Formelsammlung Mathematik

Daniel Winz, Ervin Malagic

3. November 2012

Über diese Arbeit

Dies ist das Ergebnis einer Zusammenarbeit auf Basis freier Texte erstellt von Studierenden der Fachhochschule Luzern.

Dieses Schriftstück ist lizenziert unter der GPLv2 und der TeX- bzw. LaTeX- Code ist auf `github.com/daniw/fosamath` hinterlegt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vektorgeometrie

1.1 Vektorgeometrie in der Ebene

1.1.1 Abstand zweier Puntke

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

1.1.2 Geradengleichungen

Normalform (explizite Form)

$$\boxed{g : y = mx + q}$$

$$\boxed{\text{Steigung } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tan\varphi}$$

Koordinatenform (implizite Form)

$$\boxed{g : ax + by + c = 0}$$

Achsenabschnittsform

$$\boxed{g : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

Hesse'sche Normalform

$$\boxed{g : \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0}$$

Parameterform

$$\boxed{g : \vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}}$$

1.1.3 Normalenvektor

Der Normalenvektor ist ein Vektor, welcher senkrecht auf einem anderen Vektor bzw. einer Geraden liegt. Hier im Beispiel in welchem $\vec{n} \perp g(x)$

$$\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}}$$

Der Richtungsvektor von $g(x)$ ist $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = \vec{n}$.

1.1.4 Abstand Punkt zu Gerade

Für eine Gerade $g : ax + by + c = 0$ und einen Punkt $P_1(x_1|y_1)$ gilt:

$$\boxed{d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|}$$

1.1.5 Schnittwinkel zwischen Geraden

Für den spitzen Schnittwinkel φ zwischen den Geraden

$g_1 : y = m_1x + q_1$ und $g_2 : y = m_2x + q_2$ gilt:

$$\boxed{tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|} \qquad \text{für } \varphi \neq 90°$$

$$\boxed{g_1||g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{und } g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}} \text{ für } m_1 \neq 0$$

1.2 Vektorgeometrie im Raum

1.2.1 Ortsvektor

Ein Ortsvektor beschreibt den Vektor vom Urspung des Koordinatensystems $O(0|0|0)$ zu einem beliebigen Punkt $P(x|y|z)$.

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Die Vektoren $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ sind die Einheitsvektoren des Koordinatensystems (meist einfach 1 ohne Einheit).

1.2.2 Länge eines Ortsvektors (Norm bzw. Betrag)

$$\boxed{|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 1 z^2}}$$

1.2.3 Länge eines Vektors (Norm bzw. Betrag)

$$\boxed{|\vec{a}| = a = \overrightarrow{P_1P_2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

In dieser Form entspricht a der Raumdiagonale im Quader zu $(a_x|a_y|a_z)$.

1.2.4 Vektor aus Anfangs- und Endpunkt

Möchte man den Vektor $\vec{a}$ von P_1 (Anfangspunkt) zu P_2 (Endpunkt) haben, so rechnet man Anfang - Ende, bzw. $\vec{P_2} - \vec{P_1}$.

$$\boxed{\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}}$$

1.2.5 Distanz zweier Punkte

Um die Distanz von P_1 zu P_2 zu ermitteln, berechnet man die Norm von $\overrightarrow{P_1P_2}$.

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}}$$

1.2.6 Mittelpunkt einer Strecke

$$\boxed{\vec{r_M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{r_1} + \vec{r_2})}$$

$$\boxed{\Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$

1.3 Rechenoperationen mit Vektoren

1.3.1 Addition/Subtraktion

$$\boxed{\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}}$$

1.3.2 Multiplikation mit Skalar

$$\boxed{k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix}} \qquad \text{für } k \in \mathbb{R}$$

1.3.3 Skalarprodukt

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot cos(\varphi) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Der Winkel φ ist der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$!

1.3.4 Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\boxed{cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}}$$

$$\boxed{cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}}$$

1.3.5 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Mit dem Vektorprodukt erhält man einen Vektor der senkrecht zur Ebene steht, also den Normalenvektor zur Ebene.

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}}$$

Die Fläche die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, entspricht der Norm des Vektorprodukts $c = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot sin\varphi$. Zu Beachten ist, dass $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

1.3.6 Spatprodukt

Das Spatprodukt entspricht dem Volumen welches von drei Vektoren aufgespannt wird.

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}}$$

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Folgen

2.1.1 rekursive Darstellung

Bei der rekursiven Darstellung wird eine Folge durch einen Startwert und eine Abbildungsvorschrift dargestellt.

Startwert	$f(1) = a_1$
Abbildungsvorschrift	$F(f(1), f(2), \ldots, f(n) := f(n+1) = a_{n+1}$

2.1.2 arithmetische Folgen

$\{ \boxed{a_{n+1} = a_n + d} \}$

2.1.3 geometrische Folgen

$\{ \boxed{a_{n+1} = a_n * q} \}$

Kapitel 3

Differenzieren

3.1 Ableitungsregeln

3.1.1 Grundoperationen

Summenregel

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Wichtig: Ableitung einer konstanten Funktion ist Null!

$\Rightarrow (f(x) + c)' = f'(x)$ für $c \in R$

Faktorregel

$$\boxed{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)}$$

Ein konstanter Faktor bleiobt beim Differenzieren (Ableiten) erhalten!

Produkteregel

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Quotientenregel

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}} \text{ gilt falls } g(x) \neq 0\text{ !}$$

Kettenregel

$$\boxed{(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))}$$

3.1.2 Spezielle Regeln

Exponenten

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{(n-1)}}$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$\boxed{(e^{k \cdot x})' = k \cdot e^x}$$

$$\boxed{(a^x)' = ln_a(a^x)}$$

Logarithmen

$$\boxed{(ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

Trigonometrie

$$\boxed{(sin(x))' = cos(x)}$$

$$\boxed{(cos(x))' = -sin(x)}$$

$$\boxed{(tan(x))' = \frac{1}{cos^2(x)}}$$

$$\boxed{(cot(x))' = -\frac{1}{sn^2(x)}}$$

3.2 Kurvendiskussion

3.2.1 Tangentengleichung

$$\boxed{T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

3.2.2 Steigen und Fallen

$$\boxed{\begin{array}{lcc} f'(x) > 0 \text{ auf } I & \Rightarrow & f \text{ ist monoton wachsend in } I \\ f'(x) < 0 \text{ auf } I & \Rightarrow & f \text{ ist monoton fallend in } I \end{array}}$$

I entspricht einem Intervall! Dies bedeutet, ist $f'(x)$ über den gesamten Bereich immer > 0 so ist f monoton wachsend. Ist $f'(x)$ über den gesamten Bereich < 0 so ist sie monoton fallend.

3.2.3 Krümmungsverhalten

$$\boxed{\begin{array}{lcc} f''(x) > 0 \text{ auf } I & \Rightarrow & \text{Kurve ist konvex} \\ f''(x) < 0 \text{ auf } I & \Rightarrow & \text{Kurve ist konkav} \end{array}}$$

3.2.4 Extremum

Ein Extremum ist ein Punkt, zu welchem die Ableitung 0 ergibt. Solch ein Extremum kann ein Maximum oder Minimum sein. Zusätzlich ist zu definieren ob es sich um ein lokales oder globales Extremum handelt.

$$\boxed{\begin{array}{lcr} f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 & \Rightarrow & \text{lokales Maximum in } x_0 \\ f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 & \Rightarrow & \text{lokales Minimum in } x_0 \end{array}}$$

3.2.5 Wendepukt

Als Wendepukt bezeichnet man jene Stelle, an welcher die Krümmung der Funktion wechselt (konkav zu konvex und umgekehrt). Im Wendepunkt ist die Steigung jeweils von beiden Seiten aus betrachtet (d.h aus $x_0 > 0$ und $x_0 < 0$) extremal.

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt in } x_0}$$

3.2.6 Sattelpunkt

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente.

$$\boxed{f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt in } x_0}$$