

RECTAS EN \mathbb{R}^2 Y \mathbb{R}^3

TRABAJO PRÁCTICO N° 6

1. Hallar las ecuaciones: vectorial paramétrica, cartesiana paramétrica, simétrica, general, explícita, segmentaria y vectorial de las rectas que cumplen con las siguientes condiciones. Representar gráficamente.

- a) Pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, -1)$
- b) Contiene al punto $P(7, 3)$ y es paralela a la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3}$
- c) Pasa por el punto $A(-2, 4)$ y tiene pendiente igual a $-\frac{3}{2}$
- d) Tiene la misma ordenada al origen que la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ y su vector normal es $\vec{n} = (1, 2)$
- e) Pasa por el punto $P(4, -6)$ y es perpendicular a una recta paralela al vector $\vec{v} = (3, 7)$
- f) Pasa por el punto $P(4, -3)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos $A(4, 1)$ y $B(2, -2)$
- g) Pasa por la intersección de las rectas $r: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3}$ y $s: \overrightarrow{OP} = (3, -1) + \lambda(2, 2)$, y es paralela al vector $\vec{u} = (1, 2)$



Verificar las gráficas de las rectas con GeoGebra: Sugerencia: Ingresar por la barra de entrada: un punto que pertenezca a la recta, su vector dirección y el comando *Recta(<Punto>, <Vector director>)*.

2. Hallar las ecuaciones: vectorial paramétrica, cartesiana paramétrica y simétrica de las rectas que cumplen con las siguientes condiciones. Representar gráficamente.

- a) Pasa por el punto $A(1, -1, 0)$ y es perpendicular a las rectas $l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ y $l_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$
- b) Pasa por el punto $P(1, -2, 0)$ y contiene al vector $\vec{v} = (4, -1, 5)$
- c) Pasa por los puntos $A(3, 2, -1)$ y $B(-1, 1, 4)$
- d) Es paralela a la recta $r: \overrightarrow{OP} = (0, 3, -1) + \lambda(2, 4, -5)$ y pasa por el punto $P(3, -1, 2)$
- e) Pasa por el punto $P(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje OX
- f) Contiene al punto $P(1, -2, 3)$ y pasa por la intersección de las rectas $l_1: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{4}$ y $l_2: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$
- g) Contiene al punto $P(1, -2, -1)$, es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ y corta a la recta $l: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$



Verificar las gráficas de las rectas con GeoGebra: Sugerencia: Habilitar la Vista 3D. Ingresar por la barra de entrada: un punto que pertenezca a la recta, su vector dirección y el comando *Recta(<Punto>, <Vector director>)*.

3. Dada la recta de ecuación $l_1: \frac{x+2}{2} = y = \frac{z-1}{3}$

- Abrir GeoGebra y activar la Vista 3D.
- Ingresar la ecuación de la recta l_1 en su forma vectorial paramétrica: $X = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$ y su vector dirección: $u = (u_1, u_2, u_3)$.
- Visualizar la recta y su vector dirección desde diferentes perspectivas.
- Ingresar la ecuación de la siguiente recta $l_2: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ y su vector dirección.
- Visualizar las rectas, determinar si las mismas se cortan y, en caso afirmativo, encontrar las coordenadas del punto de intersección usando el comando *Interseca(objeto, objeto)*.
- Verificar si las coordenadas del punto (hallado en el inciso e) satisface las ecuaciones de ambas rectas. Formular conclusiones.
- Calcular el ángulo determinado por las rectas y el ángulo formado por los vectores direcciones, con el comando *Ángulo(objeto, objeto)*. Sacar conclusiones.
- Modificar el vector dirección de l_2 por el vector $(-4, 2, 2)$. Determinar la posición relativa entre las rectas y entre los vectores direcciones. Obtener conclusiones.
- Para todos los incisos hacer capturas de los gráficos.

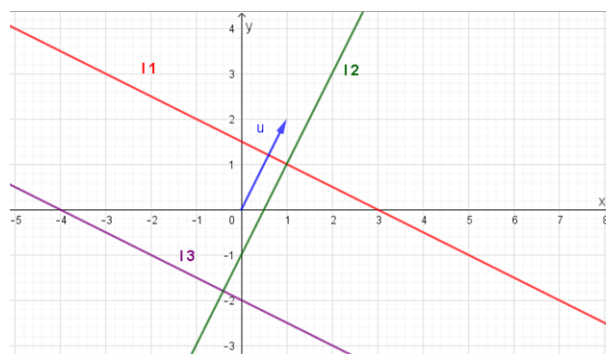
4. a) Calcular el ángulo formado por las siguientes rectas, usando los vectores direcciones. Verificar los resultados usando las pendientes, cuando sea posible:

- $l: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$ y $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-1}$
- $l: \overline{OP} = (3, 2) + \lambda(1, 2)$ y $r: -2x + y + 4 = 0$
- $l: \overline{OP} = (5, 4, 0) + \lambda(-2, 3, -3)$ y $r: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) Hallar el valor de k para que las rectas:

- $l: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2}$ y $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + k\lambda \end{cases}$ formen un ángulo de 45°
- $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \sqrt{2}\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + k\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ formen un ángulo de 60°

5. Dadas las rectas representadas en el siguiente gráfico:



- a) Determinar la ecuación vectorial paramétrica, general y segmentaria de las rectas l_1 , l_2 y l_3 , respectivamente.
- b) Indicar cuáles son paralelas y cuáles son perpendiculares. Justificar.

6. Determinar cuáles de las siguientes rectas son paralelas y cuáles son perpendiculares.

$$l: \begin{cases} x = \frac{1}{2} - 6\lambda \\ y = 11 + 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases} \quad r: \frac{x-1}{5} = \frac{1-y}{2} = \frac{z-2}{3} \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -7 - 2\lambda \end{cases} \quad t: x - 8 = y - 6 = 1 - z$$

7. Determinar el valor de k y m , según corresponda, para que:

- a) Las rectas $l: kx + (k-1)y - 2(k+2) = 0$ y $r: 3kx - (3k+1)y - (5k+4) = 0$:
- Sean paralelas.
 - Sean perpendiculares.
- b) La recta $3x + ky - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje OX .
- c) Las rectas $l: kx + y - 3 = 0$ y $r: mx + 5y - 7 = 0$ sean paralelas, sabiendo que la recta r pasa por el punto $A(2, 1)$.

8. Hallar el valor de m y n , según corresponda, para que las rectas sean:

- $l: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y $r: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$ sean paralelas.
- $s: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $t: x - 1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$ sean perpendiculares.
- $l: \frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{m} = \frac{z+1}{\sqrt{2}}$ y $r: (x, y, z) = (-2, 2, 1) + \lambda(0, 0, m)$ formen un ángulo de 45° .

RECTAS EN \mathbb{R}^2 Y \mathbb{R}^3

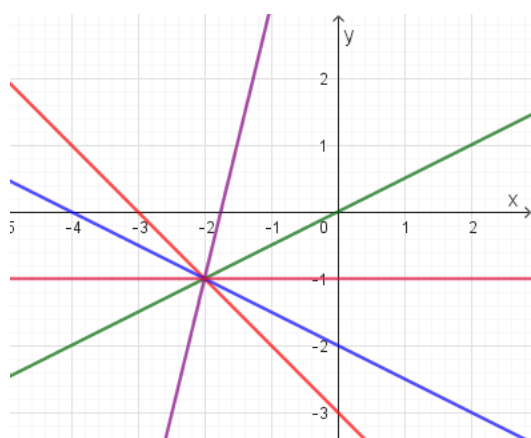
TRABAJO PRÁCTICO N° 7

1. Utilizando haz de rectas hallar la ecuación de la recta que:

- Pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente $m = -2$.
- Pasa por el punto $P(2, 1)$ y es perpendicular a $2x + y - 5 = 0$.
- Pasa por el punto $A(-2, 3)$ y por la intersección de las rectas $l: x + 5y + 2 = 0$ y $s: 3x + 4y - 5 = 0$.

2. Sean los haces de las siguientes gráficas:

a)



b)



- Escribir la ecuación que representa a cada uno de los haces.
- Determinar, en cada uno de los haces, la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, -2)$.



Verificar los resultados con GeoGebra: Sugerencia: Ingresar por la barra de entrada el punto $(-1, -2)$ y las ecuaciones encontradas en el inciso i. Para los parámetros de dichas ecuaciones, crear un deslizador y desplazar el mismo para comprobar las ecuaciones del inciso ii.

3. En cada caso, hallar la ecuación del haz determinado por las rectas l y r , y la ecuación de la recta t de cada haz, según las condiciones indicadas.

- $l: y = 2x - 3$ y $r: y = 3x - 5$, y la recta t pasa por el punto $A(3, 5)$
- $l: 2x + y = 0$ y $r: 3x - 2y = 0$, y la recta t tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$

4. Calcular la distancia:

- Del punto $P(4, 4)$ a la recta $x + 2y - 4 = 0$
- Entre las rectas $l: x - 2y - 3 = 0$ y $r: -2x + 4y + 1 = 0$

c) Del punto $P(2, 0, -1)$ a la recta $l: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

d) Entre las rectas $l: \frac{-1-x}{2} = \frac{2y-4}{2} = \frac{z-1}{3}$ y $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$



Verificar los resultados con GeoGebra: Sugerencia: Ingresar por barra de entrada las ecuaciones de las rectas y/o los puntos. Aplicar el comando *Distancia*.

5. Calcular el valor de m para que la distancia:

a) Del punto $P(1, 2)$ a la recta $l: mx + 2y - 2 = 0$ sea igual a $\sqrt{2}$ [ul]

b) Entre las rectas $l: 4x + 3y - 6 = 0$ y $r: 4x + 3y + m = 0$ sea igual a 3 [ul]

c) Entre la recta $s: (x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(-2, m, 1)$ y el punto $A(3, -1, 1)$ sea igual a $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6}}$ [ul]

6. Resolver los siguientes problemas.

a) La recta $l: 2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $(0, 0)$. Encontrar las coordenadas del otro extremo.

b) Calcular el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas: $r: y = -2$, $s: 2x + 3y - 6 = 0$ y $t: \frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.

c) La recta $2x + 4y - 8 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, un segmento MN . Hallar la ecuación vectorial paramétrica de la mediatriz del segmento MN .

d) Determinar si los puntos $P(2, -3, 1)$, $Q(5, 4, 4)$ y $R(8, 11, -9)$ están alineados.

e) Determinar si los siguientes pares de rectas son secantes y, en caso afirmativo, encontrar las coordenadas del punto de intersección.

i. $l: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ y $r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

ii. $l: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ y $r: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

f) Dadas las rectas $l: \begin{cases} x = k + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y $r: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -\mu \end{cases}$

i. Determinar el valor de k para que las rectas resulten secantes.

ii. Para dicho valor de k , encontrar las coordenadas del punto de intersección.

g) Dados el punto $P(2, 2, -2)$ y el vector $\vec{v} = (2, -1, 3)$

i. Encontrar la ecuación simétrica de la recta r que pasa por el punto P y es paralela al vector \vec{v}

ii. Hallar la intersección de la recta r con los planos coordenados.

iii. Encontrar dos puntos de la recta r , distintos a los determinados en el inciso anterior.

- iv. Calcular el ángulo que forma la recta r con la recta l :
$$\begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$
- v. Calcular la distancia de la recta r al punto $A(4, -1, 3)$

7. Demostrar que:

- a. La ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ puede escribirse de la forma $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- b. Si una recta corta a los ejes en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, su ecuación es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- c. Si las rectas $ax + by + c = 0$ y $cx + dy + e = 0$ son perpendiculares, se verifica que $ac + bd = 0$

8. Plantear y resolver las siguientes situaciones problemáticas:

- a. La distancia entre Palpalá y San Salvador de Jujuy es de **10 km**; la capital jujeña tiene como coordenadas **(2, 8)** y la ciudad de Palpalá **(m, 2)**. Calcular **m** y encontrar la ecuación vectorial paramétrica de la recta que une ambas ciudades.
- b. Un albañil debe construir una rampa para automóviles de un estacionamiento; sabiendo que la altura es de 3 metros y el largo es de 6 metros, determinar la inclinación de misma y encontrar la ecuación explícita de la recta que contiene la rampa.
- c. Determinar la dirección (ecuación de la recta) con la cual debe ser lanzada rectilíneamente una partícula desde el punto $P(-2, 0, 2)$ hacia la recta l :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$
 para que la alcance al cabo de dos segundos, siendo su velocidad $\sqrt{3} \frac{m}{s}$; y encontrar las coordenadas del punto de encuentro.

AUTOEVALUACIÓN DE TEORÍA

1. Responder Verdadero o Falso. NO justificar.

a) El ángulo entre dos rectas del plano se puede calcular usando pendientes.

b) La ecuación segmentaria de una recta en el espacio es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2. Completar con la respuesta que corresponda.

a) Sean las rectas $l_1: y = m_1x + b_1$ y $l_2: y = m_2x + b_2$, la condición necesaria y suficiente para que sean paralelas es: y para que sean perpendiculares es:

b) La ecuación del haz de rectas que pasa por la intersección de dos rectas dadas es:

c) Sea el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ no perteneciente a la recta l y sean el punto $P_1(x_1, y_1, z_1) \in l$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ su vector dirección, la ecuación vectorial de la distancia del punto P_0 a la recta l es:

3. Escribir, en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir N.

a) La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a $\vec{u} = (u_1, 0, 0)$, es:

--

A) $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

B) $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$

C) $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

D) $x = x_0$

b) La ecuación cartesiana de la distancia de un punto $P_0(x_0, y_0)$ a la recta l de ecuación $Ax + By = 0$, es:

--

A) $d(P_0, l) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

B) $d(P_0, l) = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

C) $d(P_0, l) = \left| \frac{Ax_0 + By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

D) $d(P_0, l) = \left| \frac{x_0 + y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

AUTOEVALUACIÓN DE PRÁCTICA

1. Recuadrar con tinta, la letra correspondiente a las opciones correctas en cada uno de los enunciados.

a) La recta $l: x - 5y - n = 0$ pasa por el punto $P(2, -1)$ y es perpendicular a $r: mx + y - 4 = 0$, entonces el valor de n es:

-7	A
7	B

 y el valor de m es:

5	C
-1/5	D

b) Las rectas $l: (x, y, z) = (-2, 0, -1) + \lambda(-4, 6, -2)$ y $r: \frac{-x+1}{-2} = \frac{2y+1}{-6} = \frac{-2+z}{1}$

y la recta r pasa por el punto:

(1, 1, -2)	C
(1, -1/2, 2)	D

No son perpendiculares	A
Son perpendiculares	B

2. Completar con la respuesta que corresponda. Las respuestas deben escribirse con tinta.

- a) La ecuación general de la recta cuya pendiente es 4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $y = -2x + 8$ y $3x - 2y + 9 = 0$, es:
- b) El valor de k para que las rectas $l: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ y $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + kt \\ z = 2 \end{cases}$ formen un ángulo de 60° , es: $k = \dots\dots\dots$
- c) La distancia de la recta $4x - 3y + 1 = 0$ al punto P es 4[ul]. Si la ordenada de P es 3, entonces su abscisa es:

3. Escribir, con tinta y en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir una N.

- a) Para que las rectas $(2k - 2)x - y + 2k = 0$ y $(k - 1)x + (k + 1)y - 17 = 0$ sean paralelas, el valor de k debe ser:
- A) $k = 1, k = -3/2$ B) $k = -1, k = -3/2$ C) $k = 0$ D) $k = 1, k = 3/2$
- b) La ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(3, -2)$ y que pertenece al haz de rectas $x - 3y + 2 + k(x + 2y - 1) = 0$, es:
- A) $-\frac{9}{2}x - 14y + \frac{15}{2} = 0$ B) $x - 3y + \frac{15}{2} = 0$
- C) $\frac{13}{2}x + 8y - \frac{7}{2} = 0$ D) $\frac{11}{2}x + 11y - \frac{11}{2} = 0$
- c) La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,1,2)$ y que es perpendicular al eje \overrightarrow{OZ} y a la recta $(x, y, z) = (-2, 2, 1) + \lambda(2, 10, -1)$, es:
- A) $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ B) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-2}{1}$ C) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 10\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-2}{-1}$