

## SUGERENCIAS PARA EL EXAMEN

Fijamos a continuación la notación que seguiremos en este documento.

- Denotamos por  $\omega$  al primer **ordinal** infinito, cuya cardinalidad coincide con la de  $\mathbb{N}$ . Podemos entenderlo como una forma de «ordenar» los números naturales, es decir,  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Dado  $n \in \omega^* := \omega - \{0\}$ , se tiene que  $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , que identificamos cuando sea preciso con el número natural  $n$ .
- $\mathcal{A}$  será un alfabeto: un conjunto finito no vacío de símbolos. El conjunto de expresiones o palabras que podemos formar por yuxtaposición de símbolos de  $\mathcal{A}$  lo denotaremos como  $\exp(\mathcal{A})$ , es decir,

$$\exp(\mathcal{A}) = \bigcup_{k \in \omega} \mathcal{A}^k,$$

donde  $\mathcal{A}^0 = \{\varepsilon\}$  (la palabra vacía) y  $\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1} \mathcal{A}$  para  $k > 0$ . Reservaremos la notación  $\exp(\mathcal{A})^*$  para indicar que no se admite la palabra vacía.

- Dado  $s \in \exp(\mathcal{A})$ , existirá  $k \in \omega$  tal que  $s \in \mathcal{A}^k$ , es decir,  $s = s_1 s_2 \dots s_k$  con  $s_i \in \mathcal{A}$  para todo  $i$ . Denotamos  $s = \langle s_j \rangle_{j \in k}$ , y entonces  $k$  será la *longitud* de  $s$ , denotada por  $\text{len}(s)$ . Cuando la longitud de la palabra no sea relevante, escribiremos simplemente  $s = \langle s_j \rangle_j$ .
- En ocasiones será necesario poner en correspondencia los símbolos del alfabeto con números naturales. Si  $\mathcal{A}$  es un alfabeto de  $n \in \omega^*$  símbolos, consideraremos fijada una función biyectiva  $f : \mathcal{A} \rightarrow n$ . De esta forma, si  $s \in \exp(\mathcal{A})$  nos referiremos a  $\langle f(s_j) \rangle_j$  como  $f(s)$ .
- Un *criptosistema* será una terna  $\langle \mathcal{A}, E, D \rangle$ , donde  $\mathcal{A}$  es un alfabeto y  $E$  (resp.  $D$ ) es una aplicación de  $\exp(\mathcal{A})$  en  $\exp(\mathcal{A})$ , de forma que  $D \circ E$  sea la identidad en  $\exp(\mathcal{A})$ . Nos referiremos a los elementos de  $\exp(\mathcal{A})$  como *texto plano* cuando los veamos como argumentos de  $E$  (función de cifrado) y como *texto cifrado* cuando los veamos como argumentos de  $D$  (función de descifrado). Es usual que las funciones de cifrado y descifrado dependan de un parámetro llamado *clave*, que en general no tiene que coincidir para las dos. Esta situación la denotamos como  $E_{k_e}$  y  $D_{k_d}$ .

CUESTIÓN 1. *Cifrado de Vigenère.*

*Respuesta.* Dado  $n \in \omega^*$  y  $\mathcal{A}$  un alfabeto de  $n$  símbolos, el cifrado de Vigenère es un criptosistema polialfabético que consiste en una clave  $\alpha \in \exp(\mathcal{A})^*$  y sendas funciones  $E_\alpha$  y  $D_\alpha$  para cifrar y descifrar respectivamente. Podemos definir la función  $E_\alpha : \exp(\mathcal{A})^* \rightarrow \exp(\mathcal{A})^*$  como

$$E_\alpha(s) = \langle f^{-1}((f(s_j) + f((\alpha^{\text{len}(s)})_j)) \text{ mód } n) \rangle_j,$$

donde  $s = \langle s_j \rangle_j$  y la expresión  $\alpha^{\text{len}(s)}$  es la yuxtaposición de la expresión  $\alpha$  consigo misma y eventual truncamiento final hasta conseguir una palabra con la misma longitud que  $s$ . Hacemos esto para asegurar la existencia de una letra en cada posición  $j \in \text{len}(s)$  de  $\alpha$ . Por ejemplo, si  $\alpha = \text{HOLA}$  entonces  $\alpha^{10} = \text{HOLAHOLAHO}$ . De modo análogo se define  $D_\alpha : \exp(\mathcal{A})^* \rightarrow \exp(\mathcal{A})^*$  como:

$$D_\alpha(s) = \langle f^{-1}((f(s_j) - f((\alpha^{\text{len}(s)})_j)) \text{ mód } n) \rangle_j.$$

Se comprueba que efectivamente la terna  $\langle \mathcal{A}, E_\alpha, D_\alpha \rangle$  es un criptosistema, es decir,  $D_\alpha \circ E_\alpha = 1_{\exp(\mathcal{A})^*}$ . En efecto, si  $s = \langle s_j \rangle_j \in \exp(\mathcal{A})^*$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} D_\alpha(E_\alpha(s)) &= D_\alpha(\langle f^{-1}((f(s_j) + f((\alpha^{\text{len}(s)})_j)) \text{ mód } n) \rangle_j) \\ &= \langle f^{-1}((f(f^{-1}((f(s_j) + f((\alpha^{\text{len}(s)})_j)) \text{ mód } n)) - f((\alpha^{\text{len}(s)})_j)) \text{ mód } n) \rangle_j \\ &= \langle f^{-1}(((f(s_j) + f((\alpha^{\text{len}(s)})_j)) \text{ mód } n) - f((\alpha^{\text{len}(s)})_j)) \text{ mód } n) \rangle_j \\ &= \langle f^{-1}(f(s_j) \text{ mód } n) \rangle_j \\ &= \langle f^{-1}(f(s_j)) \rangle_j \\ &= \langle s_j \rangle_j \\ &= s. \end{aligned}$$

Por último, enunciamos un resultado que nos dice que en realidad ambas funciones son la misma salvo un cambio de clave.

**Teorema.** Si  $\alpha = \langle \alpha_j \rangle_j$  es una clave de Vigenère, definiendo  $\alpha' = \langle (-\alpha_j) \text{ mód } n \rangle_j$  tenemos que  $D_\alpha = E_{\alpha'}$ .

La principal debilidad del cifrado Vigenère es la naturaleza repetitiva de su clave. Si un criptoanalista adivina correctamente la longitud de la clave, el texto cifrado puede tratarse como cifrados entrelazados de César, que pueden romperse fácilmente de forma individual.

CUESTIÓN 2. *Explicar la transformación SubBytes() que es parte del algoritmo simétrico de cifrado AES.*

*Respuesta.* El algoritmo de cifrado de AES realiza en cada ronda una serie de transformaciones a nivel de bytes. La primera de estas transformaciones es SubBytes(), que consiste en sustituir los bytes del estado según una tabla de sustitución, llamada S-box. Esta sustitución se realiza de forma no lineal e independiente para cada byte del estado.

La tabla de sustitución es una matriz cuadrada de orden 16 (no simétrica), que contiene en cada posición  $(i, j)$  un byte en hexadecimal que representa la transformación del byte  $s_{ij}$  del estado. La construcción de la tabla se realiza de la siguiente forma, dada una entrada  $xy$ :

1. Si  $xy = 00$ , se mantiene igual. Si  $xy \neq 00$ , se calcula el inverso de  $xy$  en  $\text{GF}(2^8)$ , que será otro byte  $b = b_7 \cdots b_0$ .
2. El bit  $i$ -ésimo del byte  $b$ ,  $b_i$ , se transformará en  $b'_i$  de la siguiente forma:

$$b'_i = b_i + b_{(i+4) \bmod 8} + b_{(i+5) \bmod 8} + b_{(i+6) \bmod 8} + b_{(i+7) \bmod 8} + c_i,$$

donde  $c_i$  es el  $i$ -ésimo bit del byte  $\{63\}$  ó  $\{01100011\}$  para todo  $0 \leq i < 8$ . El byte  $b' = b'_7 \cdots b'_0$  resultante ocupará la posición  $(x, y)$  de la tabla.

Mencionamos también que es posible expresar el efecto de `SubBytes()` mediante una transformación afín aplicada a cada byte del estado (visto como vector de bits).

**CUESTIÓN 3.** *Limitaciones de los sistemas simétricos de cifrado en la comunicación y cómo la criptografía de clave pública los ha resuelto.*

**Respuesta.** En la criptosistemas de cifrado simétrico, emisor y receptor acuerdan una misma clave  $k$  que marca como funcionarán las funciones de cifrado y descifrado  $E_k$  y  $D_k$ . Este esquema presenta las siguientes limitaciones:

- Es necesario que se produzca un intercambio inicial de la clave antes de poder establecer la comunicación cifrada. Este es uno de los mayores problemas de la criptografía clásica, pues no siempre es posible garantizar un canal seguro de comunicación para dicho intercambio.
- Cuando consideramos una red de usuarios que quieren comunicarse entre sí, cada par de usuarios debe tener una clave distinta para maximizar la seguridad. Esto hace que tengamos un ratio de crecimiento del número de claves cuadrático en relación al tamaño de la red, por lo que no es un sistema escalable. Por ejemplo, con 10 usuarios necesitamos 45 claves diferentes, con 100 usuarios necesitamos 4950 claves, y en general para  $n$  usuarios necesitamos  $n(n-1)/2$  claves distintas.

Es por esto que no es fácil añadir un usuario a la red, pues es preciso actualizar toda la base de datos para incluirlo. El gran número de claves provoca también un problema de seguridad, al ser necesario que cada usuario guarde sus claves, y genera problemas logísticos cuando llegue el momento de renovar las claves de todos los usuarios de la red.

- Estos sistemas también adolecen de falta de crédito, ya que cualquier persona que obtenga la clave compartida por dos usuarios puede formar parte de la comunicación. Si Alice y Bob comparten una clave secreta y se da que Carol

la descubre, esta puede interceptar los mensajes de Alice a Bob y modificarlos sin que Bob lo descubra, o suplantar la identidad de Alice mandando mensajes a Bob. También es posible que Bob envíe mensajes falsos y después se encubra en esta posibilidad para eximirse de las culpas.

La llegada de los criptosistemas de clave pública aporta soluciones a estos problemas. En este nuevo esquema cada usuario tiene una clave de cifrado pública, que comparte con el resto de usuarios, y una clave de descifrado privada, que solo él o ella conoce.

- Ya no es necesario que se produzca el intercambio inicial de claves, pues las claves de cifrado de cada usuario son conocidas por todos los demás (el conocimiento de la misma no permite el descifrado).
- Solo se mantienen dos claves por cada usuario del círculo, lo que elimina los problemas de creación y mantenimiento de la base de datos. Más aún, en la base de datos solo se guarda la clave pública de cada usuario, reduciendo considerablemente el tamaño de esta.
- Es posible implementar un sistema de comunicación que garantice la *autenticación* de usuarios, la *integridad* de mensajes y la *no repudiabilidad* mediante un protocolo de firma de mensajes. De esta forma, el receptor podrá garantizar que el mensaje no ha sido modificado y que solo puede provenir de la persona que en teoría lo ha enviado. Además, la firma depende del contenido del mensaje, por lo que nadie puede usarla con otro documento.

**CUESTIÓN 4.** *Explicar los fundamentos de la criptografía de clave pública y las líneas fundamentales de la firma a través de la misma.*

**Respuesta.** Los sistemas criptográficos de clave pública fueron inventados para el manejo de claves secretas. En estos sistemas, cada usuario usa dos claves: una clave de cifrado  $k_e$  (pública) y otra clave de descifrado  $k_d$  (privada), que determinan las funciones  $E = E_{k_e}$  y  $D = D_{k_d}$ , respectivamente. Para que el sistema funcione correctamente, para todo mensaje  $m$  debe cumplirse que  $D(E(m)) = m$ .

Cualquiera que desee mandar un mensaje confidencial a otra persona lo cifrará empleando la función de cifrado asociada a la clave pública de esta persona, que es conocida, confiando en que solo el poseedor de la clave privada asociada podrá descifrarlo. Nótese que ni siquiera el emisor sería capaz de descifrar el mensaje, y que no ha hecho falta realizar un intercambio previo de claves.

Para que el sistema sea práctico, es necesario que se pueda calcular  $E(m)$  y  $D(E(m))$  rápidamente, pero por seguridad debería ser imposible determinar  $D$  a partir de  $E$  en un tiempo razonable. Esto es lógico, pues si no la confidencialidad de  $D$  estaría comprometida al ser  $E$  pública.

Téoricamente estos sistemas podrían construirse a partir de una *función unidireccional trampa*. Esta debe ser una función  $f$  que sea *fácil* de calcular, pero que

su inversa  $f^{-1}$  sea *difícil* de calcular sin una información adicional conocida como *trampa*. En el contexto criptográfico dicha trampa estará asociada a la clave privada, de forma que solo el receptor tenga la información necesaria para determinar el algoritmo de descifrado a partir de  $f$ . Subrayamos que la existencia de funciones unidireccionales no ha sido demostrada, y de hecho de existir alguna se tendría necesariamente que  $P \neq NP$ <sup>1</sup>.

Un ejemplo de función cuya unidireccionalidad ha sido conjeturada es  $(p, q) \mapsto pq$ , donde  $p$  y  $q$  son primos. El problema de descomponer un número en sus factores primos se conoce como **problema de factorización**, y es considerado extremadamente difícil a día de hoy. Esta función es la que se utiliza para implementar el criptosistema de clave pública RSA, donde la trampa es, por ejemplo, el conocimiento de la *función phi de Euler*  $\Phi(pq)$ .

A partir de estos sistemas es posible implementar un protocolo de firma. Por ejemplo, si suponemos que las funciones  $E$  y  $D$  son biyectivas e inversas, la firma funcionaría del siguiente modo. Sean  $\{E_a, D_a\}$  las funciones de cifrado y descifrado de Alice y  $\{E_b, D_b\}$  las correspondientes funciones de Bob. Si Alice quiere enviar a Bob un mensaje cifrado y firmado, se procede como sigue:

1. Alice cifra el mensaje con su clave privada, es decir, calcula  $D_a(m)$ .
2. Cifra el mensaje de nuevo, pero esta vez utilizando la clave pública de Bob. Envía a Bob  $E_b(D_a(m))$ .
3. Bob recupera  $D_a(m)$  aplicando su función privada de descifrado,  $D_b$ .
4. Finalmente Bob recupera el texto plano descifrando el mensaje con la clave pública de Alice:  $E_a(D_a(m)) = m$ . Es aquí donde se emplea la hipótesis extra de que  $E \circ D = 1$ .

De esta forma se sigue garantizando la confidencialidad, pues solo Bob puede descifrar la primera capa del mensaje mediante su clave privada. Además, puede estar seguro de que el mensaje proviene de Alice (o, al menos, de alguien que posea su clave privada), pues el procedimiento solo tiene éxito si la segunda capa fue cifrada con la clave privada de Alice.

**CUESTIÓN 5.** *Enumerar resumidamente las precauciones más destacables a tomar al generar un círculo de comunicación basado en RSA.*

**Respuesta.** Para adherirse a un círculo RSA cada usuario elige dos números primos  $p$  y  $q$  y dos exponentes  $e$  y  $d$  de forma que  $(e, \Phi(n)) = 1$  y  $ed \equiv 1 \pmod{\Phi(n)}$ , donde  $n = pq$ . Se ha conjeturado que la seguridad de este criptosistema reside en la dificultad de descomponer el número  $n$  en sus factores primos. Los usuarios incluirán en un

---

<sup>1</sup>Alan L. Selman. *A survey of one-way functions in complexity theory*. Mathematical systems theory, 25(3):203–221, 1992.

archivo público la pareja  $\langle n, e \rangle$  y guardarán celosamente cualquiera de las entradas de la 4-tupla  $\langle p, q, \Phi(n), d \rangle$ . Además, deben tomar las siguientes precauciones:

1. El número  $n$  debe superar (a comienzos del siglo XXI) los 308 dígitos para que no sea factible su factorización. Algunas implementaciones actuales de RSA emplean módulos de 617 dígitos (2048 bits).
2. Los primos  $p$  y  $q$  deben ser ambos elevados para que sea difícil aplicar algoritmos de factorización como la **criba general del cuerpo de números**. Además, jamás deben ser elegidos de entre una lista conocida ni ser próximos el uno al otro; de lo contrario podría emplearse eficientemente el método de factorización de Fermat.
3. El valor de  $(p - 1, q - 1)$  no debe ser elevado en exceso, y nunca debe ocurrir que  $p - 1 \mid q - 1$ . Si  $(p - 1, q - 1)$  es muy elevado,  $[p - 1, q - 1]$  sería pequeño en comparación con  $\Phi(n)$  y factible de ser encontrado por fuerza bruta. Es indeseable también que los factores primos de  $\Phi(n)$  sean pequeños.
4. Para solucionar los problemas del apartado anterior, es deseable que  $p$  y  $q$  sean *primos seguros*. Además, tanto  $p - 1$  como  $q - 1$  deben tener factores primos elevados para evitar ataques de cifrados iterados.
5. El exponente  $d$  debe ser elevado, y ésta es la razón de comenzar eligiéndolo para luego determinar  $e$ . Así se evita que pueda ser encontrado mediante procedimientos de prueba y error.
6. Dos usuarios nunca deben elegir el mismo módulo como parte de su clave pública. Si un tercer usuario cifra un mismo mensaje para ellos, este puede ser leído si los exponentes públicos de ambos usuarios son primos relativos.
7. No es recomendable tener valores pequeños de  $e$  y, en caso de tenerlo, jamás debe ser elegido por varios integrantes de un mismo círculo RSA. De lo contrario, si se enviara un mismo mensaje cifrado a estos integrantes se podría obtener el texto plano aplicando convenientemente el *teorema chino del resto*.
8. Cuidarse de mensajes inocultables. Existen mensajes para determinadas claves cuyo cifrado es igual al mensaje original.

**CUESTIÓN 6.** *Protocolo de intercambio de llaves según el esquema de Diffie-Hellman y explicación de su supuesta fortaleza.*

**CUESTIÓN 7.** *El criptosistema de ElGamal.*

**Respuesta.** El criptosistema de ElGamal es un criptosistema de clave pública propuesto por Taher ElGamal en 1985. Está basado en el protocolo de intercambio de claves de Diffie-Hellman.

## Preliminares

En primer lugar, se debe elegir un primo  $p$  elevado y un elemento primitivo  $g \in GF(p)$ , es decir, un generador del grupo cíclico  $GF(p)^*$ . Suponemos que las unidades de texto llano estarán expresadas en números de  $GF(p)$ , y llamamos  $q = |GF(p)^*| = p - 1$ . Ahora, cada usuario elige aleatoriamente un valor  $x$  con  $0 < x < q$ , que será su clave privada. La clave pública será  $y = g^x \text{ mód } p$ .

## Cifrando el mensaje

Supongamos que Alice quiere compartir con Bob un mensaje  $0 \leq m \leq q$ . Para ello, recoge la clave pública de Bob ( $y_B$ ), y calcula  $K = y_B^{x_A} \text{ mód } p$ , donde  $x_A$  es su clave privada. Finalmente envía a Bob la pareja  $c = \langle g^{x_A} \text{ mód } p, mK \text{ mód } p \rangle$ .

## Descifrando el mensaje

Cuando Bob recibe el mensaje de Alice obtiene una pareja de números  $\langle c_1, c_2 \rangle$  menores que  $p$ . Para descifrarlo hace lo siguiente:

1. Calcula el valor de  $K$  a partir de su clave privada, sin más que observar que  $c_1^{x_B} = g^{x_A x_B} \text{ mód } p = y_B^{x_A} \text{ mód } p = K$ .
2. Ahora calcula el inverso de  $K$  módulo  $p$  y computa el valor de  $m$  haciendo  $c_2 K^{-1} \text{ mód } p = m K K^{-1} \text{ mód } p = m$ , lo que le permite recuperar el texto plano.

## Vulnerabilidades

No es recomendable elegir la misma clave  $x_A$  para cifrar más de un bloque del mensaje. Esto se debe a que si un atacante supiera el contenido de un primer mensaje  $m_1$ , podría calcular el contenido de las porciones sucesivas. Sean

$$\begin{aligned} c_{11} &\equiv g^{x_A} \text{ mód } p, & c_{21} &\equiv m_1 K \text{ mód } p, \\ c_{12} &\equiv g^{x_A} \text{ mód } p, & c_{22} &\equiv m_2 K \text{ mód } p. \end{aligned}$$

Entonces, es fácil calcular  $m_2 m_1^{-1} \text{ mód } p = c_{22} c_{21}^{-1} \text{ mód } p$ , de donde se deriva inmediatamente  $m_2$  (multiplicando por  $m_1$ ).

La seguridad de este criptosistema reside en la dificultad de cálculo del logaritmo discreto, por lo que es imprescindible tomar las precauciones necesarias para que no sea fácil calcular dicho logaritmo. A saber, necesitamos que  $p - 1$  contenga al menos un factor primo elevado. Para ello podemos por ejemplo elegir  $p$  como un *primo seguro*, es decir, de la forma  $p = 2r + 1$  con  $r$  primo.

CUESTIÓN 8. *El algoritmo de firma estándar (DSA).*

*Respuesta.* En primer lugar es necesario introducir el concepto de *función hash*. Se trata de una función  $H$  que transforma un *input* de longitud arbitraria en una lista de longitud fija de unos cuantos bits, usualmente entre 128 y 512. Debe ser una función para la que sencillo calcular el valor de  $H(x)$  a partir de  $x$  pero computacionalmente intratable calcular  $x$  a partir de  $H(x)$ , y también que sea muy difícil encontrar  $x$  y  $x'$  distintos tales que  $H(x) = H(x')$ .

El algoritmo de firma estándar (DSA) fue propuesto en 1991, y sigue un esquema basado en el problema del logaritmo discreto. Supongamos que Alice quiere enviar a Bob un mensaje firmado, y consideremos fijada una función hash  $H$ .

Para generar las claves de firma, Alice realiza los siguientes pasos:

1. Elige un primo  $q$  de aproximadamente 160 bits, utilizando para ello un generador aleatorio de números y uno o varios tests de primalidad.
2. Elige un nuevo primo  $p$  congruente con 1 módulo  $q$ , con aproximadamente 512 bits.
3. Elige  $g_0$  con  $1 < g_0 < p - 1$  y tal que  $g_0^{p-1/q} \not\equiv 1 \pmod{p}$ . Llamamos  $g$  al valor  $g_0^{p-1/q} \pmod{p}$ . Si  $g = 1$  elige un nuevo valor de  $g_0$  y lo vuelve a intentar.
4. Se elige un entero  $x$  aleatoriamente cumpliendo  $0 < x < q$ , que será la clave secreta. La clave pública será  $y = g^x \pmod{p}$ .

Para firmar un mensaje  $m$ , Alice procede como sigue:

1. Aplica el hash al mensaje y obtiene el valor  $h = H(m)$ , truncándolo si fuera necesario para que  $0 < h < q$ .
2. Genera aleatoriamente un entero  $k$  tal que  $0 < k < q$ .
3. Se calcula  $r = (g^k \pmod{p}) \pmod{q}$ . En el poco probable caso de que  $r = 0$ , se vuelve a intentar con un  $k$  distinto.
4. Se calcula  $k^{-1} \pmod{q}$  y  $s = (k^{-1}(h + xr)) \pmod{q}$ . En el poco probable caso de que  $s = 0$ , se vuelve a intentar con un  $k$  distinto.

La firma del mensaje sería entonces la pareja  $\langle r, s \rangle$ , que se envía a Bob junto al valor  $h$ . Si Bob quiere verificar la firma, debe hacer lo siguiente:

1. En primer lugar, comprueba que  $0 < r, s < q$ . En otro caso, la firma no es válida.
2. Calcula  $w = s^{-1} \pmod{q}$ .
3. Calcula  $u_1 = hw \pmod{q}$  y  $u_2 = rw \pmod{q}$ .
4. Calcula  $v = ((g^{u_1} y^{u_2}) \pmod{p}) \pmod{q}$ .



La firma queda verificada únicamente si  $v = r$ . Mediante una aplicación sencilla del *teorema pequeño de Fermat* se comprueba que con los valores generados siguiendo el procedimiento descrito se cumple efectivamente  $v = r$ .

CUESTIÓN 9. *Rasgos esenciales de SSH: cifrado, funcionamiento, negociación de cifrado para la sesión y autenticación del acceso del usuario al servidor*