P109 Rosant el pal

Elexioma de l'acció

Demostració. Veiem primer el cas de $\mathbb{R}^2$. El minim nombre de rectes que es necessiten al començar per a poder cubrir tot $\mathbb{R}^2$ es 4. Si tinguessim punts suficients com per a traçar nomes 3 rectes aleshores cualsevols grups de 4 punts pertenyents a les rectes en tindrà com a minim 2 pertenyents a una recta ja existent, i per tant la unica recta que es podria formar amb aquests punts es la que ja existeix. La forma optima de crear 4 rectes a partir de punts usa nomes 10 punts, ja que com ha minim ha de usar $4 \cdot 4 - \binom{4}{2}$ punts. La construcció es fa a base de posar al pla 4 rectes encreuades dos a dos sense que intersequin 3 al mateix punt i posar els punts a les 6 interseccions, també cal posar un punt extra a cada recta per a que puguin ser creades ja que d'interseccions una recta en te nomes 3 i es necessiten 4 punts per a crearla.

Un cop tenim les 4 rectes, qualsevol punt podrà ser pintat per una recta que passa per el punt i no es paralela a cap de les originals, ja que per força les creuarà totes.

Un cop tenim el cas de $\mathbb{R}^2$ veiem que el cas de $\mathbb{R}^3$ es molt semblant. El nombre mínim de plans que es necessiten al començar per a cubrir tot $\mathbb{R}^3$ es 4. Si tinguessim punts suficients per a traçar nomes 3 plans aleshores per la mateixa rao del cas de $\mathbb{R}^2$ no es podria pintar cap punt que no estigues contingut dins dels 3 plans. El minim nombre de punts per a fer tres plans usa una construcció que aprofita la de $\mathbb{R}^2$.

Justifiquem primer que amb si es poden crear 4 plans no paralels i que no sintersequen 2 a 2 en una mateixa recta aleshores això sha de fer en com a minim 20 punts. El primer plà per la justificació anterior sha de fer en com a minim 10 punts. El segon plà podem aprofitar 4 punts del primer pero si usessim més hauria de estar inclos dins del pla i seria paralel, per tant en faltarien 6 per a completar els 10 necessaris. El tercer plà podem usar 4 del primer i 4 del segon, pero un d'ells estara a la intersecció aixi que haurem de completar amb 3. Finalment el ultim podem usar 4 del primer 4 del segon i 4 del tercer, pero d'aquests 3 estaran en interseccions aixi que haurem d'afegir un. Per tant com a minim s'haurà de fer amb 20 punts. Es a dir que com a minim necessita $4 \cdot 10 punts - 2\binom{4}{3} - 2\binom{4}{2}$ punts

Veiem ara una construccio dels 4 plans amb 20 punts.

- Creem el primer pla amb 10 punts de la mateixa forma que a $\mathbb{R}^2$.

- El segon plà usem els 4 punts que s'han usat per a crear una recta original del primer pla i hi afegim 6 més, 3 que seran intersecció 2 a 2 de rectes que surten dels punts creats i no estaran continguts dins del primer plà i 3 mes per a poder definir la recta a partir dels 3 alineats.

- El tercer pla el podem crear a partir de una segona recta del primer plà i tres punts alineats a un dels punts de la recta agafada pertanyents al 2n pla, que existeixen per construcció. Ara simplement considerant un dels punts del pla 1 que no pertanyi a 2, aixecarem amb 2 nous punts una recta paral·lela a una de les noves creades el pla 2. Amb un tercer punt unirem tres punts consecutius per a crear la recta necessaria per a crear el pla.

- El quart plà usarà uns altres 4 punts del primer plà (diferents als usats pel 2n plà) i també usarà 3 punts mes del 2n pla que estiguin alineats (diferents a tots 4 que hem agafat). A partir d'aquests 7 punts, nomes afegint 3 ja podrem formar un pla que no serà paral·lel a cap dels 2. Finalment afegint un sol punt podrem crear un quart plà, ja que podem tornar a agafar 4 del primer pla, de les cuals 2 han de formar part del pla 2 i pla 3 respectivament. Agafem tambe les 3 que estan al pla 2 i al pla 3, per tant tenim 9 punts. Amb un mes ja podem formar pla, afegint un ultim punt a tres punts consecutirs d'aquests 9 que es poden conseguir amb la construcció pertinent.

Per tant amb nomes 20 punts, es podrà arribar a qualsevol punt de $\mathbb{R}^3$ si seguim la mateixa estrategia que amb $\mathbb{R}^2$, es a dir, a partir del punt traçar una recta no paralela a cap dels plans.

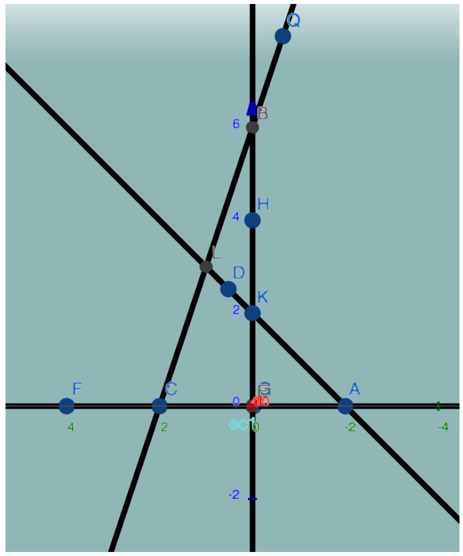

Figura 1: Primer pla

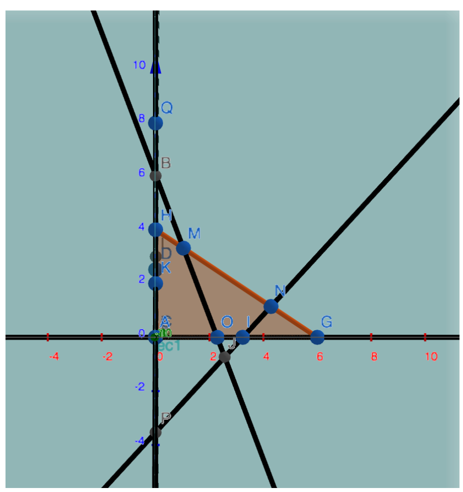

Figura 2: Segon pla

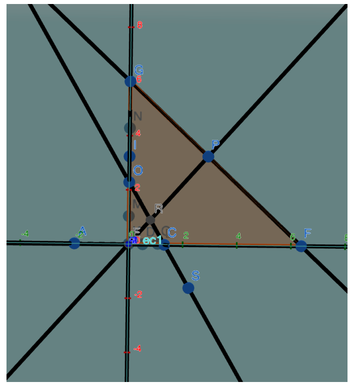

Figura 3: Tercer pla

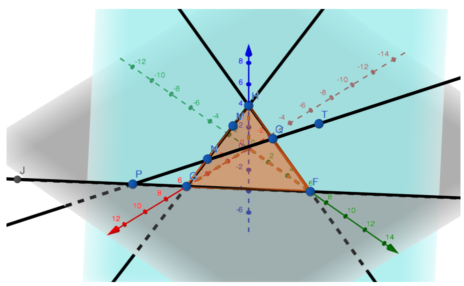

Figura 4: Quart pla

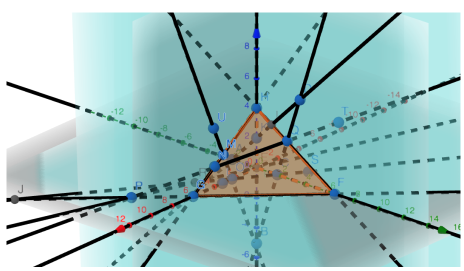

Figura 5: Resultat final

□