

(22) Il passo deve essere comunque più grande di quanto la partecipazione di scorrere (perché ad ogni passo la partecipazione deve far una accelerazione minore, per una data maggiore distanza).

anche l'ordine del VON o ODE conta

DINAMICA DI SISTEMI GRAVITANTI

Un motivo per studiarla è la costruzione dei modelli in equilibrio

Tanti progressi sono stati fatti numericamente e questo ha motivato il loro studio esempio: orbite Kepleriane

è una delle poche orbite chiuse. I parametri caratteristici sono

$$\tau_{\text{orb}} \rightarrow [0; 2\pi]$$

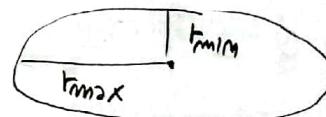
$$\tau_{\text{RAO}} \rightarrow [r_{\min}, r_{\max}]$$

$$\tau_{\text{RAO,T}} = \tau_{\text{orb}}$$

un'orbita di massa attorno a un altro corpo caratteristica
Non ce l'avrà anche se ci mettiamo in GR

L'unico altro caso di orbita chiusa in dinamica newtoniana è il potenziale armomorico

$$\tau_{\text{RAO,T}} = \frac{1}{2} \tau_{\text{orb}}$$



In tutti gli altri casi le orbite non si chiudono e bisogna capire l'errore numerico, tenendo conto di tutti i contributi

N corpi

$$2 \rightarrow \text{SOL}$$

$$3 \rightarrow \text{No}$$

—

Quando il sistema non è gerarchico la soluzione non basta di per sé

Oltre un certo numero non interessa più la dimensione del singolo corpo e la trattazione di semplicità perché il sistema inizia a comportarsi come un fluido

$N_{\text{MW}} \approx 10^9$ stelle

Introduciamo una quantità importante: τ_{RLX} tempo di rilassamento

per la più lenta ed maggiore dell'orbita dell'universo

Nell'approssimazione fluida si può definire un campo di densità $\rho(x)$ da cui un campo di potenziale $\phi(x)$

$$\delta F_{ij} = G \delta m(x') \frac{x' - x}{|x' - x|^3}$$

come in EM

$$\text{(1)} \quad F(x) = G \int_V \frac{\rho(x') (x' - x)}{|x' - x|^3} d^3 x'$$

Avere la forza mi calcola il potenziale

$$\text{II) } \phi(x) = -G \int \frac{\rho(x') dx'}{|x-x'|} \quad \text{perche'} \quad \nabla \phi = -\frac{F}{m}$$

(23)

$$\text{III) In simboli se metto assieme le due ore si ha analogamente} \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

I così poniamo in cui le due ore sono equivalenti a

A) simm. sferico
Teo GAUSS

B) simm. assiale

↓

I teo di Newton → all'interno di una shell la forza e nulla

II teo di Newton → all'esterno di una shell la forza e' la stessa di una massa al centro.

(Newton li deriva' non conoscendo il teo di Gauss)

$$\phi(r) = -4\pi G \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'}_{\text{massa enclosed}} + \underbrace{\int_r^\infty \rho(r') \frac{r'^2}{r'} dr'}_{\text{massa esterna}} \right]$$

→ mu forza
→ potenziale cost

Faciamo un esempio con una sfera omogenea troncata

$$\begin{cases} \rho = \text{cost} & r \leq R \\ \rho = 0 & r > R \end{cases} \quad M(r) = \frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3$$

No ho uno modo
infatti e' un problema
per la din. newtoniana,
non per la GR

$$v_c = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_0 r^3}$$

$$\tau_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0}} \quad \tau_{\text{dyn}} = ?$$

$$\tau_{\text{dyn}} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} r \quad \text{questo e' un oscillatore} \\ \text{armonico con}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{3}} \quad \tau_{\text{dyn}} = \sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho_0}} \rightarrow \tau_{\text{dyn}} = \frac{\tau_{\text{orb}}}{4}$$

Calcoliamo ora il potenziale

$$\begin{aligned} \phi(r) &= -4\pi G \rho_0 \frac{1}{r} \int_0^R r'^2 dr' = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \frac{R^3}{r} = -\frac{GM(r)}{r} \quad r > R \\ &= -4\pi G \rho_0 \left[\frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R r'^2 dr' \right] \quad r \leq R \\ &= -4\pi G \rho_0 \left[\frac{r^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] = -2\pi G \rho_0 \left[R^2 - \frac{r^2}{3} \right] \end{aligned}$$

Così dal potenziale posso calcolare l'eq di cassini per troncare un integrale, come ad esempio le parabole

L'assunzione sufficiente e' che la particella non influisce il potenziale sottostante

(29) Un altro tempo caratteristico fondamentale è il

TEMPO DI COLLISIO

Assumiamo che le velocità iniziali di ogni pto della sfera sono $v_i(t=0) = 0$ periodo $\tau = -\frac{GM(r_0)}{r^2}$ altr. quanto si dice due oscillare la distanza $r \rightarrow r_0$ fa semplicemente la soluzione

$$\ddot{r}(t=2) = 2\ddot{r}(t=1)$$

Ogni guscio si muove dello stesso periodo, periodo di circolazione e' auto-similare

$$F = -\frac{GM(r_0)}{r^2} \quad \text{quanti le stelle che orbitano verso il centro gravitario}$$

la stessa massa all'interno

⊗

$$\frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dt} = -\frac{GM(r_0)}{r^2} F$$

$$\frac{1}{2} [r^2(t) - r^2(0)] = \frac{GM(r_0)}{r} \Big|_{r_0}^{r(t)} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = GM(r_0) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2GM(r_0)} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} \quad \text{il segm dipende se e' un'espansione o un collasso. Noi sceglieremo -}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = -\sqrt{2GM(r_0)} dt \rightarrow \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} t$$

$$t_{coll} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} = \frac{2\pi N}{\sqrt{2}}$$

Ammesso di questo tipo vanno fatte prima di qualsiasi simulazione

In realtà il collasso non procede così fino ad un pto. Si simulano numeriche che tengono conto delle singole particelle hanno scoperto la VIOLENT RELAXATION

Per passare da una distribuzione continua di densità ad una discreta (le stelle) usiamo tecniche Monte Carlo

Quanti pt compiono? Per lo MW $N_{pts} = 10^6$ ma noi dire che se ogni passo dovrai effettuare $10'' \times 10''$ intersezioni

Quanti sotto campionamento, perciò in modo che il potenziale vero sia logaritmicamente approssimato

$$\begin{aligned} N_{pts} < N \\ \text{"traiamo"} \end{aligned} \quad M_{pt} = \frac{\log N}{N_{pts}}$$

le quantità che vedo, ad esempio sono ρ e P (25)
A seconda che io sto in dinamica Newton o Rel la relazione tra
 ρ e P cambia, bisogna stare attenti.

Portiamo delle x , che sono più facili. Usiamo Monte Carlo per
definire la prob di trovare un pto ad un dato x

$$P(x) \rightarrow P(x < X) = \int_{x_{\min}}^X P(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{come } p(x) \text{ posso avere la densità} \\ \text{della m. mass. totale} \end{array}$$

In questo modo $p(x)$ è una buona probabilità

$$\int p(r) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \begin{array}{l} \text{posso compiere tramite un rejection method} \\ \text{le singole distrib di prob } p(r), \sin \theta, d\phi \end{array}$$

Oppure più semplicemente posso compiere $P(x < X)$ che è distribuita uniformemente e da questa posso ricavare X

$$P() = \frac{4}{3} \frac{\pi}{M} \rho r^3 \quad \text{che era infatti } P() = \frac{4\pi}{n} \int_0^r \rho r'^2 dr' \\ = \frac{r^3}{R^3} \quad \text{che è facilmente invertibile}$$

Quindi estraggo un valore casuale tra 0 e 1 e ho $r = \tilde{r} R$

Allo stesso modo avremmo fatto per

$$\sin \theta d\theta \rightarrow \theta = \arccos(1 - 2\tilde{r})$$

e per ϕ , semplicemente estraggo il numero casuale e lo moltiplico per 2π

La violent relaxation è verificata osservabilmente, infatti 14/03/24
i buchi neri non si formano dal collasso di ammassi stellari

Per costruire un ammasso o una galassia, non ci bisogna le particelle delle
Stelle, abbiamo bisogno anche delle loro realtà.

Conoscendo $\rho(x)$

$$P(x) \rightarrow \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad \text{e da due } \nabla \phi = -\frac{\vec{E}}{m} \rightarrow \text{accel} \quad \begin{array}{l} \text{DINAMICA} \\ \text{ORBITALE} \end{array}$$

Lo descrivo mediante la funzione di distanza $f(x, v, t)$.

L'uso di questa funz può essere detto un po' all'epoche Boltzmann
All'ep $\frac{df}{dt} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial f}{\partial v} a = 0$ sarà alla base anche dei fluidi

Risolvere quest'eq è il problemone (il cui come due si mette in gioco,
tutto dipende da tutto) In molti casi però è superficiale

ci sono così in cui le coordinate (ρ, ϕ) danno semplici (analitiche)

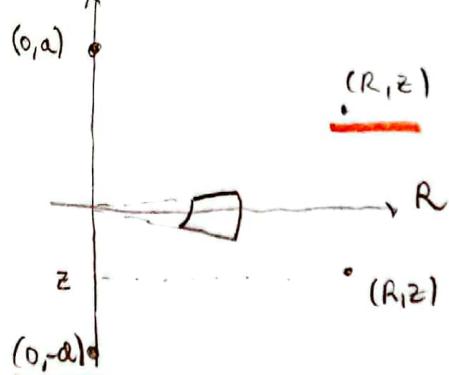
Per esempio una galassia a disco, in cordi cilindriche

2D Plummer - Kuzmin

$$\phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a+|z|)^2}}$$

sotto il piano
 $\rho(R, z < 0) = 0$

sopra il piano
 $\rho(R, z > 0) = 0$



la massa sarà gravata di più sul piano, in $z=0$
come è distribuito ora il tuo disco

$$4\pi G \int \rho dV = \int_S \nabla \phi \cdot d\hat{s}$$

$$4\pi G \int \Sigma ds = \int \frac{d\phi}{dz} \cdot \hat{m} ds = \int ds \frac{d\phi}{dz} \quad \text{perché la sottraendo due volte}$$

$$2 \int ds \frac{GM(a+|z|)}{[R^2 + (a+|z|)^2]^{3/2}} \Big|_{z \rightarrow 0} \quad (\times \operatorname{sgn}(z)) ?$$

perché la massa
non può essere fuori
dal piano

$$4\pi G \Sigma = \frac{eG Ma}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad \Sigma = \frac{M}{2\pi} \left(\frac{a}{R^2 + a^2} \right)^{3/2}$$

3D Disc : Exp

$$\Sigma = \Sigma_0 e^{-R/R_0}$$

$$\rho(R, z) = \rho_0 e^{-R/R_0} \rho(z) \quad \begin{cases} e^{-\frac{|z|}{2H}} \\ \text{più appuntito} \\ \operatorname{sech}\left(\frac{|z|}{H}\right) \\ \text{più sfondato} \end{cases}$$

questo modello descrive molto meglio la densità delle galassie, il problema è che il potenziale non è analitico

3D spherical Plummer : molto usato per descrivere ammassi galattici

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{[(\frac{r}{a})^2 + 1]^{5/2}} \quad \text{forma simile a quella di prima ma con } \frac{5}{2}$$

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r \cdot [1 + r/a]^2}$$

ci sono altri profili ancora in cui si hanno densità e potenziali
assimilabili, si tratta in letteratura.

Profili di DEHNEN

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^{\alpha}(r+a)^{\beta}}$$
 i potenziali però hanno espansioni molto lunghe
(Tori di doppio di Lupi + pag di conti)

Sono molto usati per i bulge delle galassie

Tutti questi a meno che $\alpha=0$ nel centro dirigono.

Di lì densità abbiamo compiuto le sostituzioni. Ora potenziale (e rebatti)

$$f(x, v, t) \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + m\phi$$

(Per trovare la densità di rebatti dobbiamo trovare la rebatta)

Teo di Jeans

$$\frac{df}{dt}(I_1, I_2, -) = 0$$
 ciò corrisponde a dire che gli integrali del moto
sono soluzioni dell'eq di Boltzmann

Gli integrali del moto sono E , $|v|$, I_2 (se sistema circolare)

Sai passo determinare le proprietà della distribuzione di rebatti

$$\overline{v_r^2} = \frac{1}{\rho} \int \rho d^3v \overline{v_r^2} f(I)$$

$$\int f(x, v, t) dv$$

Quindi lo procedo come nello campionamento per ottenere le sostituzioni, da questo
corrisce ϕ che mi serve per legare v all'energia

A questo punto uso la funzione di Boltzmann

Integrale di Eddington

$$\rho = \int f(x, v, t) d^3v$$

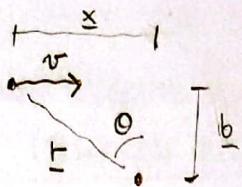
per profili semplici si può fare, per più complessi non si ha che a calcolare
l'integrale inverso.

In tutto ciò abbiamo fatto $\phi(r) \rightarrow \dot{\phi} = -\nabla \phi$ assumendo appunto che
 ϕ non dipenda dal tempo. Come lo scrivere del tempo questa assunzione
smette di valere. Vediamo dopo quanto tempo accade ciò.

(28)

RILATX A 2 CORPI

Al momento seguiamo l'orbita di una singola stella



In un sistema con tante stelle la maggior parte delle interazioni sono deboli (stelle molto distanti)

$$F_{\parallel} = \frac{Gm^2}{(x^2+b^2)} \sin\theta$$

dimentichiamoci di F_{\parallel} che solo trascurabile

$$F_{\perp} = \frac{Gm^2}{(b^2+x^2)} \cos\theta = \frac{Gm^2 b}{(b^2+x^2)^{3/2}}$$

Dato che le stelle sono comunque distanti
approssimiamo la massa della stella in una volta

$$x = vt$$

$$= \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2}$$

$$|\delta v_{\perp}| = \frac{1}{m} \int F_{\perp} dt = \frac{Gm}{b^2} \int \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} dt = \left(\frac{vt}{b} = w \quad dt = \frac{b}{v} dw \right)$$

$$= \frac{Gm}{vb} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + w^2 \right]^{-3/2} dw \rightarrow |\delta v_{\perp}| = \frac{2Gm}{vb}$$

Se b è abbastanza grande l'approssimazione in cui la stella si muove in un piano fisso è valida, momento l'intero è fermo e la stessa la stessa in basso è da sì
muoversi

Se abbiamo tante stelle la variazione di velocità avrà in modo trascurabile
 $|\delta v_{\perp}|^2 \sim v^2$ in media le variazioni dovute alla

Dopo un bel tempo queste interazioni possono essere sommate in una certa area e la stella si è "rallentata"!

$$\# [b; b+db] = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db$$

$$|\delta v_{\perp}|_{\text{TOT}}^2 = |\delta v_{\perp}|^2 \frac{2N}{R^2} b db = \frac{4G^2 m^2}{v^2 b^2} \frac{2N}{R^2} b db$$

$$b_{\min} = \frac{2Gm}{v^2}$$

$b_{\max} \sim R$ dimensione del mio sistema

$$\Delta v_{\perp}^2 = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} |\delta v_{\perp}|_{\text{TOT}}^2 = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{8G^2 m^2}{v^2 R^2} N \frac{db}{b} = 8N \left(\frac{G^2 m^2}{v^2 R^2} \right) \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)$$

una differenza di 2 nel ln non è
grande, e poi a più interazioni avremo
 $\Delta v_{\perp} \sim v$ meno erroneamente

Scendo i colpi estremamente rari

Indicato $\ln(A)$ dove A è della
logaritmo carabinato

tipicamente $\ln(N) \sim 10-15$

(23)

avendo orbite fatiche più difficili, $\Delta r_2 \sim \text{?}$

$$\frac{v^2}{\Delta r_2^2} \sim \frac{n^2}{8N \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \ln(N)} \sim \frac{GMN}{R} \frac{R^2 n^2}{8N \ln(N) G^2 m^2} \sim \frac{\Delta m n^2 R^2 n^2}{R^2 8N \ln(N) G^2 m^2}$$

In un sistema di stelle lo stesso tipo

$$n^2 \sim \frac{GM}{R} \sim \frac{GMN}{R}$$
 lo sostituisce sopra

$$N = \frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \frac{R GMN}{2GmR}$$

$$\frac{v^2}{\Delta r_2^2} \sim \frac{N}{8\ln N} \sim \frac{N}{8\ln N}$$

orbite oltre il quale
la munzione e i significativa

Vediamo per il sistema sole

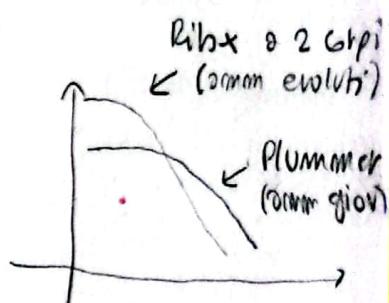
$$N = 20 \quad \#_{\text{orb}} < 1$$

(nella realtà $\#_{\text{orb}}$ è un po' più grande perché l'utile di questi corpi dominanti e poi ci sono molti altri... comunque deve tenere conto di tutto le interazioni)

diminuisce notevolmente

$$N \sim 10^6 \quad \#_{\text{orb}} \sim 2 \times 10^4 \quad T_{\text{rel}} \sim 2 \times 10^{9-10} \text{ yr} < \tau_{\text{age}}$$

I buchi neri non si creano per via delle bimarie



legge di oggi

Prendiamo ora un oggetto un po' più 'primitivo', tipo MILKY WAY

$$N \sim 10^{11} \quad \#_{\text{orb}} \sim 10^9 \quad T_{\text{rel}} \sim 10^{18} \text{ yr} \rightarrow \tau_{\text{age}} \rightarrow \text{potenziale stabile} \rightarrow$$

Anche cosmologicamente

(30)

Oggi vediamo come effettivamente evolvere il sistema di gravi nel t 10/03/24

$$\begin{matrix} \Sigma \\ \downarrow t \end{matrix}$$

not che la dinamica e' hamiltoniana, possiamo evolvere con un integratore simbolico, come il leapfrog method non

a

$$r_{1/2} = r_0 + a_0 \Delta t / 2$$

$$x_1 = x_0 + v_{1/2} \Delta t$$

$$v_1 = v_{1/2} + a_1 \Delta t / 2$$

Dopo aver spostato i punti calcoliamo le accelerazioni

$$a_i = \sum_j a_{ij}, \quad \text{se ho } N \text{ punti, ad ogni passo dovrà fare } N^2 \text{ calcoli}$$

stelle

 10^4

Gatti

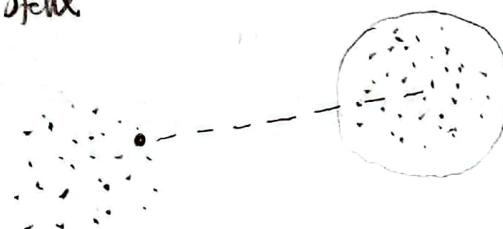
 10^8 10^6 10^{12} 10^{11} 10^{22}

e se volerai simboli più grossi, lec varrà ancora meno stelle, e non farà nemmeno spettare 10 anni prima di ottenere i risultati.

Così sono le dolitudini?

HIERARCHICAL MULTIPOLE METHOD (tree codes)

Vediamo da dove nasce questo nome. Partiamo da un esempio, 2 ammassi di stelle

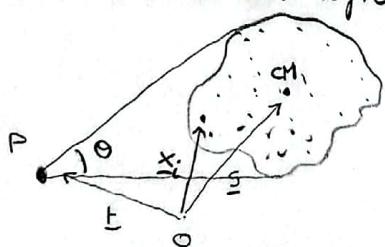


per semplicità assumiamo che siano sférici. Partiamo come teo di Gauss

Immagina che calcolare le singole interazioni, raggruppa le stelle in sfere rettangolari di spazio e calcola l'interazione globale

se le sfere hanno massa \rightarrow approssimazione
unica \rightarrow coppia per coppia { e' da qui che nasce la gerarchia

Consideriamo una regione non necessariamente sférica



Il singolo fatto della sfere che vede il punto P è
Il potenziale che sente P e'

$$\phi(r) = -G \sum_i \frac{m_i}{|r - r_i|} = -G \sum_i \frac{m_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|}$$

se $|x_i - z| \ll |r - z|$ quindi per descrivere l'ammasso come una sfere di massa simbolica centro in cm .

Questo centro si traduce in $\theta \ll \theta_c$.

Allora posso descrivere il mio potenziale espandendo in serie

$$\underline{r} = \underline{r}_c + \underline{\delta}$$

$$\frac{1}{|\Sigma + \Sigma - x_i|} = \frac{1}{|\Sigma|} - \underbrace{\frac{\Sigma (\Sigma - x_i)}{|\Sigma|^3}}_{\text{dipendenza}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\Sigma^T [3(\Sigma - x_i)(\Sigma - x_i)^T - (\Sigma - x_i)^2]}{|\Sigma|^3}}_{\text{quadruopo}} + \dots$$

i termini che contengono dipendenze dalla distinzione interno delle celle dell'ammasso, perciò sono colletti a priori e molti fai quanti sono già

$$M = \sum_i m_i$$

$$Q_{ij} = \sum_k m_k [\delta(\Sigma - x_k)_i (\Sigma - x_k)_j - \delta_{ij} (\Sigma - x_k)^2]$$

il termine si è cancellato per simmetria

$$\phi(\Sigma) = -G \left(\frac{M}{|\Sigma|} + \frac{1}{2} \frac{\Sigma^T Q \Sigma}{|\Sigma|^3} \right)$$

Cioè si può fare solo molto $0 < \Theta_c$

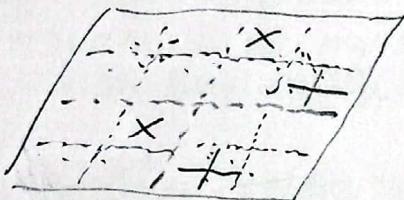
$$\Theta \approx \frac{|\Sigma - \Sigma|}{|\Sigma|} \approx \frac{t}{r} \ll 1$$

Quando viene Θ_c è arbitrario, chiaramente scegliendo piccoli più siamo di sicuro che l'algoritmo va bene.

Nel punto estremo partiti da due dimensioni, anche il secondo ammasso infante del primo.

RAGGRUPPAMENTI GERARCHICI

Consideriamo una divisione bidimensionale



Per raggruppare le stelle si divide il sistema geom in regioni uguali a se stesse: Tree

binary-tree (2D)

quad-tree (2D)

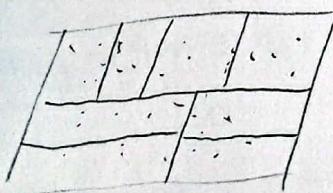
oct-tree (3D)

Continuiamo a dividere l'insieme in una simile regione otteniamo un certo numero piccolo di celle. All'estremo spazio.

In questo modo l'albero si "ramifica", si creano vari nodi. In questo modo possiamo collocare i termini dell'espressione dopo le stesse si mette.

Il raggruppamento gerarchico anche vede di più dove ci sono più punti.

Un'altermativa è il KD-TREE



A ogni passaggio ridiamo la dimensione a metà. In questo caso quindi dovremo tenere in memoria non solo i numeri dei multipli ma anche dove lo stiamo.

Per collocare il potenziale complessivo si utilizza il gridello TREE-MATRIX: si scava l'albero dalla base fino alle dimensioni.

(32)

→))

Ogni pto calcola un'approx leggermente diversa

per questo non si ha gran'bil men da elaborare ammortamento. Sono ipotezze imprecise tecniche per rendere facile.

FAST MULTI ROLE METHOD

Interpolo l'accelerazione che sente il moto, alla posizione della particella che riceverà storicamente i i moto e rende lo stesso ammortamento.

Questo metodo fess men e' facile da programmare.

Per ottimizzarli altri metodi, si riducono al collega preciso esatto nel caso

Percio'

+ dominano i verti floating point

- approssima le voci interazioni

COSTO

consistiamo i pti in una sfera

$$d = \left[\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{N} \right]^{1/3} \quad \text{distanza tipica tra i punti della sfera}$$

$$\text{numero di modi} = \int_d^R \frac{4\pi r^2 dr}{\Omega_c^3(r)} \quad \text{per combinazione } \Omega_c \Omega_c \text{ ma } \Omega_c \Omega_c \text{ quindi } \Omega_c \Omega_c$$

$$\sim \int_d^R \frac{4\pi r^2 dr}{\Omega_c^3 r^3} = \frac{4\pi}{\Omega_c^3} \ln\left(\frac{R}{d}\right) \propto \frac{\ln N}{\Omega_c^3}$$

$$\text{Costo} \propto N \times N_N \propto N \ln N$$

che confrontato a N^2 del collega esatto e' molti meno → acceleriamo di molto il collega

Tutto questo di solito quando non giallo! l'errore che commettiamo nel calcolo della forza? L'errore più grande si fa se ci formidiamo di moltiplicare

$$\Delta F_{\text{NODE}} \propto \frac{GM_{\text{NODE}}}{r^2} \Omega^2$$

I singoli errori sono indipendenti fra loro, e si combinano in quadrato

$$(\Delta F_{\text{TOT}})^2 \propto N_N (\Delta F_{\text{NODE}})^2 = N_N \left(\frac{GM_{\text{NODE}}}{r^2} \right)^2 \Omega^4 \propto \frac{\Omega^4}{N_N} \propto \Omega^7$$

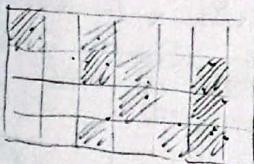
$$|\Delta F_{\text{TOT}}| \propto \Omega^{3.5}$$

Quando se riduce Δx ho un errore minore ma N_x più grande

Nel caso di sistemi non galattici qui elencate le forze non disturbano (galassie)
In quelli galattici si commette per tempi lunghi)

L'altra tecnica tipicamente utilizzata è la

PARTICLE MESH



Si passa ad una descrizione
del continuo

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

rimane nel caso di una forza sottraibile l'eq
di Poisson. In questo caso poniamo $\rho \propto \delta(x)$

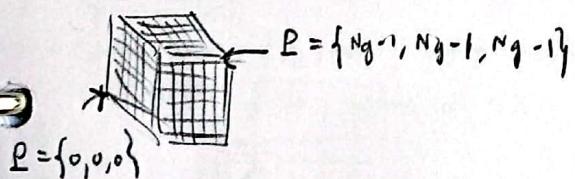
4 passi

- 1) $N \rightarrow \rho$
- 2) $\rho \rightarrow \text{poisson} \rightarrow \phi$
- 3) $\phi \rightarrow \nabla \phi$
- 4) $\text{ag} \rightarrow \text{ap}$
(inglese) (pti)

Ora dividiamo i passaggi uno per volta

2) MASS assignment

Insieme di punti m_i in $x_i < h$ vogliamo spostare in una griglia cubica
(caso dei semplici) con distanza tra nodi $h = \frac{L}{N_g} \rightarrow$



$$\rho = \{ \rho_x, \rho_y, \rho_z \}$$

cell center

$$c \in \rho_i \subseteq N_g$$

da non confondere
con partecella

Shape function

$$S(x) \quad S(x) dx = 1$$

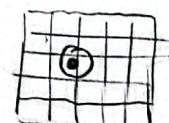
Ad ogni punto associa un volume

$$W_p(x_i) = \int_{x_p - \frac{h}{2}}^{x_p + \frac{h}{2}} S(x_i - x_p) dx$$

che sposta la massa della particella
uniformemente in tutte le celle intersecate \rightarrow la sua massa

$$\text{Top Hat function} \quad \Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{h}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Possiamo intendere Π e S il dominio
tramite la top hat function



$$W_p(x_i) = \int \Pi\left(\frac{x_i - x_p}{h}\right) S(x_i - x_p) dx$$

quello che è comune tra Π e S

$$\rho_p = \frac{1}{h^3} \sum_{i=1}^N m_i W_p(x_i)$$

e con questa espressione possiamo calcolare
la densità totale per tutte le celle.

Qui si conclude il passo 2)

ILLUSTRIS-TNG

EAGLE

HORISON-AGN
(NEW HORIZON)

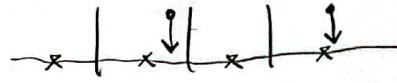
2-15 milioni di
ore di calcolo

39 Quanto sopra è abbastanza semplice, il punto principale è di ottenere la shape function
Lo vediamo dopo la pausa

- NEAREST GRID POINT (NGP)

$$S = 6$$

$$W_p(x_i) = \int \pi\left(\frac{x-x_p}{h}\right) \delta(x_i - x_p) dx = \pi\left(\frac{x_i - x_p}{h}\right)$$

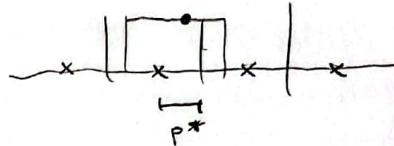


e' lo schema che usiamo ogni volta che facciamo il histogramma di una distribuzione

- CLOUD-IN-CELL (CIC)

$$S = \frac{1}{h^3} \pi\left(\frac{x}{h}\right)$$

$$W_p(x_i) = \int \pi\left(\frac{x-x_p}{h}\right) \frac{1}{h^3} \pi\left(\frac{x_i-x_p}{h}\right) dx$$



Come definiscono le coordinate in questo caso?

$$x_p = (p_x + \frac{1}{2})h \quad \text{indice intero (particolare)}$$

$$x_i \rightarrow p_i = \frac{x_i}{h} - \frac{1}{2} \quad \text{indice float (particolare)}$$

perciò $p = \lfloor p_i \rfloor$ la parte intera c'è la cella di se
+ e' la cella di dx

il residuo e' $p^* = p_i - p \in [0, 1]$. La risposta della cloud con la cella e' $h - hp^*$

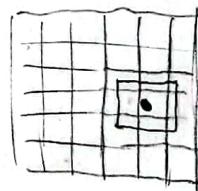
$$W_p = 1 - m^* \quad W_{p+1} = m^*$$

(la stessa cosa si può estendere in più dimensioni)

2D

$$x_i \quad y_i \\ \hookrightarrow q_i = \frac{x_i}{h} - \frac{1}{2}$$

$$q = \lfloor q_i \rfloor, \quad q^* = q_i - q$$



$$W_{p,q} = (1-p^*)(1-q^*)$$

$$W_{p+1,q} = p^*(1-q^*)$$

$$W_{p,q+1} = (1-p^*)q^*$$

$$W_{p+1,q+1} = p^*q^*$$

- TRIANGULAR-SHAPED CLOUD (TSC)

Come nel caso degli stencil per le PDE, anche qui se aumenta l'ordine di approssimazione aumenta

$$W_p(x_i) = \int \pi\left(\frac{x-x_p}{h}\right) \frac{1}{h^3} \pi\left(\frac{x_i-x_p}{h}\right) \frac{1}{h^3} \pi\left(\frac{x'-x_p}{h}\right) dx dx'$$



Se considerassimo di sommare un'effe combinazione di top level functions

Quale di questi è meglio usare? Dipende sempre dalla situazione

Osserviamo subito che se NGP ogni lista ha una particella allora una cella lo mossa si trasferisce tutta immediatamente. In questo caso la densità è discontinua $\rightarrow \phi$ non scorre

Sai com il TSC si fa per smooth periodo?

NGP (TSC, non diff)

CIC (com, non diff)

TSC (com, diff)

e progresso a ordini maggiori si hanno anche le densità superiori differenziabili

Quello visto da più è la CIC, perché la TSC ha lo stesso su più celle, quindi + operazioni e impiega il parallelismo, la comunicazione tra i vari processi può portare ad un costo maggiore

Quindi come si scelte non solo la simulazione giusta ma quella migliore per il problema affrontato.

Possiamo alla step 2). Dobbiamo calcolare il potenziale gravitazionale

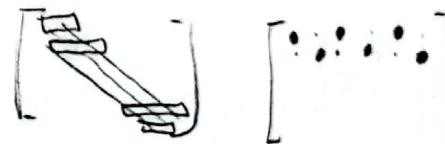
$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} = 4\pi G\rho_i$$

differenze centrali

Come ricordiamo, questa è la nostra tridimensionale, che può essere ottenuta per eliminazione di Gauss, LU, o metodi iterativi diretti/indiretti

Gauss-Seidel \rightarrow Red-Black ordering



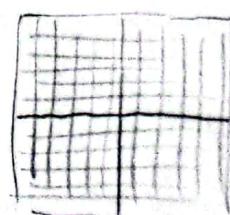
Ma nell'caso di matrici molto dense l'iterazione di Gauss-Seidel non è più tollerabile

a))

Come centrano le spazio? Riducendo la risoluzione

L'interazione su grandi scale lo fa così trasmettere informazioni di massa lontane

MULTIGRID



③ In questo modo acceleriamo lo sviluppo dello schema
Il nostro problema e' con dimensioni alte

$$\begin{array}{l} A\bar{x} = b \\ A'\bar{x}' = b' \\ A''\bar{x}'' = b'' \end{array}$$

$\downarrow h$
 $\downarrow 2h$
 $\downarrow h$

In questo modo riduciamo proporzionalmente gli errori che avremo nel rappresentare gli errori su scale piccole

Della cosa e' facile, ma dobbiamo trovare il modo di

1) coarse \rightarrow fine

2) $A\bar{x} = b$

3) error coarse \rightarrow error fine

quando operiamo il passo di
PROLONGATION / RESTRICTION

Vediamo prima la Prolongation (coarse \rightarrow fine)

$$\begin{array}{c} \bar{x}^{(h)} \\ \bar{x}^{(2h)} \end{array}$$

N h
N/2 2h
valore definito
di un...
che aveva
celle...

Consideriamo un operatore che fa
 $I_{2h}^h \bar{x}^{(2h)} = \bar{x}^{(h)}$

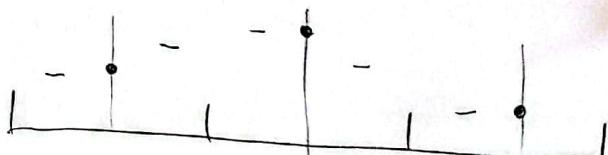
C sono diverse scelte per un tale operatore

$$I_{2h}^h : \bar{x}_{2i}^{(h)} = \bar{x}_i^{(2h)} \quad 0 \leq i < \frac{N}{2}$$

$$\bar{x}_{2i+1}^{(h)} = \frac{1}{2} (\bar{x}_i^{(2h)} + \bar{x}_{i+1}^{(2h)})$$

qui x non ha le coordinate quindi
di cui hanno bisogno prendo l'upsampling

La scelta di come interpretare per
passare da coarse a fine e' arbitraria



Restriction (fine \rightarrow coarse)

$$I_h^{2h} \bar{x}^{(h)} = \bar{x}^{(2h)}$$

$$I_h^{2h} : \bar{x}_i^{(2h)} = \frac{\bar{x}_{2i-1}^{(h)} + 2\bar{x}_{2i}^{(h)} + \bar{x}_{2i+1}^{(h)}}{4} \quad 0 \leq i < \frac{N}{2}$$

molto perdita delle quantità

Ne poss scegliere anche altre, ma tipicamente scelgono il passo di prolongation e restriction in modo che stiano legati fra loro, tipicamente

$$I_h^{2h} = C [I_{2h}^h]^T \quad \text{dove c e' un fattore}$$

A questo punto dobbiamo usare le soluzioni multigradi
Lo si fa tramite la procedura

V-cycle

$$A\bar{x} = \underline{b} \quad \underline{x}_{exact}$$

Il nostro schema essendo iterativo non ottiene la soluzione esatta

67

$$\underline{e} = \underline{x}_{exact} - \bar{x}$$

quindi se l'errore implica che

$$A\bar{x} = \underline{b} + \underline{e}$$

possiamo definire un testfro nel collegio

$$\underline{L} = \underline{b} - A\bar{x}$$

Dato poste due def, se le sommiamo nel problema originale notiamo che

$$A(\underline{e} + \bar{x}) = \underline{L} + A\bar{x} \rightarrow A\underline{e} = \underline{L}$$

cioè l'errore è una soluzione errata del problema che ritroviamo

Quindi per migliorare la soluzione ci basta stimare meglio l'errore

2) \underline{h}

$$2) \underline{r}^{(h)} = \underline{b}^{(h)} - A\bar{x}^{(h)}$$

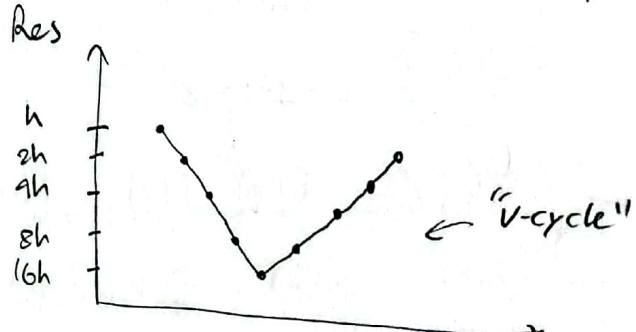
$$3) \underline{E}^{(h)} \rightarrow \underline{L}^{(2h)} = I_h^{\text{th}} \underline{r}^{(h)}$$

$$4) A^{(2h)} \underline{e}^{(2h)} = \underline{r}^{(2h)}$$

$$5) \underline{e}^{(2h)} \rightarrow \underline{e}^{(h)} = I_{2h}^h \underline{e}^{(2h)} \text{ perciò } \bar{x}^{(h)} = \bar{x}^{(2h)} + \underline{e}^{(h)}$$

non sono necessariamente la soluzione exact ma ci siamo avvicinati

A questo punto ripetiamo dall'inizio e ripetiamo per arrivare a livello sempre più raffinato



Il costo computazionale è $N_g \ln(N_g)$

Una cosa che non abbiamo detto è come $A^{(2h)}$ ci lega a $A^{(h)}$ # steps

a) Direct grid approx

b) $A^{(2h)} = I_h^{\text{th}} A^{(h)} I_{2h}^h$ approx di Galerkin

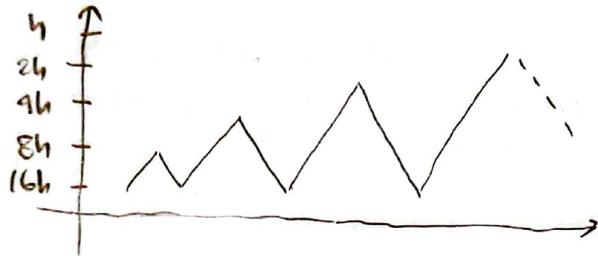
e il modo più economico lo so per un problema. A costo di avere operazioni il # delle funzioni non si fissa, più ascete man mano che salgo di livello → richiede più calcoli e comunicazione

38) Tutto ciò deve portare assieme che si abbia un guadagno molto
al livello h.

Attenzione che qui abbiamo 2 posti dominanti: uno dall'errore temporale e
uno del ciclo multi grid

FULL MULTIGRID METHOD

Consiste nel cercare di uscire l'iterazione del v-cycle di ogni singolo M



Dopo 1 o 2 cicli Krylov sono di un M
di ampiezza già suff

I M più grosse sono piccole oscillazioni che vanno più a livello complesso.
Il loro complesso è detto per livello h.

Per fare il primo passo possiamo risolvere esattamente il problema (fatto al grido)

OPENING FOURIER METHOD (si può usare anche insieme al metodo Multi Grid)

$$\nabla^2 \phi = q \pi \delta \rho$$

$$\phi(x) = - \int G \rho(\underline{x}) \frac{dx'}{|x-x'|} \quad \text{può essere visto come la convoluzione tra due funzioni}$$

$$\phi(x) = \int g(x-x') \rho(x') dx' \quad g(x) \equiv -\frac{G}{T(x)} \quad \text{funzione di Green della gravità Newtoniana}$$

$$F(g * \rho) = F(g) \cdot F(\rho) \quad \text{per il v} \quad \phi(x) = F^{-1}(F(g) \cdot F(\rho)) \circ \text{anche}$$

$$F(\phi(x)) \equiv \hat{\phi}(k) = \hat{g}(k) \cdot \hat{\rho}(k)$$

Quindi se si conosce ρ (g non è conoscibile), si può ricavare ϕ

Un modo è di approssimare il potenziale tramite differente funz.

(33)

$$\nabla^2 \phi = q\pi G\rho$$

$$-\frac{\phi_{i+2} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} = q\pi G\rho \quad \text{multigrid}$$

$$-\phi(x) = \int p(x') g(x-x') dx \quad g(x) = -\frac{G}{|x|}$$

e sappiamo che per le convoluzioni vale $F(f*g) = F(f)F(g)$ da cui

$$\phi(x) = F^{-1}[F(\rho)F(g)]$$

Tutto ciò è giusto ma come facciamo la
trasf. di Fourier di calcolare?

$$\hat{\phi}(k) = \hat{\rho}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

A questo punto assumiamo condizioni periodiche di entorno

$$p(x) = \sum_k p_k e^{ikx} \quad k \in \frac{2\pi}{L} \left(\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} \right) \quad \text{indici interi che si estende a } \infty$$

Sappiamo che il campo $p(x)$ è reale, perciò deve essere $p_k = p_{-k}^*$

Questo ci dice che non tutti i modi sono indipendenti fra loro
Come li calcoliamo?

$$p_k = \frac{1}{L^3} \int p(x) e^{-ikx} dx$$

Abbiamo anche delle relazioni di ortogonalità e di chiusura

$$\frac{1}{L^3} \int dx e^{i(k-k')x} = \delta_{kk'} \quad \text{ortogonalità}$$

$$\frac{1}{L^3} \sum_k e^{ikx} = \delta(x)$$

Ora prendiamo $\nabla^2 \phi = q\pi G\rho$ e espanderemo in senso di Fourier

$$\nabla^2 \left(\sum_k \phi_k e^{ikx} \right) = q\pi G \sum_k p_k e^{ikx}$$

$$\sum_k (-k^2 \phi_k) e^{ikx} = q\pi G \sum_k p_k e^{ikx} \quad \text{questo ci dice che}$$

$$\phi_k = -\frac{q\pi G p_k}{k^2}$$

ogni modo deve avere 6 nulli altrimenti non sarebbe l'ortogonalità

$$\text{e poiché } \hat{\phi}(k) = \hat{\rho}(k) \hat{g}(k) \rightarrow \hat{g}_k = -\frac{q\pi G}{k^2}$$

Nella realtà sul calcolatore lo senso non sono continui, perciò dobbiamo usare la trasformata di Fourier discreta

40 DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT)

La strutturazione del volume è:

$$\Delta_p = \frac{L}{N} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad p_i \in \{0, -, N-1\}$$

queste sono le posizioni che si dicono compionendo

Per trovare l'ammaglia i risultati della FT di $p(x)$ possiamo dire che l'elem più piccolo che possiamo ridurre è $\Delta_x^3 \rightarrow \left(\frac{L}{N}\right)^3$ perciò

$$P_k = \frac{1}{N^3} \sum_p p_p e^{-ik \cdot x_p}$$

I modi saremo $k_i = \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad f_i \in \{0, -, N-1\}$

In questo modo possiamo definire

$$\hat{p}_k = \frac{1}{N^3} \sum_p p_p e^{-i \frac{2\pi}{N} k \cdot p}$$

$$p_k = \sum_p \hat{p}_k e^{i \frac{2\pi}{N} k \cdot p}$$

ottenibile con certe volte in cui si cambia ordine da $0 \dots N-1$

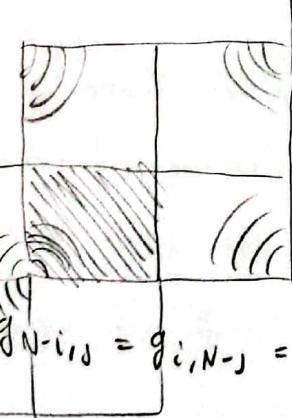
Per calcolare questa DFT bisogna sommare N^2 elem.

In realtà negli anni '60 fu inventato un modo per calcolare la FT dividendo il problema in sottoproblemi, come quando staccano ali di albero, che porta il costo a $N \log N$.

A questo ci si chiama Fourier Transform

Qui abbiamo assunto periodicità dei dati, sia che nella dimensione generata non c'è rett. Però i punti comunque vanno alla FT

ZERO PADDING



La densità è una mappa da N^2 celle a N^2 celle vuote

N qui ci si fa dim di tali si
domanda replicato

Il contributo delle altre ripliche si somma, e impila el molto tempo

Ora per il caso el 2N fm(2N).

Questo per' non e' l'unica soluzione. Un alternativa e' data da James (1977) che ebbe l'idea di ponendone delle masse ad hoc qui belli.

Nelle simulazioni cosmologiche la penultima ci sta perch' si assume analogia col sidrostatico, ma per le posteriori non vale.

Martedì avremo visto i primi 2 step.
Oggi guardiamo gli ultimi 2

$$3) \quad a_g = -\nabla \phi$$

$$a_x^{(i,j,u)} = -\frac{\phi^{(i+1,j,u)} - \phi^{(i-1,j,u)}}{2h}$$

l'errore di truncamento in questo caso
e' h^2 perch' lo si fa e' deciso a 2° ordine

Uno vorrebbe andare all'ordine più alto, p.es. 4° ordine
Si può cominciare

$$a_x^{(i,j,u)} = -\frac{1}{2h} \left\{ \frac{1}{3} [\phi^{(i+1,j,u)} - \phi^{(i-1,j,u)}] - \frac{1}{6} [\phi^{(i+1,j,u)} - \phi^{(i-2,j,u)}] \right\}$$

In questo caso otterremo uno stencil di 4 celle in più che è. se si fa lo sviluppo in serie di Taylor si vede che c'è un errore di 4° ordine.

Da un lato ci piaceva, dall'altro c'è anche vero che include più celle (anti) e' più comunicazione se si sta parlando.

Nelle simulazioni quasi sempre ci riferiscono al 2° ordine, perch' ha un errore insensibile a quelli delle altre ricette nel codice.

a) INTERE TO THE PARTICLES

$$\rho_p = \frac{1}{h^3} \sum_i w_p(x_i) m_i \quad \text{prendendo questa info dobbiamo recuperare l'accelerazione}$$

sulle singole particelle

Per reintegrare dobbiamo usare la stessa schema di deponi cui abbiamo fornito la massa per le celle, perché i momenti si generano forze finite.

p.es. cloud in cell

$$F(x) = m \sum_p \Delta_p W(x) \quad \text{unificando che non ci sia forza finita}$$

(42) Ci sono particelle sente un'accelerazione

$$\ddot{a}_p = \sum_{p_1} d(p_1 p_1) h^3 p_1$$

la funz di Green e' retribile e antisimmetrica
se cambia le posizelle intanto il segn

Verifichiamo se esistono delle self forces

$$\begin{aligned} F_{self}(x_i) &= m_i \ddot{a}_i(x_0) = m_i \sum_p W(x_i) \ddot{a}_p = m_i \sum_p W(x_i) \sum_{p_1} d(p_1 p_1) h^3 p_1 = \\ &= m_i \sum_p W(x_i) \sum_{p_1} d(p_1 p_1) h^3 \frac{1}{h^3} \sum_{p_1} W_{p_1}(x_0) m_i = m_i^2 \sum_{p_1, p_1} d(p_1 p_1) W_{p_1}(x_i) \\ &= 0 \quad \text{perche' la funz di Green e' antisimmetrica e i doppi le} \\ &\quad \text{forze fra due corpi si annullano} \end{aligned}$$

Se nel rel'intrepolazione usiamo uno schema di deposito deciso si ha che
le due W sono simmetriche e mantenendo l'antisimmetria la forza non si annulla.

ANTI-SYMMETRY

La forza di gravità per contrazione e' antisimmetrica (la forza che un corpo 1 esercita su un corpo 2 e' uguale e contraria a 2-1)

Verifichiamo che sia così:

$$\begin{array}{ll} 1 & m_1 \quad x_1 \\ 2 & m_2 \quad x_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= m_1 \ddot{a}_1(x_1) = m_1 \sum_p W(x_i) \ddot{a}_p = \\ &= m_1 \sum_p W(x_1) \sum_{p_1} d(p_1 p_1) h^3 p_1 = \quad \text{perche' e' deciso} \\ &= m_1 \sum_p W(x_1) \sum_{p_1} d(p_1 p_1) m_2 W(x_2) = \quad \text{dove } p_2 \\ &= m_1 m_2 \sum_{p_1, p_1} d(p_1 p_1) W(x_1) W(x_2) \end{aligned}$$

Se faccio lo stesso coi gatti

$$F_{21} = m_1 m_2 \sum_{p_1, p_1} d(p_1 p_1) W_p(x_2) W_{p_1}(x_1) = m_1 m_2 \sum_{p_1, p_1} d(p_1 p_1) W_p(x_2) W_{p_1}(x_1)$$

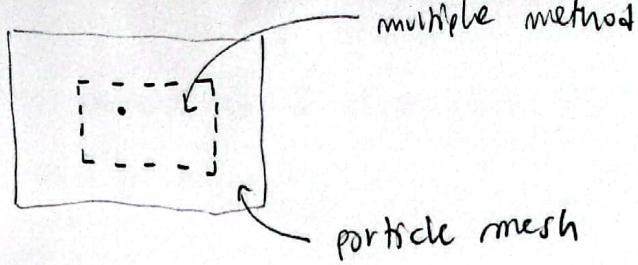
\downarrow
 $-d(p_1 p_1)$

Quindi se usiamo schemi di deposito tricubi otteniamo anche una forza gravitazionale antisimmetrica, tutto sbagliato.

Questa metoda di calcolo sarebbe dipendente dalla struttura del cubo che ho scelto. Eppure sempre forse economia

Ci sono casi in cui l'esponente in multiplo e' più esteso della particelle mesh.

Ma se lui ha già nel cubo un altro, come ad esempio essere una griglia?



Ma come si effettua la sommazione da uno all'altro?

TREE PM ($\rho^3 M$)

$$\phi_n = \phi_n^{\text{long}} + \phi_n^{\text{short}}$$

$$\phi_n^{\text{long}} = \phi_n \exp(-n^2 r_s^2)$$

r_s = force split characteristic distance

$$\phi_n^{\text{short}} = \phi_n [1 - \exp(-n^2 r_s^2)]$$

A scale arte voglio applicare il metodo a multipli, che lavora molto spesso
resta, non delle frequenze. Per cui la formula è stata trasformata

$$\phi^{\text{short}}(x) = -\frac{Gm}{r} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2r_s}\right) \quad \text{dove } t = m \ln(|x - t - mL|)$$

complementary error function

Se $r > 5r_s$ non guardo nemmeno i nodi nel nudo
altrimenti per uscire dell'area di approssimazione presente in
 ϕ^{short} so già che è sufficiente usare ϕ^{long}

Se scale piccole si può fare anche somma totale per recuperare la
dimensionalità vera

