

Capítulo 2

Números Complejos

1.1.- Introducción

En el campo de los números racionales (\mathbb{Q}) son siempre posible las cuatro operaciones racionales: adición y su inversa, sustracción, multiplicación y su inversa, división, ésta última, siempre que el divisor sea distinto de cero. En consecuencia, la potenciación con exponente natural, como caso particular de la multiplicación, es siempre posible. Pero veamos que ocurre con sus operaciones inversas.

Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$. En la relación $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, el número b recibe el nombre de raíz n -ésima de a . Si conocemos a y b , el exponente n , al que hay que elevar b para obtener el número a se llama logaritmo de a respecto de la base b ; esto es: $\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$. Tenemos, por lo tanto, dos operaciones inversas a la potenciación: la radicación y la logaritmación.

La extracción de raíces no siempre es posible, ya que si el índice es par y el radicando es negativo, no existe ningún número real cuyas potencias de exponente par, sean negativas. Asimismo, carecen de logaritmo en el sistema real los números negativos, ya que si la base es positiva, sus potencias de exponente real cualquiera son siempre positivas, por lo tanto, no pueden coincidir con el número dado si este es negativo.

Todavía carecen de sentido, expresiones tales como: $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$, $\log(-4)$, ...

Muchos otros problemas quedan sin solución en campo de números reales, a modo de ejemplo, resolver ecuaciones de la forma $x^n = a$ con $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Si n es impar, la ecuación tiene exactamente una solución real. Por ejemplo, si $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Si n es par y a es positivo, existen exactamente dos soluciones reales. Por ejemplo, si $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$. Sin embargo, si n es par y a es negativo, la ecuación no tiene soluciones en \mathbb{R} , ya que, como se dijo anteriormente, ningún número real elevado a una potencia par es negativo. Particularmente, la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución en los números reales.

Se hace necesaria la ampliación de \mathbb{R} a un conjunto en donde puedan resolverse situaciones como las enunciadas anteriormente, de manera que estos nuevos números definidos comprendan como caso particular a los números reales. Tal conjunto es el de los números complejos.

En este segundo capítulo estudiaremos las distintas formas en las que se puede expresar un mismo número complejo y la equivalencia entre ellas; las operaciones (incluyendo la

conjugación) que se pueden realizar entre estos números y en las diversas formas en que se expresan, en todos los casos la correspondiente interpretación geométrica. También se demostrarán las propiedades de las operaciones.

1.2.- Conceptos básicos

En vista de la insuficiencia del campo de números reales, lo ampliaremos creando nuevos números, cada uno de los cuales se compone de un par de números reales de igual modo que todo número racional se compone de un par de números enteros.

Número complejo: llamaremos *número complejo* a todo par ordenado de números reales.

El conjunto de números complejos se designa con \mathbb{C} , es decir que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, o sea que se puede caracterizar \mathbb{C} como $\mathbb{C} = \{(a, b) / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$.

La notación usual para los números complejos es $z = (a, b)$ conocida como forma Cartesiana. Son ejemplos: $z_1 = (2, 3)$, $z_2 = (-\sqrt{3}, 2)$, $z_3 = (-\frac{1}{2}, -3)$, $z_4 = (-1, 1)$.

Parte real de un número complejo es su primera componente, mientras que **parte imaginaria** es su segunda componente. Esto se simboliza como:

Sea $z = (a, b) \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = a \wedge \operatorname{Im}(z) = b$.

Para que los nuevos números definidos comprendan como caso particular a los números reales, *convendremos en adoptar para cada número real "a" la expresión compleja $(a, 0)$* .

Particularmente el par ordenado $(1, 0)$ identifica al número real 1 y el $(0, 0)$ al 0. Los números complejos no reales se llaman *imaginarios*, en particular los números $(0, b)$ que tiene nula su primera componente se llaman *imaginarios puros*. El más sencillo es $(0, 1)$ llamada unidad imaginaria y lo designaremos siempre por la letra i .

Un número complejo es real si y sólo si su parte imaginaria es cero.

$(a, b) \in \mathbb{C}$ es $\mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$

Un número complejo es imaginario puro si y sólo si su parte real es cero.

$(a, b) \in \mathbb{C}$ es $\mathbb{Im} \Leftrightarrow a = 0$

Ejemplos: $z_5 = (-2, 0) = -2$ es un número real, $z_6 = (0, -2) = -2i$ es un número imaginario puro.

2.- Representación gráfica de números complejos

Considerando un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, los números complejos se corresponden con los puntos del plano. La abscisa de cada punto es la parte real y la ordenada es la parte imaginaria.

Un complejo $z = (a, b)$ se representa entonces geométricamente por el punto del plano – que indicamos con la misma letra z – de coordenadas cartesianas a y b , o bien por el

vector asociado al complejo que va desde el origen del sistema hasta el punto z (vector posición del punto).

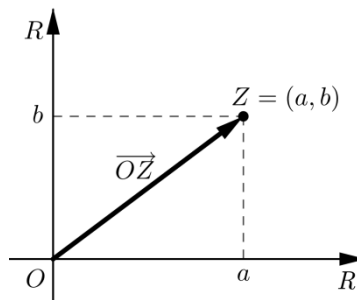


Gráfico 1

Luego:

“A cada complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un único número complejo. Un número complejo puede tomarse como representante de un vector y un vector puede tomarse como representante de un número complejo”.

Esto significa que geoméricamente los números complejos se pueden interpretar como un caso particular de los n -vectores, \mathbb{R}^n , en donde $n = 2$, por lo tanto, son válidos muchos de los conceptos estudiados en el Capítulo 1: Vectores de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1: representar gráficamente $z_1 = (2, 3)$, $z_2 = (-\sqrt{3}, 3)$, $z_3 = \left(-\frac{3}{2}, -2\right)$, $z_4 = (-1, 1)$, $z_5 = (-3, 0) = -3$, $z_6 = (0, -2) = -2i$

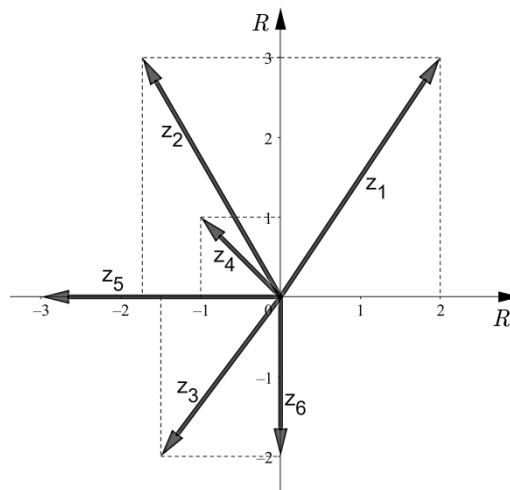


Gráfico 2

Ejemplo 2: determinar analítica y gráficamente los complejos $z = (x, y)$ tales que:

a) $Re(z) = -3$

Todos los pares ordenados que tengan como primera componente igual a -3 , son los que tienen la forma $(-3, y)$. La ecuación $x = -3$ representa una recta paralela al eje de las ordenadas que pasa por el punto de abscisa -3 . Esto significa que todos los números

complejos cuya parte real es igual a -3 , están representados gráficamente en la recta de ecuación $x = -3$.

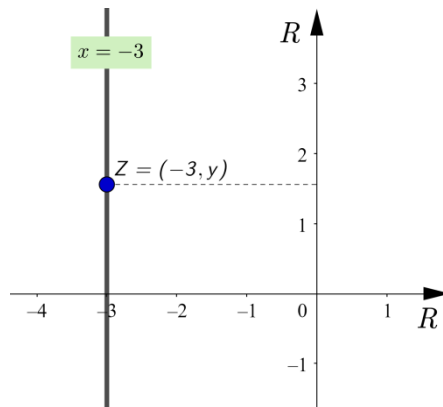
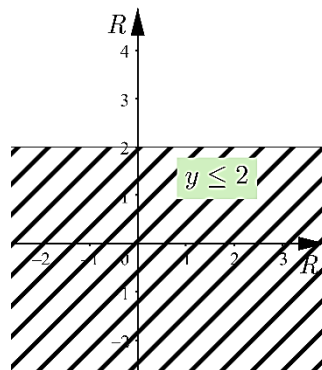


Gráfico 3

b) $Im(z) \leq 2$

Esta condición se traduce como $y \leq 2$, la segunda componente de los números complejos es igual o menor que 2. La inecuación $y \leq 2$ corresponde al semiplano que contiene al origen y cuyo borde es la recta de ecuación $y = 2$.



Gráfica 4

c) $Re(z) + Im(z) = 2$

La condición se traduce como $x + y = 2$, ecuación en dos variables que representa una recta, cuya ecuación explícita es $y = -x + 2$.

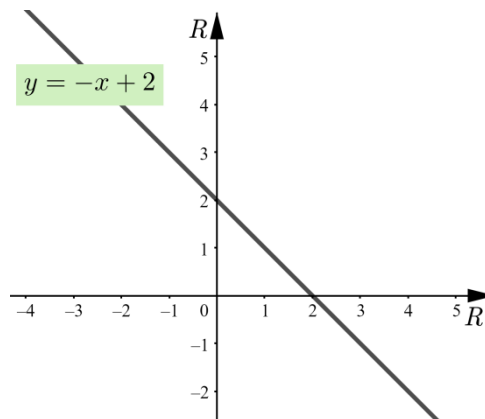


Gráfico 5

3.- Otras formas de expresar un número complejo

3.1.- Números complejos expresados en forma binómica

Por el momento, en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ vamos a definir la adición y multiplicación de la siguiente manera:

Sean (a, b) y $(c, d) \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \wedge (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Ejemplo: sean los complejos $z_1 = (1, -6)$ y $z_2 = (-2, 4)$ entonces:

$$z_1 + z_2 = (1, -6) + (-2, 4) = (-1, -2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1, -6) \cdot (-2, 4) = (1(-2) - (-6)4, 1 \cdot 4 + (-6)(-2)) = (22, 16)$$

Veamos qué ocurre cuando multiplicamos el número real b , expresado como complejo $b = (b, 0)$ por la unidad imaginaria i que expresada como complejo es $(0, 1)$ es decir $i = (0, 1)$.

$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$$

Es decir que al multiplicar un número real (expresado como complejo) por la unidad imaginaria, se convierte a este en un número imaginario puro, ya que $(0, b)$ tiene su primer componente igual a cero.

$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b), \text{ reemplazando } (b, 0) = b \text{ y } i = (0, 1) = i \text{ obtenemos}$$

$$bi = (0, b), \text{ o lo que es lo mismo}$$

$$(0, b) = bi = ib^1$$

Ahora bien, si realizamos la siguiente suma:

$$(a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b)$$

Pero $(a, 0) = a$ y $(0, b) = bi$ por lo tanto

$$(a, b) = a + bi, \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$z = a + bi$ conocida como expresión binómica de un número complejo.

Ejemplo: expresar los números complejos del ejemplo 1, en forma binómica.

$$z_1 = (2, 3) = 2 + 3i \qquad z_3 = \left(-\frac{1}{2}, -3\right) = -\frac{1}{2} - 3i$$

$$z_2 = (-\sqrt{3}, 2) = -\sqrt{3} + 2i \qquad z_4 = (-1, 1) = -1 + i$$

A partir de esto, nos interesan las potencias sucesivas de la unidad imaginaria, para lo cual hacemos:

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & i^4 = i^2 i^2 = -1(-1) = 1 & i^8 = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i^2 i^3 = -1(-i) = i & i^9 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^2 i^4 = -1 \cdot 1 = -1 & i^{10} = -1 \end{array}$$

¹ En el apartado correspondiente, se demostrará la propiedad conmutativa del producto de números complejos.

$$i^3 = i^2 i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$$

$$i^{11} = -i$$

La regularidad que se puede observar en los resultados, nos conduce a enunciar el siguiente teorema que permite calcular cualquier potencia de la unidad imaginaria.

Teorema de las potencias n -ésimas de i : Sean n, k y r , tres números naturales tales que $n = 4k + r$ con $0 \leq r \leq 3$, entonces $i^n = i^r$

D)

$$i^n = i^{4k+r}$$

$$i^n = i^{4k} \cdot i^r$$

$$i^n = (i^4)^k \cdot i^r$$

$$i^n = (1)^k \cdot i^r$$

$$i^n = 1 \cdot i^r$$

$$i^n = i^r$$

Es decir que podemos calcular cualquier potencia de i con exponente natural n , considerando como exponente el resto r de la división de n en cuatro.

Ejemplos:

Calcular i^{253} e i^{757}

$$\text{Como } 253 = 4 \times 63 + 1 \Rightarrow i^{253} = i^1 = i$$

$$\text{Como } 757 = 4 \times 186 + 3 \Rightarrow i^{747} = i^3 = -i$$

Finalmente, nótese que hasta el momento no hemos definido ninguna relación de la forma $z_1 < z_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, esto se debe a que la diferencia esencial que presentan los complejos respecto al cuerpo² de los números reales, consiste en que es no ordenado.

En efecto si el conjunto de números complejos fuera ordenado, como $i \neq 0$ se presentarían dos casos: $i > 0$ ó $i < 0$.

Si $i > 0$ entonces $i \cdot i > 0 \cdot i$ es decir $i^2 > 0$ o sea que $-1 > 0$ lo cual es un absurdo. De manera similar si suponemos $i < 0$. Por lo tanto, el cuerpo de los números complejos no puede ser ordenado.

Las dos formas de expresar un complejo, cartesiana y binómica, no son las únicas; existe una tercera (también una cuarta) forma llamada polar (porque utiliza un sistema de coordenadas polares para ubicar el punto en el plano, que representa el número complejo) o trigonométrica.

² Un cuerpo ó campo, es un conjunto K con dos operaciones binarias, usualmente llamadas suma "+" y producto "." La suma es asociativa, conmutativa y su elemento neutro es 0, además para cada elemento existe un inverso. El producto es asociativo, conmutativo, su elemento neutro es 1 y todo elemento distinto de cero tiene inverso, además el producto se distribuye respecto de la suma.

3.2.- Números complejos expresados en forma polar o trigonométrica

Como se dijo anteriormente, las coordenadas cartesianas (a, b) del punto z determinan el vector \overrightarrow{oz} . Podemos fijar la posición de z , en el plano, de otra forma.

Elegimos una semirrecta \overrightarrow{ox} a la que llamaremos *eje polar* y al origen o al que lo llamaremos *polo*. Elegimos además una *unidad de medida* y un sentido de giro en el plano, considerando *sentido positivo*, el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. La posición de z queda determinada por el módulo del vector \overrightarrow{oz} , es decir por el número $\rho = \|\mathbf{z}\|$ y por el ángulo que debe girar el eje polar \overrightarrow{ox} alrededor del polo, o , en sentido positivo hasta superponerse a la semirrecta de origen o , que contiene al vector \overrightarrow{oz} y cuya medida en radianes o grados sexagesimales llamaremos φ .

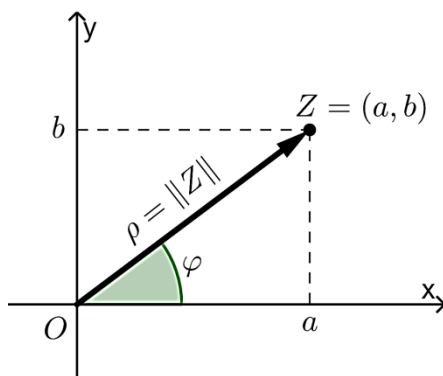


Gráfico 6

El conjunto formado por el polo, el eje polar, la unidad de medida y el sentido positivo para los giros recibe el nombre de Sistema de Coordenadas Polares.

Los números: ρ llamado módulo o radio vector y φ llamado argumento, reciben el nombre de coordenadas polares del punto z o del vector \overrightarrow{oz} .

Las coordenadas polares suelen escribirse como: (ρ, φ) o en forma resumida como ρ_φ .

El número ρ , por definición es positivo o nulo, no negativo. El número real φ se llama argumento principal del complejo no nulo si $0 \leq \varphi < 2\pi$

El número complejo de módulo ρ y argumento φ suele designarse como ρ_φ

Para un punto dado z existen infinitos argumentos. Si uno de ellos es φ , se deducen de él todos los demás con la fórmula: $\hat{\varphi} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Del gráfico 6 se puede deducir que:

$a = \rho \cos \hat{\varphi}$ y $b = \rho \sin \hat{\varphi}$ con $0 \leq \hat{\varphi} < 2\pi$, por lo tanto, se tiene que:

$z = a + bi = \rho \cos \hat{\varphi} + \rho i \sin \hat{\varphi}$ es decir que:

$z = \rho (\cos \hat{\varphi} + i \sin \hat{\varphi})$ que es la forma polar o trigonométrica del complejo z .

Donde ρ y $\hat{\varphi}$ definen unívocamente a z , mientras que z caracteriza unívocamente a ρ pero no a $\hat{\varphi}$.

3.3.- Equivalencia entre los sistemas de representaciones

De la figura anterior puede deducirse que:

$$\rho = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad y \quad \hat{\phi} = \arctg \frac{b}{a} \quad \text{con } a \neq 0$$

Fórmulas que permiten pasar del sistema cartesiano al polar.

De la misma figura puede deducirse que:

$$a = \rho \cos \hat{\phi} \quad y \quad b = \rho \sen \hat{\phi} \quad \text{con } 0 \leq \hat{\phi} < 2\pi$$

Fórmulas que permiten pasar del sistema polar al cartesiano

Ejemplos:

a) Determinar la forma polar del complejo $z = 1 + \sqrt{3}i$

En este caso $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$, aplicando las fórmulas correspondientes

$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad y \quad \hat{\phi} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Esta última ecuación da dos valores para el argumento $\hat{\phi} = 60^\circ$ ó $\hat{\phi} = 240^\circ$, sin embargo, es uno solo el que corresponde a z . Lo elegimos teniendo en cuenta los signos de las coordenadas cartesianas en cada uno de los cuadrantes.

Por ser en este caso a y b positivos, resulta $\hat{\phi}$ del primer cuadrante e igual a 60° .

Por lo tanto $z = 2 (\cos 60^\circ + i \sen 60^\circ) = 2_{60^\circ}$

b) Determinar la forma cartesiana del complejo $z = 3_{210^\circ}$

En este caso $\rho = 3$ y $\hat{\phi} = 210^\circ$, aplicando las fórmulas correspondientes

$$a = 3 \cos 210^\circ = 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$b = 3 \sen 210^\circ = 3 \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto $z = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} \right)$ ó $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

4.- Igualdad de números complejos

Dos números complejos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ serán iguales si y sólo si tienen sus componentes reales y sus componentes imaginarias respectivamente iguales

Si $z_1 = a + bi \in \mathbb{C}$ y $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$, entonces $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

D)

$$a + bi = c + di$$

$$\Rightarrow a - c = (d - b)i$$

$$\Rightarrow (a - c)^2 = (d - b)^2 i^2$$

$$\Rightarrow (a - c)^2 = -(d - b)^2$$

Como $(a - c)^2 \geq 0$ y $(d - b)^2 \geq 0$ se tiene que $(a - c)^2 = 0 = (d - b)^2$ esto es $a - c = 0 = d - b$ y por lo tanto $a = c$ y $d = b$

Si los números complejos están expresados en forma polar, se tiene

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos $\rho_1 \varphi_1$ y $\rho_2 \varphi_2$ sean iguales, es que sean iguales sus módulos y que sus argumentos difieran en múltiplos de 2π

Si $\rho_1 \varphi_1 \in \mathbb{C}$ y $\rho_2 \varphi_2 \in \mathbb{C}$, entonces $\rho_1 \varphi_1 = \rho_2 \varphi_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \widehat{\varphi_1} = \widehat{\varphi_2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Veamos el porqué de esta condición.

Sean $\rho_1 \varphi_1 = \rho_1 (\cos \widehat{\varphi_1} + i \sin \widehat{\varphi_1})$ y $\rho_2 \varphi_2 = \rho_2 (\cos \widehat{\varphi_2} + i \sin \widehat{\varphi_2})$, como $\rho_1 \varphi_1 = \rho_2 \varphi_2$ entonces

$\rho_1 (\cos \widehat{\varphi_1} + i \sin \widehat{\varphi_1}) = \rho_2 (\cos \widehat{\varphi_2} + i \sin \widehat{\varphi_2})$ de donde

$\rho_1 = \rho_2$ y $\begin{cases} \cos \widehat{\varphi_1} = \cos \widehat{\varphi_2} \\ \sin \widehat{\varphi_1} = \sin \widehat{\varphi_2} \end{cases}$ de estas dos últimas igualdades se deduce que los ángulos

deben diferir en $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ o sea $\widehat{\varphi_1} = \widehat{\varphi_2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por ejemplo, las expresiones 3_{75° , 3_{435° y 3_{795° representan el mismo número complejo.

5.- Operaciones con números complejos

5.1.- Suma de números complejos

La suma de dos números complejos es otro complejo cuya componente real es la suma de las componentes reales de los complejos dados y cuya componente imaginaria es la suma de sus componentes imaginarias.

Si $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ entonces

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Ejemplo

$$z_1 = 2 - 5i \text{ y } z_2 = -4 - 3i \text{ entonces } z_1 + z_2 = -2 - 8i$$

Interpretación geométrica de la suma de números complejos: geométricamente, la suma de números complejos se efectúa por la regla del paralelogramo, es decir por la regla de la suma de vectores que parten del origen de coordenadas, según lo que vimos en el Capítulo 1.

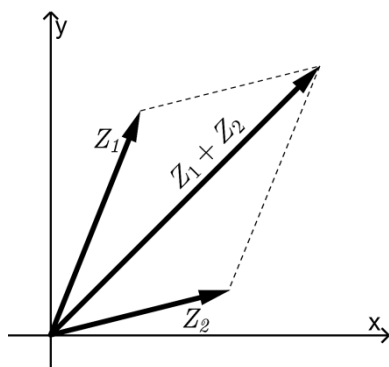


Gráfico 7

5.2.- Producto de un número complejo por un escalar

Dado un número complejo $z = a + bi$ y un número real λ , el producto de λ por z es otro complejo cuyas componentes se obtienen multiplicando las componentes real e imaginaria del complejo dado por el número real λ

Sean $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda z = \lambda a + (\lambda b)i$

Gráficamente el complejo λz está sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto que representa al complejo z .

Si el número complejo está expresado en forma polar, es decir $z = \rho_{\varphi}$ entonces $\lambda z = \rho^*_{\varphi^*}$ donde

$$\varphi^* = \arctan \frac{\lambda b}{\lambda a} = \frac{b}{a} = \begin{cases} \varphi & \text{si } \lambda > 0 \\ \varphi + \pi & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Esto quiere decir, como se dijo anteriormente, que los complejos z y λz están sobre la recta que une el origen de coordenadas y el punto que representa al complejo z .

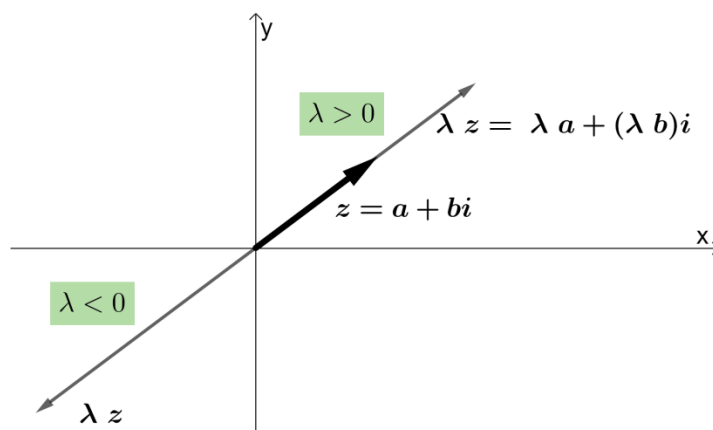


Gráfico 8

$$\rho^* = \|\lambda z\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2}$$

$$\rho^* = \sqrt{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2}$$

$$\rho^* = \sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2)}$$

$$\rho^* = |\lambda| \cdot \|z\|$$

El módulo del producto de un número real por un complejo z es igual al valor absoluto del número real multiplicado por el módulo del complejo.

Ejemplo: sea el complejo $z = -2 + 3i$ y el escalar $\lambda = 3$ entonces $\lambda z = -6 + 9i$.

En términos geométricos, el complejo λz es el vector que tiene igual dirección que z y que dependiendo del signo de λ tiene igual sentido ($\lambda > 0$) o sentido opuesto ($\lambda < 0$) a la del vector que representa a z y cuya longitud es igual al valor absoluto de λ por la longitud del vector que representa a z .

Ejemplo 1: sea el vector $z = 2 + 3i$ y $\lambda = 3$ entonces el vector que representa al complejo $\lambda z = 6 + 9i$ tendrá la misma dirección que el vector que representa a z y una longitud igual al triple del mismo.

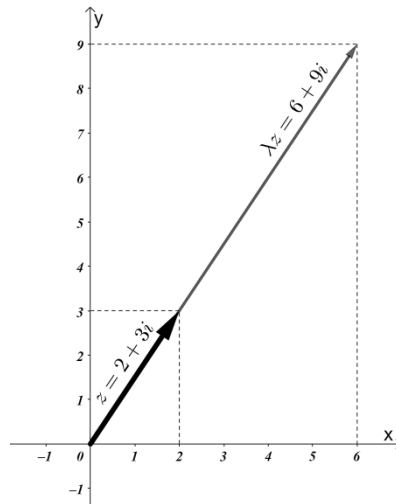


Gráfico 9

Ejemplo 2: sea el complejo $z = 2 + 4i$ y $\lambda = -\frac{1}{2}$, entonces el complejo $\lambda z = -1 - 2i$ será representado por un vector cuyo sentido es opuesto al del vector que representa a z y una longitud igual a la mitad del mismo.

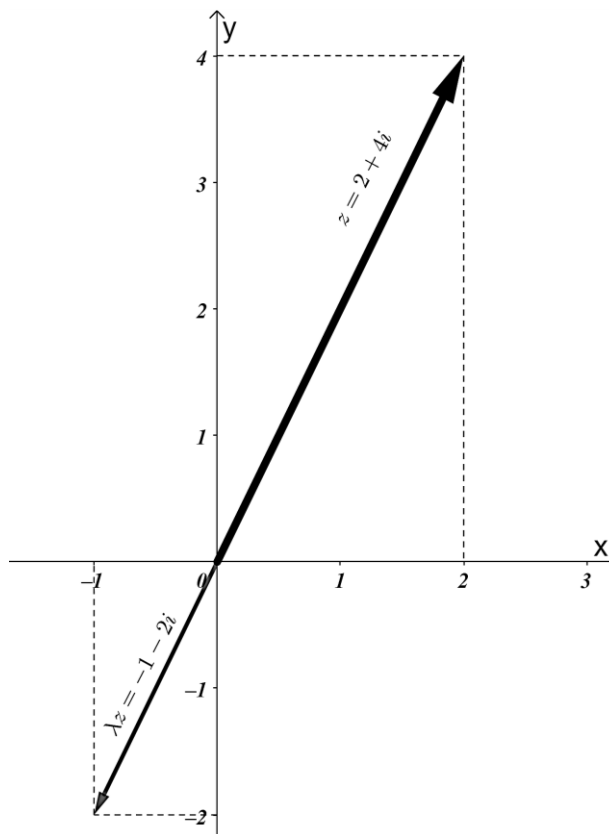


Gráfico 10

De acuerdo a la definición de producto de un número complejo por un escalar, si el complejo es $z = a + bi$ y el escalar es:

- a) $\lambda = -1$ entonces $\lambda z = -z$ complejo opuesto a z .
- b) $\lambda = 0$ entonces $\lambda z = 0$ complejo nulo.

Propiedades de la suma de números complejos y producto por un escalar

Veremos a continuación, cuáles son las propiedades algebraicas que poseen las dos operaciones básicas antes definidas, estas propiedades son similares a las que estudiamos en el Capítulo 1 para vectores en \mathbb{R}^n , con la salvedad que en este caso $n = 2$.

P₁) La suma es ley de composición interna en \mathbb{C}

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces $(z_1 + z_2) \in \mathbb{C}$

Esto significa que la suma, como está definida, es una operación que a cada par de números complejos le hace corresponder un único elemento de \mathbb{C} .

D) Es inmediata por la definición de suma de números complejos.

P₂) La suma es asociativa en \mathbb{C} .

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

Esta propiedad ya fue demostrada para \mathbb{R}^n , por lo tanto, es válida para el caso particular de \mathbb{R}^2 . Sin embargo, se brindará una forma alternativa de demostrar esta propiedad, considerando la forma binómica de los números complejos.

D) Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z_3 = a_3 + b_3i$ entonces

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1i) + [(a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)] \\ &= (a_1 + b_1i) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i] \\ &= [a_1 + (a_2 + a_3)] + [b_1 + (b_2 + b_3)]i \\ &= [(a_1 + a_2) + a_3] + [(b_1 + b_2) + b_3]i \\ &= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i] + (a_3 + b_3i) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de números complejos, es asociativa.

P₃) La suma es conmutativa en \mathbb{C} .

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

D) Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ entonces

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i \\ &= a_2 + a_1 + b_2i + b_1i \\ &= a_2 + b_2i + a_1 + b_1i \\ &= (a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

P₄) Existe un único elemento neutro para la suma en \mathbb{C} .

El elemento neutro para la suma es el complejo nulo, es decir $(0, 0) = 0 + 0i$

$$\forall z = a + bi \in \mathbb{C} : \exists 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C} / z + 0 = 0 + z = z$$

D) La existencia es evidente puesto que se definió el complejo nulo como aquel número complejo cuyas componentes son cero.

Para demostrar la unicidad del neutro vamos a suponer que existen dos neutros para la suma: 0_1 y 0_2 , por lo tanto, si:

$$0_1 \text{ es neutro entonces } 0_1 + 0_2 = 0_2$$

$$0_2 \text{ es neutro entonces } 0_2 + 0_1 = 0_1$$

De donde se deduce, por ser los primeros miembros de ambas igualdades iguales, que $0_1 = 0_2$ y consecuentemente el neutro para la suma, es único.

P₅) Cada elemento en \mathbb{C} admite un único inverso aditivo u opuesto en \mathbb{C} .

El elemento opuesto a uno cualquiera z , se nota por $-z$.

$$\forall z = a + bi \in \mathbb{C} : \exists -z = -a - bi \in \mathbb{C} \text{ único} / z + (-z) = -z + z = 0$$

La existencia de tal número complejo es evidente puesto que cuando se definió producto de un complejo por un escalar, si el escalar es -1 al multiplicarse por cualquier complejo se obtiene el opuesto de dicho complejo.

Para demostrar la unicidad del elemento opuesto vamos a suponer que para un complejo z existen dos opuestos z_1 y z_2 y que los mismos son iguales.

$$z_1 + z = z + z_1 = 0 \quad \text{y} \quad z_2 + z = z + z_2 = 0$$

$$z_1 + z = 0$$

$$z_1 + z + z_2 = 0 + z_2 \text{ sumando miembro a miembro } z_2$$

$$z_1 + (z + z_2) = z_2 \text{ por asociatividad de la suma y elemento neutro}$$

$$z_1 + 0 = z_2 \text{ por ser } z_2 \text{ opuesto de } z$$

$$z_1 = z_2$$

Consecuentemente, el inverso aditivo u opuesto de cada elemento $z \in \mathbb{C}$ es único.

P₆) El producto es ley de composición externa en \mathbb{C} con escalares en \mathbb{R} .

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda z \in \mathbb{C}$$

Esto significa que el producto de un número complejo por un escalar, como está definido, es una operación que a cada par complejo-escalar, le hace corresponder un único elemento de \mathbb{C} .

D) La existencia de tal complejo es inmediata, por la definición de producto de un número complejo por un escalar.

P₇) El producto por un escalar satisface la asociatividad mixta.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha(\beta z) = (\alpha \beta)z$$

D) Sea $z = a + bi$ entonces

$$\alpha(\beta z) = \alpha[\beta(a + bi)]$$

$$= \alpha(\beta a + \beta bi)$$

$$= \alpha \beta a + \alpha \beta bi$$

$$= (\alpha \beta)a + (\alpha \beta) bi$$

$$= (\alpha \beta)(a + bi)$$

$$= (\alpha \beta)z$$

Concluimos entonces que $\alpha(\beta z) = (\alpha \beta)z$.

P₈) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en \mathbb{R} .

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + \beta)z = \alpha z + \beta z$$

D) Sea $z = a + bi$ entonces

$$(\alpha + \beta)z = (\alpha + \beta)(a + bi)$$

$$= (\alpha + \beta)a + (\alpha + \beta)bi$$

$$= \alpha a + \beta a + \alpha bi + \beta bi$$

$$= \alpha a + \alpha bi + \beta a + \beta bi$$

$$= \alpha(a + bi) + \beta(a + bi)$$

$= \alpha z + \beta z$ con lo que se demuestra que el producto de un complejo por un escalar, es distributivo respecto de la suma de escalares.

P₉) El producto por un escalar es distributivo respecto a la suma en \mathbb{C} .

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2$$

D) Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ entonces

$$\alpha(z_1 + z_2) = \alpha[(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)]$$

$$= \alpha[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i]$$

$$= \alpha(a_1 + a_2) + \alpha(b_1 + b_2)i$$

$$= \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha b_1i + \alpha b_2i$$

$$= \alpha a_1 + \alpha b_1i + \alpha a_2 + \alpha b_2i$$

$$= \alpha(a_1 + b_1i) + \alpha(a_2 + b_2i)$$

$= \alpha z_1 + \alpha z_2$ por lo que se concluye que el producto por un escalar, es distributivo respecto a la suma de números complejos.

P₁₀) La unidad para los \mathbb{R} es el neutro para el producto por un escalar.

$$\forall z \in \mathbb{C} : 1 \cdot z = z$$

Como el conjunto de los números complejos con las operaciones definidas: suma y producto por un escalar cumple con las propiedades enunciadas, se dice que este conjunto tiene estructura de espacio vectorial.

5.3.- Diferencia de números complejos

La diferencia de números complejos significa sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

La diferencia de dos números complejos es otro número complejo cuya componente real es la diferencia de las componentes reales de los complejos dados y cuya componente imaginaria es la diferencia de las componentes imaginarias

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) + (-a_2 - b_2i)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Ejemplo

$z_1 = 2 - 5i$ y $z_2 = -4 - 3i$ entonces $z_1 - z_2 = 6 - 2i$

En cuanto a la resta, teniendo en cuenta que el número opuesto al número $z = a + bi$ es el punto del plano complejo que es simétrico al punto z con respecto al origen de coordenadas, la interpretación geométrica de la resta se reduce al caso de la suma.

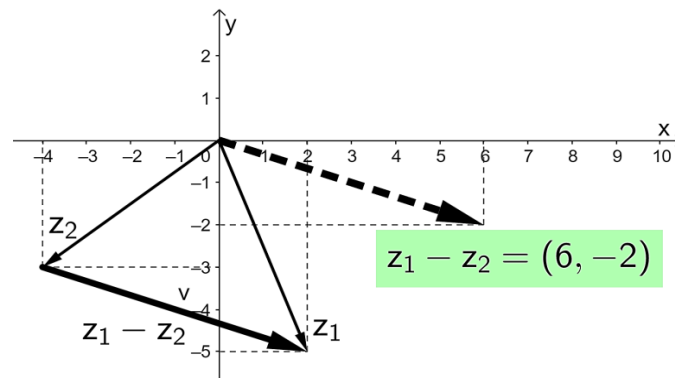


Gráfico 11

5.4.- Producto de números complejos

El producto de dos números complejos es otro número complejo cuya componente real es igual al producto de las componentes reales menos el producto de las componentes imaginarias de los complejos dados y cuya componente imaginaria es igual a la suma de los productos cruzados.

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1i) (a_2 + b_2i)$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2i + a_2 b_1i + b_1 b_2i^2$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2i + a_2 b_1i - b_1 b_2$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Ejemplo

$z_1 = 2 - 5i$ y $z_2 = -4 - 3i$ entonces

$$z_1 z_2 = [2(-4) - (-5)(-3)] + [2(-3) + (-4)(-5)]i$$

$$z_1 z_2 = (-8 - 15) + (-6 + 20)i$$

$$z_1 z_2 = -23 + 14i$$

Si los números complejos están expresados en forma polar o trigonométrica entonces

El producto de dos números complejos expresados en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos de los complejos dados y cuyo argumento es la suma de los argumentos.

$$\text{Si } z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \text{ y } z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + (\cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2) i]$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Ejemplo

$$\text{Si } z_1 = 3_{25^\circ} \text{ y } z_2 = 5_{30^\circ} \text{ entonces } z_1 z_2 = 15_{55^\circ}$$

Interpretación geométrica del producto: dados los complejos $z_1 = \rho_1 \varphi_1$ y $z_2 = \rho_2 \varphi_2$ representados por los vectores $\overrightarrow{oz_1}$ y $\overrightarrow{oz_2}$ respectivamente según la unidad de medida $U = (1, 0)$ tomada, para hallar el $\overrightarrow{oz} = z_1 \cdot z_2$ procedemos de la siguiente manera:

Sobre el segmento $\overrightarrow{oz_2}$, como homólogo de \overrightarrow{ou} , construimos el triángulo $\triangle \widehat{oz_2 z}$ semejante al $\triangle \widehat{ou z_1}$ de tal modo que $\widehat{z_2 o z} = \varphi_1$, siendo $\widehat{oz_2 z} = \widehat{ou z_1}$. Entonces el vector \overrightarrow{oz} representa el producto $z_1 \cdot z_2$. Tal como lo muestra el gráfico 12.

Por construcción, el argumento de z es $\varphi_1 + \varphi_2$, en cuanto a su módulo que es la longitud de \overrightarrow{oz} , por la semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{\overrightarrow{oz}}{\overrightarrow{oz_2}} = \frac{\overrightarrow{oz_1}}{\overrightarrow{ou}} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{oz}}{\rho_2} = \frac{\rho_1}{1} \text{ por lo tanto } \overrightarrow{oz} = \rho_1 \rho_2$$

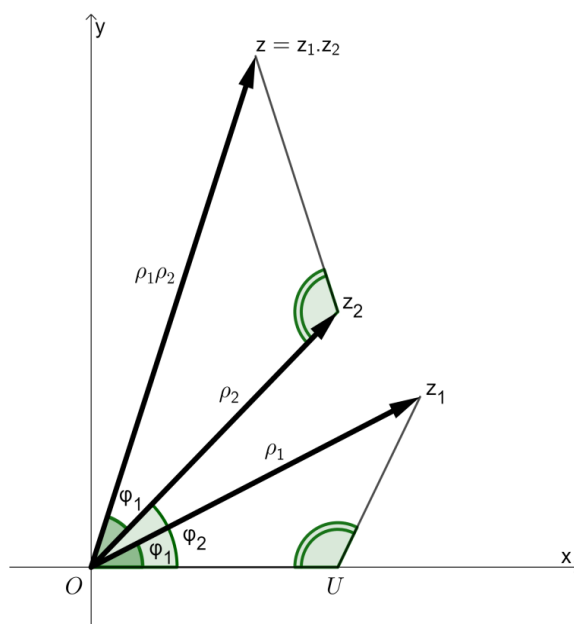


Gráfico 12

Propiedades del producto de números complejos

P₁) El producto es ley de composición interna en \mathbb{C}

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$

Esto significa que el producto de números complejos, como está definido, es una operación que a cada par de números complejos le hace corresponder un único elemento de \mathbb{C} .

D) Es inmediata por la definición de producto de números complejos.

P₂) El producto es asociativo en \mathbb{C} .

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

D) Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z_3 = a_3 + b_3i$ entonces

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 z_3) &= (a_1 + b_1i) [(a_2 + b_2i)(a_3 + b_3i)] \\ &= (a_1 + b_1i) [(a_2a_3 - b_2b_3) + (a_2b_3 + a_3b_2)i] \\ &= [a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + a_3b_2)] + [a_1(a_2b_3 + a_3b_2) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)]i \\ &= (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2) + [(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - b_1b_2b_3)]i \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)] (a_3 + b_3i) \\ &= [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i] (a_3 + b_3i) \\ &= [a_3(a_1a_2 - b_1b_2) - b_3(a_1b_2 + a_2b_1)] + [b_3(a_1a_2 - b_1b_2) + a_3(a_1b_2 + a_2b_1)]i \\ &= (a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3) + (a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1)i \quad (2) \end{aligned}$$

Por ser las expresiones (1) y (2) iguales se concluye que $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.

P₃) El producto es conmutativo en \mathbb{C} .

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 z_2 = z_2 z_1$$

D) Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (a_2 + b_2i)(a_1 + b_1i) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)i \quad (2) \end{aligned}$$

Por ser las expresiones (1) y (2) iguales se concluye que $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

P₄) Existe un único elemento neutro para el producto en \mathbb{C} .

El elemento neutro para el producto es el complejo $1 + 0i = (1, 0)$

$$\forall z = a + bi \in \mathbb{C}, z \neq 0 + 0i : \exists n = x + yi \in \mathbb{C} / zn = nz = z$$

D) Para la existencia hacemos:

$$zn = nz = z$$

$$(a + bi)(x + yi) = (x + yi)(a + bi) = a + bi$$

$$(ax - by) + (ay + bx)i = a + bi$$

$$\begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} = 0$$

Por lo tanto $n = 1 + 0i = (1, 0)$

Para demostrar la unicidad del neutro vamos a suponer que existen dos neutros para el producto: n_1 y n_2 , por lo tanto, si:

n_1 es neutro entonces $n_1 \cdot n_2 = n_2$

n_2 es neutro entonces $n_2 \cdot n_1 = n_1$

De donde se deduce, por ser los primeros miembros de ambas igualdades iguales, que $n_1 = n_2$ y consecuentemente el neutro para el producto, es único.

Ejemplo: sea $z = 2 + 3i$ entonces

$$(2 + 3i)(1 + 0i) = (1 + 0i)(2 + 3i) = 2 + 3i$$

$$(2.1 - 3.0) + (2.0 + 3.1)i = (1.2 - 0.2) + (1.3 + 0.3)i = 2 + 3i$$

$$2 + 3i = 2 + 3i = 2 + 3i$$

P₅) Todo elemento no nulo en \mathbb{C} admite un único inverso multiplicativo.

El inverso multiplicativo a uno cualquiera z , se nota por z^{-1} .

$$\forall z = a + bi \in \mathbb{C}, z \neq 0 + 0i : \exists z^{-1} = x + yi \in \mathbb{C} / z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = n$$

Para la existencia hacemos:

Sea el complejo no nulo z . Si existe $z^{-1} = \frac{1}{z} = x + yi$, debe cumplirse

$$z z^{-1} = z^{-1} z = n$$

$$(a + bi)(x + yi) = (x + yi)(a + bi) = 1 + 0i$$

$$(ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Por lo tanto } z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Para demostrar la unicidad del elemento inverso vamos a suponer que para un complejo z existen dos inversos z_1^{-1} y z_2^{-1} por lo tanto se debe cumplir que $z z_1^{-1} = n$ y también que

$z z_2^{-1} = n$ de donde se deduce que $z_1^{-1} = z_2^{-1}$. Consecuentemente el inverso multiplicativo de cada elemento $z \in \mathbb{C}$ es único.

Otra forma de demostrar esta propiedad es llevar a cabo un procedimiento similar a la propiedad P_5) de la suma de números complejos.

Ejemplo: si $z = 2 + 3i$ entonces $z^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$, para comprobar que es el inverso multiplicativo hacemos:

$$\begin{aligned}(2 + 3i) \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \right) &= \left(2 \frac{2}{13} - 3 \left(-\frac{3}{13} \right) \right) + \left(2 \left(-\frac{3}{13} \right) + 3 \frac{2}{13} \right) i \\&= \left(\frac{4}{13} + \frac{9}{13} \right) + \left(-\frac{6}{13} + \frac{6}{13} \right) i \\&= 1 + 0i\end{aligned}$$

Al conmutar el producto, también se obtiene el mismo resultado.

P_6) El producto es distributivo respecto a la suma en \mathbb{C} .

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

D) Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z_3 = a_3 + b_3i$ entonces

$$\begin{aligned}z_1 (z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1i)[(a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)] \\&= (a_1 + b_1i)[(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i] \\&= [a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)] + [a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)]i \\&= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3) + (a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1)i \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 z_2 + z_1 z_3 &= [(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)] + [(a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i)] \\&= [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i] + [(a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_3 + a_3b_1)i] \\&= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1)i \quad (2)\end{aligned}$$

Por ser las expresiones (1) y (2) iguales se concluye que $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

5.5.- Conjugación de números complejos

La conjugación es una operación unaria ya que al conjugar un número complejo se obtiene otro complejo que difiere únicamente del primero, en su parte imaginaria.

Dado el complejo $z = a + bi$, se llama conjugado de z , y se simboliza como \bar{z} , al complejo $a - bi$.

$$\text{Si } z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Ejemplo

$$\text{Si } z_1 = -2 - 3i \Rightarrow \bar{z}_1 = -2 + 3i$$

$$\text{Si } z_2 = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3} \right) \Rightarrow \bar{z}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3} \right)$$

Dos números complejos son conjugados sí y solo sí tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son números opuestos.

$$\text{Sean } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \text{ y } z_2 \text{ son conjugados} \Leftrightarrow \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \wedge \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$$

Dos complejos conjugados caracterizan dos puntos simétricos respecto del eje real.

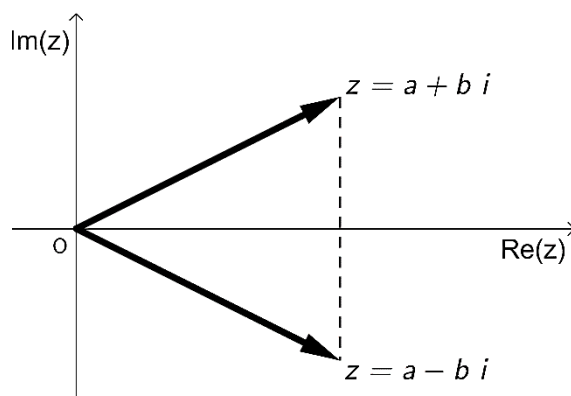


Gráfico 13

De la figura anterior se puede deducir que, si los complejos están expresados en forma polar sus módulos serán iguales mientras que sus argumentos serán opuestos.

Entonces, si un número complejo está expresado en forma polar $z = \rho_{\varphi}$, para hallar su conjugado, también expresado en forma polar $\bar{z} = \rho_{\varphi^*}$, razonamos de la siguiente manera:

Si $z = a + b i$ entonces $\bar{z} = a^* + b^* i$ de donde se sabe que $\begin{cases} a^* = a \\ b^* = -b \end{cases}$ (1)

Si $z = \rho_{\varphi}$ se sabe que $\begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \sen \varphi \end{cases}$, entonces $\bar{z} = \rho_{\varphi^*}$ de donde se sabe que

$$\begin{cases} a^* = \rho^* \cos \varphi^* \\ b^* = \rho^* \sen \varphi^* \end{cases} \quad (2)$$

Para hallar ρ^* sabemos que

$$\rho^* = \sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2}$$

$$\rho^* = \sqrt{a^2 + (-b)^2} \quad \text{Por (1)}$$

$$\rho^* = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho^* = \rho$$

Para hallar φ^* se establece por (1) y (2) que

$$a^* = a \quad \text{y} \quad b^* = -b$$

$$\rho^* \cos \varphi^* = \rho \cos \varphi \quad \text{y} \quad \rho^* \sen \varphi^* = -\rho \sen \varphi \quad \text{por ser } \rho^* = \rho$$

$$\cos \varphi^* = \cos \varphi \quad \text{y} \quad \sen \varphi^* = -\sen \varphi$$

En consecuencia $\varphi^* = 2\pi - \varphi$ ó $\varphi^* = -\varphi$

Por lo tanto, la expresión polar del conjugado de $z = \rho_{\varphi}$ es $\bar{z} = \rho_{2\pi-\varphi}$ ó $\bar{z} = \rho_{-\varphi}$

Ejemplo: sea el complejo $z = 2_{30^\circ} \Rightarrow \bar{z} = 2_{-30^\circ} = 2_{330^\circ}$

Propiedades de la conjugación de números complejos.

P₁) Si un número complejo es igual a su conjugado, su componente imaginaria vale 0.

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Si $z = \bar{z} \Rightarrow \text{Im}(z) = 0$

D) Si $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

Como $z = \bar{z}$ resulta $b = -b \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$

P₂) El conjugado del conjugado de un número complejo es igual a este. Esta propiedad también se conoce con el nombre de involución.

$$\text{Si } z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{\bar{z}} = z$$

$$\text{D) Si } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \text{ por lo tanto } \bar{\bar{z}} = a + bi = z$$

$$\text{Ejemplo: sea el complejo } z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 3i \Rightarrow \bar{\bar{z}} = 2 + 3i = z$$

P₃) El conjugado del producto de un escalar por un número complejo es igual al escalar multiplicado por el conjugado del complejo.

$$\text{Si } z = a + bi \in \mathbb{C} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}$$

$$\text{D) } \overline{\alpha z} = \overline{\alpha (a + bi)}$$

$$= \overline{\alpha a + \alpha bi}$$

$$= \alpha a - \alpha bi$$

$$= \alpha (a - bi)$$

$$= \alpha \bar{z}$$

Ejemplo: sea el complejo $z = 1 + i$ y $\alpha = -2$ entonces

$$\overline{\alpha z} = \overline{-2(1 + i)} = \overline{-2 - 2i} = -2 + 2i$$

$$\alpha \bar{z} = -2\overline{(1 + i)} = -2(1 - i) = -2 + 2i$$

P₄) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus respectivos conjugados.

$$\text{Si } z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C} \text{ y } z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

D)

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)}$$

$$= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$= [a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2)] + [a_1(-b_2) + a_2(-b_1)]i$$

$$= (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i)$$

$$= \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Ejemplo: sean los complejos $z_1 = -2 + i$ y $z_2 = 1 - i$, entonces

$$z_1 z_2 = (-2 + i)(1 - i)$$

$$z_1 z_2 = -1 + 3i \text{ por lo tanto}$$

$$\overline{z_1 z_2} = -1 - 3i$$

Por otra parte

$$\bar{z}_1 = -2 - i \text{ y } \bar{z}_2 = 1 + i \text{ entonces}$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (-2 - i)(1 + i)$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = -1 - 3i$$

P₅) El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus respectivos conjugados.

$$\text{Si } z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C} \text{ y } z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

D)

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= a_1 + a_2 - b_1i - b_2i \\ &= a_1 - b_1i + a_2 - b_2i \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$

Ejemplo: sean los complejos $z_1 = -2 + i$ y $z_2 = 1 - 3i$, entonces

$$z_1 + z_2 = (-2 + i) + (1 - 3i)$$

$$z_1 + z_2 = -1 - 2i \text{ por lo tanto}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = -1 + 2i$$

Por otra parte

$$\overline{z_1} = -2 - i \text{ y } \overline{z_2} = 1 + 3i \text{ entonces}$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (-2 - i) + (1 + 3i)$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = -1 + 2i$$

P₆) El producto de dos complejos conjugados es igual a un número real no negativo, igual al cuadrado de su módulo.

$$\text{Sea } z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow z \overline{z} \in \mathbb{R}, z \overline{z} \geq 0 \wedge z \overline{z} = \|z\|^2$$

$$\text{D) } z \overline{z} = (a + bi)(a - bi)$$

$$= a^2 - (bi)^2 - abi + abi$$

$$= a^2 + b^2$$

$$= \|z\|^2$$

Como a y b son números reales, resulta $z \overline{z} \in \mathbb{R}, z \overline{z} \geq 0 \wedge z \overline{z} = \|z\|^2$

Ejemplo: sea el complejo $z = 2 + 3i$ entonces $\overline{z} = 2 - 3i$. Por lo tanto

$$z \overline{z} = (2 + 3i)(2 - 3i)$$

$$z \overline{z} = 4 - 6i + 6i - 9i^2$$

$$z \overline{z} = 4 - 6i + 6i + 9$$

$$z \overline{z} = 13$$

Por otra parte

$$\|z\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ por lo tanto}$$

$$\|z\|^2 = 13$$

P₇) La suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de la parte real

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

D) Si $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$

$$= (a + a) + (b - b)i$$

$$= 2a$$

$$= 2 \operatorname{Re}(z)$$

Ejemplo: sea el complejo $z = 2 + 3i$ entonces $\bar{z} = 2 - 3i$. Por lo tanto

$$z + \bar{z} = (2 + 3i) + (2 - 3i)$$

$$z + \bar{z} = 4$$

Por otra parte

$$\operatorname{Re}(z) = 2 \text{ por lo tanto}$$

$$2 \operatorname{Re}(z) = 4$$

La operación conjugación puede ser útil para calcular el inverso multiplicativo en el caso que el complejo z esta expresado en forma polar.

La expresión: $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} (a - bi) \text{ de donde se sabe que } a^2 + b^2 = \|z\|^2 \text{ y } a - bi = \bar{z}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\|z\|^2} \bar{z} \quad (1)$$

Ahora bien, si $z = \rho_\varphi$ entonces $z^{-1} = \rho_{\varphi^*}^*$ en donde el argumento φ^* es igual al argumento de \bar{z} ya que en (1), $\frac{1}{\|z\|^2}$ es un número real positivo. Esto significa que $\varphi^* = 2\pi - \varphi$

$$\rho^* = \left\| \frac{1}{\|z\|^2} \bar{z} \right\| = \left\| \frac{1}{\|z\|^2} \right\| \|\bar{z}\| = \frac{1}{\|z\|^2} \|z\| = \frac{1}{\|z\|} = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{Finalmente, si } z = \rho_\varphi \Rightarrow z^{-1} = \left(\frac{1}{\rho} \right)_{2\pi-\varphi} = \left(\frac{1}{\rho} \right)_{-\varphi}$$

Ejemplo

$$\text{Si } z = 2_{30^\circ} \Rightarrow z^{-1} = \left(\frac{1}{2} \right)_{330^\circ}$$

5.6.- Cociente de números complejos

El cociente de dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ con $z_2 \neq 0 + 0i$ es otro complejo que se obtiene al multiplicar z_1 por el inverso multiplicativo de z_2

$$\text{Si } z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C} \text{ y } z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C} \text{ con } z_2 \neq 0 + 0i \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)^{-1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = (a_1 + b_1 i) \left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{b_2}{a_2^2+b_2^2} i \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} \right) + \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2 b_1}{a_2^2+b_2^2} \right) i$$

Si se desea evitar el cálculo del inverso multiplicativo del divisor, es conveniente aplicar la propiedad de la conjugación de números complejos que establece: *El producto de dos complejos conjugados es igual a un número real no negativo, igual al cuadrado de su módulo*

Esto significa que para calcular el cociente de dos números complejos, se debe multiplicar dividendo y divisor por el conjugado del divisor. Ya que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{\|z_2\|^2}$$

Otra alternativa con el mismo resultado, es pensar que si $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{\|z\|^2} \overline{z}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \text{ como } z_2^{-1} = \frac{1}{\|z_2\|^2} \overline{z_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{\|z_2\|^2} \overline{z_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{\|z_2\|^2}$$

Ejemplo: calcular el cociente entre $z_1 = 3 + 3i$ y $z_2 = 1 - 2i$

a) Calculando el inverso multiplicativo de z_2 . Si $z_2 = 1 - 2i \Rightarrow z_2^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ Por lo tanto

$$\frac{z_1}{z_2} = (3 + 3i) \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(3 \frac{1}{5} - 3 \frac{2}{5} \right) + \left(3 \frac{2}{5} + 3 \frac{1}{5} \right) i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{3}{5} - \frac{6}{5} \right) + \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \right) i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$$

b) Aplicando la propiedad de la conjugación de números complejos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+3i}{1-2i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+6i+3i-6}{1^2+2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$$

Si los números complejos están expresados en forma polar o trigonométrica entonces:

El cociente de dos números complejos expresados en forma polar y siendo el segundo distinto del nulo, es otro complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia entre los argumentos del dividendo y divisor.

Si $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\frac{(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} \frac{(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2) + (-\cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2) i}{\cos^2 \varphi_2 + \operatorname{sen}^2 \varphi_2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Ejemplo: si $z_1 = 3_{60^\circ}$ y $z_2 = 4_{28^\circ} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{3}{4}\right)_{32^\circ}$

Interpretación geométrica del cociente: razonando sobre la misma figura que para el producto, suponemos ahora que tenemos como datos \overrightarrow{oz} y $\overrightarrow{oz_2}$ (este último, no nulo) para hallar el cociente $\frac{\overrightarrow{oz}}{\overrightarrow{oz_2}} = \overrightarrow{oz_1}$, basta construir sobre el segmento \overline{OU} como homólogo del $\overline{oz_2}$, el triángulo $\triangle OUz_1$ semejante al $\triangle oz_2z$. El vector $\overrightarrow{oz_1}$ representa el cociente.

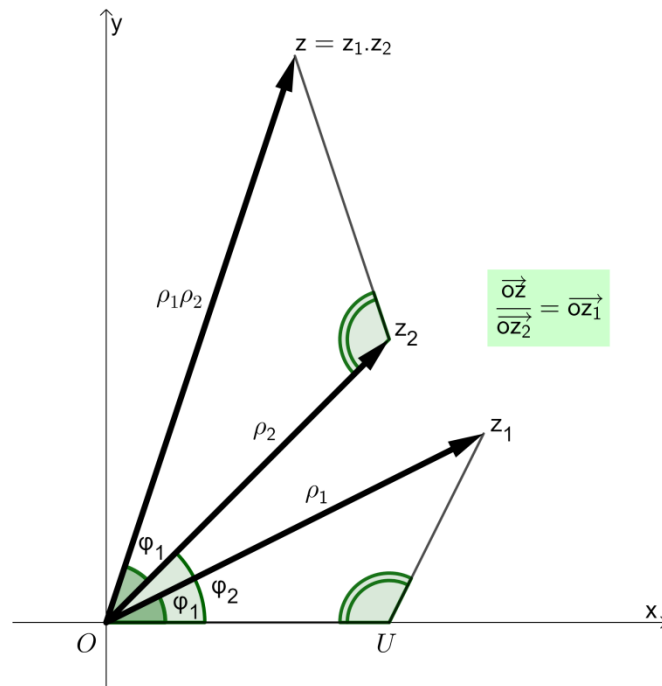


Gráfico 14

Por construcción, el argumento de z_1 es φ_1 en cuanto a su módulo que es la longitud de $\overrightarrow{oz_1}$, por la semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{\overrightarrow{oz}}{\overrightarrow{oz_2}} = \frac{\overrightarrow{oz_1}}{\overline{OU}} \Rightarrow \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2} = \frac{\overrightarrow{oz_1}}{1} \text{ por lo tanto}$$

$$\overrightarrow{oz_1} = \rho_1$$

5.7.- Potenciación de números complejos

Sean los complejos $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$ un caso particular del producto de los complejos z_1 y z_2 se presenta cuando ambos son iguales.

En tal situación, la expresión $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]$ se puede escribir como $z_1 z_2 = \rho_1^2 [\cos(2\varphi_1) + i \operatorname{sen}(2\varphi_1)]$

Este último resultado puede generalizarse por inducción³ mediante el teorema de De Moivre.

La potencia n -ésima ($n \in \mathbb{N}$) de un complejo dado en forma polar es otro complejo cuyo módulo es la potencia n -ésima del módulo del complejo dado y cuyo argumento es n veces el argumento del complejo dado.

Si $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \in \mathbb{C} \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$ (1) para todo $n \in \mathbb{N}$

Esta fórmula es conocida como fórmula de De Moivre y permite calcular trigonométricamente las potencias de exponente natural de los números complejos.

Demostraremos este teorema por inducción matemática.

1º) Debemos verificar que la proposición (1) es válida para el primer elemento del conjunto con el que se trabaja. En nuestro caso son los \mathbb{N} , cuyo primer elemento es 1.

Para $n = 1$

Si $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) \Rightarrow$

$$z^1 = \rho^1(\cos 1\varphi + i \operatorname{sen} 1\varphi)$$

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Por lo tanto (1) es válida para $n = 1$.

2º) Debemos suponer que la proposición es verdadera para $n = h$, esto es lo que constituye la *Hipótesis Inductiva*. Es decir que:

$$z^h = \rho^h(\cos h\varphi + i \operatorname{sen} h\varphi) \text{ es verdadera.}$$

3º) Debemos demostrar que la proposición es verdadera para $n = h + 1$. Es decir que:

$$z^{h+1} = \rho^{h+1}[\cos(h+1)\varphi + i \operatorname{sen}(h+1)\varphi] \text{ es verdadera.}$$

$$z^{h+1} = z^h z \text{ por propiedades de la potenciación}$$

Dado que $z^h = \rho^h(\cos h\varphi + i \operatorname{sen} h\varphi)$ por hipótesis inductiva y que $z^1 = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ entonces:

$$z^{h+1} = \rho^h(\cos h\varphi + i \operatorname{sen} h\varphi) \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

$$z^{h+1} = \rho^h \rho [\cos(h\varphi + \varphi) + i \operatorname{sen}(h\varphi + \varphi)]$$

$$z^{h+1} = \rho^{h+1} [\cos(h+1)\varphi + i \operatorname{sen}(h+1)\varphi]$$

4º) Concluimos que $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$ es válida para todo $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo: sea $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$, calcular z^8

³ En matemáticas, la inducción es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable n que toma una infinidad de valores enteros.

$$\text{Si } z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) \Rightarrow z^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos 8 \cdot 45^\circ + i \operatorname{sen} 8 \cdot 45^\circ)$$

$$z^8 = 2^4 (\cos 360^\circ + i \operatorname{sen} 360^\circ)$$

$$z^8 = 16$$

Se puede trabajar, también de la siguiente manera.

$$z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

$$z = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

$$\text{Si } z = \sqrt{2}_{45^\circ} \Rightarrow z^8 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^8$$

$$z^8 = (\sqrt{2}^8)_{8 \cdot 45^\circ}$$

$$z^8 = 16_{360^\circ}$$

$$z^8 = 16$$

La fórmula de De Moivre es válida aunque sea nulo o negativo el exponente n . Es decir que la fórmula vale para todo exponente entero ($n \in \mathbb{Z}$).

Lo anterior se puede demostrar de la siguiente manera:

$$\text{Si } z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \Rightarrow z^{-1} = [\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^{-1}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi}{(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)(\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi)} \right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi} \right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho} (\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi)$$

$$z^{-1} = \rho^{-1} (\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi)$$

Pero sabemos por las relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos opuestos que $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ y $\operatorname{sen} \varphi = -\operatorname{sen}(-\varphi)$. Reemplazando en la última expresión

$$z^{-1} = \rho^{-1} [\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)] \text{ elevando ambos miembros a la } n\text{-ésima potencia}$$

$$(z^{-1})^n = \{\rho^{-1} [\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)]\}^n$$

$$z^{-n} = \rho^{-n} (\cos(-n\varphi) + i \operatorname{sen}(-n\varphi))$$

Ejemplo: sea $z = -1 + \sqrt{3}i$, calcular z^{-6} .

Expresamos el complejo z , en forma polar.

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ y } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} = -60^\circ = 300^\circ \text{ pero } z \text{ caracteriza a un punto del}$$

II cuadrante, por lo tanto $\varphi = 120^\circ$. Luego $z = 2_{120^\circ}$

Realizamos la potenciación propuesta.

$$z^{-6} = (2_{120^\circ})^{-6}$$

$$z^{-6} = 2^{-6}_{-6 \cdot 120^\circ}$$

$$z^{-6} = \left(\frac{1}{64}\right)_{-720^\circ}$$

$$z^{-6} = \left(\frac{1}{64}\right)_{0^\circ}$$

Interpretación geométrica de la potenciación de números complejos

Reiterando idéntico procedimiento explicado para representar gráficamente el producto de dos complejos, en las potencias de exponente positivo de un complejo ρ_φ se van obteniendo valores cuyos módulos van en progresión geométrica⁴ $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^n$ y sus argumentos en progresión aritmética $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \dots, n\varphi$.

En la siguiente figura hemos representado las ocho primeras potencias del número complejo $z = (1, 2)_{20^\circ}$.

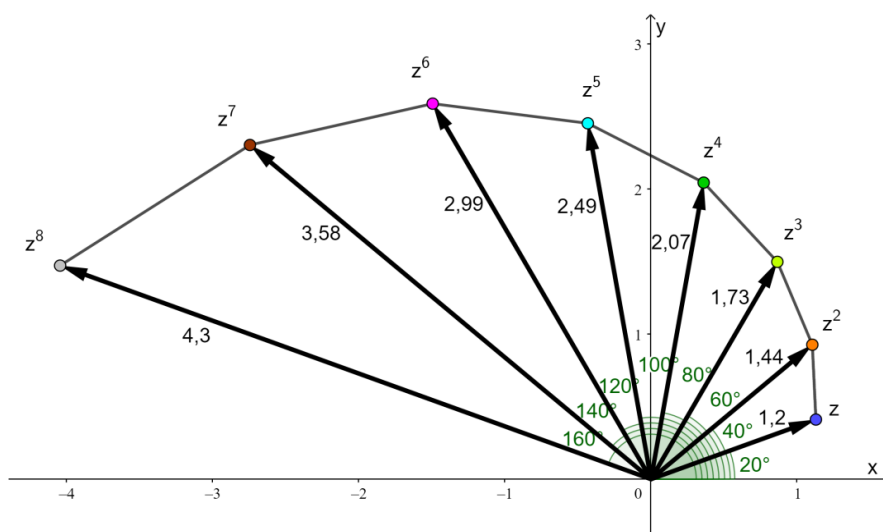


Gráfico 15

5.8.- Radicación de números complejos

Recordemos que en los números reales, la raíz n -ésima ($n \in \mathbb{N}$) de un número a es otro número b tal que la n -ésima potencia de b es a . Es decir que $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$. Por ejemplo $\sqrt[3]{64} = 4$ ya que $4^3 = 64$. De manera similar en los complejos, la raíz n -ésima de z_1 es otro complejo z_2 tal que $(z_2)^n = z_1$. Esto nos conduce a la siguiente

Definición: sean $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \in \mathbb{C}$ y $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ se dice que z_2 es raíz n -ésima de z_1 si y solo si $(z_2)^n = z_1$

Si $(z_2)^n = z_1$, entonces

$$[\rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)]^n = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$$

$$\rho_2^n(\cos n \varphi_2 + i \operatorname{sen} n \varphi_2) = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \text{ por lo tanto}$$

⁴ Sucesión es una función cuyo dominio son los \mathbb{N} y su codominio es cualquier otro conjunto de números de diferente naturaleza, generalmente los \mathbb{R} . Una sucesión se dice aritmética si la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es una constante y se dice geométrica si cada término es igual al anterior multiplicado por una constante.

$$\rho_2^n = \rho_1 \Rightarrow \rho_2 = \sqrt[n]{\rho_1}$$

$$n \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi_1}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

En consecuencia

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

En fórmula anterior, el módulo de la raíz buscada está perfectamente determinado, hallando la raíz n -ésima de ρ , pero no ocurre lo mismo para el argumento pues como está en función de $k \in \mathbb{Z}$ resultaría infinitos valores para la raíz. Sin embargo, esto no ocurre ya que el número de raíces queda perfectamente determinado si damos a k los n primeros valores

$$k = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + 2 \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 3 \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + 3 \frac{2\pi}{n}$$

...

$$k = (n-1) \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + (n-1) \frac{2\pi}{n}$$

$$k = n \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + 2\pi \quad \text{que es congruente con el valor obtenido en } k = 0$$

$$k = n+1 \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + (n+1) \frac{2\pi}{n} \quad \text{que es congruente con el valor obtenidos en } k = 1$$

Así sucesivamente

Luego Todo número complejo no nulo $\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ tiene n raíces n -ésimas de módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y cuyos argumentos mínimos se obtienen de la expresión $\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ al dar valores a k desde 0 hasta $n-1$.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \text{ con } k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Ejemplo: calcular $\sqrt[3]{8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)}$

Nos piden calcular $\sqrt[3]{8}_{30^\circ}$

$$z_k = \left(\sqrt[3]{8} \right)_{\frac{30^\circ}{3} + \frac{2k\pi}{3}} \text{ para } k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2_{10^\circ}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2_{10^\circ + \frac{360^\circ}{3}} = 2_{10^\circ + 120^\circ} = 2_{130^\circ}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2_{10^\circ + \frac{720^\circ}{3}} = 2_{10^\circ + 240^\circ} = 2_{250^\circ}$$

Interpretación geométrica de las raíces

Para representar gráficamente las raíces, trazamos una circunferencia de centro o y radio $\sqrt[n]{\rho}$, a esta circunferencia pertenecerán las imágenes de las n raíces. Una de las imágenes (punto z_0) se fija considerando a partir del origen $\frac{\varphi}{n}$ (argumento dado dividido en n) y los restantes puntos z_1, z_2, \dots, z_{n-1} se obtienen dividiendo la circunferencia a partir de z_0 en n partes iguales. Es decir que las n raíces n -ésimas, distintas de un complejo no nulo, se identifican con los vértices de un polígono regular de n lados, inscripto en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$

Continuando con el ejemplo anterior, la representación gráfica de las raíces calculadas se muestran en el gráfico 16.

6.- Forma exponencial de los números complejos

Como se dijo anteriormente, existe una cuarta forma de expresar un número complejo. Veamos cuál es esta forma.

Leonhard Euler, padre de la unidad imaginaria y creador de notaciones matemáticas modernas, introdujo la expresión: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sen \varphi$ ⁵, llamada *Fórmula de Euler*, la cual define el símbolo $e^{i\varphi}$ para cualquier valor real de φ , es decir φ debe estar expresado en radianes. Esta nueva forma permite expresar al número complejo $z = a + bi$ en una manera mucho más compacta y conocida como forma exponencial $z = \rho e^{i\varphi}$, donde ρ es el módulo del complejo z y φ es el argumento de z .

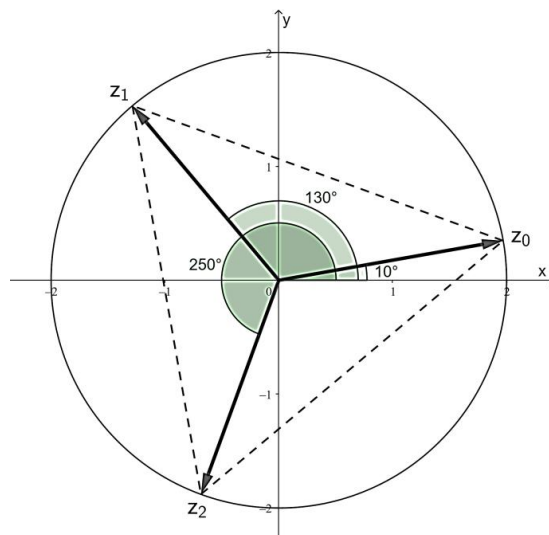


Gráfico 16

Por convención establecemos que la forma exponencial para el complejo nulo, es 0. Destacando que particularmente, la expresión $e^{i\varphi}$ ó bien su equivalente $\cos \varphi + i \sen \varphi$ representa un complejo de módulo unitario y dirección φ .

⁵ e : número irracional, base de los logaritmos neperianos.

La ventaja de la notación introducida por Euler es que, al realizar las operaciones: producto, cociente y potencias enteras de complejos expresados en forma exponencial, se preservan las propiedades de la potenciación (producto y cociente de potencias de igual base y potencia de potencia).

Lo primero que podemos plantearnos es cómo determinar si dos complejos no nulos y expresados en forma exponencial, son iguales.

Igualdad de complejos: evidentemente dos números complejos son iguales si tienen igual módulo y sus argumentos deben diferir en un múltiplo de 2π . Para evidenciar esto, notemos primero que para cualquier $\varphi \in \mathbb{R}$, se tiene que $e^{i\varphi} = 1$ si y sólo si $\exists k \in \mathbb{Z} / \varphi = 2k\pi$. Por lo tanto, sean los complejos no nulos: $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_2 e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 1$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_2 e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} / (\varphi_1 - \varphi_2) = 2k\pi$$

Ejemplo 3 $e^{\frac{i}{6}\pi}$, $3 e^{\frac{i}{6}\pi}$ y $3 e^{\frac{i}{6}\pi}$ representan el mismo número complejo.

Como las formas trigonométricas y exponencial son equivalentes, las operaciones de números complejos que pueden realizarse con la forma trigonométrica son las mismas que en la forma exponencial, la diferencia radica en que en ésta última forma se utilizan las propiedades de la potenciación para calcular los argumentos y que es indispensable utilizar radianes en vez de grados sexagesimales.

Producto: sean los complejos $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$ no nulos, resulta:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2) + (\cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_1)i) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)i) \\ &= \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

El producto de dos complejos expresados en forma exponencial es otro complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de los complejos dados y por argumento la suma de los argumentos de los factores.

Si alguno de los complejos es el nulo, se obtiene como resultado el complejo nulo.

Ejemplo 1: sean los complejos $z_1 = 6 e^{i\frac{1}{3}\pi}$ y $z_2 = 3 e^{i\frac{5}{3}\pi}$, entonces

$$z_1 z_2 = 6 e^{i\frac{1}{3}\pi} 3 e^{i\frac{5}{3}\pi}$$

$$z_1 z_2 = 6 \cdot 3 e^{i(\frac{1}{3} + \frac{5}{3})\pi}$$

$$z_1 z_2 = 18 e^{i 2\pi}$$

Ejemplo 2: realizar la siguiente multiplicación $(2 e^{i\frac{1}{9}\pi})(e^{i\frac{1}{6}\pi})(2 e^{i\frac{7}{18}\pi}) =$

$$(2 e^{i\frac{1}{9}\pi})(e^{i\frac{1}{6}\pi})(2 e^{i\frac{7}{18}\pi}) =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 e^{i(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{7}{18})\pi}$$

$$= 4 e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Conjugado: sea el complejo $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, entonces:

$$\bar{z} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$\bar{z} = \rho(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \text{ de donde se puede ver que}$$

$$\overline{\rho e^{i\varphi}} = \rho e^{i(-\varphi)}$$

Del mismo modo que en el apartado “Conjugación de números complejos”, se evidencia aquí, que el módulo del conjugado es igual al módulo del complejo dado y el argumento del conjugado es el opuesto del argumento.

$$\text{Ejemplo: sea el complejo } z = 6 e^{i\frac{1}{3}\pi} \Rightarrow \bar{z} = 6 e^{i(-\frac{1}{3}\pi)} = 6 e^{i\frac{5}{3}\pi}$$

Inverso multiplicativo: sea el complejo no nulo $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Recordemos que en el apartado “Conjugación de números complejos” se demostró la propiedad: “El producto de dos complejos conjugados es igual a un número real no negativo, igual al cuadrado de su módulo”. Es decir que, si $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $z \bar{z} = \|z\|^2$. Por lo tanto, $z \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = 1$, con lo cual, el inverso multiplicativo de todo número complejo es único y es:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$$

Como el complejo esta dado en forma exponencial, su inverso multiplicativo será

$$z^{-1} = \frac{\rho e^{i(-\varphi)}}{\rho^2}$$

$$z^{-1} = \rho^{-1} e^{i(-\varphi)}$$

Nuevamente, como en el apartado “Multiplicación de números complejos”, se puede observar que el módulo del inverso de z es el inverso del módulo de z , el inverso tiene la misma dirección que el conjugado. Este hecho permite ubicar geométricamente el punto que representa a z^{-1} a partir del punto que representa a z .

$$\text{Ejemplo: si } z = 2 e^{i\frac{1}{4}\pi} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{2} e^{i(-\frac{1}{4}\pi)} = \frac{1}{2} e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

Representamos $z(2_{45^\circ})$, representamos $\bar{z}(2_{315^\circ})$ punto simétrico respecto al \overrightarrow{Ox} . Multiplicamos \bar{z} por el escalar $\lambda = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{4} \cdot 2_{315^\circ} = \left(\frac{1}{2} \right)_{315^\circ} \right]$. El resultado es la representación de z^{-1} .

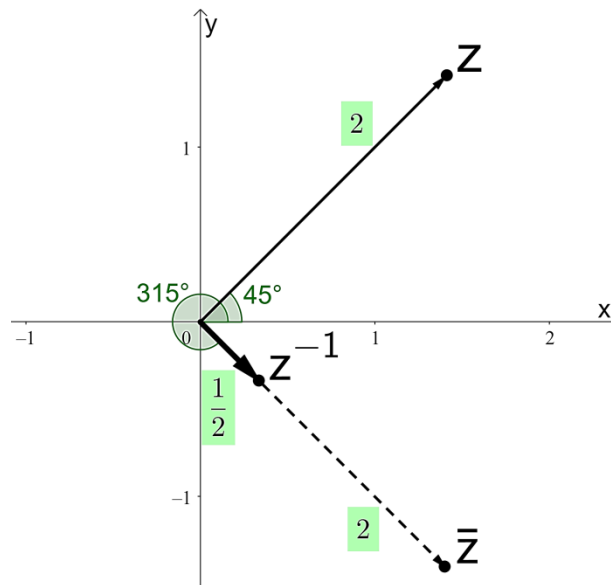


Gráfico 17

División: teniendo las expresiones para el producto y el inverso en forma exponencial, la división es directa. Es decir, sean los números complejos $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ este último no nulo, resulta:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2^{-1} e^{i(-\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Por lo tanto, el cociente de dos números complejos expresados en forma exponencial, tiene como módulo el cociente de los módulos y como argumento la diferencia de los argumentos de los números dados.

Ejemplo: sean los complejos $z_1 = 6 e^{i\frac{1}{3}\pi}$ y $z_2 = 3 e^{i\frac{5}{3}\pi}$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6 e^{i\frac{1}{3}\pi}}{3 e^{i\frac{5}{3}\pi}} = \frac{6}{3} e^{i(\frac{1}{3} - \frac{5}{3})\pi} = 2 e^{i(-\frac{4}{3})\pi} = 2 e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Veamos ahora, cómo la forma exponencial permite realizar fácilmente la potenciación de números complejos, cuando el exponente es un número entero.

Potencia entera: sea el complejo $z = \rho e^{i\varphi}$ y n un número entero (con $z \neq 0$ si $n \leq 0$).

a) Para valores positivos de n , considerando la expresión para el producto en forma exponencial y de forma análoga a la realizada en el apartado “Potenciación de números complejos”, se comprueba fácilmente por inducción que $z^n = \rho^n e^{i n \varphi}$.

b) Para valores de n , enteros negativos, es decir $n = -k$ con $k > 0$, es:

$$z^n = z^{-k} = (z^{-1})^k = (\rho^{-1} e^{-i\varphi})^k = \rho^{-k} e^{i(-k)\varphi} = \rho^n e^{i n \varphi}$$

c) Si $n = 0$, entonces $z^0 = 1 = \rho^0 e^{i 0}$

En síntesis, para cualquier exponente entero, se verifica: $z^n = \rho^n e^{i n \varphi}$.

La radicación se realiza con las mismas consideraciones realizadas en el apartado “Radicación de números complejos”, teniendo en cuenta que cada número complejo tiene n raíces n -ésimas.

Radicación: sean $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \in \mathbb{C}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ se dice que z_2 es raíz n -ésima de z_1 si $(z_2)^n = z_1$, es decir que:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\varphi} = \sqrt[n]{\rho} \sqrt[n]{e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Debemos recordar nuevamente, que en el caso de la radicación en forma exponencial también el ángulo debe ser expresado en radianes, φ debe ser un número real.

Ejemplo 1: sea $z = 2 e^{i\frac{1}{2}\pi}$, calcular z^6

$$z^6 = \left(2 e^{i\frac{1}{2}\pi}\right)^6$$

$$z^6 = 2^6 e^{i6\left(\frac{1}{2}\pi\right)}$$

$$z^6 = 64 e^{i3\pi}$$

$$z^6 = 64 e^{i\pi}$$

Ejemplo 2: sea $z = 243 e^{i\frac{3}{2}\pi}$, calcular $\sqrt[5]{z}$

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{243 e^{i\frac{3}{2}\pi}}$$

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{243} e^{i\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)}$$

$$\sqrt[5]{z} = 3 e^{i\frac{3+4k}{10}\pi}$$

$$z_0 = 3 e^{i\frac{3}{10}\pi}, \quad z_1 = 3 e^{i\frac{7}{10}\pi}, \quad z_2 = 3 e^{i\frac{11}{10}\pi}, \quad z_3 = 3 e^{i\frac{15}{10}\pi}, \quad z_4 = 3 e^{i\frac{19}{10}\pi}$$

Ejemplo 3: sea el complejo $z = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ$, calcular $z^{\frac{3}{5}}$

$$z = 1 e^{i\frac{2}{3}\pi} \text{ nos piden calcular } \sqrt[5]{z^3}$$

$$w = \sqrt[5]{z^3}$$

$$w = \sqrt[5]{\left(1 e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^3}$$

$$w = \sqrt[5]{1^3 e^{i3\frac{2}{3}\pi}}$$

$$w = \sqrt[5]{1 e^{i2\pi}}$$

$$w = \sqrt[5]{1 e^{i0\pi}}$$

$$w = \sqrt[5]{1} e^{i\frac{1}{5}(0\pi+2k\pi)}$$

$$w = 1 e^{i\frac{2k}{5}\pi}$$

$$w_0 = 1 e^0 = 1, \quad w_1 = 1 e^{i\frac{2}{5}\pi}, \quad w_2 = 1 e^{i\frac{4}{5}\pi}, \quad w_3 = 1 e^{i\frac{6}{5}\pi}, \quad w_4 = 1 e^{i\frac{8}{5}\pi}$$

