

# Ejercicios Tema 1

Laura Gómez, Javier Sáez, Daniel Pozo, Luis Ortega

16 de marzo de 2018

## 1. Ejercicio 7

**Enunciado:** Se considera la ecuación:

$$x + \log x = 0$$

- Prueba que dicha ecuación posee una única solución
- Sea  $a \in (0, 1/2)$ . Prueba que si  $x_0 \in [a, 1]$ , el método de Newton-Raphson es convergente.

**Resolución:**

- Si  $f(x) = x + \log x$ , entonces  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ . Veremos cuándo esta derivada es igual a 0.

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \iff x = -1.$$

Ahora, la función  $f(x)$  está definida únicamente en el intervalo  $(0, +\infty)$ , y es una función creciente en todo su dominio, luego en caso de existir la solución, a partir de ahora conocida como  $b$ , será única. Además, sabemos que existe y que  $b \in (1/2, 1)$  pues, al aplicar Bolzano,  $f(1/2) < 0$  y  $f(1) > 0$ .

- Sabemos que  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ . Además,  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ , luego  $f \in \mathcal{C}^2([a, 1]) \quad \forall a \in (0, 1/2)$ . Nótese que  $f(a) < 0 \quad \forall a \in (0, 1/2)$  y que  $f(1) > 0$ . Tenemos así lo siguiente:

1.  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$
2.  $f(a)f(1) < 0 \quad \forall a \in (0, 1/2)$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) \neq 0$$

$$4. f''(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ es siempre negativa en } \mathbb{R}^2 \text{ y por tanto en } [a, 1].$$

Luego tenemos las condiciones para aplicar la proposición de la convergencia global del método de Newton. Por ello  $\forall a \in (0, \frac{1}{2}), \forall x_0 \in [a, 1]$  tal que  $h(x_0) = f(x_0)f''(x_0) \geq 0$  tenemos que la sucesión converge.

A continuación veremos para qué valores  $y$  se cumple lo enunciado.

$$f(y)f''(y) = (y + Lny) \frac{-1}{y^2} \geq 0 \iff y + Lny \leq 0 \iff f(y) \leq 0$$

Por todo lo que conocemos hasta ahora sobre  $f$ , como que tiene una única solución llamada  $b$  y que es una función creciente, podemos afirmar entonces que si  $x_0 \in [a, b]$  entonces el método de Newton converge a la raíz  $b$ . Nuestra pregunta a continuación es: si  $x_0 \in [b, 1]$ , ¿sigue convergiendo la ecuación?

Para ello, calcularemos el valor  $x_1$  a partir de un  $x_0 \in [b, 1]$  cualquiera pero fijo y veremos qué sucede con él.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} = \frac{1 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} = h(x_0)$$

¿ $x_1 \in [0, b]$ ? O lo que es lo mismo, ¿ $h : [b, 1] \rightarrow A \subset [a, b]$ ? Veremos cómo es el crecimiento de  $h$

$$h'(x_0) = \frac{-x_0 - Lnx_0}{x_0 + 1 + 2x_0^2} = 0 \iff x_0 = b$$

$$h'(1) < 0$$

Por ello nuestra  $h$  es decreciente, su mínimo se alcanza en 1 y su máximo se alcanza en  $b$ . Comprobamos que  $\forall a \in (0, \frac{1}{2}) \quad x_1 \geq a$ :

$$x_1 = h(x_0) = \frac{1 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} \geq a \iff \frac{1 - Ln1}{1 + \frac{1}{1}} \geq 1 \iff \frac{1}{2} \geq a$$

Comprobamos que  $x_1 \leq b$ :

$$x_1 = h(x_0) = \frac{1 - Lnx_0}{1 + \frac{1}{x_0}} \leq b \iff \frac{1 - Lnb}{1 + \frac{1}{b}} \leq b \iff \frac{b - bLnb}{b + 1} \leq b \iff \frac{1 - Lnb}{b + 1} \leq 1$$

Como no conocemos el valor  $b$ , veremos cuál el máximo valor de

$$g(b) = \frac{1 - Lnb}{b + 1} \forall b \in (\frac{1}{2}, 1)$$

que es el intervalo donde nos hemos asegurado, al inicio del ejercicio, que existe la solución de nuestra ecuación.

Terminando, como  $g'(b) < 0 \forall b \in (\frac{1}{2}, 1)$ , tenemos que la función es estrictamente decreciente en todo el intervalo y por ello su máximo se alcanza en  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1 - Lnb}{b + 1} \leq \frac{1 - Ln(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2} + 1} = 0,795431... < 1$$

Como queríamos demostrar. Por tanto,  $\forall a \in (0, \frac{1}{2})$  si  $x_0 \in [a, 1]$  el método de Newton-Raphson  $b$  converge siendo por aplicación directa del teorema de convergencia global de Newton si  $x_0 \in [a, b]$  y porque  $\forall x_0 \in [b, 1], x_1 \in [a, b]$  y nuevamente se aplica el teorema de la convergencia global de Newton.

## 2. Ejercicio 10

**Enunciado:** Se considera la función:  $g(x) = \lambda x(1 - x)$ , con  $\lambda \in [0, 4]$ .

- Demuestra que  $g([0, 1]) \subset [0, 1]$ .
- Calcula los puntos fijos de la función en  $[0, 1]$  en función de  $\lambda$ .
- Considera la sucesión de iteraciones  $x_{n+1} = g(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  y analiza la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos de  $g$ , en función de  $\lambda$ .

**Solución:**

- Sabemos que  $g$  es una función continua, y que  $[0, 1]$  es un compacto, por tanto  $g([0, 1])$  tendrá un máximo y un mínimo. Vemos que:

$$g'(x) = \lambda(1 - x) - \lambda x = \lambda(1 - 2x)$$

Ahora,  $g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ , y  $g''(x) = -2\lambda < 0$ , luego tiene un máximo en  $x = 1/2$ .  $g(1/2) = \frac{\lambda}{4}$ . Este máximo es menor o igual que 1, para todo  $\lambda$  que esté entre 0 y 4.

Además,  $g(0) = g(1) = 0$ , por tanto concluimos que  $g([0, 1]) \subset [0, 1]$

- Vamos a buscar los puntos fijos. Para ello, se tiene que dar:

$$g(x) = x \implies x = \lambda x(1 - x)$$

De esta expresión, obtenemos fácilmente que  $x = 0$  es un punto fijo. Supongamos  $x \neq 0$ . Entonces,

$$1 = \lambda(1 - x) \implies x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

Tenemos que tener entonces que  $\lambda \neq 0$ . Ahora, tenemos que ver cuándo estos puntos fijos están dentro del intervalo  $[0, 1]$ . Vemos que si  $\lambda \in (0, 1)$ , entonces  $\frac{1}{\lambda} > 1$ , por lo que el punto fijo sería  $x_\lambda < 0$ , y no estaría en nuestro intervalo. Por tanto, para que nuestros puntos fijos se queden en  $[0, 1]$ , necesitamos que  $\lambda \in [1, 4]$

- Sea  $x_{n+1} = g_\lambda(x) = \lambda x(1 - x) = \lambda x - \lambda x^2$  con  $\lambda \in [1, 4]$  y  $x \in [0, 1]$ . Como sabemos que  $g([0, 1]) \subset [0, 1]$ , y sabiendo que los puntos fijos son de la forma  $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ , analizaremos la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos  $x = x_\lambda$  y  $x = 0$ .

Sabiendo que si  $|g'_\lambda(x)| < 1$  en  $x$  punto fijo, entonces este es atractivo. De la misma forma si  $|g'_\lambda(x)| > 1$  entonces es repulsivo. Analicemos primero el caso del punto fijo  $x = 0$  con  $g'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$ , luego:

$$g'_\lambda(0) = \lambda - 2\lambda \cdot 0 = \lambda \implies \forall \lambda \in [1, 4], g'_\lambda(0) > 0$$

luego  $x = 0$  es un punto fijo repulsivo siempre.

Veamos ahora qué sucede en  $x = x_\lambda$  punto fijo. Miremos cuándo  $g'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$  es, en valor absoluto, es menor o igual que 1 para averiguar su comportamiento en función de  $\lambda$ :

$$g'_\lambda = 1 \implies \lambda - 2\lambda x = 1 \implies x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$$

De forma análoga,  $g'_\lambda = -1$  se da cuando  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}$ . En estos dos puntos, tenemos que el valor absoluto de la derivada es 1. Ahora, estudiemos el crecimiento y decrecimiento de esta derivada. Para ello, vemos que  $g''_\lambda(x) = -2\lambda$ , luego  $g'_\lambda$  es decreciente para todo  $\lambda \in [1, 4]$ . Por tanto,  $\forall x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda})$ , se tiene que  $|g'(x)| < 1$ .

Comprobamos para qué valores de  $\lambda$ , nuestro punto fijo  $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$  pertenece a dicho intervalo o vemos cuándo  $|g'_\lambda(x_\lambda)| = 1$ , tendremos que:

- Si  $\lambda \in (1, 3)$ , entonces  $|g'_\lambda(x_\lambda)| < 1 \implies x_\lambda$  es un punto fijo atractivo
- Si  $\lambda \in (3, 4] \implies |g'_\lambda(x_\lambda)| > 1 \implies x_\lambda$  es un punto fijo repulsivo
- Si  $\lambda = 1$  tenemos que  $|g'_1(x_1)| = |g'_\lambda(0)|$  que, como ya hemos afirmado antes, es repulsivo.
- Si  $\lambda = 3 \implies |g'_3(x_3)| = |g'_3(\frac{2}{3})| = 1$  En este caso, si analizamos el límite por la izquierda y por la derecha de  $x_3 = \frac{2}{3}$ , viéndose que el límite por la izquierda es mayor estricto que 1 y menor estricto que 1 si tomamos el límite por la derecha. De esta forma vemos que, en este caso, los valores a la izquierda del punto fijo se ven atraídos hacia a él y los valores a la derecha se ven repelidos.

### 3. Ejercicio 18

**Enunciado:** Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin x_3 + 1,06 = 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

- Escribe el sistema anterior en la forma  $x = g(x)$  depejando en la ecuación  $i$  la variable  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .
- Demuestra utilizando el resultado del ejercicio anterior que el sistema de ecuaciones tiene una única solución en

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

- Calcula una aproximación de la solución con el método de iteración funcional tomando  $x^{(0)} = (0,1,0,1,-0,1)$  con una tolerancia fijada de  $10^{-5}$ , donde la tolerancia viene fijada por la norma infinito de la diferencia de dos aproximaciones sucesivas.

**Solución:**

- Despejando en nuestro sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\cos(x_2 x_3) + 1/2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{90} (9 - \sqrt{2} \sqrt{53 + 50x_1^2 + 50\sin(x_3)}) \\ x_3 = \frac{-e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{3}}{20} \end{cases}$$

queda así despejado nuestro sistema. Ahora, vamos a usar el resultado del ejercicio 17 para probar que tiene una única solución. El resultado del ejercicio anterior es:

Si  $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase 1 e  $D$ , si existe  $L \in (0, 1)$  tal que:

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{L}{n}, \quad \forall x \in D$$

entonces  $g$  es contractiva.

Ahora, usaremos que  $D$  es un dominio y que  $g(x) = (x_1, x_2, x_3)$  es contractiva (lo probaremos ahora) para ver que tiene un único punto  $x^*$  tal que  $g(x^*) = x^*$ .

Vamos por ello a realizar la jacobiana de  $g$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-x_3 \sin(x_2 x_3)}{3} & \frac{-x_2 \sin(x_2 x_3)}{3} \\ \frac{-5\sqrt{2}x}{9\sqrt{53+50x^2+50\sin(x_3)}} & 0 & -\frac{5\cos(x)}{9\sqrt{2}\sqrt{53+50x_1^2+50\sin(x)}} \\ \frac{-x_2 e^{-x_1 x_2}}{20} & \frac{-x_1 e^{-x_1 x_2}}{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que, como  $-1 \leq x_i \leq 1$ , entonces cada una de estas derivadas es menor que  $\frac{1}{3}$ . Por tanto, como  $n = 3$ , tomando  $L$  cercano a 1, tenemos la condición que queríamos. Podemos afirmar así que  $g$  es contractiva. Además,  $D$  es claramente un dominio, por lo que concluimos que  $\exists! x^* : g(x^*) = x^*$ .

## 4. Ejercicio 21

**Enunciado:** Obtén aproximaciones de la solución de los sistemas de los ejercicios 18 y 20 mediante el método de Newton. Compara la convergencia de los resultados obtenidos con los diferentes métodos.