

Ejercicios Tema 1

Laura Gómez, Javier Sáez, Daniel Pozo, Luis Ortega

15 de marzo de 2018

1. Ejercicio 7

Enunciado: Se considera la ecuación:

$$x + \log x = 0$$

- Prueba que dicha ecuación posee una única solución
- Sea $a \in (0, 1/2)$. Prueba que si $x_0 \in [a, 1]$, el método de Newton-Raphson es convergente.

Resolución:

- Si $f(x) = x + \log x$, entonces $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Veremos cuándo esta derivada es igual a 0.

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \iff x = -1.$$

Ahora, la función $f(x)$ está definida únicamente en el intervalo $(0, +\infty)$, y es una función creciente en todo su dominio, luego en caso de existir la solución, a partir de ahora conocida como b , será única. Además, sabemos que existe y que $b \in (1/2, 1)$ pues, al aplicar Bolzano, $f(1/2) < 0$ y $f(1) > 0$.

- Sabemos que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$. Además, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$, luego $f \in \mathcal{C}^2([a, 1]) \quad \forall a \in (0, 1/2)$. Nótese que $f(a) < 0 \quad \forall a \in (0, 1/2)$ y que $f(1) > 0$. Tenemos así lo siguiente:

1. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$
2. $f(a)f(1) < 0 \quad \forall a \in (0, 1/2)$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) \neq 0$$

$$4. f''(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ es siempre negativa en } \mathbb{R}^2 \text{ y por tanto en } [a, 1].$$

Luego tenemos las condiciones para aplicar la proposición de la convergencia global del método de Newton. Por ello $\forall a \in (0, 1), \forall x_0 \in [a, 1]$ tal que $h(x_0) = f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ tenemos que la sucesión converge.

A continuación veremos para qué valores y se cumple lo enunciado.

$$f(y)f''(y) = (y + Lny) \frac{-1}{y^2} \geq 0 \iff y + Lny \leq 0 \iff f(y) \leq 0$$

Por todo lo que conocemos hasta ahora sobre f , como que tiene una única solución llamada b y que es una función creciente, podemos afirmar entonces que si $x_0 \in [a, b]$ entonces el método de Newton converge a la raíz b . Nuestra pregunta a continuación es: si $x_0 \in [b, 1]$, ¿sigue convergiendo la ecuación?

Para ello, calcularemos el valor x_1 a partir de un $x_0 \in [b, 1]$ cualquiera pero fijo y veremos qué sucede con él.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} = \frac{1 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} = h(x_0)$$

¿ $x_1 \in [0, b]$? O lo que es lo mismo, ¿ $h : [b, 1] \rightarrow A \subset [a, b]$? Veremos cómo es el crecimiento de h

$$h'(x_0) = \frac{-x_0 - Lnx_0}{x_0 + 1 + 2x_0^2} = 0 \iff x_0 = b$$

$$h'(1) < 0$$

Por ello nuestra h es decreciente, su mínimo se alcanza en 1 y su máximo se alcanza en b . Comprobamos que $\forall a \in (0, \frac{1}{2}) \quad x_1 \geq a$:

$$x_1 = h(x_0) = \frac{1 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} \geq a \iff \frac{1 - Ln1}{1 + \frac{1}{1}} \geq 1 \iff \frac{1}{2} \geq a$$

Comprobamos que $x_1 \leq b$:

$$x_1 = h(x_0) = \frac{1 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} \leq b \iff \frac{1 - Lnb}{1 + \frac{1}{b}} \leq b \iff \frac{b - bLnb}{b + 1} \leq b \iff \frac{1 + Lnb}{b + 1} \leq 1$$

Como no conocemos el valor b , veremos cuál el máximo valor de

$$g(b) = \frac{1 + Lnb}{b + 1} \forall b \in (\frac{1}{2}, 1)$$

que donde nos hemos asegurado anteriormente que existe la solución.

Terminando, como $g'(b) < 0 \forall b \in (\frac{1}{2}, 1)$, tenemos que:

$$\frac{1 + Lnb}{b + 1} \leq \frac{1 + Ln(1/2)}{1/2 + 1} = 0,795431... < 1$$

Como queríamos demostrar. Por tanto, $\forall a \in (0, \frac{1}{2})$ si $x_0 \in [a, 1]$ el método de Newton-Raphson converge.

2. Ejercicio 10

Enunciado: Se considera la función: $g(x) = \lambda x(1 - x)$, con $\lambda \in [0, 4]$.

- Demuestra que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.
- Calcula los puntos fijos de la función en $[0, 1]$ en función de λ .
- Considera la sucesión de iteraciones $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ y analiza la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos de g , en función de λ .

Solución:

- Sabemos que g es una función continua, y que $[0, 1]$ es un compacto, por tanto $g([0, 1])$ tendrá un máximo y un mínimo. Vemos que:

$$g'(x) = \lambda(1 - x) - \lambda x = \lambda(1 - 2x)$$

Ahora, $g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$, y $g''(x) = -2\lambda < 0$, luego tiene un máximo en $x = 1/2$. $g(1/2) = \frac{\lambda}{4}$. Este máximo es menor o igual que 1, para todo λ que esté entre 0 y 4.

Además, $g(0) = g(1) = 0$, por tanto concluimos que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$

- Vamos a buscar los puntos fijos. Para ello, se tiene que dar:

$$g(x) = x \implies x = \lambda x(1 - x)$$

De esta expresión, obtenemos fácilmente que $x = 0$ es un punto fijo. Supongamos $x \neq 0$. Entonces,

$$1 = \lambda(1 - x) \implies x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

- Sea $x_{n+1} = g_\lambda(x) = \lambda x(1-x) = \lambda x - \lambda x^2$ con $\lambda \in [0, 4]$ y $x \in [0, 1]$. Como sabemos que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$, y sabiendo que los puntos fijos son de la forma $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$, analizaremos la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos.

Si $\lambda = 0$, entonces $g_0(x) = 0$ para todo x , luego tendremos una función constante con punto fijo $x_0 = 0$.

Vamos a usar el siguiente resultado:

Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $g_\lambda(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$
2. g_λ es lipschitziana con constante de Lipschitz $L < 1$, entonces $\exists! x_\lambda \in [a, b]$ tal que $g(x_\lambda) = x_\lambda$ y $x_\lambda^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_{n+1}\} \quad \forall x_0 \in [a, b]$

Sabemos que la primera condición se verifica $\forall \lambda \in [0, 4]$ por el primer apartado. La segunda condición se verifica si $|g'_\lambda(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in [a, b]$.

Observamos que: $g'_\lambda = \lambda - 2\lambda x$ y miramos cuándo esto, en valor absoluto, es menor o igual que 1:

$$g'_\lambda = 1 \implies \lambda - 2\lambda x = 1 \implies x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$$

De forma análoga, $g'_\lambda = -1$ se da cuando $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}$. En estos dos puntos tenemos que el valor absoluto de la derivada es 1. Ahora, estudiemos el crecimiento y decrecimiento de esta derivada. Para ello, vemos que $g''_\lambda(x) = -2\lambda$, luego g'_λ es decreciente para todo $\lambda \in [0, 4]$. Por tanto, $\forall x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda})$, se tiene que $|g'(x)| < 1$, por lo que no podemos aplicar el resultado que hemos dado pues el intervalo es abierto.

De otro modo, si comprobamos para qué valores λ , $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ pertenece a dicho intervalo o vemos cuándo $|h(\lambda)| = |g_\lambda(x_\lambda)| = 1$, tendremos que:

- Si $\lambda \in (1, 3)$, entonces $|h(\lambda)| < 1 \implies x_\lambda$ es un punto fijo atractivo
- Si $\lambda \in [0, 1) \cup (3, 4] \implies |h(\lambda)| > 1 \implies x_\lambda$ es un punto fijo repulsivo
- Si $\lambda = 1$ ó $\lambda = 3 \implies |h(\lambda)| = 1 \implies$ no podemos afirmar nada

3. Ejercicio 18

Enunciado: Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin x_3 + 1,06 = 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

- Escribe el sistema anterior en la forma $x = g(x)$ despejando en la ecuación i la variable x_i , $i = 1, 2, 3$.
- Demuestra utilizando el resultado del ejercicio anterior que el sistema de ecuaciones tiene una única solución en

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

- Calcula una aproximación de la solución con el método de iteración funcional tomando $x^{(0)} = (0,1,0,1,-0,1)$ con una tolerancia fijada de 10^{-5} , donde la tolerancia viene fijada por la norma infinito de la diferencia de dos aproximaciones sucesivas.

Solución:

- Despejando en nuestro sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\cos(x_2x_3)+1/2}{3} \\ x_2 = 1/90(9 - \sqrt{2}\sqrt{53 + 50x_1^2 + 50\sin(x_3)}) \\ x_3 = \frac{-e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi-3}{3}}{20} \end{cases}$$

queda así despejado nuestro sistema. Ahora, vamos a usar el resultado del ejercicio 17 para probar que tiene una única solución. El resultado del ejercicio anterior es:

Si $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase 1 e D , si existe $L \in (0, 1)$ tal que:

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{L}{n}, \quad \forall x \in D$$

entonces g es contractiva.

Ahora, usaremos que D es un dominio y que $g(x) = (x_1, x_2, x_3)$ es contractiva (lo probaremos ahora) para ver que tiene un único punto x^* tal que $g(x^*) = x^*$.

Vamos por ello a realizar la jacobiana de g .

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-x_3 \sin(x_2 x_3)}{3} & \frac{-x_2 \sin(x_2 x_3)}{3} \\ \frac{-5\sqrt{2}x}{9\sqrt{53+50x^2+50\sin(x_3)}} & 0 & -\frac{5\cos(x)}{9\sqrt{2}\sqrt{53+50x_1^2+50\sin(x)}} \\ \frac{-x_2 e^{-x_1 x_2}}{20} & \frac{-x_1 e^{-x_1 x_2}}{20} & 0 \end{pmatrix}$$

que podemos observar que todas estas derivadas se puede ver fácilmente que son menores que $1/3$. Así, entonces se cumple la condición que necesitamos para aplicar la proposición anunciada con anterioridad y afirmar así que g es contractiva. Además, D es claramente un dominio, por lo que concluimos que $\exists! x^* : g(x^*) = x^*$.

4. Ejercicio 21

Enunciado: Obtén aproximaciones de la solución de los sistemas de los ejercicios 18 y 20 mediante el método de Newton. Compara la convergencia de los resultados obtenidos con los diferentes métodos.