אינפי Iמ' אמ'מ

104031

תרגול בית 8

דניאל ט ארקן

ת"ז 441200610

תאריך הגשה 6/6

תרגיל בית 8:

שאלה 1 הוכח שהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{[x]\sin x}{x}$

אינו קיים

נניח בשלילה הגבול קיים

אם $L=0$. נבחר $\varepsilon=\boxed{\frac{1}{2}}$ כך שלכל $\delta>0$ קיים $x=-\frac{\delta}{2}$ שמקיים $0<|x-0|<\delta$ ו- $|f(x)-0|\ge\varepsilon$

$$|f(x)-L|=\left|f\left(-\tfrac{\delta}{2}\right)-0\right|=\left|\frac{\left[-\frac{\delta}{2}\right]\sin\left(-\frac{\delta}{2}\right)}{-\frac{\delta}{2}}\right|=\frac{\left|\left[-\frac{\delta}{2}\right]\right|\left|\sin\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right|}{\frac{\delta}{2}}$$

$$\underset{\text{כאשר } \delta<2}{=}\frac{\left|\sin\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right|}{\frac{\delta}{2}}=\frac{-\sin\left(-\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}\ge\frac{-\left(-\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}=\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}=1\ge\varepsilon$$

$|x|\ge|\sin(x)|$

$-|x|\le-|\sin x|$

אם $L\neq 0$. נבחר $\varepsilon=\frac{|L|}{2}$ כך שלכל $\delta>0$ קיים $x_0=\frac{\delta}{2}$ שמקיים $0<|x_0-L|<\delta$ כך ש- $|f(x_0)-L|\ge\varepsilon$

$$\left|\frac{\left[\frac{\delta}{2}\right]\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}-L\right|\underset{\text{כאשר } \delta<1}{=}\left|\frac{0\cdot\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}-L\right|=|-L|=|L|\ge\frac{|L|}{2}=\varepsilon$$

לכן $L\neq 0$ לכן לא קיים גבול

ג) בעזרת משפט ה"ה:

$$f(x)=\frac{[x]\sin x}{x}$$

טענה

לפי ה"ה

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L \iff$ לכל סדרה x_n כך ש- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$

נבחר סדרות $a_n=\frac{1}{n}$

$b_n=-\frac{1}{n}$

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$f(a_n)=\frac{[\frac{1}{n}]\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{n>1 \text{ עבור}}{=} 0\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$f(b_n)=\frac{[-\frac{1}{n}]\sin(-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}} \underset{n>1 \text{ עבור}}{=} -1\cdot\frac{\sin(-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

$\frac{\sin(-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

לכן לא קיים גבול

ג) הסרה בגבולות חד- צדדי"ם.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[x]\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{[x]\sin x}{x} = -1\cdot 1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

לכן לא ק"מ גבול לכן משפט

ב) גזרות רציפ' קיים

קיים $\varepsilon = 1$ כך שלכל $\delta > 0$

ק"מ $a = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ $\delta > |0-a|$ וק"מ $b = \max\{-\frac{1}{2}, -\frac{\delta}{2}\}$ כך ש $\delta > |0-b|$

ומתקיים $|f(a)-f(b)| \geq \varepsilon$

$$|f(a) - f(b)| = \left|\frac{[a]\sin a}{a} - \frac{[b]\sin b}{b}\right| = \left|\frac{0\cdot \sin a}{a} - \frac{(-1)\sin b}{b}\right|$$

$$= \left|\frac{\sin b}{b}\right| = \frac{-|\sin b|}{-|b|} \geq \frac{-|b|}{-|b|} = 1 = \varepsilon$$

<u>שאלה 2:</u> תהא f פונקציה חסומה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נתון שעבור כל סדרה מונוטונית $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת.
הוכיחו/הפריכו:
א) הסדרות $f(x_n)$ מתכנסות כולן לאותו הגבול כאשר $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ סדרה מונוטונית כלשהי.

<u>הוכחה:</u>
יהיו x_n, y_n סדרות מונוטוניות כלשהן כך ש- $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $y_n \to x_0$, $y_n \neq x_0$
נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

נבנה סדרה z_n באופן הבא:

$z_1 = x_1$
$z_2 = y_{n_k}$ כך ש- $y_{n_k} > x_1$
(יש אינסוף איברי y_n כאלה כי לפי הגדרת הגבול לכל $\varepsilon > 0$ קיים y_{n_k} כך ש- $|y_{n_k} - x_0| < \varepsilon$. נבחר $\varepsilon = |x_1 - x_0|$ $|y_{n_k} - x_0| < |x_1 - x_0|$)
$-y_{n_k} + x_0 < -x_1 + x_0$
$y_{n_k} > x_1$

באופן דומה נבחר $z_3 = x_{n_p}$ כך ש- $x_{n_p} > y_{n_k}$ יש אינסוף כי x_{n_p} מתכנס ל- x_0. נבחר להיות z_{2k}
זוגיים מ- y_n ולהיות z_{2k+1}
אי-זוגיים מ- x_n.
z_n מונוטונית ולכן $f(z_n)$ מתכנסת לפי הנתון ולכן גם $f(y_n)$ ו- $f(x_n)$ מתכנסות ~~לאותו~~ לגבול של $f(z_n)$ כתת סדרות.

ב) הטענה אינה נכונה.
למשל עבור הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

עבור כל סדרה מונוטונית
עולה x_n כך ש $x_n \to x_0=0$ הסדרה
$f(x_n)$ מתכנסת ל -1. ועבור כל סדרה
מונוטונית יורדת x_n כך ש $x_n \to x_0=0$
הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת ל 1
אבל $-1=\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

ג) הטענה נכונה: נניח שלא
אז ה $\lim$ לא קיים
כלומר,
לפי הגדרת היינה קיימת סדרה
x_n כך ש $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ כך שהסדרה
$f(x_n)$ לא מתכנסת. אז ל $f(x_n)$ קיימות
שתי תת סדרות חלקיות שונות. אבל
לפי סדרות הגבול קיימת תת
סדרה מונוטונית שמתכנסת לגבול
של הסדרה שבה הגדרנו אותה אבל
זה סותר את זה שהיא ...
שהנחנו ב (1)

שאלה 3:

$$f(x)=\begin{cases} x\left[2\sin\frac{1}{x}\right], & x\neq 0 \\ c, & x=0 \end{cases}$$

כאשר c קבוע ממשי.

א) מהו c אם נתון כי $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

$f(x)$ רציפה $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

$$\underbrace{x}_{\text{שואפת לאפס}}\underbrace{\left[2\sin\frac{1}{x}\right]}_{\text{חסומה}}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

חסומה כפול שואפת לאפס שואפת לאפס

$$\Rightarrow f(0)=0=c$$

ב) נניח כעת $c=2$ מצאו ומיינו את כל נקודות אי רציפות של הפונקציה $f(x)$ הנמצאות בקטע $[0,1]$.

$$-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$$
$$-2\leq 2\sin\frac{1}{x}\leq 2$$
$$\Downarrow$$
$$\left[2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\{-2,-1,0,1,2\}$$

$$\left[2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-2\Rightarrow 2\sin\left(\frac{1}{x}\right)<-1$$
$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)<-\frac{1}{2}$$

$$\frac{7\pi+12\pi k}{6}=2\pi k+\frac{7\pi}{6}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{11\pi}{6}+2\pi k=\frac{11\pi+12\pi k}{6}$$

$$\frac{6}{7\pi+12\pi k}\leq x\leq\frac{6}{11\pi+12\pi k}$$

$$[2\sin\tfrac{1}{x}] = -1 \Rightarrow -1 \leq 2\sin\tfrac{1}{x} < 0$$
$$-\tfrac{1}{2} \leq \sin\tfrac{1}{x} < 0$$
$$\pi + 2\pi k \leq \frac{1}{x} \leq \frac{7\pi + 12\pi k}{6} \quad \text{או} \quad \frac{11\pi + 12\pi k}{6} \leq \frac{1}{x} < 2\pi k$$
$$\frac{6}{7\pi + 12\pi k} \leq x \leq \frac{1}{\pi + 2\pi k} \quad \frac{1}{2\pi k} \leq x \leq \frac{6}{11\pi + 12\pi k}$$

$$[2\sin\tfrac{1}{x}] = 0 \Rightarrow 0 \leq 2\sin\tfrac{1}{x} < 1$$
$$0 \leq \sin\tfrac{1}{x} < \tfrac{1}{2}$$
$$\pi + 2\pi k \leq \frac{1}{x} < \frac{5\pi + 12\pi k}{6} \quad \cancel{\pi k} + 0 \leq \frac{1}{x} < \frac{\pi + 12\pi k}{6}$$
$$\frac{6}{5\pi + 12\pi k} < x \leq \frac{1}{\pi + 2\pi k} \quad \text{או} \quad \frac{6}{\pi + 12\pi k} < x \leq \frac{1}{2\pi k}$$

$$[2\sin\tfrac{1}{x}] = 1 \Rightarrow 1 \leq 2\sin\tfrac{1}{x} < 2$$
$$\tfrac{1}{2} \leq \sin\tfrac{1}{x} < 1$$
$$\frac{12\pi k + \pi}{6} \leq \frac{1}{x} < \frac{5\pi + 12\pi k}{6}$$
$$\frac{6}{5\pi + 12\pi k} < x \leq \frac{6}{12\pi k + \pi}$$

$$[2\sin\tfrac{1}{x}] = 2 \Rightarrow 2\sin\tfrac{1}{x} = 2$$
$$\sin\tfrac{1}{x} = 1$$
$$\frac{1}{x} = \frac{\pi + 4\pi k}{2}$$
$$x = \frac{2}{\pi + 4\pi k}$$

בכל אחת מהן מתקיים ש $2\sin\frac{1}{x} = -1,0,1,2$,
$[2\sin\frac{1}{x}]$ הוא כן קבוע ולכן $x[2\sin\frac{1}{x}]$
הוא כן פונקציה אלמנטרית ולכן הוא
רציף במקומות הללו.

כאשר $[2\sin\frac{1}{x}] = -2,-1,0,1,2$
הוא קופץ מספר ולכן הוא לא רציפה
בנקודות הללו, וכאשר $[2\sin\frac{1}{x}]=2$
הוא קופץ וחוזר מ 2 מ-1 ולכן הוא
אי רציפות מסוג סליקה.

לכל ערכי X שבהם יש אי רציפות מסוג
קפיצה:
לכל $k\in\mathbb{N}$

$$X=\frac{6}{11\pi+12\pi k},\ \frac{6}{7\pi+12\pi k},$$

$$\frac{1}{2\pi k},\ \frac{6}{\pi+12\pi k},\ \frac{1}{\pi+2\pi k},$$

$$\frac{6}{5\pi+12\pi k},\ \frac{6}{\pi+\pi k}$$

יש אי רציפות מסוג סליקה עבור

$\forall k\in\mathbb{N}$ $\quad X=\frac{2}{\pi+4\pi k}$

שאלה 4:

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$
ומקיימת $f(x)=f(2x)$ לכל x. הוכיחו כי
f קבועה.

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2^2}\right)=f\left(\frac{x}{2^3}\right)=\dots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$\frac{x}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ וגם f רציפה ב-0 מימין

לכן $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)$

אזי לכל $x\in\mathbb{R}$ $\underbrace{f(x)=f(0)}_{\text{קבוע}}$