

## 273. I la numeració?

### Elxioma de l'acció

*Demostració.* Considerem la següent successió:

$$a_0 = 1 \quad a_n = 3a_{n-1} - 1$$

Per a tenir una idea mental, els primers termes són 1, 2, 5, 14, 41, ....

Sigui  $A$  el conjunt de tots els elements de la successió  $(a)_i$ . Definim una altra successió de la següent forma:  $b_1 = 1$ , si  $i = 2^n$  per algun  $n > 0$  aleshores  $b_i = 2b_{i-1} + 1 = 3^n$ . Altrament sigui  $b_j = b_{2^n}$  els nombres es definiran de forma recursiva. Hi ha  $2^{n-1}$  nombres entre  $j$  i el següent  $i = 2^n - 1$  per algun  $n > 0$ , la distància entre els dos elements del mig serà  $a_{2^n-2}$ . La distància entre els elements del mig de la subdivisió (es simètric) serà  $a_{2^n-3}$  i així fins a posar-ho tot en funció de  $b_j$ , que es pot fer al ser el nombre de nombres dins una potencia de dos. Per a tenir una idea mental la diferència entre els elements de la successió consecutius desde la posició 16 fins a la 31 són 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 14, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, algo semblant al **problema del jutge** que tots recordem de info 1.

El conjunt de nombres que busquem són els primers 2021 elements de la successió  $(b)_i$ .

Definim un bloc  $B_i$  com els elements de la seqüència entre les posicions  $2^i$  i  $2^{i+1} - 1$ . Veiem que dins d'aquest bloc no hi ha 3 elements en progressió aritmètica. Per veure això només cal veure que no existeixen 2 subconjunts consecutius del conjunt de les diferències entre els nombres del bloc amb sumes iguals.

Veiem primer que no poden contenir els mateixos nombres. Abans de repetir cap nombre la seqüència de diferències n'introdueix un de més gran per construcció simètrica respecte cada element, per tant no es pot dividir en dos subconjunts iguals. Veiem ara que un dels subconjunts té un element que suma més que tots els del altre subconjunt. Per construcció, cada element que apareix per primer cop és la suma dels anteriors +1 i també és la suma

dels que te a la dreta fins al següent nombre més gran a ell. Considerem dos subconjunts consecutius, el element més gran es únic i nomes esta en un dels subconjunts. Aquest element serà més gran que la suma de tot l'altre subconjunt ja que es més gran que la suma fins abans del següent nombre més gran a ell (que no esta dins del subconjunt ja que ell es el més gran). Per tant hem vist que dins d'un subconjunt no existeixen 3 elements en progressió aritmetica.

Veiem ara que els primers 2021 elements son tots mes petits que 100000. Les posicions  $b_{2^n} = 3^n$  i per tant  $b_{2^{11}=2048} = 3^{11} = 177147 \implies b_{2^{11}-1} = \frac{177147-1}{2} < 100000$ .

Veiem que no formen progressió aritmetica entre elements de diferents blocs. Sigui  $A_n$  el element més gran del bloc  $B_n$ , tenim que  $A_n = 3A_{n-1} + 1$  ja que  $A_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$  i  $A_{n-1} = \frac{3^n-1}{2}$ . Aleshores

$$\frac{A_n + (A_{n-1} - 1)}{2} = \frac{(A_n - 1) + A_{n-1} - 1}{2} = 2A_{n-1} - 1$$

Per tant qualsevol suma d'un element del nou bloc amb un dels anteriors té la meitat de la suma en el buit entre  $A_{n-1}$  i  $2A_{n-1}$  i per tant no formen progressió aritmètica.

□