אינפי I מ' אמ'מ

104031

תרגול בית 10

דניאל . ט ארקין

ת"ז 441200610

תאריך הגשה 20/6

4412066610 בנימין צרקי

תרגיל בית 10

שאלה 1

תהי
$$f(x)=\begin{cases} x^2(1-x)^2\sin\frac{1}{\pi x(1-x)} & x\neq 0,1 \\ 0 & x=0,1 \end{cases}$$

א) הוכח כי הפונקציה גזירה בכל $\mathbb{R}$

כאשר $x\neq 0,1$ $f(x)$ גזירה
כמכפלה והרכבה של פונקציות אלמנטריות.

כאשר $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}(1-x)^2\sin\left(\frac{1}{\pi x(1-x)}\right)}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{0}\underbrace{(1-x)^2}_{1}\underbrace{\sin\frac{1}{\pi x(1-x)}}_{\text{חסומה כפול אפס שואפת לאפס}}=0 \rightarrow \text{"0" לכן גזירה}$$

כאשר $x=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(1-x)^{\cancel{2}}\sin\left(\frac{1}{\pi x(1-x)}\right)-0}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\underbrace{\underbrace{-x^2(1-x)}_{\lim_{x\to 1}-x^2(1-x)=0}\sin\left(\frac{1}{\pi x(1-x)}\right)}_{\text{חסומה כפול אפס}}=0 \rightarrow \text{"0" לכן גזירה}$$

441200610

ג) הוכחה ש f' אינה רציפה ב $x=0,1$

נסמן $t=\frac{1}{\pi x(1-x)}$

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin t-6x^2\sin(t)+2x\sin(t)-\frac{\cos(t)(-2x+1)}{\pi} & x\neq 0,1 \\ 0 & x=0,1\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{\pi x(1-x)}\right)\left(4x^3-6x^2+2x\right)-\frac{\cos\frac{1}{\pi x(1-x)}(-2x+1)}{\pi} & x\neq 0,1 \\ 0 & x=0,1\end{cases}$$

נראה ש $f'(x)$ אינה רציפה בעזרת ה"ה

עם שתי סדרות ק"מ שגבול הנקודה 1

$$a_n=\frac{1}{2\pi^2 n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi^2+2\pi^2 n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=-\frac{(2\cdot 0+1)}{\pi}\cos\frac{1}{\pi\frac{1}{2\pi^2 n}(1-0)}=-\frac{1}{\pi}\cos\frac{2\pi^2 n}{\pi}=-\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi(\pi+2\pi n)}{\pi}=\frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\neq-\frac{1}{\pi}$$

לכן הפונקציה אינה רציפה ב $x=1$

לכן אינה רציפה ב $x=1$

441200610

שאלה ב:

א) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב-x_0 ו-$f(x_0)\neq 0$ ותהי g פונקציה שאינה רציפה אך לא גזירה ב-x_0.
הוכיחו כי הפונקציה $F(x)=f(x)g(x)$ אינה גזירה ב-x_0.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+\cancel{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

כי לא ק"מ
הגבול הזה לא ק"מ

האם הטענה נכונה כאשר $f(x_0)=0$?

לא.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x_0)\cdot f'(x_0)$$

אזי גבול קיים

ק"מ לפי הנתון

44200610

שאלה 3:

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$

כך ש- $g(a)\neq g(b)$. הוכיחו שקיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

נגדיר פונקציה $h(x)=f(x)-rg(x)$

כך ש $h(a)=h(b)$

$$f(a)-rg(a)=f(b)-rg(b)$$
$$f(a)-f(b)=rg(a)-rg(b)$$
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=r$$

$h(x)$ רציפה ב $[a,b]$ כסכום של פונקציות רציפות ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) כסכום של פונקציות גזירות ב (a,b)

וגם $h(a)=h(b)$

$\Leftarrow$ לפי רול קיים $a<c<b$

כך ש $h'(c)=0$

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}g'(x)$$
$$h'(c)=f'(c)-\frac{fa-fb}{ga-gb}g'(c)=0$$
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

941200610

שאלה 4: תהי

$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

הוכח כי f גזירה ברציפות ב-0 ומצא סדרה $0<x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מונוטונית יורדת המקיימת כי $f(x_n)\cdot f(x_{n+1})<0$ לכל n.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0)}{h}=\frac{h^4\sin\frac{1}{h^2}}{h}=\underset{\downarrow\ 0}{h^3}\underbrace{\sin\frac{1}{h^2}}_{\text{חסומה}}=0$$

וגם גזירה בכל $x\neq 0$ כי הרכבה ומכפלה של פונקציות אלמנטריות,

$$f'(x_0)=4x^3\sin\frac{1}{x^2}+x^4\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{-2}{x^3}=4x^3\sin\frac{1}{x^2}-2x\cos\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}4x^3\sin\frac{1}{x^2}-2x\cos\frac{1}{x^2}=0-0=0$$

אפס כפול חסומה

ואכן אנו רואים שגבול הנגזרת כאשר $x\to 0$ שווה לערך הנגזרת בנקודה 0 ולכן גזירה ברציפות

9412006810

ניקח הסדרה $x_n=\sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}}$

x_n מונוטונית יורדת ממש

$f(x_n)=x^4\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

נבנה ת"ס $k_0=2n$ $k_1=2n+n$

$f(x_{n_k})>0$ $f(x_{n_{k_n}})<0$

$f(x_n)f(x_{n+1})=f x_{n_{k_0}}\cdot f x_{n_{k_1}}<0$

ג) ראינו f גזירה ברציפות ב-0

לכן כי ל"מ סדרה $x_n\longrightarrow 0$

מונוטונית יורדת ממש כי

כי הוכחנו לכל n $f(x_n)\cdot f(x_{n+1})<0$

$f(0)=f'(0)=0$

לפי מש' ערך הביניים קיים בקטע (x_n,x_{n+1}) לכן ק"ם $x_n<c_n<x_{n+1}$

כך ש: $f(c_n)=0$

c_n הסדרה מתכנסת לאפס לפי סנדוויץ'

לפי רציפות הנגזרת בכל $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(0)$

וגם כן $f(c_n)\to f(0)$

$f(c_n)\to 0$

לפי הנגזרת $f(0)=0$ הגבול

441200610

f גזירה ברציפות ב-0

$f(c_n)=f(c_{n+1})=0$

$\Leftarrow$ לפי רול $c_n<d_n<c_{n+1}$ $f'(d_n)=0$

לפי סנדוויץ' $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

סנדוויץ' $f'(d_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

וגם $f'(d_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(0)$

$f'(0)=0$ לפי יחידות הגבול

ולכן $f(0)=f'(0)=0$