26/5 441200610 דניאל טמקין
אלגברה א מ

תלות לינארית

א) תהי $N=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ קבוצה תלויה במרחב וקטורי V. נתון כי: כל תת קבוצה של N השונה מ-N היא בת"ל, אז קיימים סקלרים כולם שונים מאפס כך ש-

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_mv_m=0$$

טענה נכונה.

הוכחה:

נתון ש N קבוצה תלויה, לכן קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ לא כולם אפס כך ש-

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_mv_m=0$$

נניח בשלילה ש $\alpha_n=0$ לכן

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_{n-1}v_{n-1}+\alpha_nv_n+\alpha_{n+1}v_{n+1}+\dots+\alpha_mv_m=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_{n-1}v_{n-1}+0+\alpha_{n+1}v_{n+1}+\dots+\alpha_mv_m=0$$

כאשר $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_{n+1},\dots,\alpha_m$ לא כולם אפס

לכן $\{v_1,\dots,v_{n-1},v_{n+1},\dots,v_m\}$ ת"ל

בסתירה לנתון

ב) נתון $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ בת"ל אזי $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ בת"ל.

טענה נכונה.

הוכחה:

שלפחות אחד שונה מאפס

מנתון, לכל $\alpha,\beta\in F$ $\wedge$ $\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$a=\alpha x_1+\beta x_2$
$b=\alpha y_1+\beta y_2$

לפחות אחד מ- a,b שונה מאפס

לכן נקבל

$$\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\alpha x_1+\beta x_2=a$$
$$\alpha y_1+\beta y_2=b$$

לפחות אחד מ a,b שונה מאפס.

לכן $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ לכל α,β שלפחות אחד שונה מאפס

תרגיל 2

הוכיחו שאם u,v,w בת"ל אזי גם $\{u+v+w, v-w, 2w\}$ בת"ל

$$\alpha(u+v+w)+\beta(v-w)+\gamma(2w)=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\alpha v=0 \Rightarrow \alpha=0$
כיוון $u\neq 0$ אחרת u,v,w לא בת"ל

$$\alpha v+\beta v=0$$
$$\beta v=0$$
$$\beta=0$$

$$\alpha v-\beta v+2\gamma w=0$$
$$\gamma w=0$$
$$\gamma=0$$

$\alpha(u+v+w)+\beta(v-w)+\gamma(2w)=0 \Rightarrow \alpha,\beta,\gamma=0$
לכן $\{u+v+w, v-w, 2w\}$ בת"ל

תרגיל 3

נתונה קבוצת וקטורים בת"ל $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ וקבוצת סקלרים $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$. יהי $u=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$. הוכח שהסקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ נקבעים באופן יחיד.

הוכחה: נתון $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בת"ל לכן אם נשים הוקטורים $(v_1,\ldots,v_n)$ כעמודות במטריצה A נקבל $r(A)=n$ מכאן כי יש תמיד פתרון יחיד לכל b ל- $Ax=b$ יש פתרון יחיד ובפרט כאשר $u=b$! $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

תרגיל 4

נתון $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ בת"ל במרחב V מעל F. הוכיחו:

א) אם $F=\mathbb{C}$ או $F=\mathbb{R}$ אז קבוצת הוקטורים
$S:=\{v_1+v_2, v_2+v_3, \dots, v_{k-1}+v_k, v_k+v_1\}$ היא בת"ל אמ"מ k הוא אי-זוגי.

$\Leftarrow$: (נתון אי-זוגי, נוכיח בת"ל)

$$x_1v_1+x_2v_2+\dots+x_kv_k+x_1v_2+x_2v_3+\dots+x_{k-1}v_k+x_kv_1=0$$

$$(x_1+x_k)v_1+(x_1+x_2)v_2+(x_2+x_3)v_3+\dots+(x_{k-1}+x_k)v_k=0$$

$\{v_1,\dots,v_k\}$ בת"ל $\Leftarrow$

1. $x_1+x_k=0$
2. $x_1+x_2=0$
3. $x_2+x_3=0$

$\vdots$

4. $x_{k-1}+x_k=0$

(1) $x_1=-x_k$

(2) $-x_k+x_2=0 \Rightarrow x_2=x_k$

(3) $x_k+x_3=0 \Rightarrow x_3=-x_k$

באופן כללי:

כאשר n זוגי

$x_{2n}=x_k$

$x_{2n+1}=-x_k$

לכן כאשר $k=2n+1$

$x_k=-x_k$

ובגלל $x\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{C}$ $x_k=0$

לכן $x_1,x_2,\dots,x_k=0$

ולכן S בת"ל

$\Rightarrow$: נתון בת"ל, נוכיח אי-זוגי. נוכיח בשלילה,

נניח: אם זוגי $\Rightarrow$ ת"ל

הגענו ש $x_{2n}=x_k$ ולכן כאשר $k=2n$ אז

$x_k=x_k$ וזה נכון לכל x ב $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$

ולכן קיים $x_k \neq 0$ (יש איזשהו) כך ש $x_1 = x_2 = \dots = x_k \neq 0$
ונקבל ש $x_1(v_1+v_2)+\dots+x_k(v_k+v_1)=0$
ולכן הקבוצה ת"ל.

ג) אם $F=Z_2$ אז הקבוצה ת"ל לכל k.

אם k זוגי $x_k = x_k$ למשל $1=\lambda_k$
ולכן קיים איזשהו x_k-ים כך ש- $0 \neq x_1=x_2=\dots=x_k$
$x_1(v_1+v_2)+\dots+x_k(v_k+v_1)=0$

אם k אי-זוגי $x_k=-x_k$
ב-Z_2 $1=-1$

ולכן קיים $x_1=x_2=\dots=x_k=1=-1$
כך ש $x_1(v_1+v_2)+\dots+(v_k+v_1)=0$
ולכן ג ת"ל

תרגיל 2:

יהי V מ"ו מעל F. ויהיו $\{v_1, v_2, u_1, u_2, u_3\}$ חמשה וקטורים ב-V ידוע כי $\{u_1, u_2, u_3\}$ פורש את V וכן כי $\{v_1, v_2\}$ קבוצה בת"ל ב-V. הניחו כי ק"מ $1 \le i \le 3$ כך ש $\{u_i, v_1\}$ בת"ל.

הוכחה:

נניח בשלילה $\{u_1, v_1\}$ ו-$\{u_2, v_1\}$ ו-$\{u_3, v_1\}$ כולם ת"ל. לכן ק"מ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש

$$v_1 = \alpha_1 u_1, \quad v_1 = \alpha_2 u_2, \quad v_1 = \alpha_3 u_3$$

לכן

$$u_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} u_3$$

ולכן:

$$V = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \operatorname{span}\{u_1\} = \operatorname{span}\{v_1\}$$

$v_2 \in V$

ולכן $v_2 \in \operatorname{span}\{v_1\}$

ולכן $v_2 = \beta v_1$

ולכן $v_2 - \beta v_1 = 0$

ולכן $\{v_1, v_2\}$ ת"ל

סתירה לנתון