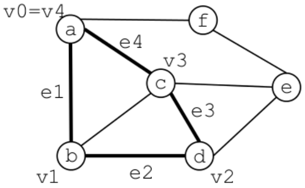


Caminhos Simples e Ciclos

- Um *caminho simples* é um caminho em que não há repetição de vértices e nem de arestas na sequência.
- Um *ciclo* ou *caminho fechado* é uma caminho em que $v_0 = v_n$.
- Um ciclo é dito ser *simples* se $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são distintos.
- Um grafo que não possui ciclos é dito ser *acíclico*.
- **Exemplo:**



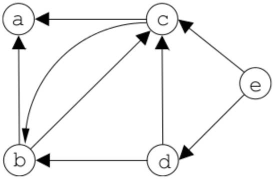
Caminho Simples



Ciclo

Grafo Orientado

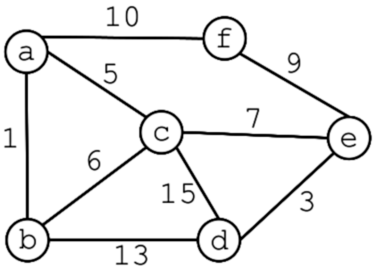
- As definições que vimos até agora são para grafos *não orientados*.
- Um *grafo orientado* é definido de forma semelhante, com a diferença que as arestas (às vezes chamadas de *arcos*) consistem de pares ordenados de vértices.
- **Exemplo:**



- Às vezes, para enfatizar, dizemos grafo não-orientado em vez de simplesmente grafo.

Grafo Ponderado

- Um grafo (orientado ou não) é *ponderado* se cada aresta e do grafo está associado um valor real $c(e)$, o qual denominamos *custo (ou peso)* da aresta.
- **Exemplo:**



Algoritmos em Grafos - Motivação

- Grafos são estruturas abstratas que podem modelar diversos problemas do mundo real.
- Por exemplo, um grafo pode representar conexões entre cidades por estradas ou uma rede de computadores.
- O interesse em estudar algoritmos para problemas em grafos é que conhecer um algoritmo para um determinado problema em grafos pode significar conhecer algoritmos para diversos problemas reais.

Aplicações

- Caminho mínimo: dado um conjunto de cidades, as distâncias entre elas e duas cidades A e B, determinar um caminho (trajeto) mais curto de A até B.
- Árvore Geradora de Peso Mínimo: dado um conjunto de computadores, onde cada par de computadores pode ser ligado usando uma quantidade de fibra ótica, encontrar uma rede interconectando-os que use a menor quantidade de fibra ótica possível.
- Emparelhamento máximo: dado um conjunto de pessoas e um conjunto de vagas para diferentes empregos, onde cada pessoa é qualificada para certos empregos e cada vaga pode ser ocupada por uma pessoa, encontrar um modo de empregar o maior número possível de pessoas.

Aplicações

- Problema do Caixeiro Viajante: dado um conjunto de cidades, encontrar um passeio que sai de uma cidade, passa por todas as cidades e volta para a cidade inicial tal que a distância total a ser percorrida seja menor possível.
- Problema Chinês do Correio: dado o conjunto das ruas de um bairro, encontrar um passeio que passa por todas as ruas voltando ao ponto inicial tal que a distância total a ser percorrida seja menor possível.

Representação Interna de Grafos

- A complexidade dos algoritmos para solução de problemas modelados por grafos depende fortemente da sua representação interna.
- Existem duas representações canônicas: matriz de adjacência e listas de adjacência.
- O uso de uma ou outra num determinado algoritmo depende da natureza das operações que ditam a complexidade do algoritmo.

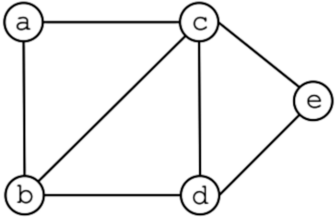
Matriz de adjacência

- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples (orientado ou não).
- A *matriz de adjacência* de G é uma matriz quadrada A de ordem $|V|$, cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices em V, e tal que:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Note que se G é não-orientado, então a matriz A correspondente é simétrica.

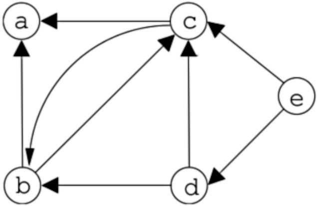
- Exemplo de um grafo e a matriz de adjacência correspondente.



	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	1	1	0
c	1	1	0	1	1
d	0	1	1	0	1
e	0	0	1	1	0

Matriz de adjacência

- Exemplo de um grafo orientado e a matriz de adjacência correspondente.



	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0
c	1	1	0	0	0
d	0	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0

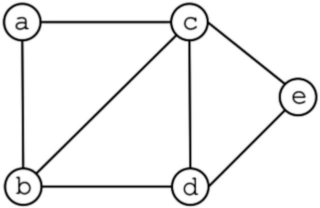
Listas de adjacência

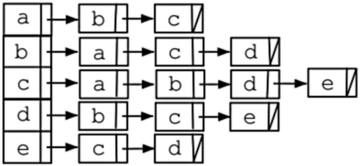
- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples (orientado ou não).
- A representação de G por uma *lista de adjacências* consiste no seguinte.

  Para cada vértice v, temos uma lista ligada $\mathrm{Adj}[v]$ dos vértices adjacentes a v, ou seja, w aparece em $\mathrm{Adj}[v]$ se (v, w) é uma aresta de G. Os vértices podem estar em qualquer ordem em uma lista.

Listas de adjacências

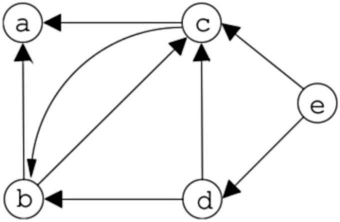
- Exemplo de um grafo não-orientado e a listas de adjacência correspondente.

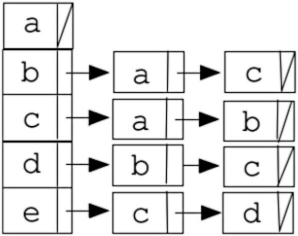




Listas de adjacências

Exemplo de um grafo orientado e a lista de adjacências correspondente.





Matriz × Lista de adjacência

- Matriz de adjacência: é fácil verificar se (i, j) é uma aresta de G.
- Lista de adjacência: é fácil descobrir os vértices adjacentes a um dado vértice v (ou seja, listar $\mathrm{Adj}[v]$).
- Matriz de adjacência: espaço $\Theta(|V|^2)$.
  Adequada a grafos densos ($|E| = \Theta(|V|^2)$).
- Lista de adjacência: espaço $\Theta(|V| + |E|)$.
  Adequada a grafos esparsos ($|E| = \Theta(|V|)$).

Extensões

- Há outras alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Elas podem ser adaptadas para representar grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.
- Para determinados problemas é essencial ter estruturas de dados adicionais para melhorar a eficiência dos algoritmos.

Exercícios

Exercícios (1/3)

1) Desenhe um grafo simples, conexo e dirigido G com 8 vértices e 16 arestas de forma que o grau de entrada e de saída de cada vértice seja 2. Mostre que existe um único ciclo (não simples) que inclui todas as arestas do grafo, ou seja, que você pode desenhar todas as arestas em suas direções respectivas sem levantar o lápis do papel (este tipo de ciclo é chamado de **ciclo de Euler**).

2) Bob adora línguas estrangeiras e deseja planejar seus horários para os próximos anos. Ele está interessado nos seguintes nove cursos de idiomas: $LA15$, $LA16$, $LA22$, $LA31$, $LA32$, $LA126$, $LA127$, $LA141$ e $LA169$. Os pré-requisitos dos cursos são:

- $LA15$: nenhum
- $LA16$: $LA15$
- $LA22$: nemhum
- $LA31$: $LA15$
- $LA32$: $LA16$, $LA31$
- $LA126$: $LA22$, $LA32$
- $LA127$: $LA16$
- $LA141$: $LA22$, $LA16$
- $LA169$: $LA32$

Exercícios (3/3)

3) Suponha que representamos um grafo G com n vértices e m arestas com uma lista de arestas. Por que, neste caso, o método `insertVertex` é executado em tempo $O(1)$ enquanto o método `removeVertex` leva tempo $O(m)$

4) Desenhe o grafo G, cujos vértices são os inteiros de 1 a 8 e sejam os vértices adjacentes a cada vértice dados pela tabela abaixo:

vértice	vértice adjacente
1	(2,3,4)
2	(1,3,4)
3	(1,2,4)
4	(1,2,3,6)
5	(6,7,8)
6	(4,5,7)
7	(5,6,8)
8	(5,7)