אינפי 1מ' אונ'מ'

104031

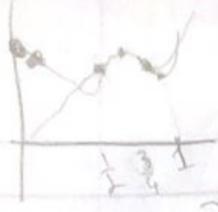
תרגיל בית 9

דניאל דאורקין

ת"ז 441[illegible]00610

תאריך הגשה 13/6

944200610



שאלה 2:

תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה שאינה מקבלת מינימום ואינה מקבלת מקסימום. הוכיחו כי קיימת נקודה ב-$(0,1)$ בה לפונקציה יש מינימום מקומי. נתון $f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{4})$

הוכחה: לפי ויירשטראס, f מקבלת מקסימום M, ומינימום m בקטע $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$.

אם $m\in(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ אז m הוא מינימום של הקטע $(m-\min\{(m-\frac{1}{2}),(\frac{3}{4}-m)\},\ m+\min\{(m-\frac{1}{2}),(\frac{3}{4}-m)\})$ שמוכלת ב $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ ולכן m מהווה מינימום מקומי בקטע הנ"ל.

אם $m\notin(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ ⇐ m הוא $\frac{1}{2}$ או $\frac{3}{4}$ וזהו מינימום כי $f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{4})$

⇐ לכל $x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ $f(x)\geq f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{4})$

⇐ $f(M)\geq f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{4})$

לפונקציה f אין מקסימום ב$(0,1)$ לכן לכל B קיים $x\in(0,1)$ כך ש $f(x)>B$

⇐ קיים $x_0\in(0,1)$ כך ש $f(x_0)>f(M)\geq f(\frac{1}{2})$

⇐ $x_0\notin[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$. נניח בה"כ $x_0<\frac{1}{2}$.

f רציפה ב $[x_0,\frac{1}{2}]$ וגם $f(\frac{1}{2})<f(M)<f(x_0)$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $\frac{1}{2}>x_1>x_0$ כך ש $f(x_1)=f(M)$

בקטע $[x_1,M]$ קיים מינימום לפי ויירשטראס. $\frac{1}{2}\in[x_1,M]$

1 - $f(\frac{1}{2})<f(x_1)=f(M)$ ולכן $f(M)$ וגם $f(x_1)$ לא יהיו המינימום של הקטע. לכן קיים $x_1<x_3<M$ כך שלכל $x\in[x_1,M]$ $f(x_3)<f(x)$

ולכן x_3 מינימום מקומי בקטע $[x_1,M]$

94120061O

שאלה 3:

הגדרה לפי: רציפות הרציפות במ"ש

סעיף ב':

א) x^3 רציפה במ"ש בכל קטע סגור $[a,b]$.

יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו.

נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{3M^2}$ כך שלכל $x,y \in [a,b]$ מתקיים:

$$|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |x-y||x^2+xy+y^2|$$

$$\leq |x-y|(|x^2| + |x||y| + |y^2|) \leq$$

x רציפה ב $[a,b]$ לכן חסומה מקסימום לפי ויירשטראס לכן קיים M

$$\leq |x-y|(M^2 + M^2 + M^2) = |x-y|(3M^2) <$$

$$< \delta 3M^2 = \varepsilon$$

ב) x^3 אינה רציפה במ"ש על $\mathbb{R}$

נ"ל קיים $\varepsilon = 3$ כך שלכל δ קיימים $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$ כך ש $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \delta$ אך ש

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |x_n^3 - y_n^3| = |x_n - y_n||x_n^2 + x_n y_n + y_n^2|$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)\left(n^2 + n^2 + 1 + n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(3n^2 + 3 + \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 3n + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} > 3 = \varepsilon$$

441200610

שאלה 4:

תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה במ"ש

ו- $a_n=f(n)$ סדרה. הוכיחו כי אם

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

פתרון:

הפונקציה רציפה במ"ש. עבור $\varepsilon=1$ קיימת $\delta>0$

כך שלכל $|x_1-x_2|<\delta$,$x_1,x_2\geq 1$ מתקיים

$|f(x_1)-f(x_2)|<1$

ניקח $|y-z|<1$, $y,z\geq 1$ ונניח

אז $|y-z|$ ב- $\frac{\delta}{2}$ עם שארית, כלומר (נניח)

$m\in\mathbb{Z}$ [illegible] $0\leq r<\frac{\delta}{2}$ כך ש $|y-z|=m\frac{\delta}{2}+r$

אם $z>y$ $z=y+m\frac{\delta}{2}+r$

$$|f(y)-f(z)|=\left|f(y)-f\left(y+m\tfrac{\delta}{2}+r\right)\right|=\left|f(y)+f\left(y+\tfrac{\delta}{2}\right)-f\left(y+\tfrac{\delta}{2}\right)+f\left(y+\tfrac{2\delta}{2}\right)\right.$$

$$\left.-f\left(y+\tfrac{2\delta}{2}\right)+\dots+f\left(y+\tfrac{m\delta}{2}\right)-f\left(y+\tfrac{m\delta}{2}\right)-f(z)\right|$$

$$\leq\left|f(y)-f\left(y+\tfrac{\delta}{2}\right)\right|+\left|f\left(y+\tfrac{\delta}{2}\right)-f\left(y+\tfrac{2\delta}{2}\right)\right|+\dots+\left|f\left(y+\tfrac{m\delta}{2}\right)-f(z)\right|\leq(m+1)\cdot 1<\frac{2}{\delta}+1$$

לכל $1\leq x$ מתקיים $x-[x]<1$ ולכן $|f(x)-f([x])|<\frac{2}{\delta}$

נשים לב ש- x שואף ל- ∞, אז $[x]\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$. לפי הנתון

$a_n\to\infty$ $\Leftarrow$ עבור כל M קיים N כך שלכל

$n>N$ מתקיים $a_n>M$. כלומר, לכל M

קיים $x_0=N+1$ שעבורו לכל $x>x_0$ מתקיים

$[x]>N\Rightarrow a_{[x]}>M\Rightarrow\lim_{x\to\infty}a_{[x]}=\infty$

ולכן [illegible] [illegible] $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$