דניאל מרקו
אלגברה וו מ
941200610

כל עבודה בקורס זוגר הנדסעריות

1) נתונות שתי מטריצות מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$B=\begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&0\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1&0&4\\3&1&4\end{pmatrix}$$

יקוע ששת' המטריצות שקולות שורה. מצא
מטריצות אלמנטריות $E_1, E_2, \dots, E_k$
כך ש- $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_k \cdot B$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}2&0&3&1&0\\2&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2+3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|cc}2&0&3&1&0\\3&1&4&3&1\end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[R_1\to 3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&4&3&0\\3&1&4&0&1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}}_{E_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}}_{E_1} \cdot B = A$$

$$\begin{pmatrix}3&0\\3&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&4\\3&1&4\end{pmatrix}$$

941200610

תרגיל 2:

א) מצאו את הצורה הקנונית מעל $\mathbb{Z}_5$ של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ב) כמה מטריצות קנוניות מגודל 3 עמודות ארבע שורות ודרגה השווה ל-2 יש מעל השדה $\mathbb{Z}_p$ (כאשר p מספר ראשוני). רשום את כל המטריצות הקנוניות עבור $p=2$ ו- $p=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p \times p \quad + \quad p \quad + \quad 1$$

יש $1+p+p^2$ מטריצות המקיימות התנאים הנ"ל

עבור $p=2$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

עבור $p=3$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3 : לכל אחת מהמטריצות הבאות,
מצאו את דרגתן כתלות בערכים השונים
של הפרמטר

א)

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a & 2 & 1-a & 1+a \\ a & 2 & a^3-a & 2a \\ -a & -1 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+R_1} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a & 2 & 1-a & 1+a \\ a & 2 & a^3-a & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a & 2 & 1-a & 1+a \\ 0 & 0 & a^3-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & a^3-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$$

$$a^2+a-2=(a+2)(a-1)=0$$

$a=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A)=2$

$a=-2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A)=3$

$= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$a^3=1 \qquad a=1,\ Cis(120)\ \ Cis(240)$

$Cis(120)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{2\cdot\sqrt{3}i}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-2=-3$

$$\begin{pmatrix} Cis(120) & 1 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 1 & -Cis(120) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)R_3} \begin{pmatrix} Cis(120) & 1 & 1 & Cis(120) \\ 0 & 1 & -Cis(120) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \begin{pmatrix} Cis120 & 1 & 1 & Cis(120) \\ 0 & 1 & -Cis(120) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Rank}(A)=3$

$$\begin{pmatrix} Cis240 & 1 & 1 & Cis240 \\ 0 & 1 & -Cis240 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \begin{pmatrix} Cis240 & 1 & 1 & Cis240 \\ 0 & 1 & -Cis240 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+3R_3} \begin{pmatrix} Cis240 & 1 & 1 & Cis240 \\ 0 & 1 & -Cis240 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Rank}(A)=3$

סכום :

$a=1 \Rightarrow \text{Rank}(A)=2$

$a=-2,\ Cis(120),\ Cis(240) \Rightarrow \text{Rank}(A)=3$

לכל ערך אחר $\text{Rank}(A)=4$

941200610

ג

$$B=\begin{pmatrix} 1 & a^2+1 & a^2+1 & a^2 & 2a \\ 1 & 2a & 2a & 2a & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & a^2+1 & a^2+1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4-R_1} \begin{pmatrix} 1 & a^2+1 & a^2+1 & a^2 & 2a \\ 1 & 2a & 2a & 2a & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & 2-2a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & a^2+1 & a^2+1 & a^2 & 2a \\ 1 & 2a & 2a & 2a & 2 \\ 0 & -6a & -6a & 3-6a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & 2-2a \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 \tfrac{1}{?}R_3 \begin{pmatrix} 1 & a^2+1 & a^2+a & a^2 & 2a \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6a & -6a & 3-6a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & 2-2a \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2-R_1 \begin{pmatrix} 1 & a^2+1 & a^2+1 & a^2 & 2a \\ 0 & -a^2-1 & -a^2-1 & 1-a^2 & 2-2a \\ 0 & -6a & -6a & 3-6a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & 2-2a \end{pmatrix}$$

$\underline{a=1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Rank(B)=3$

$-a^2-1=0 \quad a^2=-1 \quad \underline{a=\pm i}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2-2i \\ 0 & -6i & -6i & 3-6i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2-2i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2-2i \\ 0 & -6i & -6i & 3-6i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(B)=3$

$a=1, i, -i \Rightarrow Rank(B)=3$

a שאר לכל [illegible]

מתקיים ש- $Rank(B)=4$

441200010

תרגיל 4

הוכח או הפרך:

תהיינה A ו B שתי מטריצות ריבועיות ממשיות מאותו סדר כך שגם AB וגם BA הן מטריצות שונות מאפס אז $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{Rank}(BA)$

הטענה אינה נכונה למשל $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} \quad \mathrm{rank}(AB)=1$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix} \quad \mathrm{rank}(BA)=2$$

$$1\neq 2$$