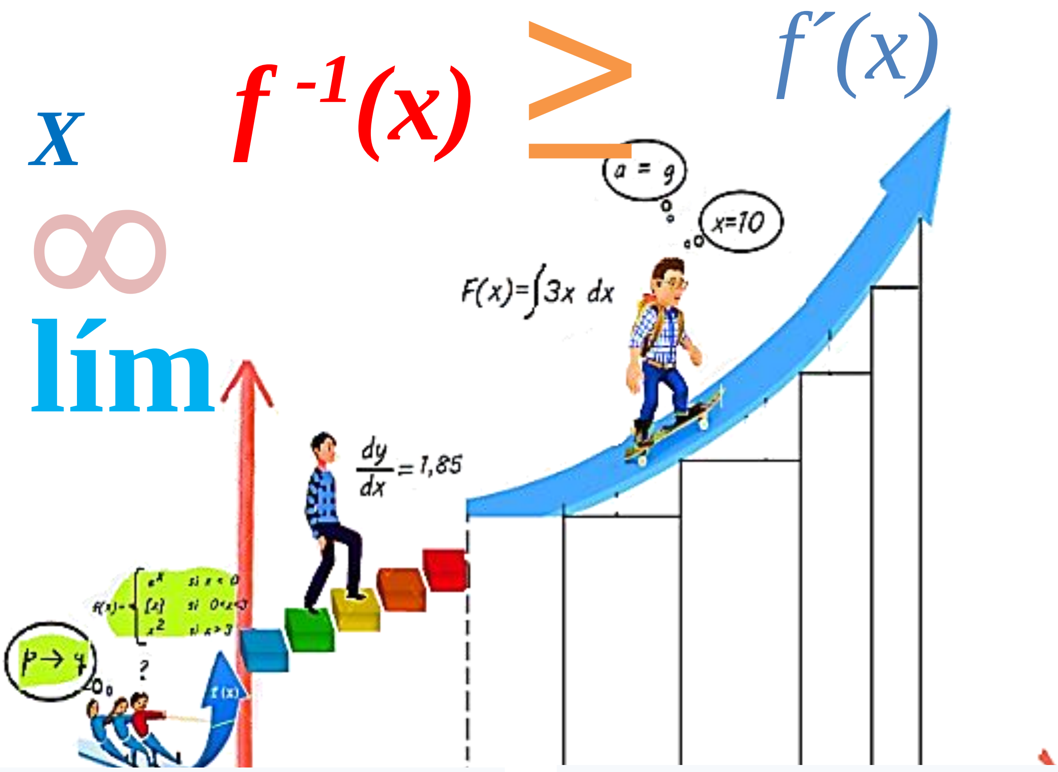
Guía de Trabajos Prácticos – Año 2023

Análisis Matemático I

Asignatura de las carreras: Ingeniería Industrial, Química, Informática y Minas. T.U.E.M., T.U.P.M. y Convenio U.N.T.

Segunda Parte – TP6 y TP10



Profesores:

Ing. Roberto Lamas (Prof. Adjunto)
Lic. Elizabeth Garnica (Prof. Adjunto)
APU Roberto Mamaní (J. de T. Prácticos)
Ing. Gloria Quispe (Ayte. de 1ª)
Lic. Cecilia Adaro (Ayte. de 1ª)
Ing. Gustavo Sosa(Ayte . de 1ª)

Profesores Sede Lib. Gral San Martin

Ing. Diego Enrique Coca (Prof. Adjunto)
Lic. Maria Angela Leon (J. de T. Prácticos)
Lic. Isolina Aldonate (J. de T. Prácticos)

Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Jujuy
San Salvador de Jujuy – 2023

TRABAJO PRÁCTICO NRO 6

Definición de derivada. Derivada de funciones elementales. Regla de la cadena. Derivada de funciones inversa

La constancia obtiene las cosas más difíciles.
Benjamin Franklin

Cuestionario

a) Defina incremento de una variable. Indique a qué es igual el incremento de la variable independiente, el incremento de la variable dependiente y el cociente incremental
b) ¿Cómo define la variación media de una cantidad con respecto a otra?
c) Defina derivada de una función en un punto.
d) ¿Qué diferencia hay entre variación media de una función y variación puntual de una función.
e) Defina función derivada.
f) Enuncie las reglas de derivación referidas a operaciones algebraicas.
g) Confeccione una tabla que contenga la derivada de las funciones elementales
h) Enuncie la regla para derivar la función inversa de una dada.
i) ¿Cómo se llama la regla para derivar una función compuesta?. Enuncie dicha regla
j) ¿Qué relación existe entre derivabilidad y continuidad?

Ejercicios Resueltos

1.- Calcular la derivada de la función f, aplicando la definición**:** $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Solución

$f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ **(1)**

Para aplicar la definición de derivada en este ejemplo determinamos primero

$f(x+h) = \dfrac{1}{\sqrt{x+h+1}}$ luego reemplazando en **(1)** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+h}}}{h}$

Como este límite es indeterminado de la forma 0 / 0, para calcularlo debemos aplicar los métodos vistos en los trabajos prácticos anteriores, en este caso primero vamos a efectuar la resta en el numerador y luego a multiplicar numerador y denominador, por el conjugado del numerador

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+h+1}}{h.\sqrt{x+h+1}.\sqrt{x+1}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+h+1}}{h.\sqrt{x+h+1}.\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+1-x-h-1}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}\right)} = \frac{-1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2\left(2\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$\frac{-1}{2(x+1)^{3/2}}$$

2.- Calcular la derivada de las siguientes funciones aplicando reglas de derivación.

a) $f(t) = \sqrt{t} - e^t + t^{(\cos \pi)}$ b) $y = 4x^3 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 5^x$

c) $f(x) = (x^{-5} + 4x)\cos x$

Solución

Recordemos las principales reglas de derivación

Sean f y g funciones derivables en x

a) $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$

b) $\left[f(x) \,.\, g(x)\right]' = f'(x)\,g(x) + f(x).g'(x)$

c) $\left[f(x) \,/\, g(x)\right]' = \dfrac{f(x)'.g(x) - f(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$; con $g(x) \neq 0$

d) $\left[c \,.\, f(x)\right]' = c.f'(x)$ con $c \in R$

a) Para saber qué regla de derivación debemos usar primero es necesario determinar qué tipo de operación tiene la función a derivar es decir, operación de suma o resta, producto o cociente. En este caso tenemos una suma por lo tanto

$$f'(t) = \left(\sqrt{t}\right)' - \left(e^t\right)' + \left(t^{(\cos \pi)}\right)'$$

$(\sqrt{t})' = (t^{1/2})' = \dfrac{1}{2}t^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$; $(e^t)' = e^t$; $(t^{(\cos \pi)})' = (t^{-1})' = -t^{-2}$ Es decir

Que $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - e^t - t^{-2}$

b) En este caso también se presenta una suma, pero uno de los sumandos es un cociente por lo tanto debemos aplicar la regla de la suma y luego en el segundo sumando la regla del cociente.

$$\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)' = \frac{(\text{sen}\, x)'.x - \text{sen}\, x.(x)'}{(x)^2} = \frac{\cos x\,.\, x - \text{sen}\, x\,.1}{x^2}$$ Entonces:

$$f'(x) = 12\,x^2 + \frac{\cos x\,.\, x - \text{sen}\, x}{x^2} + 5^x \ln 5$$

c) En este ejemplo la función está formada por un producto de funciones por lo tanto:

$f'(x) = (x^{-5} + 4x)' \cos x + (x^{-5} + 4x)(\cos x)'$

$f'(x) = (-5x^{-6} + 4)\cos x + (x^{-5} + 4x)(-\text{sen}\, x) = (-5x^{-6} + 4)\cos x - (x^{-5} + 4x)$ sen x

3.- Calcular la derivada de y = arc sen x utilizando la regla de derivación de la función inversa

Solución

Recordar que si $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \therefore y = \text{arc sen}\, x \Leftrightarrow x = \text{sen}\, y$ **(2)** , donde $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ **(1)** (se restringe el dominio de la función para que sea biyectiva)

Recordar también que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{x'(y)} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x'}$ donde x = sen y ,

$x' = \cos y$, por lo tanto $(f^{-1})'(x) = y' = \frac{1}{\cos y}$

Ahora debemos expresar esta derivada en función de x, para ello utilizamos la Identidad Fundamental Trigonométrica: $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 y}$; veamos cuál de los dos signos corresponde considerar.

Por **(1)** $y \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \cos y \geq 0 \Rightarrow \cos y = +\sqrt{1-\text{sen}^2 y}$

Así la derivada es : $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}}$ y utilizando **(2)** queda $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.- Calcular la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena

a) $f(x) = (5x^2 - 3x + 5)^8$ b) $f(x) = \text{sh}(x^5) + \text{sh}^5 x - 4\,\text{tg}^2(3x^{-5})$

c) $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{\left(3\,\mathrm{sen}\,(x^2)\ -\ 5^x\right)}$

Solución

Regla de la cadena**:** Si tanto f como g son funciones derivables y $F = f \circ g$ es la función compuesta definida por $F(x) = f(g(x))$,entonces F es derivable y vale que $F'(x)= f'(g(x)).g'(x)$ **(1)**

Nota: En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior al interior . La formula **(1)** expresa que**:** derivamos la función exterior f (en la función interior g (x)) y a continuación multiplicamos por la derivada de la funciona interior

$$(f(g(x)))' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada de lafunción exterior, evaluada enla función interior}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada de lafunción interior}}$$

a) En este caso la función exterior es la función que eleva a la octava, la interior es la función polinómica de modo que la regla de la cadena es**:**

$f'(x) = 8\,(5x^2 - 3x + 5)^7 \,.\, (10x - 3)$

b) En este caso se combina la regla de la suma con la regla de la cadena, es decir, f ' (x) es igual a la suma de cada una de las derivadas de los sumandos pero teniendo cuidado de aplicar en cada caso la regla de la cadena

$(\mathrm{sh}(x^5))' = \mathrm{ch}(x^5)\,.\,5x^4$; $(\mathrm{sh}^5 x)' = 5\,\mathrm{sh}^4 x \,.\, \mathrm{ch}\,x$

$(4\,\mathrm{tg}^2(3x - 5))' = 4\,.\,2\ \mathrm{tg}(3x - 5)\,.\,\sec^2(3x-5)\,.\,3$ por lo tanto

$f'(x) = \mathrm{ch}(x^5)\,5x^4 + 5\,\mathrm{sh}^4 x \,.\, \mathrm{ch}\,x - 24\mathrm{tg}(3x - 5)\,.\,\sec^2(3x - 5)$

c) En este caso se combina la regla de la derivación de funciones exponenciales con la regla de la cadena , es decir la función exterior es la función exponencial en base $\sqrt{5}$ y la interior la diferencia de funciones trascendentes. Entonces**:**

$$f'(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{\left(3\,\mathrm{sen}\,(x^2)\ -\ 5^x\right)} \ln\sqrt{5}\ .\ (3\cos(x^2)\,.\,2x - 5^x \ln 5)$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{\left(3\,\mathrm{sen}\,(x^2)\ -\ 5^x\right)}\ .\ \frac{1}{2}\ln 5\ .\ (6x\cos(x^2) - 5^x \ln 5)$$

<u>Ejercicios para resolver en clase TP6</u>

Definición de derivada. Derivada de funciones elementales. Regla de la cadena. Derivada de funciones inversa

---

1). Dada la función $f(x) = \sqrt{3x+1}$, cuando $x_0 = 1$,

a. Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta la variación de la abscisa.

Variaciones de x	Δx	$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
De 1 a 1,2			
De 1 a 1,1			
De 1 a 1,01			

b. Encontrar una expresión para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (promedio de variación de y con respecto a x) como función de Δx.

c. Hallar $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Variación puntual de y con respecto a x) y evaluar ésta expresión para x=1, es decir $\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Big|_{x=1}$

d. Compare el valor obtenido en el ítem anterior con los valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ encontrados en la tabla. De esta comparación ¿qué conclusión puede obtener?

2). Utilizando la definición de derivada calcular:

a. $f'(x)$ si $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$

b. $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x-1}$

c. $f'(x)$ si $f(x) = 2x - 1/(x-2)$

3). Analizar si las siguientes funciones son derivables en los puntos que se indican.

a. $f'(0)$ y $f'(3)$ si $f(x) = |x-3|$ $¿Es\ continua\ en\ x = 3?$

b. $g'(2)\ si\ g(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$ $¿Es\ continua\ g(x) en\ x = 2?$

c. $h'(3)\ si\ h(x) = \begin{cases} -6x+2, & x < 3 \\ -3x^2+11, & x \geq 3 \end{cases}$ $¿Es\ continua\ y\ derivable\ g(x) en\ x = 3?$

d. En base a lo resuelto anteriormente, responda:

- Una función continua ¿siempre es derivable?

- Una función derivable, ¿siempre es continua?

4). Costo Marginal: La ganancia de un negocio es G(t) = 1000 t^2 $(dolares)$, $con\ [t] = años$.

a. ¿Cuál es la ganancia durante el 4to. año?
b. ¿Cuál será el promedio de ganancias durante la 1ra. mitad del 4to año?
c. ¿Cuál es la ganancia marginal para t=2?

5). Calcular la derivada de las funciones dadas por las siguientes fórmulas:

$a.\ f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$

$b.\ g(x) = x^4 - 4\ obtener\ \left.\left(\frac{dg}{dx}\right)\right|_{x=0}$

$c.\ h(x) = 3^x(x^2 + 2)$

$d.\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$e.\ m(t) = \ln t\,.\,2sen(t) + t$

$f.\ p(t) = (2t + 3)(3t^3 - 2),\ obtener\ \left.\left(\frac{dp}{dt}\right)\right|_{t=1}$

$g.\ f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ ¿$Existe\ f'$(x) = 0?. $Explique$

$h.\ f(x) = \frac{1-2x^2}{\log_5 x + e^x}$

$i.\ f(t) = 4^x - \frac{\cos x}{\tan x}$

6). Encontrar f'(x) si $f(x) = \frac{\tan x}{x^3-1}$ como así también el valor f'(0).

7). Calcular la derivada de las funciones compuestas dadas por las fórmulas**:**

a) $y = 2^{(-3x + 1)}$
b) $y = sen\ (ln\, x\ ) + ln\ (ch\, x)$
c) $y = 2t.(cos\ (\sqrt{2t + 3^{(-t + 3)}}\ )$
d) $y = \sqrt[3]{-6x + 6 - (tg\ (e^{(1/x)})}$
e) $y = \log_3(4x^3 - 6x - \frac{3}{x})$
f) $y = (5x^4 - 15\, x - 1)\,.\,5^{(3x + x^2)}$
g) $y = (senh(-x) - 2\, x^5)^2 . tg^3(2^{(x-3)})$
h) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 1}{x^{(2)} ln\, x}}$

8.-) Suponiendo que**:** t (x) = (f o g) (x) ; h (x) = (g o f) (x) ; g (–1) = 4 ; f (–1) = 6 ; f ' (4) = 23 ; g ' (– 1) = 4 ; f ' (-1) = 7 y g ' (6) = 2k + 1

a) Determinar t ' (–1) b) h' (–1)

9. **Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta, escriba una N.**

$Si\ f(x) = \sqrt[3]{7x-3} + \log_9(\frac{x^2}{ch\,x}) + \frac{1}{9}\ ; entones\ f'(x)\ es$: ☐

A) $\frac{7}{3}\ (7x-3)^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{Ln\,9} \cdot \frac{ch\,x}{x^2+1}$

B) $\frac{7}{3}\ (7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{Ln\,9} \cdot \frac{1}{\frac{X^2+1}{ch\,x}} \cdot \frac{2x\,ch\,x-(x^2+1)sh\,x}{ch^{\,2}\,x} - \frac{1}{10^2}$

C) $\frac{7}{3}\ (7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{Ln\,9}\ \frac{1}{\frac{X^2+1}{ch\,x}} \cdot \frac{2x}{shx}$

D) $\frac{7}{3}\ (7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{Ln\,9}\ \frac{ch\,x}{x^2+1}\ \frac{2x\,ch\,x-(x^2+1)sh\,x}{ch^{\,2}\,x}$

10. **Si f y g son funciones continuas en su dominio, y**
$f(9) = 2$, $g(9) = 5$, $f'(9) = 10$ y $g'(9) = 7$ **hallar** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)_{(x=9)}$

11. **Utilizar la regla de la derivada de la función inversa para calcular y' si :**

$a.\ y = arc\ sen\ x \quad b.\ y = arc\ tg\ x \quad c.\ y = arc\ sh\ x$

12. **Indicar si es Verdadero o Falso lo que se afirma. No justifique la respuesta.**

a. Si h es la función inversa de $g/g(x) = 2\,ln\,x + 3x$; sin determinar $h\,(x)$, $h'(3) = 1$ ☐

b. Si f y g son funciones inversas entre sí y f(4)=5, entonces g'(4)=1 ☐

<u>EJERCICIOS ADICIONALES DEL TP N° 6</u>

1.-) Encuentre la derivada de las siguientes funciones

a) $f\,(x) = (sen7t + tg^3x)^{3t}$ b) $f\,(t) = \frac{t}{\left(kt^5 - 18t + 3\right)^4}$

2.-) Dadas f(2)=5; g(2)= -3; f´(2)=5; g´(2)=2; f´(-3)=9 encontrar h´(6) siendo $h(t) = f\,(g(t)) - \frac{f\,(t)}{g(t)}$

3.-) Encuentre la derivada de $y = arctg\left(\frac{8}{x}\right)$

4.-) Si f(x) = $\sqrt[3]{7x-3} + \log_9 \frac{x^2+1}{chx} + \frac{1}{10}$, entonces f ' (x) es: ☐

A) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{\ln 9}\left(\frac{chx}{x^2+1}\right)$

B) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3}+\frac{1}{\ln 9}\frac{1}{\left(\frac{x^2+1}{\operatorname{ch} x}\right)}\frac{(2x\operatorname{ch} x-\left(x^2+1\right)\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^2 x}-\frac{1}{10^2}$

C) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3}+\frac{1}{\ln 9}\frac{1}{\frac{x^2+1}{\operatorname{ch} x}}\frac{2x}{\operatorname{sh} x}$

D) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3}+\frac{1}{\ln 9}\left(\frac{\operatorname{ch} x}{x^2+1}\right)\frac{(2x\operatorname{ch} x-\left(x^2+1\right)\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^2 x}$

5.- Encuentre la derivada de las siguientes funciones

a) $f(x)=\left(1-3x^5\right)\left(\log_5(x+2)\right)$ b) $f(t)=4^{2x-x^3}-\frac{\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$

6.- Encuentre la derivada de: $y=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

TRABAJO PRÁCTICO NRO 7

Derivadas sucesivas. Implícita y logarítmica. Interpretación geométrica

"*El gran libro de la naturaleza siempre esta abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía esta escrito en el…Pero no la podemos leer a menos que hayamos aprendido primero el lenguaje y los caracteres con los cuales esta escrito.*
Esta escrito en leguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas"

Galileo Galilei

Cuestionario

a) ¿Qué entiende por derivadas sucesivas?. ¿Cómo hace para calcular una derivada enésima?

b) ¿En qué consiste el método para derivar una función implícita?

c) ¿En qué consiste el método de derivación logarítmica?. ¿En qué tipo de funciones es *necesario* aplicar el método de derivación logarítmica?. ¿Cuándo es *conveniente* aplicar el método de derivación logarítmica? ¿En qué otros casos se puede aplicar el método de derivación logarítmica?.

d) Defina recta tangente a una curva en un punto. Indique su ecuación.

e) Defina recta normal a una curva en un punto. Indique su ecuación.

Ejercicios Resueltos

1.- Dada la función f / $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, calcular $f^{(n)}(x)$ y $f^{(20)}(x)$

Solución

La notación $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ significa derivada enésima. Para calcularla debemos hallar las primeras derivadas, tantas como sean necesarias, hasta que nos demos cuenta el modelo que sigue, y así enunciar la fórmula que tendrá la derivada enésima

$y = (1-2x)^{-1}$

$y' = (-1).(1-2x)^{-2}(-2) = 1.2.(1-2x)^{-2}$

$y'' = 1.2.(-2).(1-2x)^{-3}(-2) = 2^2 .1.2.(1-2x)^{-3}$

$y''' = 2^2\, 1.2.(-3).(1-2x)^{-4}(-2) = 2^3 .1.2.3.(1-2x)^{-4}$

$y^{iv} = 2^3 .1.2.3.(-4).(1-2x)^{-5}(-2) = 2^4 .1.2.3.4.(1-2x)^{-5}$

$y^{v} = 2^4 .1.2.3.4.(-5).(1-2x)^{-6}(-2) = 2^5 .1.2.3.4.5.(1-2x)^{-6}$

Podemos ver la forma que van tomando las derivadas sucesivas , y teniendo en cuenta que**:**
1. 2.3.4.5 = 5! y en general 1. 2.3.4.5.6...n = n! , se tendrá

$f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n} = 2^n \cdot n!\ (1-2x)^{-(n+1)}$ que es la fórmula para la derivada enésima

Para el cálculo de $f^{(20)}(x)$ simplemente reemplazamos en la fórmula encontrada n por 20

$f^{(20)}(x) = 2^{20} \cdot 20!\ (1-2x)^{-21}$

2.- Calcular y' mediante derivación implícita, siendo $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$

Solución

Si queremos encontrar y' debemos considerar primero que

$\dfrac{dy}{dx} = (y)' = y'$ y que $\dfrac{dx}{dx} = (x)' = 1$

Luego derivamos ambos miembros de la ecuación respecto a x (aplicando las reglas de derivación vistas hasta ahora , es decir regla de la suma , regla del producto, regla de la cadena , etc.) y a continuación resolvemos la ecuación resultante para y', es decir

$$(\operatorname{sen}(x + y))' = (y^2 \cos x)' \ \mathbf{(1)} \Rightarrow$$

$$\cos(x + y)(x + y)' = 2y\,y' \cos x + y^2(-\operatorname{sen} x) \Rightarrow$$

$$\cos(x + y)(1 + y') = 2y\,y' \cos x + y^2(-\operatorname{sen} x) \Rightarrow$$

$$\cos(x + y) + y' \cdot \cos(x + y) = 2y\,y' \cos x + y^2(-\operatorname{sen} x)$$

Note que en el primer miembro de **(1)** aplicamos la regla de la cadena dos veces y en el segundo miembro, la regla de la cadena (recordar que y es función de x) y del producto

Agrupamos los términos que contienen y' **:**

$$y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y) = 2y \cos x\ y' - \cos(x + y)\ y'$$

Luego despejamos y'**:** $y' = \dfrac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$

3.- Aplicar derivación logarítmica para encontrar y' , siendo**:**

a) $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}$ b) $y = x^{\sqrt{x}}$

Solución

En general se tiene cuatro casos para exponentes y bases

i) $(a^b)' = 0$ Base y exponente constante

ii) $\left[(f(x))^b\right]' = b\ [f(x)]^{(b-1)} f'(x)$, Base variable y exponente constante, para derivar se aplica la regla de potencia y regla de la cadena

iii) $(a^{g(x)})' = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x)$ Base constante y exponente variable, para derivar se aplica la regla de función exponencial y regla de la cadena

iv) $\left[(f(x))^{g(x)}\right]'$ Base y exponente variable, para derivar se aplica derivación logarítmica

Los pasos para aplicar derivación logarítmica son **:**

I) Aplicar logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación $y = f(x)$ y utilizar las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión

II) Derivar implícitamente ambos miembros con respecto a x

III) Resolver la ecuación resultante para y'

Entonces en este ejemplo se aplica logaritmo a ambos miembros de la ecuación y se usan las propiedades de logaritmo para simplificar**:**

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right) \Rightarrow \ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente con respecto a x , resulta

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\,\frac{3}{3x+2}$$

Despejando y'

$$y' = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Reemplazando y por $\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ queda**:**

$$y' = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

b) Procediendo como en el caso recién visto se tiene

$$y = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \ln(x^{\sqrt{x}}) \Rightarrow \ln y = \sqrt{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$

Note que en el segundo miembro se aplica derivada de un producto

Despejando y'**:** $y' = y\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ Reemplazando y**:** $y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

4.- Determinar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = 2x^3 - 4x$en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Solución

• Si f es derivable en $x = x_o$, la recta tangente al gráfico de f en el punto P (x_o, y_o) es la recta que pasa por P y tiene por pendiente el número $m = f'(x_o)$. Su ecuación será $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$

• Si la derivada en x_o es infinita, entonces la recta tangente al gráfico de f en el punto P (x_o,y_o) es la recta vertical que pasa por P (x_o,y_o) y su ecuación será $x = x_o$

• Recta Normal al gráfico de f en el punto P (x_o,y_o) es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente al gráfico de f en el punto P y su ecuación es**:**

$$y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o) \qquad \text{si } f'(x_o) \neq 0 \;;$$

$$x = x_o \qquad \text{si } f'(x_o) = 0$$

$$y = y_o \qquad \text{si la derivada en } x_o \text{ es infinita}$$

En nuestro caso nos dan como dato el punto $P(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ es decir que $x_o = -\frac{1}{2}$ e $y_o = -\frac{1}{4}$

Por lo tanto lo único que queda por calcular es la pendiente de la recta tangente, que la calculamos con la fórmula $m = f'(x_o)$, es decir

$f'(x) = 6x^2 - 4$ y $f'(-\frac{1}{2}) = 6(-\frac{1}{2})^2 - 4 = -\frac{5}{2}$

Entonces la ecuación de la recta tangente es**:** $y + \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

y la ecuación de la recta normal es**:** $y + \frac{1}{4} = \frac{2}{5}(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{20}$

Ejercicios para resolver en clase TP7

Derivadas sucesivas. Implícita y logarítmica. Interpretación geométrica

---

1) Hallar en cada caso la derivada solicitada

a) $f\,'(x)$; $f\,'''(x)$; $f^{(5)}(x)\ y\ f^{(8)}(x)$ si $f(x) = \frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{36} + \frac{x^2}{20} + 5x - 80$

b) $f^{(n)}(x),\ f^{(10)}(x)\ y\ f^{(25)}(x)\ , si\ f(x) = e^{-2x}$

c) $f^{(2)}(\pi),\ , si\ f(x) = x. \cos x - 2\, sen\, x$

2) Verificar si $y = 2x^3 - 3x + 5$, satisface la ecuación diferencial

$1 + \frac{y'}{3} + \frac{xy''}{12} - 3x^2 = 0$

3) De acuerdo a las funciones implícitas dadas por su fórmula, hallar

a) $\frac{dy}{dx}\ si\ \frac{3}{2}x^2 + y^3 + xy = 0$

b) $y'\ si\ xy^2 - yx^2 = y^2x^2 - \frac{x}{y}$

c) $\frac{dy}{dx}\ si\ \frac{e^{(-2x+y)}}{2} + \cos^2 y - y\, sen\, x = 0$

4) Escribir en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una N

Si $f(x) = \frac{-1}{(x+1)}$ entonces $f^{(n)}(x) = \square$

A) $(-1)^n\,(n-1)!\ (x+1)^{-(n+1)}$ B) $(-1)^{n+1}\,n!\ (x+1)^{-n}$

$C)$ $(-1)^{n+1}\,n!\ (x+1)^{-(n+1)}$ D) $(-1)^{n+1}\,(n+1)!\ (x+1)^{-n+1}$

5.-) Aplicar derivación logarítmica para calcular en cada caso y ', si es posible o utilice otras propiedades para calcular y '

$a)\ y = \ln(x)^{(1/\ln x)}$

$b)\ y = (sen\, x)^{(\sqrt{x+1})}$

$c)\ y = e^{(x^2)} - tg\, x + ch\, x^{(2/x)} - x^4$

$d)\ y = sec\, x^{(cos\, x)} + e^3$ cotg x

$e)\ y = \dfrac{(tg\, x - 3x)\,.\,10^{-x}}{\log(x-2)}$

Interpretación Geométrica y física de la Derivada

6) Hallar la/las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva indicada por su ecuación, y en el punto de abscisa indicado.
$a)\ f(x) = x^2 - 5x + 3\,,\quad a = 1$
$b)\ f(x) = 2 - \sqrt{x}\,,\quad a = 9$
$c)\ f(x) = cos\,(2x) - tg\, x + 3\,,\quad a = 0$

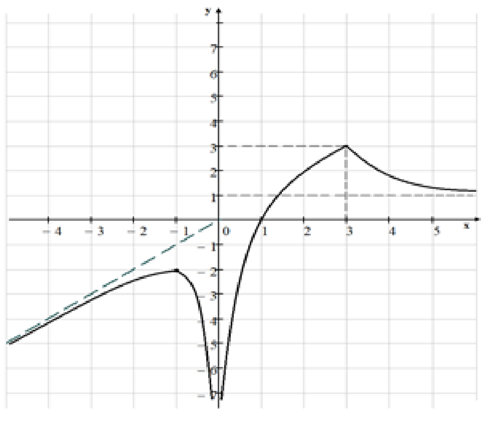
7) Indicar los puntos del gráfico donde la tangente es horizontal
$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$
$b)\ f(x) = x^3 - 9x^2 - 36$

8) Indicar puntos de la función donde la tangente tiene 9 como pendiente
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 36x$

9) Ver si en algún punto la recta tangente al grafico de $f(x) = x^3 + x - 2$ es paralela a la recta de ecuación $f(x) = 4x + 5$
10) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva, cuya ecuación se indica, en el punto P (2, 2)

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$$

11). Dada la gráfica de f,
a) indicar los valores de x para los cuales f no es derivable. Justificar su respuesta
b) indicar los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es positiva
c) indicar los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es negativa



12.-) Un automóvil viaja a 100 m/seg cuando aplica los frenos repentinamente. La función de posición del automóvil que derrapa es $S = 100t - 5t^2 2$, donde S es la distancia recorrida en el tiempo t. [S]= m (metro) y [t]= s (segundo)
a) Encuentre la velocidad en el instante t
b) ¿Cuál es su velocidad y aceleración a los cinco segundos?
c) ¿Qué distancia recorre y cuánto tiempo tarda el automóvil en detenerse?

13.-) Se lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 160 pies de altura con una velocidad inicial de 64 pies/seg. La función que describe el movimiento de la pelota está dada por la ecuación

$$h = -16t^2 + V_0 t + h_0 \quad (h \text{ esta dada en pies y } h_0 \text{ es la altura del edificio}).$$

a) ¿En qué instante la pelota alcanza la altura máxima?
b) ¿Cuál es la altura máxima?
c) ¿Cuándo llega al piso?
d) ¿Con que velocidad llega al piso?
e) ¿Cuál es la aceleración en el instante t = 2 seg?

14) Control de tráfico aéreo. Un controlador de tráfico aéreo detecta dos aviones a la misma altitud con trayectorias que convergen a un punto, ya que vuelan en ángulo recto el uno respecto al otro. Uno de los aviones está a 150 millas del punto y avanza a 450 millas por hora. El otro avión está a 200 millas del punto y avanza a 600 millas por hora.
a) ¿A qué velocidad disminuye la distancia entre estos aviones?
b)¿Cuánto tiempo tiene el regulador de tráfico aéreo para hacer que uno de los aviones tome otra trayectoria de vuelo?

EJERCICIOS ADICIONALES DEL TP N° 7

1.- Hallar la derivada solicitada

a) $f''(x)$ y $f^{(5)}(x)$ si $f(x) = \ln 3x - x^5$ b) $f^{(3)}$ y $f^{(n)}$ si $f(x) = e^{1-x^5}$

2.- La derivada dy/dx de tg (x.y) – sen(x-y)= y^2 es : ……………………………………

3.- Hallar el/los puntos donde la recta tangente a la curva de ecuación $y = 2x^2 + 4$ es paralela a la recta de ecuación $2x - 4y + 9 = 0$. Luego determinar la ecuación de dicha recta tangente y también la ecuación de la recta normal en el/los mismos puntos.

TRABAJO PRÁCTICO NRO 8

Razón de cambio. Diferencial: definición, interpretación gráfica, aplicaciones. L'hopital

Cuestionario 1

a) ¿Además de la interpretación geométrica, de qué otra forma se puede interpretar la derivada de una función? Enumere algunas casos y de ejemplos

b) ¿Cómo calcula la velocidad de un móvil?, y su aceleración?

Cuestionario 2

a) Defina diferencial de la variable independiente y diferencial de la variable dependiente

b) ¿Cómo puede interpretar geométricamente la diferencial de una función?

c) Podría a partir de la diferencial de una función obtener la derivada de la misma? y recíprocamente?

d) Defina diferenciales sucesivos

e) ¿Qué aplicaciones conoce de la diferencial de una función?

f) ¿En qué tipo de indeterminaciones puede aplicar directamente la regla de L'Hopital ?

g) ¿En qué consiste la regla de L'Hopital ? ¿Cuántas veces puede aplicar la regla de L'Hopital para calcular un límite indeterminado?

h) ¿Si $\nexists \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \right) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)$?

i) Indique en qué tipo de indeterminaciones no se puede aplicar directamente la regla de L'Hopital. En ésos casos indique las transformaciones que debe efectuar para poder aplicar la regla.

Ejercicios Resueltos 1

1.- El consumo de combustible (medido en litros por hora) de un automóvil que viaja a una velocidad v (en Km/h) es $C = f(v)$

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(v)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Escribir una oración (en términos corrientes) para explicar el significado de la ecuación**:**

$$f'(20) = -0{,}05$$

Cómo encarar la resolución de problemas

No existen reglas firmes y rápidas que garanticen el éxito en la resolución de los problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales del proceso de solución y dar algunos principios que pueden resultar útiles. Estos pasos no son más que la aplicación del sentido común.

− El primer paso es leer el problema y asegurarse de entenderlo con claridad. Hágase las preguntas siguientes **:** *¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son las cantidades dadas?, ¿Cuáles son las condiciones dadas?.*

Para muchos problemas, resulta útil *dibujar un diagrama* e identificar las cantidades dadas y requeridas en el diagrama.

Por lo común, es necesario *introducir una notación apropiada.*

− Al elegir los símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a , b, c, x , y , pero en algunos casos, ayuda usar iniciales como los símbolos sugeridos; por ejemplo, V para el volumen, t para el tiempo, etc.

− Encontrar una relación entre la información dada y lo que se desconoce de manera que permita calcular la incógnita. Con frecuencia ayuda preguntarse**:** ¿Cómo se puede relacionar lo dado con lo desconocido?.

− Si no ve una relación inmediata, intente reconocer algo familiar, relacionando la situación dada con sus conocimientos, Por ejemplo si en el esquema armado existe un triángulo rectángulo, piense en el Teorema de Pitágoras.

− Intente reconocer patrones, algunos problemas se resuelven al reconocer que se presenta algún tipo de patrón. Este puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si reconoce regularidad o repetición en un problema, quizás sea capaz de conjeturar cual es el patrón y probarlo.

− Intente pensar en un problema análogo, es decir, un problema semejante o relacionado, pero mas fácil que el original, entonces éste le podría dar los indicios que necesita para resolver el problema original. Por ejemplo, si en un problema intervienen números muy grandes, podría intentar primero un caso semejante con números mas pequeños

− Introduzca algo adicional, a veces puede ser necesario introducir algo nuevo, algo auxiliar, para ayudar a establecer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva recta trazada en el diagrama. En un problema algebraico lo auxiliar podría ser una nueva fórmula que relacione la incógnita original con una nueva

− En los problemas de razones de cambio y derivada es útil además**:**

- Expresar la información dada (el dato) y lo que queremos averiguar (la incógnita) en términos de derivada (razón de cambio)
- Escribir una ecuación que relacione las diversas cantidades del problema. Si es necesario, aplicar los aspectos geométricos de la situación para eliminar una de las variables por sustitución
- En el caso que sea necesario, usar la regla de la cadena para derivar los dos miembros de la ecuación respecto del tiempo t
- Sustituir la información dada en la ecuación resultante y resolver para la razón de cambio desconocida

Nota: La derivada de cualquier función (la función no siempre depende del tiempo), puede interpretarse como la razón de cambio puntual (instantánea) de la variable dependiente con respecto de la variable independiente.

Si y = f(x) , entonces la "la razón de cambio promedio" de y (por un cambio unitario en x) es el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

La razón de cambio puntual(instantánea) de y con respecto a x es el límite cuando $\Delta x \to 0$, de la razón de cambio promedio. Así

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Las derivadas representan razones de cambio en su aspecto más simple; así pues, cada vez que prendes tu teléfono celular, cuando vez que un edificio resiste el embate del viento, la aguja que se mueve en el velocímetro del automóvil... todo eso son las derivadas funcionando

La derivada, como una razón de cambio, tiene aplicaciones en las distintas ciencias**:** Los físicos se interesan por ejemplo, en la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo (lo que se conoce como potencia). Los químicos , que estudian una reacción química , se interesan en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (llamada velocidad de reacción). Un fabricante de acero se interesa en la razón de cambio del costo de producir x toneladas de acero por día con respecto a x (lo que se conoce como costo marginal). Un biólogo se interesa en la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de las razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales.

Solución

a) En nuestro caso la derivada C ' (v) = f' (v) es la razón de cambio instantánea del consumo de combustible con respecto a la velocidad del automóvil , es decir , indica la variación en el consumo de combustible por cada unidad de variación en la velocidad.

Debido a que $f'(v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta v}$ las unidades de f ' (v) son las mismas que las del cociente incremental $\frac{\Delta C}{\Delta v}$. Puesto que ΔC se mide en litros por hora y Δv en Km./h se deduce que las unidades de f ' (v) son las de litros por hora y por Km. por hora

b) Cuando la velocidad del automóvil es de 20 Km./h el consumo de combustible esta decreciendo a razón de 0,05 $\frac{\text{litros}/\text{h}}{\text{Km}/\text{h}}$ (el signo negativo indica que decrece)

2.- Suponer que C(x) es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de un articulo. La función C se llama función de costo . Si el número de artículos se incrementa de x_1 hasta x_2 , el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ y la razón promedio de cambio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman costo marginal al límite de este cociente incremental, cuando $\Delta x \to 0$, es decir la razón instantánea de cambio del costo con respecto al número de artículos producidos

Costo Marginal $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$; Como x suele tomar solo valores enteros, quizás no tenga sentido hacer que $\Delta x \to 0$.

Pero siempre podremos reemplazar a C(x) con una función (de variable x continua) suave de aproximación

Suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es**:**

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0{,}01x^2$$

Entonces la función costo marginal es $C'(x) = 5 + 0{,}02\,x$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es $C'(500) = 5 + 0{,}02.500 =$ 15\$/art.

Esto da la razón a la cual se incrementa los costos con respecto al nivel de producción, cuando x = 500 y predice el costo del 501 iésimo artículo

3.- Un móvil recorre en línea recta la distancia s (en metros) según la ley $s = t^2 - 6t + 4$. Determinar

a) La velocidad y aceleración a los 5 seg

b) La aceleración y la velocidad inicial

c) El momento en que le móvil está en reposo

Solución

a) La función velocidad es la derivada de la función posición: $s = s(t) = t^2 - 6t + 4$

Es decir $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = 2t - 6$

Por lo tanto la velocidad después de 5 seg. significa la velocidad instantánea cuando t = 5 seg.

$\therefore\ v(5) = 2 . 5 - 6 = 4$ m/seg.

La aceleración es la derivada de la función velocidad**:** $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 2 \quad \therefore \quad a(5) = 2$ m/seg^2

Esto significa que el móvil se esta moviendo con aceleración constante igual a 2 m/seg^2

b) Teniendo ya la fórmula de a (t) y de v (t) , la aceleración y la velocidad en el instante inicial se calcula para t = 0 , esto es **:**

$v(0) = 2.0 - 6 = -6$ m/seg ; $a(0) = 2$ m/seg^2

c) El móvil está en reposo cuando v (t) = 0 , esto es **:** $v(t) = 2t - 6 = 0 \therefore t = 3$ seg.

Ejercicios Resueltos 2

1.- Dada $f / f(x) = 2x^2 + 1$, encontrar dy y Δy para la variación de x indicada. Comparar Δy con dy a medida que Δx disminuye su valor **:**

i) x varía de 1 a 1,3 ii) x varía de 1 a 1,1 iii) x varía de 1 a 1,001

Solución

Sabemos que $dy = f'(x)\,dx$; $f'(x) = 4x$ y como $x = 1$, $f'(1) = 4$

Además $dx = \Delta x$ = Valor final − valor inicial = $x_f - x_i$; $\Delta y = f(x_f) - f(x_i)$

En todos los casos $x_i = 1$ y $f(x_i) = f(1) = 3$

Caso	Δx	dy	$f(x_f)$	Δy
i	1,3 – 1 = 0,3	4 . 0,3 = 1,2	$f(1,3) = 2\,(1,3)^2+1 = 4,38$	1,38
ii	1,1 – 1 = 0,1	4 . 0,1 = 0,4	$f(1,1)=2\,(1,1)^2+1= 3,42$	0,42
iii	1,001 – 1 = 0,001	4 . 0,001 = 0,004	$f(1,001)=2\,(1,001)^2+1= 3,004002$	0,004002

Comparando Δy con dy, se ve que a medida que Δx tiende a cero, $dy \cong \Delta y$.

2.- Calcular dy y d^2y si $y = e^{5x}\ln(6x + 7)$

Solución

Recordar que $dy = f'(x)\,dx$ y que $d^2y = f''(x)\,dx^2$

$$y' = 5\,e^{5x}\ln(6x+7) + \frac{e^{5x}\,6}{6x+7} \quad ; \quad \text{por lo tanto}$$

$$dy = \left[5\,e^{5x}\ln(6x+7) + \frac{e^{5x}\,6}{6x+7}\right] dx$$

$$y'' = 25\ e^{5x}\ \ln(6x+7) + \frac{30\ e^{5x}}{6x+7} + \frac{30\ e^{5x}(6x+7) - 36\ e^{5x}}{(6x+7)^2}$$

Entonces

$$d^2y = \left[25\ e^{5x}\ \ln(6x+7) + \frac{30\ e^{5x}}{6x+7} + \frac{30\ e^{5x}(6x+7) - 36\ e^{5x}}{(6x+7)^2}\right] dx^2$$

3.- Calcular aproximadamente log 11.

Solución

Vamos a realizar el cálculo utilizando la expresión $f(x_o + \Delta x) \cong f(x_o) + f'(x_o)\,dx$ **(1)** (esta expresión se obtiene de considerar que $\Delta y \cong dy$)

Donde $f(x_o + \Delta x)$ es lo que deseamos calcular, en nuestro caso log 11.

Tenemos que $f(x) = \log x$, por lo tanto $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

Evaluamos tanto la función como su derivada en $x_o = 10$ (10 es el valor de x más próximo a 11 donde conocemos cuánto vale la función)

$f(x_o) = f(10) = \log 10 = 1$; $f'(x_o) = f'(10) = \dfrac{1}{10 \ln 10}$; $\Delta x = 11 - 10 = 1 =$ dx.

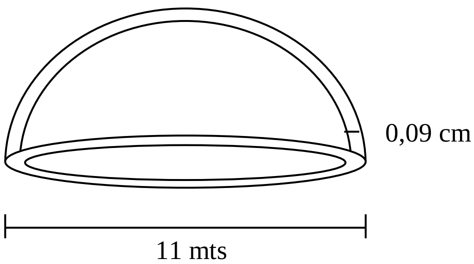
Reemplazando en **(1):**

$$\log 11 \cong \log 10 + \frac{1}{10\ln 10} \cdot 1 \cong 1 + 0{,}0434294 \cong 1{,}0434294$$

4.- Se desea pintar el interior de una cúpula semiesférica, de 11 mts de diámetro, dando tres manos de pintura que constituyen un total de 0,09 cm de espesor. Calcular aproximadamente y exactamente el volumen de pintura a utilizar.

Solución

Realizamos un esquema de la situación



Datos**:**

El espesor de la pintura representa el cambio en el radio, r, y vale $\Delta r = dr = -0{,}09$ (el signo menos es porque el radio disminuye)

El volumen aproximado de la pintura a utilizar está dado por el cambio aproximado en el volumen, V, de la semiesfera: dV

El radio exterior de la cúpula es r = 5,5 mts = 550 cm (unificamos las unidades)

El volumen de una semiesfera es $V(r) = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 = \frac{2}{3}\,\pi\, r^3$ por lo tanto

$$dV = V'(r)\,dr \Rightarrow dV = \frac{2}{3}\,\pi\, 3\, r^2\, dr = 2\,\pi\, r^2\, dr$$

$\left. dV \right|_{\substack{r=550\\ dr=0{,}09}} = -2\,\pi\,(550)^2\ 0{,}09 = -54450\,\pi = -171059{,}72$ (el signo negativo indica que el volumen de la semiesfera disminuye)

Entonces la cantidad aproximada de pintura necesaria para pintar la cúpula es de 171059,72 cm^3 o bien de 171,05972 litros.

La cantidad exacta de pintura está dada por la variación exacta en el volumen de la semiesfera, es decir $V(r+\Delta r) - V(r)$, donde $r = 550$; $\Delta r = -0{,}09$ y $r + \Delta r = 550 + (-0{,}09) = 549{,}91$

$$\Delta V = V(549{,}91) - V(550) = \frac{2}{3}\pi\,(549{,}91)^3 - \frac{2}{3}\,\pi\,(550)^3 = -171031{,}729$$

Entonces la cantidad exacta de pintura necesaria para pintar la cúpula es de 171031,729 cm^3 o bien de 171,031729 litros.

5.- Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2\ln x - 1}{5x^2 + 2}$

Podemos ver que cuando $x \to \infty$, tenemos una indeterminación del tipo ∞ / ∞, otro tipo de indeterminación que podemos tener sería 0 / 0 y otras más del tipo exponencial que veremos en el trabajo practico siguiente.

Aplicamos, siempre que el límite final exista, la regla de L' Hopital, para lo cual se debe derivar numerador y denominador**:**

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2\ln x - 1}{5x^2 + 2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \frac{2}{x}}{10x}$, nuevamente cuando $x \to \infty$, se tiene una indeterminación de la forma ∞ / ∞.

Aplicamos nuevamente la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + \frac{2}{x}}{10x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{2}{x^2}}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2\ln x - 1}{5x^2 + 2} = \frac{1}{5}$$

6.- Calcular el siguiente límite aplicando, si es posible, la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \left(2x^2 + 1\right)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)}$$

Solución

Vemos que este límite tiene la forma 1^∞, para poder calcularlo se aplica al mismo logaritmo. Porque? Para resolver esta indeterminación deberemos tratar que dicha expresión adopte la forma $0 / 0$ o ∞ / ∞ , a fin de aplicar la regla de L'Hopital, entonces aplicaremos logaritmo a fin de que el exponente, por propiedad de logaritmo, se convierta en factor.

$\ln\left(\lim_{x \to 0} \left(2x^2 + 1\right)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)}\right) = \lim_{x \to 0} \ln\left(\left(2x^2 + 1\right)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)}\right)$ (como el logaritmo es una función continua en su dominio, se puede aplicar la propiedad de funciones continuas que permite intercambiar el límite con el logaritmo, siempre que exista $\lim_{x \to 0} \left(2x^2 + 1\right)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)}$)

Aplicando propiedad de logaritmo y reordenando**:**

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(\left(2x^2 + 1\right)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3x^2}\right) . \ln\left(2x^2 + 1\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(2x^2 + 1\right)}{3x^2}$$

Cuando $x \to 0$ el límite adopta la forma indeterminada 0/ 0, entonces se puede aplicar directamente la regla de L' Hospital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(2x^2 + 1\right)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2x^2 + 1} \;.\; 4x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{6x\ (2x^2 + 1)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{3(2x^2 + 1)} = \frac{2}{3}$$

por lo tanto $\ln\left(\lim_{x \to 0} \left(2x^2 + 1\right)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)}\right) = \frac{2}{3}$, entonces $\lim_{x \to 0} \left(2x^2 + 1\right)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)} = e^{\frac{2}{3}}$

Ejercicios para resolver en clase TP8

Razón de cambio. Diferencial: definición, interpretación gráfica, aplicaciones. L'hopital

---

1). El volumen V (en litros) de 3 gramos de CO_2 a 27 ºC esta dado en función de su presión p (en atmosfera) por la formula $V = \frac{1.68}{p}$. ¿Cuál es razón de cambio de V con respecto de p cuando p = 2 atmosfera?
2). Se infla un globo esférico. El radio r del globo aumenta a razón de 0,2 cm/seg cuando r = 5 cm. ¿Con que razón aumenta el volumen del globo con respecto del tiempo en ese instante?
3). En un circuito eléctrico E (en voltios) es la fuerza electromotriz, I (en amperes) es la corriente eléctrica y R (en ohms) es la resistencia, entonces por la ley de Ohms : I.R=E
a) Si se supone que E es una constante positiva, demuestre que I decrece a una tasa proporcional al inverso del cuadrado de R.
b) ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de I con respecto a R en un circuito eléctrico de 90 volts cuando la resistencia es de 15 ohms?
4). Se derrama petróleo de un tanque roto formando una mancha circular. Si el radio del círculo aumenta a razón constante de 1,5 pies/min, ¿con qué rapidez aumenta el área contaminada por el aceite, en el instante en el que el radio del círculo mide 80 pies?
5). Se vierte arena formando un montículo de forma cónica de modo que la altura del cono es el doble de su radio. Determine la tasa de variación de volumen del montículo con respecto al radio cuando la altura de este es (a) 4 m , y (b) 8 m
6). En los siguientes problemas, utilizar diferencial para calcular, en forma aproximada, a) El volumen de un cascaron esférico cuyo radio interno mide 8 cm y cuyo espesor es de $\frac{1}{32}\,cm.$
b) El área de un cuadrado, si la longitud de su lado disminuye de 10 a 9,8 pulgadas
7). Un globo meteorológico de plástico tiene 4 m. de diámetro a nivel del mar. Después de subir una cierta altura en la atmosfera se hincha hasta tener 4,1 m. de diámetro.
a) ¿Cuál es el cambio exacto del volumen del gas encerrado?
b) ¿Cuál es el cambio aproximado del volumen del gas encerrado?
8). Una caja metálica en forma de un cubo tiene un volumen interior de 1000 cm^3. Las seis caras serán de metal de 1/2 cm de espesor. Si el costo del metal que se empleara es $ 20 por cm^3, utilice diferencial para determinar el costo aproximado del material utilizado en la construcción de la caja.
10). Un tanque cilíndrico abierto tendrá un revestimiento de 2 cm de espesor. Si el radio interior es de 6 m y la altura es de 10 m, obtenga mediante diferencial la cantidad aproximada de revestimiento que se utilizara.

11). Calcular, siempre que sea posible, los siguientes límites aplicando la regla de L'Hopital.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - sen\, x}$ 2. $\lim_{x \to \propto} \frac{x^2}{e^x}$ 3. $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^x$

4. $\lim_{x \to 0^+} x^{sen\, x}$ 5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(sen\, x)}{(\pi - 2x)^2}$ 6. $\lim_{t \to 0^+} (2x)^{cotg\, x}$

7. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\tan 3x}$ 8. $\lim_{x \to \infty} (lnx)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ 9. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 36}}$

10. $\lim_{x \to \infty} x. sen\left(\frac{1}{x}\right)$ 11. $\lim_{x \to \infty} x - \sqrt{x^2 - x}$

12). Marque la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una N

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\tan(\frac{2}{x})}$$

A) 0 B) ∞ C) ½ D) 1/5

13.- Por qué 0^{∞} y $0^{-\infty}$ no son formas indeterminadas?

Sugerencia: Suponer que $f(x)$ es no negativa en un intervalo abierto que contiene al punto c y que $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$

a) Para el 1^er^ caso, sabiendo que $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$, muestre que $\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = 0$

b) Para el 2^do^ sabiendo que $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$, muestre que $\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = -\infty$

EJERCICIOS ADICIONALES DEL TPN 8

1.- Por el calor del sol el volumen de un globo está aumentando a razón constante de 12 m^3 por hora. A que velocidad aumenta su radio cuando este es de 5 metros?

2.- Ricardo que mide 1,82 m de altura camina alejándose de un poste de luz de 9,14 m de alto a una velocidad de 0,61 m/seg.

a) ¿A que rapidez aumenta la longitud de su sombra cuando Ricardo se encuentra a 7,3 m del poste?

b) ¿A qué velocidad se mueve el extremo de la sombra?

c) Para seguir el extremo de su sombra ¿ a que velocidad angular Ricardo debe levantar los ojos cuando su sombra es de 1,82 metros de larga ?

3.- Calcular, siempre que sea posible, los siguientes límites aplicando la regla de L' Hopital

a) $\lim_{y\to 0} \dfrac{2^y + 10y - 1}{7y}$ b) $\lim_{z\to 1} \dfrac{\ln z}{2z-2}$ c) $\text{lím}_{t\to\infty} \dfrac{t^3+t^2+t+1}{e^t}$

4.- Hallar dy si:

a) $y = x\ln x + \text{tg } 2x$ b) $y = \text{ch}x - 3^{\sqrt{x+1}}$ c) $y\,\text{ch}x - 2^{\sqrt{x+y}} = 1 - y$

5.-Calcular si es posible aplicando L´Hopital

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-6 + x^2 + 3x}{7^x + 4x}$ b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x+1}\right)^{1/x}$

TRABAJO PRÁCTICO NRO 9

Monotonía. Extremos. Problemas de optimización

Las cosas pierden al ser poseídas todo el valor que tuvieron al ser deseadas, porque el deseo es un artista engañador y mentiroso.

Ricardo León.

Cuestionario

a) ¿Cuáles son los pasos a seguir para determinar los intervalos de monotonía de una función?

b) ¿Qué tipo de extremos de una función conoce?. Defínalos.

c) ¿Qué diferencia hay entre extremos absolutos y extremos relativos?

d) Defina máximo y mínimo relativo de una función.

e) Defina máximo y mínimo absoluto de una función.

f) En qué casos puede asegurar que una función tiene extremos absolutos? Indique cómo calcularlos.

g) Defina punto crítico.

h) ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de extremos relativos de una función?.

i) Indique los criterios que conoce para la determinación de los extremos relativos de una función.

j) Indique los pasos a seguir para obtener los extremos relativos de una función.

Ejercicios Resueltos

1.- Determinar los intervalos de monotonía de la función f dada por $f(x) = x^3 - 12x - 1$

Solución

Para determinar los intervalos de monotonía tenemos que calcular los puntos donde la derivada primera se hace cero o no existe.

Derivando $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2).(x+2)$

Por ser esta expresión un polinomio,f ' (x) siempre está definida $\therefore$ debemos ver dónde $f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-2).(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 2$

Como $\mathrm{Dom}(f) = R$, los intervalos de monotonía son**:** $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$

Recordar que si $\forall x \in (a, b)$**:** $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente en (a, b) y si

$\forall x \in (a, b)$**:** $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente en (a, b)

Entonces para determinar la monotonía de cada intervalo bastará tomar un punto de cada intervalo y analizar el signo de la derivada primera (es importante tener presente que no interesa el valor de la derivada sino el signo de la misma).

Realicemos un esquema par determinar el signo de la derivada

$f'(x) = 3(x-2).(x+2)$

$f'(-3) \quad - \quad . \quad - \quad = + \quad ; \quad -3 \in (-\infty, -2)$

$f'(0) \quad - \quad . \quad + \quad = - \quad ; \quad 0 \in (-2, 2)$

$f'(4) \quad + \quad . \quad + \quad = + \quad ; \quad 4 \in (2, \infty)$

Por lo tanto se puede decir que**:**

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	−	+
f	Creciente	Decreciente	Creciente

2.- Determinar los extremos relativos de la función definida por**:** $f(x) = -x^3 + 2x^2$. Determinar también los extremos absolutos en $[-2, 3]$.

Solución

Para determinar los extremos relativos debemos encontrar los puntos críticos que son los puntos donde la derivada es igual a cero o donde no existe la misma

Entonces**:** $f'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4)$; $f'(x)$ siempre existe, por lo que sólo se debe determinar los puntos donde $f'(x) = 0$

$f'(x) = x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4/3$

Ahora debemos determinar si estos puntos críticos corresponden a extremos relativos o no, para eso podemos aplicar alguno de los criterios**:** el criterio de la derivada primera o el de la derivada segunda.

En el criterio de la derivada primera debemos considerar el signo de la misma en los alrededores de los puntos críticos.

Los intervalos y el signo de la derivada primera en dichos intervalos será**:**

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
signo de $f'(x)$	Negativo	Positivo	Negativo

En $x = 0$ al pasar la derivada de negativa a positiva, indica que hay un mínimo relativo y en $x = 4/3$ al cambiar el signo de positivo a negativo hay un máximo relativo.

Si se aplica el criterio de la derivada segunda, se debe estudiar el signo de f'' en los puntos críticos y luego si $f''(c) > 0 \Rightarrow$ en $x = c$ hay un mínimo relativo y si $f''(c) < 0 \Rightarrow$ en $x = c$ hay un máximo relativo . Calculemos entonces la derivada segunda**:**

$f'(x) = -3x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = -6x + 4$ y reemplazando x por cada punto crítico se tendrá**:**

$f''(0) = 4 > 0 \quad \therefore$ en x = 0 hay un mínimo relativo.

$f''(4/3) = -4 < 0 \quad \therefore$ en x = 4 / 3 hay un máximo relativo.

Vemos que con ambos criterios se llega al mismo resultado.

Para determinar los extremos absolutos, se calcula el valor de la función en los extremos del intervalo y también se calcula el valor de los extremos relativos f (c), siendo c uno de los puntos donde hay extremos relativos y pertenecientes al intervalo dado. Luego el mayor de los valores hallados corresponde a un máximo absoluto y el menor a un mínimo absoluto

El valor de la función en los puntos indicados se muestra en la siguiente tabla**:**

X	– 2	0	4/3	3
f (x)	16	0	32/27	– 9

Se ve que en el punto x = – 2 hay un máximo absoluto y vale 16 y en x = 3 hay un mínimo absoluto y vale – 9.

3.- Encontrar dos números cuyo producto sea máximo y su suma sea 24.

Pasos para resolver Problemas de Optimización

1.−***Entender el problema***. El primer paso consiste en leer cuidadosamente el problema hasta que esté claramente entendido. Hay que preguntarse**:**¿Cuál es la incógnita ? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones establecidas ?.

2. −***Trazar un esquema.*** En la mayoría de los problemas es útil dibujar un esquema que refleje la situación planteada

3. −***Identificar variables y constantes:Introducir símbolos.*** Identificar la variable a optimizar, las demás variables y constantes del problema. Asignar un símbolo a dichas variables. Puede ser útil emplear las letras iniciales como símbolos, por ejemplo,A para área , d para distancia, t para tiempo.Marcaren el esquema realizado en el paso anterior estos elementos.

4. −***Expresar la variable a optimizar*** (la llamaremos A) en términos de los otros elementos indicados en el paso 3

5. −***Expresar la variable a optimizaren función de una sola variable*** **.** Si en el paso 4 se ha expresado A en función de más de una variable, usar la información dada para obtener relaciones (en forma de ecuaciones) entre esas variables. Luego utilizar esas ecuaciones para eliminar todas excepto una de las variables en la expresión de A, demanera que ésta quede en función de una sola variable, es decir debemos obtener A = f (x).

6. −***<u>Determinar los extremos absolutos de f</u>*: Obtener los puntos críticos de f y luego utilizar alguno de los criterios (variación del signo de la derivada primera o estudio del signo de la derivada segunda) para determinar cuáles de ellos corresponden a extremos relativos de f. Por último determinar el extremo absoluto solicitado en el problema.

Solución

Llamamos x e y a ambos números. Los dos números deben ser positivos porque si fuesen negativos, entonces la suma no podría valer 24. Por otro lado si uno de ellos fuese negativo y el otro positivo, el producto sería negativo y como consecuencia no sería máximo. Es por ello que $x > 0$ e $y > 0$ **(1)**

La función a maximizar, P, es el producto de ambos números.

Además tenemos los datos**:** $x + y = 24$ **(2)**y $P(x, y) = x \cdot y$ **(3)**, pero el producto depende de dos variables**:** x e y

Como la función a maximizar debe depender de una sola variable, utilizamos la ecuación dada en **(2)**para despejar una de las variables, por ejemplo la variable y**:**$x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$ **(4)**, luego reemplazando en **(3)** $P(x) = x(24 - x) = 24x - x^2$. Para calcular Dom (P) tenemos en cuenta que**:** $x > 0$ por **(1)** ; $y = 24 - x > 0$ por **(4)** y por **(1)** $\Rightarrow 0 < x < 24$

$\therefore$ Dom (P) = (0, 24)

Siguiendo los pasos vistos en el ejercicio anterior se procede a determinar los extremos absolutos

$P'(x) = 24 - 2x = 0 \Rightarrow x = 12$; este será un punto critico, todavía no se sabe si se trata de un máximo o de un mínimo relativo.

Aplicando el criterio de la derivada segunda**:** $P''(x) = -2$ y como $P''(12) < 0$ nos indica que en $x = 12$ hay un máximo relativo.

El extremo absoluto no puede estar en 0 ni en 24 pues el producto sería cero, entonces como la función es continua, el máximo absoluto coincidirá con el máximo relativo

Uno de los números es $x = 12$ y reemplazando este valor en **(4)**, obtenemos $y = 12$.

Por lo tanto los números cuyo producto es máximo y su suma es 24 son $x = 12$ e $y = 12$.

Ejercicios para resolver en clase TP9

Monotonía. Extremos. Problemas de optimización

1.- Determinar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones dadas por su fórmula:

a) $f(x) = \ln^2(x)$ b) $y = x^4 - 4x^2$ c) $f(x) = 3\sin x$ d) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

2.-Dadas la función *f* , construir en un mismo sistema de ejes la gráfica de f y de su derivada

a) $y = 3 + \sin x$ b) $y = x^4 - 4x^2$

3.- Proponer una función que cumpla con todas las condiciones dadas:

a. $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2\}$; $f(-1) = 1$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(5) = -4$; $f'(x) < 0$ en $(-2{,}0) \cup (1, \infty)$; $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0{,}1)$; $f'(0) = 0$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$; $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3$

b. $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-4, 10\}$; $f(0) = 0$; $f(7) = -2$; $f(14) = -4$; $f'(x) < 0$ en $(4{,}7) \cup (10{,}14)$; $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 4) \cup (7{,}10) \cup (14, \infty)$; $f'(7) = 0$; $\lim_{x\to -4^+} f(x) = -4$; $\lim_{x\to -4^-} f(x) = 6$; $\lim_{x\to 10} f(x) = 0$

4.- Si $f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$ los intervalos de monotonía son (en caso de ninguna poner N);

A. $Creciente$: $(0{,}1) \cup (1, +\infty)$; $Decreciente$: $(-\infty, -1) \cup (-1{,}0)$

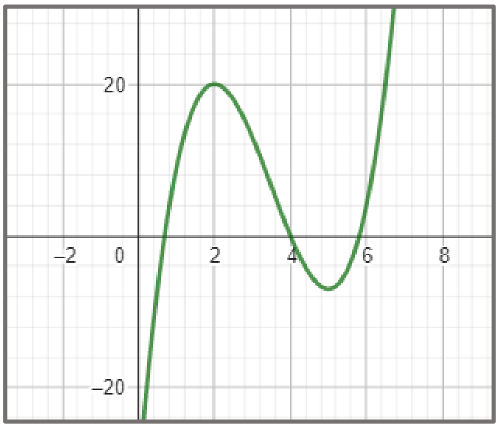
B. $Creciente$: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $Decreciente$: $(-1{,}1)$

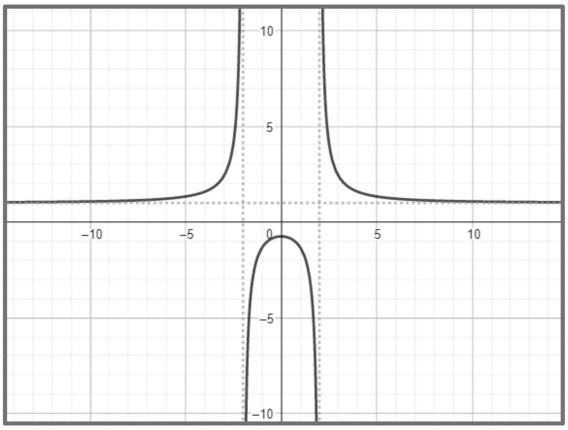
C. $Creciente$: $(-\infty, -1) \cup (0{,}1)$; $Decreciente$: $(-1{,}0) \cup (1, +\infty)$

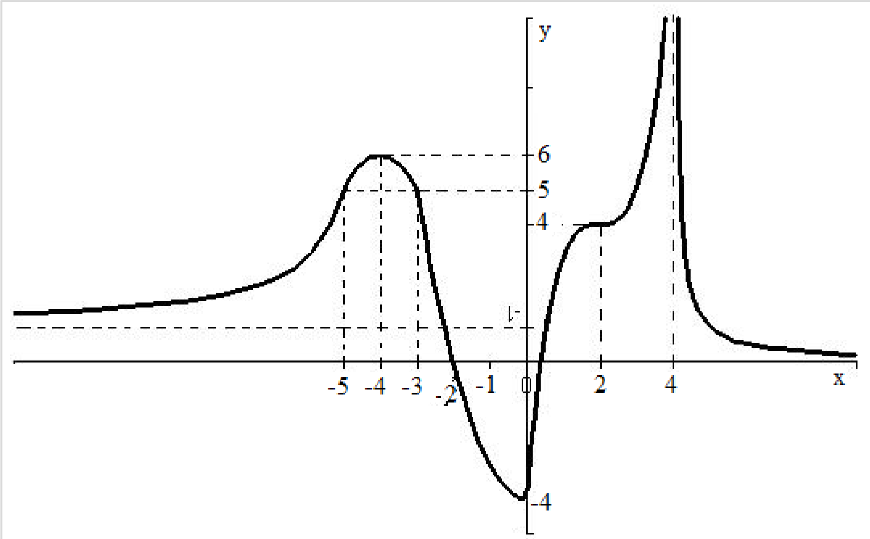
D. $Creciente$: $(-1{,}0) \cup (1, +\infty)$; $Decreciente$: $(-\infty, -1) \cup (0{,}1)$

5. Dadas las gráficas de *f(x)*, *g(x)* y *h(x)*, indicar:

a. Dominio e Imagen.
b. Los intervalos de monotonía, indicando el signo de la derivada primera
c. Los extremos relativos
d. Los puntos donde se anula la derivada primera
e. Los puntos donde no existe la derivada primera (justificar)







Problemas de Optimización

6. Optimización A. Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y de 64 centímetros cúbicos de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal (área total) sea mínima, en el caso en que (á) el recipiente sea abierto y (b) sea cerrado.

7. Optimización B. El coste total de producción de x unidades diarias de un producto es de $\left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right)$ pesos, y el precio de venta de una de ellas es de $\left(50 - \frac{1}{2}x\right)$ pesos. Hallar el número de unidades que se deben vender diariamente para que el beneficio sea máximo. Demostrar que el coste de producción de una unidad tiene un mínimo relativo.

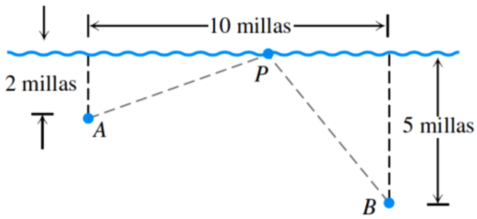
8. Optimización C. El coste del combustible que consume un camión es proporcional al cuadrado de la velocidad y vale 1600 $ por hora cuando la velocidad es de 40 kilómetros por hora. Independientemente de la velocidad, el coste por hora se incrementa, por otras causas, en 3600 $ por hora. Calcular la velocidad a la que debe ir el camión para que el coste por kilómetro sea mínimo.

9. Optimización D. En la fabricación y venta de x unidades de cierto bien de consumo, las funciones de precio p y de costo C (en dólares) están dadas por

$$p(x) = 5.00 - 0.002x$$
$$C(x) = 3.00 + 1.10x$$

Encuentre las expresiones para el ingreso, el costo y la utilidad marginales. Determine el nivel de producción que producirá la máxima utilidad total.

10. Optimización E. Localización de una estación de bombeo dos pueblos están en el lado sur de un río. Se debe ubicar una estación de bombeo para abastecer de agua los dos pueblos. Una tubería será conectada desde la estación de bombeo a cada pueblo a lo largo de una línea que conecte el pueblo con la estación de bombeo. Ubique la estación de bombeo de manera que se minimice la cantidad de tubería que debe construirse.



EJERCICIOS ADICIONALES DEL TPN 9

1.- Se necesita construir un tanque rectangular abierto de 1125 pies^3, con una base cuadrada de x pies por lado e y pies de profundidad, cuya parte superior esté unida al piso para captar el agua de lluvia. El costo asociado no solo incluye el material del tanque sino también costos por la excavación proporcional al producto xy. Si el costo es $\boldsymbol{c} = 5(\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{xy}) + 10\boldsymbol{xy}$, ¿Qué valores de x y de y minimizarán el costo?.

2.- Determinar los intervalos de monotonía y los extremos relativos (si los tuviera) de la función f, cuyas fórmulas

a) $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$ b) c) $f(x) = 2^x - x^2 \ln^2(2)$

TRABAJO PRÁCTICO NRO 10

Concavidad. Puntos de inflexión. Asíntotas. Estudio completo.

Las palabras amables pueden ser
cortas y fáciles de decir, pero sus ecos son realmente infinitos
Madre Teresa de Calcuta.

Cuestionario

a) Defina concavidad de una curva e indique los pasos a seguir para obtener los intervalos de concavidad

b) ¿Qué son las asíntotas de una curva? Cuántas clases de asíntotas conoce y cómo se determina su ecuación?

c) ¿Cuáles son los elementos que se debe tener en cuenta para trazar el gráfico de una función?. Describa brevemente cómo obtenerlos

Ejercicios Resueltos

1.- Encontrar la ecuación de las asíntotas de la siguiente función**:**

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Determinamos primero las asíntotas verticales**:** Los puntos donde es posible que existan asíntotas verticales se encuentran donde la función no está definida.

El dominio de la función es R – { – 1 , 1 }, por lo tanto analizaremos si esos valores corresponden a asíntotas o no.

En x = – 1

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)} = -\infty$$

Como puede verse, si bien no existe el límite para x →– 1, los límites laterales son infinitos, por lo tanto en x = – 1 hay una asíntota vertical.

En x = 1.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

Como el límite para $x \to 1$ es un valor finito, en x = 1 no hay asíntota vertical.

Asíntotas oblicuas**:** Puede ser asíntota oblicua por la izquierda y asíntota oblicua por la derecha. Las asíntotas oblicuas tienen la forma y=ax+ b, donde para la asíntota oblicua derecha**:** $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$ y para la asíntota oblicua izquierda

$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax)$.

En nuestro caso:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{3x^2 - 1} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{6x}}{\cancel{6x}} = 1 \Rightarrow \quad a = 1$$

(1) El límite es indeterminado de la forma $\infty / \infty \therefore$ se aplica la regla de L'Hopital

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x - 1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Si se calcula el límite cuando $x \to -\infty$, el resultado sería el mismo, por lo tanto hay una única asíntota oblicua (derecha e izquierda) cuya ecuación es y = x

2.- Grafique la función $f / f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, realizando el estudio completo.

Solución

a) Dominio**:** R – { – 1 , 1 }

b) Continuidad**:** Por ser cociente de polinomios, la función es continua en su dominio,

c) Paridad**:** $f(-x) = \frac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3 - 1}{x^2 - 1} \neq f(x)$

$-f(x) = -\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-x^3 + 1}{x^2 - 1} \neq f(-x) \quad \therefore$ No tiene paridad.

d) Intervalos de monotonía**: Se** necesita determinar la derivada primera.

$f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, para determinar los puntos críticos vemos donde

$\nexists\ f'(x) \vee f'(x) = 0$

$\nexists\ f'(x)$ si $x = -1$; $x = 1$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = -2$

Los intervalos de monotonía, vendrán dados por:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	−	−	+	+
f	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente	Creciente

e) Extremos relativos: En base al cuadro anterior podemos obtener los extremos relativos

x	−2	−1	0	1
Extremos relativos	Máximo	No es extremo	Mínimo	No es extremo

f) Concavidad: se debe ver donde $\nexists\ f''(x) \vee f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - x(x+2)(2x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)\left(x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x\right)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

En $x = -1$ y $x = 1$ la derivada segunda no existe (tener presente que aunque $x = 1$ no surja de este análisis, también se debe incluir su valor pues $1 \notin$ Dom (f) y $1 \notin$ Dom (f').

Los intervalos donde analizaremos la concavidad son: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ y analizando el signo de la derivada segunda se tendrá:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f''(x)$	Negativa	Positiva	Positiva
Concavidad	C. hacia Abajo	C. hacia Arriba	C. hacia Arriba

g) Punto de inflexión: En $x = -1$ hay un cambio en la concavidad, pero como para ese valor no está definida la función, entonces no hay punto de inflexión.

h) Asíntotas: Ya fueron calculadas en los ejercicios resueltos del T. P. Nº 15, ejercicio 3.

Corresponden a $x = -1$, asíntota vertical y como asíntota oblicua tanto derecha como izquierda**:**

$y = x$

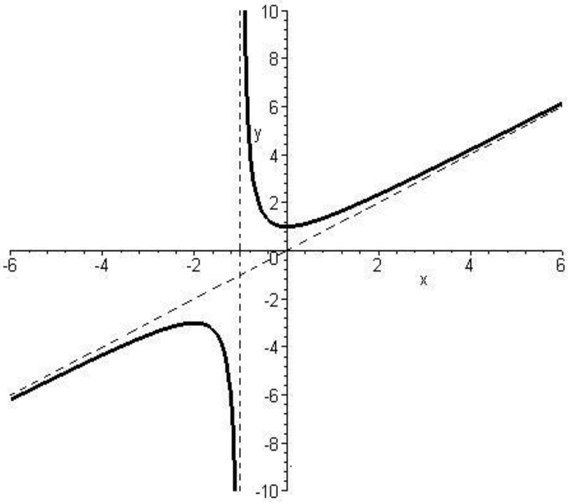
i) Intersección con los ejes**:**

Con el eje x**:** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = 0$, no hay intersección (tener presente que $1 \notin Dom(f)$)

Con el eje y**:** $x = 0 \Rightarrow y = 1$

j) Tabla de valores**:**

x	y
-2	-3 (Mr)
0	1 (mr)
2	7 / 3
-3	$-7 / 2$
$-1 / 2$	3 / 2
$-3/ 2$	$-7 / 2$



Ejercicios para resolver en clase TP10

Concavidad. Puntos de inflexión. Asíntotas. Estudio completo.

1.- Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión (si los tuviera) de las funciones cuyas fórmulas son,

a) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

c) $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

d) $y' = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2} \wedge y'' = \frac{(x^2+2x+2)e^{-x}}{x^3}$, proponga la función y.

2.- Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determinar a y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto P(1,1).

3.- Grafique una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ con las propiedades siguientes. Señale las coordenadas cuando sea posible.

x	*y*	*Derivadas*
$x < 2$		$y' < 0, y'' > 0$
2	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
4	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
6	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

4.- Hallar las asíntotas de las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

b) $f(x) = \frac{-2x^2}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{5x}{x+1}$

5.- Realice el gráfico de la función que cumple todas las siguientes condiciones:

a)

$Dom(f) = \mathbb{R}; f(-5) = -3;\ f(-3) = -5, f(-1) = f(5) = 0, f(1) = -3;$
$f'(x) > 0\ en\ (-3,-1) \cup (1,\infty), \quad f'(x) < 0\ en\ (-\infty,-3) \cup (-1,1);$
$f'(-3) = f'(1) = 0, \quad \nexists f'(-1);$
$f''(x) > 0\ en\ (-5,-1) \cup (-1,5), \quad f''(x) < 0\ en\ (-\infty,-5) \cup (5,\infty);$
$f''(-5) = 0, f''(5) = 0, \nexists f''(-1), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

b)

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty); Img\ (f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio. En x = 0 tiene una discontinuidad de salto infinito.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
- Asíntotas: $Verticales$: $x = 0$; $Horizontales$: $no\ tiene$; $Oblicuas$: $y = x + 1$

- Corte con los ejes: $Eje\ x$: $no\ lo\ corta$; $Eje\ Y$: $no\ lo\ corta.$
- Signo: $Positiva$ $(+)$: $(0,+\infty)$; $Negativa$ $(-)$: $(-\infty,0)$
- Máximos y mínimos relativos: Máximo relativo: no tiene, Mínimo relativo: $f(1) = e$
- $f'(x) > 0\ en\ (-\infty, 0) \cup (1,\infty), f'(x) < 0\ en\ (0,1)$
- $\nexists f''(x) = 0,\ \ f''(x) < 0\ en\ (-\infty, 0),\ \ f''(x) > 0\ en\ (0,+\infty)$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0;\ \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

6.- Realizar el estudio completo para obtener los gráficos de las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación.

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x}{x^2+1}}$

b) $\boldsymbol{y = xe^{\frac{1}{x}}}$

c) $\boldsymbol{y = x^2e^{-x}}$

Nota: para resolver este ejercicio revise la respuesta de las preguntas del cuestionario correspondiente a este Trabajo Práctico

<u>EJERCICIOS ADICIONALES DEL TPN 10</u>

1. Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión (si los tuviera) de la función f, cuyas fórmulas

a) $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$ b $f(x) = 2^x - x^2\ln^2(2)$

2.- Representar gráficamente una función que cumpla con todas las siguientes condiciones**:**

a) Dom (f) = R – { 2 } ; x = 2 es asíntota vertical ; y = – 4 es asíntota horizontal por izquierda; y = x – 6 es asíntota oblicua a derecha ; f (0) = – 1 ; f (– 2) = – 3 ; f (4) = 1 ; f ' (x) < 0 en (0 , 2) y (2, 4) ; f ' (x) > 0 en (– ∞ , 0) y en (4 , ∞) ; f '' (x) < 0 en (– 2 , 2) ; f ' (0) = 0; f ' (4) = 0 ; f '' (– 2) = 0

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DEL TP Nº 6 AL TP Nº 10

<u>Parte 1)</u> Determinar si lo que se afirma es verdadero (V) o falso (F) . No justifique la respuesta

1. Si $y = \sqrt[5]{x} \wedge$ x pasa de 1 a 1,001, entonces dy = 0.05 ☐

2. Si $y = f(x) = |x + 3|$ entonces $f'(-3) = 0$ ☐

3. Ninguna recta tangente a la curva $y^2 = x$ es horizontal ☐

4. Si f tiene máximo relativo en x = 2 , entonces $f'(2) = 0 \wedge f''(2) < 0$ ☐

5. Si f es decreciente en $(-\infty, 4)$ y es creciente en $(4, \infty) \Rightarrow$ en x = 4, f tiene mínimo relativo ☐

6. Si $f''(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f''(x) < 0$ en $(1, \infty) \wedge \exists f''(1)$, entonces $f''(1) = 0$ ☐

7. Si $y = x^x$, entonces $y' = x \cdot x^{(x-1)}$ ☐

8. La función f / y = f (x) = x + 1 / x tiene una única asíntota que es la recta x = 0 ☐

9. Si f es par y creciente en $(-5,-1)$ entonces es creciente en (1,5) ☐

10. Si f es impar y creciente en $(-5,-1)$ entonces es creciente en (1,5) ☐

<u>Parte 2)</u> Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una N

1. – Si $y = 3\,\frac{(x-4)}{5} + 1$ es la ecuación de la recta normal al gráfico de f, entonces ☐

A) $f'(4) = 3/5$ B) $f'(4) = 5/3$ C) $f'(4) = -3/5$ D) $f'(4) = -5/3$

2. –Sea f / $f(1) = 9 \wedge f'(x) = 2 + \frac{\ln x}{1 + x^5}$, entonces ☐

A) $(f^{-1})'(9) = 1/2$ B) $[f'(9)]^{-1} = 1/2$

C) $(f^{-1})'(1) = 1/2$ D) No hay datos suficientes para aplicar el Teorema de la Función inversa

3.- Si $f(x) = \cos^5\left(1 - 3x^{-5/3}\right) + (\ln 5)^6$ entonces $f'(x)$ es: $\square$

A) $-5\cos^4\left(1 - 3x^{-5/3}\right)\text{sen}\left(1 - 3x^{-5/3}\right)\left(\frac{15}{3}x^{-8/3}\right) + 6(\ln 5)^5$

B) $-5\cos^4\left(1 - 3x^{-5/3}\right)\text{sen}\left(1 - 3x^{-5/3}\right)\left(\frac{15}{3}x^{-8/3}\right)$ C)

$5\cos^4\left(1 - 3x^{-5/3}\right)\left(\frac{15}{3}x^{-8/3}\right)$

D) $5\cos^4\left(1 - 3x^{-5/3}\right)\left(\frac{15}{3}x^{-8/3}\right)$

4. –Si $\frac{x}{y} = \cos\left(x^2 + y\right) \Rightarrow y' =$ $\square$

A) $\frac{y + y^2\text{sen}(2x+1)}{x}$

B) $\frac{2x\ \text{sen}\left(x^2+y\right) - \frac{1}{y}}{\text{sen}\left(x^2+y\right) - \frac{x}{y^2}}$

C) $\frac{2x\ \text{sen}\left(x^2+y\right) - \frac{1}{y}}{\text{sen}\left(x^2+y\right) - \frac{x}{y^2}}\ dx$

D) $\frac{\frac{1}{y} + \text{sen}\left(x^2+y\right)}{1 + \frac{x}{y^2}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - \cos x + 1}{2e^x - 2x - 2} =$ $\square$

A) 1 B) 0 C) – 1 D) 2

6.Si $f(x) = \sqrt[x]{\text{sh}\, x}$, entonces $f'(x) =$ $\square$

A) $\frac{1}{x}(\text{sh}\, x)^{1/x - 1}\ \text{ch}\, x$

B) $\frac{\text{ch}\, x}{x\sqrt[x]{\text{sh}\, x}}$

C) $\sqrt[x]{\text{sh}\, x}\left(-\frac{\ln(\text{sh}\, x)}{x^2} + \frac{\coth x}{x}\right)$

D) $-\sqrt[x]{\text{sh}\, x}\ \frac{\coth x}{x^2}$

7. La ecuación de la recta tangente a la curva dada por $f(x) = 6x^2 + x + 9$ paralela a la recta de ecuación $x + y = 5$, es: $\square$

A) $y = x + 9$ B) $y = -x + 53/6$ C) $y = -x - 7/6$ D) $y = -x + 55/3$

8. El $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$ es: $\square$

A) e^{12} B) 12 C) e^3 D) ∞

9. Si $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = \ln t \end{cases}$ entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \boxed{}$

A) $-1/t^2$ B) $-1/(2t^2)$ C) $-1/(4t^2)$ D) $-1/(8t^2)$

Parte 3) Complete cada ítem de forma que el enunciado sea verdadero

1. La derivada enésima de la función f / y = f (x) = ln x es**:**...
2. El máximo producto de dos números reales que suman 8 es igual a ....
3. Utilizando diferenciales, el valor aproximado de $\sqrt{25.2}$ es ....
4. Los extremos relativos y absolutos de la función cuya fórmula es $y = f(x) = 3x^3 - 9x^2$ en el intervalo [– 1 , 3] son**:** ....
5. Un globo de cumpleaños tiene un radio de 14 cm. y un espesor de 0,1 cm. El volumen apro–ximado del material con que está fabricado es**:** ....
6. Se desea bordear con cinta dorada un distintivo rectangular de 100 cm.^{2} de área. Las dimensiones que minimizan la cantidad de cinta a utilizar son**:** ....

Fin guía TP6 a TP10