מקדמי הפולינום האופייני – הדגמה למטריצה מסדר 3×3

טענה:
$$\Delta_A(\lambda) = 1\lambda^3 - tr(A)\lambda^2 + \lambda\underbrace{(M_{11} + M_{22} + M_{33})}_{\text{principal minors}} + (-1)^3|A|$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & 0 - a_{13} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & 0 - a_{23} \\ 0 - a_{31} & 0 - a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}_{1} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}}_{2} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}}_{3} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}}_{4} + \underbrace{\begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix}}_{5} + \underbrace{\begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}}_{6} + \underbrace{\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}}_{7} + \underbrace{\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}}_{8} =$$

$$\lambda^3 + \lambda^2(-a_{33}) + \lambda^2(-a_{22}) + \lambda M_{11} + \lambda^2(-a_{11}) + \lambda M_{22} + \lambda M_{33} + (-1)^3|A| =$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2\underbrace{(-a_{33} - a_{22} - a_{11})}_{-tr(A)} + \lambda(M_{11} + M_{22} + M_{33}) + (-1)^3|A|$$

מכאן נראה את ההכללה למטריצה A מסדר n x n .

נפצל את הדטרמיננטה של $\lambda I - A_{n\times n}$ באופן דומה ונקבל את התוצאות הבאות:

א. את λ^n מקבלים מדטרמיננטה אחת בלבד, שצורתה כמו 1: $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$.

ב. מקדם λ^{n-1} מתקבל רק מדטרמיננטות שצורתן כמו 2, 3, 5, כלומר כאלה בהן כל העמודות הן אפסים עם λ בודד, ורק עמודה אחת (עמודה i) היא מהצורה $\begin{pmatrix} -a_{1i} \\ -a_{2i} \\ \vdots \\ -a_{ni} \end{pmatrix}$. בכל דטרמיננטה כזו, השורה ה – i היא כולה אפסים מלבד $-a_{ii}$.

פתח לפי שורה i וקבל רק $\lambda^{n-1}(-a_{ii})$. סכום כל n הדטרמיננטות הללו הוא

$$\lambda^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}-a_{ii}\right)=(-trA)\,\lambda^{n-1}$$

ג. המקדם החופשי יתקבל רק מהדטרמיננטה שלא מכילה כלל λ, כלומר מהדטרמיננטה $|-A|$, ולכן נקבל $|-A|=(-1)^n|A|$.

(אגב מקדם זה ניתן לחישוב גם על-ידי הצבה של $\lambda=0$ בביטוי $|\lambda I-A|$ של הפולינום האופייני, כי כידוע הצבת $\lambda=0$ בפולינום, נותנת את מקדמו החופשי של הפולינום: $|0I-A|=|-A|=(-1)^n|A|$)

הערה: כדאי לזכור את התוצאה שבמטריצה מסדר 3×3, מקדם λ^1 הוא סכום המינורים הראשיים שלה, כלומר $M_{11}+M_{22}+M_{33}$.