חשבון אינפיניטסימלי 1מ' - אמ"מ

104031

תרגיל בית 2

דניאל טורקן

ת"ז: 941200610

תאריך הגשה: 10/4

94200610

תרגיל בית 2

שאלה 1: תהיינה A ו- B קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים החסומות מלעיל. הוכיחו כי

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$$

הוכחה: A ו- B חסומות $\underset{\text{לפי אקסיומת השלמות}}{\Longrightarrow}$ $\exists \sup A, \sup B$

סופרמום הוא חסם מלעיל, אזי לפי הגדרת חסם:

$$\forall a\in A,\quad \sup A\geq a$$
$$\forall b\in B,\quad \sup B\geq b$$

$$\max\{\sup A,\sup B\}\geq \sup A\geq a \quad \forall a\in A$$

$$\max\{\sup A,\sup B\}\geq \sup B\geq b \quad \forall b\in B$$

אזי לכל x כך ש- $x\in A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ או } x\in B\}$

מתקיים $\max\{\sup A,\sup B\}\geq x$

אזי $\max\{\sup A,\sup B\}$ חסם מלעיל של $A\cup B$

לפי משפט על סופרמום:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists a_0\in A \;:\; a_0 \overset{(*)}{>} \sup A-\varepsilon$$
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists b_0\in B \;:\; b_0 \overset{(\Delta)}{>} \sup B-\varepsilon$$

$$a_0\in A \Rightarrow a_0\in A\cup B$$
$$b_0\in B \Rightarrow b_0\in A\cup B$$

אם $\max\{\sup A,\sup B\}=\sup A$ אזי

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists a_0\in A\cup B \;:\; a_0 \overset{(*)}{>} \max\{\sup A,\sup B\}-\varepsilon$$

אם $\max\{\sup A,\sup B\}=\sup B$ אזי

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists b_0\in A\cup B \;:\; b_0 \overset{(\Delta)}{>} \max\{\sup A,\sup B\}-\varepsilon$$

אזי $\max\{\sup A,\sup B\}$ הוא החסם מלעיל הקטן ביותר כלומר הסופרמום.

941200610

שאלה 2: תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים ו-S מספר ממשי נתון.

הוכיחו:

א) A לא חסומה מלמעלה אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A$ כך ש- $S+\varepsilon<x$

נתון כי $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A,\ S+\varepsilon<x$, להוכיח כי A לא חסומה מלמעלה

נניח בשלילה כי A חסומה מלמעלה, אזי קיים Y כך שלכל $x\in A$
$x\leq Y\leq |Y|$

לפי הנתון לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A$ כך ש $S+\varepsilon<x$

ובפרט עבור $\varepsilon=|Y|+1+|S|>0$ קיים x כך ש- $|Y|\leq |Y|+1\leq |Y|+1+|S|+S<x$

סתירה

נתון כי A לא חסומה מלמעלה, להוכיח כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A$ כך ש $S+\varepsilon<x$

נניח בשלילה כי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $x\in A$ $x\leq S+\varepsilon$

ובפרט עבור $\varepsilon=1$: לכל $x\in A$ $x\leq S+1$

אזי $S+1$ הוא חסם מלעיל של A. בניגוד לכך שנתון A לא חסומה מלמעלה. סתירה.

941200610

ב) S חסם מלמעלה של A אם ורק אם
לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x\in A$ מתקיים $x > s-\varepsilon$

הוכחה:

נתון כי לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x\in A$ מתקיים
$s-\varepsilon < x$

נוכיח כי S חסם מלמעלה של A

נניח בשלילה כי S אינו חסם מלמעלה של A. אזי קיים $x_0\in A$
כך ש- $x_0 > s > s-1$

נתון כי לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x\in A$ מתקיים
$s-\varepsilon < x$

ובפרט עבור $\varepsilon=1$ מתקיים לכל $x\in A$

$x > s-1$

ובפרט עבור x_0: $x_0 > s-1$

סתירה

נתון כי S חסם מלמעלה של A
נוכיח כי לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x\in A$ מתקיים
$s-\varepsilon < x$

לפי הגדרת חסם מלמעלה, לכל $x\in A$ מתקיים
$x \le s$

לכל $\varepsilon>0$ $s > s-\varepsilon$

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x\in A$ $x \le s > s-\varepsilon$

$x > s-\varepsilon$

441200610

3) s חסם מלמעלה של A אמ"מ
לכל $\varepsilon>0$ מתק"ים שאם $s+\varepsilon<x$
אז $x\notin A$

נניח כי s חסם מלמעלה. נוכיח
כי לכל $\varepsilon>0$ מתק"ים שאם $s+\varepsilon<x$
אז $x\notin A$.
נניח בשלילה שק"ים $\varepsilon_0>0$ כך ש-
$s+\varepsilon_0<x_0$ ו- $x_0\in A$

לפי הגדרת חסם מלמעלה, לכל $x\in A$
$x\leq s$
ובפרט עבור $x_0\in A$, $x_0\leq s$

לפי ההנחה $x_0 > s+\varepsilon_0 > s$
סתירה כי $\varepsilon_0>0$

נניח כי לכל $\varepsilon>0$ מתק"ים שאם
$s+\varepsilon<x$ אז $x\notin A$.
נוכיח כי s חסם מלמעלה של A

אם $s+\varepsilon<x$ אז $x\notin A$ $\xLeftarrow{}$ אם $x\in A$ אז $x\leq s+\varepsilon$
שקי' לוגית

אז לכל $x\in A$ $x\leq s+\varepsilon$
לכל $\varepsilon>0$ $s+\varepsilon>s$
אז לכל $x\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ מתק"ים $x\leq s+\varepsilon > s$ $x\leq s+\varepsilon<s$
$x<s$
$s>x$
אז s חסם מלמעלה של A.

941200610

שאלה 3 הראו בעזרת הגדרת הגבול כי:

א)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-9n-12}{4n^2+5n+6} = \frac{1}{2}$$

לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=\boxed{\frac{53}{8\varepsilon}}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים:

$$\left|\frac{2n^2-9n-12}{4n^2+5n+6}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n^2-9n-12-2n^2-\frac{5}{2}n-3}{4n^2+5n+6}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\frac{-23n}{2}-15}{4n^2+5n+6}\right| = \frac{\frac{23n}{2}+15}{4n^2+5n+6} < \frac{\frac{23n}{2}+15n}{4n^2} = \frac{\frac{53n}{2}}{4n^2} = \frac{53}{8n}$$

$$\frac{53}{8n}=\varepsilon$$

$$N=\frac{53}{8\varepsilon}$$

941200610

ב) הוכחה ע״י שלילת הגדרת הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{n+7}\neq 2$$

לפי שלילת הגדרת הגבול

צ״ל כי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N קיים $N<n$ שמתקיים

$$\left|\frac{4n+2}{n+7}-2\right|\geq\varepsilon$$

$$\left|\frac{4n+2-2n-14}{n+7}\right|=\left|\frac{2n-12}{n+7}\right|=\frac{2n-12}{n+7}>\frac{n}{n+7}$$

עבור $n>7$ עבור $n>12$

$$\frac{n}{n+7}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon$$

עבור $n>7$

אזי עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ לכל N קיים

$n=[N]+7>N$ כך ש-

$$\left|\frac{4n+2}{n+7}-2\right|\geq\varepsilon$$

944200610

3) הראו בעזרת הגדרת הגבול כי
סדרה $a_n=n^2$ לא קיים גבול
סופי.

צ"ל כי לכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N קיים $n>N$ כך ש-
$$|n^2-L|\geq\varepsilon$$

יהיו $L,N\in\mathbb{R}$ נבחר n כך ש- $N<n$

$$\varepsilon < |L-n^2|$$

$$1=\left||L|+1-|L|\right| \leq \left||L|-n^2\right| \leq |L-n^2|$$

$n\geq\sqrt{|L|+1}$ לפי אי שוויון המשולש

נבחר $n=\left\lceil \max\{\sqrt{|L|+1},N\}\right\rceil$

נבחר $\varepsilon=1>0$

לכל N קיים $n\in\mathbb{N}, N<n$ כך ש

$$|n^2-L|\geq 1$$

941200610

שאלה 4

יהי a_n, b_n שתי סדרות ממשיות
כך ש: $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. נתון שקיים N, L
מספרים ממשיים ו-t מספר חיובי
כך שלכל $N<n$ מתקיים

$$|a_n - L| < t|b_n|$$

הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

__הוכחה:__

נתון כי $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
אזי לכל $\varepsilon_1 > 0$ קיים N_1 כך שלכל $N_1 < n$ מתקיים:

$$|b_n - 0| < \varepsilon_1$$

$$|b_n| \overset{(*)}{<} \varepsilon_1$$

צריך להוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

ניקח $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{t}$

$$|a_n - L| \underset{\text{לפי הנתון לכל } N<n}{<} t|b_n| \overset{(*)}{<} t\cdot\frac{\varepsilon}{t} = \varepsilon$$

אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים

$$|a_n - L| < \varepsilon$$