UNJU. – FACULTAD DE INGENIERÍA
Álgebra y Geometría Analítica

TRABAJO PRÁCTICO N° 11

ESPACIOS VECTORIALES

Resolución de los ejercicios 1a) y 1c)

1.- Determinar en cuáles de los siguientes casos está definido un espacio vectorial real.

a) $(\mathbf{R}_{[x]}, +, \mathbf{R}, .)$ siendo $\mathbf{R}_{[x]} = \{P_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/\, a_i \in \mathbf{R}, \forall i\}$ con la suma usual de polinomios y el producto de un polinomio por un número real.

1. $\forall\ P(x)$ y $Q(x) \in \mathbf{R}_{[x]}$: $P(x) + Q(x) \in \mathbf{R}_{[x]}$
2. $\forall\ \alpha \in \mathbf{R} \wedge \forall\ P(x) \in \mathbf{R}_{[x]}$: $\alpha\, P(x) \in \mathbf{R}_{[x]}$

A continuación, se verifican las cuatro propiedades de la suma y las cuatro propiedades del producto:

P_1) **+** es asociativa en $\mathbf{R}_{[x]}$:
$\forall\ P(x), Q(x) \wedge S(x) \in \mathbf{R}_{[x]} \Rightarrow [P(x) + Q(x)] + S(x) = P(x) + [Q(x) + S(x)]$

Demostración:
$\mathbf{[P(x) + Q(x)] + S(x)} = [(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2)] + (c_0 + c_1x + c_2x^2) =$

$= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + (a_2 + b_2)\, x^2] + (c_0 + c_1x + c_2x^2) =$

$= [(a_0 + b_0) + c_0] + [(a_1 + b_1) + c_1]\, x + [(a_2 + b_2) + c_2]\, x^2 =$

$= [a_0 + (b_0 + c_0)] + [a_1 + (b_1 + c_1)]\, x + [a_2 + (b_2 + c_2)]\, x^2 =$

$= (a_0 + a_1x + a_2x^2) + [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\, x + (b_2 + c_2)\, x^2] =$

$= (a_0 + a_1x + a_2x^2) + [(b_0 + b_1x + b_2x^2) + (c_0 + c_1x + c_2x^2)] = \mathbf{P(x) + [Q(x) + S(x)]}$

$\Rightarrow$ **[P(x) + Q(x)] + S(x) = P(x) + [Q(x) + S(x)]**

P_2) $\exists$ elemento neutro para la suma en $\mathbf{R}_{[x]}$:
$\exists\ N(x) \in \mathbf{R}_{[x]} \,/\, \forall\ P(x) \in \mathbf{R}_{[x]} \Rightarrow N(x) + P(x) = P(x) + N(x) = P(x)$

Demostración
$\mathbf{N(x) + P(x)} = (0 + 0x + 0x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2) = (0 + a_0) + (0 + a_1)\, x + (0 + a_2)\, x^2 =$
$= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)\, x + (a_2 + 0)\, x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 = \mathbf{P(x)}$

$\Rightarrow$ **N(x) + P(x) = P(x)**

P_3) $\exists$ el inverso aditivo u opuesto en $\mathbf{R}_{[x]}$ para cada elemento de $\mathbf{R}_{[x]}$:
$\forall\ P(x) \in \mathbf{R}_{[x]} \Rightarrow \exists\ -P(x) \in \mathbf{R}_{[x]} \,/\, P(x) + (-P(x)) = N(x)$

Demostración:
$\mathbf{P(x) + (-P(x))} = (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (-a_0 - a_1x - a_2x^2) = (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)\,x + (a_2 - a_2)\,x^2 =$
$= 0 + 0x + 0x^2 = \mathbf{N(x)}$

$\Rightarrow \mathbf{P(x) + (-P(x)) = N(x)}$

P_4) **+** es conmutativa en **$\mathbf{R_{[x]}}$**:
$\forall\ P(x) \wedge Q(x) \in \mathbf{R_{[x]}} \Rightarrow P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

Demostración:
$\mathbf{P(x) + Q(x)} = (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + (a_2 + b_2)\,x^2 =$
$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)\,x + (b_2 + a_2)\,x^2 = (b_0 + b_1x + b_2x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2) = \mathbf{Q(x) + P(x)}$

$\Rightarrow \mathbf{P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)}$

P_5) **.** admite asociatividad mixta:
$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \wedge \forall\ P(x) \in \mathbf{R_{[x]}} \Rightarrow \alpha\,.\,(\beta\,.\,P(x)) = (\alpha\,.\,\beta)\,.\,P(x)$
Demostración:
$\boldsymbol{\alpha\,.\,(\beta\,.\,P(x))} = \alpha\,.\,(\beta\,.\,(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \alpha\,.\,(\beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2) = \alpha(\beta a_0) + \alpha(\beta a_1)\,x +$
$\alpha(\beta a_2)\,x^2 = (\alpha\beta)a_0 + (\alpha\beta)a_1x + (\alpha\beta)a_2x^2 = (\alpha.\beta)\,.\,(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \boldsymbol{(\alpha\,.\,\beta)\,.\,P(x)}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha\,.\,(\beta\,.\,P(x)) = (\alpha\,.\,\beta)\,.\,P(x)}$

P_6) **.** es distributivo respecto de la suma en **R**:
$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \wedge \forall\ P(x) \in \mathbf{R_{[x]}} \Rightarrow (\alpha + \beta)\,.\,P(x) = \alpha\,.\,P(x) + \beta\,.\,P(x)$

Demostración:
$\boldsymbol{(\alpha + \beta)\,.\,P(x)} = (\alpha + \beta)\,.\,(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (\alpha + \beta)\,a_0 + (\alpha + \beta)\,a_1x + (\alpha + \beta)\,a_2x^2 =$
$= (\alpha a_0 + \beta a_0) + (\alpha a_1 + \beta a_1)\,x + (\alpha a_2 + \beta a_2)\,x^2 = (\alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2) + (\beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2) =$
$= \alpha\,.\,(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \beta\,.\,(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \boldsymbol{\alpha\,.\,P(x) + \beta\,.\,P(x)}$

$\Rightarrow \boldsymbol{(\alpha + \beta)\,.\,P(x) = \alpha\,.\,P(x) + \beta\,.\,P(x)}$

P_7) **.** es distributivo respecto de la suma en **$\mathbf{R_{[x]}}$** :
$\forall\ \alpha \in \mathbf{R}\,,\ \forall\ P(x) \wedge Q(x) \in \mathbf{R_{[x]}} \Rightarrow \alpha\,.\,[P(x) + Q(x)] = \alpha\,.\,P(x) + \alpha\,.\,Q(x)$

Demostración:
$\boldsymbol{\alpha\,.\,[P(x) + Q(x)]} = \alpha\,.\,[(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2)] =$

$= \alpha\,.\,[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + (a_2 + b_2)\,x^2] = \alpha\,(a_0 + b_0) + \alpha\,(a_1 + b_1)\,x + \alpha\,(a_2 + b_2)\,x^2 =$

$= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)\,x + \alpha\,(a_2 + b_2)\,x^2 = (\alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2) + (\alpha b_0 + \alpha b_1x + \alpha b_2x^2) =$

$= \alpha\,.\,(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \alpha\,.\,(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \boldsymbol{\alpha\,.\,P(x) + \alpha\,.\,Q(x)}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha\,.\,[P(x) + Q(x)] = \alpha\,.\,P(x) + \alpha\,.\,Q(x)}$

P_8) La unidad de **R** es neutro para el **.**:
$\forall\ P(x) \in \mathbf{R_{[x]}} : \mathbf{1}\,.\,P(x) = P(x)$

Demostración:
$\mathbf{1 \,.\, P(x)} = 1 \,.\, (a_0 + a_1x + a_2x^2) = 1a_0 + 1a_1x + 1a_2x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 = \mathbf{P(x)}$

$\Rightarrow$ **1 . P(x) = P(x)**

Como se cumplen las ocho propiedades, ($R_{[x]}$, + , R , .) siendo $R_{[x]} = \{P_{(x)} = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 \,/\, a_i \in R \,,\, \forall\, i\}$ con la suma usual de polinomios y el producto de un polinomio por un número real, CONSTITUYE UN ESPACIO VECTORIAL.

c) (R^2 , + , R , .) con las operaciones definidas por (a , b) + (c , d) = (a + c + 1 , b + d + 1) y k . (a , b) = (k.a , k.b), con k $\in$ R.

La idea es determinar una propiedad que no se cumpla. Si encontramos una, es suficiente para afirmar que la cuaterna NO CONSTITUYE UN ESPACIO VECTORIAL.

Veamos la propiedad:

P_6) **.** es distributivo respecto de la suma en **R**:
$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \wedge \forall\, v \in \mathbf{R^2} \Rightarrow (\alpha + \beta) \,.\, v = \alpha \,.\, v + \beta \,.\, v$
Demostración:
$(\alpha + \beta) \,.\, v = \alpha \,.\, v + \beta \,.\, v$

$(\alpha + \beta) \,.\, (a , b) \neq \alpha \,.\, (a , b) + \beta \,.\, (a , b)$
$((\alpha + \beta).a \,,\, (\alpha + \beta).b) \neq (\alpha.a \,,\, \alpha.b) + (\beta.a \,,\, \beta.b)$
$(\alpha.a + \beta.a \,,\, \alpha.b + \beta.b) \neq (\alpha.a + \beta.a + 1 \,,\, \alpha.b + \beta.b + 1)$

$\Rightarrow$ **no se cumple P_6) $\therefore$ NO ES ESPACIO VECTORIAL**