Análisis Matemático I

Trabajo Practico N° 1

Números reales. Intervalos. Inecuaciones. Valor absoluto. Cotas y extremos.
Funciones: operaciones, gráficos, acotación, paridad, monotonía.

Ing. Roberto Lamas
Prof. Adjunto Análisis Matemático I

Intervalos

Un subconjunto de la recta real se llama intervalo si contiene al menos dos números y contiene todos los números reales que están entre dos cualesquiera de sus elementos.
Por ejemplo:
$[-2, 3]$, $[6, 9)$, $(6, \infty)$

Ejemplo:

Cerrado : $[-2, 3]$
Semiabierto : $[-2, 3)$
Abierto: $(-2, 3)$

Infinito : $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$
(a, ∞) , $(-\infty, b)$
$(-\infty, \infty)$

Valor absoluto

El valor absoluto de un número x, denotado por $|x|$, se define como :

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

a) $|\ 5\ | = ??$
b) $|\ -7\ | = ??$

Solución:

a) $|\ 5\ | = ??$ $\quad 5 > 0$, por lo tanto $|\ 5\ | = 5$
b) $|\ -7\ | = ??$ $\quad -7 < 0$ entonces $-(-7) = 7$

<u>Desigualdades con valor absoluto:</u>

La desigualdad $|\ a\ | < D$ dice que la distancia de "a" a 0 es menor que D. Entonces "a" debe estar comprendida entre D y – D.
Entonces:

$$|\ a\ | \leq D \iff -D \leq a \leq D$$

$$D \leq |\ a\ | \iff D \leq a \quad \vee \quad a \leq -D$$

Ejemplo:

a) $| x - 5 | < 9$
Aplicamos $-9 < x - 5 < 9$, por lo tanto
$-9 + 5 < x < 9 + 5$ entonces $-4 < x < 14$ o $x \in (-4, 14)$

b) $| x + 3 | > 8$
Aplicamos $x+3 > 8 \vee x+3 < -8$, a continuación
$x > 5 \vee x < -11$, solución $x \in (-\infty,-11) \cup (5, \infty)$

Cotas y extremos de un conjunto

Sea $\mathbf{A} \subset R$
Definición1: El número real c es cota superior de A cuando $\forall\, x \in \mathbf{A} : c \geq x$
Definición2: El número real d es cota inferior de A cuando $\forall\, x \in \mathbf{A} : d \leq x$
Definición3: El conjunto A esta acotado superiormente cuando posee cota superior.

Definición4: El conjunto A esta acotado inferiormente cuando posee cota inferior.

Definición5: El conjunto A esta acotado cuando está acotado superiormente e inferiormente.

Ejemplo 1 :
A = [– 5 , 8)   Cotas superiores: 9 ; 10 ; 10,1   ;
8 (?) ;   100 ; 1000 ; ……
Cotas inferiores :   – 10 ; – 20;
– 5,001;   – 5 (?);   – 100; ……
Cotas superiores: [8 , ∞)
Cotas inferiores: (– ∞ , – 5]
Ejemplo2:
B = [7 , ∞)   Cotas superiores ; NO tiene
Cotas inferiores: (– ∞ , 7]

Definición6: Se llama supremo del conjunto A a la menor de las cotas superiores.
Definición7: Se llama ínfimo del conjunto A a la mayor de las cotas inferiores.
Definición8: Cuando el supremo pertenece al conjunto, se lo llama máximo.
Definición9: Cuando el ínfimo pertenece al conjunto, se lo llama mínimo.

Para el ejemplo1:

$A = [\,-5\,,\,8\,)$

Cotas superiores: $[\,8\,,\,\infty\,)$
Cotas inferiores: $(\,-\infty\,,\,-5\,]$
Sup(A) = 8 Max(A) = No tiene
Inf(A) = – 5 min(A) = – 5

Funciones de una variable.

Definición: Una función de A en B es una ley o regla o correspondencia que asigna a **cada** elemento de A **un único elemento** de B.

A : dominio   B: codominio

Si A y B son reales entonces se llama función real de variable real (A , B $\subset$ R)

Notación: $f : A \longrightarrow B$
$y = f(x)$

$A \longrightarrow B$
$x \longrightarrow f(x)$

f : nombre de la función
x : variable independiente.
y : variable dependiente.

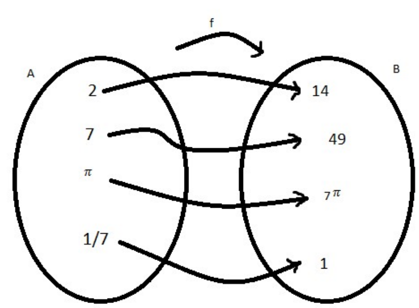
y = f(x) regla o correspondencia que establece la vinculación entre las variables y puede estar dada en distintas formas.

Ejemplo: f: { 2; 7 ; π; 1/7 } $\longrightarrow$ R

y = 7x

f(2) = 14 f(7) = 49 f(π) = 7 π f(1/7) = 1

Para describir esto vamos a utilizar un diagrama de Venn, si los elementos del conjunto A corresponden a un número finito:



<u>Todo elemento</u> de A debe estar relacionado con <u>alguno de B</u> y ese elemento debe ser único.

Vemos que no todos los elementos de B es correspondiente de alguno de A, los que son correspondientes constituyen un conjunto que llamamos IMAGEN.

Imagen(f) = I(f) = Img(f) = $\{ y / y \in B \wedge \exists \; x \in A / y = f(x) \} = \{ f(x) / x \in A\}$
En general Img(f) $\subset$ B (Imagen incluida en codominio)
Ejemplo: Img(f) = $\{ 14 ; 49 ; 7\pi; 1 \} \subset B =$ **R.**

Ejemplo : g : R $\longrightarrow$ R / $y = x^2 + 1$

Como calculamos la imagen?

Sabemos que $\forall x : \; x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \; y \geq 1$
en consecuencia Img (g) = $[1 , \infty)$

Distintas formas de indicar la vinculación entre x e y.

1.-Diagrama de Venn.

2.-Tabla:

x	**2**	**7**	π	**1/7**
f(x)	14	49	7 π	1

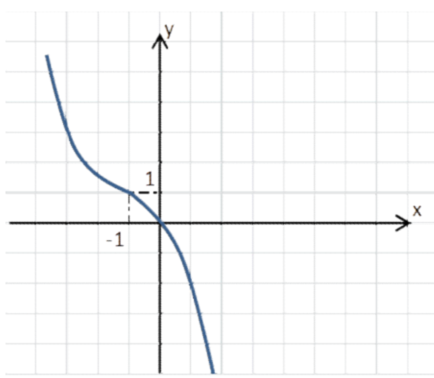
3.-Una o mas formulas:

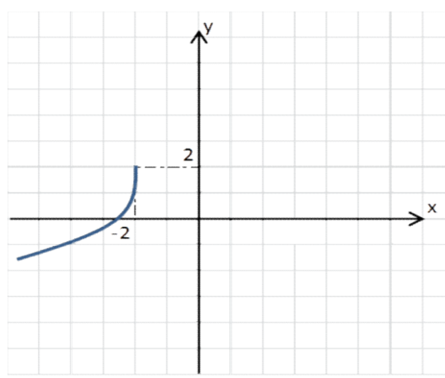
Ej; h(x) = x^2 +1

$$z(x) = \begin{cases} 5x & si\ x < 1 \\ -x & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

Cuál será el dominio ?

4.- Mediante un gráfico en un sistema de coordenadas cartesianas.





5.- Mediante un enunciado coloquial.

Ejemplo: La función que asigna para un cuadrado de lado L, su perímetro. ($P(L) = 4L$)

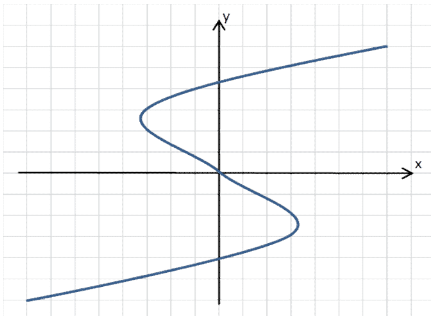
Como reconocer funciones.

Si contamos con una formula debemos ver si las operaciones arrojan un único resultado.

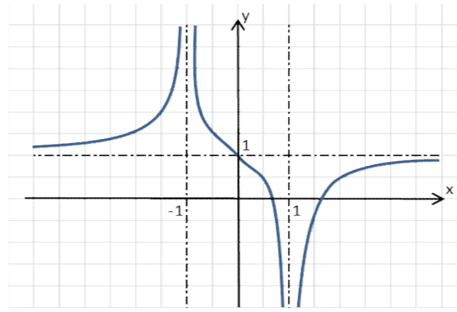
$y = x^2 + 1$ si es función.

$y^2 = x + 1$ No es función $y = \pm\sqrt{x+1}$

Si está dado por un gráfico no será función si para un valor de x existen dos posibles resultados.



No es función



Si es función

Sera función cuando toda recta vertical trazada por un punto del dominio corte al gráfico en un solo punto.

<u>Elementos que se deben especificar al definir una función.</u>

$f : A \longrightarrow B$ Dominio Codominio y ley de correspondencia

$y = f(x)$

1.- Si no se especifica B, se toma el conjunto mas amplio, es decir R.

2.- Si no se especifica A , se toma el conjunto mas amplio para el cual el valor de f(x) y la ley de correspondencia tengan sentido.

Ej : Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = 6\,x^3 + 7x^2 - 8$

b) $y = \frac{7}{(x-6)(x+2)}$

c) $y = \sqrt{\frac{7}{(x-6)(x+2)}}$

<u>Igualdad de funciones</u>:

Dos funciones son iguales cuando tienen igual dominio y toman los mismos valores.

$f = g \iff D(f) = D(g) \wedge f(x) = g(x)$

Ejemplo: $f : R \longrightarrow R \,/\, y = 6x^8$

$g : R \longrightarrow [\,0\,,\infty\,) \,/\, y = 12x^8 / 2$

$h : [\,0\,,\infty\,) \longrightarrow [\,0\,,\infty\,) \,/\, y = 6x^8$

a) $f = g$ b) $g \neq h$

Función acotada

Definición: Una función es acotada cuando su imagen es un conjunto acotado.

Ejemplo:

$f : R \longrightarrow R \,/\, y = \text{sen } x$
$g : R \longrightarrow R \,/\, y = 6\, x^2$

Clasificación de funciones:

I) En cuanto a la expresión de su formula:

a) Explicita: Cuando en la formula esta despejada la variable dependiente.

Ej: $y = 2x^3$ $y = \text{sen}(5x) + 8$

b) Implícita: Cuando en la formula no esta despejada la variable dependiente.

Ej: $x^2 + y = 9$ $y \ln(x) + \text{sen}(y\,x) = 6$

II) En cuanto a operaciones:

a) Algebraicas: cuando en la formula aparece un numero finito de operaciones algebraicas(suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación)

b) Trascendentes: cuando no son algebraicas.

Ej:

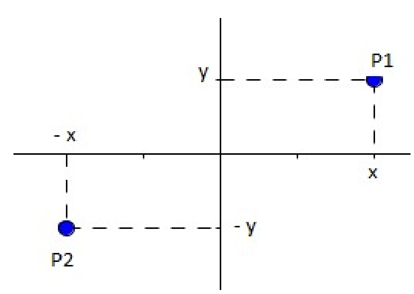
y = sen(x)

y = ln x + tg x + e^x

Paridad de una función.

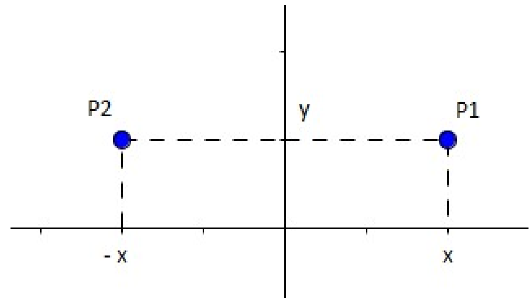
Definición: La función f es impar sii $\forall$ x $\in$ D(f) :
$f(-x) = -f(x)$

P_1 (x,y) $\in$ Gf (Gráfico de f)
P_2 ($-x$, $-y$) $\in$ Gf (Gráfico de f)
$\therefore$ (en consecuencia) P_1 y P_2 son simétricos respecto al origen, por lo tanto el gráfico de una función impar es simétrico respecto al origen.



Definición: La función f es par sii $\forall$ x $\in$ D(f) :
f ($-$x) = f (x)

P_1 (x,y) $\in$ Gf (Gráfico de f)
P_2 ($-$x , y) $\in$ Gf (Gráfico de f)
$\therefore$ (en consecuencia) P_1 y P_2 son simétricos respecto al eje Y , por lo tanto el gráfico de una función par es simétrico respecto al eje Y.



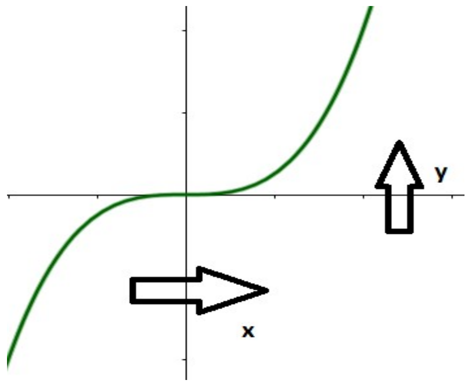
Ejemplo:
$f/\ f(x) = 4x^2 - 8x^6 + \cos x$
$f(-x) = 4(-x)^2 - 8(-x)^6 + \cos(-x) = 4x^2 - 8x^6 + \cos x = f(x)$
$f(-x) = f(x)$ en consecuencia f es par.

$g/\ g(x) = 3x^3 - 2x^9 + \operatorname{sen} x$
$g(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x)^9 + \operatorname{sen}(-x) = -3x^3 + 2x^9 - \operatorname{sen} x =$
$= -(3x^3 - 2x^9 + \operatorname{sen} x) = -g(x)$
$g(-x) = -g(x)$ en consecuencia g es impar.

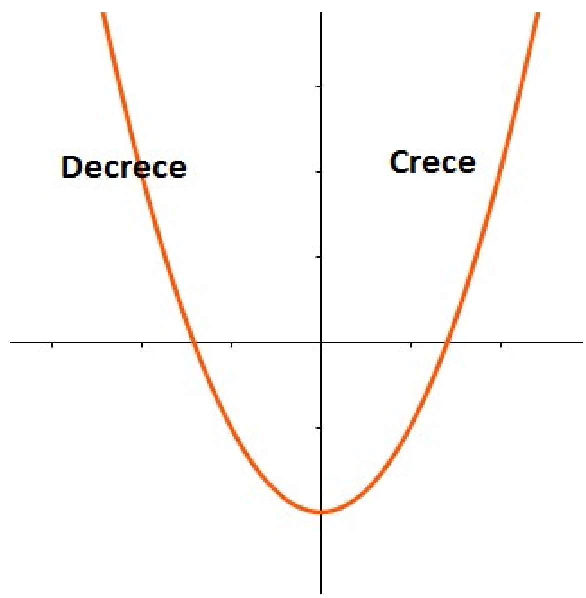
Nota$_1$: Una función puede ser par o impar pero no ambas a la vez.
Nota$_2$: La grafica, si la función no tiene paridad, puede tener otra simetría.
Nota$_3$: La paridad nos sirve para hacer la tabla de valores.

Monotonía:

Definición$_1$: f es creciente en su dominio sii $\forall\, x_1 , x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
Definición$_2$: f es decreciente en su dominio sii $\forall\, x_1 , x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
Definición$_3$: f es monótona en su dominio si f es creciente o decreciente en su dominio.



No es monótona en su dominio, es sectorialmente monótona o monótona a trozos.



Relación entre paridad y monotonía.

I) Si f es par: en intervalos simétricos respecto al origen cambia la monotonía.
II) Si f es impar: en intervalos simétricos respecto al origen mantienen la monotonía.