

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY. FACULTAD DE INGENIERÍA.

CÁTEDRA: ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA.

TRABAJO PRÁCTICO N° 13: Transformaciones Lineales. Ejercicio Resuelto.

5.- Hallar la expresión genérica de la transformación lineal f para cada uno de los siguientes casos:

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que:

$$f(1, 1, 1) = (-1, 2); f(2, 2, 0) = (2, 2) \text{ y } f(3, 0, 0) = (3, 0)$$

Solución

$\{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$ es una base de \mathbb{R}^3

Entonces expresando el vector genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como C. L. de la Base dada.

$$(x, y, z) = \alpha (1, 1, 1) + \beta (2, 2, 0) + \gamma (3, 0, 0) \quad (\text{I})$$

Trabajando con el 2° miembro.

$(x, y, z) = (\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta, \alpha)$ igualando tenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = x \\ \alpha + 2\beta = y \\ \alpha = z \end{cases} \quad \text{resolviendo este sistema tenemos:} \quad \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = \frac{y-z}{2} \\ \gamma = \frac{x-y}{3} \end{cases} \quad (\text{II})$$

Reemplazando (II) en (I) se obtiene:

$$(x, y, z) = z (1, 1, 1) + \frac{y-z}{2} (2, 2, 0) + \frac{x-y}{3} (3, 0, 0)$$

Por definición de Transformación Lineal, es decir aplicando Transformación Lineal a ambos miembros.

$$f(x, y, z) = f \left[z (1, 1, 1) + \frac{y-z}{2} (2, 2, 0) + \frac{x-y}{3} (3, 0, 0) \right]$$

$$f(x, y, z) = z \cdot f(1, 1, 1) + \frac{y-z}{2} \cdot f(2, 2, 0) + \frac{x-y}{3} \cdot f(3, 0, 0)$$

Reemplazando por los datos del enunciado tenemos.

$$f(x, y, z) = z \cdot (-1, 2) + \frac{y-z}{2} \cdot (2, 2) + \frac{x-y}{3} \cdot (3, 0)$$

Trabajando algebraicamente con el 2° miembro.

$$f(x, y, z) = (-z, 2z) + (y-z, y-z) + (x-y, 0)$$

$$f(x, y, z) = (-z + y - z + x - y, 2z + y - z)$$

$$\mathbf{f(x, y, z) = (x - 2z, y + z)}$$

Que es la expresión genérica de la Transformación Lineal.