1.- Determinar si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores forma una base del espacio vectorial indicado.

f) $\boldsymbol{F = \{(0,1,0,1),(1,0,0,3),(0,0,1,0),(0,0,-1,-2)\}}$ **de** $\boldsymbol{(R^4,+,R,\bullet)}$

Un conjunto F dado constituye una base de un espacio vectorial si, dicho conjunto es linealmente independiente y si es sistema de generadores de ese espacio vectorial.

a) Independencia lineal:

La combinación lineal de los vectores del conjunto F es igual al vector nulo del espacio vectorial $(R^4,+,R,\bullet)$.

Se opera hasta tener un vector a la izquierda de la igualdad.

$$\alpha(0,1,0,1)+\beta(1,0,0,3)+\delta(0,0,1,0)+\gamma(0,0,-1,-2)=(0,0,0,0)$$

Se aplica la definición de multiplicación de un escalar por un vector

$$(0,\alpha,0,\alpha)+(\beta,0,0,3\beta)+(0,0,\delta,0)+(0,0,-\gamma,-2\gamma)=(0,0,0,0)$$

Se aplica la definición de suma de vectores.

$$(\beta,\alpha,\delta-\gamma,\alpha+3\beta-2\gamma)=(0,0,0,0)$$

Se aplica la definición de igualdad de vectores. Obteniendo un sistema de ecuaciones al igualar los componentes homólogos:

$$\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=0\\ \delta-\gamma=0\\ \alpha+3\beta-2\gamma=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=0\\ \delta=\gamma\\ \gamma=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=0\\ \delta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Conclusión: El sistema es compatible determinado se obtiene una única solución: la solución trivial, por lo tanto el conjunto F, es linealmente independiente.

b) Sistema de generadores:

$$\alpha(0,1,0,1)+\beta(1,0,0,3)+\delta(0,0,1,0)+\gamma(0,0,-1,-2)=(x,y,z,w)$$
$$(0,\alpha,0,\alpha)+\ (\beta,0,0,3\beta)+(0,0,\delta,0)+(0,0,-\gamma,-2\gamma)=(x,y,z,w)$$
$$(\beta,\alpha,\delta-\gamma,\alpha+3\beta-2\gamma)=(x,y,z,w)$$

$$\begin{cases}\beta=x\\ \alpha\ =y\\ \delta-\gamma\ =z\\ \alpha+3\beta-2\gamma=w\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta=x\\ \alpha\ =y\\ \delta=\gamma\\ \gamma=\dfrac{\alpha+3\beta-w}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta=x\\ \alpha\ =y\\ \delta=\dfrac{\alpha+3\beta-w}{2}\\ \gamma=\dfrac{\alpha+3\beta-w}{2}\end{cases}$$

Conclusión: Existen $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ para cualquier cuaterna (x, y, z, w), por lo tanto el conjunto F es sistema de generadores de $(R^4,+,R,\bullet)$

Conclusión final: al ser el conjunto de vectores linealmente independiente y sistema de generadores del espacio vectorial $(R^4,+,R,\bullet)$**.** Se concluye que el conjunto de vectores dado es una base de $(R^4,+,R,\bullet)$