מרחבים וקטוריים

הגדרה :

קבוצה V נקראת מרחב וקטורי מעל שדה F אם קיימות שתי פעולות : האחת $+$ בין איברי V והשניה : $\cdot$ כפל בין אברי F לאברי V, כך שמתקיימות הדרישות הבאות :

1. סגירות לחיבור : $v+u\in V \Leftarrow v,u\in V$.
2. קומוטטיביות : $v+u=u+v \Leftarrow v,u\in V$.
3. אסוציאטיביות : $v+(u+w)=(v+u)+w \Leftarrow v,u,w\in V$.
4. קיים איבר נייטרלי $0\in V$, כך ש : $v+0=v$ לכל $v\in V$.
5. קיום איבר נגדי : לכל $v\in V$ יש איבר נגדי $-v\in V$ כך ש : $v+(-v)=0$.
6. סגירות לכפל בסקלר : $\alpha v\in V \Leftarrow \alpha\in F, v\in V$.
7. $\alpha(v+u)=\alpha v+\alpha u\in V \Leftarrow \alpha\in F \quad v,u\in V$.
8. דיסטריבוטיביות : $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v \Leftarrow \alpha,\beta\in F \quad v\in V$.
9. אסוציאטיביות בכפל : $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v) \Leftarrow \alpha,\beta\in F \quad v\in V$.
10. $1\cdot v=v \Leftarrow 1\in F \quad v\in V$.

משפט :

V מרחב וקטורי מעל שדה F. מתקיים :

1. 0 הוא יחיד.
2. $0\cdot\alpha=0 \Leftarrow \alpha\in F, 0\in V$.
3. $0\cdot v=0 \Leftarrow 0\in F, v\in V$.
4. $\alpha\in F, v\in V$ כך ש : $v=0 \ or \ \alpha=0 \Leftarrow \alpha v=0$.
5. $(-\alpha)v=\alpha(-v)=-(\alpha v) \Leftarrow \alpha\in F, v\in V$.

תתי מרחב

הגדרה :

V מרחב וקטורי מעל שדה F. A תת קבוצה של V.

אז ל- A נקרא תת מרחב של V אם גם A הוא מרחב וקטורי <u>ביחס לאותן הפעולות</u> שב- V.

משפט 1 :

V מרחב וקטורי מעל שדה F. A תת קבוצה של V.

A תהיה תת מרחב של V אם <u>ביחס לאותן הפעולות</u> שב- V מתקיים :

1. A לא ריקה.
2. סגירות לחיבור : לכל $v_1, v_2 \in A \leftarrow v_1+v_2\in A$.
3. סגירות לכפל בסקלר : לכל $v\in A \ , \ \alpha\in F \leftarrow \alpha v\in A$

משפט 2 :

V מרחב וקטורי מעל שדה F . A תת קבוצה של V.
A תהיה תת מרחב של V אם ביחס לאותן הפעולות שב- V מתקיים :

1. 0 □ A.
2. סגירות לחיבור וכפל בסקאלר : לככל v_1, v_2 □ A , α □ F ← $v_1 + \alpha v_2$ □ A.

הגדרות :

1. **צירוף לינארי** : יהא V מרחב וקטורי, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ □ F
   כל ביטוי מהצורה $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$ נקרא צירוף לינארי.
2. **מרחב נפרש: יהא** V מרחב וקטורי, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.
   אוסף כל הצירופים הלינאריים של $v_1, v_2, \ldots, v_k$ נקרא המרחב הנפרש ע״י $v_1, v_2, \ldots, v_k$.
   והוא תמיד מ״ו. סימון : $L(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$.
3. המרחב הנפרש ע״י שורות של מטריצה A נקרא **מרחב השורות** של A .
4. המרחב הנפרש ע״י עמודות של מטריצה A נקרא **מרחב העמודות** של A .
5. V מרחב וקטורי, U, W תתי מרחבים של V, נגדיר : $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.
6. סכום של תתי מרחבים נקרא ״סכום ישר״, אם כל איבר בסכום ניתן לרישום באופן יחיד כסכום של איבר מ U עם איבר מ W . סימון : $U \oplus W$.

משפטים :

1. V מרחב וקטורי ו- S קבוצה סופית של איברים ב- V. אזי : $L(S)$ הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את S , כלומר כל תת מרחב שמכיל את S מכיל גם את $L(S)$.
2. V מרחב וקטורי, U, W תתי מרחבים של V , אז : $U \cap W$ גם הוא תת מרחב.
3. V מרחב וקטורי, U, W תתי מרחבים של V, אז W+U גם תת מרחב של V.
4. V מרחב וקטורי, U, W תתי מרחבים של V, אז, U □ W ת״מ אמ״מ אחד מהם מוכל בשני.
5. V מרחב וקטורי, U, W תתי מרחבים של V, אז, U + W הוא סכום ישר אמ״מ $U \cap W = \{0\}$.
6. אם יש $U_1, \ldots, U_k$ תתי מרחבים של מרחב V , אז סכומם הוא ישר אמ״מ החיתוך של כל U_i עם סכום האחרים הוא 0.