פנחס שורקי 9/6/22 אלגברה א"מ 01610

דף עבודה בדטרמיננטה

שאלה 1

א) הוכיחו שאם A אנטי סימטרית מסדר אי זוגי אז $|A|=0$

נתון $A^t=-A$

$$|A^t| = |-A|$$
$$|A| = (-1)^{2k+1}|A| = -|A|$$
$$2|A| = 0$$
$$|A| = 0$$

ב) הוכיחו שאם $A^t=A^{-1}$ אז $|A|=\pm1$

$$A^t = A^{-1}$$
$$|A^t| = |A^{-1}|$$
$$|A| = \frac{1}{|A|}$$
$$|A|^2 = 1$$
$$|A| = \pm1$$

ג) נתון $A^3=(-A^t)^5$. הוכח שיתכן ש-A הפיכה
אם (i) $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$

לא. הוכחה:

$$|A^3| = |A\cdot A\cdot A| = |A||A||A| = |A|^3$$
$$|-A^{t})^5| = |-A^t|^5 = -|A^t|^5 = -|A|^5$$

$$A^3 = (-A^t)^5$$
$$|A|^3 = -|A|^5$$

אם $|A|\neq0$ $\Leftarrow$ $|A|^2=-1$ $\Leftarrow$ אין פתרון
$\Leftarrow$ $|A|=0$ $\Leftarrow$ $|A|$ לא הפיכה

94120061

(iii) $A\in\mathbb{C}^{3\times 3}$. כן. הוכחה:

$|A|^2=-1$

$|A|=i\neq 0$

לכן A הפיכה

<u>שאלה 2</u>: תהיה A מטריצה 4×4 ממשית.
נבצע על A פעולות של שורה ועמודה
לפי הסדר הבא:

$$A\xrightarrow{R_4\to -3R_4} B\xrightarrow{R_3\to R_3+4R_2} C\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_3} D$$

נתון $\det\left[(D^{-1})^t\right]=-\frac{1}{4}$

חשב:

(1) $|D|$

$$|(D^{-1})^t|=|D^{-1}|=\frac{1}{|D|}=-\frac{1}{4}$$
$$\Downarrow$$
$$|D|=-4$$

(2) $|adj(A)\cdot D^t|$

$A\cdot adj A=|A|I$

$$|adj(A)\cdot D^t|=|adj A||D^t|=|adj A||D|=-4|adj A|$$

$|C|=-|D|$

$|B|=|C|=-|D|$

$(-3)|A|=|B|$

$|A|=-\frac{1}{3}|B|=-\frac{1}{3}|C|=\frac{1}{3}|D|=-\frac{4}{3}$

$|adj A|=|A|^{n-1}=\left(-\frac{4}{3}\right)^3$

$|Adj A\cdot D^t|=-4|adj A|=\frac{(-4)^4}{3^3}$

44120C610

$$|adj(C^3\cdot A^{-1})| = |C^3\cdot A^{-1}|^3 = \frac{|C|^9}{|A|^3} = \frac{4^9}{\frac{(-1)^3}{(3)^3}} = (-1)\cdot 4^9\cdot 3^3$$

<u>שאלה 3</u>: נפתור את המשוואה הבאה:

$$A = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 2 \\ 1 & 2-\alpha & -1 \\ -1 & 1 & 4-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

נבדוק אם $C_1 = \beta C_2$

נשים ♥ ש $A_{32} = -A_{31}$ וכאשר $A_{21} = -A_{22}$

$1-\alpha = -2 \quad \alpha = 3$

כלומר $-1 = 2-\alpha \quad \alpha = 3$ וגם

$\alpha = 3$ הוא פתרון

נניח $\alpha \neq 3$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 2 \\ 1 & 2-\alpha & -1 \\ -1 & 1 & 4-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-(2-\alpha)(1-\alpha) & 2+(1-\alpha) \\ 1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & 3-\alpha & 3-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-(2-\alpha)(1-\alpha) & 3-\alpha \\ 3-\alpha & 3-\alpha \end{vmatrix} = 3-\alpha\left[2-(2-\alpha)(1-\alpha)\right]-(3-\alpha)^2$$

$$= (3-\alpha)(-2\alpha+\alpha^2-3) = (3-\alpha)(\alpha-3)(\alpha+1)$$

$\alpha = 3 \quad \alpha = -3 \quad \alpha = -1$

941200610

ב) לאילו ערך של α המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\-1&1&4\end{pmatrix}-\alpha I_2$$

אינה הפיכה?

$$A=\begin{pmatrix}1-\alpha&2&2\\1&2-\alpha&-1\\-1&1&4-\alpha\end{pmatrix}$$

A לא הפיכה כאשר $|A|=0$
וזה מתקיים כאשר $\alpha=\pm3,1$
כמו שהוכחנו בסעיף הקודם

שאלה 4:

הוכיחו: אם A ו- B הן שתי מטריצות ריבועיות שוות סדר שונות מ-0
כך ש- $AB=0$ אז $|A|^2+|B|^3=0$

$$AB=0$$
$$\Downarrow$$
$$|AB|=|0|=0$$
$$|A||B|=0$$
$$\Downarrow$$

אז $|A|$ אפס או $|B|$ אפס
⇐ אחת מהם לא הפיכה ⇐ הקיים של
אחת מהם לפחות שווה 0 ⇐ הדרגה
של השני לא שווה n ⇐ השני גם לא
הפיך ⇐ הדטרמיננטה של השני שווה לאפס

$$\Leftarrow \quad |A|^2+|B|^2=0^2+0^2=0$$

44200610

שאלה 5:

הוכיחו או הפריכו:

א) תהי B מטריצה ממשית ריבועית
מסדר $n\times n$, נגדיר טרנספורמציה לינארית
$T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $T(A)=BA$
לכל A ב-$\mathbb{R}^{n\times n}$. נתון כי T איננה
איזומורפיזם, אז בהכרח הדטרמיננטה של
B שווה לאפס

טענה נכונה

T איננה איזומורפיזם $\Leftarrow$ T איננה חח"ע

$\Leftarrow$ $\ker(T)\neq\{0\}$

כלומר קיימת מטריצה $A\in\ker T$
כך ש- $A\neq 0$
אם $B=0$ אז $|B|=0$ וסיימנו
אם $B\neq 0$ $T(A)=BA=0$

$BA=0$

$\Downarrow$ ראינו בתרגיל 4

$|A|=|B|=0$

ב) תהי A מטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$
אז לכל מטריצה ממשית מסדר 3×3 אם
הדטרמיננטה שווה ל-6 ניתן לפרקה כמכפלה
AB כאשר A היא המטריצה הנתונה
ו-B מטריצה עם דטרמיננטה שווה ל-1.

הטענה נכונה. הוכחה: תהי $C\in\mathbb{R}^{3\times3}$ $|C|=6$
A שקולה ל-I ולכן הפיכה. נסמן $B=A^{-1}C$

$AB=AA^{-1}C=IC=C$

$|B|=|A^{-1}C|=|A^{-1}||C|=\frac{1}{6}\cdot6=1$

941200610

5) תהי A מטריצה הפיכה, אזי $\text{adj}(A^2)=(\text{adj}(A))^2$

תשובה: נכונה:

$$\text{adj}(A)=|A|\,I\,A^{-1}=|A|\,A^{-1}$$

$$(\text{adj}\,A)^2=|A|^2(A^{-1})^2$$

$$\text{adj}(A^2)=|A^2|(A^2)^{-1}=|A||A|(AA)^{-1}=|A|^2A^{-1}\cdot A^{-1}=|A|^2(A^{-1})^2$$