Análisis Matemático I

Trabajo Practico N° 8

- Ing. Roberto Lamas
- Prof. Adjunto Análisis Matemático I

Razón de cambio. Diferencial: Definición- Interpretación grafica- Aplicaciones- Regla de L'Hopital

Razón de cambio- Grado de variación – Coeficiente de variación.

Si tenemos dos cantidades relacionadas $r = f(l)$, entonces $dr/dl = r'(l)$ representa la variación puntual de r con respecto a l. Es decir en cada punto como esta variando la cantidad r con respecto a la variación de l. A esta variación se llama razón de cambio o grado de variación o coeficiente de variación.

Ejemplos:

a	A: área de una figura cuadrada l: lado	$\frac{dA}{dl}$	Como varia el área cuando varía el lado.
b	V: volumen de una esfera r: radio	$\frac{dV}{dr}$	Como varia el volumen cuando varía el radio.
c	h: altura de una persona t: tiempo	$\frac{dh}{dt}$	Como varia la altura de una persona cuando varía el tiempo.

Ejemplo1:

Un cuadrado se expande con el tiempo, Como se relaciona la razón de aumento del área del cuadrado con la razón de aumento de la longitud de su lado?

En cualquier instante el área A es una función de la longitud x del lado:

$$A = x^2$$

Asi que las razones relacionadas se obtienen derivando dicha expresión con respecto al tiempo.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d(x^2)}{dt} \qquad \frac{dA}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt}$$

Ejemplo2:
Se inyecta aire a un globo esférico a razón de 20 pie^3/min.
A qué razón varia el radio cuando mide 3 pies?
Al ser inflado el globo, va aumentando su volumen, lo que me indicaría un aumento del radio.
El aire que se inyecta es el cambio de volumen con respecto al tiempo.

$$\frac{dV}{dt} = 20 \ \frac{pies^3}{min}$$

Y lo que se pide es : $\frac{dr}{dt}$

El volumen del globo esférico está dado por $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \ \frac{d(r^3)}{dt} = \frac{4}{3}\pi \left(3r^2 \ \frac{dr}{dt}\right) = 4 \, \pi \, r^2 \frac{dr}{dt}$$

Pero $\frac{dV}{dt} = 20 \ \frac{pies^3}{min}$
Por lo tanto

$$20 = 4 \, \pi \, r^2 \frac{dr}{dt}$$

Despejando

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\,\pi\, r^2} = \frac{5}{\pi\, r^2}$$

Así que :

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{\pi\, 3^2} = \frac{5}{9\pi}\,\frac{pie}{min}$$

<u>Diferencial de una función</u>

Definición: Sea f derivable en x / y = f(x) se define diferencial de la variable independiente dx= Δx y diferencial de la variable dependiente como dy = f´(x) Δx = f ´(x) dx.

Otra manera: d(f(x) = f ´(x) dx

Ejemplo1: Si $y = \ln x + 5x^2$ $\quad dy = (1/x + 10x)\, dx$

$d(t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)\, dt$ $\quad d(y^5 + 8) = 5y^4\, dy$

Ejemplo2: Obtener $dy|_{\Delta x=1/4}^{x=2}$ Si x pasa de 2 a 2+1/4 siendo f / f(x) = ln(x) + 5x^2.

$$dy = \left(\frac{1}{x} + 10x\right) dx$$

$$dy\Big|_{\Delta x=1/4}^{x=2} = \left(\frac{1}{2} + 20\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + 5 = \frac{41}{8}$$

Nota1: Observar que para obtener un valor determinado de dy tuvimos que indicar x y también Δx , en consecuencia dy es función de dos variables independientes entre si.

Nota2: dy = f ´(x) dx entonces $\frac{dy}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$

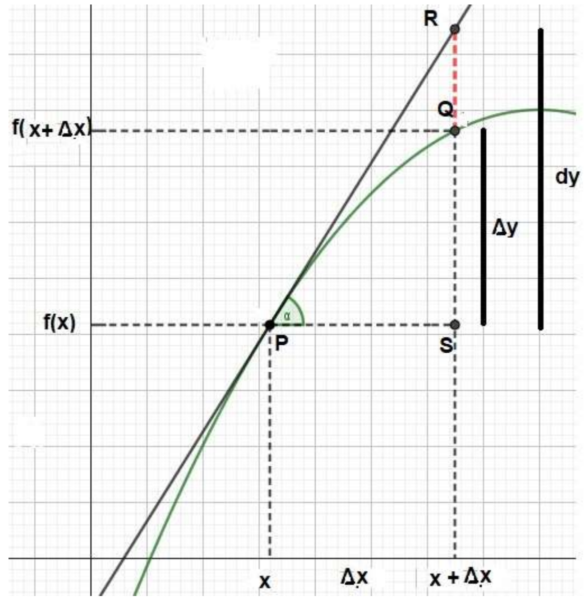
En consecuencia f ´(x) es el cociente entre dos diferenciales (otro significado de la notación de Leibniz)

Interpretación gráfica:

m_t = f ´(x) = tg (α) = $\frac{\overline{RS}}{\overline{PS}}$

$f´(x) = \frac{\overline{RS}}{\overline{PS}} \quad \Rightarrow \ \overline{RS} = f´(x)\overline{PS} = f´(x)\Delta x = dy$

$\therefore \ dy = \ \overline{RS}$



La diferencial de una función representa la variación que experimenta la ordenada de la recta tangente cuando la variable independiente experimenta una variación de Δx.
Δy variación de la ordenada de la función.
dy : variación de la ordenada de la recta tangente.
Si Δx es pequeña Δy ≅ dy cuanto mas pequeña es Δx mejor será la aproximación en consecuencia como aproximación a la variación y se puede tomar dy ⇔ $\frac{dy}{\Delta y} \cong 1$ cuando Δx es pequeño (Δx → 0)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta y} = 1 \quad ; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta y} =$$

$$f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \; f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \quad f'(x) \frac{1}{f'(x)} = 1$$

Queda demostrado que si (Δx → 0 entonces (Δy ≈ dy)

Reglas de diferenciación:

Valen las mismas que para derivada.
Sean f y g derivables:

a) d(f(x) ± g(x)) = d(f(x) ± d(g(x)

b) d(f(x) * g(x)) = d(f(x)) g(x) + f(x) d(g(x))

c) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d\big(f(x)\big)g(x) - f(x)d(g(x))}{(g(x))^2}$ g(x) ≠ 0

Diferenciales sucesivas: Sean $y = f(x)$ / f es derivable entonces $dy = f'(x)\,dx$

Vamos a diferenciar nuevamente (Se deriva respecto de x pero $dx = \Delta x$ no depende de x, en consecuencia es constante).

$d(dy) = d(f'(x)\,dx) \Rightarrow d^2y = dx\, d(f'(x)) = dx\,(f''(x)\,dx) \Rightarrow d^2y = f''(x)\,dx^2$

En consecuencia:

$d(d^2y) = d^3y = f'''(x)\,dx^3$ Por lo tanto $d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n$

Aplicaciones de la diferencial.

a) Al cálculo aproximado del valor de una función.

Deseo calcular $f(x_0+\Delta x)$, como lo puedo hacer fácilmente?

$f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0) + dy$

$f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$

$f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\, \Delta x$

Ejemplo: $\sqrt[5]{31}$

$f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{1/5}$

$\Delta x = -1$ $\quad x_0 = 32$

$f'(x) = \frac{1}{5} x^{-4/5} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

$f'(32) = \frac{1}{5}(32)^{-4/5} = \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{80}$ $\quad f(32) = 2$

$$\sqrt[5]{31} \cong 2 + \frac{1}{80}(-1) = 2 - \frac{1}{80} = \frac{159}{80} \cong 1{,}9875$$

$f(31) = 1{,}987340755$

b) A la variación aproximada de una función.

$$\Delta y \cong dy$$

Δy : variación exacta

dy: variación aproximada.

$Ejemplo$: Para calcular la altura de un puente se utiliza la ecuación s = $16t^2$ (ley de movimiento) , tomando el tiempo que tarda una piedra, al soltarse desde lo alto del puente, en llegar a la superficie del agua que corre bajo el mismo. Cual será la sensibilidad de nuestro calculo al medir s si se comete un error de 0,1 seg al medir el tiempo (s : pies) Suponga que el tiempo medido es de 2 seg.

a) Cálculo aproximado ds

S= 16 t^2 ds = 32 t dt $ds|_{\Delta t=0,1}^{t=2}$ = 32 * 2 * 0,1 = 6,4 pies (error en la medición)

b) Cálculo exacto Δs

$\Delta s = s(t_o + \Delta t) - s(t_o) = s(2{,}1) - s(2) = 16(2{,}1)^2 - 16(2)^2 =$ 6,56 pies

Regla de L'Hopital

Se aplica para resolver límites indeterminados.

Se aplica directamente en los casos 0/0 o ∞/∞ .

En los siguientes casos se debe transfomar primero y luego aplicar la regla: $\infty - \infty$, $0 * \infty$, $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$.

a) Indeterminaciones donde se aplica directamente la regla de L'Hopital: Caso 0/0 o ∞/∞

Teorema: Sean f ^ g dos funciones tales que son derivables en I – { a } (donde I es un intervalo abierto que contiene al punto a) ^ g'(x) ≠ 0 $\forall\, x \in I - \{a\}$ ^

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ^ ∃

$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{2}{1} = 2$$

Nota 1: La regla es valida si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ o si en vez de x → a ocurre x → $\pm\infty$

Nota 2 : Si $si \nexists \lim_{x\to a}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} \not\Rightarrow \exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ significa que no cumple con una de las hipótesis y en consecuencia no se puede aplicar la regla, habría que calcular limite por otro método.

Se puede aplicar la regla tantas veces como sea necesario:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2+x+1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+10x+1}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{24x+10}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{24}{e^x} = 0$$

b) Indeterminaciones donde primero se realiza una transformación y luego se aplica la regla de L'Hopital.

i) Caso 0 * ($\pm\infty$) proviene de lim [f(x) * g(x)]   donde f(x) → 0   y   g(x) → $\pm\infty$

Se transforma en $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) \quad \to \; 0}{\frac{1}{g(x)} \to 0}$ o bien $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x) \quad \to \; \pm\infty}{\frac{1}{f(x)} \to \pm\infty}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/3*}\log(x^3)}{} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^3)}{x^{-1/3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3x^2}{x^3 ln10}}{-\frac{1}{3}x^{-4/3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-9x^{1/3}}{ln10} = 0$$

b) Caso $\infty - \infty$ proviene del lim (f(x) – g(x)) donde f(x) → ∞ y g(x) → ∞

lim (f(x) – g(x) = $\lim f(x)\, g(x) \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)$ y luego se aplica el caso a.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) \quad si \begin{cases} x \to 1^+ \,(\infty - \infty) \\ x \to 1^- \,(-\infty + \infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{2x} = \frac{3}{2}$$

c) Indeterminaciones de tipo exponencial : 0^0; 1^∞; ∞^0
Proviene de lim $[\, f(x)]^{g(x)}$ donde :
i) $f \to 0 \quad g \to 0$
ii) $f \to 1 \quad g \to \infty$
iii) $f \to \infty \quad g \to 0$

Planteamos $y = [\, f(x)\,]^{\,g(x)}$ y aplicamos ln m.a.m, debemos calcular lim y

$\ln y = g(x) * \ln(f(x))$ entonces $\lim \ln y = \lim [g(x) * \ln(f(x))]$ este ultimo si existe vale A donde:

A puede ser un real L o puede valer $\pm\infty$

Entonces lim (ln y) = A , por aplicación de propiedad de funciones continuas ln(lim y) = A , por lo tanto $\lim y = e^A$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^{1/x^2} \qquad 1^{\infty}$$

$$y = \left(\frac{sen(x)}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{sen(x)}{x}\right)^{1/x^2} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \frac{1}{x^2}\,ln\left(\frac{sen\,x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\,ln\left(\frac{sen\,x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{sen\,x}{x}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{sen\,x}\left(\frac{x\cos x - sen\,x}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - sen\,x}{2x^2 sen\,x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\,sen\,x - \cos x}{4x\,sen\,x + 2\,x^2\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sen\ x}{4\ sen\ x + 2\ x \cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{4\cos x + 2\cos x - 2x\ sen\ x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} (\ln y) = -\frac{1}{6}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = -\frac{1}{6} \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0} y = e^{-1/6}$$