אלמנדו ח'ן   בניין פורגן   942200610

2/6

ממ"ן 11

שאלה 1

$$U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a+b \\ a+c \\ a+b+c \end{pmatrix} \qquad W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\\5\\4\end{pmatrix} \right\}$$

א) מצאו בסיס לת"מ W ו- U

$$U = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\Downarrow$

הקבוצה פורשת

אם הקבוצה בת"ל אז היא בסיס

נכתוב את W כשורות במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&2 \\ 1&4&1&4&5&4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&2 \\ 0&4&0&4&4&4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&2 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&0&2 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix} \right\} \Leftarrow$$

הקבוצה פורשת W ובת"ל היא בסיס

ג) נמצא $W+U$

$$W+U=\begin{pmatrix} a+\alpha \\ b+\beta \\ c+\alpha \\ a+b+\gamma \\ a+c+\alpha+\beta \\ a+b+c-\beta+2\gamma \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

במטריצה הוקטורים

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&0&2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5\to R_5-R_2]{R_4\to R_4-R_1} \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&-1&0&-1\\ 0&0&0&-1&1&-2\\ 0&0&0&1&0&2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&2\\ 0&0&0&-1&1&-2\\ 0&0&0&1&0&2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5\to \frac{R_5}{2}+\frac{R_4}{2},\ R_6\to R_6-R_4]{R_1\to R_1-R_4,\ R_2\to R_2-R_4} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&-1\\ 0&1&0&0&-1&-1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&-1&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_5,\ R_6\to R_6+R_5]{R_2\to R_2+R_5,\ R_3\to R_3-R_5} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&-1\\ 0&1&0&0&0&-1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&2\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

הקבוצה הבאה
פורשת $U+W$ ובת״ל
ולכן מהווה בסיס.

ג) $W \cap V$

$$W \cap V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a+b \\ a+c \\ a+b+c \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ \gamma \\ \alpha+\beta \\ -\beta+2\gamma \end{pmatrix}$$

$$x \in W \cap V \iff \begin{aligned} & a = \cancel{\alpha} \\ & b = \beta \\ & c = \alpha = a \\ & a+b = \gamma \implies \alpha+\beta \overset{(*)}{=} \gamma \\ & a+c = \alpha+\beta \implies \alpha+\alpha = \alpha+\beta \implies \alpha = \beta \\ & a+b+c = -\beta+2\gamma \implies 3\alpha = -\beta+4\beta \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; 3\alpha = 3\beta \end{aligned}$$

$$\Downarrow (*) \quad \gamma = 2\alpha = 2\beta$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ פורש את $W \cap W$
ובת"ל ולכן מהווה בסיס

2) מצאו בסיס לתת מרחב U_1 של $\mathbb{R}^6$ כך שמתקיים השוויון $W+U=U_1\oplus(W\cap U)$

$$sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=U_1\oplus sp\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\dim(W+U)=\dim U_1+\dim(U\cap W)-\dim(U_1\cap(W\cap U))$$
$$\dim U_1=5-1=4$$

לכן כל 4 וקטורים בת"ל שפורשים
את U_1 מהווים בסיס. וקטורים ל U_1
שייכים ל $W+U$ ובת"ל ל- $W\cap U$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to -R_1+R_2+R_3+2R_4+2R_5}\begin{pmatrix}1&1&1&2&2&3\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}W\cap U\\ \\ U_1\\ \\ \\ \end{array}$$

הבסיס של U_1 הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל 2: יהיו U ו-W תתי מרחבים של מ"ו V. נתון כי $\{v_1,v_2\}$ הוא בסיס ל- $W\cap U$, $\{u_1,v_1,v_2\}$ הוא בסיס ל-U ו- $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ הוא בסיס ל-W. מצאו בסיס ל- $W+U$ והוכיחו שזה בסיס.

הבסיס ל- $W+U$ הוא $\{v_1, v_2, u_1, w_1, w_2\}$.

נוכיח שזה בת"ל: נתון $\{w_1,w_2,v_1,v_2\}$ בסיס ל-W ולכן $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ בת"ל ולכן כל וקטור w_2,w_1,v_2,v_1 לא צירוף לינארי של האחרים. נוכיח שגם u_1 לא צירוף לינארי של $\{w_1,w_2,v_1,v_2\}$. $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ מהווה בסיס ל-W ולכן אם u_1 צירוף לינארי של $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ אז $u_1\in W$ וגם מה נתון $\{u_1,v_2,v_1\}$ מהווה בסיס ל-U ולכן $u_1\in U$ אז $u_1\in(W\cap U)$ אבל u_1 לא צירוף לינארי של $\{u_1,v_2,v_1\}$ כי הקבוצה הזאת בסיס ובת"ל וגם $u_1\notin\{v_1,v_2\}=(W\cap U)$ סתירה! לכן כל וקטור ב- $\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$ לא צירוף לינארי של האחרים ולכן הקבוצה בת"ל.

נוכיח $U+W=\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$

$$U=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 u_1$$
$$W=\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 w_1+\beta_4 w_2$$

$$U+W=(\alpha_1+\beta_1)v_1+(\alpha_2+\beta_2)v_2+\alpha_3 u_1+\beta_3 w_1+\beta_4 w_2$$
$$=\gamma_1 v_1+\gamma_2 v_2+\gamma_3 u_1+\gamma_4 w_1+\gamma_5 w_2$$
$$=Sp\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$$

ולכן $\{v_1,v_2,u_1,w_1,w_2\}$ מהווה בסיס ל $U+W$

תרגיל 3: הוכיחו או הפריכו:

א) מרחב וקטורי הנפרש ע"י מטריצות
מסדר $n \cdot n$ שדרגת כל אחת מהן קטנה ממש
מ-n מכיל רק מטריצות מדרגה קטנה ממש מ-n.

הטענה אינה נכונה. לדוגמא:

יהא V מ"ו הנפרש ע"י

$$V_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$r(V_1) = r(V_2) = 1$$

$$V_3 = V_1 + V_2$$

$$V_3 \in V$$

$$V_3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$r(V_3) = 2$$

ב) למרחב המטריצות $\mathbb{R}^{n\times n}$ וזה לא קיים בסיס
המורכב N- n^2 מטריצות שכולן מתחלפות
מכפל (כלומר לכל שתי מטריצות A ו-B
מהבסיס מתקיים AB=BA)

במרחב המטריצות $\mathbb{R}^{n\times n}$ יש n^2 פוזות
חופש ולכן המימד של הבסיס שלו הוא
n^2. זאת אומרת יש n^2 וקטורים וכולם באורך n^2 וצריך
בת"ל אז' זה לפי אותם כשורות במטריצה המטריצה
$I^{n^2\times n^2}$ וכל שורה במטריצה מייצג מטריצה בבסיס
לצמה שמוכל בבסיס של $\mathbb{R}^{n\times n}$ ולכן כל בסיס
מוכל

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}}_{n} \quad ! \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\{0\} \qquad AB\neq BA$$

5) יהי V מ"ו ממימד 3 ו-$\{v_1,v_2\}$ ש' וקטורים בת"ל. נגדיר W = אוסף כל הוקטורים שלא משלימים את $\{v_1,v_2\}$ לבסיס של V אז W תת מרחב וקטורי!

הטענה נכונה. הוכחה:

$\{0\}$ לא משלים $\{v_1,v_2\}$ כי $sp\{0,v_1,v_2\}=sp\{v_1,v_2\}$
ולכן W לא ריק.
יהי v_3 וקטור שלא משלים את $\{v_1,v_2\}$ לבסיס כלומר $\{v_1,v_2,v_3\}$ לא בסיס
אזי $sp\{v_1,v_2,\alpha v_3\} = sp\{v_1,v_2,v_3\}$ לכל $\alpha \in F$ ולכן גם αv_3 לא משלים $\{v_1,v_2\}$ לבסיס ולכן W סגור לכפל בסקלר

נוכיח סגירות לחיבור.
אם $v_1=\alpha v_2$ אזי כל וקטור ב-V אינו משלים $\{v_1,v_2\}$ לבסיס, כי מימד 3 ולכן $V=W$ וסגור לחיבור כמו.
אם $v_1 \neq \alpha v_2$: יהיו $u_1,u_2 \in W$
אם $\{v_1,v_2,u_1\}$, $\{v_1,v_2,u_2\}$ בת"ל אז הם קבוצה של 3 וקטורים ב-V ו-V מימד 3 לכן יהיו בסיסים. לכן $\{v_1,v_2,u_1\}$, $\{v_1,v_2,u_2\}$ ת"ל.
לכן אחד מהוקטורים צירוף לינארי של קודמיו ו-v_2 לא צ"ל של v_1 לכן u_1 ו-u_2 צ"ל של v_1,v_2 כלומר

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2=u_1$
$\beta_1 v_1+\beta_2 v_2=u_2$

$$u_1+u_2=(\alpha_1+\beta_1)v_1+(\alpha_2+\beta_2)v_2$$

ולכן $\{v_1,v_2,u_1+u_2\}$ ת"ל
ולכן W סגור לחיבור

תרגיל 4: יהא V מ"ו ממימד n ויהיו U ו-W
תת מרחבים שונים ממימד $n-1$. מצאו המימד של
$W\cap U$.

$W\neq U \Leftarrow$ קיים $v\in U$ כך ש $v\notin W$
או קיים $v\in W$ כך ש $v\notin U$
נניח בה"כ שקיים $v\in U$ כך ש $v\notin W$
$v\notin W\cap U$, $v\in U$
נוכיח מכך ש- $\dim(W\cap U)<\dim(U)$
נניח בשלילה $\dim(W\cap U)\geq\dim(U)$
כעת $B_{W\cap U}$ בסיס של $W\cap U$.
$B_{W\cap U}$ קבוצה בת"ל והיא ב-U ולכן סתירה
כי $\dim U$ המימד המקסימלי של קבוצה בת"ל
ב-U ו- $\dim(W\cap U)\geq\dim(U)$

① לכן $\dim(W\cap U)\leq\dim(U)$

② נוכיח ש $\dim(W\cap U)\neq\dim(U)$ נניח בשלילה שכן.
יהי $B_{U\cap W}$ בסיס של $U\cap W$
$U\cap W\subseteq U$ ו- $B_{U\cap W}$ קבוצה בת"ל
ולכן מהווה בסיס גם של U כי הוא בת"ל
במימד של הבסיס של U ולכן $B_{U\cap W}$ פורש
את U ולכן קיים צ"ל של איברי $B_{U\cap W}$
ששווה ל-v ולכן $v\in W\cap U$ בסתירה
להנחה.

③ לכן מ-(1) ו-(2): $\dim(U\cap W)<\dim(U)=n-1$

ממשפט המימדים: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$
$\Rightarrow \dim(U\cap W)=2n-2-\dim(U+W)$

$U+W\in V\Rightarrow \dim(U+W)\leq\dim(V)=n$

④ $\Rightarrow \dim(U\cap W)\geq 2n-2-n=n-2$

מ-④ ו-③ $n-2\leq\dim(U\cap W)\leq n-2$
$\dim(U\cap W)=n-2$

תרגיל 5:

א) מצאו דרגת המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ מעל Z_5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 4R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = 1$$

ב) הוכיחו שאם u,v,w בת"ל אז אם $\{u-\alpha v, u-\beta w\}$ בת"ל לכל $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

נניח בשלילה ש $\{u-\alpha v, u-\beta w\}$ ת"ל אזי

$$\gamma(u+\alpha v) = u-\beta w$$
$$\gamma u - \alpha\gamma v = u - \beta w$$
$$(\gamma-1)u = -\beta w + \alpha\gamma v$$
$$u = \frac{-\beta}{\gamma-1} w + \frac{\alpha\gamma}{\gamma-1} v$$

אזי u צירוף לינארי של $\{v,w\}$

ולכן $\{u,v,w\}$ ת"ל בסתירה לנתון.

5) יהי $\left\{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_4\\b_5\\b_6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_7\\b_8\\b_9\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל ב $\mathbb{Z}_5^3$

ותהי $A\in\mathbb{Z}_5^{3\times3}$ ומקיימת

$$A\begin{pmatrix}b_1&b_4&b_7\\b_2&b_5&b_8\\b_3&b_6&b_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\quad A\begin{pmatrix}b_4\\b_5\\b_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\quad A\begin{pmatrix}b_7\\b_8\\b_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}b_7\\b_8\\b_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow A\begin{pmatrix}b_1+b_7\\b_2+b_8\\b_3+b_9\end{pmatrix}=0$$

$$A\begin{pmatrix}b_4\\b_5\\b_6\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}b_7\\b_8\\b_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow A\begin{pmatrix}b_4+2b_7\\b_5+2b_8\\b_6+2b_9\end{pmatrix}=0$$

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_7\\b_8\\b_9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_4\\b_5\\b_6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2b_7\\2b_8\\2b_9\end{pmatrix}\right\}$$ בת"ל לפי טענה ג

נוכיח שמימד הבסיס של המרחב הוא 2

ולכן B_W בסיס.

אם B_W לא בסיס אז ממד גדול מ 2

$\dim(W)>2$ אבל $W\subseteq\mathbb{Z}_5^3$ ולכן $\dim(W)\le 3$

$\Leftarrow \dim(W)=3$

מימד מרחב הפתרונות $n-r(A)$

ולכן $3=\dim(W)=n-r(A)=3-r(A) \Rightarrow r(A)=0 \Rightarrow A=0$

בסתירה לכך ש-

$$A\begin{pmatrix}b_1&b_4&b_7\\b_2&b_5&b_8\\b_3&b_6&b_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}$$

לכן B_W מהווה בסיס

תרגיל 5) סעיף ii) מצאו בסיס למרחב העמודות של A.

נתון $b_1A^1+b_2A^2+b_3A^3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ A^i העמודה ה-i של A

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\in Col(A)$$

$$\dim Col(A)=r(A^t)=1$$

$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ כלל ושייך לעמודות ~~את~~ מ"מ 1

ולכן הוא בסיס לעמודות Col(A)

ואז נראה כי $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ בסיס למרחב הפתרונות של $A\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

נמצא מטריצה מתאימה קטנה כי שקולת שורה ל-A.

צורה כללית של פתרונות המשוואה

הוא $\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)$

$=(\alpha,2\alpha+\beta,\beta)=(x,y,z)$

$$A:\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_4&a_5&a_6\\a_7&a_8&a_9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha+\beta\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$y=2x+z$

$0=2x+4y+z$

$n-R(A)=2$

$r(A)=1$

$$C=\begin{pmatrix}2&4&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן מטריצה הכוללת ש"ש ל-A: