VECTORES EN R^n

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1. Dados los puntos $A(2,-3)$, $B(3,-4)$ y $C(-2,5)$ en R^2:

   a. Determinar las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$, y representarlos gráficamente.

   b. Encontrar las coordenadas del punto D, para que:

      i. $\overrightarrow{AD}$ sea equipolente al vector $(5,2)$

      ii. $\overrightarrow{DB}$ sea equipolente al vector $(-4,3)$

      iii. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales

      iv. $\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$ sea equipolente al vector $(9,3)$

      v. $2.\overrightarrow{DB}$ sea opuesto al vector $(2,-4)$

Verificar los resultados del inciso a) en Geogebra: Sugerencia: Ingresar los puntos (origen y extremo) desde la barra de entrada y determinar el vector usando la herramienta o comando *Vector*.

Verificar el resultado del inciso b) i. en Geogebra: Sugerencia: Ingresar el origen (punto A) y el vector $\vec{u}=(5,2)$ desde la barra de entrada, y determinar el vector equipolente $\overrightarrow{AD}$ usando la herramienta *Equipolente*.

2. Dados los puntos $A(1,-2,4)$, $B(-2,3,-4)$ y $C(4,-2,3)$ en R^3:

   a. Determinar las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$, y representarlos gráficamente.

   b. Encontrar las coordenadas del punto D, para que:

      i. $\overrightarrow{AD}$ sea equipolente al vector $(3,5,4)$

      ii. $\overrightarrow{DB}$ sea equipolente al vector $(2,-4,5)$

      iii. $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DA}$ sean iguales

      iv. $\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$ sea equipolente al vector $(-5,9,6)$

      v. $-3.\overrightarrow{DB}$ sea opuesto al vector $(3,-3,6)$

Verificar los resultados del inciso a) en Geogebra: Sugerencia: Ingresar los puntos (origen y extremo) desde la barra de entrada y determinar el vector usando la herramienta o comando *Vector*.

Verificar el resultado del inciso b) i. en Geogebra: Sugerencia: Ingresar el origen (punto A) y el vector $\vec{u}=(3,5,4)$ desde la barra de entrada, y determinar el vector equipolente $\overrightarrow{AD}$ usando la herramienta *Equipolente*.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (-1,3)$; $\vec{v} = (2,4)$ y $\vec{w} = (3,-5)$; resolver gráficamente y verificar el resultado en forma analítica:

a) $\vec{u} + \vec{v} =$ b) $\vec{u} - \vec{v} =$ c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} =$ d) $3\vec{u} + 2\vec{v} =$ e) $2\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} =$

Verificar los resultados en Geogebra: Sugerencia: Ingresar los vectores y las operaciones desde la barra de entrada.

4. Sean $\vec{u} = -2i + 2j$; $\vec{v} = 5i - 4j$ y $\vec{w} = (-3,4)$; calcular:

a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ b) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ d) $\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

e) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ f) $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2.(\vec{u} \cdot \vec{v})$ g) $\frac{1}{\|\vec{w}\|} \cdot \vec{w}$ h) $\left\| \frac{1}{\|\vec{w}\|} \cdot \vec{w} \right\|$

i) $\|\vec{u}\|.(3.\vec{v} + \vec{w})$ j) $\|2\vec{u} + \vec{v}\|.(\vec{w} \cdot \vec{u})$ k) $(\|\vec{u}\|.\vec{v}) \cdot \vec{w}$

Verificar el resultado del inciso j) en Geogebra: Sugerencia: Ingresar los vectores y las operaciones desde la barra de entrada. Usar los comandos *Longitud* y *ProductoEscalar* para calcular el módulo y el producto escalar, respectivamente.

5. Sean $\vec{u} = (4,-2,4)$; $\vec{v} = i - 2j + 2k$ y $\vec{w} = 3i + 4j - 2k$; calcular:

a) $\vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ b) $\vec{w} \cdot \vec{u} - \vec{w} \cdot \vec{v}$ c) $(\vec{w} \cdot \vec{w}).(\vec{u} \cdot \vec{v})$ d) $\|\vec{w}\|^2.(\vec{u} \cdot \vec{v})$

e) $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ f) $\left\| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \right\|$ g) $-3.(\vec{v} - 8\vec{w})$ h) $\|\vec{u} - \vec{v}\|.(\vec{u} \cdot \vec{w})$

i) $5.(\vec{u} \cdot \vec{v}).\vec{w}$ j) $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ k) $(2.\vec{u} - 3.\vec{v}) \cdot \vec{w}$

6. Dados los vectores $\vec{u} = (2,4)$; $\vec{v} = (-3,4)$; $\vec{w} = 6i - 8j$:

a) Calcular el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$; y el determinado por $\vec{w}$ y $\vec{v}$
b) Determinar cuáles de los siguientes vectores: $(-4,2)$; $(-1,-2)$; $3i + 6j$; son paralelos a $\vec{u}$
c) Determinar cuáles de los siguientes vectores: $\left(2,\frac{3}{2}\right)$; $(-4,-3)$; $3i - 6j$; son perpendiculares a $\vec{w}$
d) Hallar un vector unitario paralelo a $\vec{u}$
e) Encontrar un vector de igual dirección y sentido que $\vec{v}$ y de módulo 4
f) Encontrar un vector de módulo 6 con las misma dirección y sentido opuesto que $\vec{w}$

Verificar el resultado de los incisos a), b) y c) en Geogebra: Sugerencia: Ingresar los vectores desde la barra de entrada. Usar los comandos *Longitud, Ángulo*, *ProductoEscalar*.

7. Dados los vectores $\vec{u} = (2,4,1)$; $\vec{v} = (3,-1,-2)$; $\vec{w} = 2i - 2j + k$:

a) Calcular el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el determinado por $\vec{w}$ y $\vec{v}$
b) Determinar cuáles de los siguientes vectores: $(-4,8,-2)$; $(-4,-8,-2)$; $3i + 6j + \frac{3}{2}k$, son paralelos a $\vec{u}$
c) Determinar cuáles de los siguientes vectores: $(-4,-2,4)$; $(0,-1,2)$; $3i + 6j + 6k$,

son perpendiculares a $\vec{w}$

d) Hallar un vector unitario paralelo a $\vec{w}$

e) Encontrar un vector de igual dirección y sentido que $\vec{v}$ y de módulo 4

f) Encontrar un vector de módulo 6 con la misma dirección y sentido opuesto que $\vec{w}$

8. Sean los vectores $\vec{u} = (2,\ 3, -1)$; $\vec{v} = (2,\ -2, 0)$ y $\vec{w} = (-2,\ 4,\ 1)$; calcular:

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v} \times \vec{u})$	b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$	c) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
d) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$	e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$	f) $(\vec{u} \times \vec{v}) - 2.\vec{w}$
g) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$	h) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$	i) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{w})$

Verificar el resultado del inciso b), c), f) y h) en Geogebra: Sugerencia: Ingresar los vectores y las operaciones desde la barra de entrada. Usar los comandos *ProductoEscalar* y *ProductoVectorial.*

9. Sean los vectores $\vec{u} = 2i - j + 3k$; $\vec{v} = (2, -2, 0)$ y $\vec{w} = -2i + 3j + k$; determinar:

a) El área del paralelogramo y del triángulo que tienen por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) El área del paralelogramo y del triángulo que tienen por lados los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$

c) El volumen del paralelepípedo que tiene como aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

d) El volumen del paralelepípedo que tiene como aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y el versor í

e) Si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $(2, -3, -3)$ son coplanares

Verificar el resultado del inciso a), c) y e) en Geogebra: Sugerencia: Ingresar los vectores y las operaciones desde la barra de entrada. Usar los comandos *Longitud, ProductoEscalar* y *ProductoVectorial.*

VECTORES EN R^n

TRABAJO PRÁCTICO N° 2

Enlace al software GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR

1) Sabiendo que $\|\vec{a}\| = 4$; $\|\vec{b}\| = 5$ y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\alpha = \frac{\pi}{3}$, calcular:

   a) $\vec{a} \cdot \vec{a} =$ b) $\vec{b} \cdot \vec{b} =$ c) $\vec{b} \cdot (3.\vec{b}) =$

   d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} =$ e) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$ f) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 =$

2) Calcular el valor de los parámetros $x, y \in \mathbb{R}$, según corresponda en cada caso, para que:

   a) Se cumpla la igualdad: $(-8, -2) = x(5, -4) + y(-2, 3)$
   b) Los vectores $\vec{u} = xi + j$ y $\vec{v} = 4i - 3j$ sean paralelos
   c) El vector $\vec{u} = (x, y)$ sea perpendicular al vector $\vec{v} = (3, -4)$ y $\|\vec{u}\| = 1$
   d) Los vectores $\vec{a} = (1, 0, 1)$ y $\vec{b} = (x, y, 0)$ formen un ángulo de 45°, y $\|\vec{b}\| = 2$
   e) El vector $\vec{w} = (x, -2, 2y, 2)$ sea paralelo a $(\vec{v} + \vec{u})$, siendo $\vec{u} = (2, 0, -1, -1)$ y $\vec{v} = (3, 1, -2, 0)$
   f) Los vectores de R^4: $\vec{u} = (2, -x, -3, 1)$ y $\vec{v} = (x^2, 2, x, -3)$ sean perpendiculares
   g) El ángulo formado por los vectores $\vec{a} = (1, -2, 4, 2)$ y $\vec{b} = (1, 0, x, 0) \in \mathbb{R}^4$ sea de 45°

3) Sean los vectores $\vec{u} = (\alpha - 2, 6 - \alpha)$ y $\vec{v} = (1, \alpha)$, encontrar, si es posible, los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

   a) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ c) $2\vec{u} + 3\vec{v} = (3, 14)$

   d) $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ e) $(\vec{u} + \vec{v}) \perp \vec{v}$

4) Dados los vectores $\vec{a} = (-9, 3, 2)$ y $\vec{b} = (12, -4, x)$, calcular, si es posible, los valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que:

   a) $\frac{1}{4}\vec{b} + 2\vec{a} = -5(3, -1, -1)$ b) $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ c) $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$

   d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$ e) $\vec{a} \times \vec{b} = 2i + 6j$

   f) El área del paralelogramo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea igual a $\sqrt{10}$ $[ul]^2$

   g) El volumen del paralelepípedo formado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c} = (2, 2, 0)$ sea igual a 16 $[ul]^3$

Verificar los resultados con Geogebra: Sugerencia: Ingresar los vectores desde la barra de entrada. Usar los comandos: *Ángulo, Longitud, ProductoEscalar, ProductoVectorial.*

5) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 2)$ y $\vec{v} = (-3, 4, 1)$, encontrar, de ser posible, un vector $\vec{w}$ de manera que:

a) Se cumpla la siguiente relación: $2\vec{w} + \vec{u} - \vec{v} = 4\vec{w} + 3\vec{v}$

b) Se encuentre en el plano XZ y $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$

c) Sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y $\vec{w} \cdot (2, -2, 1) = -13$

d) Sea coplanar con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se encuentre sobre el plano XY y $\vec{u} \cdot \vec{w} = -9$

e) Se encuentre en el plano YZ, el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sea igual a $\frac{\pi}{2}$ y $\|\vec{w}\| = \sqrt{20}$

f) Sea paralelo a $\vec{u} + \vec{v}$ y $\|\vec{w}\| = 2\sqrt{35}$

6) Sean los puntos $A(1, 2, 0), B(1, 2, 2), C(2, 1, -1), D(2, 1, 0)$ y $E(x, -1, -3)$, determinar:

a) El valor de x para que los puntos A, C y E resulten colineales

b) Si los puntos A, B, C y D son coplanares

c) De ser posible, el área del cuadrilátero que tiene como vértices los puntos A, B, C y D

d) El valor de $x \in \mathbb{R}$ para que el área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AE}$ sea igual a 6 $[ul]^2$.

e) El valor de $x \in \mathbb{R}$ para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$ sea igual a 2 $[ul]^3$

f) El valor de $x \in \mathbb{R}$ para que los puntos A, B, C y E resulten coplanares.

Verificar los resultados con Geogebra: Sugerencia: Ingresar los puntos desde la barra de entrada. Usar los comandos: *Recta, Plano, Polígono, Área, Vector, Longitud, ProductoEscalar, ProductoVectorial.*

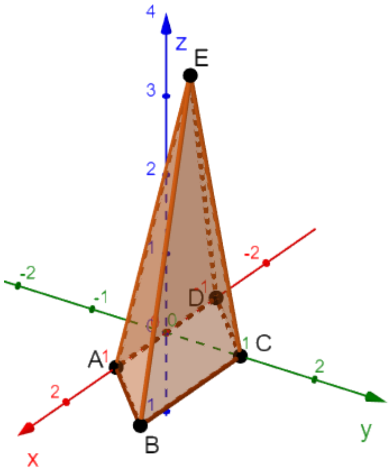
7) Dada la pirámide de base ABCD y vértice E, con A(1,0,0) ; B(2,1,0) ; C(0,1,0); D(-1,0,0) y E(1,1,4); hallar:

a) El área de la cara ABE

b) El área de la base

c) El volumen de la pirámide

d) El valor de la altura



Verificar los resultados con Geogebra: Sugerencia: Ingresar los puntos desde la barra de entrada. Usar los comandos: *Polígono, Área, Pirámide, Vector, Longitud, ProductoEscalar, ProductoVectorial.*

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1) Una fábrica produce cinco artículos: pantalones, camperas, camisas, remeras y bermudas. La demanda diaria está dada por el vector demanda $\overrightarrow{\mathrm{d}} = (80, 50, 85, 70, 60)$. El precio por unidad de cada artículo está representado por el vector precio $\overrightarrow{\mathrm{p}} = (\$300, \$650, \$200, \$150, \$180)$. Si se cubre toda la demanda, ¿cuánto dinero recibe la fábrica en el lapso de 15 días?

2) El equipo olímpico de gimnasia artística de Argentina, con 6 miembros, participó este año en tres competencias internacionales. Si las calificaciones obtenidas en las competencias están representadas por los vectores $\overrightarrow{\mathrm{u}} = (8, 9, 7, 9, 8, 7)$, $\overrightarrow{\mathrm{v}} = (10, 9, 10, 9, 8, 10)$ y $\overrightarrow{\mathrm{w}} = (8, 8, 9, 7, 9, 8)$, determinar el vector promedio de las calificaciones.

3) Una empresa que fábrica muebles tiene dos plantas, y en cada una se fabrican sillas de madera y metal. La producción diaria de sillas de ambos materiales de la primera planta está dada por el vector $\overrightarrow{\mathrm{p_1}} = (120, 90)$, y de la segunda por el vector $\overrightarrow{\mathrm{p_2}} = (80, 50)$. ¿Cuántos días necesita cada planta para que la empresa cubra una demanda representada por el vector $\overrightarrow{\mathrm{d}} = (720, 510)$?

AUTOEVALUACIÓN TEÓRICO-PRÁCTICA: VECTORES

1. Marcar con tinta, en la casilla correspondiente, las opciones correctas en cada uno de los enunciados.

a) Con los puntos $P(2,3,2)$ y $Q(6,-3,4)$ se puede formar el vector

$\vec{v}=(-4,6,-2)$	A
$\vec{v}=(4,6,2)$	B

y para que $\overrightarrow{QP}$ sea perpendicular al vector $(2,3,x)$, x debe ser

$x=5$	C
$x=-13$	D

b) Dados $\vec{u}=(1,0,2)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}=(3,1,2)$, entonces $\vec{u}\times\vec{v}$ es igual a

$(1,4,-2)$	A
$(-2,4,1)$	B

, además $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son

coplanares	C
no coplanares	D

c) Sea el vector $\vec{u}=(u_1,u_2)$ $y\ \lambda\in\mathbb{R}$, si $\overrightarrow{\lambda u}=\vec{0}$, entonces

$\lambda=0\ y\ \vec{u}=\vec{0}$	A
$\lambda=0$ ó $\vec{u}=\vec{0}$	B

, además $\overrightarrow{\lambda u}$ cumple con la Ley de Composición

Externa	C
Interna	D

d) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ es

$\frac{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}{2}$	A
$\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$	B

, además $\vec{u}//\vec{v}$ si se cumple que

$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$	C
$\vec{u}\times\vec{v}=0$	D

2. Completar con la respuesta que corresponda. Las respuestas deben escribirse con tinta

a) El volumen del paralelepípedo formado por los vectores (-2, 0, -2) ; (0, 3, -3) y (1, -3, 1) es: Vol =...............[ul]^3.

b) Dado el vector $\vec{u}=(2,-4,2)$, un vector unitario y paralelo a $\vec{u}$, es: ....

c) Sean los vectores $\vec{u}=(1,0,m)$ y $\vec{v}=(2,0,3m)$, los valores de "m" para que el área del paralelogramo que ellos determinan sea igual a 3[ul]^2, son: m = ...

d) Dado el vector $\vec{v}=(a,b)$, entonces un vector $\vec{u}$, unitario y con la misma dirección de $\vec{v}$, es: $\vec{u}=$ (......... ..., ...)

e) El área del triángulo cuyos lados son los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, está dada por:.................

3. Escribir, con tinta, la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna es, escribir una N.

a) Los valores de m y n para que los vectores $\vec{u}=(2,m,-4)$ y $\vec{w}=(-4,10,n)$ sean paralelos, son: $\square$

A) $\begin{array}{c} m = 5 \\ n = -8 \end{array}$ *B)* $\begin{array}{c} m = 5 \\ n = 8 \end{array}$ *C)* $\begin{array}{c} m = 8 \\ n = -5 \end{array}$ *D)* $\begin{array}{c} m = -5 \\ n = 8 \end{array}$

b) Dados $\vec{r} = (3, p\,, 1)$ y $\vec{v} = (q, 3, 3)$, los valores de “p” y “q” para que sean perpendiculares y para que $\vec{r} + \vec{v} = (4, 1, 4)$ son: $\square$

A) $\begin{array}{c} p = 2 \\ q = 1 \end{array}$ *B)* $\begin{array}{c} p = 2 \\ q = -1 \end{array}$ *C)* $\begin{array}{c} p = -2 \\ q = 1 \end{array}$ *D)* $\begin{array}{c} p = 2 \\ q = 2 \end{array}$

c) Un vector $\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,\ 0,\ 3)$ y $\vec{v} = (2,\ 3,\ 9)$, es: $\square$

A) $\vec{w} = (3,\ 3,\ 12)$ *B)* $\vec{w} = (-1, -3, -6)$ *C)* $\vec{w} = (-9, -3,\ 3)$ *D)* $\vec{w} = (2,\ 0,\ 27)$

d) Dados los vectores $\vec{u} = (u_1,\ u_2)$ y $\vec{v} = (v_1,\ v_2)$, entonces $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ si y sólo si: $\square$

$A)\ u_1.v_1 = u_2.v_2$ $B)\ u_1.u_2 = v_1.v_2$ $C)\ u_1.v_2 = u_2.v_1$ $D)\ u_1.v_2 = v_2.u_1$

e) Sea el vector $\vec{u}$ y el vector $\lambda\vec{u}$, λ escalar no nulo, entonces se cumple que: $\square$

A) $\vec{u} \perp \lambda\vec{u}$ B) $\vec{u} \parallel \lambda\vec{u}$

C) El sentido de $\lambda\vec{u}$ es opuesto al de $\vec{u}$ D) $\lambda\vec{u}$ y $\vec{u}$ tienen el mismo sentido