TRABAJO PRÁCTICO NRO 7

Derivadas sucesivas. Implícita y logarítmica. Interpretación geométrica

Ejercicios para resolver en clase TP7

1) Hallar en cada caso la derivada solicitada

a) $f\,'\,(x)$; $f\,'''\,(x)$; $f^{(5)}(x)\; y\; f^{(8)}(x)$ si $f(x) = \frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{36} + \frac{x^2}{20} + 5x - 80$

- $f'(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{10}x + 5$
- $f'''(x) = x^2 - \frac{2}{3}x$
- $f^{(5)}(x) = 2$
- $f^{(8)}(x) = 0$

b) $f^{(n)}(x),\; f^{(10)}(x)\; y\; f^{(25)}(x)\;, si\; f(x) \;=\; e^{-\,2x}$

- $f^{(n)}(x) = (-1)^{(n)}.\,2^n.\,e^{-2x}$
- $f^{(10)}(x) = 2^{10}.\,e^{-2x}$
- $f^{(25)}(x) = (-1).\,2^{25}.\,e^{-2x}$

c) $f^{(2)}(\pi),\;\; ,si\;\; f(x) \;=\; x.cos\,x \;-\; 2\,sen\,x$

- $f^{(2)}(x) = -x.\cos x$
- $f^{(2)}(\pi) = \pi$

2) Verificar si $y \;=\; 2x^3 \;-\; 3x \;+\; 5$, satisface la ecuación diferencial

$1 + \frac{y'}{3} + \frac{xy''}{12} - 3x^2 = 0$

- $y' = 6x^2 - 3$ (1)
- $y'' = 12x$ (2)

Reemplazando (1) y (2) en $1 + \frac{y'}{3} + \frac{xy''}{12} - 3x^2 = 0$

$$1 + \frac{6x^2 - 3}{3} + \frac{x.\,12x}{12} - 3x^2 = 0$$

Resolviendo $0 = 0$

3) De acuerdo a las funciones implícitas dadas por su fórmula, hallar

a) $\frac{dy}{dx}$ si $\frac{3}{2}x^2 + y^3 + xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{3x+y}{3y^2+x}$$

b) y' si $xy^2 - yx^2 = y^2x^2 - \frac{x}{y}$

$$y' = \frac{2xy^2 - y^{-1} - y^2 + 2xy}{2xy - x^2 - 2yx^2 - xy^{-2}}$$

c) $\frac{dy}{dx}$ si $\frac{e^{(-2x+y)}}{2} + cos^2 y - y\, sen\, x = 0$

$$y' = \frac{y\cos x + e^{(-2x+y)}}{\frac{1}{2}e^{(-2x+y)} - 2\,\mathrm{sen}\, y\, \cos y - \mathrm{sen}\, x}$$

4) Escribir en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una N

Si $f(x) = \frac{-1}{(x+1)}$ entonces $f^{(n)}(x) = \boxed{C}$

A) $(-1)^n\,(n-1)!\,(x+1)^{-(n+1)}$ B) $(-1)^{n+1}\,n!\,(x+1)^{-n}$

$C)$ $(-1)^{n+1}\,n!\,(x+1)^{-(n+1)}$ D) $(-1)^{n+1}\,(n+1)!\,(x+1)^{-n+1}$

5.-) Aplicar derivación logarítmica para calcular en cada caso y ', si es posible o utilice otras propiedades para calcular y '

$a)\ y = ln\,(x)^{(1/ln\,x)}$

$$y' = 0$$

$b)\ y = (sen\,x)^{\,(\sqrt{x}+1)}$

$$y' = (\mathrm{sen}\,x)^{(\sqrt{x}+1)}\left(\frac{\ln(\mathrm{sen}\,x)}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\,\mathrm{cotan}\,x\right)$$

$c)\ y = e^{(x^2)} - tg\,x + ch\,x^{(2/x)} - x^4$

$$y' = 2x.e^{(x^2)} - \sec^2 x + \mathrm{senh}\,x^{(2/x)}\left(-\frac{2\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)x^{(2/x)} - 4x^3$$

$d)\ y = (sec\,x)^{(cos\,x)} + e^3$ cotg x

$$y' = \sec x^{\cos x}.(\cos x\ .\tan x - \mathrm{sen}\,x\,.\ln(\sec x)\,) - e^3.\mathrm{cosec}^2\,x$$

$e)\ y = \dfrac{(tg\,x - 3x)\,.10^{-x}}{\log(x-2)}$

$$y' = \left(\frac{\sec^2 x - 3}{\tan x - 3x} - \ln 10 - \frac{1}{\ln 10.(x-2).\log(x-2)}\right)\frac{(\tan x - 3x)\,.10^{-x}}{\log(x-2)}$$

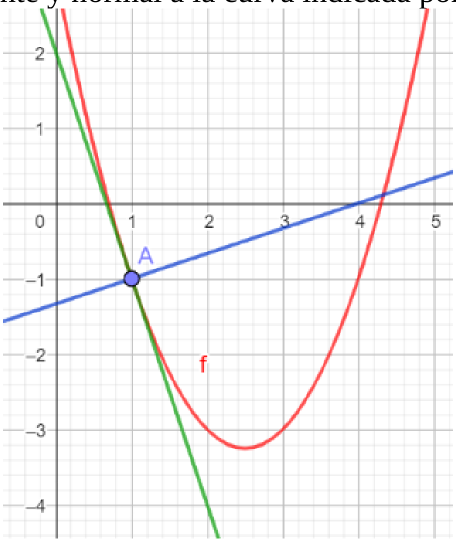
Interpretación Geométrica y física de la Derivada

6) Hallar la/las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva indicada por su ecuación, y en el punto de abscisa indicado.

$a)\ f(x) = x^2 - 5x + 3\,, \quad a = 1$

Tangente: $y = -3x + 2$

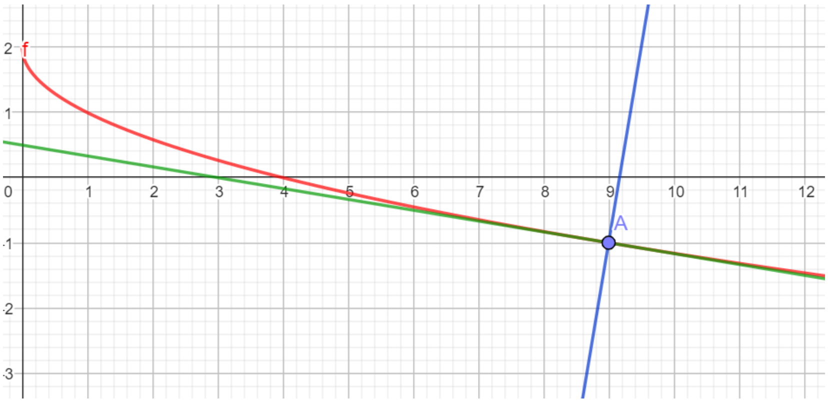
Normal: $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$



$b)\ f(x) = 2 - \sqrt{x}\,, \quad a = 9$

Tangente: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

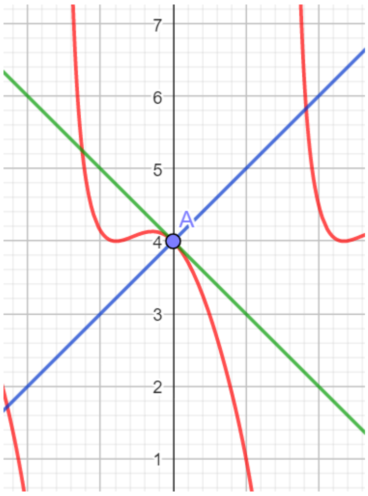
Normal: $y = 6x - 55$



$c)\ f(x) = cos\,(2x) - tg\,x + 3\,, \quad a = 0$

Tangente: $y = -x + 4$

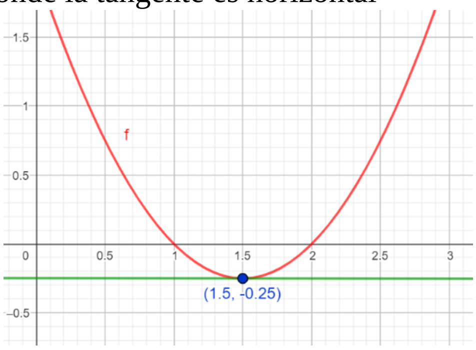
Normal: $y = x + 4$



7) Indicar los puntos del gráfico donde la tangente es horizontal

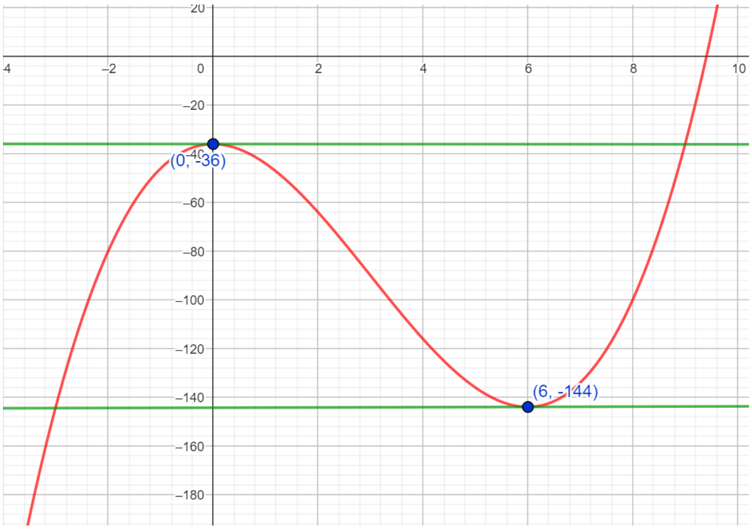
$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$

$P\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$



$b)\ f(x) = x^3 - 9x^2 - 36$

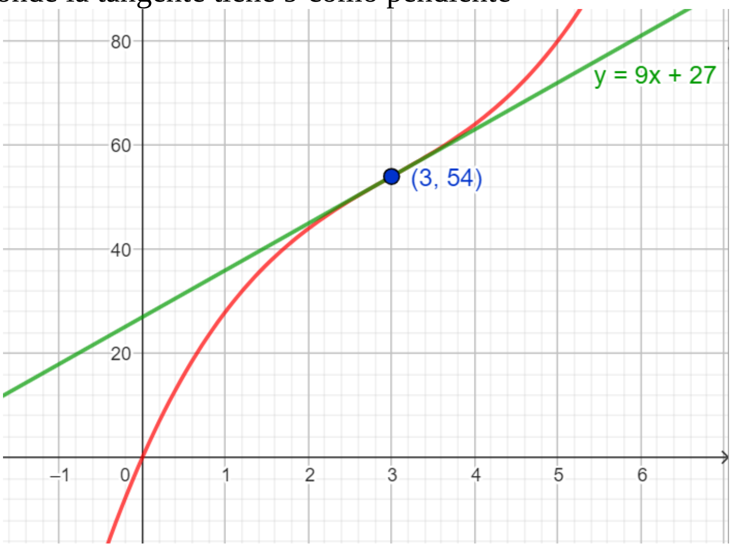
$P(0; -36)$ y $Q(6; -144)$



8) Indicar puntos de la función donde la tangente tiene 9 como pendiente

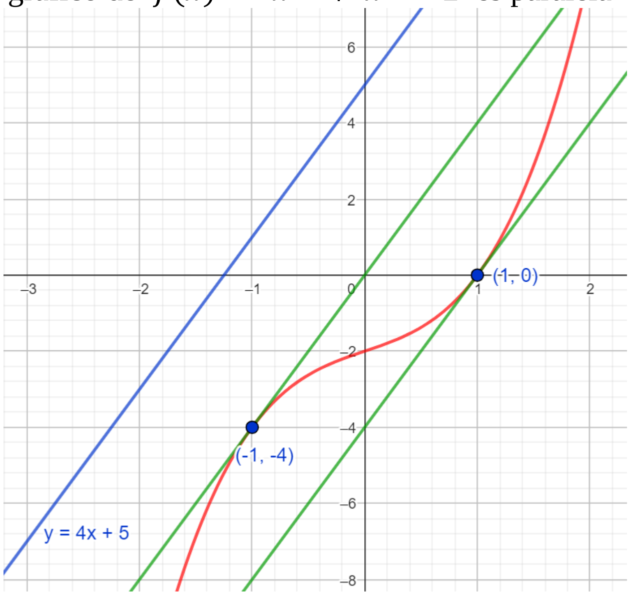
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 36x$

$P(3; 54)$



9) Ver si en algún punto la recta tangente al grafico de $f(x) = x^3 + x - 2$ es paralela a la recta de ecuación $f(x) = 4x + 5$

$P(1; 0)$ y $Q(-1; -4)$

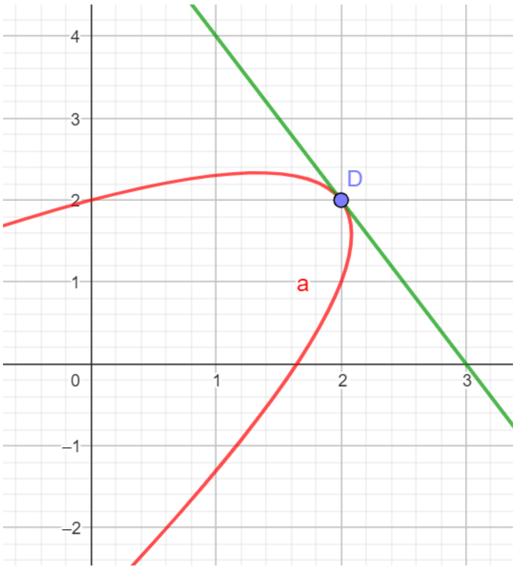


10) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva, cuya ecuación se indica, en el punto P (2, 2)

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$$

$$y' = \frac{2y - 2x - 2}{2y - 2x + 1}$$

y=-2x+6

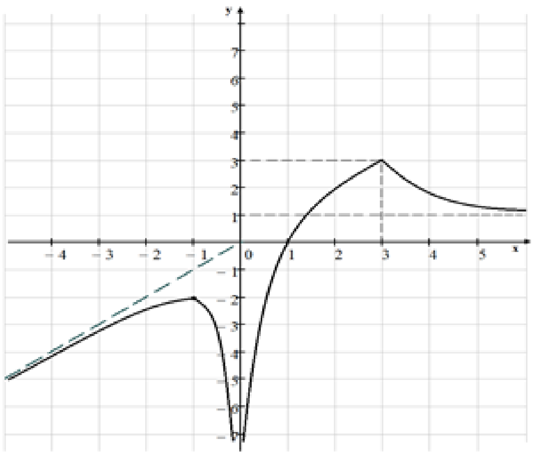


11). Dada la gráfica de f,

a) indicar los valores de x para los cuales f no es derivable. Justificar su respuesta

f no es continua en x=0, entonces no es derivable en x= 0

en x=3 es un punto anguloso y por tanto no es derivable, de todas maneras si se analiza los límites laterales:



$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} > 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} < 0,$$

entonces $\nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$,

∴ no es derivable en x = 3

b) indicar los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es positiva

$(-\infty; -1)\ y\ (0; 3)$

d) indicar los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es negativa

$(-1; 0)\ y\ (3; +\infty)$

12.-) Un automóvil viaja a 100 m/seg cuando aplica los frenos repentinamente. La función de posición del automóvil que derrapa es $S = 100t - 5t^2 + 2$, donde S es la distancia recorrida en el tiempo t. [S]= m (metro) y [t]= s (segundo)

a) Encuentre la velocidad en el instante t

$V_{(t)} = 100 - 10t$

b) ¿Cuál es su velocidad y aceleración a los cinco segundos?

$V_{(5)} = 50m/seg$ y $a_{(5)} = -10m/seg^2$

c) ¿Qué distancia recorre y cuánto tiempo tarda el automóvil en detenerse?

Demora 10 seg en detenerse y recorre 502m

13.-) Se lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 160 pies de altura con una velocidad inicial de 64 pies/seg. La función que describe el movimiento de la pelota está dada por la ecuación

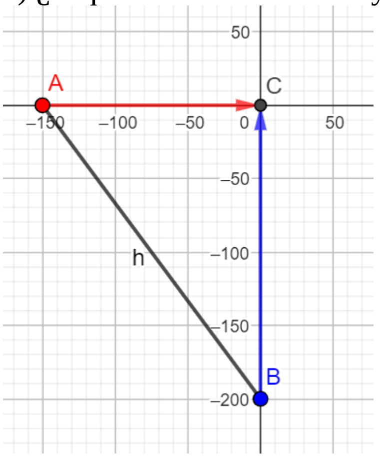
$h = -16t^2 + V_0 t + h_0$ (h esta dada en pies y h_0 es la altura del edificio).

a) ¿En qué instante la pelota alcanza la altura máxima?

Demora 2 seg en alcanzar la altura máxima

b) ¿Cuál es la altura máxima?
   La altura máxima son 224 pies
c) ¿Cuándo llega al piso?
   Llega al piso aproximadamente a los 5,74 seg
d) ¿Con que velocidad llega al piso?
   Llega al piso con una velocidad aproximada de 119,68 pies/seg
e) ¿Cuál es la aceleración en el instante t = 2 seg?
   La aceleración a los 2 seg es -32 pies/seg^2

14) Control de tráfico aéreo. Un controlador de tráfico aéreo detecta dos aviones a la misma altitud con trayectorias que convergen a un punto, ya que vuelan en ángulo recto el uno respecto al otro. Uno de los aviones está a 150 millas del punto y avanza a 450 millas por hora. El otro avión está a 200 millas del punto y avanza a 600 millas por hora.
a) ¿A qué velocidad disminuye la distancia entre estos aviones?



x=-150 mi $\frac{dx}{dt} = 450$ mi/h (cte)

y=-200 mi $\frac{dy}{dt} = 600$ mi/h (cte)

$$h = \sqrt[2]{x^2 + y^2} \rightarrow h_0 = 250\, mi$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{x.\frac{dx}{dt} + y.\frac{dy}{dt}}{\sqrt[2]{x^2 + y^2}}$$

reemplazando

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(-150\, mi).450\frac{mi}{h} + (-200\, mi).600\frac{mi}{h}}{\sqrt[2]{(-150\, mi)^2 + (-200\, mi)^2}}$$

$$\frac{dh}{dt} = -750\, mi/h$$

b)¿Cuánto tiempo tiene el regulador de tráfico aéreo para hacer que uno de los aviones tome otra trayectoria de vuelo?

Tiene 1/3 h = 20 min