SCHEDA DI ESERCIZI EXTRA DEL 27/03/2022

Risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1

Costruire una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ che sia diversa dalla base canonica $\{(1,0),(0,1)\}$. Scrivere i vettori della base canonica in coordinate rispetto alla nuova base $\mathcal{B}$.

Esercizio 2

Determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguenti condizioni:

(1) Le coordinate del vettore $(1,1,1)$ rispetto alle base $\mathcal{B}$ sono $(1,0,0)_{\mathcal{B}}$;
(2) I vettori v_1, v_2 generano un sottospazio il sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$S \coloneqq \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 = 0\} \ ;$$

(3) Le coordinate del vettore $(1,0,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1,0,1)_{\mathcal{B}}$.

La base $\mathcal{B}$ è unica?

Esercizio 3

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,2,0), v_2 = (1,1,1), v_3 = (0,-1,1), v_4 = (2,3,1) \ .$$

(1) Stabilire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti;
(2) Stabilire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 generano $\mathbb{R}^3$;
(3) Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4;
(4) Completare la base trovata nel punto precedente ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4

Sia

$$S \coloneqq \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a+b+d=0, d+e+c=0 \right\}$$

un sottoinsieme di $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

(1) Mostrare che S è un sottospazio di $M_{2,3}(\mathbb{R})$;
(2) Determinare una base di S.

Esercizio 5

Nell'insieme $V = \mathbb{R}[x, y]$ dei polinomi a coefficienti reali nelle variabili x e y, con le usuali operazioni di somma dei polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale, si consideri il sottoinsieme S dei polinomi di grado minore o uguale a 2.

(1) Dopo aver verificato che V sia uno spazio vettoriale e che S sia un suo sottospazio, calcolare la dimensione di S ed esibire una base $\mathcal{B}$ di S;
(2) Calcolare la coordinate del polinomio $x + y - x^2$ nella base $\mathcal{B}$;
(3) Mostrare che i polinomi $x-y, 1+x-y, 1-xy$ sono linearmente indipendenti;
(4) Completare l'insieme $I = \{x - y, 1 + x - y, 1 - xy\}$ ad una base di S.