

Capítulo 7

ESPACIOS VECTORIALES

Álgebra y Geometría Analítica
Facultad de Ingeniería UNJu
2022

1.1.- Introducción

Jean Luc Dorier¹ determinó dos periodos unificadores en la evolución histórica del concepto de espacio vectorial y otros conectados con él –dependencia lineal, base, dimensión, etc.–. El primero de ellos, giró en torno al concepto de Determinantes e inicia a mediados del siglo XVIII con las publicaciones de Gabriel Cramer sobre el tema y culmina a principios del siglo XX con el desplazamiento de los determinantes por la formulación axiomática de la teoría de espacios vectoriales. En este periodo surgen –estudiando sistema de ecuaciones– conceptos fundamentales como la dependencia lineal, rango, aplicados a espacios de dimensión finita. De hecho y para remarcar la importancia de los determinantes, éstos eran una herramienta imprescindible para abordar cualquier problema de naturaleza lineal. La geometría jugó aquí, un papel muy importante pues no solo aportó el marco intuitivo de los descubrimientos algebraicos que desembocaron en lo que hoy se conoce como análisis vectorial, sino que por otra parte, propicio la búsqueda de un cálculo geométrico intrínseco que condujo al estudio de los vectores, lo que sirvió como antecedentes a los primeros trabajos axiomáticos. Sin embargo, a inicios del siglo XX, conceptos tan importantes como el de rango de una matriz aún permanecían estrechamente vinculados al de determinantes. Prueba de esto es el breve artículo que publicó George A Miller² en el cual demuestra un teorema sobre sistemas compatibles de ecuaciones lineales utilizando la definición de rango de una matriz por medio de determinantes. El segundo periodo se extiende desde la publicación del primer conjunto de axiomas para n -tuplas dado por Darboux en 1875 y culmina con la publicación del texto de Birkhoff y MacLane en 1941. En este lapso, van perdiendo el papel preponderante que tenían los determinantes y se da un proceso de refinamiento y aceptación de la aproximación axiomática a la teoría de espacios vectoriales debido al impulso como

¹ Dorier, J.L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22(3), 227–261.

² G. A. Miller (1910) On the Solution of a System of Linear Equations, *The American Mathematical Monthly*, 17:6-7, 137-139.

consecuencia de la necesidad de unificar el gran número de nuevas teorías que se expandían rápidamente (Moore, 1995³).

Al final de este periodo se logró unificar bajo un conjunto de axiomas los espacios vectoriales de dimensión finita e infinita, estableciendo un precedente importante para la creación del Álgebra Lineal como campo de estudio independiente que agrupa muchos fenómenos lineales de distintas partes de la matemática. Es debido a estas características en su gestación y su evolución que Jean Luc Dorier ha incluido el concepto de espacios vectoriales junto al de Grupo en una categoría de conceptos que ha denominado unificador y generalizador puesto que realizaron estas dos acciones con diferentes métodos, herramientas y objetos matemáticos que se encontraban dispersos en contextos como la geometría, los sistemas de ecuaciones lineales, entre otros. En otras palabras, estos conceptos poseen tres características básicas: no fueron creados para resolver nuevos problemas –como la integral de Riemann–, unifican conceptos y métodos ya existentes y reorganizan en una nueva teoría resultados dispersos.

En este capítulo antes de definir espacios vectoriales, repasamos muy brevemente los axiomas de cuerpo de los números reales y generalizamos el concepto de las operaciones suma y producto por un escalar. A partir de esto, dedicamos un apartado para la definición de espacios vectoriales, diversos ejemplos y algunos postulados que se demuestran directamente de la definición precedente. El apartado tres está destinado a la definición de subespacio vectorial y la demostración de una condición necesaria y suficiente para determinar si un conjunto de vectores es o no subespacio vectorial.

En el apartado cuatro bajo la idea de que en cualquier espacio vectorial se puede combinar sus elementos mediante la suma y el producto por un escalar, se define –de dos maneras distintas– combinación lineal de vectores y a partir de esto el concepto de subespacio generado. El concepto de combinación lineal nos permite analizar la dependencia lineal de un conjunto de vectores, para lo cual estudiamos –en el apartado siguiente– vectores linealmente independientes y dependientes con su respectiva interpretación geométrica y propiedades.

Una de las ideas más importantes en espacios vectoriales –Sistema de Generadores– se estudia en el apartado seis, mientras que el siguiente, está dedicado a la idea que reúne los conceptos de independencia lineal y sistema de generadores, base de un espacio vectorial, que está directamente relacionado con coordenadas de un vector y dimensión de un espacio vectorial.

³ Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22(3), 262-303.

1.2.- Conceptos básicos

El primer paso para iniciar el estudio de espacios vectoriales es comprender la estructura y las principales propiedades del conjunto de números reales. Presentaremos este conjunto sin dar una definición concreta de número real ya que lo importante –en esta asignatura– no es saber qué es un número real, sino qué propiedades tiene el conjunto de ellos.

Enunciaremos estas propiedades como postulados básicos elementales: axiomas⁴, y solamente aquellos que están asociados a la igualdad de números reales que son conocidos como axiomas de cuerpo.

En el conjunto de números reales (\mathbb{R}) se dispone de dos operaciones; una llamada suma, simbolizada por $+$ y que hace corresponder a cada par (x,y) de números reales un único número real, la suma de x con y , denotada por $x + y$. La otra operación llamada producto, simbolizada por \cdot y que hace corresponder a cada par (x,y) de números reales un único número real, el producto de x con y , denotado por $x \cdot y$ o simplemente xy .

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Los axiomas de \mathbb{R} sobre la igualdad son, en muchos casos, llamados axiomas de cuerpo de los reales pueden agruparse de la siguiente manera:

A₁) Conmutatividad

- i) La suma de cualquier par de reales, x e y es un real independiente del orden de los sumandos. $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$.
- ii) El producto de cualquier par de reales, x e y es un real independiente del orden de los factores. $\forall x, y \in \mathbb{R}: xy = yx$.

A₂) Asociatividad

- i) La suma de cualquier terna de reales, x, y, z es independiente de la forma en la que se pueden asociar los sumandos. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$.
- ii) El producto de cualquier terna de reales, x, y, z es independiente de la forma en la que se pueden asociar los factores. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x (y z) = (x y) z$.

A₃) Distributividad del producto respecto a la suma

El producto de un real x por la suma de otros dos, y, z , es equivalente a la suma de los productos del factor por cada sumando. i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x (y + z) = xy + xz$.

Muchas veces suele admitirse como una segunda parte de este axioma el siguiente enunciado ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x + y)z = xz + yz$. Si bien no hay problemas en aceptar esto y utilizar libremente ambas expresiones en cualquier demostración, es necesario

⁴ Un axioma es un enunciado que sirve como punto de inicio y del cual se derivan, lógicamente, otros enunciados. Se consideran una verdad evidente que no necesitan demostración alguna.

destacar que ii) es una consecuencia de i) y el axioma de la conmutatividad del producto. Es decir que se puede demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x + y) z = x z + y z$.

$(x + y) z = z (x + y)$ por conmutatividad del producto.

$(x + y) z = z x + z y$ por distributividad.

$(x + y) z = x z + y z$ por conmutatividad del producto. Con lo que queda demostrada la propiedad.

Este ejemplo permite establecer que existen afirmaciones, expresiones y/o propiedades que pueden demostrarse utilizando axiomas y/u otras propiedades ya estudiadas. A estas afirmaciones más la correspondiente demostración suelen conocerse como teoremas.

Los siguientes axiomas permiten afirmar la existencia de ciertos elementos especiales en \mathbb{R} y tienen como consecuencia directa la confirmación de que el conjunto \mathbb{R} es no vacío.

A₄) Existencia de elementos neutros

i) Para la suma.

En \mathbb{R} existe cierto número denotado por la letra e que no afecta el resultado de la operación suma. $\forall x \in \mathbb{R}: \exists e \in \mathbb{R} / x + e = x$.

Todo elemento e que cumpla con esta propiedad se dirá neutro para la suma.

Destaquemos que este axioma solo garantiza la existencia del elemento neutro, pero no nos indica nada respecto de cuantos hay. Sabemos que hay un único elemento neutro para la suma en \mathbb{R} , esa afirmación se puede demostrar usando los axiomas y/o propiedades ya estudiadas. Se deja para el estudiante la demostración del siguiente

Teorema: El elemento neutro para la suma en \mathbb{R} es único⁵.

Una vez demostrado el teorema, se suele denominar al único neutro aditivo “cero” y denotarlo por “0”.

ii) Para el producto.

En \mathbb{R} existe cierto número denotado por la letra e que no afecta el resultado de la operación producto. $\forall x \in \mathbb{R}: \exists e \in \mathbb{R} / x e = x$.

Todo elemento e que cumpla con esta propiedad se dirá neutro para el producto.

De manera similar al caso de la suma este axioma solo garantiza la existencia del elemento neutro, pero sabemos que hay un único elemento neutro para esta operación en \mathbb{R} . Nuevamente esta afirmación se puede demostrar –de manera análoga a la suma– usando los axiomas y/o propiedades ya estudiadas. Se deja para el estudiante la demostración del siguiente

Teorema: El elemento neutro para el producto en \mathbb{R} es único.

⁵ Se recomienda repasar los procedimientos utilizados en la propiedad P₄) de la suma en \mathbb{R}^n y en $\mathbb{K}^{m \times n}$.

Una vez demostrado el teorema, se suele denominar al único neutro multiplicativo “uno” y denotarlo por “1”.

A₅) Existencia de elementos inversos

i) Para la suma.

Para cada número real x existe otro real asociado a él, llamado opuesto o inverso aditivo tal que al sumarlos se obtiene el elemento neutro de esta operación. Es decir $\forall x \in \mathbb{R}: \exists o \in \mathbb{R} / x + o = 0$.

Sea el siguiente

Teorema: El inverso aditivo para cualquier número real x , es único.

Si bien este teorema se puede demostrar con un procedimiento análogo al utilizado en las propiedades P₅) de la suma en \mathbb{R}^n y de la suma en $\mathbb{K}^{m \times n}$, se brindará a continuación una demostración alternativa que sigue la misma idea (proponer dos inversos aditivos distintos para un mismo real y demostrar que son iguales) pero utiliza los axiomas que estamos estudiando.

D) Sean los inversos aditivos o_1 y o_2 del mismo real arbitrario x , estos satisfacen las ecuaciones:

$$x + o_1 = 0 \quad (1) \text{ y}$$

$$x + o_2 = 0 \quad (2)$$

Debemos probar que $o_1 = o_2$. En efecto haciendo uso de los axiomas estudiados –en este caso particular de la suma– y las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$o_1 = o_1 + 0 \text{ por el elemento neutro}$$

$$o_1 = o_1 + (x + o_2) \text{ por la ecuación (2)}$$

$$o_1 = (o_1 + x) + o_2 \text{ por asociatividad}$$

$$o_1 = (x + o_1) + o_2 \text{ por conmutatividad}$$

$$o_1 = 0 + o_2 \text{ por la ecuación (1)}$$

$$o_1 = o_2 + 0 \text{ por la conmutatividad}$$

$o_1 = o_2$ por el elemento neutro. Con lo que queda demostrado que $o_1 = o_2$ y la unicidad del inverso aditivo de la suma en \mathbb{R} . El inverso aditivo del real x suele simbolizarse como $-x$.

ii) Para el producto

Para cada número real x no nulo existe otro real asociado a él, llamado inverso multiplicativo o recíproco tal que al multiplicarlos se obtiene el elemento neutro de esta operación. Es decir $\forall x \in \mathbb{R}: \exists o \in \mathbb{R} / x o = 1$.

Se deja para el estudiante la demostración del siguiente teorema, haciendo uso de los axiomas estudiados.

Teorema: El inverso multiplicativo para cualquier número real x , es único.

El inverso multiplicativo de un real x , suele simbolizarse como x^{-1} .

Por las operaciones de suma, producto en \mathbb{R} y los axiomas enunciados anteriormente se dice que este conjunto forma un Cuerpo.

De manera similar se puede demostrar que el conjunto de números complejos con las operaciones suma y producto forman un Cuerpo que por lo general se denota como \mathbb{C} . Como existen definiciones, teoremas y propiedades en las cuales es indistinto trabajar con el cuerpo de los reales o de los complejos, se suele denotar en estos casos, ambos cuerpos como \mathbb{K} .

La segunda cuestión que se debe tener presente para comprender mejor este capítulo referido a espacios vectoriales, es recordar que al estudiar vectores se definieron dos operaciones: suma de vectores en \mathbb{R}^n y producto de un vector por un escalar, luego se enunciaron y demostraron diez propiedades que poseen estas dos operaciones. Situación similar ocurrió al estudiar matrices en $\mathbb{K}^{m \times n}$, se definieron dos operaciones: suma de matrices y producto de una matriz por un escalar e inmediatamente se enunciaron y demostraron las diez propiedades que cumplen estas dos operaciones.

Existen –como se estudiará en capítulos posteriores– otros conjuntos a los que se les puede observar una estructura similar (definir en ellos dos operaciones y establecer las diez propiedades de las mismas) a la de los vectores en \mathbb{R}^n y las matrices en $\mathbb{K}^{m \times n}$: los números complejos y los polinomios.

Cuando en varios conjuntos distintos aparecen estructuras similares, lo más conveniente es axiomatizar⁶ estas, generalizar y dar un nombre al objeto que se define a través del conjunto de propiedades. La principal ventaja que se obtiene es que estudiando esta estructura quedan estudiadas todas las estructuras particulares que ella encierra. Específicamente, cuando en un conjunto (vectores en \mathbb{R}^n , matrices en $\mathbb{K}^{m \times n}$, números complejos, polinomios, funciones, entre otros tantos) se da una estructura similar se dice que este conjunto tiene estructura de espacio vectorial.

Generalizar significa en nuestro caso, construir una estructura o teoría que englobe hechos que ya conocemos, tiene que ver con economía de trabajo y con determinar cuáles son los elementos mínimos responsables de que ciertos resultados ocurran.

Por lo tanto, el objetivo que perseguimos en este capítulo es la de introducir aquella estructura abstracta (espacios vectoriales) que englobe las anteriores construcciones (vectores en \mathbb{R}^n , matrices en $\mathbb{K}^{m \times n}$) y qué resultados se pueden obtener en lo general sin importar a cuál de estas estructuras específicas se haga referencia.

Previo a definir espacios vectoriales, veamos –por medio de ejemplos– que el concepto de las operaciones suma y producto por un escalar podrían ser definidos de manera distinta a la que generalmente conocemos.

⁶ Determinar los axiomas sobre los cuales se asienta una teoría.

Ejemplo 1: Supongamos que tenemos el conjunto $V = R^2$ y se define la operación:

$$(x, y) \oplus (z, w) = (2x + z, 3w + y)$$

Si $u = (1, -1)$, $v = (-2, 2)$ y $w = (0, 2)$, podría calcularse

$$a) u \oplus v = (1, -1) \oplus (-2, 2) = (2 \cdot 1 + (-2); 3 \cdot 2 + (-1)) = (0, -5)$$

$$b) v \oplus u = (-2, 2) \oplus (1, -1) = (2(-2) + 1; 3(-1) + 2) = (-3, -1)$$

$$c) (u \oplus v) \oplus w = (0, -5) \oplus (0, 2) = (2 \cdot 0 + 0; 3 \cdot 2 + (-5)) = (0, 1)$$

Ejemplo 2: Supongamos que tenemos el conjunto $V = R^2$ y se definen las operaciones:

$$(x, y) \oplus (z, w) = (-x + 2w; z + y) \text{ y } \lambda \odot (x, y) = (2\lambda x, -\lambda y)$$

Si $u = (0, 1)$, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$, podría calcularse

$$a) (\lambda_1 + \lambda_2) \odot u = -1 \odot u = -1 \odot (0, 1) = (2(-1)0; -(-1)1) = (0, 1)$$

$$b) (\lambda_1 \odot u) \oplus (\lambda_2 \odot u) = (2 \odot (0, 1)) \oplus (-3 \odot (0, 1)) = (2 \cdot 2 \cdot 0; -2 \cdot 1) \oplus (2(-3)0; -(-3)1) \\ = (0, -2) \oplus (0, 3) = (-0 + 2 \cdot 3; 0 + (-2)) = (6, -2)$$

$$c) (\lambda_1 \lambda_2) \odot u = -6 \odot (0, 1) = (2(-6)0; -(-6)1) = (0, 6)$$

Teniendo presente el concepto de cuerpo de números reales y complejos y la generalización de las operaciones, estamos en condición de estudiar lo que es un espacio vectorial, conjuntamente con otros conceptos estrechamente ligados a él como los son subespacio vectorial, dependencia lineal, base, dimensión, etc.

2.- Espacio Vectorial

Es momento de definir esa estructura abstracta que englobe lo ya conocido y estudiado por nosotros y que sus resultados sean generales, de tal forma que al estudiar otros conjuntos que también tengan la misma estructura sean igualmente válidos.

Definición: Sean V un conjunto no vacío y K un cuerpo de escalares, $+$ y \cdot dos funciones (operaciones) que llamaremos suma y producto respectivamente; el objeto $(V, +, K, \cdot)$ es un espacio vectorial si y solo si se verifican los siguientes axiomas:

A₁) La suma es Ley de Composición interna en V

$$\forall x, y \in V \Rightarrow (x + y) \in V$$

A₂) La suma es asociativa en V

$$\forall x, y, z \in V \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$$

A₃) La suma es conmutativa en V

$$\forall x, y \in V \Rightarrow x + y = y + x$$

A₄) Existe un neutro para la suma en V .

El elemento neutro se denota con 0

$$\exists 0 \in V / \forall x \in V: x + 0 = x$$

A₅) Todo elemento en V admite inverso aditivo u opuesto en V

El elemento opuesto a uno cualquiera x , se nota por $-x$.

$$\forall x \in V, \exists (-x) \in V / x + (-x) = \mathbf{0}$$

A₆) El producto es Ley de Composición Externa en V con escalares en K

$$\forall \alpha \in K, \forall x \in V \Rightarrow \alpha x \in V$$

A₇) El producto satisface la asociatividad mixta

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V: \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

A₈) El producto es distributivo respecto a la suma en K

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V: (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

A₉) El producto es distributivo respecto a la suma en V

$$\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V: \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

A₁₀) La unidad para el cuerpo de escalares es el neutro para el producto

La unidad del cuerpo se denota como 1.

$$\forall x \in V: 1x = x$$

Se conviene en llamar genéricamente “vectores” a los elementos de los espacios vectoriales, por lo tanto, a dichos elementos se los representa con una supraflecha.

Si $K = \mathbb{R}$ el espacio vectorial se dice espacio vectorial real, mientras que si $K = \mathbb{C}$ el espacio vectorial se dice complejo.

De los axiomas A₄), A₅) y de la conmutatividad de la suma se deduce que $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ y $-\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}$.

Ejemplos

a) La cuaterna $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con la suma y el producto por un escalar tal como se definió en el correspondiente capítulo (vectores), es un espacio vectorial real. En general $(\mathbb{K}^n, +, \mathbb{K}, \cdot)$ con la suma y el producto por un escalar usual, es un espacio vectorial.

b) La cuaterna $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con la suma y el producto por un escalar tal como se definió en el correspondiente capítulo (matrices), es un espacio vectorial real.

c) Particularmente $(\mathbb{K}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con la suma y el producto por un escalar usual es espacio vectorial.

d) $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ donde $\mathbb{C} = \{(a, b) / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$ con la suma usual de números complejos y el producto usual de números complejos por un escalar, es un espacio vectorial complejo.

e) $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con la suma usual de ternas ordenadas de número reales y el producto usual de una terna por un número real, es un espacio vectorial real.

f) $(P(x), +, \mathbb{K}, \cdot)$ donde $P(x)$ es el conjunto de polinomios de coeficientes reales, variable x y de grado menor o igual a n , con la suma usual de polinomios y el producto usual de un polinomio por un número real, es un espacio vectorial.

g) $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ donde $\mathbb{R}^{m \times n}$ es el conjunto de matrices, de orden $m \times n$, de números reales con la suma usual de matrices y el producto usual de una matriz por un número real, es un espacio vectorial.

h) $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{C}, \cdot)$ no es espacio vectorial. Si $\vec{x} = (2, 3)$ y $\alpha = 2 + i \Rightarrow \alpha\vec{x} = (4 + 2i, 6 + 3i) \notin \mathbb{R}^2$

i) $(\mathbb{Z}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ no es espacio vectorial porque si $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ y $\alpha = 1,2 \Rightarrow \alpha\vec{x} \notin \mathbb{Z}^{2 \times 2}$

j) $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ donde $\mathbb{R}^{n \times n}$ tiene determinante nulo, con las operaciones suma de matrices y producto de una matriz por un escalar usuales, no es un espacio vectorial.

Basta con proponer

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrices cuadradas tales que $\det(A) = \det(B) = 0$. Pero se puede comprobar fácilmente que $\det(A + B) \neq 0$.

A continuación, se demostrarán algunos postulados que se deducen directamente de los axiomas que definen un espacio vectorial.

Sea $(V, +, K, \cdot)$ un espacio vectorial, se cumple:

P₁) El producto del escalar 0 por cualquier vector, es el vector nulo.

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in V \wedge 0 \in K$$

$$D) \alpha\vec{x} = (\alpha + 0)\vec{x} = \alpha\vec{x} + 0\vec{x} \quad (1)$$

$$\alpha\vec{x} = \alpha\vec{x} + \vec{0} \quad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2)

$$\alpha\vec{x} + 0\vec{x} = \alpha\vec{x} + \vec{0}$$

$$-\alpha\vec{x} + \alpha\vec{x} + 0\vec{x} = -\alpha\vec{x} + \alpha\vec{x} + \vec{0}$$

$$0\vec{x} = \vec{0}$$

P₂) El producto de cualquier escalar por el vector nulo, es el vector nulo

$$\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \alpha \in K$$

$$D) \alpha\vec{x} = \alpha(\vec{x} + \vec{0})$$

$$\alpha\vec{x} = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{0}$$

$$\alpha\vec{x} + \vec{0} = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{0}$$

$$\alpha\vec{0} = \vec{0}$$

P₃) Si el producto de un escalar por un vector es el vector nulo, entonces el escalar es 0 o el vector es nulo.

$$\alpha\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$$

Se presentan dos posibilidades: i) $\alpha = 0$ o bien ii) $\alpha \neq 0$.

En el primer caso, $\alpha = 0$, es verdadera la primera proposición de la disyunción que figura en la tesis y por consiguiente ésta es verdadera.

En el segundo caso, $\alpha \neq 0$, es necesario probar que $\vec{x} = \vec{0}$.

Primeramente, dejemos establecido que como $\alpha \neq 0$ entonces existe $\alpha^{-1} \in K$.

$$\alpha\vec{x} = \vec{0}$$

$$\alpha^{-1} \alpha\vec{x} = \alpha^{-1} \vec{0}$$

$$(\alpha^{-1} \alpha) \vec{x} = \alpha^{-1} \vec{0}$$

$$1 \vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{x} = \vec{0}$$

P₄) El opuesto de cualquier escalar por un vector es igual al opuesto de su producto

$$(-\alpha) \vec{x} = -(\alpha \vec{x})$$

$$D) -(\alpha \vec{x}) + \alpha \vec{x} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} = (-\alpha + \alpha) \vec{x} = (-\alpha) \vec{x} + \alpha \vec{x}$$

$$\vec{0} = (-\alpha) \vec{x} + \alpha \vec{x} \quad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2)

$$-(\alpha \vec{x}) + \alpha \vec{x} = (-\alpha) \vec{x} + \alpha \vec{x}$$

$$(-\alpha) \vec{x} = -(\alpha \vec{x})$$

Particularmente tenemos

$$(-1) \vec{x} = -(1 \vec{x}) = -\vec{x}$$

P₅) Ley cancelativa para la suma en V

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V: \vec{x} + \vec{y} = \vec{z} + \vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{z}$$

$$D) \vec{x} + \vec{y} = \vec{z} + \vec{y}$$

$$\vec{x} + \vec{y} + (-\vec{y}) = \vec{z} + \vec{y} + (-\vec{y})$$

$$\vec{x} + (\vec{y} + (-\vec{y})) = \vec{z} + (\vec{y} + (-\vec{y}))$$

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{z} + \vec{0}$$

$$\vec{x} = \vec{z}$$

P₆) El elemento neutro de la suma en V, es único

D) Suponemos que existen dos neutros en V, $\vec{0}_1$ y $\vec{0}_2$ entonces

$$\text{Si } \vec{0}_1 \text{ es neutro, se cumple que } \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$$

$$\text{Si } \vec{0}_2 \text{ es neutro se cumple que } \vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_1$$

De estas dos expresiones se deduce que $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$ y en consecuencia el neutro para la suma en V es único.

P₇) El inverso aditivo de un elemento, es único

D) Suponemos que existen dos opuestos para \vec{v} : \vec{v}_1 y \vec{v}_2 entonces

$$\text{Si } \vec{v}_1 \text{ es opuesto se cumple que } \vec{v} + \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\text{Si } \vec{v}_2 \text{ es opuesto se cumple que } \vec{v} + \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\text{De estas dos expresiones } \vec{v} + \vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

En consecuencia, el inverso aditivo de un elemento es único

3.- Subespacio Vectorial

Algunos subconjuntos de un espacio vectorial V , son por si mismos espacios vectoriales con las mismas operaciones definidas en V , en estos casos estos subconjuntos reciben el nombre de subespacios vectoriales.

Definición: sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ y S un subconjunto no vacío de V ($S \subset V$ y $S \neq \emptyset$), S es subespacio de $(V, +, K, \cdot)$ si y solo si $(S, +, K, \cdot)$ es espacio vectorial en si mismo, respecto de las mismas operaciones definidas en V .

Cualquiera que sea $(V, +, K, \cdot)$, tanto V como $\{\vec{0}\}$ son subespacios de V , llamados triviales.

Ejemplos. Consideremos el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con la suma y el producto usual y los subconjuntos:

$$a) T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1\}$$

T no es un subespacio vectorial ya que el vector nulo $(0, 0) \notin T$, puesto que si $x = y = 0$ entonces $0 = 1$, lo que no es posible. Por lo tanto, la recta $y = x + 1$ de \mathbb{R}^2 , no es subespacio vectorial.

$$b) S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$$

S si es subespacio vectorial, debiendo demostrar –solamente a modo de ejemplo y para completar el apartado 2– que se cumplen los diez axiomas de la definición de espacios vectoriales.

Sean $x = (x_1, x_2) \in S \Rightarrow x_1 = x_2$, $y = (y_1, y_2) \in S \Rightarrow y_1 = y_2$ y $z = (z_1, z_2) \in S \Rightarrow z_1 = z_2$ vectores de S y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares.

A₁) La suma es Ley de Composición interna en S

$$x + y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2) \Rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \text{ Por lo tanto } (x + y) \in S.$$

A₂) La suma es asociativa en S

$$(x + y) + z = (x_1 + y_1; x_2 + y_2) + (z_1, z_2)$$

$$(x + y) + z = (x_1 + y_1 + z_1; x_2 + y_2 + z_2)$$

$$(x + y) + z = (x_1 + (y_1 + z_1); x_2 + (y_2 + z_2))$$

$$(x + y) + z = (x_1, x_2) + (y_1 + z_1; y_2 + z_2)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A₃) La suma es conmutativa en S

$$x + y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$$

$$x + y = (y_1 + x_1; y_2 + x_2)$$

$$x + y = y + x$$

A₄) Existe un neutro para la suma en S .

El neutro para la suma en S es $(0, 0)$ puesto que

i) $(0, 0) \in S$ ya que $0 = 0$ y

ii) si $x = (x_1, x_2) \in S$, entonces

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2)$$

A₅) Todo elemento en S admite inverso aditivo u opuesto en S

El inverso aditivo para $x = (x_1, x_2) \in S$ es $-x = (-x_1, -x_2)$ puesto que

i) $(-x_1, -x_2) \in S$ debido a que $x_1 = x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2$, además

ii) $(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0)$.

A₆) El producto es Ley de Composición Externa en S con escalares en \mathbb{R}

Como $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2) \text{ con } \alpha x_1 = \alpha x_2 \text{ por que } x_1 = x_2$$

A₇) El producto satisface la asociatividad mixta

$$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2)$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha \beta x_1, \alpha \beta x_2)$$

$$\alpha(\beta x) = ((\alpha \beta) x_1, (\alpha \beta) x_2)$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha \beta)(x_1, x_2)$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x$$

A₈) El producto es distributivo respecto a la suma en \mathbb{R}

$$(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta)(x_1, x_2)$$

$$(\alpha + \beta)x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2)$$

$$(\alpha + \beta)x = (\alpha x_1 + \beta x_1; \alpha x_2 + \beta x_2)$$

$$(\alpha + \beta)x = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1; \beta x_2)$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1; x_2)$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

A₉) El producto es distributivo respecto a la suma en S

$$\alpha(x + y) = \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$$

$$\alpha(x + y) = (\alpha(x_1 + y_1); \alpha(x_2 + y_2))$$

$$\alpha(x + y) = (\alpha x_1 + \alpha y_1; \alpha x_2 + \alpha y_2)$$

$$\alpha(x + y) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2)$$

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2)$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

A₁₀) La unidad para el cuerpo de escalares es el neutro para el producto

La unidad en \mathbb{R} es 1.

$$1x = 1(x_1, x_2)$$

$$1x = (1 x_1, 1 x_2)$$

$$1x = (x_1, x_2)$$

$$1x = x$$

Por lo tanto, $(S, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Es decir que la recta de $\mathbb{R}^2, y = x$ es subespacio vectorial.

A partir de estos ejemplos podemos establecer lo siguiente:

- i) una forma sencilla y rápida para descartar que un conjunto es un (sub)espacio vectorial es observar, si se da el caso, que el vector nulo no pertenece al conjunto. Obviamente hay conjuntos que contienen a este vector y que no son (sub)espacios vectoriales y
- ii) para demostrar que un subconjunto S es subespacio vectorial no es necesario comprobar de nuevo que cumple con todos los axiomas de espacio vectorial, en realidad es suficiente que S sea cerrado para la suma y para el producto por escalares. Debido a esto, demostraremos una condición necesaria y suficiente que nos permitirá decidir si un subconjunto no vacío de un espacio vectorial es subespacio, esta condición es conocida como criterio de subespacio.

3.1.- Criterio de subespacio

Sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ y S un subconjunto no vacío de V , $(S, +, K, \cdot)$ es subespacio vectorial de V si y solo si S es cerrado para la suma y producto por escalares.

Sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ y $S \subset V, S \neq \emptyset$ se dice que S es subespacio vectorial de

$$V \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in S: (\vec{x} + \vec{y}) \in S \\ \forall \vec{x} \in S \forall \alpha \in K: \alpha \vec{x} \in S \end{cases}$$

Observemos que la segunda condición implica que el vector nulo de V está también en S , porque si $\vec{x} \in S$ entonces $0 \vec{x} = \vec{0} \in S$.

Demostración

$$\Rightarrow) S \text{ es subespacio vectorial de } V \Rightarrow \begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in S: (\vec{x} + \vec{y}) \in S \\ \forall \vec{x} \in S \forall \alpha \in K: \alpha \vec{x} \in S \end{cases}$$

Si S es subespacio vectorial de V cumple, de acuerdo a la definición, con todas las propiedades de un espacio vectorial. Por lo tanto, la suma y el producto por escalares son operaciones cerradas en S , es decir $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S: (\vec{x} + \vec{y}) \in S \wedge \forall \vec{x} \in S \forall \alpha \in K: \alpha \vec{x} \in S$.

$$\Leftrightarrow) \begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in S: (\vec{x} + \vec{y}) \in S \\ \forall \vec{x} \in S \forall \alpha \in K: \alpha \vec{x} \in S \end{cases} \Rightarrow S \text{ es subespacio vectorial de } V$$

Como S es subconjunto de V , sus elementos verifican los axiomas $A_1, A_2, A_3, A_6, A_7, A_8, A_9$ y A_{10} solo restaría ver que se cumplan los axiomas A_4 que el elemento neutro para la suma también pertenezca a S y A_5 todo elemento de S tiene su opuesto en S

$$A_4) \text{ Sea } \vec{x} \in S \text{ ya que } S \neq \emptyset \wedge 0 \in K \Rightarrow 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Como el producto de un escalar por un elemento de S , da como resultado otro elemento de S podemos asegurar que $\vec{0} \in S$

$$A_5) \text{ Sea } \vec{x} \in S \text{ ya que } S \neq \emptyset \wedge -1 \in K \Rightarrow (-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$$

Como el producto de un escalar por un elemento de S , da como resultado otro elemento de S podemos asegurar que $-\vec{x} \in S$

Por lo tanto, S es subespacio vectorial de V , quedando demostrado así, el criterio de subespacio.

Demostrar si los siguientes subconjuntos, son o no subespacios vectoriales de los espacios vectoriales indicados.

Ejemplo 1. Sea el conjunto $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A = A^T\} \subset (\mathbb{R}^{n \times n}, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$i) A \in W \Rightarrow A = A^T$$

$$B \in W \Rightarrow B = B^T$$

$$A + B = A^T + B^T = (A + B)^T \text{ por lo tanto, } (A + B) \in W.$$

$$ii) A \in W \Rightarrow A = A^T \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha A = \alpha A^T = (\alpha A)^T \text{ por lo tanto } \alpha A \in W$$

Por i) y ii) W es subespacio vectorial. Es decir, todas las matrices reales de orden 2 simétricas conforman un subespacio vectorial.

Ejemplo 2. Sea el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\} \subset (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$i) x = (x_1, y_1) \in W \Rightarrow x_1^2 - y_1^2 = 0$$

$$y = (x_2, y_2) \in W \Rightarrow x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$x + y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \nRightarrow (x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2 = 0$. Esto se puede demostrar con un contraejemplo (ejemplo en contra).

$(1, 1) \in W$ y $(1, -1) \in W$ pero claramente la suma de estos dos vectores $(2, 0) \notin W$.

Por lo tanto, no es necesario comprobar la condición ii), ya podemos afirmar que W no es subespacio vectorial.

Observemos que en este ejemplo, el vector nulo, $(0, 0) \in W$ y sin embargo W no es subespacio vectorial.

4.- Combinación lineal de vectores

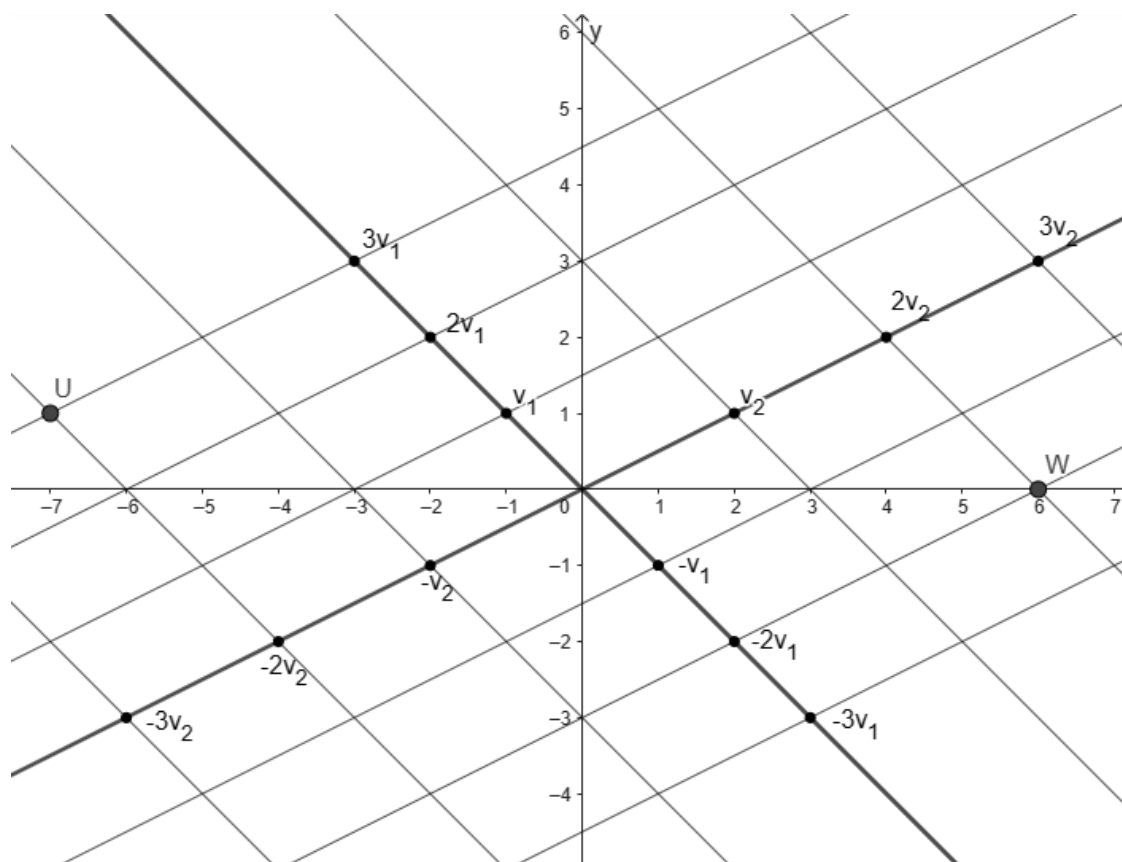
En esta sección formalizaremos el concepto de combinación lineal de vectores; para esto recordemos que en cualquier espacio vectorial existe la posibilidad de combinar sus elementos con multiplicación por escalares y sumándolos.

Sea el espacio vectorial V y $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ tres elementos de él. Por ejemplo $3\vec{x}$ es una combinación lineal de \vec{x} , mientras que $2\vec{x} + 3\vec{y}$ es una combinación lineal de \vec{x} e \vec{y} y si hacemos $\frac{1}{2}\vec{x} - 5\vec{y} + \frac{3}{4}\vec{z}$ estamos haciendo una combinación lineal de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Esto significa que si tenemos un conjunto, A , de vectores de un espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ entenderemos por combinación lineal de los vectores de A a toda suma de productos de escalares arbitrarios de K por los vectores de A . Con esto en mente podemos dar la siguiente

Definición: dado un conjunto de n vectores $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ combinación lineal de los vectores de A es todo vector del tipo:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \text{ tq } \alpha_i \in K \wedge \vec{v}_i \in A$$

Ejemplo 1. La siguiente figura identifica combinaciones lineales seleccionadas de los vectores $\vec{v}_1 = (-1, 1)$ y $\vec{v}_2 = (2, 1)$. Observemos las líneas paralelas de la rejilla están trazadas mediante múltiplos de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Estimar las combinaciones lineales de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 que generan los vectores \vec{u} y \vec{w} .



Para encontrar la solución recurramos a la regla del paralelogramo para la suma de vectores. Esta regla nos indica que $\vec{u} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$. Esta expresión para \vec{u} puede interpretarse como dos instrucciones para desplazarse desde el origen hacia dicho vector.

- i) desplácese 3 unidades en la dirección de \vec{v}_1 , hasta $3\vec{v}_1$ y luego
- ii) avance -2 unidades en la dirección de \vec{v}_2 .

Con la misma idea se puede establecer que se obtiene el vector \vec{w} como combinación lineal de los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 mediante la expresión $\vec{w} = -2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.

Ejemplo 2. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ consideremos los siguientes vectores (matrices).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se podrá expresar la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de A, B y C ?

Esto significa que se debe poder expresar D como la suma de A, B y C multiplicadas por escalares, es decir: $D = \alpha A + \beta B + \delta C$ con α, β y $\delta \in \mathbb{R}$. O sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & \delta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ \beta + \delta & \alpha + \delta \end{pmatrix}$ Esto nos permite establecer, por igualdad de matrices, el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta + \delta = 2 \\ \alpha + \delta = 5 \end{cases}$$

Si bien este sistema se puede resolver con algunas manipulaciones algebraicas, vamos a hacerlo por el método de Gauss-Jordan estudiado en el capítulo de Sistema de Ecuaciones Lineales pues esto nos ayudará en un próximo análisis en esta misma sección y en el tema independencia lineal.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) &\sim \begin{array}{l} -F_1 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} F_2 + F_1 \\ F_2 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim \frac{1}{2}F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 \end{array} \right) &\sim \begin{array}{l} F_3 + F_1 \\ -F_3 + F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Como el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y por lo tanto la solución del mismo es $S = \{\alpha = 2, \beta = -1, \delta = 3\}$. La respuesta a la pregunta que generó este desarrollo es afirmativa, es decir si se puede expresar D como combinación lineal de A, B y C pues si hacemos en $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha = 2, \beta = -1, \delta = 3$ obtendremos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Se sugiere que el estudiante realice esta verificación.

Ejemplo 3. Determinar si el vector $\vec{v} = (-1, 1, 3)$ de \mathbb{R}^3 se puede generar (o escribir) como combinación lineal de $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2)$ y $\vec{v}_2 = (-1, 2, 4)$.

Lo que nos solicitan aquí es que determinemos los coeficientes α y β de la ecuación vectorial

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{v} \quad (1) \text{ o lo que es lo mismo}$$

$$\alpha (-1, 0, 2) + \beta (-1, 2, 4) = (-1, 1, 3)$$

Aplicando las definiciones de producto por un escalar y suma de vectores podemos escribir directamente el sistema de ecuaciones lineales que deben satisfacer α y β .

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = -1 \\ 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 4\beta = 3 \end{cases} \text{ Resolvemos este sistema por algún método conocido, escribiendo su}$$

matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{array} \right) (2) \text{ y a partir de allí analizamos el sistema.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim^{-F_1} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim^{-2F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim^{-F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim^{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sim^{-F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como es un sistema compatible determinado, la solución es $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Esto quiere decir que \vec{v} es combinación lineal de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Verificación

$$(-1, 1, 3) = \frac{1}{2}(-1, 0, 2) + \frac{1}{2}(-1, 2, 4)$$

$$(-1, 1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1, 2\right)$$

$$(-1, 1, 3) = (-1, 1, 3)$$

Ejemplo 4 Determinar si el vector $\vec{u} = (1, 2, 2)$ de \mathbb{R}^3 se puede generar (o escribir) como combinación lineal de $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2)$ y $\vec{v}_2 = (-1, 2, 4)$.

Debemos determinar los coeficientes α y β de la ecuación vectorial:

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{u} \quad (1) \text{ o lo que es lo mismo}$$

$\alpha(-1, 0, 2) + \beta(-1, 2, 4) = (1, 2, 2)$ de donde escribimos directamente el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = 1 \\ 2\beta = 2 \\ 2\alpha + 4\beta = 2 \end{cases} \text{ Resolvemos este sistema por algún método conocido, escribiendo su}$$

matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \text{ y a partir de allí analizamos el sistema.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim^{-F_1} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim^{-2F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim^{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim^{\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{-F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim^{-F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este punto del análisis ya podemos afirmar que es un sistema incompatible, por lo tanto no tiene solución. Esto significa que no se puede escribir el vector \vec{u} como combinación lineal de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Podemos generalizar los resultados obtenidos en los ejemplos 2, 3 y 4 mediante la siguiente

Definición: dado un conjunto de n vectores $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ el vector $\vec{v} \in V$ es combinación lineal de los vectores de A si y sólo si existen escalares tales que: $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$ con $\alpha_i \in K \wedge \vec{v}_i \in A$

Otra cuestión que nos permiten analizar más fácilmente los ejemplos 3 y 4 es la siguiente.

Observemos que en estos ejemplos los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$ y \vec{u} son las columnas de las correspondientes matrices ampliadas.

$$\text{Ejemplo 3: } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \underbrace{2}_{\vec{v}_1} & \underbrace{4}_{\vec{v}_2} & \underbrace{3}_{\vec{v}} \end{pmatrix} \text{ y ejemplo 4: } \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ \underbrace{2}_{\vec{v}_1} & \underbrace{4}_{\vec{v}_2} & \underbrace{2}_{\vec{u}} \end{pmatrix}$$

Por brevedad se puede escribir estas matrices en una forma que identifique sus columnas, $(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v})$.

En estos ejemplos, de la ecuación vectorial (1) es claro cómo pasar a la matriz ampliada (2) sin realizar los pasos intermedios. Tomamos los vectores en el orden en que aparecen en (1) y los colocamos como columnas de una matriz como la (2).

Es decir, para el ejemplo 3

$$\text{De } \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{v} \text{ (1) escribir directamente } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ (2). Idem para el ejemplo 4.}$$

Esta observación puede generalizarse estableciendo la siguiente:

Observación: una ecuación vectorial $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{v}$ tiene el mismo conjunto solución que el sistema lineal con matriz ampliada $(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n \ \vec{v})$ (3).

Particularmente, \vec{v} se puede generar por una combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ si y sólo si existe una solución al sistema lineal correspondiente a la matriz (3).

La última cuestión que podemos observar con los ejemplos 2, 3 y 4 es que al tener un conjunto de n vectores de un espacio vectorial V , entonces en general algunos vectores de V pueden ser combinaciones lineales de los n vectores dados –ejemplo 2 y 3– mientras que otros no –ejemplo 4–, esta idea se profundizará en el siguiente apartado.

4.1.- Subespacio generado

Una de las ideas muy importantes en álgebra lineal es el estudio del conjunto de todos los vectores que se pueden generar o escribir como combinación lineal de un conjunto fijo de vectores dados. Esto significa que es posible construir un conjunto que conste de todos los vectores que se pueden expresar como combinación lineal de n vectores dados. Esto nos lleva a la siguiente idea:

Sea A un conjunto no vacío de n vectores del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$, se puede formar el subconjunto de V cuyos elementos sean todas las combinaciones lineales de los vectores de A . Este nuevo conjunto lo denotaremos con \bar{A} . Es decir

$$\text{Si } A = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \text{ entonces } \bar{A} = \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i / \alpha_i \in K \wedge \vec{v}_i \in A \}.$$

Ejemplo 1. Sea $A = \{ (1, 0, 1), (0, 1, 1) \} \in \mathbb{R}^3$ calcular el conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden generar con A .

$$\bar{A} = \{ \alpha_1 (1, 0, 1) + \alpha_2 (0, 1, 1) / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\bar{A} = \{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

Esto significa que a \bar{A} pertenecen todas las ternas de números reales cuya tercera componente es la suma de las dos primeras. Podemos escribir

$$\bar{A} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = x_1 + x_2 \}$$

Este conjunto de todas las combinaciones posibles que se pueden construir a partir de un conjunto de n vectores tiene la propiedad de ser subespacio vectorial del espacio dado. Esto se demuestra en el siguiente

Teorema: el conjunto de las combinaciones lineales de todo subconjunto no vacío de un espacio vectorial es un subespacio del mismo. Es decir

Si $A = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \subset (V, +, K, \cdot)$ entonces $(\bar{A}, +, K, \cdot)$ es subespacio de V .

D) Para demostrar este teorema utilizaremos el criterio de subespacio, o sea debemos demostrar que la suma y el producto por escalar son operaciones cerradas para \bar{A} .

Sean $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i \in \bar{A}$ y $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i \in \bar{A}$ y $\lambda \in K$, entonces

$$i) \vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \vec{v}_i + \beta_i \vec{v}_i)$$

$$\vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \vec{v}_i$$

$$\vec{v} + \vec{u} = \sum_{i=1}^n \delta_i \vec{v}_i \text{ con } \delta_i = \alpha_i + \beta_i$$

$$(\vec{v} + \vec{u}) \in \bar{A}$$

$$ii) \lambda \vec{v} = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$$

$$\lambda \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda (\alpha_i \vec{v}_i)$$

$$\lambda \vec{v} = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) \vec{v}_i$$

$$\lambda \vec{v} = \sum_{i=1}^n \rho \vec{v}_i \text{ con } \rho = \lambda \alpha_i$$

$$\lambda \vec{v} \in \bar{A}$$

Por i) y ii) \bar{A} es subespacio vectorial de V , quedando demostrado el teorema.

La idea con la que se inició el apartado, sumada al teorema demostrado anteriormente, nos permite dar la siguiente

Definición: el subespacio de las combinaciones lineales de un conjunto A no vacío de n vectores se denomina subespacio generado por A y se simboliza \bar{A} .

Ejemplo 2. Determinar el subespacio de \mathbb{R}^2 generado por el vector $S = \{(1, 2)\}$.

$\bar{S} = \{(x_1, x_2) / (x_1, x_2) = k(x_1, x_2)\}$. Por lo tanto

$$(x_1, x_2) = k(1, 2)$$

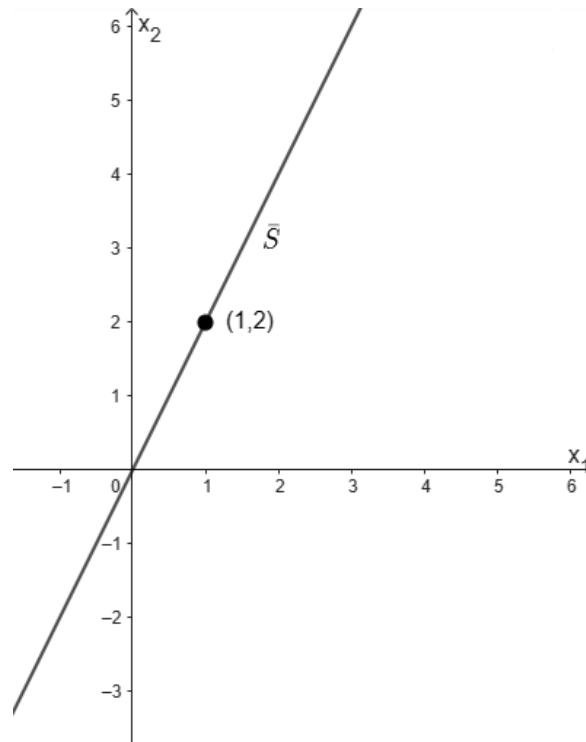
$$(x_1, x_2) = (k, 2k)$$

$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 = -2k \\ x_2 = 2k \end{cases} \Rightarrow -2x_1 + x_2 = 0$$

O lo que es lo mismo $2x_1 - x_2 = 0$

$$\bar{S} = \{(x_1, x_2) / 2x_1 - x_2 = 0\}$$

Geométricamente \bar{S} es la recta que pasa por el origen y el punto $(1, 2)$.



Observación: en general el subespacio de $(V, +, K, \cdot)$ generado por un vector \vec{v} es, en particular, el conjunto de todos los múltiplos escalares de ese vector, o sea $\{k \vec{v} / k \in K\}$

Ejemplo 3. Determinar el subespacio generado por los vectores del siguiente conjunto $P = \{2x^2 - 1, -x^2 + 2x + 1\} \subset (\mathbb{P}[x], +, \mathbb{R} \cdot)$ en donde $\mathbb{P}[x]$ son los polinomios de una indeterminada con coeficientes reales y de grado menos a n .

$$\bar{P} = \{\alpha_1 (2x^2 - 1) + \alpha_2 (-x^2 + 2x + 1) / \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{P} = \{(2\alpha_1 x^2 - \alpha_1) + (-\alpha_2 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_2)\}$$

$$\bar{P} = \{(2\alpha_1 - \alpha_2)x^2 + 2\alpha_2 x + (-\alpha_1 + \alpha_2)\}$$

$$\bar{P} = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ tq } a_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2, a_1 = 2\alpha_2 \text{ y } a_0 = -\alpha_1 + \alpha_2 \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

¿Se puede escribir $Q(x) = 12x + 3$ como combinación lineal de los vectores de P ?

Como tenemos todas las combinaciones posibles de los vectores de P , podemos hacer $(2\alpha_1 - \alpha_2)x^2 + 2\alpha_2 x + (-\alpha_1 + \alpha_2) = 0x^2 + 12x + 3$. Escribimos el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_2 = 12 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema por manipulación algebraica debido a su características.

$\alpha_2 = 6$ por la segunda ecuación, por lo tanto por la tercera ecuación $\alpha_1 = 3$. Estos valores de α_1 y α_2 satisfacen la primera ecuación.

Esto significa que si se puede escribir $Q(x) = 12x + 3$ como combinación lineal de los vectores de P .

$$12x + 3 = 3(2x^2 - 1) + 6(-x^2 + 2x + 1)$$

$$12x + 3 = (6x^2 - 3) + (-6x^2 + 12x + 6)$$

$$12x + 3 = 12x + 3$$

5.- Dependencia lineal

En el apartado 4 se estableció que la ecuación vectorial $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{v}$ tiene el mismo conjunto solución que el sistema lineal con matriz ampliada $(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n \ \vec{v})$. Esta observación se torna más importante en el caso de que el vector \vec{v} sea el vector nulo y por consiguiente el sistema de ecuaciones lineales se vuelve homogéneo. Esto debido a que la atención se transfiere de las soluciones desconocidas del sistema homogéneo a los vectores que aparecen en la ecuación vectorial.

Por ejemplo, sea expresar $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de $(-1,1)$ y $(1,0)$.

La ecuación vectorial es $\alpha_1(-1,1) + \alpha_2(1,0) = (0,0)$, desde la cual podemos escribir directamente la matriz ampliada del sistema de ecuaciones: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como es un sistema homogéneo cuadrado, calculamos directamente el determinante del sistema $\det(A) = -1$, como $\det(A) \neq 0$ el sistema es compatible determinado, es decir la única solución es $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Esto nos permite dar la siguiente

Definición: dado un conjunto de n vectores, $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ se dice que A es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal, cuyo resultado es el vector nulo, es la trivial.

Sean $(V, +, K, \cdot)$ y $A \subset V$, A es Linealmente Independiente $\Leftrightarrow \forall i: \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$

Se dice que conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es linealmente dependiente si existen los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$ (1).

La ecuación (1) relación de dependencia lineal entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ cuando no todos los coeficientes son ceros. Un conjunto A de vectores es linealmente dependiente si y solo si no es linealmente independiente.

La independencia lineal de un conjunto finito y no vacío de vectores significa que no puede darse una combinación lineal de dicho conjunto que dé el vector nulo, con algún escalar distinto de cero.

Convenimos en que el conjunto vacío es linealmente independiente.

Ejemplo 1. Determinar si el conjunto $A = \{(1,2,3); (4,5,6); (2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente. De no ser así, encuentre la relación de dependencia entre los vectores de A .

La ecuación vectorial es $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(4,5,6) + \alpha_3(2,1,0) = (0,0,0)$, de donde podemos escribir directamente la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & 0 \\ 3 & 6 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim -2F_1 + F_2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & -6 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \sim -\frac{1}{3}F_2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \sim -\frac{1}{6}F_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} -4F_2 + F_1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ -F_2 + F_3 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado, por lo tanto A es un conjunto linealmente dependiente (y, por lo tanto, no es linealmente independiente).

Para evidenciar la relación de dependencia, reconstruimos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \text{ entonces tomamos } \alpha_3 \text{ como variable libre y tenemos } \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

Seleccionamos valores no nulos para para la variable libre, por ejemplo $\alpha_3 = 1$ por lo tanto $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = -1$. Sustituimos en (1) y obtenemos $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$ (i). Podríamos elegir $\alpha_3 = 5$ entonces $\alpha_1 = 10$ y $\alpha_2 = -5$ y obtener $10\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3 = \vec{0}$ (ii) y así sucesivamente. Las ecuaciones (i) y (ii) son dos –entre una infinidad– de las posibles relaciones de dependencia lineal entre los vectores de A. Se sugiere al estudiante comprobar (i) y (ii).

Ejemplo 2. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ determinar si los vectores $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independiente.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \therefore -2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Esto significa que la única combinación lineal que satisface la relación propuesta es la trivial, por lo tanto el conjunto de vectores es linealmente independiente (y, por lo tanto, no es linealmente dependiente).

Ejemplo 3. Sea $(\mathbb{P}(x), +, \mathbb{R}, \cdot)$ con $\mathbb{P}(x)$, polinomio de variable x, coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Determinar si el conjunto $A = \{(1-x)^2, (1-x), 1\}$ es linealmente independiente.

$$\alpha(1-x)^2 + \beta(1-x) + \gamma = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha - 2\alpha x + \alpha x^2 + \beta - \beta x + \gamma = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha x^2 + (-2\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta + \gamma) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto A es linealmente independiente.

Obsérvese dos cuestiones.

- i) En muchos casos es más fácil resolver el sistema de ecuaciones por manipulación algebraica, mientras que en otros conviene resolverlo por algún método estudiado en el capítulo de Sistema de Ecuaciones Lineales.
- ii) El uso de los nombres para el cálculo de los coeficientes, es indistinto.

Ejemplo 4. Sea $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ determinar si los vectores $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son linealmente independiente.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 \\ \alpha - \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Esto significa que existen escalares no nulos que satisfacen la relación propuesta, por lo tanto el conjunto de vectores no es linealmente independiente. Podríamos elegir un valor no nulo de k , por ejemplo $k = 3$ y la relación de dependencia será $3A + 3B = N$ (recordar que en este caso N es la matriz nula de orden 2) o bien $k = -5$ y la relación de dependencia será $-5A - 5B = N$.

Verificación

$$3A + 3B = N$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Similar situación ocurre para $-5A - 5B = N$.

El ejemplo 1 y el ejemplo 4, nos ayudan para dar otra definición de vectores linealmente dependientes.

Definición 2: dado un conjunto de n vectores, $A = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ se dice que A es linealmente dependiente si y sólo si existe una combinación lineal no trivial de A cuyo resultado es el vector nulo.

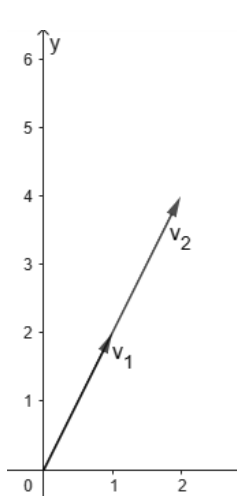
Sean $(V, +, K, \cdot)$ y $A \subset V$, A es Linealmente Dependiente $\Leftrightarrow \exists i / \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \wedge \alpha_i \neq 0$

La dependencia lineal de un conjunto finito y no vacío de vectores significa que tiene que existir, al menos, una combinación lineal de dicho conjunto que dé el vector nulo y que no sea la trivial.

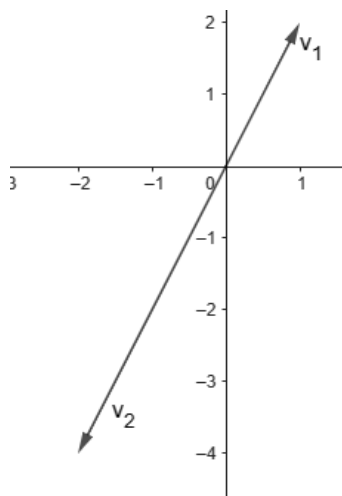
Interpretación geométrica de la dependencia lineal

La dependencia lineal posee algunas interpretaciones geométricas útiles en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

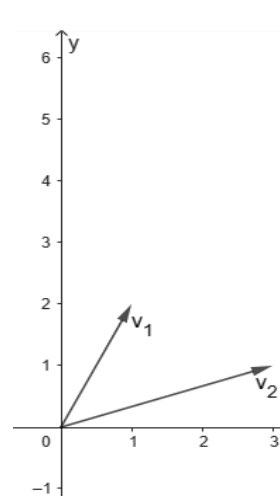
En \mathbb{R}^2 un conjunto de dos vectores es linealmente independiente si y sólo si los vectores no están en la misma recta cuando se colocan con sus orígenes en el origen del sistema.



L. Dependientes



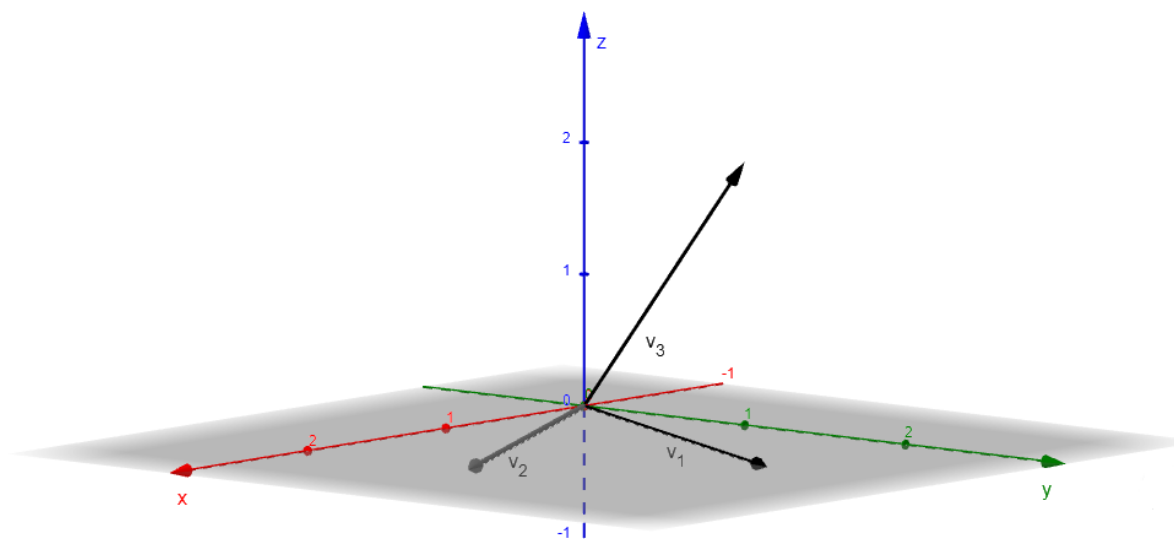
L. Dependientes



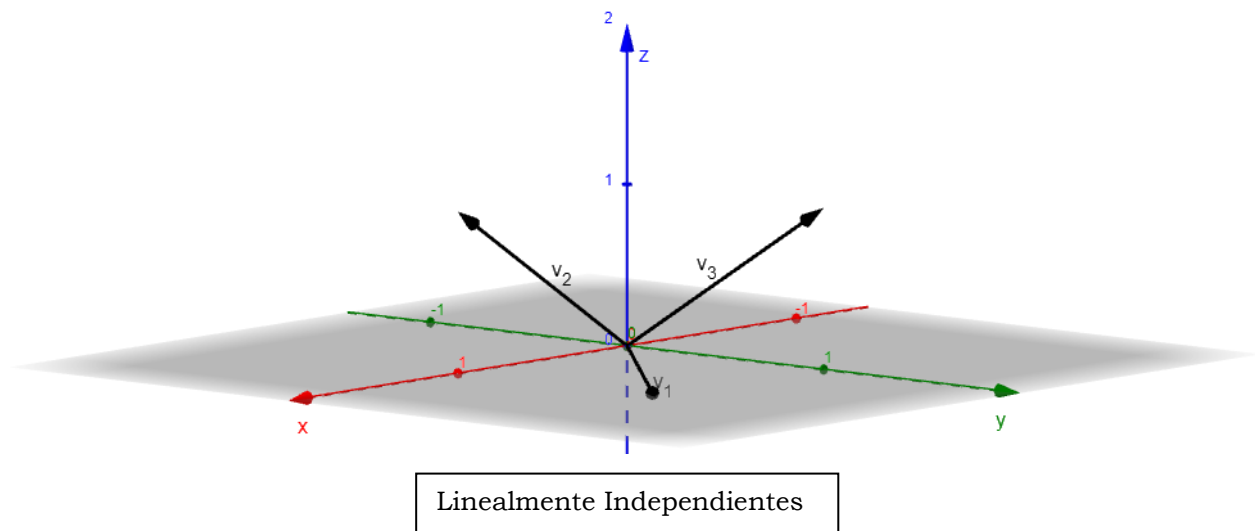
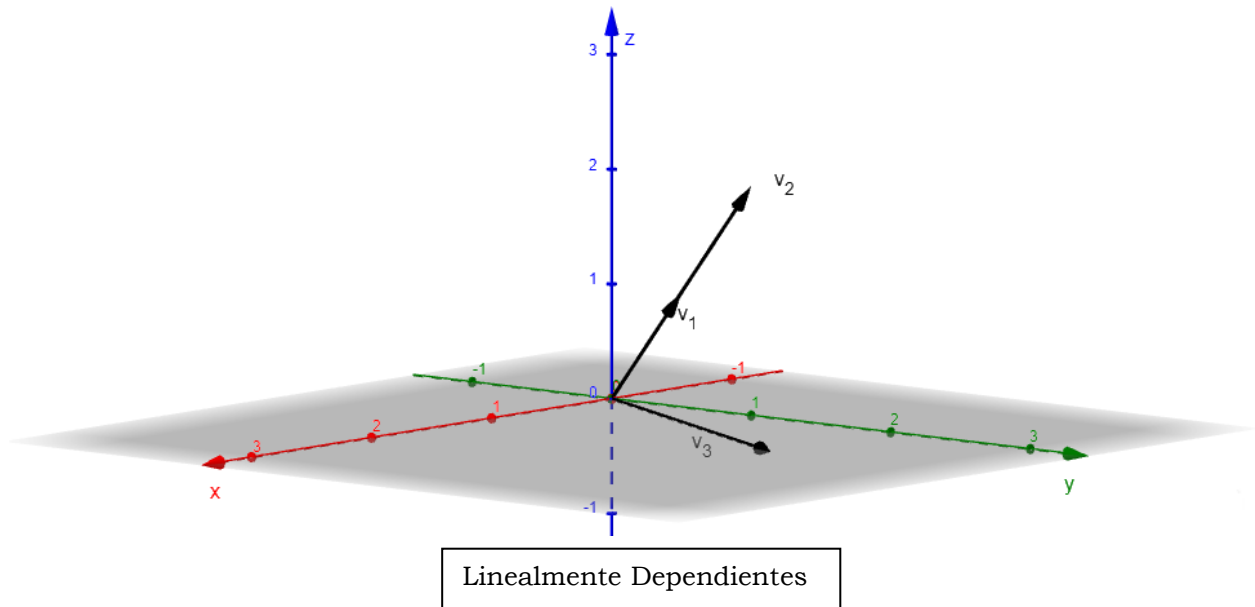
L. Independientes

Las dos primeras figuras son una consecuencia del hecho de que dos vectores son linealmente independientes si y solo si ninguno de ellos es múltiplo escalar del otro, geoméricamente, esto equivale a afirmar que los vectores no están en la misma recta cuando se hace coincidir sus orígenes con el origen de coordenadas.

En \mathbb{R}^3 un conjunto de dos vectores es linealmente independiente si y sólo si los vectores no están en el mismo plano cuando se colocan con sus orígenes en el origen del sistema. Una consecuencia de esto, es el hecho de que tres vectores son linealmente independientes si ninguno de ellos es combinación lineal de los otros dos, de otra forma, que los tres vectores no sean coplanares– que no están en un mismo plano cuando se hace coincidir sus orígenes con el origen de coordenadas.



Linealmente Dependientes



5.1.- Propiedades de la dependencia lineal

Para finalizar esta sección se demostrarán algunas propiedades respecto a la dependencia lineal que en muchos casos ayudan a determinar rápidamente si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente.

P1) Si un vector es combinación lineal de un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces dicha combinación lineal es única.

Sean el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$, $\vec{x} \in V$ combinación lineal de $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y éste linealmente independiente.

D) Como \vec{x} es combinación lineal de los vectores de A , entonces existen los escalares α_i tales que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$.

Suponemos que existen otros escalares β_i tales que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i \vec{v}_i - \beta_i \vec{v}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \vec{v}_i = \vec{0}$$

Como los vectores de A son linealmente independiente, se deduce que

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto la combinación lineal es única.

Ejemplo. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ se considera el conjunto M linealmente independiente (se sugiere al estudiante comprobar esto).

$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, vamos a escribir $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de M .

La ecuación vectorial es: $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, mientras que el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) &\sim_{-F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim_{\substack{-F_2 + F_1 \\ F_2 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim_{\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 \end{array} \right) \\ &\sim_{F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Es un sistema compatible determinado, única solución $\alpha = 2, \beta = -3$ y $\delta = 3$. De allí que los únicos coeficientes que permiten escribir D como combinación lineal de los vectores de M , sean $\alpha = 2, \beta = -3$ y $\delta = 3$ (se sugiere al estudiante hacer la verificación de la ecuación vectorial propuesta al iniciar el ejercicio).

P2) Todo vector no nulo de un espacio vectorial constituye un conjunto linealmente independiente.

Sea $\vec{x} \neq \vec{0}$ en $(V, +, K, \cdot)$. Por propiedades de los espacios vectoriales se sabe que

$\alpha \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$. Como $\vec{x} \neq \vec{0}$ se deduce que $\alpha = 0$ y en consecuencia $\{\vec{x}\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{P}[x], +, \mathbb{R} \cdot)$ en donde $\mathbb{P}[x]$ son los polinomios de una indeterminada con coeficientes reales y de grado menor a n .

Tomemos de este espacio vectorial $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y propongamos

$\alpha (5x^2 - 3x + 4) = 0x^2 + 0x + 0$ la única forma de que esta igualdad se cumpla, es que $\alpha = 0$ lo que significa que $\{P(x)\}$ es linealmente independiente. Esto es válido para cualquier $P(x) = ax^2 + bx + c$ del espacio vectorial

P₃) El vector nulo de cualquier espacio vectorial constituye un conjunto linealmente dependiente.

Por propiedades de los espacios vectoriales se sabe que $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \alpha \in K$ entonces cualquier escalar nulo o no, satisface esta relación y por lo tanto $\{\vec{0}\}$ es linealmente dependiente.

Ejemplo. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R} \cdot)$, consideremos de él, el vector nulo y propongamos

$\alpha(0,0,0,0) = (0,0,0,0)$ para que se cumpla esta igualdad el escalar α no necesariamente debe ser nulo, puede tomar cualquier valor y la igualdad se verificará. Lo que indica que el vector nulo es un conjunto linealmente dependiente.

P₄) Todo conjunto al que pertenezca el vector nulo, es linealmente dependiente.

Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset (V, +, K, \cdot)$ y con $\vec{v}_j = \vec{0}$ se verifica que

$$0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_j \vec{v}_j + \dots + 0 \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{o sea q}$$

$\alpha_j \vec{v}_j = \alpha_j \vec{0} = \vec{0}$ con α_j no necesariamente nulo. Por lo tanto A es linealmente dependiente.

Ejemplo. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R} \cdot)$ se considera el conjunto

$$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La ecuación vectorial es: $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mientras que el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_{-F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_{\substack{-F_2 + F_1 \\ F_2 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_{\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sim_{\substack{F_3 + F_1 \\ -F_3 + F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un sistema compatible indeterminado porque el rango de la matriz del sistema es 3 al igual que la ampliada, pero el número de incógnitas es cuatro.

$\alpha = 0, \beta = 0, \delta = 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. De esta forma M es linealmente dependiente.

P₅) Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente dependiente si y sólo si algún vector es combinación lineal de los demás.

Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset (V, +, K, \cdot)$

D)

\Rightarrow) A es linealmente dependiente, entonces $\exists j/v_j = \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i$

Como A es linealmente dependiente, por definición de dependencia lineal

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \wedge \alpha_j \neq 0$$

$$\alpha_j \vec{v}_j + \sum_{i \neq j}^r \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \wedge \alpha_j \neq 0$$

$$\alpha_j \vec{v}_j = -\sum_{i \neq j}^r \alpha_i \vec{v}_i \wedge \alpha_j \neq 0$$

Premultiplicando por α_j^{-1} que existe pues $\alpha_j \neq 0$. Se tiene

$$(\alpha_j^{-1})\alpha_j \vec{v}_j = (-\alpha_j^{-1})\sum_{i \neq j}^r \alpha_i \vec{v}_i$$

$$(\alpha_j^{-1} \alpha_j) \vec{v}_j = \sum_{i \neq j}^r (-\alpha_j^{-1}) (\alpha_i \vec{v}_i)$$

$$(\alpha_j^{-1} \alpha_j) \vec{v}_j = \sum_{i \neq j}^r (-\alpha_j^{-1}) (\alpha_i \vec{v}_i)$$

$$\vec{v}_j = \sum_{i \neq j}^r (-\alpha_j^{-1} \alpha_i) \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_j = \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i \text{ con } \beta_i = -\alpha_j^{-1} \alpha_i$$

Por lo tanto, v_j existe y es combinación lineal de los demás vectores de A .

$$\Leftrightarrow v_j = \sum_{i \neq j}^r \alpha_i \vec{v}_i \Rightarrow A \text{ es linealmente dependiente}$$

$$v_j = \sum_{i \neq j}^r \alpha_i \vec{v}_i$$

$$\sum_{i \neq j}^r \alpha_i \vec{v}_i - v_j = \vec{0} \text{ con } \alpha_j = -1.$$

Como $\alpha_j \neq 0$ el conjunto A es linealmente dependiente.

Ejemplo. Sea el conjunto $A = \{(-1, 1), (1, 2), (-3, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Para ver la dependencia lineal, hacemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim^{-F_1} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim^{-F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim_{\frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \sim_{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Es un sistema compatible indeterminado y por lo tanto A es linealmente dependiente.

Reconstruimos el sistema y evidenciamos la relación de dependencia.

$$\begin{cases} \alpha + 2\delta = 0 \\ \beta - \delta = 0 \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} \alpha = -2\delta \\ \beta = \delta \end{cases}$$

Damos un valor no nulo a δ , por ejemplo $\delta = -1$ con lo que $\alpha = 2$ y $\beta = -1$ que son justamente los coeficientes de $(-3, 0)$ como combinación lineal de $(-1, 1), (1, 2)$.

$$(-3, 0) = 2(-1, 1) - 1(1, 2)$$

$$(-3, 0) = (-2, 2) + (-1, -2)$$

$$(-3, 0) = (-3, 0).$$

Muchas veces la relación entre $(-3, 0)$ como combinación lineal de $(-1, 1), (1, 2)$ no es tan evidente.

P₆) Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente independiente si y sólo si ningún vector es combinación lineal de los demás.

$$\text{Sea } A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset (V, +, K, \cdot)$$

A es linealmente independiente si y sólo si $\forall j: v_j \neq \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i$

D) Lo mismo que en la propiedad P₅) hay que demostrar dos implicaciones

i) A es linealmente independiente, entonces $\forall j: v_j \neq \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i$

ii) $\forall j: v_j \neq \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i$ entonces A es linealmente independiente.

En la P₅) se demostró que

A es linealmente dependiente, entonces $\exists j: v_j = \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i$ la contrarecíproca⁷ de esta implicación tiene el mismo valor de verdad, por lo tanto también es verdadera, o sea $\forall j: v_j \neq \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i$ entonces A es linealmente independiente. Quedando demostrada ii).

De manera similar en la P₅) se demostró que

$v_j = \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i \Rightarrow A$ es linealmente dependiente, cuya contrarecíproca es (es indistinto el nombre del coeficiente)

A es linealmente independiente, entonces $\forall j: v_j \neq \sum_{i \neq j}^r \beta_i \vec{v}_i$. Quedando demostrado i) y por consiguiente también la propiedad.

Ejemplo. El conjunto de vectores $\{u_1 = (-1, 1) \text{ y } u_2 = (1, 0)\}$ es linealmente independiente ya que ninguno de los dos puede expresarse como combinación lineal del otro. Si esto no fuese así, existiría $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$u_1 = \alpha u_2$$

$(-1, 1) = \alpha(1, 0)$ lo que implica

$\alpha = -1$ y $1 = 0$ que es imposible. Luego el conjunto es linealmente independiente.

Las dos siguientes propiedades también están relacionadas, por lo tanto en primer lugar establecemos: sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset (V, +, K, \cdot)$ y $A' \subset A$.

P₇) Un conjunto de vectores que contenga un subconjunto linealmente dependiente, es linealmente dependiente. Es decir, si $A' \subset A$ es linealmente dependiente, $\Rightarrow A$ es linealmente dependiente.

D₁) Como la propiedad de ser linealmente dependiente no depende del orden de los elementos del conjunto, suponemos que los p primeros vectores son linealmente dependientes. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ los coeficientes no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$.

Pongamos que $\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \dots = \alpha_n = 0$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{v}_i}_{\vec{0}} + \underbrace{\sum_{j=p+1}^n \alpha_j \vec{v}_j}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Esta combinación lineal no es la trivial pues hay coeficientes no nulos entre los primeros coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Por lo tanto A es linealmente dependiente.

⁷ Sea la implicación $p \Rightarrow q$ su contrarecíproca (negar e intercambiar antecedente por consecuente y viceversa) $\sim q \Rightarrow \sim p$ tienen el mismo valor de verdad.

D₂) Como A' es linealmente dependiente, existe una relación de dependencia no trivial en A' , esa misma relación de dependencia nos sirve para probar que A es linealmente dependiente ya que todo elemento de A' pertenece a A , pues $A' \subset A$.

Ejemplo. Sea el conjunto $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Por el ejemplo 4 del apartado 5. Dependencia lineal, sabemos que el subconjunto de M , $N = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente, comprobemos que M es también linealmente dependiente.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta + 3\delta & 0 \\ \alpha - \beta + \delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\delta = 0 \\ \alpha - \beta + \delta = 0 \end{cases} \text{ de donde } \delta = 0.$$

Si $\delta = 0$ entonces $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Lo que indica que el conjunto M es linealmente dependiente, teniendo la misma relación de dependencia del subconjunto N .

P₈) Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, todo subconjunto de éste es también linealmente independiente. Es decir, si A es linealmente independiente $\Rightarrow A' \subset A$ es linealmente independiente.

D₁) Si con n elementos (los vectores de A) no se puede formar una combinación lineal nula con coeficientes no todos nulos, con un elemento menos (subconjunto) tampoco se podrá obtenerla. Por lo tanto todo subconjunto de A es linealmente independiente.

D₂) La verdad de esta proposición se puede asegurar por ser la contrarecíproca de la P₇) que ya se demostró que es verdadera.

La P₇) indica, si $A' \subset A$ es linealmente dependiente, $\Rightarrow A$ es linealmente dependiente.

Negando e intercambiando antecedente y consecuente, tenemos

A es linealmente independiente \Rightarrow todo $A' \subset A$ es linealmente independiente.

Ejemplo. Sea el conjunto $A = \{(1-x)^2, (1-x), 1\}$ del $(\mathbb{P}(x), +, \mathbb{R}, \cdot)$ con $\mathbb{P}(x)$, polinomio de variable x , coeficientes reales y grado menor o igual a 2. En el ejemplo 3 del apartado 5. Dependencia lineal se demostró que A es linealmente independiente.

Tomemos el subconjunto $A' = \{(1-x)^2, (1-x)\}$ y verifiquemos que es también linealmente independiente.

$$\alpha(1-x)^2 + \beta(1-x) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha - 2\alpha x + \alpha x^2 + \beta - \beta x = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha x^2 + (-2\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto A' es linealmente independiente.

Podríamos considerar otro subconjunto $A'' = \{(1-x), 1\}$ y también es linealmente independiente.

$$\alpha(1-x) + \beta = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha - \alpha x + \beta = 0x^2 + 0x + 0$$

$$-\alpha x + (\alpha + \beta) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} -\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto A'' es linealmente independiente.

P₉) Si un conjunto tiene más vectores que entradas en cada vector, entonces el conjunto es linealmente dependiente. Es decir, el conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $p > n$.

Para comprender mejor esta propiedad, haremos en primer lugar una aclaración para los vectores en \mathbb{R}^n .

Sean los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y de esta manera en forma general $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, se suele decir que \vec{u} tiene “dos entradas” $u_1, y u_2$ mientras que \vec{v} tiene “tres entradas” $v_1, v_2 y v_3$ y así sucesivamente \vec{z} tiene “n entradas”.

D) Sea la matriz $M = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p)$ cuyas columnas son los vectores de A , entonces la dimensión de M es $n \times p$ y la ecuación $Mx = N$ (N matriz nula de orden n) corresponde a un sistema de n ecuaciones con p incógnitas. Si $p > n$ significa que hay más variables que ecuaciones por lo que debe existir al menos una variable libre. De esta manera $Mx = N$ tiene una solución no trivial y las columnas de M son linealmente dependientes, es decir que A es linealmente dependiente.

Ejemplo. Sean los vectores $(1,0), (2,1), (-1,0)$ de \mathbb{R}^2 . Aquí $n = 2$ (todos los vectores tienen 2 entradas) y $p = 3$ (número de vectores), es decir $p > n$.

Comprobemos que los vectores dados son linealmente dependientes.

Directamente podemos escribir la matriz ampliada del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim -2F_2 + F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es un sistema compatible indeterminado. Por lo tanto el conjunto de vectores es linealmente dependiente. Reconstruimos el sistema.

$$\begin{cases} \alpha - \delta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ entonces } \alpha = \delta.$$

Para finalizar esta sección enunciaremos, de acuerdo a los conceptos anteriores, las siguientes proposiciones equivalentes.

Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset (V, +, K, \cdot)$

- i) A es linealmente independiente.
- ii) Toda combinación lineal de A cuyo resultado sea el vector nulo, es la trivial.
- iii) Ningún vector de A es combinación lineal de los demás.

Análogamente

- i) A es linealmente dependiente.
- ii) Existe una combinación lineal de A con escalares no todos nulos, cuyo resultado es el vector nulo.
- iii) Algún vector de A es combinación lineal de los demás.

6.- Sistema de generadores

Una de las ideas más importantes que tenemos que asociar con la de espacio vectorial es la de conjunto generador. Si un conjunto no vacío de vectores de un espacio vectorial es tal que todo vector de ese espacio vectorial puede expresarse como combinación lineal de dicho conjunto, entonces se dice que éste es un sistema de generadores del espacio vectorial. Esto equivale a decir que el subespacio generado por tal conjunto es el mismo espacio vectorial.

Esta idea nos produce dos definiciones. La primera relacionada con la idea que todo vector del espacio vectorial es expresado como combinación lineal del conjunto dado, esto se expresa en la siguiente

Definición: sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ un subconjunto finito de V , se dice que A es sistema de generadores de V si y sólo si todo elemento de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de A. Es decir

Sean $(V, +, K, \cdot)$ y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$, A es S. G. de $V \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in V: \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$

La idea en la práctica con esta definición es plantear una combinación lineal de los vectores de A que tenga por resultado un vector genérico del espacio vectorial y averiguar si existen los escalares propuestos que verifiquen la combinación lineal.

La segunda definición se relaciona con el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de A o sea el subespacio generado, \bar{A} , y el cual debe coincidir con el mismo espacio vectorial V . Esta idea se expresa en la siguiente

Definición: sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ un subconjunto finito de V , se dice que A es sistema de generadores de V si el subespacio generado por A es igual V . Es decir

Sean $(V, +, K, \cdot)$ y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$, A es S. G. de $V \Leftrightarrow \bar{A} = V$.

En la práctica, aplicar esta definición significa verificar que el espacio generado por A es igual al espacio vectorial con el que se está trabajando.

El concepto de sistema de generadores es independiente del concepto de dependencia lineal, es decir, un sistema de generadores puede ser linealmente dependiente o linealmente independiente.

Ejemplo 1. Determinar si el conjunto $A = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ es un sistema de generadores de \mathbb{R}^2 .

La ecuación vectorial es $\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \delta(1,1) = (x,y)$. Podemos escribir directamente la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \end{pmatrix}$ la que directamente nos indica que se trata de un sistema compatible indeterminado.

$\begin{cases} \alpha + \delta = x \\ \beta + \delta = y \end{cases}$ Si δ es variable libre, la solución sería $\alpha = x - \delta, \beta = y - \delta$ y $\delta \in \mathbb{R}$.

Se puede calcular también \bar{A} .

$$\bar{A} = \{\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \delta(1,1)\}$$

$$\bar{A} = \{(\alpha + \delta, \beta + \delta)\}$$

$$\bar{A} = \{(x,y)/x = \alpha + \delta, y = \beta + \delta, \delta \in \mathbb{R}\}$$

Estos resultados nos indica que efectivamente A es un sistema de generadores de \mathbb{R}^2 y además que cualquier vector de \mathbb{R}^2 puede expresarse de infinitas maneras como combinación lineal de los vectores de A . Por otra parte, es muy fácil verificar que A es un conjunto linealmente dependiente, pues $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$.

Ejemplo 2. Sea $(\mathbb{P}(x), +, \mathbb{R}, \cdot)$ con $\mathbb{P}(x)$, polinomio de variable x , coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Determinar si el conjunto $A = \{(1-x)^2, (1-x), 1\}$ es sistema de generadores.

$$\alpha(1-x)^2 + \beta(1-x) + \gamma = ax^2 + bx + c$$

$$\alpha - 2\alpha x + \alpha x^2 + \beta - \beta x + \gamma = ax^2 + bx + c$$

$$\alpha x^2 + (-2\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta + \gamma) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} \alpha = a \\ -2\alpha - \beta = b \Rightarrow \beta = -b - 2a \\ \alpha + \beta + \gamma = c \Rightarrow \gamma = a + b + c \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto A es sistema de generadores. Por otra parte, se demostró en el apartado 5. Dependencia lineal, mediante el ejemplo 3 que A es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 3. Determinar si $A = \{(1,-3,2), (3,0,0), (-1,-6,4)\}$ es sistema de generadores de \mathbb{R}^3

$$\alpha(1,-3,2) + \beta(3,0,0) + \gamma(-1,-6,4) = (a,b,c)$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = a \\ -3\alpha - 6\gamma = b \\ 2\alpha + 4\gamma = c \end{cases}$$

Tomando la 2° y 3° ecuación

$$\begin{cases} -3\alpha - 6\gamma = b \\ 2\alpha + 4\gamma = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6\alpha - 12\gamma = 2b \\ 6\alpha + 12\gamma = 3c \end{cases}$$

$$2b + 3c = 0 \Rightarrow c = -\frac{2b}{3}$$

Esto significa que los vectores de A no generan cualquier vector de \mathbb{R}^3 es decir que, según lo definido, no es un sistema de generadores de \mathbb{R}^3 , pero generan las ternas de números reales tales que la tercera componente es igual a $-\frac{2}{3}$ de la segunda.

En estos casos se dice que los vectores dados generan un subespacio, S , de \mathbb{R}^3 tal que:

$$S = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / c = -\frac{2b}{3} \right\}$$

En la práctica también se pueden combinar las dos definiciones de sistema de generadores como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Sean $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ el espacio vectorial de las matrices reales de orden dos con traza nula y sea el conjunto $M = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Determinar si M es sistema de generadores o determinar \overline{M} .

$$\overline{M} = \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{v}_i / \alpha_i \in \mathbb{R} \wedge \vec{v}_i \in M \right\}$$

Todo vector de \overline{M} es una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b \\ \delta = c \\ -\alpha = d \end{cases} \text{ de la primera y última ecuación se deduce que } a = -d$$

Luego $a = -d, b$ y c son números reales.

Entonces M genera el conjunto de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \overline{M}$ o sea genera $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ el espacio vectorial de las matrices reales de orden dos con traza nula, lo que es lo mismo decir que M es sistema de generadores.

Es muy directo determinar que M es linealmente independiente.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \delta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{cases} \text{ esto nos indica que } \alpha = \beta = \delta = 0 \text{ con lo que } M \text{ es linealmente independiente.}$$

Luego de estos ejemplos podríamos preguntarnos si para cada espacio vectorial hay un conjunto finito de vectores que lo generen. La respuesta es NO y se puede justificar con un contraejemplo. Específicamente, el espacio de las funciones reales de variable real no tiene un conjunto finito de funciones que lo generen, lo mismo ocurre con el espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales y una variable.

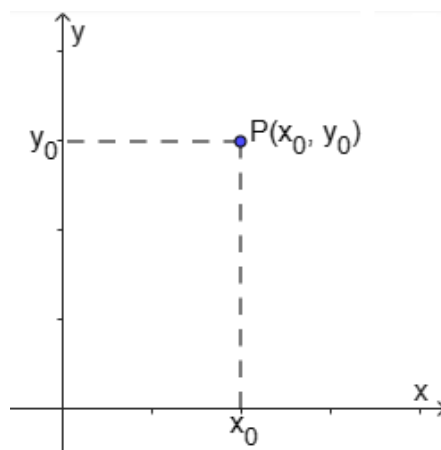
En el ejemplo 2 de este apartado se demostró que el conjunto $A = \{(1-x)^2, (1-x), 1\}$ del espacio vectorial $(\mathbb{P}(x), +, \mathbb{R}, \cdot)$ con $\mathbb{P}(x)$, polinomio de variable x , coeficientes reales y grado menor o igual a 2, es sistema de generadores mientras que en el apartado 5. Dependencia lineal y mediante el ejemplo 3 se demostró que el mismo conjunto es linealmente independiente.

Se demostraron las mismas características –sistema de generadores y linealmente independiente– para el conjunto $M = \{V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ del espacio vectorial de las matrices reales de orden dos con traza nula $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

Los sistemas de generadores que tienen la propiedad de ser linealmente independiente son los conjuntos que se estudiarán en el próximo apartado.

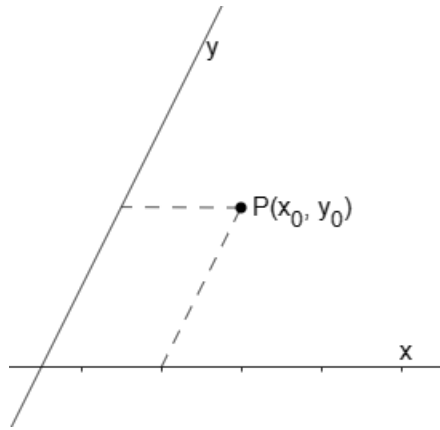
7.- Base de un espacio vectorial

En geometría plana aprendimos a asociar un par de números reales (x, y) –llamados coordenadas– con un punto P en el plano al proyectar P sobre un par de ejes de coordenadas perpendiculares, tal cual se muestra en la siguiente figura.



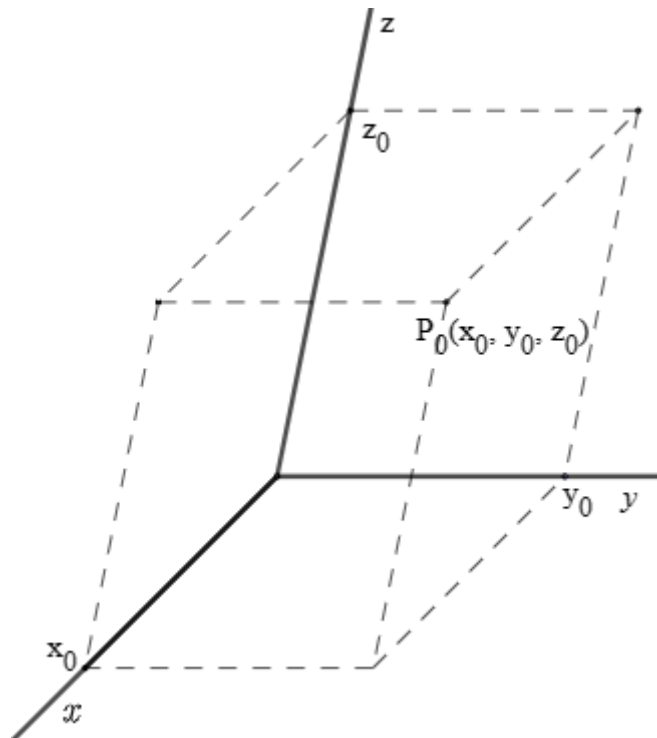
Por medio de este proceso, a cada punto en el plano se asigna un conjunto de coordenadas (par de números reales) único y recíprocamente, a cada par de coordenadas se asocia un único punto en el plano. Esto suele describirse, afirmando que el sistema de coordenadas establece una correspondencia biunívoca o uno a uno entre los puntos en el plano y los pares ordenados de números reales.

A pesar de que los ejes de coordenadas perpendiculares son los más comunes para definir un sistema de coordenadas en el plano, se puede utilizar cualquier par de rectas no paralelas. Por ejemplo, en la siguiente figura al punto P se han asociado las coordenadas (x_0, y_0) al proyectar P en forma paralela a los ejes de coordenadas no perpendiculares.



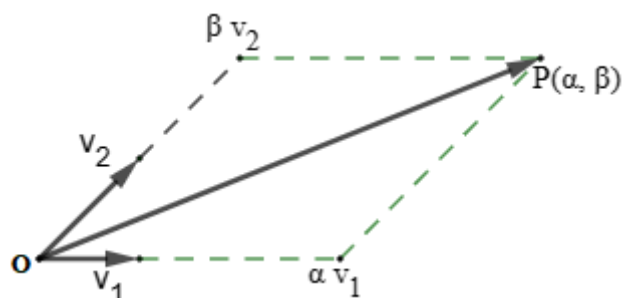
De manera similar, para definir un sistema de coordenadas en el espacio tridimensional es posible usar cualquier terna de ejes de coordenadas no coplanares, como se muestra en la siguiente figura.

Antes de formalizar cualquier definición en este apartado, ampliaremos el concepto de sistema de coordenadas a espacios vectoriales generales. Para comenzar, será de mucha utilidad volver a plantear el concepto de sistema de coordenadas en el espacio bidimensional o en el tridimensional usando vectores en vez de ejes de coordenadas para especificar el sistema de coordenadas.

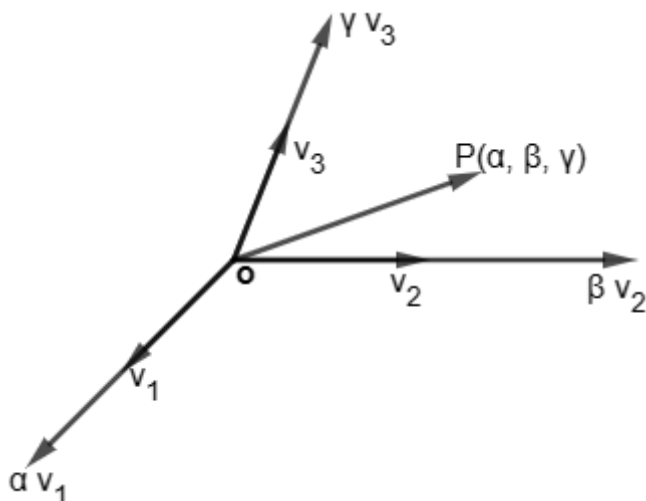


Esto se puede lograr si sustituimos cada eje de coordenadas por un vector de longitud 1 que apunte en la dirección positiva del eje. En la siguiente figura, por ejemplo, \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son esos vectores, tal como se ilustra allí, si P es cualquier punto en el plano, el vector \overrightarrow{OP} se puede escribir como una combinación lineal de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 proyectando P

en forma paralela a \vec{v}_1 y \vec{v}_2 a fin de que \vec{OP} sea la diagonal del paralelogramo determinado por los vectores $\alpha \vec{v}_1$ y $\beta \vec{v}_2$ es decir $\vec{OP} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$.



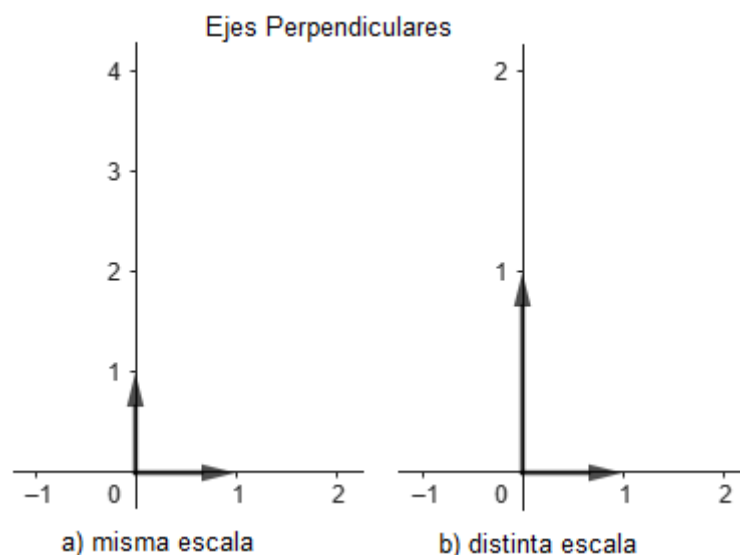
En la ecuación vectorial $\vec{OP} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$ resulta evidente que los números α y β son precisamente las coordenadas de P en el sistema de coordenadas de la figura. De manera similar las coordenadas (α, β, γ) del punto P en la siguiente figura se pueden obtener al expresar \vec{OP} como una combinación lineal de los vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 .



De manera informal podríamos llamar a los vectores que especifican un sistema de coordenadas “vectores básicos” de ese sistema.

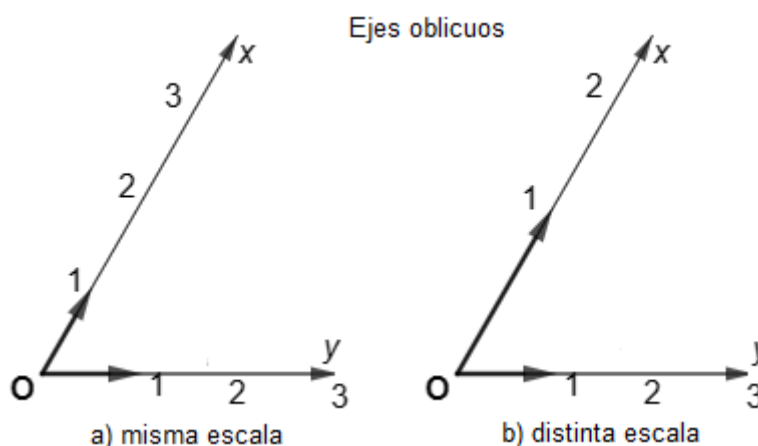
Otra cuestión importante en este análisis es que, si bien se utilizaron vectores básicos de longitud 1, en realidad esto no es esencial puesto que se puede utilizar vectores no nulos de cualquier longitud. Esto nos lleva a la siguiente idea: las escalas.

En general se intentará usar la misma escala en cada eje y situar los puntos enteros sobre los ejes a una distancia de una unidad entre sí. Cuando esto no sea posible por cuestiones de practicidad, se puede usar escalas en las cuales las distancias entre los puntos enteros sean mayor o menor que 1 unidad. Esto se suma a lo anterior respecto de los ejes, perpendiculares o no. Para el caso de los ejes perpendiculares se muestra en la siguiente figura.



La misma idea se puede aplicar en el caso de los ejes no perpendiculares u oblicuos, esto se muestra en la siguiente figura.

Cuando un sistema de coordenadas se especifica mediante un conjunto de vectores básicos, entonces las longitudes de esos vectores corresponden a las distancias entre puntos enteros consecutivos sobre los ejes de coordenadas.



De esta manera lo que define las direcciones positivas de los ejes de coordenadas son las direcciones de los vectores básicos y lo que establece las escalas de medición son las longitudes de dichos vectores.

Para hacer más precisos los conceptos anteriores y ampliar el concepto de sistema de coordenadas a espacios vectoriales, establecemos la siguiente

Definición: dado un conjunto de n vectores $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ se dice que A es una base si y solo si es linealmente independiente y sistema de generadores de V . Es decir

Dados $(V, +, K, \cdot)$ y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, $A \subset V$ es base de $V \Leftrightarrow A$ es L I y S de G de V .

Ejemplo 1. Una base de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es el conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ y una base de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Se puede comprobar fácilmente que los conjuntos dados

son linealmente independientes y sistema de generadores de sus respectivos espacios vectoriales. Se sugiere al estudiante comprobarlo.

Estos conjuntos reciben el nombre de bases canónicas. En general una base se denotará como $[B]$

Ejemplo 2. Se demostró que el conjunto $A = \{(1-x)^2, (1-x), 1\}$ de $(\mathbb{P}(x), +, \mathbb{R}, \cdot)$ con $\mathbb{P}(x)$, polinomio de variable x , coeficientes reales y grado menor o igual a 2, es linealmente independiente y sistema de generadores, por lo tanto también constituye una base del respectivo espacio vectorial.

Una base es la generalización de un sistema de coordenadas de un espacio vectorial. Esto se puede poner en evidencia al demostrar el siguiente

Teorema. Si $[B] = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ entonces todo vector \vec{v} de V puede expresarse de forma única como combinación lineal de los vectores de $[B]$.

D) Como $[B]$ es sistema de generadores de V significa que todo vector \vec{v} de V se puede escribir como combinación lineal de los vectores de $[B]$. Como $[B]$ también es linealmente independiente, significa que esta combinación lineal es única.

Ejemplo 3. Construir una base para el subespacio vectorial

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x + y\} \subset (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$$

Sea (x, y, z) un vector genérico de S , entonces su tercera componente debe ser igual a la primera más la segunda componente, en consecuencia

$$(x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

Este resultado nos indica que el conjunto $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es un sistema de generadores de T , además es linealmente independiente ya que:

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ constituye una base de T .

7.1.- Coordenadas respecto a una base

Si $[B] = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de $(V, +, K, \cdot)$ entonces, por propiedad, cada vector de V puede expresarse de modo único como combinación lineal de los vectores de la base ya que los vectores de ésta son linealmente independientes y sistema de generadores.

Es decir que si $\vec{x} \in V$ existen y son únicos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

El vector $\vec{x} \in V$ queda caracterizado por los coeficientes de la combinación lineal, o sea, por la n -tupla de elementos de K : $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Los escalares α_i se llaman **coordenadas** del vector $\vec{x} \in V$ **respecto de la base** $[B]$.

Si se elige otra base en el espacio V , entonces el mismo vector \vec{x} admite otras coordenadas $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$.

Dada una base $[B] = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ del espacio $(V, +, K, \cdot)$ podemos expresar cada vector de V como una matriz fila, cuyos elementos sean las coordenadas del vector respecto de la base $[B]$. En tal caso escribiremos $X_{[B]} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y este vector recibe el nombre de **vector de coordenadas de \vec{x} con respecto a $[B]$** .

Aquí debemos hacer una observación, nótese que los vectores de coordenadas no solo dependen de la base $[B]$, sino también del orden en que se escriben los vectores básicos, un cambio en el orden de éstos da por resultado un cambio correspondiente en el orden de los elementos en los vectores de coordenadas.

Ejemplo 1. Determinar las coordenadas del vector $\vec{x} = (-2, 3) \in (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ respecto de las bases:

a) $[B_1] = \{(1, 1), (1, 0)\}$

$$\alpha(1, 1) + \beta(1, 0) = (-2, 3)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha = 3 \end{cases} \Rightarrow \beta = -5$$

Por lo tanto $X_{[B_1]} = (3, -5)$

b) $[B_2] = \{(1, 0), (-1, 3)\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(-1, 3) = (-2, 3)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ 3\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \beta = 1 \wedge \alpha = -1$$

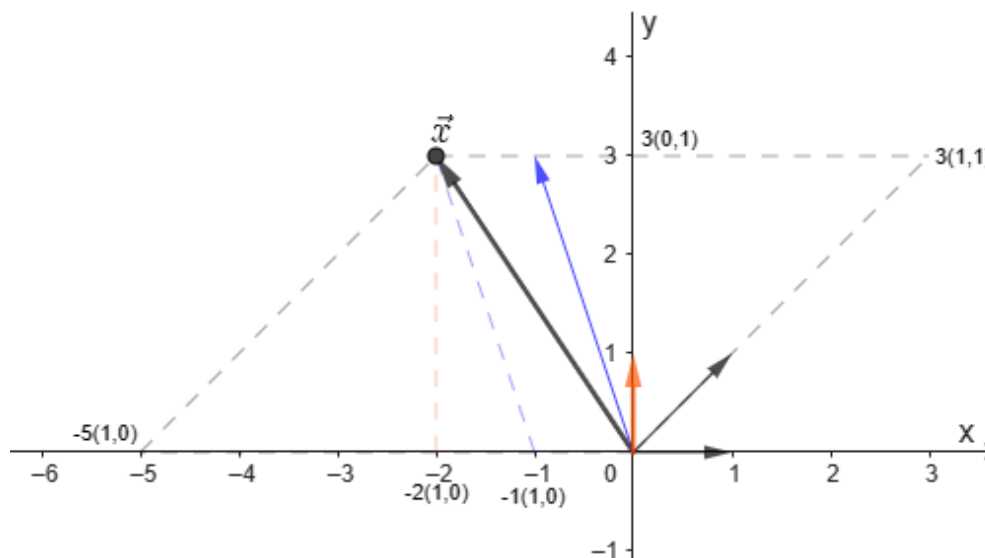
Por lo tanto $X_{[B_2]} = (-1, 1)$

c) Canónica $[B_3] = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (-2, 3)$$

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto $X_{[B_3]} = (-2, 3)$



Ejemplo 2. Relación entre sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y la base canónica en \mathbb{R}^3 .

Sabemos –por el capítulo vectores en \mathbb{R}^n – que los vectores canónicos de \mathbb{R}^3 son $\tilde{i} = (1, 0, 0)$, $\tilde{j} = (0, 1, 0)$, $\tilde{k} = (0, 0, 1)$.

En el apartado 7. Base de un espacio vectorial en el ejemplo 1 se sugirió comprobar que el conjunto formado por estos tres vectores forman una base de \mathbb{R}^3 . Es decir que $[B] = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Esto significa que cualquier vector de \mathbb{R}^3 se puede expresar de manera única como

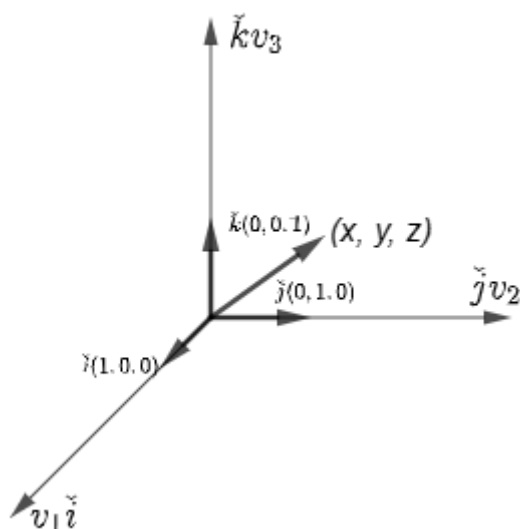
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\tilde{i} + v_2\tilde{j} + v_3\tilde{k} \quad (1)$$

De esta forma $[B] = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ Se denomina base canónica de \mathbb{R}^3 . Al observar los coeficientes de \tilde{i} , \tilde{j} , \tilde{k} de (1) se concluye que las coordenadas de \vec{v} respecto de la base canónica son v_1, v_2 y v_3 , de tal modo que $\overline{v}_{[B]} = (v_1, v_2, v_3)$.

Comparando este resultado con (1) se observa que $\vec{v} = \overline{v}_{[B]}$.

Esta ecuación significa que las componentes de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales $x y z$ y las coordenadas del mismo vector con respecto a la base canónica, son las mismas. De esta forma el sistema de coordenadas y la base canónica producen precisamente la misma correspondencia uno a uno entre puntos en el espacio tridimensional y ternas de números reales.

Sin embargo, hay que destacar que un vector y su vector de coordenadas no son los mismos, la igualdad $\vec{v} = \overline{v}_{[B]}$ es una situación especial que ocurre solamente con la base canónica –en este caso de \mathbb{R}^3 – de \mathbb{R}^n .



El resultado de este ejemplo se puede generalizar y establecer que la base canónica de \mathbb{R}^n es $\{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)\}$.

Ejemplo 3. Sea $[B] = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 1), \vec{v}_2 = (2, 9, 0), \vec{v}_3 = (3, 3, 4)\}$ una base de \mathbb{R}^3 .

a) Encontrar las coordenadas (vector de coordenadas) de $\vec{v} = (5, -1, 9)$ con respecto a $[B]$.

Es necesario encontrar los coeficientes α, β y δ tales que

$$\vec{v} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \delta \vec{v}_3$$

$$(5, -1, 9) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 9, 0) + \delta(3, 3, 4)$$

De esta ecuación vectorial, escribimos directamente la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ que al aplicar algún método de resolución nos da como única solución}$$

$\alpha = 1, \beta = -1, \delta = 2$ (se sugiere al estudiante, comprobar). Por lo tanto $\vec{v}_{[B]} = (1, -1, 2)$.

b) Encontrar el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ cuyo vector de coordenadas respecto de C es

$$\vec{v}_{[B]} = (-1, 3, 2).$$

En esta situación debemos encontrar el vector que satisface

$$\vec{v} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \delta \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = -1(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) \text{ de donde } x = 11, y = 31, z = 7.$$

Es decir que $\vec{v} = (11, 31, 7)$.

Para verificar este resultado se sugiere calcular las coordenadas de \vec{v} en la base $[B]$, debiéndose obtener $\vec{v}_{[B]} = (-1, 3, 2)$.

Ejemplo 4. Sea el conjunto $M = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ comprobar que M es una base de $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

Para demostrar que M es sistema de generadores, basta con establecer

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ de donde}$$

$$\alpha = a, \beta = b, \delta = c \text{ y } \gamma = d$$

Para demostrar que M es linealmente independiente, proponemos

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de donde}$$

$$\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$$

Por lo tanto, M es base de $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Se la denomina base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. De manera más general la base canónica de $\mathbb{K}^{m \times n}$ consta de $m \cdot n$ matrices que tienen un solo 1 y cuyos restantes elementos son ceros.

Las bases de un espacio vectorial tienen una propiedad intrínseca (llamada dimensión) del espacio V que no tiene que ver con la elección particular de la base. Esto se estudiará en el próximo apartado.

7.2.- Dimensión de un espacio vectorial

La dimensión de un espacio vectorial es muy importante porque indica cuantos vectores se necesitan para generar un espacio. Antes de estudiar la definición de

dimensión de un espacio vectorial, necesitamos unos resultados previos. De los cuales iniciamos con el siguiente

Teorema. Sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ y $[B] = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V . Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ son k vectores de V ($k = n + 1$), entonces los k vectores son linealmente dependientes.

D) Resolvemos el sistema

$$\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_k \vec{v}_k = \vec{0} \text{ para } \beta_i \in K, i = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

Como $[B]$ es base, existen los escalares $\alpha_{ij}, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n$ tales que

$$\vec{v}_1 = \alpha_{11} \vec{v}_1 + \alpha_{12} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{1n} \vec{v}_n$$

$$\vec{v}_2 = \alpha_{21} \vec{v}_1 + \alpha_{22} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{2n} \vec{v}_n \quad (2)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\vec{v}_k = \alpha_{k1} \vec{v}_1 + \alpha_{k2} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{kn} \vec{v}_n$$

Sustituimos cada \vec{v}_i de (2) en (1)

$$\beta_1(\alpha_{11} \vec{v}_1 + \alpha_{12} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{1n} \vec{v}_n) + \beta_2(\alpha_{21} \vec{v}_1 + \alpha_{22} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{2n} \vec{v}_n) + \dots + \beta_k(\alpha_{k1} \vec{v}_1 + \alpha_{k2} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{kn} \vec{v}_n) = \vec{0}$$

Haciendo el producto por un escalar y reagrupando con factor común \vec{v}_1 tenemos

$$(\beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{21} + \dots + \beta_k \alpha_{k1}) \vec{v}_1 + (\beta_1 \alpha_{12} + \beta_2 \alpha_{22} + \dots + \beta_k \alpha_{k2}) \vec{v}_2 + \dots + (\beta_1 \alpha_{1n} + \beta_2 \alpha_{2n} + \dots + \beta_k \alpha_{kn}) \vec{v}_n = \vec{0}$$

Como los \vec{v}_i son linealmente independiente, se debe cumplir

$$\beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{21} + \dots + \beta_k \alpha_{k1} = 0$$

$$\beta_1 \alpha_{12} + \beta_2 \alpha_{22} + \dots + \beta_k \alpha_{k2} = 0$$

$$\vdots + \vdots + \dots + \vdots = 0$$

$$\beta_1 \alpha_{1n} + \beta_2 \alpha_{2n} + \dots + \beta_k \alpha_{kn} = 0$$

Que es un sistema lineal homogéneo con más incógnitas (k) que ecuaciones (n) puesto que por hipótesis $k > n$, por lo tanto tiene solución no trivial, lo que significa que existen $\beta_i, i = 1, 2, \dots, k$ no todos nulos tales que (1) se cumple.

Luego los k vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ son linealmente dependientes.

De este teorema se puede deducir un resultado un poco más general “*en un espacio vectorial V que posee una base con n elementos, cualesquiera p vectores de V , con $p > n$ son linealmente dependientes*”. Basta con observar que $n + 1$ de los p vectores dados son linealmente dependientes por el teorema anterior, por lo tanto los p vectores son linealmente dependientes pues contienen un subconjunto linealmente dependientes.

Este último resultado se aplica al siguiente

Teorema. Todas las bases de un mismo espacio vectorial poseen el mismo número de elementos.

D) Sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$, $[B] = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y $[B'] = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_m\}$ dos bases de V . Por el razonamiento anterior $m \leq n$ puesto que en caso contrario los vectores de la segunda base serían linealmente dependientes. De manera similar $n \leq$

m pues en caso contrario los vectores de la primera base serian linealmente dependientes. Por lo tanto $m = n$.

Estos dos resultados nos permiten dar la siguiente

Definición: el número de elementos que posee una base cualquiera de un espacio vectorial V recibe el nombre de dimensión de V ; este número será designado mediante $\dim(V)$.

Si el espacio vectorial contiene un solo elemento, que necesariamente ha de ser su elemento neutro, o sea $V = \{\vec{0}\}$, decimos que V tiene dimensión cero.

Ejemplo 1. Se determino que una base de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es el conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ por lo tanto $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Ejemplo 2. Se determino que una base de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ por lo tanto se puede afirmar que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Se puede demostrar que en general $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Ejemplo 3. Se demostró que el conjunto $A = \{(1-x)^2, (1-x), 1\}$ de $(\mathbb{P}(x), +, \mathbb{R}, \cdot)$ con $\mathbb{P}(x)$, polinomio de variable x , coeficientes reales y grado menor o igual a 2, es una base del respectivo espacio vectorial. Por lo tanto, se puede afirmar que $\dim(\mathbb{P}(x)) = 3$

Ejemplo 4. Se puede demostrar que en general $\dim(\mathbb{K}^{n \times m}) = n \times m$.

Ejemplo 5. Se puede demostrar que en general $\dim(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n[x]) = n + 1$. Siendo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n[x]$ los polinomios de grado menor o igual que n y de una indeterminada.

En muchas ocasiones conocemos la dimensión de un espacio vectorial, digamos n , en ese caso el siguiente teorema nos puede ayudar a concluir que un sistema de generadores de n elementos son linealmente independiente y por consiguiente base del espacio vectorial o que n vectores linealmente independientes generan al espacio vectorial y también son una base del mismo, de esta manera nos evitamos de probar la independencia lineal de los vectores o que generan al espacio. Estos resultados se expresan en el siguiente

Teorema. Sea el espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$ y $\dim(V) = n$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ son linealmente independientes.

ii) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ generan V .

iii) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de V .

Mostraremos que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$ y tendremos la equivalencia entre las tres condiciones.

Sea $[B]$ una base de V , entonces $[B] = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ pues $\dim(V) = n$.

$i) \Rightarrow ii)$. Suponemos que $\vec{w} \in V$, entonces hemos demostrado que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{w}\}$ son linealmente dependientes. Entonces existen los escalares $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ y $\beta \in K$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n + \beta \vec{w} = \vec{0}$$

Si $\beta = 0$, entonces algún $\alpha_i \neq 0$ pero esto es imposible pues los \vec{u}_i son linealmente independientes, por lo tanto $\beta \neq 0$. Luego \vec{w} es combinación lineal de los vectores \vec{u}_i . Dado que \vec{w} es arbitrario, hemos demostrado que los vectores \vec{u}_i generan V .

$ii) \Rightarrow iii)$ Si los vectores \vec{u}_i son linealmente dependientes, entonces podemos reducir este conjunto a uno linealmente independiente que genere a V con m elementos y $m < n$. Pero esto implicaría que hay una base de V con un número de elementos distinto de n , lo cual es imposible pues se ha demostrado que todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos. Por lo tanto, los vectores \vec{u}_i deben ser linealmente independiente, luego forman una base de V .

$iii) \Rightarrow i)$ es evidente por la definición de base de un espacio vectorial.

Interpretaciones de los resultados de este teorema pueden ser las siguientes

- a) n vectores linealmente independientes de un espacio vectorial n -dimensional constituyen una base del mismo.
- b) Todo sistema de generadores de n vectores de un espacio vectorial n -dimensional constituyen una base del mismo.
- c) y obviamente, toda base de n vectores de un espacio n -dimensional, constituye un conjunto linealmente independiente y sistema de generadores del espacio vectorial.