Análisis Matemático I

Trabajo Practico N° 5

- Ing. Roberto Lamas
- Prof. Adjunto Análisis Matemático I

Limite fundamental trigonométrico. Continuidad.
Función continua.

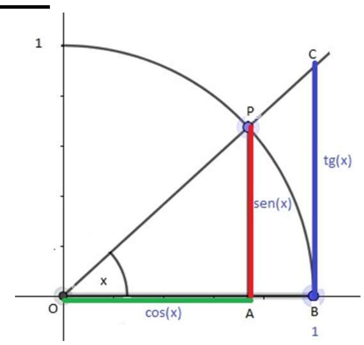
Limite fundamental trigonométrico

Dada $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$,

Dom (f) = R – { 0 }

Vamos a demostrar que

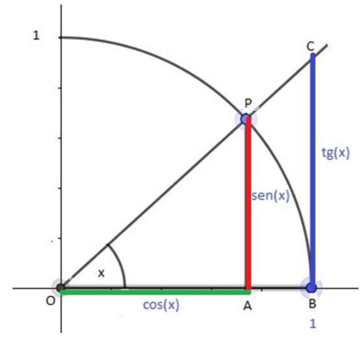
$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$



Vamos a calcular primero $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{sen(x)}{x}$

considerando que x ∈ (0 , δ)

Consideramos la comparación del área de dos triángulos y un sector circular.



Area del triang. OAP < Area del sec.circular OBP < Area del triang. OBC

A(OAP) < A(OBP) < A(OBC)

$$\frac{\cos(x)\, sen(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg(x)}{2}$$

Multiplicamos m.a.m. por $\frac{2}{sen(x)}$ NO cambia la desigualdad ya que estoy en el primer cuadrante y todas las funciones trigonométricas son positivas.

$$\cos(x) < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Aplicamos la recíproca

$$\frac{1}{\cos(x)} > \frac{sen(x)}{x} > \cos(x)$$

Aplicamos la propiedad del sándwich

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = 1\end{array}\right\} \quad \therefore \ \exists \lim_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Ahora determinaremos la paridad de la función, ya sabemos el limite por derecha queremos ver que ocurre por izquierda.

$$f(-x) = \frac{sen(-x)}{(-x)} = \frac{-sen(x)}{-x} = \frac{sen(x)}{x} = f(x)$$

La función dada es par, por lo tanto el comportamiento por derecha será el mismo por izquierda, por lo tanto si:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = 1 \ entonces \ \lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Entonces si:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

Por propiedad que relaciona límite con limites laterales

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Ejemplos de aplicación:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(6x)}{2x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{sen(5x)} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x) - 2x\cos(x)}{x\cos(x)} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5 - 5co\ \ (x)}{x^2} =$

e) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{sen(x)}{x - \pi} =$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(6x)}{2x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{sen(5x)} =$

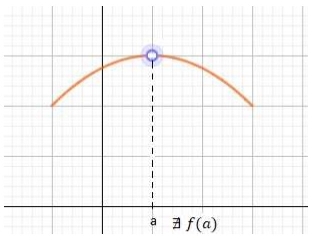
c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x) - 2x\cos(x)}{x\cos(x)} =$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{5-5co\ \ (x)}{x^2} =$

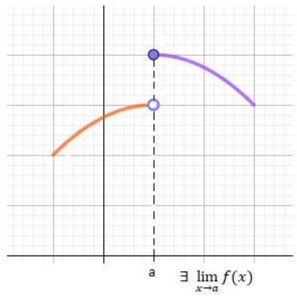
e) $\lim_{x \to \pi} \frac{sen(x)}{x-\pi} =$

CONTINUIDAD

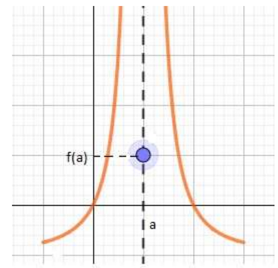
Cual es la idea de continuidad? Que entiende ud para poder decir que algo es continuo?



No existe f(a)

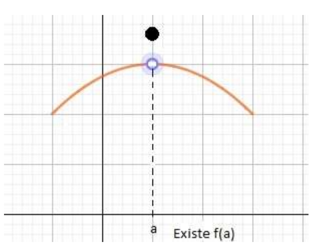


No existe el límite de la función

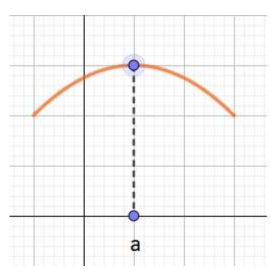


No existe el limite finito

No existe el límite finito de la función



Existe el límite pero es distinto al valor al cual esta definido



Existe el límite y es igual al valor al cual esta definido

Definición: f es continua en x = a $\Leftrightarrow$ 1) $\exists$ f(a)
2) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ es un limite finito 3) L = f(a)

Se pueden agrupar las tres en una sola definición:

Definición: f es continua en x = a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Interpretación gráfica: Gráficamente podemos comprobar que una función no es continua cuando el gráfico presenta saltos o cortes.

Los puntos donde la función no es continua se llaman puntos de discontinuidad.

Continuidad lateral

Definición: f es continua por la derecha (izquierda) en x = a $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$)

Relación entre continuidad y continuidad lateral

Si f es continua es continua en x = a $\Leftrightarrow$ f es continua por la derecha y por la izquierda en x = a.

Definición: f es continua en (a, b) sii f es continua $\forall\, x \in (a, b)$

Definición: f es continua en [a, b] sii f es continua $\forall\, x \in (a, b)$ y es continua por la derecha en x = a y por la izquierda en x = b.

Propiedades de las funciones continuas.

Propiedades algebraicas:

1) Sean f $\wedge$ g dos funciones continuas en x = a $\Rightarrow$

a) f $\pm$ g es continua en x = a.

b) f $*$ g es continua en x = a.

c) f / g es continua en x = a, salvo que g(a) = 0.

2) Sean f $\wedge$ g / $\exists \lim_{x \to a} f(x) = y_0$ y g es continua en $y_0 \Rightarrow$

$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$

3) Sea f continua en x = a $\wedge$ g continua en f(a) $\Rightarrow$ g o f es continua en x = a.

<u>Dem 1)</u> a) f continua en x = a ⇔ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ H1

g continua en x = a ⇔ $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ H2

Tesis : f + g es continua en x = a ⇔ $\lim_{x \to a} [f + g]_{(x)} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)_{(a)}$

2) Sean f ∧ g / ∃ $\lim_{x \to a} f(x) = y_0$ y g es continua en y_0 ⇒ $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$

<u>Dem 2)</u> $\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) =$

$= g(\lim_{x \to a} f(x))$

Limite de una función compuesta

3) Sea f continua en x = a ∧ g continua en f(a) ⇒ g o f es continua en x = a.

$$\lim_{x \to a} (g\ o\ f)(x) = (\ g\ o\ f\ )(a)$$

<u>Dem 3)</u> $\lim_{x \to a}\ (g\ o\ f)(x) = (g\ o\ f)(a)$

$$\lim_{x \to a} (g\ o\ f)(x) = \lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) =$$

$$= g\ \big(\ f(a)\big) = (\ g\ o\ f\ )(a)$$

Continuidad de una función compuesta

Ejemplo: Determinar los puntos de discontinuidad de f /

$$f(x) = \frac{sen(x+1)2^{x-2}\ \ln(x^2+8)}{(x-3)(x^2-4)}$$

Cuál es el dominio ? Cuales serían los posibles puntos de discontinuidad?

Clasificación de las discontinuidades:

Def 1: f es discontinua evitable (DE) en x = a ⇔ $\exists \lim_{x \to a} f(x)$, este es finito y f es discontinua en x = a.

Def 2: f es discontinua no evitable (DNE) en x = a ⇔ $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ finito y f es discontinua en x = a.

Sera DNE de salto si los limites laterales son finitos.

Sera DNE infinita si alguno de los límites laterales es infinito.

Ejemplo: Determine las discontinuidades de f y clasifíquelas.

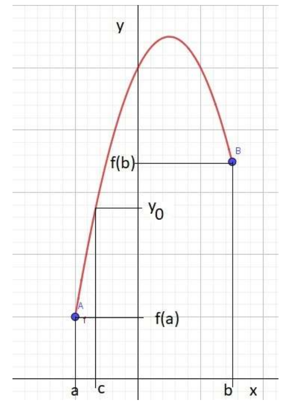
$$f \,/\, f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < -2 \\ 3 - 2x & -2 < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{x-5} & 3 \leq x \end{cases}$$

$$/\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < -2 \\ 3 - 2x & -2 < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \le x < 3 \\ \frac{1}{x-5} & 3 \le x \end{cases}$$

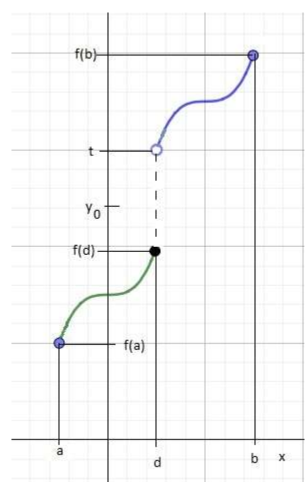
$$/\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < -2 \\ 3 - 2x & -2 < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \le x < 3 \\ \frac{1}{x-5} & 3 \le x \end{cases}$$

Teoremas sobre funciones continúas:

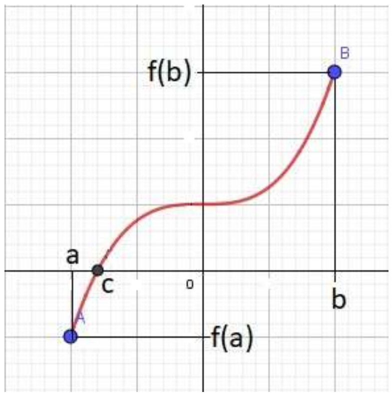
Teorema del valor intermedio: Sea f continua en [a , b] $\wedge$ f(a) $\neq$ f(b) ^ sea y_0 un valor entre f(a) y f(b) $\Rightarrow \exists$ c $\in$ (a , b) / f(c) = $y_{0.}$

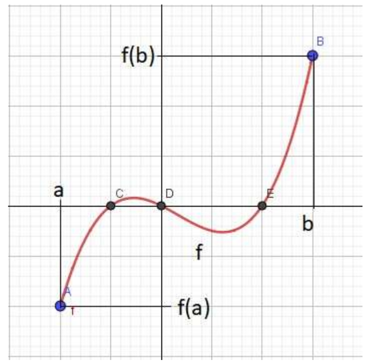


Una función continua pasa de un valor a otro tomando todos los valores intermedios.
[f(a) , f(b)] o [f(b), f(a)] $\subset$ Img(f)



Teorema de Bolzano: Sea f continua en [a , b]
$\wedge$ sg (f(a)) $\neq$ sg(f(b)) $\Rightarrow \exists$ c $\in$ (a , b) / f(c) = 0.

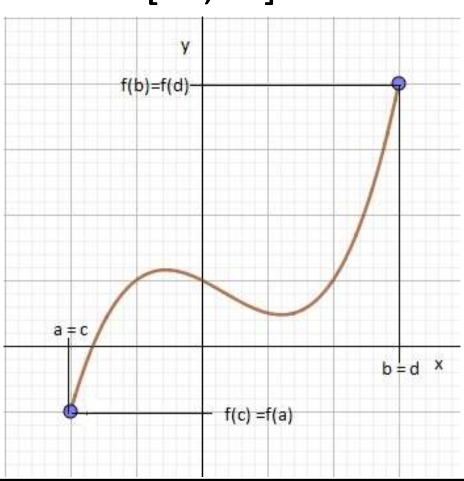


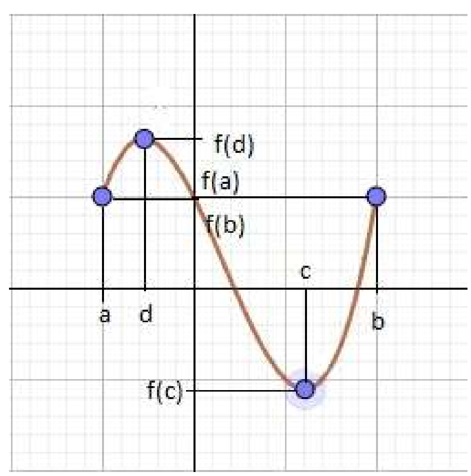


El grafico corta por lo menos una vez al eje x.

Teorema de Weierstrass (Teorema de los valores extremos)

Sea f continua en [a , b] $\Rightarrow \exists$ c, d $\in$ [a , b] / f(c) $\leq$ f(x)$\leq$ f(d)
$\forall$ x $\in$ [a , b].





c y d pueden coincidir con los extremos , uno o los dos, o ser puntos del interior del intervalo.

f(c) f(d) es cota inferior y superior de la imagen y además están en la imagen en consecuencia son Máximo y mínimo de la imagen.

Toda función continua en el intervalo cerrado esta acotada y su imagen tiene máximo y mínimo.

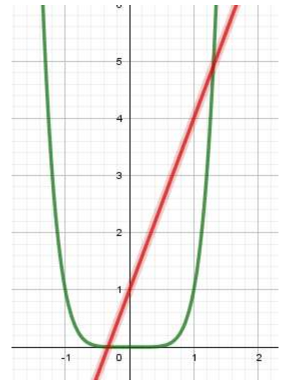
Propiedades de una función que conserva su función inversa.

T1) Sea $f : A \rightarrow B$ monótona en A $\Rightarrow \exists\, f^{-1} : B \rightarrow A \wedge$ es monótona en B.

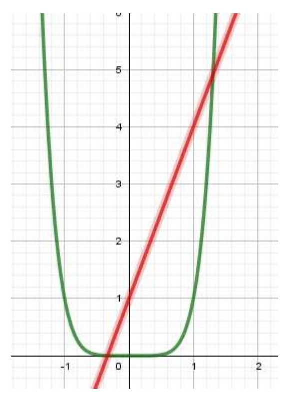
T2) Sea $f : A \rightarrow B$ monótona y continua en A $\Rightarrow \exists\, f^{-1} : B \rightarrow A$ $\wedge$ es continua en B.

Aplicación del Teorema del Valor Intermedio

Deseamos hallar los ceros de la función f / $f(x) = x^6 - 3x - 1$, podemos dividir la expresión en dos partes, el punto donde se produce la intersección será la solución que buscamos. Las funciones serán $g(x) = x^6$, $h(x) = 3x + 1$, graficamos las mismas.



Las raíces están comprendidas entre [- 1 , 0] y [1 , 2], vamos a ejemplificar la raíz del segundo intervalo.
Dividimos el intervalo inicial en 10 partes,



Como se observa la raíz esta comprendida en el intervalo[1,3 ; 1,4] , ya que allí se produce el cambio de signo, a este intervalo nuevamente lo dividimos en 10 partes y así sucesivamente.

x	y
1	-3
1,1	-2,528439
1,2	-1,614016
1,3	-0,073191
1,4	2,329536
1,5	5,890625
1,6	10,977216
1,7	18,037569
1,8	27,612224
1,9	40,345881
2	57

x	y
1,3	-0,073191
1,31	0,123913144
1,32	0,329852801
1,33	0,544900854
1,34	0,769336459
1,35	1,003445141
1,36	1,247518888
1,37	1,501856251
1,38	1,766762437
1,39	2,042549413
1,4	2,329536

x	y
1,3	-0,073191
1,301	-0,053870535
1,302	-0,034464122
1,303	-0,014971498
1,304	0,004607603
1,305	0,024273446
1,306	0,044026298
1,307	0,063866426
1,308	0,083794097
1,309	0,103809581
1,31	0,123913144

x	y
1,303	-0,014971498
1,3031	-0,013017484
1,3032	-0,011062605
1,3033	-0,00910686
1,3034	-0,00715025
1,3035	-0,005192774
1,3036	-0,003234432
1,3037	-0,001275223
1,3038	0,000684852
1,3039	0,002645794
1,304	0,004607603

Como se observa la raíz esta comprendida entre 1,3037 y 1,3038, pudiendo decir que la misma es 1,303 , asegurando 3 cifras decimales exactas.