DETERMINANTES

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los menores complementarios y los cofactores correspondientes a los elementos a_{13} , a_{21} y a_{33}.

2. Determinar la correspondiente matriz de cofactores y matriz adjunta de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Calcular el determinante de los ejercicios del punto 2) haciendo el desarrollo por fila en los ejercicios a) y b) (verificar con la regla práctica); y por columna en los ejercicios c), d) y e) (verificar con la regla de Sarrus los incisos c y d).

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $|A.B| + |A|.|B| =$ b) $|2.B| + |C|.|C^t| =$ c) $|B^{-1}| - |C^3| =$

5. Justificar las siguientes igualdades a partir de las propiedades de los determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e) $\begin{vmatrix} -6 & 4 & -10 \\ a & b & c \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18$

g) $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & f \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

6. Calcular los siguientes determinantes aplicando propiedades (sin resolverlos mediante un método determinado).

a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ g) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

h) Si $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a & 0 & b \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$, entonces $\begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ a & 0 & b \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

i) Si $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 9$, entonces $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 2m & 2n & 2p \end{vmatrix} =$

j) Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 1 \\ x+2 & y+1 & z+2 \end{vmatrix} =$

k) Si $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & n \end{vmatrix} = -2$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m & n \end{vmatrix} = 7$, entonces $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ m & n \end{vmatrix} =$

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$, calcular los siguientes determinantes aplicando propiedades.

a) $\begin{vmatrix} a & b & -4c \\ d & e & -4f \\ g & h & -4i \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} a+c & b & c \\ d+f & e & f \\ g+i & h & i \end{vmatrix} =$ e) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ 2d & 2e & 2f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} =$

8. Aplicando propiedades, calcular los siguientes determinantes haciendo nulos los elementos de una línea, excepto uno de ellos, reduciendo así el orden de los mismos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

Verificar los resultados con GeoGebra: Sugerencia: Seleccionar la vista Cálculo Simbólico y activar Hoja de Cálculo; ingresar los elementos de las matrices y crearlas con la opción "Crear matriz". https://youtu.be/AXrtEx-RRFQ. Usar el comando *Determinante* en la barra de entrada.

9. Calcular el determinante de las siguientes matrices aplicando el método de triangulación o eliminación gaussiana.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Verificar los resultados de los apartados b y c con GeoGebra: Sugerencia: Seleccionar la vista Cálculo Simbólico y activar Hoja de Cálculo; ingresar los elementos de las matrices y crearlas con la opción "Crear matriz". https://youtu.be/AXrtEx-RRFQ. Usar el comando *Determinante* en la barra de entrada.

10. Calcular los siguientes determinantes por el método de Chío y verificar los resultados aplicando el método de La Place.

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

11. Hallar el o los valores de $x \in R$ que verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} -3 & -x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 5$ b) $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 3 & 1+x & -4 \\ 2 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -3 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x-1 & 3x \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & x & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 4 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ 0 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$

12. Encontrar la matriz inversa, siempre que sea posible, utilizando el método de la matriz adjunta.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Verificar los resultados, cuando sea posible, con GeoGebra: Sugerencia: Seleccionar la vista Cálculo Simbólico y activar Hoja de Cálculo; ingresar los elementos de las matrices y crearlas con la opción "Crear matriz". https://youtu.be/AXrtEx-RRFQ. Usar el comando *Inversa* en la barra de entrada.

13. Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 2 & 4-k & 0 \\ 1 & 1 & 9-k \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 5-k & 0 & -2 \\ 4 & -k-1 & 3 \\ 2 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$:

a) Determinar los valores de k para que M admita inversa

b) Determinar los valores de k para que N resulte una matriz singular

c) Calcular la inversa de M y N para $k = 2$

14. Demostrar las siguientes igualdades:

a) $A.Adj(A) = Adj(A).A = |A|.I$; siendo $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible

b) $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$; siendo $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible

c) $|A| = \pm 1$; siendo $A \in K^{n\times n}$ una matriz ortogonal

d) $|A| = 0$; siendo $A \in K^{n\times n}$ una matriz antisimétrica, con n impar

15. Hallar el rango de las siguientes matrices aplicando el método del Orlado.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Verificar los resultados con GeoGebra: Sugerencia: Seleccionar la vista Cálculo Simbólico y activar Hoja de Cálculo; ingresar los elementos de las matrices y crearlas con la opción “Crear matriz”. https://youtu.be/AXrtEx-RRFQ. Usar el comando *RangoMatriz* en la barra de entrada.

16. Dada la siguiente matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcular su determinante.

b) De ser posible, hallar su inversa.

c) Determinar su rango.

d) Determinar si es equivalente a I_3.

17. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2k+2 & 4 \end{pmatrix}$ hallar los valores de k para que:

a) $\rho(M) = 4$ b) $\rho(M) = 3$ c) $\rho(M) = 2$

AUTOEVALUACIÓN DE TEORÍA

1.- Responder Verdadero o Falso. <u>NO</u> justificar.

a) Si en una matriz "A", una fila es combinación lineal de las demás, entonces $|A| = 0$ $\boxed{}$

b) El valor del determinante de una matriz triangular es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal $\boxed{}$

2.- Completar con la respuesta que corresponda.

a) La expresión simbólica del adjunto o cofactor del elemento a_{ij} de una matriz $A \in K^{nxn}$ es la siguiente.......................................

b) Sean las matrices $A \ y \ B \in K^{nxn} / \ B = \lambda . A \ \ con \ \lambda \in R$, entonces $|B| =$............................

3.- Escribir, en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es escribir N.

a) La expresión $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, M_{ij}$ con i fijo y M_{ij} menor complementario de a_{ij}, es el desarrollo del determinante de $A \in K^{n \times n}$ según los elementos de la $\boxed{}$

A) i–ésima columna B) j–ésima columna C) i–ésima fila D) j–ésima fila

b) Si $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ tal que $|A| = k$ y $B = \begin{pmatrix} 2a+c & 2d+f & 2g+i \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ entonces $|B|$ es igual a $\boxed{}$

A) 2k B) k^2 C) k D) $(2k)^2$

AUTOEVALUACIÓN PRÁCTICA

1.- Recuadrar con tinta, la letra correspondiente a las opciones correctas en cada uno de los enunciados.

a) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $y \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

B admite inversa	A
A admite inversa	B

y la ecuación A.X=B se verifica si X es:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	C
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	D

b) Si $|A| = 5 \ y \ |B| = 3$ entonces

$\lvert A \, . \, B \rvert = 15$	A
$\lvert A + B \rvert = 8$	B

, y

$\lvert A^T \rvert = 5$	C
$\lvert A^T \rvert = -5$	D

2.- Completar con la respuesta que corresponda. Las respuestas deben escribirse con tinta.

a) Los valores de $x \in R$ que verifican la igualdad: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix}$ son..........

b) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, entonces, la 2° fila de la matriz A^{-1} es................

c) Los valores de k para que la matriz A = $\begin{pmatrix} 4 & k & 2 \\ k & 0 & -1 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ sea singular son: ....

3.- Escribir, con tinta y en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir una N.

a) El resultado al calcular el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ es: $\boxed{}$

A) 100 B) 10 C) –10 D) 0

b) **<u>Para que exista</u>** la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ "x" tiene que ser distinto de: $\boxed{}$

A) 0 ; – 3 ; 6 B) –4 ; 2 C) –3 ; 1 D) –3 ; 2