# ESPACIOS VECTORIALES

## TRABAJO PRÁCTICO N° 6

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1. Si las operaciones de suma y producto por un escalar se definen como se indica en cada caso, determinar cuáles de las siguientes cuaternas constituyen o no un espacio vectorial. Para aquellas que no lo sean, indicar al menos una propiedad que no se cumpla.

a) $(Z^3, +, R, \cdot)$ con la suma usual de vectores de $Z^3$ y el producto de un vector de $Z^3$ por un número real

b) $(R^2, +, R, \cdot)$ con la suma usual de vectores de $R^2$ y el producto usual de un vector de $R^2$ por un número real

c) $(R^2, +, R, \cdot)$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 . x_2, y_1 . y_2)$ y el producto por un escalar como $k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$

d) $(R^2, +, R, \cdot)$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y el producto por un escalar como $k(x_1, y_1) = (0, ky_1)$

e) $\left(R_{[x]}, +, R, \cdot\right)$ con $R_{[x]} = \{P(x) = a_2\, x^2 + a_1 x + a_0 \,/\, a_i \in R,\ \forall i\}$ y con la suma usual de polinomios y el producto usual de un polinomio por un número real

2. i) Determinar si $W$ es subespacio vectorial del espacio vectorial especificado en cada caso.

a) $W = \{(x, y) \in R^2 / y = 3x\} \subseteq (R^2, +, R, \cdot)$

b) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / y + z = -2\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

c) $W = \left\{a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ \in R_{[x]} / a_1 = a_0\right\} \subseteq \left(R_{[x]}, +, R, \cdot\right)$

d) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} / y = 2x\ ;\ w = z\right\} \subseteq (R^{2\times 2}, +, R, \cdot)$

e) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} / x \geq y\right\} \subseteq (R^{2\times 2}, +, R, \cdot)$

f) $W = \{A \in R^{n\times n} / A = A^t\} \subseteq (R^{n\times n}, +, R, \cdot .)$

g) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n\ ) \in R^n / x_4 + 4x_2 = 0\} \subseteq (R^n, +, R, \cdot)$

h) $W = \{(x, y) \in R^2 / y = x + 6\} \subseteq (R^2, +, R, \cdot)$

i) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y\ ;\ z = x + y\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

ii) Representar gráficamente en GeoGebra los incisos a, b, h, i; interpretar geométricamente y escribir dos elementos de cada conjunto.

3. Expresar, si es posible, el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de $A$

a) $\vec{v} = (5,2)$ ; $A = \{(1,-1),(3,6)\} \subseteq (R^2,+,R,\cdot)$

b) $\vec{v} = (2,2,2)$ ; $A = \{(4,1,-5),(1,0,-2),(3,1,-3)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$

c) $\vec{v} = (1,-1,3)$ ; $A = \{(4,1,-1),(-3,-2,4),(1,0,0)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$

d) $\vec{v} = (1,-1,0,-1)$ ; $A = \{(1,0,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,1,1)\} \subseteq (R^4,+,R,\cdot)$

e) $\vec{v} = (9,3)$ ; $A = \{(3,5),(-6,-10)\} \subseteq (R^2,+,R,\cdot)$

f) $\vec{v} = x^2+3x-8$ ; $A = \{x^2+x-1\ ;\ x^2-x+2\ ;\ x^2-3x+3\} \subseteq (R_{[x]},+,R,\cdot)$

g) $\vec{v} = \begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ ; $A = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 2\\ -6 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right\} \subseteq (R^{2\times 2},+,R,\cdot)$

h) $\vec{v} = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ; $A = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \subseteq (R^{2\times 2},+,R,\cdot)$

4. Encontrar el valor de $k$ para que:

a) $\vec{v} = (3,-7,2k)$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1,-2,3)$ y $\vec{w} = (-1,3,k)$

b) $\vec{v} = (-1,1,k,2)$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1,0,-1,2)$ y $\vec{w} = (0,1,3,k)$

c) $A = \begin{pmatrix}1 & -3\\ k & 2k\end{pmatrix}$ sea combinación lineal de las matrices $B = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

d) $p_{(x)} = kx^2-6x+11$ sea combinación lineal de los polinomios $q_{(x)} = x^2+3x-4$ y $r_{(x)} = 2x^2+3x+k$

5. Determinar si los vectores del conjunto $A$, del espacio vectorial que se indica, constituyen un conjunto de vectores linealmente independiente (LI) o linealmente dependiente (LD). En este último caso, expresar uno de ellos como combinación lineal de los demás

a) $A = \{(2,2,0),(4,-4,9),(-1,-5,2)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$

b) $A = \{(-1,-2,3),(-3,2,-1),(-5,6,-5)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$

c) $A = \{(4,1),(-12,3)\} \subseteq (R^2,+,R,\cdot)$

d) $A = \{(2,-4),(0,-2),(3,1)\} \subseteq (R^2,+,R,\cdot)$

e) $A = \left\{\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 0\\ -6 & 0\end{pmatrix}\right\} \subseteq (R^{2x2},+,R,\cdot)$

f) $A = \{x^2-2x+3\ ;\ -2x^2+x+1\ ;\ -2x^2-x+6\} \subseteq (R_{[x]},+,R,\cdot)$

g) $A = \{(2,-1,0,1,0),(0,-2,1,2,0),(-2,-1,1,1,0)\} \subseteq (R^5,+,R,\cdot)$

h) $A = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\right\} \subseteq (R^{2x2},+,R,\cdot)$

6. Para cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $A = \{(k,0,1),(-2,k,-3),(2,1,1)\}$

b) $A = \{(1,0,k,-1),(0,1,-1,k),(0,2,k,2k)\}$

c) $A = \{-x^2+x\ ;\ x^2+kx+2\ ;\ kx+3\}$

d) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

e) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix} \right\}$

f) $A = \{5x^2 + 2x + 1\ ;\ kx^2 + x\ ;\ kx + 5\}$

i. Determinar los valores de $k$ para que $A$ resulte linealmente independiente

ii. Determinar los valores de $k$ para que $A$ resulte linealmente dependiente

7. Determinar si los vectores del conjunto $A$, de cada ítem, constituyen un sistema de generadores (SG) del espacio que se indica. En caso negativo, indicar el subespacio que generan

a) $A = \{(1,1,1), (-3,0,-2), (-3,3,-1)\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

b) $A = \{(-3,-1,2), (0,1,-1), (1,-2,2)\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

c) $A = \{(3,-4), (-4,2)\} \subseteq (R^2, +, R, \cdot)$

d) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq (R^{2x2}, +, R, \cdot)$

e) $A = \{-5x + 4\ ;\ 3x + 2\} \subseteq \left(R_{[x]}, +, R, \cdot\right)$

f) $A = \{(-1,-1,2), (2,3,-1)\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

8. Completar según corresponda:

Dado un conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, de vectores de un espacio vectorial $V$:

a) Si un vector $\vec{v}_i$ del conjunto $A$ puede expresarse como combinación lineal de los demás, entonces $A$ es linealmente: ……………………………………………

b) Si un vector $\vec{v}_i = \vec{0}$ del conjunto $A$, entonces $A$ es linealmente: ……………………………

c) Si el conjunto $A$ es linealmente independiente, entonces el subconjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i\}$ con $i < n$ es linealmente: ……………………………

d) Si el conjunto $A$ contiene al subconjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i\}$ con $i < n$ linealmente dependiente, entonces $A$ es linealmente: ……………………………………

e) Todo vector $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ del conjunto $A$ constituye un conjunto linealmente: …………………

f) El vector $\vec{0}$ constituye un conjunto linealmente: ……………………….

g) Si el conjunto $A$ es linealmente independiente y $Dim\, V = n$, entonces $A$ es un: …………………………………… de $V$

h) Si el conjunto $A$ es sistema generador de $V$ y $Dim\, V = n$, entonces $A$ es linealmente: ……………………………………

9. Determinar los subespacios vectoriales que generan los siguientes conjuntos:

a) $A = \{(2,-1,0), (4,-2,1)\}$

b) $B = \{x^2 + 2\ ;\ x - 1\}$

c) $C = \{(2, -1), (-4, 2)\}$

d) $D = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

e) $E = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$

f) $F = \{(1, 0, 2), (1, 2, 3), (1, -2, 1)\}$

Verificar los incisos a, c, e y f con GeoGebra: Sugerencia: representar los vectores; representar gráficamente el subespacio generado (recta o plano); e interpretar geométricamente.

10. Establecer si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores forma una base del espacio indicado

a) $A = \{(3, 1), (-4, 2), (2, -2)\} \subseteq (R^2, +, R, \cdot)$

b) $A = \{(-1, 1), (2, -2)\} \subseteq (R^2, +, R, \cdot)$

c) $A = \{-x^2 + 3x\ ;\ x^2 + x - 2\ ;\ -x^2 + x + 1\} \subseteq \left(R_{[x]}, +, R, \cdot\right)$

d) $A = \{(2, 2, 3), (1, 0, 4), (-1, -2, 3)\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

e) $A = \{(1, 9, 0, 2, 4), (1, 7, 1, 8, 1)\} \subseteq (R^5, +, R, \cdot)$

f) $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\right\} \subseteq (R^{2\times 2}, +, R, \cdot)$

11. Encontrar las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de las bases indicadas

a) $\vec{v} = (1, 2);\ [B] = \{(2, 6), (0, -1)\} \subseteq (R^2, +, R, \cdot)$

b) $\vec{v} = (2, -5, 2);\ [B] = \{(1, -3, 2), (2, -5, 0), (-1, 2, 3)\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

c) $\vec{v} = (1, 0, 2);\ [B] = \{(1, -2, 4), (2, 0, -2), (-1, -1, 4)\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 15 & 5 \end{pmatrix};\ [B] = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq (R^{2\times 2}, +, R, \cdot)$

e) $\vec{v} = -5x^2 - 8x - 3\ ;\ [B] = \{x^2 + 2x - 2\ ;\ 3x^2 + 4x + 4\ ;\ 2x - 7\} \subseteq \left(R_{[x]}, +, R, \cdot\right)$

f) $\vec{v} = (2, 0, -10, -8);\ [B] = \{(1, 0, 0, 0), (1, 2, 3, 4), (1, 0, 0, 2), (2, 2, -2, 1)\} \subseteq (R^4, +, R, \cdot)$

g) $\vec{v} = (6, 1, 2);\ [B] = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq (R^3, +, R, \cdot)$

Verificar los incisos a, b y c con GeoGebra: Sugerencia: por barra de entrada: ingresar los vectores de $[B]$; ingresar la combinación lineal de dichos vectores tomando como escalares las coordenadas halladas; comprobar que el vector resultante es $\vec{v}$

12. Dado el siguiente vector $\vec{v} = (-8, 5)$:

a. Representar gráficamente el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base canónica de $R^2$

b. Determinar las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base $[B] = \{(1,2),(-2,3)\}$
c. Representar gráficamente, en el mismo sistema de ejes del ejercicio anterior, el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base $[B]$
d. Verificar que el vector $\vec{v}$, gráficamente, es el mismo en ambas bases.

13. Sean las bases $B_1 = \{(1,2,0),(0,1,2),(1,0,3)\}$ y $B_2 = \{(0,0,1),(2,1,0),(0,1,1)\}$ de $R^3$, encontrar las coordenadas del vector:

a. $\vec{v} = (1,-2,3)$ respecto de la base $B_2$
b. $\vec{v}_{B_1} = (1,4,2)$ respecto de la base canónica
c. $\vec{v}_{B_2} = (2,2,3)$ respecto de la base $B_1$

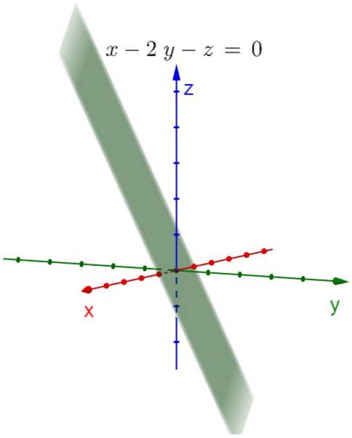
14. Para cada espacio $W$ construir una base e indicar su dimensión

a) $W = \{(x,y,z) \in R^3 / x = y + 2z\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$
b) $W = \{(x,y,z) \in R^3 / x = -2z\,; y = z\} \subseteq (R^3,+,R,)$
c) $W = \{(x,y,z,w) \in R^4 / x = 2w\,; y = 0\} \subseteq (R^4,+,R,\cdot)$
d) $W = \{(x,y,z) \in R^3 / x - y + 5z = 0\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$
e) $W = \left\{a_2\,x^2 + a_1 x + a_0 \in R_{[x]} / a_2 - a_0 = 0\right\} \subseteq \left(R_{[x]},+,R,\cdot\right)$
f) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} / x = 2y\,; z = y\right\} \subseteq (R^{2\times 2},+,R,\cdot)$
g) $W = \{(x,y,z,w) \in R^4 / z = x - 2y\} \subseteq (R^4,+,R,\cdot)$
h) $W = \{A \in R^{2\times 2} / A = -A^t\} \subseteq (R^{2\times 2},+,R,.)$

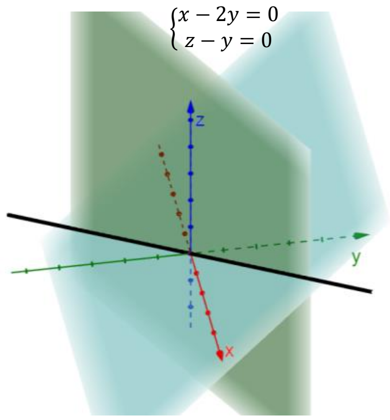
15. Justificar aplicando propiedades, por qué el conjunto $A$ es linealmente dependiente o independiente, y en qué caso $A$ constituye una base

a) $A = \{(3,2),(0,0)\} \subseteq (R^2,+,R,\cdot)$
b) $A = \{(1,-1,2),(0,-2,-1)\}$ tal que $B = \{(1,-1,2),(0,-2,-1),(0,0,-1)\} \subseteq (R^3,+,R,.)$ es LI
c) $A = \{(1,1,-4),(3,3,-12),(1,2,0)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$
d) $A = \{(0,0,0)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$
e) $A = \{(2,6,-1)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$
f) $A = \{(2,0),(0,4),(1,1)\} \subseteq (R^2,+,R,\cdot)$
g) $A = \{(1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-2)\} \subseteq (R^3,+,R,\cdot)$ tal que $A$ es SG de $R^3$

16. Para cada una de las representaciones gráficas de subconjuntos de $R^3$:




a)




b)

i. Demostrar que el subconjunto representa un subespacio vectorial de $R^3$

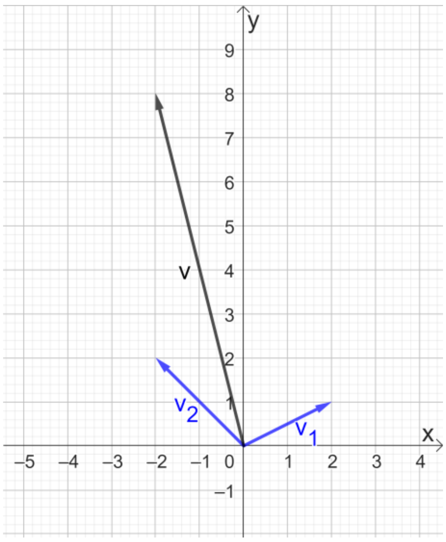
ii. Indicar tres vectores del subespacio vectorial

iii. Determinar los vectores que generan el subespacio vectorial

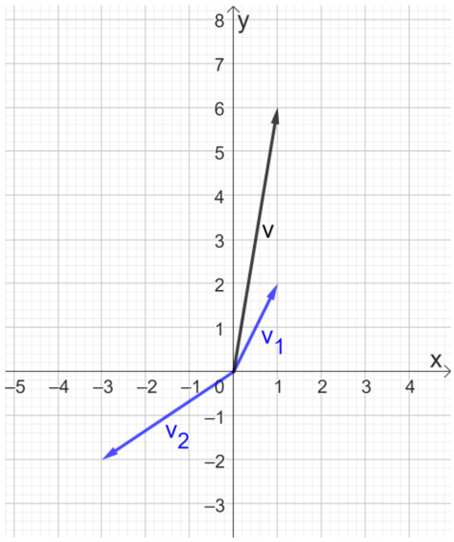
iv. Calcular la dimensión del subespacio

v. Demostrar que $A = \{(1,0,1),(0,1,-2)\}$ también es un sistema generador del conjunto de vectores del inciso a

17. A partir de los siguientes gráficos determinar, geométricamente, las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica y de la base indicada en cada caso. Verificar analíticamente.




a)




b)

**AUTOEVALUACIÓN DE TEORÍA**

**1.-** Responder Verdadero o Falso. NO justificar.

a) Dos bases cualesquiera, de un mismo espacio vectorial tienen igual número de elementos. ☐

b) El vector nulo, forma un conjunto linealmente dependiente. ☐

**2.-** Completar con la respuesta que corresponda.

a) Dados n vectores $v_1, v_2 \ldots, v_n$ y n escalares $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ se llama combinación lineal de los n vectores dados con coeficientes $\alpha_i$ (con i = 1, . . . , n) al vector $\vec{u}$ definido por $\vec{u} =$.......................................................

b) En un espacio vectorial (V , + , K , . ), un conjunto de vectores $B = \{\overrightarrow{v_1}, .., \overrightarrow{v_n}\}$ es una base si solo si.............................................................................

**3.-** Escribir, en el recuadro y con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es escribir N.

a) Sea (V, +, R, .) un espacio vectorial real y S = {$v_1$, $v_2$, . . . ,$v_n$} un subconjunto de vectores de V, es linealmente dependiente si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{v_i}$ = 0 admite: ☐

A) Como única solución, la trivial

B) Infinitas soluciones distintas de la trivial

C) Infinitas soluciones incluida la solución trivial

D) Ninguna de las respuestas anteriores

b) Sea $(V, +, R, .)$ un espacio vectorial y $[B] = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ una base del mismo, sea $\vec{u} \in V$ *tal que* $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{v_i}$ , entonces los coeficientes $\alpha_i$ son: ☐

A) Las coordenadas de $\vec{u}_{[B]}$

B) Una combinación lineal de $\vec{u}$

C) Base de $\vec{u}$

D) Sistema de generadores

**AUTOEVALUACIÓN PRÁCTICA**

1.- Recuadrar con tinta, la letra correspondiente a las opciones correctas en cada uno de los enunciados.

a) El conjunto $W = \{(x, y) \in R^2 \ / \ y = 2x\}$

| | |
|---|---|
| es un SEV de $R^2$ | A |
| no es un SEV de $R^2$ | B |

y una base de W es

| | |
|---|---|
| $\{(1, 2)\}$ | C |
| $\{(1, 0), (0, 2)\}$ | D |

b) El conjunto $W = \{(-1, 2), (1, 0)\}$ es

| | |
|---|---|
| LD | A |
| LI | B |

, y además W

| | |
|---|---|
| no es un SG de $R^2$ | C |
| es un SG de $R^2$ | D |

2.- Completar con la respuesta que corresponda. Las respuestas deben escribirse con tinta.

a) Para que $A = \begin{pmatrix} -2 & 2k \\ 2k & -6 \end{pmatrix}$ sea combinación lineal de: $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

el valor de k debe ser.................

b) Al construir una base para el espacio vectorial $S = \{(x, y, z) \in R^3 \ / \ y = 6z - x\} \subset (R^3, +, R, .)$ el resultado es:......................................................................

c) Las coordenadas del vector $v = (0, 3, 2)$ en la base $[B] = \{(1, 0, -1), (-1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ son ..........................................................................

3.- Escribir, con tinta y en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir una N.

a) Para que el conjunto $S = \{x^2 - 1; x + k; 2x^2 - x + 2\}$ sea linealmente independiente, k debe ser: $\boxed{\phantom{X}}$

A) $k \neq -4$ B) $k \neq 4$ C) $k = -4$ D) $k \neq 0$

b) El conjunto $W = \{(1, -2, 1), (2, -3, -1), (7, -12, 1)\} \subset (R^3, +, R, .)$: $\boxed{\phantom{X}}$

A) Es un SG de $R^3$

B) No es SG de $R^3$, pero genera el plano de ecuación $5x + 3y + z = 0$.

C) No es SG de $R^3$, pero genera el plano de ecuación $7x + 3y = 0$.

D) Es linealmente independiente.