בסיס וממד

<u>הגדרה – בסיס:</u> בסיס למרחב וקטורי הוא קבוצה פורשת בת״ל.

<u>משפט:</u> אם V מרחב וקטורי ממימד סופי, אז בכל הבסיסים של V יש אותו מספר איברים.

<u>הגדרה- מימד</u>: מספר הוקטורים בבסיס נקרא מימד. סימון: $\dim(V)$.

<u>משפטים:</u>

1. אם V מרחב וקטורי, אז מספר האיברים בכל קבוצה פורשת גדול או שווה ממספר האיברים בכל קבוצה בת״ל.
2. אם V מרחב וקטורי ממימד סופי. B קבוצה ב- V. התנאים הבאים שקולים:
   א. B בסיס.
   ב. B קבוצה בת״ל מקסימלית (בת״ל ולא מוכלת בקבוצה בת״ל יותר גדולה).
   ג. B קבוצה פורשת מינימלית (פורשת ולא מכילה קבוצה פורשת יותר קטנה).
3. יהא B בסיס למרחב וקטורי V, אז כל איבר ב V ניתן לרשום כצירוף לינארי של איברי B באופן יחיד.
4. יהיה V ממימד n, אזי:
   א. כל $n+1$ איברים ב - V הם ת״ל.
   ב. כל n איברים בת״ל ב - V מהווים בסיס.
   ג. כל n איברים ב - V שפורשים את V מהווים בסיס.
5. יהיה V ממימד n, אזי כל קבוצה בת״לב - V ניתן להשלים לבסיס.
6. V מרחב וקטורי U,W תתי מרחבים של V, אז
   $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.
   אם $U+W$ הוא סכום ישר: $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)$.

<u>הגדרות ומשפטים לגבי מרחב השורות והעמודות של מטריצה.</u>

1. הגדרה: מימד מרחב השורות של מטריצה A, מסומן: $r(A)$ (=מספר השורות הבת״ל).
2. הגדרה: מימד מרחב העמודות של מטריצה A, מסומן: $r(A^t)$ (=מספר העמודות הבת״ל).
3. משפט: מימד מרחב השורות של מטריצה שווה למימד מרחב העמודות שלה.
   הערה: מרחב השורות $\neq$ מרחב העמודות, אבל המימדים שלהם שווים.
4. משפט: השורות של AB הם צירופים לינאריים של השורות של B.

משפטים בנושא דרגה של מטריצה

1. $r(A)=r(A^t)$
2. $r(A_{mxn}) \le \min\{m,n\}$
3. $r(AB) \le r(A)$.
4. $r(AB) \le r(B)$.
5. $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$
6. אם P הפיכה אז $r(PA)=r(A)$.
7. אם Q הפיכה אז $r(AQ)=r(A)$.

(להכפיל מטריצה במטריצה הפיכה זה כמו לעשות פעולות על שורות לכן הדרגה לא משתנה).