

# Capítulo 3

## Polinomios

### 1.1.- Introducción

La resolución de ecuaciones algebraicas o la determinación de las raíces de un polinomio, está entre los problemas más antiguos de la matemática, se han encontrado problemas relacionados con este tema en el libro chino “Chu Chang Suan Shu” o “Arte Matemático en Nueve Secciones” que data del año 200 a.C.

Puesto que las ecuaciones polinómicas aparecen en un amplio rango de áreas de la ciencia, desde química y física básica hasta economía, el problema de determinar raíces de polinomios es, frecuentemente, un paso obligado en la resolución de problemas. Por ejemplo, la *optimización* es una técnica matemática que permite usar de manera eficiente, recursos escasos como el tiempo, la energía ó el dinero, bajo la guía de determinados objetivos. Las empresas la emplean para tomar decisiones respecto a la conveniencia o no de, por ejemplo, contratar más empleados, remodelar la empresa, comprar más productos para su posterior venta ó simplemente dejar el dinero en el banco. Para establecer la estrategia óptima se resuelven una serie de ecuaciones polinómicas que reflejan cuanta inversión y cuanto beneficio se asocia a cada acción. Las estrategias óptimas se asocian, generalmente, con las raíces de las ecuaciones propuestas.

Cuando se trata de hallar las raíces de un polinomio, se debe resolver la ecuación correspondiente (el polinomio igualado a cero). En algunos casos, esta tarea es sencilla (polinomios lineales o cuadráticos) pero en otros no es nada fácil. Para estos últimos, existen métodos útiles que permiten, si no determinar, *aproximar* las raíces buscadas.

Desde el siglo XVI se conocen fórmulas para determinar las raíces de polinomios de hasta cuarto grado en términos de los coeficientes del polinomio, con la utilización de operaciones algebraicas o la extracción de raíces –a partir de los de segundo grado, las fórmulas se complican un poco– pero, las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron irresolubles para los investigadores durante mucho tiempo, recién en 1824 Niels Henrik Abel demostró que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de quinto grado o mayores. Este resultado marcó el camino hacia el teorema de Galois.

En este tercer capítulo estudiaremos, luego de las generalidades de polinomios, las operaciones que se pueden realizar entre ellos y sus correspondientes propiedades. Se demostrarán teoremas y analizarán distintas situaciones que permitirán determinar las raíces de polinomios.

### 1.2.- Conceptos básicos

Si bien los polinomios pueden ser considerados como un tipo especial de funciones, estos tienen una estructura que permite realizar operaciones entre ellos y tratarlos como objetos algebraicos. Particularmente estudiaremos los polinomios de una sola indeterminada, la cual la designaremos con  $x$ .

**Definición:** un polinomio,  $P(x)$ , en una indeterminada,  $x$ , con coeficientes en  $\mathbb{C}$  es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Escrito en su forma sintética:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Los  $a_i$ , llamados coeficientes del polinomio  $P(x)$ , son números complejos. Si los  $a_i$  son todos números reales se dice que  $P(x)$  es un polinomio con coeficientes en  $\mathbb{R}$  y si todos los  $a_i$  son racionales se dice que  $P(x)$  es un polinomio con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ , de igual manera para el caso de coeficientes enteros.

Al coeficiente  $a_n$  se le da el nombre de coeficiente principal (y al término que lo contiene: término principal) mientras que al  $a_0$  el de término independiente. Cuando el coeficiente principal es 1, es decir  $a_n = 1$ , se dice que  $P(x)$  es un polinomio mónico.

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes complejos se denota  $\mathbb{C}[x]$ , el de los polinomios con coeficientes reales,  $\mathbb{R}[x]$ , el de polinomios con coeficientes racionales,  $\mathbb{Q}[x]$ . Obviamente,  $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ .

Vamos a usar la letra  $\mathbb{K}$  para representar a cualquiera de los conjuntos numéricos  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , de forma que  $\mathbb{K}[x]$  representará el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . El beneficio de hacer esto es que vamos a poder enunciar (usando  $\mathbb{K}$ ) resultados de manera más simple en lugar de tener que escribir un enunciado para cada conjunto numérico.

Ejemplos:

$$S(x) = 3x^3 - \sqrt{5}x^2 + 1$$

$$Q(x) = (2 - 3i)x^5 + 3x^2 + (1 - 4i)$$

$$R(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 2$$

El polinomio  $S(x)$  es de coeficientes reales, mientras que el polinomio  $Q(x)$  es de coeficientes complejos y el  $R(x)$  es de coeficientes enteros.

Sea el polinomio  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , se considerará  $a_i = 0$  si el término en  $x^i$  no se encuentra en  $P(x)$ .

En  $S(x)$  del ejemplo anterior  $a_1 = 0$  y en  $Q(x)$   $a_4 = a_3 = a_1 = 0$

En general pueden presentarse dos casos:

- Existe al menos un coeficiente  $a_i$  no nulo. Por lo tanto llamaremos grado del polinomio  $P(x)$  y se simbolizará  $gr(P(x))$ , al mayor entero  $i$  tal que  $a_i$  es no nulo.
- Todos los coeficientes son nulos. En ese caso el polinomio  $P(x)$  es el polinomio nulo.

Continuando con el ejemplo anterior:  $gr(S(x)) = 3$ ,  $gr(Q(x)) = 5$  y  $gr(R(x)) = 4$ .

Otros polinomios importantes son los polinomios constantes, de la forma  $a_0x^0$  donde  $a_0 \in \mathbb{K}$ , son de grado 0 si  $a_0 \neq 0$ . Si identificamos el elemento  $a_0 \in \mathbb{K}$  con el polinomio constante  $a_0x^0 \in \mathbb{K}[x]$ , podemos pensar que  $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[x]$ . Por ejemplo,  $T(x) = 15$ .

Convenimos en que el polinomio nulo carece grado, aunque algunos autores le atribuyen grado  $-1$  y en otros casos le asignan grado infinito.

¿Cuándo dos polinomios son iguales? Consideramos que dos polinomios son iguales cuando tienen el mismo grado y sus coeficientes coinciden término a término, pero también los consideraremos iguales a polinomios que difieran en términos con coeficientes nulos.

**Igualdad de polinomios:** los polinomios  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  y  $Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ , son iguales si  $a_i = b_i$  para  $0 \leq i \leq \min(n, m)$  y si  $a_i = 0$  para  $i = m + 1, m + 2, \dots, n$  en el caso que  $n > m$ , ó si  $b_i = 0$  para  $i = n + 1, n + 2, \dots, m$  cuando  $n < m$ .

Esto significa, como se dijo anteriormente que, por ejemplo, son iguales los polinomios:

$P(x) = 3x^2 + 2x - 4$  y  $Q(x) = 3x^2 + 2x - 4$  pero también vamos a considerar iguales a los polinomios:

$$R(x) = 0x^4 + 0x^3 + 5x^2 + 8x - 2 \text{ y } T(x) = 5x^2 + 8x - 2$$

Esto nos permite afirmar que en el caso del polinomio nulo, al considerar todos los  $a_i = 0$ , existe un único polinomio nulo en  $\mathbb{K}[x]$ .

Un punto importante sobre los polinomios es que se puede reemplazar la indeterminada  $x$  por un elemento de  $\mathbb{K}$  y realizar las operaciones indicadas. A esto se lo llama especializar o evaluar el polinomio.

**Evaluación de polinomios:** sea el polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$  y el número  $b \in \mathbb{C}$ , definimos  $P(b) = \sum_{i=0}^n a_i b^i$  como el elemento de  $\mathbb{K}$  que obtenemos al reemplazar la indeterminada  $x$  por el número  $b$  y efectuamos el cálculo expresado en  $P$ .

Evidentemente  $P(b) \in \mathbb{K}$ , esto significa que al evaluar un polinomio se obtiene por resultado un número.

Ejemplo: sea el polinomio  $P(x) = 3x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$  y  $b = 2$  entonces:

$$P(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ es decir } P(2) = 5 \text{ y } P(2) \in \mathbb{Z}.$$

## 2.- Operaciones con polinomios

Como se dijo anteriormente, con los polinomios se pueden realizar operaciones tales como suma, producto e inclusive división. La realización de estas operaciones es muy sencilla. Por ejemplo, realizar la suma (ó resta) de polinomios se procede a sumar (restar) respectivamente los términos correspondientes a la misma potencia de la indeterminada.

**2.1.- Suma de polinomios:** sean los polinomios  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  y  $Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$  definimos la suma de estos polinomios como:  $(P + Q) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$  donde, de igual

manera que la igualdad de polinomios, convenimos en que  $b_i = 0$  para  $i = m + 1, m + 2, \dots, n$  en el caso que  $n > m$ , ó si  $a_i = 0$  para  $i = n + 1, n + 2, \dots, m$  cuando  $n < m$ .

Ejemplo: si  $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$  y  $Q(x) = 4x^4 + x^3 - 4x^2 - 6x + 5$  entonces:

$$P(x) + Q(x) = (0 + 4)x^4 + (0 + 1)x^3 + (2 - 4)x^2 + (3 - 6)x + (-5 + 5)$$

$$P(x) + Q(x) = 4x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$$

De manera análoga podemos definir la resta de los polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$  por:

$$(P - Q) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i - b_i)x^i \text{ con idéntico convenio.}$$

Ejemplo: si  $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$  y  $Q(x) = 4x^4 + x^3 - 4x^2 - 6x + 5$  entonces:

$$P(x) - Q(x) = (0 - 4)x^4 + (0 - 1)x^3 + (2 + 4)x^2 + (3 + 6)x + (-5 - 5)$$

$$P(x) - Q(x) = -4x^4 - x^3 + 6x^2 + 9x - 10$$

Destacamos dos cuestiones:

a) estas operaciones están definidas de tal forma que se verifica:

$$(P + Q)(b) = P(b) + Q(b) \quad \forall P, Q \in \mathbb{K}[x] \quad \forall b \in \mathbb{K} \text{ y}$$

$$(P - Q)(b) = P(b) - Q(b) \quad \forall P, Q \in \mathbb{K}[x] \quad \forall b \in \mathbb{K}.$$

b) el grado de la suma o resta de dos polinomios  $P$  y  $Q$  es menor o igual que el máximo de los grados de dichos polinomios.

$$gr(P \pm Q) \leq \max(gr(P), gr(Q))$$

## 2.2.- Producto de un polinomio por un escalar:

Dado un polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$ , el producto de  $P$  por un escalar  $\lambda$ , es otro polinomio  $\lambda P(x)$ , el cual se obtiene multiplicando cada coeficiente de  $P$  por el escalar  $\lambda$ .

Sea el polinomio  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  y el escalar  $\lambda$  entonces:

$$\lambda P(x) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n \lambda a_i x^i$$

Ejemplo: sea  $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 8$  y  $\lambda = -4$  entonces:

$$-4P(x) = -12x^3 + 28x^2 - 4x + 32$$

De acuerdo a la definición del producto de un polinomio por un escalar, si el polinomio es  $P(x)$  y el escalar es:

a)  $\lambda = -1$  entonces  $\lambda P(x) = -P(x)$  polinomio opuesto a  $P$ .

b)  $\lambda = 0$  entonces  $\lambda P(x) = N$  polinomio nulo.

## Propiedades de la suma y producto por un escalar

Veremos a continuación, cuáles son las propiedades algebraicas que poseen las dos operaciones básicas antes definidas con polinomios, estas propiedades son similares a las que poseen las operaciones de suma y producto de números reales.

P<sub>1</sub>) La suma es ley de composición interna en  $\mathbb{K}[x]$ .

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow (P + Q) \in \mathbb{K}[x]$$

Esto significa que la suma, como está definida, es una operación que a cada par de polinomios de  $\mathbb{K}[x]$  le hace corresponder un único polinomio de  $\mathbb{K}[x]$ .

D) Es inmediata por la definición de suma en  $\mathbb{K}[x]$ .

P<sub>2</sub>) La suma es asociativa en  $\mathbb{K}[x]$ .

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow (P + Q) + R = P + (Q + R)$$

D) Sean  $a_i, b_i, c_i$  los  $i$ -ésimos coeficientes de los polinomios  $P, Q, R$  respectivamente. Por lo tanto  $a_i + b_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $P + Q$  así que  $(a_i + b_i) + c_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $(P + Q) + R$ . Como  $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i) \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad asociativa en  $\mathbb{K}$ , los coeficientes respectivos de  $(P + Q) + R$  y de  $P + (Q + R)$  son iguales. Concluimos entonces que  $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ .

P<sub>3</sub>) La suma es conmutativa en  $\mathbb{K}[x]$ .

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow P + Q = Q + P.$$

D) Sean  $a_i, b_i$  los  $i$ -ésimos coeficientes de los polinomios  $P$  y  $Q$  respectivamente. Por lo tanto  $a_i + b_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $P + Q$ . Como  $a_i + b_i = b_i + a_i \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad conmutativa en  $\mathbb{K}$ , los coeficientes respectivos de  $P + Q$  y de  $Q + P$  son iguales. Concluimos entonces que  $P + Q = Q + P$ .

P<sub>4</sub>) Existe un único elemento neutro para la suma en  $\mathbb{K}[x]$ .

El elemento neutro se denota con  $N(x)$ .

$$\exists N \in \mathbb{K}[x] / \forall P \in \mathbb{K}[x] : P + N = N + P = P.$$

D) La existencia es evidente puesto que se definió el polinomio nulo como aquel polinomio cuyos coeficientes son cero.

Respecto de la unicidad del polinomio nulo, es una consecuencia de la igualdad de polinomios que se destacó en ese apartado.

P<sub>5</sub>) Todo polinomio de  $\mathbb{K}[x]$  admite un único inverso aditivo u opuesto en  $\mathbb{K}[x]$ .

El polinomio opuesto a uno cualquiera  $P$ , se nota por  $-P$ .

$$\forall P \in \mathbb{K}[x], \exists (-P) \in \mathbb{K}[x] \text{ único} / P + (-P) = -P + P = N.$$

La existencia de tal polinomio es evidente puesto que cuando se definió producto por un escalar, si el escalar es  $-1$  al multiplicarse por cualquier polinomio se obtiene el opuesto de dicho polinomio.

Para demostrar la unicidad del elemento opuesto vamos a suponer que para un polinomio  $P$  de  $\mathbb{K}[x]$  existen dos opuestos  $P_1$  y  $P_2$  por lo tanto se debe cumplir que  $P + P_1 = N$  y también que  $P + P_2 = N$  de donde se deduce que  $P_1 = P_2$ . Consecuentemente el inverso aditivo u opuesto de cada elemento de  $\mathbb{K}[x]$  es único.

P<sub>6</sub>) El producto es ley de composición externa en  $\mathbb{K}[x]$  con escalares en  $\mathbb{C}$ .

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow \alpha P \in \mathbb{K}[x].$$

Esto significa que el producto de un polinomio de  $\mathbb{K}[x]$  por un escalar, como está definido, es una operación que a cada par polinomio–escalar, le hace corresponder un único elemento de  $\mathbb{K}[x]$ .

D) La existencia de tal polinomio es inmediata, por la definición de producto de un polinomio de  $\mathbb{K}[x]$  por un escalar.

P<sub>7</sub>) El producto por un escalar satisface la asociatividad mixta.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[x]: \alpha(\beta P) = (\alpha\beta) P.$$

D) Sea  $a_i$  el  $i$ -ésimo coeficiente del polinomio  $P$ . Por lo tanto  $\beta a_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $\beta P$  y por lo tanto  $\alpha(\beta a_i)$  el  $i$ -ésimo coeficiente de  $\alpha(\beta P)$ . Como  $\alpha(\beta a_i) = (\alpha\beta)a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad asociativa en  $\mathbb{K}$ , las componentes respectivas de  $\alpha(\beta P)$  y de  $(\alpha\beta)P$  son iguales. Concluimos entonces que  $\alpha(\beta P) = (\alpha\beta) P$ .

P<sub>8</sub>) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en  $\mathbb{K}$ .

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[x]: (\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P.$$

D) Sea  $a_i$  el  $i$ -ésimo coeficiente del polinomio  $P$ . Por lo tanto  $(\alpha + \beta)a_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $(\alpha + \beta)P$ . Como  $(\alpha + \beta)a_i = \alpha a_i + \beta a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad distributiva del producto en  $\mathbb{K}$ , respecto a la suma, las componentes respectivas de:  $(\alpha + \beta)P$  y de  $\alpha P + \beta P$  son iguales. Entonces :  $(\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P$ .

P<sub>9</sub>) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en  $\mathbb{K}[x]$ .

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall P, Q \in \mathbb{K}[x] : \alpha(P + Q) = \alpha P + \alpha Q.$$

D) Sean  $a_i, b_i$  los  $i$ -ésimos coeficientes de los polinomios  $P$  y  $Q$  respectivamente. Por lo tanto  $a_i + b_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $P + Q$  como también  $\alpha(a_i + b_i)$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $\alpha(P + Q)$ . Como  $\alpha(a_i + b_i) = \alpha a_i + \alpha b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad distributiva del producto en  $\mathbb{K}$ , respecto a la suma, los coeficientes respectivos de  $\alpha(P + Q)$  y de  $\alpha P + \alpha Q$  son iguales. Concluimos entonces que  $\alpha(P + Q) = \alpha P + \alpha Q$ .

P<sub>10</sub>) La unidad en  $\mathbb{K}$  es el neutro para el producto por un escalar.

$$\forall P \in \mathbb{K}[x]: 1 P = P.$$

Como el conjunto de los polinomios con las operaciones definidas: suma y producto por un escalar cumple con las propiedades enunciadas, se dice que este conjunto tiene estructura de espacio vectorial.

### 2.3.- Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término de uno de ellos por cada uno de los términos del otro polinomio y luego se suman los términos semejantes.

Dados los polinomios  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  y  $Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$  entonces:

$$P(x) Q(x) = \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^m b_j x^j \right)$$

$$P(x) Q(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_i x^i) (b_j x^j)$$

$$P(x) Q(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j x^{i+j}$$

					$-2x^5$	$+5x^3$	$-x^2$	$+5x$	$-4$
$\times$						$5x^5$	$-x^2$	$-12x$	$+1$
					$-2x^5$	$+5x^3$	$-x^2$	$+5x$	$-4$
					$+24x^6$	$-60x^4$	$+12x^3$	$-60x^2$	$+48x$
					$+2x^7$	$-5x^5$	$+x^4$	$-5x^3$	$+4x^2$
$-10x^{10}$	$+25x^8$	$-5x^7$	$+25x^6$	$-20x^5$					
$-10x^{10}$	$+25x^8$	$-3x^7$	$+49x^6$	$-27x^5$	$-59x^4$	$+12x^3$	$-57x^2$	$+53x$	$-4$

Al igual que en la suma de polinomios, la definición de producto de polinomios es consistente con la evaluación de polinomios, es decir para se verifique que:

Una consecuencia de la definición del producto  $P \cdot Q$  es que el coeficiente principal de  $P \cdot Q$  es el producto del coeficiente principal de  $P$  por el de  $Q$ . En particular, al estar trabajando en  $\mathbb{K}$  se puede afirmar que:

## Propiedades del producto de polinomios

Si  $P \in \mathbb{K}[x]$  y  $Q \in \mathbb{K}[x]$  entonces  $(P, Q) \in \mathbb{K}[x]$

Esto significa que el producto de polinomios, como está definido, es una operación que a cada par de polinomios le hace corresponder un único elemento de  $\mathbb{K}[x]$ .

D) Es inmediata por la definición de producto de polinomios.

P<sub>2</sub>) El producto es asociativo en  $\mathbb{K}[x]$ .

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow (P.Q).R = P.(Q.R)$$

D) Sean  $a_i, b_i, c_i$  los  $i$ -ésimos coeficientes de los polinomios  $P, Q, R$  respectivamente. Por lo tanto  $a_i b_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $PQ$  así que  $(a_i b_i) c_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $(PQ)R$ . Como  $(a_i b_i) c_i = a_i (b_i c_i) \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad asociativa en  $\mathbb{K}$ , los coeficientes respectivos de  $(PQ)R$  y de  $P(QR)$  son iguales. Concluimos entonces que  $(PQ)R = P(QR)$ .

P<sub>3</sub>) El producto es conmutativo en  $\mathbb{K}[x]$ .

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow P Q = Q P.$$

D) Sean  $a_i, b_i$  los  $i$ -ésimos coeficientes de los polinomios  $P$  y  $Q$  respectivamente. Por lo tanto  $a_i b_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $P Q$ . Como  $a_i b_i = b_i a_i \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad conmutativa en  $\mathbb{K}$ , los coeficientes respectivos de  $P Q$  y de  $Q P$  son iguales. Concluimos entonces que  $P Q = Q P$ .

P<sub>4</sub>) Existe un único elemento neutro para el producto en  $\mathbb{K}[x]$ .

El elemento neutro para el producto es el polinomio  $P(x) = 1x^0 = 1$

$$\forall P \in \mathbb{K}[x], P \neq N : \exists N_e \in \mathbb{K}[x] / P N_e = N_e P = P$$

D) La existencia de este polinomio es evidente ya que en la definición de polinomios se vieron los polinomios constantes.

Para demostrar la unicidad del neutro vamos a suponer que existen dos neutros para el producto:  $N_{e1}$  y  $N_{e2}$ , por lo tanto, si:

$$N_{e1} \text{ es neutro entonces } N_{e1} + N_{e2} = N_{e2}$$

$$N_{e2} \text{ es neutro entonces } N_{e2} + N_{e1} = N_{e1}$$

De donde se deduce, por ser los primeros miembros de ambas igualdades iguales, que  $N_{e1} = N_{e2}$  y consecuentemente el neutro para el producto, es único.

P<sub>5</sub>) Inverso multiplicativo.

Sólo los polinomios de grado cero ( $a_0 x^0$  con  $a_0 \neq 0$ ) tienen recíproco, pues si  $P$  es un polinomio y  $Q$  su recíproco, su producto debe ser igual al elemento neutro, es decir  $P \cdot Q = Q \cdot P = N_e$ , es decir  $P \cdot Q = 1$ . Esto trae como consecuencia que la suma de los grados de  $P$  y  $Q$  debe ser cero, esto exige a su vez que tanto el grado de  $P$  como el de  $Q$  sean iguales a cero.

P<sub>6</sub>) El producto es distributivo respecto a la suma en  $\mathbb{K}[x]$ .

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[x] : P(Q + R) = P Q + P R$$

D) Sean  $a_i, b_i, c_i$  los  $i$ -ésimos coeficientes de los polinomios  $P, Q$  y  $R$  respectivamente. Por lo tanto  $b_i + c_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $Q + R$  como también  $a_i(b_i + c_i)$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de  $P(Q + R)$ . Como  $a_i(b_i + c_i) = a_i b_i + a_i c_i \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad distributiva del producto en  $\mathbb{K}$ , respecto a la suma, los coeficientes respectivos de  $P(Q + R)$  y de  $P Q + P R$  son iguales. Concluimos entonces que  $P(Q + R) = P Q + P R$ .

## 2.4.- Raíces de un polinomio

Estudiaremos en primer lugar que es raíz ó cero de un polinomio, es decir aquellos números que al evaluarlos en el polinomio, anulan a este.

**Definición:** sean el polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$  y el número  $b \in \mathbb{K}$ , se dice que  $b$  es un cero o una raíz de  $P$  si  $P(b) = 0$ .

Ejemplo 1: los polinomios de grado 1,  $a_1 x + a_0$  siempre tienen una única raíz  $-\frac{a_0}{a_1}$ . Sea el polinomio  $P(x) = 2x + 4$  se anula para  $x = -2$  ya que  $P(-2) = 0$ .



Ejemplo 2: sea el polinomio de segundo grado  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  cuya notación más popular es  $P(x) = ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$  y  $a, b, c \in \mathbb{K}$ , ya conocemos una fórmula para calcular las raíces (resolvente para la ecuación de segundo grado). Esta fórmula puede demostrarse utilizando el procedimiento conocido como “completar cuadrados”:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(x) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$P(x) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

$$P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$$

$$P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

El número  $\Delta = b^2 - 4ac$  se denomina *discriminante* del polinomio cuadrático  $P$ . Si  $\Delta$  tiene una raíz cuadrada en  $\mathbb{K}$ , es decir si existe un elemento  $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{K}$  que resuelva la ecuación  $x^2 = \Delta$  (lo que es posible en  $\mathbb{R}$  si  $\Delta \geq 0$  y siempre en  $\mathbb{C}$ ) entonces podemos escribir  $P$  como diferencia de cuadrados:

$$P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$$

$$P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right]$$

$$P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right]$$

$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \text{ con } \alpha_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ y } \alpha_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Por lo tanto  $P$  se anula cuando  $x = \alpha_1$  ó  $x = \alpha_2$ , es decir que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son exactamente las raíces de  $P$ .

En resumen, un polinomio de segundo grado tiene exactamente dos raíces, siempre que sea posible *extraer la raíz cuadrada* de su discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  en  $\mathbb{K}$ , particularmente esto es posible siempre en  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  y en  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  solo si  $\Delta \geq 0$ .

La denominación de “raíz” ha quedado por razones históricas, ya que los matemáticos pensaban, inicialmente, que los ceros de un polinomio podrían determinarse mediante fórmulas involucrando la extracción de raíces análogas a la que hemos estudiado para los polinomios de segundo grado. De hecho esto es posible si el grado de  $P$  es tres o cuatro (la fórmulas correspondientes se complican un poco), sin embargo luego se demostró que esto no es en general posible para polinomios de grado mayor o igual a cinco.

### **Grafica de polinomios**

La gráfica de todos los polinomios son curvas suaves (no tienen elevaciones ni depresiones abruptas) y continuas (sin interrupciones en su trazo); distinguiéndose dos elementos: las ramas y la parte central. En la parte central, la grafica se puede plegar varias veces.

a) Las ramas: no son nunca rectas, aunque pueden parecerlo si el dominio representado es muy extenso. Pueden dirigirse ambas hacia arriba, ambas hacia abajo o bien una en cada dirección. Si se representa la gráfica de un polinomio en un intervalo mayor, la forma de los extremos prácticamente no varía, vale decir, los extremos de una gráfica nos dan una idea de cómo continúa la gráfica de un polinomio.

Por ejemplo, las ramas de la gráfica del polinomio  $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2$  se dirigen ambas hacia arriba y tiene tres pliegues en su parte central.

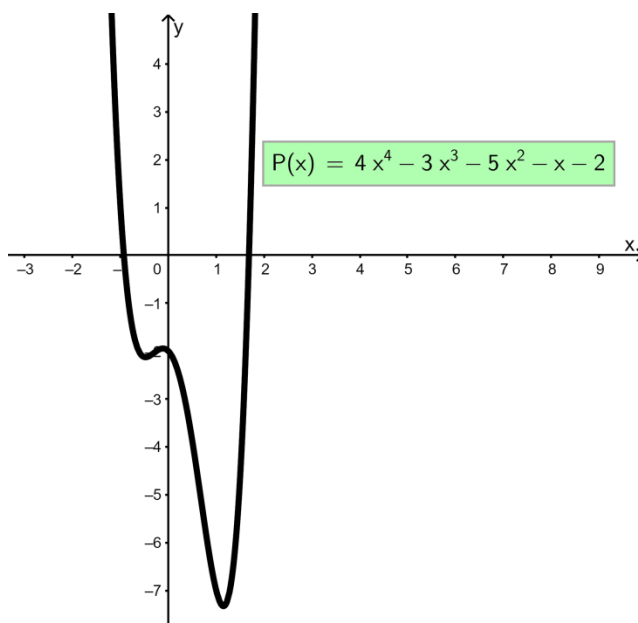


Gráfico 1

En cambio las ramas de la gráfica de  $Q(x) = -3x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x - 4$  se dirigen ambas hacia abajo y también tiene tres pliegues.

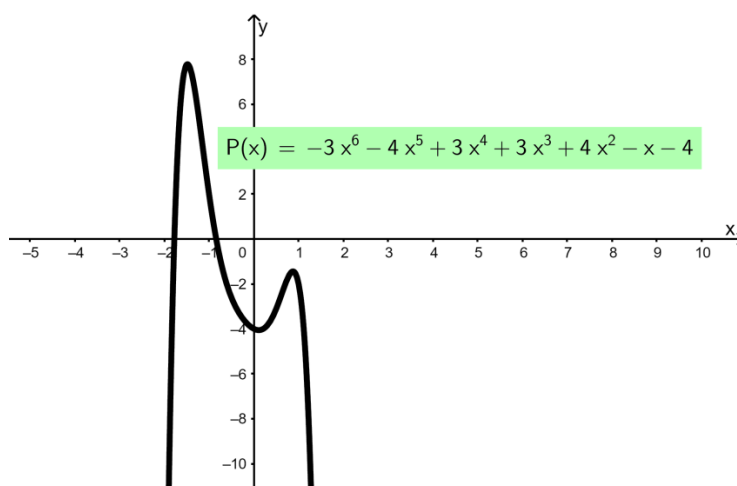


Gráfico 2

Finalmente las ramas de la gráfica de  $R(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$  se dirigen una hacia abajo y la otra hacia arriba y tiene dos pliegues.

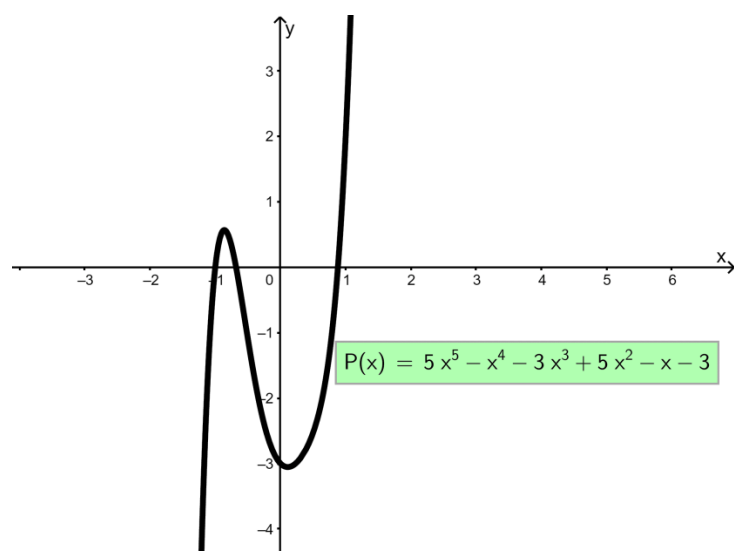


Grafico 3

Estas observaciones pueden generalizarse de la siguiente manera:

Sea el polinomio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  con  $a_n \neq 0$ , entonces:

Si  $n$  es par y  $a_n < 0$  la gráfica de  $P(x)$  tendrá las dos ramas hacia abajo pero si  $a_n > 0$  tendrá ambas ramas hacia arriba.

Si  $n$  es impar una rama va hacia abajo y la otra hacia arriba

Este comportamiento obedece a que el coeficiente principal de un polinomio determina si la grafica del mismo crecerá o decrecerá hacia la derecha de algún valor de  $x$ . Conforme el valor de  $x$  aumenta, este término terminará por dominar a todos los demás del polinomio. Por lo tanto si el coeficiente de este término es positivo, *en algún momento* la gráfica comenzará a crecer a medida que el valor de  $x$  aumente. Si el coeficiente principal es negativo, *en algún momento* la gráfica comenzará a decrecer a medida que el valor de  $x$  disminuya.

b) La parte central: en esta parte la gráfica se pliega varias veces, el número de pliegues depende del grado del polinomio. El máximo de pliegues de la gráfica de un polinomio es su grado menos 1; de este modo sabemos, la gráfica de un polinomio lineal no puede tener pliegues, en cambio la gráfica de un polinomio cuadrático tiene exactamente un pliegue, la gráfica de un polinomio de grado tres tiene, como máximo dos pliegues.

La gráfica de un polinomio debe observarse de izquierda a derecha, así por ejemplo en la gráfica correspondiente a  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$  comprobamos que al principio se dirige hacia arriba, después hacia abajo y, finalmente hacia arriba.

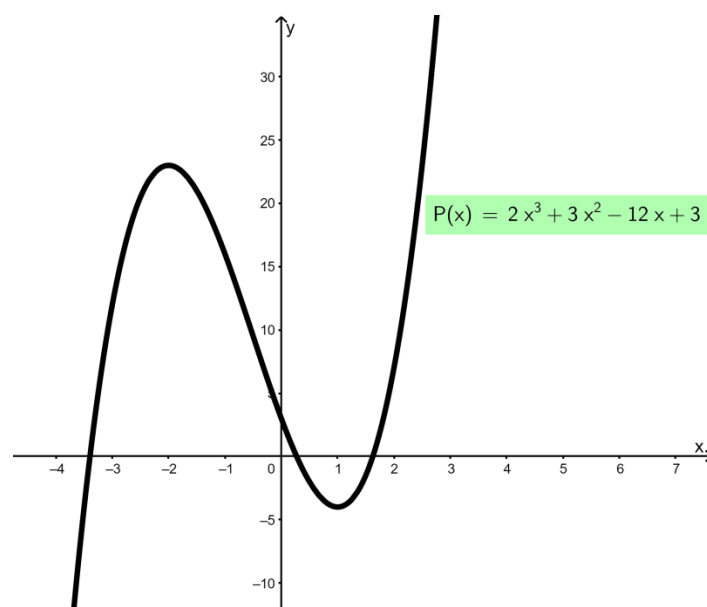


Gráfico 4

De manera más rigurosa podemos decir que:

- i) La gráfica de un polinomio será creciente cuando, a medida que aumenta el valor de  $x$ , al evaluar el polinomio también obtenemos un valor cada vez mayor.
- ii) La gráfica de un polinomio será decreciente cuando, a medida que aumenta el valor de  $x$ , al evaluar el polinomio –por el contrario– obtenemos un valor cada vez menor.

De este modo, en el ejemplo anterior, la gráfica es creciente cuando  $x < -2$ , es decreciente entre  $-2$  y  $1$  y vuelve a ser creciente a partir de  $1$ , tal como lo muestra el siguiente gráfico.

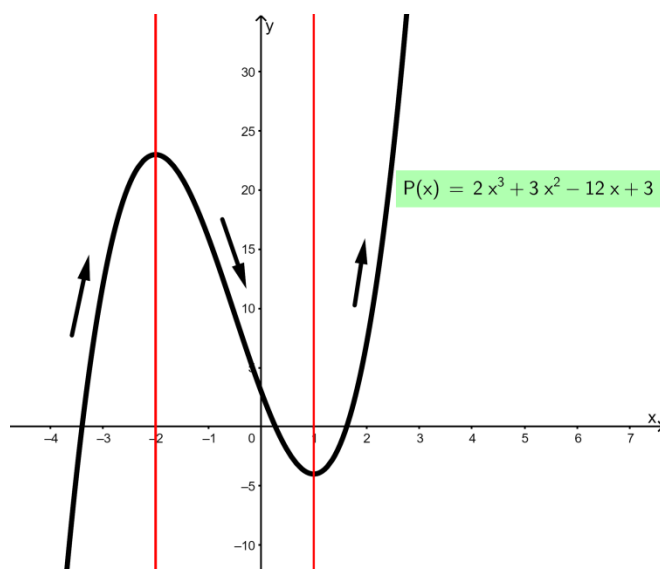


Gráfico 5

Otros puntos importantes que podemos tener en cuenta a la hora de observar y/o esquematizar la gráfica de un polinomio, son los siguientes:

- i) Los máximos y los mínimos; se denomina máximo relativo al punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a decreciente, el valor del polinomio en este punto es mayor que el

de cualquier otro punto de la gráfica que se encuentre cercano. En cambio un mínimo relativo es aquel punto en el que la función pasa de ser decreciente a creciente, el valor del polinomio en este punto es menor que el de cualquier otro punto de la gráfica que se encuentre cercano.

En la gráfica del ejemplo anterior,  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$  podemos observar que un máximo relativo se encuentra en  $(-2, P(-2))$  es decir en  $(-2, 23)$  mientras que encontramos un mínimo relativo en  $(1, P(1))$  es decir en  $(1, -4)$ .

ii) La intersección con el eje  $\overrightarrow{oy}$ : evidentemente solo existe un único punto de intersección con el eje  $\overrightarrow{oy}$ . Este punto es el que tiene abscisa  $x = 0$ .

Por ejemplo, si  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$ , el único punto de intersección de la gráfica de este polinomio con el eje  $\overrightarrow{oy}$  es  $(0, P(0))$  es decir  $(0, 10)$  tal como se puede observar en la gráfica correspondiente.

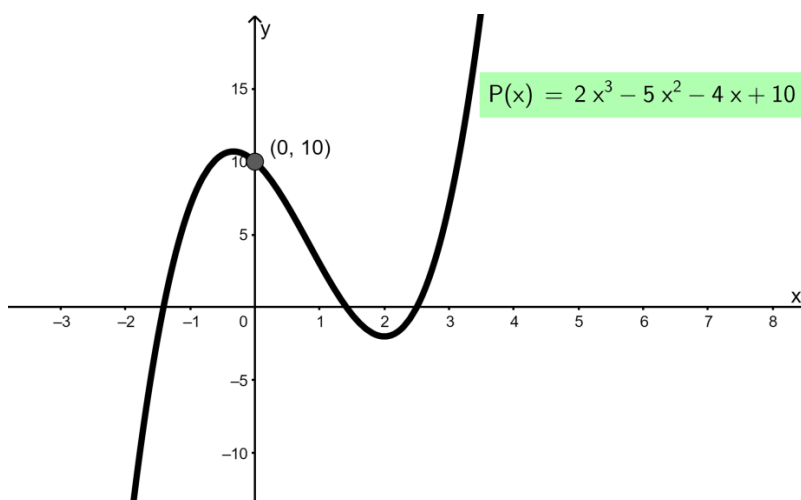
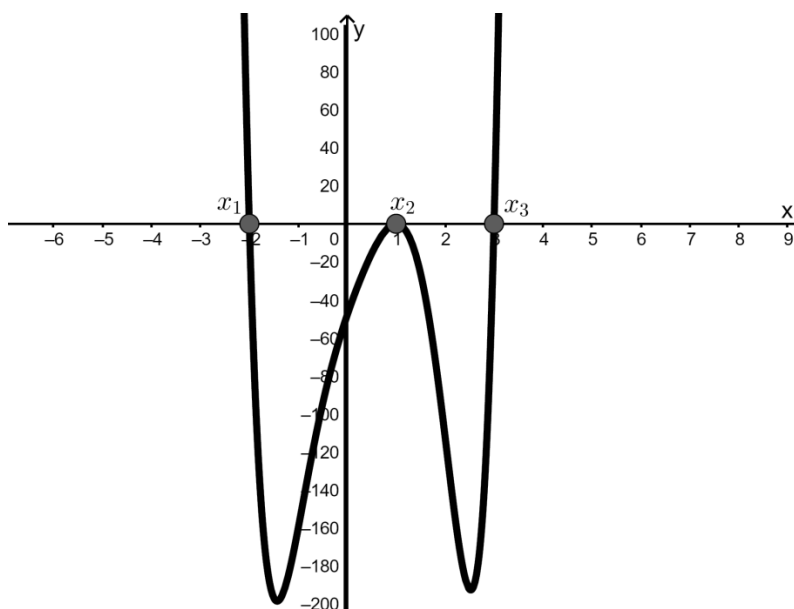


Gráfico 6

iii) La intersección con el eje  $\overrightarrow{ox}$ : en este caso puede haber un número de intersecciones igual al grado del polinomio. Para esto se puede resolver la ecuación  $P(x) = 0$  o bien buscar un método –que luego se estudiarán– para determinar las raíces reales del polinomio. Es decir que, gráficamente, las raíces reales del polinomio son los puntos en donde este interseca al eje  $\overrightarrow{ox}$ .

Si se conocen las raíces de un polinomio, se puede expresar este en función de ellas.

Por ejemplo el polinomio  $P(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 48$  tiene tres raíces reales  $x_1 = 1$  (doble),  $x_2 = 3$  y  $x_3 = -2$ , por lo tanto el polinomio se puede expresar como:  $P(x) = 2(x - 1)^2(x - 3)(x + 2)(2x^2 + x + 4)$ . Se puede comprobar como  $x_1 = 1$  es una raíz doble en la gráfica correspondiente.



$$P(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 48$$

$$P(x) = 2(x-1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+2) \cdot (2x^2 + x + 4)$$

Gráfico 7

### 3.- Divisibilidad de polinomios

En el conjunto de polinomios  $\mathbb{K}[x]$  se pueden estudiar cuestiones de divisibilidad o factorización ya que se definieron previamente suma, resta y producto de polinomios. Este estudio está en completa analogía con la aritmética de números enteros, cuestión que nos ayudará a entender conceptos similares pero con polinomios.

Cabe destacar que la factorización de polinomios guarda estrecha relación con el problema de encontrar las raíces o ceros de un polinomio.

**Definición:** sean los polinomios  $P, Q \in \mathbb{K}[x]$  se dice que  $P$  divide a  $Q$  y lo denotamos como  $P|Q$  si existe un polinomio  $R \in \mathbb{K}[x]$  tal que  $Q = P \cdot R$ .

Sean  $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ ,  $P|Q$  si  $\exists R \in \mathbb{K}[x] / Q = P \cdot R$

Ejemplo: el polinomio  $P(x) = x - 1$  divide al polinomio  $Q(x) = x^3 - 1$  en  $\mathbb{Q}[x]$  ya que  $Q(x)$  admite la factorización:  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)$ .

La divisibilidad de polinomios tiene dos importantes propiedades:

P<sub>1</sub>) Si  $P(x)$  divide a  $Q(x)$  entonces divide al producto  $Q(x) \cdot S(x)$ , cualquiera sea el polinomio  $S(x)$ .

Si  $P|Q \Rightarrow P|Q \cdot S \quad \forall S \in \mathbb{K}[x]$

D) Si  $P|Q$  entonces existe el polinomio  $R \in \mathbb{K}[x]$  tal que:

$$Q = P \cdot R$$

$$Q \cdot S = P \cdot R \cdot S \text{ si llamamos } T = Q \cdot S \text{ y } U = R \cdot S$$

$$T = P \cdot U \text{ lo que significa que}$$

$$P|T \text{ es decir que } P|Q \cdot S$$

P<sub>2</sub>) Si  $P(x)$  divide a  $Q(x)$  y a  $S(x)$ , entonces divide a su suma y a su diferencia.

$$\text{Si } P|Q \wedge P|S \Rightarrow P|Q + S \wedge P|Q - S \quad \forall P, Q, S \in \mathbb{K}[x]$$

D)

$$\text{Si } P|Q \Rightarrow Q = P.R \text{ (1) con } R \in \mathbb{K}[x]$$

$$\text{Si } P|S \Rightarrow S = P.T \text{ (2) con } T \in \mathbb{K}[x]$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2)

$$Q + S = P.R + P.T$$

$$Q + S = P(R + T)$$

$$Q + S = P.U \text{ con } U = R + T \text{ por lo tanto}$$

$$P|Q + S$$

Para el caso de que  $P|Q - S$  se procede de manera similar.

Debemos destacar que todo  $P \in \mathbb{K}[x]$  es divisible por cualquier constante no nula (pensadas como polinomios de grado cero), es decir que estas constantes juegan el mismo papel en la aritmética de polinomios que los números 1 y  $-1$  juegan en la aritmética de  $\mathbb{Z}$ .

A partir de la definición de divisibilidad, se puede introducir la noción de polinomio irreducible que sería la noción análoga a la de número primo en la aritmética de  $\mathbb{Z}$ .

**Definición:** sea el polinomio no constante  $P \in \mathbb{K}[x]$  se dice que  $P$  es irreducible en  $\mathbb{K}[x]$  si no es posible factorizarlo en la forma  $P = Q.S$  donde  $Q$  y  $S$  son polinomio no constantes de  $\mathbb{K}[x]$ .

Ejemplo 1: todo polinomio de grado 1 es siempre irreducible.

Ejemplo 2: un polinomio de grado 2 será irreducible, según tenga o no raíces en  $\mathbb{K}$ . Sea el polinomio  $x^2 + 1$  si lo pensamos en  $\mathbb{R}[x]$  es irreducible pues no admite una factorización como producto de dos factores de grado 1. En cambio si lo pensamos en  $\mathbb{C}[x]$  se factoriza de la forma  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$  y por lo tanto no es irreducible.

En general un polinomio que admite raíces en  $\mathbb{K}$  no puede ser irreducible en  $\mathbb{K}[x]$ .

Un concepto importante en la aritmética de  $\mathbb{Z}$  es el algoritmo de división, por ello tiene sentido preguntarse si habrá un concepto similar para polinomios.

### 3.1.- El algoritmo de división para polinomios

La división de polinomios se define de manera análoga a la división de números enteros. Recordemos que dados  $p, d \in \mathbb{Z} \wedge d \neq 0$ , dividir  $p$  por  $d$  consistía en encontrar dos enteros  $q$  y  $r$  tales que  $p = q \cdot d + r$  para  $0 \leq r < d$ . El número  $q$  recibe el nombre de cociente de la división y  $r$  el resto, también  $p$  se llamaba dividendo y  $d$  divisor. El objetivo de dividir  $p$  por  $d$  es ver cuántas veces está contenido  $d$  en el número  $p$  (dado por el cociente  $q$ ) y si no está contenido un número exacto de veces ( $r = 0$ ) cuanto sobra hasta poder completar una vez más  $d$  (dado por el resto  $r$ ). Por ejemplo la división de  $p = 386$  por  $d = 12$  tiene

por cociente  $q = 32$  y resto  $r = 2$ , en efecto podemos verificar la veracidad de esta división ya que  $386 = 32 \cdot 12 + 2$  con  $0 < 2 < 12$ .

El algoritmo de la división de enteros es conocido, de manera similar es la división de polinomios, pero en primer lugar definamos exactamente división de polinomios.

**Teorema:** sean los polinomios  $P, D \in \mathbb{K}[x]$ ,  $D \neq 0 \wedge \text{gr}(D) \leq \text{gr}(P)$ , existen los dos únicos polinomios  $Q$  (cociente) y  $R$  (resto) tales que  $P = Q \cdot D + R$  con  $\text{gr}(R) < \text{gr}(D)$ .

Si  $R$  es el polinomio nulo, entonces  $P = Q \cdot D$ , se dice que la división es exacta y que  $P$  es divisible por  $D$  ó que  $D$  es divisor de  $P$ .

D<sub>E</sub>) Para demostrar la existencia de los polinomios  $Q$  y  $R$  haremos inducción en el grado del dividendo  $P$ .

1°) Debemos verificar que lo que queremos demostrar es válido para el primer elemento del conjunto con el que se trabaja. En nuestro caso 0, es decir  $\text{gr}(P) = 0$ .

Si  $\text{gr}(P) = 0$  (polinomios constantes) claramente podemos tomar  $Q = 0$  y  $R = P$ .

2°) Debemos formular la *Hipótesis Inductiva*, esta será que  $\text{gr}(P) = n$  y que el teorema es válido cuando el grado del dividendo es menor que  $n$ .

3°) Debemos demostrar que el teorema es válido para el caso de que el grado del dividendo sea mayor o igual al grado del divisor.

Sean los polinomios:

$$P = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ con } a_n \neq 0 \text{ (gr}(P) = n) \text{ y } D = \sum_{j=0}^m b_j x^j \text{ con } b_m \neq 0 \text{ (gr}(D) = m)$$

Nuevamente si  $n < m$  (grado del dividendo menor que el grado del divisor) podemos tomar  $Q = 0$  y  $R = P$ .

Si  $n \geq m$  podemos determinar un primer cociente  $Q_0$  dividiendo el término principal de  $P$  con el término principal de  $D$ , es decir,  $Q_0 = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$  y en consecuencia definir un primer resto  $R_0 = P - Q_0 D$ .

Si fuera  $R_0 = 0$  ó  $\text{gr}(R_0) < \text{gr}(D)$ , hemos finalizado, tomando  $Q = Q_0$  y  $R = R_0$  se demuestra la existencia de  $Q$  y  $R$ .

De no cumplirse el caso anterior, se repite el proceso. Debe tenerse en cuenta que  $\text{gr}(R_0) < \text{gr}(P)$  ya que en la forma que hemos elegido  $Q_0$  el término correspondiente a la potencia  $x^n$  se cancela. Entonces, en virtud de la Hipótesis Inductiva, existirán el cociente  $Q_1$  y el resto  $R_1$  de la división de  $R_0$  por  $D$ , de modo que:  $R_0 = Q_1 D + R_1$  donde  $R_1 = 0$  ó  $\text{gr}(R_1) < \text{gr}(D)$ . Entonces

$$P = Q_0 D + R_0$$

$$P = Q_0 D + Q_1 D + R_1$$

$$P = D (Q_0 + Q_1) + R_1$$

Si tomamos  $Q = Q_0 + Q_1$  y  $R = R_1$  se demuestra la existencia de  $Q$  y  $R$ .

Esto demuestra la parte de existencia.





En algunas situaciones se desea saber si la división de dos polinomios es exacta o no, es decir basta con conocer si el resto es cero o no. Sólo interesa conocer el resto de la división, sin efectuar esta.

Analizaremos a continuación el caso particular en que se realice una división por un polinomio de la forma  $(x - a)$  con  $a \in \mathbb{K}$ , es decir el caso particular en donde el divisor es un binomio de grado 1 y con coeficiente principal 1.

### 3.2.- Teorema del resto

*El resto de la división de un polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$  por otro de la forma  $(x - a)$  con  $a \in \mathbb{K}$  es el valor del polinomio  $P$  evaluado cuando  $x = a$ , es decir  $P(a)$ .*

D) Dividiendo  $P$  por  $D(x) = (x - a)$  podemos escribirlo como:

$P(x) = Q(x)(x - a) + R$  donde el resto  $R$  debe ser un polinomio constante ya que si  $gr(P) \geq 1$  y  $gr(D) = 1$  entonces  $gr(Q) = gr(P) - 1$  y  $gr(R) < gr(D) = 1$  por lo tanto  $R$  es un polinomio constante.

Evaluando  $P(x) = Q(x)(x - a) + R$  cuando  $x = a$  tenemos:

$$P(a) = Q(a)(a - a) + R$$

$P(a) = R$  quedando de esta manera demostrado el teorema.

Ejemplo: hallar el resto de dividir el polinomio  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 1$  por  $D(x) = (x + 4)$ .

Como el divisor es un binomio de la forma  $(x - a)$  ya que  $(x - (-4))$  podemos aplicar directamente el teorema del resto, teniendo en cuenta que  $a = -4$ .

$$R = (-4)^3 - 3(-4)^2 - 1$$

$$R = -64 - 48 - 1 = -113$$

Una consecuencia importante del teorema anterior se enuncia en el siguiente corolario.

**Corolario:** sea el polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$ ,  $P$  es divisible por  $(x - a)$  con  $a \in \mathbb{K}$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $P$ .

Ejemplo: sea el polinomio  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ .

Se puede observar que  $x = 1$  es raíz de  $P(x)$  ya que  $P(1) = 0$ . Entonces  $P(x)$  es divisible por  $(x - 1)$ . Hacemos la división (por Regla de Ruffini) y expresamos el polinomio  $P(x)$  como:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)Q(x)$$

Para que  $P(x)$  se anule, debe ser  $(x - 1) = 0$  ó bien  $Q(x) = 0$

$Q(x) = 0$  es resolver la ecuación de segundo grado  $x^2 - x - 6 = 0$ , resolviéndola se obtienen como raíces  $x = -2$  y  $x = 3$ . Con lo que  $Q(x)$  se factoriza como:

$$Q(x) = (x + 2)(x - 3).$$

En consecuencia las raíces de  $P$ , son  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$  y  $x_3 = 3$  y su factorización será:

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

**Utilidad:** en general este corolario se utiliza cuando se desea resolver ecuaciones, ya que una vez encontrada alguna raíz  $a$  del polinomio  $P$ , el problema se reduce a resolver una ecuación de un grado menor, efectuando la división de  $P$  por  $(x - a)$ .

Notemos que la estrategia anterior, pide conocer o determinar de alguna manera, una raíz del polinomio  $P$ . Algunas veces las raíces se pueden identificar rápidamente, por ejemplo si el polinomio no tiene término independiente entonces  $x = 0$  es raíz. Otras veces son datos del problema.

El siguiente teorema, debido al matemático Carl F. Gauss, nos permite anticipar las posibles raíces *racionales* de un polinomio con coeficientes *enteros*.

#### 4.- Raíces Racionales

**4.1.- Criterio de Gauss:** sea  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  con  $a_i \in \mathbb{Z}$  y  $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  es una raíz racional de  $P(x)$ , escrita como fracción irreducible (o sea  $p$  y  $q$  coprimos<sup>1</sup>) se tiene necesariamente que  $p|a_0$  y  $q|a_n$ .

En particular si  $P(x)$  es mónico, las posibles raíces racionales de  $P(x)$  son los divisores del término independiente  $a_0$ .

D) Como  $a$  es raíz de  $P(x)$  entonces  $P(a) = 0$

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \text{ multiplicando m a m por } q^n$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \text{ Luego}$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

En particular  $p|a_0 q^n$

Pero como  $p$  es coprimo con  $q$ ,  $p$  es coprimo con  $q^n$  (como consecuencia del teorema fundamental de la aritmética<sup>2</sup>). Por lo tanto  $p$  debe dividir  $a_0$ .

Similarmente

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$$

Por lo tanto  $q|a_n p^n$

Pero como  $q$  es coprimo con  $p$ ,  $q$  es coprimo con  $p^n$  y en consecuencia  $q|a_n$

De esta forma queda demostrado el criterio.

Debemos destacar que el criterio *no afirma* que un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces racionales. Lo que indica es que, *de existir raíces racionales*, estas deben ser forzosamente de la forma que indica el criterio.

Debido a esto es que para determinar si el polinomio  $P$  tiene raíces racionales, debemos probar con los números racionales que tienen la forma anticipada por el criterio. Esto implica que se puede dar el caso de que ninguna de las posibilidades sea raíz del polinomio y este solo tenga raíces reales y complejas.

Ejemplo 1: hallar las raíces de  $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$ .

<sup>1</sup> Dos enteros son coprimos (primos relativos) si y sólo si su máximo común divisor es igual a 1.

<sup>2</sup> Todo entero positivo mayor que uno se puede escribir de una única forma como un primo ó como el producto de dos o más primos en el que los factores primos se escriben en orden no decreciente.

$P(x)$  tiene coeficientes enteros y término independiente no nulo, podemos aplicar directamente el Criterio de Gauss, una raíz racional  $a$  de  $P(x)$  debe ser de la forma  $a = \frac{p}{q}$  donde  $p$  divide a 1 y  $q$  divide a 2, luego  $p$  puede ser  $\pm 1$  y  $q = \pm 1, \pm 2$  por lo tanto las posibles raíces del polinomio son  $\pm 1$  ó  $\pm \frac{1}{2}$ . Evaluando  $P(x)$  en estos valores observamos que 1 es raíz ( $P(1) = 0$ ), mientras que los otros valores no lo son. Por lo tanto  $P(x)$  será divisible por  $(x - 1)$ . Aplicamos Ruffini para hallar los coeficientes del cociente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & \downarrow & 2 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto  $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 2x - 1)$ .

Para terminar de factorizar  $P(x)$  buscamos las raíces de  $Q(x) = 2x^2 - 2x - 1$  en el cual también se podría aplicar el Criterio de Gauss, pero como es de segundo grado directamente aplicamos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm 4\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$$

En consecuencia  $Q(x) = 2\left(x - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)\right)$  y por lo tanto  $P(x)$  queda factorizado como:  $P(x) = 2(x - 1)\left(x - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)\right)$  y sus raíces son:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \text{ y } x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

Ejemplo 2: hallar las raíces de  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ . El Criterio de Gauss establece que si en particular si  $P(x)$  es mónico, las posibles raíces racionales son los divisores del término independiente  $a_0$ . Esto se debe a que las posibles raíces tienen la forma  $\frac{p}{q}$  donde  $p$  divide al término independiente y  $q$  divide al término principal, que es 1 ya que el polinomio es mónico, por lo tanto  $q = \pm 1$ , lo que significa que solo podemos tener en cuenta  $p$  o sea los divisores del término independiente. Entonces las posibles raíces son:  $\pm 1, \pm 2$  y  $\pm 3$ .

Evaluando  $P(x)$  en todos estos valores observamos que  $P(3) = 0$  lo que significa que 3 es raíz del polinomio. De manera similar al ejemplo anterior dividimos  $P(x)$  en  $(x - 3)$  y obtenemos  $(x^2 - 2)$ . Por lo tanto  $P(x)$  queda factorizado como:  $P(x) = (x - 3)(x^2 - 2)$  de donde observamos que las raíces son:  $x_1 = 3, x_2 = \sqrt{2}$  y  $x_3 = -\sqrt{2}$ .

Si bien el enunciado del Criterio de Gauss está hecho para polinomios a coeficientes enteros y con término independiente no nulo, este criterio puede aplicarse a polinomios a coeficientes enteros con término independiente cero y también a polinomios cualesquiera a coeficientes racionales. Veamos a continuación estas dos posibilidades:

a) Sea  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  con término independiente  $a_0 = 0$ . En este caso basta sacar factor común  $x^m$  para  $m$  el menor grado de los términos de  $P$ ; de este modo obtenemos  $P(x) =$

$x^m Q(x)$  con  $Q$  un polinomio a coeficientes enteros con término independiente no nulo. Por lo tanto para hallar las raíces de  $P$  aplicamos el Criterio de Gauss.

Ejemplo: hallar las raíces de  $P(x) = 2x^6 + x^5 - 6x^4 + x^3 + 2x^2$ .

Observamos que es un polinomio a coeficientes enteros y término independiente nulo. Comenzamos por sacar factor común  $x^2$  ( $m = 2$ ), luego expresamos al polinomio  $P$  como  $P(x) = x^2(2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2)$ . Procedemos a encontrar las raíces del polinomio  $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ , que tiene coeficientes enteros y término independiente no nulo; aplicamos el Criterio de Gauss.

Las posibles raíces tienen la forma  $\frac{p}{q}$  en donde  $p$  divide a 2 y  $q$  divide a 2 ( $a_n = a_0$ ), es decir que los posibles valores son:  $\pm 1, \pm 2$  y  $\pm \frac{1}{2}$ .

Evaluando  $Q(x)$  en los posibles valores, concluimos que son raíces  $1, -2$  y  $-\frac{1}{2}$ . Aplicamos tres veces la regla de Ruffini y obtenemos:

	2	1	-6	1	2
1		2	3	-3	-2
	2	3	-3	-2	0
-2		-4	2	2	
	2	-1	-1	0	
$-\frac{1}{2}$		-1	1		
	2	-2	0		

Por lo tanto  $Q(x) = (x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x - 2) = 2(x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$ .

Observemos como fuimos factorizando el polinomio  $P$ .

$$P(x) = 2x^6 + x^5 - 6x^4 + x^3 + 2x^2$$

$$P(x) = x^2(2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2).$$

$$P(x) = 2x^2(x - 1)^2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Finalmente las raíces de  $P(x)$  son:  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = x_4 = 1$ ,  $x_5 = -2$  y  $x_6 = -\frac{1}{2}$ .

b) Sea  $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , es decir que  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  con  $a_i \in \mathbb{Q}$ . Como cada  $a_i$  tendrá la forma  $\frac{b_i}{c_i}$  con  $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$  y  $c_i \neq 0$  se puede determinar  $t_i = \text{mcm}(c_i)$ . Multiplicando a  $P(x)$  por el mínimo común múltiplo de los denominadores, se puede suponer que todos los coeficientes son enteros. Luego, aplicamos el Criterio de Gauss y dividimos por  $t_i$  para obtener  $P$ .

Ejemplo: hallar las raíces de  $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12}$ .

Es un polinomio a coeficientes racionales, podemos multiplicarlo por  $t_i = 12$  que es el mcm de 2 y 12. Por lo tanto:  $12 \cdot P(x) = 12\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12}\right) = 6x^3 - 7x^2 + 1 = Q(x)$ .

Aplicamos el Criterio de Gauss a  $Q(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$  y las posibles raíces son:  $\pm 1$ ,  $\pm \frac{1}{2}$ ,  $\pm \frac{1}{3}$  y  $\pm \frac{1}{6}$ . Evaluando a  $Q$  en esos valores se puede observar que son raíces  $1, \frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{3}$ . En consecuencia  $Q(x) = 6(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ .

Como hemos multiplicado a  $P$  por 12 y determinamos  $Q$ , ahora a la expresión factorizada de  $Q$  la dividimos en 12 para obtener  $P$ .

$$P(x) = \frac{1}{12} \left( 6(x - 1) \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( x + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} (x - 1) \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( x + \frac{1}{3} \right).$$

Las raíces de  $P(x)$  son:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  y  $x_3 = -\frac{1}{3}$ .

#### 4.2.- Regla de Descartes de los signos.

En algunos casos, la siguiente regla<sup>3</sup> es útil para eliminar candidatas de listas largas de posibles raíces racionales. Antes de describir esta regla es necesario el concepto de *variación de signo*. Si  $P(x)$  es un polinomio con coeficientes reales, ordenado en forma decreciente (no siendo necesario completarlo), entonces una *variación en signo* se presenta siempre que coeficientes adyacentes tengan signos contrarios. Por ejemplo  $P(x) = 5x^7 - 3x^5 + x^4 + 2x^2 + x - 3$  tiene tres variaciones en signos.

Otros ejemplos:

Polinomio	Variaciones en signo
$x^2 + 4x + 1$	0 (ninguna)
$2x^3 + x - 6$	1 (una)
$x^4 - 3x^2 - x + 2$	2 (dos)

Regla de Descartes de signos

Sea  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ , entonces:

- El número de raíces reales positivas de  $P(x)$  es igual al número de variaciones en signo en  $P(x)$  ó es menor a este último número, en un número entero par.
- El número de raíces reales negativas de  $P(x)$  es igual al número de variaciones en signo en  $P(-x)$  ó es menor a este último número, en un número entero par.

Ejemplo: usar la Regla de Descartes de los signos para determinar el número posible de raíces reales positivas y negativas de  $P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$ .

En primer lugar podemos observar que  $P(x)$  tiene una variación de signo, por lo tanto tiene a lo sumo, una raíz positiva.

Ahora hacemos:

$$P(-x) = 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3$$

$$P(-x) = 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3$$

---

<sup>3</sup> Descubierta por el filósofo y matemático francés René Descartes en el año 1637.

Es decir que  $P(-x)$  tiene tres variaciones en signo, entonces  $P(x)$  podría tener tres raíces reales negativas ó bien una. Esto hace un total de dos o cuatro raíces reales.

## 5.- Multiplicidad de las raíces

Consideremos el polinomio  $P(x) = x^2 - 2x + 1$  cuya factorización es  $P(x) = (x - 1)(x - 1)$  por una parte podemos afirmar que  $P$  tiene dos raíces que son iguales y por otra parte podemos escribirlo como  $P(x) = (x - 1)^2$ . En este caso decimos que  $P$  tiene una raíz  $x = 1$  doble. Generalizando esta situación, introducimos la siguiente definición.

**Definición:** sean el polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$  y  $a \in \mathbb{K}$  una raíz de  $P$ . Se dice que  $a$  es una raíz de  $P$  de multiplicidad  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) si  $P$  admite la factorización  $P(x) = (x - a)^m Q(x)$  donde el polinomio  $Q$  no se anula en  $x = a$  o sea  $Q(a) \neq 0$ .

Si  $m = 1$  se dice que  $a$  es raíz simple, si  $m = 2$  que es doble y así sucesivamente.

Una consecuencia de esta definición es la siguiente proposición.

*Si  $P$  es un polinomio que tiene en  $\mathbb{K}$  las raíces  $a_1, a_2, \dots, a_r$  con multiplicidades  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , entonces  $P$  admite la factorización:*

$P(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_r)^{m_r} Q(x)$  donde  $Q(a_i) \neq 0$  para  $0 < i \leq r$ .

Veremos a continuación, en primer lugar, una definición alternativa de multiplicidad de una raíz y en segundo lugar otra caracterización de la multiplicidad de las raíces, para ambas situaciones necesitamos introducir el concepto de derivada de un polinomio (visto como función). Al derivar obtenemos nuevamente un polinomio, pero de un grado menor que el dado.

Entonces, una definición alternativa de multiplicidad de una raíz es la siguiente: *una raíz de  $P(x)$  tiene multiplicidad  $k$  si también es raíz de los primeros  $(k - 1)$  polinomios derivados  $P'(x), P''(x), \dots, P^{(k)}(x)$  de  $P(x)$ , pero no de la derivada  $k - \text{ésima}$  de  $P(x)$ .*

Para el segundo punto si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , el concepto de derivada de un polinomio coincidirá con el concepto estudiado en los cursos de análisis matemático, pero si tomamos un  $\mathbb{K}$  cualquiera, este concepto se puede introducir de una manera totalmente algebraica, sin referencia alguna a otros conceptos analíticos como el de límite, por ejemplo.

**Definición:** sea el polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$ ,  $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , definimos polinomio derivado  $P' = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ .

Si bien no lo demostraremos, es relativamente sencillo comprobar esta noción de la derivada totalmente formal, conserva las propiedades usuales de la derivada, como la regla para derivar una suma o un producto.

Sean  $P$  y  $Q$  dos polinomios, entonces:

$$(P + Q)' = P' + Q'$$

$$(P Q)' = P' Q + P Q'$$

$$(-P)' = -P'$$

También podemos definir, recursivamente, la derivada  $n$  –ésima  $P^{(n)}$  del polinomio  $P$ , de la siguiente manera:

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \end{cases}$$

**Teorema:** sea el polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$  y  $a \in \mathbb{K}$ , la condición necesaria y suficiente para que  $a$  sea raíz múltiple de orden  $h$  de  $P$ , es que anule al polinomio y a sus  $(h-1)$  primeras derivadas, siendo distinta de cero la derivada de orden  $h$ . Es decir  $P(a) = P'(a) = P''(a) = \dots = P^{(h-1)}(a) = 0$  pero  $P^{(h)}(a) \neq 0$ .

Este teorema afirma que la multiplicidad de  $a$  como raíz de  $P$  viene dada por el orden de la primer derivada de  $P$  que no se anula cuando lo evaluamos para  $x = a$ .

D)

$\Rightarrow$ ) Suponemos que  $a$  es una raíz de orden  $h$  de  $P$ , en consecuencia  $P$  es divisible por  $(x - a)^h$  y se lo puede expresar como  $P = (x - a)^h Q$  donde  $Q$  es un polinomio tal que  $Q(a) \neq 0$ , ya que en caso contrario,  $a$  sería una raíz de  $Q$  y la factorización de  $Q$  contendría el factor  $(x - a)$  y  $a$  sería una raíz de  $P$  con un orden de multiplicidad mayor que  $h$ .

Si derivamos  $P$ :

$$P' = h(x - a)^{h-1} Q + (x - a)^h Q'$$

$$P' = (x - a)^{h-1} [h Q + (x - a) Q']$$

El polinomio entre corchetes no se anula para  $x = a$  ya que en este caso se reduciría a  $h Q$ , en consecuencia  $a$  es una raíz de orden  $(h - 1)$  de  $P'$  porque  $P'$  contiene el factor  $(x - a)^{h-1}$  en su factorización.

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente: si  $a$  es una raíz de un polinomio  $P$  y de su derivada,  $a$  es una raíz múltiple de  $P$ .

En efecto, pues si  $a$  fuera una raíz simple de  $P$  se podría expresar este de la manera  $P = (x - a)Q$  con  $Q(a) \neq 0$ . Derivando  $P$ :

$$P' = Q + (x - a)Q' \text{ que no se anula para } x = a \text{ contradiciendo la hipótesis.}$$

De esta manera queda demostrado el teorema.

Ejemplo 1: hallar las raíces de  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ .

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$P'(x) = 3x^2 - 10x + 7 \text{ en consecuencia } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = \frac{7}{3}$$

$$P^2(x) = 6x - 10 \text{ en consecuencia } x = \frac{5}{3}$$

Por lo tanto

$$P(1) = 0$$

$$P'(1) = 0$$

$$P''(1) \neq 0$$

Esto significa que  $x = 1$  es raíz doble, anula a  $P$  y a su derivada primera, siendo distinta de cero la derivada segunda.



$x = \frac{7}{3}$  y  $x = \frac{5}{3}$  no anulan a  $P$ , se descartan como posibles raíces. Además si  $x = 1$  es raíz doble, solo resta una raíz simple de  $P$ .

Como  $P$  es divisible por  $(x - 1)$ , hacemos la división por regla de Ruffini dos veces y observamos que la raíz faltante es  $x = 3$ . Podemos expresar a  $P$ , como:

$P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$  por lo tanto las raíces de  $P$  son:  $x_1 = 1$  (doble) y  $x_2 = 3$  (simple)

## 6.- Teorema Fundamental del Álgebra

Uno de los objetivos en el estudio de polinomios es la determinación de raíces, con sus multiplicidades. Evidentemente este problema es más sencillo de resolver cuando el grado del polinomio es menor. Supongamos que tenemos un polinomio  $P$  y que conocemos ya una raíz  $a$  de  $P$ , y sea  $Q \in \mathbb{C}[x]$  tal que  $P(x) = Q(x)(x - a)$ . Sabemos que las raíces de  $Q$  son también raíces de  $P$ , por lo tanto, para encontrar las otras raíces de  $P$ , buscamos las raíces de  $Q$  pues es más sencillo buscar estas raíces ya que  $Q$  es de grado menor a  $P$ . Repitiendo este proceso, será posible –y así lo hicimos en varios ejemplos– encontrar todas las raíces de  $P$ .

Observemos que el razonamiento anterior se basa en el hecho de que conocemos una raíz de  $P$ ; en consecuencia es importante garantizar la existencia (¡y encontrar!) de al menos una raíz de  $P$ . Este hecho está garantizado por el Teorema Fundamental del Álgebra.

**Teorema Fundamental del Álgebra (TFA):** *todo polinomio no constante con coeficientes complejos  $P \in \mathbb{C}[x]$ , admite al menos una raíz compleja, es decir, existe  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $P(a) = 0$ .*

Si bien existen varias demostraciones de este teorema, no es posible hacerlo sin utilizar de alguna manera conceptos analíticos como la continuidad del polinomio  $P(z)$  como función de variable compleja,  $z \in \mathbb{C}$ . Otra cuestión a destacar es que ninguna de las demostraciones es constructiva, es decir no proporcionan un procedimiento efectivo para encontrar la raíz  $a$ , sino que demuestran por reducción al absurdo. Consecuentemente no daremos ninguna demostración de este teorema<sup>4</sup>.

Ejemplo: hallar las raíces de  $P(x) = x^3 - (1 + i)^2 + (-6 + i)x + 6i$  sabiendo que admite a 3 como raíz.

Acorde al razonamiento explicado anteriormente, conocemos una raíz de  $P$ ,  $x = 3$ , por lo tanto  $P$  es divisible por  $(x - 3)$ . Aplicamos la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -1-i & -6+i & 6i \\ & & 3 & 6-3i & -6i \\ \hline & 1 & 2-i & -2i & 0 \end{array}$$

---

<sup>4</sup> Una demostración elemental aunque no sencilla puede verse en: J. Rey Pastor, P. Pi Calleja. C. A. Trejo. Análisis Matemático. Volumen I. Octava edición 1969. Otra demostración basada en ideas geométricas puede verse en: R. Courant, H. Robbins, ¿Qué es la matemática? Editorial Aguilar 1964.

Por lo tanto  $P(x) = (x - 3)[x^2 + (2 - i)x - 2i]$

Factorizamos  $Q(x) = x^2 + (2 - i)x - 2i$ , como es de segundo grado aplicamos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{(-2+i) \pm \sqrt{(2-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2i)}}{2} = \frac{(-2+i) \pm \sqrt{3+4i}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{(-2+i) \pm \sqrt{5_{53^\circ} 7' 48''}}{2} = \frac{(-2+i) \pm \sqrt{5_{53^\circ} 7' 48'' + 360^\circ k}}{2} \text{ con } k=0,1$$

$$x_{1,2} = \frac{(-2+i) \pm (2+i)}{2} = \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Finalmente,  $P(x) = (x - 3)(x + 2)(x - i)$  y las raíces de  $P$  son:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -2$  y  $x_3 = i$

Un corolario importante del TFA es el siguiente.

**Corolario:** todo polinomio no constante con coeficientes complejos  $P = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{C}[x]$  ( $b_i \in \mathbb{C}$ ,  $b_n \neq 0$ ) se factoriza como producto de polinomios lineales, en la forma:  $P(x) = b_n(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_r)^{m_r}$  donde  $a_1, a_2, \dots, a_r$  son las distintas raíces complejas de  $P$ ,  $m_1, m_2, \dots, m_r$  son las correspondientes multiplicidades y  $b_n$  el coeficiente principal del polinomio.

D) Por la consecuencia de la definición de multiplicidad de las raíces, sabemos que:

$$P(x) = [(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_r)^{m_r}] Q(x) \text{ donde } Q(a_i) \neq 0 \text{ para } 0 < i \leq r.$$

$Q$  debe ser constante. Si suponemos que no es así, por el TFA  $Q$  debe tener alguna raíz  $a \in \mathbb{C}$ , pero toda raíz de  $Q$  es raíz de  $P$ , luego  $a = a_i$  para algún  $i$ , lo que es una contradicción pues  $Q(a_i) \neq 0$ .

Como  $Q$  debe ser constante al igualar los coeficientes principales de ambos miembros, deducimos que  $Q$  debe coincidir con el coeficiente principal de  $P$ .

Quedando demostrado el corolario.

Comparando los grados de ambos miembros, en la descomposición del corolario anterior deducimos que  $n = \text{gr}(P) = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ .

Observemos que esta suma representan la cantidad de raíces de  $P$ , si contamos las raíces múltiples de acuerdo con su multiplicidad. Esto nos proporciona la siguiente consecuencia.

*Un polinomio  $P \in \mathbb{C}[x]$  tiene exactamente  $n$  raíces complejas si las contamos de acuerdo con su multiplicidad.*

## 7.- Raíces complejas de polinomios reales

Recordemos brevemente, si  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  entonces su conjugado es  $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$ . La conjugación tiene propiedades, de las que nos interesa particularmente:

Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces

a)  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

b)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  y  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

c)  $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$  y  $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2$  son números reales.

Recordemos que todo polinomio cuadrático con coeficientes reales  $P(x) = ax^2 + bx + c$  y discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  tiene dos raíces complejas conjugadas,  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a}$  y  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a}$ . De esta forma, las raíces complejas de un polinomio cuadrático forman un par de raíces conjugadas.

Se puede generalizar este hecho a polinomios con coeficientes reales de mayor grado. Pero previamente consideremos un polinomio  $P$ , cuyos coeficientes son complejos  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$  y definamos el polinomio conjugado de  $P$ , por  $\bar{P}(x) = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i x^i$ .

Como consecuencia de las propiedades antes mencionadas de la conjugación, si  $z \in \mathbb{C}$  tenemos que si los polinomios  $P, Q \in \mathbb{C}[x]$  y  $z \in \mathbb{C}$ , entonces:

$$a) \bar{P}(z) = \bar{P}(\bar{z})$$

$$b) \overline{P+Q} = \bar{P} + \bar{Q} \text{ y } \overline{P \cdot Q} = \bar{P} \cdot \bar{Q}$$

Particularmente si los coeficientes de  $P$  son reales, es decir  $P \in \mathbb{R}[x]$ , tendremos que  $\bar{P} = P$  y resulta que  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ . Más específicamente si  $P(z) = 0$ , tenemos que  $P(\bar{z}) = 0$ , esto significa que: las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales se presentan de a pares de raíces conjugadas.

Ahora estamos en condición de demostrar el siguiente teorema:

**Teorema:** sea un polinomio con coeficientes reales  $P \in \mathbb{R}[x]$ . Si  $z = a + bi$  es una raíz de  $P$  con multiplicidad  $m$ , entonces su complejo conjugado  $\bar{z} = a - bi$  también es raíz de  $P$  con multiplicidad  $m$ .

D) Como  $z$  es raíz de  $P$  con multiplicidad  $m$ ,  $P$  admite la factorización:

$$P(x) = (x - z)^m Q(x) \text{ donde } Q(z) \neq 0.$$

Tomando el polinomio conjugado, tenemos:

$$\bar{P}(x) = \overline{(x - z)^m Q(x)} = \overline{(x - z)^m} \cdot \bar{Q}(x) = (x - \bar{z})^m \bar{Q}(x)$$

Pero  $P$  tiene coeficientes reales, entonces  $\bar{P} = P$  y como  $P(\bar{z}) = 0, \bar{Q}(\bar{z}) \neq 0$ , esto indica que  $\bar{z}$  es una raíz de  $P$  de multiplicidad  $m$ . Quedando demostrado de esta manera el teorema.

Ejemplo: hallar las raíces de  $P(x) = x^3 - 3x + 52$  sabiendo que admite como raíz a  $2 - 3i$ . Si  $P$  admite a  $2 - 3i$  como raíz también admite a su conjugado  $2 + 3i$ , ambas raíces son simples. Por lo tanto  $P$  es divisible por  $(x - (2 - 3i))$  y  $(x - (2 + 3i))$ , recurrimos a la regla de Ruffini:

$2 - 3i$	$\begin{array}{r rrrr} 1 & 0 & -3 & 52 \\ & 2 - 3i & -5 - 12i & -52 \end{array}$
$2 + 3i$	$\begin{array}{r rrrr} 1 & 2 - 3i & -8 - 12i & 0 \\ & 2 + 3i & 8 + 12i & \end{array}$

	1	4	0
--	---	---	---

Por lo tanto  $P(x) = [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x + 4)$  y sus raíces son:

$$x_1 = 2 - 3i, x_2 = 2 + 3i \text{ y } x_3 = -4.$$

Se demostró que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales se presentan de a pares de raíces conjugadas, este hecho tiene una consecuencia inmediata que se enuncia de la siguiente manera.

*Todo polinomio de coeficientes reales y grado impar, tiene alguna raíz real.*

En el ejemplo anterior podemos observar que  $P \in \mathbb{R}[x]$ ,  $gr(P) = 3$  y también que  $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$  mientras que  $x_3 \in \mathbb{R}$ .

## 8.- Algoritmo de Euclides

Como en  $\mathbb{K}[x]$  hemos definido el algoritmo de la división, podemos extender a los polinomios el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor. Estos dos conceptos con polinomios van en perfecta sincronía con sus idénticos en la aritmética de enteros, por lo tanto recordaremos los conceptos para números enteros y luego los formalizaremos para polinomios.

Sean  $a$  y  $b$  dos números enteros no nulos, el mayor entero  $d$  tal que  $d|a$  y  $d|b$  se denomina *máximo común divisor* de  $a$  y  $b$ , denotándose como  $mcd(a, b)$ .

Para calcular el  $mcd$  todos conocemos el método de descomponer en factores primos los dos números y tomar los factores comunes con el menor exponente con el que aparezcan. Si bien es un método útil y sencillo para conseguir lo que deseamos, tiene un problema: si los números son muy grandes, o sus factores primos lo son, el cálculo se complica y se torna tedioso. Otro método que también persigue el mismo objetivo, pero mediante divisiones sucesivas, es el algoritmo de Euclides.

“Para calcular el  $mcd$  de dos enteros no nulos  $a$  y  $b$  dividimos el mayor entre el menor (supongamos que  $a > b$ ), esta división nos proporcionará un cociente  $Q_1$  y un resto  $R_1$ . Si  $R_1 = 0$  entonces  $mcd(a, b) = b$  sino dividimos el  $b$  entre el  $R_1$  obteniendo un cociente  $Q_2$  y un resto  $R_2$ . Si  $R_2 = 0$  entonces  $mcd(a, b) = R_1$  sino volvemos a dividir el divisor entre el resto, así sucesivamente. Esto significa que el  $mcd(a, b)$  es el último resto no nulo que obtengamos en el procedimiento anterior.

Ejemplo: calcular el  $mcd(848, 656)$

Aplicando el algoritmo de Euclides, obtenemos:

	1	3	2	2	2
848	656	192	80	32	16
192	80	32	16	0	

Como el último resto no nulo es 16,  $mcd(848, 656) = 16$ .

Estamos en condiciones de formalizar el máximo común divisor de dos polinomios y su cálculo por el algoritmo de Euclides.

**Definición:** sean  $A, B \in \mathbb{K}[x]$  dos polinomios no nulos, se dice que el polinomio  $D \in \mathbb{K}[x]$  es el máximo común divisor (*mcd*) entre  $A$  y  $B$ , si es el único polinomio mónico que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

i)  $D|A$  y  $D|B$  es decir  $D$  es un divisor común de  $A$  y  $B$ .

ii) Si  $\tilde{D} \in \mathbb{K}[x]$  verifica que  $\tilde{D}|A$  y  $\tilde{D}|B$  entonces  $\tilde{D}|D$  es decir si  $\tilde{D}$  es otro divisor común de  $A$  y  $B$ , entonces  $\tilde{D}$  divide a  $D$ .

Ejemplo: determinar el mcd entre  $A(x) = x^2 - 3x + 2$  y  $B(x) = x^2 - 4x + 3$ .

Es mucho más fácil determinar el mcd cuando los polinomios están expresados como producto de sus factores primos, ya que en ese caso es simplemente es el producto de los factores comunes a ambos con el menor exponente.

$$A(x) = (x - 1)(x - 2)$$

$$B(x) = (x - 1)(x - 3) \text{ Por lo tanto}$$

$$\text{mcd}(A, B) = (x - 1)$$

Como en general el problema de descomponer polinomios en sus factores primos es complicado, otro procedimiento para el cálculo del *mcd* de dos polinomios sin recurrir a la descomposición en factores primos, es el algoritmo de Euclides.

Por las propiedades de la divisibilidad de dos polinomios enunciadas en el apartado “Divisibilidad”, todo divisor común a dos polinomios  $A$  y  $B$ , divide también al polinomio  $R = A - B \cdot Q$  cualquiera sea el polinomio  $Q$ . Recíprocamente, todo divisor común a  $B$  y  $R$  divide también a  $A$  ya que  $A = B \cdot Q + R$ .

Entonces el cálculo del *mcd* entre  $A$  y  $B$  lleva a calcular el *mcd* de  $B$  y  $R$ , donde  $R$  es el resto de la división de  $A$  por  $B$ . Ahora podemos enunciar el algoritmo de Euclides en completa analogía con la aritmética de  $\mathbb{Z}$ .

**Algoritmo de Euclides:** dados dos polinomios  $A, B \in \mathbb{K}[x]$  y suponiendo que  $\text{gr}(A) \geq \text{gr}(B)$  para hallar su *mcd* usamos el algoritmo de Euclides cuya disposición práctica, es la siguiente:

	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$\dots$	$Q_{n-1}$	$Q_n$	$Q_{n+1}$
$A$	$B$	$R_1$	$R_2$	$\dots$	$R_{n-2}$	$R_{n-1}$	$R_n$
$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$\dots$	$R_n$	$0$	

Procedimiento:

Dividimos  $A$  en  $B$ , obteniendo un primer cociente  $Q_1$  y un primer resto  $R_1$  de modo que:

$A = Q_1 B + R_1$  donde  $R_1 = 0$  ó bien  $0 < \text{gr}(R_1) < \text{gr}(B)$ . Si  $R_1 = 0 \Rightarrow \text{mcd}(A, B) = B$  sino volvemos a dividir  $B$  en  $R_1$  obteniendo un nuevo cociente  $Q_2$  y un nuevo resto  $R_2$  de modo que se verifica:

$$B = Q_2 R_1 + R_2 \quad \text{donde } R_1 = 0 \text{ ó bien } 0 < gr(R_2) < gr(R_1)$$

Mientras  $R_n \neq 0$  podemos seguir dividiendo  $R_{n-1}$  por  $R_n$  obteniendo un nuevo cociente  $Q_{n+1}$  y un nuevo resto  $R_{n+1}$ . Es decir

$$R_1 = Q_3 R_2 + R_3 \quad \text{donde } gr(R_3) < gr(R_2)$$

$$R_2 = Q_4 R_3 + R_4 \quad \text{con } gr(R_4) < gr(R_3) \text{ hasta que}$$

$$R_{n-1} = Q_{n+1} R_n + 0$$

Esto ocurre ( $R_{n+1} = 0$ ) dado que la sucesión de restos tiene grado estrictamente decreciente:  $gr(A) \geq gr(B) > gr(R_1) > gr(R_2) > \dots > gr(R_n) > gr(R_{n+1}) > \dots$  y como los grados son enteros y en virtud del principio del buen orden<sup>5</sup>, en algún momento debemos tener  $R_n = 0$ , esto significa que el algoritmo de Euclides termina luego de un número finito de pasos. Cuando esto ocurre podemos demostrar que  $R_{n-1} = mcd(A, B)$ .

D) Sea  $D$  un divisor de  $A$  y  $B$ , por lo tanto  $A$  y  $B$  se descomponen en:  $A = D A_1$  y  $B = D B_1$

Como  $A = Q_1 B + R_1$  tenemos que

$$R_1 = A - Q_1 B$$

$$R_1 = D A_1 - Q_1 D B_1$$

$$R_1 = D(A_1 - Q_1 B_1) \text{ por lo tanto } D \text{ divide a } R_1.$$

Luego, cualquier divisor de  $A$  y  $B$  lo es también de  $B$  y  $R_1$ .

Análogamente  $B = Q_2 R_1 + R_2$  tenemos que

$$R_2 = B - Q_2 R_1$$

$$R_2 = D B_1 - Q_2 D \widetilde{R_1}$$

$$R_2 = D(B_1 - Q_2 \widetilde{R_1}) \text{ por lo tanto } D \text{ divide a } R_2$$

Luego cualquier divisor de  $B$  y  $R_1$  lo es también de  $R_1$  y  $R_2$ .

Inductivamente el proceso es:

$$mcd(A, B) = mcd(B, R_1) = mcd(R_1, R_2) = \dots = mcd(R_{n-1}, R_n) = R_n \text{ ya que } R_n | R_{n-1} \text{ y } R_n | R_n.$$

El siguiente teorema resume lo que demostramos hasta aquí:

**Teorema:** sean  $A, B \in \mathbb{K}[x]$  dos polinomios. Su máximo común divisor  $D = mcd(A, B)$  siempre existe y se puede calcular utilizando el algoritmo de Euclides.

Particularmente si  $gr(R_n) = 0$ , es decir  $R_n$  es un número real no nulo, los polinomios  $A$  y  $B$  se dicen primos entre sí.

Ejemplo: calcular el mcd entre  $A = x^5 - 1$  y  $B = x^3 - 1$ .

	$x^2$	$x$	$x + 1$
$x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$	$x^3 + 0x^2 + 0x - 1$	$x^2 + 0x - 1$	$x - 1$
$-x^5$	$-x^3$	$-x^2 + x$	
$x^2 - 1$	$x - 1$	$x - 1$	
		$-x + 1$	
		0	

<sup>5</sup> Principio del buen orden ó principio del mínimo: "Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo"

Por lo tanto  $\text{mcd}(A, B) = x - 1$

Como consecuencia de la existencia del mcd entre dos polinomios, se puede relacionar a este con las raíces en común que pudieren tener dichos polinomios. Esto se enuncia de la siguiente manera:

**Corolario:** sean  $A, B \in \mathbb{K}[x]$  dos polinomios y  $D = \text{mcd}(A, B)$  su máximo común divisor, entonces  $a \in \mathbb{K}$  es una raíz en común de  $A$  y  $B$ , si y sólo si  $a$  es raíz de  $D$ .

D) Por el Corolario del Teorema del Resto,  $a$  es raíz de  $D$  si y sólo si  $(x - a)$  divide a  $D$ , lo cual ocurre si y sólo si  $(x - a)$  divide simultáneamente a  $A$  y  $B$ , lo cual a su vez sucede si y sólo si  $a$  es raíz de ambos polinomios.

Continuando con el ejemplo anterior  $A = x^5 - 1$ ,  $B = x^3 - 1$  y  $\text{mcd}(A, B) = x - 1$ . Esto significa precisamente que la única raíz que comparten los polinomios  $A$  y  $B$  es  $x = 1$ .

Para hallar las raíces de polinomios, en muchos casos es necesario saber si este admite o no raíces múltiple, habiendo ya establecido los conceptos de polinomio derivado y cálculo del  $\text{mcd}$  de dos polinomios, la cuestión planteada es mucho más fácil de resolver, mediante el siguiente teorema.

### 8.1.- Admisión de raíces múltiples

**Teorema:** sea el polinomio  $P \in \mathbb{K}[x]$ , las raíces múltiples de  $P$  son todas las raíces de  $D \in \mathbb{K}[x]$  siendo  $D = \text{mcd}(P, P')$ .

D) Consideremos un polinomio  $P(x)$ , mónico de grado  $n$  y cuyas raíces múltiples son  $x_1$  de multiplicidad  $h$ ,  $x_2$  de multiplicidad  $k$ , . . . ,  $x_n$  de multiplicidad  $p$ , entonces:

$P(x) = (x - x_1)^h (x - x_2)^k \dots (x - x_n)^p$  donde  $h + k + \dots + p = n$  derivando

$$P'(x) = h(x - x_1)^{h-1} (x - x_2)^k \dots (x - x_n)^p + (x - x_1)^h k(x - x_2)^{k-1} \dots (x - x_n)^p + \dots + (x - x_1)^h (x - x_2)^k \dots p(x - x_n)^{p-1}$$

$$P'(x) = (x - x_1)^{h-1} (x - x_2)^{k-1} \dots (x - x_n)^{p-1} [h(x - x_2)^k \dots (x - x_n)^p + k(x - x_1)^h \dots + (x - x_n)^p + \dots + p(x - x_1)^h (x - x_2)^k]$$

Por lo tanto  $D = \text{mcd}(P, P')$ .es:

$$D(x) = (x - x_1)^{h-1} (x - x_2)^{k-1} \dots (x - x_n)^{p-1}$$

Esto quiere decir que las raíces de  $D(x)$  son las mismas que las de  $P(x)$  pero con multiplicidad disminuida en una unidad, por lo tanto, las raíces simples de  $P(x)$  no figurarán en  $D(x)$ .

Quedando así demostrado el teorema.

Si el  $\text{mcd}$  entre  $P$  y  $P'$  es independiente de  $x$ , o sea, si  $P$  y  $P'$  son primos entre sí, el polinomio  $P$  carece de raíces múltiples.

Ejemplo: determinar las raíces múltiples de  $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$ .

Si  $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$  por lo tanto  $P'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 2x + 8$

Aplicando el algoritmo de Euclides, se obtiene  $D(x) = \text{mcd}[P, P'] = x^3 - 3x - 2$

Factorizando  $D(x) = x^3 - 3x - 2$  obtenemos  $D(x) = (x + 1)^2(x - 2)$

En consecuencia  $P(x)$  tiene por raíces a  $x_1 = -1$  con multiplicidad 3 y  $x_2 = 2$  con multiplicidad 2.

Verificamos en  $P(x)$ , aplicando la regla de Ruffini.

	1	-1	-5	1	8	4
-1		-1	2	3	-4	-4
	1	-2	-3	4	4	0
-1		-1	3	0	-4	
	1	-3	0	4	0	
-1		-1	4	-4		
	1	-4	4	0		
2		2	-4			
	1	-2	0			

## 9.- Relaciones entre coeficientes y raíces

Consideremos un polinomio  $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ , de segundo grado  $P(x) = ax^2 + bx + c$  (1) y llamemos  $x_1$  y  $x_2$  a sus raíces, entonces sabemos que  $P$  admite la siguiente factorización:

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , por lo tanto

$$P(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \quad (2)$$

Igualando los segundos miembros de (1) y (2) obtenemos

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \text{ de donde}$$

$$b = -a(x_1 + x_2) \Rightarrow -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$$

$$c = ax_1x_2 \Rightarrow \frac{c}{a} = x_1x_2$$

Es decir que la suma de las raíces es igual al coeficiente lineal sobre el coeficiente principal cambiado de signo mientras que el producto de las raíces es igual al término independiente sobre el principal. Si bien esto es ya conocido, nos permite dos cuestiones, primero; hacer idéntico procedimiento para un polinomio de tercer grado y observar qué relación hay entre sus coeficientes y raíces, en segundo lugar preguntarnos si estas relaciones que observamos particularmente para estos dos polinomios, se pueden generalizar para un polinomio cualquiera.

Ahora  $P$  es  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  y sus raíces serán  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , admitiendo la siguiente factorización:

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$  por lo tanto

$$P(x) = a[(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - x_3)]$$

$$P(x) = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3$$

Igualando los segundos miembros, obtenemos las siguientes relaciones

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow \frac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$



$$d = -a x_1 x_2 x_3 \Rightarrow -\frac{d}{a} = x_1 x_2 x_3$$

Este hecho se puede generalizar para cualquier polinomio de grado arbitrario, del siguiente modo.

Sea  $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  (1) un polinomio de grado  $n$  en  $\mathbb{K}[x]$ . Su descomposición factorial es por lo tanto:

$P = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$  donde  $x_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  son todas sus raíces complejas, simples o múltiples. Aplicando la propiedad distributiva, obtenemos:

$$P = a_n x^n - a_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)x^{n-1} + a_n(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n)x^{n-2} - a_n(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n)x^{n-3} + \dots + (-1)^n a_n x_1 x_2 \dots x_n \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \Rightarrow -\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$a_{n-2} = a_n(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) \Rightarrow \frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$a_{n-3} = -a_n(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) \Rightarrow -\frac{a_{n-3}}{a_n} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

...

$$a_0 = (-1)^n a_n x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = x_1 x_2 \dots x_n$$

Por lo tanto si  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  las relaciones anteriores se traducen como:

a) La suma de las raíces es igual al segundo coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal.

b) La suma de los productos binarios de las raíces es igual al tercer coeficiente dividido por el coeficiente principal.

Las mismas reglas valen para las sumas de los productos ternarios, cuaternarios, etc. con signos  $-$  ó  $+$  alternativamente.

El producto de las  $n$  raíces es igual al término independiente dividido por el coeficiente principal, con signo  $+$  ó  $-$ , según que  $n$  sea par o impar respectivamente.

Ejemplo: determinar el polinomio mónico de grado tres cuyas raíces son:

$$x_1 = 1, x_2 = -1 \text{ y } x_3 = 2$$

El polinomio buscado tiene la forma:

$$P(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ donde debemos determinar: } a_2, a_1 \text{ y } a_0. \text{ Por lo tanto}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \Rightarrow a_2 = -(1 + (-1) + 2) \Rightarrow a_2 = -2$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1}{a_3} \Rightarrow a_1 = 1(-1) + 1(+2) + (-1)2 \Rightarrow a_1 = -1$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \Rightarrow a_0 = -1(-1)2 \Rightarrow a_0 = 2$$

Por lo tanto el polinomio solicitado es:  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Comprobamos que las raíces dadas, anulan al  $P(x)$  propuesto.

$$P(1) = (+1)^3 - 2(+1)^2 - (+1) + 2 = 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$$

$$P(2) = (+2)^3 - 2(+2)^2 - (+2) + 2 = 0$$