אינפי I מ' אביב

104031

תרגיל בית 6

דניאל טארקו

ת"ז 441200610

תאריך הגשה 23/5

תרגיל בית 6

שאלה 1:

א) נתונה סדרה a_n אשר מקיימת את התנאי הבא: קיים מספר ממשי $0<c<1$ כך שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים
$$|a_{n+1}-a_n| < c|a_n-a_{n-1}|$$
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| < c|a_{n+1}-a_n|$$
$$\Downarrow$$
$$|a_{n+2}-a_{n+1}| < c|a_{n+1}-a_n| < c^2|a_n-a_{n-1}|$$

נמשיך ונקבל עבור $|a_{n+p}-a_{n+p-1}| < c^p|a_n-a_{n-1}|$ $|a_{n+p}-a_n|$

צ"ל לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ ולכל $p\in\mathbb{N}$ מתקיים
$$|a_{n+p}-a_n| < \varepsilon$$

יהי ε כלשהו. נגדיר $N=\log_c\left(\frac{\varepsilon}{a_2-a_1}\right)$

$$|a_{n+p}-a_n| < c^p|a_n-a_{n-1}| < c^p\cdot c^{n-1}|a_2-a_1| < c^{n-1}|a_2-a_1| = \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\log_c\frac{\varepsilon}{|a_2-a_1|} = n-1$$

$$\log_c\frac{\varepsilon}{|a_2-a_1|} = N < n = 1+\log_c\frac{\varepsilon}{|a_2-a_1|}$$

לכן הסדרה מקיימת את תנאי קושי ולכן מתכנסת.

ג) הראנו בסעיף א' כי לכל ה'
שהסדרה $n \in \mathbb{N}$ $a_1=1$ $a_{n+1}=\frac{2+a_n}{1+a_n}$
מתכנסת. נמצא את גבולה.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2+a_n}{1+a_n}-a_n=\frac{2+a_n}{1+a_n}-\frac{2+a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$$

$$=\frac{\cancel{2}+a_n+2a_{n-1}+\cancel{a_n a_{n-1}}-\cancel{2}-a_{n-1}-2a_n-\cancel{a_n a_{n-1}}}{1+a_n+a_{n-1}+a_n\cdot a_{n-1}}$$

$$=\frac{a_{n-1}-a_n}{1+a_n+a_{n-1}+a_n\cdot a_{n-1}}$$

נסמן $C=\frac{1}{1+a_n+a_{n-1}+a_n\cdot a_{n-1}}<1$

הנחה מוקדמת

$$a_{n+1}-a_n=C\cdot(a_{n-1}-a_n)$$
$$\Updownarrow$$
$$|a_{n+1}-a_n|=C|a_{n-1}-a_n|$$

לכן לפי מה שהוכחנו בסעיף א',
הסדרה מתכנסת.

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n=L$

$$\lim(a_{n+1})=\lim\left(\frac{2+a_n}{1+a_n}\right)=\frac{\lim 2+a_n}{\lim 1+a_n}=\frac{\lim 2+\lim a_n}{\lim 1+\lim a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$L=\frac{2+L}{1+L}$$

$$L+L^2=2+L$$

$$L^2-2=0$$

$$L=\pm\sqrt{2} \qquad L=\sqrt{2}$$

שאלה 2

א) הוכחה $\min\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}=1$

לכל $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{2}\right]^n \geq \left[\frac{1+\frac{n}{n}}{2}\right]^n=\left(\frac{1+1}{2}\right)^n=\left(\frac{2}{2}\right)^n=(1)^n=1$$

א' שוין ברנולי

ב) תהי b_n סדרה כך ש-

$$b_1=1,\quad b_{n+1}=b_n+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

$$b_{n+1}=b_n+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}=b_n+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\leq b_n+\frac{1}{2^n}$$

א' שוין ברנולי

יהי ε כלשהו ונמצא כלשהו.

$$b_{n+1}-b_n\leq\frac{1}{2^n}$$
$$b_{n+2}-b_{n+1}\leq\frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow b_{n+2}-b_{n+1}+b_{n+1}-b_n<\frac{2}{2^n}$$

באופן כללי:

$$|b_{n+p}-b_n|<\left|\frac{p}{2^n}\right|<\frac{p}{2^N}=\varepsilon$$

$$\frac{p}{2^N}=\varepsilon$$

$$p=\varepsilon 2^N$$

$$2^N=\frac{p}{\varepsilon}$$

$$\log_2\frac{p}{\varepsilon}=N$$

שאלה 3: תהי קבוצה A שלכל כיסוי שלה ע"י קטעים פתוחים קיים תת כיסוי סופי. הוכיחו כי A חסומה.

הוכחה:
נניח בשלילה ש A לא חסומה.
אז לכל M קיים $x \in A$ כך ש- $|x| > M$

נסתכל על כיסוי $\Sigma = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

זה כיסוי פתוח של A
אבל אין לו תת כיסוי סופי
כי לכל $M = n+2$ קיים $x > n+2$
ושלא בקטע.
סתירה לנתון שיש שלכל כיסוי
שלו יש תת כיסוי סופי

שאלה 4: הוכיחו משפט בולצאנו-ויירשטראס
בעזרת הלמה של היינה בורל.

הוכחה:
תהי a_n סדרה חסומה. לכן קיימים
a,b כך ש- $b > a_n > a$ לכל n.

נניח בשלילה שאין ל-a_n ת"ס מתכנסת
כלומר אין לה גבולות חלקיים. לכן לכל $x \in [a,b]$
יש סביבה I_x שבה יש רק מספר
סופי של איברי a_n:
נסתכל $\Sigma = \{I_x \mid x \in [a,b]\}$ זהו כיסוי
פתוח של $[a,b]$

לפי היינה-בורל יש תת-כיסוי סופי
סתירה כי בכל I_x יש מספר סופי של
איברי a_n ולכן במספר סופי של
I_x-ים יש מספר סופי של איברי
a_n ולכן בכל $[a,b]$ יש רק מספר
סופי של איברי a_n.