CAPÍTULO

TRANSFORMACIONES LINEALES

5.1. Definición

Sean (V, +, K, **.**) y (W, +, K, **.**) dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo K. La función f: V → W es una transformación lineal si y solo si:

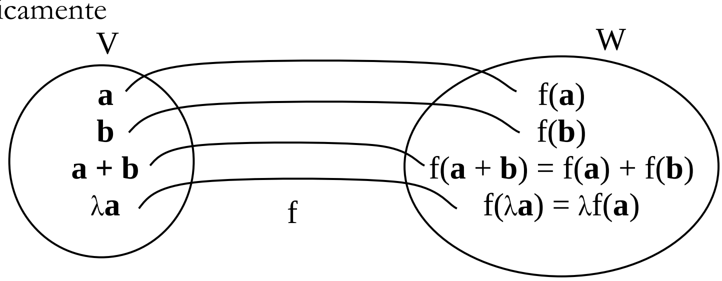
1) La imagen de la suma de dos vectores cualesquiera de V es igual a la suma de sus imágenes en W.

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \qquad \forall\ \vec{a},\vec{b} \in V$$

2) La imagen del producto de un escalar $\lambda \neq 0$ por todo vector de V es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector en W.

$$f(\lambda\vec{a}) = \lambda\, f(\vec{a}) \qquad \forall\ \vec{a} \in V; \quad \forall\lambda \in K$$

Gráficamente



La definición de Transformación Lineal también se puede expresar como sigue:

f: V→W es Transformación lineal $\Leftrightarrow$ $f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b})$

$$\forall\ \vec{a},\ \vec{b} \in V \quad y \quad \forall\alpha,\beta \in K$$

Ejemplo:

Sean ($\mathbf{R}^2$, +, $\mathbf{R}$, .) y ($\mathbf{R}^3$, +, $\mathbf{R}$, .) dos espacios vectoriales reales y sea la función: f: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ / f(a, b) = (b, -a, a + b). Demostrar que f es transformación lineal.

Sean:

$\vec{v}_1 = (a_1, b_1) \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow f(\vec{v}_1) = (b_1, -a_1, a_1+b_1)$

$\vec{v}_2 = (a_2, b_2) \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow f(\vec{v}_2) = (b_2, -a_2, a_2+b_2)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1+a_2, b_1+b_2)$

$$
\begin{aligned}
f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= ((b_1+b_2), -(a_1+a_2), (a_1+a_2)+(b_1+b_2)) \\
&= (b_1+b_2, -a_1-a_2, (a_1+b_1)+(a_2+b_2)) \\
&= (b_1, -a_1, a_1+b_1) + (b_2, -a_2, a_2+b_2) \\
&= f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \qquad \textbf{(I)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda\vec{v}_1 = (\lambda a_1, \lambda b_1) \Rightarrow f(\lambda\vec{v}_1) &= (\lambda b_1, -(\lambda a_1), \lambda a_1 + \lambda b_1) \\
&= (\lambda b_1, -\lambda a_1, \lambda(a_1 + b_1)) \\
&= \lambda(b_1, -a_1, a_1 + b_1) \\
&= \lambda\, f(\vec{v}_1) \qquad \textbf{(II)}
\end{aligned}
$$

De **(I)** y **(II)** resulta que f es una transformación lineal.

5.2. <u>Núcleo de una transformación lineal</u>

Definición: El núcleo de una transformación lineal es el conjunto de todos los elementos del primer espacio vectorial que tienen como imagen el cero (elemento neutro de la suma) del segundo espacio vectorial.

$f: V \rightarrow W$ Transformación lineal.

$$N_f = \{\vec{x} \in V \; / \; f(\vec{x}) = \mathbf{0}_W\}$$

En el ejemplo dado:

$$N_f = \{(a, b) \; / \; f(a, b) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow \quad (b, -a, a + b) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$N_f = \{(0, 0)\}$ El núcleo tiene una solo elemento que es el par ordenado (0,0).

5.3. <u>Imagen de una transformación lineal</u>

Definición: Se llama Imagen de una transformación lineal al conjunto formado por los elementos del segundo espacio vectorial que son imagen de los vectores del primer espacio.

$$I_f = \{\vec{y} \in W \; / \exists \; \vec{x} \in V \wedge f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

En el ejemplo dado: La imagen de f es el conjunto de las ternas de números reales cuya 3º componente es igual a la diferencia entre la primera y la segunda componentes.

$$I_f = \{(x, y, x - y)\}$$

5.4. <u>Propiedades de las transformaciones lineales</u>

1) La imagen del cero del primer espacio es igual al cero del segundo espacio.

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

Demostración:

Sea $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} + \mathbf{0}_V = \vec{x}$

$$f(\vec{x} + \mathbf{0}_V) = f(\vec{x})$$

$$f(\vec{x}) + f(\mathbf{0}_V) = f(\vec{x})$$ Porque f es Transformación lineal.

$$f(\vec{x}) + f(\mathbf{0}_V) = f(\vec{x}) + \mathbf{0}_w$$ $\mathbf{0}_W$ elemento neutro de + en W.

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_w$$

2) La imagen del opuesto de un elemento de V es igual al opuesto de su imagen.

$$f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

Demostración:

$$f(-\vec{x}) = f((-1)\ \vec{x})$$
$$= (-1)\ f(\vec{x})$$
$$f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

3) El núcleo de una transformación lineal f: V→ W es subespacio vectorial del primer espacio.

N_f es subespacio vectorial de V

Demostración:

$\vec{a} \in N_f \Rightarrow f(\vec{a}) = \mathbf{0}_W$

$\vec{b} \in N_f \Rightarrow f(\vec{b}) = \mathbf{0}_W$

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$ Porque f es transformación lineal.
$$= \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W$$
$$= \mathbf{0}_W$$

$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \in N_f$ La suma de dos elementos de N_f es otro elemento de N_f.

$$f(\lambda\vec{a}) = \lambda\ f(\vec{a})$$ Porque f es transformación lineal.
$$= \lambda\ \mathbf{0}_W$$
$$= \mathbf{0}_W$$

El producto de un escalar por un elemento de N_f es otro elemento de N_f.

$\Rightarrow \lambda \mathbf{a} \in N_f$

$\Rightarrow N_f$ es subespacio vectorial de V.

4) La imagen de una transformación lineal es subespacio vectorial del segundo espacio.

I_f es subespacio vectorial de W.

Demostración:

a) $\vec{w}_1 \in I_f \Rightarrow \exists\, \vec{v}_1 \in V \,/\, f(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$

$\vec{w}_2 \in I_f \Rightarrow \exists\, \vec{v}_2 \in V \,/\, f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$

$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

$= f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ Porque f es transformación lineal.

Como $\vec{v}_1 \in V$ y $\vec{v}_2 \in V$ resulta que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$.

$\Rightarrow \exists\, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in V \,/\, f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$

$\Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in I_f$ **(I)**

b) $\lambda \vec{w}_1 = \lambda\, f(\vec{v}_1)$

$= f(\lambda \vec{v}_1)$ Porque f es transformación lineal.

$\vec{v}_1 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 \in V$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \vec{v}_1 \in V \,/\, f(\lambda \vec{v}_1) = \lambda \vec{w}_1 \Rightarrow \lambda \vec{w}_1 \in I_f$ **(II)**

$\Rightarrow$ De **(I)** y **(II):** I_f es subespacio vectorial de W.

5.5. <u>Dimensión del Núcleo y de la Imagen</u>

Definición: Si (V, +, K, **.**) es un espacio vectorial de dimensión finita y f:V→ W es una transformación lineal, entonces la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen es igual a la dimensión del primer espacio.

$$\dim (N_f) + \dim (I_f) = \dim (V)$$

5.6. Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Sean (V, +, K, **.**) y (W , +, K, **.**) dos espacios vectoriales y [B] una base de V ($[B]=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\cdots,\vec{v}_n\}$). Si $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3,\ldots,\vec{w}_n$ son n vectores cualesquiera de W, entonces existe una única transformación lineal f: V→ W tal que f($\vec{v}_i$) = $\vec{w}_i$, ∀ i =1, 2, 3,..., n.

Demostración:
Todo vector $\vec{x}$ de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la base [B] siendo los escalares α_i únicos.

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i$$

Se define ahora una función f: V→ W tal que la imagen de cualquier vector $\vec{x}$ de V esté dada por:

$$f(\vec{x})=\sum_{l=1}^{n}\alpha_i\vec{w}_i$$

Es decir que la imagen por f de una vector $\vec{x}$ de V es la combinación lineal de los n vectores $\vec{w}_i$ de W usando los mismos coeficientes que permiten expresar a $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores de la base [B].
En primer lugar, se demostrará que f es una transformación lineal.

Sean $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i$ y $f(\vec{x})=\sum_{l=1}^{n}\alpha_i\vec{w}_i$

$$\vec{y} \in \mathrm{V} \Rightarrow \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i \quad \text{y} \quad f(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{w}_i$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{v}_i$$

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{w}_i \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \qquad \textbf{(I)} \end{aligned}$$

$$\lambda \vec{x} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i \vec{v}_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\lambda \vec{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i \vec{w}_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{w}_i \\ &= \lambda f(\vec{x}) \qquad \textbf{(II)} \end{aligned}$$

De **(I)** y **(II)** queda demostrado que f es una transformación lineal.

En segundo lugar se debe demostrar que ∀i es: $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$

En efecto, un vector $\vec{v}_i$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores de [B] como sigue:

$$\vec{v}_i = 0.\vec{v}_1 + 0.\vec{v}_2 + \ldots + 1.\vec{v}_i + \ldots + 0.\vec{v}_n$$

$$\Rightarrow f(\vec{v}_i) = 0.\vec{w}_1 + 0.\vec{w}_2 + ... + 1.\vec{w}_i + ... + 0.\vec{w}_n$$

$$\Rightarrow f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$$ Que es lo que se quería demostrar.

En tercer lugar se demostrará que, bajo la condición enunciada anteriormente, la transformación lineal f es única.
Se supone que existe otra transformación lineal g: V→W / $g(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$

Entonces: $$g(\vec{x}) = g(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(\vec{v}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{w}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{v}_i)$$

$$= f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i)$$

$$= f(\vec{x})$$

En consecuencia, g = f y por lo tanto la transformación lineal es única.

5.7. <u>Matriz asociada a una transformación lineal</u>

Sean (V, +, K, **.**) y (W, +, K, **.**) dos espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente.
Sea f: V → W una transformación lineal y sean además:

[B_1] = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n\}$ una base de V y

[B_2] = $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, ..., \vec{w}_m\}$ una base de W.

Todo vector $\vec{x}$ de V puede escribirse como combinación lineal de los vectores de la base [B$_1$]

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{v}_j$$

Se nombran los subíndices con la letra j por conveniencia.

Los α_j son las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base [B$_1$] y también se pueden escribir como una matriz columna:

$$\vec{x}_{[B_1]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Sea $\vec{y}$ la imagen de $\vec{x}$ por la transformación lineal f: $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Pero $\vec{y}$ es un vector de W entonces puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la base [B$_2$] y esa combinación es única.

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{w}_i$$

Por el Teorema Fundamental de las transformaciones lineales, f queda caracterizada unívocamente por los valores que toma sobre cualquier base de V. O sea que es suficiente obtener las imágenes, por f, de cada uno de los vectores de la base [B$_1$]. Para cada $\vec{v}_i$ su imagen será $f(\vec{v}_i)$. Pero $f(\vec{v}_i)$ es un vector de W, entonces puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{w}_i$ de la base [B$_2$].

$$f(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{w}_i \qquad \forall \text{ j} = 1,2,3,\ldots, \text{n}$$

Cada escalar lleva dos subíndices: el subíndice i está referido a la base $[B_2] = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, ..., \vec{w}_m\}$ y el subíndice j se refiere a un vector de la base $[B_1] = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n\}$

En consecuencia, se tiene:

$$f(\vec{v}_1) = \alpha_{11}\vec{w}_1 + \alpha_{21}\vec{w}_2 + \alpha_{31}\vec{w}_3 + \cdots + \alpha_{m1}\vec{w}_m$$

$$f(\vec{v}_2) = \alpha_{12}\vec{w}_1 + \varepsilon_{22}\vec{w}_2 + \alpha_{32}\vec{w}_3 + \cdots + \alpha_{m2}\vec{w}_m$$

$$f(\vec{v}_3) = \alpha_{13}\vec{w}_1 + \alpha_{23}\vec{w}_2 + \alpha_{33}\vec{w}_3 + \cdots + \alpha_{m3}\vec{w}_m$$

....

....

$$f(\vec{v}_n) = \alpha_{1n}\vec{w}_1 + \alpha_{2n}\vec{w}_2 + \alpha_{3n}\vec{w}_3 + \cdots + \alpha_{mn}\vec{w}_m$$

Tomando los coeficientes α_{ij} se puede construir una matriz A que recibe el nombre de Matriz Asociada a la Transformación Lineal f respecto de las bases $[B_1]$ y $[B_2]$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es de orden m×n o sea que tiene m filas (m = dimW) y n columnas (n = dimV).

Entonces, para hallar la matriz asociada a una transformación lineal f, respecto de una base en cada espacio, se determinan las imágenes por f de cada uno de los vectores de la base $[B_1]$ y luego se hallan sus coordenadas en la base $[B_2]$.

Cada columna de A corresponde a la imagen de cada vector de $[B_1]$ expresada en la base $[B_2]$.

5.7.1. Teorema

Si A es la matriz asociada a una transformación lineal f respecto de las bases $[B_1]$ y $[B_2]$, entonces la imagen de un elemento $\vec{x}$ de V en la base $[B_2]$ es igual al producto de la matriz A por el vector columna formado por las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $[B_1]$.

$$\left(f(\vec{x})\right)_{[B_2]} = A.\vec{x}_{[B_1]}$$

Ejercicios resueltos

1º) Verificar que la siguiente función es una transformación lineal. Hallar el núcleo, la imagen y una base de cada uno de ellos.

$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que $\quad f(x, y) = 2x - 5y$

Sean: $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \to f(a, b) = 2a-5b$

$(c, d) \in \mathbf{R}^2 \to f(c, d) = 2c-5d$

$$\begin{aligned}(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) \in \mathbf{R}^2 \to f(a+c, b+d) &= 2(a+c)-5(b+d)\\ &= 2a+2c-5b-5d\\ &= (2a-5b)+(2c-5d)\\ &= f(a, b)+ f(c, d) \quad \textbf{(I)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda(a, b)=(\lambda a, \lambda b) \in \mathbf{R}^2 \to f(\lambda a, \lambda b) &= 2\lambda a-5\lambda b\\ &= \lambda(2a-5b)\\ &= \lambda\, f(a, b) \quad \textbf{(II)}\end{aligned}$$

De **(I)** y **(II),** queda demostrado que f es una transformación lineal.

Determinación del Núcleo de f.

$(a, b) \in N_f \to f(a, b) = 0 \to 2a-5b= 0 \to a = \frac{5}{2}b$

$N_f = \left\{ (a,b) \in R^2 \,/\, a = \frac{5}{2} b \right\}$ ó también: $N_f = \left\{ \left(\frac{5}{2} b, b \right) \right\} \Rightarrow \text{Dim } (N_f) = 1$

Entonces, una base del núcleo puede ser: $\{(5, 2)\}$.

Determinación de la Imagen de f.

I_f = R ya que para todo número real r se pueden encontrar dos números reales x e y tales que r = 2x−5y. Dim(I_f)= 1

Una base de la imagen de la transformación lineal puede ser cualquier número real, por ejemplo: {-1}.

2º) Hallar la expresión de la transformación lineal g, si:

g: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, g (-2, 4) = (2, 0, 4) y g (1, 1) = (2, 3, 1).

Se puede verificar fácilmente que (-2, 4) y (1, 1) son dos vectores linealmente independientes. Entonces constituyen una base de R^2 que es un espacio vectorial de dimensión 2. Por lo tanto todo vector de R^2 puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la base:

$$(a,b) = \alpha(-2,4) + \beta(1,1) \quad \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = a \\ 4\alpha + \beta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{b-a}{6} \\ \beta = \dfrac{2a+b}{3} \end{array}$$

$$(a,b) = \frac{b-a}{6}(-2,4) + \frac{2a+b}{3}(1,1)$$

Por el teorema fundamental de las transformaciones lineales:

$$g(a,b) = \frac{b-a}{6} g(-2,4) + \frac{2a+b}{3} g(1,1)$$

$$g(a,b) = \frac{b-a}{6}(2,0,4) + \frac{2a+b}{3}(2,3,1)$$

$$g(a,b) = \left(\frac{b-a}{3}, 0, \frac{2b-2a}{3} \right) + \left(\frac{4a+2b}{3}, 2a+b, \frac{2a+b}{3} \right)$$

$$g(a,b)=\left(\frac{b-a+4a+2b}{3},2a+b,\frac{2b-2a+2a+b}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad g(a,b)=(a+b\,,2a+b\,,b)$$

3º) Encontrar la matriz A asociada a la transformación lineal f respecto de las bases indicadas.

f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que f(x, y, z) = (x −2z, y+z) en las bases B_1 ={(1, 1, 1), (1, 1, 0), (3, 0, 0)} y B_2 ={(2, 0), (0, 2)} . Verificar que para todo $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$: $f(\vec{x})_{[B_2]} = A \cdot \vec{x}_{[B_1]}$

En primer lugar, se hallan los transformados de cada uno de los vectores de la base B_1 y luego se calculan sus coordenadas en la base B_2.

f(1, 1, 1)= (-1, 2)

$$(-1, 2) = \alpha(2, 0) + \beta(0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = -1 \\ 2\beta = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \wedge \beta = 1$$

$$\Rightarrow f(1, 1, 1) = (-1,2) = \left(-\frac{1}{2};1\right)_{[B_2]} \qquad \textbf{(I)}$$

f(1, 1, 0)= (1, 1)

$$(1, 1) = \alpha(2, 0) + \beta(0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\beta = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \wedge \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(1, 1, 0) = (1,1) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_{[B_2]} \qquad \textbf{(II)}$$

f (3, 0, 0) = (3, 0)

$$(3, 0) = \alpha(2, 0) + \beta(0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 3 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \wedge \beta = 0$$

$$\Rightarrow \text{ f } (3, 0, 0) = (3, 0) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)_{[B_2]} \qquad \textbf{(III)}$$

Tomando los vectores hallados en (I), (II) y (III) como vectores columna, se construye la matriz A, asociada a la transformación lineal f, respecto de las bases dadas.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Para la verificación solicitada en la segunda parte del problema, se calcularán por separado $\text{f}(\vec{x})_{[B_2]}$ y $\text{A}.\vec{x}_{[B_1]}$.

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \Rightarrow \text{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_2 + x_3)$

$$(x_1 - 2x_3, x_2 + x_3) = \alpha(2;0) + \beta(0;2) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = x_1 - 2x_3 \\ 2\beta = x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \dfrac{x_1 - 2x_3}{2} \\ \beta = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{f}(\vec{x})_{[B_2]} = \left(\frac{x_1 - 2x_3}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2}\right) \qquad \textbf{(*)}$$

Se expresa ahora el vector $\vec{x}$ en la base B_1:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(3,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = x_1 \\ \alpha + \beta = x_2 \\ \alpha = x_3 \end{cases}$$

De donde resultan: $\alpha = x_3$, $\beta = x_2 - x_3$ y $\gamma = \dfrac{x_1 - x_2}{3}$

Entonces: $\vec{x}_{[B_1]} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 - x_3 \\ \dfrac{x_1 - x_2}{3} \end{pmatrix}$

$$A.\vec{x}_{[B_1]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 - x_3 \\ \dfrac{x_1 - x_2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - 2x_3}{2} \\ \dfrac{x_2 + x_3}{2} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(**)}$$

De **(*)** y **(**),** se verifica que para todo $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$: $f(\vec{x})_{[B_2]} = A.\vec{x}_{[B_1]}$

CAPÍTULO 6

DIAGONALIZACION DE MATRICES

6.1. Introducción

Si f: V→V es una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo, un vector $\vec{u} \neq \theta$ es transformado, en general, por f en un vector que está en una dirección diferente. Sin embargo puede ocurrir que f($\vec{u}$) sea simplemente un múltiplo de $\vec{u}$. Es decir que:

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \qquad \text{donde } \lambda \text{ es un escalar}$$

Esta cuestión y la de la existencia de una base respecto de la cual la matriz asociada a la transformación lineal sea una matriz diagonal, están íntimamente ligadas entre sí a tal punto que un resultado que afecta a una de ellas afecta también a la otra.

De su estudio se derivan importantes propiedades que amplían el conocimiento sobre el álgebra y que son de aplicación en áreas que no son propias de esta materia como, por ejemplo, la teoría de optimización que se sirve de los autovalores de una matriz para obtener condiciones suficientes de óptimo de una función.

Antes de entrar de lleno en el desarrollo del tema, se debe dejar en claro que, puesto que se trabajará con transformaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo, entonces en todos los casos se adoptará la misma base para el espacio origen y para el espacio imagen.

6.2. Valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores)

Definición: Sea f: V $\rightarrow$ V una transformación lineal. Un número real λ es un "autovalor" de la transformación si para algún vector $\vec{u} \in$V, no nulo, se verifica que:

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

El vector $\vec{u}$ se denomina "autovector" de la transformación, relativo al autovalor λ.

Ejemplos

1) Dada la transformación lineal

$$f : R^2 \rightarrow R^2 \,/\, f(u_1, u_2) = (2u_1 - u_2\ , -u_1 + 2u_2)$$

se puede comprobar que λ_1=3 y λ_2= 1 son dos autovalores. Para ello se calculan: f(1, -1) y f(1, 1).

$$\begin{aligned} f(1, -1) &= (2 .1-(-1), -1+2(-1)) \\ &= (2+1, -1-2) \\ &= (3, -3) \\ &= 3(1, -1) \end{aligned}$$

Entonces 3 es autovalor de la transformación lineal dada.

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= (2 .1 – 1, -1 + 2. 1) \\ &= (2-1, -1+2) \\ &= (1, 1) \\ &= 1(1, 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, también 1 es autovalor de la transformación lineal dada

2) Calculando f(3, 1) y f(0, -1), comprobar que

$$f: R^2 \rightarrow R^2 \,/\, f(u_1, u_2) = (5u_1\ , u_1 + 2u_2)$$

tiene dos autovalores diferentes.

$$f(3,1) = (15, 5)$$

$= 5(3, 1)$

Por lo tanto, 5 es un autovalor de la transformación lineal dada y el vector (3, 1) es un autovector de dicha transformación relativo al autovalor 5.

$$f(0, -1) = (0, -2)$$
$$= 2(0, -1)$$

Entonces 2 es un autovalor de la transformación lineal dada y el vector (0,-1) es un autovector de dicha transformación relativo al autovalor 2.

¿Porqué en la definición de autovalor se hace la salvedad de que $\vec{u} \neq \theta$? Evidentemente el vector $\vec{u}$ no puede ser el vector nulo porque en ese caso la igualdad $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ se verificaría para cualquier valor de λ.

En efecto: $f(\theta) = \lambda\theta$ para todo λ

Otra consecuencia importante que se deriva de la definición de autovalor es la que se demuestra en el siguiente:

Teorema: Dos autovalores diferentes no pueden tener asociado el mismo autovector.

Demostración:

Sean λ_1 y λ_2 dos autovalores diferentes de una transformación lineal. Supongamos que existe un vector $\vec{u}$ relativo a ambos autovalores

$$f(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u} \qquad \text{y} \qquad f(\vec{u}) = \lambda_2\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1\vec{u} = \lambda_2\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\, \vec{u} = \theta$$

Puesto que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ resulta $\vec{u} = \theta$ que contradice la definición y el teorema queda demostrado.

En consecuencia :

Dos autovalores diferentes no pueden tener asociado el mismo autovector.

6.3. Subespacio asociado a un autovalor

Definición: Sea λ un autovalor de una transformación lineal $f : V \to V$, se llama $L(\lambda)$ al conjunto de todos los vectores asociados al autovalor λ.

$$L(\lambda) = \{ \vec{u} \in V /\ f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \}$$

Teorema: $L(\lambda)$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración

Sea $\vec{u} \in L(\lambda) \Rightarrow f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

Sea $\vec{v} \in L(\lambda) \Rightarrow f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ porque f es Transformación lineal

$= \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$

$= \lambda(\vec{u} + \vec{v}) \qquad \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \in L(\lambda)$

$f(k\vec{u}) = k\, f(\vec{u})$ porque f es Transformación lineal

$= k\,\lambda \vec{u}$

$= \lambda(k\vec{u}) \qquad \Rightarrow k\vec{u} \in L(\lambda)$

$\Rightarrow \quad L(\lambda)$ es subespacio vectorial de V

Dicho subespacio se denomina **Subespacio asociado al autovalor λ.**

Ejemplo:

Escribir los subespacios asociados a cada uno de los autovalores hallados en el ejemplo 2.

$L(5) = \{ \vec{u} \in R^2/\ f(\vec{u}) = 5\vec{u} \} \Rightarrow (5u_1 , u_1 + 2u_2) = 5(u_1, u_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5u_1 = 5u_1 \\ u_1 + 2u_2 = 5u_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad u_1 = 3\, u_2$

$\Rightarrow \quad L(5) = \{(u_1, u_2) \in R^2 /\ u_1 = 3u_2\}$

$L(2) = \{\vec{u} \in R^2 /\ f(\vec{u}) = 2\vec{u}\} \Rightarrow \ (5u_1, u_1 + 2u_2) = 2(u_1, u_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5u_1 = 2u_1 \\ u_1 + 2u_2 = 2u_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 3u_1 = 0$

$\Rightarrow \quad u_1 = 0$

$\Rightarrow \quad L(2) = \{(u_1, u_2) \in R^2 /\ u_1 = 0\}$

Teorema: Si $\lambda = 0$ es un autovalor de una transformación lineal f, entonces el subespacio asociado al autovalor 0 es igual al núcleo de la transformación f.

$$\mathbf{L(0) = N(f)}$$

Demostración: $L(0) = \{\vec{u} \in V /\ f(\vec{u}) = 0\vec{u}\}$

$L(0) = \{\vec{u} \in V /\ f(\vec{u}) = \theta\}$

$L(0) = N_f$

6.4. <u>Independencia lineal de autovectores relativos a autovalores diferentes.</u>

Sean los subespacios hallados en el ejemplo anterior.

$L(5) = \{(u_1, u_2) \in R^2 /\ u_1 = 3\, u_2\}$ y $L(2) = \{(u_1, u_2) \in R^2 /\ u_1 = 0\}$

Si $\vec{u} \in L(5)$ entonces existe un número real $a_0 \neq 0$ tal que: $\vec{u} = (3a_0, a_0)$

Si $\vec{v} \in L(2)$ entonces existe un número real $b_0 \neq 0$ tal que : $\vec{v} = (0, b_0)$

Se plantea ahora la siguiente igualdad: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \theta$ y se calculan α y β.

$$\alpha(3a_0, a_0) + \beta(0, b_0) = \theta$$

$$\begin{cases} 3\alpha a_0 = 0 \\ \alpha a_0 + \beta b_0 = 0 \end{cases}$$

De donde resulta: $\alpha = 0$ y $\beta = 0$
En consecuencia :

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes

Se ha verificado, entonces, que **autovectores relativos a autovalores diferentes son linealmente independientes.**

Generalizando este resultado, se enuncia el siguiente teorema:

Teorema : Sea f : V → V una transformación lineal y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_p$, p vectores correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Si los autovalores son diferentes entre sí, entonces los p autovectores son linealmente independientes

Demostración
Se demuestra por medio del Principio de Inducción Completa

Si p =1 la proposición es verdadera.

Se supone que es verdadera para p = h y se comprobará que es verdadera para p = h+1

Sea una combinación lineal cualquiera de los autovectores

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_{h+1}$ igual al vector nulo θ :

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \vec{u}_i = \theta \qquad \textbf{(I)}$$

Entonces :
$$f\left(\sum_{i=1}^{h+1} a_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_{i1} \vec{u}_1 = \theta \quad \textbf{(II)}$$

Si a la igualdad (I) se la multiplica por λ_{h+1} y se la resta de la igualdad (II), se obtiene :

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_{h+1} \vec{u}_i - \sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_i \vec{u}_i = \theta$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i (\lambda_{h+1} - \lambda_i) \vec{u}_i = \theta$$

$$a_1(\lambda_{h+1} - \lambda_1)\vec{u}_1 + \ldots + a_h(\pi_{h+1} - \lambda_h)\vec{u}_h + a_{h+1}(\lambda_{h+1} - \lambda_{h+1})\vec{u}_{h+1} = \theta$$

Pero $a_1(\lambda_{h+1} - \lambda_1)\vec{u}_1 + a_2(\lambda_{h+1} - \lambda_2)\vec{u}_2 + \ldots + a_h(\pi_{h+1} - \lambda_h)\vec{u}_h = \theta$

porque se ha supuesto que h vectores son linealmente independientes.

Como el factor $(\lambda_{h+1} - \lambda_i) \neq 0$ para i = 1, 2, ..., h resulta entonces que $a_i = 0$ para i = 1, 2, ... , h.

En consecuencia, volviendo a la igualdad (I):

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \vec{u}_i = \theta$$

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \ldots + a_h \vec{u}_h + a_{h+1} \vec{u}_{h+1} = \theta$$

$$a_{h+1} \vec{u}_{h+1} = \theta$$

$$\Rightarrow a_{h+1} = 0$$

y por lo tanto, h+1 vectores son linealmente independientes, con lo que el teorema queda demostrado.

Del teorema enunciado anteriormente se deriva el siguiente corolario, cuya demostración se basa en los teoremas estudiados en espacios vectoriales :

Si $f : V \to V$ es una transformación lineal en un espacio de dimensión n, entonces f tiene como máximo n autovalores diferentes.

6.5. <u>Transformaciones lineales diagonalizables</u>

Dada la transformación lineal $f : R^3 \to R^3$ definida por :

$f(x_1, x_2, x_3) = (15x_1 + 51x_2 - 21x_3, 3x_1 + 15x_2 - 3x_3, 48x_2 - 6x_3)$ hallar la matriz asociada a la transformación respecto de :

a) la base canónica

$f(1, 0, 0) = (15, 3, 0)$
$f(0, 1, 0) = (51, 15, 48)$
$f(0, 0, 1) = (-21, -3, -6)$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 15 & 51 & -21 \\ 3 & 15 & -3 \\ 0 & 48 & -6 \end{pmatrix}$$

b) la base $[B] = \{(5, 3, 8), (3, 1, 2), (1, 0, 1)\}$

$f(5, 3, 8) = (60, 36, 96)$

$(60, 36, 96) = \alpha(5, 3, 8) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(1, 0, 1)$

$\alpha = 12 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = 0$

$\Rightarrow \quad (f(5, 3, 8))_{[B]} = (12, 0, 0)$

$f(3, 1, 2) = (54, 18, 36)$

$(54, 18, 36) = \alpha(5, 3, 8) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(1, 0, 1)$

$\alpha = 0 \qquad \beta = 18 \qquad \gamma = 0$

$\Rightarrow \quad (f(3, 1, 2))_{[B]} = (0, 18, 0)$

$f(1, 0, 1) = (-6, 0, -6)$

$(-6, 0, -6) = \alpha(5, 3, 8) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(1, 0, 1)$

$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = -6$

$\Rightarrow \quad (f(1, 0, 1))_{[B]} = (0, 0, -6)$

$\Rightarrow$ La matriz asociada a la transformación lineal respecto de la base [B] es

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida en este caso es una matriz diagonal.

En general :

Definición: Una transformación lineal f: V→V es diagonalizable, si para alguna base en V, la matriz asociada a la transformación f, respecto de esa base, es una matriz diagonal.

Al construir la matriz de la transformación f respecto de la base [B] se obtuvo :

$f(5, 3, 8) = (60, 36, 96) = (12, 0, 0)_{[B]}$

$f(3, 1, 2) = (54, 18, 36) = (0, 18, 0)_{[B]}$

$f(1, 0, 1) = (-6, 0, -6) = (0, 0, -6)_{[B]}$

Pero también se observa que :

$f(5, 3, 8) = (60, 36, 96) = 12(5, 3, 8)$ Por lo que 12 es un autovalor de la transformación f y (5, 3, 8) un autovector relativo a ese autovalor.

$f(3, 1, 2) = (54, 18, 36) = 18(3, 1, 2)$ Por lo que 18 es un autovalor de la transformación f y (3, 1, 2) un autovector relativo a ese autovalor.

$f(1, 0, 1) = (-6, 0, -6) = -6(1, 0, 1)$ Por lo que -6 es un autovalor de la transformación f y (1, 0, 1) un autovector relativo a ese autovalor.

Definición : Sea f: V→V una transformación lineal en un espacio de dimensión n. Si f tiene n autovalores distintos, la matriz asociada respecto de una base formada por autovectores relativos a cado uno de los n autovalores es una matriz diagonal, cuyos elementos no nulos son los autovalores de la transformación.

6.6. El polinomio característico

Si λ es un autovalor de una transformación lineal f, es por definición:

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

Pero, como ya se vió al estudiar transformaciones lineales, $f(\vec{u}) = A\vec{u}$ donde A es la matriz asociada a la transformación lineal f. Entonces resulta :

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u}$$

ó también :

$A\vec{u} = \lambda I\vec{u}$ donde I es la matriz identidad de orden n

$$A\vec{u} - \lambda I\vec{u} = \theta$$

$$(A - \lambda I)\ \vec{u} = \theta$$

Como $\vec{u} \neq \theta$ por ser autovector, entonces la única posibilidad para que la igualdad precedente se cumpla es que :

$$|A - \lambda I| = 0$$

Definición : Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se denomina **polinomio característico de A** al polinomio de grado n que resulta al desarrollar el determinante de la matriz $(A - \lambda I)$.

Definición: Sea $f: V \to V$ una transformación lineal y [B] una base cualquiera de V. Si A es la matriz asociada a la transformación lineal, respecto de dicha base, se verifica que λ es un autovalor de la transformación f, si y sólo si, es una raíz real del polinomio característico de A.

Ejemplos:

1) Sea $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2)$ una transformación lineal cuyos autovalores son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$. Se verificará que esos valores son las raíces del polinomio característico de la matriz A asociada a f, respecto de la base canónica.

   Se construye la matriz A

   $f(1, 0) = (2, -1)$

   $f(0, 1) = (-1, 2)$ $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ |A - \lambda I| = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

2) Dada f: $R^3 \to R^3$/ $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 5x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$, utilizar la matriz A asociada a la base canónica para hallar los autovalores y autovectores de f.

$$f(1, 0, 0) = (3, -1, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (-1, 5, -1)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, -1, 3)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (3-\lambda)^2(5-\lambda) + 1 + 1 - (5-\lambda) - (3-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda^2 + 18\lambda + 18\lambda - 36 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda-2) - 9\lambda(\lambda-2) + 18(\lambda-2) = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

Para calcular los autovectores, se hallan los espacios asociados a cada uno de esos autovalores:

$$L(2) = \{ \vec{u} \in R^3 / f(\vec{u}) = 2\vec{u} \}$$

$$\begin{cases} 3u_1 - u_2 + u_3 = 2u_1 \\ -u_1 + 5u_2 - u_3 = 2u_2 \\ u_1 - u_2 + 3u_3 = 2u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + 3u_2 - u_3 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ u_1 = -u_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L(2) = $\{(u_1, u_2, u_3) \in R^3 / u_2 = 0 \wedge u_1 = -u_3\} = \{(-u_3, 0, u_3)\}$

L(3) = $\{ \vec{u} \in R^3 / f(\vec{u}) = 3\vec{u} \}$

$$\begin{cases} 3u_1 - u_2 + u_3 = 3u_1 \\ -u_1 + 5u_2 - u_3 = 3u_2 \\ u_1 - u_2 + 3u_3 = 3u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 = u_3$$

$\Rightarrow$ L(3) = $\{(u_1, u_2, u_3) \in R^3 / u_1 = u_2 = u_3\} = \{(u_1, u_1, u_1)\}$

L(6) = $\{ \vec{u} \in R^3 / f(\vec{u}) = 6\vec{u} \}$

$$\begin{cases} 3u_1 - u_2 + u_3 = 6u_1 \\ -u_1 + 5u_2 - u_3 = 6u_2 \\ u_1 - u_2 + 3u_3 = 6u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ u_1 - u_2 - 3u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_3 \\ u_2 = -2u_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L(6) = $\{(u_1, u_2, u_3) \in R^3 / u_1 = u_3 \wedge u_2 = -2u_3\} = \{(u_3, -2u_3, u_3)\}$

6.7. Matrices semejantes

Definición: Dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz C, no singular ($|C| \neq 0$), tal que :

$$A = CBC^{-1}$$

Teorema : Si A y B son dos matrices semejantes, tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

$$A = CBC^{-1}$$

$$\Rightarrow \qquad |A - \lambda I| = |CBC^{-1} - \lambda I|$$

$$= |CBC^{-1} - C\lambda IC^{-1}|$$

Pero :

$$(CBC^{-1} - C\lambda IC^{-1}) = C(BC^{-1} - \lambda IC^{-1}) = C(B - \lambda I)C^{-1}$$

Por lo tanto :

$$|CBC^{-1} - C\lambda IC^{-1}| = |\ C(B - \lambda I)C^{-1}|$$

$$= |C||B - \lambda I||C^{-1}|$$

$$= |B - \lambda I|$$

$|A - \lambda I| = |B - \lambda I|$ Que es lo que se quería demostrar.

Nota : Dos matrices semejantes, al tener el mismo polinomio característico, tienen los mismos autovalores. Por lo tanto, como veremos más adelante, los determinantes de dos matrices semejantes son iguales.

6.7.1. Matriz Cambio de Base

Definición: Sea f: V $\rightarrow$ V una transformación lineal en un espacio de dimensión n. Si A es la matriz asociada a la transformación respecto de una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y B es la matriz asociada a la misma transformación f, respecto de otra base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, se verifica que A y B son semejantes.

$A = CBC^{-1}$ donde C se llama Matriz Cambio de Base.

Ejemplo

Si se retoma la transformación lineal del ejemplo de la página 169 y se construye la matriz B asociada a la base $[B_2] = \{(1,0,-1),(2,2,2),(1,-2,1)\}$, se mostrará que la matriz A hallada anteriormente y la matriz B son semejantes.

$f(1, 0, -1) = (2, 0, -2)$

$(2, 0, -2) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 2, 2) + \gamma(1, -2, 1)$

$$\alpha = 2 \quad ; \quad \beta = 0 \quad ; \quad \gamma = 0$$

$$\left(f(1,0,-1)\right)_{[B_2]} = (2, 0, 0)$$

$f(2, 2, 2) = (6, 6, 6)$

$(6, 6, 6) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 2, 2) + \gamma(1, -2, 1)$

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 3 \quad ; \quad \gamma = 0$$

$$\left(f(2,2,2)\right)_{[B_2]} = (0, 3, 0)$$

$f(1, -2, 1) = (6, -12, 6)$

$(6, -12, 6) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 2, 2) + \gamma(1, -2, 1)$

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 0 \quad ; \quad \gamma = 6$$

$$\left(f(1,-2,1)\right)_{[B_2]} = (0, 0, 6)$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$|A| = 45 + 1 + 1 - 5 - 3 - 3 = 36$

$$|B| = 36$$

$$\Rightarrow \; |A| = |B| \; \Rightarrow \; A \text{ y } B \text{ son semejantes.}$$

Se verificará ahora que $B = CAC^{-1}$ donde C es la matriz de cambio de base que permite pasar de la base canónica a la base $[B_2]$.

Calculando las coordenadas de los vectores canónicos en la base $[B_2]$ se puede construir C.

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} CAC^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Que es igual a la matriz B lo que permite verificar que A y B son semejantes.

De acuerdo a lo que acabamos de ver, se puede expresar la primera definición dada en el punto 4, como sigue :

Definición: Toda matriz asociada a una transformación diagonalizable es semejante a una matriz diagonal.

Entonces: ¿Qué condiciones debe reunir una matriz A asociada a una transformación lineal para ser diagonalizable? La respuesta a este interrogante se encuentra en el siguiente teorema que se enuncia sin demostración:

Teorema: Una matriz A, cuadrada de orden n, es diagonalizable si y sólo si A tiene n autovectores linealmente independientes.

A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ A tiene n autovectores linealmente independientes.

Al tratar de determinar si una matriz es diagonalizable o no, es necesario tener en cuenta la siguiente observación:

Si λ_0 es una raíz del polinomio característico de una matriz A y su multiplicidad es m, la dimensión del espacio asociado a ese autovalor puede ser igual o menor que m.

$$\dim \; L(\lambda_0) \leq m$$

Por ello , resulta útil hallar en 1º lugar los subespacios de los autovectores asociados a los autovalores que son raíces múltiples del polinomio característico, para determinar su dimensión. Si para alguno de ellos se verifica que $\dim L(\lambda_0) < m$ entonces la matriz no es diagonalizable.

Ejemplos

a) Verificar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

Los autovalores de A son $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 1$

2 es raíz de multiplicidad uno y 1 es raíz de multiplicidad dos

$L(2) = \{\vec{u} \;/\; A\vec{u} = 2\vec{u}\}$ de donde resolviendo resulta:

$L(2) = \{(u_1, u_2, u_3) \;/\; u_2 = u_3 = 0\}$, por lo tanto Dim L(2) = 1

$L(1) = \{\vec{u} \;/\; A\vec{u} = \vec{u}\}$ y resolviendo resulta:

$L(1) = \{(u_1, u_2, u_3) \;/\; u_2 = u_3 = -u_1\}$, por lo tanto Dim L(1) = 1

Entonces la matriz no es diagonalizable porque la dimensión del espacio asociado al autovalor 1 es menor que la multiplicidad de éste.

b) Sea $f : R^3 \rightarrow R^3$ una transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$$

b.1) Hallar los autovalores de la transformación y los autovectores correspondientes

Se calcula la matriz asociada a la transformación respecto de la base canónica

$f(1,0,0) = (0, -1, 1)$ $f(0,1,0) = (1, 2, -1)$ $f(0,0,1) = (-1, -1, 2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2 \ ; \lambda_2 = 1 \ ; \ \lambda_3 = 1$$

Los espacios asociados a los autovalores son:

$L(2) = \{(u_1, u_2, u_3) / u_1 = u_2 = -u_3\}$, por lo tanto Dim L(2) =1

$L(1) = \{(u_1, u_2, u_3) \ / \ u_1 = u_2 - u_3\}$, por lo tanto Dim L(1) = 2

Entonces la transformación lineal dada es diagonalizable.

b.2) Hallar una base de R^3 respecto de la cual, la transformación sea diagonalizable. Escribir la matriz asociada a la transformación respecto de esa base.
Para hallar una base respecto de la cual la transformación sea diagonizable, se toma un vector de L(2) y dos vectores de L(1), que sean linealmente independientes.

Por ejemplo $(1, 1, -1) \in L(2)$
$(0, 3, 3) \in L(1)$
$(-1, 2, 3) \in L(1)$

Entonces $[B] = \{(1,1,-1), (0, 3, 3), (-1, 2, 3)\}$

A continuación se comprobará que la matriz B asociada a la transformación dada, respecto de esta nueva base, es una matriz diagonal y además que los elementos de la diagonal son los autovalores de la transformación lineal..

$f(1, 1, -1) = (2, 2, -2)$

$(2, 2, -2) = \alpha(1, 1, -1) + \beta\ (0, 3, 3) + \gamma\ (-1, 2, 3)$

$\alpha = 2 \ , \ \beta = 0 \ , \ \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad (f(1, 1, -1))_{[B]} = (2, 0, 0)$

$f(0, 3, 3) = (0, 3, 3)$

$(0, 3, 3) = \alpha(1, 1, -1) + \beta\,(0, 3, 3) + \gamma\,(-1, 2, 3)$

$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad (f(0, 3, 3))_{[B]} = (0, 1, 0)$

$f(-1, 2, 3) = (-1, 2, 3)$

$(-1, 2, 3) = \alpha(1, 1, -1) + \beta\,(0, 3, 3) + \gamma\,(-1, 2, 3)$

$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad \gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad (f(-1, 2, 3))_{[B]} = (0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$