

Capítulo 4

MATRICES

Álgebra y Geometría Analítica
Facultad de Ingeniería UNJu
2020

1.1.- Introducción

En el Capítulo 3: Polinomios, se hizo mención al libro chino “Chu Chang Suan Shu” o “Arte Matemático en Nueve Secciones” en referencia a problemas sobre la resolución de ecuaciones algebraicas. En este mismo libro se puede encontrar uno de los primeros ejemplos conocidos del uso de lo que con el correr de los años se conocería como matrices: “los cuadrados mágicos”. Estos cuadros también fueron conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde el siglo VII, los que pudieron conocerlos muy probablemente de matemáticos y astrónomos de la India. Otros resultados más amplios sobre los “cuadrados mágicos” aparecieron en Bagdad en el año 983, en la Enciclopedia de la Hermandad de Pureza. Entonces, se podría considerar que el estudio de los “cuadrados mágicos” fue un estudio empírico y desordenado acerca de lo que se estudiará en este capítulo: Matrices.

El primero en usar el término “matriz” fue el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) en 1850, quien se refirió a ellas como un arreglo cuadrado de términos. En 1853 el matemático, físico y astrónomo irlandés sir William Rowan Hamilton (1805-1865) realizó importantes aportes a la teoría de matrices. Sin embargo algunos historiadores de las matemáticas consideran a Arthur Cayley como el fundador de la teoría de matrices, ya que fue quien formalizó las operaciones básicas de suma y multiplicación con estos nuevos elementos matemáticos, a pesar de que aparecen algunos indicios de estas dos operaciones en trabajos anteriores de Euler, Lagrange y Gauss.

Otros importantes aportes de Cayley a la teoría de matrices fueron la introducción de la notación matricial como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, publicación de un escrito en donde se hace referencia por primera vez la inversa de una matriz, la definición de otra operación básica con matrices: el producto por escalares, demostración de la asociatividad del producto de matrices, introducción de las potencias de una matriz, así como las matrices simétricas y antisimétricas.

Por último, uno de los primeros libros publicados en el siglo XX donde se trata a las matrices por su propio interés es “*Introducción al álgebra superior*”, escrito en 1907 por el matemático estadounidense Maxime Bôcher (1867-1918).

La importancia de las matrices radica en el hecho de haberse convertido en una poderosa herramienta tanto intramatemática –debido a sus numerosas aplicaciones en las matemáticas puras– como extramatemática, con aplicaciones en diversos campos científicos como estadística, economía, física, biología, gráficas por computadora, análisis numérico y lenguajes de programación, ya que son muchos los conceptos que se pueden representar por medio de una matriz.

Finalmente las matrices constituyen la forma más adecuada para ordenar, analizar y operar de un modo sistemático y relativamente sencillo, complicados cálculos numéricos y algebraicos que involucran un gran número de datos.

De esta manera en este cuarto capítulo estudiaremos, luego de los conceptos básicos con matrices, aquellas dos operaciones y sus propiedades, que permiten afirmar –de manera similar a los tres capítulos anteriores– que el conjunto de matrices constituye un espacio vectorial: la suma de matrices y producto por un escalar. Continuando con la aritmética de matrices, estudiaremos el producto, sus propiedades para luego hacer una breve introducción a la potenciación de matrices.

Respecto de las operaciones que particularmente se hacen con estos nuevos entes matemáticos, estudiaremos la trasposición e inversión de matrices con sus respectivas propiedades.

De aquellas matrices que guardan una relación especial respecto de ellas mismas ó de otras matrices se analizarán las matrices simétricas, antisimétricas, sus propiedades, matrices triangulares, diagonales, matrices idempotentes e involutivas, terminando con las matrices ortogonales.

Las transformaciones elementales entre filas ó columnas de una matriz permiten definir una herramienta muy importante: la equivalencia entre matrices y las matrices escalonadas, estas últimas se obtendrán mediante dos algoritmos: eliminación de Gauss y Gauss–Jordan. Todo esto permitirá definir y calcular el rango de una matriz, sus propiedades, la condición de existencia y el cálculo de la matriz inversa.

El capítulo finaliza con los temas submatrices y ecuaciones matriciales.

1.2.- Conceptos básicos

Para poder comprender la definición de matriz –desde un punto de vista netamente matemático– es necesario recordar brevemente los conceptos de Intervalo Natural Inicial y Producto Cartesiano.

Se llama Intervalo Natural Inicial, I_n , al conjunto de los n primeros números naturales, es decir que $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Por ejemplo $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ó $I_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Dados dos intervalos naturales $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ consideremos el producto cartesiano entre ellos, $I_m \times I_n$, es decir, dados estos dos conjuntos debemos formar un tercer conjunto pero de pares ordenados, en donde el primer componente pertenece al primer conjunto dado (I_m) mientras que el segundo componente pertenece al segundo conjunto (I_n).

$$I_m \times I_n = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, n), (m, 1), (m, 2), \dots, (m, n)\}$$

Con los elementos del producto cartesiano, definamos una función, f , cuyo dominio sea este conjunto y cuyo codominio sean los números reales ó complejos. En este último caso para generalizar se utilizará la letra \mathbb{K} . Es decir que mediante esta letra estamos haciendo referencia al conjunto de los números reales, \mathbb{R} , ó bien al conjunto de números complejos, \mathbb{C} . Entonces, $f: I_m \times I_n \rightarrow K$.

Esto significa que la función, f , hace corresponder a cada par ordenado de elementos del conjunto $I_m \times I_n$ un escalar correspondiente a \mathbb{K} .

Definición: se llama matriz de orden $m \times n$ (ó dimensión $m \times n$) con elementos en el cuerpo \mathbb{K}^1 . a la función $f: I_m \times I_n \rightarrow K$, donde I_i representa un Intervalo Natural Inicial.

Indicando con a_{ij} la imagen de un elemento cualquiera (i, j) perteneciente al dominio de la función, tenemos para el elemento:

$$(1, 1) \rightarrow f(1, 1) = a_{11}$$

$$(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = a_{12}$$

Así sucesivamente para cualquier elemento genérico de la función:

$$(i, j) \rightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

Finalmente para el último elemento de la función:

$$(m, n) \rightarrow f(m, n) = a_{mn}$$

El conjunto de imágenes caracteriza la matriz que denominaremos con una letra mayúscula, en este caso A por ser un elemento cualquiera de esta matriz: a_{ij} . Esto permite escribir todas las imágenes en un cuadro de m filas por n columnas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En cada fila se escriben las imágenes de todos los pares que tienen la misma primera componente y en cada columna se anotan las imágenes de los pares que tienen la misma segunda componente.

¹ Un cuerpo ó campo, es un conjunto K con dos operaciones binarias, usualmente llamadas suma "+" y producto "." La suma es asociativa, conmutativa y su elemento neutro es 0 y para cada elemento existe un inverso. El producto es asociativo, conmutativo, su elemento neutro es 1 y todo elemento distinto de cero tiene inverso, además el producto se distribuye respecto de la suma.

El elemento de la matriz A , que figura en la fila i y columna j se denota por a_{ij} . Una matriz puede denotarse sintéticamente como $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ donde $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$. Por ejemplo, el elemento de la matriz A que figura en la quinta fila y tercera columna se identifica como a_{53} .

En general el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos en \mathbb{K} se simboliza por $\mathbb{K}^{m \times n}$. En muchas ocasiones para referirse tanto a columnas como filas indistintamente, suele usarse el término línea.

Particularmente el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos en \mathbb{R} se indica con $\mathbb{R}^{m \times n}$ y si tiene elementos en \mathbb{R} ó \mathbb{C} se indica mediante $\mathbb{C}^{m \times n}$

Ejemplo 1

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ es una matriz real de orden 2×3 , que en muchas ocasiones se suele denominar como matriz rectangular 2×3 . En esta matriz distinguimos los elementos estudiados anteriormente:

$$I_m = \{1, 2\} \text{ e } I_n = \{1, 2, 3\} \Rightarrow I_m \times I_n = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$f(1, 1) = 4, f(1, 2) = -1, f(1, 3) = 2, f(2, 1) = -3, f(2, 2) = 5 \text{ y } f(2, 3) = 6$$

Cuando el número de filas es igual al número de columnas ($m = n$) la matriz se dice cuadrada y simplemente se dice que es una matriz cuadrada de orden n .

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ donde el conjunto $\{a_{ij}\}$ con $i = j$ o sea $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ constituye la diagonal principal de la matriz A .

Traza de una matriz: sea la matriz $A \in K^{n \times n}$, se llama traza de la matriz A y se denota $Tr(A)$, al escalar $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Esto significa que la traza de una matriz es el escalar que se obtiene al sumar los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo 2

$B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2+i \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \\ -4i & 12 & -6 \end{pmatrix}$ es una matriz compleja de orden 3 cuya diagonal principal está formada por los elementos: 1, 4 y -6 y cuya traza es $Tr(A) = 1 + 4 + (-6) = -1$

Ejemplo 3. Construir una matriz cuadrada de orden 2 donde $a_{ij} = 3i - j^2$.

Debemos construir una matriz C del tipo:

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ en donde cada elemento a_{ij} se obtiene aplicando la relación $3i - j^2$.

Entonces

$$c_{11} = 3(1) - 1^2 = 2$$

$$c_{12} = 3(1) - 2^2 = -1$$

$$c_{21} = 3(2) - 1^2 = 5$$

$$c_{22} = 3(2) - 2^2 = 2$$

Luego la matriz pedida es

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Un caso particular en la definición de matrices es aquella en la cual todos sus elementos son cero, se conoce como matriz nula y suele designarse con la letra N . Es decir que:

$$N = \|n_{ij}\|_{m \times n} \text{ tal que } n_{ij} = 0 \quad \forall i; \forall j.$$

$$\text{Por ejemplo } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es la matriz nula de orden } 3 \times 2.$$

Igualdad de matrices: *dos matrices son iguales si y sólo si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes (aquellos que pertenecen a igual fila e igual columna) son iguales.*

$$\text{Dadas } A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \text{ y } B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \text{ resulta } A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i; \forall j$$

Ejemplo

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$ serán iguales solo si $x = 2$ e $y = 0$, mientras que las matrices $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ no son iguales ya que a pesar del mismo orden, no tienen todos sus elementos iguales ($c_{21} \neq d_{21}$). Por último las matrices $E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 10 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ no son iguales porque no tienen el mismo orden.

2.- Operaciones con matrices

Si bien se pueden realizar varias operaciones algebraicas con matrices, se verá en primera instancia la suma y el producto por escalares y acto seguido las propiedades de estas dos operaciones. Esto permitirá, como en los tres capítulos anteriores, referenciar el caso particular de las matrices como espacio vectorial.

2.1.- Suma de matrices: *Se llama suma de dos matrices de orden $m \times n$ a otra matriz del mismo orden cuyos elementos son la suma de los elementos correspondientes de las matrices dadas.*

$$\text{Sean } A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \text{ y } B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \text{ entonces}$$

$$A + B = C \quad / \quad C = \|c_{ij}\|_{m \times n} \quad \text{con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Solamente se pueden sumar matrices del mismo orden, en cuyo caso se dicen sumables, es decir, que la suma de matrices de diferentes ordenes no está definida.

2.2.- Producto por un escalar: El producto de un escalar λ por una matriz A ó de una matriz A por un escalar λ es la matriz cuyos elementos se obtienen al multiplicar el escalar por cada elemento de A .

$$\text{Si } A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \text{ y } \lambda \in K \Rightarrow \lambda A = A \lambda = \|\lambda a_{ij}\|$$

Ejemplo

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } \lambda = -2 \Rightarrow \lambda A = -2A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \\ -2 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a la definición del producto de una matriz por un escalar, si la matriz es $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ y el escalar es:

a) $\lambda = -1$ entonces $\lambda A = -A$ matriz opuesta a A .

b) $\lambda = 0$ entonces $\lambda A = N$ matriz nula. En general si $\lambda A = N$ deberá ser $\lambda = 0$ ó $A = N$.

Propiedades de la suma de matrices y producto por un escalar

Veremos a continuación, cuáles son las propiedades algebraicas que poseen las dos operaciones básicas definidas hasta ahora, estas propiedades son similares a las que poseen las operaciones de suma y producto de números reales.

P₁) La suma es ley de composición interna en $K^{m \times n}$.

$$\forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \text{ y } B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow (A + B) \in K^{m \times n}$$

Esto significa que la suma, como está definida, es una operación que a cada par de elementos de $K^{m \times n}$ le hace corresponder un único elemento de $K^{m \times n}$.

D) Es inmediata por la definición de suma en $K^{m \times n}$.

P₂) La suma es asociativa en $K^{m \times n}$.

$$\forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n}, B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \text{ y } C = \|c_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$D) (A + B) + C = \|a_{ij} + b_{ij}\| + \|c_{ij}\|$$

$$= \|(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\|$$

$$= \|a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\| \text{ Porque la suma en } K \text{ es asociativa.}$$

$$= \|a_{ij}\| + \|b_{ij} + c_{ij}\|$$

$$= A + (B + C) \text{ quedando demostrada la propiedad.}$$

P₃) La suma es conmutativa en $K^{m \times n}$.

$$\forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \text{ y } B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow A + B = B + A$$

$$D) A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|$$

$$= \|b_{ij} + a_{ij}\| \text{ Porque la suma en } K \text{ es conmutativa.}$$

$$= \|b_{ij}\| + \|a_{ij}\|$$

$$= B + A \text{ quedando demostrada la propiedad.}$$

P₄) Existe un único elemento neutro para la suma en $K^{m \times n}$.

El elemento neutro se denota con E .

$$\exists E = \|e_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \text{ único} / \forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}: A + E = E + A = A.$$

D) Para demostrar la existencia proponemos el elemento neutro: $E = \|e_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$, por lo tanto debe cumplirse que:

$$A + E = A$$

$$\|a_{ij}\| + \|e_{ij}\| = \|a_{ij}\|$$

$$\|a_{ij} + e_{ij}\| = \|a_{ij}\|$$

$$a_{11} + e_{11} = a_{11} \Rightarrow e_{11} = 0$$

$$\dots \Rightarrow \dots$$

$$a_{m1} + e_{m1} = a_{m1} \Rightarrow e_{m1} = 0$$

$$\dots \Rightarrow \dots$$

$$a_{mn} + e_{mn} = a_{mn} \Rightarrow e_{mn} = 0$$

$$\therefore E = \|e_{ij}\| \text{ con } e_{ij} = 0 \forall i \forall j$$

La otra parte de la igualdad: $E + P = P$ se demuestra de manera similar.

Todo esto significa que el elemento neutro de la suma de matrices existe y es la matriz nula ya que se definió a esta como aquella matriz cuyos elementos son 0, es decir que $E = N$.

Para demostrar la unicidad del neutro vamos a suponer que existen dos neutros para la suma: N_1 y N_2 , por lo tanto, si:

$$N_1 \text{ es neutro entonces } N_1 + N_2 = N_2$$

$$N_2 \text{ es neutro entonces } N_2 + N_1 = N_1$$

De donde se deduce, por ser los primeros miembros de ambas igualdades iguales, que $N_1 = N_2$ y consecuentemente el neutro es único. Quedando de esta manera demostrada la propiedad.

P5) Todo elemento en $K^{m \times n}$ admite un único inverso aditivo u opuesto en $K^{m \times n}$.

El elemento opuesto a uno cualquiera $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$, se nota por O .

$$\forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}: \exists O \in K^{m \times n} \text{ único} / A + O = O + A = E$$

D) Para demostrar la existencia del opuesto se propone $O = \|o_{ij}\|_{m \times n}$, por lo tanto debe cumplirse que:

$$A + O = E$$

$$\|a_{ij}\| + \|o_{ij}\| = \|e_{ij}\|$$

$$\|a_{ij} + o_{ij}\| = \|e_{ij}\|$$

$$a_{11} + o_{11} = e_{11} \Rightarrow o_{11} = -a_{11}$$

$$\dots \Rightarrow \dots$$

$$a_{m1} + o_{m1} = e_{m1} \Rightarrow o_{m1} = -a_{m1}$$

... \Rightarrow ...

$$a_{mn} + o_{mn} = e_{mn} \Rightarrow o_{mn} = -a_{mn}$$

$$\therefore O = \|o_{ij}\|_{m \times n} \text{ con } o_{ij} = -a_{ij} \forall i \forall j$$

La otra parte de la igualdad: $O + A = E$ se demuestra de manera similar.

Todo esto significa que el inverso aditivo u opuesto a un elemento $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ existe y es la matriz opuesta a la dada ya que cuando se definió producto por un escalar, si el escalar es -1 al multiplicarse por cualquier matriz se obtiene la opuesta de dicha matriz, es decir que $O(x) = -A = \|-a_{ij}\|_{m \times n} \forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$.

Para demostrar la unicidad del elemento opuesto vamos a suponer que para un elemento $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ existen dos opuestos A_1 y A_2 por lo tanto se debe cumplir que $A + A_1 = N$ y también que $A + A_2 = N$ de donde se deduce que $A_1 = A_2$. Consecuentemente el inverso aditivo u opuesto de cada elemento de $K^{m \times n}$ es único. Quedando demostrada así, la propiedad.

P₆) El producto es ley de composición externa en $K^{m \times n}$ con escalares en \mathbb{K} .

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow (\alpha \cdot A) \in K^{m \times n}.$$

Esto significa que el producto de una matriz de $K^{m \times n}$ por un escalar, como está definido, es una operación que a cada par matriz-escalar, le hace corresponder un único elemento de $K^{m \times n}$.

D) La existencia de tal matriz es inmediata, por la definición de producto de una matriz de $K^{m \times n}$ por un escalar.

P₇) El producto por un escalar satisface la asociatividad mixta.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} : \alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A.$$

$$D) \alpha(\beta A) = \alpha(\beta \|a_{ij}\|)$$

$$= \alpha \|\beta a_{ij}\|$$

$$= \|\alpha(\beta a_{ij})\|$$

$$= \|\alpha \beta a_{ij}\|$$

$$= \|(\alpha \beta) a_{ij}\|$$

$$= (\alpha \beta) \|a_{ij}\|$$

$$= (\alpha \beta) A \text{ quedando demostrada la propiedad.}$$

P₈) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en \mathbb{K} .

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} : (\alpha + \beta) A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A.$$

$$D) (\alpha + \beta) A = (\alpha + \beta) \|a_{ij}\|$$

$$= \|(\alpha + \beta) a_{ij}\|$$

$$= \|\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}\|$$

$$\begin{aligned}
&= \| \alpha a_{ij} \| + \| \beta a_{ij} \| \\
&= \alpha \| a_{ij} \| + \beta \| a_{ij} \| \\
&= \alpha . A + \beta . A \text{ quedando demostrada la propiedad.}
\end{aligned}$$

P₉) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en $K^{m \times n}$.

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \text{ y } B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} : \alpha(A + B) = \alpha . A + \alpha . B.$$

$$\begin{aligned}
\text{D) } \alpha(A + B) &= \alpha \|a_{ij} + b_{ij}\| \\
&= \| \alpha (a_{ij} + b_{ij}) \| \\
&= \| \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} \| \\
&= \| \alpha a_{ij} \| + \| \alpha b_{ij} \| \\
&= \alpha \|a_{ij}\| + \alpha \|b_{ij}\| \\
&= \alpha . A + \alpha . B \text{ quedando demostrada la propiedad.}
\end{aligned}$$

P₁₀) La unidad para los \mathbb{K} es el neutro para el producto por un escalar.

$$\forall A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} : 1 A = A.$$

El conjunto de las matrices de $K^{m \times n}$ para las cuales se definieron las operaciones de suma y producto por un escalar con las respectivas propiedades, determinan un espacio vectorial y cada matriz es un vector.

3.- Producto de matrices

De después de haber estudiado la suma de matrices, podemos dar inicio al estudio y análisis de la otra operación de gran interés entre los elementos del conjunto de matrices: el producto. Esta operación clave posibilita, entre otras tantas cosas, representar algebraicamente sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales entre vectores y operaciones geométricas tales como rotaciones.

3.1.- Producto de matrices: Sean las matrices $A = \|a_{ij}\|_{m \times p}$ y $B = \|b_{ij}\|_{p \times n}$ llamaremos producto de las matrices A y B , en ese orden, a la matriz C de orden $m \times n$ cuyo elemento genérico c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de la fila i de A , por los correspondientes elementos de la columna j de B .

$$A = \|a_{ij}\|_{m \times p} \in K^{m \times p} \text{ y } B = \|b_{ij}\|_{p \times n} \in K^{p \times n} \Rightarrow A . B = C$$

$$\text{con } C = \|c_{ij}\|_{m \times n} / c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Observemos que para poder multiplicar dos matrices, en el orden dado, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de fila de la segunda, obteniéndose una tercera matriz que tiene tantas filas como la primera matriz y tantas columnas como la segunda. Esto quiere decir, que si tenemos una matriz de orden 2x3 y la multiplicamos por otra de orden 3x5, la matriz resultante será de orden 2x5.

Un elemento cualquiera, c_{ij} , de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la primera matriz por cada elemento de la columna j de la segunda matriz y sumándolos.

También se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda (3x5) por la primera (2x3), no podríamos efectuar la operación puesto que, ahora, el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas la segunda matriz.

Ejemplo

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calcular, de ser posible, a) $A \cdot B$, b) $B \cdot A$ y c) $A \cdot C$

a) Cálculo de $A \cdot B$

El producto de estas dos matrices es posible porque A es de orden 2x3 y B de orden 3x4, por lo tanto la matriz producto, C, será de orden 2x4.

Para realizar el producto de matrices de forma práctica y manual, dividiremos un parte de la hoja en cuatro cuadrantes, en el primero colocaremos la segunda matriz, B, mientras que en el tercero ubicaremos la primera matriz, A. Esto nos facilitará sumar los productos de cada elemento de las filas de A por los correspondientes elementos de las columnas de B y obtener la matriz producto, C, en el cuarto cuadrante. Todo esto se muestra a continuación.

			<div>B ↓</div>	1	2	3	4	
				1	0	1	-2	
				0	-1	-1	1	
<div>A →</div>	1	0	-1	1	3	4	3	
	1	2	-2	3	4	7	-2	
								<i>Matriz Producto: C</i>

El elemento c_{13} (4) se obtiene de la siguiente manera: $1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 4$. De manera similar se obtienen los otros elementos de la matriz producto.

b) El producto $B \cdot A$, no es posible ya que B es de orden 3x4 mientras que A es de orden 2x3, es decir que el número de columnas de B no coincide con el número de filas de A.

c) Cálculo de $A \cdot C$

El producto de estas dos matrices es posible y se procede de manera similar a lo realizado en a).

	A	C	
			-2
			2
			3
1	0	-1	-5
1	2	-2	-4

En el producto $A \cdot B$, de dos matrices se dice que A multiplica a B por la izquierda (ó que A premultiplica a B) y que B multiplica a A por derecha (ó que B posmultiplica a A).

Propiedades del producto de matrices

P₁) Conmutatividad

El producto de matrices, en general, no es conmutativo.

Si $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times m}$ entonces coexisten los productos $A \cdot B \in K^{m \times m}$ y $B \cdot A \in K^{n \times n}$ pero son distintos si $m \neq n$.

Si $m = n$ tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$ son matrices del tipo $n \times n$, es decir cuadradas y pertenecientes a $K^{n \times n}$ pero en general se verifica que $A \cdot B \neq B \cdot A$. Si dadas dos matrices A y B se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$ las matrices se dicen conmutables.

P₂) Asociatividad

El producto de matrices es asociativo

Si $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times r}$ y $C \in K^{r \times s}$ entonces $D \in K^{n \times s}$ siendo la matriz

$$D = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

D) Observemos, en primer lugar, que tanto $A \cdot B \cdot C \in K^{n \times s}$ como $(A \cdot B) \cdot C \in K^{n \times s}$ y también $A \cdot (B \cdot C) \in K^{n \times s}$.

Tomemos particularmente los productos $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Para cada $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq s$ se tiene:

$$\begin{aligned} ((A \cdot B) \cdot C)_{ij} &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{p=1}^m a_{ip} b_{pk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{p=1}^m a_{ip} b_{pk} c_{kj} \right) = \sum_{p=1}^m \left(\sum_{k=1}^r a_{ip} b_{pk} c_{kj} \right) = \\ &= \sum_{p=1}^m a_{ip} \left(\sum_{k=1}^r b_{pk} c_{kj} \right) = \sum_{p=1}^m a_{ip} (B \cdot C)_{pj} = (A \cdot (B \cdot C))_{ij}. \end{aligned}$$

Quedando demostrada de esta manera la propiedad.

P₃) Distributividad

El producto de matrices es distributivo con respecto a la suma de matrices.

Si $A, B \in K^{m \times n}$ y $C \in K^{n \times p}$ entonces $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ que indica que el producto de matrices es distributivo a derecha con respecto a la suma de matrices.

Si $A, B \in K^{m \times n}$ y $C \in K^{p \times m}$ entonces $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ que indica que el producto de matrices es distributivo a izquierda con respecto a la suma de matrices.

D) Demostraremos la primera parte de esta propiedad: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Como $A, B \in K^{m \times n}$ entonces la suma $(A + B) \in K^{m \times n}$ y como $C \in K^{n \times p}$, en consecuencia la matriz producto $[(A + B) \cdot C] \in K^{m \times p}$. Llamemos a esta última matriz $H \in K^{m \times p}$. En el segundo miembro de la igualdad, la matriz $(A \cdot C) \in K^{m \times p}$ y la matriz $(B \cdot C) \in K^{m \times p}$, en

consecuencia la matriz suma: $(A.C + B.C) \in K^{m \times p}$. Llamemos a esta última matriz $Q \in K^{m \times p}$.

En resumen, las matrices $H \in K^{m \times p}$ y $Q \in K^{m \times p}$ deben ser iguales, habiéndose demostrado ya, que tienen la misma dimensión. Solo resta demostrar que los elementos correspondientes (ocupan la misma posición) son iguales.

Un elemento cualquiera de la matriz H, h_{ij} , se obtiene multiplicando la fila i de $(A + B)$ por la columna j de C , es decir:

$$h_{ij} = (a_{i1} + b_{i1})c_{1j} + (a_{i2} + b_{i2})c_{2j} + \dots + (a_{in} + b_{in})c_{nj} \text{ escribiendo esto como sumatoria}$$

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \text{ por propiedades de la sumatoria}$$

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj}$$

$$h_{ij} = (ac)_{ij} + (bc)_{ij}$$

$h_{ij} = q_{ij}$ lo que significa que las matrices H y Q tienen los elementos correspondientes, iguales. Por lo tanto se cumple que $(A + B).C = A.C + B.C$.

La segunda parte de la propiedad se demuestra de manera similar. De este modo queda demostrada la propiedad distributiva del producto de matrices respecto a la suma de matrices.

P₄) Asociatividad respecto al producto por un escalar

El producto de matrices es asociativo respecto al producto por un escalar

$$\text{Si } A \in K^{m \times n} \text{ y } B \in K^{n \times p} \text{ y } \alpha \in K \Rightarrow (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

D) La matriz $(\alpha A) \in K^{m \times n}$ y como $B \in K^{n \times p}$ significa que $(\alpha A)B \in K^{m \times p}$, llamaremos a esta matriz $H \in K^{m \times p}$. Por otro lado la matriz $(\alpha B) \in K^{n \times p}$ y como $A \in K^{m \times n}$, significa que la matriz $A(\alpha B) \in K^{m \times p}$, llamaremos a esta matriz $Q \in K^{m \times p}$.

Dos matrices H y Q son iguales si tienen la misma dimensión y sus respectivos elementos correspondientes iguales. La primera parte de esta proposición ya está demostrada pues tanto H como Q son de dimensión $m \times p$. Para la segunda parte, tomamos un elemento cualquiera de H, h_{ij} , que se obtiene multiplicando la fila i de (αA) por la columna j de B , es decir:

$$h_{ij} = (\alpha a)_{i1} b_{1j} + (\alpha a)_{i2} b_{2j} + \dots + (\alpha a)_{in} b_{nj} \text{ expresado como sumatoria}$$

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n (\alpha a)_{ik} b_{kj}$$

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (\alpha b)_{kj}$$

$h_{ij} = q_{ij}$ lo que significa que las matrices H y Q tienen los elementos correspondientes, iguales. Por lo tanto se cumple que $(\alpha A)B = A(\alpha B)$ quedando demostrada la propiedad.

P₅) El hecho de que el producto de dos matrices sea la matriz nula, no implica necesariamente que alguna de las matrices sea la matriz nula.

$$\text{Sean } A \in K^{m \times n} \text{ y } B \in K^{n \times p}. \text{ Si } A.B = N \not\Rightarrow A = N \vee B = N$$

Sean las matrices no nulas, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ su producto es $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

P₆) Sean las matrices $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times p}$ y $C \in K^{m \times q}$ Si $AB = AC$ no implica necesariamente que $B = C$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

Los productos $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$ y $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$ son iguales y $B \neq C$.

En el álgebra de los números reales, si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $ab = 0$, es necesariamente $a = 0$ ó bien $b = 0$. También $ab = ac$ necesariamente es $b = c$. En cambio en el álgebra matricial, como quedo establecido en P₅) y P₆), esto puede no ocurrir.

P₇) Propiedad de la identidad multiplicativa

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n \in K^{n \times n}$ definida por $(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$. Entonces, si $A \in K^{n \times m}$

se verifica: $I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$.

La matriz I_n se denomina matriz identidad de $K^{n \times n}$

D) Sean $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Se tiene:

$$(I_n \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^n (I_n)_{ik} \cdot a_{kj} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij} = A$$

De manera similar se demuestra que $A \cdot I_m = A$. Quedando demostrada la propiedad.

3.2.- Potencia de matrices: Sea la matriz $A \in K^{n \times n}$ definimos las potencias de la matriz A como $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ y $A^{k+1} = A^k \cdot A$ para $k = 1, 2, 3, \dots$

Esta definición permite obtener las potencias de una matriz cuadrada para exponentes enteros positivos.

Ejemplo 1

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 63 & 64 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ se puede verificar que, $A^n = N_{3 \times 3}$ para $n \geq 3$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Demostrar que en general $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$$D) (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$(A + B)^2 = (A + B)A + (A + B)B$$

$$(A + B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$$

En general $AB \neq BA$ por lo tanto salvo que ocurra lo contrario

$A^2 + BA + AB + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ quedando demostrado lo pedido.

4.- Trasposición de matrices

Dadas las matrices $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ y $B = \|b_{ij}\|_{n \times m} \in K^{n \times m}$ se denomina B traspuesta de A y se indica $B = A^t$ si y sólo si B tiene como filas y columnas, las columnas y filas de A (respetando el orden).

Si $A \in K^{m \times n} \Rightarrow B = A^t \Leftrightarrow B = \|b_{ij}\|_{n \times m}$ con $b_{ij} = a_{ji} \forall i \forall j$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ por lo tanto $B = A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Observemos que $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ entonces $A^t \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, además se cumple que $b_{ij} = a_{ji} \forall i; \forall j$ por ejemplo $a_{21} = b_{12}$ ó bien $a_{32} = b_{23}$.

Propiedades de la trasposición de matrices

P₁) Involución

La traspuesta de la traspuesta de una matriz A , es la misma matriz A .

Sea $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow (A^t)^t = A$

D) Según la definición de trasposición de matrices, $A^t \in K^{n \times m}$, luego $(A^t)^t \in K^{m \times n}$. Por lo tanto las matrices A y $(A^t)^t$ tienen la misma dimensión. Veamos ahora un elemento cualquiera de la matriz $(A^t)^t$:

$((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = a_{ij} = A$ esto significa que los elementos correspondientes de las dos matrices, son iguales.

Si ambas matrices tienen la misma dimensión y los elementos correspondientes, iguales, quiere decir que dichas matrices son iguales. Quedando demostrada de esta manera la propiedad.

P₂) Traspuesta de la suma de dos matrices

La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las traspuestas de cada uno de los sumandos.

Sean $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ y $B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$

D) La matriz $(A + B)$ es de dimensión $m \times n$, por lo tanto $(A + B)^t$ es de dimensión $n \times m$. Las matrices A^t y B^t son de dimensión $n \times m$ y por lo tanto la matriz $(A^t + B^t)$ es de dimensión $n \times m$. Lo anterior demuestra que las matrices $(A + B)^t$ y $A^t + B^t$ tienen la misma dimensión.

Tomemos un elemento cualquiera de la matriz $(A + B)^t$:

$(a_{ij} + b_{ij})^t = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^t + B^t$ esto significa que los elementos correspondientes de las matrices $(A + B)^t$ y $A^t + B^t$ son iguales.

Todo esto demuestra que las matrices $(A + B)^t$ y $A^t + B^t$ son iguales, con lo que queda demostrada la propiedad.

P₃) Traspuesta del producto de un escalar por una matriz

La traspuesta del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del escalar por la traspuesta de la matriz.

Sea $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ y $\alpha \in K \Rightarrow (\alpha A)^t = \alpha A^t$

D) La matriz $(\alpha A)^t$ es de dimensión $n \times m$ y la matriz αA^t es de dimensión $n \times m$, por lo tanto ambas matrices tienen la misma dimensión.

Tomemos un elemento cualquiera de la matriz $(\alpha A)^t$:

$(\alpha a_{ij})^t = \alpha (a_{ji}) = \alpha A^t$ lo que significa que ambas matrices, $(\alpha A)^t$ y αA^t tienen los elementos correspondientes, iguales.

Todo esto quiere decir que las matrices, $(\alpha A)^t$ y αA^t son iguales, quedando de esta forma demostrada la propiedad.

P₄) Traspuesta del producto de dos matrices

La traspuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las traspuestas de dichas matrices pero con el orden conmutado.

Sea $A = \|a_{ij}\|_{m \times p} \in K^{m \times p}$ y $B = \|b_{ij}\|_{p \times n} \in K^{p \times n} \Rightarrow (AB)^t = B^t A^t$

D) La matriz AB es de dimensión $m \times n$, por lo tanto la matriz $(AB)^t$ es de dimensión $n \times m$. La matriz B^t es de dimensión $n \times p$ mientras que A^t es de dimensión $p \times m$, por lo tanto la matriz $B^t A^t$ es de dimensión $n \times m$. Lo anterior demuestra que las matrices $(AB)^t$ y $B^t A^t$ tienen la misma dimensión.

Tomemos un elemento cualquiera de la matriz $(AB)^t$:

$((ab)^t)_{ij} = (ab)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{jp}b_{pi}$ que se puede expresar como sumatoria

$$((ab)^t)_{ij} = (ab)_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki} \quad (1)$$

Ahora, tomemos un elemento cualquiera de la matriz $B^t A^t$

$(b^t a^t)_{ij} = b_{i1}^t a_{1j}^t + b_{i2}^t a_{2j}^t + \dots + b_{ip}^t a_{pj}^t$ que se puede expresar como sumatoria

$$(b^t a^t)_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik}^t a_{kj}^t = \sum_{k=1}^p b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son iguales, lo que significa que los elementos correspondientes de las matrices $(AB)^t$ y $B^t A^t$, son iguales.

Todo lo anterior muestra que las matrices $(AB)^t$ y $B^t A^t$ son iguales, quedando demostrada la propiedad.

5.- Matrices simétricas y antisimétricas

Matriz simétrica: una matriz A , cuadrada de orden n , es simétrica si y sólo si es igual a su traspuesta

$$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es Simétrica} \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \forall i \forall j$$

Ejemplo

$$\text{La matriz } A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -7 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ es simétrica}$$

Matriz antisimétrica: una matriz A , cuadrada de orden n , es antisimétrica si y sólo si es igual a la opuesta de su traspuesta.

$$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es Antisimétrica} \Leftrightarrow A = -A^t \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \forall i \forall j$$

En una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal son todos ceros, porque en la diagonal principal $i = j$ o sea que $a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow 2a_{ii} = 0 \Leftrightarrow a_{ii} = 0$

Ejemplo

$$\text{La matriz } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ es antisimétrica.}$$

Propiedades de las matrices simétricas y antisimétricas

P₁) El producto de una matriz por su traspuesta es igual a una matriz simétrica (no es necesario que A sea cuadrada)

$$\text{Si } A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow A \cdot A^t = (A \cdot A^t)^t$$

$$D) A \cdot A^t = (A \cdot A^t)^t$$

$$A \cdot A^t = (A^t)^t \cdot A^t$$

$$A \cdot A^t = A \cdot A^t \text{ quedando de esta forma, demostrada la propiedad.}$$

P₂) La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es una matriz simétrica.

$$\text{Si } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \Rightarrow (A + A^t) = (A + A^t)^t$$

$$D) A + A^t = (A + A^t)^t$$

$$A + A^t = A^t + (A^t)^t$$

$$A + A^t = A^t + A$$

$$A + A^t = A + A^t \text{ quedando de esta forma, demostrada la propiedad.}$$

P₃) La diferencia de toda matriz cuadrada con su traspuesta es antisimétrica.

$$\text{Si } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \Rightarrow (A - A^t) = -(A - A^t)^t$$

$$D) A - A^t = -(A - A^t)^t$$

$$A - A^t = -(A^t - (A^t)^t)$$

$$A - A^t = -(A^t - A)$$

$$A - A^t = A - A^t \text{ quedando de esta forma, demostrada la propiedad.}$$

P₄) Toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

D) Si $A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ de las propiedades P₂) y P₃) resulta que $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica y $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es antisimétrica, por lo tanto

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t$$

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A$$

$A = A$ quedando de esta forma, demostrada la propiedad.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Por lo tanto}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6.- Matrices triangulares

Matriz triangular superior: una matriz A cuadrada de orden n cuyos elementos a_{ij} son iguales a 0 para todo $i > j$ se llama matriz triangular superior.

$$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es Triangular superior} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \forall i > j$$

Ejemplo

Para que una matriz cualquiera $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sea triangular superior debe cumplirse que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ es decir, los elementos que están debajo de la diagonal principal}$$

son ceros.

Matriz triangular inferior: una matriz A cuadrada de orden n cuyos elementos a_{ij} son iguales a 0 para todo $i < j$ se llama matriz triangular inferior.

$$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es Triangular inferior} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \forall i < j$$

Ejemplo

Para que una matriz cualquiera $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sea triangular inferior debe cumplirse que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ es decir, los elementos que están encima de la diagonal principal}$$

son ceros.

Puede demostrarse que el producto de dos matrices triangulares, es una matriz triangular.

Por ejemplo sean las matrices A y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ el producto de ella, es } A.B = \begin{pmatrix} -2 & -12 & -34 \\ 0 & -8 & -31 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

7.- Matrices diagonales

Matriz diagonal: una matriz A cuadrada de orden n en la cual los elementos que no están en la diagonal principal son todos ceros, se denomina matriz diagonal

$$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es Diagonal} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \forall i \neq j$$

Ejemplo

Para que una matriz cualquiera por ejemplo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sea diagonal debe cumplirse que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ es decir, los elementos que no figuran en la diagonal principal son ceros.}$$

Matriz escalar: una matriz A cuadrada de orden n diagonal, en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales a un escalar, se denomina matriz escalar

$$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es Escalar} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0 \forall i \neq j \\ a_{ij} = \alpha \forall i = j \end{cases}$$

Ejemplo

$$\text{Para que una matriz cualquiera } A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ sea escalar debe cumplirse que } A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

es decir, los elementos que figuran en la diagonal principal son iguales a un escalar.

Observemos que para que una matriz cuadrada de orden n sea escalar, debe ser en primer lugar una matriz diagonal, esto significa que toda matriz escalar es diagonal pero no toda matriz diagonal es escalar.

Matriz unidad o identidad: una matriz A cuadrada de orden n escalar, en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales a uno, se denomina matriz unidad o identidad.

A la matriz identidad de orden n se la denomina I_n

$$I = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es Identidad} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0 \forall i \neq j \\ a_{ij} = 1 \forall i = j \end{cases}$$

Esta definición es más amplia y coincide con la dada en P7) (identidad multiplicativa) propiedades del producto de matrices.

El producto de una matriz A por la matriz identidad del orden adecuado da como resultado la misma matriz A .

$$\text{Si } A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow A I_n = A I_m = A$$

Particularmente si A es una matriz cuadrada de orden n e I la matriz identidad del mismo orden, se verifica $AI = IA = A$

Ejemplo

Para que una matriz cualquiera $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sea unidad o identidad debe cumplirse que

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es decir, los elementos que figuran en la diagonal principal son iguales a 1.

Observemos que para que una matriz cuadrada de orden n sea unidad ó identidad, debe ser en primer lugar una matriz escalar, esto significa que toda matriz identidad ó unidad es escalar pero no toda matriz escalar es unidad ó identidad. Ocurre lo mismo para el caso de relacionarse la matriz identidad con las matrices triangulares y diagonal, toda matriz identidad es diagonal y triangular pero el recíproco no se cumple.

8.- Matrices idempotentes e involutivas

Matriz idempotente: una matriz A , cuadrada de orden n , es idempotente si y solo si es igual a su cuadrado.

$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ es Idempotente $\Leftrightarrow A = A^2$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ es idempotente por que verifica $A = A^2$.

Matriz involutiva: una matriz A , cuadrada de orden n , es involutiva si y solo si su cuadrado es la identidad.

$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ es Involutiva $\Leftrightarrow A^2 = I_n$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es involutiva pues $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Ejemplo 1:

Sean la matriz idempotente $A \in K^{n \times n}$ y la matriz identidad I_n . Desarrollar $(A - I)^2$

$$(A - I)^2 = (A - I)(A - I)$$

$$(A - I)^2 = A.A - A.I - I.A + I.I$$

$$(A - I)^2 = A^2 - A - A + I$$

$$(A - I)^2 = A - 2A + I$$

$$(A - I)^2 = I - A$$

Ejemplo 2:

Sean la matriz $A \in K^{n \times n}$ y la matriz identidad I_n . Desarrollar $(A - I)^2$

$$(A - I)^2 = (A - I)(A - I)$$

$$(A - I)^2 = A.A - A.I - I.A + I.I$$

$$(A - I)^2 = A^2 - A - A + I^2$$

$$(A - I)^2 = A^2 - 2A + I^2$$

$$(A - I)^2 = A^2 - 2A + I$$

Observemos que este desarrollo coincide con el desarrollo que habitualmente conocemos con los números reales, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

En el apartado Potencia de matrices, en el Ejemplo 3, se demostró que en general dadas las matrices A y B, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ y que la igualdad solo podría establecerse si $AB = BA$.

Por lo tanto para que el cuadrado de la suma de dos matrices coincida con el desarrollo del cuadrado de la suma de dos números reales debe ocurrir que el producto de las matrices sea conmutable ó bien que una de las dos matrices, sea la matriz identidad.

Ejemplo 3

Sea la matriz involutiva $A \in K^{n \times n}$, demostrar que $\frac{1}{2}(I - A)$ es idempotente.

Debemos demostrar que $\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{2}(I - A)$ sabiendo que A es involutiva. En efecto:

$$\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{4}(I - A)^2$$

$$\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{4}(I^2 - 2IA + A^2)$$

$$\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{4}(I - 2A + I)$$

$$\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{4}(2I - 2A)$$

$$\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{4}2(I - A)$$

$$\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{2}(I - A) \text{ lo que demuestra que } \frac{1}{2}(I - A) \text{ es idempotente.}$$

9.- Inversión de matrices

Matriz inversa: la matriz, cuadrada de orden n, $A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ es inversible, regular ó no singular sí y sólo si existe una matriz $B = \|b_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ tal que su producto por A a izquierda y a derecha es la matriz unidad.

$$A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ es regular} \Leftrightarrow \exists B = \|b_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} / AB = BA = I$$

La inversa de A, si existe, se denota por A^{-1}

Propiedades de la inversión de matrices

P₁) Si existe la inversa de una matriz cuadrada A, esta es única.

D) Suponemos que la matriz A tiene dos matrices inversas: B y C.

$$\text{Si B es inversa de A, entonces } AB = BA = I$$

$$\text{Si C es inversa de A, entonces } AC = CA = I$$

Sabemos que

$$B = B I$$

$$B = B (A C)$$

$$B = (B A) C$$

$$B = I C$$

$B = C$ esto significa que de existir la matriz inversa, esta es única. Quedando así, demostrada la propiedad.

P₂) Involución: la inversa de la inversa de una matriz cuadrada, regular A, es la misma matriz A.

$$\text{Sea } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ invertible} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$$

$$\text{D) Por definición es } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Se puede observar que A y A^{-1} son inversas entre si, por lo tanto $(A^{-1})^{-1} = A$. Con esto queda demostrada la propiedad.

P₃) Si dos matrices cuadradas A y B son invertibles, entonces la inversa del producto es igual al producto de las inversas con el orden permutado.

$$\text{Sean } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ y } B = \|b_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ invertibles} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

D) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ esto significa que la inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$ por lo tanto el producto a izquierda y a derecha de AB con $B^{-1}A^{-1}$ debe ser la matriz unidad.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I \qquad (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

$$A(BB^{-1})A^{-1} = I \qquad B^{-1}(A^{-1}A)B = I$$

$$A I A^{-1} = I \qquad B^{-1} I B = I$$

$$A A^{-1} = I \qquad B^{-1} B = I$$

$$I = I \qquad I = I$$

Por lo tanto la inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$ es decir $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, demostrándose así, la propiedad.

Este resultado se puede generalizar: $(A_1 A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \dots A_1^{-1}$

P₄) Si una matriz es invertible, también lo es su traspuesta y la inversa de la traspuesta de una matriz cuadrada A regular es igual a la traspuesta de la inversa de A.

$$\text{Sea } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n} \text{ invertible} \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

$$\text{D) } A A^{-1} = I \qquad A^{-1} A = I$$

$$(A A^{-1})^t = I^t \qquad (A^{-1} A)^t = I^t$$

$$(A^{-1})^t A^t = I \qquad A^t (A^{-1})^t = I$$

Hemos multiplicado a izquierda y a derecha respectivamente, A^t y $(A^{-1})^t$ y se obtuvo la matriz identidad, por lo tanto la inversa de A^t es $(A^{-1})^t$ es decir que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Queda así demostrada la propiedad.

P₅) Sea A una matriz cuadrada de orden n, invertible, si B y C son dos matrices de orden m x n, entonces i) $BA = N \Rightarrow B = N$ y ii) $BA = CA \Rightarrow B = C$

Sean $A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ invertible, $B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ y $C = \|c_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \Rightarrow$

i) $BA = N \Rightarrow B = N$ ii) $BA = CA \Rightarrow B = C$

D)

i) $BA = N \Rightarrow B = N$ ii) $BA = CA \Rightarrow B = C$

$$BA = N$$

$$BA = CA$$

$$BA A^{-1} = N A^{-1}$$

$$BA A^{-1} = CA A^{-1}$$

$$BI = N$$

$$BI = CI$$

$$B = N$$

$$B = C$$

Quedando de esta manera, demostrada la propiedad.

P₆) Sea A una matriz cuadrada de orden n, invertible, si k es un escalar no nulo, entonces la matriz (k A) también es invertible.

Sea $A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ invertible y $k \in \mathbb{K}$ con $k \neq 0 \Rightarrow (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

D) $(kA)^{-1} k A = I$

$$(kA)^{-1} k A A^{-1} = I A^{-1}$$

$$(kA)^{-1} k I = A^{-1}$$

$$k (kA)^{-1} I = A^{-1}$$

$$k (kA)^{-1} = A^{-1}$$

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ quedando de esta manera, demostrada la propiedad.

P₇) Sea A una matriz cuadrada de orden n, invertible, si k es un entero positivo, entonces la matriz A^k también es invertible y se tiene que $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

Sea $A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}$ invertible y $k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow A^k$ es invertible y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

D₁) Si A^k es invertible debe cumplirse que

$$(A^{-1})^k A^k = I$$

$$(A A^{-1})^k = I$$

$$I^k = I$$

$$I = I$$

El producto por derecha es análogo; con lo que queda demostrado que A^k es invertible.

D₂) $(A^k)^{-1} A^k = I$

$$(A^k)^{-1} \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_{k-\text{veces}} = I$$

$$(A^k)^{-1} A \cdot A \cdot A \dots A \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}$$

$$(A^k)^{-1} A \cdot A \cdot A \dots A \cdot I = A^{-1}$$

$$(A^k)^{-1} A \cdot A \cdot A \dots A = A^{-1}$$

Nuevamente multiplicamos a derecha por A^{-1} , ambos miembros de la igualdad, obtendremos:

$$(A^k)^{-1} A \cdot A \cdot A \dots A = (A^{-1})^2$$

Si repetimos el proceso k-veces:

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \text{ de esta manera, queda demostrada la propiedad.}$$

P₈) Si A tiene una fila ó una columna de ceros, entonces no es invertible.

D) Si la fila i de A es de ceros, al multiplicarla a la derecha por cualquier matriz, ésta tendrá la fila i de ceros. Lo mismo ocurre con las columnas, multiplicando a la izquierda. Por lo tanto no se cumplirá la existencia de A^{-1} tal que multiplicada a izquierda y a derecha por A se obtenga la matriz unidad. Quedando así demostrada la propiedad.

Hasta el momento solo se definió y se demostraron las propiedades de la matriz inversa, tanto la condición de existencia como el cálculo de esta matriz se estudiará en el apartado “Condición de existencia y cálculo de la matriz inversa”.

10.- Matrices ortogonales

Matriz ortogonal 1: una matriz cuadrada de orden n , invertible se dice ortogonal si y solo si su inversa es igual a su traspuesta.

$$\text{Sea } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}, A \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$$

Matriz ortogonal 2: una matriz cuadrada de orden n , invertible se dice ortogonal si y solo si el producto de dicha matriz por su traspuesta es la unidad.

$$\text{Sea } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}, A \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$$

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ es ortogonal, pues verifica $A \cdot A^t = I_n$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad

El producto de dos matrices ortogonales, es ortogonal.

$$\text{Sean } A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in K^{n \times n}, B = \|b_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n} \text{ ortogonales} \Rightarrow$$

$$(A \cdot B)(A \cdot B)^t = (A \cdot B)^t(A \cdot B) = I_n$$

$$D) (A \cdot B)(A \cdot B)^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t$$

$$(A \cdot B)(A \cdot B)^t = A \cdot I \cdot A^t.$$

$$(A \cdot B)(A \cdot B)^t = A \cdot A^t$$

$$(A.B)(A.B)^t = I$$

De manera similar se demuestra $(A.B)^t(A.B) = I_n$, quedando de esta manera demostrada la propiedad.

11.- Transformaciones elementales: matrices equivalentes, escalonadas y reducidas.

Para abordar, con más facilidad, el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales y el estudio de las propiedades de los determinantes, las matrices proveen de una importante herramienta, las llamadas transformaciones elementales de matrices. Estas se definen, tanto para las filas como para las columnas, de la siguiente manera:

Transformaciones elementales u operaciones elementales: entre las filas (columnas) de una matriz $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ son las siguientes:

- a) Permutación de filas (columnas) entre si
- b) Adición de una fila (columna) a otra
- c) Multiplicación de una fila (columna) por un escalar no nulo.

A una matriz se la puede considerar como un conjunto de vectores filas (columnas), por lo tanto las operaciones elementales se expresan como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_i \leftrightarrow F_j \\ F_i \rightarrow F_i + F_j \\ F_i \rightarrow \alpha F_i \text{ con } \alpha \in K \wedge \alpha \neq 0 \end{cases}$$

A partir de estas transformaciones de una matriz podemos dar la definición de:

Matrices equivalentes: dadas dos matrices A y B decimos que B es equivalente a A si y sólo si B se puede obtener efectuando un número finito de operaciones elementales sobre A . Para indicar que A es equivalente a B escribimos $A \sim B$.

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ a partir de ella se pueden obtener, operando con filas,

las siguientes matrices equivalentes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -3F_1 + F_2 \\ -7F_1 + F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & -6 \end{pmatrix} \sim \dots$$

Se puede observar que la primera matriz equivalente se obtuvo intercambiando la fila 1 (F_1) por la fila 3 (F_3), en este caso no se utilizó ninguna notación debido a la simplicidad de la operación. Para obtener la segunda matriz equivalente se procedió así: a la fila 2 (F_2) se le sumó la fila 1 (F_1) multiplicada por el escalar -3 , indicándose esto mediante la notación $-3F_1 + F_2$, luego a la fila 4 (F_4) se le sumó la fila 1 (F_1)

multiplicada por el escalar -7 , indicándose esto mediante la notación $-7F_1 + F_4$, y así sucesivamente se pueden obtener infinitas matrices equivalentes a una dada.

Matrices equivalentes por fila: *dadas dos matrices A y B decimos que B es equivalente por fila a A si B se puede obtener efectuando un número finito de operaciones elementales sobre las filas de A. Para indicar que A es equivalente por fila a B escribimos $A \sim_f B$.*

Si $A \sim_f B \Rightarrow A \sim B$ el recíproco no vale, o sea que $A \sim B \nRightarrow A \sim_f B$.

Matrices equivalentes por columna: *dadas dos matrices A y B decimos que B es equivalente por columna a A si B se puede obtener efectuando un número finito de operaciones elementales sobre las columnas de A. Para indicar que A es equivalente por columna a B escribimos $A \sim_c B$.*

Si $A \sim_c B \Rightarrow A \sim B$ el recíproco no vale, o sea que $A \sim B \nRightarrow A \sim_c B$

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ a partir de ella se pueden obtener, operando con

columnas, las siguientes matrices equivalentes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2C_1 + C_2 \\ -2C_1 + C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 11 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 23 & -13 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz y F_i una fila cualquiera de A, si F_i no es una fila totalmente de ceros (nula), se dice que el primer número distinto de cero, de izquierda a derecha, es el *pivot* (p_i) de la fila y a esta se la suele llamar fila pivotante.

Matriz escalonada por filas: *es aquella que verifica las siguientes propiedades:*

- a) Todas las filas nulas (si existiesen) se encuentran en la parte inferior de la matriz.
- b) El pivot de cada fila no nula se encuentra estrictamente más a la derecha que el pivot de la fila de encima.

Ejemplos:

$$\text{Sean las matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y B no son escalonadas, mientras que C y D sí lo son.

Propiedades de las matrices escalonadas por filas

P₁) Todas las formas escalonadas por filas de una matriz tienen el mismo número de filas no nulas. A dicho número se lo suele denominar ρ .

P₂) Todas las formas escalonadas por filas de una matriz tienen las columnas pivotaes en las mismas posiciones y el número de ellas coincide con el número de filas no nulas, ρ .

Matriz escalonada reducida por filas: es aquella que verifica las siguientes propiedades:

a) En cada fila el pivot es igual a 1.

b) Todos los elementos por encima de los pivotes, son nulos.

Ejemplos:

$$\text{Sean las matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las tres matrices son escalonadas reducidas por filas.

Debemos destacar que para que una matriz sea escalonada reducida, debe ser en primer lugar escalonada, es decir que, toda matriz escalonada reducida es escalonada pero no toda matriz escalonada es reducida. Dicho de otra forma, para que una matriz se pueda clasificar como escalonada debe cumplir dos propiedades mientras que para ser escalonada reducida debe cumplir cuatro propiedades, las dos de escalonada más otras dos.

A la forma escalonada reducida por filas también se le suele llamar “forma normal de Hermite”. Se puede demostrar que “Dada una matriz A , la forma escalonada reducida por filas es única”. A pesar de que la forma escalonada reducida por filas es única, se puede llegar a ella por distintas secuencias de operaciones elementales por filas.

El proceso de obtener una forma escalonada por filas de una matriz se denomina “eliminación gaussiana”.

11.1.- Obtención de la forma escalonada reducida por filas: algoritmo de eliminación gaussiana

Describiremos a continuación un algoritmo para obtener, a partir de una matriz $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$, una determinada forma escalonada reducida por fila. Este algoritmo consta de los siguientes pasos:

- 1.- Determine, de izquierda a derecha, la primera columna no cero (pivote).
- 2.- Si el primer elemento de la columna es cero, intercambie la fila por otra que no tenga cero, esto se ha de realizar con la primer fila siguiente que si posea pivote.
- 3.- Obtenga ceros debajo del pivote sumando múltiplos adecuados a las filas debajo de él.
- 4.- Sin considerar la fila ni la columna de trabajo, repita el proceso comenzado en el paso 1. Al término del ciclo entre el paso 1 al 4, es decir, cuando se hayan utilizado todos las filas la matriz deberá tener forma escalonada.

5.- Comenzando con la última fila no nula, avance hacia arriba para que en cada fila tenga un 1 como pivote y arriba de él sólo ceros. Para esto deberá sumar múltiplos adecuados de la fila pivotante a las filas correspondientes.

Es importante observar que en este algoritmo los pasos del 1 al 4 aplicados repetidamente permiten obtener una matriz escalonada, mientras que el paso 5 permite obtener una matriz escalonada reducida. En el paso 2 si el elemento no es cero no se debe realizar intercambio alguno y en el paso 3 los elementos que se hacen cero son sólo los elementos debajo del pivote.

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ aplicar el algoritmo de eliminación gaussiana.

En este caso la primera columna tiene elementos distintos de cero ($a_{11} = 3$), continúa entonces el paso 2 pero como el elemento $a_{11} \neq 0$ se continua con el paso 3. El elemento a_{11} es el pivote y será usado para hacer ceros los elementos debajo de él; para esto debemos sumar múltiplos adecuados de la fila pivotante a las filas inferiores.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -\frac{2}{3}F_1 + F_2 \\ \frac{2}{3}F_1 + F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

No se debe considerar a partir de ahora, ni la primera fila ni la primera columna pues con ellas ya se trabajó. Al repetir el paso 1, el algoritmo busca la primer columna distinta de cero; en este caso a partir de la segunda columna y continua con el paso 2. Como el elemento $a_{22} = 0$ debemos buscar en la parte inferior de la columna dos el primer elemento distinto de cero ($a_{32} = 1$) y realizar el intercambio de filas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora el pivote es el elemento $a_{22} = 1$.

Continuamos con el paso 3. En este caso los elementos debajo del pivote son cero y el algoritmo procede a la siguiente columna siendo el pivote el elemento $a_{33} = -2$ que no tiene elementos debajo de él.

Hasta aquí la matriz es escalonada, ahora se procede con el paso 5, hacer uno cada pivote y posteriormente hacer ceros los elementos arriba de cada uno de ellos.

Hagamos 1 el p_3 ($a_{33} = -2$).

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim -\frac{1}{2}F_3 \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Debemos hacer cero los elementos por arriba de p_3 .

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim 9F_3 + F_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedemos de igual manera con p_2 ($a_{22} = 1$) que ya es 1, entonces sólo resta hacer cero los elementos por encima de él.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim -6F_2 + F_1 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente debemos hacer 1 el p_1 ($a_{11} = 3$).

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{3}F_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz: sea la matriz $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ se denomina rango de A y se denota como $\rho(A)$, al número de columnas pivotaes o número de filas no nulas de cualquier forma escalonada por filas de dicha matriz.

Observemos que esta definición de rango se basa en cualquier forma escalonada por fila de la matriz, es decir no es necesario que sea escalonada reducida por fila. Por lo tanto para obtener el rango de una matriz se puede aplicar el algoritmo de eliminación gaussiana del paso 1 al 4, únicamente.

Ejemplo

$$\text{Calcular el rango de } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $a_{11} = 0$ se intercambian la fila 1 con la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora $a_{11} = 1 = p_1$. Debemos hacer cero todos los elementos de la primera columna y ubicados debajo de p_1 .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -3F_1 + F_2 \\ -7F_1 + F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & -6 \end{pmatrix}$$

Corresponde que $a_{22} = 8$ sea el segundo pivote, p_2 . Debemos hacer cero todos los elementos debajo de p_2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -8F_3 + F_2 \\ -2F_2 + F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente $p_3 = -19$ y ya son cero los elementos debajo de él.

Por lo tanto $\rho(A) = 3$ ya que esta forma escalonada de A tiene 3 filas pivotaes ó tres filas no nulas.

Propiedades del rango de una matriz

P₁) Dada una matriz $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ el rango es menor ó igual que m y menor ó igual que n .

P₂) Todas las matrices equivalentes entre sí (por filas) tienen el mismo rango.

Nótese que el recíproco de esta propiedad no se cumple.

P₃) Dada una matriz $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$ el rango de A es igual al rango de su traspuesta.

P₄) El rango de la matriz I_n es n .

D) La demostración de esta propiedad es evidente ya que la matriz identidad ya es escalonada reducida por filas y por lo tanto es escalonada por filas y tiene n filas no nulas ó n columnas pivotaes, por lo tanto el rango de la matriz I_n es n .

P₅) Toda matriz equivalente por filas a la identidad, tiene rango n .

D) La demostración de esta propiedad se pone en evidencia si consideramos la segunda propiedad enunciada: Todas las matrices equivalentes entre sí (por filas) tienen el mismo rango, por lo tanto, si una matriz es equivalente por fila a la matriz identidad, I_n , y esta tiene rango n , la matriz equivalente también tendrá rango n .

Ejemplos:

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 2, \rho(B) = 2, \rho(C) = 3 \quad y \quad \rho(I_4) = 4$$

11.2.- Obtención de la forma escalonada reducida por filas: algoritmo de Gauss-Jordan

Describiremos a continuación otro algoritmo para obtener, a partir de una matriz $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in K^{m \times n}$, una determinada forma escalonada reducida por fila. Este algoritmo consta de los siguientes pasos:

- 1.- Determine, de izquierda a derecha, la primera columna no cero (pivote).
- 2.- Si el primer elemento de la columna es cero, intercambie la fila por otra que no tenga cero, esto se ha de realizar con la primer fila siguiente que si posea pivote. Multiplicando apropiadamente haga 1 el pivote, p_1 .
- 3.- Obtenga ceros arriba y abajo del pivote sumando múltiplos adecuados a las filas debajo (arriba) de él.
- 4.- Sin considerar la fila ni la columna de trabajo, repita el proceso comenzado en el paso 1 en la columna siguiente.

Es importante observar que la idea de este algoritmo es ir escalonando la matriz y volviéndola reducida por filas, simultáneamente.

El paso 1 de este algoritmo es idéntico al de la eliminación gaussiana, en el paso 2 se debe hacer el intercambio de filas solo si el primer elemento de la columna es cero, igual que en el algoritmo de eliminación gaussiana, pero en este caso al pivote se lo transforma en 1. La diferencia en el paso 3 de los algoritmos es que en la eliminación gaussiana se hacen ceros solamente los elementos por debajo del pivot mientras que en Gauss–Jordan se vuelven cero los elementos por debajo y encima del pivot. El paso 4 es similar, obteniéndose en la eliminación gaussiana una matriz escalonada.

Ejemplo:

Dada la siguiente matriz, aplicar el algoritmo de Gauss–Jordan para obtener una matriz escalonada reducida por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que el elemento $a_{11} = 3$ es distinto de cero, por lo tanto es el p_1 . Corresponde volver 1 a dicho pivot y volver cero los elementos, en este caso, debajo de él.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{3}F_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -2F_1 + F_2 \\ 2F_1 + F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin considerar ni la primera fila ni la primera columna, procedemos a identificar el segundo pivot, p_2 , observamos que $a_{22} = 0$, por lo tanto procedemos a intercambiar la fila 2 por 1 inmediata inferior que no tenga cero en la posición deseada, en este caso la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como p_2 ya es 1, procedemos a hacer cero los elementos por debajo y por encima de p_2 , en este caso el elemento por debajo de p_2 ya es cero, solo corresponde trabajar con el elemento a_{12} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim -2F_2 + F_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Sin considerar ni la segunda fila ni la segunda columna, procedemos a identificar el segundo pivot, p_3 , observamos que $a_{33} = -2$, corresponde volver 1 a p_3 y cero los elementos, en este caso, por encima de él.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim -\frac{1}{2}F_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -F_3 + F_1 \\ 2F_3 + F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma finaliza el algoritmo y se obtuvo a partir de la matriz dada otra matriz pero escalonada reducida por filas. Además podemos decir en este caso que $\rho(A) = 3$.

12.- Condición de existencia y cálculo de la matriz inversa

Tal como se dijo anteriormente en este apartado se demostrará una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada posea inversa y se ejemplificará su cálculo. Previo a esto será necesario demostrar el siguiente teorema.

Teorema: Dada una matriz cualquiera $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ existen dos matrices P y U tales que $P.A = U$, siendo U una matriz escalonada.

D) La demostración de este teorema se realizará de forma constructiva.

Paso 1: Anular todos los elementos a_{i1} con $1 < i \leq n$.

Si $a_{11} \neq 0$ mediante transformaciones elementales por filas podemos anular todos los elementos de la primera columna situados por debajo de él.

Si $a_{11} = 0$ y algún elemento de la primera columna es no nulo, entonces podemos llevarlo –mediante una transformación elemental– a la posición (1,1) y proceder como en el caso anterior.

Si $a_{i1} = 0$ para $i = 1, \dots, m$ significa que la primera columna es de ceros, por lo tanto $a_{i1} = 0 \forall i > 1$ lo que significa que se trata de una columna del tipo de las matrices escalonadas.

Paso 2: Procedemos con el elemento a_{22} (resultante de las transformaciones anteriores) de la misma manera que se procedió con el a_{11} , es decir, si $a_{22} \neq 0$ lo utilizamos para hacer cero los elementos debajo de él en la segunda columna. Si $a_{22} = 0$ buscamos si existe por debajo de él, el primer elemento $a_{i2} \neq 0$ y en caso de existir, realizamos la transformación correspondiente, etc.

Paso 3: Reiterando los pasos 1 y 2, llegamos a una matriz escalonada.

De esta manera, queda demostrado –de manera constructiva– el teorema.

Observemos que la matriz P es el producto de las matrices de las transformaciones elementales por filas² realizadas para pasar de A a U .

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices P y U (escalonada) tal que $P.A =$

U

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \underbrace{-2F_1 + F_2}_{P_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \underbrace{-\frac{1}{2}F_1 + F_3}_{P_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim$$

² Para ampliar este tema, ver el apéndice al final del capítulo.

$$\sim \underbrace{F_2 \leftrightarrow F_3}_{P_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} = U.$$

Como $P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A = U$ entonces $P \cdot A = U$ siendo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_P$$

Se verifica que $P \cdot A = U$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Este teorema nos permite demostrar una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada posea inversa.

Teorema: una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada de orden n , posea inversa es que su forma escalonada reducida por filas sea la matriz unidad.

D) \Rightarrow) Si su forma escalonada reducida por fila es I_n existe $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $P \cdot A = I_n$ por lo tanto: $P \cdot A = I_n \Leftrightarrow P \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} \Leftrightarrow P = A^{-1}$.

\Leftarrow) Si existe A^{-1} tal que $A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow \exists P = A^{-1}$ tal que $P \cdot A = I_n$ y por lo tanto, I_n es la forma escalonada reducida por fila de A .

De esta manera queda demostrado el teorema.

Se puede establecer una relación entre el rango de una matriz cuadrada de orden n y su matriz inversa, mediante el siguiente corolario.

Corolario: la matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es invertible si y sólo si $\rho(A) = n$.

D) \Rightarrow) Si A es invertible, por el teorema anterior podemos afirmar que su forma escalonada reducida es I_n , que tienen n filas no nulas y por lo tanto $\rho(A) = n$.

\Leftarrow) Si $\rho(A) < n$ entonces la forma escalonada reducida de A , tiene una fila de ceros, luego no es invertible. Pero sabemos que $U = P \cdot A$, por lo que, si A fuera invertible, U también lo sería.

Quedando de esta manera demostrado el corolario y estableciendo una segunda condición necesaria y suficiente para que una matriz posea inversa.

El teorema nos permite calcular la matriz inversa de una matriz A cuadrada de orden n , mediante transformaciones elementales entre sus filas, puesto que “efectuando la misma secuencia de operaciones elementales por filas y en el mismo orden que llevan de A a I_n , la matriz I_n se transforma en A^{-1} ”.

Esto determina un procedimiento para obtener la inversa de una matriz denominado método de Gauss–Jordan, cuyo esquema es el siguiente:

$$(A | I) \xrightarrow[\text{operaciones elementales por filas}]{\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow} (I | A^{-1})$$

Ejemplo 1:

Determinar por el método de Gauss–Jordan la matriz inversa de A, si dicha matriz existe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{-3F_2+F_1 \\ F_2+F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{3F_3+F_1 \\ -F_3+F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para verificar este resultado, al multiplicar la matriz A por su inversa se debe obtener la matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto existe la inversa de A y es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2:

Determinar por el método de Gauss–Jordan la matriz inversa de A, si dicha matriz existe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí podemos observar que no debemos considerar ni la primera fila ni la primera columna, además el elemento $a_{22} = 0$ y el único elemento inmediatamente debajo de él también es cero, $a_{33} = 0$. Por lo tanto no podemos seguir transformando la matriz A en la matriz identidad, esto significa que la matriz A no posee inversa.

Existe otra condición necesaria y suficiente para determinar, más rápidamente, si una matriz cuadrada de orden n admite o no matriz inversa, es calculando su determinante. Este y otros temas relacionados, se estudiarán en el capítulo correspondiente al tema Determinantes.

13.- Submatrices

Submatriz: dada la matriz $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ si se eligen I filas de las m posibles y J columnas de las n posibles, se define la submatriz de A de orden $I \times J$ como la matriz $[A]_{I \times J}$ cuyos elementos a_{ij} de A tales que $i \in I$ y $j \in J$.

Una submatriz de la matriz A , es la matriz que se obtiene de A al eliminar las filas que no están en I y las columnas que no están en J , es decir, es la matriz resultante de eliminar de A determinadas filas y/o columnas.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces, algunas de las submatrices son:

$$[A]_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [A]_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad [A]_{1 \times 3} = (4 \quad 2 \quad -1)$$

14.- Ecuaciones matriciales

Para poner en práctica el álgebra con matrices estudiada en los apartados anteriores, se propone a continuación la resolución –en forma genérica– de ecuaciones donde se involucran incógnitas que representan matrices. La resolución genérica se realizará por medio de ejemplos.

Ejemplo 1:

Siendo A , B , X matrices y k un escalar no nulo, determinar X .

$$k.X + A = B$$

El procedimiento que se emplea para encontrar la solución en esta ecuación matricial, son similares a los seguidos en las ecuaciones algebraicas.

$$k.X + A = B$$

$$k.X + A - A = B - A \text{ sumando en ambos miembros la opuesta de } A$$

$$k.X + (A - A) = B - A \text{ por asociatividad de la suma (resta) de matrices}$$

$$k.X = B - A \text{ por suma (resta) de matrices}$$

$$\frac{1}{k}(k.X) = \frac{1}{k}(B - A) \text{ multiplicando ambos miembros por el escalar } \frac{1}{k}$$

$$X = \frac{1}{k}(B - A) \text{ por la asociatividad del producto de una matriz por un escalar}$$

Este procedimiento se realizó con detalles para evidenciar la similitud enunciada en el primer párrafo. Evidentemente, este procedimiento se puede realizar –sobre todo en la práctica– de manera más sintética si se eliminan los pasos obvios.

$$k.X + A = B$$

$$k.X = B - A$$

$$X = \frac{1}{k}(B - A)$$

Ejemplo 2:

Siendo A y X matrices y A invertible, determinar X en: $A.X = B$

Como la matriz A está multiplicando por izquierda a la matriz X, de igual manera se multiplicara ambos miembros por la inversa de A.

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

$$(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B \text{ por la asociatividad del producto de matrices}$$

$$I.X = A^{-1}.B \text{ por definición de inversa de una matriz}$$

$$I.X = A^{-1}.B \text{ por ser la matriz identidad el elemento neutro del producto de matrices}$$

$$X = A^{-1}.B$$

Observemos, en primer lugar que como en el caso anterior, aquí también se puede hacer un procedimiento más sintético que el expuesto. En segundo lugar, en el primer paso del procedimiento no se puede multiplicar por A^{-1} ambos miembros de la ecuación por derecha. Es decir hay que distinguir y recordar las dos siguientes situaciones que no son iguales.

$$A.X = B \Rightarrow X = A^{-1}.B \text{ ó bien } X.A = B \Rightarrow X = B.A^{-1}$$

Finalmente, esto último también nos indica que para determinar la matriz X no se debe dividir ambos miembros de la ecuación, por una misma matriz. No está definida la división de matrices.

Ejemplo 3:

Sabiendo que A, B, X son matrices y que además A y B son invertibles, determinar X.

$$A.B.X = C$$

Solución 1

$$A.B.X = C$$

$$(A.B).X = C$$

$$(A.B)^{-1}.(A.B).X = (A.B)^{-1}.C$$

$$I.X = (A.B)^{-1}.C$$

$$X = (A.B)^{-1}.C$$

Solución 2

$$A.B.X = C$$

$$A^{-1}.A.B.X = A^{-1}.C$$

$$B.X = A^{-1}.C$$

$$B^{-1}.B.X = B^{-1}.A^{-1}.C$$

$$X = B^{-1}.A^{-1}.C$$

Debido a que $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ ambos resultados son igualmente correctos.

Ejemplo 4:

Sabiendo que A, X son matrices, determinar X en los siguientes dos casos: $X^t = A$ y

$$X^{-1} = A$$

Ambos casos se basan en propiedades similares de la trasposición e inversión de matrices. Se los resolverá sintéticamente y de manera simultánea.

$$X^t = A$$

$$(X^t)^t = A^t$$

$$X = A^t$$

$$X^{-1} = A$$

$$(X^{-1})^{-1} = A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Los siguientes ejemplos son una combinación de los ejemplos anteriores, es importante ser cuidadoso y riguroso en cuanto a los pasos necesarios para determinar la incógnita.

Ejemplo 5:

Sabiendo que A, B, C, D, X son matrices, A invertible y k un escalar no nulo, determinar X: $A.(kX + B) + C = D$

$$A.(kX + B) + C = D$$

$$A.(kX + B) = D - C$$

$$kX + B = A^{-1}.(D - C)$$

$$kX = A^{-1}.(D - C) - B$$

$$X = \frac{1}{k}(A^{-1}.(D - C) - B)$$

Ejemplo 6:

Sabiendo que A, B, C, D, E, X son matrices invertibles, determinar X:

$$A.((B.X)^{-1} + C)^t + D = E$$

$$A.((B.X)^{-1} + C)^t = E - D$$

$$((B.X)^{-1} + C)^t = A^{-1}.(E - D)$$

$$(B.X)^{-1} + C = (A^{-1}.(E - D))^t$$

$$(B.X)^{-1} = (A^{-1}.(E - D))^t - C$$

$$B.X = ((A^{-1}.(E - D))^t - C)^{-1}$$

$$X = B^{-1}.((A^{-1}.(E - D))^t - C)^{-1}$$

Apéndice

Este apartado pretende profundizar el tema: Transformaciones elementales de matrices también llamadas operaciones elementales y que se definió para las líneas (filas ó columnas) de una matriz.

Recordemos, en primer lugar, que se definieron tres tipos de transformaciones: permutación de líneas, adición de una línea a otra y multiplicación de una línea por un escalar no nulo y segundo, es válido realizar simultáneamente más de una transformación.

La primera transformación elemental sobre las filas de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es el intercambio de la fila i y j de ella. Este efecto se logra al multiplicar por izquierda la matriz A por la matriz P_{ij} , siendo esta el resultado de intercambiar las filas i y j de la matriz I_m .

Por ejemplo, consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ para intercambiar F_2 y F_3

multiplicamos por izquierda la matriz A por la matriz $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (en I_3 ($m = 3$) se intercambiaron las filas segunda y tercera).

$$P_{23} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Observemos que se obtuvo una matriz con las mismas filas que A pero con la segunda y tercer fila intercambiada.

En la práctica esto no suele aplicarse ya que es simplemente volver a “escribir” la matriz A con sus filas intercambiada, pero en el ámbito computacional el intercambio de filas de una matriz se realiza con este procedimiento.

La segunda transformación elemental sobre las filas de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es multiplicar la fila i por un número $\alpha \neq 0$. Este efecto se logra al multiplicar por izquierda la matriz A por la matriz $P_i(\alpha)$, siendo esta el resultado de multiplicar por α la fila i de la matriz I_m .

Por ejemplo, consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ para multiplicar por 3 ($\alpha = 3$) la

segunda fila de A , multiplicamos por izquierda, A y la matriz $P_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (en

I_3 ($m = 3$) se multiplicó la segunda fila por 3).

$$P_2(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 12 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Observemos que se obtuvo una matriz con la primera y tercera fila idénticas a las de A pero con la segunda fila igual a la segunda fila de A multiplicada por 3.

La tercera transformación elemental sobre las filas de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es sumar a la fila i la fila j multiplicada por un número $\alpha \neq 0$. Este efecto se logra al multiplicar por izquierda la matriz A por la matriz $P_{ij}(\alpha)$, siendo esta el resultado de sumar a la fila i de la matriz I_m su fila j multiplicada por α , es decir, la matriz resultante de sustituir el elemento $i_{ij} = 0$ por α .

Por ejemplo, consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ para restar a la segunda fila de

A el doble de la primera utilizamos la matriz $P_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (en I_3 ($m = 3$)) se sustituyó el elemento $i_{21} = 0$ por -2).

$$P_{21}(-2).A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Observemos que en la matriz A se ha producido el efecto que deseamos.

Si bien se detallaron las transformaciones para las filas de una matriz A, se puede trabajar de manera similar pero con las columnas de A, es decir, las transformaciones elementales para las columnas de A son las mismas que para las filas, nada más que operando por columna.