4.- Sea A, la matriz asociada a una transformación lineal f: $R^2 \rightarrow R^2$, respecto de las bases canónicas.

a) Calcular los autovalores de f.

b) Calcular los autovectores asociados a cada autovalor.

c) Indicar si la transformación es diagonalizable.

d) En caso afirmativo, dar una base respecto de la cual, la matriz asociada a f sea diagonal.

e) Escribir la matriz diagonal.

i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

b) $(A - \lambda I) . X = N$

$\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \equiv \quad y = x$$

$L(\lambda_1) = \{(x, x)\}$

$[L(\lambda_1)] = \{(1, 1)\}$ $\quad v_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\text{Dim } [L(\lambda_1)] = 1$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \end{cases} \equiv \quad x = -2y$$

$L(\lambda_2) = \{(-2y, y)\}$

$[L(\lambda_2)] = \{(-2, 1)\}$ $\quad v_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\text{Dim } [L(\lambda_2)] = 1$

c) $\text{Dim } [V] = \text{Dim } [L(\lambda_1)] + \text{Dim } [L(\lambda_3)]$

A es diagonalizable

d) $[B] = \{(1, 1); (-2, 1)\}$

e) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$