Análisis Matemático I

Trabajo Practico N° 4

- Ing. Roberto Lamas
- Prof. Adjunto Análisis Matemático I

Propiedades de los limites. Calculo de limite finito. Limite lateral. Limite infinito y con la variable tendiendo a infinito.

Ej 1: Probar que $\lim_{x \to a} x = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta > 0 \ / \ \forall\ x :$
$0 < |\ x - a\ | < \delta \Rightarrow |\ f(x) - a\ | < \varepsilon \Rightarrow |\ x - a\ | < \varepsilon \quad \therefore$
si $\delta = \varepsilon$.

Ej 2: Probar que $\lim_{x \to a} c = c \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta > 0 \ /$
$\forall\ x : 0 < |\ x - a\ | < \delta \Rightarrow |\ c - c\ | < \varepsilon \ \therefore$ la implicación siempre se cumple si $\delta > 0$.

Propiedades de los límites:

1) Si $\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow L$ es único.

2) Propiedades algebraicas: $\exists \lim_{x\to a} f(x) \wedge \exists \lim_{x\to a} g(x)$

$\Rightarrow$ a) $\exists \lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

b) $\exists \lim_{x\to a}\left(f(x) * g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$

c) $\exists \lim_{x\to a}\left(f(x)/g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$

si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

3) Sean f ∧ g / f(x) ≤ g(x) ∀ x ∈ E*(a,δ) ∧ $\exists \lim_{x\to a} f(x) \wedge$

$\exists \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

4) Sean f ∧ g / $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow \exists$ E*(a,δ) /
f(x) < g(x) ∀ x ∈ E*(a,δ)

5) Sean f, g ∧ h / f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) Para todo x ∈ E*(a,δ) ∧ ∃
$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} g(x) = L$
Recibe el nombre de Propiedad del Sandwich o emparedado

6) Sea f / $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow$

a) $\exists \lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

b) $\exists \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ si f(x) ≥ 0 para n par

c) $\exists \lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$

Consecuencias:

1) Si $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(c * f(x)\right) = c * \lim_{x\to a} f(x)$

Dem: $\lim_{x\to a}\left(c * f(x)\right) = \lim_{x\to a} c * \lim_{x\to a} f(x) = c * \lim_{x\to a} f(x)$

2) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

Dem: $\lim_{x\to a} x^n = \left[\lim_{x\to a} x\right]^n = a^n$

3) $\lim_{x \to a} P_n(x) = P_n(a)$ siendo P_n una función polinomial de grado n.

Dem: $\lim_{x \to a}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \ldots .. + a_n x^n) = \lim_{x \to a} a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + a_3 \lim_{x \to a} x^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + a_n \lim_{x \to a} x^n = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + a_n a^n = P_n(a)$

4) I)Si f(x) ≥ 0 ∀ x ∈ E*(a,δ) ∧ ∃ $\lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \geq 0$

II)Si f(x) ≤ 0 ∀ x ∈ E*(a,δ) ∧ ∃ $\lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \leq 0$

Dem: f(x) ≥ 0 ⇒ $\lim_{x \to a} f(x) \geq \lim_{x \to a} 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \geq 0$

Definición de límites laterales:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ ⇔ ∀ ε > 0 : ∃ δ > 0 / ∀ x ∈ (a , a + δ) ⇒ | f(x) – L | < ε

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ ⇔ ∀ ε > 0 : ∃ δ > 0 / ∀ x ∈ (a – δ , a) ⇒ | f(x) – L | < ε

Relación entre límite y límites laterales:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Calculo de limites:

1.- $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+25}}{4+x^2}$ 2.- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-}{7x-7}$

3.- $\lim_{x \to -1} \frac{3x^3-2x^2+5}{x^4-1}$ 4.- $\mathop{lim}_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x+7}-4}{x^2-9}$

5.- $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[6]{2x-3} - \sqrt{2x-3}}{2\sqrt[3]{2x-3}-2}$ 6.- $\lim_{x \to 0} x^4\, sen\left(\frac{1}{x^3}\right)$

1.- $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+25}}{4+x^2}$

2.- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{7x-7}$

3.- $\lim_{x \to -1} \frac{3x^3-2x^2+5}{x^4-1}$

4.- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x+7}-4}{x^2-9}$

5.- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[6]{2x-3} - \sqrt{2x-3}}{2\sqrt[3]{2x-3}-2}$

6.- $\lim_{x \to 0} x^4 \, sen\left(\frac{1}{x^3}\right)$

EXTENSION DE LA NOCION DE LIMITE

I) Limite infinito para x → a

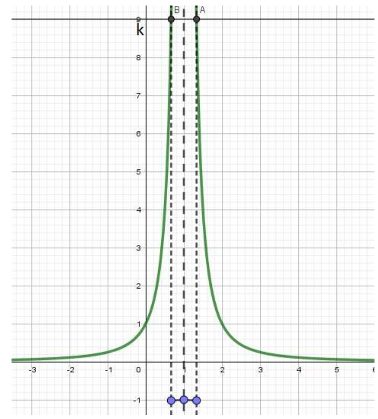
Dada f / $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ D(f) = R – { 1 }

No esta definida para x = 1 pero queremos ver que sucede en las cercanías de 1.

Cuanto mas cerca este x de 1 mas grandes se hacen los valores de y.

De otra forma si quiero que los valores de y sean suficientemente grandes, que tan cerca debo estar de 1 para que eso ocurra?

Si $x \to 1 \Rightarrow y \to \infty$

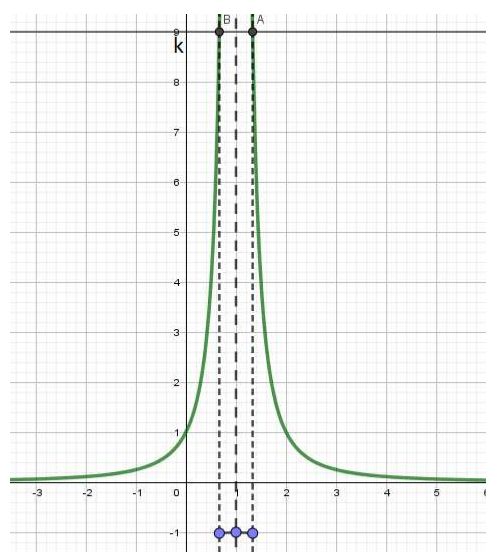


Diremos que $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

Definición: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

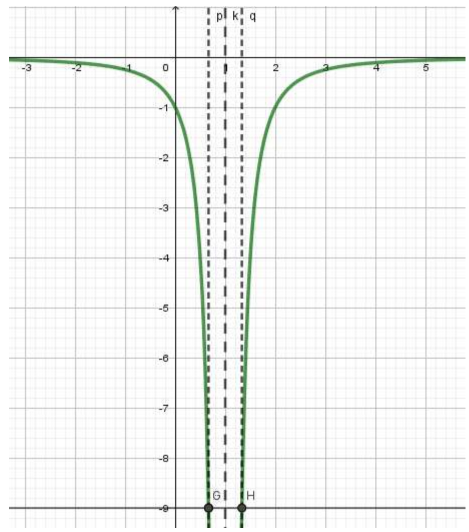
⇔ ∀ k > 0 : ∃ δ > 0 / ∀ x : 0 < | x – a | < δ ⇒ f(x) > k

Si el intervalo no es simétrico? Que deberé hacer ?



Dada f / $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ D(f) = R – { 1 } No esta definida para x = 1 pero queremos ver que sucede en las cercanías de 1.
Si $x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow -\infty$

Diremos que $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$



Definición: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ ∀ k < 0 : ∃ δ > 0 / ∀ x : 0 < | x – a | < δ ⇒ f(x) < k
Definición: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ ∀ k > 0 : ∃ δ > 0 / ∀ x : 0 < | x – a | < δ ⇒ f(x) < – k

Ejemplo Probar que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \Leftrightarrow \forall\, k > 0 : \exists\, \delta > 0 /$
$\forall\, x : 0 < |\, x - 1\,| < \delta \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > k$
Encontrar δ.

$\frac{1}{(x-1)^2} > k \Rightarrow \frac{1}{k} > (x-1)^2 \Rightarrow |\, x - 1\,| < \frac{1}{\sqrt{k}} \therefore \exists\, \delta = \frac{1}{\sqrt{k}}$

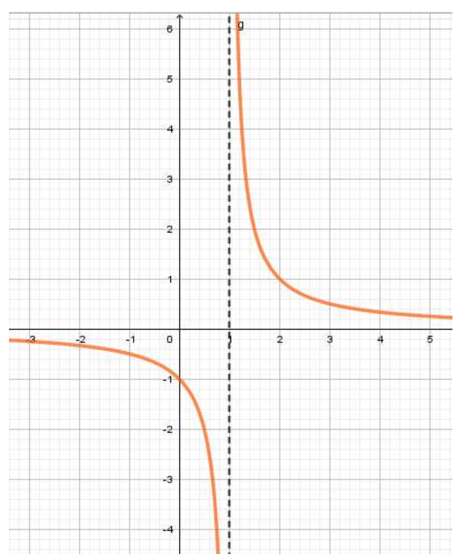
Ejemplo:
Si k = 100 entonces δ = 0,1
Si k = 10.000 entonces δ = 0,01

Calcular a partir del grafico $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)} = \infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)} = -\infty \end{array}\right\} \therefore \nexists \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)}$$



Propiedades que relacionan límites finitos con infinitos

$$1)\ \lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$$

$$2)\ \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = 0$$

$$3)\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = L \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a} (f(x) * g(x)) = \begin{cases} \infty & si\ L > 0 \\ -\infty & si\ L < 0 \end{cases}$$

Nota: $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \infty & si\ f(x) \to 0^+ \\ -\infty & si\ f(x) \to 0^- \\ \nexists & si\ f(x) \to 0^\pm \end{cases}$

Calcular;

Ejemplo1: $\lim_{x\to 7} \frac{3-5x}{|x-7|} =$

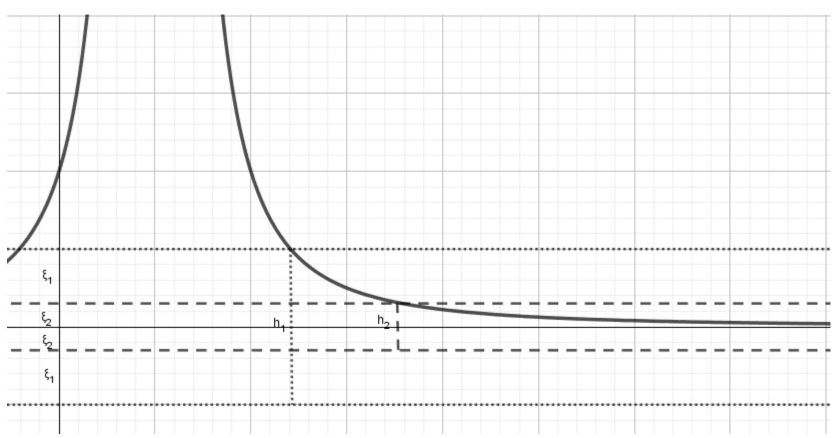
Ejemplo2: $\lim_{x\to -2} \frac{2\,x^2}{x^2+3x+2} =$

Extensión de la noción de límite.

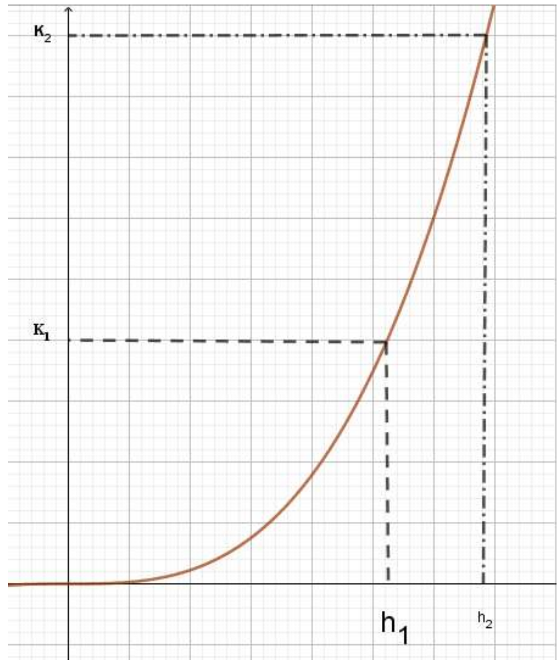
Límite para x → ∞ o x → – ∞

Def1: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ h > 0 \ / \ \forall\ x > h \Rightarrow$ $|\ f(x) - L\ | < \varepsilon$

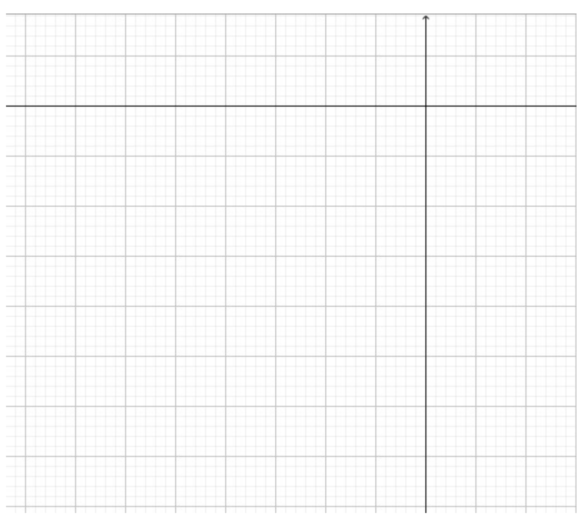
Def2: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ h < 0 \ / \ \forall\ x < h \Rightarrow$ $|\ f(x) - L\ | < \varepsilon$



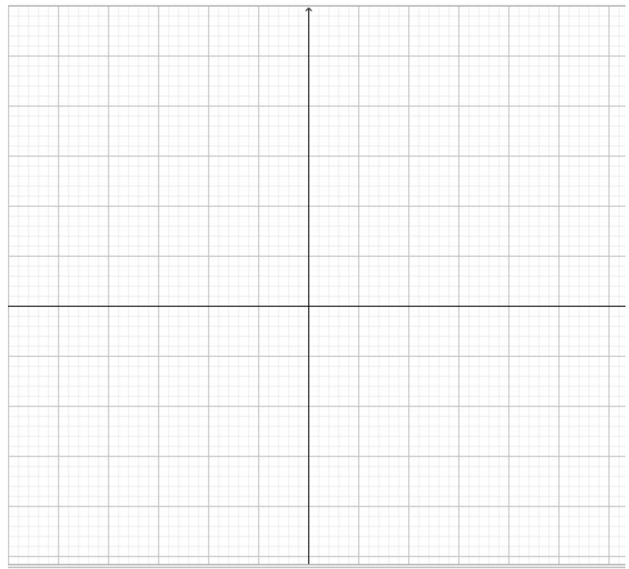
Def3: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
$\forall$ k > 0 : $\exists$ h > 0 / $\forall$ x > h
$\Rightarrow$ f(x) > k



Def4: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall$ k < 0 : $\exists$ h < 0 / $\forall$ x < h $\Rightarrow$
f(x) < k



Def5: $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$



Def6: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$

Nota: Valen las propiedades vistas para limites finitos y los que relacionan limite finito con infinito si se reemplaza x → a por x → $\pm\infty$ y haciendo las adaptaciones correspondientes.

Probar que;

Ejemplo1: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, h > 0 \,/\, \forall\, x > h$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{(x-1)^2} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{(x-1)^2} \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < |x-1|^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < x - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 < x \therefore$
$h = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1$

Ejemplo : ε = 0,01 entonces h = 11
ε = 0,0001 entonces h = 101

Ejemplo2:
Calcular:
I) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^7+3x^2}{2x^5+x^7}$

Divido tanto numerador como denominador por la variable elevada a la mayor potencia del denominador.

II) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

III) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x}}$