§ PROPRIETÀ UTILI DEGLI SPAZI VETTORIALI

Marco Moraschini
09.03.2022

TEOR. (LEGGE DI CANCELLAZIONE): Sia V uno spazio vettoriale e sia $v \in V$. Siano $w_1, w_2 \in W$ t.c. $w_1 + v = w_2 + v$. Allora $w_1 = w_2$.

DIM.: Sappiamo che esiste l'opposto di v, chiamato $-v$, in V. Allora:

$$w_1 = w_1 + 0_V = w_1 + (v - v) = (w_1 + v) - v = (w_2 + v) - v = w_2 + (v - v) = w_2 + 0_V = w_2.$$

COR. (UNICITÀ DELL'ELEMENTO NEUTRO): Sia V uno spazio vettoriale e sia $v \in V$. Sia $w \in V$ t.c. $w + v = v$. Allora $w = 0_V$.

DIM.: Possiamo scrivere $v = 0_V + v$, da cui $w + v = v = 0_V + v$. Per la legge di cancellazione, si ha:

$$w = 0_V.$$

TEOR. (LEGGI DI ANNULLAMENTO): Sia V uno spazio vettoriale. Allora:

(i) $\forall v \in V$ si ha $0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha \cdot 0_V = 0_V$;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v \in V$, se $\alpha v = 0_V$ allora α o v sono lo zero (o entrambi).

DIM.: (i) $0_V + v = v = 1 \cdot v = (0_{\mathbb{R}} + 1) \cdot v = 0_{\mathbb{R}} \cdot v + 1 \cdot v = 0_{\mathbb{R}} \cdot v + v \Rightarrow$ (legge di cancellazione) $\Rightarrow 0_V = 0_{\mathbb{R}} \cdot v$.

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ si ha $\alpha v + 0_V = \alpha v = \alpha(v + 0_V) = \alpha v + \alpha 0_V$. Per la legge di cancellazione si ha:

$$0_V = \alpha 0_V.$$

(iii) Se $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$ allora $\alpha^{-1} \cdot (\alpha v) = (\alpha^{-1} \alpha) v = 1 \cdot v = v$. Siccome $\alpha v = 0_V$ si ha: $\alpha^{-1} 0_V = v \overset{\text{usando (ii)}}{\Rightarrow} v = 0_V$.

Se $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$, ovvio.

TEOR. (LEGGE DI INVERSIONE): Sia V uno spazio vettoriale. Allora $\forall v \in V$ si ha $(-1) \cdot v = -v$.

DIM.: $v + (-1) v = (1 - 1) v = 0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V$.

§ SOTTOSPAZI VETTORIALI

Come possiamo descrivere uno spazio vettoriale dentro un altro?

§ DEFINIZIONE E PRIME PROPRIETÀ

DEF.: Sia V uno spazio vettoriale e sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto. Diremo che W è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V se soddisfa le seguenti proprietà:

(i) W è chiuso rispetto la somma, cioè $\forall u, w \in W$ si ha $u + w \in W$;

(ii) W è chiuso rispetto al prodotto per scalari: $\forall u \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in W$.

OSS.: W è esso stesso uno spazio vettoriale con $+_V|_W : W \times W \to W$ e $\cdot_V|_W : \mathbb{R} \times W \to W$:

(i) $+_V|_W$ è associativa perché lo è in V

(ii) $+_V|_W$ commuta perché lo fa in V

(1) $\lambda \cdot (w + u) = \lambda w + \lambda u$ vale perché vale in V $(\forall \lambda \in \mathbb{R},\ w, u \in W)$

(2) Analogalmente: $(\alpha + \beta) w = \alpha w + \beta w \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ w \in W$

(3) $\alpha \cdot (\beta w) = (\alpha\beta) w \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ w \in W$ perché vale in V

(4) $1 \cdot w = w \in W$.

Poiché W è chiuso rispetto al prodotto per scalare, si ha:

- Sia $w \in W$, allora $0_{\mathbb{R}} \cdot w = 0_V \in W$ (LEGGE DI ANNULLAMENTO (i));
- $\forall w \in W$, $(-1) \cdot w \in W$.

(iii) L'elemento neutro di W è 0_V: $w + 0_V = w = 0_V + w \ \forall w \in W$ (dato che $W \subseteq V$);

(iv) $\forall w \in W$, l'opposto $-w \in W$: infatti $-w = (-1) \cdot w \in W$ (usando la legge di inversione).

OSS.: Il punto (iii) ci mostra in particolare che $0_V \in W$ è una condizione NECESSARIA. Torneremo su questo fra poco.

LEMMA: Un insieme non vuoto W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale se e soltanto se

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall w_1, w_2 \in W \text{ si ha } \alpha w_1 + \beta w_2 \in W.$$

DIM.: Se W è sottospazio vettoriale, allora è chiuso rispetto al prodotto per scalare: $\forall w_1, w_2 \in W\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha w_1 \in W$ e $\beta w_2 \in W$.

Inoltre W è chiuso rispetto alla somma, da cui: $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$.

Proviamo ora che se $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall w_1, w_2 \in W$ allora W è un sottospazio vettoriale. Posti $\alpha = \beta = 1$ si vede che W è chiuso rispetto alla somma. Posto $\beta = 0$ si vede che W è chiuso rispetto al prodotto per scalare. $\square$