PROVE D'ESAME DI CCP

12/06/2014

(1) Sia A un mazzo di 16 carte, contenente le carte di valore da 1 a 8 sia di cuori che di quadri.
  (a) Quanti sono i sottoinsiemi di 10 carte di A?
  (b) Quanti sono i sottoinsiemi di 10 carte di A in cui compaiono tutti gli 8 valori? (Se possibile, rispondere a questa domanda mostrando che si tratta di un prodotto condizionato)

  Consideriamo ora il fenomeno aleatorio dato dall'estrazione di 10 carte dal nostro mazzo e poniamo $X =$"numero di carte estratte aventi valori distinti tra loro" e $Y =$"numero di carte di cuori estratte"
  (c) Descrivere uno spazio di probabilità che modellizzi questo fenomeno aleatorio;
  (d) Determinare la densità di Y;
  (e) Determinare la densità di X;
  (f) Stabilire se X e Y sono indipendenti.

(2) Sia
$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}t + 1 & -\frac{4}{3} \leq t \leq 0 \\ (t-1)^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  (a) Verificare che $f(t)$ è la densità di una variabile aleatoria continua X.
  (b) Determinare $P(X \leq \frac{1}{2})$.
  (c) Stabilire se X soddisfa la proprietà di mancanza di memoria.

(3) Sia
$$p(k) = \begin{cases} 2^{-k} & k = 1, 2, \ldots, 5 \\ 2^{-5} & k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  (a) Verificare che $p(k)$ è la densità di una variabile aleatoria discreta X.
  (b) Determinare media e varianza di X.
  (c) Date 32 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \ldots, X_{32}$ tutte aventi densità $p(k)$ determinare
$$P(X_1 + \cdots + X_{32}) \geq 65.$$

08/07/2014

(1) Novanta palline numerate vengono tutte estratte a caso senza rimpiazzo. Vengono poi riestratte tutte nuovamente senza rimpiazzo una seconda volta. Consideriamo le variabili X_i = numero della i-esima pallina estratta nella prima sequenza di estrazioni, e Y_i = numero della i-esima pallina estratta nella seconda sequenza di estrazioni, dove $i = 1, \ldots, 90$.
   (a) Descrivere uno spazio di probabilità che modellizzi questo fenomeno aleatorio.
   (b) Deteminare $P(X_i = Y_i)$.
   (c) Stabilire se X_i e Y_j sono indipendenti, dove $i \neq j$.
   (d) Stabilire se X_i e X_j sono indipendenti, dove $i \neq j$.
   (e) Determinare la densità della variabile $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{90}$.
   (f) Sia ora $Z = |\{i = 1, \ldots, 90 : X_i = Y_i\}|$. Determinare $E[Z]$.

(2) Si considerino 2 variabili aleatorie indipendenti X ed Y. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta

$X \backslash Y$	0	2
0		$\frac{1}{5}$
-1		$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	

   (a) Detto $t = p_{X,Y}(3, 2)$ giustificare il fatto che t soddisfa la seguente equazione: $\left(\frac{1}{12} + t\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{15} + t\right) = t$
   (b) Calcolare i possibili valori per t.
   (c) Scelto uno di questi valori completare la tabella a doppia entrata della densità congiunta delle variabili X ed Y.
   (d) Determinare $\mathrm{Var}(X - Y)$.

(3) Giovanni è un esperto di tiro con l'arco. La variabile X ="distanza dal centro del bersaglio di un suo tiro (espressa in decimetri)" è data dal valore assoluto di una variabile aleatoria normale standard, cioè $X = |\zeta_0|$, dove $\zeta_0 \sim N(0, 1)$.
   (a) Determinare la probabilità che un suo tiro termini a meno di 5 centimetri di distanza dal centro del bersaglio.
   (b) Determinare la funzione di ripartizione $F_X(t)$ di X (espressa in termini di $\Phi(t)$, la funzione di ripartizione di ζ_0)
   (c) Determinare la probabibilità che il migliore di 5 suoi lanci termini a meno di 1 centimetro di distanza dal centro del bersaglio.
   (d) Supponendo che il bersaglio abbia un raggio di 30 centimetri, determinare la probabilità che almeno 1 dei suoi 5 lanci non centri il bersaglio.

22/07/2014

(1) Un'urna contiene 2 palline bianche e 2 palline rosse. Le palline vengono estratte successivamente una ad una dall'urna rimpiazzando nell'urna le rosse e NON rimpiazzando le bianche. Poniamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estrazione dà una pallina bianca} \\ 0 & \text{se la } i\text{-esima estrazione dà una pallina rossa} \end{cases}$$

e $T =$ "numero dell'estrazione in cui viene pescata l'ultima pallina bianca"

(a) Descrivere uno spazio di probabilità che modellizzi questo fenomeno aleatorio.
(b) Determinare la densità di X_1 e di X_2;
(c) Stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti;
(d) Determinare la densità di X_i per ogni $i > 0$;
(e) Esprimere T come somma di due variabili geometriche modificate;
(f) Deteminare il valore atteso per T.

(2) Sia X una variabile aleatoria continua di densità

$$f_X(t) = \begin{cases} at^{a-1} & \text{se } 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove a è un parametro reale positivo.

(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_X di X;
(b) Tracciare un grafico approssimativo di f_X e di F_X.
(c) Determinare $P(X > -2)$ e $P(X < \frac{1}{2})$.
(d) Determinare la densità di $Y = -\log X$.

(3) Consideriamo 100 variabili $X_1, \ldots, X_{100}$ di densità uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$ e indipendenti tra loro.

(a) Determinare la densità della variabile $|X_1|$.
(b) Determinare $P(\frac{|X_1|+\cdots+|X_{100}|}{100} > 0.01)$.
(c) Determinare $P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}}{100} > 0.01)$.
(d) Determinare $P(\frac{X_1^2+\cdots+X_{100}^2}{100} > 0.01)$.
(e) Determinare $P(\frac{(X_1+\cdots+X_{100})^2}{100} > 0.01)$.

09/09/2014

(1) Un birrificio produce tre tipi di birre: bionda, rossa e scura. La bionda è scelta dal 50% dei clienti, la scura dal 30% e la rossa dal 20%. Dieci amici, tra cui Luca e Giovanni, vanno in questo birrificio ed ognuno di essi sceglie una birra.
  (a) Descrivere uno spazio Ω dei possibili risultati di questo fenomeno aleatorio. Quanti elementi ha Ω?
  (b) Qual è la probabilità che vengano ordinate esattamente 5 birre bionde?
  (c) Se sapessimo che Giovanni non ha ordinato una birra bionda, quale sarebbe la probabilità che ne abbia ordinata una scura?
  (d) Qual è la probabilità che l'ordine dei dieci amici sia di 5 bionde, 3 scure e 2 rosse?
  (e) Sia A l'evento "vengono ordinate 5 bionde, 3 scure e 2 rosse" e B l'evento "Luca ha ordinato una birra bionda". Stabilire se A e B sono indipendenti.

(2) Siano X una variabile uniforme nell'insieme finito $\{1, 2, 4\}$ e Y una variabile uniforme nell'intervallo $[1, 4]$. Supponiamo che X ed Y siano indipendenti.
  (a) Determinare $P(X > 1|Y > 2)$;
  (b) Determinare $P(X < Y)$;
  (c) Determinare $P(XY > 6)$
  (d) (*) Determinare la funzione di ripartizione di XY

(3) Una miscela radioattiva contiene 10^6 particelle ognuna delle quali decade in un tempo aleatorio di densità esponenziale di media 1 anno.
  (a) Determinare la probabilità che una data particella decada in meno di 2 anni.
  (b) Sia X la variabile "numero di particelle che decadono in 5 anni". Che densità ha X?
  (c) Determinare la probabilità che almeno il 99,3% di queste particelle decada in 5 anni (cioè $P(X > 0,993 \cdot 10^6)$).

09/01/2015

(1) Un bersaglio consiste di 10 regioni concentriche numerate dall'interno verso l'esterno da 1 a 10. La regione centrata in un lancio di freccia è una variabile aleatoria che si può supporre geometrica modificata di parametro $\frac{1}{5}$ (considerando delle regioni immaginarie numerate da 11 in poi all'esterno del bersaglio).
 (a) Determinare la probabilità di centrare la regione numero 1 in un lancio di freccia;
 (b) Determinare la probabilità di centrare il bersaglio in un lancio di freccia;

 Supponiamo ora di lanciare un dado e denotiamo con X il valore uscito dal dado. Effettuiamo quindi X lanci di freccia e denotiamo con Y la variabile "numero di lanci che hanno centrato la zona 1"
 (c) Determinare la densità di X e di Y;
 (d) Stabilire se X e Y sono indipendenti;
 (e) Determinare $P(Y = 1|X = 2)$ e $P(X = 2|Y = 1)$;
 (f) Determinare $P(X + Y = 2)$.
 (g) Determinare $E[Y]$.

(2) Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 (a) Determinare la più piccola famiglia coerente di eventi $\mathcal{A}$ in Ω che contenga gli eventi $\{1, 2\}$ e $\{3, 5\}$.
 (b) Stabilire se la funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ data da $X(n) = (-1)^n$ è una variabile aleatoria.
 (c) Stabilire se la funzione $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ data da $Y(n) = n$ è una variabile aleatoria.
 (d) Verificare che la funzione Z data da
$$Z(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 4 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
 è una variabile aleatoria. È possibile calcolarne la media?

(3) Consideriamo 50 variabili $X_1, \ldots, X_{50}$ di densità esponenziale di parametro 2 e indipendenti tra loro.
 (a) Determinare la densità, media e varianza della variabile $X_1 - 1$.
 (b) Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{50} > 45)$.
 (c) Determinare $P(X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \cdots + X_{49} - X_{50} > 0.1)$.

25/02/2015

(1) Un'urna contiene due palline rosse e una bianca. Le estraiamo successivamente con rimpiazzo per cinque volte e poniamo, per $i = 1, \dots, 5$ e $j = 1, \dots, 4$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-ma estratta è bianca} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad Y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } X_j = X_{j+1} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Determinare la densità delle variabili X_i;
(b) Determinare la densità della variabile $X = X_1 + \cdots + X_5$;
(c) Determinare la densità delle variabili Y_j;
(d) Stabilire se le variabili Y_j sono indipendenti tra loro;
(e) Determinare media e varianza di $Y = Y_1 + \cdots + Y_4$.

(2) Ubaldo prende il tram tutte le mattine per andare al lavoro. Arriva alla fermata in un orario casuale e sappiamo che passa un autobus ogni dieci minuti. Siano T_i, $i = 1, \dots, 30$ i tempi di attesa in 30 giorni di lavoro.
(a) Determinare la densità delle T_i;
(b) Qual è la probabilità che aspetti sempre (in questi 30 giorni) più di 5 minuti?
(c) Qual è la probabilità che aspetti mediamente più di 6 minuti?

(3) Si considerino due variabili X ed Y, indipendenti tra loro. La X assume i valori $-1, 0, 1$ e la Y i valori $1, 2$. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta $p = p_{X,Y}$: $p(1, 1) = 1/9$, $p(-1, 1) = 1/3$ e $p(0, 1) = 1/9$.
(a) Determinare la densità congiunta e le densità marginali delle variabili X ed Y.
(b) Determinare $P(X + Y > 0)$;
(c) Determinare $E[X + Y]$ e $\mathrm{Var}(X + Y)$.

10/06/2015

Esercizio 1(13 punti) Un'urna contiene due palline bianche e una pallina rossa. Estraiamo senza rimpiazzo le palline fino ad ottenere una pallina bianca e denotiamo con X il numero di estrazioni effettuate. Dopodiché prendiamo X mazzi di 40 carte italiane (le quali prendono valore da 1 a 10), ne estraiamo due a caso senza rimpiazzo e denotiamo con Y_1 e Y_2 i valori delle due carte ottenute rispettivamente.

(1) Determinare la densità di X, di Y_1, e di Y_2;
(2) Determinare la probabilità che le due carte estratte abbiano lo stesso valore;
(3) Stabilire se X e Y_1 sono indipendenti;
(4) Stabilire se Y_1, Y_2 sono indipendenti;

(1) La variabile X può assumere i valori 1 e 2. Si ha

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } k = 1; \\ \frac{1}{3} & \text{se } k = 2; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le variabili Y_1 e Y_2 possono assumere i valori da 1 a 10 ed è evidente per la simmetria del problema che questi 10 valori debbano essere assunti con la stessa probabilità da cui sia Y_1 che Y_2 sono uniformi in $\{1, 2, \ldots, 10\}$.
(2)Si ha, applicando la formula della probabilità totali

$$\begin{aligned} P(Y_1 = Y_2) &= 10P(Y_1 = Y_2 = 1) = 10(P(X = 1)P(Y_1 = Y_2 = 1|X = 1) + P(X = 2)P(Y_1 = Y_2 = 1|X = 2)) \\ &= 10(\frac{2}{3}\frac{4}{40}\frac{3}{39} + \frac{1}{3}\frac{8}{80}\frac{7}{79}) \\ &= \frac{2}{39} + \frac{7}{237} = 0.0808 \end{aligned}$$

(3)Informazioni sul valore assunto da X non alterano la probabilità che Y_1 possa assumere un determinato valore k, cioè:

$$P(Y_1 = k|X = 1) = P(Y_1 = k|X = 2) = P(Y_1 = k)$$

e quindi X ed Y_1 sono indipendenti.
(4) Nel punto (2) abbiamo calcolato $P(Y_1 = Y_2 = 1) = 0.00808$ da cui abbiamo

$$0.808 = P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) \neq P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1) = 0.010$$

da cui segue che Y_1 e Y_2 sono dipendenti
Esercizio 2(9 punti) Sia X una variabile continua uniforme nell'intervallo $[-1, 2]$.

(1) Determinare la densità della variabile $-X$;
(2) Calcolare $P(|X| < 1/2)$;
(3) Determinare la funzione di ripartizione e la densità della variabile $|X|$.

(1) È abbastanza intuitivo che se X assume valori in mdo uniforme in $[-1, 2]$ allora $-X$ assume valori in modo uniforme in $[-2, 1]$ da cui $-X \sim U([-2, 1])$. Si può anche procedere più formalmente nel seguente modo. Intanto è chiaro che se X assume valori in $[-1, 2]$ allora $-X$ assume valori in $[-2, 1]$ andiamo quindi a determinare la funzione di ripartizione di $-X$: per ogni $t \in [-2, 1]$ abbiamo:

$$F_{-X}(t) = P(-X \leq t) = P(X \geq -t) = 1 - F_X(-t) = 1 - \frac{(-t) + 1}{3} = \frac{t + 2}{3};$$

possiamo a questo punto osservare che questa è la funzione di ripartizione di una variabile uniforme in $[-2, 1]$.

(2) Abbiamo

$$P(|X| < 1/2) = P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

(3) Si ha chiaramente che $|X|$ assume valori in $[0,2]$. Andiamo a determinarne la funzione di ripartizione: se $0 \leq t \leq 1$ abbiamo

$$F_{|X|}(t) = P(|X| < t) = P(-t < X < t) = \frac{2t}{3}$$

mentre se $1 \leq t \leq 2$ abbiamo

$$F_{|X|}(t) = P(|X| < t) = P(-1 < X < t) = \frac{1}{3} + \frac{t}{3}$$

da cui, nel complesso,

$$F_{|X|}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0; \\ \frac{2t}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{t+1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2; \\ 1 & \text{se } t > 2; \end{cases}$$

La densità la otteniamo per derivazione:

$$f_{|X|}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \text{ o } t > 2; \\ \frac{2}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Esercizio 3 (9 punti) Sia X una variabile aleatoria continua la cui funzione di ripartizione è

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0; \\ \frac{2t}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{t+1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2; \\ 1 & \text{se } t > 2; \end{cases}$$

(1) Determinare la densità di X;
(2) determinare media e varianza di X;
(3) date 44 variabili indipendenti $X_1, \ldots, X_{44}$ la cui funzione di ripartizione è $F(t)$ determinare $P(X_1 + \cdots + X_{44} > 40)$.

(1) Si potrebbe anche osservare che questa funzione di ripartizione data è proprio la funzione di ripartizione di $|X|$ dell'esercizio precedente. IN ogni caso la densità si ottiene per derivazione della funzione di ripartizione e quindi

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \text{ o } t > 2; \\ \frac{2}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

(2) Utilizziamo la definizione di media:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} s f_X(s) ds = \int_0^1 \frac{2}{3} s \, ds + \int_1^2 \frac{1}{3} s \, ds = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Per determinare la varianza calcoliamo prima

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 f_X(s) ds = \int_0^1 \frac{2}{3} s^2 \, ds + \int_1^2 \frac{1}{3} s^2 \, ds = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = 1.$$

Ne segue

$$Var(X) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

(3) Utilizziamo il teorema del limite centrale per approssimare $X_1 + \cdots + X_{44}$ con una variabile normale $\zeta \sim N(44 \cdot \frac{5}{6}, 44 \cdot \frac{11}{36}) = N(\frac{110}{3}, \frac{121}{9})$. Abbiamo quindi:

$$P(X_1 + \cdots X_{44} > 40) = P(\zeta_0 > \frac{40 - \frac{110}{3}}{\frac{11}{3}}) = P(\zeta_0 > \frac{10}{11}) = 18.14\%.$$

29/06/2015

Esercizio 1 Lanciamo due dadi *simultaneamente* e poniamo A_1, A_2, con $A_1 \leq A_2$ i risultati dei due dadi.

(1) Determinare $P(A_1 = A_2 = 3)$ e $P(A_1 = 2, A_2 = 3)$;
(2) Determinare la densità congiunta di (A_1, A_2);
(3) Determinare le densità marginali di A_1 e di A_2
(4) Stabilire se A_1 e A_2 sono indipendenti;
(5) Determinare $P(A_1 \geq 3, A_2 \geq 5)$.

(1) L'evento $A_1 = A_2 = 3$ si verifica se entrambi i dadi danno come risultato 3 per cui $P(A_1 = A_2 = 3) = \frac{1}{36}$. L'evento $A_1 = 2 \cap A_2 = 3$ si verifica se uno dei due dadi dà 2 e l'altro dà 3 per cui $P(A_1 = 2, A_2 = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
(2) I valori che possono essere assunti dalla variabile bidimensionale (A_1, A_2) sono tutte le coppie (i, j) con $1 \leq i \leq j \leq 6$. Ragionando come nel punto (1) possiamo dedurre che

$$p_{A_1,A_2}(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{se } 1 \leq i = j \leq 6 \\ \frac{1}{18} & \text{se} 1 \leq i < j \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(3) Queste si possono ottenere sommando le righe e le colonne della densità congiunta. Si ha

$$p_{A_1}(k) = \begin{cases} \frac{11}{36} & \text{se } k = 1 \\ \frac{9}{36} & \text{se } k = 2 \\ \frac{7}{36} & \text{se } k = 3 \\ \frac{5}{36} & \text{se } k = 4 \\ \frac{3}{36} & \text{se } k = 5 \\ \frac{1}{36} & \text{se } k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e simmetricamente

$$p_{A_2}(k) = \begin{cases} \frac{11}{36} & \text{se } k = 6 \\ \frac{9}{36} & \text{se } k = 5 \\ \frac{7}{36} & \text{se } k = 4 \\ \frac{5}{36} & \text{se } k = 3 \\ \frac{3}{36} & \text{se } k = 2 \\ \frac{1}{36} & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(4) A_1 e A_2 sono dipendenti in quanto, ad esempio,

$$0 = P(A_1 = 2, A_2 = 1) \neq P(A_1 = 2)P(A_2 = 1) \neq 0.$$

(5) I valori possibili per (A_1, A_2) sono $(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)$ per cui

$$P(A_1 \geq 3, A_2 \geq 5) = 5 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2 Il tempo T che uno studente di Informatica impiega a laurearsi è approssimata da una variabile aleatoria esponenziale di media 4 anni.

(1) Determinare la probabilità che uno studente si laurei in corso (cioè in meno di 3 anni);
(2) Determinare la probabilità che fra tre studenti almeno uno si laurei in corso;
(3) Determinare la probabilità che almeno 100 delle 200 matricole iscritte quest'anno si laureino in corso;

(1) $T \sim Exp(1/4)$ per cui
$$P(T \leq 3) = 1 - e^{-\frac{3}{4}} = 47,2\%.$$
(2) Detti T_1, T_2, T_3 i tempi relativi ai tre studenti e supponendo che questitempi siano in dipendenti tra loro abbiamo
$$P(\min(T_1, T_2, T_3) \leq 3) = 1 - P(T_1 > 3, T_2 > 3, T_3 > 3) = 1 - P(T_1 > 3)P(T_2 > 3)P(T_3 > 3) = 1 - 0.528^3 = 85,3\%.$$
(3) Consideriamo le variabili $X_1, \dots, X_{200}$ date da
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente } i \text{ si laurea in corso} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Abbiamo $X_i \sim B(1, 0, 472)$. La probabilità richiesta è pertanto $P(X_1 + \cdots X_{200} \geq 100$. Abbiamo $X_i \sim B(1, 0, 472)$ e utilizzando il teorema centrale del limite abbiamo
$$X_1 + \cdots + X_{200} \sim N(94.4, 49.84)$$
per cui, utilizzando anche una correzione di continuità
$$P(X_1 + \cdots + X_{200} \geq 100) = P(\zeta_0 > \frac{99.5 - 94.4}{\sqrt{49.84}} = P(\zeta_0 > \frac{1.1}{7,06}) = P(\zeta_0 > 0.16) = 1 - \Phi(0.16) = 43.6\%$$
Esercizio 3 Siano $X \sim N(5, 25)$ e $Y \sim U(\{4, 5, 6\})$ indipendenti.

(1) Determinare $P(X > 6, Y > 5)$;
(2) Determinare $P(X + Y < 7 | Y \leq 5)$;
(3) determinare $P(X + Y < 8)$;
(4) determinare la funzione di ripartizione di $X + Y$ (in funzione della funzione di ripartizione di una variabile normale standard);

(1) Abbiamo
$$P(X > 6, Y > 5) = P(X > 6)P(Y > 5) = P(\zeta_0 > \frac{6-5}{5})P(Y = 6) = (1 - \Phi(0.20))\frac{1}{3} = 0.42\frac{1}{3}) = 0.14;$$
(2) Per la definizione di probabilità condizionale abbiamo
$$\begin{aligned} P(X + Y < 7 | Y \leq 5) &= \frac{P(X + Y < 7 \cap Y \leq 5)}{P(Y \leq 5)} = \frac{P(Y = 4)P(X < 3) + P(Y = 5)P(X < 2)}{2/3} \\ &= \frac{3}{2}(\frac{1}{3}P(\zeta_0 < \frac{-2}{5}) + \frac{1}{3}P(\zeta_0 < \frac{-3}{5}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \Phi(2/5))(1 - \Phi(3/5)) = \frac{1}{2}(1 - 0.66)(1 - 0.73) = 4.6\% \end{aligned}$$
(3) e (4) Determiniamo la funzione di ripartizione $F_{X+Y}(t) := P(X + Y \leq t)$. Abbiamo
$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= P(Y = 4)P(X < t - 4) + P(Y = 5)P(X < t - 5) + P(Y = 6)P(X < t - 6) \\ &= \frac{1}{3}\Big(P(\zeta_0 < \frac{t-4-5}{5}) + P(\zeta_0 < \frac{t-5-5}{5}) + P(\zeta_0 < \frac{t-6-5}{5})\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\Phi(\frac{t-9}{5}) + \Phi(\frac{t-10}{5}) + \Phi(\frac{t-11}{5})\Big). \end{aligned}$$
Per rispondere alla domanda (3) è sufficiente sostituire $t = 8$ ottenendo
$$P(X + Y < 8) = \frac{1}{3}(\Phi(\frac{-1}{5}) + \Phi(\frac{-2}{5}) + \Phi(\frac{-3}{5}) = \frac{1}{3}(0.42 + 0.34 + 0.27) = 0.34$$

15/07/2015

Esercizio 1(13 punti) Lanciamo 3 dadi, uno per volta e poniamo X_i il risultato del lancio i, per $i = 1, 2, 3$ e $Y_1 = X_1$,

$$Y_2 = \begin{cases} X_2 & \text{se } X_2 \neq X_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad Y_3 = \begin{cases} X_3 & \text{se } X_3 \neq X_1 \text{ e } X_3 \neq X_2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poniamo infine $X = X_1 + X_2 + X_3$ e $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

(1) Determinare la densità di X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 e Y_3;
(2) Determinare la densità congiunta di (Y_1, Y_2);
(3) Determinare la media di X e la media di Y;
(4) Stabilire se Y_1 e Y_2 sono indipendenti;

Soluzione.

(1) Le X_i sono variabili uniformi in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e anche Y_1. Vediamo Y_2:

$$P(Y_2 = 0) = \sum_{i=1}^{6} P(X_2 = X_1 = i) = \frac{1}{6}$$

e, per $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P(Y_2 = k) = P(X_1 \neq k, X_2 = k) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

per cui la densitá di Y_2 é:

$$p_{Y_2}(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } k = 0 \\ \frac{5}{36} & \text{se } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vediamo Y_3. Per $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P(Y_3 = k) = P(X_1 \neq k, X \neq k, X_3 = k) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

e per differenza

$$P(Y_3 = 0) = 1 - 6 \cdot \frac{25}{216} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

(2) Per $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ma $k \neq h$ si ha $P(Y_1 = h, Y_2 = k) = \frac{1}{36}$.

(3)

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

Si ha inoltre $E[Y_1] = \frac{7}{2}$,

$$E[Y_2] = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{5}{36} = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\frac{5}{36} = \frac{35}{12} = 2,91$$

e

$$E[Y_3] = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{25}{216} = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\frac{25}{216} = \frac{175}{72} = 2,43$$

e quindi

$$E[Y] = E[Y_1] + E[Y_2] + E[Y_3] = 3,5 + 2,91 + 2,43 = 8,84$$

(4) Y_1 e Y_2 sono dipendenti perché ad esempio, $P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) = 0 \neq P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 01)$.

Esercizio 2(9 punti) Siano X ed Y due variabili indipendenti, X di Poisson di media 5, e Y uniforme in $\{4,5\}$.

(1) determinare $P(X>5)$;
(2) determinare $P(X>4|X<7)$;
(3) determinare $P(X<Y)$

Soluzione.

(a)
$$P(X>5)=1-P(X\le 5)=1-e^{-5}(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}+\frac{5^5}{5!})=1-e^{-5}\frac{1097}{12}=0,38;$$
(b)
$$P(X>4|X<7)=\frac{P(4<X<7)}{P(X<7)}=\frac{e^{-5}(\frac{5^5}{5!}+\frac{5^6}{6!})}{e^{-5}(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}+\frac{5^5}{5!}+\frac{5^6}{6!})}=\frac{\frac{6875}{144}}{\frac{16289}{144}}=\frac{6875}{16289}=0,42$$
(c)
$$P(X<Y)=P(X<4)+P(Y=5,X=4)=e^{-5}(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!})+\frac{1}{2}e^{-5}\frac{5^4}{4!}=e^{-5}\frac{2513}{48}=0,35$$

Esercizio 3 (9 punti) Siano $X_1,\dots X_{50}$ variabili aleatorie indipendenti la cui funzione di ripartizione é
$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t<-1\\ \frac{1}{4}(-t^2+2t+3) & \text{se } -1<t<1\\ 1 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

(1) Determinare la densità di X_1;
(2) determinare media e varianza di X_1;
(3) determinare $P(X_1+\dots+X_{50}>0)$.

Soluzione.

(a) La densitá la otteniamo per derivazione della funzione di ripartizione e quindi
$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t<-1 \ o\ t>1\\ \frac{1}{2}(-t+1) & t\in[-1,1]\end{cases}$$
(b) Si ha
$$E[X_1]=\int_{-1}^{1}t\frac{1}{2}(-t+1)\,dt=\int_0^1 -t^2\,dt=-\frac{1}{3},$$
dove, per semplificare i calcoli ho sfruttato che t é una funzione dispari e t^2 é pari. Similmente possiamo calcolare
$$E[X_1^2]=\int_{-1}^{1}t^2\,\frac{1}{2}(-t+1)\,dt=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}.$$
DI conseguenza
$$\mathrm{Var}(X_1)=E[X_1^2]-E[X_1]^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$
(c) Per il teorema limite centrale abbiamo $X_1+\dots+X_{50}\sim N(-\frac{50}{3},\frac{100}{9})$ e quindi
$$P(X_1+\dots+X_{50}>0)=P(\zeta_0>\frac{\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}})=P(\zeta_0>5)=0$$

11/09/2015

Esercizio 1. Cinque carte numerate da 1 a 5 vengono lanciate in aria. Se una carta atterra coperta dà come risultato 0 altrimenti dà come risultato il valore della carta stessa. Siano $X_1, \dots, X_5$ i risultati delle 5 carte scritti in ordine non decrescente e $X = X_1 + \cdots + X_5$.

(1) Determinare la densità di X_1;
(2) Determinare la densità congiunta di (X_1, X_5);
(3) Stabilire se X_1 e X_5 sono indipendenti;
(4) Determinare il valore atteso $E[X]$;
(5) Determinare $P(X = 5)$.

(1) X_1 rappresenta il valore più basso ottenuto che può essere 0 o 1. L'unico modo di ottenere 1 è che tutte le carte atterrino scoperte per cui $X_1 \sim B(1, 1/32)$.
(2) La variabili bidimensionale (X_1, X_2) può assumere i seguenti valori $(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,5)$. Esaminiamoli uno alla volta

- $(0,0)$ si ottiene solo se tutte le carte atterrano coperte;
- $(0,1)$ si ottiene solo se tutte le carte atterrano coperte tranne la carta con l'1;
- $(0,2)$ si ottiene se il 2 è scoperto, il 3, il 4 e il 5 coperti mentre l'1 può essere coperto o scoperto (2 possibilità);
- $(0,3)$: 3 scoperto, 4 e 5 coperti, 1 e 2 liberi (4 possibilità);
- $(0,4)$: 4 scoperto, 5 coperto, 1,2 e 3 liberi (8 possibilità);
- $(0,5)$: 5 scoperto e 1,2,3,4 non tutti scoperti (15 possibilità);
- $(1,5)$ tutte scoperte.

Riassumendo abbiamo

$$p_{X_1,X_5}(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{32} & \text{se } (i,j) = (0,0), (0,1), (1,5) \\ \frac{2}{32} & \text{se } (i,j) = (0,2) \\ \frac{4}{32} & \text{se } (i,j) = (0,3) \\ \frac{8}{32} & \text{se } (i,j) = (0,4) \\ \frac{15}{32} & \text{se } (i,j) = (0,5) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(3) X_1 e X_5 sono dipendenti in quanto ad esempio

$$\frac{1}{32} = P(X_1 = 1, X_5 = 5) \neq P(X_1 = 1)P(X_5 = 5) = \frac{1}{32}\frac{1}{2}.$$

(4) Poniamo Y_i = risultato dato dalla carta con il numero i. Si ha quindi $Y_i \sim U(\{0, i\})$ e quindi $E[Y_i] = \frac{i}{2}$. Siccome $X = Y_1 + \cdots + Y_5$ abbiamo anche

$$E[X] = E[Y_1] + \cdots + E[Y_5] = 7.5.$$

(5) L'evento $X = 5$ accade se le carte scoperte sono 2 e 3, oppure 4 e 1, oppure il solo 5. Abbiamo quindi

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}.$$

Esercizio 2. Una variabile aleatoria continua X ha come funzione di ripartizione

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{t+1} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(1) Determinare $P(X > 1, X < 2)$;
(2) Determinare $P(X > 1 | X < 2)$;
(3) Determinare la funzione di ripartizione della variabile $Y = \log X$;

(1) Si ha $P(X > 1, X < 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;
(2) Per definizione di probabilità condizionale abbiamo

$$P(X > 1|X < 2) = \frac{P(X > 1, X < 2)}{P(X < 2)} = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}.$$

(3) Si ha

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\log X < t) = P(X < e^t) = F_X(e^t) = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Esercizio 3. Un bambino di 6 mesi mangia tutti i giorni una pappa di 200 grammi. In una settimana ha registrato i seguenti tempi (espressi in minuti) per consumare il suo pasto: 5,10,4,12,20,10,4.

(1) Determinare le velocità (espressa in grammi al minuto) registrate dal bambino nel consumare il suo pasto;
(2) Determinare la velocità media complessiva nei sette giorni;
(3) Supponendo che impieghi mediamente 10 minuti con scarto quadratico medio di 3 minuti per consumare il suo pasto, determinare la probabilità che in 30 giorni impieghi più di 310 minuti complessiavamente per consumare i suoi pasti.

(1) Le 7 velocità si ottengono facilmente dividendo la quantità di pappa per il tempo impiegato. Si ottengono i 7 valori: 40,20,50, 16.7, 10, 20, 50;
(2)La velocità media non si ottiene facendo la media aritmetica delle velocità, ma facendone la media armonica o, equivalentemente e più semplicemente dividendo la quantità totale di pappa per il tempo totale impiegato. Si ottiene

$$\frac{1400}{5 + 10 + 4 + 12 + 20 + 10 + 4} = \frac{1400}{65} 21,5 gr/min.$$

(3) La variabile T = tempo impiegato in 30 giorni è approssimabile da una variabile normale $T \sim N(30 \cdot 10, 30 \cdot 9) = N(300, 270)$ per cui

$$P(T > 310) = P(\zeta_0 > \frac{310 - 300}{\sqrt{270}}) = P(\zeta_0 > \frac{10}{16.43}) = 1 - \Phi(0.61) = 27\%.$$

13/01/2016

Esercizio 1 Un mazzo contiene 10 carte numerate da 1 a 5, di cuori e di quadri. Le carte vengono mescolate e tutte scoperte, una per una e messe una a fianco all'altra. Poniamo X la posizione dell'altra carta uguale a quella in prima posizione e Y la prima posizione in cui compare una carta che era già stata scoperta. Ad esempio se le carte estratte sono nell'ordine 2,3,1,4,1,5,2,5,3,4 abbiamo $X = 7$ e $Y = 5$.

(1) Descrivere lo spazio Ω dei possibili risultati;
(2) Determinare la densità di X;
(3) Determinare $E[Y]$.
(4) Determinare $P(X > Y)$.

Soluzione.

(1) Uno spazio possibile è Ω= insieme di tutte le pemutazioni delle 10 carte; oppure Ω= liste in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ di lungheza 10, in cui ogni valore compare esattamente 2 volte;
(2) La seconda carta uguale alla pima compare con ugual probabilità in una delle rimanenti 9 posizioni: ne segue che $X \sim U(\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
(3) Per calcolare $E[Y]$ abbiamo bisogno della densità di Y; La variabile Y assume valori compresi tra 2 e 6. Si ha
$P(Y = 2) = 1/9$
$P(Y = 3) = \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{8}$
$P(Y = 4) = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{7}$
$P(Y = 5) = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{6}$
$P(Y = 6) = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6}$
e quindi

$$p_Y(k) = \begin{cases} 7/63 & \text{se } k = 2 \\ 14/63 & \text{se } k = 3 \\ 18/63 & \text{se } k = 4 \\ 16/63 & \text{se } k = 5 \\ 8/63 & \text{se } k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Deduciamo che

$$E[Y] = \frac{1}{63}(2 \cdot 7 + 3 \cdot 14 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 8) = \frac{256}{63} = 4.06$$

(4) Si ha sempre $X \geq Y$ per cui $P(X > Y) = 1 - P(X = Y)$ e

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P(X = Y = 2) + P(X = Y = 3) + P(X = Y = 4) + P(X = Y = 5) + P(X = Y = 6) \\ &= \frac{7}{63} + \frac{7}{63} + \frac{6}{63} + \frac{4}{63} + \frac{4}{63 \cdot 5} \\ &= \frac{124}{315} \end{aligned}$$

da cui $P(X > Y) = 191/315 = 60.7\%$.

Esercizio 2 Siano X una variabile aleatoria esponenziale di media 3 e $Y \sim \tilde{G}(1/3)$ due variabili indipendenti tra loro.

(1) Determinare $P(X < Y | Y < 4)$;
(2) determinare $P(X + Y < 4)$;
(3) deteminare $P(X < 2 | X + Y < 4)$;

(1) Si ha

$$P(X < Y|Y < 4) = \frac{P(X < Y < 4)}{P(Y < 4)}.$$

Calcoliamo quindi $P(Y < 4) = P(Y \leq 3) = 1 - (2/3)^3 = \frac{19}{27}$ e

$$\begin{aligned}
P(X < Y < 4) &= P(Y = 3, X < 3) + P(Y = 2, X < 2) + P(Y = 1, X < 1)\\
&= \frac{4}{27}(1 - e^{-\frac{3}{3}}) + \frac{2}{9}(1 - e^{-\frac{2}{3}}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{1}{3}})\\
&= 0.30
\end{aligned}$$

e concludiamo $P(X < Y|Y < 4) = \frac{0.30}{19/27} = 0.426$.

(2) Similmente a prima abbiamo

$$\begin{aligned}
P(X + Y < 4) &= P(Y = 3, X < 1) + P(Y = 2, X < 2) + P(Y = 1, X < 3)\\
&= \frac{4}{27}(1 - e^{-\frac{1}{3}}) + \frac{2}{9}(1 - e^{-\frac{2}{3}}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{3}{3}})\\
&= 0.36
\end{aligned}$$

(3) Infine

$$\begin{aligned}
P(X < 2|X + Y < 4) &= \frac{P(X < 2, X + Y < 4)}{P(X + Y < 4}\\
&= \frac{P(Y = 3, X < 1) + P(Y = 2, X < 2) + P(Y = 1, X < 2)}{P(X + Y < 4}\\
&= \frac{\frac{4}{27}(1 - e^{-\frac{1}{3}}) + \frac{2}{9}(1 - e^{-\frac{2}{3}}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{2}{3}})}{0.36}\\
&= \frac{0.31}{0.36}\\
&= 0.87.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 Consideriamo 30 variabili indipendenti $X_1, \dots, X_{30}$ di densità continua

$$f(s) = \begin{cases} \frac{5}{2}s^4 & \text{se } -1 < s < 1\\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(1) determinare la funzione di ripartizione di X_1;
(2) determinare la funzione di ripartizione di X_1^2;
(3) determinare

$$P(X_1 + \cdots + X_{30} > 1).$$

Soluzione

(1) Per $-1 < t < 1$ abbiamo

$$\begin{aligned}
F_{X_1}(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(s)ds\\
&= \int_{-1}^{t} \frac{5}{2}s^4 ds = \frac{t^5}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

per cui

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ \frac{t^5}{2} + \frac{1}{2}\text{se } & -1 < t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

(2) X_1^2 prende valori in $[0,1]$ e per $t \in [0,1]$ abbiamo

$$F_{X_1^2}(t) = P(X_1^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X_1 \sqrt{t}) = F_{X_1}(\sqrt{t}) - F_{X_1}(-\sqrt{t}) = t^{5/2}.$$

(3) Si ha facilmente $E[X_1] = 0$ (ha densità pari), mentre

$$E[X_1^2] = \int_{-1}^{1} s^2 \frac{5}{2} s^4 \, ds = \frac{5}{7}.$$

e quindi $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{5}{7}$; La variabile $X_1 + \cdot X_{30}$ è quindi approssimativamente normale $N(0, \frac{150}{7})$ e quindi

$$P(X_1 + \cdot X_{30} > 1) = P(\zeta_0 > \frac{1-0}{\sqrt{150/7}} = P(\zeta_0 > 0.22) = 1 - \Phi(0.22) = 0.413.$$

26/01/2016

Esercizio 1. Quattro amici Ago, Ben, Cam e Don vanno al bar per fare "qualche" giro di aperitivi. Al primo giro bevono tutti. Ad ogni giro seguente Ago e Ben prendono da bere con probabilità del 50% (indipendenti l'uno dall'altro), Cam prende da bere se e solo se lo fa qualcun altro, e Don se e solo se bevono tutti gli altri. La cosa si ripete finché in un giro nessuno vuole da bere. Poniamo X = numero di giri effettuati,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se il giro } i \text{ viene effettuato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad A_i = \begin{cases} 1 & \text{se Ago prende da bere al giro } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(1) Determinare la probabilità che Cam ordini da bere al secondo giro;
(2) determinare la probabilità che Don ordini da bere al terzo giro;
(3) determinare la densità e la media di X;
(4) determinare la probabilità che venga effettuato il quarto giro;
(5) determinare $P(A_4 = 1 | X_4 = 1)$;
(6) (*) determinare il valore atteso per il numero di drink ordinati da Ago.

Soluzione (cenni).

(1) $P(C_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;
(2) $P(D_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$;
(3) $X \sim \tilde{G}(\frac{1}{4})$ e quindi $E[X] = 4$;
(4) $P(X_4 = 1) = (3/4)^3$;
(5) $P(A_4 = 1 | X_4 = 1) = \frac{P(A_4=1)}{P(X_4=1)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{3}{4})^3} = \frac{2}{3}$;
(6) Sia $A = A_1 + A_2 + \cdots$ il numero di bevute di Ago. Si ha che $A_1 = 1$ e per $i > 1$ si ha $A_i \sim B(1, (3/4)^{i-2} \cdot \frac{1}{2})$ e quindi

$$E[A] = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} (3/4)^{i-2} \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 3/4} = 3.$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dipendente da un parametro reale a:

$$f(s) := \begin{cases} 3as^2 + 1 - a & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(1) Stabilire per quali valori di a si ha che f è la densità continua di una variabile aleatoria X;
(2) Per questi valori di a determinare la funzione di ripartizione di X;
(3) Per questi valori di a determinare $P(X > 3/4 | X > 1/3)$.

Soluzione (cenni).

(1) Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds = \int_0^1 (3as^2 + 1 - a)\, ds = 1$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. Rimane quindi solo da imporre che $f(s) \geq 0$ per ogni s. Si ha che $f(s)$ è crescente in $[0, 1]$ se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$. Basterà quindi imporre $f(0) \geq 0$ e $f(1) \geq 0$ da cui segue $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

(2) Si ha per $0 < t < 1$,

$$F(t) = \int_0^t (3as^2 + 1 - a)\, ds = at^3 + (1 - a)t$$

per cui

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ at^3 + (1-a)t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

(3)

$$P(X > 3/4 | X > 1/3) = \frac{P(X > 3/4)}{P(X > 1/3)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{21}{64}a}{\frac{2}{3} + \frac{8}{27}a}.$$

Esercizio 3. Il numero di clienti di un piccolo locale per sera segue una densità di Poisson di media 10.

(1) Determinare la probabilità che in una sera ci siano 5 clienti;
(2) determinare la probabilità che in una sera ci siano almeno 10 clienti;
(3) determinare la probabilità che nei 30 giorni del prossimo mese ci siano mediamente almeno 10.2 clienti per sera.

Soluzione (cenni)

(1) $X \sim P(10)$ per cui
$$P(X = 5) = e^{-10}\frac{10^5}{5!} = 3.8\%.$$
(2) $P(X > 10) = 1 - P(X = 0) - \cdots - P(X = 9) = 55\%$. In alternativa si può anche approssimare X con una normale $N(10, 10)$.
(3) Sia Y = numero di clienti in un mese. Si ha $Y \sim N(300, 300)$ per cui
$$P(Y \ge 306) = P(\zeta_0 > \frac{305.5 - 300}{\sqrt{300}} = P(\zeta_0 > 0.31) = 37\%.$$

10/02/2016

Esercizio 1 Quattro sciatori Ago, Ben, Cam e Don fanno una gara di sci. Indichiamo con T_A, T_B, T_C e T_D i loro tempi aleatori di percorrenza del tracciato. T_A e T_B sono normali di media 2 minuti e varianza 1 secondo^2, mentre T_C e T_D sono normali di media $1'\ 58''$ e di varianza 1 secondo^2.

(1) Determinare la probabilità che tutti i quattro sciatori terminino la gara in meno di 2 minuti;
(2) Detta X = "numero di sciatori che terminano la gara in meno di 2 minuti", esprimere X come somma di due variabili binomiali;
(3) Determinare il valore atteso di X;
(4) Determinare la varianza di X;

Soluzione. Esprimiamo le variabili tempo in secondi.

(1) $P(T_A < 120) = P(T_B < 120) = P(\zeta_0 < 0) = 1/2$ e $P(T_C < 120) = P(T_C < 120) = P(\zeta_0 < 2) = \Phi(2) = 0.97725$. Ne segue che

$$P(T_A, T_B, T_C, T_D < 120) = 23.9\%.$$

(2) Poniamo X_1 = "quanti tra Ago e Ben fanno la gara in meno di due minuti" e X_2 = "quanti tra Cam e Don fanno la gara in meno di due minuti". Si ha chiaramente

$$X = X_1 + X_2$$

e per quanto visto nel punto precedente $X_1 \sim B(2, \frac{1}{2})$ e $X_2 \sim B(2, 0.97725)$.

(3) Per la linearità della media abbiamo $E[X] = E[X_1] + E[X_2] = 1 + 2 \cdot 0.97725 = 2.95$.
(4) Essendo X_1 e X_2 indipendenti abbiamo $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = \frac{1}{2} + 0.04 = 0.54$.

Esercizio 2 Siano X e Y due variabili aleatorie la cui densità congiunta è mostrata nella seguente tabella

$X \backslash Y$	-2	0	1
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{72}$

(1) Determinare $P(X + Y \geq 3)$;
(2) Determinare le densità marginali di X e di Y;
(3) Stabilire se X e Y sono indipendenti;
(4) Determinare $E[X + Y]$;
(5) Determinare $\text{Var}(X - Y)$.

Soluzione.

(1) Dalla tabella ci sono tre casi in cui $X + Y \geq 3$ per cui

$$P(X + Y \geq 3) = P(X = 3, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 1) = \frac{19}{72}.$$

(2) Le densità marginali sommano i valori sulle righe e sulle colonne della tabella. Si ottiene:

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } k = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } k = -2 \\ \frac{1}{6} & \text{se } k = 0 \\ \frac{5}{12} & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(3) Si calcolano $E[X] = \frac{5}{3}$ e $E[Y] = -\frac{1}{12}$ dalla tabella da cui $E[X+Y] = \frac{19}{12}$.

(4) Si ha $E[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$ e similmente $E[Y^2] = \frac{17}{12}$. da cui $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{9}$ e $\text{Var}(Y) = \frac{203}{144}$ e quindi concludiamo, sfruttando il fatto che X ed Y sono indipendenti

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \frac{283}{144}.$$

Esercizio 3 Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } |s| > 1 \\ 1 + s & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1 - s & \text{se } 0 < s < 1 \end{cases}$$

(1) verificare che f è una densità continua;

(2) dette $X_1, \ldots, X_{180}$ variabili aleatorie indipendenti di densità continua f determinare la loro funzione di ripartizione;

(3) determinare $E[X_1^2]$ e $E[X_1^4]$;

(4) determinare la probabilità $P(X_1^2 + \cdots + X_{180}^2 > 25)$.

Soluzione

(1) $f(s) \geq 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$: infatti se $-1 < s < 0$ si ha chiaramente $1+s \geq 0$ e similmente per $0 < s < 1$. Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds = \int_{-1}^{0} (1+s) ds + \int_{0}^{1} (1-s) ds = [s + s^2/2]_{-1}^{0} + [s - s^2/2]_0^1 = 1$$

e quindi f soddisfa le due proprietà che definiscono una densità continua.

(2) Se $-1 < t < 0$ si ha

$$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds = \int_{-1}^{t} (1+s) ds = [s + s^2/2]_{-1}^{t} = \frac{1}{2} + t + \frac{t^2}{2}$$

e se $0 < t < 1$ si ha

$$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds = \frac{1}{2} + \int_{0}^{t} (1-s) ds = [s - s^2/2]_0^t = \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2}$$

per cui

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1 \\ \frac{1}{2} + t + \frac{t^2}{2} & \text{se } -1 < t < 0 \\ \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

(3) Si ha

$$E[X_1^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 f(s)\, ds = \ldots = \frac{1}{6}$$

e

$$E[X_1^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^4 f(s)\, ds = \ldots = \frac{1}{15}.$$

(4) dal punto precedente segue che $\mathrm{Var}(X_1^2) = \frac{7}{180}$ e per il teorema del limite centrale si ha che la variabile $S = X_1^2 + \cdots + X_{180}^2$ ha densità

$$S \sim N(30, 7)$$

e quindi

$$P(S > 25) = P\Big(\zeta_0 > \frac{-5}{\sqrt{7}}\Big) = \Phi(1.89) = 97\%.$$

08/06/2016

Esercizio 1 Un'urna contiene una pallina bianca ed una rossa. Effettuiamo una successione di 10 estrazioni e dopo ogni estrazione vengono reinserite nell'urna due palline dello stesso colore di quella estratta. Indichiamo con X_i la variabile che vale 1 se la i-esima estrazione è bianca e 0 altrimenti.

(1) Determinare $P(X_3 = 1)$;
(2) Determinare $P(X_1 = X_2)$;
(3) Stabilire se X_3 e X_5 sono indipendenti;
(4) Determinare $P(X_2 = \cdots = X_{10})$.

Esercizio 2 Siano X una variabile uniforme nell'insieme finito $\{0, 2, 4\}$ e Y una variabile uniforme nell'intervallo $[0, 4]$. Supponiamo che X ed Y siano indipendenti.

(1) Scrivere le funzioni di ripartizione di X e di Y;
(2) Determinare $P(X > 1|Y > 2)$;
(3) Determinare $P(X < Y)$;
(4) Determinare $P(XY > 6)$.

Esercizio 3 Consideriamo 40 variabili $X_1, \ldots, X_{40}$ di densità esponenziale di media 3 e indipendenti tra loro.

(1) Determinare densità, media e varianza della variabile $X_1 - 1$.
(2) Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{40} > 100)$.
(3) Determinare $P\Big(X_1 + \cdots + X_{40} > 100 \,\Big|\, X_1 + \cdots + X_{40} > 90\Big)$.

06/07/2016

Esercizio 1 Un'urna contiene una pallina bianca ed una rossa. Effettuiamo una successione di estrazioni e dopo ogni estrazione vengono reinserite nell'urna due palline dello stesso colore di quella estratta. Indichiamo con X_i la variabile che vale 1 se la i-esima estrazione è bianca e 0 altrimenti e $T = \min\{i : X_{i-1} = X_i\}$.

(1) Determinare $P(X_3 = 1)$;
(2) Determinare $P(X_1 = X_2)$;
(3) Determinare $P(T = i)$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
(4) Determinare la densità di T;
(5) Determinare la densità di T condizionata dall'evento $\{X_3 = X_6 = 1\}$ cioè determinare, per ogni $i > 0$,

$$P(T = i|X_3 = X_6 = 1).$$

Esercizio 2 Siano X una variabile uniforme nell'insieme finito $\{1, 2, 3\}$ e Y una variabile uniforme nell'intervallo $[-1, 2]$. Supponiamo che X ed Y siano indipendenti.

(1) Scrivere le funzioni di ripartizione di X e di Y;
(2) Determinare $P(X > 1|Y > 0)$;
(3) Determinare $P(X < Y)$;
(4) Determinare $P(X^2 + Y^2 > 2)$.

Esercizio 3 Consideriamo 40 variabili $X_1, \dots, X_{50}$ di densità esponenziale di media 2 e indipendenti tra loro.

(1) Determinare densità, media e varianza della variabile $X_1 - X_2$.
(2) Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{50} > 95)$.
(3) Determinare $P\Big(X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \cdots + X_{49} - X_{50} > 0.1\Big)$.

15/09/2016

Esercizio 1 Lanciamo due dadi *simultaneamente* e poniamo $X_1 =$ il risultato più basso ottenuto e $X_2 =$ il risultato più alto ottenuto.

(1) Determinare $P(X_1 = X_2 = 3)$, $P(X_1 = 2, X_2 = 3)$;
(2) Determinare la densità congiunta di (X_1, X_2);
(3) Determinare le densità marginali di X_1 e di X_2
(4) Stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti;
(5) Determinare $P(X_1 \geq 3, X_2 \geq 5)$.

Esercizio 2 Siano X ed Y due variabili indipendenti, X di Poisson di media 4, e Y uniforme in $\{4, 5\}$.

(1) determinare $P(X > 5)$;
(2) determinare $P(X > 4 | X < 7)$;
(3) determinare $P(X < Y)$

Esercizio 3. In una gara un corridore deve effettuare un certo percorso di 3.4 km per sei volte. I tempi registrati nei sei giri dal corridore sono di $15'\,10''$, $15'\,05''$, $14'\,51''$, $14'\,57''$, $14'\,40''$, $14'\,23''$.

(1) Determinare il tempo di percorrenza medio nei sei giri;
(2) Determinare le velocità (espresse in km/h) registrate dal corridore nei sei giri;
(3) Determinare la velocità media complessiva del corridore;