SEQUÊNCIAS, RECORRÊNCIAS E ALGORITMOS RECURSIVOS

PROF. ALANE M. L. DA SILVA
DAINF - UTFPR-CT

DEFINIÇÕES RECORRENTES

Ou ainda: **definição recursiva**, **definição por recorrência**

Uma definição recorrente é **definida em termos de si mesma** e possui duas partes:

1. Uma **condição básica (base)**, em que casos simples do que está sendo definido são dados explicitamente;
2. Um **passo de recorrência (indutivo)**, em que novos casos do que está sendo definido são dados em função de casos anteriores.

DEFINIÇÕES RECORRENTES

Ou ainda: **definição recursiva, definição por recorrência**

Uma d... **... si mesm...**

1. Um... ...ples do ... ...ente;
2. Um **passo de recorrência (indutivo)**, em que novos casos do que está sendo definido são dados em função de casos anteriores.

Observe a semelhança de definição recorrente com demonstração por **indução matemática**, que vimos nas aulas anteriores.

SEQUÊNCIAS

Podemos utilizar recorrências para definir **sequências** de objetos.

Dado um conjunto S, uma **sequência** é uma função a de um subconjunto dos números inteiros não-negativos ($\{0,1,2,\ldots\}$) ao conjunto S. Usamos a notação a_i para denotar a imagem do inteiro i. Denominamos a_i como sendo um *termo* da sequência.

SEQUÊNCIAS

Quando o subconjunto de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ é *infinito*, dizemos que a sequência é **infinita**.

Quando o subconjunto de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ é *finito*, dizemos que a sequência é **finita**.

Quando S é um conjunto de números, dizemos que a sequência é **numérica**.

Podemos definir uma sequência por recorrência nomeando alguns de seus primeiros valores explicitamente, e depois definindo os valores subsequentes em termos de valores anteriores.

EXEMPLO

1. $a_1 = 2$ condição básica
2. $a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 2$ passo de recorrência

EXEMPLO

1. $a_1 = 2$ — condição básica
2. $a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 2$ — passo de recorrência

Pela proposição 1, obtemos o primeiro termo: $a_1 = 2$.

Pela proposição 2, obtermos o segundo termo: $a_2 = 2.a_1 = 2.2 = 4$.

Pela proposição 3, obtermos o terceiro termo: $a_3 = 2.a_2 = 2.4 = 8$.

...

Continuando desse modo, veremos a sequência $2,4,8,16,32,\ldots$

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Cada termo desta famosa sequência numérica, com exceção dos dois primeiros, corresponde a **soma dos dois termos anteriores**.

1. $a_1 = 1$ condição básica
2. $a_2 = 1$ condição básica
3. $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ **para** $n > 2$ passo de recorrência

EXERCÍCIOS

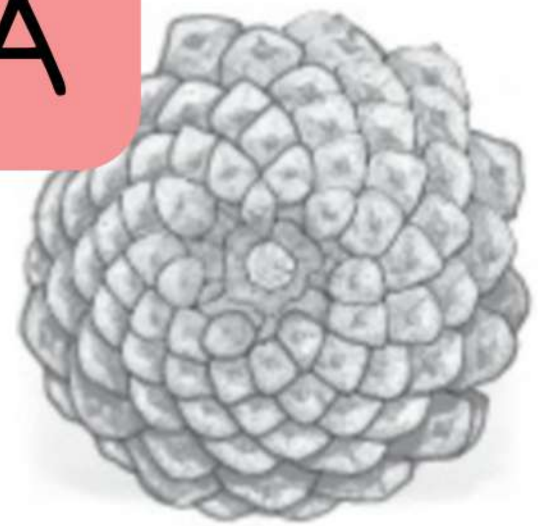
PROBLEMA PRÁTICO 1 A sequência T é definida por recorrência por:

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$ para $n \geq 2$

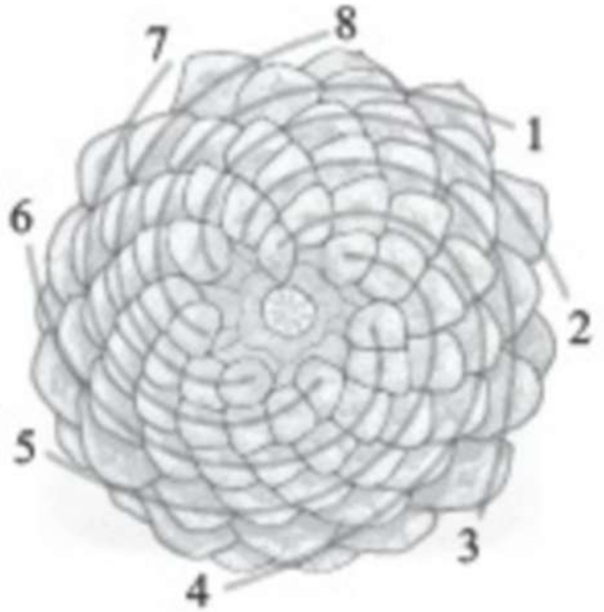
Escreva os cinco primeiros valores da sequência T. ■

PROBLEMA PRÁTICO 2 Escreva os oito primeiros valores da sequência de Fibonacci. ■

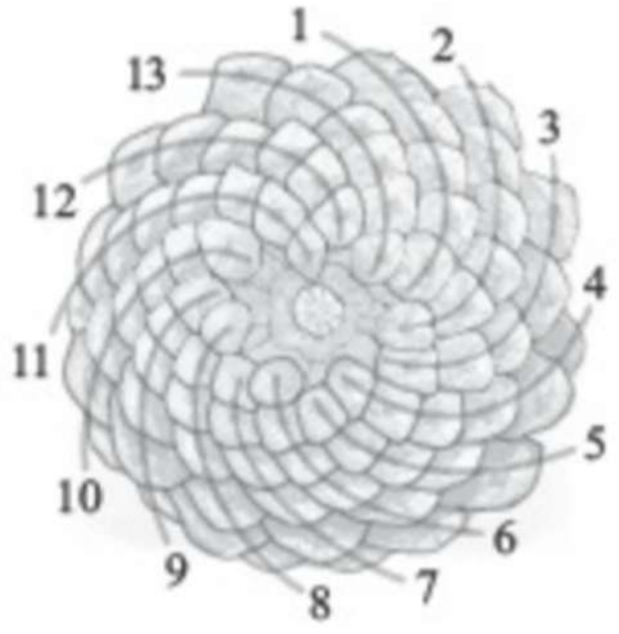
A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA NATUREZA



Dentre os vários exemplos que podemos encontrar da presença da sequência de Fibonacci na natureza, podemos citar as **pinhas**.



As **espirais de uma pinha** estão arrumadas no sentido horário e anti-horário, e ao contar cada tipo de espiral, observa-se com frequência que os valores de cada contagem correspondem a **dois números da sequência de Fibonacci consecutivos**.



A RAZÃO ÁUREA

A razão áurea, quando usada na arte e arquitetura, cria proporções **esteticamente agradáveis**.

Ela é aproximada pela razão de dois números Fibonacci consecutivos F_n e F_{n+1}, e corresponde a

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339$$

de forma que quanto maior for o valor de **n**, melhor a precisão da aproximação.

FÓRMULAS ABERTAS E FECHADAS

Dizemos que uma recorrência é uma **fórmula aberta**.

Uma fórmula não-recorrente é dita ser uma **fórmula fechada**.

No exemplo a seguir, mostraremos uma fórmula fechada para gerar o **n-ésimo** número da sequência de **Fibonacci**.

TEOREMA 1.

Seja n um número não-negativo qualquer. Além disso, considere os números $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $q = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, denotado por a_n, é igual a

$$a_n = \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}}.$$

TEOREMA 1

Por que essa fórmula?

Há uma explicação matemática mais complexa que não veremos aqui de como os matemáticos chegaram a conclusão de que o padrão observado para cada termo da sequência poderia ser expresso por essa fórmula.

da sequência de Fibonacci, denotado por a_n, é igual a

$$\boxed{a_n = \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}}}$$

Demonstração.

Iremos provar este teorema por indução matemática.
Primeiro, provaremos a base em $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$.

$$\boxed{\text{Se } n = 0, \text{ então } a_0 = \frac{p^0 - q^0}{\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0.}$$

termo 0 da seq. de Fibonacci

Demonstração.

Iremos provar este teorema por indução matemática.
Primeiro, provaremos a base em $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$.

Se $n = 0$, então $a_0 = \dfrac{p^0 - q^0}{\sqrt{5}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}} = 0.$

$$\boxed{\text{Se } n = 1, \text{ então } a_1 = \dfrac{p^1 - q^1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1.}$$

termo 1 da seq. de Fibonacci

Demonstração.

Iremos provar este teorema por indução matemática.
Primeiro, provaremos a base em $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$.

Se $n = 0$, então $a_0 = \dfrac{p^0 - q^0}{\sqrt{5}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}} = 0.$

Se $n = 1$, então $a_1 = \dfrac{p^1 - q^1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1.$

Se $n = 2$, então

termo 2 da seq. de Fibonacci

$$a_2 = \frac{p^2 - q^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1.$$

Demonstração.

Nossa hipótese de indução será que, para todo inteiro não-negativo

$k < n$, vale que $a_k = \dfrac{p^k - q^k}{\sqrt{5}}$.

Assim, temos que

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pela definição por recorrência de a_n

Demonstração.

Nossa hipótese de indução será que, para todo inteiro não-negativo

$k < n$, vale que $a_k = \dfrac{p^k - q^k}{\sqrt{5}}$.

Assim, temos que

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pela definição por recorrência de a_n

$= \dfrac{p^{n-1} - q^{n-1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{p^{n-2} - q^{n-2}}{\sqrt{5}}$ pela hipótese de indução

Demonstração.

Assim, temos que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$ pela definição por recorrência de a_n

$$= \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{p^{n-2} - q^{n-2}}{\sqrt{5}}$$ pela hipótese de indução

$$= \frac{p^{n-1} + p^{n-2}}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-1} + q^{n-2}}{\sqrt{5}}$$

aqui agrupamos as potências
de mesma base

Demonstração.

$$= \frac{p^{n-1} + p^{n-2}}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-1} + q^{n-2}}{\sqrt{5}}$$

aqui agrupamos as potências de mesma base

Demonstração.

$$= \frac{p^{n-1} + p^{n-2}}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-1} + q^{n-2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{p^{n-2}(1 + p)}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-2}(1 + q)}{\sqrt{5}}$$

colocamos a potência de grau menor em evidência

Demonstração.

$$= \frac{p^{n-1} + p^{n-2}}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-1} + q^{n-2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{p^{n-2}(1 + p)}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-2}(1 + q)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{p^{n-2} p^2}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-2} q^2}{\sqrt{5}}$$

pois é verdade que $1 + p = p^2$ e $1 + q = q^2$

$q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$1+q = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$q^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4}$

$= \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$1+p = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$p^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4}$

$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Demonstração.

$$= \frac{p^{n-1} + p^{n-2}}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-1} + q^{n-2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{p^{n-2}(1 + p)}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-2}(1 + q)}{\sqrt{5}}$$

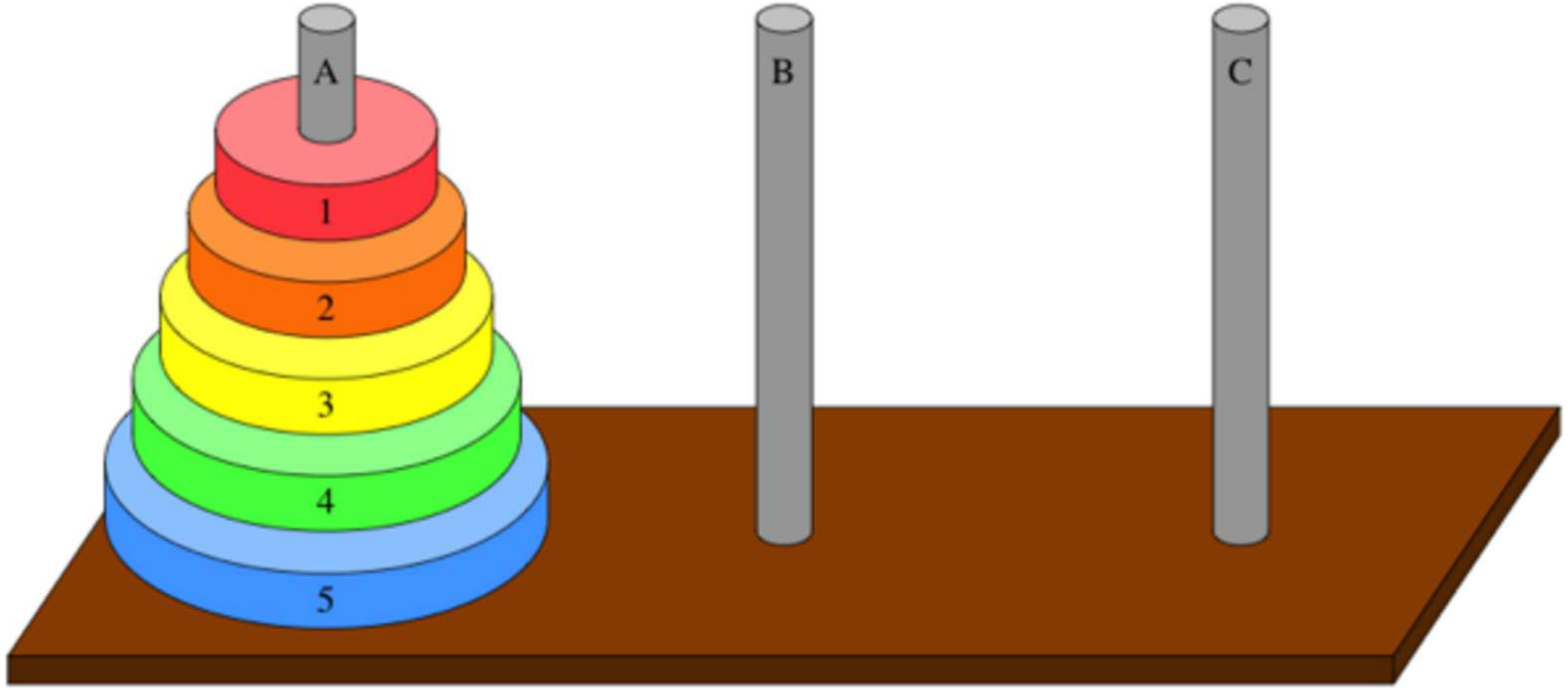
$$= \frac{p^{n-2}p^2}{\sqrt{5}} - \frac{q^{n-2}q^2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}},$$

como queríamos provar. $\square$

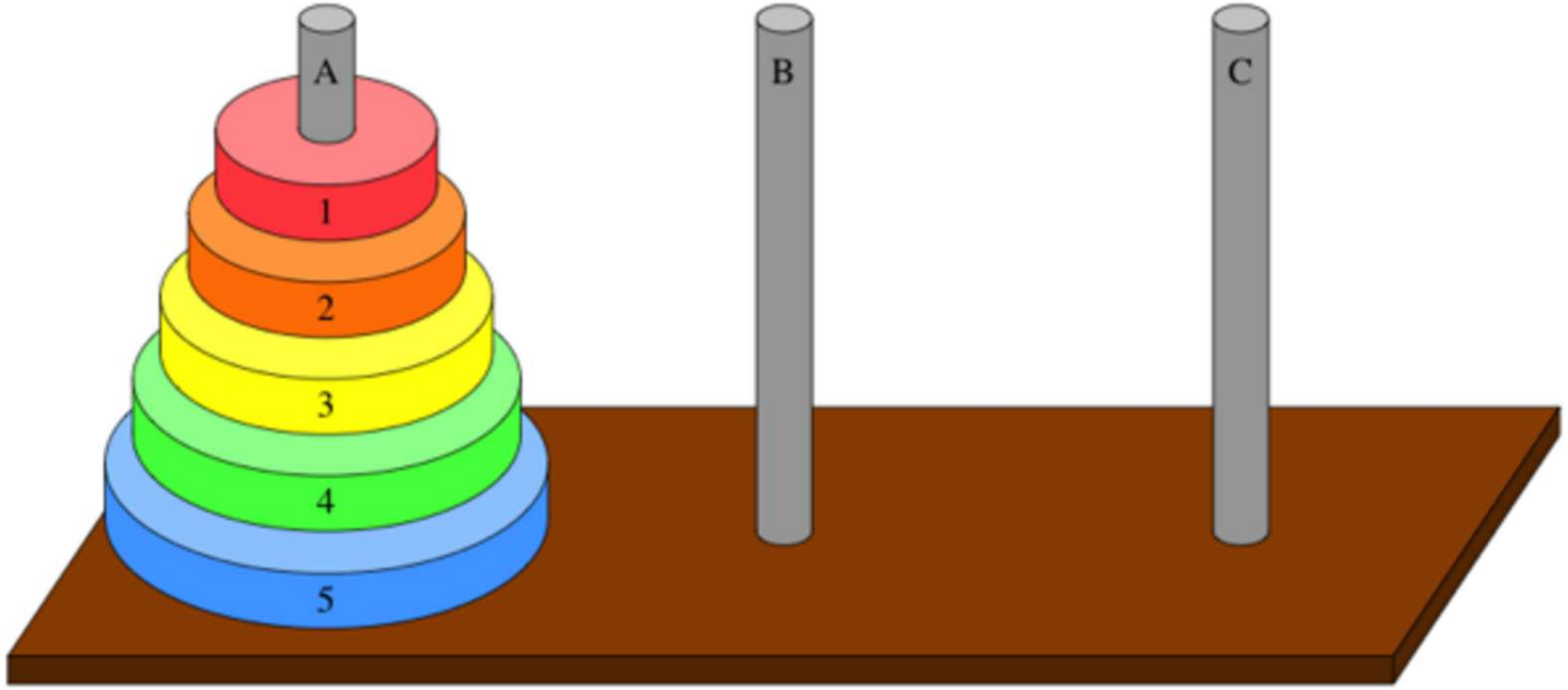
TORRE DE HANÓI

Na sua infância você já brincou com **Torre de Hanói**? Ela consiste em um conjunto de **três hastes** e um conjunto de **n discos de tamanhos distintos** (n > 0). Os discos inicialmente estão todos posicionados em uma das hastes, onde discos menores estão em cima de discos maiores.



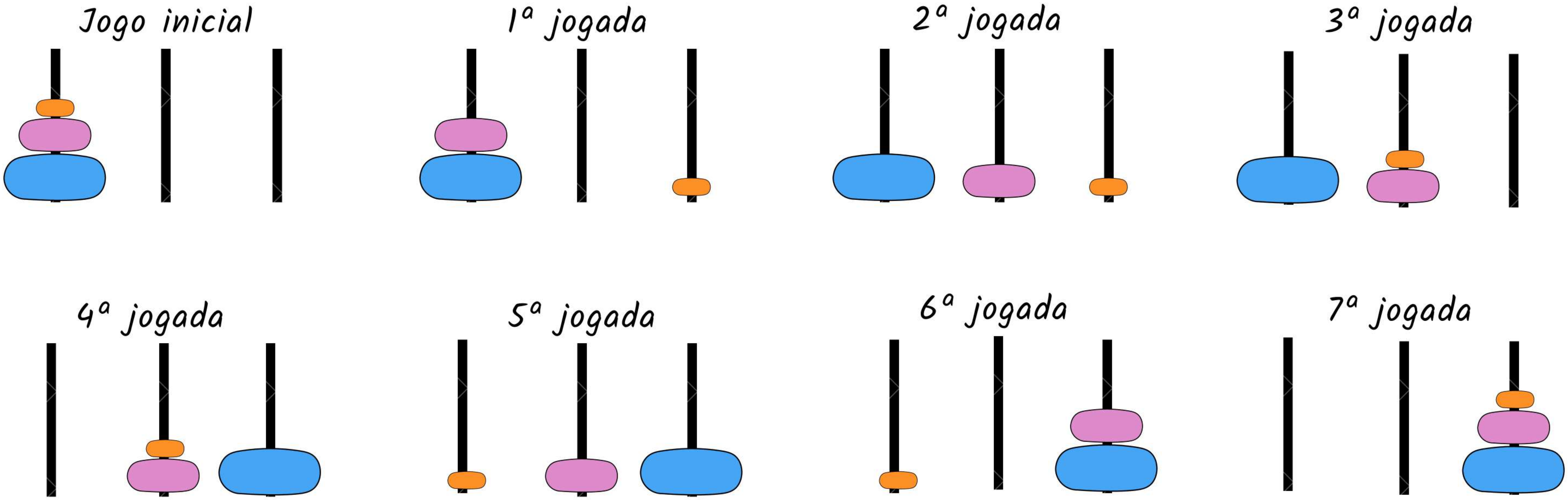
TORRE DE HANÓI

A sua missão é passar **todos os discos** para alguma das outras duas hastes usando **a menor quantidade de movimentos possível**. Entretanto, atente-se a seguinte regra: **discos maiores não podem ficar em cima de discos menores**.



TORRE DE HANÓI

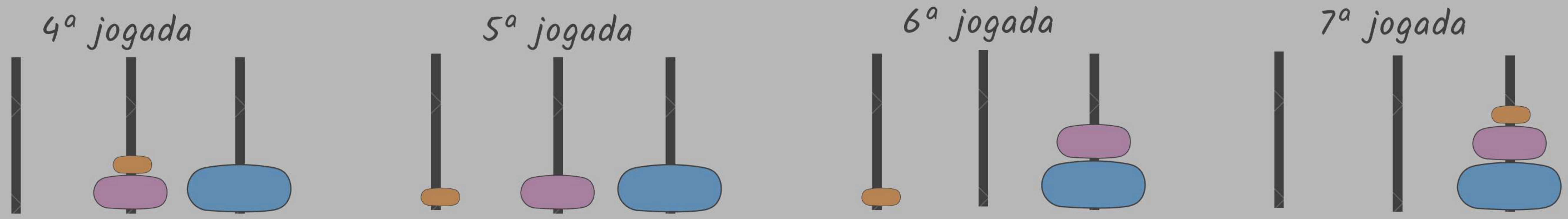
Exemplo com **3 hastes** e **3 discos**:



TORRE DE HANÓI

Exemplo com **3 hastes** e **3 discos**:

Foram necessários 7 movimentos para passar a torre da primeira até a última haste usando a haste do meio como auxiliar.



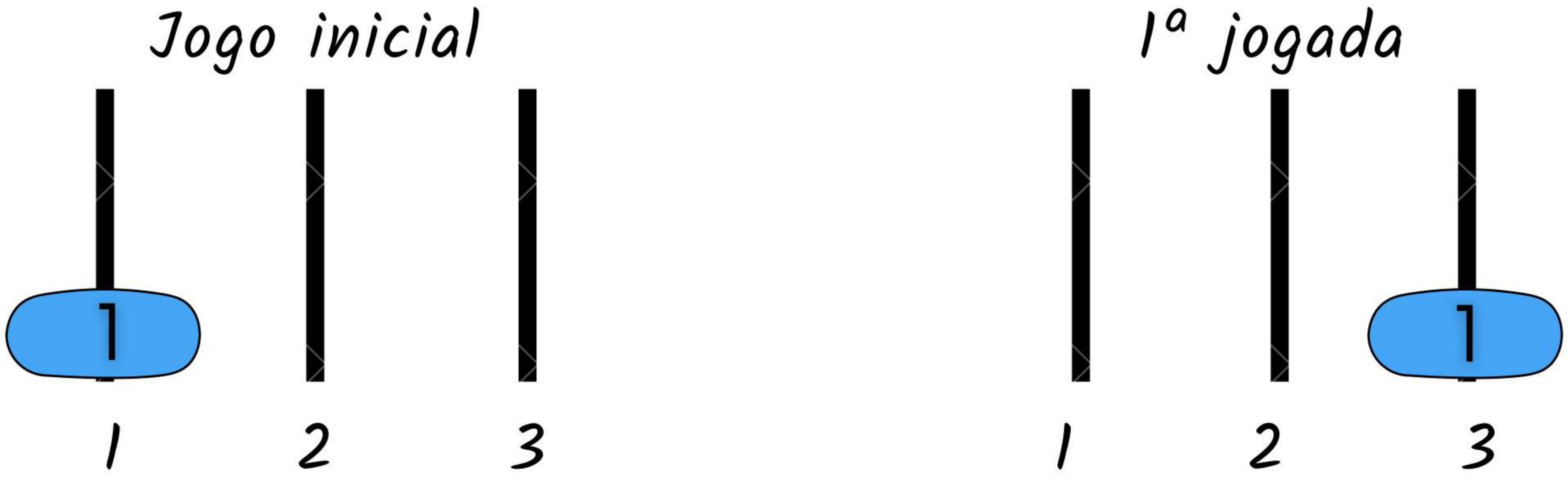
TORRE DE HANÓI

Considerando um conjunto de três hastes (h_1, h_2 e h_3) e n discos (d_1, d_2,…,d_n), vamos indicar por $d_i(h_j, h_k)$ como um movimento do disco d_i da haste h_j para a haste h_k.

Vamos ver o que acontece com diferentes tamanhos de conjuntos de discos.

TORRE DE HANÓI

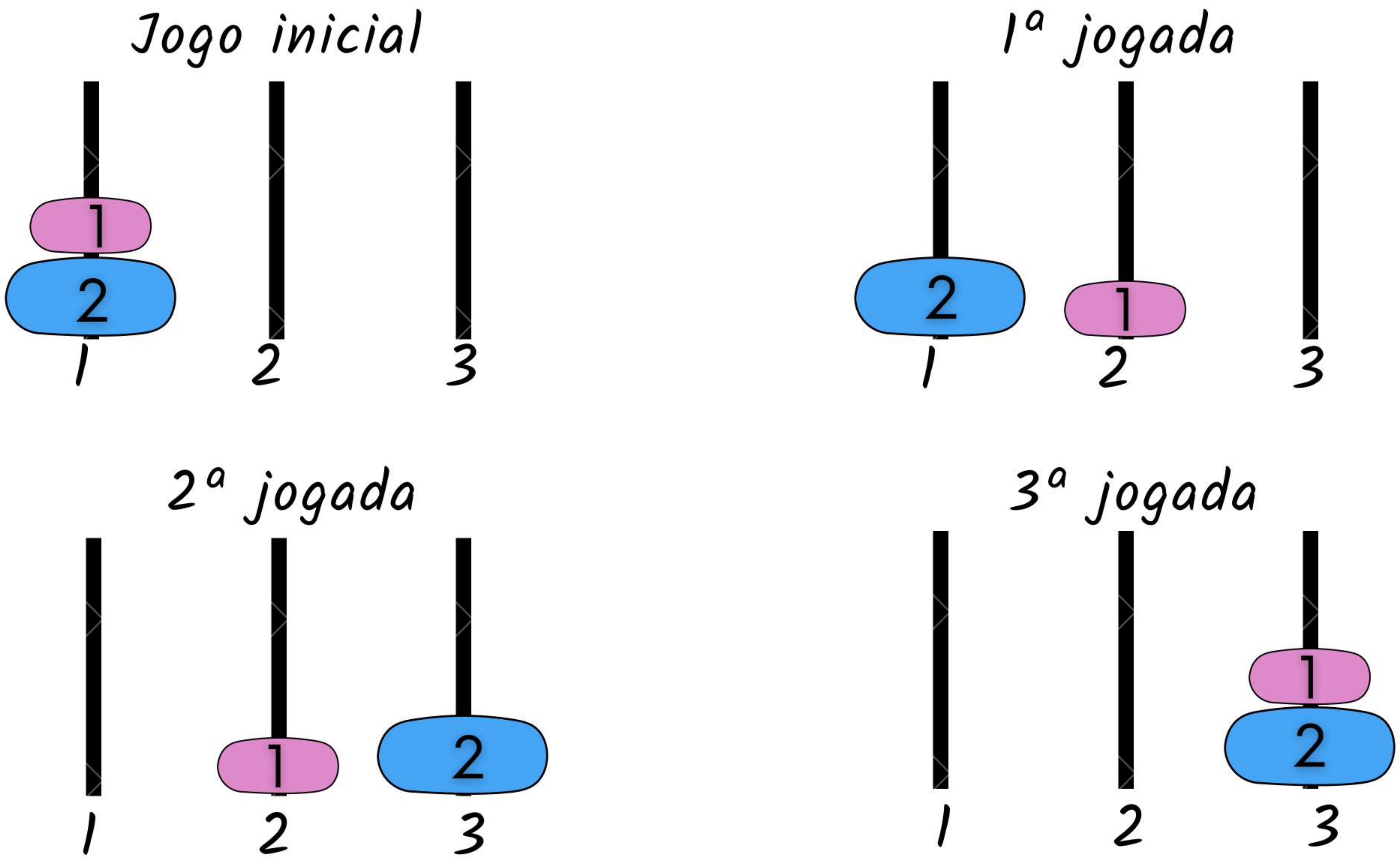
1 disco (caso base)



1 movimento: $d_1(h_1, h_3)$

TORRE DE HANÓI

2 discos

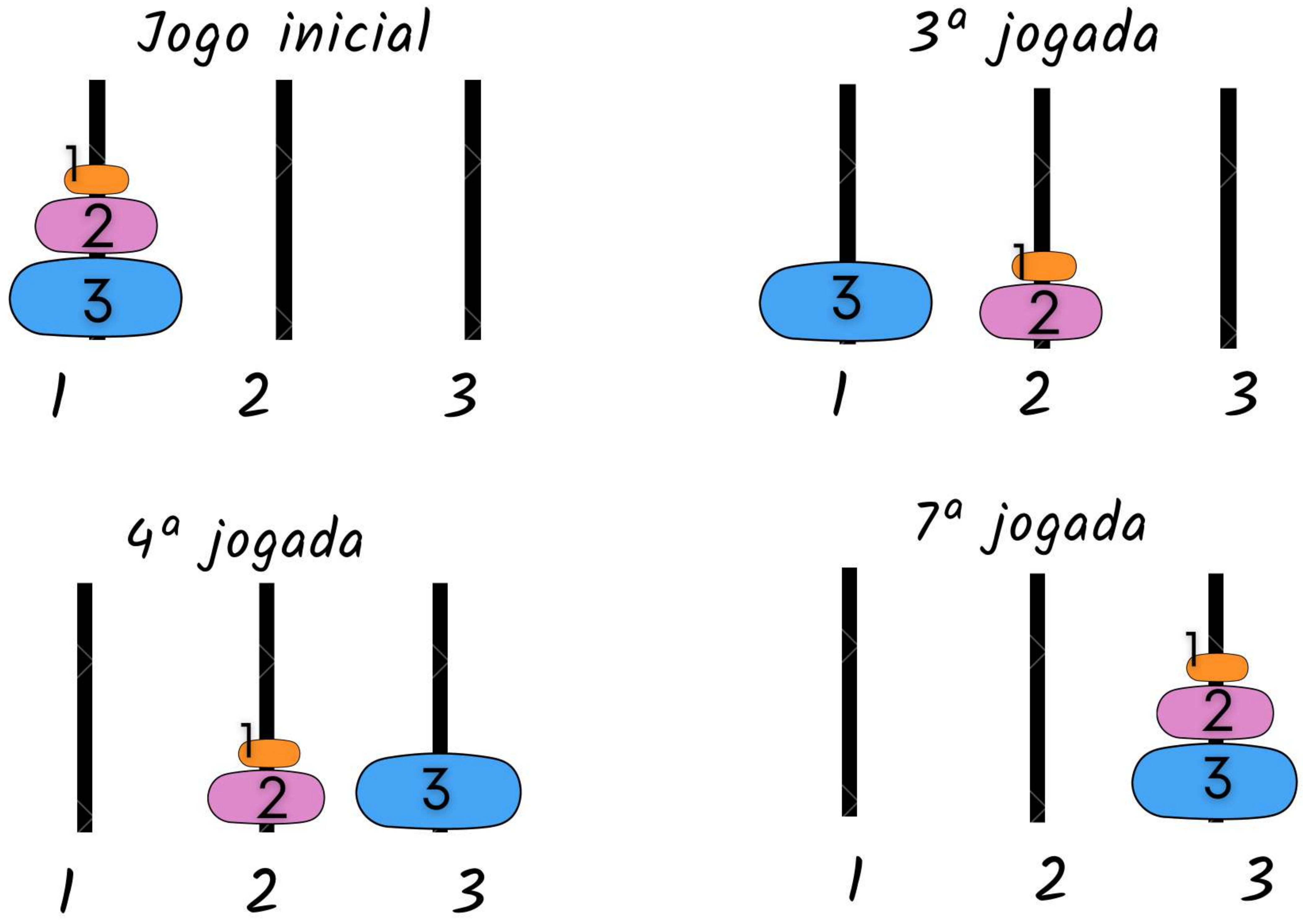


3 movimentos:

$$d_1(h_1, h_2)$$
$$d_2(h_1, h_3)$$
$$d_1(h_2, h_3)$$

TORRE DE HANÓI

3 discos



Observe que primeiro movemos a torre formada pelos **discos 1 e 2** para a **haste 2**, aí movemos o **disco 3** para a **haste 3**, e por fim movemos a torre formada pelos **discos 1 e 2** para a **haste 3**.

TORRE DE HANÓI

Chamando de $T(n)$ a quantidade de movimentos necessários para mover uma torre de n discos de uma haste para outra, do exemplo anterior, com 3 discos, temos:

$$T(3) = T(2) + 1 + T(2)$$

movimento de n-1 discos para a haste 2

o maior disco sai haste 1 e vai para a haste 3

movimento de n-1 discos para a haste 3

TORRE DE HANÓI

De modo geral, para uma torre de n discos, a recorrência é:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2T(n-1) + 1 \qquad \text{para } n > 1$$

Vamos encontrar uma fórmula fechada para essa recorrência.

TEOREMA 2.

Considere uma Torre de Hanói com $n \geq 1$ discos e 3 hastes. Então a menor quantidade de movimentos para mover a torre de uma haste a outra é igual a $2^n - 1$.

Demonstração.

Analisando diferentes valores de n, podemos observar os seguintes valores de $T(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7
T(n)	1	3	7	15	31	63	127

Demonstração.

Analisando diferentes valores de n, podemos observar os seguintes valores de $T(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7
T(n)	1	3	7	15	31	63	127
	$2^1 - 1$	$2^2 - 1$	$2^3 - 1$	$2^4 - 1$	$2^5 - 1$	$2^6 - 1$	$2^7 - 1$

Isto é, observamos que $T(n) = 2^n - 1$. Provaremos esta igualdade por meio de indução.

Demonstração.

Primeiro, provaremos a base em $n = 1$.
Ou seja, para mover uma torre com um disco, precisamos de $T(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ movimento (o que é verdade).

Nossa hipótese de indução será que, para todo $k < n$, vale que $T(k) = 2^k - 1$.

não-negativo

Demonstração.

Temos então que

$T(n) = 2T(n-1) + 1$ pela definição por recorrência

Demonstração.

Temos então que

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\boxed{T(n-1)} + 1 && \text{pela definição por recorrência} \\ &= 2\boxed{(2^{n-1} - 1)} + 1 && \text{pela hipótese de indução} \end{aligned}$$

Demonstração.

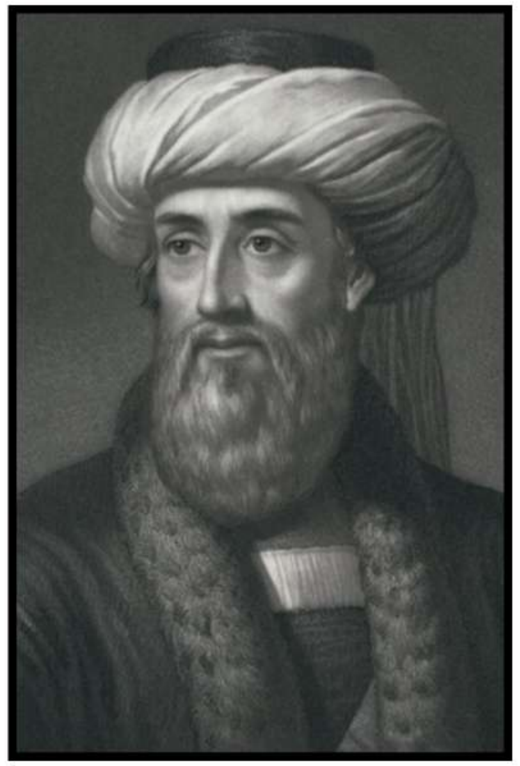
Temos então que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n-1) + 1 && \text{pela definição por recorrência} \\
&= 2(2^{n-1} - 1) + 1 && \text{pela hipótese de indução} \\
&= 2^n - 2 + 1 && \\
&= 2^n - 1 && \text{como queríamos provar.}
\end{aligned}
$$

$\square$

O PROBLEMA DE JOSEFO

Ele foi formulado pelo historiador judeu **Flavius Josephus** no século I, época em que Jerusalém vivia sob o poder do Império Romano. Conta-se que Josephus e mais 40 soldados estavam numa **emboscada** preparada pelos romanos, e que seus destinos seriam a tortura e a mutilação.

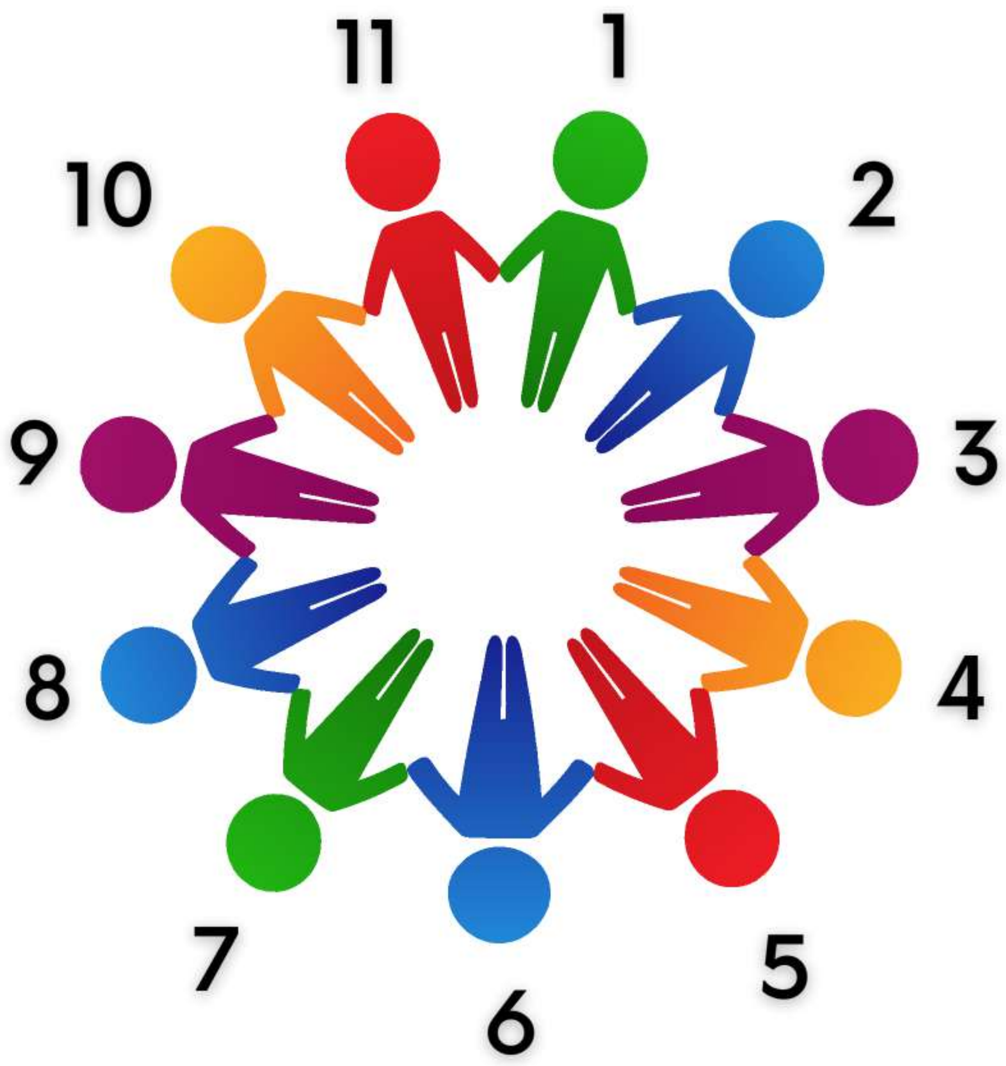


Assim, vendo a morte como única saída, decidiram se organizar em uma **roda** de maneira que, a partir da primeira pessoa e seguindo em **sentido horário**, cada pessoa daria um tiro na pessoa ao lado.

O PROBLEMA DE JOSEFO

Josephus começou a analisar em qual posição da roda deveria se posicionar para que fosse o único sobrevivente, dando origem ao célebre problema apresentado nesta aula.

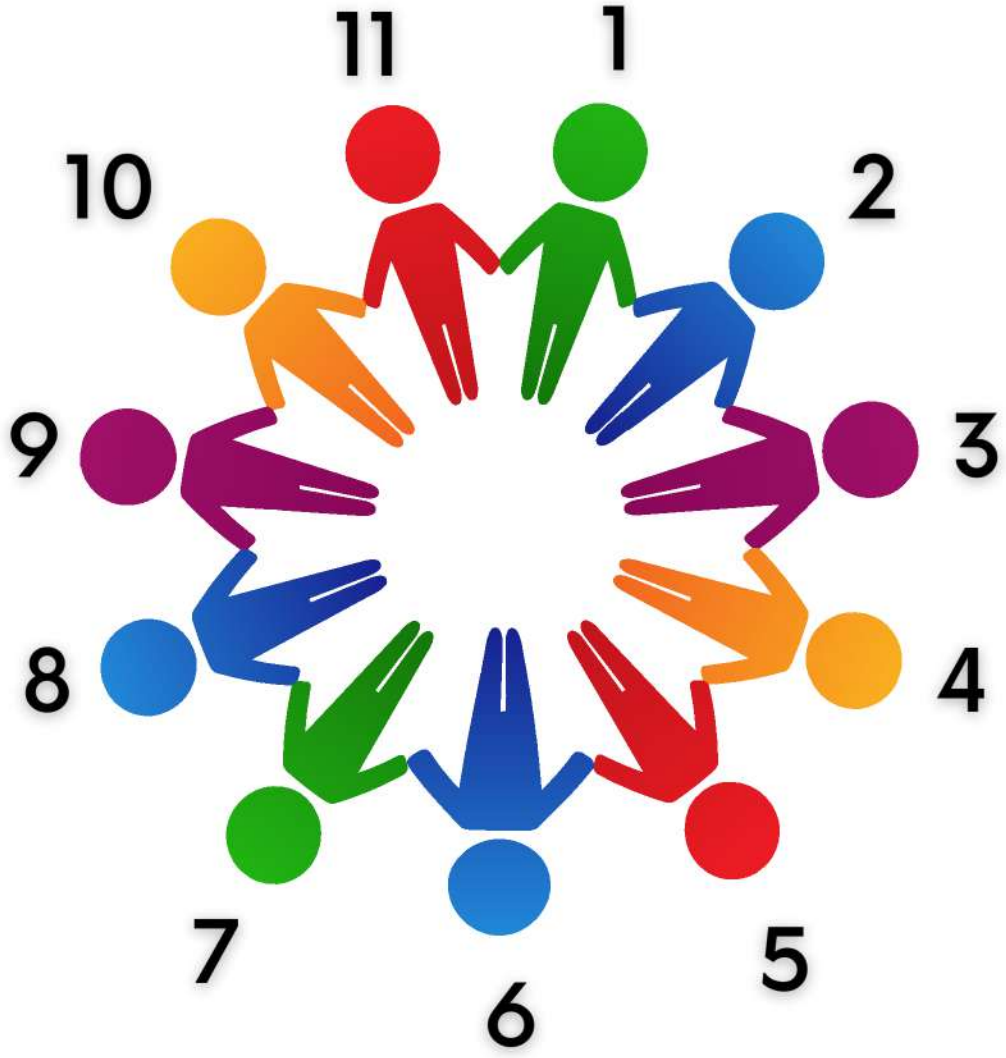
A pessoa sobrevivente é denominada **líder** dentre um grupo de n pessoas (n>0), onde estão todas dispostas em uma roda e numeradas de 1 a n, sucessivamente.



O PROBLEMA DE JOSEFO

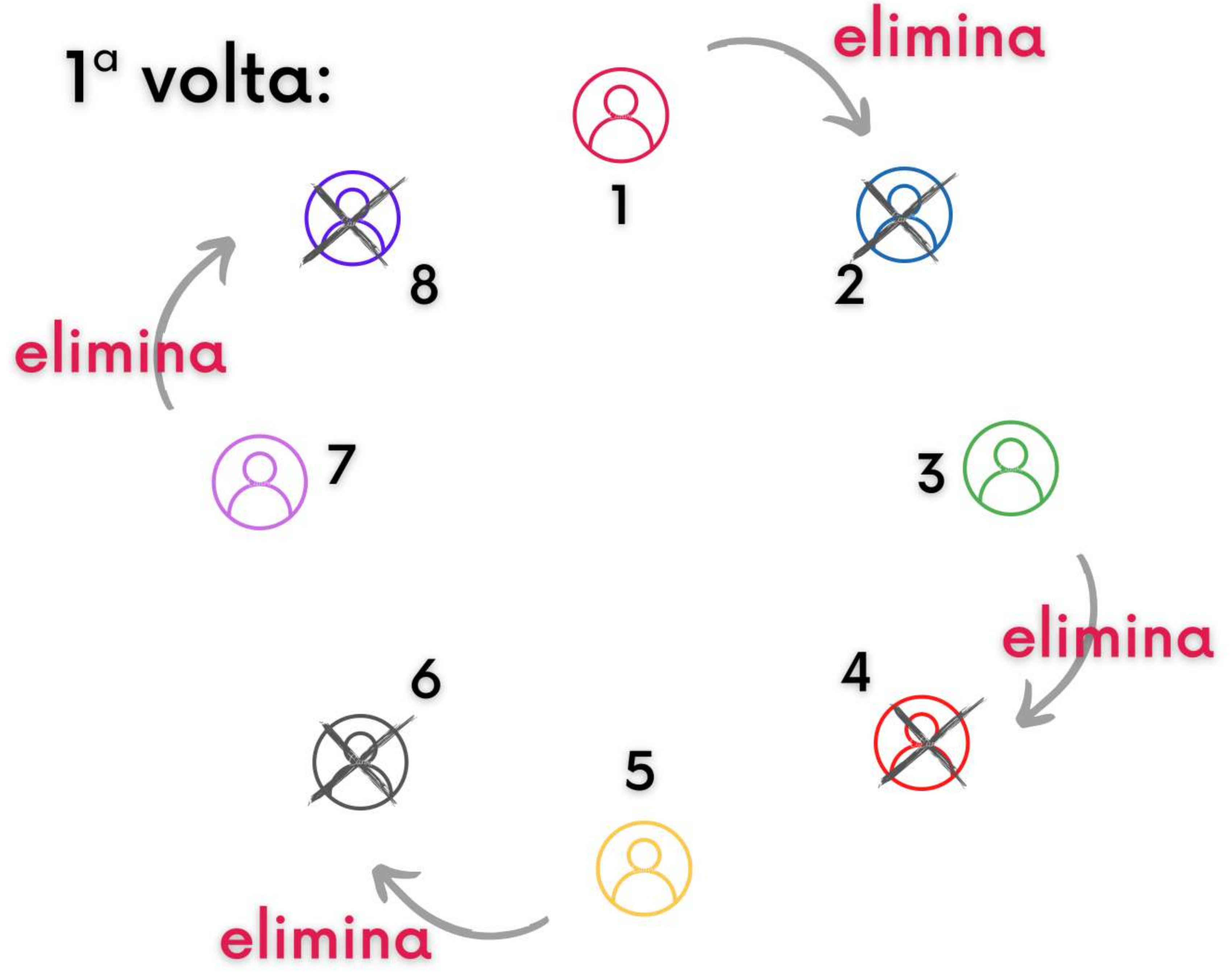
A pessoa que recebeu o número 1 elimina a próxima pessoa da roda em **sentido horário** (no caso, a pessoa de número 2).

A próxima pessoa não eliminada (pessoa de número 3) elimina a próxima pessoa da roda (pessoa de número 4), e o processo se repete em sentido horário até que haja apenas uma pessoa na roda (a líder **J(n)**).



O PROBLEMA DE JOSEFO

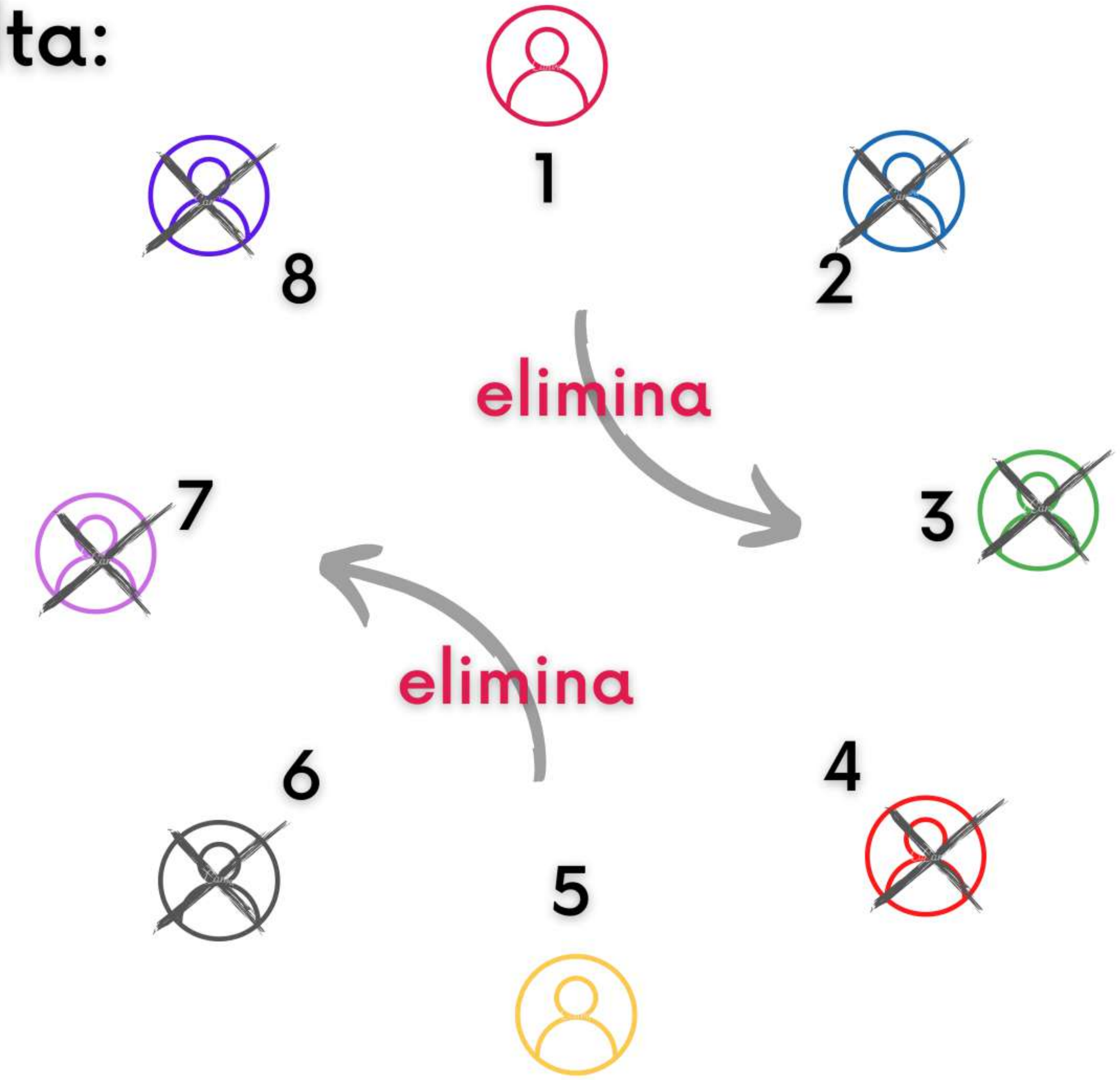
Exemplo em uma roda de **8 pessoas**



O PROBLEMA DE JOSEFO

Exemplo em uma roda de **8 pessoas**

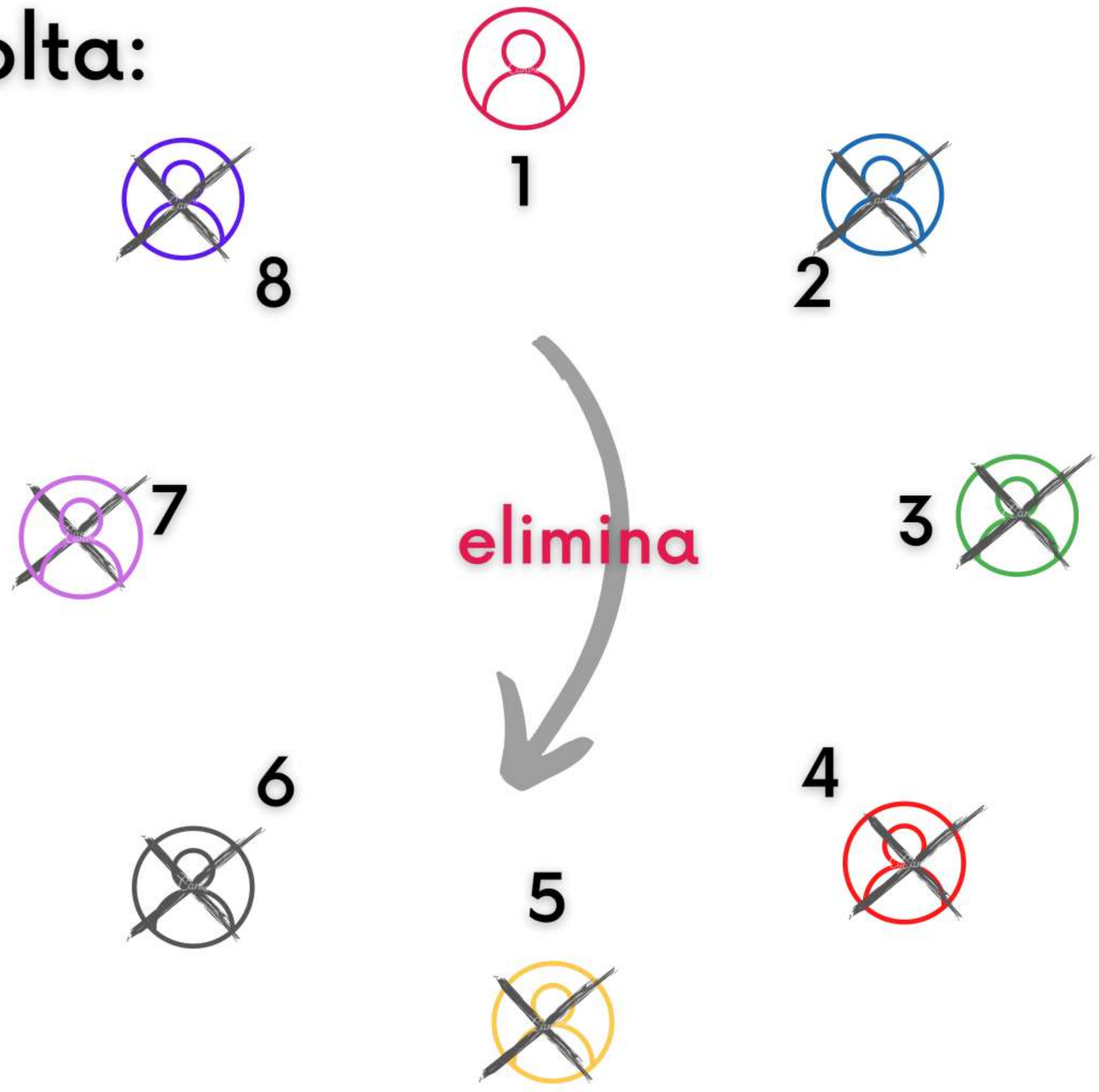
2ª volta:



O PROBLEMA DE JOSEFO

Exemplo em uma roda de **8 pessoas**

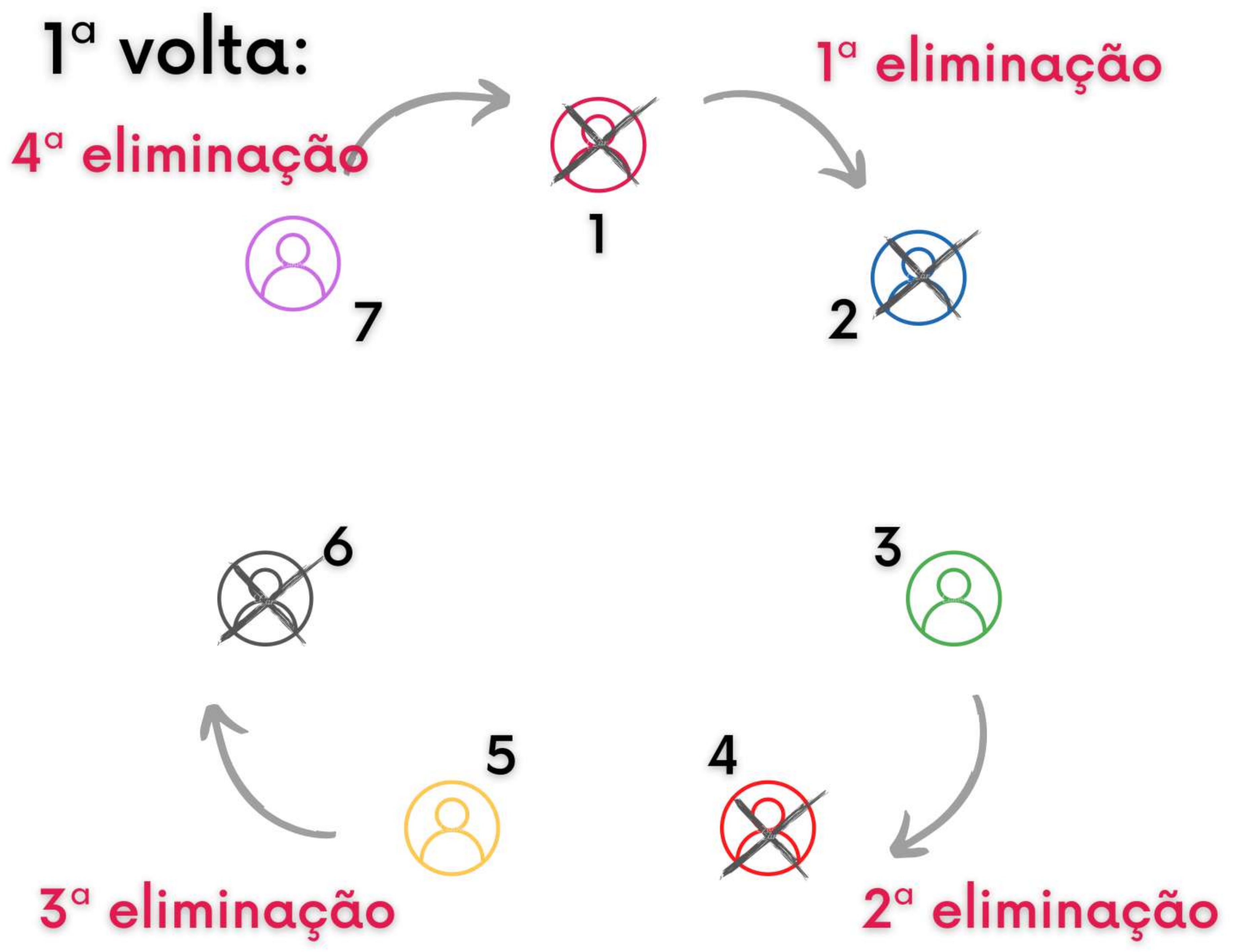
3ª volta:



O líder é o número 1, isto é, **J(8) = 1**.

O PROBLEMA DE JOSEFO

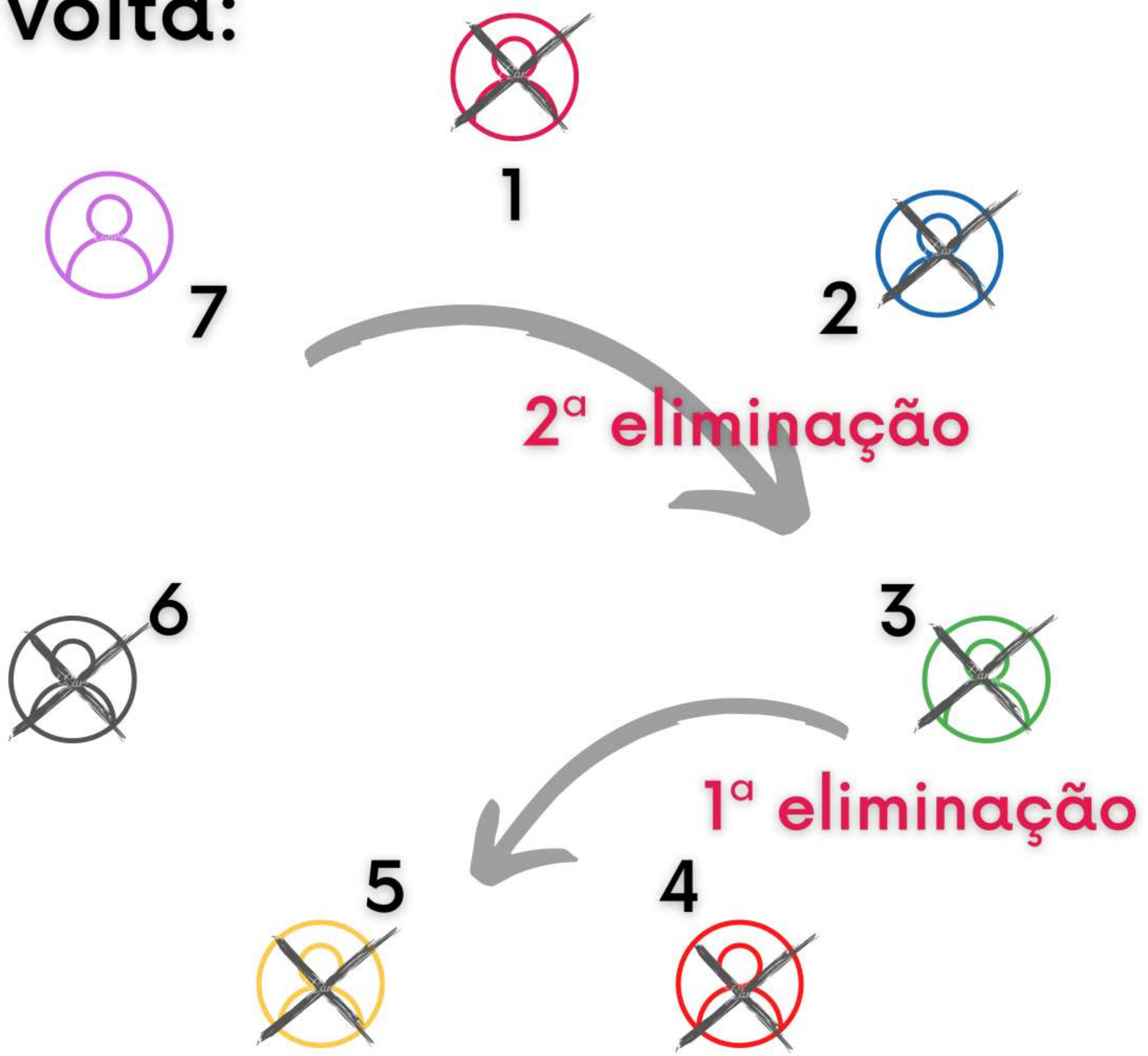
Exemplo em uma roda de **7 pessoas**



O PROBLEMA DE JOSEFO

Exemplo em uma roda de **7 pessoas**

2ª volta:



O líder é o número 7, isto é, **J(7) = 7**.

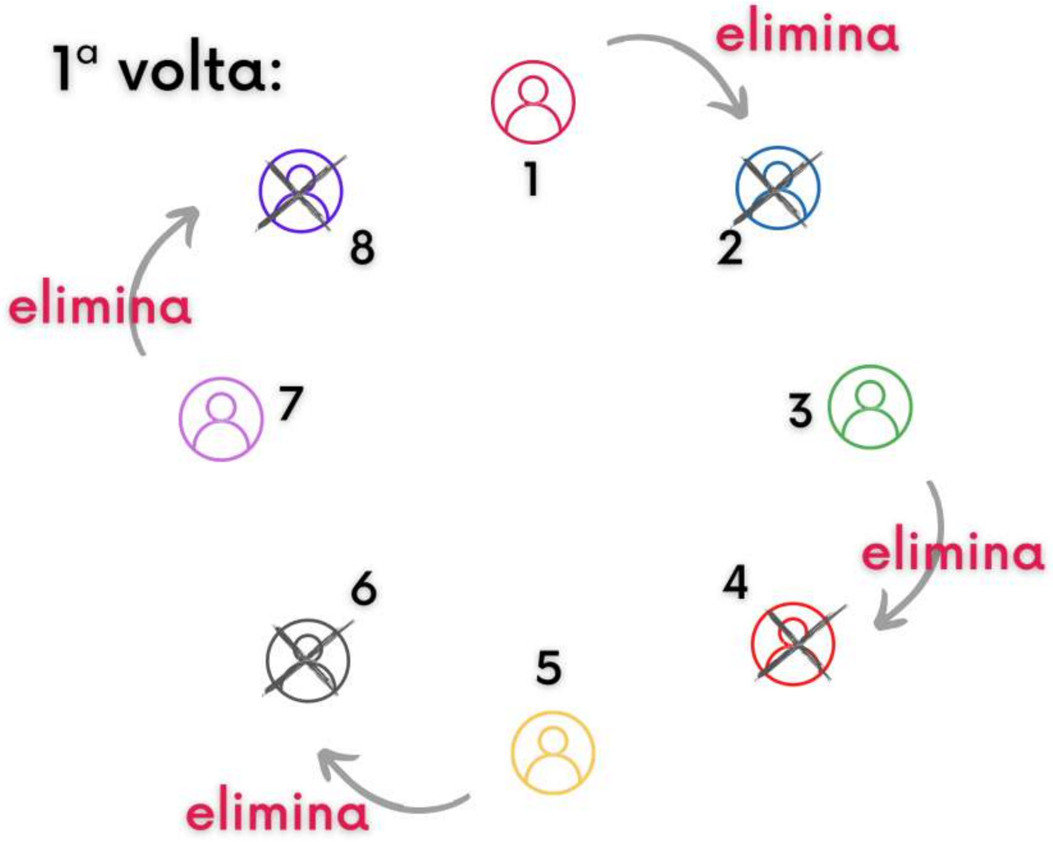
O PROBLEMA DE JOSEFO

Se observarmos atentamente, perceberemos que **se a roda atual tem tamanho par**, então após uma rodada de eliminações restarão metade das pessoas ($n/2$ pessoas), e estas pessoas são aquelas que estão na **posição ímpar** da roda atual. Isto é, as que estão na posição $\boxed{2k-1}$ da roda original (onde $k = 1,2,\ldots,n/2$).

O líder estará na posição

$$J(n) = \boxed{2J\left(\frac{n}{2}\right) - 1}$$

da roda original.



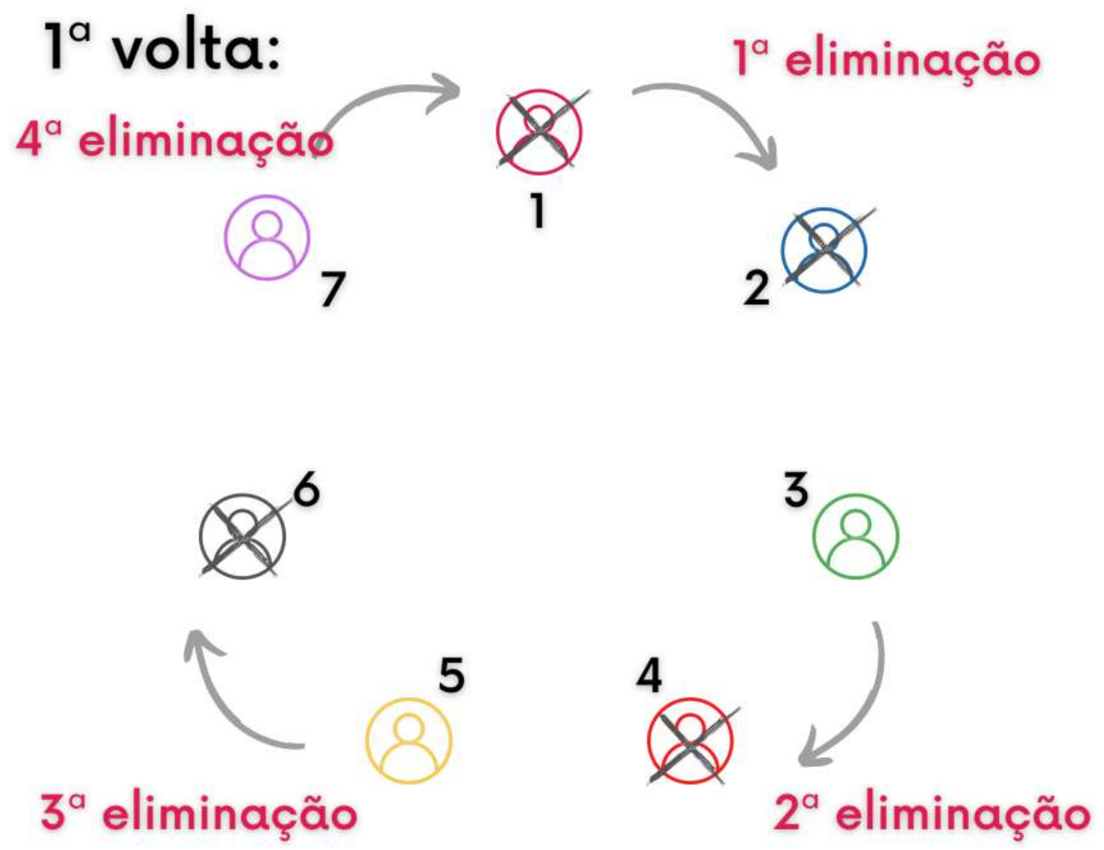
O PROBLEMA DE JOSEFO

Por outro lado, **se a roda atual tem tamanho ímpar**, então então após uma rodada de eliminações restam $(n-1)/2$ pessoas, e estas pessoas são aquelas que estão na **posição ímpar** com exceção da primeira pessoa da roda atual. Isto é, as que estão na posição $\boxed{2k+1}$ da roda original (onde $k = 1,2,\ldots,(n-1)/2$).

O líder estará na posição

$$J(n) = \boxed{2J\left(\frac{(n-1)}{2}\right) + 1}$$

da roda original.



O PROBLEMA DE JOSEFO

De modo geral, para uma roda com n pessoas, a recorrência é:

$$J(1) = 1$$
$$J(n) = J(n/2) - 1 \quad \text{para } n \text{ par}$$
$$J(n) = J((n-1)/2) + 1 \quad \text{para } n \text{ impar}$$

Vamos encontrar uma fórmula fechada para essa recorrência.

TEOREMA 3.

Considere o problema de Josefo para uma roda com $n \geq 1$ pessoas. Então o líder desta roda encontra-se na posição

$$J(n) = 2v + 1$$

em que v é um inteiro não-negativo tal que $n = 2^m + v$ e 2^m, $m \geq 0$, é maior potência tal que $2^m \leq n$.

Demonstração.

Analisando diferentes valores de n, podemos observar os seguintes valores de $T(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7
J(n)	1	1	3	1	3	5	7

2^0 valores 2^1 valores 2^2 valores

n	8	9	10	11	12	13	14
J(n)	1	3	5	7	9	11	13

2^3 valores

n	15	16	17	18	19	20	...
J(n)	15	1	3	5	7	9	...

Observe que se n é uma potência de 2, então $J(n) = 1$.

Senão, $J(n)$ é um ímpar em uma sequência de ímpares consecutivos.

Demonstração.

Analisando diferentes valores de n, podemos observar os seguintes valores de $T(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7
J(n)	1	1	3	1	3	5	7

2^0 valores 2^1 valores 2^2 valores

Podemos escrever n como $2^m + v$
Por exemplo:

$$3 = \boxed{2^1} + 1$$
$$5 = \boxed{2^2} + 1$$
$$7 = \boxed{2^2} + 3$$

Neste caso, m define o expoente da potência do “intervalo" ao qual pertence, e v é a distância de n em relação a 2^m.

Demonstração.

Os valores de m e v definem qual número ímpar da sequência de ímpares consecutivos será retornado.

Por exemplo: se $n = 6$, temos que n "pertence ao intervalo" de $m = 2$ e temos que $v = 2$ (pois 6 tem distância 2 em relação a 2^2).

Para saber qual o respectivo número ímpar associado a $n = 6$, basta fazer $\boxed{2.2 + 1 = 5}$.

De modo mais geral, temos então que

$$J(n) = J(2^m + v) = \boxed{2v + 1}$$

Demonstração.

Provaremos por indução que $J(n) = J(2^m + v) = 2v + 1$.

Primeiro, provaremos a base em $n = 1$.
Temos que $J(1) = J(2^0 + 0) = 2.0 + 1 = 1$.

Nossa hipótese de indução será que, para todo $k < n$ não-negativo, vale que $J(k) = J(2^m + v) = 2v + 1$.

Demonstração.

Se n é par, então

$J(n) = 2J(n/2) - 1$ pela definição por recorrência

Demonstração.

Se n é par, então

$$J(n) = 2\boxed{J(n/2)} - 1 \qquad \text{pela definição por recorrência}$$

$$= 2\boxed{J\left(\frac{2^m + v}{2}\right)} - 1$$

Demonstração.

Se n é par, então

$J(n) = 2J(n/2) - 1$ pela definição por recorrência

$$= 2J\left(\frac{2^m + v}{2}\right) - 1$$

$$= 2J\left(2^{m-1} + \frac{v}{2}\right) - 1$$

Demonstração.

Se n é par, então

$$\begin{aligned}
J(n) &= 2J(n/2) - 1 && \text{pela definição por recorrência} \\
&= 2J\left(\frac{2^m + v}{2}\right) - 1 \\
&= 2J\left(2^{m-1} + \frac{v}{2}\right) - 1 \\
&= 2\left(\frac{2v}{2} + 1\right) - 1 && \text{pela hipótese de indução}
\end{aligned}$$

Demonstração.

Se n é par, então

$$
\begin{aligned}
J(n) &= 2J(n/2) - 1 && \text{pela definição por recorrência} \\
&= 2J\left(\frac{2^m + v}{2}\right) - 1 \\
&= 2J\left(2^{m-1} + \frac{v}{2}\right) - 1 \\
&= 2\left(\frac{2v}{2} + 1\right) - 1 && \text{pela hipótese de indução} \\
&= 2v + 1 && \text{como queríamos provar.}
\end{aligned}
$$

Demonstração.

Se n é ímpar, então

$J(n) = 2J((n-1)/2) + 1$ pela definição por recorrência

Demonstração.

Se n é ímpar, então

$$J(n) = 2\boxed{J((n-1)/2)} + 1 \qquad \text{pela definição por recorrência}$$

$$= 2\boxed{J\left(\frac{2^m + v - 1}{2}\right)} + 1$$

Demonstração.

Se n é ímpar, então

$$J(n) = 2J((n-1)/2) + 1 \qquad \text{pela definição por recorrência}$$

$$= 2J\left(\frac{2^m + v - 1}{2}\right) + 1$$

$$= 2J\left(2^{m-1} + \frac{v-1}{2}\right) + 1$$

Demonstração.

Se n é ímpar, então

$$
\begin{aligned}
J(n) &= 2J((n-1)/2) + 1 && \text{pela definição por recorrência} \\
&= 2J\left(\frac{2^m + v - 1}{2}\right) + 1 \\
&= 2J\left(2^{m-1} + \frac{v-1}{2}\right) + 1 \\
&= 2\left(\frac{2(v-1)}{2} + 1\right) + 1 && \text{pela hipótese de indução}
\end{aligned}
$$

Demonstração.

Se n é ímpar, então

$$\begin{aligned}
J(n) &= 2J((n-1)/2)+1 && \text{pela definição por recorrência} \\
&= 2J\left(\frac{2^m+v-1}{2}\right)+1 \\
&= 2J\left(2^{m-1}+\frac{v-1}{2}\right)+1 \\
&= 2\left(\frac{2(v-1)}{2}+1\right)+1 && \text{pela hipótese de indução} \\
&= 2v+1 && \text{como queríamos provar.}
\end{aligned}$$

$\square$

DEFININDO CONJUNTOS POR RECORRÊNCIA

Da mesma forma que usamos recorrência para definir sequências numéricas, podemos utilizá-las para definir **conjuntos**.

No exemplo a seguir, mostraremos veremos como usar recorrência para gerar o conjunto dos inteiros positivos múltiplos de 3.

DEFININDO CONJUNTOS POR RECORRÊNCIA

Usaremos o que se chama de **indução estrutural**.

Suponha que **S** é um conjunto definido por recorrência e suponha que existe uma propriedade **P(x)** que pode ser válida ou não para um elemento **x** de **S**. Se pudermos provar as proposições abaixo, então provaremos que **P é válida para todos os elementos de S**:

1. A propriedade P é válida para todos os elementos descritos na **base**.

2. Se a propriedade P for válida para alguns elementos de S, então será válida para todos os elementos novos de S construídos desses elementos usando o **passo indutivo**.

TEOREMA 4.

Seja X o conjunto de inteiros definido recursivamente por

1. $3 \in X$;
2. para quaisquer $n_1, n_2 \in X$, temos $n_1 + n_2 \in X$.

Mostre que $X = 3\mathbb{Z}_{>0}$.

Demonstração.

Para mostrar que $X = 3\mathbb{Z}_{>0}$, mostraremos que

a) $3\mathbb{Z}_{>0} \subseteq X$.

b) $X \subseteq 3\mathbb{Z}_{>0}$.

Para mostrar a), considere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Vamos mostrar que $3n \in X$. Se $n = 1$, então da condição 1 da definição recursiva temos que $3n = 3$ e $3 \in X$.

Demonstração.

Supondo $n > 1$, nossa hipótese de indução é que, para todo inteiro $1 \leq n' < n$, temos $3n' \in X$.

Ora, $3n = 3 + 3(n-1)$. Como $n > 1$, temos tanto que

* $3 \in X$ (da base de indução)
* $3(n-1) \in X$ (da hipótese de indução)

Assim, pela condição 2 da definição recursiva, obtemos que $3n = 3 + 3(n-1) \in X$, como queríamos.

Demonstração.

Mostraremos agora que $X \subseteq 3\mathbb{Z}_{>0}$. Por **indução estrutural** na definição de X, mostraremos que

a) $3 \in 3\mathbb{Z}_{>0}$;
b) para quaisquer $n_1, n_2 \in X \cap 3\mathbb{Z}_{>0}$, temos $n_1 + n_2 \in 3\mathbb{Z}_{>0}$.

Temos que a) é trivial.
Para mostrar b), considere $n_1, n_2 \in X \cap 3\mathbb{Z}_{>0}$. Então existem $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tais que $n_1 = 3t_1$ e $n_2 = 3t_2$.

Logo, $n_1 + n_2 = 3(t_1 + t_2) \in 3\mathbb{Z}_{>0}$, como queríamos. $\square$

ALGORITMOS DEFINIDOS POR RECORRÊNCIA

Quando aprendemos **recursão**, na verdade isto nada mais é do que uma recorrência aplicada em um contexto algorítmico.

Uma função recursiva é uma função que **chama a si mesma**. É como quando você segura um espelho na frente de outro espelho.

ALGORITMO DE EUCLIDES

Um algoritmo clássico recursivo é o algoritmo proposto por Euclides para calcular o **máximo divisor comum** entre dois inteiros não-negativos.

A fórmula aberta utilizada neste algoritmo é dada por:

Dados os inteiros a e b não-negativos e não ambos iguais a zero, temos

$$\operatorname{mcd}(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } b = 0, \\ \operatorname{mcd}(b, a \bmod b) & \text{se } b > 0 \end{cases}$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Dados os inteiros a e b não-negativos e não ambos iguais a zero, temos

$$\mathrm{mcd}(a,b) = \begin{cases} a & \text{se } b = 0, \\ \mathrm{mcd}(b, a \mod b) & \text{se } b > 0 \end{cases}$$

A partir da fórmula, temos o algoritmo abaixo:

Euclides(a, b):

1. Se $b = 0$, devolva a;
2. Devolva Euclides($b, a \mod b$).

TEOREMA 5.

Sendo a e b inteiros não-negativos e não ambos iguais a zero, Euclides$(a, b) = \mathrm{mcd}(a, b)$.

Ou seja, demonstraremos que o algoritmo de Euclides computa corretamente o máximo divisor comum entre **a** e **b**.

Demonstração.

Se $b = 0$, então $a > 0$ (pois a e b não são ambos iguais a zero).

Daí, temos Euclides$(a, b) = a$ e $\mathrm{mcd}(a, b) = a$, pois a divide o próprio a e zero (pois todo número é divisor de zero, como vimos em aulas passadas).

Logo, a condição básica do algoritmo está correta.

Demonstração.

Suponha que $b > 0$. Por indução em b, suponha como hipótese que Euclides(a', b') = $\mathrm{mcd}(a', b')$, para todo par de inteiros não-negativos e não ambos iguais a zero a' e b' satisfazendo $a' \geq b'$ e $b' < b$.

da condição 2 da recursão

Como $b > 0$, temos do algoritmo que Euclides(a, b) = Euclides$(b, a \mod b)$. Independente se $a \geq b$ ou $a < b$, temos que $b > a \mod b$.

Demonstração.

Suponha que $b > 0$. Por indução em b, suponha como hipótese que Euclides(a', b') = $\mathrm{mcd}(a', b')$, para todo par de inteiros não-negativos e não ambos iguais a zero a' e b' satisfazendo $a' \geq b'$ e $b' < b$.

da condição 2 da recursão

Como $b > 0$, temos do algoritmo que Euclides(a, b) = Euclides$(b, a \mod b)$. Independente se $a \geq b$ ou $a < b$, temos que $b > a \mod b$.

Assim, o par $b, a \mod b$ satisfaz as condições da hipótese da indução e, portanto, Euclides$(b, a \mod b)$ = $\mathrm{mcd}(b, a \mod b)$.

Demonstração.

Nos resta mostrar que $\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(b, a \mod b)$.

Seja $r = a \mod b$. Ou seja, r é o inteiro tal que $0 \leq r < b$ e $a = bk + r$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim, para todo divisor d comum a a e b, temos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{aligned} a &= dk_1 \\ b &= dk_2. \end{aligned}$$

Daí, obtemos $\begin{aligned}[t] r &= a - bk \\ &= dk_1 - dk_2k \\ &= d(k_1 - k_2k); \end{aligned}$

ou seja, d também divide r, e logo, d é divisor comum de a, b e r.

Demonstração.

Para concluir a demonstração de que $\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(b, r)$, precisamos mostrar que b e r não tem nenhum divisor comum que não seja também divisor de a. Assim, para todo divisor c comum a b e r, temos $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{aligned} b &= cq_1 \\ r &= cq_2. \end{aligned}$$

Consequentemente, $a = bk + r = cq_1k + cq_2 = c(q_1k + q_2)$.
Portanto, c também é um divisor de a, como queríamos.

$\square$