ESERCIZI DI MDP PER IL 14 DICEMBRE 2022

(1) Sia

$$p(k) = \begin{cases} 2^{-k} & k = 1, 2, \ldots, 5 \\ 2^{-5} & k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Verificare che $p(k)$ è la densità di una variabile aleatoria discreta X.
(b) Determinare media e varianza di X.
(c) Date 32 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \ldots, X_{32}$ tutte aventi densità $p(k)$ determinare $P(X_1 + \cdots + X_{32} \geq 65)$.

(2) Giovanni è un esperto di tiro con l'arco. La variabile X ="distanza dal centro del bersaglio di un suo tiro (espressa in decimetri)" è data dal valore assoluto di una variabile aleatoria normale standard, cioè $X = |\zeta_0|$, dove $\zeta_0 \sim N(0, 1)$.
(a) Determinare la probabilità che un suo tiro termini a meno di 5 centimetri di distanza dal centro del bersaglio.
(b) Determinare la funzione di ripartizione $F_X(t)$ di X (espressa in termini di $\Phi(t)$, la funzione di ripartizione di ζ_0)
(c) Determinare la probabilità che il migliore di 5 suoi lanci termini a meno di 1 centimetro di distanza dal centro del bersaglio.
(d) Supponendo che il bersaglio abbia un raggio di 30 centimetri, determinare la probabilità che almeno 1 dei suoi 5 lanci non colpisca il bersaglio.

(3) Consideriamo 100 variabili $X_1, \ldots, X_{100}$ di densità uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$ e indipendenti tra loro.
(a) Determinare la densità della variabile $|X_1|$.
(b) Determinare $P(\frac{|X_1|+\cdots+|X_{100}|}{100} > 0.01)$.
(c) Determinare $P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}}{100} > 0.01)$.
(d) Determinare $P(\frac{X_1^2+\cdots+X_{100}^2}{100} > 0.01)$.
(e) Determinare $P(\frac{(X_1+\cdots+X_{100})^2}{100} > 0.01)$.

(4) Una miscela radioattiva contiene 10^6 particelle ognuna delle quali decade in un tempo aleatorio di densità esponenziale di media 1 anno.
(a) Determinare la probabilità che una data particella decada in meno di 2 anni.
(b) Sia X la variabile "numero di particelle che decadono in 5 anni". Che densità ha X?
(c) Determinare la probabilità che almeno il 99,3% di queste particelle decada in 5 anni (cioè $P(X > 0,993 \cdot 10^6)$).

(5) Consideriamo 50 variabili $X_1, \dots, X_{50}$ di densità esponenziale di parametro 2 e indipendenti tra loro.
   (a) Determinare la densità, media e varianza della variabile $X_1 - 1$.
   (b) Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{50} > 45)$.
   (c) Determinare $P(X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \cdots + X_{49} - X_{50} > 0.1)$.

(6) Siano $X \sim N(5, 25)$ e $Y \sim U(\{4, 5, 6\})$ indipendenti.
   (a) Determinare $P(X > 6, Y > 5)$;
   (b) Determinare $P(X + Y < 7 | Y \leq 5)$;
   (c) determinare $P(X + Y < 8)$;
   (d) determinare la funzione di ripartizione di $X + Y$ (in funzione della funzione di ripartizione di una variabile normale standard).

Cenni di soluzioni

(1) (a) La funzione p assume solo un numero finito di valori non nulli, che sono tutti positivi. Per vedere che $p(k)$ è una densità astratta basta vedere che

$$\sum_{k\in\mathbb{R}} p(k) = \sum_{k=1}^{6} p(k) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32} = 1.$$

Sia $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ con famiglia di eventi $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e con funzione di probabilità $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definita da

$$P(A) = \sum_{k\in A} p(k)$$

Allora $X(k) = k$ è una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, e p coincide con la densità di X.

(b) Abbiamo

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{32}+6\cdot\frac{1}{32} = \frac{63}{32} \sim 1,97$$

$$E(X^2) = 1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{16}+25\cdot\frac{1}{32}+36\cdot\frac{1}{32} = \frac{177}{32} \sim 5,53$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \sim 5,531 - 3,877 = 1,66$$

(c) Detti $\mu = 1,97$ e $\sigma^2 = 1,66$, dal teorema del limite centrale abbiamo $X_1+\ldots+X_{32} \sim N(32\cdot\mu, 32\cdot\sigma^2)$. Essendo $\frac{64,5-32\mu}{\sqrt{32}\sigma} \simeq 0.20$, applicando la correzione di continuità troviamo che

$$\begin{aligned} P(X_1+\ldots+X_{32} \geq 65) &= P(X_1+\ldots+X_{32} \geq 64,5) \simeq P(\sqrt{32}\sigma\zeta_0 + 32\mu \geq 64,5) = \\ &= P(\zeta_0 \geq \frac{65-32\mu}{\sqrt{32}\sigma}) \simeq P(\zeta_0 \geq 0.20) = 1 - P(\zeta_0 < 0.20) = \\ &= 1 - \Phi(0.20) \simeq 1 - 0,57926 = 0,42074 \end{aligned}$$

(2) (a) Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X < 0.5) &= P(|\zeta_0| < 0.5) = P(-0.5 < \zeta_0 < 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \\ &= \Phi(0.5) - (1 - \Phi(-0.5)) = 2\Phi(0.5) - 1 = 0,383 \end{aligned}$$

(b) In generale se $t \geq 0$ abbiamo

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(-t \leq \zeta_0 \leq t) = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1.$$

Pertanto

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 2\Phi(t) - 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

(c) Per $i = 1,\ldots,5$, sia X_i la distanza dal centro del bersaglio ottenuta al tiro i. Possiamo assumere che le variabili $X_1,\ldots,X_5$ sono indipendenti. Per ogni $i = 1,\ldots,5$ abbiamo

$$P(X_i \geq 0.1) = 1 - F_{X_i}(0.1) = 2 - 2\Phi(0.1) = 0.9204$$

Pertanto

$$P(\min(X_1,\dots,X_5)<0.1)=1-P(X_1\geq 0.1,\dots,X_5\geq 0.1)=1-\prod_{i=1}^{5}P(X_i\geq 0.1)=$$
$$1-(0.9204)^5=1-0,6606=0,3394$$

(d) Procedendo come al punto precedente, per ogni $i=1,\dots,5$ abbiamo

$$P(X_i\leq 3)=F_{X_i}(3)=2\Phi(3)-1=0,9974$$

Pertanto

$$P(\max(X_1,\dots,X_5)>3)=1-P(X_1\leq 3,\dots,X_5\leq 3)=1-\prod_{i=1}^{5}P(X_i\leq 3)=$$
$$1-(0.9974)^5=1-0,9871=0,0129$$

(3) (a) E' abbastanza chiaro che $|X_1|\sim U([0,1])$. In effetti $|X_1|$ ha ripartizione

$$F_{|X_1|}(t)=P(-t<X_1<t)=\begin{cases}0 & \text{se } t<0\\ t & \text{se } t\in[0,1]\\ 1 & \text{se } t>1\end{cases}$$

da cui derivando otteniamo la densità

$$f_{|X_1|}(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\in[0,1]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

(b) Essendo $|X_1|\sim U([0,1])$, abbiamo

$$\mu=E(|X_1|)=\frac{1}{2},\qquad \sigma^2=Var(|X_1|)=\frac{1}{12}.$$

Dal teorema del limite centrale ricaviamo dunque

$$\frac{|X_1|+\ldots+|X_{100}|}{100}\sim N(\mu,\tfrac{\sigma^2}{100})=N(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{1200}),$$

da cui

$$P(\tfrac{|X_1|+\ldots+|X_{100}|}{100}>0.01)\simeq P(\tfrac{\sigma}{10}\zeta_0+\mu>0.01)=P(\zeta_0>\tfrac{10}{\sigma}\cdot(\tfrac{1}{100}-\mu))=$$
$$P(\zeta_0>-10\sqrt{12}\cdot\tfrac{49}{100})=P(\zeta_0>-\tfrac{49\sqrt{3}}{5})=P(\zeta_0>-16.97)=1.$$

(c) Essendo $X_1\sim U([-1,1])$, abbiamo

$$\mu=E(X_1)=0,\qquad \sigma^2=Var(|X_1|)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Dal teorema del limite centrale ricaviamo dunque

$$\frac{X_1+\ldots+X_{100}}{100}\sim N(\mu,\tfrac{\sigma^2}{100})=N(0,\tfrac{1}{300}),$$

da cui

$$P(\tfrac{X_1+\ldots+X_{100}}{100}>0.01)\simeq P(\zeta_0>\tfrac{10}{\sigma}\cdot(\tfrac{1}{100}-\mu))=P(\zeta_0>\tfrac{10\sqrt{3}}{100})=P(\zeta_0>\tfrac{\sqrt{3}}{10})=$$
$$=P(\zeta_0>0.17)=1-P(\zeta_0\leq 0.17)=1-\Phi(0.17)=0.4325$$

(d) Abbiamo

$$\mu = E(X_1^2) = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{2} dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$E(X_1^4) = \int_{-1}^{1} \frac{t^4}{2} dt = \left[\frac{t^5}{10}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5}$$

$$\sigma^2 = Var(X_1^2) = E(X_1^4) - E(X_1^2)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45} \simeq 0.09$$

Pertanto dal teorema del limite centrale abbiamo

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_{100}^2}{100} \sim N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{100}) = N(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{1125}),$$

da cui

$$P(\tfrac{X_1^2+\ldots+X_{100}^2}{100} > 0.01) = P(\zeta_0 > \tfrac{10}{\sigma} \cdot (\tfrac{1}{100} - \mu)) = P(\zeta_0 > -\tfrac{97}{30\sigma}) \simeq P(\zeta_0 > -\tfrac{97}{9}) = 1$$

(e) Detto $S_{100} = X_1 + \ldots + X_{100}$, abbiamo

$$P(\tfrac{(X_1+\ldots+X_{100})^2}{100} > 0.01) = P(S_{100}^2 > 1) = P(S_{100} < -1) + P(S_{100} > 1).$$

D'altra parte, come nel punto c), dal teorema del limite centrale abbiamo

$$S_{100} \sim N(100\mu, 100\sigma^2) = N(0, \tfrac{100}{3}).$$

Quindi ricaviamo

$$P(S_{100} < -1) = P(\zeta_0 < -\tfrac{\sqrt{3}}{10}) = \Phi(-0.17) = 1 - \Phi(0.17) = 1 - 0.5675 = 0.4325$$

$$P(S_{100} > 1) = P(\zeta_0 > \tfrac{\sqrt{3}}{10}) = 1 - \Phi(0.17) = 0.4325$$

Da cui otteniamo

$$P(\tfrac{(X_1+\ldots+X_{100})^2}{100} > 0.01) = 0,865.$$

(4) (a) Sia Y_i il tempo di decadimento della i-esima particella radioattiva. Allora $Y_i \sim Exp(1)$. Dunque

$$P(Y_i < 2) = 1 - e^{-2} \simeq 0,865.$$

(b) Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se l'i-esima particella decade in meno di 5 anni. Allora

$$P(X_i = 1) = P(Y_i < 5) = 1 - e^{-5} \simeq 0,993,$$

quindi $X_i \sim B(1, 1 - e^{-5},)$. D'altra parte $X_1, \ldots, X_{10^6}$ sono tutte variabili indipendenti e $X = X_1 + \ldots + X_{10^6}$, pertanto $X \sim B(10^6, 1 - e^{-5})$.

(c) Osserviamo che

$$E(X_i) = 1 - e^{-5}, \qquad Var(X_i) = e^{-5}(1 - e^{-5})$$

Quindi per il teorema del limite centrale possiamo approssimare X con una variabile normale

$$X \sim N\Big(10^6(1 - e^{-5}),\, 10^6 e^{-5}(1 - e^{-5})\Big)$$

Pertanto, essendo $e^{-5} \sim 0.007$, otteniamo

$$P(X > 0.993 \cdot 10^6) \simeq P\Big(\zeta_0 > \frac{0.993 - 1 + e^{-5}}{\sqrt{e^{-5}(1 - e^{-5})}} 10^3\Big) \simeq P(\zeta_0 > 0) = \frac{1}{2}.$$

(5) (a) La variabile $Y = X_1 - 1$ ha funzione di ripartizione

$$F_Y(t) = P(X < t+1) = F_X(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1 \\ 1 - e^{-2(t+1)} & \text{se } t \geq -1 \end{cases}$$

Una densità per Y può essere ricavata da F_Y per derivazione

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1 \\ 2e^{-2(t+1)} & \text{se } t \geq -1 \end{cases}$$

Infine abbiamo

$$E(Y) = E(X_1) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = Var(X_1) - Var(1) = Var(X_1) = \frac{1}{4}.$$

(b) Abbiamo $E(X_1) = \frac{1}{2}$, $Var(X_1) = \frac{1}{4}$, vale a dire $\mu = \sigma = \frac{1}{2}$. Usando l'approssimazione normale troviamo quindi

$$X_1 + \ldots + X_{50} \sim N(25, \tfrac{25}{2}).$$

Dunque

$$P(X_1 + \ldots + X_{50} > 45) \simeq P(\zeta_0 > \tfrac{\sqrt{2}(45-25)}{5}) = P(\zeta_0 > 4\sqrt{2}) \simeq 0$$

(c) Le 25 variabili $X_1 - X_2, X_3 - X_4, \ldots, X_{49} - X_{50}$ sono tutte indipendenti e con la stessa densità. D'altra parte

$$E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0,$$

$$Var(X_1 - X_2) = Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) = 2Var(X_1) = \frac{1}{2}$$

Pertanto $\mu = 0$ e $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e dal teorema del limite centrale troviamo

$$(X_1 - X_2) + \ldots + (X_{49} - X_{50}) \sim N(0, \tfrac{25}{2})$$

da cui

$$P(X_1 - X_2 + \ldots + X_{49} - X_{50} > 0.1) = P(\zeta_0 > \tfrac{\sqrt{2}}{5 \cdot 10}) = P(\zeta_0 > 0.03) = \\ = 1 - \Phi(0.03) = 0.5120$$

(6) (a) Abbiamo

$$P(X > 6, Y > 5) = P(X > 6)P(Y > 5) = P(\zeta_0 > \tfrac{1}{5})\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - \Phi(0.20)) = \frac{0.4207}{3} = 0.1402$$

(b) Abbiamo

$$P(X + Y < 7 | Y \leq 5) = \frac{P(X + Y < 7, Y \leq 5)}{P(Y \leq 5)} = \frac{P(X + Y < 7, Y = 4) + P(X + Y < 7, Y = 5)}{2/3} =$$

$$= \frac{3}{2}P(X < 3, Y = 4) + \frac{3}{2}P(X < 2, Y = 5) = \frac{3}{2}P(X < 3)P(Y = 4) + \frac{3}{2}P(X < 2)P(Y = 5) =$$

$$= \frac{1}{2}P(X < 3) + \frac{1}{2}P(X < 2)$$

D'altra parte

$$P(X < 2) = P(\zeta_0 < \tfrac{2-5}{5}) = P(\zeta_0 < -\tfrac{3}{5}) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

$$P(X < 3) = P(\zeta_0 < \tfrac{3-5}{5}) = P(\zeta_0 < -\tfrac{2}{5}) = 1 - \Phi(0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$$

Pertanto otteniamo

$$P(X+Y<7|Y\leq 5)=\frac{0.2743+0.3446}{2}=0.30945$$

(c) Dal punto successivo, abbiamo

$$P(X+Y<8)=\frac{1}{3}\Big(\Phi(-\tfrac{1}{5})+\Phi(-\tfrac{2}{5})+\Phi(-\tfrac{3}{5})\Big)=1-\frac{1}{3}\Big(\Phi(\tfrac{1}{5})+\Phi(\tfrac{2}{5})+\Phi(\tfrac{3}{5})\Big)=$$
$$=1-\frac{1}{3}\Big(0.5739+0.6554+0.7257\Big)=1-\frac{1}{3}1.955=0.3483$$

(d) Determiniamo la funzine di ripartizione F_{X+Y} in termini di $\Phi(t)$. Abbiamo

$$F_{X+Y}(t)=P(X+Y\leq t)=\sum_{k=4}^{6}P(X\leq t-k,Y=k)=\sum_{k=4}^{6}P(X\leq t-k)P(Y=k)=$$
$$\frac{1}{3}\sum_{k=4}^{6}P(X\leq t-k)=\frac{1}{3}\sum_{k=4}^{6}P(\zeta_0\leq \tfrac{t-k-5}{5})=\frac{1}{3}\Big(\Phi(\tfrac{t-9}{5})+\Phi(\tfrac{t-10}{5})+\Phi(\tfrac{t-11}{5})\Big)$$