דף עבודה במטריצות

תרגיל 1

יהא: $F=\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in R \right\rangle$. פעולות החיבור והכפל הן הפעולות הרגילות של מטריצות.

א. מצאו את האדיש הכפלי של קבוצה זו.
ב. הוכיחו שלכל איבר ב F, פרט למטריצת האפס, יש הופכי כפלי.
ג. הראו ש- F הינו שדה.
כמו איזה שדה מוכר הוא מתנהג?

תרגיל 2

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא את הטענות הבאות:

A ו- B מטריצות מסדר $n\times n$ מעל שדה F:

א) אם $AB=BA$ אז A מתחלפת בכפל עם B^2 .
ב) אם AB היא אנטי סימטרית אז $AB=BA$.
ג) אם $A^tB^t=\left(AB\right)^t$ אז $AB=BA$.
ד) אם A ו- B שונות מ- 0 כך ש- $AB=B$ אז $A=I_n$.

תרגיל 3

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ מעל Z_5. מצאו מטריצה B מעל Z_5 כך שיתקיים השוויון $AB=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

תרגיל 4

א. הוכיחו ש- $trace(AB)=trace(BA)$ כאשר $A,B\in F^{nxn}$
(- $traceM=\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ - סכום איברי האלכסון של M).
ב. הוכיחו: לא קיימות מטריצות ממשיות: A , B המקיימות: $AB-BA=I$
ג. תנו דוגמא למטריצות: $C,D\in(Z_2)^{2x2}$ המקיימות: $CD-DC=I$.

תרגיל 5

נגדיר מטריצה $\left(E_{m\times n}\right)^{k,l}$ כמטריצה מסדר $m\times n$ אשר כל איבריה הם אפס פרט לאיבר בשורה ה- k ועמודה l השווה ל- 1.

א) תהי $A\in F^{q\times m}$ חשבו את $A\cdot\left(E_{m\times n}\right)^{k,l}$.
ב) תהי $B\in F^{n\times p}$ חשבו את $\left(E_{m\times n}\right)^{k,l}\cdot B$.
ג) חשבו את המכפלה $\left(E_{m\times n}\right)^{k,l}\cdot\left(E_{n\times m}\right)^{l,k}$.

* בשאלה זו אפשר להסתפק בשרטוט המטריצה המתקבלת בכל סעיף עם הביטוי הנכון בכל מקום שיש בו איבר שונה מאפס. (ז"א: אין חובה להשתמש בסיגמאות, עדיף "לראות" את המטריצה המתקבלת)

<u>תרגיל 6</u>

הוכיחו שאם C היא מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$ ומתחלפת בכפל עם כל מטריצה ריבועית מאותו הסדר אז C היא מטריצה סקלרית (כלומר $C=kI_n$ כאשר k סקלר).

(רמז: הסתמכו על תרגיל 5: אם C מתחלפת בכפל עם כל מטריצה ריבועית אז היא מתחלפת בפרט עם $(E_{nxn})^{k,l}$)

<u>תרגיל 7</u>

הגדרה: Y יקרא צירוף לינארי של: $X_1, X_2, \dots, X_n$ אם קיימים סקאלרים: $a_1, a_2, \dots, a_n$

כך ש: $\mathrm{Y} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

א) הראו שאם $Ax=b$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $x\in F^{n\times 1}$, $b\in F^{m\times 1}$ (F שדה כלשהו) אז b הוא צירוף לינארי של עמודות A (כלומר b הוא צירוף ליניארי של עמודות A).

ב) הראו שאם $xA=b$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $x\in F^{1\times m}$, $b\in F^{1\times n}$ (F שדה כלשהו) אז b הוא צירוף לינארי של שורות A (כלומר b הוא צירוף ליניארי של שורות A).

ג) הראו שאם $AB=C$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times k}$, $C\in F^{m\times k}$ (F שדה כלשהו) אז עמודות C הן צירוף לינארי של עמודות A ושורות C הן צירוף לינארי של שורות B.

- גם בשאלה זו אפשר פשוט לכתוב את הצרופים ללא שימוש בנוסחאות מסובכות, למשל:

  (first line of __) = 5*(first line of__)+7*(second line of __)+…