Capítulo 6

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Álgebra y Geometría Analítica
Facultad de Ingeniería UNJu
2021

1.1.- Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales son una poderosa herramienta matemática para modelar problemas como la distribución de cosechas ó el presupuesto de un país, el cálculo de la órbita de un planeta, el cálculo de la estabilidad estructural de un edificio en ingeniería civil, entre otros muchos. De las muy variadas y diversas aplicaciones se puede mencionar unos de los paradigmas económicos más empleados: el modelo input–output de Wassily Leontief quien en 1973 recibió el premio nobel en Ciencias Económicas. Si bien la teoría se le atribuye a Leontief algunos historiadores afirman que el procedimiento fue descrito en 1758 por el economista francés François Quesnay que desarrolló una versión más rudimentaria. Karl Marx fue el primero en traducir la obra de Quesnay a un sistema matricial de ecuaciones, en los llamados modelos de reproducción simple y reproducción ampliada (El Capital, vol. II).

Otra de las obras célebres de la teoría del álgebra lineal fue propuesta por George Bernard Dantzig (1914–2005), quien como consejero matemático de las Fuerzas Áreas estadounidense presentó por primera vez en el año 1947, un problema de programación lineal y propuso el Método Simplex para resolverlo haciendo uso de los sistemas de ecuaciones lineales.

La búsqueda de soluciones tanto a las ecuaciones algebraicas como a los sistemas de ecuaciones lineales es tan importante como antigua, en el segundo caso aparecieron incluso antes del estudio de las matrices y determinantes.

El médico y matemático italiano Girolamo (Gerolamo) Cardano (1501–1576) se destacó por sus trabajos en álgebra. En 1945 publicó su obra *Ars Magna* donde expuso las soluciones de las ecuaciones de tercer y cuarto grado y muestra una regla para resolver sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que llama “regula de modo” y que en esencia es la conocida regla de Cramer.

Francois Viète (1540–1603) fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras, esto marcó el inicio de una nueva etapa en la cual René Descartes

(1596–1650) aportó de forma destacada al desarrollo de dicha notación. A partir de allí el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones.

Tiempo después Euler la define como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases" mientras que Leibniz al estudiar los sistemas de ecuaciones lineales y no disponer de una notación matricial, representaba los coeficientes de las incógnitas mediante una pareja de subíndices.

Dos años luego de su muerte, se publicó la obra de Colin Maclaurin (1698–1746) *Tratado de Álgebra* en donde aparecen los primeros resultados sobre determinantes, se prueba la Regla de Cramer para sistemas hasta tres ecuaciones con tres incógnitas mientras que el propio Gabriel Cramer (1704–1752) anunció la regla general para sistemas de n ecuaciones con n incógnitas en su obra *Introducción al análisis de líneas algebraicas* en 1750.

Más adelante, en 1764 Etienne Bézout (1730–1783) expuso nuevos métodos para calcular determinantes al igual que Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796) pero en el año 1771. Un año más tarde Pierre Simon Laplace (1749–1827) criticó tanto a Cramer como a Bézout tildando sus métodos como imprácticos y describió un método para resolver sistema de ecuaciones lineales sin tener que calcular, de manera explícita, determinantes.

De esta forma, el álgebra lineal tuvo un fuerte empuje gracias al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, pero hasta el siglo XVIII era una disciplina dedicada a resolver ecuaciones de grado arbitrario. Hasta que el matemático y filósofo francés Jean le Rond D'Alembert (1717–1783) descubre que las soluciones de un sistema de la forma $A\,X = B$ con $A, X\ y\ B$ matrices, cumplen ciertas propiedades, dando inicio así al desarrollo de un álgebra más teórica. Este mismo autor junto con Euler y Lagrange se dieron cuenta que la solución del sistema homogéneo $A\,X = N$ donde N es la matriz nula, es una combinación lineal de algunas soluciones particulares.

En este capítulo luego de ver los conceptos básicos para poder manipular y entender sistemas de ecuaciones lineales se estudian dos aspectos básicos en este tema: análisis del sistema para determinar su compatibilidad y la resolución por medio de distintos métodos. Dedicamos un apartado para los sistemas homogéneos asociados a los no homogéneos y aquellos en los cuales el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones. Finalmente se ejemplifica, para poder afianzar clasificación de los sistemas, aquellos en donde intervienen parámetros y se establece la relación que existe entre la solución o no de un sistema con las características de las matrices del sistema y la correspondiente matriz ampliada.

1.2.- Conceptos básicos

El hombre siempre recurre a la matemática para poder analizar y entender la realidad ya que esta disciplina le permite modelar, con distintas herramientas, fenómenos químicos, físicos o biológicos, entre otros tantos.

Una de las herramientas que permiten resolver problemas concretos o que ayudan a encontrar una solución a problemas específicos son las ecuaciones algebraicas. Recordemos que la palabra ecuación proviene del latín "*aequatio, aequationis*" que significa "*nivelación, igualación o repartición igual de algo*", entonces una ecuación es una igualdad que contiene algunas cantidades desconocidas (variables o incógnitas) y que se distinguen de las identidades que también son igualdades pero que se verifican para cualquier valor que se asignen a sus variables. Ejemplos de identidades ya conocidas son: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ o $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Las siguientes expresiones, representan ecuaciones:

$a)\ 2x - 5 = 3$	$e)\ x - 3xy = 7$
$b)\ -2x + y = 5$	$f)\ (x+y)(3x-y)^{-1} = 1$
$c)\ x - 2y + 3z = 2$	$g)\ log\ (2x-1) = 4$
$d)\ 2x^2 + 3x = 0$	$h)\ 2\ sen\ x = 1$

En general el estudio de las ecuaciones dependerá del tipo que sean estas, en nuestro caso restringiremos el análisis y estudio al caso de ecuaciones lineales, de allí la siguiente

Definición: *se llama ecuación lineal a una igualdad donde las variables que intervienen solo tienen constantes y potencia 1. Si en la ecuación intervienen n variables, entonces se dice que la ecuación es lineal con n variables.*

En los ejemplos anteriores, los tres primeros representan ecuaciones lineales, el inciso $a)$ de una sola variable mientras que $b)\ y\ c)$ son de dos y tres variables respectivamente.

Los incisos $d), e)\ y\ f)$ no son ecuaciones lineales pues en ellos intervienen potencias mayores a uno o bien producto o cocientes entre sus variables. En los restantes incisos intervienen una función logarítmica o trigonométrica.

El estudio de ecuaciones lineales obedece al hecho que muchos problemas en múltiples disciplinas tienen un carácter lineal y puede resolverse este tipo de ecuaciones mediante algoritmos que siempre dan una respuesta más allá de la cantidad de ecuaciones con las que se trabaje y de las incógnitas que estas tengan.

El caso más sencillo de un sistema de ecuaciones lineales, es aquel que posee una solo ecuación con una sola incógnita "x". Por ejemplo:

$ax = b$ con $a\ y\ b\ \in \mathbb{R}$. La solución de esta ecuación –en caso de existir– dependerá de a.

i) Si a posee inverso multiplicativo, es decir $a \neq 0$, entonces la ecuación tiene solución única. $x = a^{-1}b$ para cualquier valor de b.

ii) Si a no posee inverso multiplicativo, es decir $a = 0$, entonces la solución de la ecuación dependerá de b.

ii$_1$) Si $b = 0$, entonces la ecuación tiene infinitas soluciones ya que cualquier $x \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación.

ii$_2$) Si $b \neq 0$, entonces la ecuación no tiene solución.

El caso más general está dado por la siguiente

Definición: *una ecuación lineal con n incógnitas* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *es una ecuación que tiene la forma* $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ *o de manera reducida* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ *donde* $n \in \mathbb{Z}^+$, *los coeficientes* a_i *y el término* b *son elementos de un cuerpo* $\mathbb{K}$[1].

Los incisos $b)$ y $c)$ del ejemplo anterior pueden ser reescritos de la siguiente manera.

$b) - 2x_1 + x_2 = 5$ y $c)\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$

Solución: *de la ecuación lineal de n incógnitas,* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, *es la n-tupla* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *que la satisfacen, es decir verifican* $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = b$.

Otro sistema, seguramente ya estudiado, es por ejemplo $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Se trata de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Particularmente este sistema puede verse desde dos perspectivas.

a) Desde el punto de vista *geométrico*, cada una de las dos ecuaciones representa una recta en el plano cartesiano. Resolver este sistema consiste en encontrar –si existen– los puntos de intersección de ambas rectas. Es por esta razón que estos sistemas se llaman lineales.

b) Desde el punto de vista *algebraico*, el problema consiste en hallar las coordenadas cartesianas de los puntos que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones. Como ya se dijo, este tipo de ecuaciones son lineales porque cada término (excepto los independientes) es de grado 1.

Si nos quedamos en el marco algebraico, nada nos impide generalizar el concepto de sistema lineal a más de dos ecuaciones. Así, tenemos la siguiente

Definición: *un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *es un conjunto de ecuaciones lineales, de la forma*

[1] Un cuerpo o campo, es un conjunto K con dos operaciones binarias, usualmente llamadas suma "+" y producto "." La suma es asociativa, conmutativa y su elemento neutro es 0, además para cada elemento existe un inverso. El producto es asociativo, conmutativo, su elemento neutro es 1 y todo elemento distinto de cero tiene inverso, además el producto se distribuye respecto de la suma.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ *o de manera resumida* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad con\ i = 1, 2,\ \dots, m.$

Donde los a_{ij} *y* b_i *son elementos de un cuerpo* $\mathbb{K}$.

Se han colocado dos subíndices a los coeficientes de cada una de las incógnitas para que quede unívocamente localizado. El primer subíndice remite a la ecuación a la que pertenece (filas) mientras que el segundo hace referencia a la incógnita de la cual es coeficiente (columna).

Por otro lado, esta doble indexación será de gran utilidad a la hora de construir matrices para el análisis y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Según sea la cantidad de ecuaciones (m) y de incógnitas (n) suele llamarse al sistema cuadrado si $m = n$ o bien rectangular si $m \neq n$. En este último caso, si el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, $m > n$, algunos autores suelen denominarlos sobredeterminados, mientras que si tiene menos ecuaciones que incógnitas, $m < n$, se habla de sistemas subdeterminados.

Solución: *de un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas,* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad con\ i = 1, 2, \dots, m$, *es la n-tupla* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones.*

Puede ocurrir que uno o más sistemas lineales tengan el mismo conjunto solución. En ese caso podemos establecer la siguiente:

Definición: *dos o más sistemas lineales con el mismo conjunto de incógnitas se dicen equivalentes si y solo si tiene el mismo conjunto solución.*

Ejemplo. Sean los sistemas $a)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

En a), sistema cuadrado, puede verificarse que el par ordenado $(x_1, x_2) = (1, 2)$ satisface ambas ecuaciones simultáneamente, por lo tanto es solución. También puede verificarse que es la *única solución*.

En b), sistema rectangular con menos ecuaciones que incógnitas, la terna ordenada $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 0)$ satisface ambas ecuaciones. Pero también la terna $(x_1, x_2, x_3) = (3, \alpha, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ satisface ambas ecuaciones. En este caso existen *infinitas soluciones*, ya que hay infinitas ternas (3–tuplas) ordenadas que satisfacen las dos ecuaciones.

En c), sistema rectangular con más ecuaciones que incógnitas, *no existe solución,* ya que al sumar miembro a miembro la primera ecuación con la segunda obtenemos $2x_1 = 6$ lo que implica que $x_1 = 3$. Reemplazando este valor en la primera o segunda ecuación, obtenemos $x_2 = -1$. Pero estos dos valores, $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$, no satisfacen la tercera ecuación, por lo tanto no existe un par ordenado que satisfaga simultáneamente estas tres ecuaciones.

Debemos recalcar que los tres sistemas anteriores son simplemente ejemplos esclarecedores de lo que estamos exponiendo, no debe inferirse de ellos que todo sistema cuadrado siempre posee una única solución (compatible determinado), que todo sistema con menos ecuaciones que incógnitas siempre tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado) y que finalmente todo sistema con más ecuaciones que incógnitas nunca tiene solución (incompatible).

Se demostrará, en los siguientes apartados, que todo sistema de ecuaciones lineales puede tener o no tener solución. En caso de tenerla (compatible), esta a su vez puede ser única (compatible determinado) o infinitas (compatible indeterminado). Si el sistema no posee solución se dice incompatible. Esto nos lleva a la siguiente

Definición: *un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con al menos una solución se denomina compatible, si es única se denomina sistema compatible determinado, si existen infinitas soluciones se lo denomina sistema compatible indeterminado. Un sistema sin solución se denomina sistema incompatible. El conjunto de todas las soluciones de un sistema suele llamársele conjunto solución.*

En resumidas palabras:

$$Sistema\ de\ ecuaciones\ lineales \begin{cases} Compatible & \begin{cases} Determinado \\ Indeterminado \end{cases} \\ Incompatible \end{cases}$$

Recurramos ahora a la perspectiva geométrica y analicemos algunos ejemplos de sistemas que ya sabemos resolver.

Una ecuación lineal $ax + by = c$ con dos incógnitas x e y, se interpreta geométricamente como ecuación cartesiana de una *recta* en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, resolver un sistema de m ecuaciones con $m = 2 \vee m = 3$ con dos incógnitas, $n = 2$, significa encontrar pares ordenados, (x, y), que satisfagan las ecuaciones lo que es equivalente a analizar si dos o tres rectas en el plano se intersecan en un punto (compatible determinado) son coincidentes (compatible indeterminado) o bien no tienen ningún punto en común (incompatible). Por ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

Para resolver este sistema usaremos el método de reducción por sumas y restas ya que, en primer lugar, dicho procedimiento es ya conocido y, en segundo lugar, se generalizará en los apartados correspondientes a la resolución de sistemas lineales.

Si a la segunda ecuación la multiplicamos por el escalar $\lambda = -2$ y luego sumamos ambas ecuaciones, obtenemos $-3y = 3$ por lo tanto $y = -1$ con lo que $x = 3$.
Solución única $(x, y) = (3, -1)$. Sistema compatible determinado. Geométricamente las dos ecuaciones $(m = 2)$ corresponden a dos rectas que se intersecan en el punto $(3, -1)$.

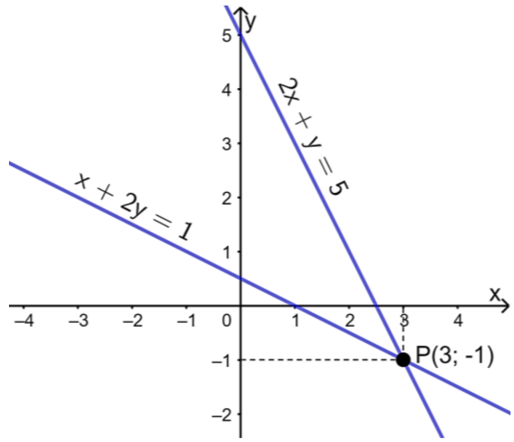

Gráfico 1 Sistema compatible determinado

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

Como observamos que los coeficientes de las incógnitas son opuestos, procedemos a sumar ambas ecuaciones, obteniéndose $0 = 2$ lo que es algebraicamente una incoherencia. Pero podemos colocar cada ecuación del sistema en su forma explícita.
$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x \end{cases}$ y podemos observar que ambas ecuaciones tienen la misma pendiente $(p = -1)$ y distintas ordenadas al origen, lo que significa que son paralelas. Esto se muestra en el gráfico 2.

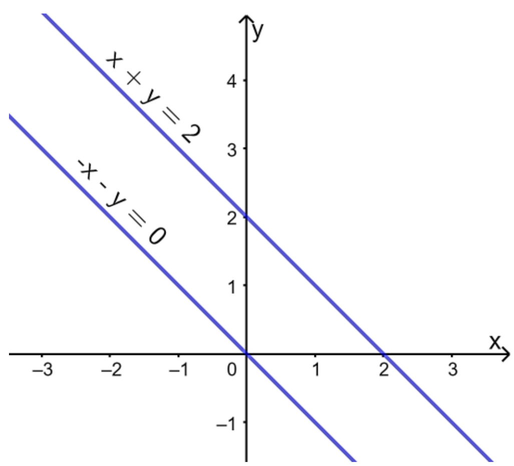

Gráfico 2 Sistema incompatible

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

Podemos observar, o bien que la segunda ecuación se obtuvo multiplicando la primera por el escalar $\lambda = 2$ con lo que concluimos que se trata de la misma ecuación, o bien aplicar el procedimiento indicado y multiplicar la primera ecuación por el escalar $\lambda = -2$, sumar ambas ecuaciones y obtener $0 = 0$, expresión tautológica (siempre es verdadera). En ambos casos se llega a la misma conclusión, que se trata en realidad de la misma ecuación $x + y = 3$, o sea que $y = 3 - x$. Por lo tanto cualquier par ordenado de la forma $(x, 3 - x)$ es solución del sistema. El sistema es compatible indeterminado.
Geométricamente ambas ecuaciones representan la misma recta y las infinitas soluciones son todos los puntos de la forma $(x, 3 - x)$, que son los puntos de la recta.

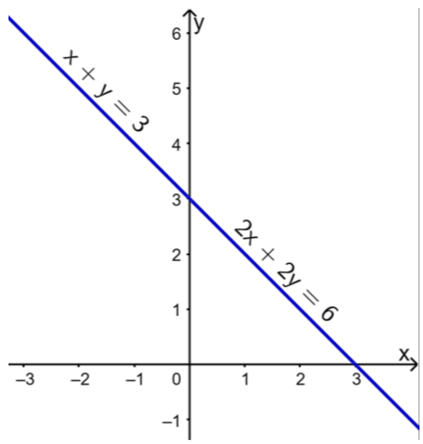

Gráfico 3 Sistema compatible indeterminado

Similar análisis puede hacerse cuando $m = 3$, es decir tres ecuaciones con dos incógnitas.

d) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 4 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

Sistema compatible determinado cuya solución es $(x, y) = (3, -1)$. Geométricamente son tres rectas que tiene un punto en común, tal como se muestra en el gráfico 4.

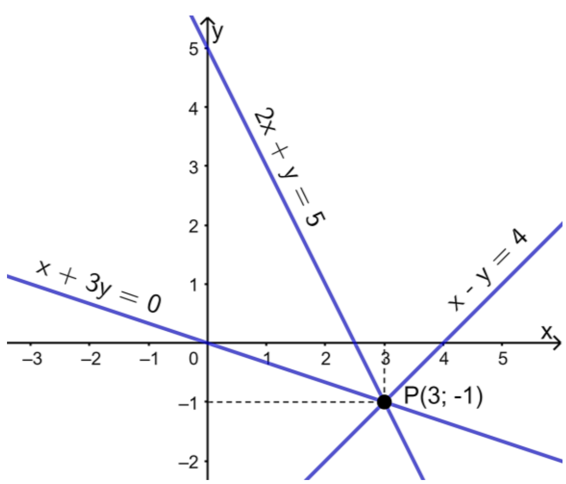

Gráfico 4 Sistema compatible determinado

e) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

Sistema incompatible. Geométricamente son tres rectas que no tienen un punto en común, tal como se muestra en el gráfico 5. Obsérvese que si las rectas se toman de a pares, estas tienen un punto en común, pero las tres juntas, no.

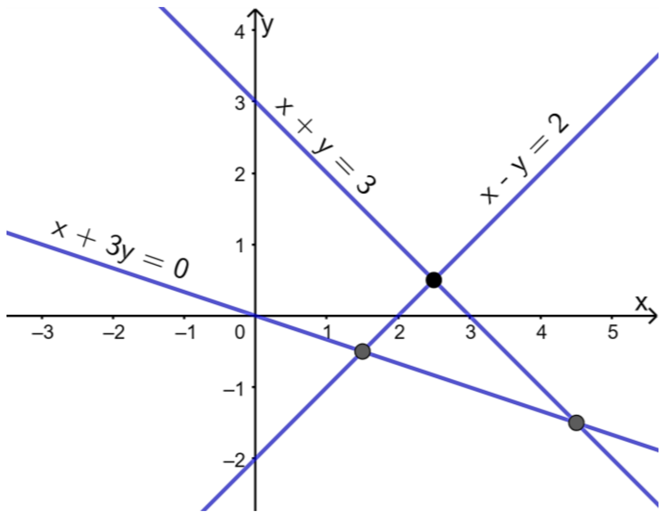

Gráfico 5 Sistema incompatible

2.- Distintas formas de expresar un sistema de ecuaciones lineales

Veremos a continuación, distintas formas en las que se puede expresar un mismo sistema de ecuaciones lineales, destacando que no son las únicas sino aquellas a las que recurriremos en el desarrollo del presente capítulo.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, puede expresarse como una única ecuación matricial $A.X = B$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B} \Longrightarrow A.X = B$$

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Se pueden construir tres matrices

a) La matriz de los coeficientes, A, matriz de orden $(m\,x\,n)$ y cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

b) La matriz de las incógnitas, X, matriz de orden $(n\,x\,1)$ y cuyos elementos son las n incógnitas.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

c) La matriz de los términos independientes, B, matriz de orden $(m\,x\,1)$ y cuyos elementos son los términos independientes.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Como A es de orden $(m\,x\,n)$ y X es de orden $(n\,x\,1)$, el producto, $A\,.X$, es posible y da por resultado una matriz de orden $(m\,x\,1)$. Entonces es posible escribir $A.X = B$.

Además de estas tres matrices es posible construir una cuarta matriz, llamada matriz ampliada, $A'\,o\,\,(A|B)$, que es una matriz de orden $[m\,x\,(n\,+\,1)]$ y sus columnas son las columnas de la matriz A más la columna de los términos independientes.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Otra forma de expresar un sistema de ecuaciones lineal es de manera vectorial.

Con los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes, se pueden construir vectores columnas.

Por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Llamada forma vectorial del sistema de ecuaciones lineales. Es decir

$x_1\,\overrightarrow{c_1} + x_2\overrightarrow{c_2} + \ \ldots + x_n\overrightarrow{c_n} = \overrightarrow{b}$ en donde $\overrightarrow{c_i}$ es el vector columna de posición i de la matriz A y $\overrightarrow{b}$ es el vector de $\mathbb{R}^m$ cuyas componentes son los términos independientes del sistema.

De esta manera las soluciones del sistema son simplemente los escalares que lleven a que el vector $\overrightarrow{b}$ sea una combinación lineal de los vectores columnas $\overrightarrow{c_1},\ \overrightarrow{c_2},\ \ldots, \overrightarrow{c_n}$

Finalmente, un sistema puede ser visto como una transformación lineal. Las transformaciones lineales son funciones especiales y se estudiaran en capítulos posteriores.

Dos son las cuestiones que se presentan al estudiar sistemas de ecuaciones lineales, en primer lugar, analizarlos o sea, determinar si tienen solución (compatible) o no (incompatible) y en caso de tener solución –como segunda instancia– determinar cuántas y cuáles son las soluciones.

Para la primera instancia utilizaremos, previa demostración, un valioso teorema, el teorema de Rouché–Frobenius. Destacamos que este teorema permite analizar un sistema; no resolverlo. Para ese último caso se analizarán y ejemplificarán distintos métodos de resolución como el de Gauss; Gauss–Jordan; Cramer e inversión de matrices.

3.- Análisis de sistemas de ecuaciones lineales

El nombre del teorema, se debe al matemático francés Eugène Rouché, que lo enunció en 1875 y a Frobenius. Poco después de su publicación, el francés Georges Fontené se atribuyó la primera demostración del mismo, y Frobenius, en 1905, acreditó la demostración a Rouché y Fontené.

Sin embargo, el nombre por el que se conoce el resultado (especialmente en los países de habla hispana) se debe al matemático hispano-argentino Julio Rey Pastor, que lo refirió de tal forma. En otros países es conocido como Teorema de Rouché–Fontené o Teorema de Kronecker–Capelli[2].

Teorema de Rouché–Frobenius: *la condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, $A.X = B$, sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada.*

Sea $A.X = B$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, $A.X = B$ es compatible $\Leftrightarrow\ \rho(A) = \rho(A')$.

$D \Longrightarrow$) Si el sistema es compatible, entonces $\rho(A) = \rho(A')$

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{cases} \quad \text{y} \quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \text{su matriz}$$

ampliada.

[2] Ernesto Aranda Ortega (2013) “Algebra lineal con aplicaciones y Python”. Impreso por Lulu.com. Ciudad Real. España.

Por la hipótesis el sistema es compatible, o sea que tiene solución, es decir que existen n valores, $s_1, s_2, \dots, s_n$, para las incógnitas que verifican todas las ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + & a_{12}s_2 + & \dots & +a_{1n}s_n = & b_1 \\ a_{21}s_1 + & a_{22}s_2 + & \dots & +a_{2n}s_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}s_1 + & a_{m2}s_2 + & \dots & +a_{mn}s_n = & b_m \end{cases}$$

Si en A' sustituimos $b_1, b_2, \dots, b_m$, obtenemos:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n \end{array}\right)$$

La última columna es combinación lineal de las demás, por lo tanto a efectos del cálculo del rango puede suprimirse. Por lo tanto $\rho(A) = \rho(A')$.

Recíprocamente

$D \Leftarrow)$ $\rho(A) = \rho(A')$, entonces el sistema es compatible.

Si $\rho(A) = \rho(A') = r$ significa que existe al menos un menor de orden r distinto de cero.

Sea $| C_r | \neq 0$ el determinante de orden r, no nulo.

Eliminamos las ecuaciones que no intervienen en este menor por ser combinación lineal de las r ecuaciones que si intervienen, el sistema que obtenemos es equivalente al inicial.

Consideramos las r ecuaciones que intervienen en C como principales y las otras como parámetros –transponiéndolas a que formen parte del término independiente. De este modo obtenemos un sistema equivalente al dado y de Cramer[3] ya que C sería la matriz de los coeficientes, luego el sistema sería compatible. Con lo que queda demostrado el teorema.

Una consecuencia inmediata del teorema demostrado es que, si el rango de la matriz del sistema y el de la ampliada no coinciden, el sistema es incompatible.

Si $\rho(A) \neq \rho(A')$,*el sistema* $A.X = B$ *es incompatible.*

Esto significa que el sistema tiene al menos una ecuación inconsistente. Estas ecuaciones son de la forma $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = k$ con la constante $k \neq 0$. Este tipo de ecuaciones son fácilmente reconocibles cuando se escalona la matriz ampliada del sistema. Más adelante se retomará este tema.

Los siguientes teoremas completan lo enunciado en el teorema de Rouché–Frobenius respecto de los sistemas compatibles.

[3] En el próximo apartado se estudiará la Regla de Cramer.

Teorema: *un sistema de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas,* $A.X = B$*, tiene solución única, es decir es compatible determinado si y solo si* $\rho(A) = \rho(A') = n° \; de \; incógnitas$.

$A.X = B$ *tiene única solución* $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A') = n° \; de \; incógnitas$.

D) La primera igualdad $\rho(A) = \rho(A')$ esta demostrada por el teorema de Rouché–Frobenius con lo que el sistema es compatible. Ahora, si $\rho(A) = \rho(A') = n° \; de \; incógnitas$ existirán n variables principales y el sistema será compatible determinado si y sólo si todas sus variables son principales y esto solamente ocurre cuando $\rho(A) = \rho(A') = n° \; de \; incógnitas$.

El siguiente teorema demuestra la condición necesaria y suficiente para que un sistema tenga infinitas soluciones, o soluciones múltiples. Pero previamente debe tenerse en cuenta la siguiente:

Definición: *la solución de un sistema de ecuaciones lineales es múltiple si está en función de al menos una variable (incógnita) que puede tomar cualquier valor en* $\mathbb{K}$*. Este tipo de variables se llaman variables libres.*

Con esta definición se puede enunciar el correspondiente teorema.

Teorema: *un sistema de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas,* $A.X = B$*, tiene solución múltiple, es decir infinitas soluciones si y solo si* $\rho(A) = \rho(A') < n° \; de \; incógnitas$*. Además, el sistema tiene solución múltiple con* $s = n - \rho(A)$ *variables libres.*

$A.X = B$ *tiene infinitas soluciones* $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A') < n° \; de \; incógnitas$.

$D \Rightarrow$) Supóngase que el sistema tiene infinitas soluciones, entonces al formar la matriz escalonada o escalonada reducida no pueden aparecer ecuaciones que posean la forma $(0 \;\; 0 \; \ldots 0 \;\; k)$ con $k \neq 0$ (caso contrario el sistema no tendría solución), esto quiere decir que $\rho(A) = \rho(A')$. Por otro lado de la definición de solución múltiple resulta que existe al menos una variable libre, esto queire decir que tenemos más variables que pivotes, pero la cantdidad de pivotes es el rango de la matriz. De lo anterior se puede concluir que $\rho(A) = \rho(A') < n° \; de \; incógnitas$.

$D \Leftarrow$) Supóngase que $\rho(A) = \rho(A') < n° \; de \; incógnitas$. Por cumplirse la igualdad de rangos, $\rho(A) = \rho(A')$, esto implica que en la matriz escalonada o escalonada reducida del sistema no existe ecuaciones de la forma $(0 \;\; 0 \; \ldots 0 \;\; k)$ con $k \neq 0$, esto quiere decir que el sistema tiene solución. La solución es múltiple puesto que existen más variables que pivot, es decir, $\rho(A) = \rho(A') < n° \; de \; incógnitas$.

La cantidad de variables libres es igual a la cantidad de variables, n, menos la cantidad de pivotes en la matriz escalonada o escalonada reducida. Entonces $s = n - \rho(A)$.

En pocas palabras, luego de estos tres teoremas, podemos afirmar que para analizar un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, $A.X = B$, debemos calcular el rango de la matriz de los coeficientes, $\rho(A)$, y el de la matriz ampliada, $\rho(A')$. Entonces

$$Si \begin{cases} \rho(A) = \rho(A');\ A.X = B \text{ es compatible, y } \begin{cases} \rho(A) = \rho(A') = n;\ A.X = B \text{ es compatible determinado} \\ \rho(A) = \rho(A') < n;\ A.X = B \text{ es compatible indeterminado} \end{cases} \\ \rho(A) \neq \rho(A');\ A.X = B \text{ es incompatible} \end{cases}$$

4.- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Resolver un sistema de ecuaciones lineales significa determinar los valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Los sistemas compatibles determinados tendrán un solo conjunto de valores, mientras que los compatibles indeterminados, tendrán infinitos conjuntos. En este último caso suele hablarse de solución general –aquella que expresa todas las soluciones del sistema y en la cual interviene determinados parámetros– y de soluciones particulares, aquellas que se obtienen luego de dar valores a los parámetros que intervienen en la solución general.

4.1.- Método de eliminación de Gauss

Es un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que se puede programar muy fácilmente en diversos lenguajes, esto permite resolver un sistema con la ayuda de una computadora.

La idea del método consiste en aplicar a la matriz ampliada del sistema transformaciones elementales sobre filas (no pueden realizarse estas transformaciones sobre columnas) obteniendo de esta forma, sistemas equivalentes al dado pero, al final, con una matriz escalonada por fila. El trabajo es más sencillo si se emplea matrices ampliadas para representar en todo momento a los sistemas lineales equivalentes que resultan tras las transformaciones.

Recordemos que cuando una matriz está en forma escalonada, los primeros elementos distintos de cero de cada fila, reciben el nombre de *pivotes*. Por ser el pivote el primer elemento no nulo de la fila no hay manera que una fila tenga más de un pivote: puede no tener pivote en el caso de ser una fila con todos sus elementos nulos (fila nula) pero no puede tener más de un pivot. Por otro lado, notemos que, por estar la matriz ampliada escalonada por filas, no hay forma que dos pivotes queden en la misma columna: puede una columna no tener pivot pero si lo tiene, no puede tener más de un pivot.

De todo esto se puede concluir que una matriz de orden $(m\, x\, n)$ no puede tener más de m pivot porque tiene a lo sumo uno por cada fila.

Algunos autores piden que el pivot de cada fila sea 1, lo que requiere que se multiplique cada fila no nula por una constante adecuada. Si bien este paso es conveniente para despejar directamente las variables (incógnitas) dependientes, no es imprescindible.

A partir de haber obtenido la forma escalonada de la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, se pueden realizar las siguientes observaciones válidas para cualquier sistema $(m\,x\,n)$.

1.- Si la forma escalonada por fila de la matriz ampliada <u>incluye</u> alguna fila de la forma: $(0\ \ 0\ \ldots 0\,|\,k)$ con $k \neq 0$ entonces el sistema es incompatible, es decir no tiene solución $\rho(A) \neq \rho(A')$.

En efecto, tal fila significa que $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = k$ con $k \neq 0$, lo cual no puede satisfacer ninguna n–upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.- Si no existe ninguna fila como la indicada anteriormente, entonces el sistema es compatible, $\rho(A) = \rho(A')$, es decir tiene solución, en cuyo caso se presentan dos posiblidades.

2a).- Si las filas no nulas de la forma escalonada por filas de la matriz ampliada del sistema forman una matriz triangular, es decir una matriz de la forma:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{10} \end{array}\right)$ donde los α_i indican números arbitrarios.

Entonces el sistema es compatible determinado, $\rho(A) = \rho(A') = n$, es decir tiene única solución. Partiendo desde la última fila y reemplazando los valores obtenidos en las filas inmediatas superiores, se obtiene un valor único para cada incógnita.

Este caso no puede darse en los sistema en donde el número de ecuaciones es menor al número de incógnitas $(m < n)$, ya que requiere un número total de filas al menos igual al número de columnas.

2b).- Si no se da el caso anterior, significa que existe una submatriz triangular correspondiente a un subconjunto de las variables (las variables dependientes o pivotes, que corresponden a las columnas con pivotes) y las restantes son varibles (incógnitas) *libres* (independientes) que pueden tomar cualquier valor. Por lo tanto el sistema es compatible indeterminado, $\rho(A) = \rho(A') < n$, es decir tiene infinitas soluciones y por lo general se suele dar una solcuión general y algunas soluciones particualres. Este último caso puede darse tanto si $m < n$ como si $m = n$ ó $m > n$.

Por ejemplo, si la forma escalonada de la matriz ampliada es de la forma:

$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ el sistema es compatible indeterminado, siendo $x_2, x_5\ y\ x_6$ las varibles libres y $x_1, x_3\ y\ x_4$ las variables dependientes.

De todas estas observaciones podemos concluir lo siguiente:

1.- Un sistema de ecuaciones lineales que tenga menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$) solamente puede ser compatible indeterminado o incompatible.

2.- Los sitemas cuadrados ($m = n$) o los que tienen más ecuaciones que incógnitas ($m > n$) pueden ser compatibles determinados, compatibles indeterminados o bien incompatibles.

Ejemplos. Analizar y resolver si correspondiere, cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, aplicando el metodo de eliminación de Gauss.

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y a partir de ella la transformamos en una matriz escalonada por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ -2F_1 + F_2 \\ -1F_1 + F_3 \\ F_1 + F_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \\ -\frac{2}{3}F_2 + F_3 \\ -\frac{1}{3}F_2 + F_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{3}{2}F_3 \\ \frac{3}{10}F_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \\ \\ -1F_3 + F_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Análisis:</u> Tanto para A como para A' se puede observar que el número de pivotes ó el número de columnas pivotales ó el número de filas no nulas es en todos los casos 3, por lo tanto podemos afirmar que $\rho(A) = \rho(A') = 3$ es decir el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es 3, también afirmamos que $\rho(A) = \rho(A') = n = 3$ por lo tanto el sistema es compatible determinado. También podemos observar que la matriz escalonada obtenida no posee ninguna fila de la forma $(0\ 0\ \dots 0\ \ k)$ con $k \neq 0$ y las filas no nulas forman una matriz triangular.

<u>Resolución:</u> Reconstruimos el sistema, obteniendo

$\begin{cases} 1x - 1y + 1z = 2 \\ 3y - 4z = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

A partir de la última ecuación, $z = 1$, sustituimos en la segunda ecuación, obteniendo: $3y - 4.1 = -1 \Rightarrow y = 1$. Sustituimos $z = 1$ e $y = 1$ en la primera ecuación, obteniendo: $1x - 1.1 + 1.1 = 2 \Rightarrow x = 2$. Este procedimiento suele llamarse sustitución hacia atrás o sustitución regresiva.

Por lo tanto la única solución de este sistema es la terna $(2,1,1)$ y el conjunto solución será: $S = \{ (2,1,1) \}$.

Verificación:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 + 1 = 2 \\ 2.2 + 1 - 2.1 = 3 \\ 2 + 1 - 1 = 2 \\ -2 + 2.1 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ 3 = 3 \\ 2 = 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + w = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 5x + 6y + 2z + w = 2 \end{cases}$

Obsérvese que es un sistema con menos ecuaciones que incógnitas y recuérdese la primera conclusión realizada luego de haber analizado el método de eliminación de Gauss.

Escribimos la matriz ampliada del sistema y a partir de ella la transformamos en una matriz escalonada por filas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ -\frac{1}{3}F_1 + F_2 \\ -\frac{5}{3}F_1 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & 2 & -\frac{2}{3} & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \frac{1}{3}F_2 \\ \frac{1}{3}F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 8 & \frac{2}{3} & -2 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$-2F_2 + F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Análisis:</u> Tanto para A como para A' se puede observar que el número de pivotes ó el número de columnas pivotales ó el número de filas no nulas es en todos los casos 2, por lo tanto podemos afirmar que $\rho(A) = \rho(A') = 2$ es decir el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es 4, también afirmamos que $\rho(A) = \rho(A') < n = 4$ por lo tanto el sistema es compatible indeterminado. También podemos observar que la matriz escalonada obtenida no posee ninguna fila de la forma $(0 \;\; 0 \;\; \dots 0 \;\; k)$ con $k \neq 0$ y las filas no nulas forman una submatriz triangular. El sistema tiene dos variables dependientes, $x \, e \, y$, y dos variables (incógnitas) libres, z junto con w. Por lo tanto a z y w las trasponenemos junto con los términos independientesw pues tendrán el papel de ser parámetros.

<u>Resolución:</u> Reconstruimos el sistema, obteniendo

$\begin{cases} 3x+2y+w=0 \\ 4y+\frac{1}{3}z-w=\frac{1}{3} \end{cases}$ por ser compatible indeterminado, tenemos $\begin{cases} 3x+2y=-w \\ 4y=\frac{1}{3}+w-\frac{1}{3}z \end{cases}$

De la segunda ecuación obtenemos:

$y=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}w-\frac{1}{12}z$, reordenando $y=\frac{1}{4}w-\frac{1}{12}z+\frac{1}{12}$. Reemplazando en la primera ecuación:

$3x+2y=-w \Leftrightarrow 3x=-w-2\left(\frac{1}{4}w-\frac{1}{12}z+\frac{1}{12}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}w-\frac{1}{6}w+\frac{1}{18}z-\frac{1}{18}$

$x=\frac{1}{18}z-\frac{1}{2}w-\frac{1}{18}$.

Por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones cuyo conjunto solución ó en este caso solución general se expresa como: $S_G=\left\{(x,y,z,w)/x=\frac{1}{18}z-\frac{1}{2}w-\frac{1}{18} \wedge y=\frac{1}{4}w-\frac{1}{12}z+\frac{1}{12}\right\}$ mientras que algunas soluciones particulares se pueden obtener dándoles valores particulares a z y w. Por ejemplo:

Si $z=0$ y $w=0 \Longrightarrow x=-\frac{1}{18}$ e $y=\frac{1}{12}$ por lo tanto $S_{P1}=(-\frac{1}{18},\frac{1}{12},0,0)$

Si $z=1$ y $w=1 \Longrightarrow x=-\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{4}$ por lo tanto $S_{P2}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1,1)$

c) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$

De manera similar a los casos anteriores, escribimos la matriz ampliada del sistema y a partir de ella la transformamos en una matriz escalonada por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -2F_1+F_2 \\ -1F_1+F_3 \\ -1F_1+F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -1F_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ -F_2+F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ -1F_3+F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

<u>Análisis:</u> La matriz A tiene tres pivot o tres columnas pivotales, mientras que A' tiene cuatro ya que $a_{44}=4$ es pivot pero al no tener elementos por debajo, no se hace evidente su uso. Es decir que $\rho(A)=3 \neq \rho(A')=4$. Por otra parte obsérvese la cuarta fila de la matriz escalonada obtenida, es de la forma $(0\ 0\ \ldots 0\ \ k)$ con $k \neq 0$. Es decir que el sistema tiene una ecuación inconsistente, por lo tanto es incompatible.

4.2.- Método de Gauss–Jordan

Este método es una variante del método de eliminación de Gauss; también permite analizar el sistema –acorde con el Teorema de Rouché–Frobenius– y resolverlo en caso de compatible.

El método consiste no solo eliminar la incógnita x_i de las ecuaciones $E_{i+1}, E_{i+2}, \dots, E_n$ como hicimos en el de Gauss, sino también de $E_2, \dots, E_{i-1}$, es decir, eliminamos en cada columna los elementos que están por debajo y por encima de la diagonal principal.

Este procedimiento va transformando la matriz ampliada del sistema en una matriz escalonada reducida por filas, evitando de esta manera, en primer lugar, la necesidad de la sustitución hacia atrás como en la eliminación gaussiana. Por otro lado la columna correspondiente a los términos independientes serán las soluciones del sistema si este es compatible determinado. La idea general es ir escalonando y reduciendo simultáneamente.

Como ejemplo de este método volveremos a resolver los tres sistemas resueltos en el método anterior, de esta manera quedará en evidencia que sin importar el método a utilizar se debe llegar a resultados equivalentes.

Ejemplos. Analizar y resolver si correspondiere, cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, aplicando el metodo de Gauss–Jordan.

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y a partir de ella la transformamos en una matriz escalonada reducida por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ -2F_1 + F_2 \\ -1F_1 + F_3 \\ F_1 + F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{6}F_3 \\ -\frac{1}{10}F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} -3F_3 + F_1 \\ -2F_3 + F_2 \\ \\ -1F_3 + F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obsérvese que la obtención de la primera matriz equivalente es de manera idéntica a como se hizo en el método de eliminación de Gauss.

<u>Análisis:</u> Tanto para A como para A' se puede observar que el número de pivotes ó el número de columnas pivotales ó el número de filas no nulas es en todos los casos 3, por lo tanto podemos afirmar que $\rho(A) = \rho(A') = 3$ es decir el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es 3, también afirmamos que $\rho(A) = \rho(A') = n = 3$ por lo tanto el sistema es compatible determinado. También podemos observar que la matriz escalonada reducida obtenida no posee ninguna fila de la forma $(0 \ \ 0 \ \dots 0 \ \ k)$ con $k \neq 0$.

Resolución: No hace falta reconstruimos el sistema, puesto que directamente podemos leer de la matriz escalonada reducida por fila: $x = 2,\ y = 1,\ z = 1$.

Por lo tanto la única solución de este sistema es la terna $(2, 1, 1)$ y el conjunto solución será: $S = \{\ (2, 1, 1)\ \}$.

Verificación:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 + 1 = 2 \\ 2.2 + 1 - 2.1 = 3 \\ 2 + 1 - 1 = 2 \\ -2 + 2.1 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ 3 = 3 \\ 2 = 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + w = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 5x + 6y + 2z + w = 2 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y a partir de ella la transformamos en una matriz escalonada reducida por filas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ -3F_1 + F_2 \\ -5F_1 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1F_2 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim -\frac{1}{4}F_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} -2F_2 + F_1 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Análisis: Tanto para A como para A' se puede observar que el número de pivotes o el número de columnas pivotales o el número de filas no nulas es en todos los casos 2, por lo tanto podemos afirmar que $\rho(A) = \rho(A') = 2$ es decir el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es 4, también afirmamos que $\rho(A) = \rho(A') < n = 4$ por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

Resolución: El sistema tiene dos variables dependientes, $x\ e\ y$, y dos variables (incógnitas) libres, z junto con w. Por lo tanto a z y w las trasponenemos junto con los términos independientes pues tendrán el papel de ser parámetros.

$$\begin{cases} 2x - z + w = -1 \\ 4y + 3z - w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = z - w - 1 \\ 4y = -3z + w + 3 \end{cases}$$

De la última ecuación $y = \frac{-3z+w+3}{4}$ y de la primera ecuación $x = \frac{z-w-1}{2}$

Por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones cuyo conjunto solución o en este caso solución general se expresa como: $S_G = \left\{(x, y, z, w)/x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} \wedge y = -\frac{3}{4}z + \frac{1}{4}w + \frac{3}{4}\right\}$ mientras que algunas soluciones particulares se pueden obtener dándoles valores particulares a z y w. Por ejemplo:

Si $z = 0 \;\; y \;\; w = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2} \; e \; y = \frac{3}{4}$ por lo tanto $S_{P1} = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0, 0)$

Si $z = 0 \;\; y \;\; w = 1 \Longrightarrow x = -1 \; e \; y = 1$ por lo tanto $S_{P2} = (-1,1,0,1)$

c) $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

De manera similar a los casos anteriores, escribimos la matriz ampliada del sistema y a partir de ella la transformamos en una matriz escalonada reducida por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -2F_1 + F_2 \\ -1F_1 + F_3 \\ -1F_1 + F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -1F_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ -1F_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} -1F_2 + F_1 \\ \\ \\ -1F_2 + F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{4}F_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -1F_3 + F_1 \\ 4F_3 + F_2 \\ \\ -4F_3 + F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ -\frac{1}{6}F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} -1F_4 + F_1 \\ -1F_4 + F_2 \\ -1F_4 + F_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Análisis:</u> La matriz A tiene tres pivot o tres columnas pivotales o tres filas no nulas, pero A' tiene cuatro. Es decir que $\rho(A) = 3 \neq \rho(A') = 4$. Por otra parte obsérvese la cuarta fila de la matriz escalonada reducida obtenida, es de la forma $(0 \;\, 0 \;\ldots 0 \;\; k)$ con $b \neq 0$. Esto significa que el sistema tiene una ecuación inconsistente, por lo tanto el es incompatible.

4.3.- Método de la matriz inversa

Este método consiste en utilizar la matriz inversa de la matriz de los coeficientes para hallar la matriz columna de las incógnitas. Entonces debemos tener, en primer lugar, la seguridad de que existe dicha matriz inversa. Luego se debe multiplicar por la izquierda los dos miembros de la expresión matricial del sistema de ecuaciones por la matriz inversa de la matriz de los coeficientes.

Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, expresado como ecuación matricial $A.X = B$.

Analizado el sistema, resulta $\rho(A) = \rho(A') = r$ con $r \leq m \;\; y \;\; r \leq n$. Entonces se puede construir un sistema equivalente al dado $C.X = D$ donde C es una matriz cuadrada, invertible de orden r, extraída de A.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

Las matrices X y D serán

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} b_{1-\sum_{j=r+1}^{n} a_{1j}x_j} \\ b_{2-\sum_{j=r+1}^{n} a_{2j}x_j} \\ \vdots \\ b_r - \sum_{j=r+1}^{n} a_{rj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix}$$

A partir de este nuevo sistema, $C.X = D$, solo resta multiplicar por izquierda ambos miembros de la ecuación por la inversa de C, obteniendo

$C^{-1}.C.X = C^{-1}.D$ de donde

$I.X = C^{-1}.D$ finalmente

$X = C^{-1}.D$

Puesto que los sistemas son equivalentes, las soluciones obtenidas mediante esta última expresión son también las soluciones del sistema original, $A.X = B$. Esto significa que para obtener la matriz columna de las incógnitas debemos multiplicar la matriz inversa de C por la matriz columna de los términos independientes.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema por el método de la matriz inversa.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y - z + w = 1 \\ x + y - z - w = 0 \\ 3x - y - 3z + w = 2 \end{cases}$$

Como tenemos que averiguar tanto el rango de la matriz del sistema como el de la matriz ampliada y calcular una matriz inversa, conviene hacer uso de los determinantes.

Calculamos un menor de orden dos, por ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ como es distinto de cero, calculamos un menor de orden tres que incluya el menor anterior

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ como es distinto de cero, calculamos un menor de orden cuatro que incluya el menor anterior

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Como es el único determinante que podemos construir para A, el rango de la matriz del sistema es 3, $\rho(A) = 3$.

Para la matriz ampliada ocurrirá algo similar, ya que a partir del menor de orden 3 no nulo que calculamos, podemos construir dos menores de orden cuatro, que incluyan al de orden tres.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -3 & 2\end{vmatrix}=0$$

Como los menores de orden cuatro son nulos, significa que el rango de la matriz ampliada es 3, $\rho(A')=3$. Por lo tanto:

$\rho(A)=\rho(A')=3<n°\ de\ incógnitas=4$ significa que el sistema es compatible indeterminado. Como el número de incógnitas es cuatro y el rango de las matrices es tres, significa que hay una incógnita no principal que debemos hacer actuar como parámetro. Para construir el sistema equivalente al dado, tomamos como matriz del sistema, aquella que corresponde al menor de orden tres no nulo que hayamos calculado. Es decir que nuestro sistema será:

$$\begin{cases}x+y+z=2-w\\ x-y-z=1-w\\ x+y-z=w\end{cases}$$

La matriz de este nuevo sistema admite inversa, pues tiene su determinante distinto de cero y las matrices que nos interesan son:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2-w\\ 1-w\\ w\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de C, C^{-1} por cualquiera de los dos métodos ya estudiados.

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Luego de verificar el cálculo de C^{-1} $(C\,.\,C^{-1}=I_3)$ procedemos a realizar la multiplicación $C^{-1}\,.\,D$ para obtener la matriz de las incógnitas.

C⁻¹		**D**	$2-w$ $1-w$ w
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}-w$
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+w$
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$1-w$

Por lo tanto la solución general será:

$S_G=\left\{(x,y,z,w)\ /x=\frac{3}{2}-w,\ y=-\frac{1}{2}+w,\ z=1-w\right\}$

Mientras que algunas de las soluciones particulares serán:

$S_P = \left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right), \dots\right\}$

4.4.- Regla de Cramer

Finalizaremos el estudio de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales haciendo hincapié como las propiedades de los determinantes también pueden ayudar en este tema.

Más exactamente veremos cómo los determinantes permiten calcular explícitamente el valor de cada incógnita, por medio de la Regla de Cramer[4]. Esta regla tiene su utilidad pues proporciona una expresión directa de cada incógnita del sistema pero, en contrapartida, cuando el sistema es grande obliga al cálculo de determinantes de tamaño excesivo.

Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, expresado como ecuación matricial $A.X = B$.

Analizado el sistema, resulta $\rho(A) = \rho(A') = r$ con $r \leq m$ y $r \leq n$. Entonces se puede construir un sistema equivalente al dado $C.X = D$ donde C es una matriz cuadrada, invertible de orden r, extraída de A.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

Las matrices X y D serán

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} b_{1-\sum_{j=r+1}^{n} a_{1j}x_j} \\ b_{2-\sum_{j=r+1}^{n} a_{2j}x_j} \\ \vdots \\ b_r - \sum_{j=r+1}^{n} a_{rj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix}$$

Obsérvese que esta primera parte es idéntica al método de la matriz inversa. A partir de aquí enunciaremos y demostraremos la

Regla de Cramer: *sea el sistema de ecuaciones lineales $C.X = D$ donde C es una matriz cuadrada, invertible de orden r. Sea D_i la matriz que se obtiene de C al sustituir su columna i por D, para $i = 1, \dots, r$. Entonces, la solución del sistema viene dada por:*

$x_i = \frac{det\,(D_i)}{det(C)} \quad \forall\, i = 1, \dots, r.$

D) Sabemos que $X = C^{-1}D$, luego la incógnita x_i será el producto de la fila i de C^{-1} por la matriz columna D. Como sabemos que $C^{-1} = \frac{1}{det\,(C)}\, Adj\,(C)$, la fila i de esta matriz será:

---

[4] Esta regla lleva el nombre del matemático suizo Gabriel Cramer que la publicó y popularizó en 1750, aunque el mismo resultado ya había sido publicado, dos años antes, por el escoses Colin Maclaurin.

$\left(\frac{C_{1i}}{det\,(C)}, \frac{C_{2i}}{det\,(C)}, \dots, \frac{C_{ri}}{det\,(C)}\right)$. Por lo tanto tendremos:

$x_i = \left(b_1 \frac{C_{1i}}{det\,(C)}, b_2 \frac{C_{2i}}{det\,(C)}, \dots, b_r \frac{C_{ri}}{det\,(C)}\right)$

$x_i = \frac{1}{det\,(C)}(b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \dots + b_r C_{ri})$ Pero el factor entre paréntesis es el desarrollo por la columna i del determinante de la matriz D_i, por lo tanto $x_i = \frac{det\,(D_i)}{det(C)}$ $\forall\, i = 1, \dots, r$. Como queríamos demostrar.

Como ejemplo resolveremos el mismo sistema que en el método anterior, pues en este caso al trabajar directamente con determinantes conviene –con mucha más razón– calcular los rangos haciendo uso de ellos.

Resolver el siguiente sistema por la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y - z + w = 1 \\ x + y - z - w = 0 \\ 3x - y - 3z + w = 2 \end{cases}$$

$\rho(A) = \rho(A') = 3 < n°\ de\ incógnitas = 4$ significa que el sistema es compatible indeterminado. Nuevamente la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de las matrices no da la cantidad de variables no principales que deberemos hacer actuar como parte del término independiente.

El sistema equivalente será:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 - w \\ x - y - z = 1 - w \\ x + y - z = w \end{cases}$$

Las matrices que nos interesan son:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 - w \\ 1 - w \\ w \end{pmatrix}$$

$|\,C\,| = 4$

$C_x = \begin{pmatrix} 2 - w & 1 & 1 \\ 1 - w & -1 & -1 \\ w & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en consecuencia $|\,C_x\,| = \begin{vmatrix} 2 - w & 1 & 1 \\ 1 - w & -1 & -1 \\ w & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 4w$. Por lo tanto:

$x = \frac{|\,C_x\,|}{|\,C\,|} = \frac{6-4w}{4} = \frac{3}{2} - w$

$C_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 - w & 1 \\ 1 & 1 - w & -1 \\ 1 & w & -1 \end{pmatrix}$ en consecuencia $\left|\,C_y\,\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 - w & 1 \\ 1 & 1 - w & -1 \\ 1 & w & -1 \end{vmatrix} = -2 + 4w$. Por lo tanto:

$y = \frac{\left|\,C_y\,\right|}{|\,C\,|} = \frac{-2+4w}{4} = -\frac{1}{2} + w$

$C_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-w \\ 1 & -1 & 1-w \\ 1 & 1 & w \end{pmatrix}$ en consecuencia $|\, C_z \,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-w \\ 1 & -1 & 1-w \\ 1 & 1 & w \end{vmatrix} = 4 - 4w$. Por lo tanto:

$z = \frac{|\, C_z \,|}{|\, C \,|} = \frac{4-4w}{4} = 1 - w$

La solución general es: $S_G = \left\{(x, y, z, w) \,/ x = \frac{3}{2} \; - w,\; y = -\frac{1}{2} \; + w,\; z = 1 - w \right\}$ mientras que algunas de las soluciones particulares, distintas a las del método anterior, serán:

$S_P = \left\{\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 2, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1, 2\right), \dots\right\}$

5.- Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se dice homogéneo si todos sus términos independientes son nulos, es decir, es un sistema del tipo:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \; \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \; \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ *o de manera resumida* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \quad con\; i = 1, 2, \; \dots, m$

Donde los a_{ij} son elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$.

Es inmediato comprobar que todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es compatible, ya que la n–tupla $(0, 0, \dots, 0)$ –comúnmente llamada solución trivial– es solución del mismo. Por otra parte si aplicamos, por ejemplo, el método de eliminación de Gauss o el de Gauss–Jordan, al tener la matriz ampliada la última columna nula, por más transformaciones elementales por fila que se haga, esta columna siempre se mantendrá nula. Esto significa que nunca habrá un pivote en esa columna y por lo tanto el rango de la matriz del sistema y el de la matriz ampliada siempre serán iguales, lo que significa que todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre es compatible.

Por supuesto; si el rango de las matrices del sistema y ampliada coincide con el número de incógnitas, el sistema será determinado siendo su única solución la trivial. Si el rango es menor al número de incógnitas, el sistema será indeterminado, teniendo a parte de la solución trivial, otras más.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que tenga menos ecuaciones que incógnitas $(m < n)$ es necesariamente compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones). Esto es cierto pues al estudiar el método de eliminación de Gauss, se hicieron unas observaciones válidas para cualquier sistema y acto seguido se llegó a dos conclusiones, una de las cuales establecía "Un sistema de ecuaciones lineales que tenga menos ecuaciones que incógnitas $(m < n)$ solamente puede ser compatible indeterminado o incompatible". Como ya establecimos que los sistemas homogéneos son siempre compatibles, se demuestra lo enunciado en el inicio del párrafo.

En resumen:

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, homogéneo $A\,.X = N$ con $A \in \mathbb{K}^{mxn}$ $y\, N$ matriz nula de orden $mx1$, entonces

a) Si $n = \rho(A)$, el sistema es compatible determinado, es decir la única solución que admite es la trivial. Esto es evidente ya que llevamos A a su forma escalonada reducida, reconstruimos el sistema y todas las variables quedaran igualadas a cero.

b) Si $n > \rho(A)$, el sistema es compatible indeterminado, es decir que tiene infinitas soluciones con $s = n - \rho(A)$ variables libres que pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Analizar y resolver los siguientes sistemas.

$$a)\begin{cases} -2x + 6y - 4z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 5x - 15y + 10z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Como es un sistema homogéneo sabemos que es compatible y para ver si es determinado o indeterminado escalonamos la matriz del sistema.

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & -15 & 10 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ F_1 + F_2 \\ -5F_1 + F_3 \\ 2F_1 + F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & -15 & 10 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 10F_2 + F_3 \\ 4F_2 + F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que concluimos que $\rho(A) = \rho(A') = 2 < 4(n°\ de\ incógnitas)$ por lo que el sistema de compatible indeterminado, con dos variables libres.

Reconstruyendo el sistema tenemos

$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$ por lo tanto $\begin{cases} x = 3y \\ z = 0 \end{cases}$

La solución general del sistema es $S_G = \{(x, y, z)/x = 3y, z = 0, y \in \mathbb{R}\}$. Para obtener las soluciones particulares, damos valores convenientes a la variable y para obtener los valores de x, z siempre valdrá cero.

$$b)\begin{cases} 4x + 5y - z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Como observamos que es un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, recurrimos directamente al determinante del sistema para saber si es compatible determinado o indeterminado (esta idea se específica con más precisión en el apartado *Sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones e incógnitas*).

$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -63$ por lo tanto el sistema es compatible determinado, siendo su única solución la trivial. $S_G = \{(0, 0, 0)\}$.

5.1.- Relación entre los sistemas no homogéneos y su sistema homogéneo asociado.

Analicemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales, aplicando Gauss–Jordan

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ \quad x + z = 1 \\ 4x - y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ -2F_1 + F_2 \\ -4F_1 + F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ \\ F_2 + F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Por lo tanto:

$\rho(A) = \rho(A') = 2 < 3(n°\ de\ incógnitas)$ en consecuencia el sistema se clasifica como SCI. Cantidad de variables libres: 1 (una).

Reconstruimos el sistema

$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ (1) por lo tanto $\begin{cases} x = 1 - z \\ y = z - 1 \end{cases}$

La solución general del sistema es $S_G = \{(x, y, z)/x = 1 - z,\ y = z - 1,\ z \in \mathbb{R}\}$.

El vector solución puede ser reescrito de la siguiente manera:

$(x, y, z) = (1 - z,\ z - 1,\ z)$

$(x, y, z) = (-z,\ z,\ z) +\ (1, -1,\ 0)$

$(x, y, z) = z(-1,\ 1,\ 1) +\ (1, -1,\ 0)$

Si consideramos a la variable z como un parámetro cualquiera, λ por ejemplo, la solución general se puede escribir como $S_G = \{(x, y, z)/(x, y, z) = \lambda(-1,\ 1,\ 1) +\ (1, -1,\ 0)\}$

Gráficamente la solución del sistema es la recta que resulta de la intersección de los dos planos dados por (1).

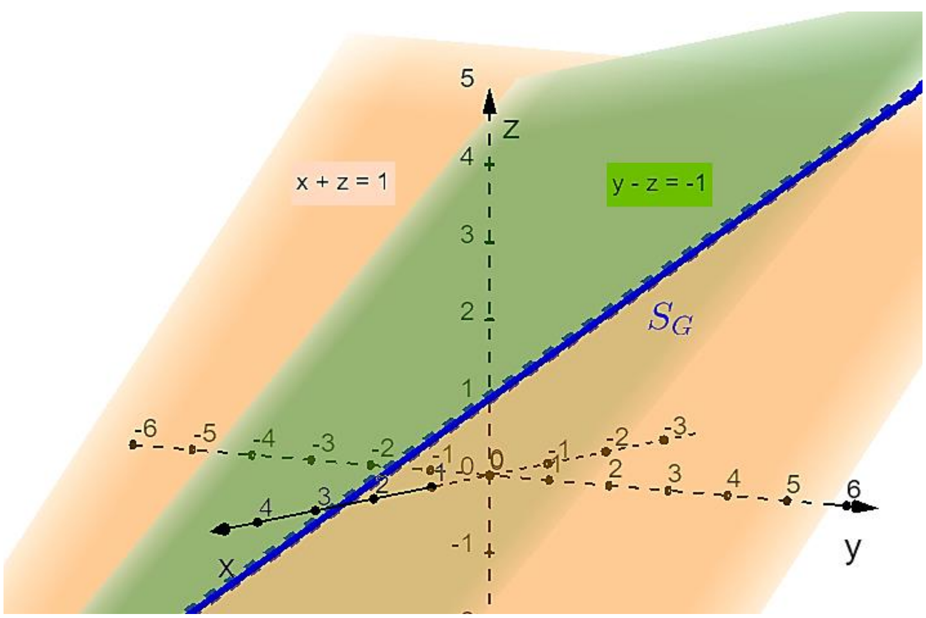

Gráfico 6 Solución del sistema

Resolvemos ahora el sistema homogéneo asociado al dado, es decir:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ \quad x + z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} -2F_1 + F_2 \\ -4F_1 + F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Por lo tanto:

$\rho(A) = \rho(A') = 2 < 3(n°\ de\ incógnitas)$ en consecuencia el sistema se clasifica como SCI. Cantidad de variables libres: 1 (una).

Reconstruimos el sistema

$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ (2) por lo tanto $\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$

La solución general del sistema homogéneo es $S_{GH} = \{(x, y, z)/x = -z,\ y = z,\ z \in \mathbb{R}\}$.

El vector solución puede ser reescrito de la siguiente manera:

$(x, y, z) = (-z,\ z,\ z)$

$(x, y, z) = z(-1,\ 1,\ 1)$

Si consideramos a la variable z como un parámetro cualquiera, λ por ejemplo, la solución general se puede escribir como $S_{GH} = \{(x, y, z)/(x, y, z) = \lambda(-1,\ 1,\ 1)\}$

Gráficamente la solución del sistema es la recta que resulta de la intersección de los dos planos dados por (2).

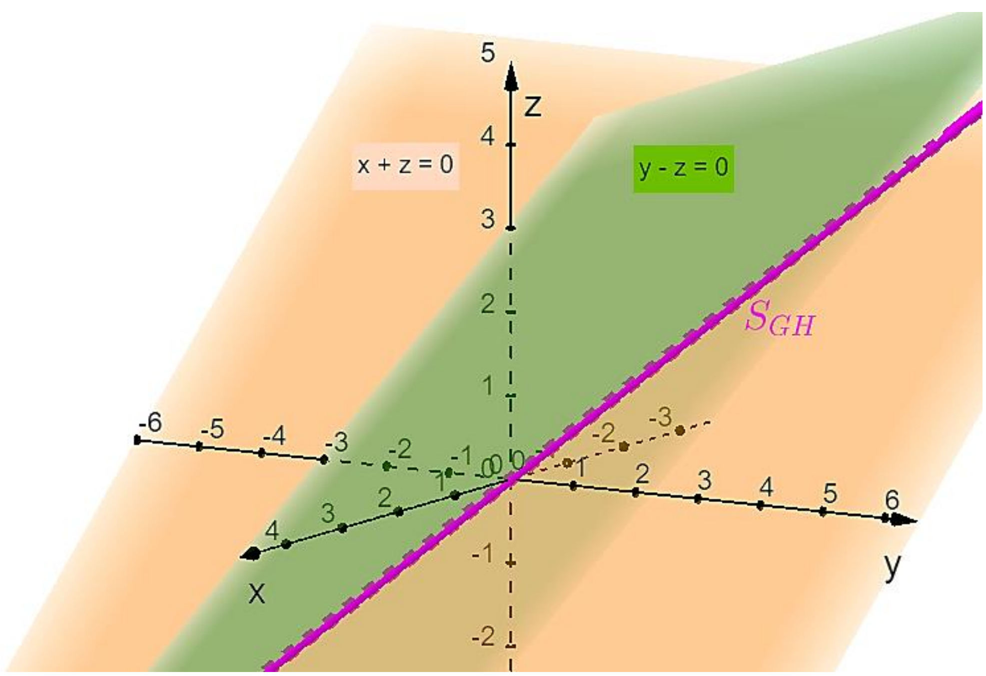

Gráfico 7 Solución del sistema

Si graficamos ambas soluciones en un mismo sistema, tenemos

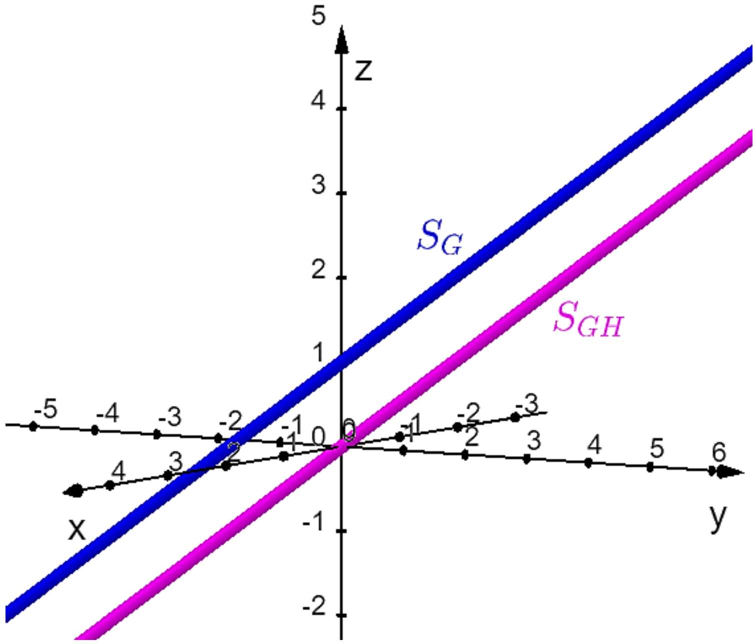

Gráfico 8 Soluciones de ambos sistemas

Podemos observar que:

a) Tanto la solución S_G como S_{GH} representan una recta.

b) Las rectas que representan la solución de los sistemas, son paralelas.

c) La recta que representa la solución S_G no pasa por el origen de coordenadas mientras que la que representa a S_{GH} si lo hace.

Este ejemplo nos permite preguntarnos ¿Qué relación existe ente los conjuntos solución de un sistema no homogéneo y el de su homogéneo asociado?

Las siguientes propiedades nos permiten, responder a esta pregunta.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A\,X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{mx1}$ y el sistema $A\,X = N$ el sistema homogéneo asociado con N matriz nula de orden $mx1$, entonces:

P1) La diferencia de dos soluciones particulares de $A\,X = B$ es solución del sistema homogéneo $A\,X = N$ asociado.

D) Si X_1 y X_2 son dos soluciones particulares de $A\,X = B$, entonces:

$A\,X_1 = B$

$A\,X_2 = B$

Restando miembro a miembro

$A\,X_1 - A\,X_2 = N$

$A\,(X_1 - X_2) = N$

Esto significa que $(X_1 - X_2)$ es solución de $A\,X = N$ que es lo que se quería demostrar.

P_2) La suma de una solución particular de $A\,X = B$ y una del $A\,X = N$ asociado, es solución del sistema $A\,X = B$.

D) Sean:

X_P una solución particular de $A\,X = B$, es decir que $A\,X_P = B$.

X_H una solución particular de $A\,X = N$, es decir que $A\,X_H = N$.

Queremos probar que $(X_P + X_H)$ es solución de $A\,X = B$, o sea que $A\,(X_P + X_H) = B$

$A\,(X_P + X_H) = B$

$AX_P + AX_H = B$

$B + N = B$

$B = B$ quedando demostrada la propiedad.

El recíproco de la P_2) es también válido y se enuncia en la tercera propiedad.

P_3) Cualquier solución de $A\,X = B$ puede expresarse como $(X_P + X_H)$ con X_P solución particular de $A\,X = B$ y X_H solución del $A\,X = N$ asociado.

D) Sea H una solución de $A\,X = B$, entonces

$X = X - X_P + X_P$

$X = (X - X_P) + X_P$ Por la P_1) $(X - X_P)$ es solución de $A\,X = N$ o sea que

$X = X_H + X_P$ que es lo que se quería demostrar.

Una consecuencia inmediata de P_2) y P_3) se puede enunciar de la siguiente manera

"El conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales $A\,X = B$ puede expresarse como suma de una solución particular de $A\,X = B$ y la solución del sistema homogéneo asociado".

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Al resolverlo, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -3F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 + F_1 \\ \\ -4F_2 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\rho(A) = \rho(A') = 2 < 3$ ($n°$ de $incógnitas$) el sistema se clasifica como SCI. Cantidad de variables libres: 1 (una).

Reconstruimos el sistema

$$\begin{cases} x + z = -3 \\ y - z = 1 \end{cases} \text{ por lo tanto } \begin{cases} x = -z - 3 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

$S_G = \{(x, y, z) /\ x = -z - 3, y = z + 1, z \in \mathbb{R}\}$

$(x, y, z) = (-z - 3, z + 1, z)$

$(x, y, z) = (-z, z, z) + (-3, 1, 0)$

$(x, y, z) = z(-1, 1, 1) + (-3, 1, 0)$

Tomando a z como parámetro

$(x, y, z) = \lambda(-1, 1, 1) + (-3, 1, 0)$

Por lo tanto

$S_P = (-3, 1, 0)$ es solución particular del sistema no homogéneo y

$S_H = \lambda(-1, 1, 1)$ es la solución del sistema homogéneo asociado.

Verificamos que el vector $(-3, 1, 0)$ es una solución particular del sistema no homogéneo.

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ por lo tanto } \begin{cases} -3 - 1 + 2.0 = -4 \\ 3.(-3) - 5.1 + 8.0 = -14 \\ -3 + 3.1 - 2.0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 = -4 \\ -14 = -14 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Verificamos que el vector $(-1, 1, 1)$ es una solución particular $(\lambda = 1)$ del sistema homogéneo asociado al no homogéneo.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 8z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ por lo tanto } \begin{cases} -1 - 1 + 2.1 = 0 \\ 3.(-1) - 5.1 + 8.1 = 0 \\ -1 + 3.1 - 2.1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Cualquier otra solución del homogéneo asociado se obtiene dándole valor al parámetro λ, por ejemplo si $\lambda = -2$, la solución particular será $(2, -2, -2)$.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 8z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ por lo tanto } \begin{cases} 2 - (-2) + 2.(-2) = 0 \\ 3.2 - 5(-2) + 8(-2) = 0 \\ 2 + 3(-2) - 2(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.

$$\begin{cases} x + y + w = 3 \\ z - w = 2 \\ x + y - z + 2w = 1 \end{cases}$$

Al resolverlo, tenemos

$$\begin{matrix} \\ \\ -F_1 + F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ \\ F_1 + F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\rho(A) = \rho(A') = 2 < 4$ $(n° \; de \; incógnitas)$ el sistema se clasifica como SCI. Cantidad de variables libres: 2 (dos).

Reconstruimos el sistema

$$\begin{cases} x + y + w = -3 \\ z - w = 2 \end{cases} \text{ por lo tanto } \begin{cases} x = -y - w + 3 \\ z = w + 2 \end{cases}$$

$S_G = \{(x, y, z, w) /\ x = -y - w + 3,\ y,\ w + 2,\ w \ con \ y,\ w \in \mathbb{R}\}$

$(x, y, z, w) = (-y - w + 3,\ y,\ w + 2,\ w)$

$(x, y, z, w) = (-y, y, 0, 0) + (-w, 0, w, w) + (3, 0{,}2, 0)$

$(x, y, z, w) = y\,(-1, 1, 0, 0) + w\,(-1, 0, 1, 1) + (3, 0{,}2, 0)$

Tomando a y, w como parámetros

$(x, y, z, w) = \lambda\,(-1, 1, 0, 0) + \beta\,(-1, 0, 1, 1) + (3, 0{,}2, 0)$

Por lo tanto

$S_P = (3,0,2,0)$ es solución particular del sistema no homogéneo y

$S_H = \lambda\,(-1,1,0,0) + \beta\,(-1,0,1,1)$ es la solución del sistema homogéneo asociado.

Verificamos que el vector $(3,0,2,0)$ es una solución particular del sistema no homogéneo.

$$\begin{cases} x+y+w=3 \\ z-w=2 \\ x+y-z+2w=1 \end{cases} \quad \text{por lo tanto} \begin{cases} 3+0+0=3 \\ 2-0=2 \\ 3+0-2+2.0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=3 \\ 2=2 \\ 1=1 \end{cases}$$

Verificamos que el vector $\lambda\,(-1,1,0,0) + \beta\,(-1,0,1,1)$ es una solución particular del sistema homogéneo asociado al no homogéneo. Para $\lambda = \beta = 1$ tenemos $(-2,1,1,1)$

$$\begin{cases} x+y+w=0 \\ z-w=0 \\ x+y-z+2w=0 \end{cases} \quad \text{por lo tanto} \begin{cases} -2+1+1=0 \\ 1-1=0 \\ -2+1-1+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Cualquier otra solución del homogéneo asociado se obtiene dándole valor a los parámetros $\lambda\ y\ \beta$.

Terminemos esta sección viendo cómo se relaciona lo que vimos anteriormente con el rango de una matriz.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A\,X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{mxn}\ y\ B \in \mathbb{R}^{mx1}$ y el sistema $A\,X = N$ el sistema homogéneo asociado con N matriz nula de orden $mx1$, observemos que:

a) Cada ecuación que produzca un pivot en la forma escalonada de la matriz del sistema, es una ecuación que aporta información para resolver el sistema homogéneo asociado, que no está contemplada en las otras ecuaciones.

b) Una fila nula en la forma escalonada de la matriz del sistema representa una ecuación que puede omitirse del sistema homogéneo asociado sin que se pierda información alguna, es una ecuación redundante o superflua.

Recordando que el rango de una matriz es el número de filas no nulas o de columnas pivotales que tiene la matriz escalonada equivalente a la dada, de esta manera el rango informa el número de ecuaciones que realmente aporta información para resolver el sistema homogéneo $A\,X = N$. Esto equivale a decir que el rango de una matriz es:

a) el máximo número de ecuaciones del sistema $A\,X = N$ que no incluyen ecuaciones redundantes y

b) el mínimo número de ecuaciones que se deben preservar en el sistema $A\,X = N$ para obtener un sistema equivalente.

6.- Sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones e incógnitas.

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnita $A\,.\,X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{mxn}, B \in \mathbb{R}^{mx1}\ y\ X$ la matriz de las incógnitas de orden $mx1$, particularmente interesa estudiar el caso en donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas $(m = n)$ puesto que en ese caso se puede recurrir a los determinantes para determinar si el sistema tiene solución única o no. A estos sistemas suele llamárseles, cuadrados.

Una forma de saber si un sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones y de incógnitas es tener presente el siguiente

Teorema de la solución única. *Sea un sistema de ecuaciones lineales* $A\,.X = B$ *con* $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ *y cuya matriz ampliada es* $(A|B)$*, entonces el sistema tiene solución única si y solo si la matriz ampliada es equivalente, mediante operaciones elementales entre filas, a una matriz de la forma* $(I|B^*)$*. En ese caso la solución única está determinada por* $x_i = b_i^*$ *para* $i = 1, 2, \dots, n$.

$D \Longrightarrow$) Por hipótesis, mediante operaciones elementales entre filas obtenemos $(A|B)\sim(I|B^*)$, por lo tanto la demostración es directa ya que los respectivos sistemas $(A|B)\;y\;(I|B^*)$ también son equivalentes. En este caso la solución única está dada por $x_i = b_i^*$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

$D \Longleftarrow$) En este sentido, la demostración también resulta directa ya que las operaciones elementales entre filas, por construcción, son invertibles, entonces a partir del sistema $(I|B^*)$ y operaciones elementales entre filas se puede llegar al sistema $(A|B)$ que tendrá la misma solución que $(I|B^*)$, la cual es única.

Lo interesante del teorema anterior es que de él se deriva el teorema para saber cuándo un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas, es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Teorema. *Un sistema de ecuaciones lineales* $A\,.X = B$ *con* $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ *y matriz ampliada* $(A|B)$ *tienen solución única si y solo si* $det(A) \neq 0$.

D) Por el teorema anterior se puede establecer que si el sistema tiene solución única, entonces los sistemas $(A|B)\;y\;(I|B^*)$ son equivalentes. Por otro lado se sabe que los determinantes de matrices que se obtienen por medio de operaciones elementales son iguales multiplicados por una constante no nula, $(k \neq 0)$. Entonces se puede concluir que $|\,A\,| = k\,|\,I\,| = k\,.1 = k \neq 0$.

Por ejemplo, sea el sistema de ecuaciones de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} x - 3y + 6z + 8w = 35 \\ x - 2y + 6z + 6w = 26 \\ -x + 3y - 3z - 7w = -30 \\ 4y + 3z - 6w = -26 \end{cases}$$

Calculamos, por el método de triangulación de Gauss, el determinante de la matriz del sistema.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Por ser el determinante de la matriz del sistema distinto de cero, ser un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas y por el teorema anterior, el sistema es compatible determinado, es decir, con solución única.

Continuamos con el cálculo de determinantes para obtener los valores de las incógnitas. De esta forma

$\frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$, $\frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$, $\frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0$, $\frac{\Delta_w}{\Delta} = \frac{15}{3} = 5$

Previa verificación podemos decir que la solución del sistema es:

$S = \{(x, y, z, w)/x = -2, y = 1, z = 0, w = 5\}$

7.- Sistema de ecuaciones lineales con parámetros.

Los siguientes ejemplos ayudaran a afianzar más los distintos tipos de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1. Encontrar, de ser posible, los valores de k para que el siguiente sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z = k + 2 \end{cases}$$

Primer procedimiento. Llevamos la matriz ampliada del sistema dado, a su forma escalonada.

$$\begin{matrix} \\ -3F_1 + F_2 \\ -4F_1 + F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & k^2 - 14 & k + 2 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ \\ -1F_2 + F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & k^2 - 2 & k - 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & k^2 - 16 & k - 4 \end{array}\right)$$

En la tercera fila podemos observar que $k^2 - 16 = 0$ cuando $k = \pm 4$, entonces

Con $k = 4$ se obtiene

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ lo que indica, analizando los rangos de las matrices A y el de la ampliada, que el sistema es compatible indeterminado.

Con $k = -4$ se obtiene

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$ lo que indica, analizando los rangos de las matrices A y el de la ampliada, que el sistema es incompatible.

Por lo tanto, si

$k \neq \pm 4$ el sistema será compatible determinado

$k = 4$ el sistema será compatible indeterminado y

$k=-4$ el sistema será incompatible.

Segundo procedimiento: a) Calcular el determinante de la matriz del sistema

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & k^2-14 \end{vmatrix} = -7k^2+112$$

b) Resolver la ecuación, en términos de k, que resulta del cálculo del determinante.

$-7k^2+112=0 \implies k=\pm 4.$

c) Sustituir cada valor del parámetro en el sistema dado y determinar el tipo de solución.

Para $k=4$

$$\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+(k^2-14)z = k+2 \end{cases} \implies \begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+2z = 6 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{array}{c} \\ -3F_1+F_2 \\ -4F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1F_2+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible indeterminado.

Para $k=-4$

$$\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+(k^2-14)z = k+2 \end{cases} \implies \begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+2z = -2 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{array}{c} \\ -3F_1+F_2 \\ -4F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1F_2+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & 14 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible.

Finalmente se llega a las mismas conclusiones ya enunciadas respecto a los distintos valores de k y las posibles soluciones.

Ejemplo 2. Encontrar, de ser posible, los valores de k para que el siguiente sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

$$\begin{cases} (5-k)x-2y-z = 1 \\ -2x+(2-k)y-2z = 2 \\ -x-2y+(5-k)z = 1 \end{cases}$$

Primer procedimiento. Llevamos la matriz ampliada del sistema dado, a su forma escalonada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (5-k) & -2 & -1 & 1 \\ -2 & (2-k) & -2 & 2 \\ -1 & -2 & (5-k) & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ -2F_1+F_2 \\ (5-k)F_1+F_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & (5-k) & 1 \\ -2 & (2-k) & -2 & 2 \\ (5-k) & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \\ 2F_2+F_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & (5-k) & 1 \\ 0 & 6-k & 2(k-6) & 0 \\ 0 & -2(6-k) & (k-4)(k-6) & 6-k \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & (5-k) & 1 \\ 0 & (6-k) & 2(k-6) & 0 \\ 0 & 0 & k(k-6) & 6-k \end{array}\right)$$

En la tercera fila podemos observar que $k(k-6)=0$ cuando $k=0 \vee k=6$, entonces

Con $k=0$ se obtiene

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$ lo que indica, analizando los rangos de las matrices A y el de la ampliada, que el sistema es incompatible.

Con $k=6$ se obtiene

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ lo que indica, analizando los rangos de las matrices A y el de la ampliada, que el sistema es compatible indeterminado.

Por lo tanto, si

$k \neq 0 \wedge k \neq 6$ el sistema será compatible determinado

$k=6$ el sistema será compatible indeterminado y

$k=0$ el sistema será incompatible.

Segundo procedimiento: a) Calcular el determinante de la matriz del sistema

$$|A| = \begin{vmatrix} (5-k) & -2 & -1 \\ -2 & (2-k) & -2 \\ -1 & -2 & (5-k) \end{vmatrix} = k^3 - 12k + 36k$$

b) Resolver la ecuación, en términos de k, que resulta del cálculo del determinante.

$k^3 - 12k + 36k = 0 \Leftrightarrow k(k^2 - 12k + 36) \Leftrightarrow k(k-6)^2 = 0$. Por o tanto la ecuación se anulará para $k=0 \vee k=6$.

c) Sustituir cada valor del parámetro en el sistema dado y determinar el tipo de solución.

Para $k=0$

$$\begin{cases} (5-k)x - 2y - z = 1 \\ -2x + (2-k)y - 2z = 2 \\ -x - 2y + (5-k)z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ -x - 2y + 5z = 1 \end{cases}$$

Analizando la matriz escalonada de la matriz ampliada del sistema, se comprobará que para $k=0$ el sistema es incompatible.

Para $k=6$

$$\begin{cases} (5-k)x - 2y - z = 1 \\ -2x + (2-k)y - 2z = 2 \\ -x - 2y + (5-k)z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x - 2y - z = 1 \\ -2x - 4y - 2z = 2 \\ -x - 2y - 1z = 1 \end{cases}$$

Analizando la matriz escalonada de la matriz ampliada del sistema, se comprobará que para $k = 6$ el sistema es compatible indeterminado.

Finalmente se llega a las mismas conclusiones ya enunciadas respecto a los distintos valores de k y las posibles soluciones.

8.- Relación entre las soluciones de un sistema y sus matrices.

A través del estudio de los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas se evidenció la relación que existe entre las soluciones, o no, del sistema con la matriz del sistema y la matriz ampliada. Las características de estas matrices, como ser: rango, filas o columnas nulas, número de filas (ecuaciones) y columnas (incógnitas), etc. permiten determinar las soluciones, o no, del sistema.

En este apartado se pondrá en evidencia, brevemente, la relación que une las soluciones o no, de un sistema con las características de la matriz del sistema y la matriz ampliada.

8.1- Sistema con solución

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $A\,.\,X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{mxn}, B \in \mathbb{R}^{mx1}$ y X la matriz de las incógnitas de orden $mx1$, se dice que este sistema es compatible, tiene solución, cuando no tiene ecuaciones inconsistentes. La ausencia de estas ecuaciones se refleja en que tanto la forma escalonada de la matriz del sistema, A, como la matriz ampliada, A' o $(A|B)$, tienen el mismo número de filas no nulas o de columnas pivotales lo que equivale a decir que $\rho(A) = \rho(A')$.

Por ejemplo los siguientes esquemas en donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

representan matrices ampliadas de dos sistemas de ecuaciones compatibles. Para el sistema asociado a la matriz de la izquierda $\rho(A) = \rho(A') = 3$ mientras que para el sistema asociado a la matriz ampliada de la derecha $\rho(A) = \rho(A') = 2$.

Ahora bien, en primer lugar, si además de cumplirse la igualdad de los rangos entre las matrices del sistema y la ampliada, este número coincide con el número de incógnitas que tiene el sistema, estamos en presencia –como se estableció en el Teorema de Rouché Frobenius y demás teoremas– de un sistema compatible determinado. O lo que es lo mismo:

a) el número de filas no nulas de la matriz del sistema, es su forma escalonada es igual al número de incógnitas que tiene el sistema o

b) cada columna de la forma escalonada de la matriz del sistema tiene un pivot o

c) $\rho(A) = \rho(A') = n$ $(número\ de\ incógnitas\ del\ sistema)$.

Por ejemplo los siguientes esquemas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{10} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

representan matrices ampliadas de dos sistemas de ecuaciones compatibles determinados.

En segundo lugar, si además de cumplirse la igualdad de los rangos entre las matrices del sistema y la ampliada, este número es menor que el número de incógnitas que tiene el sistema, estamos en presencia –como se estableció en el Teorema de Rouché Frobenius y demás teoremas– de un sistema compatible indeterminado. O lo que, sintéticamente, es lo mismo $\rho(A) = \rho(A') < n\ (número\ de\ incógnitas\ del\ sistema)$.

Esto significa que la forma escalonada de la matriz del sistema tiene columnas no pivotales, el número de estas columnas corresponde al número de variables libres (s) que posee el sistema y, como se dijo en el apartado tres, $s = n - \rho(A)$.

Por ejemplo, sean las matrices ampliadas, en la forma escalonada reducida de dos sistemas de ecuaciones lineales.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se tiene para la primera matriz $\rho(A) = \rho(A') = 3 < 4\ (número\ de\ incógnitas)$, por lo tanto el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones y la cantidad de variables libres es 1 (una). Reconstruimos el sistema

$\begin{cases} x - y = -1 \\ z = 0 \\ w = 2 \end{cases}$ decidimos que la variable "y" es la variable libre, entonces $\begin{cases} x = y - 1 \\ z = 0 \\ w = 2 \end{cases}$

La solución general del sistema será $S_G = \{(x, y, z, w)/x = y - 1, z = 0, w = 0, y\ \in \mathbb{R}\}$.

Para el sistema representado en la matriz de la derecha $\rho(A) = \rho(A') = 2 < 4\ (n)$, por lo tanto el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones y la cantidad de variables libres es 2 (dos). Reconstruimos el sistema

$\begin{cases} y + w = 3 \\ z - 2w = 2 \end{cases}$ decidimos que las variables $x\ y\ w$ sean las variables, entonces $\begin{cases} y = 3 - w \\ z = 2w + 2 \end{cases}$

La solución general del sistema será $S_G = \{(x, y, z, w)/y = 3 - w, z = 2w + 2, x, w\ \in \mathbb{R}\}$.

8.2- Sistema sin solución

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnita $A.X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{mxn}, B \in \mathbb{R}^{mx1}\ y\ X$ la matriz de las incógnitas de orden $mx1$, se dice que este sistema es incompatible, no tiene solución, cuando tiene ecuaciones inconsistentes, es decir ecuaciones de la forma $(0\ \ 0\ \ldots 0\ \ k)$ con $k \neq 0$.

Es muy sencillo reconocer ecuaciones inconsistentes en la forma escalonada de la matriz ampliada de un sistema, también se puede reconocer este tipo de ecuaciones cuando en el sistema hay dos ecuaciones con los mismos coeficientes de las respectivas incógnitas pero con distintos términos independientes. Por ejemplo en el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 5z - w = 1 \\ 2x - y + 5z + w = 3 \\ 3x + y - 2z + 3w = -1 \\ 2x - y + 5z + w = 6 \end{cases}$$

Podemos observar que la segunda y cuarta ecuación solo difieren en el segundo miembro. Si escalonamos la matriz ampliada del sistema se evidenciará la ecuación de inconsistencia que lo hace incompatible.

$$\begin{array}{r} \\ -2F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3 \\ -2F_1 + F_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \\ F_2 + F_3 \\ -F_2 + F_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -17 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -22 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

No en todos los casos es tan simple reconocer ecuaciones inconsistentes, hay casos de dependencia entre las ecuaciones que las pueden hacer inconsistentes.

Sin embargo existen otros tipos de dependencia entre las ecuaciones que las pueden hacer inconsistentes. El hecho de que un sistema tenga ecuaciones inconsistentes se relaciona con conceptos como el de rango pero también con el de independencia lineal (que se estudiará en el próximo capítulo) pero en todos los casos, la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema hará evidente la existencia de al menos una ecuación inconsistente cuando el sistema no tenga solución.

Por ejemplo en el siguiente esquema en donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ que representa la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, se puede observar que la tercera fila representa una ecuación inconsistente y hace que los rangos de las matriz del sistema y la matriz ampliada sean distintos. Más precisamente $2 = \rho(A) \neq 3 = \rho(A')$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En general $\rho(A) < \rho(A') \Leftrightarrow AX = B$ tiene ecuaciones inconsistentes.

8.3- Sistema con menos ecuaciones que incógnitas.

Si en un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnita $A\,.X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{mxn}, B \in \mathbb{R}^{mx1}$ $y\ X$ la matriz de las incógnitas de orden $mx1$, se cumple que $m < n$, el número de filas no nulas en la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema será necesariamente menor al número de incógnitas, luego un sistema de este tipo no puede tener solución única. Sí además este tipo de sistema es homogéneo, necesariamente tiene un número infinito de soluciones.