אלסנדרו אנ' דניאל טארקי 019002114 941200610

<u>מרחב וקטורים ומרחב נפרש</u>

<u>תרגיל 1</u>

בכל אחד מהמקרים הבאים מוגדרים $W \subseteq V$
תחליטו עבור המקרים הבאים האם W
תת מרחב של V: אם כן נמקו. אם
לא, תנו דוגמה לתנאי שלא מתקיים.

א) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$

i) W = קבוצת כל המטריצות שמכפלת
איבריהן שווה ל-0.

W אינו תת מרחב כי הוא לא
סגור לחיבור. לדוגמה:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 0\cdot1\cdot1\cdot1 = 0 \quad A \in W$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 1\cdot0\cdot0\cdot0 = 0 \quad B \in W$

$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1 \neq 0$

לכן $A+B \notin W$

ii) W = קבוצת כל המטריצות המקיימות
מטריצה קטנה שווה 1.

W לא תת מרחב.
מטריצת 0 מסדר nxn ? גדלה. שווה לאפס
לכן היא לא שייכת ל-W לכן W לא ריקה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad A \in W$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad B \in W$$

לכל $A+B$, $A+B \in W$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

כי [illegible] [illegible] רק שורה אחת
מסדר $n \times n$

לכל $\alpha \in F$, $A \in W$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

כי [illegible]
רק שורה אחת
מסדר $n \times n$

לכן עפ"י משפט, W ת"מ של V

$W=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_1+\bar{z}_2=z_3\}$ $F=\mathbb{C}$ $V=\mathbb{C}^3$ 1ב

$W=\{(z_1, z_2, z_1+\bar{z}_2) \mid z\in\mathbb{C}\}$

$A\in W$, $A=(z_1, z_2, z_1+\bar{z}_2)$
$B\in W$, $B=(z_3, z_4, z_3+\bar{z}_4)$

$A+B=(z_1+z_3, z_2+z_4, z_1+z_3+\bar{z}_2+\bar{z}_4)$

$\underset{\text{לפי תכונה 4}}{=}(z_1+z_3,\ z_2+z_4,\ z_1+z_3+\overline{z_2+z_4})$

אזי $A+B\in W$

$(0,0,0)$ ש"ך ל-W לכן W לא ריק

$\alpha A=(\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha(z_1+\bar{z}_2))$

$=(\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha z_1+\alpha\bar{z}_2)$

$\alpha\bar{z}_2\neq\overline{\alpha z_2}$

$\alpha=1+i$ $z_2=1$ נגדיר

$\alpha\bar{z}_2=1+i\neq 1-i=\overline{\alpha z_2}$

לכן W לא ת"מ של V

5) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ $F=\mathbb{R}$ $W_3 =$ אוסף כל
המטריצות ב-V השקולות שורה למטריצה
A יחד עם מטריצת האפס.

ל) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-3R_1]{} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\to R_1+R_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\to -1\cdot R_1]{} \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to -1\cdot R_2]{} \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ שקולות שורה ל-A A-1 של
שורה ל-A

$$A+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

וכן בגלל הנגדית ולכן שווה
הנגדית של A אל A לכן
סגור לחיבור

ii

$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\to -1\cdot R_1]{} \begin{pmatrix}-1&-2\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1&-2\\0&0\end{pmatrix}$ שקולות שורה ל-A

וגם A שקולת שורה ל-A

אבל $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2\\0&0\end{pmatrix}=A+\begin{pmatrix}-1&-2\\0&0\end{pmatrix}$

ו-$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ לא שקולת שורה

ל-A כי A וגם הם נגדיות

הפכיות וגם לא שקולים

לכן זה לא סגור לחיבור

לכן הוא לא מהווה תת מרחב

תרגיל 2: יהיו V מרחב וקטורי
ו- $U \neq \{0\}$ תת מרחב של V שאינו
שווה ל-V. יהיו $V_0 \in V$.

הוכיחו כי לא יתכן שכל איבר
ב-V שאינו ב-U הוא כפולה
בסקלר של V_0

הוכחה: נניח בשלילה שכל איבר ב-V שאינו
ב-U הוא כפולה בסקלר של V_0
נחלק למקרים:

$V_0 \in U$

לפי הנחה כל איבר ב-V שאינו
ב-U הוא כפולה בסקלר של V_0, וקיים
איבר כזה כי נתון $U \neq V$ נסמן אותו
V_1 אזי $\alpha V_0 = V_1$ $\alpha \neq 0$
לפי הנחה $V_0 \in U$ וקיבלנו $V_1 \notin U$, $V_1 \in V$
סתירה לכך ש-U סגור לפעולת כפל
בסקלר.

$V_0 \notin U$

לפי הנחה קיים $V_1 \in V, V_1 \notin U$ כך ש $V_1 = \alpha V_0$
נסמן $\beta = -\alpha$ ההופכי של α (קיים כי
$\alpha \neq 0$ שכן לכל איבר בשדה יש הופכי)

<u>תרגיל 3:</u>

א) יהי V מ"ו מעל F ו- U_1,U_2,U_3 תת"מ של V

אם $V = U_1 \oplus U_2 = U_1 \oplus U_3$

אז $U_2 = U_3$

<u>הטענה לא נכונה</u>, דוגמא נגדית:

$V = Sp\{(a,b)\}$ $\quad U_1 = Sp\{(\alpha,0)\}$

$U_2 = Sp\{(\beta,\beta)\}$

$U_3 = Sp\{(0,\gamma)\}$

ב) יהי V מ"ו מעל F ו- U_1,U_2 תת"מ של V

אם $V = U_1+U_2$ אז לכל תת מרחב Y של V

מתקיים $Y=(Y\cap U_1)+(Y\cap U_2)$

הטענה נכונה

ג) יהי V מ"ו מעל השדה Z_p ראשוני

אז כל תת קבוצה לא ריקה של V הסגורה

לחיבור היא תת מרחב של V.

הטענה אינה נכונה

ד) יהי V מ"ו מעל שדה ∞ שאינו ניתן [illegible]

ע"י איחוד סופי, אז יש ל- V ∞ תת"מ

ה) V מ"ו מעל F, A,B תת קבוצות של V

אם $A\cap B=\emptyset$ אז $Sp\{A\} \cap Sp\{B\} = \{0\}$

לא נכון

יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ ויהיו U,W תת' מרחבים
הבאים של V: $W=sp\{1,x^2\}$ $U=\{p(x)\in V \mid p(2)=0\}$

א) מצאו קבוצה פורשת ל-U

$p(x)=ax^2+bx+c=0$

$a4+b2+c=0$

$c=-4a-2b$

$\cancel{b=-4a-2b \Rightarrow b-2a+b=2b=2a-b}$

$U=\{ax^2+bx-4a-2b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$U=a(x^2-4)+b(x-2)$

$\{(x^2-4),(x-2)\}$ כן קבוצה פורשת

ב) הוכיחו $V=U+W$

$U=sp\{(x^2-4),(x-2)\}$

$U+W=ax^2-4a+bx-2b+c+dx^2$

$=a(x^2-4)+b(x-2)+dx^2+c$

$$\begin{array}{l} ax^2+0x-4a \\ 0x^2+b-2b \\ 0x^2+0+c \\ dx^2+0+0 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} ax^2 \\ bx \\ c \\ \end{array}$$

$=ax^2+bx+c$

כן

ג) מצאו $U \cap W$

$W = Sp\{1, x^2\} = \{\alpha x^2 + \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$U = \{a x^2 + bx - 4a - 2b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$u \in U \cap W \iff a = \alpha$
$b = 0$
$-4a - 2b = \beta \Rightarrow -4a = \beta$

$U \cap W = \{a x^2 - 4a \mid a \in \mathbb{R}\}$

ב) נגדיר את $V = (\mathbb{Z}_3)_2[x]$ $\quad W = sp\{1, x^2\}$
$U = \{p(x) \in V \mid p(2) = 0\}$

ג) כמה וקטורים יש ב-U

$V = \{0, x+1, 2x+2, x^2+2x+1, x^2+2, x^2+x,$
$2x^2 + x + 2, 2x^2 + 1\}$

$\boxed{8 \text{ וקטורים}}$

iii) נתון $X=\{v_1, v_2\}$ קבוצה בת של וקטורים מ-V המקיימת $Sp\{X\}=W$ כמה קבוצות שונות כאלו יש ב-V

$$Sp\{1, x^2\} = \{ax^2+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

כן שאלה לכל span-ים נבחרו

$$Sp\{\{\alpha x^2+\beta, \gamma \mid \alpha,\gamma \in \{1,2\}, \beta \in \{0,1,2\}\}\}$$

לכן יש $2\times 3\times 2 = 12$ span-ים