Ejercicios Tema 1

Laura Gómez, Javier Sáez, Daniel Pozo, Luis Ortega

16 de marzo de 2018

1. Ejercicio 7

Enunciado: Se considera la ecuación:

$$x + \log x = 0$$

- Prueba que dicha ecuación posee una única solución
- Sea $a \in (0, 1/2)$. Prueba que si $x_0 \in [a, 1]$, el método de Newton-Raphson es convergente.

Resolución:

- Si $f(x) = x + \log x$, entonces $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Veremos cuándo esta derivada es igual a 0.

  $$1 + \frac{1}{x} = 0 \iff x = -1.$$

  Ahora, la función $f(x)$ está definida únicamente en el intervalo $(0, +\infty)$, y es una función creciente en todo su dominio, luego en caso de existir la solución, a partir de ahora conocida como b, será única. Además, sabemos que existe y que $b \in (1/2, 1)$ pues, al aplicar Bolzano, $f(1/2) < 0$ y $f(1) > 0$.

- Sabemos que $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$. Además, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$, luego $f \in \mathcal{C}^2([a, 1]) \ \ \forall a \in (0, 1/2)$. Nótese que $f(a) < 0 \ \ \forall a \in (0, 1/2)$ y que $f(1) > 0$. Tenemos así lo siguiente:

  1. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$
  2. $f(a)f(1) < 0 \ \ \forall a \in (0, 1/2)$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) \neq 0$
4. $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ es siempre negativa en $\mathbb{R}^2$ y por tanto en $[a, 1]$.

Luego tenemos las condiciones para aplicar la proposición de la convergencia global del método de Newton. Por ello $\forall a \in (0, \frac{1}{2}), \forall x_0 \in [a, 1]$ tal que $h(x_0) = f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ tenemos que la sucesión converge.

A continuación veremos para qué valores y se cumple lo enunciado.

$$f(y)f''(y) = (y + \log y)\frac{-1}{y^2} \geq 0 \iff y + \log y \leq 0 \iff f(y) \leq 0$$

Por todo lo que conocemos hasta ahora sobre f, como que tiene una única solución llamada b y que es una función creciente, podemos afirmar entonces que si $x_0 \in [a, b]$ entonces el método de Newton converge a la raiz b. Nuestra pregunta a continuación es: si $x_0 \in [b, 1]$, ¿sigue convergiendo la ecuación?

Para ello, calcularemos el valor x_1 a partir de un $x_0 \in [b, 1]$ cualquiera pero fijo y veremos qué sucede con él.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0 - \log x_0}{1 + \frac{1}{x_0}} = \frac{1 - \log x_0}{1 + \frac{1}{x_0}} = h(x_0)$$

¿$x_1 \in [0, b]$? O lo que es lo mismo, ¿$h : [b, 1] \to A \subset [a, b]$? Veremos cómo es el crecimiento de h

$$h'(x_0) = \frac{-x_0 - \log x_0}{x_0 + 1 + 2x_0^2} = 0 \iff x_0 = b$$
$$h'(1) < 0$$

Por ello nuestra h es decreciente, su mínimo se alcanza en 1 y su máximo se alcanza en b. Comprobamos que $\forall a \in (0, \frac{1}{2})$ $x_1 \geq a$:

$$x_1 = h(x_0) = \frac{1 - \log x_0}{1 + \frac{1}{x_0}} \geq a \iff \frac{1 - \log 1}{1 + \frac{1}{1}} \geq 1 \iff \frac{1}{2} \geq a$$

Comprobamos que $x_1 \leq b$:

$$
\begin{aligned}
x_1 = h(x_0) = \frac{1-\log x_0}{1+\frac{1}{x_0}} \leq b &\iff \\
\frac{1-\log b}{1+\frac{1}{b}} \leq b &\iff \\
\frac{b - b\log b}{b+1} \leq b &\iff \\
\frac{1-\log b}{b+1} \leq 1 &
\end{aligned}
$$

Como no conocemos el valor b, veremos cuál el máximo valor de

$$g(b) = \frac{1-\log b}{b+1} \quad \forall b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

que es el intervalo donde nos hemos asegurado, al inicio del ejercicio, que existe la solución de nuestra ecuación.

Terminando, como $g'(b) < 0 \ \forall b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, tenemos que la función es estrictamente decreciente en todo el intervalo y por ello su máximo se alcanza en $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1-\log b}{b+1} \leq \frac{1-\log(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}+1} = 0{,}795431... < 1$$

Como queríamos demostar. Por tanto, $\forall a \in (0, \frac{1}{2})$si $x_0 \in [a, 1]$ el método de Newton-Raphson b converge siendo por aplicación directa del teorema de convergencia global de Newton si $x_0 \in [a, b]$ y porque $\forall x_0 \in [b, 1], x_1 \in [a, b]$ y nuevamente se aplica el teorema de la convergencia global de Newton.

2. Ejercicio 10

Enunciado: Se considera la función: $g(x) = \lambda x(1-x)$, con $\lambda \in [0, 4]$.

- Demuestra que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.
- Calcula los puntos fijos de la función en $[0, 1]$ en función de λ.
- Considera la suceción de iteraciones $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, ...$ y analiza la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos de g, en función de λ.

Solución:

- Sabemos que g es una funcion continua, y que $[0,1]$ es un compacto, por tanto $g([0,1])$ tendrá un máximo y un mínimo. Vemos que:

  $$g'(x) = \lambda(1-x) - \lambda x = \lambda(1-2x)$$

  Ahora, $g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$, y $g''(x) = -2\lambda < 0$, luego tiene un máximo en $x = 1/2$. $g(1/2) = \frac{\lambda}{4}$. Este máximo es menor o igual que 1, para todo λ que esté entre 0 y 4.
  Además, $g(0) = g(1) = 0$, por tanto concluimos que $g([0,1]) \subset [0,1]$

- Vamos a buscar los puntos fijos. Para ello, se tiene que dar:

  $$g(x) = x \implies x = \lambda x(1-x)$$

  De esta expresión, obtenemos fácilmente que $x = 0$ es un punto fijo. Supongamos $x \neq 0$. Entonces,

  $$1 = \lambda(1-x) \implies x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

  Tenemos que tener entonces que $\lambda \neq 0$. Ahora, tenemos que ver cuándo estos puntos fijos están dentro del intervalo $[0,1]$. Vemos que si $\lambda \in (0,1)$, entonces $\dfrac{1}{\lambda} > 1$, por lo que el punto fijo sería $x_\lambda < 0$, y no estaría en nuestro intervalo. Por tanto, para que nuestros puntos fijos se queden en $[0,1]$, necesitamos que $\lambda \in [1,4]$

- Sea $x_{n+1} = g_\lambda(x) = \lambda x(1-x) = \lambda x - \lambda x^2$ con $\lambda \in [1,4]$ y $x \in [0,1]$. Como sabemos que $g([0,1]) \subset [0,1]$, y sabiendo que los puntos fijos son de la forma $x_\lambda = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$, analizaremos la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos $x = x_\lambda$ y $x = 0$.

  Sabiendo que si $|g'_\lambda(x)| < 1$ en x punto fijo, entonces este es atractivo. De la misma forma si $|g'_\lambda(x)| > 1$ entonces es repulsivo. Analicemos primero el caso del punto fijo $x = 0$ con $g'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$, luego:

  $$g'_\lambda(0) = \lambda - 2\lambda 0 = \lambda \implies \forall \lambda \in [1,4], g'_\lambda(0) > 0$$

  luego $x = 0$ es un punto fijo repulsivo siempre.

Veamos ahora qué sucede en $x = x_\lambda$ punto fijo. Miremos cuándo $g'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$ es, en valor absoluto, es menor o igual que 1 para averiguar su comportamiento en función de λ:

$$g'_\lambda = 1 \implies \lambda - 2\lambda x = 1 \implies x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$$

De forma análoga, $g'_\lambda = -1$ se da cuando $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}$. En estos dos puntos, tenemos que el valor absoluto de la derivada es 1. Ahora, esutudiemos el crecimiento y decrecimiento de esta derivada. Para ello, vemos que $g''_\lambda(x) = -2\lambda$, luego g'_λ es decreciente para todo $\lambda \in [1, 4]$. Por tanto, $\forall x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda})$, se tiene que $|g'(x)| < 1$.

Comprobamos para qué valores de λ, nuestro punto fijo $x_\lambda = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ pertenece a dicho intervalo o vemos cuándo $|g'_\lambda(x_\lambda)| = 1$, tendremos que:

- Si $\lambda \in (1, 3)$, entonces $|g'_\lambda(x_\lambda)| < 1 \implies x_\lambda$ es un punto fijo atractivo
- Si $\lambda \in (3, 4] \implies |g'_\lambda(x_\lambda)| > 1 \implies x_\lambda$ es un punto fijo repulsivo
- Si $\lambda = 1$ tenemos que $|g'_1(x_1)| = |g'_\lambda(0)|$ que, como ya hemos afirmado antes, es repulsivo.
- Si $\lambda = 3 \implies |g'_3(x_3)| = |g'_3(\frac{2}{3})| = 1$ En este caso, si analizamos el límite por la izquierda y por la derecha de $x_3 = \frac{2}{3}$, viéndose que el límite por la izquierda es mayor estricto que 1 y menor estricto que 1 si tomamos el límite por la derecha. De esta forma vemos que, en este caso, los valores a la izquierda del punto fijo se ven atraídos hacia a él y los valores a la derecha se ven repelidos.

3. Ejercicio 18

Enunciado: Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0{,}1)^2 + \sin x_3 + 1{,}06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

- Escribe el sistema anterior en la forma $x = g(x)$ depejando en la ecuación i la variable x_i, $i = 1, 2, 3$.

- Demuestra utilizando el resultado del ejercicio anterior que el sistema de ecuaciones tiene una única solución en

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : 1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, 2, 3\}.$$

- Calcula una aproximación de la solución con el método de iteración funcional tomando $x^{(0)} = (0{,}1, 0{,}1, -0{,}1)$ con una tolerancia fijada de 10^{-5}, donde la tolerancia viene fijada por la norma infinito de la diferencia de dos aproximaciones sucesivas.

Solución:

- Despejando en nuestro sistema, obtejemos:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\cos(x_2 x_3) + 1/2}{3} \\ x_2 = 1/90(9 - \sqrt{2}\sqrt{53 + 50x_1^2 + 50\sin(x_3)}\ ) \\ x_3 = \dfrac{-e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{3}}{20} \end{cases}$$

queda así despejado nuestro sistema. Ahora, vamos a usar el resultado del ejercicio 17 para probar que tiene una única solución. El resultado del ejercicio anterior es:
Si $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase 1 e D, si existe $L \in (0, 1)$ tal que:

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{L}{n}, \quad \forall x \in D$$

entonces g es contractiva.

Ahora, usaremos que D es un dominio y que $g(x) = (x_1, x_2, x_3)$ es contractiva (lo probaremos ahora) para ver que tiene un único punto x^* atal que $g(x^*) = x^*$.

Vamos por ello a realizar la jacobiana de g.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-x3\sin(x_2x_3)}{3} & \dfrac{-x2\sin(x_2x_3)}{3} \\ \dfrac{-5\sqrt{2}x_1}{9\sqrt{53 + 50x_1^2 + 50\sin(x_3)}} & 0 & -\dfrac{5\cos(x_3)}{9\sqrt{2}\sqrt{53 + 50x_1^2 + 50\sin(x_3)}} \\ \dfrac{-x_2 e^{-x_1x_2}}{20} & \dfrac{-x_1 e^{-x_1x_2}}{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que, como $-1 \leq x_i \leq 1$, entonces cada una de estas derivadas es menor que $\frac{1}{3}$. Por tanto, como $n = 3$, tomando L cercano a 1, tenemos la condición que queríamos. Podemos afirmar así que g es contractiva. Además, D es claramente un dominio, por lo que concluimos que $\exists! x^* : g(x^*) = x^*$.

4. Ejercicio 21

Enunciado: Obtén aproximaciones de la solución de los sistemas de los ejercicios 18 y 20 mediante el método de Newton. Compara la convergencia de los resultados obtenidos con los diferentes métodos.