אינפי' I מ' אמ'מ

104031

תרגיל בית 7

דניאל גארקי

ת"ז 441200610

תאריך הגשה 30/5

תרגיל בית 2

שאלה 1:

א) $f(x)+g(y)=xy$

נניח בשלילה שקיימות פונקציות כאלו.

$f(0)+g(y)=0 \Rightarrow f(0)\overset{(*)}{=}-g(y) \quad \forall y\in\mathbb{R}$

$f(x)+g(0)=0 \Rightarrow f(x)=-g(0) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

לכן $f(x)$ ו- $g(x)$ קבועות

עבור $x=y=1$

$f(1)+g(1)=1\cdot 1=1$

$f(1)+g(1)=f(0)+g(1)\overset{(*)}{=}f(0)-f(0)=0\neq 1$

כי $f(x)$ קבוע

סתירה

ב) $f(x)g(y)=x+y$

$f(0)g(y)=y \Rightarrow g(y)=\frac{y}{f(0)}$

עבור $f(0)\neq 0$

ולכן $g(0)=\frac{0}{f(0)}=0$

$0=f(x)\cdot g(0)=x+0=x$

לכן לכל $x\in\mathbb{R}$ $x=0$ וזה לא נכון

נניח $f(0)=0$

$$0 = f(0)g(y) = 0+y = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$0 = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

נניח $y=5$ $0=5$

סתירה

ג) $f(x+y) = g(xy)$

נניח $f(t)=g(t)=c$ כאשר c קבוע

זה לכל

נניח בשל' $f(t) \neq c$ כאשר c

$$f(0+y) = f(y) = g(0) = c$$

סתירה

שאלה 2: הוכיחו את הגבולות הבאות לפי הגדרה

יהי $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-9x^2+9x}{2x^2+8} = -\frac{9}{2}$$

קיים $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$ כך שלכל x שמקיים $-\frac{9}{2} < \left|x+\frac{9}{2}\right| < \delta$ מתקיים

$$\left|\frac{-9x^2+9x}{2x^2+8} + \frac{9}{2}\right| = \left|\frac{-9x^2+9x+9x^2+36}{2x^2+8}\right| = \left|\frac{9x+36}{2x^2+8}\right| = \frac{9|x+4|}{|2x^2+8|}$$

$$< \frac{9\left|x+\frac{9}{2}\right|}{|2x^2+8|} < 9\left|x+\frac{9}{2}\right| = 9\delta = \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{9}$$

$$\lim_{x\to 27}\sqrt[3]{x} = 3$$

יהי $\varepsilon>0$

קיים $\delta=\varepsilon$ כך שלכל x המקיים $0<|x-27|<\delta$ מתקיים

$$\left|\sqrt[3]{x}-3\right| = \frac{|x-27|}{\left|\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9\right|} < |x-27| < \delta=\varepsilon$$

<u>שאלה 3</u>: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית וחיובית כך ש-

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$$

א) הוכיחו כי לכל n טבעי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(2^n x)}{f(x)}=1$

נוכיח באינדוקציה על n:

בסיס: $n=1$ לפי הנתון $\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$

נניח $\lim_{x\to\infty}\frac{f(2^n x)}{f(x)}=1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2^{n+1}x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{f(2^n\cdot 2x)}{f(2x)}}_{\substack{\to 1 \\ \text{לפי ההנחה}}}\cdot\underbrace{\frac{f(2x)}{f(x)}}_{\substack{\to 1 \\ \text{לפי הנתון}}} = 1$$

ב) הוכיחו כי לכל $c>0$ מתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$

כאשר $c\geq 1$ ו- $f(x)$ מונוטונית עולה

$$\underbrace{\frac{f(x)}{f(x)}}_{\xrightarrow{x\to\infty} 1} \leq \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \underbrace{\frac{f(2^n x)}{f(x)}}_{\xrightarrow{x\to\infty} 1}$$

נבחר $2^n > c$
$\Downarrow$
$n > \log_2 c$

לפי הסעיף הקודם

לכן, לפי סנדוויץ' $\frac{f(cx)}{f(x)} \xrightarrow{x\to\infty} 1$

כאשר $c\geq 1$ ו- $f(x)$ מונוטונית יורדת

$$\underbrace{\frac{f(2^n x)}{f(x)}}_{\to 1} \leq \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \underbrace{\frac{f(x)}{f(x)}}_{\to 1}$$

$n > \log_2 c$

כאשר $c<1$ ו- $f(x)$ מונוטונית עולה

$$\underbrace{\frac{f(x)}{f(x)}}_{\to 1} > \frac{f(cx)}{f(x)} > \frac{f(x)}{f(x)}$$

כאשר $c<1$ ו- $f(x)$ מונוטונית יורדת

$$\frac{f(x)}{f(x)} < \frac{f(cx)}{f(x)} < \frac{f(cx)}{f(cx)}$$

לפי סנדוויץ' $\lim_{x\to\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$

שאלה 4: הוכיחו באמצעות היינה כי אם

$\lim_{x\to a} f(x)=b$, $\lim_{y\to b} g(y)=c$ ונתון כי $f(x)\neq b$

בסביבה מנוקבת של a אז

$\lim_{x\to a} g(f(x))=c$

הגדרת היינה:

$\lim_{x\to a} f(x)=b$ לכן לפי היינה לכל

סדרה a_n כך ש- $a_n\neq a$ $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ מתקיים

$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=b$ (1)

$\lim_{y\to b} g(y)=c$ לכן לפי היינה לכל

סדרה b_n כך ש- $b_n\neq b$ $\lim_{n\to\infty} b_n=b$ מתקיים

$\lim_{n\to\infty} g(b_n)=c$ (2)

לכל סדרה x_n כך ש $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$:

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) \overset{(1)}{=} g(b) \overset{(2)(b_n=b)}{=} c$$

לכן לפי היינה $\lim_{x\to a} g(f(x))=c$

הגדרת הגבול:

נתון (1) לכל $\varepsilon>0$ קיים δ_1 כך שלכל

$0<|x-a|<\delta_1$ מתקיים $0<|f(x)-b|<\varepsilon$

(2) לכל $\varepsilon>0$ קיים δ_2 כך שלכל

$0<|x-b|<\delta_2$ מתקיים $0<|g(x)-c|<\varepsilon$

יהי $\varepsilon>0$, מ(1), כל δ_1 ש $0<|x-a|<\delta_1$
מתקיים
$b-\varepsilon_1<f(x)<b+\varepsilon_1$ $\quad f(x)\neq b$

מ(2) כל δ_2 $\quad b-\delta_2<x<b+\delta_2$ $\quad x\neq b$
מתקיים $0<|g(x)-c|<\varepsilon$
נגדיר $\varepsilon_1=\delta_2$ ונציב $x=f(x)$ כך ש $0<|x-b|<\delta_2$
מתקיים
$$0<|g(f(x))-c|<\varepsilon$$
נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

ב. הראנו כי אם מוותרים על התנאי כי $f(x)\neq b$ בסביבת a, אזי הטענה איננה נכונה.

דוגמה נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ 10 & x=1\end{cases}$$

$$g(y)=y+4$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=0 \qquad \lim_{y\to 0} g(y)=4$$

$$g(f(x))=\begin{cases}4 & x\neq 1\\ 14 & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} g(f(x))=4$$