חשבון אינפיניטסימלי 1מ' - אנג'

104031

תרגיל בית 5

דניאל - מאורקין

ת"ז: 941200610

תאריך הגשה: 12/5

תרגיל בית 5

שאלה 2:

הוכיחו כי לסדרות a_n ו- $b_n=\sqrt[n]{n}\,a_n$ יש אותם גבולות חלקיים.

הוכחה:

יהי L גבול של תת סדרה b_{n_k}.

$$L=\lim_{k\to\infty} b_{n_k}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n_k]{n_k}\,a_{n_k}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[n_k]{n_k}\right)\cdot\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}\right)=1\cdot\lim_{k\to\infty}a_{n_k}$$

אריתמטיקה

לפי משפט $\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$

לפי: משפט כל תת סדרה של סדרה מתכנסת מתכנסת לאותו גבול

$$=\lim_{k\to\infty}a_{n_k}$$

לכן עבור תת סדרות כלל

$$\lim_{k\to\infty}(b_{n_k})=\lim_{k\to\infty}(a_{n_k})$$

שאלה 2:

א) יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהי X_n סדרה המקיימת את התנאי הבא:
לכל $\varepsilon>0$ יש אינסוף איברים של X_n בתחום $(L-\varepsilon, L)$

הוכיחו על י' בנ"ה מפורשת שיש ל-X_n תת סדרה עולה ממש.

הוכחה:
נבנה תת סדרה X_{n_k}.

עבור $k=1$ ניקח $\varepsilon=1$ ונקח X_{n_1} כך ש- $L-1<X_{n_1}<L$ (יש אינסוף)

עבור $k=2$ ניקח $\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2}, L-X_{n_1}\}$ ונקח X_{n_2}, $n_2>n_1$ כך ש- $X_{n_1}\le L-\varepsilon_2<X_{n_2}<L$ (יש אינסוף)

עבור $k=3$ ניקח $\varepsilon_3=\min\{\frac{1}{3}, L-X_{n_1}, L-X_{n_2}\}$ ונקח X_{n_3} כך ש- $n_3>n_2$ ו- $X_{n_2}<L-\varepsilon_3<X_{n_3}<L$ (יש אינסוף)

נמשיך ועבור k כללי ניקח $\varepsilon_k=\min\{\frac{1}{k}, L-X_{n_1}, L-X_{n_2},\dots, L-X_{n_k}\}$ וניקח את a_{n_k}, $n_k>n_{k-1}$ כך ש- $X_{n_{k-1}}\le L-\varepsilon_k<X_{n_k}<L$ (יש אינסוף)

ב) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ עבור $L=0$
עבור n זוגי יש הסדרה $a_{n_{2k}}=\frac{1}{2n}$ שהיא מונוטונית יורדת ממש.
עבור n אי-זוגי יש הסדרה $a_{n_{2k-1}}=-\frac{1}{2n+1}$

שמתכנסת לאפס אז לפי הגדרת
הגבול: לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך
שלכל $n>N$ מתקיים:

$$0-\varepsilon < a_{n_{2k}} < \varepsilon+0$$

כלומר לכל ε

$$a_{n_{2k+1}} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

וגם, $a_{n_{2k+1}} < 0$

אז, $a_{n_{2k+1}} \in (-\varepsilon, 0)$

יש אינסוף איברים כאלו החל מ-N

שאלה 3:

תהי a_n סדרה. הוכיחו את הטענה הבאה:
קיים q שעבורו $a_n \le q < 1$ לכל n החל ממקום מסוים אם ורק אם $\limsup a_n < 1$.

הוכחה: $\Leftarrow$ נתון כי קיים q שעבורו $a_n \le q < 1$ לכל n החל ממקום מסוים.

נוכיח כי $\limsup a_n < 1$

נניח בשלילה ש- $\limsup a_n \ge 1$
אזי לסדרה a_n קיים גבול חלקי נסמן L כך ש- $1 \le \limsup a_n = L$. L גבול חלקי של a_n, אזי לפי משפט, לכל $\varepsilon > 0$ קיים אינסוף איברים של a_n שמקיימים
$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$

ובפרט עבור $\varepsilon = L-q$ יש אינסוף איברי a_n שמקיימים
$q = L-L-q < a_n < L+L-q$

סתירה לנתון שאז החל ממקום מסוים קיים q כך שעבורו $a_n \le q$

$\Rightarrow$: נתון כי $\limsup a_n < 1$

נוכיח שקיים q עבורו $1 > q \geq a_n$ $a_n \leq q < 1$

לכל n החל ממקום מסוים.

לפי הגדרה, לכל $\varepsilon > 0$ כל איברי a_n החל ממקום מסוים נמצאים ב $(\lim - \varepsilon, \lim + \varepsilon)$

אז החל ממקום מסוים לכל n

$$a_n < \limsup a_n + \varepsilon = \limsup a_n + q - \limsup a_n = q$$

עבור $\varepsilon = q - \limsup a_n$

עבור $\limsup a_n < q < 1$

שאלה 4: תהי a_n סדרה חסומה
מלעיל ו- b_n סדרה, מתכנסת בגבול
חיובי. הוכיחו כי

$$\limsup a_n b_n = \limsup a_n \cdot \lim b_n$$

$$\limsup a_n b_n = \lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k} b_{n_k}\right) \underset{\text{אריתמטיקה}}{=} \lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) \cdot \lim_{k\to\infty}(b_{n_k})$$

b_n מתכנסת ולכן כל תת סדרה
מתכנסת לאותו גבול ובפרט b_{n_k}

אז $\lim_{k\to\infty}(b_{n_k}) = \lim(b_n)$

נוכיח כי $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) = \limsup(a_n)$

נניח בשלילה שקיים תת סדרה a_{n_j} של a_n,
כך ש- $\lim_{j\to\infty}(a_{n_j}) > \lim_{k\to\infty}(a_{n_k})$

$$\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \cdot \lim_{j\to\infty} a_{n_j} > \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$\lim_{j\to\infty} b_{n_j} \cdot \lim_{j\to\infty} a_{n_j} > \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \cdot \lim_{n\to\infty} b_{n_k}$$

$$\lim_{j\to\infty}\left(b_{n_j} \cdot a_{n_j}\right) > \lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k} \cdot b_{n_k}\right)$$

אבל $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k} \cdot b_{n_k}) = \limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$

סתירה. לכן $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) = \limsup(a_n)$

$$\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = \limsup(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$