פולינומים

הגדרה: יהי K שדה (למשל הממשיים $K = \mathbf{R}$, או המרוכבים $K = C$).

פולינום $p(x)$ מעל לשדה K הוא $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$

כאשר $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ - מקדמי הפולינום.

הגדרה: אם n השלם הגדול ביותר כך ש - $a_n \neq 0$ נאמר כי מעלת הפולינום $p(x)$ היא n ונכתוב:

$deg(p(x)) = n$

דוגמא: מעלת הפולינום $p(x) = 3x^3 + 2x - 5$ היא 3, כלומר $deg(p(x)) = 3$.

הגדרה: אם $deg(p(x)) = 0$, אז $p(x)$ – קבוע לכל x, כלומר $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = 0$

ו - $a_0 \neq 0$.

$p(x) = 0$ (פולינום האפס) $\Leftrightarrow$ $a_n = \dots = a_0 = 0$, כלומר כל מקדמיו מתאפסים. עבור פולינום זה המעלה לא מוגדרת.

פעולות על פולינומים

חיבור וחיסור פולינומים:

חיבור (חיסור) של שני פולינומים $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ו - $g(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ הוא הפולינום הבא:

$$(p \pm g)(x) \equiv (a_n \pm b_n)x^n + \dots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0).$$

(שים לב: בדרך כלל $\deg(p(x) \pm g(x)) \neq \max\{\deg(p(x)), \deg(g(x))\}$, למשל:

בפולינומים $p(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x^2 + x$, מתקיים $\deg(p(x)) = \deg(g(x)) = 2$

אך $p(x) + g(x) = x + 1$ ולכן $\deg(p(x) + g(x)) = 1$.

כפל פולינומים:

כפל של שני פולינומים $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ו- $g(x) = b_n x^n + \dots + b_0$ הינו פולינום

$$q(x) = p(x)g(x) = c_{2n} x^{2n} + \dots + c_1 x + c_0$$

כאשר $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$.

(שים לב: תמיד מתקיים $\deg(p(x)g(x)) = \deg(p(x)) + \deg(g(x))$).

חילוק פולינומים:

טענה: יהיו $p(x)$ ו- $g(x)\neq 0$ פולינומים מעל שדה K. אזי קיימים פולינומים $q(x)$ ו- $h(x)$

כך ש - $p(x)=q(x)g(x)+h(x)$, כאשר $\deg(h(x))<\deg(g(x))$ או $h(x)=0$.

דוגמא:

1. $p(x)=x^5+x^4-2x^3+2x^2+5x+5\,,\ g(x)=x^2+x+1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+x^4-2x^3+2x^2+5x+5 & \underline{x^2+x+1=g(x)} \\
\underline{x^5+x^4+\ \ x^3} & x^3-3x+5=q(x)
\end{array}
$$

$$-3x^3+2x^2+5x+5$$

$$\underline{-3x^3-3x^2-3x}$$

$$5x^2+8x+5$$

$$\underline{5x^2+5x+5}$$

$$3x=r(x)$$

$$\boxed{p(x)=(x^3-3x+5)g(x)+3x}$$

2. $p(x)=5x^4+3x^3+x^2+2x-1\,,\quad g(x)=x+1$

$$
\begin{array}{l|l}
5x^4\ +\ 3x^3\ +\ x^2\ +\ 2x\ -1 & \underline{x+1=g(x)} \\
\underline{5x^4\ +\ 5x^3} & 5x^3-2x^2+3x-1=q(x)
\end{array}
$$

$$-2x^3+x^2$$

$$\underline{-2x^3-2x^2}$$

$$3x^2+2x$$

$$\underline{3x^2+3x}$$

$$-x-1$$

$$\underline{-x-1}$$

$$0=r(x)$$

$$\boxed{p(x)=(5x^3-2x^2+3x-1)g(x)+0}$$

הגדרה: יהי פולינום $p(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$. מספר c נקרא שורש של הפולינום $p(x)$ אם הוא מקיים $p(c) = 0$, כלומר: $a_nc^n+...+a_1c+a_0=0$.

משפט 1 (המשפט היסודי של אלגברה):

יהי $p(x)$ פולינום ממעלה $n \geq 1$ מעל לשדה המרוכב **C**. אזי $p(x)$ ניתן לכתיבה באופן יחיד (עד כדי סדר הגורמים) בצורה הבאה:

$$(*) \quad p(x)=k(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

כאשר $k, x_i \in C$, ו- x_i הינם שורשים של הפולינום $p(x)$.

דוגמא:

א) $p(x)=x^2+2x+1=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$

ב) $p(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$

אם איזשהו שורש מופיע מספר פעמים בנוסחת (*) אז מספר הפעמים שהוא מופיע נקרא ריבוי של השורש, כלומר אם $p(x)=k(x-x_1)^{k_1}...(x-x_l)^{k_l}$, $(k_1+...k_l=n)$, אז k_i הוא הריבוי של השורש x_i.

הגדרה: פולינום $p(x)$ נקרא אי-פריק אם מ $p(x) = f(x)g(x)$ נובע ש- $f(x)$ או $g(x)$ קבועים.

משפט 2: יהי $p(x)$ פולינום שונה מאפס מעל השדה הממשי R; אזי $p(x)$ ניתן לכתיבה באופן יחיד (עד כדי סדר הגורמים) בצורה:

$$p(x)=kp_1(x)...p_l(x)$$

כאשר $k \in R$ וה- $p_i(x)$ הינם פולינומים אי-פריקים ממעלה 1 או 2.

דוגמא: $p(x)=x^3-x^2+x-1=(x^2+1)(x-1)$.

משפט 3: השורשים הלא ממשיים של פולינום $p(x)$ שכל מקדמיו ממשיים מופיעים בזוגות של צמודים, כלומר אם $p(z_0) = 0$ אז גם $p(\overline{z_0})=0$.

דוגמא:

א) $p(x)=x^2+1=(x-i)(x+i)$

ב) $p(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

<u>משפט 4</u>: אם x_0 הינו שורש מריבוי $n\geq 1$ של פולינום $p(x)$ אזי x_0 הינו שורש מריבוי $(n-1)$ של פולינום $p'(x)$.

<u>דוגמא</u>: $p(x)=(x-1)^2(x+1)=x^3-x^2-x+1$

$x=1$ שורש מריבוי 2

$x=-1$ שורש מריבוי 1

$p'(x)=3x^2-2x-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}\ ,\ x=1$ - שורשים מריבוי 1.

$p''(x)=6x-2 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ - שורש מריבוי 1.

ניחוש של שורש

יהי $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ פולינום, כאשר $a_0,\ldots,a_{n-1},a_n$ - שלמים, ונניח כי $\frac{r}{s}$ שורש רציונלי שלו, אזי $r\mid a_0$ (r מחלק את a_0) ו- $s\mid a_n$ (s מחלק את a_n).

<u>דוגמא</u>: $p(x)=x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8$, $a_0=8$ ו- $a_n=1$.

$\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$ מחלקים את a_0 ו- ±1 מחלקים את a_n ומספיק לקחת רק $+1$ (כי אחרת רק חוזרים על אותן אפשרויות).

בודקים מי מהם אכן שורש של $p(x)$:

$p(1)=-2$

$p(-1)=-54$

$p(2)=0 \Rightarrow x=2$ - שורש.

בודקים מהו הריבוי של השורש $x=2$:

$p'(x)=5x^4-24x^3+39x^2-28x+12,\ p'(2)=0$

$p''(x)=20x^3-72x^2+78x-28,\ p''(2)=0$

$p'''(x)=60x^2-144x+78,\ p'''(2)=30 \Rightarrow x=2$ שורש מריבוי 3.

מחלקים את $p(x)$ בפולינום $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8 \Leftarrow$

$p(x)=(x-2)^3(x^2+1)=(x-2)^3(x-i)(x+i)$

Filename:	polinom roots.doc
Directory:	E:\yoram
Template:	D:\office97\Templates\HNormal.dot
Title:	אלגברה 1 104005
Subject:	
Author:	student
Keywords:	
Comments:	
Creation Date:	28/9/99 13:02
Change Number:	2
Last Saved On:	28/9/99 13:02
Last Saved By:	student
Total Editing Time:	0 Minutes
Last Printed On:	28/9/99 13:02

As of Last Complete Printing

Number of Pages:	4
Number of Words:	792 (approx.)
Number of Characters:	4,518 (approx.)