2. f) Dado el conjunto $\boldsymbol{W} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^{2x2}} / \ \boldsymbol{a = 3b \ y \ c = -2d} \right\} \subseteq (\boldsymbol{R^{2x2}}, +, \boldsymbol{R}, \bullet)$

i) Determinar si W es subespacio vectorial del espacio vectorial que se especifica.

ii) Si el conjunto dado es subespacio vectorial, representar gráficamente si fuera posible, y escribir dos elementos del mismo.

***i*)**

Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. W es un subespacio de V si W es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones (suma de vectores y producto por un escalar) definidas en V.

W es subespacio vectorial de R^{2x2} si y solo si:

El vector nulo pertenece a W: Existe la matriz nula $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y pertenece a W, por verificar sus condiciones: 0 = 3.0; 0 = -2.0

Y se verifican:

1°- $\forall A \in W , \forall B \in W \Rightarrow (A + B) \in W$ (Para dos matrices cualesquiera pertenecientes a W, la suma de ambas matrices también pertenece a W)

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W$ Entonces se cumplen: $a_1 = 3b_1$ $c_1 = -2d_1$

$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in W$ Entonces se cumplen: $a_2 = 3b_2$ $c_2 = -2d_2$

Sumando ambas matrices y, sumando miembro a miembro las condiciones:

$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$

$a_1 + a_2 = 3b_1 + 3b_2$

$(a_1 + a_2) = 3(b_1 + b_2)$

La primer componente, es igual al triplo de la tercer componente, en la suma de matrices A+B

$c_1 + c_2 = (-2d_1) + (-2d_2)$

$(c_1 + c_2) = -2(d_1 + d_2)$

La tercer componente, es igual al menos el duplo de la cuarta componente, en la suma de matrices A+B

La suma de matrices A+B verifica ambas condiciones, por lo tanto la suma de matrices pertenece a W

2°- $\forall A \in W$ y $\forall \alpha \in R \Rightarrow (\alpha.A) \in W$ (Para una matriz perteneciente al conjunto W y para un escalar α perteneciente al conjunto de los números reales, el producto del escalar α por la matriz A también pertenece a W)

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W$ Entonces se cumplen: $a_1 = 3.b_1$ $c_1 = -2.d_1$

$\alpha \in R$

Multiplicando el escalar α por la matriz y, multiplicando el escalar α por las condiciones del conjunto W:

$\alpha.A = \begin{pmatrix} \alpha.a_1 & \alpha.b_1 \\ \alpha.c_1 & \alpha.d_1 \end{pmatrix}$

$(\alpha.a_1) = \alpha.(3.b_1)$

$(\alpha.a_1) = 3.(\alpha.b_1)$

La primer componente, es igual al triplo de la tercer componente, en el producto de una matriz por un escalar α.A

$(\alpha.c_1) = \alpha.(-2.d_1)$
$(\alpha.c_1) = -2(\alpha.d_1)$

La tercer componente, es igual al menos el duplo de la cuarta componente, en el producto de una matriz por un escalar α.A

El producto de una matriz A por un escalar α, verifica ambas condiciones, por lo tanto el producto de una matriz A por un escalar α, pertenece a W

Conclusión:

Por cumplirse ambas propiedades 1° y 2°, el conjunto W es subespacio vectorial de $(R^{2x2}, +, R, \bullet)$

***ii*)**

No es posible representar gráficamente.

Si es posible escribir dos elementos del conjunto W.

$w_1 = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $w_2 = \begin{pmatrix} -33 & -11 \\ -24 & 12 \end{pmatrix}$