

Entregable Numèrica

Daniel Vilardell

Prop. *La inversa de una matriu triangular A es una matriu triangular.*

Demostració. La demostració es farà per matrius triangulars inferiors, ja que si A i A^{-1} triangular inferior $\implies AA^{-1} = I \implies (AA^{-1})^T = I^T = I \implies (A^{-1})^T A^T = I$ i en aquest cas $B = A^T$ i $B^{-1} = (A^{-1})^T$ serien matrius triangulars superiors.

Per tal de fer la demostració aplicarem operacions elementals a la matriu A per tal de transformar-la en la identitat. Com be sabem de Algebra Lineal, aplicar operacions elementals a una matriu es el mateix que multiplicar per la matriu elemental E equivalent.

En primer lloc cal mencionar que totes les operacions elementals que usarem seran les de restar files i files j amb $j < i$ ja que ens interessa eliminar tots els nombres de la part inferior de la matriu A . La matriu elemental que ens permet eliminar un nombre a_{ij} es la identitat amb el coeficient $m = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ a la posició i, j de la matriu.

Sigui E_i la matriu elemental de la i-èsima operació elemental que fem per a transformar A amb la identitat. Aleshores:

$$E_m \cdots E_1 \cdot A = I$$

Per la raó comentada abans totes les matrius E_i son triangulars inferiors ja que A només té elements a la part inferior de la matriu i per tant E_i també. També podem afirmar que $A^{-1} = E_m \cdots E_1$ i que com el producte de matrius triangulars inferiors es una matriu triangular inferior, A^{-1} es triangular inferior. \square