

$a_1 = 1$ $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$ $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \frac{2+a_n}{1+a_n} - a_n = \frac{2+a_n}{1+a_n} - \frac{2+a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \\
 &= \frac{2+a_n+2a_{n-1}+a_n a_{n-1} - 2 - a_{n-1} - 2a_n - a_n a_{n-1}}{1+a_n+a_{n-1}+a_n a_{n-1}} \\
 &= \frac{a_{n-1} - a_n}{1+a_n+a_{n-1}+a_n a_{n-1}}
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{1+a_n+a_{n-1}+a_n a_{n-1}} < 1 \quad \text{NO}$$

$$a_{n+1} - a_n = C \cdot (a_n - a_{n-1})$$

$$|a_{n+1} - a_n| = C |a_n - a_{n-1}|$$

IC $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{NO}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+a_n}{1+a_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

\Downarrow

$$L = \frac{2+L}{1+L}$$

$$L + L^2 = 2 + L$$

$$L^2 - 2 = 0$$

$$L = \pm \sqrt{2}$$

$$L = \sqrt{2}$$

$$\min \left\{ \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$

2. אפילו
הוכחה

$n \in \mathbb{N}$ נניח

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{2^n} = \left[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{2} \right]^n \geq \left[\frac{1+\frac{n}{n}}{2} \right]^n = \left[\frac{1+1}{2} \right]^n = \left(\frac{2}{2} \right)^n = 1^n = 1$$

הוכחה פשוטה

עכשיו נבנה סדרה

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

$$b_{n+1} = b_n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} = b_n + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \leq b_n + \frac{1}{2^n}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$b_{n+1} - b_n \leq \frac{1}{2^n}$$

$$b_{n+2} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$



$$b_{n+2} - b_{n+1} + b_{n+1} - b_n < \frac{2}{2^n}$$

כלומר

$$|b_{n+p} - b_n| < \frac{p}{2^n} < \frac{p}{2^N} = \epsilon$$

$$\frac{p}{2^N} = \epsilon$$

$$p = \epsilon 2^N$$

$$2^N = \frac{p}{\epsilon}$$

$$\log_2 \frac{p}{\epsilon} = N$$

ענין 4: הוכחה של תכונה II-III (הוכחה)
 נניח $a < b$ ונבחר $\epsilon > 0$.

נבחר a_n כזה ש $a < a_n < b$.
 נבחר $\delta > 0$ כזה ש $a_n - \delta > a$.

נניח $x \in [a, b]$ ונבחר I_x כזה ש $x \in I_x$.
 נניח $I_x = [x - \delta, x + \delta]$.

נניח $a_n \in I_x$ ונבחר δ כזה ש $a_n - \delta > a$.
 נניח $I_x = [x - \delta, x + \delta]$.

נניח $a_n \in I_x$ ונבחר δ כזה ש $a_n - \delta > a$.
 נניח $I_x = [x - \delta, x + \delta]$.
 נניח $a_n \in I_x$ ונבחר δ כזה ש $a_n - \delta > a$.
 נניח $I_x = [x - \delta, x + \delta]$.