MATRICES

TRABAJO PRÁCTICO N° 3

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1. Escribir la matriz $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ en forma explícita, sabiendo que:

a) $a_{21} = 0$ $\quad a_{11} = 9$ $\quad a_{12} = 1$ $\quad a_{22} = -3$

b) $a_{11} = \pi$ $\quad a_{22} = 270°$ $\quad a_{32} = a_{12} + a_{11}$ $\quad a_{12} = \pi/3$

$a_{21} = 180°$ $\quad a_{31} = a_{21} - a_{11}$

2. Expresar las siguientes matrices en forma implícita

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. Dada la matriz $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, calcular $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ¿Qué nombre recibe el resultado obtenido?

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = (a_{ij}) \in R^{4\times 4} \,/\, a_{ij} = \begin{cases} i+j & si\ i = j \\ i-j & si\ i \neq j \end{cases}$

4. Escribir de forma explícita las siguientes matrices. ¿Qué nombre recibe la matriz obtenida en cada caso?

a) $A = (a_{ij}) \in R^{2\times 4} \,/\, a_{ij} = \begin{cases} i-j & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$ b) $B = (b_{ij}) \in R^{4\times 4} \,/\, b_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$

c) $C = (c_{ij}) \in R^{2\times 2} \,/\, c_{ij} = \begin{cases} -5 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$ d) $D = (d_{ij}) \in R^{3\times 3} \,/\, d_{ij} = \begin{cases} i^j & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$

e) $E = (e_{ij}) \in R^{4\times 4} \,/\, e_{ij} = \begin{cases} 2i + j^2 & si\ i \geq j \\ 0 & si\ i < j \end{cases}$ f) $F = (f_{ij}) \in R^{3\times 3} \,/\, f_{ij} = \begin{cases} (-1)^j . j & si\ i < j \\ 0 & si\ i = j \\ (-1)^{i+1} . i & si\ i > j \end{cases}$

5. Calcular x e y, números reales, para que se verifiquen las siguientes igualdades

a) $\begin{pmatrix} -5x - 2y & 6x \\ 2y & 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y & 6x \\ 2y & x - 5y + 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & x - 3y & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + y & 1 \\ 0 & -1 \\ 5y & x - y \end{pmatrix}^t$

c) $\begin{pmatrix} x^2 + 4 & 5 + x \\ x - a & y \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & y - 3 \\ 8 & 5x \\ 3x + 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -5x - 3y & 9 \\ 6 & 2x - 4y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y & 9 \\ 6 & x - 5y \end{pmatrix} = I$

6. Dadas las siguientes matrices, resolver las operaciones indicadas, siempre que sea posible

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 16 \\ 9 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $(A + 4B - I)^t =$ b) $F^t - K =$ c) $2.G + E^t =$ d) $E.L =$

e) $traza\ (L.E) =$ f) $(3K.2D) =$ g) $J^2 - H.I =$ h) $(B.E).L =$

i) $traza(B^2 + C^t) =$ j) $(A.B)^t =$ k) $B^t.A^t =$ l) $A^3.G =$

Verificar los resultados siempre que sea posible con GeoGebra: Sugerencia: Seleccionar la vista Cálculo Simbólico y activar Hoja de Cálculo; ingresar los elementos de las matrices y crearlas con la opción "Crear matriz"; ingresar las operaciones en la barra de entrada. https://youtu.be/AXrtEx-RRFQ

7. Encontrar los valores de x e y para que se verifiquen las siguientes igualdades

a) $\begin{pmatrix} 8x - 5y & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 2x - y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 35 & -2 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 5 \\ -1 & 10 \\ -1 & y \end{pmatrix}$

8. Demostrar las siguientes igualdades

a) $\frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = A$ con $A \in R^{n \times n}$

b) $(A + I)^2 = 3A + I$ con $A \in R^{n \times n}$ e idempotente

c) $(A - I)^2 = 2(I - A)$ con $A \in R^{n \times n}$ e involutiva

d) $(A + A^t).A = A + I$ con $A \in R^{n \times n}$, idempotente y ortogonal

e) $\left[\frac{1}{2}(A + I)\right]^2 = \frac{1}{2}(A + I)$ con $A \in R^{n \times n}$ e involutiva

9. Sabiendo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, aplicando propiedades, calcular

a) $(A^t)^{-1} + \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} =$ b) $(B^2)^{-1} + (4B)^{-1} =$ c) $(A.B)^{-1} - (A^{-1}.4B^{-1})^t =$

10. Determinar si las siguientes matrices son ortogonales

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

11. Para las siguientes matrices

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 5 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

i. Obtener la matriz equivalente escalonada por filas de las matrices $A, C\ y\ E$

ii. Obtener la matriz escalonada reducida por filas de las matrices $B\ y\ D$

iii. Determinar el rango de todas las matrices

Verificar los resultados de los apartados ii y iii con GeoGebra: Sugerencia: Seleccionar la vista Cálculo Simbólico y activar Hoja de Cálculo; ingresar los elementos de las matrices y crearlas con la opción "Crear matriz". https://youtu.be/AXrtEx-RRFQ. Usar los comandos *EscalonadaReducida* y *RangoMatriz* en la barra de entrada.

12. En caso de ser posible, encontrar la matriz inversa de las siguientes matrices, aplicando definición. Verificar con el método de Gauss-Jordan

$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Verificar los resultados con GeoGebra: Sugerencia: Seleccionar la vista Cálculo Simbólico y activar Hoja de Cálculo; ingresar los elementos de las matrices y crearlas con la opción "Crear matriz". https://youtu.be/AXrtEx-RRFQ. Usar los comandos *Inversa* en la barra de entrada.

13. Resolver y verificar el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$\begin{cases} X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{cases}$ Siendo $A = \begin{pmatrix} 18 & -15 \\ -19 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 29 & -5 \end{pmatrix}$

14. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, resolver las siguientes ecuaciones matriciales

a) $2(A - B + X) = 6(X - A)$ b) $X.A^2 = A^{-1}$ c) $(B^{-1}.X)^{-1} = B.(A^{-2}.B)^{-1}$

d) $(A^{-1} + X^t)^t = \left(\frac{1}{2}\,A^t\right)^{-1}$ e) $A.X.B = B.A$

15. Plantear y resolver los siguientes problemas

a) Una fábrica produce dos modelos de bicicletas, A y B, en tres terminaciones: E (económico), M (medio) y L (lujo). Produce del modelo A: 300 unidades en la terminación E, 250 unidades en la terminación M y 100 unidades en la terminación L. Produce del modelo B: 250 unidades en la terminación E, 150 unidades en la terminación M y 50 unidades en la terminación L. La terminación E lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación M lleva 30 horas de taller y 1,5 horas de administración. La terminación L lleva 35 horas de taller y 2 horas de administración.

i) Representar la información en dos matrices

ii) Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

b) Una empresa fabrica dos tipos de bombillas, transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se elaboran cuatro modelos M_1, M_2, M_3 y M_4. El modelo M_1 tiene un 4% de bombillas defectuosas, el modelo M_2 un 2%, el modelo M_3 un 5% y el modelo M_4 un 10%.

La siguiente matriz representa la producción diaria de bombillas para cada tipo y modelo.

$$P = \begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 350 & 250 \\ 340 & 280 \\ 500 & 400 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, defectuosas y buenas, que se producen.

c) Una fábrica produce tres lubricantes en dos refinerías. Diariamente, se producen 4 barriles del tipo Normal en la primera refinería y 3 en la segunda; para el lubricante Extra la producción es de 6 y 5 barriles, respectivamente; mientras que, para el Super, la producción es de 4 y 7 barriles, respectivamente.

Para cada barril de 50 litros del lubricante Normal se necesitan 10 litros de aceites finos, 6 litros de alquitrán y 34 litros de grasas residuales. Para un barril de lubricante Extra se necesitan 12 litros de aceites finos, 5 litros de alquitrán y 33 litros de grasas residuales. Para cada barril de lubricante Super la composición es 15 litros de aceites finos, 3 litros de alquitrán y 32 litros de grasas residuales.

i) Representar la información en dos matrices $A \in R^{2\times3}$ y $B \in R^{3\times3}$

ii) Determinar la matriz que indica el consumo de todos los componentes que forman parte de cada tipo de lubricante en cada refinería.

AUTOEVALUACION DE TEORÍA

1.- Responder Verdadero o Falso. <u>NO</u> justificar.

a) Dadas tres matrices cualesquiera A, B y C, se cumple que A.(B + C) = A.B + A.C ☐

b) Sea el producto de un escalar λ por la suma de dos matrices A^{mxn} y B^{mxn}, entonces $\lambda\,(A+B) \neq A+\lambda B$ ☐

2.- Completar con la respuesta que corresponda.

a) Una matriz cuadrada A es antisimétrica si y sólo si.................................es decir que $A =$..............

b) Se puede expresar simbólicamente que una matriz cuadrada A ∊ K^{nxn} , es una matriz unidad si y sólo si.......................................

3.- Escribir, en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es escribir N.

a) Si en $A^{nxn} = \|a_{ij}\|$ se cumple que $a_{ij} = 0\ \forall\ i \neq j$ entonces A es matriz ☐

A) Diagonal B) Escalar C) Triangular superior D) Identidad

b) Sea A_{nxn} una matriz tal que $a_{ij} = 0\ \ \forall\ i < j$ entonces A se denomina matriz ☐

A) Triangular superior B) Triangular inferior C) Diagonal D) Escalar

AUTOEVALUACIÓN DE PRÁCTICA

1.- Recuadrar con tinta, la letra correspondiente a las opciones correctas en cada uno de los enunciados.

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 4 & x \\ -1 & -x & 1-x \end{pmatrix}$, si $x = 2$, $\rho(A) =$

1	A
2	B

y si $x = 2$, $\rho(A) =$

2	C
3	D

b) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & x-2 \\ x & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, entonces $A = B^t$ si

x = 4	A
x = 10	B

y $B^t =$

$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$	C
$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	D

2.- Completar con la respuesta que corresponda. Las respuestas deben escribirse con tinta.

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

entonces:

a_1) $A - B^t =$ .... a_2) $C^t \cdot B =$ .... a_3) $(2A + \frac{1}{2} B) \cdot C =$ ....

b)La igualdad $\begin{pmatrix} 4 & 2+a \\ b+3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se verifica si a =...... y b =.....

c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix}$, entonces la igualdad $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, se cumple si x =...........e y =...........

3.- Escribir, con tinta y en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir una N.

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^2 - A^t$ es igual a: $\boxed{}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \\ 5 & -9 & 9 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \\ 5 & -9 & -9 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \\ 5 & -9 & -9 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \\ 5 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

b) La solución del sistema matricial $\begin{cases} 2.X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$ es: $\boxed{}$

A) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ B) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -4 & -3 & -9 \end{pmatrix}$

C) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & -9 \end{pmatrix}$ D) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & -9 \end{pmatrix}$