חשבון אינפיניטסימלי 1מ' - אמ"ג
104031

תרגיל בית 3

ג'ואל מורקו

ת"ז: 941200610

תאריך הגשה: 24/4

94120060

תרגיל בית 3

שאלה 1: הוכיחו: כל מספר ממשי הינו גבול של סדרת רציונלים וגם של סדרת אי-רציונלים.

הוכחה: יהי R מספר ממשי כלשהו.

נגדיר סדרת רציונלים $a_n = R + \frac{1}{n}$ לכל n טבעי.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(R + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} R + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = R + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

חשבון גבולות

גבול קבוע $\lim_{n\to\infty} c = c$ $\forall c\in\mathbb{R}$

$$= R + 0 = R$$

גבול של סדרה הרמונית הינו אפס

נגדיר סדרת אי-רציונלים: $b_n = R + \frac{\sqrt{2}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(R + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} R + \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} R + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\right)$$

חשבון גבולות

חשבון גבולות

$$= R + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sqrt{2} = R + 0\cdot\sqrt{2} = R$$

גבול קבוע $\lim_{n\to\infty} c = c$ $\forall c\in\mathbb{R}$

גבול של סדרה הרמונית הינו אפס

941200610

שאלה 2: יהיו $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ סדרות מתכנסות.
נתון כי הקבוצה $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\}$ והקבוצה $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \geq b_n\}$
אינן חסומות. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = k$

נניח בשלילה ש $L \neq k$ ובה"כ $L < k$

לפי הנתון לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_1 כך שלכל $N < n$ מתקיים

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$

ולפי הנתון לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_2 כך שלכל $N < n$ מתקיים

$$k-\varepsilon < b_n < k+\varepsilon$$

ובפרט עבור $\varepsilon = \frac{k-L}{2}$

$$a_n < L + \frac{k-L}{2} = \frac{k+L}{2}$$

$$b_n > k - \frac{k-L}{2} = \frac{k+L}{2}$$

אזי החל $N = \max\{N_1, N_2\}$ מתקיים

$$a_n < \frac{k+L}{2} < b_n$$

אזי יש מספר סופי של n לפני $\max\{N_1, N_2\}$ שיכולים להתקיים

$$b_n \leq a_n$$

אזי הקבוצה $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \geq b_n\}$ חסומה.
בסתירה לנתון. לפיכך ההנחה אינה נכונה כלומר $L = k$

941200610

שאלה 3:

א) הוכחו על פי שלילת הגבול האינסופי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{3n^2+5n} \neq \infty$$

צ"ל לפי שלילת הגדרת הגבול האינסופי כי
קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל N קיים $n>N$ שמקיים:

$$a_n \le M$$

$$\frac{2n^2-3}{3n^2+5n} < \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3} = M$$

יהי N כלשהו. נבחר $M=\frac{2}{3}$
ו- $n=\lceil N\rceil+1$ מתקיים

$$a_n \le M$$

ב) הוכחו ע"י שימוש בהגדרת הקיימות והגדרת הגבול בלבד שהסדרה $a_n=n^{(-1)^n}$ אינה חסומה אך לא שואפת לגבול סופי!

נוכיח לפי שלילת הגדרת חסומה מלמעלה כי לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ שמקיים

$$a_n > M$$

יהי M כלשהו. נבחר $n=|2\lceil M\rceil|$

$$M < |2\lceil M\rceil| = |2\lceil M\rceil|^{(-1)^{2\lceil M\rceil}} = a_n$$

941200610

נוכיח כי שלילת הטענה הבאה

אינסוף: שקיים M כך שלכל N קיים

$N<n$ שמתקיים

$$a_n \geq M$$

עבור N כלשהו ניקח $N<M$

וניקח $N<2\lceil M\rceil=n$

$$(2\lceil M\rceil)^{(-1)^{2\lceil M\rceil}} = 2\lceil M\rceil \geq M$$

441200610

שאלה 4

תהי a_n סדרה. נגדיר סדרה

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$

הוכיחו את הטענות

ב) אם b_n מתכנסת אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

נניח $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n}$$

$$b_n=\frac{b_{n-1}(n-1)}{n}+\frac{a_n}{n}$$

$$b_n-\frac{b_{n-1}(n-1)}{n}=\frac{a_n}{n}$$

$$\frac{b_n\cdot n-b_{n-1}(n-1)}{n}=\frac{a_n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n\cdot n-b_{n-1}(n-1)}{n}\right)\underset{\text{לפי אריתמטיקה}}{=}\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}b_{n-1}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n-1}}{n}\right)$$

$$=L-L+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n-1}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n-1}}{n}\right)\underset{\text{לפי אריתמטיקה}}{=}\lim_{n\to\infty}(b_{n-1})\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=L\cdot 0=0$$

916002149

א) אם b_n מתכנסת אז a_n מתכנסת.

הטענה אינה נכונה

לדוגמא $a_n=(-1)^n$

$b_1=-1$

$b_2=0$

$b_3=-\frac{1}{3}$

$b_4=0$

$b_5=-\frac{1}{5}$

$\vdots$

b_n מתכנסת לאפס אבל

a_n מתבדרת