

绪论

1 腿足运动控制最新进展

腿的作用在于，机器人能用腿上的末端执行器来推“地”从而为身体提供主动避震，使得机器人身体的运动要比地表的轮廓更平滑。我们把所有用来推“地”的末端执行器统一叫做“足”，不管它们的形式和功能具体是什么。腿可以暂时离开地面来迈步，因此可以通过不连续的地形，在轮子无法到达的地方运动。无论腿的数量、运动学构型和自由度数，足的类型（平面足，可变形足，点足，轮足）如何变化，根本的原理是一样的。因此，最近几年原本在平面足人形机器人上发展的方法也快速适配了四足机器人以及其他形式足的腿足机器人。

控制的目标是找到足够多的可以在足和环境之间建立接触的位置，并且执行对应的动力学可行的轨迹。为了处理腿足运动控制的关键难题——交替的触地和对应的接触力约束，目前几乎推广到所有形式的腿足机器人的通用方法大量使用了数值轨迹优化及其在线实现——MPC。

除了将这种通用的方法适配到不同数量的腿和不同类型的足，近几年在腿足运动控制领域的主要进展是如何用“提纯”的模型和“提纯”的数值模型来处理轨迹优化问题。这使得从在多为平地的双足行走走到更多样的机器人形态，更通用的不平整地形的多接触运动的转换成为可能。除了将这种通用的方法适配到不同数量的腿和不同类型的足，近几年在腿足运动控制领域的主要进展是如何用“提纯”的模型和“提纯”的数值模型来处理轨迹优化问题。这使得从在多为平地的双足行走走到更多样的机器人形态，更通用的不平整地形的多接触运动的转换成为可能。

1.1 腿足运动控制的典型方法

The dynamics of legged locomotion: 牛顿方程说明和环境接触产生的外力 f_i 减去重力 mg 决定了机器人质心 c 变化的方向：

$$m(\ddot{c} - g) = \sum_i f_i \quad (1)$$

其中 m 是机器人的总质量。同时对应的欧拉方程表明接触点 s_i 相对质心 c 的位置是控制机器人身体相对质心的角动量 L 的关键：

$$\dot{L} = \sum_i (s_i - c) \times f_i \quad (2)$$

Artificial synergy synthesis 方法认为，应该更加关注和地面接触力直接绑定的质心动力学 equ:newton 和 equ:euler，而不是和关节力矩更直接绑定的机器人的精准关节姿态 [?]，如 fig:centroid 所示。这种方法在现在是机

[width=.5] 质心动力学.eps

图 1: 质心动力学及其与全身动力学的联系释图 (图源 [?])

可以根据实际的地形和外界扰动来调整 citefeng2016robust。对应的质心运动和角动量可以通过在线 MPC 的框架来得到 [?], 该框架在考虑质心动力学 equ:newton 和 equ:euler 的同时需要保证机器人的状态始终是可捕获的 [?]

当机器人在平地上运动, 所有接触点 s_i 都是共面的, 接触力 f_i 通常会退化到他们的零力矩点 (ZMP), 而 ZMP 在接触点组成的凸包内 [?] (通过单边接触约束的多面体投影, 非平面的接触点也有类似的性质 [?])。在这种情况下, 预先定义好质心在竖直方向上的运动可以得到高效的线性模型。最常见的是线性倒立摆模型 (LIP), 它假设质心在平面内运动并且角动量为 0 [?]。考虑非零的角动量并不影响模型的线性, 但很少有人这样做, 可能是在平地上行走时这样做的好处并不多 [?]

通常用逆运动学 [?], 或者笛卡尔空间下的全身动力学的反馈线性化 [?], 来让机器人的整个身体去执行规划出的质心运动, 角动量和触地位置, 用二次规划 (Quadratic Programs) 来考虑瞬时的运动学、动力学、力和力矩约束 [?, ?]。分层 QP 可以在控制目标函数中考虑不同的优先级 [?], 但存在奇异的问题 [?]。逆运动学和反馈线性化对模型误差尤其是位置误差, 以及对机器人平衡至关重要的地面接触的稳定性 and 刚度非常敏感。基于欠驱动 (passivity) 的方法更不依赖于准确的接触模型 [?, ?], 是上述方法很有前景的一种替代。fig:typical_controlKawadaHRP-2[?]Asimo[?]AldebaranNao[?]Atlas[32]ANYboticsANYmal[?]IIT

[width=1.0] 仿人经典控制框架.eps

图 2: 典型的控制框架由主要由三阶段组成: 接触规划, 质心动力学级规划和全身控制 (图源 [?])

双足机器人状态估计

1.2 机器人质心运动模型

[width=.6] 浮动基.eps

图 3: 机器人浮动基运动模型

标准卡尔曼滤波的预测模型可以写成:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \Sigma_{k|k-1} &= \mathbf{A}_k \Sigma_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \Sigma_{w_k}\end{aligned}\tag{3}$$

标准卡尔曼滤波器的校正方程可以写为：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \Sigma_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \Sigma_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{v_k}) \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\tilde{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \Sigma_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \Sigma_{k|k-1} \end{aligned} \quad (4)$$

2 质心状态估计

包括人形机器人在内的腿足机器人有驱动关节，但并没有和环境刚性固定。因此驱动关节的角度并不能决定机器人相对环境的位姿。腿足机器人的构型还需要确定六个自由度，通常是一个特殊的连杆相对某个惯性系的位置和姿态。这个连杆就是所谓的浮动基。机器人每个连杆的位置可以用浮动基的位姿和编码器测量得到的关节角度重建出来。

由于浮动基的状态并不是直接可测的，所以快速可靠的状态估计是在腿足机器人上实现状态反馈控制非常重要的一环。如果能知道触地点的精确位置，那么关节的角度就足够重建出浮动基的位姿。但实际上接触很有可能会发生打滑，或者是踩到边缘脚板翻转，而且环境可能是不规则的，机器人的几何模型中也可能有不确定性（比如柔性零件引起的变形）。因此关节角度信息是不足以实现可靠的状态估计的。

力/力矩传感器和惯性测量单元 (IMU) 可以帮忙解决这个问题。力测量可以用来检测触地，打滑，以及脚板翻转。这些测量也可以用来估计柔性零件的形变，例如 HRP-2 中的柔性脚踝。IMU 通常会提供安装位置处的角速度和线加速度，其测量仅足以测量偏航角。

最近的方法集中在融合 IMU 信息，力传感器数据和运动学测量来实现高保真的状态估计。IMU 和运动学数据的融合最开始是用来实现里程计 [1][2]。之后，融合两者的高频率状态估计被用来估计速度并给闭环控制器使用：这可以在运动学层面进行 [3][4][5]，也可以扩展到动力学模型 [6][7]。其他传感器包括激光雷达的数据也可以被融合进来 [8]。这些方法的共性是，解一个全耦合的推理问题来从传感器测量中估计位置和姿态。然而这种全耦合的推理计算十分耗时，同时很难调参，并且通常代码实现和 debug 是很复杂的。

也有更简单的状态估计器和平衡控制器一起被提出，并且通常可以实现很震撼的实物效果 [9][10][11][12][13]。这些估计器将姿态和位置估计解耦来

简化问题，这就引出了一个问题：为了实现高性能的控制效果，我们在多大程度上需要全耦合的位姿解算？现在还很难回答这个问题，因为这些方法的严格验证有限，并且从来没有进行过合适的基准测试/对比试验 (have never been properly benchmarked)。

这篇文章的主要贡献在于在 WuKong4 上进行了原地平衡和行走实验，并且对比 (benchmark) 了两种简单的状态估计方法。对比试验同样考察了不同传感器的贡献度，比如 IMU 数据的加入，以及用力传感器来检测接触扰动。我们在第二和第三部分提出了两种不同的简化状态估计方法；第四部分展示并讨论了实验结果；第五部分给出了实验结论。

2.1 方法 1. 两阶段加权平均 (WA)

2.2 方法 2. 位置速度线性卡尔曼滤波器

本文使用的第二种方法利用卡尔曼滤波实现了自适应权重的调整，从而得到浮动基的速度和位置估计。现在的状态估计方法已经用扩展卡尔曼滤波 (EKF) 在人形和四足机器人的浮动基状态估计上取得了很好的效果 [4][5]。尽管在很多实例中 EKF 类的方法都表现很好，但它们的误差动力学缺乏稳定性的保证，并且在实际中可能很难调整参数。第三部分讨论了浮动基状态估计如何能在一个轻微的假设下分解成分级的姿态和位置滤波器，这是一个关键的结论。有了这个结论之后，浮动基的位置和速度估计就转化成了一个线性的问题，我们就能用线性卡尔曼滤波器来处理这个问题。

A 过程模型

和 [3] 中一样，机器人的位置和速度估计的状态量 \mathbf{x} 将机器人足的位置也包括了进去：

$$\mathbf{x} = [\mathcal{I}\mathbf{p}_b^\top, \mathcal{I}\mathbf{v}_b^\top, \mathcal{I}\mathbf{p}_L^\top, \mathcal{I}\mathbf{p}_R^\top]^\top \quad (5)$$

对于 n 时刻的加速度测量 \mathbf{a}_n ，浮动基的位置和速度的演化可以表示为：

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}\mathbf{p}_{b,n} + \mathcal{I}\mathbf{v}_{b,n}\Delta t + \frac{1}{2} [\mathcal{I}\mathbf{R}_{b,n}\mathbf{a}_n + g] (\Delta t)^2 \\ \mathcal{I}\mathbf{v}_{b,n} + [\mathcal{I}\mathbf{R}_{b,n}\mathbf{a}_n + g] \Delta t \\ \mathcal{I}\mathbf{p}_{L,n} \\ \mathcal{I}\mathbf{p}_{R,n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

我们假设足是保持静止的。

通常，如果 ${}^I\mathbf{R}_b$ 的估计是和 \mathbf{x} 同时进行的，那么状态估计是在一段非线性的离散时间间隔内实现的。然而如果近似将 ${}^I\mathbf{R}_b$ 的估计与 \mathbf{x} 的估计解耦，那么将 ${}^I\mathbf{R}_{b,n}\mathbf{a}_n + g$ 看成是时变的控制输入，则过程模型 `equ:est_posvel`

我们用了基于 IMU 的姿态估计器来估计 ${}^I\mathbf{R}_b$ (和第二部分 B 中描述的类型)。我们使用了 [14] 中提出估计的第二种版本。原本的估计器是设计来使用地磁计的，我们用运动学得到的浮动基姿态估计替换了地磁计信息。

B 测量模型

为了估计 \mathbf{x} ，需要用运动学测量得到 IMU 相对脚的位置。除此之外，脚的高度 z_L 和 z_R (这里假设为 0) 也被用作伪测量：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{R}_b^b \mathbf{p}_L(\mathbf{q}_L) \\ {}^I\mathbf{R}_b^b \mathbf{p}_R(\mathbf{q}_R) \\ z_L \\ z_R \end{bmatrix} \quad (7)$$

通过解耦状态 ${}^I\mathbf{R}_b$ 的估计，它的估计值可以代入 \mathbf{y} 。这种方法可以在估计测量值 $\hat{\mathbf{y}}$ 和估计状态值 $\hat{\mathbf{x}}$ 中建立起线性的关系：

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} {}^I\hat{\mathbf{p}}_b - {}^I\hat{\mathbf{p}}_L \\ {}^I\hat{\mathbf{p}}_b - {}^I\hat{\mathbf{p}}_R \\ \hat{z}_L \\ \hat{z}_R \end{bmatrix} := \mathbf{C}\hat{\mathbf{y}} \quad (8)$$

C 加权噪声模型基于上文的解耦假设， \mathbf{x} 的估计可以写成随机过程下的标准线性卡尔曼滤波：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}u_n + \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{n+1} + \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_{n+1}) \end{aligned} \quad (9)$$

\mathbf{A} 和 \mathbf{B} 满足 `equ:est_posvel` \mathbf{Q}_n 和 \mathbf{R}_n 分别是过程噪声和测量噪声的协方差矩阵。为了和 WA 滤波器的操作大致符合，测量噪声被设计成：

和被设计成：

和是固定的名义标准差。的值向下会饱和到一个较小的正值来避免除 0。右腿的测量噪声模型也采用了类似的放缩。

过程噪声被建模成：

其中是加速度计的固定均方根误差，也是自适应放缩的足端位置的标准差，这样的噪声模型使得估计器可以在走路的过程中自动捕捉摆动腿的位置变化。为了给这个过程提供更多的灵活性，噪声模型通过一个 inverse logistic sigmoid 做了放大：

其中是足端速度变化的名义方差。随后用标准卡尔曼滤波的更新方程来得到浮动基位置和速度估计。

3 触地状态估计

3.1 概率触地模型融合

实际上，我们不能完全信任控制器会按时将脚抬离或者放回地面，完美地按照规划出的相位执行。同样地，我们也不能假设地面是完全平整的，由于复杂的地形或者是未知的物体，地面的高度可能是未知的。在没有外部力传感器的情况下，我们必须从关节编码器的数据，本体力感知，以及腿的动力学模型来估计外部作用力。编码器有离散误差，同时模型误差会导致在没有外力的时候也会计算出非 0 的外力。这些单一的测量没有一个能告诉我们腿的真实状态，但我们能从每个测量中获取信息，并且用这些信息来得到某条腿是否有可能和地面接触的一个更好的估计 \hat{s} , $\hat{s} \in \{0 = \text{swing}, 1 = \text{contact}\}$ 。完美的触地检测算法满足 $\hat{s} = s$, s 表示触地状态的真值。由于要使用多种测量，使用卡尔曼滤波器来实现数据融合是很自然的。将脚和地面接触的整体估计概率作为卡尔曼滤波器的状态，即：

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{Bmatrix} P_1(c) \\ \vdots \\ P_N(c) \end{Bmatrix}_k \quad (10)$$

自然而然地，我们可以用概率接触模型作为先验来融合所有可用的数据。虽然测量中涉及到的动力学很复杂，但把接触的概率作为状态，我们就能用一个简单的线性卡尔曼滤波来实现。在估计时使用概率而不是离散的二进制接触状态的好处之一是，在概率增大或者减小时我们可以预测会发生接触状态的变化。

A 预测：过程模型

对于给定的步态规划和当前某条腿的相位 ϕ ，步态规划器会给出每条腿期望的接触状态 s_ϕ 。在理想情况下， $s = s_\phi$ ，并且状态切换是同时发生的。然而机器人的控制系统很容易有延时，这可能导致腿抬得晚了，或者由于摆动腿轨迹跟随的误差以及未知的地面高度变化导致触地触地提前或者晚了。

为了解决这些问题，我们可以建立一个概率模型，来在给定腿的规划接触状态和在支撑相或者摆动相的子相的情况下得到触地的期望值。对于给定接触状态和子相百分比，触地概率有如下形式：

$$P(c | s_\phi, \phi) = \frac{1}{2} \left(s_\phi \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\phi - \mu_{c_0}}{\sigma_{c_0} \sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu_{c_1} - \phi}{\sigma_{c_1} \sqrt{2}} \right) \right] + \bar{s}_\phi \left[2 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu_{\bar{c}_0} - \phi}{\sigma_{\bar{c}_0} \sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\phi - \mu_{\bar{c}_1}}{\sigma_{\bar{c}_1} \sqrt{2}} \right) \right] \right) \quad (11)$$

其中 s_ϕ 表示支撑相或者摆动相之间的切换，均值 μ 表示接触状态切换的期望子相值，方差 σ^2 由触地相的子相值的可变性 (variability) 决定。

$$\text{fig:gauss_phase} \mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} P_1(c | s_\phi, \phi) \\ \vdots \\ P_N(c | s_\phi, \phi) \end{Bmatrix}_k \quad (12) \text{ 下面的协方差矩阵大致表示}$$

[width=.75] 图 3.png

图 4: 基于相位的触地概率。对于预定状态和状态子相的完成进度，多个参数会定义触地的概率。

我们对基于相位的状态切换模型的置信度：

$$\Sigma_{w_k} = \begin{bmatrix} \sigma_{\phi,1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{\phi,N}^2 \end{bmatrix}_k \quad (13)$$

由于我们只是通过融合当前可用的测量来看瞬时的接触检测，所以状态和输入矩阵可以定义为：

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{0}_N \quad \text{and} \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{I}_N \quad (14)$$

B 校正：测量模型

1) 地面高度测量模型：在缺少环境感知系统的情况下，地面高度 z_g 可以概率地被建模出来。表示地面高度的随机变量 z_g 符合高斯分布，即

$Z_g \sim \mathcal{N}(\mu_{z_g}, \sigma_{z_g}^2)$ 。 μ_{z_g} 表示地面高度的均值，在没有外部信息时被设为 0，因为我们无法对地形做出任何假设。类似地，方差大致和地形的“粗糙”程度对应。这样我们就能用地面高度的模型来根据当前机器人足端在竖直方向的位置 p_z 得到触地的概率：

$$P(c | p_z) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu_{z_g} - p_z}{\sigma_{z_g} \sqrt{2}} \right) \right] \quad (15)$$

fig:gauss_{height} μ_{z_g} 和 $\sigma_{z_g}^2$ 的值可以从其他传感器信息或者之前的行走数据

[width=.75] 图 4.png

图 5: 基于相位的触地概率。对于预定状态和状态子相的完成进度，多个参数会定义触地的概率。

中获得。这个模型提供了第一次测量校正，并且对应的协方差矩阵可以写为：

$$\tilde{z}_{1,k} = \begin{Bmatrix} P_1(c | p_z) \\ \vdots \\ P_N(c | p_z) \end{Bmatrix}_k \quad \Sigma_{v_{1,k}} = \begin{bmatrix} \sigma_{p_{z,1}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{p_{z,N}}^2 \end{bmatrix}_k \quad (16)$$

该协方差矩阵表示我们对接触高度模型信任度的度量。

1) 接触力测量模型：足底的外力是唯一真实能表明发生了触地的信息。然而机器人当前并没有安装直接力传感器。通过第三部分中估计出的外力，我们可以建立另一个力接触的简单概率模型，用随机变量 f_c 表示， f_c 满足高斯分布： $F_c \sim \mathcal{N}(\mu_{f_c}, \sigma_{f_c}^2)$ 。这里 μ_{f_c} 是在接触处感知到的外力的均值， $\sigma_{f_c}^2$ 度量估计出的外力的噪声大小。对于给定估计接触力，触地概率可以写成：

$$P(c | f_z) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{f_z - \mu_{f_c}}{\sigma_{f_c} \sqrt{2}} \right) \right] \quad (17)$$

$$\text{fig:gauss}_{force} : \tilde{z}_{2,k} = \begin{Bmatrix} P_1(c | f_z) \\ \vdots \\ P_N(c | f_z) \end{Bmatrix}_k \quad \Sigma_{v_{2,k}} = \begin{bmatrix} \sigma_{f_{z,1}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{f_{z,N}}^2 \end{bmatrix}_k \quad (18)$$

这两组单独的测量叠在一起组成了卡尔曼滤膜中的测量向量。类似地，每个测量的协方差矩阵组成了如下的块对角协方差矩阵：

$$\tilde{z}_k = \begin{bmatrix} \tilde{z}_{1,k} \\ \tilde{z}_{2,k} \end{bmatrix} \quad \Sigma_{v_k} = \begin{bmatrix} \Sigma_{v_{1,k}} & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \Sigma_{v_{2,k}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

[width=.75] 图 5.png

图 6: 基于相位的触地概率。对于预定状态和状态子相的完成进度, 多个参数会定义触地的概率。

输出矩阵 \mathbf{H}_k 由两个 $N \times N$ 的单位矩阵叠在一起组成:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中 N 是足的个数。通过将步态规划器的期望接触状态和测量概率模型的结果融合, 我们可以得到每条腿的实际接触状态的一个更好的估计。由于我们把卡尔曼滤波器的 \mathbf{A}_k 设为 $\mathbf{0}_N$, 融合的过程也能通过贝叶斯定理下的静态最大似然方法来得到。但我们还是用了标准的卡尔曼滤波来迭代更新 (但这个过程是预先嵌入在标准卡尔曼滤波更新中的), 这在机器人学中是更容易获得的。

3.2 触地估计实验验证

基于事件触发的双足机器人运动控制器

4 双足机器人建模与控制器设计

[width=1.] 关节构型.eps

图 7: WuKong-IV 关节构型

本文提出了针对浮动基机器人的一种基于动量的控制架构, 并在仿人机器人 Atlas 上进行了实现。该控制架构的核心是一个二次规划问题, 该二次规划问题协调了用关节加速度向量的约束表达的运动任务, 和单边的地面接触和有限的抓地力 (force-limited grasping) 带来的限制。我们竭力做了一些必要的改动, 使得该架构可以从仿真环境移植到实际硬件平台上, 并且提出了机器人走过复杂地形, 一些基本的操作任务, 以及在斜面上的多接触点平衡 (后者仅在仿真中实现)。

5 质心动力学

这部分简要地回顾了机器人的质心动力学的一些关键性质。对于更深层次的讨论，见 [25]。在本文中，我们把机器人看作刚体，其有广义关节力矩向量 $\tau \in R^n$ ，关节构型向量 $q \in R^m$ ，关节速度向量 $v \in R^{n+6}$ （区分 v 和 \dot{q} 是为了用关节构型的冗余参数来避免奇异问题（比如使用欧拉角而不是 rpy 来表示浮动基姿态），同时使用最少的参数来表示速度向量（比如使用角速度而不是四元数的导数））。我们假设机器人和世界系之间的“浮动关节”是唯一的无驱动自由度。令

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{l} \end{pmatrix} \in R^6 \quad (21)$$

表示机器人的质心动量， $\mathbf{k} \in R^3$ 表示质心角动量， $\mathbf{l} \in R^3$ 表示质心线动量（符号表示采用 [25]）。“质心”表示所有的量都在质心系下表示，质心系和世界系有同样方向的坐标轴，但其原点在机器人的瞬时质心处。机器人的质心动量就等于所有连杆在质心系下的动量之和。众所周知，无论机器人有多复杂，其质心动力学都是简单的。欧拉定律表明机器人的质心动量的变化率就等于施加在机器人上的所有外部力旋量之和。可以写成：

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{W}_g + \sum_i \mathbf{W}_{gr,i} + \sum_i \mathbf{W}_{ext,i} \quad (22)$$

其中 $\mathbf{W}_g = [\mathbf{0}_{3 \times 1}^T \quad m\mathbf{g}^T]^T$ 表示重力矩， $\mathbf{W}_{gr,i}$ 表示由于机器人刚体和环境接触产生的环境作用力旋量， $\mathbf{W}_{ext,i}$ 表示机器人受到的接触力和重力之外的其它外部力旋量。注意机器人系统的动量变化率和内部力或者力矩无关。Orin 和 Goswami 指出关节速度向量 v 和机器人的质心动量之间存在着简单的线性关系 [2]

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}(q)\mathbf{v} \quad (23)$$

其中 $\mathbf{A}(q)$ 被称作质心动量矩阵 (centroidal momentum matrix, CMM)。

将 $\mathbf{A}(q)$ 表示为 $\mathbf{A}(q) = \mathbf{A}_0 + \sum_i \mathbf{A}_i(q_i)$ ，其中 \mathbf{A}_0 是常数矩阵， $\mathbf{A}_i(q_i)$ 是依赖于关节 q_i 的矩阵。那么，质心动量的变化率可以表示为：

6 控制架构

fig:framework_control_flow1(motiontask)23QP equ : euler_wrenchQP

[width=1.]qp 控制框架.eps

图 8: 控制架构中上层信息流概览

6.1 期望运动

在我们的架构中, 运动任务是用来确定期望的机器人运动的。运动 (motion) 是动量变化率方程 $\text{equ:euler}_w\text{rench}_d \in R^{(n+6)}$, 包括了机器人浮动基关节相对于世界系的空间加速度。 n 是驱动关节的数量。第 i 个运动任务可以写成

$$\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{v}}_d = \mathbf{p}_i \quad (25)$$

6.2 外部力旋量

本节是关于动量变化率方程 $\text{equ:euler}_w\text{rench} \mathbf{W}_{gr,i}$ 由特定约束下的 QP 中的决策变量参数化。两种形式的地面接触是可行的: 单边地面接触 (4.2.1) 和有限抓地力接触 (4.2.2)。其他的待补偿的外部力旋量在 4.2.3 中讨论。

6.2.1 单边地面接触

单边地面接触被建模成有静摩擦力的点接触。有分布的负载的平的, 多边形的接触面可以被等效地建模成顶点处的点接触。对于法向量为 \mathbf{n}_i 的第 i 个点接触, 接触力 \mathbf{f}_i 的摩擦约束可以写成:

$$\|\mathbf{f}_i - (\mathbf{n}_i \mathbf{f}_i) \mathbf{n}_i\| \leq \mu \mathbf{n}_i \mathbf{f}_i \quad (26)$$

其中 μ 是摩擦系数。 $\text{equ:friction}_c\text{one}(SOCP)\text{polyhedrallmfig} : \text{friction}_c\text{one}\text{equ} : \text{friction}_c\text{one}$

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^m \rho_{ij} \mathbf{f}_{ij}$$

其中 $\beta_{ij} \in R^3$ 是基向量, ρ_{ij} 是坐标。在本文提出的结果中我们用了四个基向量, 将 μ 设为 0.8。质心系下的地面接触力旋量 $\mathbf{W}_{gr,i}$ 和接触力 \mathbf{f}_i 的关

[width=1.] 摩擦锥.eps

图 9: 质心系下 \mathbf{r}_i 处法向量为 \mathbf{n}_i 的单边接触, 摩擦锥由基向量 β_{ij} 近似

系可以表示成:

$$\mathbf{W}_{gr,i} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}_i \\ I \end{pmatrix} \mathbf{f}_i \quad (28)$$

其中 \mathbf{r}_i 表示质心系下接触点 i 的位置, $\hat{\mathbf{r}}_i \in R^3$ 是满足 $\hat{\mathbf{r}}_i \mathbf{f}_i \equiv \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$ 的反对称矩阵。将 $\text{equ:friction}_p \text{ : } \text{contact}_w \text{ : } \text{rench}$ $\mathbf{W}_{gr,i} = \mathbf{Q}_i \boldsymbol{\rho}_i$ (29) 其 $\boldsymbol{\rho}_i \geq 0$

中, $\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\beta}_{i1} & \dots & \hat{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\beta}_{im} \\ \boldsymbol{\beta}_{i1} & & \boldsymbol{\beta}_{im} \end{bmatrix}$ 。实际我们用了和接触的刚体表面固定的坐标系的面法向量 \mathbf{n}_j 。我们更愿意使用 Pollard 和 Reitsma 的射线参数化, 而不是 Stewart 和 Trinkle 的另一种参数化, 因为射线参数化每个接触点要求的决策变量都会少一个。

6.3 QP 构建过程

$$\begin{aligned} & \underset{\dot{\mathbf{v}}_d, \boldsymbol{\rho}}{\text{minimize}} && (\mathbf{A}\dot{\mathbf{v}}_d - \mathbf{b})^\top \mathbf{C}_h (\mathbf{A}\dot{\mathbf{v}}_d - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\rho}^\top \mathbf{C}_\rho \boldsymbol{\rho} + \dot{\mathbf{v}}_d^\top \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{v}}_d \\ & \text{subject to} && \mathbf{A}\dot{\mathbf{v}}_d + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{v} = \mathbf{W}_g + \mathbf{Q}\boldsymbol{\rho} + \sum_i \mathbf{W}_{\text{ext},i} \\ & && \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}}_d = \mathbf{p} \\ & && \boldsymbol{\rho}_{\min} \leq \boldsymbol{\rho} \leq \boldsymbol{\rho}_{\max} \end{aligned} \quad (30)$$

其中, $\mathbf{b} = \dot{\mathbf{h}}_d - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{h}}_d \in R^6$ 表示期望的质心动量变化率。 \mathbf{C}_h , \mathbf{C}_ρ , \mathbf{C}_v 是由更上层的控制器决定的目标函数权重矩阵。5.4 给出了行走行为下的权重矩阵示例。

7 行走实验

双足机器人质心轨迹优化

8 基于 QP 的全身控制器

机器人运动由基于 QP 的全身控制器控制 [22], 该控制器输出一组期望关节加速度, 包括浮动基关节在惯性系 \mathcal{I} 下的空间加速度, 这里我们用

$\dot{\nu}_d \in R^{n+6}$ 表示, n 是驱动关节的数量。另外, 该全身控制器也会生成期望的接触力和力矩 (wrenches)。

该全身控制器处理包括笛卡尔空间和质心任务的不同运动控制任务。前者的实现是通过最小化下面的目标函数:

$$\|J_t \dot{\nu}_d - (\alpha_d - \dot{J}_t \nu)\|^2 \quad (31)$$

其中 $J_t \in R^{n_j \times (n+6)}$ 是任务雅可比, n_j 是任务 j 的自由度数量, $\alpha_d \in R^{n_j}$ 是任务的期望加速度, ν 是由状态估计得到的浮动基和关节速度向量。 $(\alpha_d - \dot{J}_t \nu)$ 是不依赖决策变量的向量, 用符号 α_i 代替。

质心任务由控制机器人的动量 h 实现, $h \in R^6$ 。我们特意利用了下面的关系:

$$\dot{h} = J_{CMM} \dot{\nu} + \dot{J}_{CMM} \nu = W_g + \sum_i W_{gr,i} + \sum_i W_{ext,i} \quad (32)$$

其中 $J_{CMM} \in R^{6 \times (n+6)}$ 是质心动量矩阵 [23], $W_g = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1}^T & mg^T \end{bmatrix}^T$ 是由于重力产生的力和力矩 (wrench), $\sum_i W_{gr,i}$ 表示作用在机器人身体上的接触力, $\sum_i W_{ext,i}$ 表示除上述两种力外作用在机器人上的力和力矩的总和。

不同的接触力作用在接触面 (contact patch) 的每个顶点上, 这些力被特意用一个坐标向量 ρ_i 定义, $\rho_i \in R^m$, 它的基是摩擦锥表面上的 m 个向量 (extreme rays)。通过限制 ρ_i 的每一个元素都在 $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ 内, 我们避免过分大的力和力矩。另外更重要的一点是, 这样做隐式地满足了摩擦约束和 CoP 约束。一般来说由接触产生的法向力也一定是正的。我们可以把接触相关的力和力矩 $\sum_i W_{gr,i}$ 在惯性系 \mathcal{I} 中表示为 ρ_i 的函数:

$$W_{gr,i} = Q_i \rho_i \quad (33)$$

其中 $Q_i \in R^{6 \times m}$ 取决于接触顶点 i 的位置和基向量的选择, 通过把所有的 Q_i 和 ρ_i 接到一起, 我们可以得到 $\sum_i W_{gr,i} = Q_i \rho_i$ 。

最终笛卡尔和质心任务被组合成如下形式:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} J \\ J_{CMM} \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{h}_d - \dot{J}_{CMM} \nu \end{bmatrix} \quad (34)$$

其中 J 和 β 分别是所有的任务雅可比 J_i 和 β_i 的接合, \dot{h}_d 是期望的动量

变化率。在每个控制周期，要解的 QP 问题可以写成：

$$\begin{aligned} & \underset{\dot{\nu}_d, \rho}{\text{minimize}} \left\| \hat{\mathbf{J}} \dot{\nu}_d - \hat{\boldsymbol{\beta}} \right\|_{C_t}^2 + \|\rho\|_{C_\rho}^2 + \|\dot{\nu}_d\|_{C_\nu}^2 \\ & \text{subject to: } \mathbf{J}_{\text{CMM}} \dot{\nu}_d + \dot{\mathbf{J}}_{\text{CMM}} \nu = \mathbf{W}_g + \mathbf{Q}\rho + \sum_i \mathbf{W}_{\text{ext},i} \quad (35) \\ & \rho^{\min} \leq \rho \leq \rho^{\max} \end{aligned}$$

期望的广义关节加速度和接触力被用于计算机器人期望的关节力矩输入。

9 变高度双摆模型

由牛顿第二定律可以得到线动量的变化率：

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\mathbf{g} + \sum_i {}^{\mathcal{I}}\mathbf{f}_i \quad (36)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^3$ 是惯性系 \mathcal{I} 下的质心位置， m 是机器人的总质量， \mathbf{g} 是重力加速度，是惯性系 \mathcal{I} 下的一个外力。我们可以把机器人足底所受的力和力矩定义在和 \mathcal{I} 平行的一个坐标系下，这个坐标系的原点和 CoP 点重合；同时假设在通过 CoP 点，和足底垂直的轴上没有力矩作用在机器人上。这样机器人足底所受的力矩为 0，可以通过限制所有的力都在通过质心的一条直线上来保证角动量守恒，即：

$${}^{\mathcal{I}}\mathbf{f}_* = m\lambda_* (\mathbf{x} - {}^{\mathcal{I}}\mathbf{p}_*) \quad (37)$$

其中 $*$ 是占位符表示左脚 l 或者右脚 r 。 ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{f}_* \in R^3$ 是惯性系 \mathcal{I} 下脚上的外力， $\lambda_* \in R^3$ 是系数，可以理解成弹簧的刚度。 `equ:linearf`

由于我们把所有的接触都考虑成单边接触， λ_* 被约束为正则保证法向力为正， ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{p}_* \in R^3$ 是足底 CoP 在 \mathcal{I} 下的位置，

$${}^{\mathcal{I}}\mathbf{p}_* = \mathbf{x}_* + {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_* \mathbf{p}_* \quad (38)$$

其中 $\mathbf{x}_* \in R^3$ 是足底位置，`equ:acceleration*` 是足坐标系下的 CoP，因此 z 坐标为 0。 ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_*$ 表示足坐标系和惯性系 \mathcal{I} 间的相对旋转，为了简化表达，下文我们省略掉上标，将 ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_*$ 表示为 \mathbf{R}_* 。

假设机器人所受外力仅由足底力组成，`equ:newton2` $m\ddot{\mathbf{x}} = -m\mathbf{g} + m\lambda_l (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l - \mathbf{R}_l \mathbf{p}_l) + m\lambda_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r - \mathbf{R}_r \mathbf{p}_r)$ (39) 同除以机器人的总质量，最终得到：

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{g} + \lambda_l (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l - \mathbf{R}_l \mathbf{p}_l) + \lambda_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r - \mathbf{R}_r \mathbf{p}_r) \quad (40)$$

equ:newtonlinear₂

10 上台阶动力学规划

本文中表述的跨台阶规划器利用了 [16][26][27] 中阐述的基于阶段的轨迹优化。我们假设预先知道接触的序列，这样简化了对接触的激活和失活的处理。本节提出了解决相关的非线性轨迹优化问题的约束，任务和方法论。首先我们将 $\text{equ:newtonlinear}_2 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_i$ (41) 根据对应相位 i 的接触状态， $\mathbf{a} \in R^3$ 表示不同的值：

- 没有脚触地， $\mathbf{a}_i = -\mathbf{g}$;
- 一只脚触地 (* 表示 l 或者 r)， $\mathbf{a}_i = -\mathbf{g} + \lambda_* (\mathbf{x} - \mathbf{x}_* - \mathbf{R}_* \mathbf{p}_*)$
- 两只脚触地， $\mathbf{a}_i = -\mathbf{g} + \lambda_l (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l - \mathbf{R}_l \mathbf{p}_l) + \lambda_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r - \mathbf{R}_r \mathbf{p}_r)$

通过二阶泰勒展开，我们可以得到 equ:acceleration 的近似离散形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)dt_i + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(k)dt_i^2 \\ \mathbf{v}(k+1) &= \mathbf{v}(k) + \mathbf{a}_i(k)dt_i \end{aligned} \quad (42)$$

其中 $k \in R$ 表示任一离散时刻， $\mathbf{v}(k) \in R^3$ 表示时刻 k 的质心速度。每个阶段 i 的时长为 $T_i \in R$ ， T_i 并非预先设定好的，而是作为待优化变量。但每个阶段的离散区间数是固定的，因此 $dt_i = T_i/N$ ， $N \in N^+$ 表示每个阶段的离散区间数量。另外 T_i 被限制在 $[T_i^{min}, T_i^{max}]$ 范围内。

10.1 力和腿长约束

为了保证机器人能够执行，施加在足底的力必须满足某些条件。这些条件被嵌入到了优化问题的约束中。

首先，CoP 必须处于足底多边形内，通过添加一组不等式约束可以满足这个条件：

$$\mathbf{A}_* \mathbf{p}_* \leq \mathbf{b}_* \quad (43)$$

其中 $\mathbf{A}_* \in R^{v \times 3}$, $\mathbf{b} \in R^v$ 可以根据足底多边形顶点的位置计算，顶点的数量是 v 。由于 \mathbf{p}_* 被定义在足坐标系下，因此这些量不依赖于足的位姿。

为了避免足底打滑，足底力向量应该位于摩擦锥中，写成不等式约束：

$$\sqrt{{}^*f_{*,x}^2 + {}^*f_{*,y}^2} \leq \mu_s {}^*f_{*,z} \quad (44)$$

其中 $\mu_s \in R$ 是静摩擦系数， ${}^*\mathbf{f}_* \in R^3$ 是足坐标系下的足底力，即 $\mathbf{f}_* = \mathbf{R}_*^{\top} \mathbf{f}_*$ 。假设足坐标系平行于 z 轴和行走平面垂直并和地面固定的坐标系，代入 `equ:linear_fequ : copequ : friction` $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\mu_s^2 \end{bmatrix} (\mathbf{R}_*^{\top} m \lambda_* (\mathbf{x} - \mathbf{x}_* - \mathbf{R}_* \mathbf{p}_*))^2 \leq$

0(45) 注意当 $\lambda_* = 0$ ，不等式左边为 0，摩擦约束自动满足，因此 `equ:friction2` $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\mu_s^2 \end{bmatrix} (\mathbf{R}_*^{\top} m (\mathbf{x} -$
0(46)

对于扭转摩擦约束，我们在足坐标系的原点施加相同的法向力矩 $\tau_{*,z}$ ，并对其施加边界约束，即 $-\mu_t {}^*f_{*,z} \leq \tau_{*,z} \leq \mu_t {}^*f_{*,z}$ ， $\mu_t \in R$ 是扭转摩擦系数。考虑到外力 ${}^*\mathbf{f}_* \in R^3$ 的作用点在 \mathbf{p}_* 处，我们可以把约束重写为：

$$-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_t \end{bmatrix}^{\top} {}^*\mathbf{f}_* \leq \begin{bmatrix} -p_{*,y} \\ p_{*,x} \\ 0 \end{bmatrix}^{\top} {}^*\mathbf{f}_* \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_t \end{bmatrix}^{\top} {}^*\mathbf{f}_* \quad (47)$$

或者等价地写成：

$$-d_*^{\top} {}^*\mathbf{f}_* \leq c_*^{\top} {}^*\mathbf{f}_* \leq d_*^{\top} {}^*\mathbf{f}_* \quad (48)$$

注意 $c_*^{\top} {}^*\mathbf{f}_*$ 表示 $\mathbf{p}_* \times {}^*\mathbf{f}_*$ 的 z 向分量。和上文对静摩擦力约束的处理一样，我们替换掉 ${}^*\mathbf{f}_*$ 得到下面的不等式约束：

$$\mathbf{F}_* \mathbf{R}_*^{\top} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_* - \mathbf{R}_* \mathbf{p}_*) \leq 0 \quad (49)$$

其中，

$$\mathbf{F}_* = \begin{bmatrix} (\mathbf{c}_* - \mathbf{d}_*)^{\top} \\ (-\mathbf{c}_* - \mathbf{d}_*)^{\top} \end{bmatrix} \quad (50)$$

在规划机器人运动时，我们必须考虑它的运动学限制，可以用质心到足的距离近似腿长，来限制超出运动学范围的运动，这个约束可以写成：

$$-l^{\min} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \leq l^{\max} \quad (51)$$

其中 $l^{\min}, l^{\max} \in R$ 分别是上下限，这些约束可以分别施加到每条腿上。

10.2 任务（目标函数设计）

目标函数的设计是为了生成机器人利用自身动量跨越高台阶的质心轨迹，由几个任务组成，完整的目标函数在优化问题 1 的顶部。

第一个任务是在衡量末状态和期望位置 x_d ，期望速度 v_d 之间的距离：

$$\Gamma_{x_d} = \sum_{k=K_f} \left(w_{x_d} \|x(k) - x_d\|^2 + w_{\dot{x}_d} \|v(k) - v_d\|^2 \right) \quad (52)$$

其中 $w_{x_d}, w_{\dot{x}_d} \in R^+$ 是可以调整的权重。 K_f 包括了最后一个阶段的一部分，末状态在这部分里面。所以可以生成提前到达终点并定义可以维持终点状态的控制输入的轨迹。因此，我们保证了最终可以到达稳定的状态。

由 $\text{equ:newtonlinear}_2 \Gamma_\tau = w_\tau \sum_{k,*} \tau_*(k)^2 + w_{\tau_{\max}} \sum_* (\max_k \tau_*(k))^2$ (53) 其中，

$$\tau_*(k) = \begin{cases} (x_z(k) - x_{*,z} - \delta_*) \lambda_*(k) & \text{if } * \text{ in contact} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (54)$$

equ:tau 是用来减少关节力矩的启发式函数。 $*$ 是表示 l 或者 r 的占位符， δ_* 是参考高度差。直观上看，当机器人膝关节弯的很多的时候，承受的压力是更大的。在这种构型下，质心和足之间的高度差是相对小的，这个启发式函数可以防止求解出要求处于运动学极限附近的腿施加很大力的解。所以 Γ_τ 衡量了在所有离散时间区间上的平方和的大小。 Γ_τ 的第二项是为了防止 $\tau_*(k)$ 出现剧烈变化。 $w_\tau, w_{\tau_{\max}} \in R^+$ 是确定两项的相对优先级的权重。

对于控制输入 $\lambda_*(k)$ 和 $p_*(k)$ ，执行规划器生成的轨迹的输入的变化最好是相对小的，这样可以减少实物机器人跟踪轨迹时的关节力矩的变化。所以我们考虑下面的任务：

$$\Gamma_{\Delta u} = w_{\Delta u} \sum_{k=2 \dots N \cdot P} \|u_*(k) - u_*(k-1)\|^2 \quad (55)$$

其中 $w_{\Delta u} \in R^+$ 是任务权重， $u_* = [\lambda_*^\top p_*^\top]^\top$ 。

最后，我们加上一系列的正则项：

$$\Gamma_{\text{reg}} = w_t \sum_i \|T_i - T_{i,d}\|^2 + w_\lambda \sum_k \|\lambda_*(k)\|^2 + w_p \sum_k \|p_*(k)\|^2 \quad (56)$$

正则项使得优化问题的求解向最小化控制输入和最小化每个阶段的时长与预设的期望时长 $T_{i,d}$ 的差值的方向进行， w_t, w_λ, w_p 是对应正则项的权重。

10.3 优化问题

最终的轨迹优化问题由动力学约束 (equ:approx_{acc}) *constraints* *cost_function* *DirectMultipleShooting*

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) & k = 0 \dots N \cdot P \\ \mathbf{v}(k) & k = 0 \dots N \cdot P \\ \mathbf{a}(k) & k = 1 \dots N \cdot P \\ \lambda_*(k) & k = 1 \dots N \cdot P, * = l, r \\ \mathbf{p}_*(k) & k = 1 \dots N \cdot P, * = l, r \\ T_i & i = 1 \dots P, \end{cases} \quad (57) \text{ 其中 } P \in \mathbb{N}^+ \text{ 是不同阶段的数量。}$$

$\mathbf{x}(k)$ 和 $\mathbf{v}(k)$ 是状态变量, 需要用测量得到的机器人初始状态 \mathbf{x}_0 , \mathbf{v}_0 初始化, 即 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ 。 χ 也包含每个阶段的时长。

问题求解的完整过程在优化问题 1 中, 其中含有下标 i 的量取决于某个特定的阶段, 并且在该阶段的时长内是固定的。算法的实现基于 CasADi[29], 求解器使用了 Ipopt。

由于系统模型、摩擦约束、以及相关目标函数的非线性, 我们构建的优化问题是非凸的。为了加速求解, 我们用每个阶段期望的时长来初始化 T_i , 质心轨迹用从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 的线性插值来初始化, 其他变量均被初始化为 0。

Algorithm 1 写算法名称

Require:

输入 1

输入 2

Ensure:

1: 输入 1

2: 输入 2

3: **return** 返回值;

11 上台阶实验验证

总结与展望

11.1 落脚点规划的最近进展

落脚点规划是运动规划的一个特例，这个问题通常是 PSPACE 难的，因此是 NP 难的 [39]。在腿足运动中，接触状态的离散特性是组合爆炸的一个特殊来源，增加了运动规划问题整体的非凸性。为了解决这种讨厌的计算复杂性，已经有人提出利用现成先进的求解器在几秒内找到全局最优的接触序列的混合整数公式 (mixed-integer formulations)，同时还考虑了在不平整地形的运动学甚至动力学可行性约束 [40,41,42]。

另外一种方法是用机器人足能到达的范围来提供接触序列存在的充分必要条件。这样机器人的运动可以不用提前设定好接触序列来实现，这大大降低了运动规划问题的复杂度，使机器人可以在几分之一秒内对变化的环境作出快速重规划。具体的接触序列可以在下一个阶段用各种各样的启发式函数来得到，比如在考虑不平整地形下运动学甚至动力学可行性约束的同时最大化准静态的鲁棒平衡 [43,44,45,15]。这种多阶段的方法可以很高效，但是对启发函数的依赖可能会导致失败。

11.2 简化模型的近期进展

运动发散量 (divergent component of motion, DCM): 线性倒立摆 (LIP) 模型的一个好处是它足够简单，可以进行彻底的数学分析。值得注意的是，LIP 动力学的发散部分可以用一个单独的量表示——运动发散量 (DCM)，而不必用质心的完整状态 (位置和速度)。DCM 的线性反馈控制是双足平地运动的一种高效平衡控制策略 [20]，简单到可以在基于位置控制 [46]、力矩控制 [47] 等各种各种机器人平台上验证。

DCM 遵循接触力的一阶动力学，比质心的二阶动力学 (1) 要简单，这也帮助简化了腿足控制的其他方面。最近主要有三个进展：第一，DCM 可以在不改变系统动力学的前提下，去掉质心的平面约束来生成三维的行走轨迹 [48]；第二，通过对 DCM 的解析轨迹做一些变量替换，可以在轨迹优化中包含在线的 step-timing adaption 的同时保证我们要解的问题是一个小的凸问题 [49]。第三，在证明 MPC 问题的稳定性和可行性时，DCM 可以被用作一个可行 (viability) 条件。

Centroidal dynamics: 在例如不平整地形、狭窄空间等有多点接触的场景中运动时，将接触力等效到 ZMP 是很局限的。基于完整质心动力学 `equ:newton` 和 `equ:euler` 的方法是在更广泛的接触场景下计算可行的质心轨

迹、角动量和对应接触力的一种解决方案。接触序列甚至可以同时优化求解 [51]。

利用轨迹优化问题的稀疏性和凸性来求解的方法已经有了一定的发展 [41,44,45]。另外，四足机器人的惯量通常用单刚体近似得到 [34,35,51]，并且为了让最终的非线性优化问题可以在期望的运动行为附近快速收敛，可以根据实际运动设计启发函数来正则化优化问题 [53]。加上这些改进之后，基于完整质心动力学的方法可以在线运行，计算时间在 10ms 内 [54]。

质心动力学并不考虑运动学或者关节力矩约束。为了部分弥补这些缺陷，一些方法提出将接触力和力矩 (wrench) 锥扩展来包含力矩限制 [55]，还有一些基于学习的方法将更复杂的全身约束表示进质心模型里面 [56]。

Mixed models: 另外一个在简化模型跟完整动力学模型之间的折中方案是，将质心动力学 `equ:newton` 和 `equ:euler` 和全身运动学模型结合，这样可以在保持适度的计算复杂度的同时得到符合动力学的全身运动 [57,58]。用这种方法可以在 70ms 内在线计算和更新局部最优的反馈控制 [59]。也可以用交替下降的方法 (alternating descent method) 将质心动力学与全身动力学模型结合，来考虑质心动力学以外的部分 [60]。一种更早的方法将机器人的瞬间全身动力学与 LIP 模型在一个滚动时域内结合到一个统一的 QP 问题中，来获得机器人运动的长时动力学 [61]。

11.3 全身模型的最新进展

Trajectory optimization: 利用 collocation[62,63] 或 multiple-shooting[64] 等轨迹优化的一些技术，我们可以考虑所有的运动学和动力学约束，以及最小化能量消耗等目标函数，用机器人的完整非线性动力学模型来协调肢体的运动 (其中 collocation 和 multiple-shooting 在求解速度、准确性、稳定性和精度上互有优势 [65])。使用松弛的接触模型甚至能同时优化求解接触序列 [66,67]。由于高效的开源数值求解器 [68,69,70] 利用了轨迹优化问题的稀疏性和动力学模型的精确导数 [71,72,73]，在线计算全身运动可以在 7ms 内完成 [70,74,75]。

Reinforcement learning: 强化学习技术的成熟使得离线用机器人的完整动力学模型，从传感器原始数据和机器人姿态估计中直接计算出最优的反馈控制策略成为可能 [76,77]。这种方法在更难以建模的室内和室外环境中比更传统的方法表现要好。这种方法有效的关键点在于：(1) 能产生大量行

为样本的高效仿真器 [78]; (2) 能指引反馈控制策略的优化求解从简单场景到更复杂场景的“上课”策略; (3) 在电机模型里用实际的硬件测量数据训练得到的神经网络表示难以建模的不确定性。

11.4 小结

腿足运控就是在足和环境之间建立一系列的接触, 并且在不同接触之间执行对应的符合机器人运动学和动力学的动作。数值轨迹优化在这其中扮演了关键角色, 处理交替的接触以及对应接触力的约束。不同复杂度的模型, 从最简单的 LIP 模型, 到完整质心动力学 (1)-(2), 再到完整的多刚体动力学模型, 可以单独或者结合起来使用, 处理运动的不同方面 (层次)。正是这些模型的改进, 以及高级的数值方法的改进, 无论是现成的还是特殊为腿足运控设计的, 使得近年来从平地到更普遍的室内室外环境的转变成为可能。首个用强化学习成功实现真实复杂环境下的四足运动的例子也是用同样的方法做到的。

离线和在线数值优化在这个过程中扮演的核心角色, 使得整个腿足运控研究领域大力发展新的优化方法和高效的数值软件。值得一提的有, 安全处理不同优先级、多目标函数的 Lexicographic 规划, 利用非线性轨迹优化问题稀疏性的微分动态规划 (DDP), 甚至还有将这两种方法相结合的 [79]。这其中涉及到包含动力学模型 [80,81,82], 仿真 [83], 状态估计 [84], 控制器设计 [85] 的灵活高效开源软件的发展。

开源软件, 以及包含 3D 打印零件, 简化的电路跟执行器的开源硬件 [86,87], 可以促进完善、鲁棒、经过大量测试的解决方案的复现、传播和平民化, 同时有利于快速迭代和创新, 并且使得这些现有实现方法可以扩展和改进 (表 1 列出了一部分)。

腿足运控控制的现有文献大多数都只用了状态反馈, 但有意思的是由于质心是虚拟点, 并且和环境的接触是很难检测和测量的, 所以质心的位置和速度是不能直接测量得到的。因此状态估计是另一个关键的部分, 但这部分被探索的少得惊人 [84,2,88,89,90,91,92]。对状态估计和反馈控制的依赖使得现有的腿足机器人极度依赖昂贵、精细的硬件带来的准确信息。基于传感器的控制可能是另一种方案 [93], 很大程度上还尚待探索。鲁棒控制也是一种可能的方案 [94,95,96,97], 同样尚待研究。腿足机器人的鲁棒控制分析得出的最新结论是, 正如在人形 [96] 和四足机器人 [59] 上已经验证过的那样,