

91. Dijkstraído

El exioma de l'acció

El Miquel pot estar tranquil, el que no podem assegurar es si en el camí que recorrerà podrà menjar les galetes que ofereix el Rourà als entrenaments. El que hauria de preocupar més al Miquel es el fet que el seu mentorat li faci la competència a la Marató.

Demostració. Definim el graf G amb vertex els quadrats negres i arestes els parells de vertex que estan a la mateixa fila o columna de forma consecutiva. Si aquest graf té un cicle aleshores el Miquel tindrà una casella negra (node) desde on sortir i un cicle per a tornar a aquesta casella inicial, ja que les arestes marquen desde quins quadrats a quins pot anar.

Veiem primer que aquest graf tindrà com a mínim $2n$ arestes. Contem les minimes arestes per files S i per simetria tindrem les de les columnes. Sigui $a_i = \# \text{caselles negres a la fila } i$, aleshores es compleix que

$$\sum_{i=1}^n a_i = 2n \implies S \geq \sum_{i=1}^n a_i - 1 = 2n - n = n$$

Per tant el graf com a mínim contindrà $2n$ arestes. Finalment veiem que un graf de $2n$ vertex i $2n$ ha de tenir un cicle. El graf maximalment acíclic de $2n$ arestes es per definició un arbre, que també per definició té $2n - 1$ arestes. Per tant, al ser maximalment acíclic, qualsevol aresta que li afegim crearia un cicle i per tant el graf ha de tenir algun cicle.

□