# Ejercicios Tema 1

Laura Gómez, Javier Sáez, Daniel Pozo, Luis Ortega

10 de marzo de 2018

## 1. Ejercicio 7

**Enunciado**: Se considera la ecuación:

$$x + logx = 0$$

- Prueba que dicha ecuación posee una única solución
- Sea $a \in (0, 1/2)$. Prueba que si $x_0 \in [a, 1]$, el método de Newton-Raphson es convergente.

**Resolución**:

- Si $f(x) = x + logx$, entonces $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Veremos cuándo esta derivada es igual a 0.

  $$1 + \frac{1}{x} = 0 \iff x = -1.$$

  Ahora, la función $f(x)$ está definida únicamente en el intervalo $(0, +\infty)$, y es una ufnción creciente en todo su dominio, luego en caso de existir la solución será única. Además, sabemos que existe pues $f(0,1) < 0$ y $f(1) > 0$.

- Sabemos que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in R^+$. Además, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$, luego $f \in \mathcal{C}^2([a, 1]) \quad \forall a \in (0, 1/2)$. Nótese que $f(a) < 0 \quad \forall a \in (0, 1/2)$ y que $f(1) > 0$. Tenemos así lo siguiente:

  1. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$
  2. $f(a)f(b) < 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$
  3. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) \neq 0$

4. $f''$ es siempre positiva en $\mathbb{R}^2$

Luego tenemos las condiciones para aplicar la proposición de la convergencia global del método de Newton.

# 2. Ejercicio 10

**Enunciado**: Se considera la función: $g(x) = \lambda x(1-x)$, con $\lambda \in [0,4]$.

- Demuestra que $g([0,1]) \subset [0,1]$.
- Calcula los puntos fijos de la función en $[0,1]$ en función de $\lambda$.
- Considera la suceción de iteraciones $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, ...$ y analiza la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos de $g$, en función de $\lambda$.

**Solución**:

- Sabemos que $g$ es una funcion continua, y que $[0,1]$ es un compacto, por tanto $g([0,1])$ tendrá un máximo y un mínimo. Vemos que:

  $$g'(x) = \lambda(1-x) - \lambda x = \lambda(1-2x)$$

  Ahora, $g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$, y $g''(x) = -2\lambda < 0$, luego tiene un máximo en $x = 1/2$. $g(1/2) = \frac{\lambda}{4}$. Este máximo es menor o igual que 1, para todo $\lambda$ que esté entre 0 y 4.
  Además, $g(0) = g(1) = 0$, por tanto concluimos que $g([0,1]) \subset [0,1]$

- Vamos a buscar los puntos fijos. Para ello, se tiene que dar:

  $$g(x) = x \implies x = \lambda x(1-x)$$

  De esta expresión, obtenemos fácilmente que $x = 0$ es un punto fijo. Supongamos $x \neq 0$. Entonces,

  $$1 = \lambda(1-x) \implies x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

## 3. Ejercicio 18

**Enunciado**: Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -cos(x_2x_3) + 3x_1 - \quad \dfrac{1}{2} = 0 \\ sinx_3 + x_1^2 - 81(x_2 + \quad 1{,}06 = 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

- Escribe el sistema anterior en la forma $x = g(x)$ depejando en la ecuación $i$ la variable $x_i$, $i = 1, 2, 3$.
- Demuestra utilizando el resultado del ejercicio anterior que el sistema de ecuaciones tiene una única solución en

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : 1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, 2, 3\}.$$

- Calcula una aproximación de la solución con el método de iteración funcional tomando $x^{(0)} = (0{,}1, 0{,}1, -0{,}1)$ con una tolerancia fijada de $10^{-5}$, donde la tolerancia viene fijada por la norma infinito de la diferencia de dos aproximaciones sucesivas.

**Solución**:

- Despejando en nuestro sistema, obtejemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{cos(x_2x_3)+1/2}{3} \\ x_2 = \sqrt{\frac{x_1^2 - 0{,}81 + 1{,}06 - 16{,}2x_2 + sinx_3}{81}} \\ x_3 = \frac{-e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi-3}{3}}{20} \end{cases}$$

queda así despejado nuestro sistema. Ahora, vamos a usar el resultado del ejercicio 17 para probar que tiene una única solución. El resultado del ejercicio anterior es:
Si $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase 1 e $D$, si existe $L \in (0, 1)$ tal que:

$$|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}| \leq \frac{L}{n}, \quad \forall x \in D$$

entonces $g$ es contractiva.

Ahora, usaremos que $D$ es un dominio y que $g(x) = (x_1, x_2, x_3)$ es contractiva (lo probaremos ahora) para ver que tiene un único punto $x^*$ atal que $g(x^*) = x^*$.

Vamos por ello a realizar la jacobiana de $g$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-x3sin(x_2x_3)}{3} & \frac{-x2sin(x_2x_3)}{3} \\ \frac{x_1}{3\sqrt{x_1^2+sin(x_3)+0{,}25-16{,}2x_2}} & \frac{-8{,}1}{3\sqrt{x_1^2+sin(x_3)-16{,}2x_2+0{,}25}} & \frac{cos(x_3)}{6\sqrt{x_1^2+16{,}2x_2+sin(x_3)+0{,}25}} \\ \frac{-x_2e^{-x_1x_2}}{20} & \frac{-x_1e^{-x_1x_2}}{20} & 0 \end{pmatrix}$$

que podemos observar que , como $x_1, x_2, x_3$ está siempre entre 0 y 1, entonces se cumple la condición que necesitamos para aplicar la proposición anunciada con anterioridad y afirmar así que $g$ es contractiva. Además, $D$ es claramente un dominio, por lo que concluimos que $\exists! x^* : g(x^*) = x^*$.

## 4. Ejercicio 21

**Enunciado**: Obtén aproximaciones de la solución de los sistemas de los ejercicios 18 y 20 mediante el método de Newton. Compara la convergencia de los resultados obtenidos con los diferentes métodos.