PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 17/01/2022

Esercizio 1 Dati i vettori $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 2, -3)$, $v_3 = (0, 4, -2)$ e $v_4 = (k, 6, -1)$, con $k \in \mathbb{R}$, si chiede di determinare:
(a) per quali valori di k i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono generatori di $\mathbb{R}^3$;
(b) una base di $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ in funzione del valore di k;
(c) per quali valori di k una base di $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ è anche base di $\mathbb{R}^3$ e, per quei valori di k per cui non lo è, indicare come completare la base di $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ per avere una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2 Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + ky - 2z = k \\ ky - z = 1 \\ -x - 2ky + (k+2)z = 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni e determinare, quando possibile, tali soluzioni.

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + y + 3z - t = 0$.
a) Determinare una base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di U.
b) Sia $F : U \to U$ l'unico endomorfismo di U tale che $F(\mathbf{b}_1) = F(\mathbf{b}_2) = F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Determinare $F(1, 1, -1, -1)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile.
d) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate rispetto alla base B.
e) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^4$.