

# Capítulo 1

## Vectores en $\mathbb{R}^n$

### 1.1.- Introducción

La geometría euclídea y el álgebra renacentista estaban predestinadas a entenderse y fusionarse, de hecho, lo hicieron por medio de la obra de Descartes (1596 – 1650) y Fermat (1601 – 1665) en una nueva geometría que se denominó Geometría Analítica. El alcance de esta geometría se vio reforzado por la aparición del cálculo infinitesimal, que se aplicó al estudio de los problemas geométricos.

En el siglo XVII y XVIII el dominio de los métodos analíticos en las matemáticas era tal que la geometría euclídea se estudiaba olvidándose del rigor euclídeo y colocando en su lugar ecuaciones que representaban curvas, pares de números que representaban puntos y utilizando métodos de resolución de ecuaciones al principio y del cálculo infinitesimal después, como metodología de resolución de problemas geométricos.

A finales del siglo XVIII había unos pocos matemáticos que permanecían ligados al uso exclusivo de métodos denominados tradicionalmente geométricos, la gran mayoría utilizaba los métodos algebraicos enriquecidos por los métodos infinitesimales.

Del último grupo es William K. Clifford (1845 – 1879) el primero en dar una formulación moderna de la definición de los vectores, sus operaciones y los productos escalar y vectorial en su obra *Elementos de Dinámica*. Más precisamente los métodos vectoriales se impusieron en la geometría entre 1830 y 1880.

En la actualidad, no solo partes de las matemáticas como: álgebra lineal, geometría analítica, cálculo avanzado, sino también la teoría electromagnética, el análisis vectorial, entre otras, utilizan vectores a la hora de entender el proceso de matematización de algunos fenómenos de la naturaleza.

Variables físicas que tienen magnitud, dirección y sentido se representan matemáticamente con vectores. La posición, velocidad y aceleración de una partícula son vectores, así como las fuerzas.

De este modo, es de gran importancia el estudio de la Geometría Analítica y particularmente del tema vectores, más aún si está destinado para estudiantes de ingeniería.

En este primer capítulo estudiaremos los conceptos más importantes de vectores en  $\mathbb{R}^n$  y ejemplificaremos en la gran mayoría de los casos para  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

Luego de ver la definición formal, igualdad y vector posición de un punto, se realizará el estudio de las operaciones más comunes entre vectores: suma, producto por un escalar y resta.

En el apartado *Otras operaciones con vectores*, se presentará uno de los tres productos entre vectores, el producto escalar y los diversos conceptos que esta operación permite establecer entre vectores (perpendicularidad, módulo, ángulo, etc.).

Finalmente se hace un estudio detallado del producto vectorial y mixto entre vectores. Enfatizando que en la mayoría de las operaciones se destaca tanto las aplicaciones en física, como su interpretación geométrica.

## 1.2.- Conceptos básicos

El ser humano siempre se preocupó por cuantificar las cosas, es decir, asignar un valor cuantitativo o cualitativo a las cosas. Por ejemplo, podemos medir de manera precisa, la distancia entre dos puntos, el peso de un insecto, la temperatura actual en una habitación, etc. De igual manera podemos medir, pero de forma menos precisa y más subjetivamente, la belleza de un cuadro artístico, el sabor de una comida.

Una magnitud es toda cualidad relativa a un proceso natural o un cuerpo que puede medirse, y consecuentemente, expresarse con un valor numérico.

Las magnitudes que pueden definirse mediante un número y las unidades utilizadas para su medida, se denominan magnitudes escalares; en cambio, si además se debe especificar dirección y sentido, a esas magnitudes se las llama vectoriales.

Con esta diferencia intuitiva veamos la definición de vector y sus operaciones básicas.

**Vector de  $\mathbb{R}^n$ :** Llamaremos *n*-vector a una *n*-tupla ordenada de *n* números reales, así  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$

Los elementos de  $\mathbb{R}^n$  se suelen denotar como  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , en donde  $x_1$  es la primera componente,  $x_2$  la segunda componente y en general  $x_i$  la *i*-ésima componente.

Cualquier vector de  $\mathbb{R}^n$  cuyas componentes sean cero se denomina vector nulo y lo denotamos como  $\vec{0}$ .

Ejemplo 1:  $\vec{u} = (-1, 2)$  es un vector de  $\mathbb{R}^2$  cuya primera y segunda componente son -1 y 2 respectivamente; en cambio  $\vec{v} = (1, 2, -5, 0)$  es un vector de  $\mathbb{R}^4$  cuya primera, segunda, tercera y cuarta componente son 1, 2, -5 y 0 respectivamente.

Ejemplo 2: los vectores  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$  y se los llama vectores canónicos. Vale decir, un vector canónico de  $\mathbb{R}^n$  es aquel en donde solo una componente vale 1 y todas las demás, cero.

Geométricamente, un *n*-vector  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un segmento de recta orientado que tiene por punto inicial el origen  $O = (0, 0, \dots, 0)$  y extremo el punto  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Por lo

tanto los elementos de  $\mathbb{R}^n$  pueden pensarse como puntos o vectores geométricos de acuerdo a lo que se requiera en el contexto de trabajo.

Dado un segmento de recta orientado (vector geométrico) con punto inicial  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  y punto final  $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$  existe un  $n$ -vector  $\vec{u}$  con la misma longitud y dirección que  $\overrightarrow{PQ}$ : basta tomar  $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ . En consecuencia:

*A cada  $n$ -vector es posible asociarle un segmento de recta orientado y, recíprocamente, a cada segmento de recta orientado se le puede asociar un  $n$ -vector con la misma longitud y dirección, pero con punto inicial en el origen.*

**Vector posición de un punto:** Sea el punto  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . El punto  $P$  determina con el origen de coordenadas un vector  $\overrightarrow{OP}$  que llamaremos vector posición del punto  $P$ .

Ejemplo 1: en  $\mathbb{R}^2$  el punto  $P(2, 3)$  tiene por vector posición  $\overrightarrow{OP} = (2, 3)$

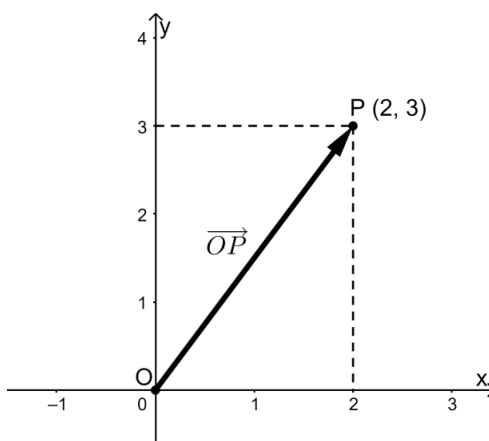


Gráfico 1

Ejemplo 2: en  $\mathbb{R}^3$  el punto  $Q(2, 3, 4)$  tiene por vector posición  $\overrightarrow{OQ} = (2, 3, 4)$

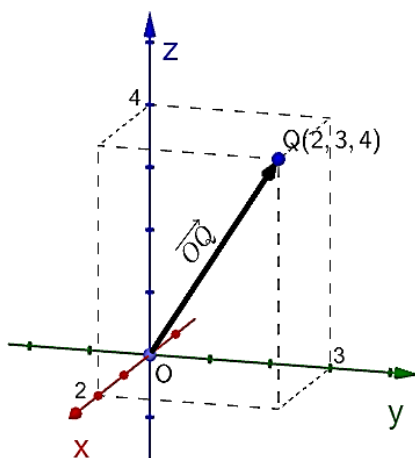


Gráfico 2

**Igualdad de vectores:** Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vectores de  $\mathbb{R}^n$  se dice que son iguales si y solo si tienen todas las componentes correspondientes, iguales.

Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_i = v_i \forall 1 \leq i \leq n$

Ejemplo 1: para que los vectores de  $\mathbb{R}^3$   $(a, b, c)$  y  $(2, -3, 0)$  sean iguales, debe ser  $a = 2, b = -3$  y  $c = 0$  por razones similares  $(-1, 4, 6)$  no es igual a  $(4, -1, 6)$ .

Ejemplo 2: determinar  $x, y \in \mathbb{R}$  para los cuales son iguales los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^2$   $\vec{u} = (x - 1, 3)$  y  $\vec{v} = (y - 3, x + 1)$ .

$$\begin{cases} x - 1 = y - 3 \\ 3 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Verificación: si  $x = 2$  e  $y = 4 \Rightarrow \vec{u} = (1, 3)$  y  $\vec{v} = (1, 3)$ .

## 2.- Operaciones con vectores

Dadas unas cantidades vectoriales, es posible obtener otras a partir de ellas si hacemos uso de las operaciones básicas entre vectores: la suma y la multiplicación por escalares que definiremos a continuación.

**2.1.- Suma de vectores:** La suma de dos vectores,  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  es otro vector,  $\vec{u} + \vec{v}$ , cuyas componentes son la suma de las respectivas componentes de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$ .

Ejemplo 1: sean los vectores de  $\mathbb{R}^2$   $\vec{u} = (1, 3)$  y  $\vec{v} = (-3, 2) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-2, 5)$ .

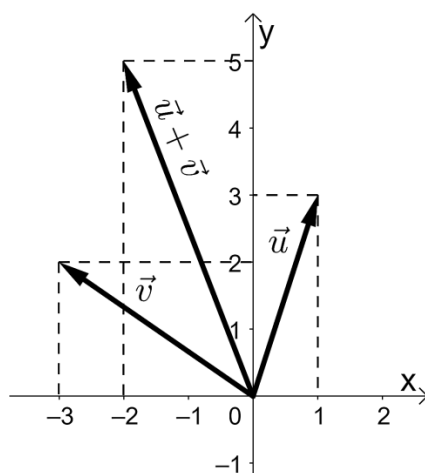


Gráfico 3

Ejemplo 2: sean los vectores de  $\mathbb{R}^3$   $\vec{p} = (1, 3, -6)$  y  $\vec{q} = (-3, 2, 4)$  al realizar su suma obtendremos:  $\vec{p} + \vec{q} = (-2, 5, -2)$ . Esto se muestra en el gráfico 4.

Ejemplo 3: sean los vectores de  $\mathbb{R}^4$   $\vec{r} = (3, -3, -4, -4)$  y  $\vec{s} = (-3, -2, 2, -1)$  al realizar su suma obtendremos:  $\vec{r} + \vec{s} = (0, -5, -2, -5)$ .

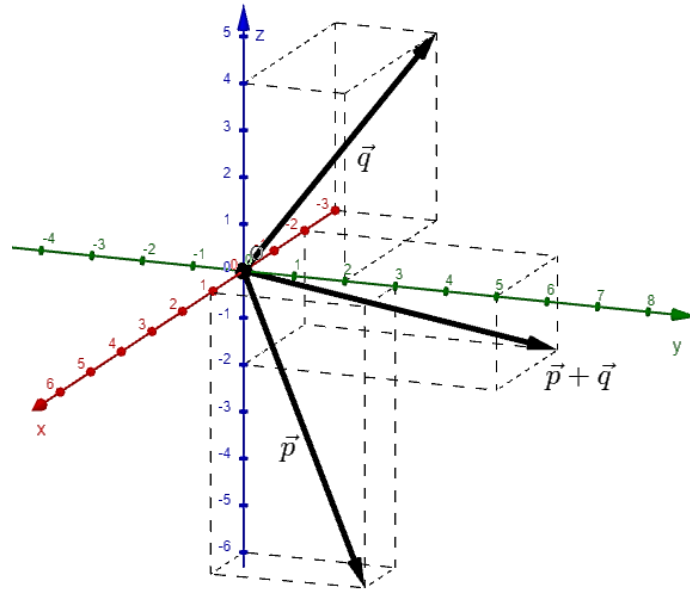


Gráfico 4

Gráficamente la suma en  $\mathbb{R}^2$  se puede realizar mediante la regla del paralelogramo, que consiste en construir un paralelogramo que tenga por lados los dos vectores dados. La diagonal (vector) del paralelogramo, que tiene por origen el origen de coordenadas, representa la suma de los vectores.

El siguiente gráfico, muestra la suma del Ejemplo 1.

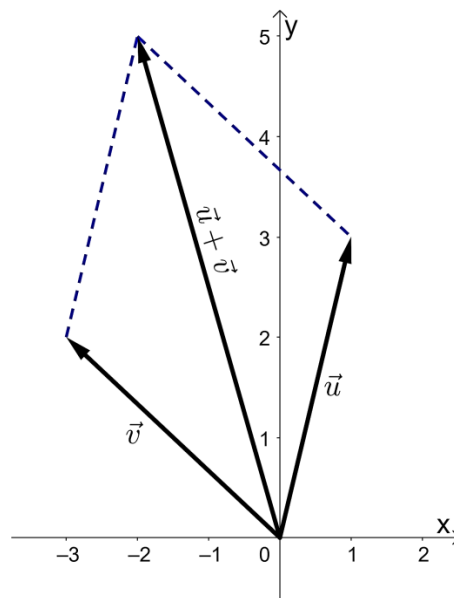


Gráfico 5

**2.2.- Producto por un escalar:** El producto de un vector  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  por un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , es el vector  $\lambda\vec{u}$  cuyas componentes son el producto del escalar por las respectivas componentes del vector dado.

Sea  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$ .

Ejemplo: sea el vector  $\vec{u} = (1, -4, 6, 2)$  de  $\mathbb{R}^4$  y el escalar  $\lambda = 3$  entonces  $\lambda\vec{u} = (3, -12, 18, 6)$ . En términos geométricos, el vector  $\lambda\vec{u}$  es el vector que tiene igual dirección (recta que contiene al vector) que  $\vec{u}$  y que dependiendo del signo de  $\lambda$  tiene igual sentido ( $\lambda > 0$ ) o sentido opuesto ( $\lambda < 0$ ) al del vector  $\vec{u}$  y cuya longitud es igual al valor absoluto de  $\lambda$  por la longitud del vector  $\vec{u}$ .

Ejemplo 1: sea el vector  $\vec{u} = (2, 3)$  de  $\mathbb{R}^2$  y  $\lambda = 3$ , entonces el vector  $\lambda\vec{u} = (6, 9)$  tendrá la misma dirección y sentido que  $\vec{u}$ , y una longitud igual al triple de la de  $\vec{u}$ .

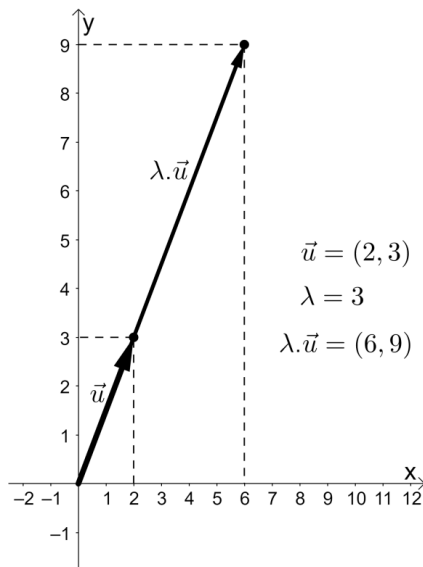


Gráfico 6

Ejemplo 2: sea el vector  $\vec{v} = (2, 4, 2)$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , entonces el vector  $\lambda\vec{v} = (-1, -2, -1)$  tendrá la misma dirección y sentido opuesto que los de  $\vec{v}$ , y una longitud igual a la mitad de la de  $\vec{v}$ .

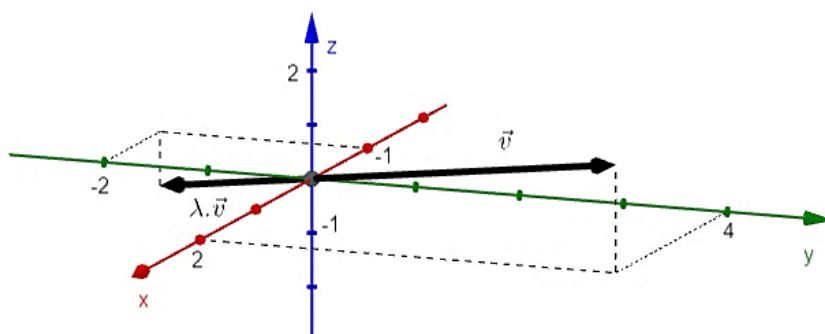


Gráfico 7

De acuerdo a la definición del producto de un vector por un escalar, si el vector es  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y el escalar es:

- $\lambda = -1$ , entonces  $\lambda\vec{u} = -\vec{u}$  vector opuesto a  $\vec{u}$ .
- $\lambda = 0$ , entonces  $\lambda\vec{u} = \vec{0}$  vector nulo.

**Aplicación del producto de un vector por un escalar:** la Segunda Ley de Newton (Ley Fundamental de la Dinámica) relaciona el concepto de aceleración con la fuerza. Si una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo hace que éste acelere en la misma dirección que la fuerza neta, la magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre él, siendo sus direcciones y sentidos iguales. Esta ley puede enunciarse de la siguiente manera:

*Si una fuerza<sup>1</sup> neta no nula ( $\vec{F}_N$ ) actúa sobre un cuerpo, este cuerpo se acelera ( $\vec{a}$ ). El vector aceleración tiene la misma dirección y sentido que la fuerza neta o resultante y es inversamente proporcional a la masa del cuerpo:  $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}_N$  donde  $m$  es la masa del cuerpo, siendo una magnitud escalar.*

Esta relación también puede escribirse en su forma más conocida:  $\vec{F}_N = m \cdot \vec{a}$  (1).

La ecuación (1) nos indica dos cuestiones:

- Al ser la masa la medida de la inercia del cuerpo, es un escalar, por lo tanto en la segunda Ley de Newton se aplica la operación producto de un vector ( $\vec{a}$ ) por un escalar ( $m$ ) y se obtiene otro vector ( $\vec{F}_N$ ).
- Los vectores fuerza neta (o resultante) y aceleración son paralelos<sup>2</sup>, ya que uno se obtiene a partir del otro multiplicado por un escalar.

### **Propiedades de la suma de vectores y producto por un escalar**

Veremos a continuación, cuáles son las propiedades algebraicas que poseen las dos operaciones básicas antes definidas, estas propiedades son similares a las que poseen las operaciones de suma y producto de números reales.

P<sub>1</sub>) La suma es ley de composición interna en  $\mathbb{R}^n$ .

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in \mathbb{R}^n$$

Esto significa que la suma, como está definida, es una operación que a cada par de elementos de  $\mathbb{R}^n$  le hace corresponder un único elemento de  $\mathbb{R}^n$ .

D) Es inmediata por la definición de suma en  $\mathbb{R}^n$ .

P<sub>2</sub>) La suma es asociativa en  $\mathbb{R}^n$ .

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

D) Sean  $x_i, y_i, z_i$  las  $i$ -ésimas componentes de los vectores  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  respectivamente. Por lo tanto  $x_i + y_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $\vec{x} + \vec{y}$ , así que  $(x_i + y_i) + z_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ . Como  $(x_i + y_i) + z_i = x_i + (y_i + z_i) \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la

---

<sup>1</sup> Fuerza es una magnitud vectorial que se puede simbolizar como  $\vec{F}$

<sup>2</sup> Ver el apartado "Vectores paralelos"

propiedad asociativa de números reales, las componentes respectivas de  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  y de  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$  son iguales. Concluimos entonces que  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ .

P<sub>3</sub>) La suma es conmutativa en  $\mathbb{R}^n$ .

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

D) Sean  $x_i, y_i$  las  $i$ -ésimas componentes de los vectores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  respectivamente. Por lo tanto  $x_i + y_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $\vec{x} + \vec{y}$ . Como  $x_i + y_i = y_i + x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad conmutativa de números reales, las componentes respectivas de  $\vec{x} + \vec{y}$  y de  $\vec{y} + \vec{x}$  son iguales. Concluimos entonces que  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .

P<sub>4</sub>) Existe un único elemento neutro para la suma en  $\mathbb{R}^n$ .

El elemento neutro se denota con  $\vec{0}$ .

$$\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^n, \text{ único} / \forall \vec{x} \in V: \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

D) La existencia es evidente puesto que se definió el vector nulo como aquel vector cuyas componentes son cero.

Para demostrar la unicidad del neutro vamos a suponer que existen dos neutros para la suma:  $\vec{0}_1$  y  $\vec{0}_2$ , por lo tanto, si:

$$\vec{0}_1 \text{ es neutro entonces } \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$$

$$\vec{0}_2 \text{ es neutro entonces } \vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_1$$

De donde se deduce, por ser los primeros miembros de ambas igualdades iguales, que  $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$  y consecuentemente el neutro es único.

P<sub>5</sub>) Todo elemento en  $\mathbb{R}^n$  admite un único inverso aditivo u opuesto en  $\mathbb{R}^n$ .

El elemento opuesto a uno cualquiera  $\vec{x}$ , se nota por  $-\vec{x}$ .

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \exists (-\vec{x}) \in \mathbb{R}^n \text{ único} / \vec{x} + (-\vec{x}) = -\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}.$$

La existencia de tal vector es evidente puesto que cuando se definió producto por un escalar, si el escalar es  $-1$  al multiplicarse por cualquier vector se obtiene el opuesto de dicho vector.

Para demostrar la unicidad del elemento opuesto vamos a suponer que para un elemento  $\vec{x}$  de  $\mathbb{R}^n$  existen dos opuestos  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$  por lo tanto se debe cumplir que  $\vec{x} + \vec{x}_1 = \vec{0}$  y también que  $\vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{0}$  de donde se deduce que  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ . Consecuentemente el inverso aditivo u opuesto de cada elemento de  $\mathbb{R}^n$  es único.

P<sub>6</sub>) El producto es ley de composición externa en  $\mathbb{R}^n$  con escalares en  $\mathbb{R}$ .

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Esto significa que el producto de un vector de  $\mathbb{R}^n$  por un escalar, como está definido, es una operación que a cada par vector-escalar, le hace corresponder un único elemento de  $\mathbb{R}^n$ .



D) La existencia de tal vector es inmediata, por la definición de producto de un vector de  $\mathbb{R}^n$  por un escalar.

P<sub>7</sub>) El producto por un escalar satisface la asociatividad mixta.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: \alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta) \vec{x}.$$

D) Sea  $x_i$  la  $i$ -ésima componente del vector  $\vec{x}$ . Por lo tanto  $\beta x_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $\beta \vec{x}$  y por lo tanto  $\alpha(\beta x_i)$  la  $i$ -ésima componente de  $\alpha(\beta \vec{x})$ . Como  $\alpha(\beta x_i) = (\alpha\beta)x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad asociativa del producto de números reales, las componentes respectivas de  $\alpha(\beta \vec{x})$  y de  $(\alpha\beta)\vec{x}$  son iguales. Concluimos entonces que  $\alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ .

P<sub>8</sub>) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en  $\mathbb{R}$ .

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}.$$

D) Sea  $x_i$  la  $i$ -ésima componente del vector  $\vec{x}$ . Por lo tanto  $(\alpha + \beta)x_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $(\alpha + \beta)\vec{x}$ . Como  $(\alpha + \beta)x_i = \alpha x_i + \beta x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad distributiva del producto de números reales, respecto a la suma, las componentes respectivas de  $(\alpha + \beta)\vec{x}$  y de  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$  son iguales. Entonces, por igualdad de vectores, se concluye:  $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ .

P<sub>9</sub>) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en  $\mathbb{R}^n$ .

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n: \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}.$$

D) Sean  $x_i, y_i$  las  $i$ -ésimas componentes de los vectores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  respectivamente. Por lo tanto  $x_i + y_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $\vec{x} + \vec{y}$ , como también  $\alpha(x_i + y_i)$  es la  $i$ -ésima componente de  $\alpha(\vec{x} + \vec{y})$ . Como  $\alpha(x_i + y_i) = \alpha x_i + \alpha y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad distributiva del producto de números reales, respecto a la suma, las componentes respectivas de  $\alpha(\vec{x} + \vec{y})$  y de  $\alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$  son iguales. Concluimos entonces que  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ .

P<sub>10</sub>) La unidad para los  $\mathbb{R}$  es el neutro para el producto por un escalar.

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: 1 \vec{x} = \vec{x}.$$

El conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^n$  entre los cuales se definieron las operaciones de suma y producto por un escalar con las respectivas propiedades, determinan un espacio vectorial y constituyen una estructura de las más importantes en matemática.

La importancia de esta definición axiomática es que amplía la idea geométrica intuitiva de vector. Cualquier conjunto de elementos entre los cuales pueda definirse las operaciones anteriores y que cumplan con las mismas propiedades podrá considerarse como un espacio vectorial y sus elementos como vectores, aunque a veces pueda resultar difícil interpretarlos como segmentos orientados.

**2.3.- Resta de vectores:** La resta de dos vectores,  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  es otro vector,  $\vec{u} - \vec{v}$ , que se obtiene sumando al vector minuendo el opuesto del vector sustraendo, es decir,  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ .

Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ .

Geométricamente el vector opuesto a uno dado, es aquel que tiene la misma dirección y longitud, pero sentido contrario.

Ejemplo 1: sean los vectores de  $\mathbb{R}^2$   $\vec{u} = (1, 3)$  y  $\vec{v} = (-3, 2) \Rightarrow$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (1, 3) + (3, -2) = (4, 1)$ .

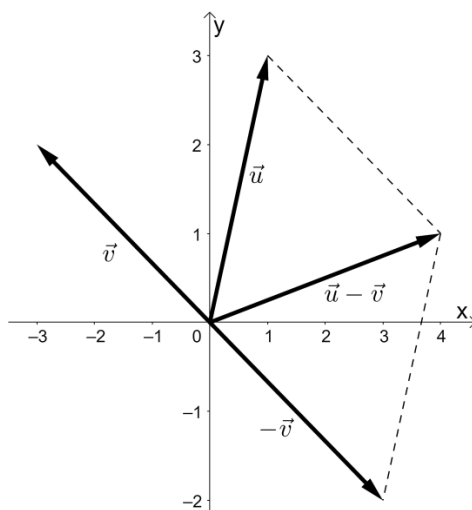


Gráfico 8

Geométricamente, se puede interpretar que la resta  $\vec{u} - \vec{v}$  es la diagonal del paralelogramo de lados  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  que va desde el punto final de vector  $\vec{v}$  hasta el punto final del vector  $\vec{u}$ .

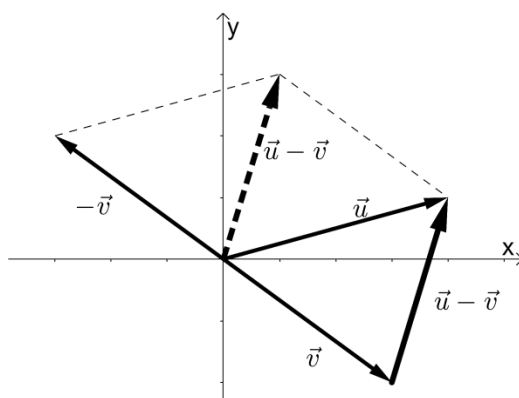


Gráfico 9

Ejemplo 2: sean los vectores de  $\mathbb{R}^3$   $\vec{p} = (2, 3, 2)$  y  $\vec{q} = (-2, 2, 4) \Rightarrow \vec{p} - \vec{q} = (4, 1, -2)$ . Esto se muestra en el gráfico 10.

**2.4.- Vector determinado por dos puntos de  $\mathbb{R}^n$ :** Las componentes de un vector determinado por dos puntos  $P$  y  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  son iguales a las diferencias entre las coordenadas respectivas del punto  $Q$  (punto extremo) y  $P$  (punto origen). Es decir:  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$  siendo  $\overrightarrow{OQ}$  y  $\overrightarrow{OP}$  el vector posición del punto  $Q$  y  $P$  respectivamente.

Si  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  y  $Q(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1, q_2, \dots, q_n) - (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n)$$

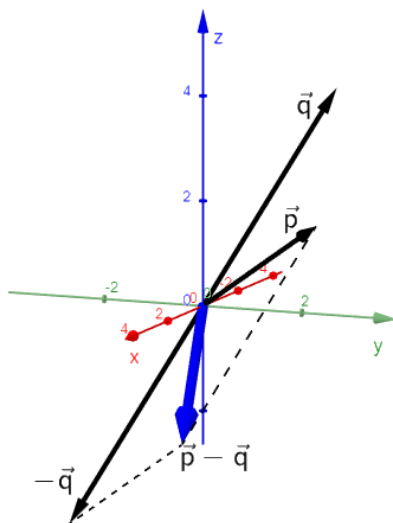


Gráfico 10

Ejemplo 1:

Sean los puntos  $A(4, 1)$  y  $B(6, 4)$ , cuyos vectores posición son  $\overrightarrow{OA} = (4, 1)$  y  $\overrightarrow{OB} = (6, 4)$ .

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (6, 4) - (4, 1) = (2, 3).$$

Debemos tener en cuenta que  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$  ya que  $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$  mientras que  $\overrightarrow{BA} = (-2, -3)$ .

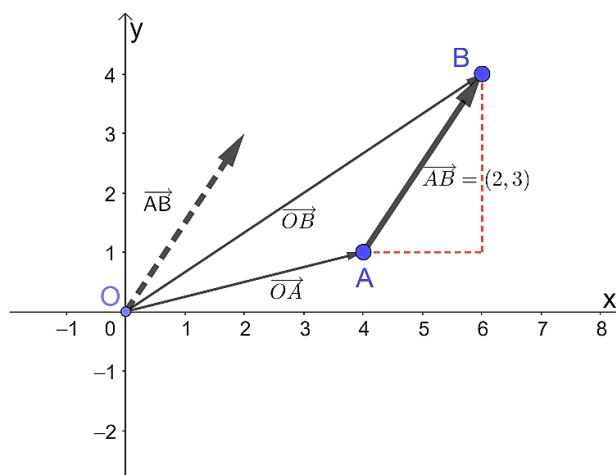


Gráfico 11a

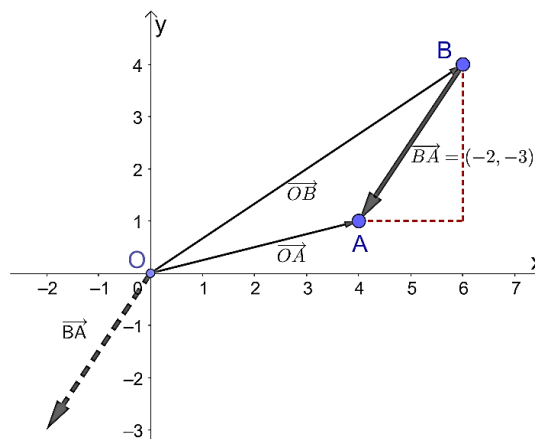


Gráfico 11b

Ejemplo 2:

Sean los puntos P y Q, cuyos vectores posición son  $\overrightarrow{OP} = (-2, 3, 2)$  y  $\overrightarrow{OQ} = (2, 2, 5) \in \mathbb{R}^3$   
 $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, 2, 5) - (-2, 3, 2) = (4, -1, 3)$ . Esto se muestra en el gráfico 12.

En  $\mathbb{R}^3$  ocurre exactamente lo mismo que en  $\mathbb{R}^2$  respecto a los vectores  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{QP}$ .

**3.- Vectores paralelos:** Dos vectores no nulos  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  se dicen paralelos si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  tal que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

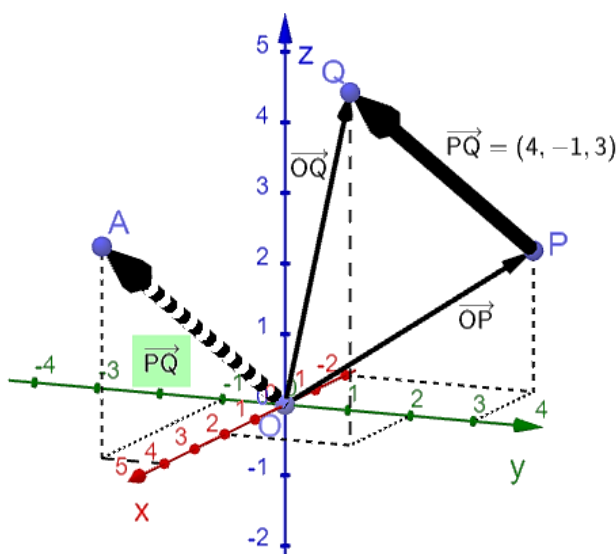


Gráfico 12

La definición de vectores paralelos nos indica que dos vectores no nulos son paralelos si uno se puede obtener a partir del otro, multiplicado por un escalar.

Ejemplo 1: los vectores  $\vec{u} = (6, 9)$  y  $\vec{v} = (2, 3)$  de  $\mathbb{R}^2$  son paralelo ya que  $\vec{u} = 3\vec{v}$ .

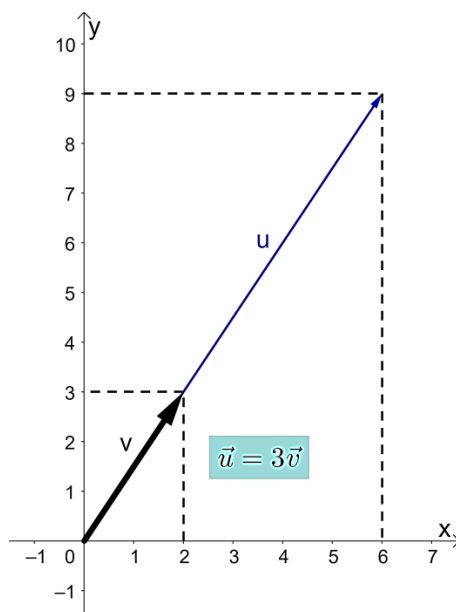


Gráfico 13

Veamos una característica importante de los vectores paralelos, que se deduce a partir de la definición.

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lambda(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n)$$

$$\begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \Rightarrow \lambda = \frac{u_1}{v_1} \\ u_2 = \lambda v_2 \Rightarrow \lambda = \frac{u_2}{v_2} \\ \vdots \\ u_n = \lambda v_n \Rightarrow \lambda = \frac{u_n}{v_n} \end{cases}$$

$$\text{Por lo tanto} \Rightarrow \lambda = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \dots = \frac{u_n}{v_n}$$

Esto significa que la *condición necesaria y suficiente* para que dos vectores sean paralelos es que sus componentes homologas sean proporcionales.

Si el valor de la constante de proporcionalidad es positivo, los vectores tienen el mismo sentido y si es negativo tienen sentido opuesto.

Ejemplo 2: los vectores  $\vec{u} = (4, -6, 6)$  y  $\vec{v} = (-2, 3, -3)$  de  $\mathbb{R}^3$  son paralelos y de sentidos opuestos ya que  $\vec{u} = -2\vec{v}$ .

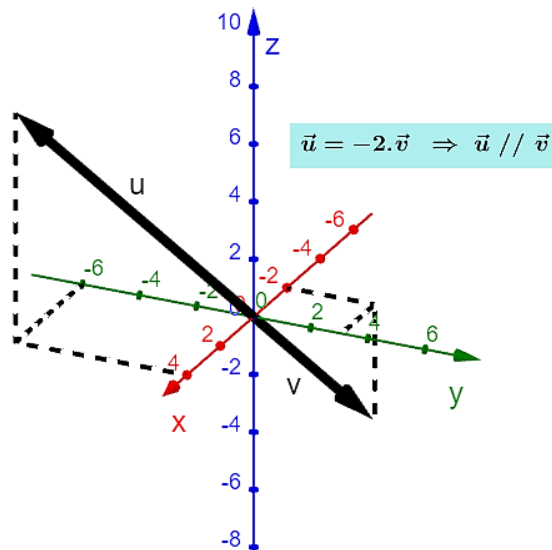


Gráfico 14

#### 4.- Otras operaciones con vectores

Se mencionó que una de las características de un vector es la longitud que tiene este, concepto que intuitivamente entendemos pero que deberíamos formalizar. Para este efecto, estudiaremos otra operación: el producto escalar entre dos vectores, la cual se

relaciona directamente con el concepto de longitud de un vector y la noción de ángulo entre vectores.

Cabe mencionar que el producto escalar no es el único producto que se realiza entre vectores, también existen el producto vectorial y el producto mixto.

**4.1.- Producto escalar<sup>3</sup>:** *Dados dos vectores,  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  definimos producto escalar,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , como el escalar que se obtiene al sumar los producto de las componente de  $\vec{u}$  con las respectivas componentes de  $\vec{v}$*

*Dados  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$  ó escrito de manera resumida  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_iv_i$*

Ejemplo: dados los vectores  $\vec{u} = (1, -2)$ ,  $\vec{v} = (-2, 5)$ ,  $\vec{x} = (3, -2, 1)$ ,  $\vec{y} = (3, 0, -1)$  calcular los siguientes productos escalares:  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{x}$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(-2) + (-2)5 = -12.$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 3.3 + (-2)0 + 1(-1) = 8.$$

$\vec{u} \cdot \vec{x}$  evidentemente no está definido ya que son vectores de distintos espacios.

Al ser el producto escalar una nueva operación entre vectores cuyo resultado es un número real, nos podemos preguntar ¿Cuáles de las propiedades del producto entre números reales se satisfacen para el producto escalar entre vectores?

### Propiedades del producto escalar

P<sub>1</sub>) El producto escalar es conmutativo

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

D) Sean  $x_i, y_i$  las  $i$ -ésimas componentes de los vectores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  respectivamente. Por lo tanto  $x_i y_i$  es el  $i$ -ésimo término de  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ . Como  $x_i y_i = y_i x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad conmutativa de números reales, los términos respectivos de  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  y de  $\vec{y} \cdot \vec{x}$  son iguales. Concluimos entonces que  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

P<sub>2</sub>) El producto escalar no es asociativo

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z} \neq \vec{x} \cdot (\vec{y} \cdot \vec{z})$$

D) Para comprobar que esto es verdad, razonamos de la siguiente manera. Al realizar el producto escalar  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  obtenemos un escalar  $\lambda$ , que al multiplicar al vector  $\vec{z}$  da por resultado un vector en la misma dirección que este último, mientras que al hacer el producto escalar  $\vec{y} \cdot \vec{z}$  se obtiene un escalar,  $\rho$ , que al multiplicar al vector  $\vec{x}$  da por resultado un vector en la misma dirección que este último. Por lo tanto, los vectores que se obtienen en ambos miembros no necesariamente tienen las mismas direcciones, quedando así comprobado que el producto escalar no es asociativo.

---

<sup>3</sup> Esta operación también suele llamarse producto punto ó producto interno.

El razonamiento anterior se puede resumir esquemáticamente de la siguiente manera:

$$\underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z}}_{\lambda \vec{z}} \neq \underbrace{\vec{x} \cdot (\vec{y} \cdot \vec{z})}_{\rho \vec{x}}$$

P<sub>3</sub>) El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n: \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{z} \cdot \vec{x}$$

D) Sean  $x_i, y_i, z_i$  las  $i$ -ésimas componentes de los vectores  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  respectivamente. Por lo tanto  $y_i + z_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $\vec{y} + \vec{z}$ , también  $x_i(y_i + z_i)$  será el  $i$ -ésimo término de  $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z})$ . Como  $x_i(y_i + z_i) = x_i y_i + x_i z_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad distributiva del producto de números reales, respecto a la suma, los términos respectivos de  $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z})$  y de  $\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$  son iguales. Concluimos entonces que  $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

Para la segunda parte de la propiedad se razona de manera similar.

P<sub>4</sub>) El producto escalar es asociativo respecto al producto por un número real

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}: (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

D) Sean  $x_i, y_i$  las  $i$ -ésimas componentes de los vectores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  respectivamente. Por lo tanto  $\lambda x_i y_i$  es el  $i$ -ésimo término de  $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y}$ . Como  $\lambda x_i y_i = x_i \lambda y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  por la propiedad conmutativa del producto de números reales, los términos respectivos de  $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y}$  y de  $\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$  son iguales. Concluimos que  $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$

Para la segunda parte de la propiedad se razona de manera similar.

P<sub>5</sub>) El producto escalar de un vector por sí mismo es un número real mayor o igual que cero

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$$

D) Sea  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , entonces:

$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  y la suma de cuadrados siempre es positiva o cero.

P<sub>6</sub>) El producto escalar de un vector por sí mismo es cero si y sólo si el vector es nulo.

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ . De donde se puede concluir que  $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Sabemos que si el producto de dos números reales  $x$  e  $y$  es cero, necesariamente es  $x$  ó  $y$  cero. Esto no ocurre con el producto escalar de vectores, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sean los vectores  $\vec{u} = (2, 1, -5)$  y  $\vec{v} = (-2, -1, -1)$  de  $\mathbb{R}^3$  entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-2) + 1(-1) + (-5)(-1) = 0$$

**Vectores perpendiculares:** Dos vectores no nulos  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  son perpendiculares si y solo si su producto escalar es nulo.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} : \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Ejemplo 1: en  $\mathbb{R}^2$  los vectores  $\vec{u} = (-2, 3)$  y  $\vec{v} = (-3, -2)$  son perpendiculares ya que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2(-3) + 3(-2) = 0$ . Esto se muestra en el gráfico 15.

Ejemplo 2: determinar los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para que los vectores de  $\mathbb{R}^3$   $\vec{x} = (-3k, -4, 1)$  e  $\vec{y} = (-k, k, 1)$  sean perpendiculares.

Para que los vectores sean perpendiculares debe cumplirse que:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0. \text{ O sea que: } (-3k, -4, 1) \cdot (-k, k, 1) = 3k^2 - 4k + 1 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son  $k_1 = 1$  y  $k_2 = \frac{1}{3}$

Los pares de vectores de  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen la condición, son:

$$\vec{x}_1 = (-3, -4, 1) \text{ e } \vec{y}_1 = (-1, 1, 1) \text{ y } \vec{x}_2 = (-1, -4, 1) \text{ e } \vec{y}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

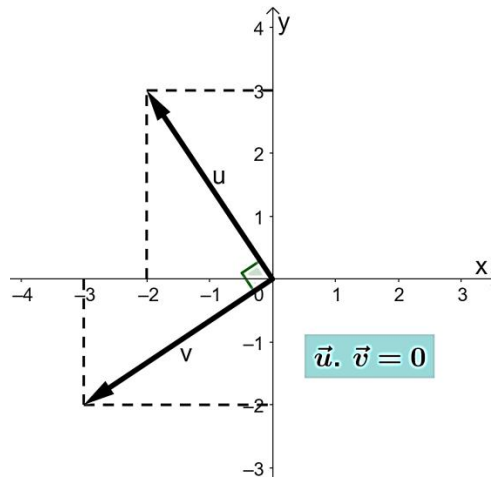


Gráfico 15

Los gráficos correspondientes al ejemplo 2 son los siguientes:

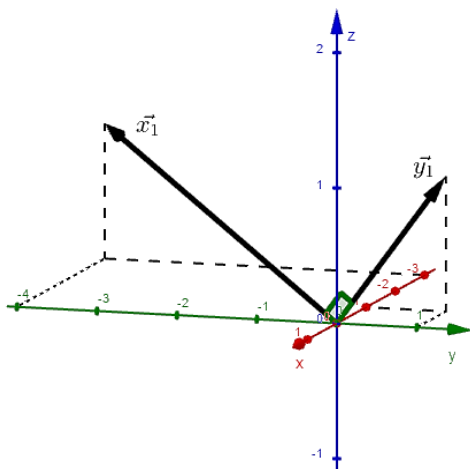


Gráfico 16 a

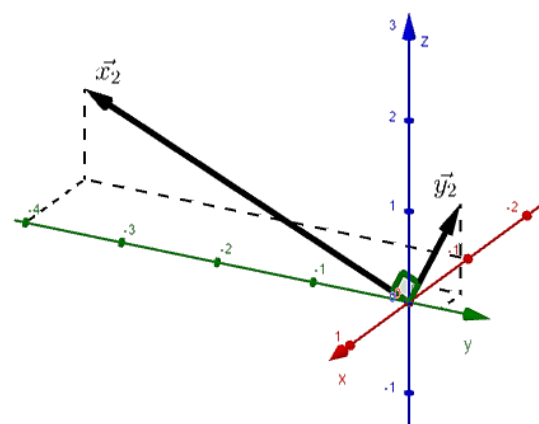


Gráfico 16 b



Ejemplo 3: comprobar que los vectores  $\hat{i} = (1, 0)$  y  $\hat{j} = (0, 1)$ <sup>4</sup> de  $\mathbb{R}^2$ , son perpendiculares.

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0 + 0 = 0$$

Una vez que se analice el tema de ángulo entre vectores, se podrá demostrar con más facilidad la condición necesaria y suficiente de perpendicularidad entre vectores.

Una de las utilidades del producto escalar entre vectores es que permite definir módulo<sup>5</sup> de un vector. Antes de estudiar esta definición, haremos referencia a dos casos particulares y luego generalizaremos el concepto.

Sea P un punto del plano ( $\mathbb{R}^2$ ) cuyas coordenadas son  $(x, y)$  o sea  $P(x, y)$ . Representando P en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y calculando (mediante el Teorema de Pitágoras) la longitud del segmento comprendido entre el origen del sistema y el punto P, obtenemos  $\sqrt{x^2 + y^2}$

Todo esto se muestra en el siguiente gráfico.

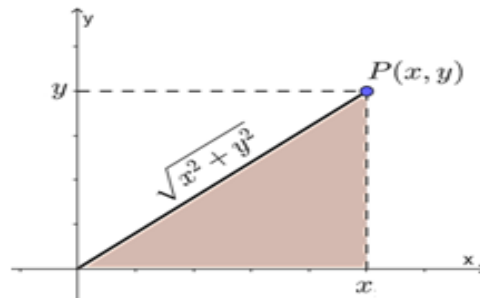


Gráfico 17

De la misma manera si estamos en el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ) el punto será  $P(x, y, z)$ , aplicando el Teorema de Pitágoras dos veces obtenemos la longitud del segmento comprendido entre O y P e igual a  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , como se muestra en el siguiente gráfico.

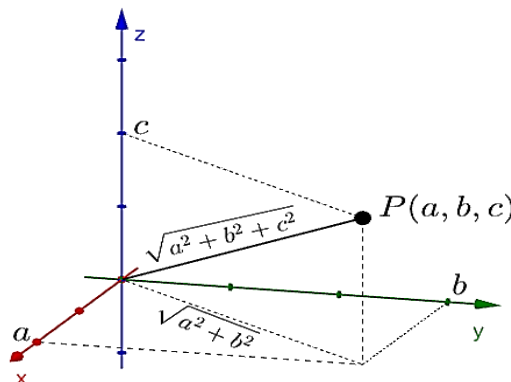


Gráfico 18

<sup>4</sup>  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  son los versores fundamentales o vectores canónicos de espacio de dos dimensiones.

<sup>5</sup> En la literatura aparecen otros nombres como magnitud, longitud ó norma para referirse a módulo de un vector

Por otro lado sabemos que el vector  $\overrightarrow{OP}$  es el vector posición del punto P, de esta manera la longitud del vector  $\overrightarrow{OP}$  en  $\mathbb{R}^2$  ó en  $\mathbb{R}^3$  es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector. Esta observación se puede generalizar y nos induce a la definición de módulo de un vector.

**Módulo de un vector:** Se define módulo de un vector  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|\vec{u}\|$ , como la raíz cuadrada de  $\vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\text{Sea } \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

$$\text{Ejemplo 1: sea el vector } \vec{u} = (-3, 4) \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Ejemplo 2: El concepto de módulo de un vector puede usarse para demostrar el Teorema de Pitágoras.

Si  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  son dos vectores perpendiculares, entonces  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

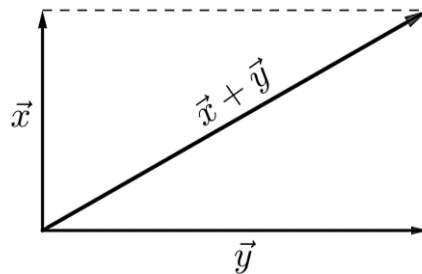


Gráfico 19

En efecto:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y}$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 0 + 0 + \|\vec{y}\|^2$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Podemos observar que  $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$  que es una de las propiedades del módulo de un vector que se demostraran a continuación.

### Propiedades del módulo de un vector

P<sub>1</sub>) El módulo del producto de un escalar por un vector es igual al producto del valor absoluto del escalar por el módulo del vector.

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$$

$$D) \|\alpha \vec{u}\| = \sqrt{\alpha \vec{u} \cdot \alpha \vec{u}} = \sqrt{\alpha^2 (\vec{u} \cdot \vec{u})} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\alpha| \|\vec{u}\|$$

P<sub>2</sub>) El módulo de un vector es nulo si y sólo si el vector es nulo.

$$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

P<sub>3</sub>) El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo.

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

D)  $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$  como  $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$  se sigue que  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

P<sub>4</sub>) El cuadrado del módulo de la suma de dos vectores es igual al cuadrado del módulo del primer vector más el cuadrado del módulo del segundo vector más el doble de su producto escalar.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n: \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$D) \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

P<sub>5</sub>) El cuadrado del módulo de la diferencia de dos vectores es igual al cuadrado del módulo del primer vector más el cuadrado del módulo del segundo vector menos el doble de su producto escalar.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n: \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

D) Esta igualdad se demuestra de manera similar a la anterior, considerando la resta como suma entre el minuendo y el opuesto del sustraendo.

El concepto de módulo de un vector es útil para definir y poder calcular la distancia entre dos puntos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Distancia entre dos puntos:** Se define la distancia entre dos puntos  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  y  $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  como la longitud del vector  $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Dados  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  y  $Q(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}$$

Debemos recordar que el vector  $\overrightarrow{OP}$  es el vector posición del punto P, lo mismo ocurre con el  $\overrightarrow{OQ}$  y el punto Q

Ejemplo 1: calcular la distancia entre los puntos  $P(-3, 2)$  y  $Q(-1, -4)$

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{40}$$

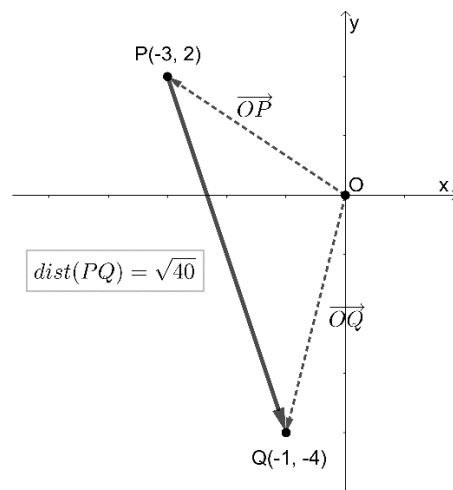


Gráfico 20

Ejemplo 2: calcular la distancia entre los puntos  $R(1, -2, 2)$  y  $S(3, 2, 2)$

$dist(R, S) = \|\vec{OS} - \vec{OR}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{20}$ . Esto se muestra en el gráfico 21.

**Vector unitario según una dirección dada:** El producto de un vector no nulo por el recíproco de su módulo o lo que es lo mismo, el cociente entre un vector no nulo y su módulo, es un vector unitario (módulo 1).

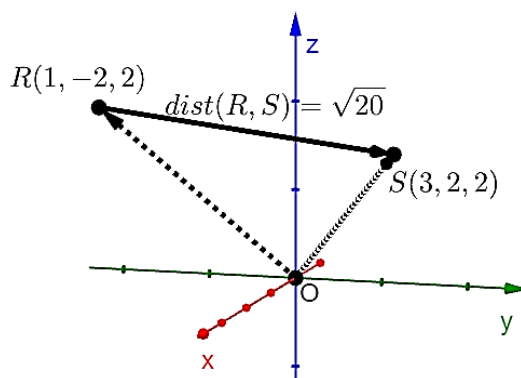


Gráfico 21

Simbólicamente se expresa un vector unitario de la siguiente manera: sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , si consideramos  $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$  se verifica

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right| \|\vec{x}\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \|\vec{x}\| = 1$$

Ejemplo: determinar un vector  $\vec{y}$  de módulo 6 en la dirección de  $\vec{x} = (1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$ .

Como  $\vec{x} = (1, -2, 2) \Rightarrow \|\vec{x}\| = 3$  y por lo tanto  $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  es un vector unitario. A partir de allí solo resta multiplicar este vector por el escalar 6 para que su módulo sea también 6. Por lo tanto:  $\vec{y} = 6 \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \Leftrightarrow \vec{y} = 6 \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \vec{y} = (2, -4, 4)$

Gráficamente se puede comprobar que ambos vectores,  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  tienen la misma dirección y al calcular el módulo de  $\vec{y}$  resulta  $\|\vec{y}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ .

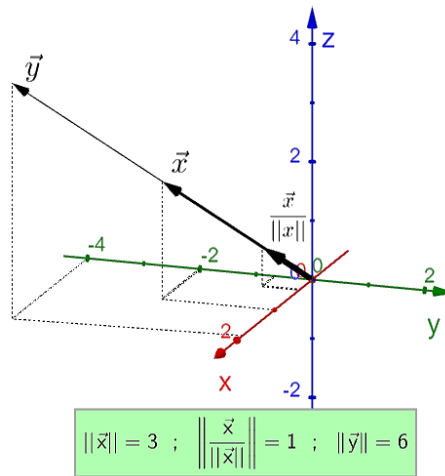


Gráfico 22

Veamos ahora cómo el producto escalar también nos permite determinar el ángulo entre vectores no nulos de  $\mathbb{R}^n$ , para lo cual en primera instancia definimos ángulo entre vectores y luego aplicamos el Teorema de los cosenos<sup>6</sup>.

**Ángulo entre vectores:** Dados dos vectores no nulos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^n$ , se define el ángulo entre estos dos vectores como el menor ángulo positivo  $\hat{\varphi}$  ( $0 \leq \hat{\varphi} \leq \pi$ ) que gira uno de ellos para coincidir con la dirección del otro.

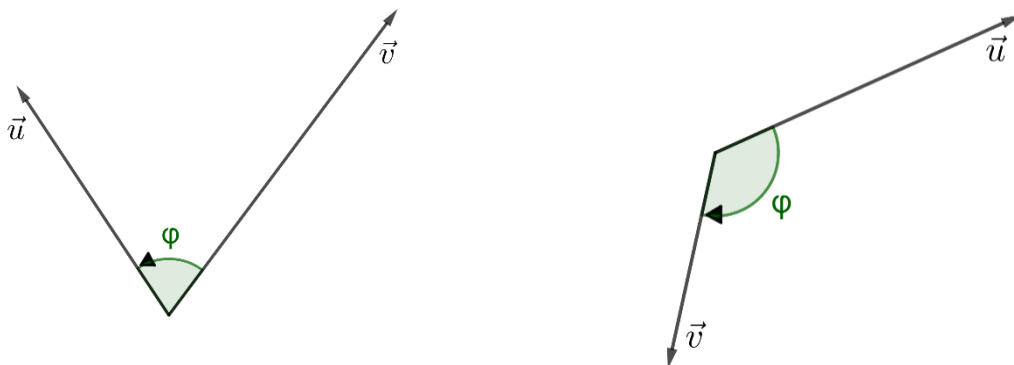


Gráfico 23

Ahora bien, dados dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^n$  no nulos, siempre podemos construir un triángulo en donde el tercer lado es la diferencia de los vectores dados, tal como lo muestra la siguiente figura:

<sup>6</sup> Este teorema plantea que en un triángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados restantes menos el duplo del producto de dichas longitudes multiplicado por el coseno del ángulo opuesto al lado en cuestión.

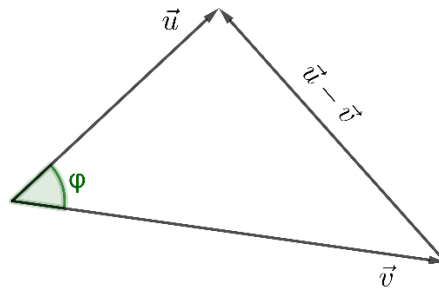


Gráfico 24

Al aplicar el Teorema de los cosenos a este triángulo, tenemos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\varphi}$$

Aplicando propiedades del módulo de un vector, en el primer miembro, tenemos:

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\varphi}$$

Suprimiendo términos semejantes, obtenemos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\varphi}$$

Podemos establecer dos conclusiones a partir de esta última expresión:

a) En concordancia con lo que estamos estudiando, esta igualdad nos brinda una forma de calcular la medida del ángulo entre dos vectores no nulos de  $\mathbb{R}^n$ , tomando a  $\hat{\varphi}$  como el ángulo tal que:  $\cos \hat{\varphi} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

b) Esta igualdad también es la expresión del producto escalar en función del ángulo que forman los vectores y de los módulos de éstos. Es decir, se puede *definir* el producto escalar de dos vectores como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman dichos vectores.

Esta última observación nos permite hacer la interpretación geométrica del producto escalar.

**Interpretación geométrica del producto escalar:** el producto escalar de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

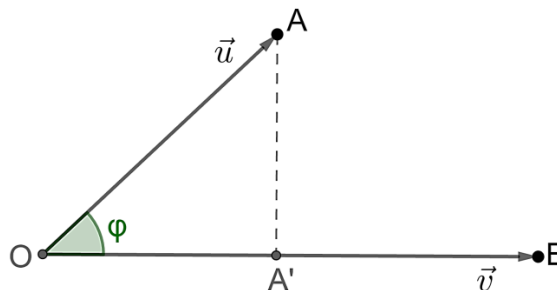


Figura 1

En la figura 1 se representan dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Al proyectar<sup>7</sup> el vector  $\vec{u}$  sobre la dirección del vector  $\vec{v}$  se obtiene el vector  $\overrightarrow{OA'}$  cuyo módulo coincide con la medida del segmento  $\overline{OA'}$ . A la longitud de este segmento se la suele llamar proyección escalar de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ , es decir,  $\overline{OA'} = |\text{proy de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}| = |\vec{u}_{\vec{v}}|$

Teniendo en cuenta que  $\cos \hat{\phi} = \frac{\overline{OA'}}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow \overline{OA'} = \|\vec{u}\| \cos \hat{\phi}$ , por lo tanto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\phi}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| |\vec{u}_{\vec{v}}| \text{ que es la interpretación geométrica enunciada.}$$

De esta última expresión se puede despejar y calcular la proyección escalar de un vector sobre otro:  $|\vec{u}_{\vec{v}}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Ejemplo 1: calcular el ángulo entre los vectores  $\vec{u} = (-2, 4)$  y  $\vec{v} = (3, -1) \in \mathbb{R}^2$ .

Si llamamos  $\hat{\phi}$  al ángulo entre los vectores, tenemos:  $\cos \hat{\phi} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -10, \|\vec{u}\| = \sqrt{20} \text{ y } \|\vec{v}\| = \sqrt{10}$$

$$\cos \hat{\phi} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \Rightarrow \hat{\phi} = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\hat{\phi} = \arccos \frac{-10}{\sqrt{20} \sqrt{10}}$$

$$\hat{\phi} = 135^\circ$$

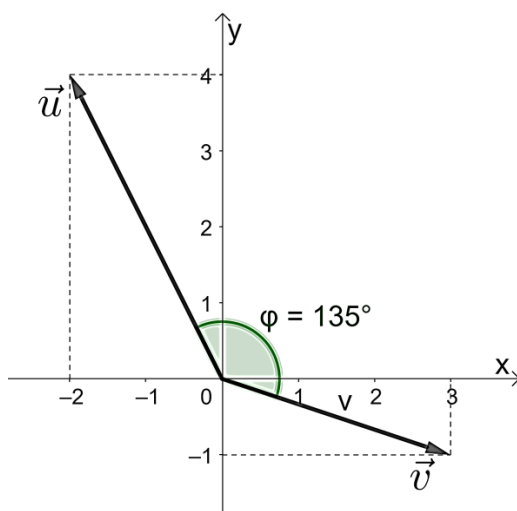


Gráfico 25

Ejemplo 2: calcular el ángulo,  $\hat{\phi}$ , que forman los vectores  $\vec{v} = (-2, 4, 1)$  y  $\vec{u} = (3, -1, 5)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = -2 \cdot 3 + 4(-1) + 1 \cdot 5 = -5$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

<sup>7</sup> Significa trazar por el extremo de uno de los vectores, una perpendicular a la dirección del otro, hasta que intercepte a esta.

Por lo tanto  $\hat{\phi} = \arccos \frac{-5}{\sqrt{21}\sqrt{35}} \cong 100^\circ 37' 40''$

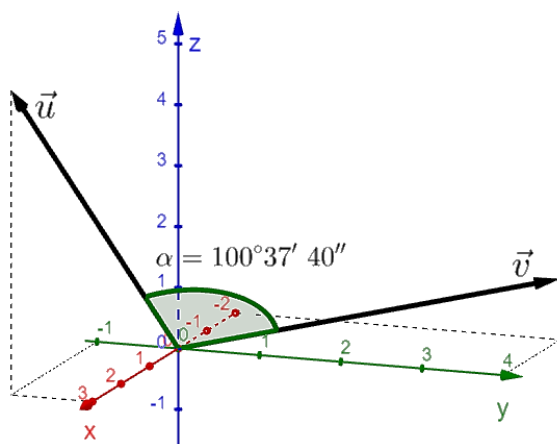


Gráfico 26

Ejemplo 3: hallar la proyección escalar del vector  $\vec{u} = (2, 1)$  sobre el vector  $\vec{v} = (-3, 4)$

$$|\vec{u}_{\vec{v}}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 4 = -2$$

$$\|\vec{v}\| = 5$$

$$|\vec{u}_{\vec{v}}| = \frac{2}{5}$$

La ventaja de considerar el producto escalar de dos vectores no nulos,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^n$  como  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\phi}$ , es que se puede demostrar con facilidad la condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean perpendiculares.

*La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^n$  sean perpendiculares es que el producto escalar de los mismos sea nulo.*

Sean los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no nulos,  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

D)

$$\Rightarrow) \text{ Si } \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\phi}$  siendo  $\hat{\phi}$  el ángulo que forman los vectores. Como por hipótesis se tiene que  $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \hat{\phi} = 90^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos 90^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftarrow) \text{ Si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Si el producto escalar es 0 y los vectores son no nulos, necesariamente debe ser  $\cos \hat{\phi} = 0$ , o lo que es lo mismo  $\hat{\phi} = 90^\circ$  o sea el ángulo que forman los vectores es  $90^\circ$ , es decir que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . Quedando demostrada de esta manera la condición necesaria y suficiente.



**Aplicaciones del producto escalar:** en dinámica elemental, se define el trabajo ( $W$ ) realizado por una fuerza  $F$  que actúa sobre un objeto como el producto de la fuerza por la distancia que recorre su punto de aplicación en dirección de la fuerza. Si la fuerza es constante y el desplazamiento es rectilíneo, entonces el trabajo de la fuerza es el producto escalar entre la fuerza aplicada y el vector desplazamiento ( $\overrightarrow{\Delta r}$ ) es decir,  $W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$  o  $W = \|\overrightarrow{F}\| \cdot \|\overrightarrow{\Delta r}\| \cos \varphi$  (1). Tal como se indica en la figura 2.

Las ecuaciones (1) indican que el trabajo realizado por una fuerza es una magnitud escalar.

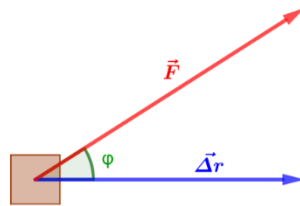


Figura 2

Analizando la figura 2 podemos concluir que si el ángulo  $\varphi$  entre los vectores es agudo, el trabajo será positivo, si  $\varphi = 90^\circ$ , el trabajo será nulo y si es obtuso, el trabajo de la fuerza será negativo.

Como se dijo anteriormente, el producto escalar no es el único producto que se puede efectuar entre vectores, existe también el producto vectorial, que se diferencia del anterior porque en este caso se obtiene por resultado, otro vector.

Cabe destacar que el producto vectorial tiene diversas aplicaciones y solo es posible en el espacio de tres dimensiones ( $\mathbb{R}^3$ ).

En primer lugar veremos que todo vector de  $\mathbb{R}^3$  puede ser expresado, según tres direcciones dadas, como la suma de productos de un escalar por un vector unitario en las direcciones establecidas.

Particularmente, en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, se representan los vectores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .

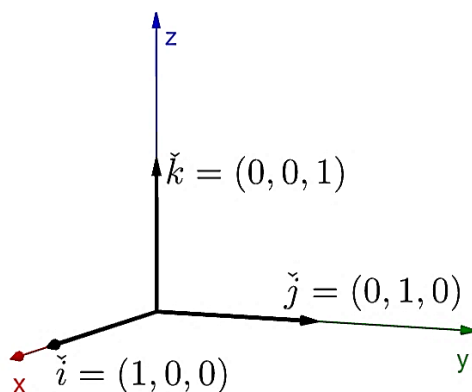


Figura 3

**4.2.- Versores fundamentales<sup>8</sup>:** El vector  $(1, 0, 0)$ , al que se denomina  $\check{i}$ , tiene la dirección del eje  $\overrightarrow{ox}$ , su sentido corresponde al sentido positivo de dicho eje y su módulo es 1. Por lo tanto  $\check{i} = (1, 0, 0)$  es el versor fundamental en la dirección del eje  $\overrightarrow{ox}$ .

De manera similar

$\check{j} = (0, 1, 0)$  es el versor fundamental en la dirección del eje  $\overrightarrow{oy}$

$\check{k} = (0, 0, 1)$  es el versor fundamental en la dirección del eje  $\overrightarrow{oz}$

A partir de esto, todo vector  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  puede ser expresado como la suma de productos de un escalar por un versor, ya que:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0) + (0, u_2, 0) + (0, 0, u_3)$$

$$\vec{u} = u_1(1, 0, 0) + u_2(0, 1, 0) + u_3(0, 0, 1)$$

$$\vec{u} = u_1\check{i} + u_2\check{j} + u_3\check{k}$$

Ejemplo: el vector  $\vec{u} = (2, 3, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  puede ser expresado como  $\vec{u} = 2\check{i} + 3\check{j} + \check{k}$  es decir dos veces el versor en la dirección  $x$ , tres veces el versor en la dirección  $y$ , finalmente una vez el versor en la dirección  $z$ .

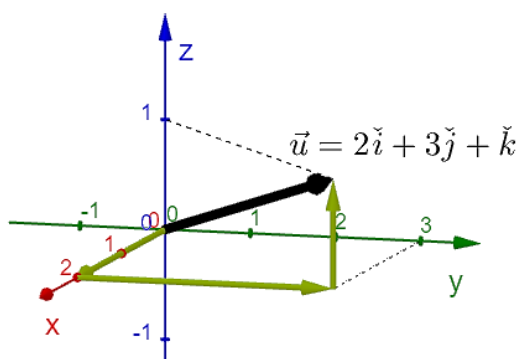


Gráfico 27

Corresponde ahora definir la nueva operación entre vectores que se realiza con exclusividad en  $\mathbb{R}^3$ : el producto vectorial.

**4.3.- Producto vectorial<sup>9</sup>:** Dados dos vectores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  se define producto vectorial entre esos dos vectores como el vector  $\vec{u} \times \vec{v}$  definido por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\check{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\check{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\check{k}.$$

Observemos que el vector anterior se puede escribir simbólicamente en forma de determinante como sigue:

<sup>8</sup> También denominados, vectores canónicos.

<sup>9</sup> Esta operación también se conoce como Producto cruz.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Al desarrollar este determinante se obtiene el vector anterior, destacamos que el determinante es simbólico ya que su desarrollo es un vector y no un escalar.

Veamos que módulo, dirección y sentido tiene el nuevo vector definido mediante esta operación.

**Módulo del producto vectorial:** El módulo del producto vectorial de dos vectores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  es el producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman.

Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \hat{\phi}$ , siendo  $\hat{\phi}$  el ángulo entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

D) Sabemos que por propiedades del módulo de un vector:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \\ &= [(u_2v_3 - u_3v_2), (u_3v_1 - u_1v_3), (u_1v_2 - u_2v_1)] \cdot [(u_2v_3 - u_3v_2), (u_3v_1 - u_1v_3), (u_1v_2 - u_2v_1)] \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_2v_3u_3v_2 - 2u_3v_1u_1v_3 - 2u_1v_2u_2v_1 \\ &= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - \\ &\quad 2u_2v_3u_3v_2 - 2u_3v_1u_1v_3 - 2u_1v_2u_2v_1 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + 2u_1v_1u_3v_3 + 2u_2v_2u_3v_3) \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \end{aligned}$$

$$\text{Sabemos que } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \hat{\phi})^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \hat{\phi} \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \hat{\phi}) \\ \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \hat{\phi} \\ \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \hat{\phi} \end{aligned}$$

De esta última expresión, se obtiene una nueva definición de vectores paralelos en  $\mathbb{R}^3$ , que se expresa en el siguiente corolario:

**Vectores paralelos:** Dos vectores no nulos  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  se dicen paralelos si y sólo si su producto vectorial es igual al vector nulo.

Dados  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

D)

$\Rightarrow$  Si  $\vec{u} // \vec{v}$  entonces  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$  por lo tanto

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{u})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{u}) \text{ por propiedades del producto vectorial}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \lambda \cdot \vec{0} \text{ por propiedades del producto vectorial}^{10}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} // \vec{v}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0 \text{ pero}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \hat{\varphi}$$

$$\text{Como los vectores } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son no nulos entonces } \sin \hat{\varphi} = 0$$

Si  $\sin \hat{\varphi} = 0$  entonces  $\hat{\varphi} = 0^\circ$  ó  $\hat{\varphi} = 180^\circ$ , lo que implica que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos.

**Dirección del producto vectorial:** La dirección del vector  $\vec{u} \times \vec{v}$  es la de la recta perpendicular al plano determinado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\text{Sean } \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ y } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \wedge (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$$

D) Para que dos vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser nulo.

Multipliquemos escalarmente  $\vec{u} \times \vec{v}$  con  $\vec{u}$ .

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = [(u_2 v_3 - u_3 v_2), (u_3 v_1 - u_1 v_3), (u_1 v_2 - u_2 v_1)] \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)u_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)u_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)u_3$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 - u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 - u_2 u_3 v_1$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$

Este resultado indica que  $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$

De manera similar se puede demostrar que  $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

Por lo tanto  $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \wedge (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$  lo que implica que  $\vec{u} \times \vec{v}$  es perpendicular al plano determinado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

**Sentido del producto vectorial:** antes de poder determinar el sentido del producto vectorial, tengamos en cuenta un concepto previo: el de triedros<sup>11</sup>

Podemos observar, en la figura 4, que no existe rotación alguna de uno de los triedros que haga coincidir todos los ejes del mismo nombre –inclusive su dirección– con el otro triedro.

<sup>10</sup> Estas propiedades se demostrarán en el apartado correspondiente.

<sup>11</sup> Figura geométrica formada por tres semirrectas que parten del mismo origen, pero que no están situadas en un mismo plano.

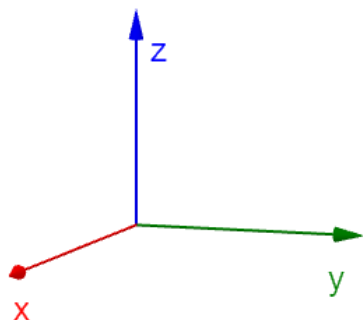


Figura 4a

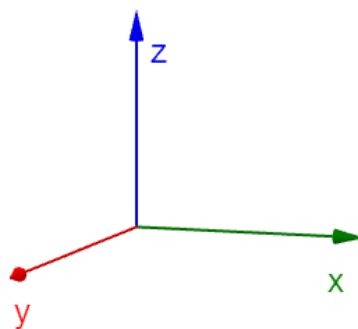


Figura 4b

En efecto, si se hacen coincidir los orígenes y los ejes  $x$  e  $y$  de modo que se superpongan las partes positivas de ambos triedros, los sentidos de los ejes  $z$  resultan opuestos. Se dice que los triedros tienen distinta *orientación*.

Para distinguir las orientaciones, consideremos un triedro como el de la Figura 4a e imaginemos que la parte positiva del eje  $x$  gira hacia la parte positiva del eje  $y$ . Un tornillo colocado perpendicularmente en el plano  $XY$  que gira del mismo modo, avanza hacia la parte positiva del eje  $z$ . Se dice que este triedro es positivo o directo. En caso contrario, triedro (Figura 4b), se dice que es negativo o inverso.

Existen vectores en cuya definición interviene la orientación del espacio, de tal manera que al cambiar ésta, cambia el sentido del vector, es decir que estos vectores no quedan definidos independientemente del sistema de coordenadas al que está referido el espacio.

Por tal motivo se los denomina *pseudovectores*. Esto ocurre con el producto vectorial.

El sentido del producto vectorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  es tal que el triedro  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$  sea positivo o directo, si es directo el sistema de coordenadas elegido.

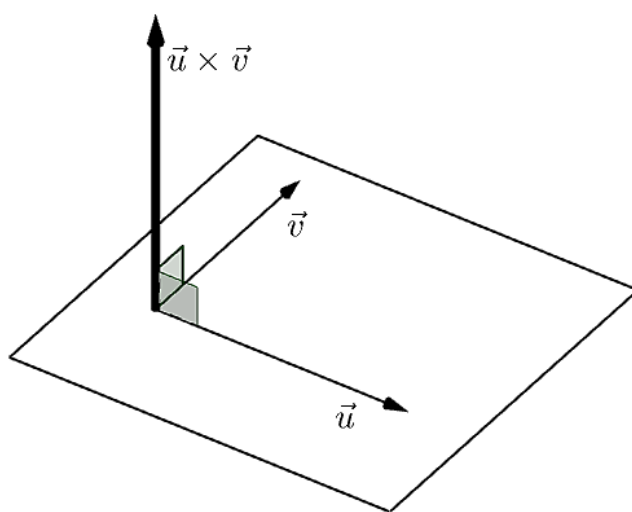
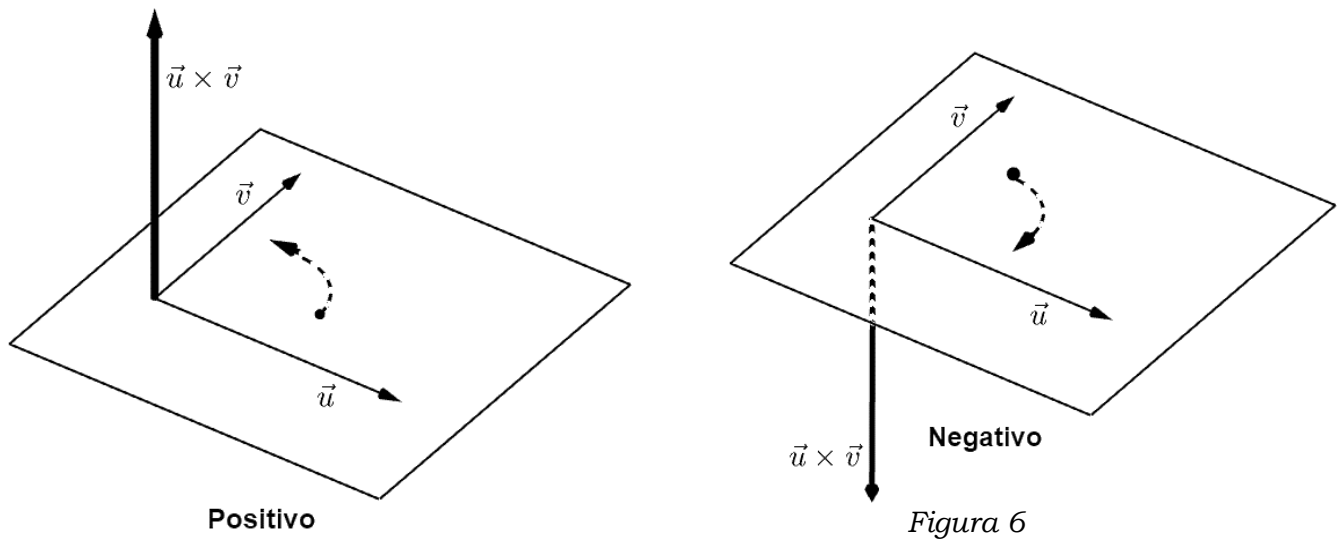


Figura 5

Conceptualmente podemos relacionar el sentido del producto vectorial con el avance de un tornillo que se mantiene perpendicular al plano XY, tal como se muestra en la figura.



Ejemplo 1:

a) Calcular el producto vectorial de  $\vec{u} = (3, -1, 1)$  y  $\vec{v} = (1, 1, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 4k = (-2, -2, 4)$$

b) Comprobar que el vector  $\vec{u} \times \vec{v}$  es perpendicular a los vectores dados.

$$(-2, -2, 4) \cdot (3, -1, 1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

$$(-2, -2, 4) \cdot (1, 1, 1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

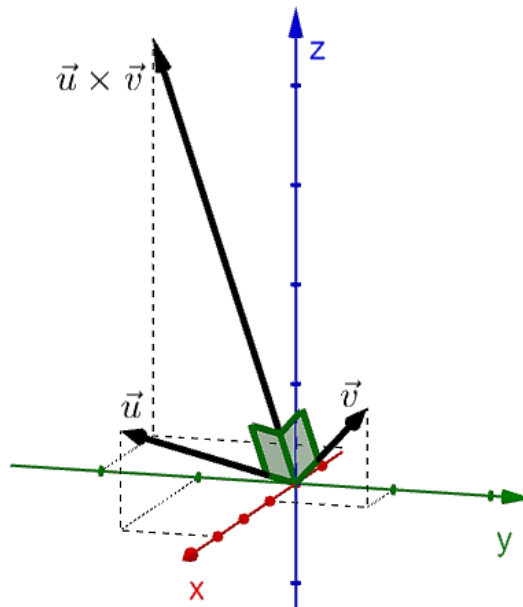


Gráfico 28

c) Hallar un vector unitario perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

El vector  $\vec{u} \times \vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  pero no es unitario. Por lo tanto:

$\frac{(-2,-2,4)}{\sqrt{24}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{24}}, -\frac{2}{\sqrt{24}}, \frac{4}{\sqrt{24}}\right)$  que es el vector solicitado.

Ejemplo 2: realizar los siguientes productos vectoriales:  $\check{i} \times \check{j}$ ;  $\check{j} \times \check{k}$ ;  $\check{k} \times \check{i}$ ;

$$\check{i} \times \check{j} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\check{i} + 0\check{j} + \check{k} = (0, 0, 1) = \check{k}$$

$$\check{j} \times \check{k} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \check{i} + 0\check{j} + 0\check{k} = (1, 0, 0) = \check{i}$$

$$\check{k} \times \check{i} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\check{i} + \check{j} + 0\check{k} = (0, 1, 0) = \check{j}$$

De manera similar se puede demostrar que:

$$\check{i} \times \check{i} = \check{j} \times \check{j} = \check{k} \times \check{k} = \vec{0}$$

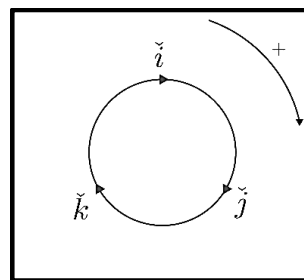
Finalmente:

$$\check{i} \times \check{i} = \check{j} \times \check{j} = \check{k} \times \check{k} = \vec{0}$$

$$\check{i} \times \check{j} = \check{k} \qquad \check{j} \times \check{i} = -\check{k}$$

$$\check{j} \times \check{k} = \check{i} \qquad \check{k} \times \check{j} = -\check{i}$$

$$\check{k} \times \check{i} = \check{j} \qquad \check{i} \times \check{k} = -\check{j}$$



De donde debemos notar que:

El producto vectorial de cualquier vector canónico consigo mismo da como resultado el vector nulo (en las propiedades del producto vectorial esto se generaliza para cualquier vector de  $\mathbb{R}^3$ ).

El producto vectorial de dos vectores canónicos consecutivos en el sentido de las agujas del reloj tiene por resultado el siguiente vector canónico y cuando se considera el sentido contrario de las agujas del reloj, el resultado es el opuesto del siguiente vector canónico.

### Propiedades del producto vectorial

P<sub>1</sub>) El producto vectorial es anticonmutativo

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3: \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\check{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\check{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\check{k}.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(u_3v_2 - u_2v_3)\check{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\check{j} - (u_2v_1 - u_1v_2)\check{k}.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -[(u_3v_2 - u_2v_3)\check{i} + (u_1v_3 - u_3v_1)\check{j} + (u_2v_1 - u_1v_2)\check{k}].$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

P<sub>2</sub>) El producto vectorial es distributivo a izquierda y a derecha, respecto de la suma de vectores

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3: \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = [(u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2))\check{i} + (u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3))\check{j} + (u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1))\check{k}]$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = [(u_2v_3 + u_2w_3) - (u_3v_2 + u_3w_2))i + ((u_3v_1 + u_3w_1) - (u_1v_3 + u_1w_3))j + ((u_1v_2 + u_1w_2) - (u_2v_1 + u_2w_1))k]$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = [(u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k] + [(u_2w_3 - u_3w_2)i + (u_3w_1 - u_1w_3)j + (u_1w_2 - u_2w_1)k]$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

Para el caso de la distributividad a derecha respecto de la suma de vectores se procede de manera similar.

Una manera alternativa al procedimiento anterior, es usar las propiedades ya estudiadas del producto vectorial.

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = -[\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})] \text{ por anticonmutatividad}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = -[\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}] \text{ por distributividad a izquierda}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{w}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u} \text{ Por anticonmutatividad.}$$

Quedando así demostrada la propiedad.

P<sub>3</sub>) El producto vectorial es asociativo respecto al producto por un escalar.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k.$$

$$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = \alpha[(u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k]$$

$$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = \alpha(u_2v_3 - u_3v_2)i + \alpha(u_3v_1 - u_1v_3)j + \alpha(u_1v_2 - u_2v_1)k \quad (1)$$

$$(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = (\alpha u_2v_3 - \alpha u_3v_2)i + (\alpha u_3v_1 - \alpha u_1v_3)j + (\alpha u_1v_2 - \alpha u_2v_1)k$$

$$(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(u_2v_3 - u_3v_2)i + \alpha(u_3v_1 - u_1v_3)j + \alpha(u_1v_2 - u_2v_1)k \quad (2)$$

$$\vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = (\alpha u_2v_3 - \alpha u_3v_2)i + (\alpha u_3v_1 - \alpha u_1v_3)j + (\alpha u_1v_2 - \alpha u_2v_1)k$$

$$\vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(u_2v_3 - u_3v_2)i + \alpha(u_3v_1 - u_1v_3)j + \alpha(u_1v_2 - u_2v_1)k \quad (3)$$

Se puede observar que las expresiones (1), (2) y (3) son iguales, con lo que queda demostrada la propiedad.

P<sub>4</sub>) El producto vectorial a derecha e izquierda por el vector nulo, es el vector nulo.

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3: \vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \times \vec{0} = (u_2 \cdot 0 - u_3 \cdot 0)i + (u_3 \cdot 0 - u_1 \cdot 0)j + (u_1 \cdot 0 - u_2 \cdot 0)k = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{0} \times \vec{u} = (u_2 \cdot 0 - u_3 \cdot 0)i + (u_3 \cdot 0 - u_1 \cdot 0)j + (u_1 \cdot 0 - u_2 \cdot 0)k = \vec{0} \quad (2)$$

Se puede observar que las expresiones (1) y (2) son iguales, con lo que queda demostrada la propiedad.

P<sub>5</sub>) El producto vectorial de cualquier vector por sí mismo, es el vector nulo.

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3: \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$



$$\vec{u} \times \vec{u} = (u_2u_3 - u_3u_2)i + (u_3u_1 - u_1u_3)j + (u_1u_2 - u_2u_1)k = \vec{0}$$

### Interpretación geométrica del producto vectorial

El área del paralelogramo ( $A_P$ ) cuyos lados no paralelos están dados por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$ , está dada por el módulo del producto vectorial de dichos vectores.

Dados  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow A_P = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

D) Se debe considerar el paralelogramo cuyos lados no paralelos son los vectores  $\vec{u}, \vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $\hat{\varphi}$  el ángulo entre ellos, como muestra la figura.

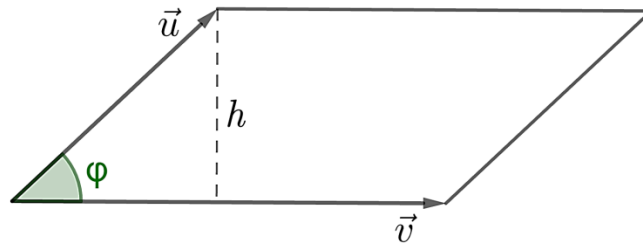


Figura 7

$$A_P = \text{Base} \cdot \text{altura}$$

$$A_P = \|\vec{v}\| \cdot h$$

$$\text{sen} \hat{\varphi} = \frac{h}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow h = \|\vec{u}\| \text{sen} \hat{\varphi} \text{ Por lo tanto}$$

$$A_P = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \text{sen} \hat{\varphi}$$

$$A_P = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

A su vez este resultado permite calcular el área del triángulo determinado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

El área del triángulo ( $A_T$ ) determinado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  es igual a la mitad del módulo del producto vectorial de dichos vectores.

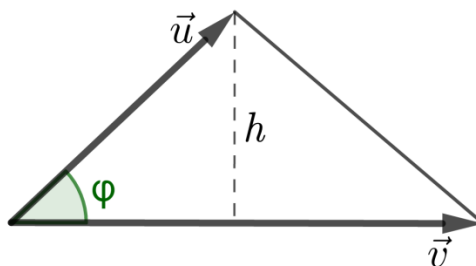


Figura 8

$$A_T = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$A_T = \frac{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \text{sen} \hat{\varphi}}{2}$$

$$A_T = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}$$

Ejemplo: dados los puntos  $A(1, 3, 1)$ ,  $B(1, -1, 3)$  y  $C(-2, 3, 2)$  calcular el área del triángulo  $\widehat{ABC}$ .

Una de las formas de resolver la situación es utilizando vectores y pensando en el área del triángulo como la mitad del área del paralelogramo que tiene por lados no paralelos dos vectores que se pueden formar con los puntos dados.

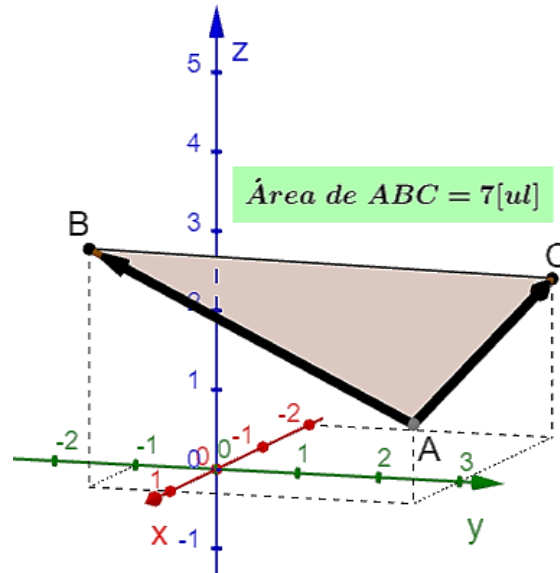


Gráfico 29

$$\overrightarrow{AB} = (0, -4, 2) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, -6, 12)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16 + 36 + 144} = 14$$

$$\text{Área del triángulo: } \frac{1}{2} 14 = 7 [\text{ul}]^2$$

**Aplicaciones del producto vectorial:** Torque, Torca, Momento de fuerza o Momento de torsión es una magnitud vectorial que se simboliza con la letra griega  $\vec{\tau}$  (tau).

Una fuerza  $\vec{F}$  actúa en un punto de un cuerpo que está posicionado por el vector  $\vec{r}$  respecto a un origen O sobre el eje de rotación, entonces el Torque es un vector que resulta del producto vectorial entre la fuerza y el vector posición:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

El módulo del torque estará dado por:  $\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin\varphi$ , siendo  $\varphi$  el ángulo entre los dos vectores. De esta expresión se deduce que cuando se desea hacer girar un cuerpo, por ejemplo desenroscar un bulón, una forma sencilla de hacerlo es tomar la llave desde un punto lo más alejado del eje de giro, aumentando  $\|\vec{r}\|$  y aplicar una fuerza  $\vec{F}$  que en lo posible sea perpendicular a  $\vec{r}$  de manera tal que  $\varphi = 90^\circ$ . Esto se muestra en la figura 9.

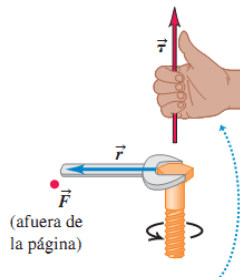


Figura 9

Con los productos estudiados, se puede formar un tercer producto entre vectores, producto mixto cuyo resultado es un escalar.

**4.4.- Producto Mixto<sup>12</sup>:** se llama producto mixto de tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , y se simboliza como  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , al número real que se obtiene al realizar  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Dados  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Si los vectores son  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  y se resuelven los productos en el orden indicado se obtiene

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k.$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [(u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k] \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)]$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 + u_1v_2w_3 - u_2v_1w_3)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Es decir que el producto mixto se resuelve mediante un determinante de orden 3 cuyas filas son las componentes de los vectores dados.

Ejemplo: calcular, por dos procedimientos, el producto mixto de los siguientes vectores

$$\vec{u} = (0, 1, 1), \vec{v} = (0, 3, 0) \text{ y } \vec{w} = (5, 0, 2)$$

a) Aplicamos la definición, es decir calculamos el producto vectorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  y a ese vector lo multiplicamos escalarmente por  $\vec{w}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, 0, 0)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-3, 0, 0) \cdot (5, 0, 2)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -15$$

<sup>12</sup> Esta operación también es conocida como Triple producto escalar

b) Calculamos directamente el producto mixto, resolviendo el determinante de orden 3 cuyas filas son las componentes de los vectores dados.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

### Propiedades del producto mixto

P<sub>1</sub>) El producto mixto es cíclico. Esto significa que puede tomarse como primer factor otro vector, con tal de que no se altere el orden cíclico (colocar los tres vectores en una circunferencia cuyo recorrido pase primero por  $\vec{u}$ , luego por  $\vec{v}$  y finalmente por  $\vec{w}$ )

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

D) Sean los vectores

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  entonces:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3)$$

$$(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3)$$

$$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3)$$

Quedando así demostrada la propiedad.

Se debe tener en cuenta que en el desarrollo del segundo y tercer determinante se aplicó directamente la propiedad conmutativa tanto de la suma como del producto de números reales.

P<sub>2</sub>) El producto mixto cambia de signo al intercambiar dos de los vectores (nótese que esto cambia el orden cíclico)

$$\text{Por ejemplo } \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

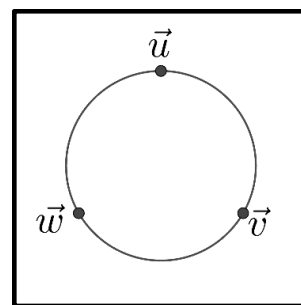
D) En este caso trabajando el segundo miembro de la igualdad se demostrará que es igual al primer miembro.

$$-(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \text{ por definición de producto mixto}$$

$$-(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) \text{ por anticonmutatividad del producto vectorial}$$

$$-(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) \text{ por definición de producto mixto}$$

$$-(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ por propiedad P}_1$$



De manera similar se puede demostrar que:  $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$  ó también que  $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$

P<sub>3</sub>) El producto mixto es distributivo respecto a la suma de vectores.

$$\forall \vec{u}, \vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$$

D) Sean los vectores

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  entonces:

$$(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{x}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 + x_1 & u_2 + x_2 & u_3 + x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \text{ Por propiedades de los determinantes}^{13}$$

$$(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$$

P<sub>4</sub>) Si cualquiera de los vectores está multiplicado por un escalar, el producto mixto queda multiplicado por dicho escalar.

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

D) Sean los vectores

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  y el escalar  $\alpha$ , entonces:

$$(\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \alpha u_1 & \alpha u_2 & \alpha u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$(\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \text{ Por propiedades de los determinantes}^{14}$$

$$(\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

De manera similar puede demostrarse para:

$$(\vec{u}, \alpha \vec{v}, \vec{w}) = \alpha (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ y } (\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}) = \alpha (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

### Interpretación geométrica del producto mixto

Considérese tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  y construyase un paralelepípedo (cuerpo cuyas seis caras son paralelogramos)

<sup>13</sup> Si cada elemento de una fila ó columna de una matriz cuadrada se puede escribir como la suma de dos ó más términos, su determinante se puede escribir como la suma de dos ó más determinantes.

<sup>14</sup> Si se multiplican todos los elementos de una fila ó columna de una matriz por un mismo número  $\alpha$ , el determinante correspondiente queda multiplicado por dicho número.

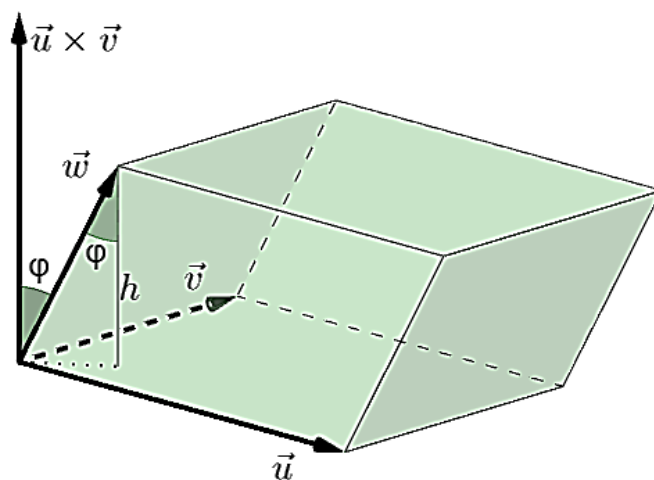


Figura 10

Si se desea calcular el volumen de este paralelepípedo ( $V_p$ ) se deberá hacer:

$$V_p = \text{Área de la base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Área de la base} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \text{ y } \cos \hat{\phi} = \frac{h}{\|\vec{w}\|} \Rightarrow h = \|\vec{w}\| \cos \hat{\phi} \text{ Por lo tanto}$$

$$V_p = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \hat{\phi}$$

$$V_p = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$V_p = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Esto significa que *geométricamente el producto mixto de tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  es igual al volumen del paralelepípedo que tiene por aristas esos vectores llevados a un origen común.*

Ejemplo: determinar el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores  $\vec{u} = (1, 4, 0)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, 5)$  y  $\vec{w} = (4, 2, -1)$ .

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 77$$

Esto significa que  $V_p = 77 \text{ [ul]}^3$  tal como se muestra en el gráfico 30.

Si el volumen del paralelepípedo es 0 significa que los tres vectores están en el mismo plano. Esta consecuencia se enuncia de la siguiente manera:

*La condición necesaria y suficiente para que tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean coplanares es que su producto mixto sea cero.*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son coplanares.}$$

D)

$\Rightarrow$ ) Si el producto mixto de los tres vectores es cero, el volumen del paralelepípedo es cero y los vectores deben ser coplanares.

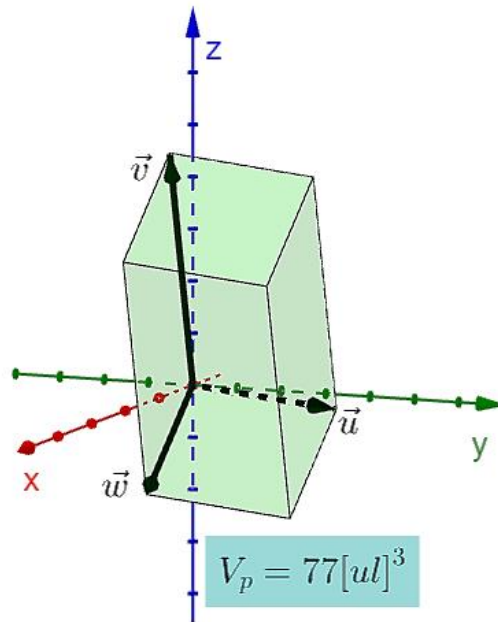


Gráfico 30

$\Leftrightarrow$ ) Si los tres vectores son coplanares, el paralelepípedo formado por ellos está en un plano, la altura es nula y su volumen también, luego el producto mixto es cero.

Ejemplo: sean los vectores  $\vec{u} = (1, 0, 4)$ ,  $\vec{v} = (2, 0, 2)$  y  $\vec{w} = (2, 0, 3)$  al calcular su producto mixto, obtenemos:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Esto significa que los tres vectores son coplanares, sus direcciones están todos sobre el mismo plano, en este caso  $y = 0$

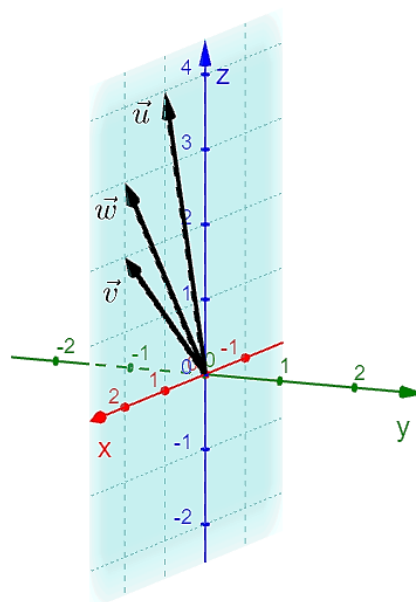


Gráfico 31