31. A l'aventura

Elexioma de l'acció

En aquest cas li haurem de donar gracies a la ma dreta que ens atura de construir un mon sota fonaments enginyerils. Aquí li portem un paio a l'Enric per a que se senti satisfet.

Demostració. Definim la funció contraexemple $f(x,y)$ de la següent forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad y \geq x^2 \qquad y \leq 3x^2 \\ \\ y - 3x^2 & si \quad 2x^2 \leq y \leq 3x^2 \\ \\ x^2 - y & si \quad x^2 \leq y \leq 2x^2 \end{cases}$$

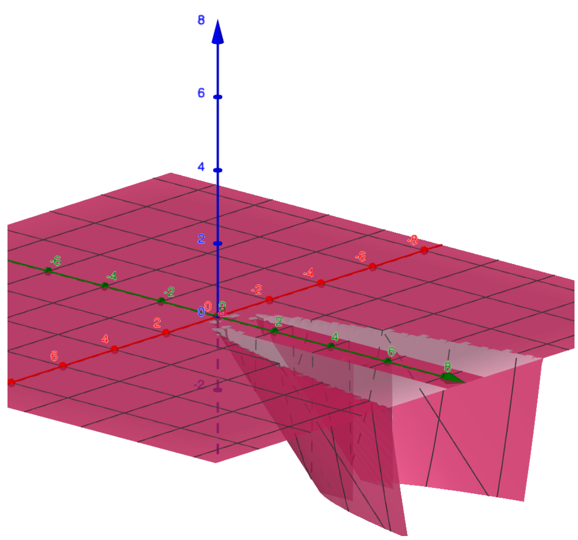

Figura 1: Grafica de la funció en cuestió

Aquesta funció es continua ja que pel lema d'enganxament, cada funció es continua al seu tros i a la intersecció coincideixen:

$$f(x,2x^2) = 2x^2 - 3x^2 = x^2 - 2x^2 = -x^2 \qquad f(x,x^2) = x^2 - x^2 = 0$$

$$f(x,3x^2) = 3x^2 - 3x^2 = 0$$

Veiem primer que el punt $(0,0)$ no es mínim. Considerem la restricció de la funció a la paravola $y = 2x^2$. Aleshores tenim que

$$f|_{y=x^2} = -2x^2 \implies (f|_{y=x^2})' = -4x \implies (f|_{y=x^2})'' = -4$$

Per tant restringint la funció a aquest cami veiem que te un maxim al origen.

Veiem ara que la funció restringida a cualsevol recta te un minim local al origen. Cualsevol recta que passi per l'origen a part de la recta $y = 0$ i $x = 0$ tallarà la parabola $3x^2$ 2 cops, un d'ells al origen i l'altre al punt $(k, 3k^2)$ suposant que la recta es $kx = y$.

Per tant si considerem la bola $B_{\frac{min(k,3k^2)}{2}}(0,0)$ la recta $y = kx$ només tallarà amb la paràbola al origen i a mes es cumplirà per tot punt de la recta $y \geq 3x^2 \implies f(x,kx) = 0$ i per tant la restricció de la funció a la recta te un minim local al origen, al ser aquesta constant dins de la bola. Els casos de recta $y = 0$ i $x = 0$ son trivials.

$\square$