Entregable EDOS

Daniel Vilardell

1 Exercici 4

d) L'enunciat ens dona el seguent problema de valors inicials

$$y'' - 2y' + y = te^t;\; y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Usant les propietats de la transformada de Laplace que ens diuen que

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Trovem la tranformada de la equació donada i veiem que

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) - s + 2 = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{(s-2)(s-1)^2 + 1}{(s-1)^4} = \frac{s}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4}$$

Si descomponem $\frac{s}{(s-1)^2}$ en fraccions simples tenim el seguent

$$Y(s) = \left(\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2}\right) - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4}$$

I calculem la transformada inversa del resultat trobat que serà la funció en questió

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = y(t) = e^t - te^t + \frac{t^3e^t}{3!}$$

$$y(t) = e^t\left(\frac{t^3}{6} - t + 1\right)$$

2 Exercici 11

a) L'enunciat ens dona un altre problema de valors inicials que diu el seguent

$$x'' + 4x = 2\delta(t - \pi);\ x(0) = 1, x'(0) = 0$$

Usant la mateixa propietat que en l'exercici 4 fet anteriorment tenim que

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 4X(s) = 2e^{-\pi s}$$

$$X(s) = \frac{2e^{-\pi s} + s}{s^2 + 4} = 2e^{-\pi s}\frac{2}{s^2 + 4} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

Tenint en conte que $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a)u(t - a)$ i coneixent les transformades conegudes de sin i de cos tenim que

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = x(t) = sin(2(t - \pi))u(t - \pi) + cos(2t)$$

Com que el temps en tal exercici no pot ser negatiu el resultat dona el següent

$$x(t) = (sin(2t)u(t - \pi) + cos(2t))u(t)$$

$$(1 \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k * 2^n + 1})!$$