מטריצות

- הערה לגבי גודל מטריצה : $A = A_{mxn}$.
  - m – מספר השורות.
  - n – מספר העמודות.

פעולות על מטריצות

- כפל מטריצה בסקלר פירושו כפל של כל איבר במטריצה בסקלר $\alpha A = \left(\alpha a_{i,j}\right)$.
- חיבור מטריצות – אפשרי רק אם הן מאותו גודל והחיבור מתבצע איבר איבר :
  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \quad \Leftarrow \quad C = A + B$
- Transpose : פעולה שמבצעים על מטריצה ובה מחליפים את השורות והעמודות אלו באלו. פעולה זו מסומנת כחזקה. למשל : $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

מונחים :

- **מטריצת האפס** – מטריצה שכולה אפסים.
- **מטריצת היחידה -** מטריצה ריבועית שבה כל איברי האלכסון הראשי שווים לאחד.
  האיברים מחוץ לאלכסון שווים לאפס. מטריצה זו מסומנת באות : I
- **מטריצה סקלרית** – מטריצה ריבועית שבה כל איברי האלכסון הראשי שווים והאיברים מחוץ לאלכסון שווים אפס. מסומנת : αI
  (מטריצת היחידה היא מקרה פרטי של מטריצה סקלרית $\alpha = 1$).
- **מטריצה אלכסונית** – מטריצה ריבועית שבה כל איבר מחוץ לאלכסון הראשי שווה ל-0 (באלכסון הראשי, יכול להיות כל דבר).$i \neq j$ $a_{i,j} = 0$.
- **מטריצה סימטרית** – מטריצה ריבועית המקיימת : $a_{i,j} = a_{j,i}$ או במילים אחרות : $A^t = A$.
- **מטריצה אנטי סימטרית** – מטריצה ריבועית המקיימת $a_{i,j} = -a_{j,i}$ או במילים אחרות : $A^t = -A$
  - בכל שדה שאינו מודולו 2, אברי האלכסון הראשי של מטריצה אנטי סימטרית הם אפסים.
- **מטריצה משולשת עליונה** – מטריצה שבה כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי שווים ל-0 ($a_{i,j} = 0$ לכל i>j).
- **מטריצה משולשת תחתונה** – מטריצה שבה כל האיברים מעל לאלכסון הראשי שווים ל-0 ($a_{i,j} = 0$ לכל i<j).
- **וקטור שורה** – מטריצה בעלת שורה אחת.
- **וקטור עמודה** – מטריצה בעלת עמודה אחת.

משפטים (עבור מטריצות מאותו גודל) :

1. $A + B = B + A$.
2. $\left(A+B\right)+C = A+\left(B+C\right)$.
3. $\alpha\left(A+B\right) = \alpha A + \alpha B$ כאשר α הוא סקלר.
4. $\left(\alpha+\beta\right)A = \alpha A + \beta A$ כאשר α, β הם סקלרים.
5. $\left(\alpha\beta\right)A = \alpha\left(\beta A\right)$ כאשר α, β הם סקלרים.
6. $\left(A \pm B\right)^t = A^t \pm B^t$.
7. $\left(\alpha A\right)^t = \alpha A^t$ כאשר α הוא סקלר.
8. $\left(A^t\right)^t = A$.

כפל מטריצות

הערות ואזהרות :

1. כפל מטריצות אינו קומוטטיבי ($AB \neq BA$).
2. ייתכן ש- $A \neq 0$ וגם $B \neq 0$, אבל $AB = 0$.
3. A^n מוגדר רק כאשר המטריצה ריבועית.

משפטים :

1) $(AB)C = A(BC)$.
2) $A(B+D) = AB + AD$.
3) $(B+D)E = BE + DE$.

ההבדל במיקום בסעיפים 2 ו-3 הוא חשוב כי הכפל לא קומוטטיבי.

4) $A \cdot I = A$
5) $I \cdot A = A$
6) $(AB)^t = B^t A^t$.
7) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

הגדרה :

$A^0 = I$.

דירוג מטריצות

הגדרות

1. **איבר מוביל:** איבר מוביל בשורה של מטריצה הוא האיבר הראשון ששונה מ-0 בה, מצד שמאל.

2. **מטריצה מדורגת:** מטריצה A תקרא מטריצה מדורגת אם מספר האפסים משמאל לאיבר המוביל גדל משורה לשורה, עד שמגיעים לשורות האפסים (אם יש כאלה ואז מספר האפסים נשאר קבוע).

3. **מטריצה מדורגת מצומצמת:**
מטריצה תקרא מטריצה מדורגת מצומצמת או מטריצה מדורגת קנונית אם :

   1. היא מדורגת.
   2. כל איבר מוביל שווה ל-1.
   3. כל איבר מוביל הוא האיבר השונה מ-0 היחיד בעמודה שלו.

הגדרה: פעולות יסודיות על שורות של מטריצה

1. כפל שורה i-ית בסקלר שונה מ-0.
2. החלפת שתי שורות זו בזו.
3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת.

הגדרה – שקילות שורה:

שתי מטריצות נקראות שקולות שורה אם ניתן לעבור מאחת לאחרת ע"י מספר סופי של פעולות יסודיות על שורות.

הגדרה – דרגה של מטריצה:

דרגה של מטריצה היא מספר השורות השונות מאפס בצורה הקנונית של המטריצה. (מספיק גם בצורה המדורגת).
סימון : $r(A)$

משפטים:

1. כל מטריצה מעל שדה שקולה שורות למטריצה מצומצמת אחת ויחידה.

2. במטריצה nXn מדרגה n הצורה הקנונית היא I .

3. שתי מטריצות שקולות שורה אמ"מ הקנוניות שלהן שוות.

הגדרה: מטריצות בסיסיות (אלמנטריות)

מטריצת היחידה שבוצעה עליה פעולה יסודית אחת נקראת מטריצה יסודית (אלמנטרית).

משפט:

ביצוע פעולה יסודית על מטריצה, שקול לכפל במטריצה היסודית המתאימה משמאל.

מסקנה:

2 מטריצות A ו- B הן שקולות שורה אמ"מ קיימות $E_1,...,E_k$ מטריצות יסודיות כך ש :

$$A = E_k E_{k-1} ... E_1 B$$