Análisis Matemático I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY

Trabajo Practico N° 7

- Ing. Roberto Lamas
- Prof. Adjunto Análisis Matemático I

Derivación sucesiva.
Derivada de funciones implícitas. Derivación logarítmica.
Interpretación geométrica de la derivada. Interpretación física de la derivada.

Derivadas sucesivas

A partir de f obtenemos f ´ que es una función y se puede volver a derivar obteniendo (f ´)´= f ´´

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{d^2y}{dx^2} = D_x^2\, y$$

f ´´ se la puede volver a derivar obteniendo:

$$\left(f''(x)\right)' = f'''(x) =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \frac{d^3y}{dx^3} = D_x^3\, y$$

Y así sucesivamente:

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} = \frac{d^{(n)}y}{dx^n} = D_x^n\, y$$

Ejemplo:

1.- $f^{(iv)}(x) \;\; si\ y = e^{5x+1} + 7\, sen(x) - x^3$

2.- $f^{(n)}(x) \;\; si\ y = e^{8x-1}$

$f^{(iv)}(x) \;\; si\ y = e^{5x+1} + 7\, sen(x) - x^3$

$f^{(n)}(x) \quad si\ y = e^{8x-1}$

Derivación implícita.

Dada y = f(x) sabemos obtener dy/dx, pero como hacerlo si tenemos f(x,y) = 0?

Dada $2^x y = x^2 + 1$ puedo despejar $y = \frac{x^2+1}{2^x}$ y luego derivo aplicando reglas y propiedades correspondientes.

Ahora si tenemos $2^x y^3 = x^2 + 17xy - 7y^3$ no podemos despejar y , entonces como procedemos?

Recordar: $y = f(x) \quad entonces\ \frac{dy}{dx} = f'(x)$

Pero si y = f(t) , t = h(x)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

Entonces $\frac{d(y^3)}{dy} = 3y^2$

Pero $\frac{d(y^3)}{dx} = \frac{d(y^3)}{dy}\frac{dy}{dx} = 3y^2 y'(x)$

En consecuencia, si tenemos f(x,y) = 0 y suponemos y = f(x), derivamos miembro a miembro con respecto a x, aplicando las reglas correspondientes.

Ejemplo: $2^x y = x^2 + 1$

$$\frac{d(2^x)}{dx}\, y + 2^x \frac{d(y)}{dx} = \frac{d(x^2+1)}{dx}$$

$$2^x ln2\, y + 2^x \frac{dy}{dx} = 2x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2^x\, ln2\, y}{2^x}$$

Ejemplo: $\cos(p^2 + r^{-4}) = \ln r + \ p^5$ Hallar dr/dp

Ejemplo: $e^t + m^3 = 5\, sen\ t$ $\dfrac{d^2 t}{dm^2}$

Derivación logarítmica.

Aplicamos este tipo de derivación para funciones de la forma $y = f(x)^{g(x)}$
Por ejemplo $y = x^x$
Para aplicar el método debo seguir los siguientes pasos:

1) Aplico logaritmo miembro a miembro.

$y = h(x)^{g(x)}$ entonces $\ln y = \ln h(x)^{g(x)}$ por lo tanto :

$$\ln y = \mathrm{g(x)} \ln h(x)$$

2) Derivo implícitamente la expresión obtenida.

Me piden hallar y ´(x) , considero y = f(x), por lo tanto
$\frac{1}{y}\, y\,' = g'(x) \ln\big(h(x)\big) + g(x)\, \frac{h'(x)}{h(x)}$

3) Despejo la derivada pedida.

$$y\,' = y\left(g'(x)\ln\big(h(x)\big) + g(x)\,\frac{h'(x)}{h(x)}\right)$$

Ejemplos:

$$1)\ y = x^x$$

$$2)\ y = (x^2+1)^{sen(x)} + 3x^7 - tg(x)$$

$$3)\ y = sen\,(x^x) + 2^x + x^3$$

$$4)\ y = \frac{\sqrt{x^2+1}\ x^2\ tg(x)}{2^x\ (x^8+2)^2\ \ln(x)}$$

$$1)\ y = x^x$$

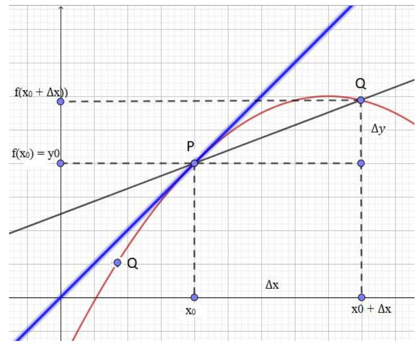
2) $y = (x^2 + 1)^{sen(x)} + 3x^7 - tg(x)$

3) $y = sen\ (x^x) + 2^x + x^3$

Aplicación geométrica de la derivada

Recta tangente a una curva en un punto $P(x_0,y_0)$.

Para definir una recta necesitamos o dos puntos o un punto y la pendiente de la recta.



Suponemos que tenemos un punto, vamos a tratar de determinar la pendiente.

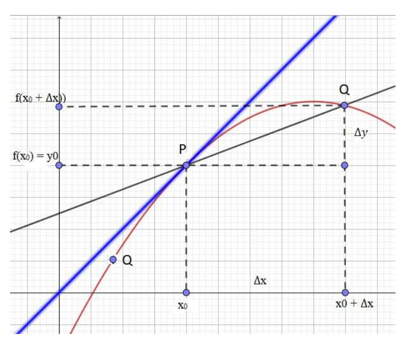
Sea Q otro punto de la curva siendo Q ≠ P

P (x_0, $f(x_0)$)   Q ($x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x)$)

Sea r_s la recta secante que pasa por los puntos P y Q.

$$m_s = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pendiente de la recta secante.



Ahora P es un punto fijo, porque allí deseo conocer la pendiente de la recta tangente y hagamos que Q sea variable, de forma que se mueva sobre la curva, acercándose a P.
Es decir $Q \rightarrow P$ para que esto suceda entonces $\Delta x \rightarrow 0$

La recta secante tomara distintas posiciones, hasta alcanzar una posición limite a la recta que ocupa dicha posición , constituyéndose en la recta tangente.

Ahora si $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $r_s \rightarrow r_t$ en consecuencia $m_s \rightarrow m_t$

$$\lim_{\Delta x \to 0} r_s = r_t \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} m_s = m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_t$$

En consecuencia $m_t = f\,'(x_0)$

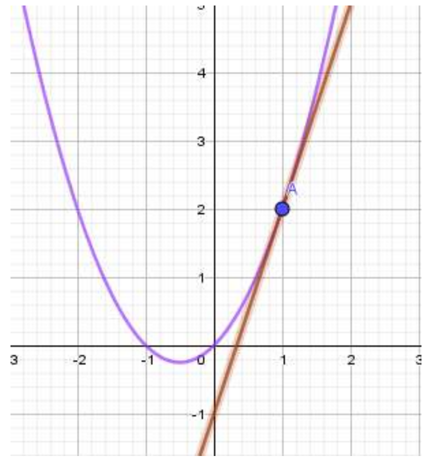
La derivada de una función en un punto se puede definir como la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en dicho punto.

Que puede ocurrir con el valor del límite?
a) Que dicho límite exista y sea finito $m_t = f\,'(x_0)$ por lo tanto existe la recta tangente.
b) Que el limite exista y sea infinito, en consecuencia $m_t = \infty$, por lo tanto la recta tangente es vertical.
c) Que el límite no exista, en dicho caso no existirá la recta tangente.

Definición: Se define recta tangente a la curva de ecuación y = f(x) en el punto $P(x_0,y_0)$ como:
a) La recta que pasa por P y tiene por pendiente el numero $f\,'(x_0)$ (Si $f'(x_0) \in R$).
b) La recta vertical que pasa ´por P (si $f\,'(x_0)$ existe vale $\pm\infty$
Ecuación de la recta:
a) $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$
b) $x = x_0$

Ejemplo: Determinar la ecuación de la recta tangente al grafico de f en el punto P:

1) $y(x) = x^2 + x$ P(1, 2)

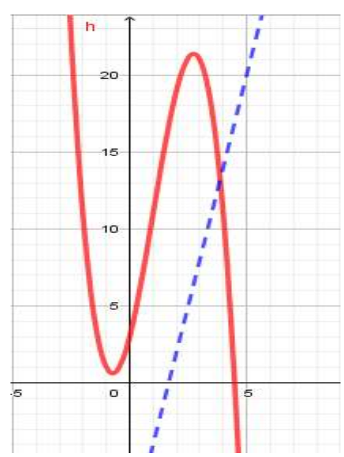


$y\,'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad y\,'(1) = 3$ por lo tanto

$y - 2 = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 1$

2) $y = 3(x+1)^2 - x^3$, se sabe que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y - 6x + 10 = 0$, por lo tanto $y = 6x - 10$

Sabemos que $m_t = 6$, se desconoce el punto P de tangencia, debemos calcular el mismo.



$$m_t = f\,'(x_0) = 6$$

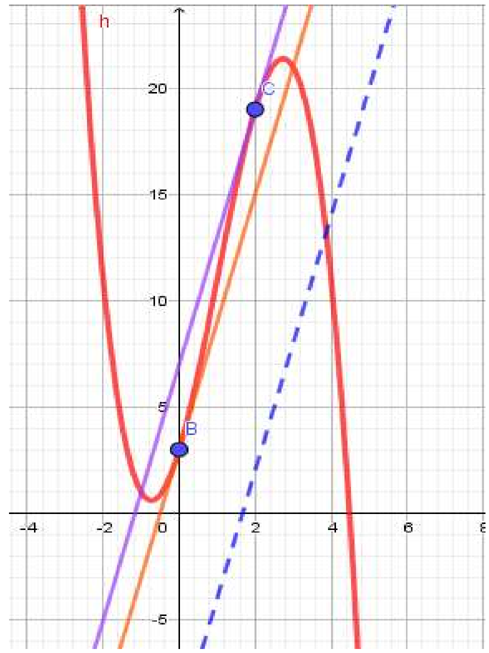
$$f'(x) = 6(x+1) - 3x^2$$

$$6(x_0 + 1) - 3\,x_0^2 = 6$$

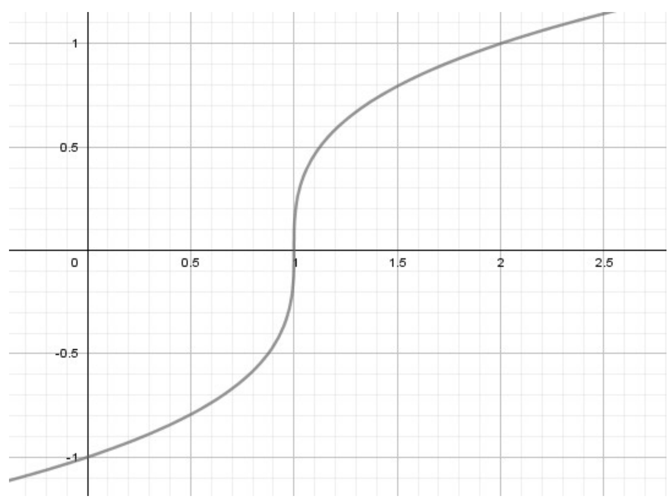
$$3x_0(2 - x_0) = 0$$

Si $x_0 = 0$ entonces $y_0 = 3$
Si $x_0 = 2$ entonces $y_0 = 19$

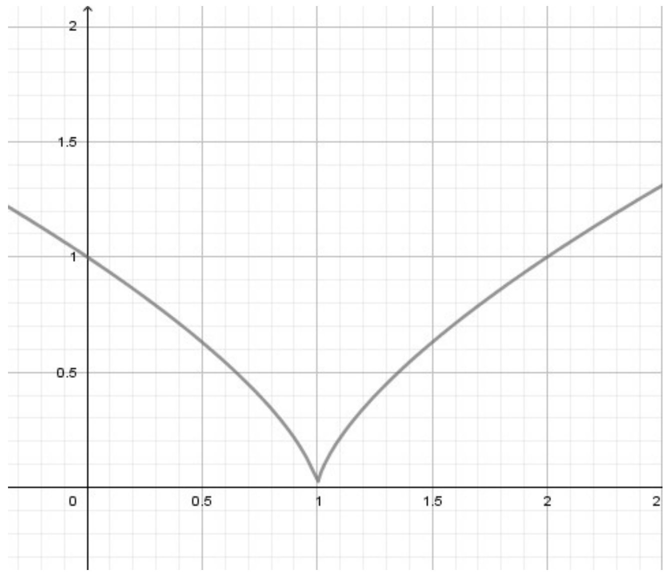
Rectas tangentes: $y = 6x+3$
$y - 19 = 6(x - 2)$ o $y = 6x + 7$



$y = \sqrt[3]{x-1}$ P(1,0)

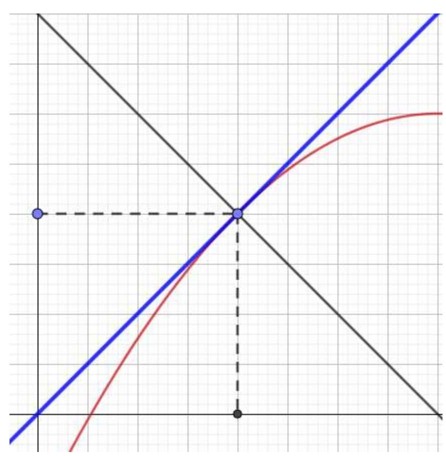


$y = (x-1)^{2/3}$ P(1,0)



Recta normal a una curva en un punto.

Definición: Se define recta normal a una curva de ecuación y = f(x) en un punto $P(x_0,y_0)$ como la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto P.



Condición de perpendicularidad:

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

a) Si f ´(x_0) ∈ R – { 0 } $y - y_0 = -\frac{1}{f´(x_0)}(x - x_0)$
b) Si f ´(x_0) = 0 entonces x = x_0
c) Si f ´(x_0) = $\pm \infty$ entonces y = y_0

Ejemplos, hallar la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación y = f(x) en P si:

a) F ´(3) = 4 P(3,2)
b) F´(– 5) = 0 P (– 5,2)
c) F´(6) = $-\infty$ P(6,4)

a) F ´(3) = 4 P(3,2)

b) $F'(-5) = 0 \quad P(-5,2)$

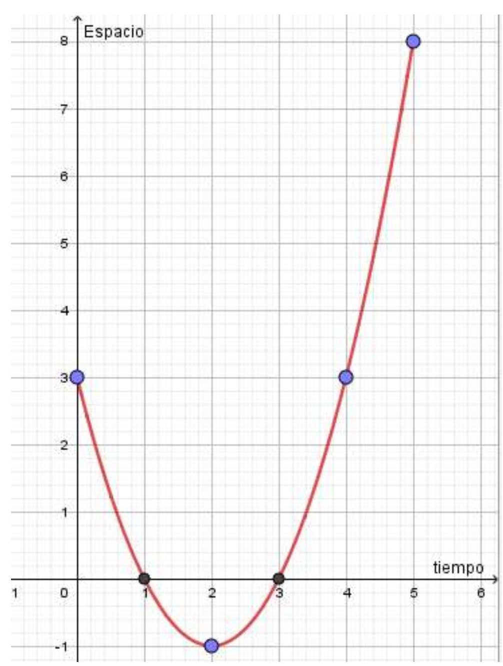
c) $F'(6) = -\infty \quad P(6,4)$

Velocidad

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una recta coordenada (s) de modo que se conoce su posición s en esa recta en cada instante y esta dada por s=f(t); donde s es el desplazamiento con respecto a un punto fijo que llamaremos origen.
La función f se conoce como función posición, ley de movimiento o función espacio.

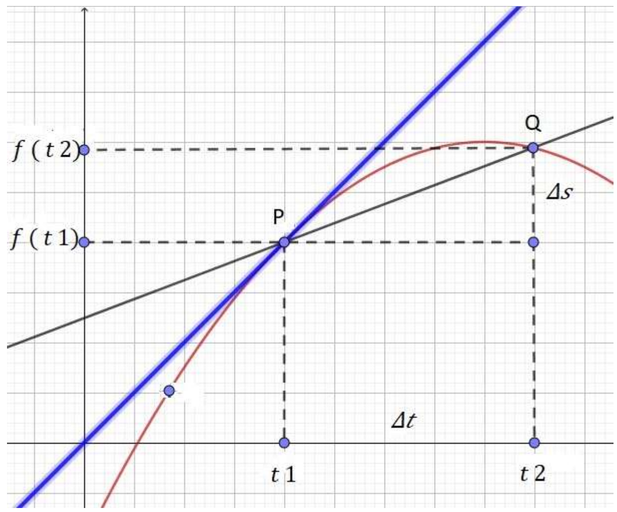
Ejemplo: $s = t^2 - 4t + 3$

t	s
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8



Velocidad media

Sea s=f(t) la función posición de un objeto; en el instante $t=t_1$ el objeto se encuentra en la posición P y en otro instante $t=t_2$ se encuentra en la posición Q.



Se define desplazamiento de la partícula en el instante que va desde t_1 a t_2 como:

$$\Delta s = f(t_2) - f(t_1) = f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)$$

Se define velocidad promedio del objeto en el intervalo de tiempo que va desde t_1 a t_2 como:

$$v_m = \frac{desplazamiento}{tiempo\ del\ recorrido} = \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{\Delta s}{\Delta t} = m_{sec}$$

Ejemplo: Un auto recorre 30 km en 15 minutos (0,25 hs) , cual fue su velocidad promedio?

$$v_m = \frac{30\ km}{0{,}25\ hs} = 120\ \frac{km}{h}$$

Si queremos saber que ocurre en el instante t_1, deberemos tomar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, cuanto más pequeño sea el intervalo mejor podremos saber que pasa en el instante t_1.

Se define velocidad en el instante t_1 o simplemente velocidad en t_1 como:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = f\,'(t_1)$$

Se define velocidad instantánea o velocidad:

$$v = f\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Se llama rapidez al valor absoluto de la velocidad.
Rapidez = | velocidad| = | v(t) |

Aceleración media: Dada la función posición de un objeto s= f(t) se define aceleración media como la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo.

$$a_m = \frac{Variación\ de\ la\ velocidad}{Variación\ del\ tiempo}$$

$$= \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_m = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}$$

Se define aceleración instantánea como el límite de la am cuando $\Delta t \to 0$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo1:
Una roca lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie de la luna a una velocidad de 24 m/s, alcanza una altura de $s = 24t - 0,8\ t^2$ metros en t seg.

a)Hallar la velocidad y aceleración de la roca en el instante t.

b)Cuanto tiempo tarda la roca en alcanzar su altura máxima?

c)Que altura máxima alcanza la roca?

d)Cuanto tiempo tarda la roca en alcanzar la mitad de su altura máxima?

e)Cuanto tiempo está la roca en el aire?