ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגדרות

1. $T:V\to V$ ט.ל. $0\neq v\in V$ נקרא וקטור עצמי של T אם יש סקלר α כך ש- $T(v)=\alpha v$.
α נקרא הערך העצמי השייך ל- v. v נקרא הוקטור העצמי השייך ל- α.

2. A מטריצה מסדר $n\times n$ מעל שדה F, $0\neq v\in F$ נקרא וקטור עצמי של A אם $Av=\alpha v$.
α נקרא הערך העצמי השייך ל- v.

3. פולינום אופייני (פ״א): הפולינום המתקבל מהחישוב: $|\lambda I - A|$.

4. ריבוי אלגברי (ר״א) של ע״ע λ_i: החזקה של: $(\lambda-\lambda_i)$ בפולינום האופייני.

5. ריבוי גאומטרי (ר״א) של ע״ע λ_i: המספר המקסימלי של וקטורים עצמיים בת״ל השייכים לע״ע זה.

6. דמיון: שתי מטריצות A,B תקראנה דומות אם קיימת P הפיכה כך ש: $P^{-1}AP=B$.

7. לכסינות: A תיקרא לכסינה אם קיימת P הפיכה ו D אלכסונית כך ש: $P^{-1}AP=D$.

שלבי חישוב ע״ע ו״ע:

1. אם נתונה ט״ל, יש לחשב קודם את המטריצה המייצגת שלה.
2. מחשבים: $|A-\lambda I|$
3. חישוב ע״ע: שורשי הפולינום שהתקבל בסעיף הקודם.
4. חישוב ו״ע: לכל ע״ע λ_i פותרים את מערכת המשוואות: $(A-\lambda_i I)x=0$.
מרחב הפתרונות של מערכת זו נקרא המרחב העצמי של λ_i. מימדו של מרחב זה שווה לריבוי הגאומטרי של λ_i,
וכל וקטור שונה מאפס במרחב זה הוא ו״ע המתאים לע״ע λ_i.

משפטים:

1. ו״ע ששייכים לע״ע שונים הם בת״ל.
2. ר״א ≤ ר״ג ≤1 לכל ע״ע.
3. מעל השדה בו נמצאים כל הע״ע מתקיים: $\sum \lambda_i = tr(A)$
4. מעל השדה בו נמצאים כל הע״ע מתקיים: $\prod \lambda_i = \det(A)$
5. T לכסינה ⟸⟹ קיים ל- V בסיס שכולו מורכב מוקטורים עצמיים.
⟸⟹ ר״א=ר״ג לכל ע״ע וכל הע״ע שלה בשדה.
6. אם ל A_{nxn} יש n ע״ע שונים אז A לכסינה. (תנאי מספיק אך לא הכרחי).
7. אם A לכסינה אז המטריצה המלכסנת, P , מורכבת מקבוצה בת״ל של ו״ע בעמודות, והמטריצה האלכסונית, D, מורכבת מהע״ע באלכסון.
8. (קיילי המילטון): אם $f(x)$ הוא הפ.א. של מטריצה ריבועית A , אז $f(A)=0$.
9. T הפיכה אמ״מ 0 אינו ע.ע. של T .
10. A, B דומות אז: יש להם אותו פ״א.
יש להם אותה דטרמיננטה.
יש להם אותה עקבה
יש להם אותה דרגה
יש להם אותם ע״ע כולל ריבויים.
11. אם λ ע״ע ו v ו״ע מתאים אז λ^n ע״ע ו v ו״ע מתאים של A^n.
12. אם A הפיכה ו λ ע״ע ו v ו״ע מתאים אז λ^{-1} ע״ע ו v ו״ע מתאים של A^{-1}.
13. אם λ ע״ע מרוכב ו v ו״ע מתאים של A ממשית אז $\bar{\lambda}$ ע״ע ו־$\bar{v}$ ו״ע מתאים של A.
14. יהא $f(x)$ פולינום כלשהוא. נתון: v ו״ע של A שמתאים לע״ע λ ו $B = f(A)$ אז: $\lambda_B = f(\lambda_A)$, $v_B = v_A$.
15. אם סכום האיברים בכל עמודה (במטריצה A) הוא קבוע k. אז k הוא ע.ע. של A .
16. אם סכום האיברים בכל שורה (במטריצה A) הוא קבוע k. אז k הוא ע.ע. של A וו״ע מתאים הוא: $(1,1,\dots,1)^t$