ESERCIZI DI MDP PER IL 25 NOVEMBRE 2022

(1) Avendo a disposizione 10 Euro (ed avendo la possibilità di contrarre debiti), facciamo 6 scommesse da 5 euro ciascuna. Ad ogni puntata abbiamo probabilità 60% di perdere i 5 Euro puntati e 40% di vincere 5 Euro. Poniamo Y_i = numero di vittorie nelle prime i scommesse e X_i = soldi rimasti dopo le prime i scommesse (con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).
   a. Determinare la densità di X_1 e di X_2;
   b. Determinare la densità delle Y_i;
   c. Mostrare che $X_i = 10 + 5Y_i - 5(i - Y_i)$;
   d. Determinare il valore atteso di X_6;
   e. Determinare $P(X_4 > 0)$ e $P(X_6 > 0)$;
   f. Determinare $P(X_4 > 0, X_6 > 0)$.

(2) Sette coppie marito-moglie in viaggio di nozze vogliono partecipare ad una attività extra in cui però ci sono solo 10 posti disponibili. Vengono pertanto estratte a caso 10 persone che parteciperanno a questa attività. Sia X il numero di coppie di cui viene estratto almeno un rappresentante e Y il numero di donne estratte.
   a. Qual è la probabilità di estrarre almeno un rappresentante di ogni coppia?
   b. Determinare la densità, il valore atteso e la varianza di X;
   c. Determinare la densità di Y;
   d. Determinare $P(X = 6, Y = 6)$;
   e. Per ogni $k \geq 0$, determinare $P(Y = k | X = 7)$.

(3) Lanciamo un dado 3 volte. Denotiamo con X_1, X_2, X_3 i risultati dei tre lanci e con $Y = |X_1 - X_2|$.
   a. Stabilire se gli eventi $\{X_2 = 2\}$ e $\{Y = 0\}$ sono indipendenti.
   b. Stabilire se le variabili Y e X_2 sono indipendenti.
   c. Determinare $E[Y]$;
   d. Determinare $P(Y = 0 | X_1 + X_2 + X_3 = 7)$.

(4) Siano $X \sim U(\{0, 1, 2, 3\})$ e $Y \sim U(\{1, 2, 3, 4\})$ due variabili aleatorie indipendenti di tipo uniforme, e sia $Z = \max(X, Y)$.
   a. Stabilire quali valori può assumere la variabile Z e determinarne la funzione di ripartizione.
   b. Determinare $E[Z]$;
   c. Determinare $\mathrm{Var}(Z)$.

(5) Siano $X \sim B(4, \frac{1}{3})$ ed $Y \sim H(4; 3, 3)$ due variabili indipendenti. Determinare

a. La funzione di ripartizione di X;
b. La funzione di ripartizione di Y;
c. Densità, valore atteso e varianza di $\min(X, Y)$

(6) Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti aventi entrambe densità

$$p_Y(k) = p_X(k) = \begin{cases} 0.1 & \text{se } k = -1, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } k = -2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Determinare il valore atteso di X e di Y;
(b) Determinare il valore atteso di X^2;
(c) Determinare il valore atteso e la varianza di $|X| + |Y|$.

Cenni di soluzioni

(1) a. Si ha

$$p_{X_1}(k) = \begin{cases} 0.4 & \text{se } k = 15 \\ 0.6 & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad p_{X_2}(k) = \begin{cases} 0.16 & \text{se } k = 20 \\ 0.48 & \text{se } k = 10 \\ 0.36 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b. Si ha $Y_i \sim B(i, 0.4)$.

c. Y_i è il numero di vittorie e $i - Y_i$ è il numero di perdite nell prime i scommesse e quindi il risultato segue.

d. Abbiamo dal punto precedente $X_6 = 10Y_6 - 20$ e quindi

$$E[X_6] = 10E[Y_6] - 20 = 10 \cdot 2.4 - 20 = 4.$$

e. Per il punto c abbiamo

$$P(X_4 > 0) = P(Y_4 > 1) = 1 - P(Y_4 = 0) - P(Y_4 = 1) = 1 - 0.6^4 - 40.6^3 \cdot 0.4 = 0.5248$$

e similmente possiamo calcolare $P(X_6 > 0) = P(Y_6 = 2) = 0.4557$.

f. Abbiamo $X_4 = 10(Y_4 - 1)$, dunque

$$\begin{aligned} P(X_4 > 0, X_6 > 0) &= P(X_4 \geq 20, X_6 > 0) + P(X_4 = 10, X_6 > 0) \\ &= P(X_4 \geq 20) + P(X_4 = 10) \cdot P(X_6 > 0 | X_4 = 10). \end{aligned}$$

Ora $P(X_4 = 10) = P(Y_4 = 2) = 0.3456$ e $P(X_4 \geq 20) = P(X_4 > 0) - P(X_4 = 10) = 0.5248 - 0.3456 = 0.1792$ e quindi possiamo concludere

$$P(X_4 > 0, X_6 > 0) = 0.1792 + 0.3456 \cdot (1 - 0.6^2) = 0.4004.$$

(2) a. Possiamo calcolare la probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi totali. Se $X = 7$, allora tutte e 7 le coppie sono rappresentate da almeno un partecipante: alla gita parteciperanno esattamente 3 coppie con entrambi i consorti, mentre 4 sposi parteciperanno senza consorte. Dunque

$$P(X = 7) = \frac{\binom{7}{3} 2^4}{\binom{14}{10}} = \frac{560}{1001} = \frac{80}{143}.$$

b. $P(X = 7) = \frac{80}{143}$ l'abbiamo già calcolata. Similmente se $X = 6$, allora 4 coppie parteciperanno con entrambi i consorti, mentre altri 2 sposi delle 3 coppie rimanenti parteciperanno senza consorte. Dunque

$$P(X = 6) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{2} 2^2}{\binom{14}{10}} = \frac{420}{1001} = \frac{60}{143}.$$

L'unico altro valore possibile per X è 5. La relativa probabilità può essere calcolata per differenza, oppure come

$$P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{14}{10}} = \frac{3}{143}.$$

Concludiamo

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{80}{143} & \text{se } k = 7; \\ \frac{60}{143} & \text{se } k = 6; \\ \frac{3}{143} & \text{se } k = 5; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dunque

$$E[X] = 7 \cdot \frac{80}{143} + 6 \cdot \frac{60}{143} + 5 \cdot \frac{3}{143} = \frac{935}{143} \sim 6,5385$$

$$E[X^2] = 49 \cdot \frac{80}{143} + 36 \cdot \frac{60}{143} + 25 \cdot \frac{3}{143} = \frac{6164}{143} \sim 43,1049$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 \sim 43,1049 - 42,7520 = 0,3529$$

c. Abbiamo $Y \sim H(10; 7, 7)$.
d. Abbiamo $P(X = 6, Y = 6) = \frac{\binom{7}{6}\binom{6}{4}}{\binom{14}{10}} = \frac{15}{143}$.
e. Gli unici valori possibili con probabilità non nulla sono $k = 3, 4, 5, 6, 7$. Scambiando maschi e femmine, vediamo che $P(Y = k|X = 7) = P(Y = 10 - k|X = 7)$. Inoltre se $k = 3, 4, 5, 6, 7$ allora

$$P(Y = k, X = 7) = \frac{\binom{7}{7-\max(k,10-k)}\binom{\max(k,10-k)}{3}}{\binom{14}{10}} = \begin{cases} \frac{\binom{7}{0}\binom{7}{3}}{\binom{14}{10}} & \text{se } k = 3, 7 \\ \frac{\binom{7}{1}\binom{6}{3}}{\binom{14}{10}} & \text{se } k = 4, 6 \\ \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{3}}{\binom{14}{10}} & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto

$$P(Y = k|X = 7) = \frac{P(Y = k, X = 7)}{P(X = 7)} = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{se } k = 3, 7 \\ \frac{4}{16} & \text{se } k = 4, 6 \\ \frac{6}{16} & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(3) (a) Abbiamo $P(Y = 0) = P(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$, $P(Y_2 = 2) = \frac{1}{6}$ e $P(Y = 0, X_2 = 2) = P(X_1 = X_2 = 2) = \frac{1}{36}$ per cui gli eventi "$Y = 0$" e "$X_2 = 2$" sono indipendenti.
(b) Sono dipendenti. Infatti $P(Y = 5, X_2 = 3) = 0$ mentre $P(Y = 5) \neq 0$ e $P(X_2 = 3) \neq 0$.

(c) Abbiamo bisogno della densità di Y. Abbiamo già visto $P(Y=0)=\frac{1}{6}$. Gli altri valori della densità sono

$$p_Y(k)=\begin{cases}\frac{6}{36} & \text{se } k=0\\ \frac{10}{36} & \text{se } k=1\\ \frac{8}{36} & \text{se } k=2\\ \frac{6}{36} & \text{se } k=3\\ \frac{4}{36} & \text{se } k=4\\ \frac{2}{36} & \text{se } k=5\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

per cui

$$E[Y]=\frac{1}{18}(5+8+9+8+5)=\frac{35}{18}.$$

(d) La condizione $X_1+X_2+X_3=7$ si verifica in 15 modi per cui $P(X_1+X_2+X_3=7)=\frac{15}{6^3}$. Di questi 15 modi esattamente 3 soddisfano anche la condizione $Y=0$, per cui $P(X_1+X_2+X_3=7,Y=0)=\frac{3}{6^3}$. Concludiamo che

$$P(Y=0|X_1+X_2+X_3=7)=\frac{P(X_1+X_2+X_3=7,Y=0)}{P(X_1+X_2+X_3=7)}=\frac{1}{5}.$$

(4) (a) La variabile Z può assumere valori $\{1,2,3,4\}$. Possiamo scrivere le funzioni di ripartizione delle variabili coinvolte. Siccome tutte queste variabili assumono solo valori interi ci limitiamo a considerare le funzioni di ripartizione calcolate su valori interi. Abbiamo

$$F_X(k)=\begin{cases}0 & \text{se } k<0\\ \frac{k+1}{4} & \text{se } k=0,1,2,3\\ 1 & \text{se } k\geq 3\end{cases}$$

e

$$F_Y(k)=\begin{cases}0 & \text{se } k<1\\ \frac{k}{4} & \text{se } k=1,2,3,4\\ 1 & \text{se } k\geq 4\end{cases}$$

Ricordando che $F_{\max(X,Y)}(k)=F_X(k)F_Y(k)$ abbiamo

$$F_Z(k)=\begin{cases}0 & \text{se } k<1\\ \frac{k(k+1)}{16} & \text{se } k=1,2,3\\ 1 & \text{se } k\geq 4\end{cases}$$

(b) La densità di Z la possiamo ottenere per sottrazione dalla funzione di ripartizione osservando che

$$P(Z=k)=P(Z\leq k)-P(Z\leq k-1)=F_Z(k)-F_Z(k-1)$$

e abbiamo quindi

$$p_Z(k) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } k = 1 \\ \frac{2}{8} & \text{se } k = 2 \\ \frac{3}{8} & \text{se } k = 3 \\ \frac{2}{8} & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo quindi

$$E[Z] = \frac{1}{8}(1 + 4 + 9 + 8) = \frac{11}{4}.$$

(c) Calcoliamo

$$E[Z^2] = \frac{1}{8}(1 + 8 + 27 + 32) = \frac{17}{2}$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = \frac{17}{2} - \frac{121}{16} = \frac{15}{16}.$$

(5) Le variabili X e Y hanno densità

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{16}{81} & \text{se } k = 0 \\ \frac{32}{81} & \text{se } k = 1 \\ \frac{24}{81} & \text{se } k = 2 \\ \frac{8}{81} & \text{se } k = 3 \\ \frac{1}{81} & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad p_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se } k = 1 \\ \frac{3}{5} & \text{se } k = 2 \\ \frac{1}{5} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le funzioni di ripartizione di X e Y sono quindi

$$F_X(k) \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ \frac{16}{81} & \text{se } 0 \leq k < 1 \\ \frac{48}{81} & \text{se } 1 \leq k < 2 \\ \frac{72}{81} & \text{se } 2 \leq k < 3 \\ \frac{80}{81} & \text{se } 3 \leq k < 4 \\ 1 & \text{se } k \geq 4 \end{cases} \qquad F_Y(k) \begin{cases} 0 & \text{se } k < 1 \\ \frac{1}{5} & \text{se } 1 \leq k < 2 \\ \frac{4}{5} & \text{se } 2 \leq k < 3 \\ 1 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

Detto $W = \min(X, Y)$ abbiamo che W può assumere valori 0,1,2,3. Abbiamo $P(W = 0) = P(X = 0) = \frac{16}{81}$. Inoltre

$$P(W = 1) = P(X = 1) + P(X > 1, Y = 1) = \frac{32}{81} + \frac{33}{81} \cdot \frac{1}{5} = \frac{193}{405}$$

$$P(W = 2) = P(X = 2, Y \geq 2) + P(X > 2, Y = 2) = \frac{24}{81} \cdot \frac{4}{5} + \frac{9}{81} \cdot \frac{3}{5} = \frac{123}{405}$$

$$P(W = 3) = P(X \geq 3, Y = 3) = \frac{9}{81} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{405}$$

per cui ricapitolando abbiamo

$$p_W(k) = \begin{cases} \frac{80}{405} & \text{se } k = 0 \\ \frac{193}{405} & \text{se } k = 1 \\ \frac{123}{405} & \text{se } k = 2 \\ \frac{9}{405} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo ora calcolare

$$E[W] = \frac{1}{405}(193 + 246 + 27) = \frac{466}{405} \sim 1,1506$$

$$E[W^2] = \frac{1}{405}(193 + 492 + 81) = \frac{766}{405} \sim 1,8914$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(W) = E[W^2] - E[W]^2 \sim 0,5675$$

(6) Abbiamo

$$E[X] = E[Y] = \frac{1}{10}(-1 + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}(-2) = -0,4.$$

$$E[X^2] = \frac{1}{10}(1 + 1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}) + \frac{1}{2}4 = 3,45.$$

Le variabili $|X|$ ed $|Y|$ sono indipendenti perché lo erano X ed Y. Dunque $\mathrm{Var}(|X| + |Y|) = \mathrm{Var}(|X|) + \mathrm{Var}(|Y|)$. Abbiamo

$$E[|X|] = E[|Y|] = \frac{1}{10}(1 + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}(2) = 1,8$$

per cui $E[|X| + |Y|] = 3,6$. Inoltre

$$E[|X|^2] = E[X^2] = 3,45$$

per cui

$$\mathrm{Var}(|X|) = \mathrm{Var}(|Y|) = 3,45 - 1,8^2 = 0,21$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(|X| + |Y|) = 0,42.$$