Análisis Matemático I

Trabajo Practico N° 3

Función uno a uno - Función inversa –
Límite finito: Definición e interpretación.

- Ing. Roberto Lamas
- Prof. Adjunto Análisis Matemático I

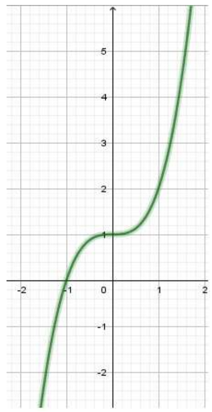
Función inversa

Vimos que una función f es una regla o correspondencia que a cada valor x de su dominio asigna un solo valor único y de su imagen.

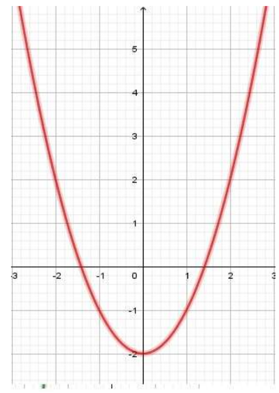
Definición: Se dice que una **función es uno a uno** si cada número en el rango o imagen f se asocia con exactamente un número en su dominio x.

Prueba de la recta horizontal: Cuando trazamos una recta horizontal, la misma debe cortar como mucho al grafico de la función, en un solo punto.

Ej $f \,/\, f(x) = x^3 + 1$



$g/g(x) = x^2 - 2$



Inversa de una función.

Suponga que f es una función uno a uno, con dominio A e imagen B. Puesto que todo número y de B corresponde un número x en A, la función f debe realmente determinar una función reversa g cuyo dominio es B y cuya imagen es A.
La función g se denomina función inversa de f o simplemente inversa de f.

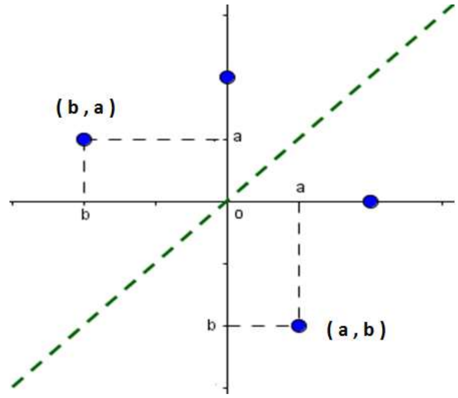
Definición: Sea f una función uno a uno con dominio A e imagen B. La inversa de f es la función g con dominio B e imagen A para la cual :
$f(g(x)) = x$ para toda x en B
$g(f(x)) = x$ para toda x en A.

Si una función no es uno a uno no tiene inversa.

Notación:

La inversa de una función suele escribirse como f^{-1} y se lee “f inversa”.

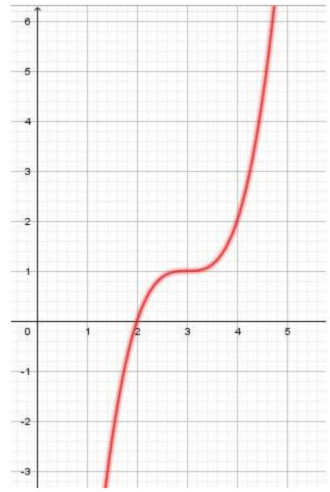
Graficas de f y f^{-1}.
Suponga que (a , b) representan cualquier punto sobre la gráfica de una función uno a uno f.
Entonces f(a) = b y $f^{-1}(b) = a$.



Vemos que (b , a) es un punto sobre la gráfica de f^{-1} , esto lo pueden observar en el gráfico.
Como vemos los puntos (a , b) y (b , a) son reflexiones uno del otro en la recta y = x.

Pasos para encontrar la inversa de una función.
1.- Verificar que se trata de una función uno a uno.
2.- Determinar dominio e imagen.
3.- Despejar de y = f(x) la variable x , obteniendo x en términos de y , así se obtiene $x = f^{-1}(y)$.
4.- Intercambiamos las variables obteniendo
$y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo:
Obtener la inversa de $y = (x - 3)^3 + 1$
Dominio ?
Imagen ?
En uno a uno ?



La inversa será $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 3$

$R \longrightarrow R$

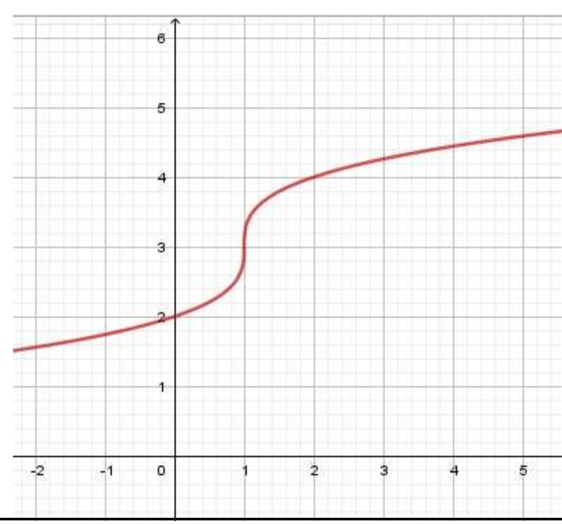
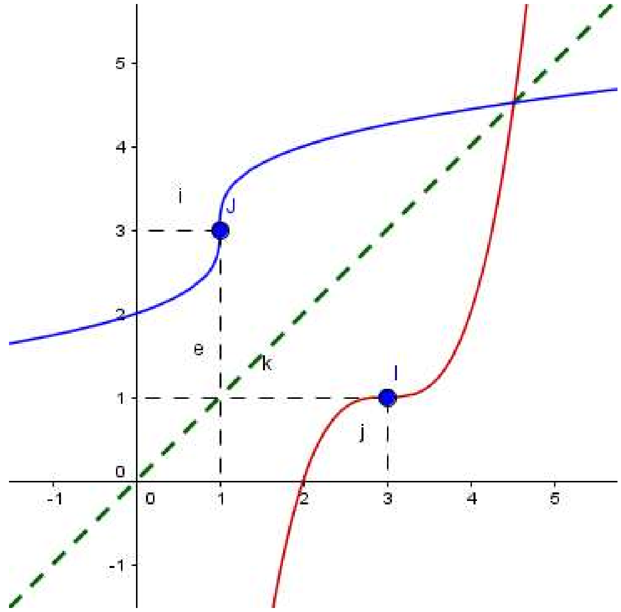
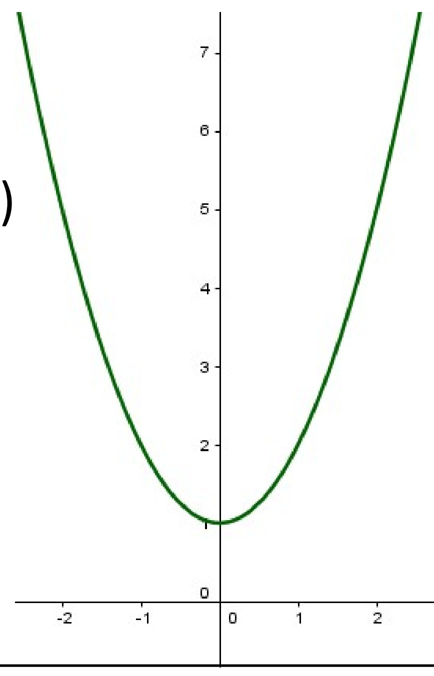


Grafico de la función y su inversa

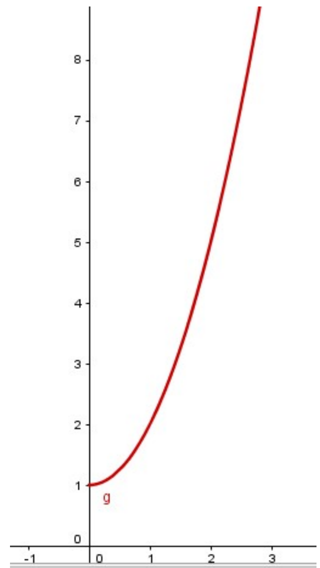


Dominio restringido

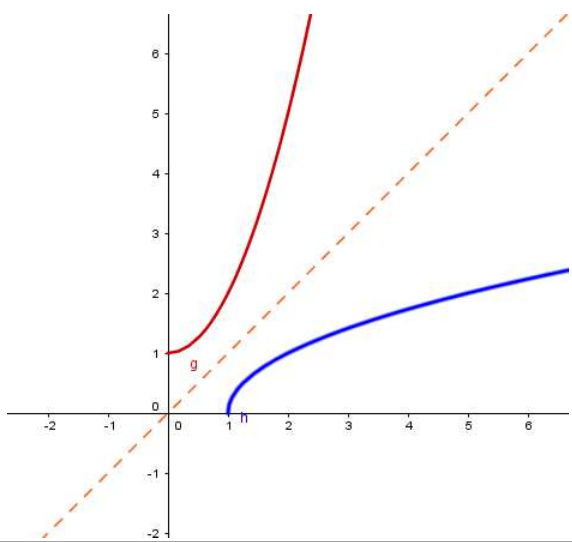
$f(x) = x^2 + 1 \qquad R \longrightarrow [\,1\,,\,\infty\,)$



$f(x) = x^2 + 1 \qquad [\,0 , \infty\,) \longrightarrow [\,1 , \infty\,)$



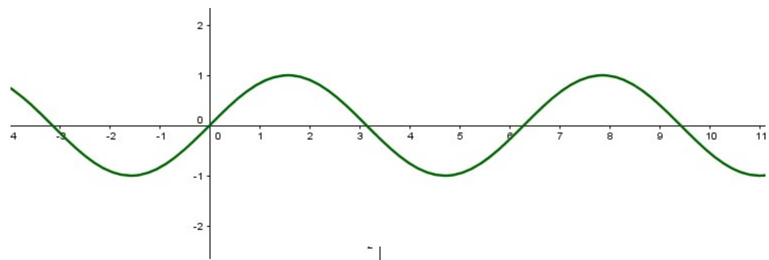
$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad [\,1 , \infty\,) \longrightarrow [\,0 , \infty\,)$



Función trigonométrica inversa

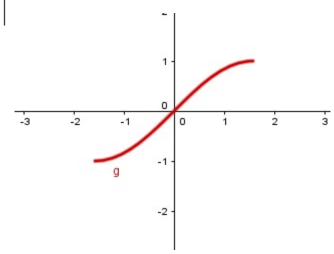
a) $f(x) = \text{sen } x$

$R \longrightarrow [-1, 1]$



$f(x) = \text{sen } x$

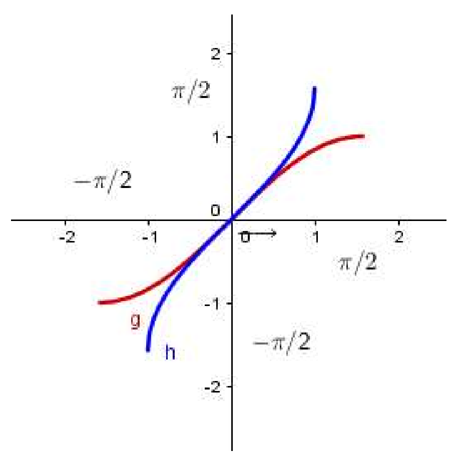
$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$



Inversa:

$f^{-1}(x) = \text{arcsen } x$

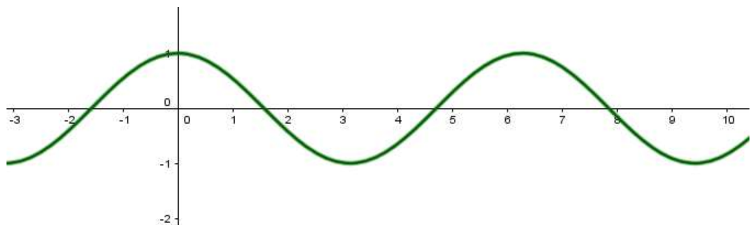
$[-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$



Función trigonométrica inversa

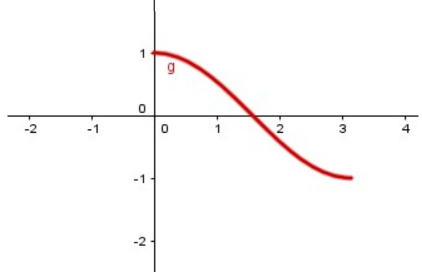
b) $g(x) = \cos x$

$\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$



$g(x) = \cos x$

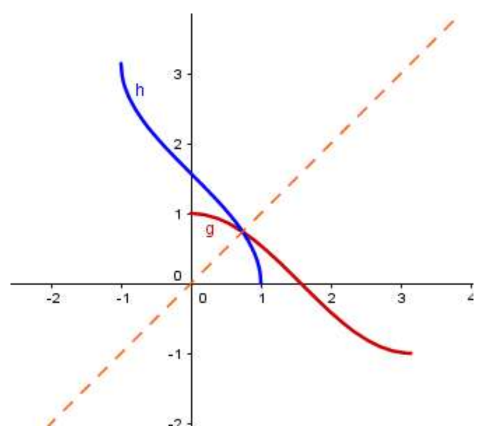
$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$



Inversa:

$g^{-1}(x) = \arccos x$

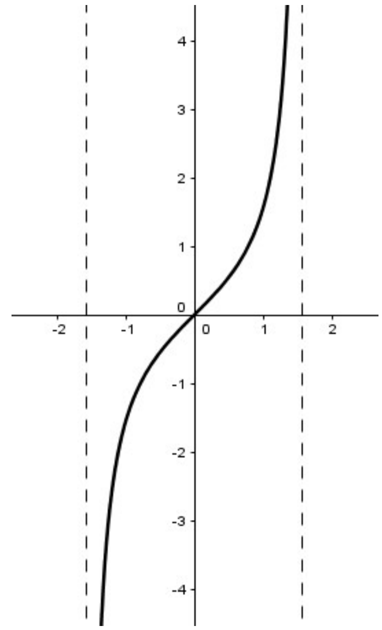
$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$



Función trigonométrica inversa

c) $g(x) = \tan x$

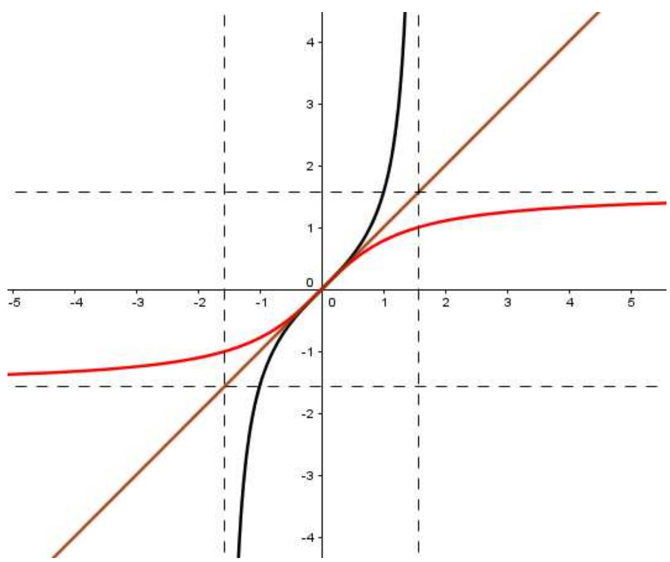
$(-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow R$



Inversa:

$g^{-1}(x) = \arctan x$

$R \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$



Que entendemos por limite ?

Existen varios tipos de limites, veamos matemáticamente

Sea f / f(x) = $\frac{x^2-9}{x-3}$

Dom(f) = R – { 3 }   f(3) $\nexists$

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3,0001	3,001	3,01	3,1
y	5,9	5,99	5,999	5,9999	6,0001	6,001	6,01	6,1

x → 3^- 6   x → 3^+

Podremos estar más cerca de 6?
Entonces que tan cerca debe estar x a 3?

Vamos a definir formalmente el limite.

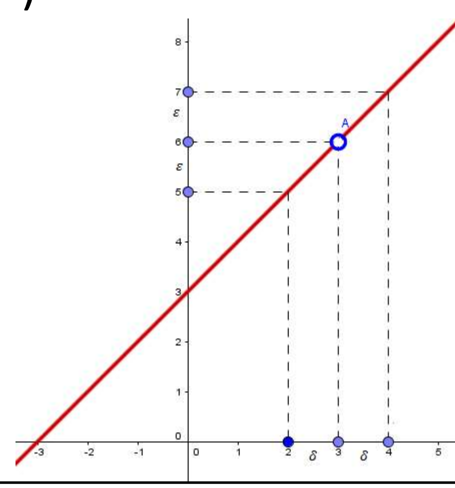
Si hablamos de proximidad?, de distancia?, de que hablamos?
$| x - 3 | < \delta$, pero $x \neq 3 \Rightarrow \quad 0 < | x - 3 | < \delta$

Otra forma $x \in (3 - \delta , 3 + \delta) - \{ 3 \}$
$x \in E^{*} (3 , \delta)$

De la misma manera vamos a definir la proximidad a 6.

$| y - 6 | < \varepsilon \qquad y \in (6 - \varepsilon , 6 + \varepsilon)$

$y \in \mathrm{E} (6 , \varepsilon)$



Ejemplo:

$| y - 6 | < 0{,}0003 \qquad | x - 3 | < \delta$?

$\left|\frac{x^2-9}{x-3} - 6\right| < 0{,}0003$

$| x + 3 - 6 | < 0{,}0003 \Rightarrow | x - 3 | < 0{,}0003 = \delta \Rightarrow \quad \delta = \varepsilon$

$x \in (3 - 0{,}0003 , 3 + 0{,}0003) - \{ 3 \}$

$x \in (2{,}9997 , 3{,}0003) - \{ 3 \}$

$x \in E^* (3 , 0{,}0003)$

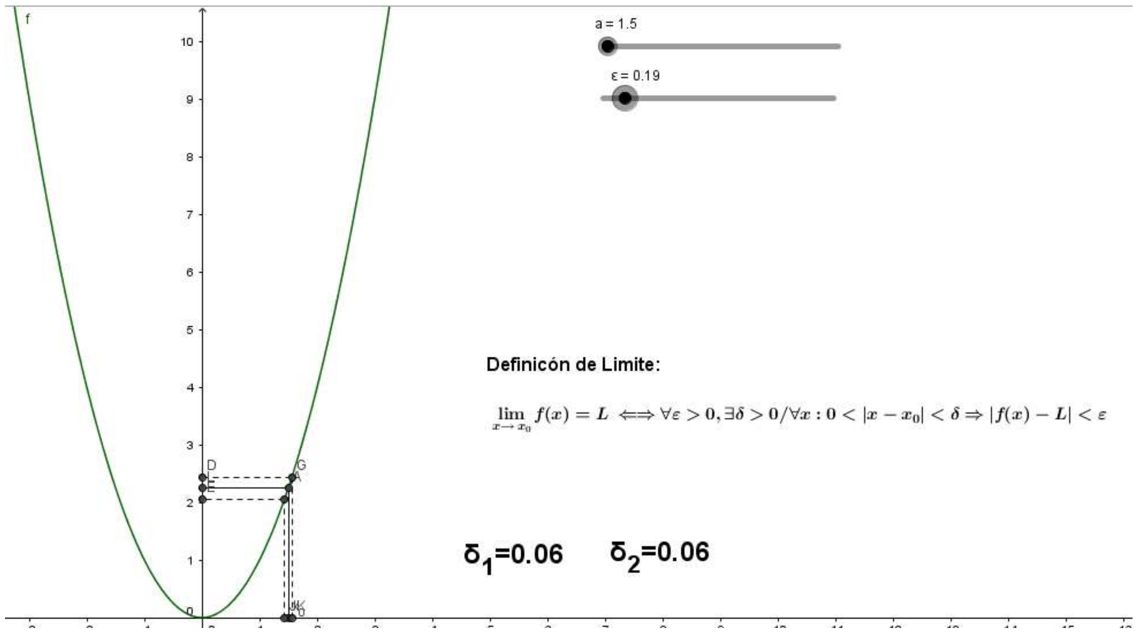
Definición de límite:

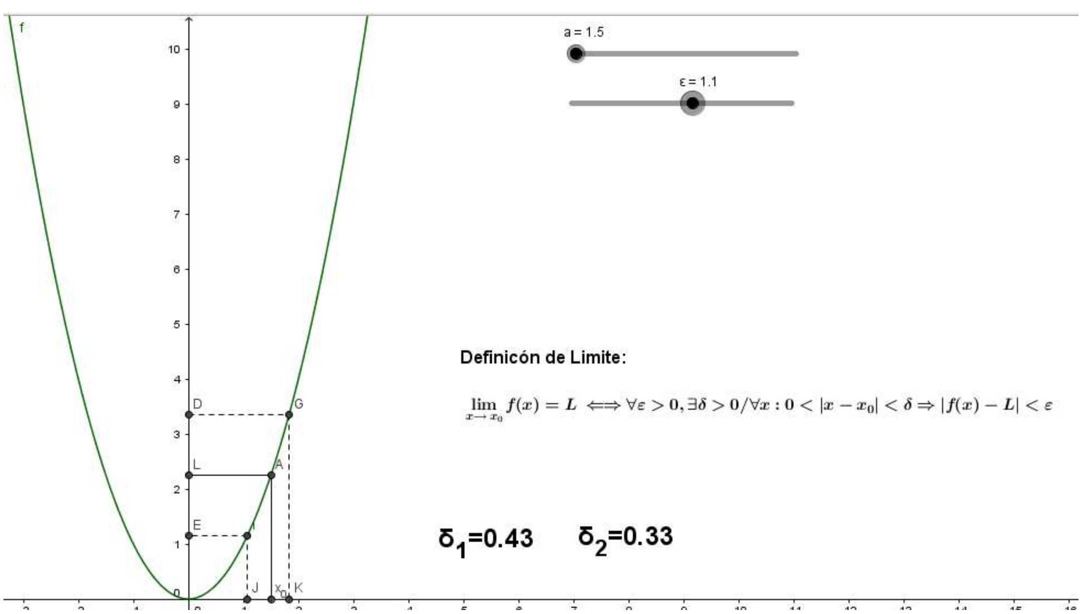
Se dice que el número real L es el límite de f(x) cuando x tiende al punto "a" y se denota:

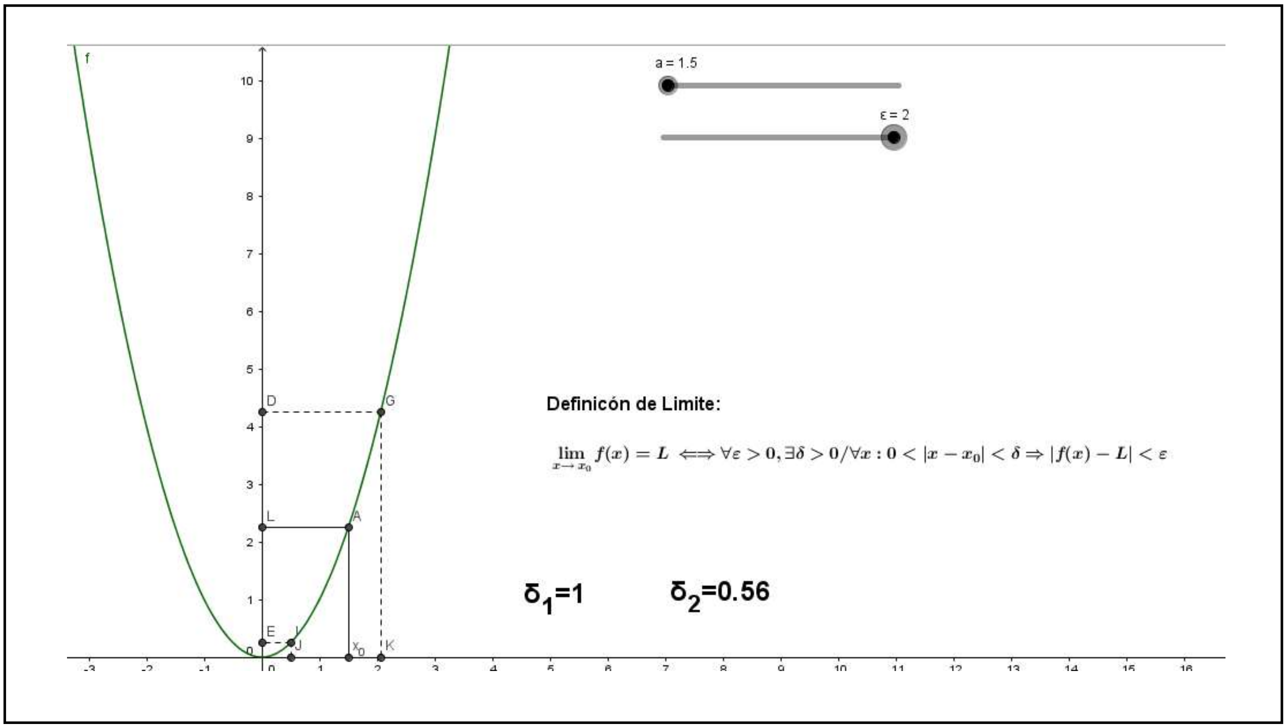
$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 \ / \forall\, x : 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$

$\iff \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 \ / \forall\, x \in E^* (a , \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{E} (L , \varepsilon)$

Gráficamente







Conclusiones:
a) El valor de δ depende de ε y también de a.
b) f debe estar definida en los alrededores de a.
c) a puede o no estar en el dominio de f, pero si lo esta L puede o no coincidir con f(a).
d) Una vez encontrado δ cualquier $\delta' < \delta$ verifica la definición.

Ejemplo

Probar que $\lim_{x \to 3}(2x - 5) = 1 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0$ / $\forall\, x : 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |2x - 5 - 1| < \varepsilon$

1) Debemos encontrar δ hacemos como en el grafico , partimos de $|y - 1| < \varepsilon$ y buscamos $|x - 3| < ?$

$|2x - 5 - 1| < \varepsilon \Rightarrow |2x - 6| < \varepsilon \Rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow$
$|x - 3| < \varepsilon / 2 = \delta \qquad \delta = \varepsilon / 2$

2) $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon / 2 \Rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon$
$\Rightarrow |2x - 6| < \varepsilon \Rightarrow |2x - 5 - 1| < \varepsilon$

Este paso por lo general se omite.

Calcular:

$\lim_{x \to 1} f(x)$

$\lim_{x \to -2^-} f(x)$

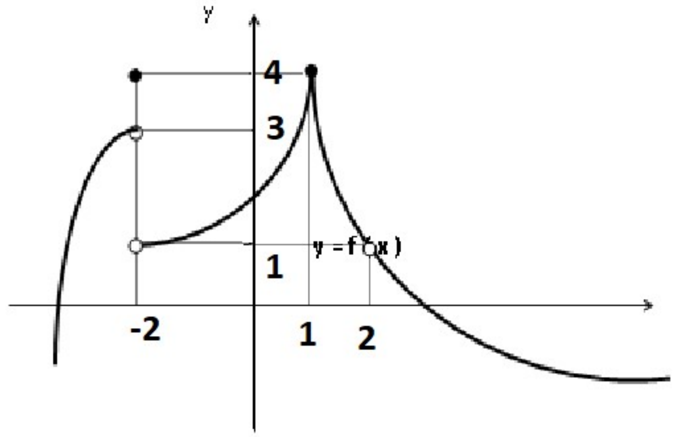
$\lim_{x \to -2^+} f(x)$

$\lim_{x \to -2} f(x)$

f(-2)=

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$

$\lim_{x \to 2^+} f(x)$



$\lim_{x \to 2} f(x)$ f(2) f(1)