27.10.20

הרצאה 2 - ביצועי רשתות

NUM = Network Utility Maximization

בעיית אופטימיזציה עם אילוצים:

פונ' מטרה קעורה
$$\max_{\{x_r\}} \sum_r U_r(x_r)$$

אילוצי קיבול על לינקים
$$\text{s.t.} \quad \sum_{r: l \in r} x_r \le C_l \quad \forall l$$

אילוצים על קצבים חיוביים
$$x_r \ge 0 \quad \text{for all r}$$

* נדבר על אופטימיזציה לפונקציה קמורה למרות שבבעיה בגרסה המקסימלית (זו עם פונקציה קעורה) נחפש בה max.

למה אופטימיזציה קמורה?

בעיית אופטימיזציה כללית

נוסח בעיית אופטימיזציה כללית , לאו דווקא קמורה:

$$\max_{\{x\}} f(x) \quad \text{objective function}$$

$x \in S$

$$\text{s.t.} \quad h_i(x) \le 0 \qquad i = 1 \dots I$$
אילוצי אי שוויון

$$g_j(x) = 0 \qquad j = 1 \dots J$$
אילוצי שוויון.

פתרון פיזיבילי - פתרון x שנמצא ב-S ומקיים את האילוצים

זו נקראת בעיה פרימלית (בהמשך נראה בעיה דואלית)

p^* - פתרון הבעיה הפרימלית **כלומר ערך הפונקציה בפתרון הבעיה**

* נגדיר לגרנז'יאן: (Lagrangian)

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{I} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{J} \mu_j g_j(x)$$

$L(x,\lambda,\mu)$ - סכום משוקלל של פונקציית המטרה והאילוצים.

$\lambda_i \ge 0$ - כופלי לגרנז' של אילוצי א"ש

μ_j - כופלי לגרנז' של אילוצי שוויון.

* נגדיר לגרנז'יאן דואלי: (Lagrangian dual function)

$$D(\cancel{x}, \lambda, \mu) = \sup_{x \in S} L(x, \lambda, \mu)$$

תכונות

1) $D(\lambda,\mu)$ קמורה

2) $D(\lambda,\mu) \ge p^*$

הערה: $y = ax + b$ פונק' אפינית

$y = ax$ פונק' לינארית

<u>הוכחה</u>

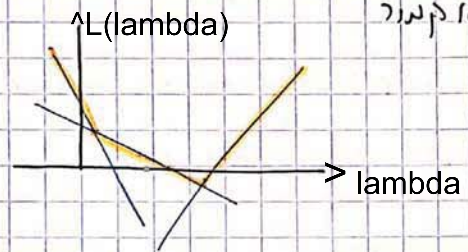
נוכיח טענה 1:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{I} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{J} \mu_j g_j(x)$$

$L(x,\lambda,\mu)$ היא פונק' אפינית ביחס למשתנים (λ,μ)

סופרימום של פונק' אפיניות הוא קמור

המחשה:



נוכיח טענה 2:

מהגדרת אילוצי שויון וא"ש וחיוביות הכופלים של אילוצי א"ש אזי לכל x פיזיבילי מתקיים:

$$L(x,\lambda,\mu) \geq f(x)$$

בפרט נכון לסופרמום באותו תומך:

$$\sup_{\substack{x\in S\\ h(x)\leq 0\\ g(x)=0}} L(x,\lambda,\mu) \geq \sup_{\substack{x\in S\\ h(x)\leq 0\\ g(x)=0}} f(x) = p^*$$

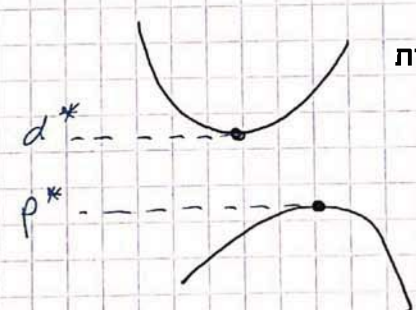
ובפרט מתקיים:

$$D(\lambda,\mu) = \sup_{x\in S} L(x,\lambda,\mu) \geq \sup_{\substack{x\in S\\ h(x)\leq 0\\ g(x)=0}} L(x,\lambda,\mu) \geq p^*$$

מ.ש.ל

מה קיבלנו עד כה:

פונקציית לגראנזיאן דואלית



בעיה פרימאלית

החסם ההדוק ביותר על p^* הוא:

$$\boxed{d^* = \inf_{\substack{\lambda\geq 0\\ \mu}} D(\lambda,\mu)}$$

זו נקראת הבעיה הדואלית של לגרנז'.

נגדיר פער דואליות $(d^* - p^*)$ (duality gap)

יש "דואליות חזקה" אם $d^* = p^*$ והפער שווה לאפס.

$d^* \geq p^*$ נכון תמיד 3

5/11/19

* נגדיר בעית אופטימיזציה קמורה:

1) פונקצית מטרה $f(x)$ קמורה

2) אילוצי אי"ש $h_i(x)$ הן פונקציות קמורות

3) אילוצי שיויון $g_j(x)$ הן פונקציות אפיניות

* **תנאי סלייטר** (Slater's condition)

עבור אופטימיזציה קמורה מתקיימת דואליות חזקה

(ישנה דרישה נוספת שמתקיימת לענינינו)

לכן, באופטימיזציה קמורה נוכל לפתור את הבעיה הפרימלית או הדואלית ולקבל אופטימום. בהמשך נלמד אלגוריתמים שמתבססים על עובדה זו.

כעת נראה תוצאה חשובה לפתרון בעיית האופטימיזציה:

* **תנאי KKT** (Karush–Kuhn–Tucker)

x^*, λ^*, μ^* אופטימליים חייבים לקיים:

1) אילוצים פרימליים מתקיימים: $h_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i$

$g_j(x^*) = 0 \quad \forall j$

2) אילוצים דואליים מתקיימים: $\lambda_i^* \geq 0$

3) Complementary Slackness: $\lambda_i^* \cdot h_i(x^*) = 0 \quad \forall i$

4) גרדיאנט של לגרנז'יאן ביחס ל-x מתאפס:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k} - \sum_i \lambda_i^* \frac{\partial h_i(x^*)}{\partial x_k} + \sum_j \mu_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_k} = 0 \quad \forall k$$

<u>הערה</u>: עבור אופטימיזציה קמורה תנאי KKT הם תנאי מספיק למקסימום גלובלי

הוכחה: - מתנאי 1 ו-3 נקבל:

$$f(x^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \qquad (*)$$

- נשים לב שהלגרנז'יאן היא פונ' קמורה ביחס ל-x:

$$L(x,\lambda,\mu) = \underbrace{f(x)}_{\text{קמורה}} + \sum_i \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0 \leftarrow 2} \underbrace{(-h_i(x))}_{\text{קמורה}} + \sum_j \underbrace{\mu_j g_j(x)}_{\text{לינארית} \Rightarrow \text{קמורה}}$$

לכל μ_j

(סכום של פונ' קמורות)

- לכן המינ' הגלובלי של $L(x,\lambda,\mu)$ מתקבל כאשר הגרדיאנט ביחס ל-x מתאפס.

~~מתנאי השוויון (4) נקבל:~~

- מכיוון שהאופטימיזציה מתקבלת מתוך תנאי 4 נקבל:

$$D(\lambda^*,\mu^*) = \sup_{x\in S} L(x,\lambda^*,\mu^*) = L(x^*,\lambda^*,\mu^*) \overset{(*)}{=} f(x^*)$$

x^* מקיים KKT (בפרט תנאי 4)
ולכן ממקסם את L לכל μ,λ (בפרט עבור λ^*,μ^*)

~~בגלל שמתקיים (*) נקבל כי~~

- קיבלנו: $D(\lambda^*,\mu^*) = f(x^*)$ (**)

- לבסוף, נקבל:

$$D(\lambda^*,\mu^*) \overset{(**)}{=} f(x^*) \le \sup_{\substack{x\in S\\ h(x)\le 0\\ g(x)=0}} f(x) = p^* \le D(\lambda^*,\mu^*)$$

כי x^* מקיים אילוצים ו-sup קטן לכל היותר

לכל μ,λ D חוסמת את p^* מלמעלה.

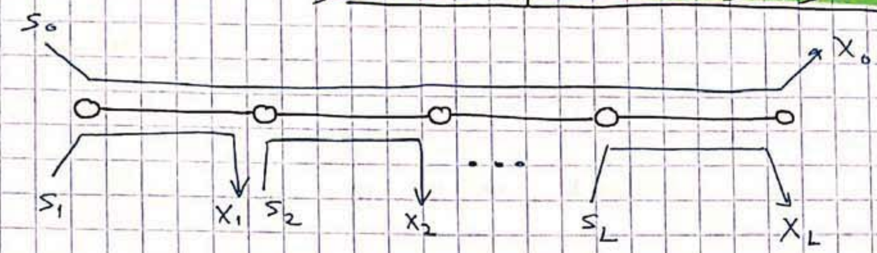
$$\Rightarrow D(\lambda^*,\mu^*) = f(x^*) = p^*$$

כלומר μ^*,λ^*,x^* אופטימליים.

Scanned with CamScanner

שכבת התעבורה: בקרת צפיפות

דוגמא:



נתונה רשת עם L לינקים, $L+1$ משתמשים.

קיבול $c_l = 1 \quad \forall l$

מקור 0 משתמש בכל הלינקים

מקור 1 משתמש בלינק 1

⋮

מקור L משתמש בלינק L

(א) נסחו בעיית NUM תחת קריטריון הוגנות פרופורציונאלית

$$\max_{\{x\}} \sum_{r=0}^{L} \log(x_r)$$

$$\text{s.t.} \quad x_0 + x_i \le 1 \quad \forall i = 1, 2, ..., L$$

נרשום בצורה סטנדרטית:

$$\max_{\{x\}} \sum_{r=0}^{L} \log(x_r)$$

$$\text{s.t.} \quad x_0 + x_i - 1 \le 0 \quad \forall i$$

קיבלנו אופטימיזציה קמורה (פונק' מטרה קמורה ואילוצים אפיניים)

(ב) היעזרו בתנאי KKT ופתרון הבעיה למצוא הקצאת קצבים פרופורציונית הוגנת

נרשום את הלגרנז'יאן:

$$L(x,\lambda) = \sum_{r=0}^{L} \log(x_r) - \sum_{i=1}^{L} \lambda_i (x_0 + x_i - 1)$$

נגזור לפי x_i השווה לאפס

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_0} = \frac{1}{x_0} - \sum_{i=1}^{L} \lambda_i = 0$$

$$\frac{\partial (L(x,\lambda))}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i} - \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

$$x_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{L} \lambda_i} \quad ; \quad x_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad \forall i = 1, 2, ..., L$$

5/1/19

המשך דוגמא של בקר זרימה

נרשום complementary slackness:

$$\lambda_i (x_0 + x_i - 1) = 0 \qquad \forall i=1, 2, ..., L \; , \; \lambda_i \geq 0$$

הלוגריתם

$x_i > 0$ אחרת ילך למינוס אינסוף

$\Leftarrow \quad \lambda_i = \frac{1}{x_i} > 0$ ולכן נדרוש:

$$(*) \quad (x_0 + x_i - 1) = 0 \quad \text{for all } i=1, 2, ..., L$$

לכן נקבל:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_L$$

ולכן:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_L \triangleq \lambda_1$$

ולכן נוכל לרשום:

$$x_i = \frac{1}{\lambda_1} \quad i=1, 2, ..., L \; ; \quad x_0 = \frac{1}{L \cdot \lambda_1} \quad (**)$$

נציב (**) בתוך (*)

$$\frac{1}{L \cdot \lambda_1} + x_i - 1 = 0$$

$$\frac{1}{L \cdot \lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1} - 1 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_1 = \frac{L+1}{L}$$

נקבל:

$$\boxed{x_i = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{L}{L+1} \quad i=1, 2, ..., L} \; ; \; \boxed{x_0 = \frac{1}{L+1}}$$

פתרון הגיוני מבחינת הוגנות.

הערה: בעצם קיבלנו

$$x_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{L} \lambda_i} \; ; \; x_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad i=1, 2, ..., L$$

נשים לב - הקצבים האופימליים תלויים בסכום של כופלי הלגראנז' במסלול שלהם
זה לא מקרי!

כיצד נוכל להשתמש בתובנה המתמטית הזו לתכנון אלגוריתמיקה בפועל?