Esercitazione 1

$\underline{x}, \underline{v}$ $\qquad M_{TOT} = N m_*$

Profilo di Plummer $\rho(r) = \dfrac{\rho_0}{[1+(\frac{r}{r_0})^2]^{5/2}}$

$m(<r) = \int \rho(r) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

Dovremo campionare la distribuzione radiale usando il rejection method o la distribuz. di prob cumulata

RADIAL: r $\quad \rho(r) r^2$
θ : θ $\quad \sin\theta$ $\longrightarrow$ nel caso del sin la dist cumulata minore di un certo θ è $F(<\theta) = \int_0^\theta \sin\theta' \, d\theta' = -\cos\theta' \Big|_0^\theta =$
φ : φ $\quad 1$
$= -\cos\theta + 1$

Se vogliamo che sia una cdf dobbiamo normalizzarla

$\boxed{F(<\theta) = \dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

A questo punto genero un numero random unif tra 0 e 1 che chiamo y, faccio $y = F(<\theta)$ e ricavo θ

Per le distribuzioni sferiche questo è il metodo più usato, perché più efficace del monte carlo (rejection method)

inverto $\quad P = \dfrac{1-\cos\theta}{2} \longrightarrow \cos\theta = 1-2p \qquad \theta = \arccos(1-2p)$

La parte più difficile del problema sono le velocità.

Per queste dobbiamo avere la distribuz. delle velocità, che sono legate a quella complessiva nello spazio 6D

$f(\underline{x}, \underline{v})$ avendo già campionato le posizioni, $\underline{x}$ la conosciamo, ci resta solo $\underline{v}$

Nel caso di plummer la distribuzione è semplice e dipende solo dall'energia $f(\varepsilon) = A(-\varepsilon)^{7/2}$

$\dfrac{dP}{d\underline{x}\, d\underline{v}} \longrightarrow f(\varepsilon)$ da cui $dP = f(\varepsilon)\, d\underline{x}\, d\underline{v} = f(\varepsilon) v^2 \sin\theta \, dv \, d\theta \, d\varphi \, d\underline{x}$

$\longrightarrow \dfrac{dP}{d\underline{x}} = f(\varepsilon) v^2 \sin\theta \, dv \, d\theta \, d\varphi \qquad \varepsilon = \frac{1}{2} m_* v^2 + m_* \varphi$

Quindi dato un potenziale, affinché la particella sia legata al sistema deve avere velocità $v \in [0; -\sqrt{2\varphi}]$

Attenzione che sebbene abbiamo usato lo stesso nome per gli angoli della velocità, essi sono diversi dagli angoli della posizione, altrimenti il moto sarebbe unicamente radiale.

$$\tilde{v} = v(E)$$

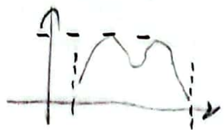
$$F(<E) = \int_0 f(E)\, 2\left[\frac{E}{m_*} - \varphi\right] dv$$

Dobbiamo risolvere numericamente questo integrale, campionare e invertire

questa è la parte più difficile per generare le condizioni iniziali, cioè una condiz di equilibrio, che rispetti la distribuz e che sia isotropa

campionamento dei raggi e poi delle velocità,

Il campionamento della velocità lo posso fare anche col rejection method



Alla fine ottenute le coord sferiche convertiamo nelle coord cartesiane e abbiamo le nostre coord 6D

$$M(r) = \int \rho(r)\, r^2\, dr$$

Devo ottenere $x(y)$

$$y = \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} \rightarrow y^2 = \frac{x^6}{(1+x^2)^3} \rightarrow y^2 = \frac{x^6}{1+3x^2+3x^4+3x^6}$$

$$x^6(y^2-1) + 3x^4y^2 + 3x^2y^2 + y^2 = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac =$$

$$(x^6 + 3x^2)y^2 + (3x^4 + 3x^2)y^2 \quad -x^6$$

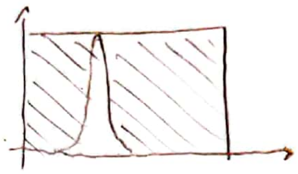
$$y^{2/3} = \frac{x^2}{(1+x^2)} \rightarrow y^{2/3} + y^{2/3}x^2 = x^2 \qquad y^{2/3} = x^2(1-y^{2/3})$$

$$x = \frac{y^{1/3}}{\sqrt{1-y^{2/3}}}$$

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

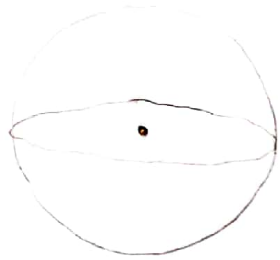
(56) Esercitazione 2

09/04/24



Qui ad un certo pto bisognerà fare una approx e decidere dove tagliare il dominio di esplorazione

Qui non c'è bisogno



Rebound
↳ LF, RK, –
DIR SUM, TREE

Numba →

Scython →

$v_0 - c_s,\ v_0,\ v_0 + c_s$

Introduciamo ora un concetto fondamentale, che sono gli SHOCKS

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v}) = 0$$ cons. forte. Per gli shock non vale più

Tuttavia se la integriamo otteniamo

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v}) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + F_M \cdot \partial\Omega = 0$$ cons debole

perché ammette soluzioni con discontinuità e continua a valere