POLINOMIOS

TRABAJO PRÁCTICO N° 9

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1) Dados los polinomios:

$P(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b;$ $\qquad$ $Q(x) = 2x^3 + x^2 - kx + 9$

$S(x) = 2x^3 - kx^2 + 6x - 3k;$ $\qquad$ $T(x) = x^4 - k^2x + 3 - k:$

a) Calcular a, b y $k \in \mathbb{R}$ para que:

i. $P(x) + S(x) = 3x^3 - 2x^2 + 11x - 8$

ii. $S(x) - (x^3 - 3x^2 + 6x - 5) = P(x)$

iii. $2Q(x) - S(x) = 2P(x)$

b) Calcular a y $b \in \mathbb{R}$ para que $P(x)$ sea divisible por $(x^2 + x + 1)$

c) Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de manera tal que:

i. El resto de $Q(x) \div (x + 3)$ sea -12

ii. $S(x)$ sea divisible por $(x + 2)$

iii. El resto de $T(x) \div (x - 3)$ sea 4

2) Hallar un polinomio desarrollado de 3° grado tal que:

a) Sea mónico, divisible por $(x^2 - 4)$ y se anule para $x = 3$

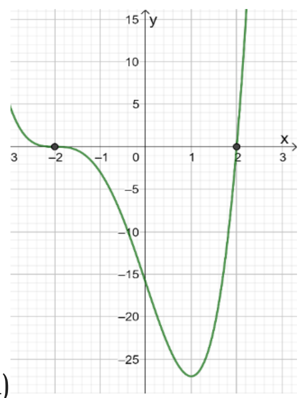
b) $P(3) = 18$ y sus raíces sean $2, -3$ y 4

c) Se anule para $x = 1$ y $x = -2$; $P(-1) = 4$ y $P(2) = 28$

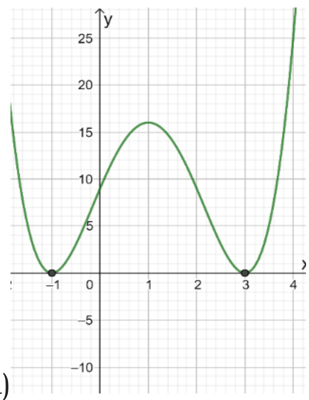
Verificar los resultados de los puntos 2b) y 2c) en GeoGebra: Sugerencia: Ingresar la función y=P(x) hallada desde la barra de entrada. Determinar las raíces gráficamente y usando el comando *Raíz*. Para evaluar un polinomio ingresar por ejemplo: f(3)

3) A partir de la gráfica, determinar el polinomio P(x):

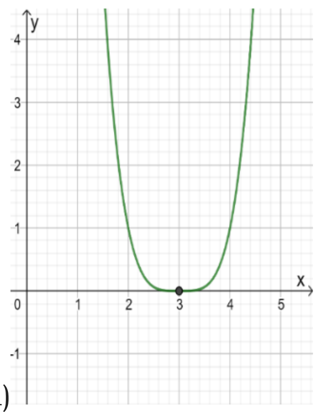
a) Mónico, de grado 4 con todas sus raíces reales:



i)

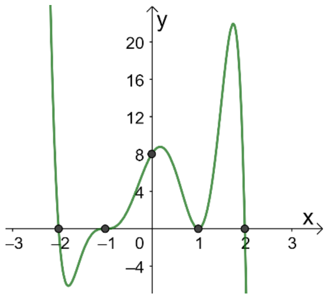


ii)



iii)

b) De grado 7 con todas sus raíces reales



4) Para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$

b) $x^5 - 7x^4 + 20x^3 - 40x^2 + 64x - 48 = 0$

c) $x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 18x - 40 = 0$

d) $4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0$

e) $x^6 + 9x^5 + 31x^4 + 53x^3 + 54x^2 + 44x + 24 = 0$

f) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = 0$

4.1) Determinar el número posible de raíces reales positivas, reales negativas y complejas no reales, aplicando la Regla de Descartes.

4.2) Calcular las raíces, sabiendo que tienen al menos una raíz entera

Verificar los resultados en GeoGebra: Sugerencia: Ingresar la función y=P(x) desde la barra de entrada. Determinar las raíces enteras a partir de la gráfica. Cotejar las raíces reales y complejas usando el comando *RaízCompleja.*

5) Resolver las siguientes ecuaciones, sabiendo que tienen al menos una raíz racional.

a) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$

b) $3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $2x^3 + x^2 - 9 = 0$

d) $6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0$

Verificar los resultados en GeoGebra: Sugerencia: Ingresar la función y=P(x) desde la barra de entrada. Determinar las raíces racionales a partir de la gráfica. Cotejar las raíces reales y complejas usando el comando *RaízCompleja.*

6) Hallar las raíces de los polinomios P(x), aplicando la condición necesaria y suficiente para que una raíz sea múltiple de orden h de P(x)

a) $P(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54$; con una raíz triple

b) $P(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 16$; con una raíz doble

c) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$

d) $P(x) = x^5 + 19x^4 + 130x^3 + 350x^2 + 125x - 625$

7) Escribir la ecuación $P(x) = 0$ desarrollada:

a) Con coeficientes reales, mónica cuyas raíces son $(1 - i)$ simple y -1 doble

b) De coeficiente principal -2 y menor grado posible, cuyas raíces son $0, \frac{1}{2}$ y $3i$

c) Mónica de 3° grado cuyas raíces son 1 y $-i$

d) Con coeficientes reales, de 3° grado, con $a_3 = 2$, $2 + i$ una raíz y $P(-1) = -10$

e) Con coeficientes reales, mónica, de 5° grado, con $-2i$ una raíz doble, y $P(0) = -32$

Verificar los resultados en GeoGebra: Sugerencia: Ingresar la función y=P(x) desde la barra de entrada. Calcular las raíces reales y complejas usando el comando *RaízCompleja.*

8) Realizando un cambio de variable: $x^n = t$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, calcular las raíces de las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$

d) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

e) $x^8 - 2x^4 + 1 = 0$

TRABAJO PRÁCTICO N° 10

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1) Calcular el MCD entre los siguientes pares de polinomios. Identificar aquellos pares de polinomios primos entre sí

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ y $Q(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ y $Q(x) = 6x^2 - x - 1$

c) $P(x) = x^4 - 81$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

d) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ y $Q(x) = x^2 - x - 6$

e) $P(x) = x^4 + x^3 + x + 4$ y $Q(x) = x - 3$

f) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$ y $Q(x) = x^2 + x - 6$

2) Para cada una de las siguientes ecuaciones $P(x) = 0$, calcular sus raíces sabiendo que por lo menos una de ellas anula a $D(x)$, siendo $D(x) = \text{MCD}[P(x), P'(x)]$

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

b) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $P(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 27 = 0$

d) $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$

3) Aplicando el concepto de relación entre coeficientes y raíces, encontrar las ecuaciones mónicas desarrolladas que tienen por raíces a:

a) -2 simple y 2 doble

b) -1, 1, $2i$ y $-2i$; todas simples

c) $(2 - 2i)$, $(2 + 2i)$ y 2; todas simples

4) Utilizando el concepto de relación entre coeficientes y raíces, hallar las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 5x^2 + 4x + 20 = 0$; sabiendo que $2i$ es una raíz

b) $x^3 + 8x^2 + 4x - 48 = 0$; sabiendo que $x_1 = x_2 + x_3$

c) $4x^4 + 4x^3 - 63x^2 - 64x - 16 = 0$; sabiendo que una raíz es doble y las otras dos son opuestas

d) $2x^3 - 5x^2 - 46x + 24 = 0$, sabiendo que el producto de dos de sus raíces es -2

e) $x^3 - 6x^2 + 9x - 54 = 0$, sabiendo que tiene una raíz imaginaria de la forma bi, donde $b \in \mathbb{R}$

Verificar los resultados en GeoGebra: Sugerencia: Ingresar la función y=P(x) desde la barra de entrada. Determinar las raíces reales a partir de la gráfica. Cotejar las raíces reales y complejas usando el comando *RaízCompleja.*

5) a) Sea la ecuación $2x^3 + (k - 2)x^2 + kx - (k + 4) = 0$; calcular el producto de las raíces sabiendo que la suma de las mismas es igual a 5.

b) Sea la ecuación $2x^4 - (3h-1)x^3 + 19x^2 + (-h-9)x + (2h-5) = 0$; si se sabe que el producto de sus raíces es igual a $\frac{3}{2}$, calcular:

i. El valor de h

ii. La suma de las raíces

iii. La suma de los productos de las raíces tomadas de a tres

c) Sea la ecuación $4x^4 - 24x^3 + a_2x^2 + 6x + a_0 = 0$; si una raíz es el doble de otra y las otras dos son opuestas, calcular las raíces, a_2 y a_0

d) Sea la ecuación $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, que tiene dos raíces opuestas; determinar la relación que existe entre a, b y c.

Verificar el resultado del inciso d) en GeoGebra: Crear deslizadores para los parámetros a y b con la herramienta *Deslizador*. Ingresar la función y=P(x) en términos de a y b, desde la barra de entrada. Determinar las raíces con la herramienta Raíces y variar los parámetros a y b activando los deslizadores correspondientes.

6) Plantear y resolver los siguientes problemas:

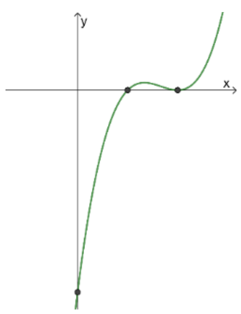
a) Dada la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$; calcular $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $x = 2 + i$ sea una raíz de la ecuación.

b) Dada la ecuación $x^4 - 6x^3 + hx^2 + kx + 8 = 0$, con $h, k \in \mathbb{R}$, con una raíz real doble y otra compleja de la forma $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, cuyo módulo es igual a $\sqrt{2}$; calcular:

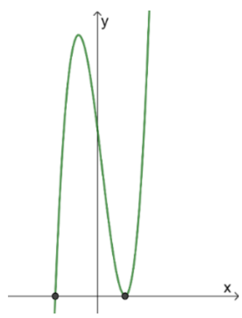
i. Las raíces de la ecuación

ii. El valor de h y k

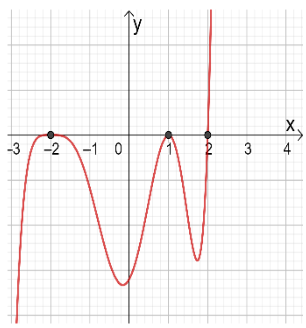
c) Dadas las gráficas de los siguientes polinomios:



$y = P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + k$



$y = Q(x) = x^3 - x^2 + hx + k$



$y = S(x)$

i. Calcular las raíces de $P(x)$ y el valor de $k \in \mathbb{Z}$

ii. Calcular las raíces de $Q(x)$ y el valor de h y k, si se sabe que tiene raíces enteras y la suma de dos de ellas es igual a -1

iii. Calcular el término independiente de $S(x)$ de grado 7, con coeficiente principal 2, todas sus raíces enteras y $S(-1) = -24$

d) Sea la ecuación $x^3 - x^2 - 54x + 144 = 0$, de raíces a, b y c; calcular $(a+1).(b+1).(c+1)$

e) Calcular las raíces y el valor de k en los siguientes polinomios P(x):

i. $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x + k$, si se sabe que tiene una raíz triple entera

ii. $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 + k$, si se sabe que el $MCD[P(x), P'(x)] = x^2 - x - 2$

f) Encontrar el polinomio mónico desarrollado P(x):

i. De 4° grado, con una raíz entera que anula a $P''(x) = 2x^2 - x - 1$ y $P(0) = -2$

ii. Con coeficientes reales, de 5° grado, con $MCD[P(x), P'(x)] = x^2 - 6x + 9$ y $-i$ una de sus raíces

g) Dado el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + hx - 1$, con h y $k \in \mathbb{Z}^+$; si se sabe que tiene una raíz fraccionaria y otra que anula a $P'(x) = 3x^2 - 5x + 2$, calcular sus raíces, h y k

h) Dado el polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3$, con a, b y $c \in \mathbb{Z}^+$; si se sabe que tiene raíces reales enteras y una raíz igual a i, calcular el valor de a, b y c

7) Resolver las siguientes ecuaciones

a) $9x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$, si dos de sus raíces son iguales y las otras dos son opuestas

b) $2x^5 + 17x^4 + 52x^3 + 70x^2 + 42x + 9 = 0$, con raíces racionales

c) $x^5 + 9x^4 + 27x^3 + 27x^2 = 0$, con al menos una raíz múltiple

d) $4x^5 - 4x^4 + 37x^3 - 36x^2 + 9x = 0$, si admite a $-3i$ como raíz

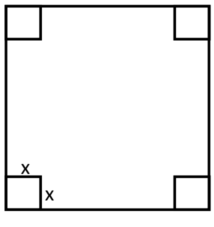
e) $x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32x + 64 = 0$, con todas sus raíces múltiples

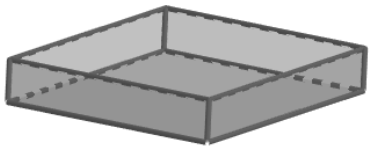
f) $P(x) = x^8 - 20x^6 + 118x^4 - 180x^2 + 81 = 0$, si se sabe que el $MCD[P(x), P'(x)] = x^4 - 10x^2 + 9$

Verificar los resultados en GeoGebra: Sugerencia: Ingresar la función y=P(x) desde la barra de entrada. Determinar las raíces reales a partir de la gráfica. Cotejar las raíces reales y complejas usando el comando *RaízCompleja.*

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1) Se desea construir una bandeja a partir de una hoja metálica cuadrada de 64 $[ul]^2$ de área, quitando pequeños cuadrados idénticos, de lado igual a x, de las esquinas y doblando los alerones hacia arriba. Determinar el valor de $x \in \mathbb{Q}$ para que el volumen de la bandeja sea de 32 $[ul]^3$.





2) Si a dos de las aristas de un cubo se las reduce en 2 y 3 [ul], respectivamente, y a la tercera se le agrega 6 [ul], se obtiene un prisma de volumen igual a 66 $[ul]^3$. Calcular la longitud (entera) de las aristas del cubo.

3) El Servicio Meteorológico utilizó, como modelo para la variación de la temperatura (en °C) durante cierto día, la siguiente formula $T(t) = -\frac{1}{50}t^3 + \frac{29}{50}t^2 - \frac{69}{25}t$, donde t representa la hora y T la temperatura, con $0 \leq t \leq 24$. Se quiere averiguar las horas en las que la temperatura fue de 0°C.

AUTOEVALUACIÓN TEÓRICO-PRÁCTICA: POLINOMIOS Y ECUACIONES POLINÓMICAS

1. Marcar con tinta, en la casilla correspondiente, las opciones correctas en cada uno de los enunciados.

a) Sea $x^3 + 4x^2 - 4x + a_3 = 0$, cuyas raíces cumplen la relación $x_3 = x_1 + x_2$, entonces

$x_3 = -2$	A
$x_3 = -1$	B

y el término independiente es

$a_3 = -7$	C
$a_3 = -16$	D

b) Si $P(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$ y $MCD[P(x), P'(x)] = x + 4$, entonces $x_1 = -4$ es, de $P(x)$, raíz

doble	A
simple	B

y otra raíz de $P(x)$ es

$x_2 = 1$, simple	C
$x_2 = -1$, simple	D

c) Sean $P(x), D(x)\, y\ S(x)$ polinomios no nulos, $D(x)$ divide a $P(x)$ si existe $Q(x)$ tal que

$P(x) = D(x).Q(x) + R(x), con\ R(x) = N(x)$	A
$P(x) = D(x).Q(x) + R(x), con\ R(x) \neq N(x)$	B

Además si D(x) divide a P(x), se cumple que D(x) divide a

$P(x) + S(x)$	C
$P(x)\,.S(x)$	D

d) Si un número real "a" es raíz de la ecuación $P(x) = 0$ entonces $P(x)$ es divisible por

$(x + a)$	A
$(x - a)$	B

, además se cumple

$P(a) = 0$	C
$P(a) \neq 0$	D

2. Completar con la respuesta que corresponda. Las respuestas deben escribirse con tinta

a) Dados $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ y $Q(x) = x + 3$, entonces el $MCD[P, Q] =$..........................

b) La ecuación mónica desarrollada de menor grado que admite como raíces a 1, 2 y 1– i, es:...

c) Sea la ecuación $3x^3 - x^2 + 27x - 9 = 0$, sabiendo que $x_1 = 3i$ es una de sus raíces y que $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{3}$, entonces sus otras dos raíces son: $x_2 =$.................. y $x_3 =$..................

d) Sea $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$, con raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 entonces $a_5 =$...

e) La condición necesaria y suficiente para que un número "a" sea raíz múltiple de orden "h", de f(x) = 0, es que..

3. Escribir, con tinta y en el recuadro, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir una N.

a) La ecuación $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$, tiene por raíces: $\square$

A) $x_1 = 3, x_2 = -3 \;\; y \;\; x_3 = 1 - i$ B) $x_1 = 3, x_2 = i \;\; y \;\; x_3 = -i$

C) $x_1 = i \;\; y \;\; x_2 = -i$ D) $x_1 = 0, x_2 = i \;\; y \;\; x_3 = -i$

b) Si la ecuación $4x^3 + a_1x^2 - x + a_3 = 0$ tiene por raíces: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ y $x_3 = 3$, entonces los valores coeficientes $a_1 \; y \, a_3$ son: $\square$

A) $a_1 = 3, a_3 = -3$ B) $a_1 = 12, a_3 = 0$

C) $a_1 = -12, a_3 = 3$ D) $a_1 = -3, a_3 = 12$

c) Si la ecuación algebraica P(x) = 0 de coeficientes reales tiene todos sus términos positivos, entonces: $\square$

A) No admite raíces negativas B) No admite raíces positivas

C) No admite raíces complejas D) No se puede determinar que raíces admite

d) Si $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ tiene por raíces a $x_1 \; y \; x_2$ (triple), entonces: $\square$

$A)\; P(x) = a_0(x - x_1)^3(x - x_2)$ $B)\; P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)^3$

$C)\; P(x) = a_0(x - x_1)^2(x - x_2)^2$ $D)$ Todas las opciones son correctas