SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1. Expresar en notación vectorial, matricial y de matriz ampliada los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + z - 2t = 0 \\ -2x - 2z + t = 3 \\ 3x - y - z - t = -1 \end{cases}$

2. Expresar en forma explícita los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. Determinar si X_0 es solución del sistema de ecuaciones en cada caso.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

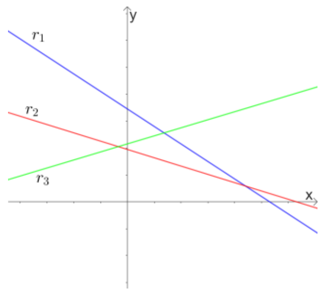
4. Determinar si los siguientes sistemas de ecuaciones son equivalentes.

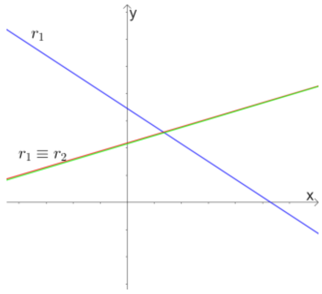
a) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 7 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 2 \\ y = -1 \\ y - z = -3 \end{cases}$

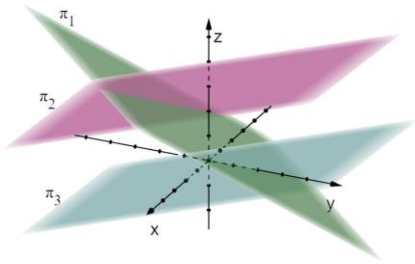
c) $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x - 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2z \\ y = z + 1 \end{cases}$

5. Dadas las siguientes representaciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales, indicar la cantidad de ecuaciones e incógnitas para cada sistema, y analizarlos.

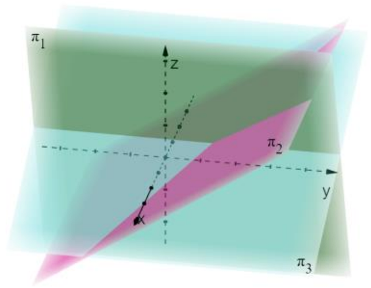
a) b) c)



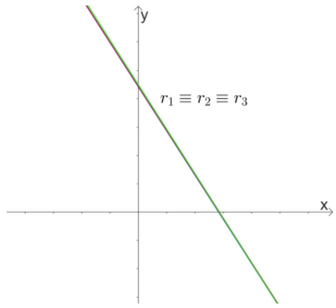




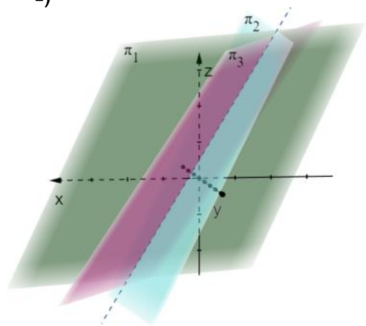
d)



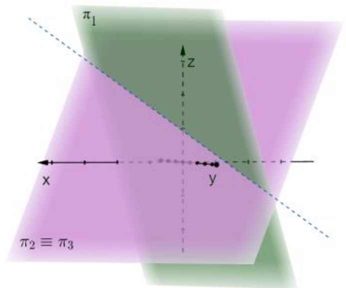
e)



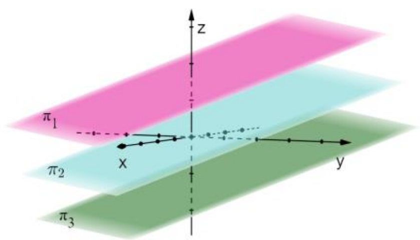
f)



g)



h)



6. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 4y = 4 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - z = 4 \\ y + 3x = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3z = 5 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases}$

i. Representar gráficamente en hoja de papel los sistemas de los incisos a y b, y con ayuda de GeoGebra los sistemas de los incisos c y d.

ii. Interpretar geométricamente, analizar y resolver, en los casos que corresponda, cada uno de los sistemas.

Verificar los resultados siempre que sea posible con GeoGebra: Sugerencia: Ingresar las ecuaciones desde la barra de entrada. Para las ecuaciones de los incisos c y d, activar la vista 3D.

7. Analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones cuadrados tienen solución única o

no.

a) $\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y+3z=5 \end{cases}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x \quad +z-5=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=2 \\ y+2z=-3 \\ z+2w=0 \\ -2z-w=6 \end{cases}$

8. Analizar y resolver, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando los métodos de Eliminación de Gauss y Gauss-Jordan.

a) $\begin{cases} x-2y+z-w=-1 \\ 3x-2z+3w=-4 \\ 5x-4y+w=-3 \end{cases}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3x+3y+z=2 \\ x+z=0 \end{cases}$ e) $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & -18 \end{pmatrix}$ f) $\begin{cases} x+2y-2z=-1 \\ -y+z=0 \\ x=1 \end{cases}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$ h) $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ x-y+2z=-1 \\ 2x-3y+z=1 \\ 3x-5y=3 \end{cases}$

Verificar los resultados de los ejercicios c, d y e con GeoGebra: Sugerencia: Activar la vista cálculo simbólico (CAS). Ingresar cada ecuación del sistema asignando un nombre, por ejemplo $p:=x+y+z=9$. Crear una lista que contenga los nombres de cada ecuación, $L:=\{p,q,r\}$. Ingresar el comando $ResoluciónC(<Lista\ de\ ecuaciones>,<Lista\ de\ variables>)$ indicando nombre de la lista y nombres de las variables: $ResoluciónC(L,\{x,y,z\})$

9. Dado el siguiente sistema rectangular $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$, agregar una ecuación para que el sistema cuadrado resultante:

a) Tenga única solución
b) Tenga infinitas soluciones
c) No tenga soluciones

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Cramer y verificar los resultados con el método de la Matriz Inversa.

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y+2z=10 \\ 4x+3y+4z=21 \\ 2x+y+2z=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases}$

11. Analizar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

a) $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x+5y-3z=0 \\ -2x-y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+5y-z=0 \end{cases}$

d) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

12. Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-4y-z=0 \end{cases}$, añadir una ecuación para que el sistema resulte:

a) Compatible determinado
b) Compatible indeterminado

13. En función de los parámetros a y b, clasificar los siguientes sistemas.

a) $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2a & b+1 \end{pmatrix}$ b) $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & a & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b & b-2 \end{pmatrix}$ c) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & b \end{pmatrix}$

14. Dados los sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} mx+my=6 \\ x+(m-1)y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ y+z=2m \\ x+2z=m^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+my-z=0 \\ mx-y+z=0 \\ (m+1)x+y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y=m \\ -2x+my=3 \\ -x-y=0 \end{cases}$

Determinar los valores del parámetro $m \in R$ para que los sistemas resulten:

i. Compatibles determinados
ii. Compatibles indeterminados
iii. Incompatibles

15. Dados los siguientes problemas, expresarlos como sistemas de ecuaciones, analizarlos y, en los casos que sea posible, resolverlos

a) Una refinería compra petróleo a 3 países, Argentina, Brasil y Uruguay, comprando 1 barril a Argentina, 3 barriles a Brasil y 2 barriles a Uruguay, paga un total de $14um$.

Si compra 4 barriles a Argentina, 1 barril a Brasil y 3 barriles a Uruguay, paga un total de 25*um.* Si por el contrario compra 3 barriles en Argentina, 2 barriles en Brasil y 1 barril en Uruguay, paga 15*um.* ¿Cuánto vale el barril de crudo en cada país? Nota: *um*: unidades monetarias.

b) En una tienda, un cliente ha gastado 15000 pesos en la compra de 12 artículos, entre pendrives, libros y carpetas. Cada pendrive le ha costado 2000 pesos cada libro 1500 pesos, y cada carpeta 500 pesos. Se sabe que entre pendrives y carpetas hay el triple que de libros. ¿Determinar la cantidad de artículos que se ha comprado?

c) Si la altura de Luis aumentase el triple de la diferencia entre la altura de José y de Pablo, Luis sería igual de alto que Pablo. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de José es lo mismo que nueve veces la de Luis. Hallar las tres alturas.

d) Un economista invirtió en la bolsa $ 3000000 en acciones de tres empresas A, B, C, y obtuvo un beneficio de $ 155000. Si sabemos que invirtió en A tanto como en B y C juntos y que los beneficios de las empresas fueron de un 5% en A, 3% en B y un 10% en C. ¿Cuánto invirtió en cada empresa?

AUTOEVALUACIÓN DE TEORÍA

1. Responder Verdadero o Falso. NO justificar.

a) Todo sistema de ecuaciones cuadrado y homogéneo, con |A|=0, es compatible indeterminado.	
b) Un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas, con n<m, puede ser compatible determinado.	

2. Completar con la respuesta que corresponda.

a) Un sistema de ecuaciones lineales $A.\,X = B$ es compatible si y sólo si: ....

b) Todo sistema de ecuaciones lineales cuadrado y homogéneo admite solamente la solución trivial, si y sólo sí: ....

3. Escribir, en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) Todo sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas, tal que $\rho(A) = \rho\left(A'\right) > m$, entonces el sistema es: $\square$

A) Compatible determinado B) Compatible indeterminado

C) Incompatible D) No existe dicha situación

b) Sea $A.X = B$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas, tal que $|A| \neq 0$. La solución del sistema es: $\square$

A) $X = A.B^{-1}$ B) $X = A^{-1}.B$ C) $X = B.A^{-1}$ D) $X = B^{-1}.A$

AUTOEVALUACIÓN DE PRÁCTICA

1. Recuadrar con tinta, la letra correspondiente a las opciones correctas en cada uno de los enunciados.

a) El sistema $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + ky = 0 \end{cases}$

No siempre tiene solución	A
Siempre tiene solución	B

y tiene solución única si

$k = -2$	C
$k \neq -2$	D

b) Dada la matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$\rho(A') = 2 \wedge \rho(A) = 2$	A
$\rho(A') = 3 \wedge \rho(A) = 2$	B

, por lo tanto el sistema es

Incompatible	C
Compatible determinado	D

2. Completar con la respuesta que corresponda. Las respuestas deben escribirse con tinta.

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, el o los valores de m para que sea compatible determinado es: ....

b) La solución del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ es: ....

c) Al analizar el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, se puede afirmar que es un sistema: ....

3. Escribir, con tinta y en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir una N.

a) Para $m = 2$ el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my - z = 0 \\ 2x + y + mz = 0 \\ x + y = mz + (m+1) \end{cases}$ es: $\boxed{}$

A) Compatible determinado B) No lineal C) Compatible indeterminado D) Incompatible

b) Para que el sistema $\begin{cases} x - y + k = 0 \\ 4x - 4y - 1 = 0 \end{cases}$ sea compatible indeterminado, el valor de k debe ser: $\boxed{}$

A) $k = 1/4$ B) $k = -1/4$ c) $k = 0$ D) $k \neq 1/4$

c) La solución general del sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$ es: $\boxed{}$

A) $S = \{(x, y, z)/x = 7z \wedge y = -2z - 2 \wedge z = z\}$

B) $S = \{(x, y, z)/x = 7z + 1 \wedge y = 2z + 2 \wedge z = z\}$

C) $S = \{(x, y, z)/x = -7z + 1 \wedge y = 2z + 2 \wedge z = z\}$

D) $S = \{(x, y, z)/x = -7z - 1 \wedge y = 2z + 2 \wedge z = z\}$