CONVESSITÀ

Def Sia I int. di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile

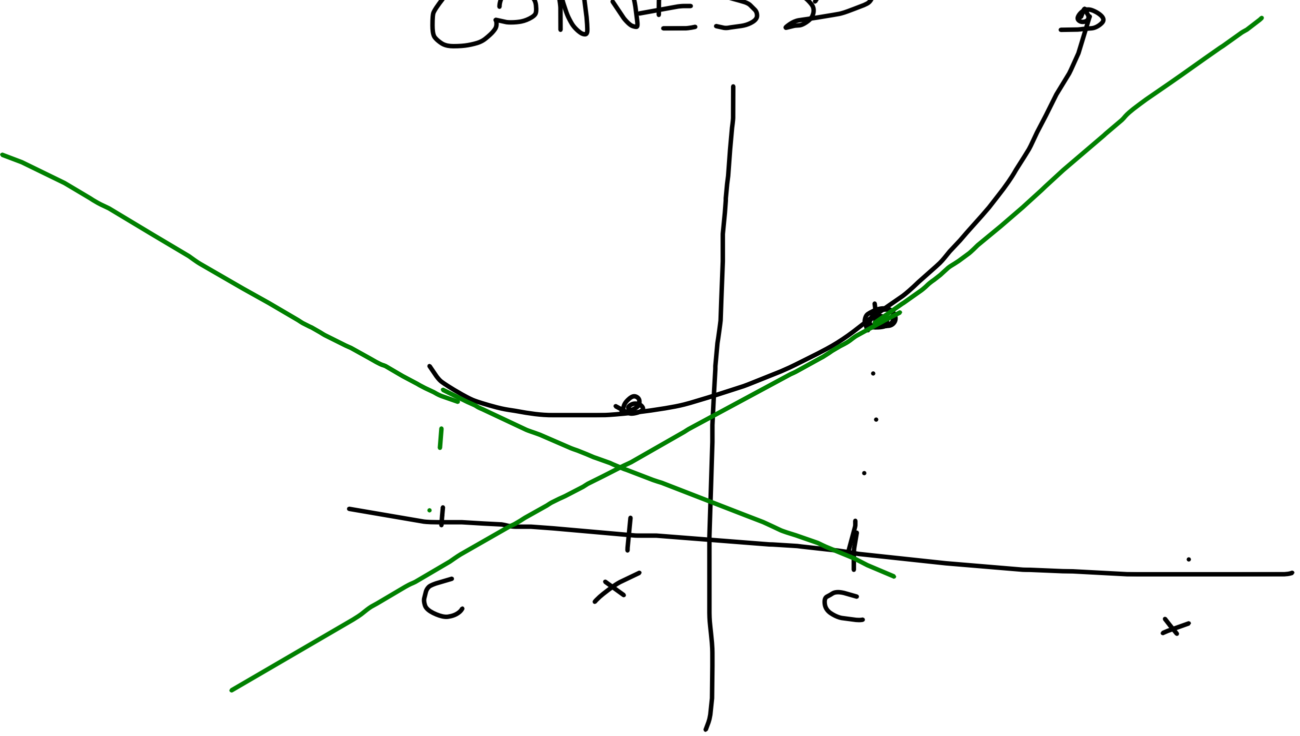
- Diciamo che f è CONVESSA se $\forall c, x \in I$

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

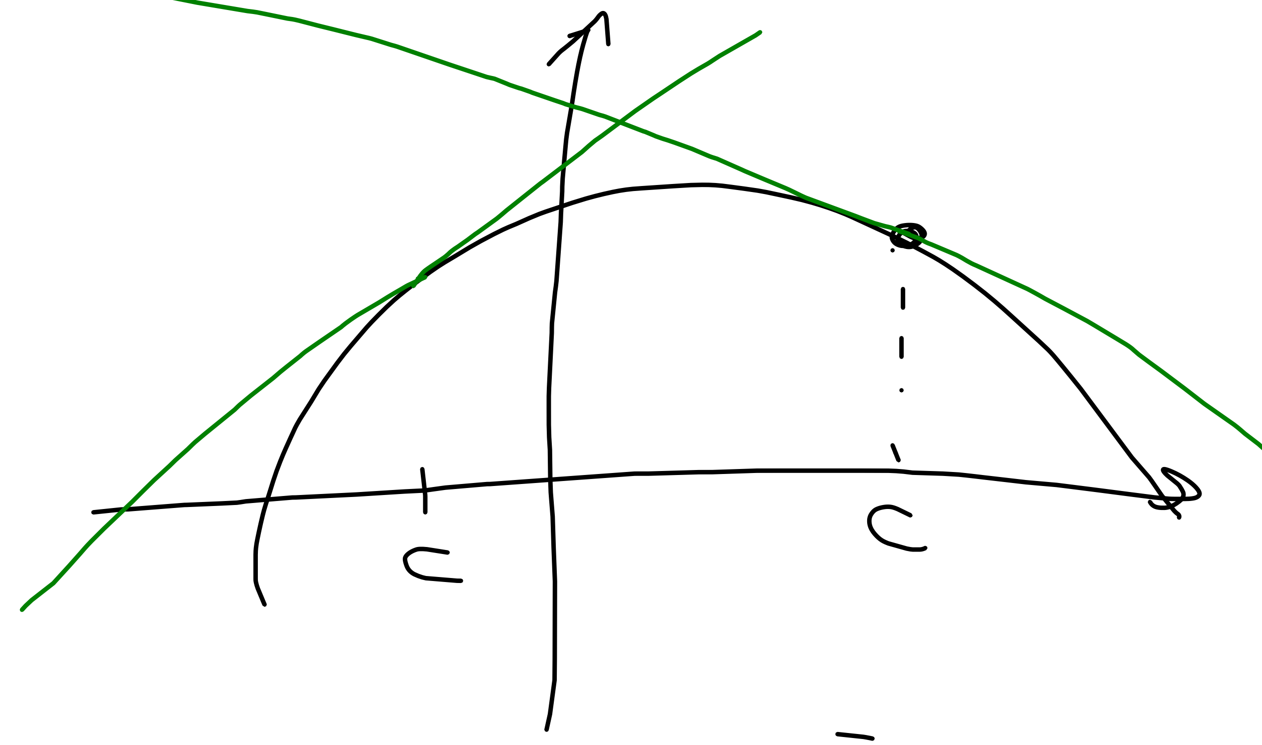
- Diciamo che f è CONCAVA se $\forall c, x \in I$

$$f(x) \leq f(c) + f'(c)(x-c)$$

CONVESSO

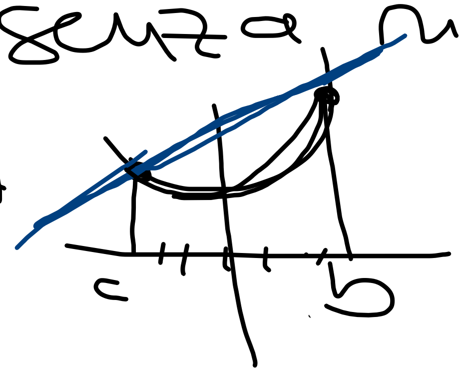


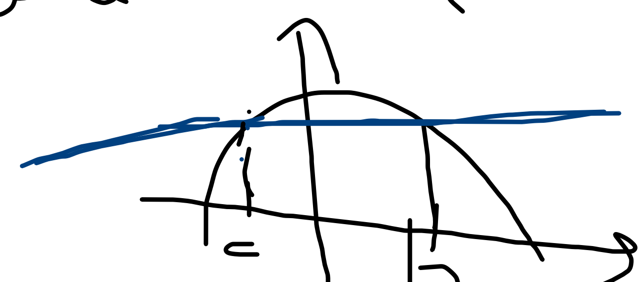
CONCAVO



<u>OSS</u> Potrei definire convessità e concavità senza richiedere che f sia derivabile:

<u>CONVESSA</u>





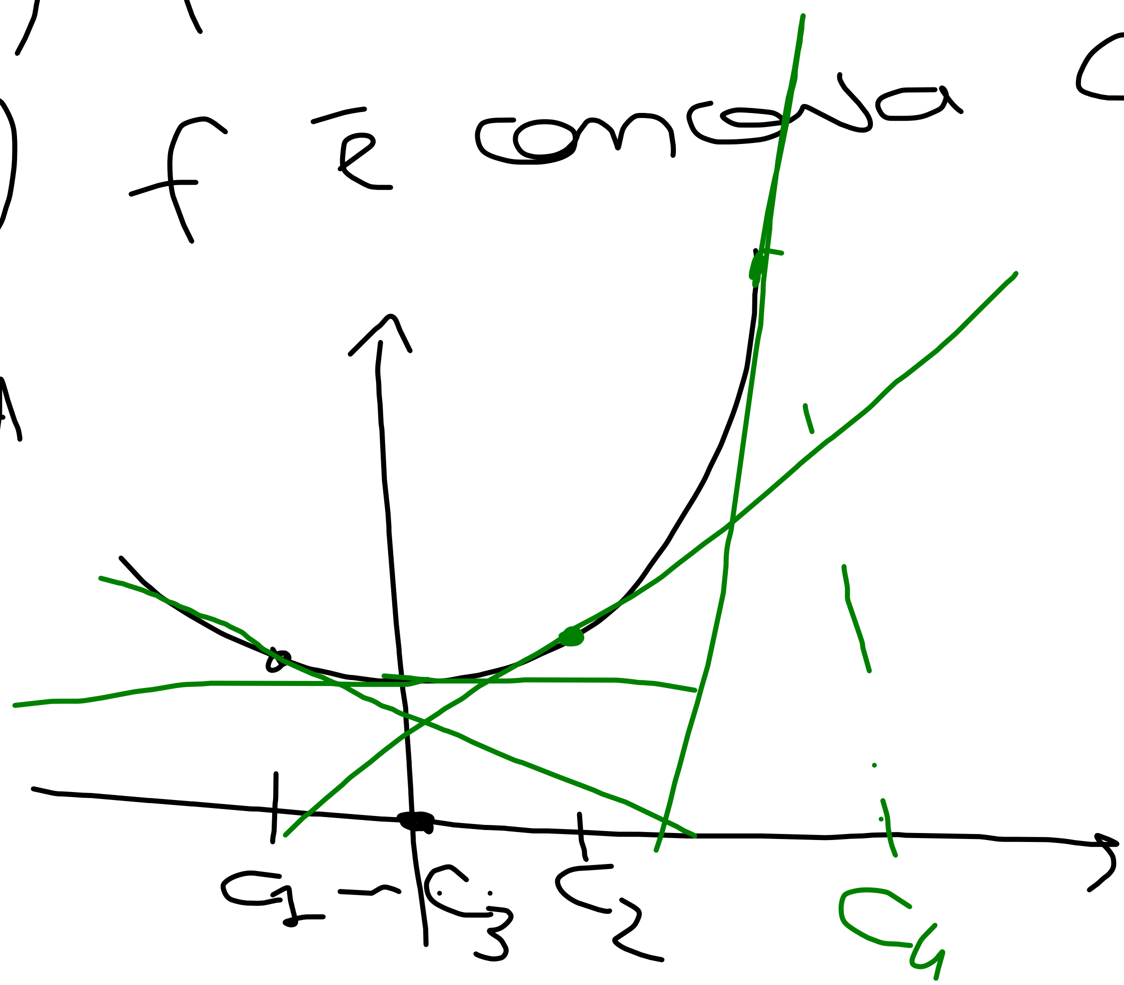
TFOR (TEST di CONVESSITÀ I)

Sia I int. di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile

1) f è convessa $\iff$ f' ↗

2) f è concava $\iff$ f' ↘

CONVESSA



CONCAVA

DIM 1) $\boxed{\Longrightarrow}$ Assumo per ipotesi f convessa,

quindi: $\forall x, y \in I$

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$$

Sommando membro a membro, si ha:

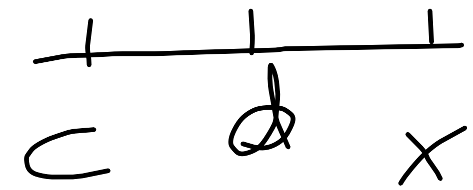
$$\cancel{f(y)} + \cancel{f(x)} \geq \cancel{f(x)} + \cancel{f(y)} + (x-y)\left(f'(y) - f'(x)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(f'(y) - f'(x)\right)(y-x) \geq 0 \Rightarrow f' \nearrow$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Assumo $f' \nearrow$ (e voglio dim f convessa)

Siano $c, x \in I$ $\underline{c < x}$,
Per il Teor di Lagrange, $\exists\, d \in (c, x)$ t.c.

$$\Rightarrow \underline{f(x) - f(c) = f'(d)(x - c)}$$



Poiché $f' \nearrow$, $d > c \Rightarrow f'(d) \geq f'(c)$

Concludo:

$$\underline{f(x)} = f(c) + \underbrace{f'(d)}_{f'(c)}\underbrace{(x-c)}_{>0} \geq \underline{f(c) + f'(c)(x - c)}$$

(Analogamente se $c > x$)

Def Sia I int. di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Sia $c \in I$.
Diciamo che f è derivabile 2 volte in c se f' è derivabile in c.

NOTAZIONE $\underline{f''(c)}$ $\left(\underline{\dfrac{d^2 f}{dx^2}}(c) \right)$

TEOR (TEST CONVESSITÀ II)

Sia I int di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

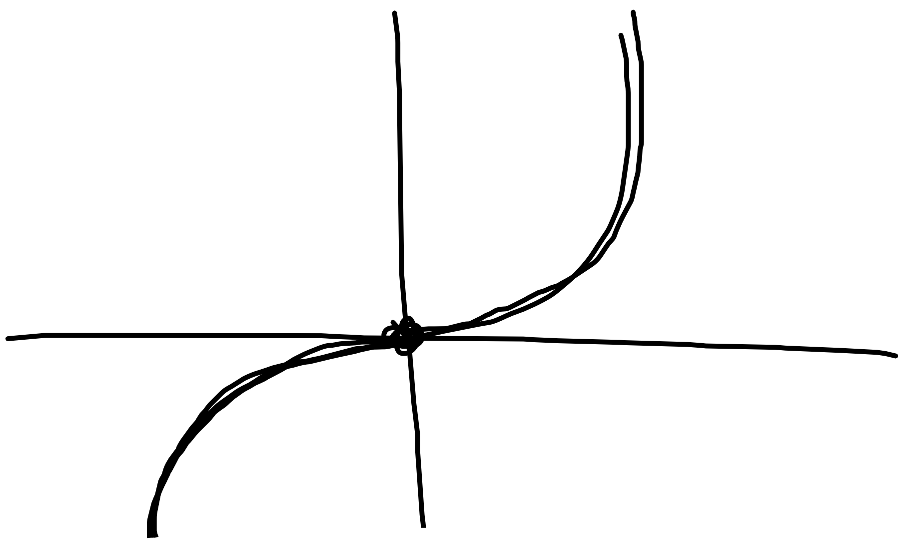
Supp. f derivabile due volte in I

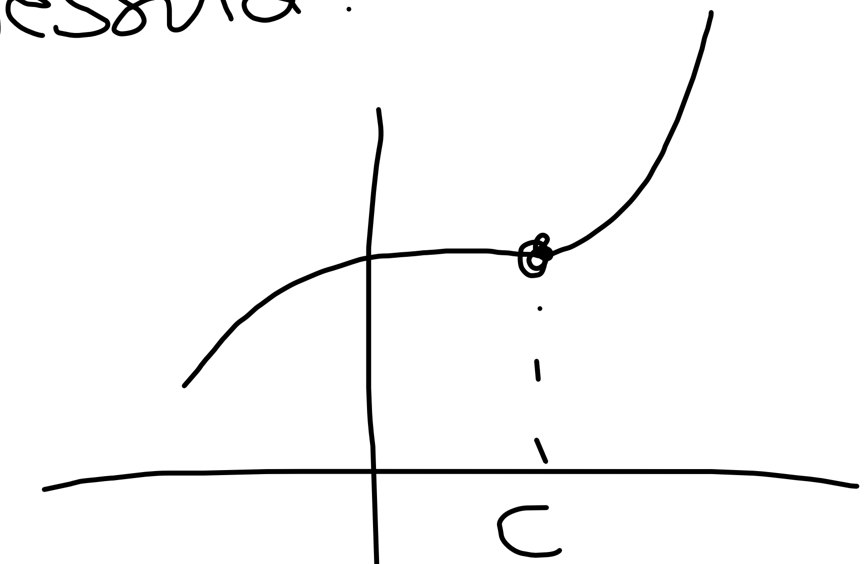
(1) f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

(2) f è concava $\iff f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.

DIM Combino Test convessità I con
Test monotonia (applicato a f')

PUNTI di FLESSO: punti in cui cambia la convessità:





TEOR (CONDIZIONE NECESSARIA per $\exists$ pti di flesso)

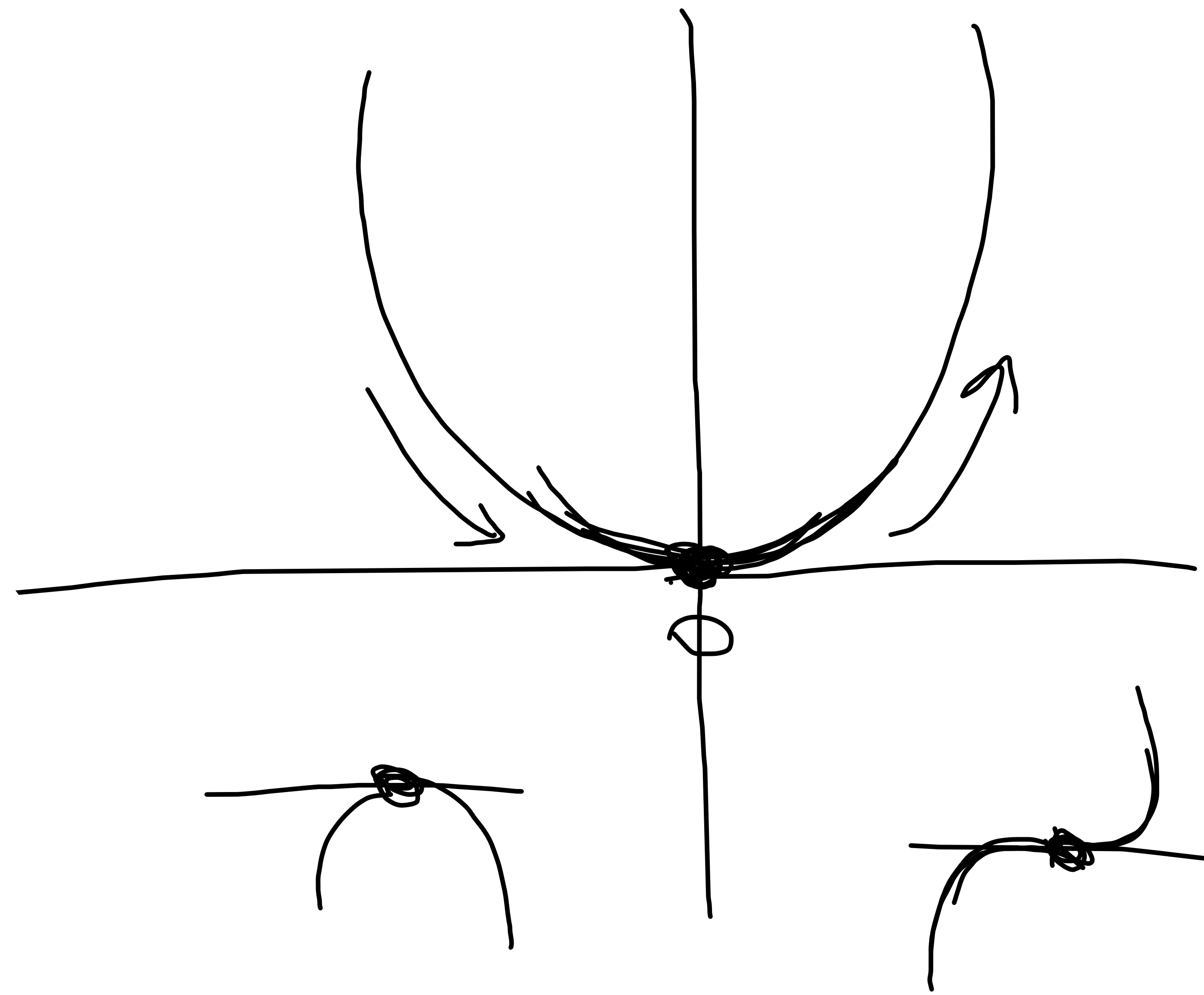
Sia I int. di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, f derivabile 2 volte in c.

Se c è pto di flesso $\Rightarrow f''(c) = 0$

ES (che non è sufficiente)

$f(x) = x^4$ $\quad f'(x) = 4x^3$ $\quad \underline{f''(x) = 12x^2}$

$\Rightarrow f''(0) = 0$



ma 0 non è

pto di flesso.

FORMULA di TAYLOR

ES $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\operatorname{sen} x = x + \underline{o(x)}$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x}}{x} = \emptyset$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to} \frac{x - x -}{x^2} = \emptyset$$