Derivada de funciones elementales

1.- y = sen (x) ⇒ y ´= cos (x)

Partimos de la definición de derivada, y desarrollamos el seno de la suma de dos ángulos:

$$y\,´ = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h)+\cos(x)\,sen(h)-sen(x)}{h}$$

Tomamos factor común sen(x) y aplicamos propiedades del límite de una suma de funciones:

$$\lim_{h\to 0}\left(sen(x)\frac{(\cos(h)-1)}{h}+\cos(x)\frac{sen(h)}{h}\right) = sen\,(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\cos(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\right)$$

En cálculos auxiliares obtenemos el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\left(\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(-\frac{(sen(h))^2}{h\,(\cos(h)+1)}\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\,\frac{sen(h)}{\cos(h)+1} = -1*0 = 0$$

Por lo tanto el límite pedido será:

$$y\,´ = sen(x)*0+\cos(x)*1 = \cos(x)$$

2.- .- y = cos (x) ⇒ y ´= – sen(x)

Partimos de la definición de derivada, y desarrollamos el coseno de la suma de dos ángulos:

$$y\,´ = \lim_{h\to 0}\frac{cos(x+h)-cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cos(x)\cos(h)-\text{sen}(x)\,sen(h)-cos(x)}{h}$$

Tomamos factor común cos(x) y aplicamos propiedades del límite de una suma de funciones:

$$\lim_{h\to 0}\left(cos(x)\frac{(\cos(h)-1)}{h}-\text{sen}(x)\frac{sen(h)}{h}\right) = cos\,(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)-\text{sen}(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\right)$$

En cálculos auxiliares obtenemos el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\left(\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(-\frac{(sen(h))^2}{h\,(\cos(h)+1)}\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\,\frac{sen(h)}{\cos(h)+1} = -1*0 = 0$$

Por lo tanto el límite pedido será:

$$y\,´ = cos(x)*0-sen(x)*1 = -\,sen(x)$$

3.- y = tang (x) ⇒ y ´= $\sec^2(x)$

Escribimos la tangente de forma de un cociente

$$y = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

Aplicamos derivada de un cociente:

$$y' = \frac{\cos(x)\cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} =$$

En el numerador tenemos la relación fundamental trigonométrica, por lo tanto:

$$y'' = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$$

4.- Idem para el resto de las funciones trigonométricas.

5.- y = ln(x) ⇒ y ' = 1 / x vamos a aceptar que: $\lim_{p \to 0} (1+p)^{1/p} = e$

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Por propiedades de logaritmos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\, ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

$$p = \frac{h}{x} \;\Rightarrow\; h = p * x$$

Si h → 0 ⇒ p → 0 $\lim_{p \to 0} ln(1+p)^{\frac{1}{px}}$ Por propiedades de funciones continuas:

$$\lim_{p \to 0} ln(1+p)^{\frac{1}{px}} = ln\left(\lim_{p \to 0} (1+p)^{\frac{1}{px}}\right) = ln\left(\lim_{p \to 0} (1+p)^{\frac{1}{p}}\right)^{1/x} =$$

$$= ln(e)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}$$

6.- y = e^x ⇒ y ´= e^x

y = e^x por función inversa x = ln (y) entonces x ´ = 1/y

Al derivar una función inversa sabemos que y´(x) = 1 / x´(y) entonces:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

7.- $y = log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{x\, ln(a)}$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(a)} = \frac{1}{x\ln(a)}$$

8.- y = a^x ⇒ y ´ = a^x ln(a)

$$y = a^x \;\Leftrightarrow\; x = log_a(y)$$

Por derivada de función inversa:

$$y''(x) = \frac{1}{\frac{1}{y\ln(a)}} = y\ln(a) = a^x\ln(a)$$