TRABAJO PRÁCTICO N°15

EJERCICIO 1-C : Obtener los autovalores y autovectores, si existen, de las matrices siguientes con elementos en R. Hallar una base de cada subespacio asociado.

$$C=\begin{pmatrix}10 & 0 & 2\\ 0 & 6 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

Para determinar los autovalores, iniciamos trabajando a partir de la Ecuación Característica:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \quad \text{considerando la matriz C} \quad \Rightarrow |C-\lambda I|=0$$

Reemplazando la matriz C y la matriz identidad I del mismo orden que C en la Ecuación Característica:

$$|C-\lambda I|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}10 & 0 & 2\\ 0 & 6 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}-\lambda.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}10 & 0 & 2\\ 0 & 6 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}10-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 7-\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}10-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Resolviendo por Sarrus:

$$(10-\lambda).(6-\lambda).(7-\lambda)-4.(6-\lambda)=0$$

Extraemos a $(6-\lambda)$ como factor común:

$$(6-\lambda).[(10-\lambda).(7-\lambda)-4]=0$$

Resuelvo el producto $(10-\lambda).(7-\lambda)$ aplicando la propiedad distributiva:

$$(6-\lambda).(70-17\lambda+\lambda^2-4)=0$$

$$(6-\lambda).(\lambda^2-17\lambda+66)=0$$

Factoreando el trinomio de segundo grado $\lambda^2-17\lambda+66$ en función de sus raíces: $\lambda_1=11$ y $\lambda_2=6$

(cuidado porque estos valores son útiles para factorizar el polinomio, aún no son los autovalores que buscamos)

$$(6-\lambda).(\lambda-11).(\lambda-6)=0$$

La expresión $(6-\lambda).(\lambda-11).(\lambda-6)$ es lo que denominamos POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Para que la expresión anterior se anule, bastará analizar cuáles son los valores que anulan a cada uno de los factores intervinientes, y de esa manera determinamos los valores de λ que verifican dicha ecuación, es decir, los AUTOVALORES buscados:

$$\lambda_1=6 \quad ; \quad \lambda_2=11 \quad ; \quad \lambda_3=6$$

Para calcular los AUTOVECTORES, se hallan los espacios asociados a cada uno de los autovalores encontrados en el paso anterior, partiendo de la expresión: $(A-\lambda I).\overrightarrow{X}=\vec{0}$

$$(A-\lambda I).\overrightarrow{X}=\vec{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \lambda.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} 10-6 & 0 & 2 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 2 & 0 & 7-6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x+2z \\ 0 \\ 2x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x+2z=0 & (1) \\ 2x+z=0 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando a la ecuación (1) por $\frac{1}{2}$, obtenemos: $2x+z=0$

entonces un sistema equivalente sería:

$$\begin{cases} 2x+z=0 & (1) \\ 2x+z=0 & (2) \end{cases}$$

como ambas ecuaciones son coincidentes, nos quedamos solo con una de ellas.
y desde ahí despejamos la condición que deben cumplir los auovectores del subespacio asociado al autovalor.

$$2x+z=0 \quad \Rightarrow \quad z=\text{-}2x$$

Por lo tanto el subespacio asociado a $\lambda_1 = 6$ es:

$$L(\lambda_1)=L(\lambda_3)=\{(x,y,z)/z=\text{-}2x\}$$

$$Autovectores: \;\; L(\lambda_1)=L(\lambda_3)=\{(x,y,-2x)\}$$

$$Base: \;\; \left[L(\lambda_1)\right]=\left[L(\lambda_3)\right]=\{(1,0,-2);(0,1,0)\}$$

$$Dim\left[L(\lambda_1)\right]=Dim\left[L(\lambda_3)\right]=2$$

Para $\lambda_2 = 11$

$$\begin{pmatrix} 10-11 & 0 & 2 \\ 0 & 6-11 & 0 \\ 2 & 0 & 7-11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x+2z \\ -5y \\ 2x-4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+2z=0 & (1) \\ -5y=0 & (2) \\ 2x-4z=0 & (3) \end{cases}$$

De la ecuación (2) de despeja y, encontrando que $y=0$

Multiplicando a la ecuación (1) por -2 , obtenemos: $2x-4z=0$

entonces un sistema equivalente sería:

$$\begin{cases} 2x-4z=0 & (1) \\ 2x-4z=0 & (2) \end{cases}$$

como ambas ecuaciones son coincidentes, nos quedamos solo con una de ellas.

y desde ahí despejamos la condición que deben cumplir los auovectores del subespacio asociado al autovalor.

$$2x-4z=0 \quad \Rightarrow \quad x=2z$$

Por lo tanto el subespacio asociado a $\lambda_2 = 11$ es:

$$L(\lambda_2) = \{(x,y,z)/\, x=2z \quad \wedge \quad y=0\}$$

$$Autovectores: \quad L(\lambda_2) = \{(2z,0,z)\}$$

$$Base: \ [L(\lambda_2)] = \{(2,0,1)\}$$

$$Dim[L(\lambda_2)] = 1$$