תרגיל בית 8- בסיס ומימד

תרגיל 1

לפניכם שני תתי מרחבים של R^6 (אין צורך להוכיח שאלו אכן תתי מרחבים):

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\a+b\\a+c\\a+b+c\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in R\right\}$$

W הוא המרחב הנפרש ע"י הוקטורים: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\\5\\4\end{pmatrix}\right\}$

א. מצאו בסיס לתתי המרחבים W ו- U.

ב. מצאו בסיס ל- $W+U$.

ג. מצאו בסיס ל- $W\cap U$.

ד. מצאו בסיס לתת מרחב U_1 של R^6 כך שיתקיים השוויון: $W+U=U_1\oplus(U\cap W)$.

(א)

$$U=\left\{a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

לכן עפ"י הגדרת קבוצה פורשת:

הקבוצה $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את U.

כדי לבדוק האם הקבוצה B_U היא בת"ל, נכתוב את הוקטורים ב-B כשורות של מטריצה, ונדרג את המטריצה. מכיוון שלמטריצות שקולות שורה יש אותו מרחב שורה, נקבל קבוצה נוספת שפורשת את U:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

המטריצה מדורגת, ולכן עפ"י משפט השורות השונות מאפס שלה בת"ל.

כלומר $\boxed{B_U=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}}$ בת"ל ופורשת את U, ולכן היא בסיס של U.

תרגיל 1

א

נסמן: $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\\5\\4\end{pmatrix}\right\}$. מהנתון A פורשת

את W. באופן דומה ל-W, נכתוב את הוקטורים של A כמטריצה, נדרג ונמצא קבוצה בת"ל שמרחב השורות שלה זהה לזה של המט' המקורית, ולכן שורותיה פורשות את W:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\1&4&1&4&5&4\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&4&0&4&4&4\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{4}R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

שורותיה השונות מאפס של מט' מדורגת היא קבוצה בת"ל.

לכן הקבוצה $\boxed{B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}}$ בת"ל ופורשת את W.

לכן B_W בסיס של W.

ב

B_U פורשת את U (בסיס), ו-B_W פורש את W.

לכן $B_U\cup B_W$ פורש את U+W.

נכתוב את הוקטורים של $B_U\cup B_W$ כמטריצה, נדרג ונמצא קבוצה פורשת ובת"ל של U+W:

$$B_U\cup B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&0&-1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

תרגיל 1

א

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_6}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_5}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4+R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\to R_5-R_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_6\to R_6-R_5}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לסיכום: הרי קבוצה

$$\boxed{B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}}$$

בת"ל ופורשת את $U+W$ ולכן היא בסיס ל $U+W$.

ב נמצא איבר כללי של $U\cap W$:

איבר כללי ב W:

מצאנו את B_W בסעיף הקודם כפורש את W

$$W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\middle|\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha\\\beta+\gamma\\\alpha+\beta\\\beta+2\gamma\end{pmatrix}\middle|\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

נשלב את תנאי W על תנאי U:

$$\begin{pmatrix}a\\a\\a\\2a\\2a\end{pmatrix}\in U \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\\a+b\\a+c\\a+b+c\end{pmatrix}\in U \quad \text{וכן} \quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\\a+b\\a+c\\a+b+c\end{pmatrix}\in W$$

לכן האיבר הכללי ב $U\cap W$ הוא:

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\3\end{pmatrix}$$

תרגיל 1

(א) ברור כי $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $U\cap W$

ומכיוון שהווקטור ב $B_{U\cap W}$ אינו וקטור האפס, אז $B_{U\cap W}$ בת"ל.

לסיכום: $\boxed{B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\3\end{pmatrix}\right\}}$ בסיס של $U\cap W$.

(ב) ראשית:

$$\dim(W+U)=\dim(U\oplus(U\cap W))$$

מצאנו בסיס ל $U+W$

משפט המימדים. $\Downarrow$

$$5=\dim(U_1)+\dim(U\cap W)+\dim(U\cap(U\cap W))$$

מצאנו בסיס ל $U\cap W$ + נתון ש $U\oplus U\cap W$ ולכן $U\cap(U\cap W)=\{0\}$ $\Downarrow$

$$5=\dim(U_1)+1+0$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(U_1)=4$$

כעת לפי סעיף ב', הבסיס $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ פורש את $U+W$, ולכן מרחב השורות של המט' הבאה הוא $U+W$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_4}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&2&2&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}=A\Rightarrow$$

מכיוון שמרחב השורות של מט' שקולות שורה הוא זהה, אז גם $Row(A)$ פורש את $U+W$. לכן אם נבחר את הבסיס של U_1 כך:

$$\boxed{B_{U_1}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}}$$

(זהו בסיס כיוון שכפי שניתן לראות מ-A הווקטורים שבחרנו הם שורות מט' מדורגת ללא שורת אפסים ולכן בת"ל ובנוסף המימד של U_1 הוא 4.)

אז $Sp\{B_{U_1}\cup B_{U\cap W}\}=Sp\{U+W\}$

כי ראינו $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

ולכן $W+U=U_1\oplus(U\cap W)$

תרגיל 2

יהיו U ו- W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V. נתון כי $\{v_1,v_2\}$ הוא בסיס ל- $U\cap W$, $\{v_1,v_2,u_1\}$ הוא בסיס ל- U ו- $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ הוא בסיס ל- W. מצאו בסיס ל- $U+W$ והוכיחו שזהו בסיס.

פתרון:

נוכיח שהקבוצה $\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$ היא בסיס של $U+W$:

ראשית נוכיח הקבוצה פורשת כי:

לכל $v\in U+W$ מתקיים: קיימים $u\in U$, $w\in W$ כך ש:

$v=u+w$. $\{v_1,v_2,u_1\}$ פורשת את U כבסיס של U.

ובנוסף גם $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ פורשת את W.

לכן: $u=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma u_1$ וגם $w=av_1+bv_2+cw_1+dw_2$

עבור סקלרים כלשהם.

לכן:
$$v=u+w=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma u_1+av_1+bv_2+cw_1+dw_2=$$
$$=(\alpha+a)v_1+(\beta+b)v_2+\gamma u_1+cw_1+dw_2$$

כלומר $v\in Sp\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$. ולכן $U+W\subseteq Sp\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$

בנוסף $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3u_1+\alpha_4w_1+\alpha_5w_2\in U+W$ כי:

$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3u_3\in U$ (נתון $\{v_1,v_2,u_1\}$ פורשת את U)

$0\cdot v_1+0\cdot v_2+\alpha_4w_1+\alpha_5w_2\in W$ (נתון $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ פורשת את W),

סה"כ קיבלנו $U+W=Sp\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$

נוכיח כעת כי $B_{U+W}=\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$ היא בסיס:

עפ"י משפט המימדים:

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)=3+4-2=5$$

נתונים בסיסים

כלומר B_{U+W} היא הקבוצה פורשת בגודל המימד של $U+W$,

לכן עפ"י משפט מההרצאה: B_{U+W} בסיס.

$$\boxed{B_{U+W}=\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\} \text{ בסיס של } U+W}$$

תרגיל 3

א. מרחב וקטורי הנפרש ע"י מטריצות מאותו הסדר שדרגת כל אחת מהן קטנה ממש מ- n מכיל רק מטריצות מדרגה קטנה ממש מ- n.

ב. למרחב המטריצות $R^{n\times n}$, $n>1$, לא קיים בסיס המורכב מ- n^2 מטריצות שכולן מתחלפות בכפל (כלומר כך שלכל שתי מטריצות A ו- B מהבסיס מתקיים $AB=BA$).

ג. יהא V מ"ו ממימד 3 ו $\{v_1,v_2\}$ שני וקטורים במרחב. נגדיר: W=אוסף כל הוקטורים **שלא משלימים** את $\{v_1,v_2\}$ לבסיס של V, אז W תת מרחב וקטורי.

פתרון:

(א) הטענה לא נכונה. ניתן דוגמה נגדית:

ניקח $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ אזי:

$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

ולכן $r(A)=1=r(B)$.

אם נגדיר $V=sp\{A,B\}$, זהו מ"ו הנפרש ע"י מטריצות מסדר 2×2 שדרגת כל אחת מהן קטנה ממש מ 2.

אולם $(A+B)\in V$ לפי הגדרת מרחב נפרש.

אך:

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כלומר $r(A+B)=2\geq2$.

מצאנו מטריצה $(A+B)\in V$ שדרגתה שווה ל 2.

תרגיל 3

(ג) הטענה נכונה. נוכיח:

נניח בשלילה שקיים בסיס ל-$\mathbb{R}^{n\times n}$ המורכב מ-n^2 מטריצות שכולן מתחלפות בכפל, ונסמן את הבסיס: $B=\{A_1,A_2\dots A_{n^2}\}$.

כל הזוג' מתחלפות בכפל, כלומר: $\forall i,j=1\dots n:\ A_iA_j=A_jA_i$

יהיו B ו-C מטריצות ב-$\mathbb{R}^{n\times n}$ שאינן מתחלפות בכפל, כלומר: $BC\neq CB$.

B בסיס ולכן פורש את $\mathbb{R}^{n\times n}$:

קיימים $\alpha_1\dots\alpha_{n^2}\in\mathbb{R}$ כך ש: $\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\dots+\alpha_{n^2}A_{n^2}=B$

וקיימים $\beta_1\dots\beta_{n^2}\in\mathbb{R}$ כך ש: $\beta_1A_1+\dots+\beta_{n^2}A_{n^2}=C$

לכן:

$$BC=(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\dots+\alpha_{n^2}A_{n^2})(\beta_1A_1+\dots+\beta_{n^2}A_{n^2})\overset{\text{דיסטריביוטיביות כפל מט'}}{=}$$

$$=\sum_{1\le i,j\le n^2}\alpha_iA_i\beta_jA_j\underset{\text{תכונות כפל מט'}}{=}\sum_{1\le i,j\le n^2}\alpha_i\beta_jA_iA_j\underset{\text{מתחלפות הזוג' }A_i}{=}\sum_{1\le i,j\le n^2}\alpha_i\beta_jA_jA_i\underset{\text{תכונות כפל מט'}}{=}\sum_{1\le i,j\le n^2}\beta_jA_j\alpha_iA_i=$$

$$=(\beta_1A_1+\beta_2A_2+\dots+\beta_{n^2}A_{n^2})(\alpha_1A_1+\dots+\alpha_{n^2}A_{n^2})=CB$$

קיבלנו כי $BC=CB$ בסתירה להנחה ש-B ו-C לא מתחלפות בכפל.

לכן הנחת השלילה שגויה, ולא יתכן בסיס של $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם n^2 מטריצות שכולן מתחלפות בכפל. ∎

תרגיל 3

יהא V מ"ו מעל שדה F ויהיו $v_1,v_2\in V$.

6) הטענה נכונה. נוכיח:

$W=\{u \mid \{v_1,v_2,u\}$ לא בסיס$\}=\{u \mid \{v_1,v_2,u\}$ לא בת"ל, ולא פורשת את $V\}$

(שכן אחרת מכיוון ש $\dim V=3$ אז אם $\{v_1,v_2,u\}$ פורשת היא מוכרחת בסיס, וגם אם $\{v_1,v_2,u\}$ בת"ל היא מוכרחת בסיס)

נוכיח ש W הוא תמ"ו של V מכך שנראה ש $W\neq\emptyset$ וגם ש W סגורה לחיבור וכפל בסקלר:

- הקבוצה $\{v_1,v_2,0\}$ היא ת"ל, מכיוון ש: $1\cdot 0+0\cdot v_1+0\cdot v_2=0$
כלומר ישנם סקלרים שלא כולם אפס כך ש: $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3\cdot 0=0$.
$\{v_1,v_2,0\}$ ת"ל ולכן לא בסיס $\Leftarrow 0\in W \Leftarrow W\neq\emptyset$.

- יהיו $u_1,u_2\in W$. אז מהגדרת W:
$\{v_1,v_2,u_1\}$, $\{v_1,v_2,u_2\}$ הן קבוצות ת"ל (כל אחת) ואף אחת מהן לא פורשת את V.
נראה שגם $\{v_1,v_2,u_1+u_2\}$ היא ת"ל ולכן לא בסיס ע"י חילוק למקרים:

אם $v_1=v_2=0$ (וגם $u_1=0$ או $u_2=0$): אז ברור כי $\{v_1,v_2,u_1+u_2\}=\{0,0,u_1+u_2\}$ היא קבוצה ת"ל ($1\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot(u_1+u_2)=0$).

אם $v_1,v_2,u_1,u_2\neq 0$:

$A_1=\{v_1,v_2,u_1\}$, $A_2=\{v_1,v_2,u_2\}$ ת"ל, ולכן עפ"י משפט קיים וקטור ב A_1 שהוא צ"ל של קודמיו, וקיים וקטור ב A_2 שהוא צ"ל של קודמיו. ישנם 2 מקרים:

1) אם v_2 הוא צ"ל של v_1: אז $v_2=\alpha v_1$ ולכן מהקבוצה $\{v_1,v_2,u_1+u_2\}$ הוקטור v_2 הוא צ"ל של קודמיו, ולכן עפ"י משפט הקבוצה ת"ל.

אחרת $v_1,v_2,u_1,u_2\neq 0$:

2) אם u_1 הוא צ"ל של קודמיו וגם u_2 הוא צ"ל של קודמיו

אז $u_1=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2$ וגם $u_2=\beta_1v_1+\beta_2v_2$ לכן:

$$u_1+u_2=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\beta_1v_1+\beta_2v_2=(\alpha_1+\alpha_2)v_1+(\beta_1+\beta_2)v_2$$

כלומר u_1+u_2 הוא צ"ל של קודמיו, ולכן $\{v_1,v_2,u_1+u_2\}$ ת"ל.

בכל מקרה קיבלנו $\{v_1,v_2,u_1+u_2\}$ ת"ל ולכן לא בסיס של V.

כלומר $u_1,u_2\in W \Rightarrow u_1+u_2\in W$. ולכן W

סגורה לחיבור.

• יהיו $u\in W$, $\alpha\in F$. מהג' W: $\{v_1,v_2,u\}$ ת"ל

מהג' ת"ל: קיימים $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in F$ שלא כולם אפסים כך ש:

$$\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3u=0$$

אם $\alpha=0$: אז $\{v_1,v_2,0\cdot u\}=\{v_1,v_2,0\}$ הינו ת"ל

כי $1\cdot 0+0\cdot v_1+0\cdot v_2=0$, ולכן לא בסיס של V.

אם $\alpha\neq 0$: אז מתקיים

$$\alpha\beta_1v_1+\alpha\beta_2v_2+\beta_3\alpha u=\alpha(\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3u)=\alpha\cdot 0=0$$

כלומר מצאנו סקלרים שלא כולם אפסים כך ש $av_1+bv_2+c\alpha u=0$

$a=\alpha\beta_1, b=\alpha\beta_2, c=\beta_3$ (אם $\beta_i\neq 0$ אז גם $\alpha\beta_i\neq 0$ כי $\alpha\neq 0$)

ולכן $\{v_1,v_2,\alpha u\}$ ת"ל, ולכן לא בסיס של V.

בכל מקרה קיבלנו כי $\{v_1,v_2,\alpha u\}$ לא בסיס של V

ולכן $\alpha u\in W$, וW סגורה לכפל בסקלר.

לסיכום:

הראינו ש $W\neq\emptyset$ וגם שהיא סגורה לחיבור וכפל בסקלר

ולכן לפי משפט W הוא תת"מ של V. ∎

תרגיל 4

יהא V מרחב וקטורי ממימד n ויהיו U ו- W שני תתי מרחבים שונים שהמימד של כל אחד מהם הוא $n-1$. מצאו את המימד של $U\cap W$ (הוכיחו שזה אכן המימד).

$U\neq W$ ולכן (קיים $v\in U$ שגם $v\notin W$) או (שקיים $v\notin U$ וגם $v\in W$)

נניח בה"כ כי $v\notin W$ וגם $v\in U$, אזי קבלנו רק ש $v\notin U\cap W$ וגם $v\in U$.

(i) נוכיח שמכך ש $U\cap W\subseteq U$ נובע $\dim(U\cap W)\leq \dim(U)=n-1$:

נניח בשלילה ש $\dim(U\cap W)>\dim(U)$.

נסמן: $B_{U\cap W}=\{u_1,u_2\dots u_{n-1+k}\}$ בסיס של $U\cap W$. (כי אז $\dim(U\cap W)=n-1+k\geq n-1$)

אזי $B_{U\cap W}$ היא קבוצה בת"ל ב $U\cap W$, ולכן היא גם קבוצה בת"ל ב U (כי $B_{U\cap W}\subseteq U\cap W\subseteq U$), אך זוהי סתירה

מכיוון ש: $\dim U=n-1$ ולכן הקבוצה הבת"ל המקסימלית ב U היא בעלת $n-1$ איברים.

(ii) כעת נוכיח כי $\dim(U\cap W)\neq n-1=\dim(U)$:

נניח בשלילה כי $\dim(U\cap W)=n-1$.

יהי $B_{U\cap W}=\{v_1,v_2\dots v_{n-1}\}$ בסיס של $U\cap W$, אזי $B_{U\cap W}$ בת"ל

ומתקיים $B_{U\cap W}\subseteq U\cap W\subseteq U$. עפ"י משפט מכך ש $B_{U\cap W}$

קבוצה בת"ל עם $n-1$ איברים ב U, אזי היא בסיס של U

(שכן $\dim U=n-1$), לכן קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}$ כך ש:

$v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_{n-1}v_{n-1}$ (עבור $v\notin U\cap W,\ v\in U$)

הקבוצה $B_{U\cap W}$ פורשת את $U\cap W$ (כבסיס של $U\cap W$), ולכן

ש $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_{n-1}v_{n-1}\in B_{U\cap W}$ בסתירה להנחה ש $v\notin U\cap W$.

סה"כ מ (i) + (ii) נקבל כי: $\dim(U\cap W)<n-1=\dim(U)$

כלומר: $\dim(U\cap W)\leq n-2$ ⊕

תרגיל 4

עפ״י משפט המימדים:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = n-1+n-1-\dim(U+W) = 2n-2-\dim(U+W)$$

$$\Rightarrow \dim(U\cap W) = 2n-2-\dim(U+W) \quad (*)$$

$U+W$ הוא תמ״ש של V, ולכן $U+W \subseteq V$.

מכך נובע מהמשפט דומה ל(i): $\dim(U+W) \le \dim(V) = n$

לכן עפ״י השוויון (*):

$$\dim(U\cap W) = 2n-2-\dim(U+W) \ge 2n-2-n = n-2$$

סיכום:

מתקיים $\dim(U\cap W) \ge n-2$ ומ (*) גם: $\dim(U\cap W) \le n-2$.

לכן סה״כ:

$$\boxed{\dim(U\cap W) = n-2}$$

תרגיל 5

א. מצאו את דרגת המטריצה: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **מעל** $\mathbb{Z}_5$.

ב. הוכיחו שאם u , v , w הם בלתי תלויים ליניארית אז גם $\{u-\alpha v, u-\beta w\}$ בת"ל לכל $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

ג. יהיו $\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}\right\}$ שלושה וקטורים בת"ל ב $\mathbb{Z}_5^3$.

ותהי $A \in \mathbb{Z}_5^{3x3}$ ומקיימת: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_4 & b_7 \\ b_2 & b_5 & b_8 \\ b_3 & b_6 & b_9 \end{pmatrix} A$.

(i) מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת: $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (התשובה עשויה לכלול את הפרמטרים b_i)

(ii) מצאו בסיס למרחב העמודה של A.

(iii) נתון כי $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ בסיס למרחב הפתרונות של $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

מצאו מטריצה מדורגת קנונית C שקולת שורות ל A.

פתרון:

א) נדרג מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 4R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $\boxed{r(A) = 1}$.

ב) יהיו u,v,w בת"ל, ויהיו $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

יהיו a,b סקלרים כך ש:

$$a(u-\alpha v) + b(u-\beta w) = 0 \Rightarrow au - a\alpha v + bu - b\beta w = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)u - a\alpha v - b\beta = 0 \quad \underset{\text{בת"ל}}{\overset{u,v,w}{\Longrightarrow}} \begin{cases} a+b=0 & (1) \\ -a\alpha = 0 & (2) \\ -b\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

נתון $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ לכן בהכרח $\alpha\neq0$ או $\beta\neq0$.

אם $\alpha\neq0$: מ (2) נקבל ש $a=0$ ולכן מ (1) נקבל $0+b=0 \Rightarrow b=0$.

אם $\beta\neq0$: מ (3) נקבל: $b=0$ ולכן מ (1) נקבל $a=0$.

בכל מקרה $a=b=0$.

הוכחנו $a(u-\alpha v)+b(u-\beta w)=0 \Rightarrow a=b=0$

ולכן $\{u-\alpha v, u-\beta w\}$ בת"ל. ■

תרגיל 5

(ב) (i) נתון: $A\begin{pmatrix} b_1 & b_4 & b_7 \\ b_2 & b_5 & b_8 \\ b_3 & b_6 & b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ולכן עפ"י משפט:

$$A\begin{pmatrix} b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + 2\cdot A\begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A\begin{pmatrix} b_1+2b_4 \\ b_2+2b_5 \\ b_3+2b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ $\begin{pmatrix} b_1+2b_4 \\ b_2+2b_5 \\ b_3+2b_6 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת $A\vec{x}=0$.

$$A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A\begin{pmatrix} b_1+b_7 \\ b_2+b_8 \\ b_3+b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ $\begin{pmatrix} b_1+b_7 \\ b_2+b_8 \\ b_3+b_9 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת $A\vec{x}=0$

נסמן ב W את מרחב הפתרונות של המע' $A\bar{x}=0$.

עפ"י סעיף 1 כי הקבוצה:

$$B_W \triangleq \left\{ \begin{pmatrix} b_1+b_7 \\ b_2+b_8 \\ b_3+b_9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1+2b_4 \\ b_2+2b_5 \\ b_3+2b_6 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \overset{u}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}} + \overset{v}{\begin{pmatrix} b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}}, \overset{u}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}} + 2\overset{w}{\begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}} \right\}$$

בת"ל (עבור: $\alpha = -1 = 4$, $\beta = -2 = 3$)

נוכיח ש B_W אכן בסיס של מרחב הפתרונות של המע' $Ax=0$:

נניח בשלילה ש B_W אינו בסיס, אז בהכרח $\dim(W) \neq 2$, מכך

ש B_W בת"ל עם 2 איברים ומקסימליות הבסיס כקבוצה בת"ל

נובע ש: $\dim(W) > 2$, אך $W \subseteq \mathbb{Z}_5^3$ ולכן $\dim(W) \leq 3$,

סה"כ $\dim(W)=3$. מימד מרחב הפתרונות הוא גם $n-r(A)$.

ולכן: $3 = \dim(W) = n-r(A) = 3-r(A) \Longrightarrow r(A)=0 \Longrightarrow A=0$.

אבל: סתירה כי נתון: $A\begin{pmatrix} b_1 & b_4 & b_7 \\ b_2 & b_5 & b_8 \\ b_3 & b_6 & b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ולכן מוכרח $A \neq 0$.

הנחת השלילה שגויה ולכן: $\boxed{B_W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1+b_7 \\ b_2+b_8 \\ b_3+b_9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1+2b_4 \\ b_2+2b_5 \\ b_3+2b_6 \end{pmatrix} \right\} \text{ בסיס של } W}$

תרגיל ד

ג (ii) מצאנו כי $3-r(A) = n-r(A) = \dim W = 2$
לכן $r(A^t) = r(A) = 1$ (A ריבועית ולכן $r(A)=r(A^t)$).

מהנתון: $A\begin{pmatrix} b_1 & b_4 & b_7\\ b_2 & b_5 & b_8 \\ b_3 & b_6 & b_9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}$ נקבל כי:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = b_1A^1+b_2A^2+b_3A^3$$ (כאשר A^i הוא העמודה הi של A)

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \in col(A)$$

$$\dim(col A) = r(A^t) = 1$$

מכיוון ש- $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל (וקטור יחיד שאינו 0)
אז עפ"י משפט:

$\boxed{B_{col} = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}}$ הוא בסיס של $col(A)$.

(iii) הקבוצה $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ היא בסיס למרחב הפתרונות של $A\bar{x}=0$, ולכן היא הקבוצה שפורשת.
לכן כל פתרון הוא מהצורה:

$$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)$$
$$(\alpha, 2\alpha+\beta, \beta)$$

כלומר מפתרון המערכת $A\bar{x}=0$ המשתנים x,z חופשיים ו- $y=2x+z$ (זה הגיוני כי ממד מרחב הפתרונות הוא $n-r(A)=2$, וזכרו גם מס' המשתנים החופשיים)

תרגיל 5

ב

(iii) $n-r(A)=2$, $n=3$ ולכן: $r(A)=1$.

המשוואה $y=2x+z \overset{\text{מעל } \mathbb{Z}_5}{\Longleftarrow} 2x+4y+z=0$ שקולה למערכת $A\bar{x}=0$

ולכן המטר' הבאה שקולת שורות ל A:

$$\boxed{C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

C קנונית, ולכן C היא מטריצה מדורגת קנונית השקולת שורות ל A.