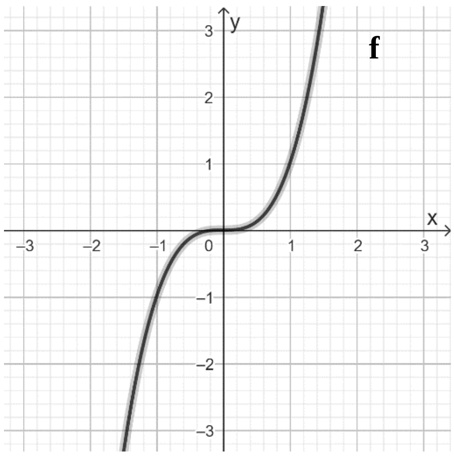
Respuestas TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

Función uno a uno. Función inversa. Límite finito.

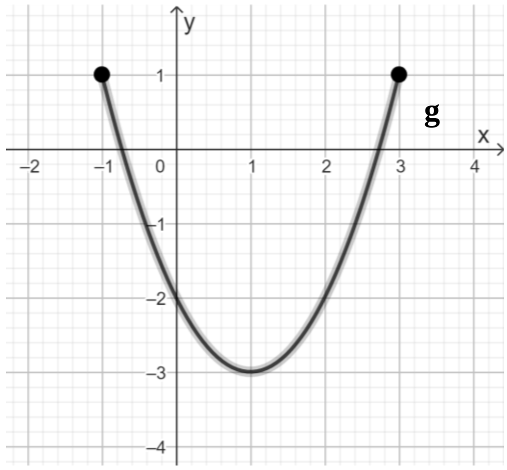
1- Dados los siguientes gráficos de funciones, indicar cuáles corresponden a funciones uno a uno. En los que no lo sean, restringir dominio y/o codominio para que correspondan a una función uno a uno.

a)



f es función uno a uno

b)



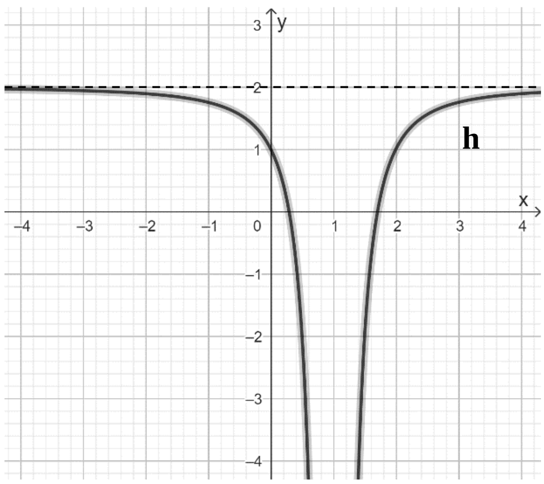
g no es función uno a uno

$Dom(g):[-1,1] \quad Cod(g):[-3,1]$

o

$Dom(g):[1,3] \quad Cod(g):[-3,1]$

c)



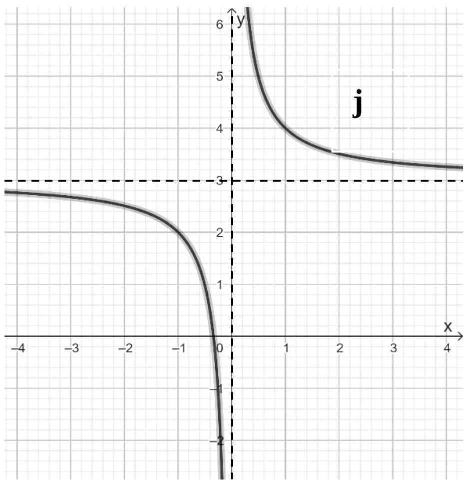
h no es función uno a uno

$Dom(h):(-\infty,1) \quad Cod(h):(-\infty,2)$

o

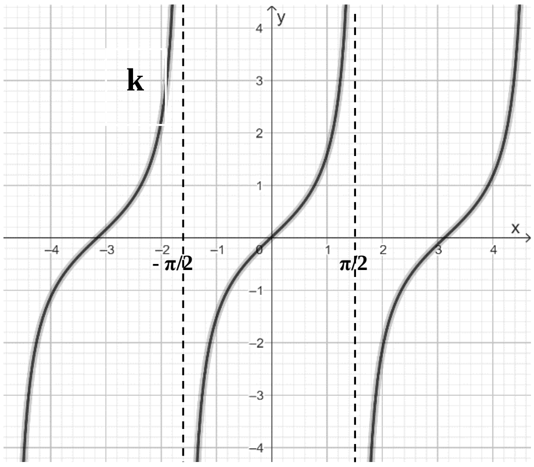
$Dom(h):(1,\infty) \quad Cod(h):(-\infty,2)$

d)



j si es función uno a uno

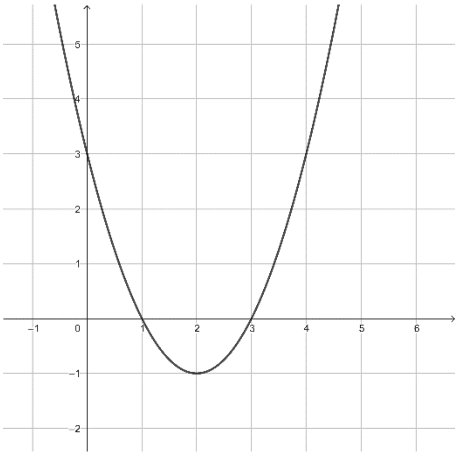
e)



k no es función uno a uno

$Dom(k):\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad Cod(k): R$

2- a) Dadas las siguientes fórmulas de funciones, graficarlas y definir sus funciones inversas. Cuando sea necesario, restringir el dominio y/o codominio para que correspondan a una función uno a uno.



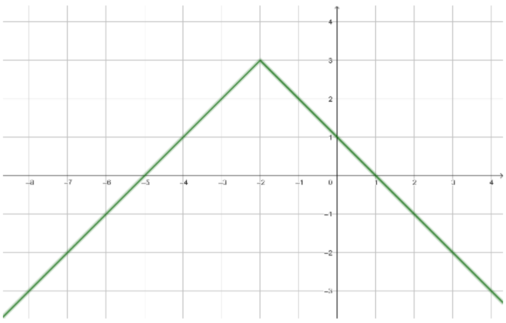
i) $y=(x-2)^2-1$

$$\begin{cases} f:[2,\infty)\to[-1,\infty)\,/\; f(x)=\left(x-2\right)^2-1 \\ f^{-1}:[-1,\infty)\to[2,\infty)\,/\; f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+2 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} f:(-\infty,2]\to[-1,\infty)\,/\; f(x)=\left(x-2\right)^2-1 \\ f^{-1}:[-1,\infty)\to(-\infty,2]\,/\; f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}+2 \end{cases}$$

ii) $y=-|t+2|+3$

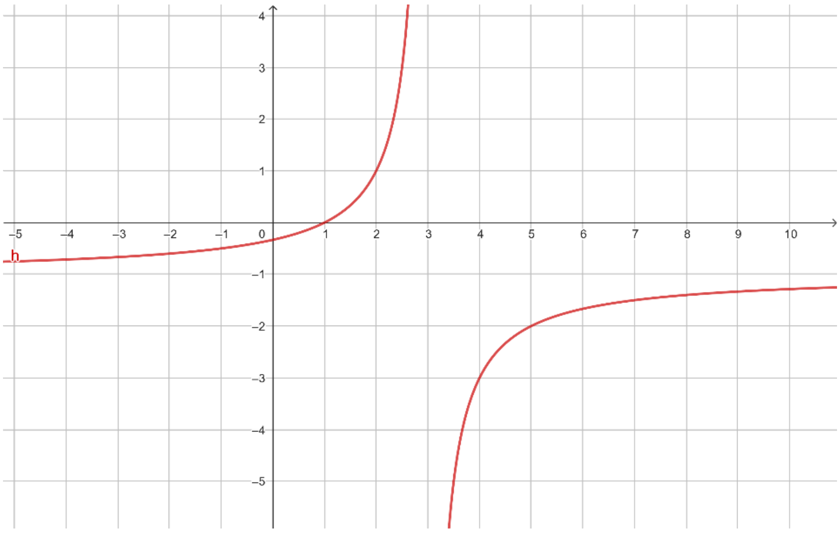


$$\begin{cases} f:[-2,\infty)\to(-\infty,3]\,/\; f(t)=-t+1 \\ f^{-1}:(-\infty,3]\to[-2,\infty)\,/\; f^{-1}(t)=-t+1 \end{cases}$$

o

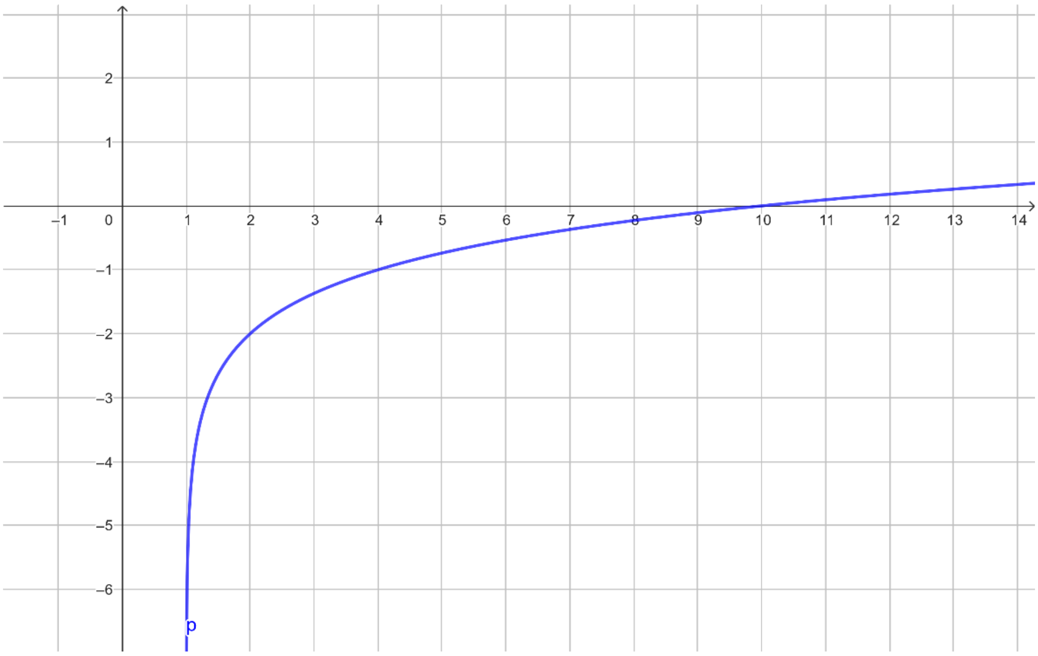
$$\begin{cases} f:(-\infty,-2]\to(-\infty,3]\,/\; f(t)=t+5 \\ f^{-1}:(-\infty,3]\to(-\infty,-2]\,/\; f^{-1}(t)=t-5 \end{cases}$$

iii) $y = \dfrac{1-x}{x-3}$



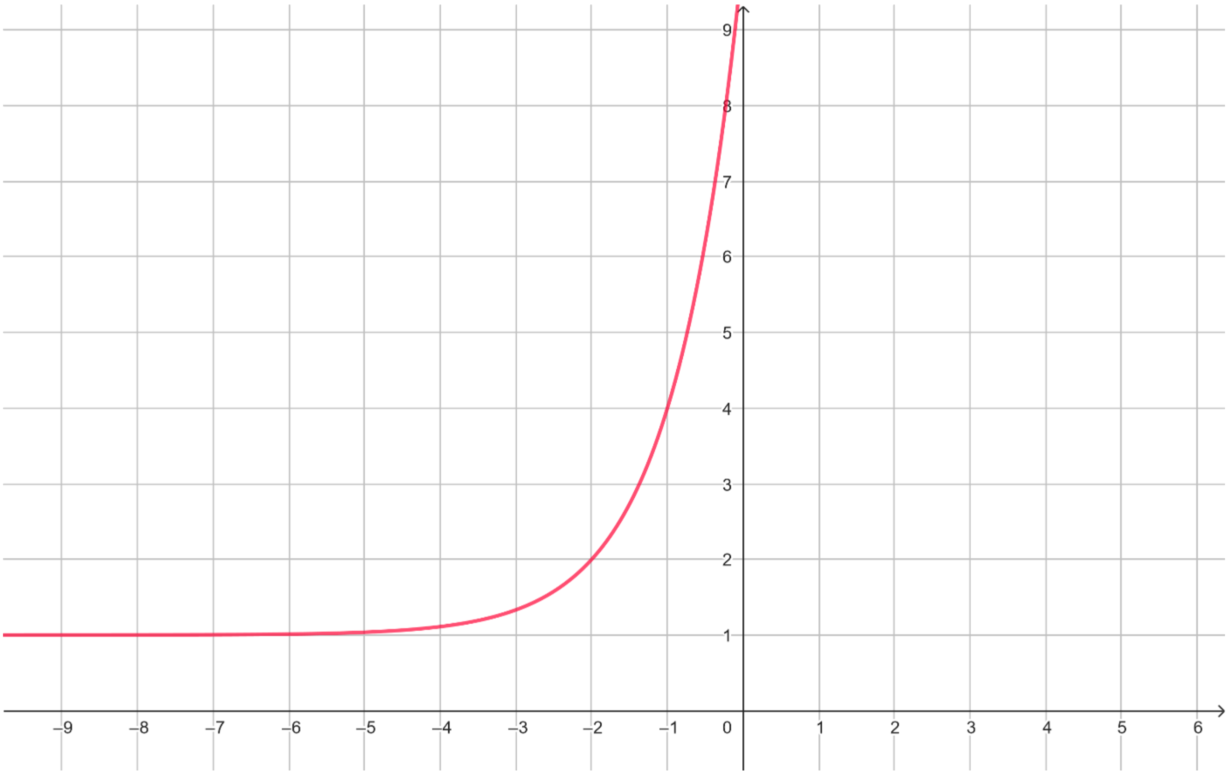
Si es una función uno a uno. $\begin{cases} f: R-\{3\} \to R-\{-1\} \,/\, f(x) = \dfrac{1-x}{x-3} \\ f^{-1}: R-\{-1\} \to R-\{3\} \,/\, f^{-1}(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1} \end{cases}$

iv) $y = \log_3(x-1) - 2$



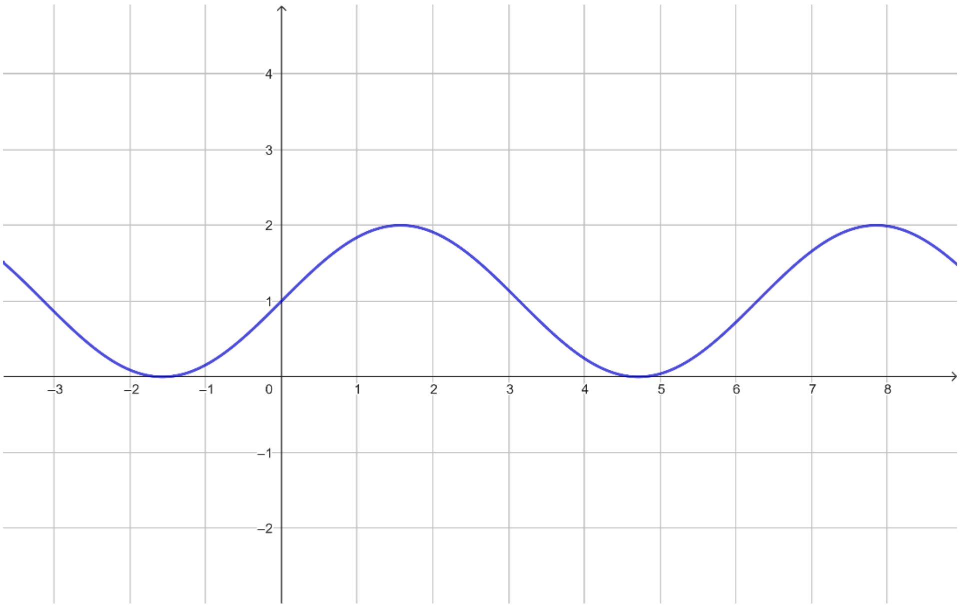
Si es una función uno a uno $\begin{cases} f: (1,\infty) \to R \,/\, f(x) = \log_3(x-1) - 2 \\ f^{-1}: R \to (1,\infty) \,/\, f^{-1}(x) = 3^{x+2} + 1 \end{cases}$

v) $y = 3^{x+2} + 1$



Es una función uno a uno $\begin{cases} f : R \to (1,\infty) / \ f(x) = 3^{x+2} + 1 \\ f^{-1} : (1,\infty) \to R / \ f^{-1}(x) = \log_3(x-1) - 2 \end{cases}$

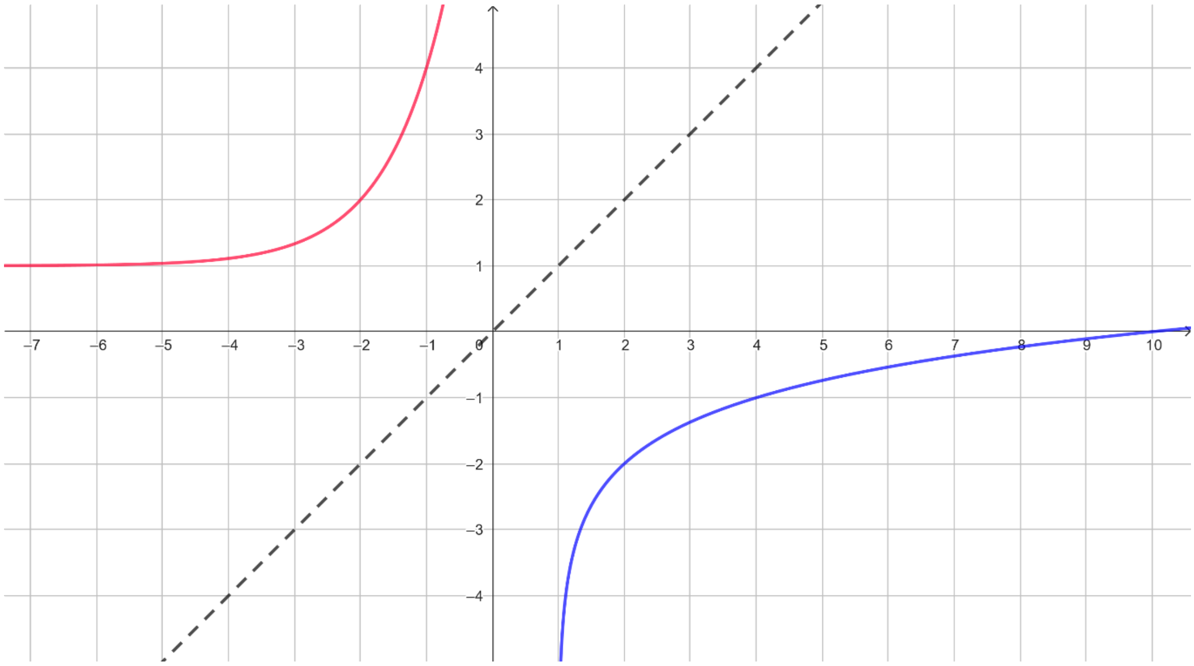
vi) $y = sen(t) + 1$



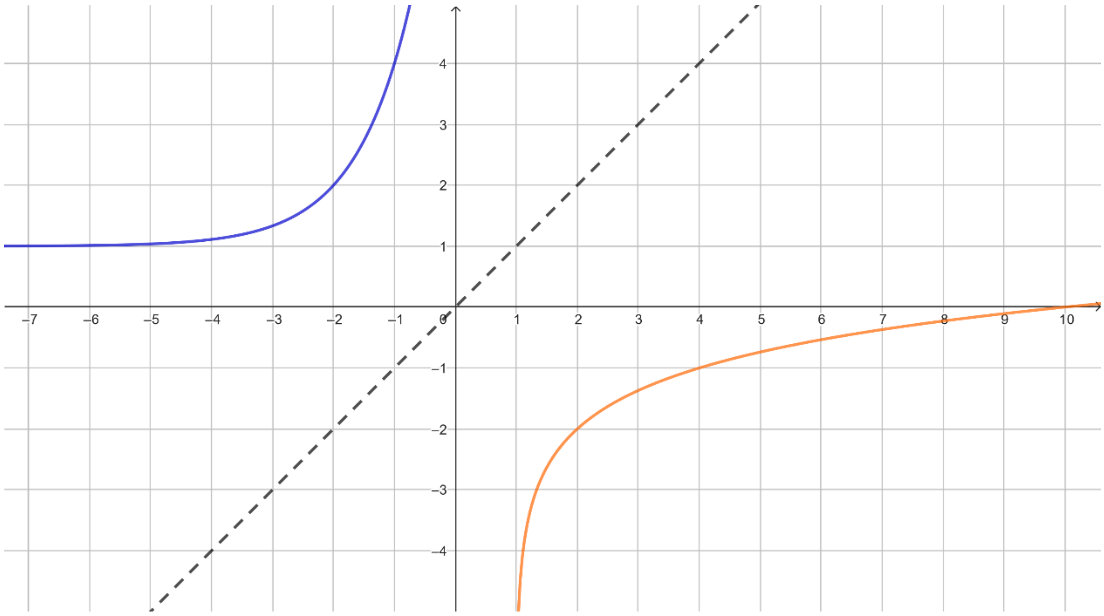
No es función uno a uno $\begin{cases} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,2] / \ f(t) = sent + 1 \\ f^{-1} : [0,2] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / \ f^{-1}(t) = arcsen(t-1) \end{cases}$

b) Trazar los gráficos inversos de iv) y v) e indicar si corresponden a una función. ¿Qué conclusión puede obtener a partir de lo obtenido?

iv) $y = \log_3(x-1) - 2$



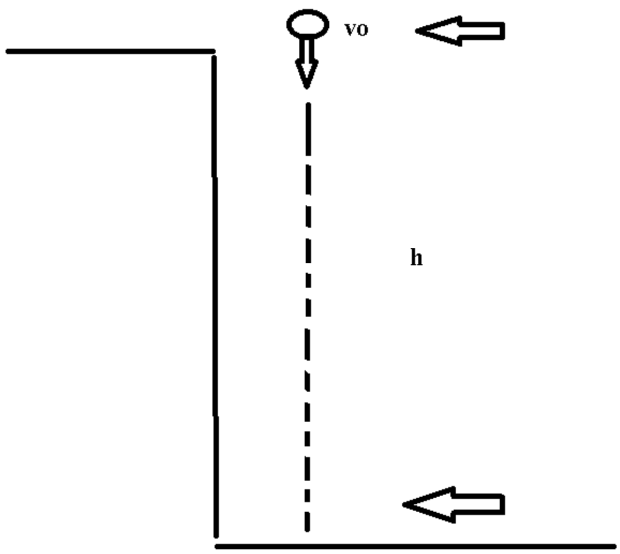
v) $y = 3^{x+2} + 1$



Son funciones inversas, simétricas a la función identidad.

3- a) Reconocer cuáles de las funciones que se indican a continuación admiten función inversa:

i) $f(t)$ es la distancia al suelo de una piedra lanzada hacia abajo, desde una altura h, después de t segundos.



Admite función inversa porque para distintos tiempos, distintas son las distancias al suelo.

ii) $g(u)$ es la altura de una persona normal a la edad u. No admite función inversa porque a distinta edad puede tener la misma altura.

iii) $V(r)$ es el volumen de una esfera de radio r. Admite función inversa: a distintos radios serán distintos sus volúmenes.

b) i) Si f es una función uno a uno tal que $f(4)=7$, ¿cuánto vale $f^{-1}(7)$?........ $\boxed{f^{-1}(7)=4}$

ii) Si $g\,/\,g(x)=2+x+e^{x-1}$, determinar $g^{-1}(4)$. $\boxed{g^{-1}(4)=1}$

iii) Si $F\,/\,F(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ completar: $F^{-1}(-2)=$ ....-3..................

$F^{-1}(0)=$ ....1...........

4- Escribir en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las opciones es correcta, escribir N. $\boxed{\text{B}}$

Si $f(x)=2k+3x$ y $f^{-1}(7)=\dfrac{1}{3}$, entonces el valor de k es:

A) -2 B) 3 C) 1/3 D) 6

5- a) Un auto de carreras acelera a una velocidad dada por la ecuación $v(t)=\dfrac{25}{4}t+54$, donde v está dada en pies/seg.

i) Hallar la velocidad del auto a los 10 segundos. 116,5 pies/seg.

ii) Hallar la función inversa, indicando dominio y codominio.

$$\begin{cases} f:[0,\infty)\to[54,v_p]\,/\,v(t)=\dfrac{25}{4}t+54 \\ f^{-1}:[54,v_p]\to[0,\infty)\,/\,t(v)=\dfrac{4}{25}(v-54) \end{cases}$$

iii) ¿Cuántos segundos tardará el auto en alcanzar una velocidad de 150 pies/seg? t=15,36seg

b) En cierto cultivo había inicialmente 350 bacterias que se triplicaron cada día.

i) Si ahora hay 9450 bacterias, ¿cuántos días han transcurrido desde que se inició el cultivo?

b0=350 b1=350.3 b2=350.3.3=350.3^2….. b(t)=350.3^t Si b=9450 entonces t=3 días.

ii) ¿Cuántas bacterias habrá luego de una semana?

t=7 días b(7)=765450 bacterias

iii) ¿En qué instante de tiempo el cultivo tendrá 85.050 bacterias?

t=5 días

6- Estimación numérica de límite.

Dada la función $f\,/\,y=f(x)=\dfrac{x^2-36}{x-6}$

a) Completar la siguiente tabla para valores próximos a 6. Trabajar con cuatro cifras decimales.

x	5,9	5,99	5,999	5,9999	6,0001	6,001	6,01	6,1
f(x)	11,9	11,99	11,999	11,9999	12,0001	12,001	12,01	12,1

b) ¿A qué valor se aproxima f(x) si x se acerca a 6? $\boxed{x\to 6\Rightarrow f(x)\to 12}$

c) Emplear notación de límite para describir la situación. $\boxed{\lim_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x-6}=12}$

d) Indicar el dominio de la función f. ¿Existe alguna dependencia entre esta situación y la existencia del límite para x tendiendo a 6?

$Dom(f): R-\{6\}$ $\nexists$ ninguna dependencia de la $\nexists f(6)$ y $\exists\lim_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x-6}$, son independientes.

7- Definición de límite finito.

Emplear la definición de límite finito para demostrar que:

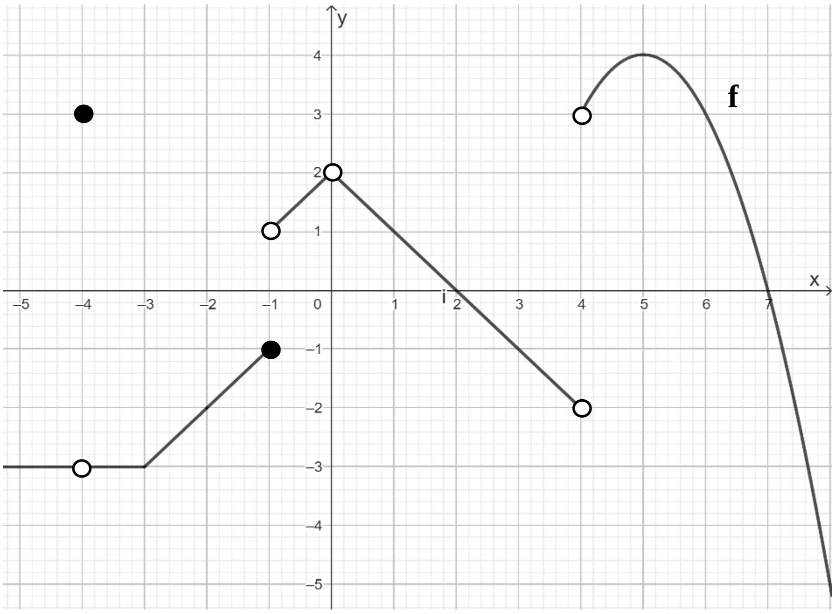
$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall \in>0:\exists\delta>0\,/\,\forall x:0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\in$$

a) $lím_{x\to 3}(2x+4)=10$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3}(2x+4)=10 \Leftrightarrow \forall \in > 0 : \exists \delta > 0 \,/\, \forall x : 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |2x+4-10| < \in \\ |2x-6| < \in \Rightarrow 2|x-3| < \in \Rightarrow |x-3| < \dfrac{\in}{2} \\ \delta = \dfrac{\in}{2} \to si \in = 0,002 \Rightarrow \delta = 0,001 \end{cases}$

b) $lím_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4 \Leftrightarrow \forall \in > 0 : \exists \delta > 0 \,/\, \forall x : 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right| < \in \\ \left|\dfrac{x^2-4-4x+8}{x-2}\right| < \in \Rightarrow \left|\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}\right| < \in \Rightarrow \left|\dfrac{(x-2)^2}{x-2}\right| < \in \Rightarrow |x-2| < \in \\ \delta = \in \to si \in = 0,002 \Rightarrow \delta = 0,002 \end{cases}$

En ambos casos hallar δ si $\varepsilon = 0,002$

8- Dado el gráfico de la función f, hallar, si existen:



$lím_{x\to -4} f(x) = -3$	$f(-4)=3$	$\nexists lím_{x\to -1} f(x)$	$f(-1)=-1$
$lím_{x\to 0} f(x) = 2$	$\nexists f(0)$	$lím_{x\to 2} f(x) = 0$	$f(2)=0$
$\nexists lím_{x\to 4} f(x)$	$\nexists f(4)$	$lím_{x\to 6} f(x) = 3$	$f(6)=3$

9- Trazar el gráfico de una función que cumpla con las siguientes condiciones:

$Dom(f) = R$; $f(0) = 0$; $f(1) = 0$; $f(2) = -3$; $lím_{x\to -1^-} f(x) = 2$; $lím_{x\to -1^+} f(x) = 1$; $\nexists\, lím_{x\to -1} f(x)$;

$lím_{x\to 2} f(x) = -3$; f decrece en $(-\infty,-1)$, en $(-1,0)$ y en $(1,+\infty)$. f crece en $(0,1)$.