Análisis Matemático I

Trabajo Practico N° 2

Funciones: Composición. Funciones elementales y trascendentes. Traslaciones. Cambios de tamaño y reflexiones.

Ing. Roberto Lamas
Prof. Adjunto Análisis Matemático I

Operaciones con funciones:

I) Operaciones algebraicas:

Dadas $f : A \longrightarrow R \,/\, y = f(x) \wedge g : B \longrightarrow R \,/\, y = g(x)$

Definimos:

a) Suma o diferencia: $f \pm g : A \cap B \longrightarrow R \,/\, (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

b) Función producto por una constante: $K . f : A \longrightarrow R \,/\, (k . f)(x) = K . f(x)$

c) Función producto: $f \,.\, g : A \cap B \longrightarrow R$ /
$(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$

d) Función cociente: $f / g : A \cap B - \{ x / g(x) = 0 \} \longrightarrow R$ /
$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

Ejemplo:

$f / f(x) = x^2 - 4$ $\quad$ $g/g(x) = (x + 5) / (x - 3)$
$f : R \longrightarrow R$ $\quad$ $g : R - \{ 3 \} \longrightarrow R$

a) Obtener $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = -3 + (-3) = -6$

b) Definir $f + g$
$f + g : R - \{ 3 \} \longrightarrow R$
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4 + (x + 5) / (x - 3)$

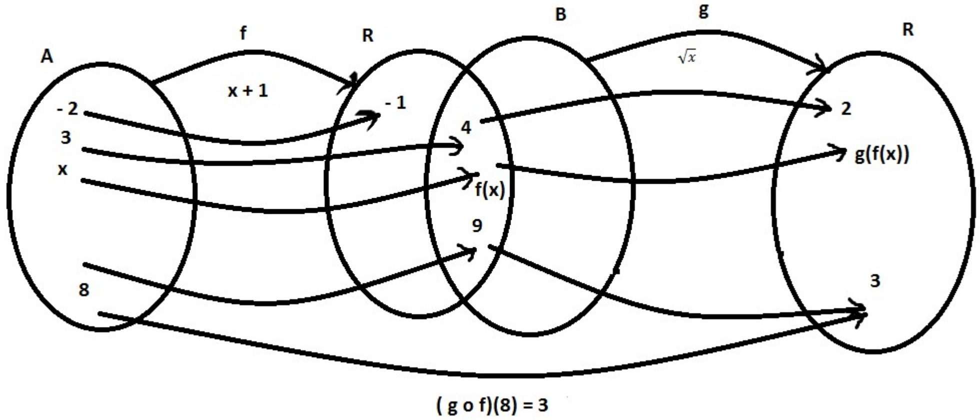
c) Definir f / g

f / g : R − { − 5 , 3 } ⟶ R

$$y = \frac{(x^2-4)(x-3)}{(x+5)}$$

II) Operaciones no algebraicas:

Composición de funciones



Definición: Dadas las funciones f y g se define la función compuesta f con g (g o f) como g o f : $D(f) - \{ x / f(x) \notin D(g) \} \longrightarrow R$

$$(g \circ f) = g (f(x))$$

Otra forma : $D (g \circ f) = \{ x / x \in A \wedge f(x) \in B \}$

Ejemplo:

Dadas f / $f(x) = (x - 3)^2$; g/$g(x) = \sqrt{x} + 4$; h / $h(x) = \frac{8}{x}$

a) Obtener $(h \circ f)(5) = h (f(5)) = h (4) = 2$

b) Obtener $(f \circ g) (4) = f (g(4)) = f (6) = 9$

Dadas f / f(x) = $(x-3)^2$; g/g(x) = $\sqrt{x}+4$; h / h(x) = $\frac{8}{x}$

c) Obtener (g o h)(x) = g (h(x)) = $\sqrt{\frac{8}{x}}+4$ con x > 0

d) Obtener (h o g o f)(x) = h (g (f(x)))= $\frac{8}{4+\sqrt{(x-3)^2}} =$

$= \frac{8}{|x-3|+4}$

h o g o f : R $\longrightarrow$ R / y = $\frac{8}{|x-3|+4}$

Descomposición en funciones simples:

Función simple: es aquella en la que en su fórmula interviene una única operación.

Ejemplo: f / f(x) = $\left(\frac{7}{5+(x-4)^2}\right)^9$

Cuáles serán las funciones simples que al componerlas daría esta función ?

f / f(x) = $\left(\frac{7}{5+(x-4)^2}\right)^9$

$f_1(x) = x - 4$ $f_2(x) = x^2$ $f_3(x) = x + 5$

$f_4(x) = 1 / x$ $f_5(x) = 7x$ $f_6(x) = x^9$

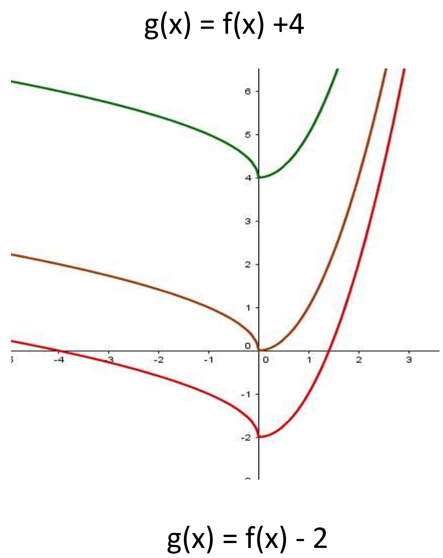
$f(x) = (f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

Gráficos especiales

1.- Traslación: Dado el grafico de f / y = f(x)   c > 0, para obtener el grafico de:

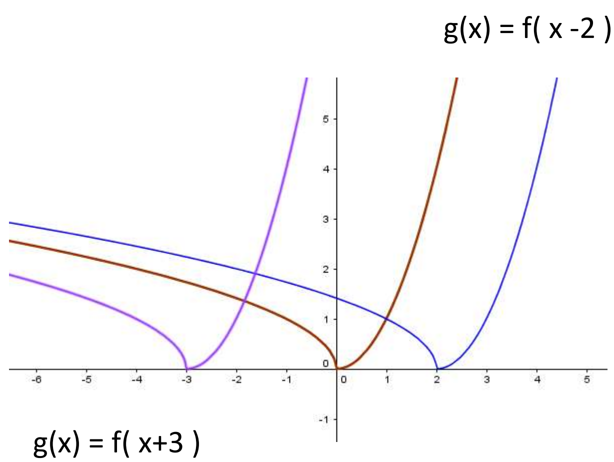
A) y = f(x) + c se traslada el grafico de f, c unidades hacia arriba.

B) y = f(x) – c se traslada el grafico de f, c unidades hacia abajo.



C) y = f(x – c) se traslada el grafico de f, c unidades hacia la derecha.

D) y = f(x + c) se traslada el grafico de f, c unidades hacia la izquierda.

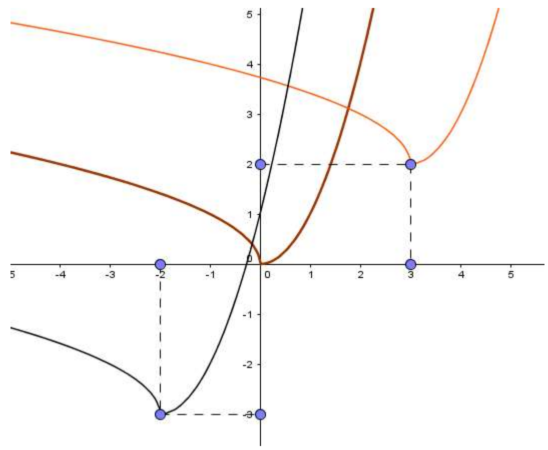


Partiendo la función original f / y = f(x) , la que pasa por el origen

La función que está a la derecha(naranja) será:
g(x) = f (x – 3) + 2

La función que está a la izquierda(violeta) será:
g(x) = f (x + 2) – 3

g(x) = f (x – 3) + 2

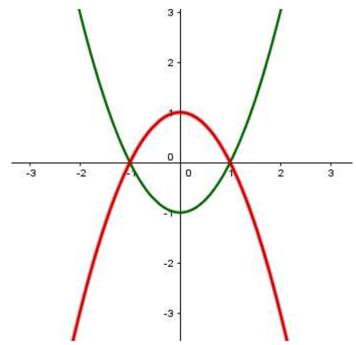


g(x) = f (x + 2) – 3

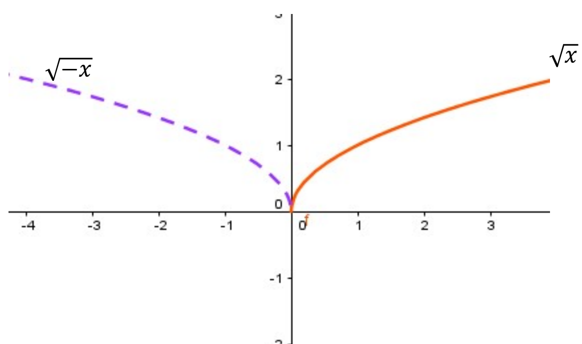
2.- Reflexión: Dado el gráfico de f / y = f(x) :

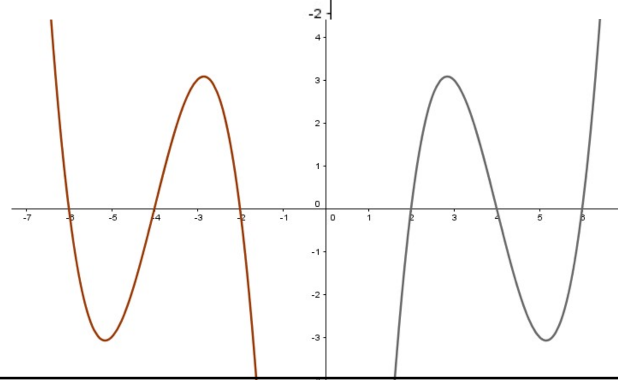
a) El gráfico de y = – f(x) se obtiene reflejando el gráfico de f con respecto al eje X.

La función f / y = f(x) la vemos en color verde, si le anteponemos un signo negativo,, quedará   y = – f (x)



b) El gráfico de y = f(– x) se obtiene reflejando el gráfico de f con respecto al eje Y.





3.- Estiramiento y compresión: Dado el grafico de f / y = f(x) el grafico de y = c f(x) estará:

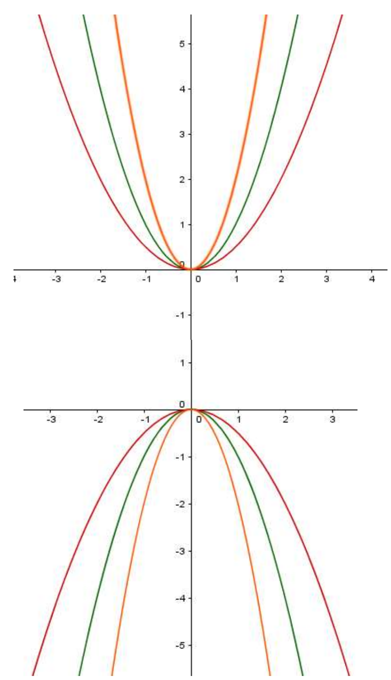
a) Estirado verticalmente si c > 1.
b) Comprimido verticalmente si 0 < c < 1 .
c) Si c < 0 (negativo) se combinan los casos a y b con 2ª.

La curva del medio(verde) corresponde a la función f / $f(x) = x^2$

La curva superior (naranja) corresponde a la función f / $f(x) = 2x^2$

La curva inferior (rojo) corresponde a la función f / $f(x) = x^2 / 2$

Corresponde al caso c , en donde se combinan los casos vistos recién con la reflexión con respecto al eje X.



Funciones elementales:

De cada función estudiaremos dominio, paridad, monotonía.

Lineal , cuadrática, potenciales con índice par o impar, racionales, radical, potencial y trascendentes

1.- Función polinomial: Es aquella dada por la fórmula

$$y = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \ldots\ldots + a_n\, x^n = P_n(x)$$

donde n : grado n pertenece a los naturales
a_i pertenece a los reales.

Dominio: Reales.

Casos particulares:

Función lineal: Tiene por formula $y = a_0 + a_1 x$, se puede escribir $y = a x + b$ o también $y = m x+ b$, donde a , b , m pertenecen a los reales.

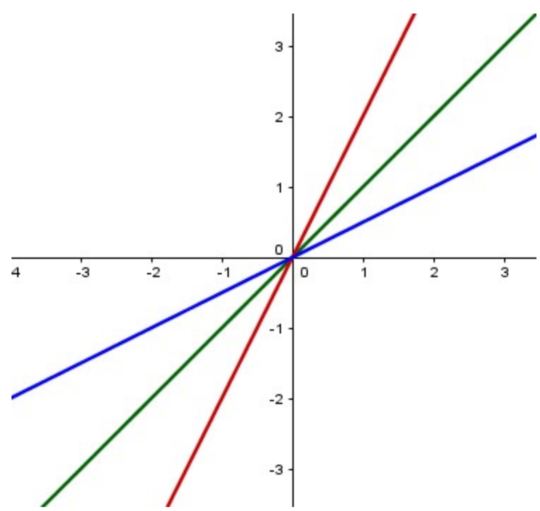
Partimos de i) y = x (Función identidad)
ii) y = a x
iii) y = a x + b (Traslación)

z / z(x) = a x con a cte

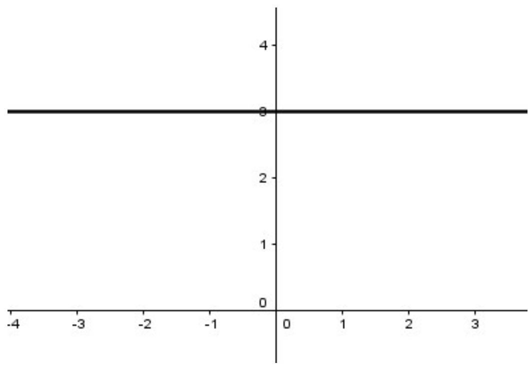
f / f(x) = x (Verde)

g / g(x) = 2 f(x) (Rojo)

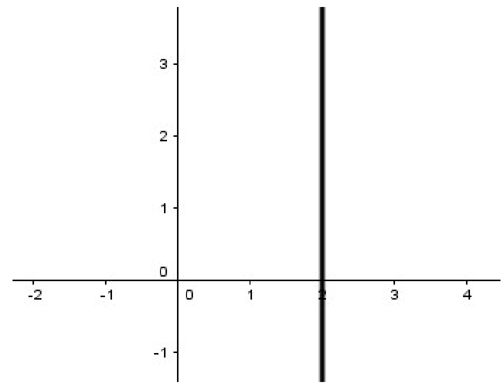
t / t(x) = f(x) / 2 (Azul)



Si a = 0 ⇒ y = b
(Función constante)



Si x = c No es función



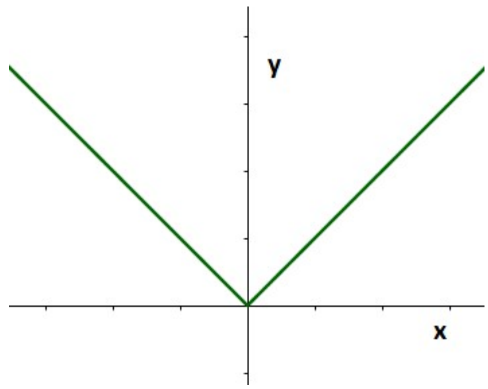
Distintas formas que adopta la ecuación de la recta de acuerdo a los elementos que se conozcan de ella.

I) y = a x + b Pendiente y ordenada al origen.

II) $y - y_1 = a\ (x - x_1)$ Pendiente y un punto.

III) $y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} (x - x_1)$ Dos puntos $P_1 (x_1 , y_1)$ y $P_2 (x_2 , y_2)$

b) Función sectorialmente lineal: Los gráficos son segmentos y / o semirrectas.
b1) Función valor absoluto: y = | x |



$$y = \ |x| \begin{cases} x & si\ x\ \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

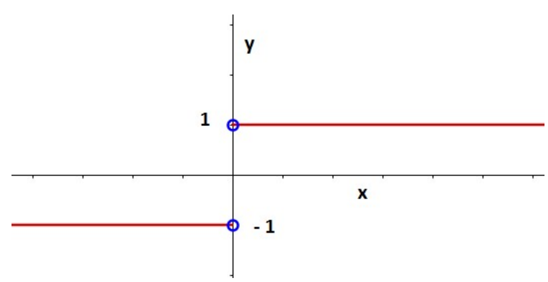
Dom = R
Img = [0 , ∞)

b2) Función signo:

y = $sg(x\ ) = \ \frac{|x|}{x}$

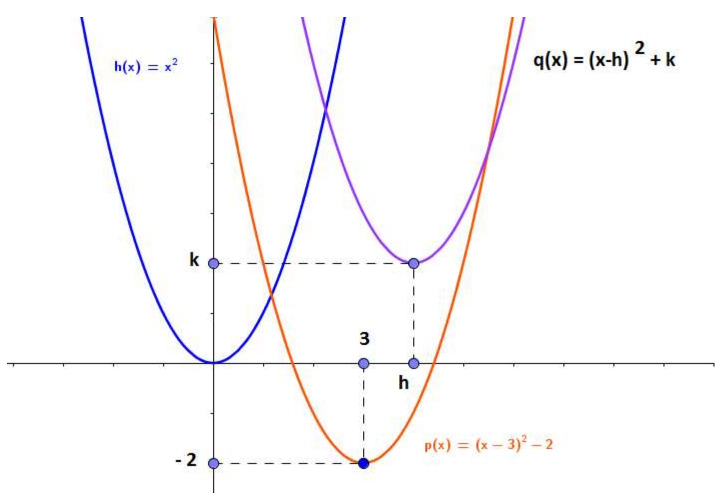
$$y = \begin{cases} \ \ 1 & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Dom = R – { 0 }
Img = { – 1 , 1}



c) Función cuadrática: $y = a\,x^2 + b\,x + c$ donde a, b, c son números reales con $a \neq 0$

Conocemos la gráfica de $y = x^2$, el vértice está ubicado en V(0,0) , el eje de simetría es x = 0 , cóncava hacia arriba.
Para los demás casos se completa cuadrado para llevarlos a la forma canónica $y = a\,(x - h)^2 + k$



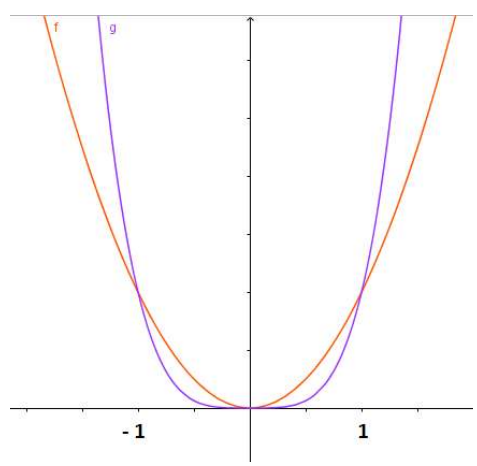
Dom = R
Img = [k , ∞)   si a > 0
o (– ∞ , k]   si a < 0

d) Función simple de grado n : $y = x^n$ ($n \in N \wedge n \geq 2$)

d1) Si n es par : Similares a $y = x^2$ se modifica la apertura

A mayor exponente ocurrirá que para:
| x | < 1 el grafico será mas achatado.
| x | > 1 el grafico es mas cerrado , mas estirado.

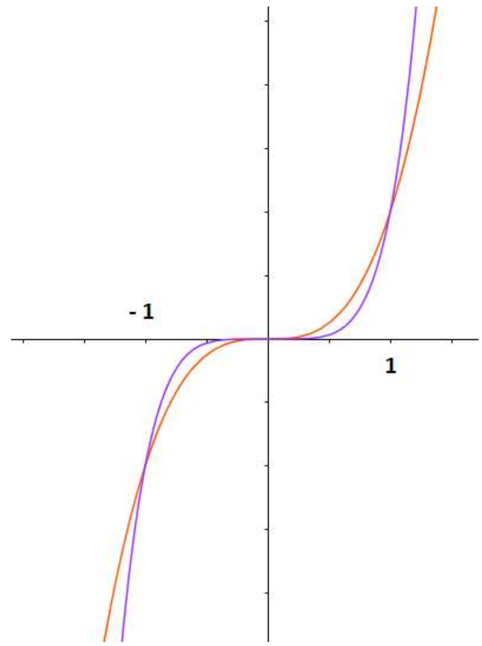
R ⟶ [0 , ∞)



d2) Si n es impar : Similar a $y = x^3$

A mayor exponente ocurrirá que para:
| x | < 1 el grafico será mas achatado.
| x | > 1 el grafico es mas cerrado , mas estirado.

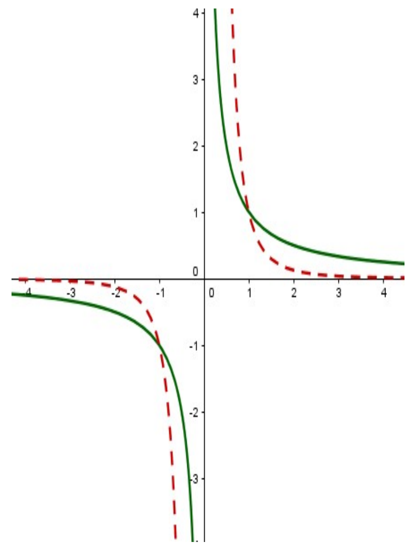
R ⟶ R



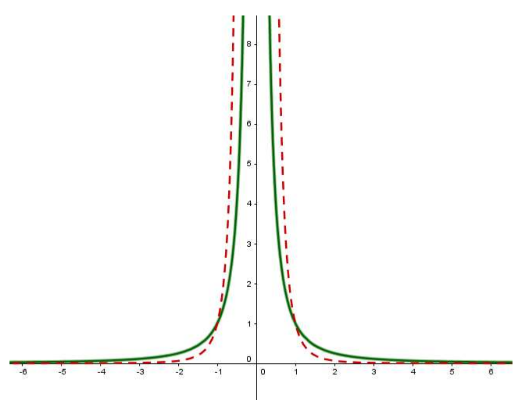
2) Función racional: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son funciones polinomiales.
Caso particular: $f(x) = \frac{1}{x^n}$ Dom(f)= R – { 0 }

a) n Impar Similares a y = 1 / x Impar
Decreciente
R – { 0 } ⟶ R – { 0 }
Los ejes se llaman asíntotas.

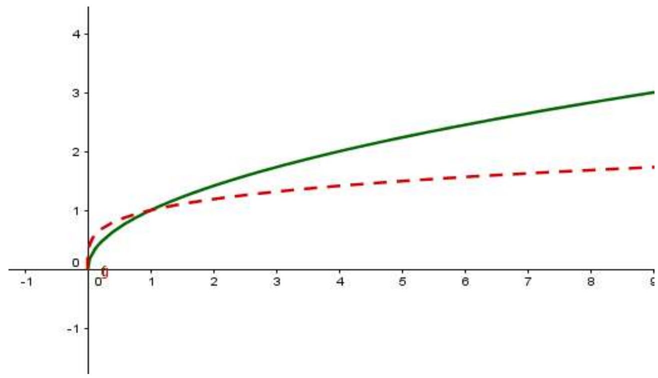
0 < | x | < 1 La curva se estira mas a medida que aumenta n
1 < | x | La curva se achata mas , tiende a acercarse mas a la asíntota.



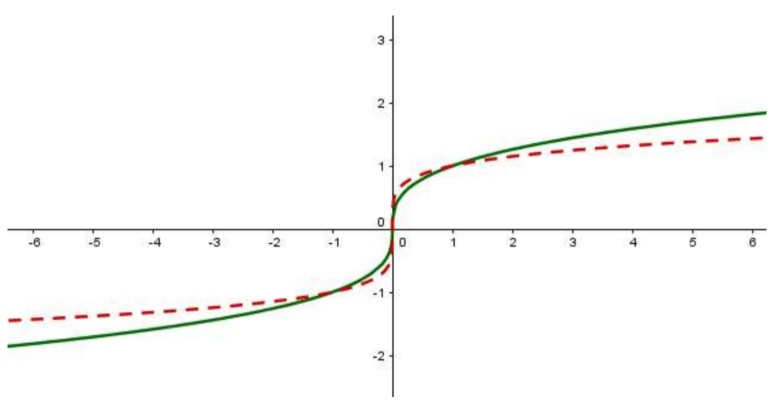
b) n par Similares a
$y = 1 / x^2$
Par
Creciente
Decreciente
R – { 0 } ⟶ (0 , ∞)



3) Función radical f / f(x) = $\sqrt[n]{x}$ n ∈ N
n > 1
a) Si n es par f/ f(x) = $\sqrt{x}$
Creciente
sin paridad
[0 , ∞) ⟶ [0 , ∞)



b) Si n es impar similares a f/
f(x) = $\sqrt[3]{x}$
Creciente
impar
R ⟶ R



4) Función potencial Tiene la forma $y = x^r$ donde $r \in R$

Si consideramos que $r \in N$ ya vimos los casos $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$

Si tenemos $y = \sqrt[n]{x} = x^{(1/n)}$ $r = -n$ $y = \frac{1}{x^n}$

Funciones trascendentes

Involucran :

I) Trigonométricas.
II) Trigonométricas inversas.
III) Función exponencial.
IV) Función logaritmo

Función exponencial.

$exp_a : R \longrightarrow R$ $a > 0$ (a pertenece a los R^+)

$y = a^x = exp_a(x)$

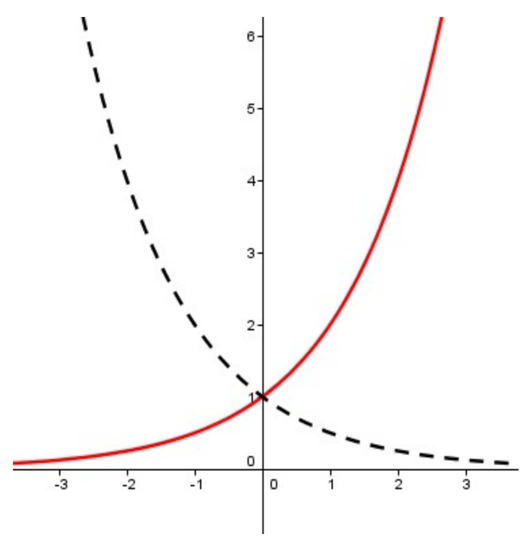
1) $a > 1$ son todos los gráficos similares, veremos $y = 2^x$. no tiene paridad y es creciente.

2) $0 < a < 1$: son todos similares entre si, por ejemplo $y = (1/2)^x$, observamos que $(1/2)^x = 2^{-x}$, en consecuencia el grafico es simétrico al de $y = 2^x$ con respecto al eje y , entonces es decreciente y no tiene paridad.

3) Si $a = 1$ $y = 1^x = 1$

En rojo $y = 2^x$.
Creciente y sin paridad
$R \longrightarrow (0, \infty)$

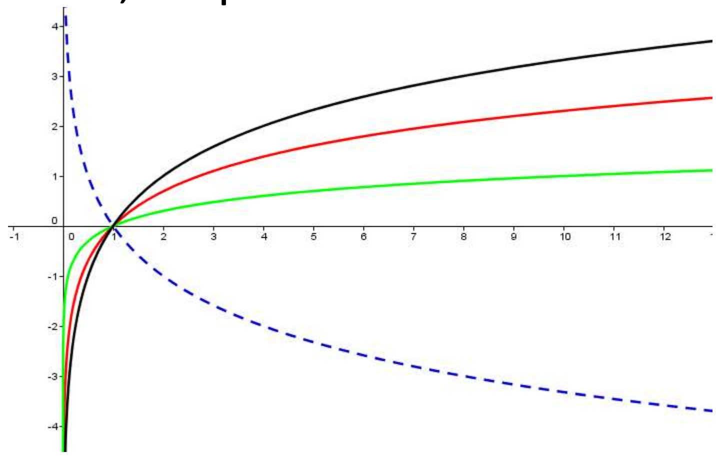
En línea interrumpida
$y = 2^{-x}$.
Decreciente y sin paridad
$R \longrightarrow (0, \infty)$



Función logaritmo

$\log_a : (0, \infty) \longrightarrow R$

$y = \log_a(x)$ Creciente , sin paridad



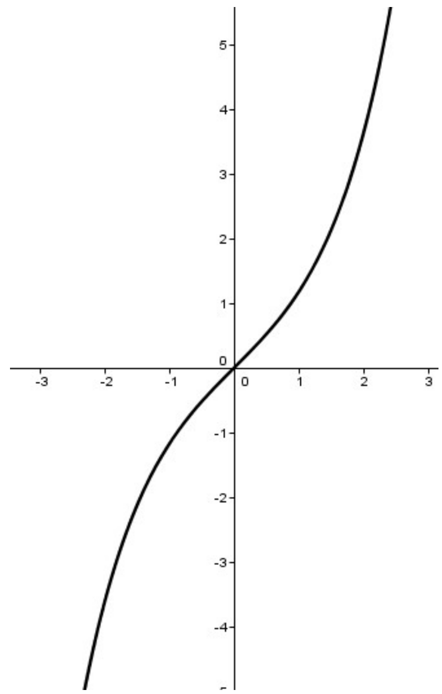
Funciones hiperbólicas: son combinaciones de las funciones exponenciales, tienen similitud con las trigonométricas, en cuanto a nombre, relación entre ellas y propiedades.

Función seno hiperbólico : sh

sh : R ⟶ R

y = sh(x) = $\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

Es impar y creciente



Función coseno hiperbólico : ch

ch : R ⟶ R

y = ch(x) = $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

Es par y creciente en (0 , ∞)