

Análisis Matemático I



Trabajo Practico N° 6

- Ing. Roberto Lamas
- Prof. Adjunto Análisis Matemático I

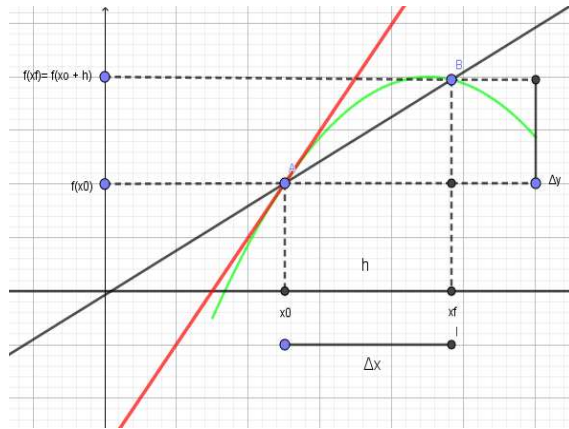
Definición de derivada. Derivada de funciones elementales. Reglas de derivación: suma, resta, producto, cociente, regla de la cadena. Derivada de función inversa.

El problema de la recta tangente

El cálculo surge de cuatro importantes problemas sobre los que trabajaron los matemáticos europeos del siglo XVII.

- 1.- El problema de la recta tangente.
- 2.- El problema de la velocidad y la aceleración.
- 3.- El problema del mínimo y del máximo.
- 4.- El problema del área.

Interpretación grafica de la derivada.



Incremento de la variable independiente:

$$\Delta x = x_f - x_o = x_0 + h - x_0 = h$$

con $h \leq 0$

Incremento de la variable dependiente:

$$\Delta y = y_f - y_o = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Variación de y para una variación de x.

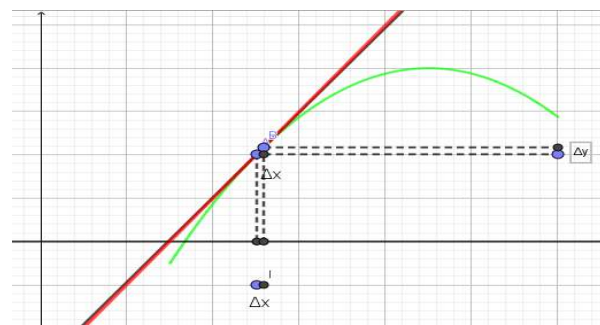
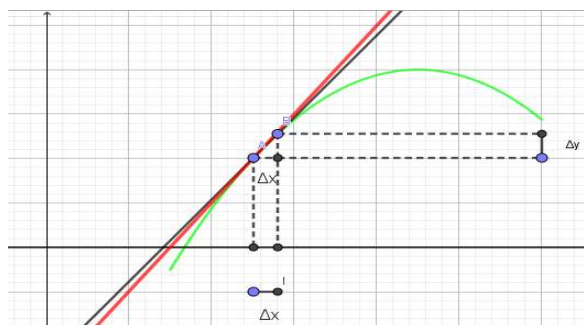
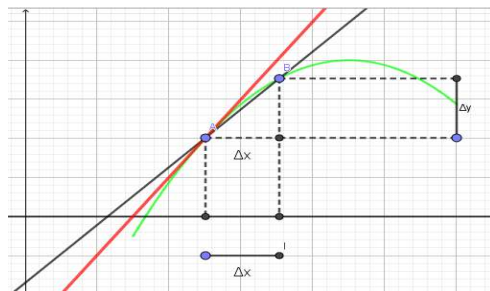
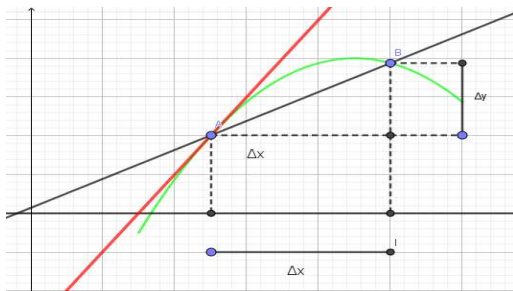
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x}$$

Representa un promedio de variación de y con respecto a x, cuando x varia en un Δx .

Si $h \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $x_0 + h \rightarrow x_0$ entonces $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ en consecuencia $f'(x_0)$ representa la variación **puntual** de y con respecto a x . Indica como varia y respecto a x en ese punto x_0 .



$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definición: La derivada de la función f en el punto $x_0 \in \text{Dom}(f)$ se la define como $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Notación: $f'(x_0)$; $y'(x_0)$; $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$; $\left. \frac{d(f(x))}{dx} \right|_{x=x_0}$; $D_{x_0}f$

Nota 1: El limite siempre es indeterminado, de la forma $0/0$

Nota 2: Si el limite existe y es finito entonces f es derivable en x_0 .

Si el limite finito no existe entonces la función no es derivable en x_0 .

Otra forma de escribir la derivada.

Si $x = x_0 + h$

Si $h \rightarrow 0$ entonces $\Rightarrow x \rightarrow x_0$ por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ejemplo1: Si $f(x) = x^2$, calcular $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+2h+h^2) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

Ejemplo2: Si $f(x) = \sqrt{x}$, calcular $f'(4)$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h-4)}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo3: Si $f(x) = |x - 2|$ Calcular $f'(2)$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|2+h-2| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h \rightarrow 0^+ \\ -1 & \text{si } h \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Entonces $\nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$ por lo tanto no es derivable en $x = 2$.

Relación entre derivada y derivadas laterales.

$$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f_+'(x_0) = f_-'(x_0) = A$$

Def 1: f es derivable en (a, b) si f es derivable $\forall x \in (a, b)$

Definicion2: f es derivable en [a, b], si f es derivable
 $\forall x \in (a, b) \wedge \exists f_+'(a) \wedge \exists f_-'(b)$

Ejemplo:

Dada $f / f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 5 \\ 2x + 5 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$ Calcular $f'(5)$

$$f_+'(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x + 5 - 15}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2(x - 5)}{x - 5} = 2$$

$$f_-'(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{3x - 15}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{3(x - 5)}{x - 5} = 3$$

$$f_+'(5) = 2 \neq f_-'(5) = 3 \therefore \nexists f'(5)$$

Relación entre continuidad y derivabilidad.

Teorema: Si f es derivable en $x_0 \Rightarrow f$ es continua en x_0 .

La hipótesis dice que la función es derivable por lo tanto podemos decir que

$$\text{Existe } f'(x_0) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{La tesis sería : } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Partimos de $f(x) = f(x)$

Sumamos y restamos $f(x_0)$, por lo tanto

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) .$$

Al término $f(x) - f(x_0)$ lo multiplicamos y dividimos por $x - x_0$. Nos quedará:

$$f(x) = \frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} (x - x_0) + f(x_0)$$

Aplicamos limite miembro a miembro.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A * 0 + f(x_0)$

Entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Contrarecíproca: Si f no es continua en x_0 entonces f no es derivable en x_0 .

Ejemplo $f / f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 & \text{si } 0 < x \end{cases} \nexists f'(0)$ pues f no es continua.

La reciproca no es cierta, si f es continua en x_0 entonces f es derivable en x_0 .

Ejemplo $f / f(x) = |x - 2|$, f es continua en $x = 2$, sin embargo se demostró que no existe la derivada en $x = 2$.

Función derivada

Dada $f : A \rightarrow B$ / $y = f(x)$ se define la función derivada f' como $f' : A - \{x / \nexists f'(x)\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$$

Ejemplo1: Obtener $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Aplico la definición de derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Entonces dada $f / f(x) = \sqrt{x}$ su derivada será $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\text{Entonces } f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo2: Obtener $f'(x)$ si $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Ejemplo3: Obtener $f'(x)$ si $f(x) = C$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C-C}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Reglas de la derivación

Sean f y g funciones derivables en x entonces:

$$a) \exists (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$b) \exists (f * g)'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

$$c) \exists (f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{si } g(x) \neq 0$$

Consecuencias:

$$\text{Si } \exists f'(x) \Rightarrow (C * f)'(x) = C * f'(x)$$

$$\text{Idem } \left(\frac{f}{C}\right)' = \frac{f'(x)}{C}$$

Derivada de funciones elementales

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	ch(x)	sh(x)
x	1	ln(x)	1/x
$x^r \quad r \in R$	$r x^{r-1}$	e^x	e^x
sen(x)	cos(x)	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
cos(x)	$-\text{sen}(x)$	a^x	$a^x \ln(a)$

tg(x)	$\sec^2(x)$	arc sen(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
cotg(x)	$-\text{cosec}^2(x)$	arc cos(x)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
sec(x)	$\sec(x) \text{tg}(x)$	arc tg(x)	$\frac{1}{1+x^2}$
cosec(x)	$-\text{cosec}(x) \text{cotg}(x)$	arg sh(x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
sh(x)	ch(x)	arg ch(x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Regla de la derivada de la función inversa.

Sea $f / y = f(x)$ una función que posee función inversa

$$x = f^{-1}(y) \text{ y } f'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$$

Otras notaciones:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Ejemplo:

$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$ En que condiciones?

$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = - \frac{1}{\sin(y)} =$$

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \sin(y) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(y)}$$

Pero $y \in [0, \pi] \Rightarrow \sin(y) \geq 0$

$$= - \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(y)}} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivada de funciones compuestas.(Regla de la cadena)

Sea $y = g(u)$ donde $u = f(x)$ y además $\exists g'(u) = \frac{dy}{du}$ y

$$\exists f'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned}\exists \frac{dy}{dx} &= g'(u)u'(x) = g'(f(x))f'(x) = \\ &= (g \circ f)'(x) = (g(f(x)))'\end{aligned}$$

Notación: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$

Ejemplo: $y = (x^2 - \sqrt{x})^{120}$ Calcular $y'(x)$

$$u = f(x) = x^2 - \sqrt{x} \quad y = u^{120} = g(u)$$

$$\begin{aligned}y'(x) &= 120 u^{119} \left(2x - \frac{1}{2}x^{-1/2} \right) = \\ &= 120 (x^2 - \sqrt{x})^{119} \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)\end{aligned}$$

Ejercicios: Derive las siguientes funciones elementales.

$$a) y = 3x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 7x^{\frac{4}{5}} * x - 8$$

$$b) y = 2 \ln p + \frac{5^p}{3} - \text{sen}(p) + x^2$$

$$c) r = (\arctg(u))(u^{3/2} + 5) - 8$$

$$d) x = \frac{\log_2 t + 7}{\cos(t) + 2^t}$$

$$a) y = 3x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 7x^{\frac{4}{5}} * x - 8$$

$$b) y = 2 \ln p + \frac{5^p}{3} - \text{sen}(p) + x^2$$

$$c) r = (\arctg(u))(u^{3/2} + 5) - 8$$

$$d) x = \frac{\log_2 t + 7}{\cos(t) + 2^t}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada solicitada en cada caso:

$$a) y'(x) \quad \text{si } y = \ln(3x^3 + 5)$$

$$b) \frac{dr}{dp} \quad \text{si } r = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(p) + 5p) + e^{-7p}$$

$$c) t'(x) \quad \text{si } t = \operatorname{sen}^3(x^2 + \sqrt{x})^4$$

$$d) m'(t) \quad \text{si } m = \left(\frac{6^{t^2+4}}{3} + (t^5 - 8t)^4 \right)^{5/2}$$

$$\text{a) } y'(x) \quad \text{si } y = \ln(3x^3 + 5)$$

$$\text{b) } \frac{dr}{dp} \quad \text{si } r = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(p) + 5p) + e^{-7p}$$

$$\text{c) } t'(x) \quad \text{si } t = \operatorname{sen}^3(x^2 + \sqrt{x})^4$$

$$d) m'(t) \quad \text{si } m = \left(\frac{6^{t^2+4}}{3} + (t^5 - 8t)^4 \right)^{5/2}$$

