Lösungen Testat STOC SW04

Daniel Winz

21. März 2013 08:34

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1

1.1 a

x	1	2	3
k	-4	10	20
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{3}$

1.2 b

$$E = \frac{7}{9} \cdot (-4) + 10 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{1}{18} = -\frac{1}{3}$$

Da diese Variable kleiner als null ist verliert man durchschnittlich Geld.

2 Aufgabe 2

2.1 a

$n = 10$ Stichproben, $\pi = 0.02$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{i-te Probe verunreinigt} \\ 0, & \text{i-te Probe sauber} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P(X = 0) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1 - \pi)^{n-x} = \binom{10}{0} \cdot 0.02^0 \cdot (1 - 0.02)^{10-0} = 0.817$$

$$P(X = 0) = 0.98^{10} = 0.817$$

2.2 b

$$y = 1$$

$$y = 11$$

$$P(y = 1) = 0.817$$

$$P(y = 11) = 1 - 0.817 = 0.183$$

2.3 c

$$E[Y] = 1 \cdot P(y = 1) + 11 \cdot P(y = 11) = 1 \cdot 0.817 + 11 \cdot 0.183 = 2.83$$

Einsparung:

$$10 - E[Y] = 10 - 2.83 = 7.17$$

3 Aufgabe 3

3.1 a

Binomialverteilung mit:

$$n = 50$$

$$\pi = 0.1$$

$$x = 3$$

3.2 b

$$P(X = 3) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x} = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}$$

$$= \frac{50!}{3! \cdot (50-3)!} \cdot 0.1^3 \cdot (1-0.1)^{50-3} = 0.139$$

R:

```
> dbinom(3,size=50,prob=0.1)
```

```
[1] 0.1385651
```

3.3 c

$$P(X \leq 3) = \sum_{j=0}^{3} (P(X = j)) = 0.250$$

R:

```
> sum(dbinom(0:3,size=50,prob=0.1))
```

```
[1] 0.2502939
```

3.4 d

Mit dieser Prüfung kann der Hersteller nur eine Wahrscheinlichkeit angeben, mit welcher die Vorgaben erreicht werden. Es ist keine Garantie, dass maximal 10 % der Gläser minderwertig sind.

4 Aufgabe 4

Allgemein:

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

mit $\lambda = 2$

4.1 a

$$P_\lambda(0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 0.135$$

R:

```
> dpois(0,2)
[1] 0.1353353
```

4.2 b

$$P_\lambda(\leq 3) = \sum_{j=0}^{3}(P_\lambda(j)) = 0.857$$

R:

```
> sum(dpois(0:3,2))
[1] 0.8571235
```

4.3 c

$$P_\lambda(> 3) = 1 - P_\lambda(\leq 3) = 0.143$$

R:

```
> 1-sum(dpois(0:3,2))
[1] 0.1428765
```

4.4 d

Poissonverteilung mit Erwartungswert $\lambda = 6 \quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$

5 Aufgabe 5

5.1 a

```
> dbinom(10,size=50,prob=0.2)
[1] 0.139819
```

5.2 b

```
> sum(dbinom(0:5,size=50,prob=0.2))
[1] 0.04802722
```

5.3 c

```
> sum(dbinom(15:50,size=50,prob=0.2))
[1] 0.06072208
```

5.4 d

c für $P(X \leq c) \approx 0.99$ wird von Hand empirisch gefunden.

```
> sum(dbinom(0:20,size=50,prob=0.2))
```

```
[1] 0.9996793
```

```
> sum(dbinom(0:15,size=50,prob=0.2))
```

```
[1] 0.9691966
```

```
> sum(dbinom(0:16,size=50,prob=0.2))
```

```
[1] 0.9855583
```

```
> sum(dbinom(0:17,size=50,prob=0.2))
```

```
[1] 0.9937392
```

Das ist in R sicher auch automatisch ohne For-Schleife möglich.

5.5 e

```
> plot(0:1000,dpois(200,0:1000),type='l')
> dpois(200,200)
```

```
[1] 0.02819773
```

5.6 f

```
> sum(dpois(200,0:200))
```

```
[1] 0.4953046
```

5.7 g

```
> sum(dpois(200,190:210))
```

```
[1] 0.5420267
```

6 Aufgabe 6

6.1 a

$$P(X=6) = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^6 \cdot \left(1-\frac{1}{49}\right)^{6-6} = \frac{6!}{6! \cdot (6-6)!} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^6 \cdot \left(1-\frac{1}{49}\right)^0 = 7.22 \cdot 10^{-11}$$

R:

```
> dbinom(6,size=6,prob=1/49)
```

```
[1] 7.224762e-11
```

6.2 b

Anzahl Zahlen mit 7 Ziffern 1:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{15!}{7! \cdot (15-7)!} = 6435$$

Zahlen insgesamt:

$$2^{15} = 32768$$