Musterlösungen Testate Mathematik

Daniel Winz, Ervin Mazlagic, Adrian Imboden

6. Dezember 2012

Über diese Arbeit

Dies ist das Ergebnis einer Zusammenarbeit auf Basis freier Texte erstellt von Studierenden der Fachhochschule Luzern.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Testat 1 - Vektorgeometrie

Kapitel 2

Testat 2 - Folgen und Reihen

Kapitel 3

Testat 3 - Differenzialrechnung

3.1 Polynomfunktion

Punkt mit lokalem Extremwert: (e, g)
Punkt mit Wendepunkt: (h, i)

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

$$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$$

$$f'''(x) = 6 \cdot a$$

$$f(e) = g$$

$$f'(e) = 0$$

$$f''(e) \neq 0$$

$$f(h) = i$$

$$f''(h) = 0$$

$$f'''(h) \neq 0$$

Solve mit TR:

$$\text{solve}\left(\begin{matrix} a \cdot e^3 + b \cdot e^2 + c \cdot e + d = g \\ 3 \cdot a \cdot e^2 + 2 \cdot b \cdot e + c = 0 \\ 6 \cdot a \cdot e + 2 \cdot b \neq 0 \\ a \cdot h^3 + b \cdot h^2 + c \cdot h + d = i \\ 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \\ 6 \cdot a \neq 0 \end{matrix}, a, b, c, d\right)$$

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

3.2 Kettenlinie

Aufgabenstellung:

$$y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) + b$$

a)

$$h = H - y(x) = y(\ell) - y(x)$$

$$h = a \cosh\left(\frac{\ell}{c}\right) + b - \left(a \cosh\left(\frac{x}{c}\right) + b\right)$$

$$h = a \cdot \cosh\left(\frac{\ell}{c}\right) - a \cdot \underbrace{\cosh\left(\frac{x}{c}\right)}_{1}$$

$$\rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow h_{max} = a \cdot \cosh\left(\frac{\ell}{c}\right) - a$$

$$\underline{\underline{h(\ell) = a\cosh\left(\frac{\ell}{c}\right) - a}}$$

b)

$$h(\ell_1) = a \cdot \cosh\left(\frac{\ell}{c}\right) - a$$

$$\cosh\left(\frac{\ell}{c}\right) = \frac{h(\ell_1 + a}{a}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{arccosh}\left(\frac{h(\ell_1 + a}{a}\right) \cdot a}}$$

c)

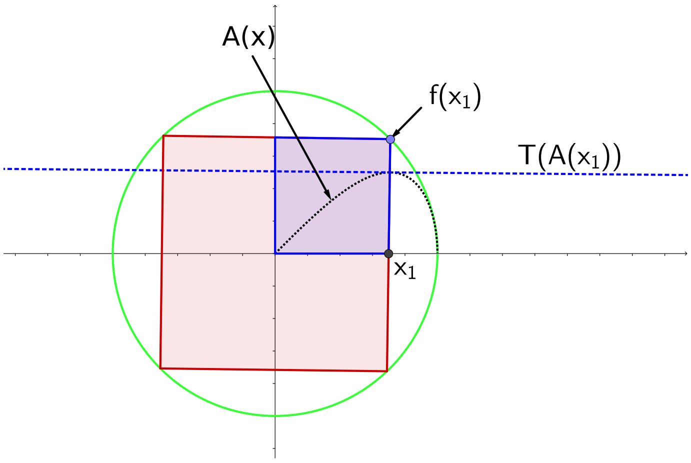
$$m(\ell) = h'(\ell) = \sinh\left(\frac{\ell}{c}\right)$$

$$m(\ell) = \tan(\beta)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \arctan(m(\ell)) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sinh\left(\frac{\ell}{c}\right)\right)}}$$

3.3 Maximale Fläche

Aufgabenstellung:



$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 = c$$

Lösung:

$$A = 4 \cdot A_1$$

$$A_1 = x \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow A = 4 \cdot x \cdot f(x)$$

$$c = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{c - a \cdot x^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A = 4 \cdot x \cdot \left(\frac{c - a \cdot x^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wo ist A_1 maximal?
$\rightarrow$ Dort wo die Ableitung 0 ergibt.

$$A' \stackrel{!}{=} 0$$

$$A' = 4\left(\frac{c - a \cdot x^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot x\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c - a \cdot x^2}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-2 \cdot a \cdot x}{b}\right)\right) = 0$$

$$A' = \left(\frac{c - a \cdot x^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \left(\frac{1 \cdot \left(\frac{-2ax}{b}\right)}{2 \cdot \left(\frac{c-ax^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0 \quad \Bigg| \text{mit } \left(\frac{c - ax^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ erweitern}$$

$$A' = \frac{c - ax^2}{b} + x \cdot \frac{-ax}{b} = 0$$

$$A' = c - ax^2 - ax^2 = c - 2\left(ax^2\right) = 0$$

$$c = 2\left(ax^2\right)$$

$$\underline{x = \pm\sqrt{\frac{c}{2a}}}$$

$\rightarrow$ Weil die Fläche nur positiv sein kann, gilt nur $x \leq 0$

$$\Rightarrow A = 4x \cdot f(x) = 4x\left(\frac{c - ax^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

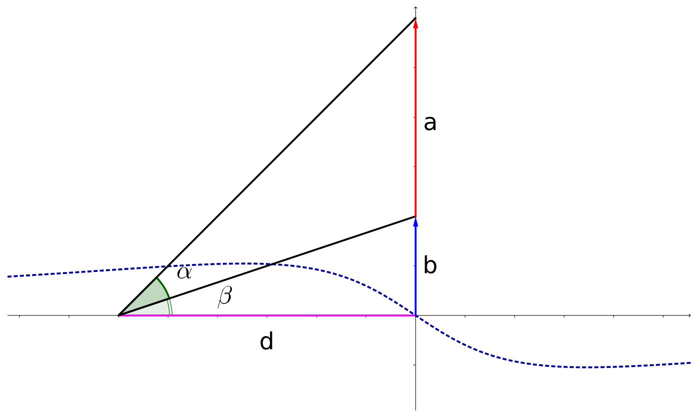
$$A = 4\sqrt{\frac{c}{2a}}\left(\frac{c - a\sqrt{\frac{c}{2a}}^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A = 4\sqrt{\frac{c}{2a}\left(\frac{c - a\frac{c}{2a}}{b}\right)}$$

$$\underline{\underline{A = 2\sqrt{\frac{c^2}{ab}} = \frac{2c}{\sqrt{ab}}}}$$

3.4 Statue

Aufgabenstellung:



$b =$ Erde zu Statuenfuss

$a =$ Satuenfuss zu Statuenkopf

$d =$ Statue zu Betrachter

$\alpha =$ Winkel von Statuenkopf zu Statuenfuss

Wo ist der Winkel α maximal? Dort wo die Ableitung der Funktion $\alpha(d)$ Null ergibt also $\alpha'(d) = 0$ ist. Um dies zu bestimmen muss α definiert werden. Da dies auf Anhieb nicht möglich ist, kann man sich folgende Überlegung machen:

$\beta =$ Winkel Betrachter zu Statuenboden

$\gamma =$ Winkel Betrachter zu Statuenkopf

$\Rightarrow \gamma = \alpha + \beta$

$$tan(\gamma) = \tan(\alpha + \beta) = \left(\frac{a+b}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = arctan\left(\frac{a+b}{d}\right)$$

Nun haben wir eine neue Unbekannte β. Diese muss eliminiert bzw. substituiert werden durch etwas bekanntes oder gesuchtes.

$$\tan(\beta) = \left(\frac{b}{d}\right) \rightarrow \beta = arctan\left(\frac{b}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = arctan\left(\frac{a+b}{d}\right) - \beta = arctan\left(\frac{a+b}{d}\right) - arctan\left(\frac{b}{d}\right)$$

$$\alpha' \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \alpha' = \frac{-(a+b)}{d^2+(a+b)^2} + \frac{b}{d^2+b^2} = 0$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{ab+b^2}$$

3.5 Implizites Ableiten

$$x^3 + y^3 - a \cdot x \cdot y = 0$$

a)
x und y in gegebene Formel einsetzen. Diese muss 0 werden, damit der entsprechende Punkt auf der Kurve liegt. b)

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

$$y = y(x) \quad y \text{ mit } y(x) \text{ substituieren}$$

$$\rightarrow x^3 + y(x)^3 - axy(x) = 0$$

Ableiten mit Kettenregel. $y(x)$ ist jeweils die innere Ableitung.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3y(x)^2 \cdot y'(x) - a\,(y(x) + x \cdot y'(x)) = 0$$

$$3x^2 + 3y(x)^2 \cdot y'(x) - a \cdot y(x) - a \cdot x \cdot y'(x) = 0$$

$$3y(x)^2 \cdot y'(x) - a \cdot x \cdot y'(x) = -3x^2 + a \cdot y(x) \quad \big| -3x^2 + a \cdot y(x)$$

$$y'(x) \cdot \big(3y(x)^2 \cdot -a \cdot x\big) = a \cdot y(x) - 3x^2 \quad |y'(x) \text{ ausklammern}$$

$$y'(x) = \frac{a \cdot y(x) - 3x^2}{3y(x)^2 \cdot -a \cdot x} \quad | : 3y(x)^2 \cdot -a \cdot x$$

$$y' = \frac{a \cdot y - 3x^2}{3y^2 \cdot -a \cdot x} \quad |y(x) = y$$

c)

$$T(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) - f(x_0)$$

$$T(x) = \frac{a \cdot y_0 - 3x_0^2}{3y_0^2 \cdot -a \cdot x_0} \cdot (x - x_0) - (x_0^3 + y_0^3 - a \cdot x_0 \cdot y_0)$$

x_0 und y_0 aus Aufgabenstellung einsetzen.

Achtung!
Fehler in Lösung.
Wenn du den Fehler findest:
Mail an: daniw

d)

$$f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot y - 3x^2}{3y^2 \cdot -a \cdot x} = 0$$

$$x^3 + y3 - a \cdot x \cdot y = 0$$

2 Gleichungen, 2 Unbekannte: Solve mit TR.

$$\Rightarrow x = a \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$$

$$\Rightarrow y = a \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{3}$$

Kapitel 4

Testat 4 - Integralrechnung

4.1 Stammfunktion

a)
$x < 0$: Steigung negativ
$x = 0$: Steigung null
$x < 0$ Steigung positiv

b)
e^x ist abgeleitet sich selbst. e^{-x} ist abgeleitet $-e^{-x}$.

4.2 Autofahrt

$$v(t) = at^3 - bt^2 + ct$$
$$s(t) = \int (v(t))dt = \underline{\underline{\frac{at^4}{4} - \frac{bt^3}{3} + \frac{ct^2}{2}}}$$

4.3 Schwimmbecken

$$v(t) = a \cdot e^{-bt}$$
$$V(t) = \int v(t)dt = \int \left(a \cdot e^{-bt}\right) dt = -\frac{a \cdot e^{-bt}}{b} + c$$

c ist die Integrationskonstante

$$V(0) = 0$$
$$-\frac{a \cdot e^0}{b} + c = 0$$
$$-\frac{a}{b} + c = 0$$
$$c = \frac{a}{b}$$
$$\rightarrow V(t) = -\frac{a \cdot e^{-bt}}{b} + \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}\left(e^{-bt} - 1\right)$$
$$-V(t) \cdot \frac{b}{a} = e^{-bt} - 1$$
$$-V(t) \cdot \frac{b}{a} + 1 = e^{-bt}$$
$$-bt = \ln\left(-V(t) \cdot \frac{b}{a} + 1\right)$$
$$\underline{\underline{t = -\frac{\ln\left(-V(t) \cdot \frac{b}{a} + 1\right)}{b}}}$$

4.4 Fläche durch Tangente

$$f(x) = x^3 + x^2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$
$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$T(x) = (3{x_0}^3 + 2x_0)(x - x_0) + {x_0}^3 + {x_0}^2$$
$$T(x) = 3x{x_0}^2 - 3{x_0}^3 + 2xx_0 - 2{x_0}^2 + {x_0}^3 + {x_0}^2$$
$$T(x) = 3x{x_0}^2 - 2{x_0}^3 + 2xx_0 - {x_0}^2$$
$$T(x) = x(3{x_0}^2 + 2x_0) - (2{x_0}^3 + {x_0}^2)$$
$$T(x) = 0$$
$$x_1 = \frac{2{x_0}^3 + {x_0}^2}{3{x_0}^2 + 2x_0}$$
$$A = A_{Gesamt} - A_{\Delta}$$
$$A_{\Delta} = \frac{(x_0 - x_1) \cdot f(x_0)}{2} = \frac{(x_0 - x_1) \cdot ({x_0}^3 + {x_0}^2)}{2}$$
$$A_{Gesamt} = \int_0^{x_0} (x^3 + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{x_0} = \frac{{x_0}^4}{a} + \frac{{x_0}^3}{3}$$
$$A = A_{Gesamt} - A_{\Delta} = \underline{\underline{\frac{{x_0}^4}{4} + \frac{{x_0}^3}{3} - \frac{(x_0 - x_1) \cdot ({x_0}^3 + {x_0}^2)}{2}}} = -\frac{{x_0}^4}{4} + \frac{5{x_0}^3}{6} - \frac{x_1({x_0}^3 + {x_0}^2)}{2}$$

4.5 Eingeschlossener Flächeninhalt

Aufgabenstellung:

$$f(x) = ax^2 - bax$$
$$g(x) = ax$$
$$a < 0$$

Lösung:

$$f(x_0) = g(x_0) \quad x_0 \neq 0$$
$$a{x_0}^2 - bax_0 = ax_0$$
$$a{x_0}^2 - (b+1)ax_0 = 0$$
$$x_{0_{1,2}} = \frac{(b+1)a \pm \sqrt{(b+1)^2a^2}}{2a} = \frac{b+1)a \pm (b+1)a}{2a} = \frac{(b+1) \pm (b+1)}{2}$$
$$x_{0_1} = \frac{2(b+1)}{2} = b+1$$
$$x_{0_2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \text{keine Lösung}$$
$$F(x) = \int_0^{x_0} (ax^2 - (b+1)ax)dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b(a+1)x^2}{2}\bigg|_0^{x_0} = \frac{a{x_0}^3}{3} - \frac{(b+1)a{x_0}^2}{2}$$
$$= \frac{a(b+1)^3}{3} - \frac{a(b+1)^3}{2} = \frac{2a(b+1)^3}{6} - \frac{3a(b+1)^3}{6} = -\frac{a(b+1)^3}{6}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{a = -\frac{6F}{(b+1)^3}}}$$

4.6 Horizontale Linie

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = y_0$$
$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$
$$F_1 = \int_{y_1}^{y_0} f^{-1}(y)dy = \int_{y_1}^{y_0} (\sqrt{y})\, dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{y_1}^{y_0} = \frac{2}{3}{y_0}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}{y_1}^{\frac{3}{2}}$$
$$F_2 = \int_{0}^{y_1} f^{-1}(y)dy = \int_{0}^{y_1} (\sqrt{y})\, dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{y_1} = \frac{2}{3}{y_1}^{\frac{3}{2}}$$
$$F_1 = F_2$$
$$\frac{2}{3}{y_0}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}{y_1}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}{y_1}^{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{2}{3}{y_0}^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}{y_1}^{\frac{3}{2}}$$
$${y_0}^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot {y_1}^{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{{y_0}^{\frac{3}{2}}}{2} = {y_1}^{\frac{3}{2}}$$
$$y_1 = \underline{\underline{\frac{y_0}{2^{\frac{2}{3}}} \approx \frac{y_0}{1.5874}}}$$

4.7 Vase

$$f(x) = \sqrt{x+a}$$
$$g(x) = \sqrt{x-b}$$
$$V(x) = \pi \int_0^h f(x)^2 dx - \pi \int_b^h g(x)^2 dx = \pi \left(\int_0^h (x+a)dx - \int_b^h (x-b)dx \right)$$

a)

$$V(x) = \pi \left(\frac{h^2}{2} + ah\Big|_0^h - \left(\frac{x^2}{2} - bx\Big|_b^h \right) \right) = \pi \left(\frac{h^2}{2} + ah - \left(\frac{h^2}{2} - bh - \frac{b^2}{b} + b^2 \right) \right)$$
$$= \pi \left(\frac{h^2}{2} + ah - \frac{h^2}{2} + bh + \frac{b^2}{2} - b^2 \right) = \pi \left(ah + bh + \frac{b^2}{2} - b^2 \right)$$
$$V(x) = \pi \left(ah + bh - b^2 \right)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{m = V \cdot \rho = \pi \cdot \rho \cdot \left(ah + bh - \frac{b^2}{2} \right)}}$$

b)

$$A_{M_x} = 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$A_{M_x} = 2\pi \int_0^h \sqrt{x+a} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+a}}\right)^2} dx$$

$$A_{M_x} = 2\pi \int_0^h \sqrt{(x+a) \cdot \left(1 + \frac{1}{4(x+a)}\right)} dx$$

$$A_{M_x} = 2\pi \int_0^h \sqrt{x + a + \frac{1}{4}} dx$$

$$A_{M_x} = 2\pi \int_0^h \frac{1}{2}\sqrt{4x+4a+1} dx$$

$$A_{M_x} = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\frac{2}{3}(4x+4a+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4}\Big|_0^h$$

$$A_{M_x} = \frac{1}{6}\pi (4x+4a+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^h$$

$$\to A_{M_x} = \frac{1}{6}\pi \left((4h+4a+1)^{\frac{3}{2}} - (4a+1)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$A_B = f(0)^2 \cdot \pi = a\pi$$

$$A_D = f(h)^2 \cdot \pi - g(h)^2 \cdot \pi = \pi \left(f(h)^2 - g(h)^2\right) = \pi (h + a - h + b) = \pi (a+b)$$

$$A = A_{M_x} + A_B + A_D = \frac{1}{6}\pi \left((4h+4a+1)^{\frac{3}{2}} - (4a+1)^{\frac{3}{2}}\right) + a\pi + \pi(a+b)$$

$$A = A_{M_x} + A_B + A_D = \pi \left(\frac{1}{6}\left((4h+4a+1)^{\frac{3}{2}} - (4a+1)^{\frac{3}{2}}\right) + a + (a+b)\right)$$

$$\underline{\underline{A = A_{M_x} + A_B + A_D = \pi \left(\frac{1}{6}\left((4h+4a+1)^{\frac{3}{2}} - (4a+1)^{\frac{3}{2}}\right) + 2a + b\right)}}$$

4.8 Zykloide

4.9 Fahrzeug