Capítulo 5

DETERMINANTES

Álgebra y Geometría Analítica
Facultad de Ingeniería UNJu
2020

1.1.- Introducción

Los determinantes se definen como una función cuyo dominio son las matrices cuadradas de orden n, es decir que los determinantes son una función de funciones y en los mismos se relacionan las filas y las columnas de la matriz mediante sumatorias.

Una de las primeras culturas que abordó este tema fue la japonesa. Al matemático Seki Kowa (1642–1708) se le adjudica la invención de los determinantes ya que fue quien inició estudios sobre la teoría de las ecuaciones según los métodos de los matemáticos chinos. En el año 1683 introdujo el tema de los determinantes en el Kai Fukundai no Ho (Método de solución de problemas Fukundai). Con un procedimiento denominado *tatmu*, derivó las ecuaciones lineales de dos ecuaciones cuadráticas y encontró su determinante. Otros aportes de este mismo autor fueron la simplificación de los determinantes de grado mayor a dos al identificar el factor común de una determinada fila, la formulación del concepto de determinante y establecimiento de muchas de sus propiedades.

En Europa, los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes que las matrices. En 1693 el filósofo alemán Gottfried W. Leibniz (1646–1716) escribió una carta a Guillaume F. Antoine (1661–1704), marqués de l'Hôpital, en la que resolvía un sistema de ecuaciones, proporcionando de esta manera la descripción del determinante por permutaciones que actualmente se utiliza.

En 1748 se publicó un tratado de álgebra del matemático británico Colin Maclaurin (1698–1746), donde se exponía la resolución de sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas, llegándose de este modo a lo que hoy se conoce como el determinante de segundo y tercer orden.

Algo similar ocurrió con el matemático suizo Gabriel Cramer (1704–1752) quien publicó en 1750 el tratado de geometría "*Introducción al análisis de las líneas curvas algebraicas*" donde proponía la solución de sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. El método es similar al publicado en el tratado de Maclaurin, pero es más conocido por su claridad de notación y generalización.

En 1771 Alexandre T. Vandermonde (1735–1796) realizó la primera exposición lógica y formal de la teoría de los determinantes, reconociéndolos como funciones independientes, mientras que en 1772 Pierre Laplace (1749–1827) generalizó el método de Vandermonde para el desarrollo de los determinantes en productos de menores, y presentó el método general de la expansión de un determinante en términos de sus menores complementarios. Al año siguiente Joseph L. de Lagrange (1736–1813) expuso la solución de determinantes de segundo y tercer orden y los utilizó para fines distintos al de la solución de ecuaciones lineales.

En 1801 Carl F. Gauss (1777–1855) utilizó la palabra determinante en su teoría de números. Para 1812 el matemático francés Agustin L. Cauchy (1789–1857) presentó en la Academia de Ciencias de Francia un artículo con el teorema de la multiplicación de determinantes, utilizando la palabra determinante de Gauss en su sentido actual, con lo que mejoró la notación. En tanto que en 1815 este mismo autor publicó una memoria en la que mejoraba el desarrollo de Laplace, proporcionando así la primera exposición sistemática de los determinantes mediante la disposición de los elementos en filas y columnas y la notación de los índices dobles.

En 1829 el matemático alemán Carl G. Jakob Jacobi (1804–1851) utilizó por primera vez los determinantes funcionales, que más tarde fueron llamados jacobianos por Sylvester en sus memorias del Journal Crelle en 1841.

Durante el último cuarto del siglo XIX, el matemático británico Charles Lutwidge Dogson (1832–1898) –mejor conocido por el seudónimo de Lewis Carroll– y algunos otros estudiosos, también enriquecieron la teoría de los determinantes con operaciones numéricas, así como con resultados nuevos y complementarios a los ya desarrollados por sus antecesores.

Finalmente, las aplicaciones de los determinantes son diversas y variadas, a modo de ejemplo, en economía se los utiliza para encontrar los puntos de equilibrio de un sistema financiero descrito matricialmente, en ingeniería para optimizar procesos y en general en matemáticas se los utiliza –en el caso ya estudiado de las matrices– para saber si una matriz cuadrada es invertible o no ó bien calcular el rango de las mismas. Otros temas que se verán más adelante y en los cuales se hace uso de los determinantes son: resolución de sistemas de ecuaciones lineales, obtención de la ecuación implícita de un plano, estudio de la posición relativa de rectas y planos y la independencia lineal de vectores.

Otras aplicaciones en geometría son el cálculo de áreas de polígonos en el plano de los que se conocen las coordenadas de los vértices ó bien las de ciertos vectores, el cálculo de volúmenes de paralelepípedos.

De esta manera, en este quinto capítulo se estudiará en primer lugar la definición de determinantes para lo cual se hace necesario hacer un muy pequeño análisis de permutaciones simples como calcularlas y formarlas como así también algunos conceptos relacionados con estas. Para poder definir matriz adjunta y de cofactores, se estudiará primeramente menor complementario y adjunto de un elemento de una matriz cuadrada, todo esto ayudará a que el desarrollo de un determinante por los elementos de una línea sea mucho más comprensible y de esta forma poder arribar, de una manera más sencilla, a la definición inductiva del determinante de una matriz cuadrada de orden n.

Las propiedades de los determinantes –que se estudiaran en el apartado 3– permitirán luego de analizar la relación entre determinantes y matices equivalentes, proponer el cálculo de determinantes de orden superior a tres mediante dos métodos: el de triangulación y el de Chío.

En el apartado 6 se propone un segundo método para calcular la matriz inversa: mediante la matriz adjunta; mientras que en el apartado 7 simplemente se pone en evidencia como se vinculan los determinantes con la matriz inversa, el rango de una matriz y la equivalencia con la matriz identidad.

Finalmente se utiliza los determinantes para el cálculo del rango de una matriz cualquiera por el método del orlado.

1.2.- Conceptos básicos

Una parte importante de la matemática discreta es la "*combinatoria*", consiste en estudiar las posibles agrupaciones de objetos. Por ejemplo contar el número de objetos que cumplen cierta propiedad, es un problema que se resuelve con técnicas combinatorias. Se pueden interpretar muchos problemas combinatorios en términos de las agrupaciones ordenadas o desordenadas de los elementos de un conjunto; a estas agrupaciones se las suele llamar permutaciones y combinaciones.

Permutaciones simples: *dado un conjunto finito de n elementos, se llama permutaciones simples de orden n (P_n) a todo conjunto ordenado y formado con los n elementos.*

P_n: "se lee permutaciones de orden n"

Dos permutaciones simples cualesquiera tienen exactamente los mismos elementos y difieren solamente en el orden de colocación de éstos.

Ejemplo

Sea el conjunto $\{a, b, c, d\}$ es decir $n = 4$ Algunas de las P_4 son abcd, bacd, cdba, dcab, cabd, etc.

¿Cuántas permutaciones de orden n pueden obtenerse?

Supóngase que a los n elementos se los debe ubicar en n casillas, pues se deben utilizar todos ellos. Esto se muestra en el siguiente diagrama.

n − c a s i l l a s

C_1	C_2	C_3	C_4	. . .	C_5
n elecciones	n − 1 elecciones	n − 2 elecciones	n − 3 elecciones	. . .	n − (n − 1) elecciones

La cantidad de elecciones distintas que se pueden hacer al tratar de llenar la primera casilla, es n. Elegido un elemento para llenar la primera casilla (C_1), para ocupar la segunda casilla, (C_2), podrán hacerse $(n-1)$ elecciones diferentes. Es decir que habrá $n(n-1)$ elecciones posibles para las dos primeras casillas. Siguiendo este razonamiento, para las tres primeras casillas (C_1, C_2 y C_3), habrá $n(n-1)(n-2)$ posibles elecciones distintas. Finalmente restará una elección solamente para llenar la última casilla.

Luego el número de permutaciones simples de n elementos se puede calcular como:

$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \,.2 \,.1$

$P_n = n!$ [1] en donde $n!$ se lee "n factorial ó bien factorial de n".

Por ejemplo las $P_4 = 4! = 4 \,.3 \,.2 \,.1 = 24$

Es decir que con 4 elementos distintos {a, b, c, d}, podemos formar 24 permutaciones simples. ¿Cuáles son esas permutaciones?

Debemos colocar cuatro elementos {a, b, c, d} en cuatro casillas C_1, C_2, C_3, C_4 . Supongamos que colocamos en C_1 el elemento a, por lo tanto en C_2 podemos colocar b, c ó d y así sucesivamente con las demás casillas y elementos. Todo esto se muestra en el siguiente diagrama de árbol.

$$\overset{C_1}{\widetilde{a}}\begin{cases} \overset{C_2}{\widetilde{b}}\begin{cases} \overset{C_3}{\widetilde{c}}\begin{cases}\overset{C_4}{\widetilde{d}} \rightarrow \overset{PERM.}{\overbrace{abcd}} \end{cases} \\ d\{c \rightarrow abdc \end{cases} \\ c\begin{cases} b\{d \rightarrow acbd \\ d\{b \rightarrow acdb\end{cases} \\ d\begin{cases} b\{c \rightarrow adbc \\ c\{b \rightarrow adcb\end{cases}\end{cases}$$

[1] La función factorial se representa con un signo de exclamación "!" detrás de un número (n). Esto significa que se debe multiplicar todos los números enteros positivos que hay entre ese número y el 1. Por convención 1! = 0! = 1.

Estas son las seis permutaciones simples cuyo primer elemento es a. Idéntico razonamiento se hace colocando en C_1 el elemento b y en C_2 los restantes elementos y de igual manera para los elementos c y d, obteniéndose las 24 permutaciones simples.

Otro ejemplo que nos será de utilidad en un desarrollo posterior es considerar que los objetos con los cuales formamos las permutaciones son números (subíndices).

¿Cuántas y cuáles son las permutaciones que se pueden hacer con los elementos del conjunto {1, 2, 3}?

Cantidad de permutaciones: $P_3 = 3! = 3\,.2\,.1 = 6$

$$Permutaciones \begin{cases} 1 \begin{cases} 2\,\{3 \longrightarrow 123 \\ 3\,\{2 \longrightarrow 132 \end{cases} \\ 2 \begin{cases} 1\,\{3 \longrightarrow 213 \\ 3\,\{1 \longrightarrow 231 \end{cases} \\ 3 \begin{cases} 1\,\{2 \longrightarrow 312 \\ 2\,\{1 \longrightarrow 321 \end{cases} \end{cases}$$

Existen otras cuestiones, respecto de las permutaciones, que nos serán de gran ayuda a la hora de entender la definición de determinantes.

Llamamos *permutación principal* a la permutación en la cual los n elementos están en un orden natural según los elementos con los que se trabaje. En el primer ejemplo la permutación principal es $abcd$, mientras que en el último ejemplo es 123.

En otra permutación cualquiera, decimos que dos elementos forman una *permanencia* cuando, sin tener en cuenta los restantes, están en el mismo orden que en la permutación principal y que forman *inversión* cuando están en orden contrario.

Por ejemplo la permutación:

a) 132 presenta una inversión pues 3 precede a 2

b) 321 presenta dos inversiones ya que 3 precede a 2 y también 2 precede a 1

Decimos que una permutación es de *clase par* si como en el ejemplo b) es par el número de sus inversiones y que es de *clase impar* si como en el ejemplo a) es impar el número de inversiones. A toda permutación de clase par ó simplemente permutación par, se le asigna un signo positivo, mientras que a una impar se le asigna un signo negativo.

Por ejemplo la permutación:

a) 132, de clase impar, se le asigna un signo negativo (–)

b) 321, de clase par, se le asigna un signo positivo (+)

Con todos estos conceptos vistos hasta el momento, estamos en condiciones de comprender la siguiente

Definición: *llamaremos determinante a la función cuyo dominio es el conjunto de las matrices cuadradas de orden n y cuyo codominio es el conjunto $\mathbb{K}$, de modo que la imagen* *de una matriz es un número que se obtiene formando todos los productos posibles de n elementos elegidos entre los n^2 de la matriz dada, siempre que en cada producto haya un factor de cada fila y un factor de cada columna, anteponiendo a cada producto el signo más o menos según que las permutaciones que indican las filas y las columnas sean de clase par o de clase impar respectivamente.*

Dada la matriz cuadrada de orden 2

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ el determinante de A que indicaremos como $det(A)$ ó $\Delta(A)$ ó $|\, A \,|$ es

$|\, A \,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

Observemos los siguientes detalles:

Dada la matriz A su correspondiente determinante es $det(A)$ ó $\Delta(A)$ ó $|\, A \,|$

$|\, A \,|$ es un número que se obtiene sumando los producto de 2 elementos ($n = 2$) cada uno que se pueden formar con los cuatro ($n^2 = 4$) elementos de la matriz.

El producto $a_{11}\, a_{22}$ es precedido por un signo positivo porque si dejamos en el orden natural los subíndices que indican las filas, los subíndices que indican las columnas no presentan inversión alguna y por lo tanto se le asigna un signo positivo. Por el contrario en el producto $a_{12}\, a_{21}$ los subíndices que indican las columnas presentan una inversión y esta permutación es de clase impar, en consecuencia se le asigna un signo negativo.

Ejemplo: hallar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$|\, A \,| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1(-2) - (-3)5 = 17$

En general, como los factores que forman los productos del determinante, pertenecen a filas sucesivas, los primeros subíndices están en orden natural $1, 2, \dots n$, pero estos factores también pertenecen a columnas sucesivas, entonces la sucesión de los segundos subíndices forman una permutación P tal que $P = p_1\, p_2\, p_3\, \dots p_n$.

Por lo tanto a partir de una matriz cuadrada de orden n, se puede formar $n!$ productos distintos. Por ejemplo para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, cuadrada de orden 2, podemos formar $2! = 2$ productos distintos $a_{11}\, a_{22}$ y $a_{12}\, a_{21}$.

Veamos ahora, el determinante de una matriz de orden tres.

Dada la matriz A,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |\, A \,| = \sum_P sg(P) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$ donde sg(P) es el signo que depende de la paridad de la permutación.

$$1\begin{cases} 2\{3 \to \overbrace{123}^{p_1\,p_2\,p_3} \ + \\ 3\{2 \to 132 \ - \end{cases}$$
$$2\begin{cases} 1\{3 \to 213 - \\ 3\{1 \to 231 + \end{cases}$$
$$3\begin{cases} 1\{2 \to 312 + \\ 2\{1 \to 321 - \end{cases}$$

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_P sg(P) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Esta última expresión es el desarrollo de un determinante de orden tres por la Regla de Sarrus, la que sólo se aplica a determinantes de hasta orden tres.

Obsérvese que por ser la matriz de orden 3 ($n = 3$) se pudo hacer $3! = 6$ productos distintos. Si la matriz fuese de orden cuatro el desarrollo tendría 24 (4!) términos y si fuese de orden 5, el desarrollo tendría 120 (5!) términos, lo que hace evidentemente que el cálculo del determinante se haga muy trabajoso aplicando la definición dada.

En general dada una matriz A cuadrada de orden n, su determinante será:

$$\sum_P sg(P) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \ \dots \ a_{np_n} \ \ donde\ P = P_n \ \ y\ sg(P) = \begin{cases} +\ si\ P\ es\ par \\ -\ si\ P\ es\ impar \end{cases}$$

Ejemplo: hallar el determinante asociado a cada una de las siguientes matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ entonces } |\mathrm{A}\,| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 9 + 0 - 12 + 15 = -4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 4-i \\ 6 & 5i \end{pmatrix} \text{ entonces } |\,A\,| = \begin{vmatrix} 2+i & 4-i \\ 6 & 5i \end{vmatrix} = (2+i)5i - 6(4-i) = 16i - 29$$

2.- Matriz de cofactores y Matriz adjunta

En todas las ramas de las matemáticas, las matrices son una herramienta muy valiosa pero por sobre todo aquellas matrices que son invertibles, es decir aquellas que admiten inversas. Existen diversos métodos para la obtención de la matriz inversa como por ejemplo el de Gauss–Jordan o aquel que utiliza la matriz adjunta. El primero se estudio en el capítulo correspondiente a matrices y utiliza transformaciones elementales entre las filas de la matriz dada mientras que en el segundo se calculan determinantes. Cada método tiene sus ventajas y desventajas.

Antes de definir matriz Adjunta necesitamos desarrollar otros conceptos.

Menor complementario: dada la matriz A cuadrada de orden n, se define menor complementario de un elemento a_{ij} denotado m_{ij} como el determinante de la matriz de orden $(n-1)$ que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j.

Cofactor[2]**:** de un elemento a_{ij}, denotado como A_{ij} es el producto de su menor complementario, m_{ij}, por el signo que resulta de calcular $(-1)^{i+j}$.

Dada $A \in K^{n\,x\,n}$, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,.m_{ij}$.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5$ mientras que $m_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$ Por lo tanto

$A_{23} = (-1)^{2+3}\,.m_{23} = (-1)^5\,.(-5) = 5$ mientras que $A_{33} = (-1)^{3+3}\,.m_{33} = (-1)^6.\ 3 = 3$

Debemos destacar que el menor complementario, m_{ij}, de un elemento de A es igual a m_{ji} en A^t ya que eliminar las líneas (i,j) en A es lo mismo que eliminar las líneas (j,i) en A^t. De idéntica manera A_{ij} en A es igual a A_{ji} en A^t, es decir, $A_{ij} = A^t_{ij}$. De esta manera

Matriz de cofactores: de A es la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor A_{ij}. Suele denotarse como $Cof\,(A)$.

La importancia de esta última matriz es que permite definir matriz adjunta.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$A_{11} = -6$	$A_{21} = -2$	$A_{31} = 2$
$A_{12} = -17$	$A_{22} = 9$	$A_{32} = 7$
$A_{13} = -9$	$A_{23} = 5$	$A_{33} = 3$

Por lo tanto

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -6 & -17 & -9 \\ -2 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que $\left(Cof\,(A)\right)^t = Cof(A^t)$.

Analicemos los cofactores de A^t

m_{ij} de A^t es igual a m_{ji} de A. Eliminando las líneas (i,j) de A^t y las líneas (j,i) de A nos siguen quedando dos matrices que son una la traspuesta de otra (con esas líneas eliminadas y de orden $(n-1)$. Por ser esas matrices traspuesta una de otra, tienen el mismo determinante[3].

[2] También suele denominarse Adjunto.

[3] Esta propiedad se demostrará en el apartado Propiedades de los determinantes.

Multiplicando los menores complementarios anteriores por $(-1)^{i+j}$ tenemos:

A_{ij} de $A^t = A_{ji} de$ A.

Si denotamos la matriz de cofactores de A^t como B y a la matriz de cofactores de A como C, la igualdad anterior nos indica $b_{ij} = c_{ji}$ es decir $B = C^t$. Por lo tanto

$\left(Cof\ (A)\right)^t = Cof(A^t)$

Esto trae como consecuencia que la matriz adjunta se pueda calcular como la traspuesta de la matriz de cofactores de la matriz dada o bien como la matriz de cofactores de la traspuesta de la matriz dada.

Matriz Adjunta: dada una matriz B cuadrada de orden n, se llama matriz adjunta de B $(Adj\ B)$ a la matriz traspuesta de los cofactores de los elementos b_{ij} de B.

Sea $B = \|b_{ij}\| \in K^{n\,x\,n} \Rightarrow Adj\ B = \|A_{ji}\|$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ sabemos, por el ejemplo anterior que:

$Cof(B) = \begin{pmatrix} -6 & -17 & -9 \\ -2 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ por lo tanto $Adj\ B = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -17 & 9 & 7 \\ -9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.- Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

A partir de las definiciones de menor complementario y de cofactor se puede dar una nueva definición de determinantes para poder hacer su cálculo más fácil, sobre todo cuando este es de orden mayor a tres. A diferencia del cálculo por definición cuya cantidad de términos depende del orden del determinante –orden 2, $2! = 4$ términos, orden 3, $3! = 6$ términos, orden 4, $4! = 24$ términos, así sucesivamente el de orden n, tendrá $n!$ términos– en esta nueva definición inductiva[4] se recurre a disminuir el orden del determinante que se calcula.

Consideremos en primer lugar el caso trivial, sea la matriz de orden 1, $A = (a)$, cuyo determinante será $|\,A\,| = a$.

[4] Definir inductivamente objetos de un conjunto, consiste en indicar i) los objetos iniciales o elementales del conjunto, ii) las reglas u operaciones que permiten formar con los objetos que se dispone, nuevos objetos del conjunto.

En segundo lugar sabemos calcular el determinante de una matriz de orden dos, es decir sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, cuyo determinante será $|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Reescribiendo este determinante $|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$, es decir se utilizó los cofactores de los elementos de la primera fila. Esta es la expansión del $det\,(A)$ a lo largo de la fila 1.

También podemos escribir el mismo determinante como

$|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}\,a_{11}$

$|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}\,A_{21} + a_{22}\,A_{22}$

Esta es la expansión por cofactores del $det\,(A)$ a lo largo de la fila 2.

Usando ahora las columnas en lugar de las filas, podemos realizar una expansión del $det\,(A)$ a lo largo de cualquiera de las columnas.

$de\,t(A) = a_{11}a_{22+}a_{21}(-a_{12}) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$ (primera columna)

$de\,t(A) = a_{12}(-a_{21}) + a_{22}\,a_{11} = a_{12}\,A_{12} + a_{22}\,A_{22}$ (segunda columna)

Comprobemos estos resultados mediante un ejemplo.

Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^2\,3 + (-1)(-1)^3\,(-2) = 6 - 2 = 4$ si expandimos por la fila 1

$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2(-1)^3(-1) + 3(-1)^4 2 = -2 + 6 = 4$ si expandimos por la fila 2

$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^2\,3 + (-2)(-1)^3(-1) = 6 - 2 = 4$ si expandimos por la columna 1

$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1(-1)^3(-2) + 3(-1)^4 2 = -2 + 6 = 4$ si expandimos por la columna 2

En tercer lugar consideremos una matriz de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces:

$|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ si expandimos por la fila 1

Y de la misma manera que en el caso anterior el mismo determinante se puede expandir a los largo de cualquier fila o cualquier columna.

$det(A) = a_{i1}\,A_{i1} + a_{i2}\,A_{i2} + a_{i3}\,A_{i3}$ con $i = 1, 2, 3$ expansión por fila i

$det(A) = a_{1j}\,A_{1j} + a_{2j}\,A_{2j} + a_{3j}\,A_{3j}$ con $j = 1, 2, 3$ expansión por columna j

Hagamos uso de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ cuyo determinante ya fue calculado por definición ($det(A) = -4$)

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ si expandimos por la fila 3.

$det(A) = 2 + 3(-7) + 5\,.3 = 2 - 21 + 15 = -4$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ si expandimos por la columna 1.

$det(A) = 2(-6) + (-3)(-2) + 2 = -12 + 6 + 2 = -4$

Estos ejemplos nos permiten ir haciendo algunas conjeturas, en primer lugar que no importa como se haga la expansión del determinante se obtiene el mismo resultado, o sea y en segundo lugar, que el resultado del determinante es único.

Finalmente consideremos el caso general de una matriz de orden n y formalicemos la siguiente

Definición inductiva: sea A una matriz de orden n, entonces si

$n = 1$, caso trivial, $det(A) = a_{11}$

$n > 1$ podemos definir el $det(A)$ como

$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ expansión por fila i

$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ expansión por columna j

Donde A_{ij} es el cofactor del elementos (i, j) de la matriz A.

De esta forma el determinante de una matriz de orden n queda expresado como una combinación de n determinantes de orden $(n - 1)$.

En la práctica, los determinantes se expanden a lo largo de la fila o columna que contenga la mayor cantidad de cero, para evitarse el cálculo del cofactor de dichos elementos.

Como caso particular del desarrollo de un determinante por los elementos de una línea, si en un determinante todos los elementos de una línea son nulos (excepto uno), el determinante es igual al producto de ese elemento no nulo por el adjunto del mismo.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

Con esta definición la obtención de un determinante de orden n se reduce a calcular n determinantes de orden $(n-1)$, y así hasta que los determinantes de orden inferior a resolver sean de orden 2 ó 3. De esta forma un determinante de orden 5, en general se resolvería con 5 determinantes de orden 4, uno de orden 4 con 4 determinantes de orden 3, uno de orden 3 con 3 de orden 2. Así, un determinante de orden 5 se resolvería con $5\,.\,4 = 20$ determinantes de orden 3, ó 60 de orden 2, $(5\,.\,4\,.\,3 = 60)$. Se reduce el problema de calcular un determinante de orden superior a calcular más determinantes pero de orden menor y obviamente más sencillos. Más adelante se explicará un método, basado en propiedades de los determinantes, que reducirá en la práctica el número de menores (determinantes de orden inferior) a resolver, pues se omitirá el cálculo de muchos de los adjuntos, al conseguir que el elemento correspondiente sea cero, lo que anula el sumando resultante de multiplicar el elemento nulo por su adjunto.

4.- Propiedades de los determinantes

Las propiedades de los determinantes permiten, conjuntamente con la definición anterior, hacer mucho más sencillos los cálculos cuando se trata también de matrices de orden superior ó igual a tres. A continuación se enunciaran y demostraran estas propiedades, haciendo uso de un determinante genérico de orden tres ya que esto no hace que se pierda generalidad.

Sea $A \in K^{n\,x\,n}$ una matriz cuadrada de orden n, se cumple que:

P_1) El determinante de una matriz A y el de su traspuesta son iguales.

D) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ por lo tanto $|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

Todo término del $|A|$ está formado por n elementos, uno de cada fila y uno de cada columna, luego pertenece también a $|A^t|$.

Las dos permutaciones que indican filas (columnas) en $|A^t|$ son las mismas que indican columnas (filas) en $|A|$ luego el signo de dicho término en ambos determinantes es $(+)$ ó $(-)$ según que ambas permutaciones sean de clase par o impar respectivamente.

Así, por ejemplo, en el caso considerado

En $|A|$

$$a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \begin{cases} 1\ 2\ 3\ par\ \ (+) \\ 2\ 3\ 1\ par\ (+) \end{cases} \Rightarrow (+)(+) = +\,par$$

En $|\, A^t \,|$

$$a_{21}\, a_{32}\, a_{13} \begin{cases} 2\ 3\ 1\ par\ \ (+) \\ 1\ 2\ 3\ par\ (+) \end{cases} \Longrightarrow (+)(+) = +\,par$$

Luego $|\, A \,| = |\, A^t \,|$

Esta propiedad permite afirmar que toda otra propiedad de los determinantes referidas a sus filas es también válida para sus columnas.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, por lo tanto

$$|A\,| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 20 - 2 - 0 - 24 = -24$$

$$|A^t\,| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 20 + 0 - 2 - 24 - 0 = -24$$

P_2) Si se permutan dos líneas cualesquiera de una matriz, los correspondientes determinantes son opuestos

D)

$$|\, A_1 \,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ por lo tanto } |\, A_2 \,| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Intercambiar entre sí dos filas significa una transposición en los primeros índices, lo cual cambia la clase de la permutación y como la de los segundos índices correspondientes a las columnas no ha variado, habrá un cambio de signo en cada término del determinante.

En $|\, A_1 \,|$

$$a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \begin{cases} 1\ 2\ 3\ par\ \ (+) \\ 2\ 3\ 1\ par\ (+) \end{cases} \Longrightarrow (+)(+) = +\,par$$

En $|\, A_2 \,|$

$$a_{22}\, a_{13}\, a_{31} \begin{cases} 2\ 1\ 3\ impar\ \ (-) \\ \ \ 2\ 3\ 1\ par\ (+) \end{cases} \Longrightarrow (-)(+) = -\,impar$$

Luego $|\, A_1 \,| = -|\, A_2 \,|$

Ejemplo: Sea la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, por lo tanto

$$|A_1\,| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 18 + 90 - 12 - 27 - 15 = 57$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 12 + 27 - 18 - 3 - 90 = -57$$

Consecuencia de la segunda propiedad

CP_2) El determinante de toda matriz que tenga dos líneas idénticas es nulo.

$$\text{Si } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Al permutar dos filas consecutivas (la primera y la segunda por ejemplo) por la propiedad anterior el determinante será $-|A|$ pero siendo idénticas las filas, el nuevo determinante es igual al anterior. Es decir $|A| = -|A|$

Luego: $|A| = -|A| \iff 2|A| = 0 \iff |A| = 0$

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 2 + 3 - 2 + 0 = 0$$

P_3) Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz por un mismo escalar λ no nulo el determinante correspondiente queda multiplicado por dicho escalar.

Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ y multiplicamos por λ los elementos de la primera fila, resulta

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} & \lambda\, a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Según el desarrollo de los determinantes por elementos de una línea, tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} & \lambda\, a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\, a_{11}A_{11} + \lambda\, a_{12}\, A_{12} + \lambda\, a_{13}\, A_{13}$$

$$= \lambda\,[a_{11}A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13}] = \lambda\, |A|$$

Esta propiedad permite separar como factor del determinante un factor común a todos los elementos de una línea cualquiera, simplificando esta.

Ejemplo Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, por lo tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 0 - 60 + 75 = -20$$

Extrayendo 5 como factor común de la primera fila

$$|A\,| = 5\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\3 & 0 & -2\\1 & -3 & 5\end{vmatrix} = 5(0-9+2-0+15-12) = 5(-4) = -20$$

Consecuencia de la tercera propiedad

CP_3) Si en el determinante de una matriz, los elementos de una línea son proporcionales a los correspondientes de otra paralela a ella, el determinante es nulo.

En efecto, si separamos el coeficiente de proporcionalidad como factor del determinante queda otro con dos líneas iguales y por lo tanto es nulo.

Ejemplo Sea la matriz $A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 8\\3 & 0 & 12\\1 & -3 & 4\end{pmatrix}$, por lo tanto $|A\,| = \begin{vmatrix}2 & -1 & 8\\3 & 0 & 12\\1 & -3 & 4\end{vmatrix}$

Se puede observar que la tercera columna es proporcional a la primera, $3°C = 4\,.\,1°C$

$$|A\,| = 4\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\3 & 0 & 3\\1 & -3 & 1\end{vmatrix} = 4\,.0 = 0$$

Esta consecuencia puede generalizarse de la siguiente manera:

C_GP_3) Si la línea de una matriz es combinación lineal[5] de las demás, el determinante correspondiente es nulo.

Ejemplo Sea la matriz $A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 8\\3 & 2 & -2\\8 & 3 & 4\end{pmatrix}$ se puede observar que la fila 3 se obtuvo a partir de sumar a la fila 1 con el doble de la fila 2, es decir, $F_3 = F_1 + 2\,F_2$. Por lo tanto

$$|A\,| = \begin{vmatrix}2 & -1 & 8\\3 & 2 & -2\\8 & 3 & 4\end{vmatrix} = 16+72+16-128+12+12 = 0$$

Segunda consecuencia de la tercera propiedad

C_2P_3) Si se multiplican todos los elementos de una matriz por un mismo escalar λ el determinante correspondiente queda multiplicado por el escalar elevado a una potencia igual al orden de la matriz.

La demostración de esta propiedad es evidente si se considera que toda matriz de orden n tiene n líneas, si se aplica n veces la propiedad 3 (una vez por cada línea) el determinante de esta matriz quedará multiplicado n veces por el escalar λ o sea λ^n

Ejemplo Sea la matriz $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\6 & 3 & 3\\3 & 1 & 5\end{pmatrix}$ tal que $|\,A\,| = -45$, entonces $-2A = \begin{pmatrix}-2 & -6 & 4\\-12 & -6 & -6\\-6 & -2 & -10\end{pmatrix}$

[5] Para el caso de las líneas de una matriz, combinación lineal significa que una línea se obtuvo a partir de la suma de otras pudiendo estas estar multiplicadas por un escalar.

$|-2A| = 360 = (-2)^3(-45)$

P_4) Si todos los elementos de una línea de una matriz son ceros, su determinante es nulo.

D_1) Esto es verdad ya que por la tercera propiedad, separando como factor común del determinante, el elemento nulo, resultara: $0\,.\,|A| = 0$

D_2) La veracidad de esta propiedad es evidente si aplicamos el desarrollo del determinante por los elementos de la línea formadas por ceros.

Ejemplo Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ o bien}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.(-1)^3 20 + 0.(-1)^4 - 56 + 0.(-1)^5 - 28 = 0$$

P_5) Si los elementos de una línea de una matriz se pueden escribir como suma de n términos, puede descomponerse el determinante correspondiente en suma de n determinantes que tienen las mismas restantes líneas y en lugar de aquella, la formada por los primeros sumandos, por lo segundos, . . . , y por los n–ésimos sumandos respectivamente.

D) Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ entonces, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila, tenemos:

$|A| = (a_{11} + b_{11})\,A_{11} + (a_{12} + b_{12})\,A_{12} + (a_{13} + b_{13})\,A_{13}$

$|A| = a_{11}A_{11} + b_{11}\,A_{11} + a_{12}A_{12} + b_{12}\,A_{12} + a_{13}A_{13} + b_{13}\,A_{13}$

$|A| = [\,a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}] + [\,b_{11}\,A_{11} + b_{12}\,A_{12} + b_{13}\,A_{13}]$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Consecuencia de la quinta propiedad

CP_5) El determinante de una matriz no varía si a una línea se le suma una combinación lineal de otras

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Si a la primera fila le sumamos la segunda multiplicada por cualquier escalar λ, no nulo resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ por la quinta propiedad}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} & \lambda\, a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ por la tercera propiedad}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ por la segunda propiedad}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda\, .0$$

$$|\,A\,|$$

Esta consecuencia permite simplificar los determinantes, reduciendo a cero varios elementos de una misma línea mediantes operaciones elementales entre líneas; cada elemento que se logre anular así, evita el cálculo de un cofactor al desarrollar el determinante por los elementos de esa línea.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ entonces, $|\,\mathrm{A}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

Efectuando operaciones elementales entre columnas, reducir a cero todos los elementos de una línea, excepto uno, y luego desarrollar el determinante por los elementos de esa línea.

$$|\,\mathrm{A}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\,\mathrm{A}\,| = ^{\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\,\mathrm{A}\,| = ^{\mathrm{C}_1 + (-2)\mathrm{C}_3} \begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante obtenido por los elementos de la tercera fila.

$$|\,\mathrm{A}\,| = 1.(-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$|\,A\,| = -135$

P_6) El determinante de las matrices triangulares y diagonales es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

D) a) Sea la matriz triangular superior $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ por lo tanto: $|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$, Si desarrollamos el $det\ (A)$ por los elementos de la tercera fila

$|\,A\,| = (-1)^6 a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$

Similar razonamiento se sigue para el caso de una matriz triangular inferior.

b) Sea la matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ por lo tanto, $|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$

Si desarrollamos el $det\ (A)$ por los elemento de la tercera fila ó columna, tenemos

$|\,A\,| = (-1)^6 a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$

Similar razonamiento se sigue para el caso de una matriz escalar.

De esta propiedad se deduce en forma inmediata que el determinante de la matriz identidad es 1. Es decir que $|\,I_n\,| = 1$.

P_7) Dadas dos matrices $A \in K^{n\,x\,n}\ y\ B \in K^{n\,x\,n}$ el determinante del producto de A . B es igual al producto de sus respectivos determinantes.

Sean $A, B \in K^{n\,x\,n}$ entonces $|\,A\,.B\,| = |\,A\,|\,.\,|\,B\,|$

Antes de demostrar esta propiedad, conocida también como Teorema de Cachy–Binet, necesitaremos una proposición y un corolario de la misma, los que admitiremos sin demostración ya que estas exceden los objetivos del presente capítulo.

Proposición: si $A \in K^{n\,x\,n}$ es una matriz cualquiera y $P_1, \dots, P_r$ son matrices elementales[6], entonces $|\,A\,P_1\ \dots P_r\,| = |\,A\,|\,|\,P_1\,|\ \dots\ |\,P_r\,|$.

Corolario: si $P \in K^{n\,x\,n}$ es producto de matrices elementales: $P = P_1\ \dots\ P_r$, entonces $|\,P\,| = |\,P_1\,|\ \dots\ |\,P_r\,|$.

La demostración de este corolario es muy simple pues se toma como un caso particular del resultado anterior, tomando $A = I$ y recordando que $|\,I\,| = 1$.

Ahora estamos en condiciones de demostrar el enunciado de la séptima propiedad.

[6] Matrices elementales son aquellas que se obtienen como el resultado de aplicar a la matriz identidad uno de los tres tipos de transformaciones elementales.

D) Supóngase, en primer lugar, que B es singular, es decir no admite inversa. En ese caso $|\,B\,| = 0$ y B' la forma reducida por columnas de B, tiene una columna de ceros. Pero $B' = B\,P$, donde P es el producto de matrices elementales, luego $B = B'P^{-1}$ donde P^{-1} también es producto de matrices elementales (la inversa de una matriz elemental también es una matriz elemental). Por lo tanto $A\,B = A\,B'P^{-1}$. Como B' tiene una columna de ceros, $A\,B'$ también la tiene, por lo tanto $|\,A\,B'| = 0$. Pero sabemos que, al ser P^{-1} producto de matrices elementales, $|\,A\;\,B| = |\,A\,B'\,P^{-1}| = |\,A\,B'|\,|\,P^{-1}\,| = 0$. Por lo tanto $|\,A\;\,B| = 0$ y el resultado es cierto en este caso.
En segundo lugar corresponde suponer que B es no singular. Entonces tiene rango n, luego es producto de matrices elementales: $B = P_1\;\ldots\;P_r$ pero en este caso la proposición anterior y el corolario nos indican que $|\,A\;\,B| = |\,A\,|\,|\,P_1\,|\;\ldots\,|\,P_r\,| = |\,A\,|\,|\,B\,|$. Con lo que queda demostrada la propiedad.
Este resultado se puede generalizar para el caso de m matrices cuadradas de orden n.

P_8) Sea la matriz $A \in K^{n\,x\,n}$ invertible, entonces su determinante es no nulo y además se cumple que $|\,A^{-1}\,| = \frac{1}{|\,A\,|}$

D) Sabemos que $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$, obteniendo los determinantes
$|\,A\,A^{-1}\,| = |\,A^{-1}\,A\,| = |\,I\,|$ por la P_7
$|\,A\,|\,|\,A^{-1}\,| = |\,A^{-1}\,|\,|\,A\,| = 1$. Esto implica tres resultados:
$a)\;|\,A\,| \neq 0,\;\; b)\;|\,A^{-1}\,| \neq 0\;\; y\;\; c)\;\;|\,A^{-1}\,| = \frac{1}{|\,A\,|}$

P_9) Sea la matriz $A \in K^{n\,x\,n}$ ortogonal, entonces $|\,A\,| = 1 \;\vee\; |\,A\,| = -1$
D) Teniendo en cuenta que una matriz cuadrada A invertible se dice ortogonal si y solo si el producto de dicha matriz por su traspuesta es la unidad[7]. Es decir que si A es ortogonal se debe cumplir que:
$A.A^t = A^t.A = I_n$ Tomando determinantes y teniendo en cuenta por la P_1 $|\,\mathrm{A}\,| = |\,\mathrm{A}^t\,|$
$|\,\mathrm{A}\,|\,|\;\mathrm{A}\;| = 1$ esto implica que $|\,A\,| = 1 \;\vee\; |\,A\,| = -1$

P_{10}) La suma de los productos de los elementos de una línea de una matriz por los adjuntos de los elementos correspondientes a una línea paralela a ella cero.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $|\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Sumando los productos de los elementos de la segunda fila por los adjuntos de la primera, obtenemos:

[7] Definición 2 del Capítulo 4 “Matrices”.

$$a_{21}\,A_{11} + a_{22}\,A_{12} + a_{23}\,A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener dos filas iguales.}$$

5.- Relación entre los determinantes de matrices equivalentes

Una cuestión importante, a la hora de calcular determinantes, es analizar como varía el determinante de una matriz al efectuar sobre ella operaciones elementales. La importancia radica en analizar qué relación tiene el determinante de la matriz equivalente obtenida con el de la matriz dada.

Para esto, debemos tener presente tres propiedades de los determinantes. En primer lugar la P_2) “Si se permutan dos líneas cualesquiera de una matriz, los correspondientes determinantes son opuestos”, en segundo lugar la P_3) “Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz por un mismo escalar λ no nulo el determinante correspondiente queda multiplicado por dicho escalar” y finalmente la consecuencia de la quinta propiedad, CP_5) “El determinante de una matriz no varía si a una línea se le suma una combinación lineal de otras”.

Por lo tanto si $A \sim B$, entonces $|\,B\,| = |\,A\,|\,(-1)^k\,\lambda_1\,\lambda_2\,\ldots\,\lambda_p$ siendo k el número de intercambios de líneas y λ_i, todos no nulos, los factores utilizados al transformar A en B por medio de operaciones elementales.

La expresión anterior está indicando $A \sim B$, $|\,A\,| = 0 \iff |\,B\,| = 0$

Ahora, podemos analizar el caso particular, en que partiendo de $A \in K^{n\,x\,n}$ realizamos operaciones elementales por filas hasta llegar a una forma escalonada que denotamos como U (eliminación guassiana) y de allí hasta llegar a la forma escalonada reducida.

Por ser U cuadrada y escalonada es triangular superior y por lo tanto $|\,U\,|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Es decir:

$|\,U\,| = u_{11}\,.\,u_{22}\,.\ldots\,.\,u_{nn}$ y de aquí podemos deducir que:

a) $|\,A\,| \neq 0 \iff |\,U\,| \neq 0 \iff u_{ii} \neq 0\ \forall i = 1, \ldots, n \iff el\ n° \ de\ pivotes\ es\ n \iff \rho(A) = n$,

Si continuamos con las operaciones elementales por filas hasta llegar a la forma escalonada reducida esta sería I_n

b) $|\,A\,| = 0 \iff |\,U\,| = 0 \iff \exists\, u_{ii} = 0 \iff el\ n° \ de\ pivotes\ es\ menor\ que\ n$, es decir, $\rho(A) < n$

Si continuamos con las operaciones elementales por filas hasta llegar a la forma escalonada reducida esta NO sería I_n ya que el número de pivotes es menor que n.

6.- Cálculo de determinantes

Hasta el momento sabemos calcular determinantes de orden mayor a tres mediante el desarrollo por los elementos de una de sus líneas, sin embargo la eficacia de este método no es muy buena ya que para calcular el determinante de una matriz de orden n hay que calcular n determinantes de orden $(n-1)$ y para cada uno de estos hay que calcular $(n-1)$ determinantes de orden $(n-2)$, y así sucesivamente. Por lo tanto el número de operaciones que hay que efectuar es del orden $n!$.

Se estudiaran a continuación dos métodos muchos más simples y que permiten calcular determinantes de una manera más rápida y que se basan fundamentalmente en la relación que hay entre los determinantes de matrices equivalentes.

6.1.- Método por triangulación o eliminación Gaussiana

El método se basa en transformar la matriz dada, mediante operaciones elementales entre sus líneas, en una matriz triangular. A partir de esto se aplica la P_6) de los determinantes "El determinante de las matrices triangulares y diagonales es igual al producto de los elementos de la diagonal principal".

Por otra parte hay que tener en cuenta que toda matriz cuadrada de orden n escalonada por filas (columnas) es triangular superior (inferior) y que la traspuesta de una matriz triangular superior (inferior) es triangular inferior (superior).

Por lo tanto dada una matriz $A \in K^{n\,x\,n}$ usamos el método de eliminación de Gauss –pasos 1 a 4– para hallar la forma escalonada de A. Luego calculamos el determinante de esta última matriz.

Ejemplo: Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ escalonando la matriz.

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{P_2)} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\, 2 \;\; {}^{P_3)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|\,A\,| = (-2) \begin{array}{r} \\ 3F_1 + F_2 \\ -5F_1 + F_3 \\ 2F_1 + F_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \end{vmatrix} = (-2) \begin{array}{r} \\ \\ 9F_2 + F_3 \\ F_2 + F_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0 & 0 & 15 & 20 \end{vmatrix}$$

$$|\,A\,| = (-2) \begin{array}{r} \\ \\ \\ -\frac{1}{2}F_3 + F_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

$|\,A\,| = (-2)\; 1\; (-1)\; 30\; (-10)$

$|\,A\,| = -600$

6.2.- Método de Chío

Este método se basa en la consecuencia de la quinta propiedad de los determinantes "El determinante de una matriz no varía si a una línea se le suma una combinación lineal de otras" es decir, esta propiedad permite a los elementos de una línea sumar los correspondientes de otras paralelas multiplicadas por un escalar, de este modo el determinante de la nueva matriz es igual al de la matriz dada.

Basándonos en esta propiedad se puede obtener un determinante igual al de la matriz dada pero con los elementos de una fila o columna todos ceros, excepto uno. Se aplica el desarrollo de un determinante por los elementos de una línea y se reduce el orden del determinante en una unidad.

Este proceso se puede repetir tantas veces como se desee hasta obtener un determinante de orden tres o dos, es decir que la idea principal del método es ir obteniendo determinantes de un orden menor al dado.

Se parte de una matriz cuadrada de orden n que tenga un elemento $a_{ij} = 1$, pivote, (si no lo tuviere, se elige un elemento cualquiera y se extrae dicho elemento como factor común de toda la línea).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & 1 & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Reducir a cero los elementos restantes de la fila del pivot. Es decir, transformar la matriz A en otra B mediante las siguientes operaciones elementales entre columnas:

A la 1° columna se le resta la j-ésima columna multiplicada por a_{i1}

A la 2° columna se le resta la j-ésima columna multiplicada por a_{i2}

A la 3° columna se le resta la j-ésima columna multiplicada por a_{i3}

Se continúa así hasta que:

A la n-ésima columna se le resta la j-ésima columna multiplicada por a_{in} con $n \neq j$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Luego $|\,B\,| = a_{ij}A_{ij}$ pero $a_{ij} = 1 \Rightarrow |\,B\,| = A_{ij}$

$|\,B\,| = (-1)^{i+j}M_{ij}$ pero por propiedades de los determinantes $|\,B\,| = |\,A\,|$, por lo tanto:

$|\,A\,| = (-1)^{i+j}M_{ij}$

Ejemplo: Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ por el método de Chío.

$| A | = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2^{P_3)} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix}$ elegimos como pivot $a_{21} = 1$ es decir que $i = 2$ y $j = 1$

$$| A | = 2 \begin{vmatrix} -3 & 2-(-3)(-1) & -1-(-3)2 & -1-(-3)3 \\ 1 & -1-1(-1) & 2-1.2 & 3-1.3 \\ 5 & 4-5(-1) & -5-5.2 & 3-5.3 \\ -2 & 3-(-2)(-1) & 6-(-2)2 & 6-(-2).3 \end{vmatrix}$$

$$| A | = 2 \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -15 & -12 \\ -2 & 1 & 10 & 12 \end{vmatrix}$$

$$| A | = 2\,(-1)^3\,1 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 9 & -15 & -12 \\ 1 & 10 & 12 \end{vmatrix}$$

$$| A | = -2\,(180 - 60 + 720 + 120 - 120 - 540)$$

$$| A | = -2\,.300 = -600$$

Para hacer el proceso más directo, se suele aplicar esta regla de manera directa y de la siguiente manera.

Una vez logrado el pivot, hacemos

$$| A | = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2^{P_3)} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

A cada elemento que no esté ni en la fila ni en la columna del pivot (por ejemplo $a_{12} = 2$) los multiplicamos por el pivot ($a_{12} = 2\,.1$) y le restamos el producto de los elementos que están en la otra diagonal del rectángulo que forman con un elemento de la fila y de la columna del pivot ($a_{22} = -1\ \ y\ \ a_{11} = -3$), es decir $1.2 - (-3)(-1) = -1$.

Ordenadamente iremos obteniendo los elementos de un determinante de un orden menor al dado.

$$| A | = 2\,(-1)^3\,1 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 9 & -15 & -12 \\ 1 & 10 & 12 \end{vmatrix}$$

$$| A | = -600$$

7.- Cálculo de la inversa a partir de la matriz adjunta

En este apartado se evidenciará, en primer lugar, la relación que existe entre el cálculo de los determinantes y la matriz inversa de una matriz cuadrada, en segundo lugar se brindará y ejemplificará un segundo método para el cálculo de la matriz inversa.

Sea la matriz $A \in K^{n\,x\,n}$ y su matriz adjunta, $Adj\ (A)$.

Consideremos, en primer lugar, el producto de estas dos matrices.

$$A\ \ Adj\ (A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Para hacer este producto debemos tener presente:

a) La suma del producto de los elementos de una línea de A por sus respectivos cofactores es el determinante de A

b) La suma del producto de los elementos de una línea de A por los cofactores de otra paralela a ella, es nulo.

$$A\ \ Adj\ (A) = \begin{pmatrix} |\,A\,| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\,A\,| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\,A\,| \end{pmatrix}$$

$A\ \ Adj\ (A) = |\,A\,|\, I_n$

Si $|\,A\,| \neq 0$ podemos trasponer términos y obtener

$A\ \ \frac{Adj\ (A)}{|\,A\,|}\ =\ I_n\ (1)$

Consideremos, en segundo lugar, el producto conmutado de A y su adjunta.

$Adj\ (A)\ A$ haciendo un desarrollo similar al anterior, obtenemos

$\frac{Adj\ (A)}{|\,A\,|}\ A\ =\ I_n\ (2)$

De $(1)\ y\ (2)$ por la definición de matriz inversa, obtenemos

$A^{-1} = \frac{Adj\ (A)}{|\,A\,|}$

En la P_8 se demostró que si la matriz A es invertible, implica que $|\,A\,| \neq 0$ de lo que se concluye que si $|\,A\,| = 0$ la matriz no es invertible.

En este apartado se demostró que si $|\,A\,| \neq 0$ existe la matriz inversa de A, dada por $A^{-1} = \frac{Adj\ (A)}{|\,A\,|}$.

Por lo tanto podemos concluir que afirmar que una matriz es invertible es equivalente a decir que esa matriz tiene un determinante no nulo. Es decir:

"La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada de orden n admita inversa es que su determinante sea no nulo"

Luego, dada la matriz $A \in K^{n\,x\,n}$, para hallar su inversa utilizando su adjunta, conviene:

a) Hallar el determinante asociado a la matriz A, si este es distinto de cero, A admite inversa.

b) Hallar la matriz de los cofactores.

c) Hallar la traspuesta de la matriz de los cofactores.

d) Multiplicar cada elemento de esta última matriz por $\frac{1}{|\,A\,|}$

e) Verificar el resultado obtenido.

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de la matriz A, usando su adjunta.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $|\,\mathrm{A}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -5$ por lo tanto A admite inversa.

b) $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0;\;\; A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5;\;\; A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2;\;\; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1;\;\; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\;\; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;\;\; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Por lo tanto la matriz de los cofactores es

$\mathrm{Cof}\,(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y en consecuencia la matriz adjunta, es

c) $Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \frac{1}{|\,A\,|} Adj\,(A)$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

e) Para verificar hacemos: $\mathrm{A}\,.\,\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

8.- Determinantes, inversa, rango y equivalencia a la identidad

Simplemente evidenciaremos y ejemplificaremos la relación que existe entre los cuatro temas ya estudiados y que se enuncia en el título del presente apartado.

Partiendo de $A \in K^{n\,x\,n}$ podemos afirmar que:

$|\,A\,| \neq 0 \iff A\; es\; invertible \iff \rho(A) = n \iff$ A ~ I_n $\iff A$ es producto de matrices elementales.

Ejemplo 1. Determinar si las siguientes matrices son invertibles.

a) $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 4 & -1\\ 3 & -1 & -3 & -2\end{pmatrix}$

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 4 & -1\\ 3 & -1 & -3 & -2\end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ -F_1+F_2\\ F_1+F_3\\ -3F_1+F_4\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 6 & -1\\ 0 & -1 & -9 & -2\end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{2}F_2+F_3\\ \frac{1}{2}F_2+F_4\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 7 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -10 & -\frac{3}{2}\end{vmatrix}$$

$$|\,A\,| = \begin{matrix} \\ \\ \\ \frac{10}{7}F_3+F_4\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 7 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{51}{14}\end{vmatrix} = -51$$

Rta₁: A es invertible pues $|\,A\,| \neq 0$

Rta₂: A es invertible pues $\rho(A) = 4$ ya que tienen 4 columnas pivotales.

Rta₃: A es invertible, por tener cuatro columnas pivotales, A es equivalente por filas a I_4 (sólo hace falta "convertir" los pivots y realizar la eliminación de Gauss – Jordan), lo cual indicaría también que la matriz admite inversa.

b) $A = \begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix} = -2F_1+F_2\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & -6 & -6\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix} = -6\begin{matrix} \\ \\ 2F_2+F_3\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

Rta₁: A es no invertible pues $|\,A\,| = 0$

Rta₂: A no es invertible pues $\rho(A) = 2$ ya que tienen 2 columnas pivotales.

Rta₃: A no es invertible, por tener 2 columnas pivotales, A no es equivalente por filas a I_3.

Ejemplo 2: Determinar el valor de k para que $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&k&2\\2&3&0\end{pmatrix}$ admita inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&k&2\\2&3&0\end{vmatrix}=\begin{matrix}-2F_1+F_2\\-2F_2+F_3\end{matrix}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-4+k&0\\0&-1&-2\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&-4+k&0\end{vmatrix}=-1(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&-4+k&0\end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&-4+k&0\end{vmatrix}=\ (4-k)F_2+F_3\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&2(4-k)\end{vmatrix}=2(k-4)$$

Nótese que la operación $(4-k)F_2+F_3$ puede hacerse cualquiera sea el valor de k.

Si $2(k-4)=0\implies k=4$ por lo tanto si $k=4$ obtenemos

$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$ por lo tanto si $k=4$, A no admite inversa y podemos afirmar, además que su rango es 2, menor que n, pues solamente tiene dos filas no nulas o dos columnas pivotales.

Si $2(k-4)\neq 0\implies k\neq 4$ por lo tanto si $k\neq 4$ obtenemos

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&2(4-k)\end{vmatrix}=\ \frac{1}{2(4-k)}F_3\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}$$

Nótese que la operación $\frac{1}{2(4-k)}F_3$ puede realizarse pues $k\neq 4$.

Por lo tanto $|A|\neq 0$ y A admite inversa. También podemos afirmar que $\rho(A)=3$ y A es equivalente a la matriz I_3.

9.- Determinantes y rango

Veremos cómo se puede utilizar los determinantes para calcular el rango de una matriz de cualquier orden.

Dada una matriz $A\in K^{m\,x\,n}$ $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$ podemos definir

Menor de orden p de A, con $p\leq m\ y\ p\leq n$: al determinante de la submatriz cuadrada de orden p cuyos elementos están situados en la intersección de p de las filas, $i_1,\dots,i_p$ y p de las columnas, $j_1,\dots,j_p$ de A. Cabe destacar que la elección de distintos conjuntos de filas y columnas –siempre en orden natural– dará lugar a los distintos menores. Luego los menores no son submatrices sino los determinantes de esas submatrices cuadradas.

Por ejemplo sea $A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ algunos de sus menores son:

M_1de orden 2 que toma las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 4, $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

M_2 de orden 2 que toma las filas 1 y 3 y las columnas 2 y 3, $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

M_3 de orden 3 que toma las columnas 2, 3 y 4; $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

El número de menores de orden 2 para la matriz A es 18 pues existen tres elecciones para el par de filas ($C_{3,2} = 3 \Longrightarrow F_1\, F_2;\ F_1F_3\ y\ F_2F_3$) y 6 para el par de columnas ($C_{4,2} = 6 \Longrightarrow C_1C_2;\ C_1C_3;\ C_1C_4;\ C_2C_3;\ C_2C_4\ y\ C_3C_4$)

El número de menores de orden 3 para la matriz A es 4 pues existe una sola elección para las filas ($C_{3,3} = 1 \Longrightarrow F_1F_2F_3$) y 4 elecciones para la terna de columnas ($C_{4,3} = 4 \Longrightarrow C_1C_2C_3;\ C_1C_2C_4;\ C_1C_3C_4;\ C_2C_3C_4$)

Respecto al rango de una matriz y submatrices se establece la siguiente relación

Si $[\mathrm{A}]_{\mathrm{I\,x\,J}}$ es una submatriz de A, entonces $\rho\big([\mathrm{A}]_{\mathrm{I\,x\,J}}\big) \leq \rho(\mathrm{A})$

A partir de la definición de menor y la relación establecida anteriormente, podemos evidenciar la utilidad de los menores para calcular el rango de una matriz cualquiera.

Definición: *el rango de una matriz A es igual al mayor orden r alcanzado por los menores no nulos de A, es decir, $\rho(A) = r$ si y sólo si*

a) Existe un menor $m_{I,J} \neq 0$ de orden r

b) Todos los menores de A de orden mayor a r son nulos.

En un principio para ver que una matriz A tiene rango r habría que encontrar un menor, M, no nulo de orden r y calcular todos los menores de orden $r + 1$ que corresponden a submatrices de A que contienen a M, si vemos que se anulan todos esos menores, entonces $\rho(A) = r$

Teorema del método del orlado

Sea la matriz $A = \|a_{ij}\|_{m\,x\,n}$ con una submatriz cuadrada M de orden r talque $|M| \neq 0$ Supongamos que todas las submatrices cuadradas de orden $r + 1$ que contienen a M tienen determinante nulo, entonces $\rho(A) = r$

9.1.- Método del orlado[8] para calcular el rango de una matriz

Sea la matriz $A = \|a_{ij}\|_{m\,x\,n}$ el método del orlado para calcular el rango r, es:

Si $A = N$, entonces $\rho(A) = 0$, caso contrario tomamos un menor M de orden 1 no nulo. Comenzando por $r = 1$ se realizan los siguientes pasos:

[8] Orlar: si consideramos un menor de orden p de una matriz A y el menor de orden (p+1) resultante de añadirle la fila i y la columna j no pertenecientes a él, entonces se dice que se ha construido "orlando" dicho menor con la fila i y la columna j.

a) Hallar, si existe, un menor no nulo de orden $(r+1)$ que contenga a M,

b) Si no existe, entonces $\rho(A) = r$

c) Si existe repetir el paso a) incrementando a r en una unidad y reemplazando M por el menor encontrado.

Obviamente no es necesario comenzar con $r = 1$. Si se encuentra un menor no nulo de orden r, se puede empezar con dicho r en el paso a).

Ejemplo. Calcular el rango de las siguientes matrices

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M\,| = 1 \neq 0$

$\rho(A) \leq 2$ $\qquad \therefore\ \rho(A) = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M\,| = 4 \neq 0$

$\rho(B) \leq 3$ $\qquad M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_1\,| = 0$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_2\,| = 0$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_3\,| = 0$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_4\,| = 0$$

$\therefore\ \rho(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M\,| = 0$

$\rho(C) \leq 4$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M\,| = 2 \neq 0$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_1\,| = 0$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_2\,| = 4 \neq 0$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore\ \rho(C) = 3$

Finalmente con esta nueva definición de rango de una matriz y las propiedades de los determinantes se puede demostrar el siguiente

Teorema: *el rango de una matriz no altera si:*

i) intercambiamos entre sí dos líneas

ii) trasponemos una fila (F_i) *con una columna* (C_i)

iii) multiplicamos los elementos de una línea por un escalar no nulo

iv) sumamos a una línea los elementos de otra línea multiplicados por un escalar no nulo.