

Formelsammlung Mathematik

Daniel Winz, Ervin Malagic, Adrian Imboden

10. November 2012

Über diese Arbeit

Dies ist das Ergebnis einer Zusammenarbeit auf Basis freier Texte erstellt von Studierenden der Fachhochschule Luzern.

Dieses Schriftstück ist lizenziert unter der GPLv2 und der \TeX - bzw. \LaTeX - Code ist auf github.com/daniw/fosamath hinterlegt.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorgeometrie	7
1.1	Vektorgeometrie in der Ebene	8
1.1.1	Abstand zweier Punkte	8
1.1.2	Geradengleichungen	8
1.1.3	Normalenvektor	9
1.1.4	Abstand Punkt zu Gerade	9
1.1.5	Schnittwinkel zwischen Geraden	9
1.2	Vektorgeometrie im Raum	10
1.2.1	Ortsvektor	10
1.2.2	Länge eines Ortsvektors (Norm bzw. Betrag)	10
1.2.3	Länge eines Vektors (Norm bzw. Betrag)	11
1.2.4	Vektor aus Anfangs- und Endpunkt	11
1.2.5	Distanz zweier Punkte	11
1.2.6	Mittelpunkt einer Strecke	11
1.3	Rechenoperationen mit Vektoren	12
1.3.1	Addition/Subtraktion	12

1.3.2	Multiplikation mit Skalar	12
1.3.3	Skalarprodukt	12
1.3.4	Winkel zwischen zwei Vektoren	12
1.3.5	Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	13
1.3.6	Spatprodukt	13
2	Folgen und Reihen	15
2.1	Folgen	16
2.1.1	rekursive Darstellung	16
2.1.2	arithmetische Folgen	16
2.1.3	geometrische Folgen	16
2.1.4	Konvergenz von Folgen	16
2.2	Reihen	17
3	Differenzieren	19
3.1	Ableitungsregeln	20
3.1.1	Grundoperationen	20
3.1.2	Spezielle Regeln	21
3.2	Kurvendiskussion	22
3.2.1	Tangentengleichung	22
3.2.2	Steigen und Fallen	22
3.2.3	Krümmungsverhalten	22
3.2.4	Extremum	22
3.2.5	Wendepunkt	23
3.2.6	Sattelpunkt	23

Kapitel 1

Vektorgeometrie

1.1 Vektorgeometrie in der Ebene

1.1.1 Abstand zweier Punkte

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1.1.2 Geradengleichungen

Normalform (explizite Form)

$$g : y = mx + q$$

$$\text{Steigung } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \varphi$$

Koordinatenform (implizite Form)

$$g : ax + by + c = 0$$

Achsenabschnittsform

$$g : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Hesse'sche Normalform

$$g : \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Parameterform

$$g : \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

1.1.3 Normalenvektor

Der Normalenvektor ist ein Vektor, welcher senkrecht auf einem anderen Vektor bzw. einer Geraden liegt. Hier im Beispiel in welchem $\vec{n} \perp g(x)$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor von $g(x)$ ist $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = \vec{n}$.

1.1.4 Abstand Punkt zu Gerade

Für eine Gerade $g : ax + by + c = 0$ und einen Punkt $P_1(x_1|y_1)$ gilt:

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

1.1.5 Schnittwinkel zwischen Geraden

Für den spitzen Schnittwinkel φ zwischen den Geraden

$g_1 : y = m_1x + q_1$ und $g_2 : y = m_2x + q_2$ gilt:

$$\boxed{\tan\varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|} \quad \text{für } \varphi \neq 90^\circ$$

$$\boxed{g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ und } g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ für } m_1 \neq 0}$$

1.2 Vektorgeometrie im Raum

1.2.1 Ortsvektor

Ein Ortsvektor beschreibt den Vektor vom Ursprung des Koordinatensystems $O(0|0|0)$ zu einem beliebigen Punkt $P(x|y|z)$.

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{OP} = xe_x + ye_y + ze_z := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Die Vektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind die Einheitsvektoren des Koordinatensystems (meist einfach 1 ohne Einheit).

1.2.2 Länge eines Ortsvektors (Norm bzw. Betrag)

$$\boxed{||\vec{r}|| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

1.2.3 Länge eines Vektors (Norm bzw. Betrag)

$$||\vec{a}|| = a = \overrightarrow{P_1 P_2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

In dieser Form entspricht a der Raumdiagonale im Quader zu $(a_x|a_y|a_z)$.

1.2.4 Vektor aus Anfangs- und Endpunkt

Möchte man den Vektor \vec{a} von P_1 (Anfangspunkt) zu P_2 (Endpunkt) haben, so rechnet man Anfang - Ende, bzw. $\vec{P}_2 - \vec{P}_1$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Distanz zweier Punkte

Um die Distanz von P_1 zu P_2 zu ermitteln, berechnet man die Norm von $\overrightarrow{P_1 P_2}$.

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1.2.6 Mittelpunkt einer Strecke

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

1.3 Rechenoperationen mit Vektoren

1.3.1 Addition/Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

1.3.2 Multiplikation mit Skalar

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix} \quad \text{für } k \in \mathbb{R}$$

1.3.3 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\varphi) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Der Winkel φ ist der Zwischenwinkel von \vec{a} und \vec{b} .
Für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$!

1.3.4 Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$$

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

1.3.5 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Mit dem Vektorprodukt erhält man einen Vektor der senkrecht zur Ebene steht, also den Normalenvektor zur Ebene.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Die Fläche die von \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird, entspricht der Norm des Vektorprodukts $c = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$. Zu Beachten ist, dass $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

1.3.6 Spatprodukt

Das Spatprodukt entspricht dem Volumen welches von drei Vektoren aufgespannt wird.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Folgen

2.1.1 rekursive Darstellung

Bei der rekursiven Darstellung wird eine Folge durch einen Startwert und eine Abbildungsvorschrift dargestellt.

Startwert	$f(1) = a_1$
Vorschrift	$F(f(1), f(2), \dots, f(n)) := f(n+1) = a_{n+1}$

2.1.2 arithmetische Folgen

$$a_{n+1} - a_n = d$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

2.1.3 geometrische Folgen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$a_{n+1} = a_n * q$$

$$a_n = q^{n-1} a_1$$

2.1.4 Konvergenz von Folgen

2.2 Reihen

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n$$

Kapitel 3

Differenzieren

3.1 Ableitungsregeln

3.1.1 Grundoperationen

Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Wichtig: Ableitung einer konstanten Funktion ist Null!

$$\Rightarrow (f(x) + c)' = f'(x) \text{ für } c \in \mathbb{R}$$

Faktorregel

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren (Ableiten) erhalten!

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{gilt falls } g(x) \neq 0 !$$

Kettenregel

$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

3.1.2 Spezielle Regeln

Exponenten

$$(x^n)' = n \cdot x^{(n-1)}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{k \cdot x})' = k \cdot e^{k \cdot x}$$

$$(a^x)' = \ln_a(a^x)$$

Logarithmen

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Trigonometrie

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

3.2 Kurvendiskussion

3.2.1 Tangentengleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

3.2.2 Steigen und Fallen

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 \text{ auf } I & \Rightarrow f \text{ ist monoton wachsend in } I \\ f'(x) < 0 \text{ auf } I & \Rightarrow f \text{ ist monoton fallend in } I \end{array}$$

I entspricht einem Intervall! Dies bedeutet, ist $f'(x)$ über den gesamten Bereich immer > 0 so ist f monoton wachsend. Ist $f'(x)$ über den gesamten Bereich < 0 so ist sie monoton fallend.

3.2.3 Krümmungsverhalten

$$\begin{array}{ll} f''(x) > 0 \text{ auf } I & \Rightarrow \text{Kurve ist konvex} \\ f''(x) < 0 \text{ auf } I & \Rightarrow \text{Kurve ist konkav} \end{array}$$

3.2.4 Extremum

Ein Extremum ist ein Punkt, zu welchem die Ableitung 0 ergibt. Solch ein Extremum kann ein Maximum oder Minimum sein. Zusätzlich ist zu definieren ob es sich um ein lokales oder globales Extremum handelt.

$$\begin{array}{ll} f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \text{lokales Maximum in } x_0 \\ f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \text{lokales Minimum in } x_0 \end{array}$$

3.2.5 Wendepunkt

Als Wendepunkt bezeichnet man jene Stelle, an welcher die Krümmung der Funktion wechselt (konkav zu konvex und umgekehrt). Im Wendepunkt ist die Steigung jeweils von beiden Seiten aus betrachtet (d.h. aus $x_0 > 0$ und $x_0 < 0$) extremal.

$$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt in } x_0$$

3.2.6 Sattelpunkt

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt in } x_0$$