שאלה 1 תהי a_n סדרה חיובית
נגדיר סדרה

$$b_n = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

הוכחה:

אם a_n מתכנסת ל- ∞:

$$b_n = \underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{>0} + \underbrace{\frac{a_2}{a_3}}_{>0} + \dots + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}}_{>0} + \frac{a_n}{a_1} > \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{a_1} \cdot a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_1} \underset{\text{קבוע } a_1}{=} \frac{1}{a_1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \underset{\text{לפי הנחה}}{=} \infty$$

$$\lim\left(\frac{1}{a_1} \cdot a_n\right) \underset{\text{אריתמטיקה}}{=} \frac{1}{a_1} \cdot \infty = \infty$$

$$b_n > \frac{1}{a_1} \cdot a_n$$

אזי לפי לג'ה $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

אם a_n חסומה:

a_n לא ריקה אזי לפי אקסיומת השלמות קיים סופרמום ואינפימום של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שנסמן I, S

$$b_n = \overset{\geq \frac{I}{S}}{\frac{a_1}{a_2}} + \overset{\geq \frac{I}{S}}{\frac{a_2}{a_3}} + \dots + \overset{\geq \frac{I}{S}}{\frac{a_{n-1}}{a_n}} + \overset{\geq \frac{I}{S}}{\frac{a_n}{a_1}} \geq \frac{I}{S} \cdot n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{I}{S}\cdot n\right) \underset{\text{לפי אריתמטיקה}}{=} \frac{I}{S}\cdot\infty = \infty$$

לכל n $b_n \geq \frac{I}{S}\cdot n$

אזי לפי כ'ג' $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

a_n חייבת להיות חסומה אחרת שואפת לאינסוף כי $0 < a_n$ אזי בכל מקרה b_n מתכנס ל-∞

שאלה 2: נתונה הסדרה

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = c + a_n^2 \end{cases} \quad 0 < c < \frac{1}{4}$$

הוכיחו כי a_n מתכנסת וחשבו את גבולה.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה ש a_n מונוטונית עולה.

בסיס: $a_1 = c > c + c^2 = a_2$

נניח כי $a_{n+1} > a_n$ ונוכיח כי $a_{n+2} > a_{n+1}$

$$a_{n+2} = c + a_{n+1}^2 \underset{\text{הנחה}}{>} c + a_n^2 = a_{n+1}$$

נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n < \frac{1}{2}$

בסיס: $a_1 \underset{\text{נתון}}{<} \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

נניח כי $a_n < \frac{1}{2}$ ונוכיח כי $a_{n+1} < \frac{1}{2}$

$$a_{n+1} = c + a_n^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n < \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2}$ חסם מלעיל של a_n

a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי לפי משפט, a_n מתכנסת לגבול סופי.

$$a_{n+1} = c + a_n^2$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (c + a_n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{נסמן}$$

$x^2 - x + 1 = 0$

$$L = c + L^2$$

$$L^2 - L + c = 0$$

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$L = 1 + \sqrt{1-4c} < \frac{1}{4}$$

אז ח"מ לוית

$$L = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$$

שאלה 3: תהי a_n סדרה חסומה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}$

הוכיחו ש-a_n מתכנסת

נגדיר סדרה: $b_n = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$

נתון כי קיים $0<M$ כך שלכל n מתקיים:

$$|a_n| < M$$
$$-M < a_n < M$$
$$-M-1 < a_n - \frac{1}{2^{n-1}} < M$$
$$-M-1 < b_n < M$$
$$|b_n| < M+1$$

אזי b_n סדרה חסומה

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2^n} \overset{(1)}{\geq} a_n - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}} = b_n$$

אזי b_n מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה, אזי b_n מתכנסת.

נסמן $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \lim(a_n) + 0$$

כי הסדרה b_n מתכנסת

אם $|x|<1$ אז $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

$$= \lim(a_n) = L$$

אזי a_n מתכנסת

שאלה 4

יהיו $(m_k)_1^\infty$, $(n_k)_1^\infty$ סדרות אינדקסים זרות
ממש שהאיחוד שלהן כולל את כל המספרים הטבעיים.
ז"א $\mathbb{N}=\{n_k, m_k \mid k\in\mathbb{N}\}$

הוכח ש· $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ $a_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{}$ ו- $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L \iff L\in\mathbb{R}$

כיוון $\Longleftarrow$: נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

a_{n_k} ו- a_{m_k} הן תת סדרות של a_n
ו- a_n מתכנסת אז לפי משפט כל תת
סדרה מתכנסת לאותו הגבול.
כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_{n_k} = \lim a_{m_k} = L$

$\Longrightarrow$: נתון כי $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$ ו- $\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = L$

אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים N_1 כך שלכל $k>N_1$
מתקיים: $|a_{n_k}-L|<\varepsilon$
ולכל $\varepsilon>0$ קיים N_2 כך שלכל $k>N_2$
מתקיים $|a_{m_k}-L|<\varepsilon$

מאיחוד של איברי a_{n_k} ו- a_{m_k} כולל a_n אזי לכל
a_n קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $a_{n_k}=a_n$ או $a_{m_k}=a_n$

אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=\max\{N_1,N_2\}$ כך שלכל $n>N$
מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$