Mathematik/Physik I

Tabelle von Ansätzen

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_1 y' + a_0 y = s(x),$$

wobei a_0, a_1 Konstanten und $s(x)$ die Störfunktion sind. Es geht hier um die Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ mit dem Ansatzverfahren. Wir geben eine Tabelle an, die für wichtige Störfunktionen den richtigen Ansatz angibt.

Notationen Ein Polynom n-ten Grades ist eine Funktion der Form

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

wobei $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ beliebige Konstanten sind. In der Störfunktion sind diese Konstanten bekannt, d.h. vorgegeben. Im Ansatz sind es unbekannte Variablen, deren Werte man bestimmt, indem man den Ansatz mitsamt seinen Ableitungen in die Differentialgleichung einsetzt und Koeffizienten vergleicht.

Wir verwenden für alle Konstanten in der Störfunktion griechische Buchstaben, also z.B. $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \lambda, \omega$. Für die unbekannten Variablen im Ansatz verwenden wir lateinische Grossbuchstaben.

Bemerkungen

1. Die Tabelle ist teilweise redundant. Zum Beispiel ist für $\lambda = 0$ und $n = 0$ die Störfunktion in der letzten Zeile
$$P_n(x) e^{\lambda x} \cos \omega x = A_0 \cos \omega x.$$
2. Wenn in der Störfunktion mehrere Terme aus der Tabelle vorkommen, summiert man die Ansätze für jeden Term auf **und streicht Terme mit gleichem Funktionstyp!** Wenn die Störfunktion z.B. $s(x) = 2x \sin 3x - 5 \cos 3x$ ist, so lautet der Ansatz
$$y_p(x) = (A_1 x + A_0) \sin 3x + (B_1 x + B_0) \cos 3x.$$
Dies ist der gleiche Ansatz, den man nur für den Term $2x \sin 3x$ bekommt. Der Ansatz für den Term $-5 \cos 3x$ wäre $A \sin 3x + B \cos 3x$, und diese Funktionstypen kommen im Ansatz bereits vor.

Störfunktion $s(x)$	Ansatz y_p
$e^{\lambda x}$	$\begin{cases} Ae^{\lambda x}, & \text{falls } s(x) \text{ keine Lösung der Differentialgleichung} \\ Axe^{\lambda x}, & \text{falls } s(x) \text{ Lösung der Differentialgleichung} \end{cases}$
$\sin \omega x$	$A \sin \omega x + B \cos \omega x$
$\cos \omega x$	$A \sin \omega x + B \cos \omega x$
$e^{\lambda x} \sin \omega x$	$Ae^{\lambda x} \sin \omega x + Be^{\lambda x} \cos \omega x$
$e^{\lambda x} \cos \omega x$	$Ae^{\lambda x} \sin \omega x + Be^{\lambda x} \cos \omega x$
$P_n(x)$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$
$P_n(x) e^{\lambda x}$	$\begin{cases} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) e^{\lambda x}, & \text{falls } e^{\lambda x} \text{ keine Lösung der Differentialgl.} \\ x(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) e^{\lambda x}, & \text{falls } e^{\lambda x} \text{ Lösung der Differentialgl.} \end{cases}$
$P_n(x) \sin \omega x$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) \sin \omega x$ $+(B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0) \cos \omega x$
$P_n(x) \cos \omega x$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) \sin \omega x$ $+(B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0) \cos \omega x$
$P_n(x) e^{\lambda x} \sin \omega x$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) e^{\lambda x} \sin \omega x$ $+(B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0) e^{\lambda x} \cos \omega x$
$P_n(x) e^{\lambda x} \cos \omega x$, $\omega \neq 0$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) e^{\lambda x} \sin \omega x$ $+(B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0) e^{\lambda x} \cos \omega x$