AA 2023-2024 - Fisica - CdL Ingegneria e Scienze Informatiche

Luigi Guiducci - Esercitazioni

1) L'area A di una spira circolare aumenta nel tempo perché il raggio aumenta a tasso costante $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4.3$ cm/s. All'istante iniziale l'area vale $A_0 = 0.285$ m^2. Calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira nell'istante $t = 0$ e nell'istante $t = 1$ s, quando essa è immersa in un campo magnetico ad essa perpendicolare di modulo $B = 0.28$ T.

[$\mathscr{E}(0) \simeq 23$ mV ; $\mathscr{E}(1 \text{ s}) \simeq 26$ mV]

2) Una spira deformabile di resistenza $R = 2.0\ \Omega$ è esposta ad una campo magnetico di intensità variabile nel tempo secondo la legge $B(t) = \alpha t$, con $\alpha = 0.60$ T/s. L'area A della spira varia nel tempo secondo la legge $A(t) = A_0 + \beta t$, con $A_0 = 0.50$ m^2 e $\beta = 0.7$ m^2/s. Si calcolino intensità e verso della corrente indotta nella spira al tempo $t' = 2$ s nel caso in cui $\vec{B}$ sia parallelo al piano della spira o perpendicolare ad esso.

[$I = 0$; $I = 0.99$ A]

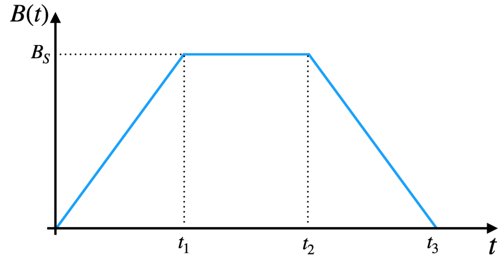
3) Un lungo filo rettilineo è percorso dalla corrente variabile $i = I_0 \sin \omega t$ con $I_0 = 1$ A e $\nu = 50$ Hz. Nel piano del filo è disposta una bobina di $N = 1000$ spire quadrate di lato $a = 10$ cm con un lato del quadrato parallelo al filo, a distanza a dal filo. Calcolare la forza elettromotrice ai capi della bobina di spire al tempo $t^* = 1.33$ ms.

[$\mathscr{E} \simeq 3.98 \times 10^{-3}$ V]

4) Una spira circolare di raggio $r = 1$ cm e resistenza $R = 2\ \Omega$ è immersa in un campo magnetico uniforme, diretto parallelamente all'asse della spira e di modulo variabile nel tempo secondo la legge $B = B_0 \mathrm{e}^{-t}$ con $B_0 = 1$ T. Si trovi la corrente sulla spira quando il modulo del campo vale $B_0/2$.

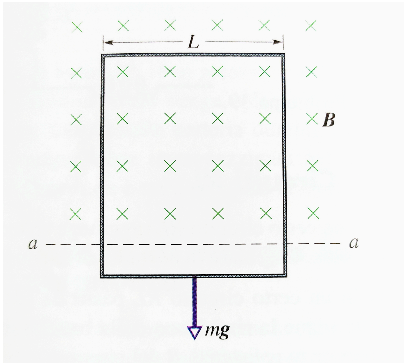
[$i \simeq 7.85 \times 10^{-5}$ A]

5) Attraverso una spira circolare di raggio $r = 12$ cm e resistenza $R = 8.5\ \Omega$ si ha un campo magnetico uniforme e ortogonale al piano della spira, il cui modulo $B(t)$ cambia nel tempo come mostrato in figura. I valori numerici sono $B_S = 0.50$ T e $t_1 = 2.0$ s, $t_2 = 4.0$ s, $t_3 = 6.0$ s. Si ottenga la corrente circolante nella spira in funzione del tempo.



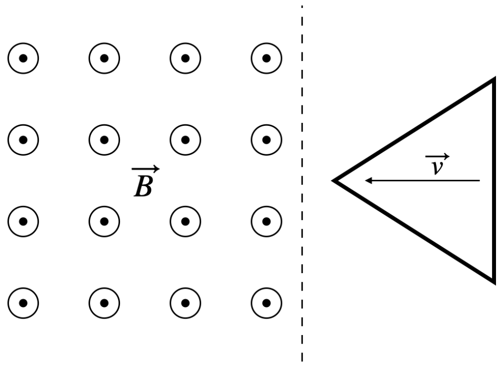
[$i(t) \simeq -1.33$ mA $0 \leq t < t_1$; 0 $t_1 \leq t < t_2$; $i(t) \simeq 1.33$ mA $t_2 \leq t \leq t_3$]

6) Una lunga spira rettangolare, di larghezza $L = 22$ cm, resistenza $R = 0.35\ \Omega$ e massa $m = 25$ g, è immersa in un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ uniforme e orizzontale e perpendicolare all'area della spira. Il campo magnetico ove presente ha modulo $B = 1.50$ T ma si manifesta solo al di sopra della linea aa in figura. La spira viene lasciata cadere; durante la caduta essa accelera fino ad una velocità massima v_m. Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli v_m.



[$v_m \simeq 0.788$ m/s]

7) Una spira a forma di triangolo equilatero di base $b = 25.0$ cm, ha una resistenza di $R = 2.50\ \Omega$ e si muove a velocità costante di modulo $v = 3.50$ cm/s. Si trova inizialmente in una regione priva di campo magnetico, e all'istante $t = 0$ inizia ad entrare in una regione occupata da un campo magnetico uniforme di modulo $B = 1.25$ T continuando a muoversi a velocità costante. Si consideri la figura per determinare l'orientamento della spiare triangolare e direzione e verso della sua velocità e del campo magnetico. Si determini:



1) qual è il verso della corrente indotta nella spira;
2) il valore della forza elettromotrice negli istanti $t = 0$ s e $t = 2$ s;
3) il valore della corrente indotta nella spira negli istanti $t = 0$ s e $t = 2$ s;
4) se la forza elettromotrice può tornare ad annullarsi e perché; se sì, in quale istante.

[vedere soluzione a lezione]

SOLUZIONI

1) L'area A di una spira circolare aumenta nel tempo perché il raggio aumenta a tasso costante $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4.3\ \mathrm{cm/s}$. All'istante iniziale l'area vale $A_0 = 0.285\ \mathrm{m}^2$. Calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira nell'istante $t = 0$ e nell'istante $t = 1\ \mathrm{s}$, quando essa è immersa in un campo magnetico ad essa perpendicolare di modulo $B = 0.28\ \mathrm{T}$.

[$\mathscr{E}(0) \simeq 23\ \mathrm{mV}$; $\mathscr{E}(1\ \mathrm{s}) \simeq 26\ \mathrm{mV}$]

L'area iniziale vale

$$A_0 = \pi r_0^2$$

quindi

$$r_0 = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}} \simeq 0.301\ \mathrm{m}$$

La forza elettromotrice indotta

$$\mathscr{E}(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = B\pi\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} = 2\pi B r(t)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Nell'istante $t = 0$

$$\mathscr{E}(0) = 2\pi B r_0 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \simeq 23\ \mathrm{mV}$$

nell'istante $t = 1\ \mathrm{s}$

$$\mathscr{E}(1\ \mathrm{s}) = 2\pi B r(1\ \mathrm{s})\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \simeq 26\ \mathrm{mV}$$

dove

$$r(1\ \mathrm{s}) = r(0) + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(1\ \mathrm{s}) \simeq 0.3054\ \mathrm{m}$$

2) Una spira deformabile di resistenza $R = 2.0\ \Omega$ è esposta ad una campo magnetico di intensità variabile nel tempo secondo la legge $B(t) = \alpha t$, con $\alpha = 0.60\ \mathrm{T/s}$. L'area A della spira varia nel tempo secondo la legge $A(t) = A_0 + \beta t$, con $A_0 = 0.50\ \mathrm{m}^2$ e $\beta = 0.7\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Si calcolino intensità e verso della corrente indotta nella spira al tempo $t' = 2\ \mathrm{s}$ nel caso in cui $\vec{B}$ sia parallelo al piano della spira o perpendicolare ad esso.

[$I = 0$; $I = 0.99$ A]

Avremo

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_A(\vec{B}) = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BA\cos\theta)$$

dove sia θ l'angolo compreso tra $\vec{B}$ e la normale $\hat{n}$ alla spira.

Se $\vec{B}$ è parallelo al piano della spira, allora $\vec{B} \perp \hat{n}$ e quindi $\cos\theta = 0$ e quindi $I = 0$.

Se $\vec{B}$ è perpendicolare al piano della spira, allora $\vec{B}\ //\ \hat{n}$ e quindi $\cos\theta = 1$, dunque si avrà:

$$I(t) = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\alpha t)\left(A_0 + \beta t\right)\right] = \frac{1}{R}\left(\alpha A_0 + 2\beta\alpha t\right)$$

che all'istante richiesto fornisce il modulo dell'intensità di corrente

$$I(t') \simeq 0.99\ \mathrm{A}$$

Per quel che riguarda il verso, immaginiamo di disegnare la spira sul piano della pagina e di avere il campo magnetico uscente dallo stesso. Sia il campo che l'area della spira aumentano con t, quindi il flusso aumenta; la corrente circolante nella spira deve avere verso tale da generare un campo che si opponga alla variazione del flusso, cioè entrante nella pagina; per la regola della mano destra, quindi, la corrente indotta nella spira circola in senso orario.

3) Un lungo filo rettilineo è percorso dalla corrente variabile $i = I_0 \sin \omega t$ con $I_0 = 1$ A e $\nu = 50$ Hz. Nel piano del filo è disposta una bobina di $N = 1000$ spire quadrate di lato $a = 10$ cm con un lato del quadrato parallelo al filo, a distanza a dal filo. Calcolare la forza elettromotrice ai capi della bobina di spire al tempo $t^* = 1.33$ ms.

[$\mathscr{E} \simeq 3.98 \times 10^{-3}$ V]

Iniziamo a vedere come calcolare il flusso di $\vec{B}$ attraverso la bobina. Il campo a distanza r dal filo ha modulo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Per ogni elemento di superficie della spira di altezza a e larghezza dr il flusso vale

$$\mathrm{d}\Phi = Ba\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 i a}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

quindi attraverso un'intera spira che si estende alla distanza dal filo compresa tra a e $2a$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i a}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi}\ln 2$$

Visto che le spire sono N e sostituendo la legge oraria di i

$$\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 i a N}{2\pi}\ln 2 = \frac{\ln 2}{2\pi}\mu_0 a N I_0 \sin \omega t$$

Per la legge di Faraday,

$$|\mathscr{E}| = \frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\ln 2}{2\pi}\mu_0 a N I_0 \omega \cos \omega t$$

che possiamo riassumere come

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t \quad \text{con} \quad \mathscr{E}_0 = \frac{\mu_0 I_0 N a \omega \ln 2}{2\pi}$$

Numericamente, si ha

$$\mathscr{E}_0 \simeq 4.36 \times 10^{-3} \text{ V}$$

e all'istante richiesto

$$\mathscr{E} \simeq 3.98 \times 10^{-3} \text{ V}$$

4) Una spira circolare di raggio $r = 1$ cm e resistenza $R = 2\ \Omega$ è immersa in un campo magnetico uniforme, diretto parallelamente all'asse della spira e di modulo variabile nel tempo secondo la legge $B = B_0 \mathrm{e}^{-t}$ con $B_0 = 1$ T. Si trovi la corrente sulla spira quando il modulo del campo vale $B_0/2$.

[$i \simeq 7.85 \times 10^{-5}$ A]

Dalla legge di Faraday, considerando la superficie che ha come bordo la spira, si ha

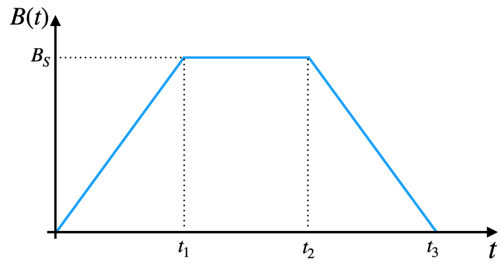
$$\mathscr{E} = Ri = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(B_0 \mathrm{e}^{-t}\right) = \pi r^2 B_0 \mathrm{e}^{-t}$$

quindi si ricava la corrente indotta

$$i = \frac{\pi r^2 B_0 e^{-t}}{R}$$

Quando il campo vale $B_0/2$, si ha

$$i = \frac{B_0}{2R}\pi r^2 \simeq 7.85 \times 10^{-5}\ \mathrm{A}$$



5) Attraverso una spira circolare di raggio $r = 12$ cm e resistenza $R = 8.5\ \Omega$ si ha un campo magnetico uniforme e ortogonale al piano della spira, il cui modulo $B(t)$ cambia nel tempo come mostrato in figura. I valori numerici sono $B_S = 0.50$ T e $t_1 = 2.0$ s, $t_2 = 4.0$ s, $t_3 = 6.0$ s. Si ottenga la corrente circolante nella spira in funzione del tempo.

[$i(t) \simeq -1.33$ mA $0 \leq t < t_1$; 0 $t_1 \leq t < t_2$; $i(t) \simeq 1.33$ mA $t_2 \leq t \leq t_3$]

Per la legge di Faraday, $\mathscr{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$.

Dato che la superficie della spira e il campo magnetico sono sempre perpendicolari, l'espressione per il flusso si riduce a $\Phi(\vec{B}) = SB$, dove $S = \pi r^2$ è la superficie della spira; essendo quest'ultima costante, la derivata del flusso si riduce alla superficie per la derivata del campo:

$$\mathscr{E} = -\pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

La corrente che circola nella spira è, per la legge di Ohm, pari alla forza elettromotrice diviso per la resistenza

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{\pi r^2}{R}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

La derivata del modulo del campo magnetico rispetto al tempo:

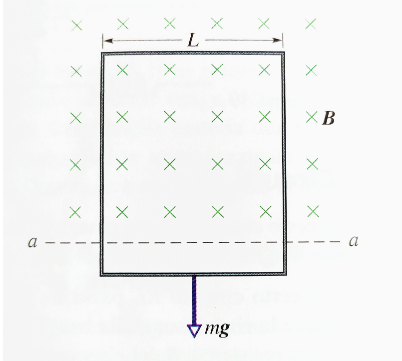
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} B_s/(t_1 - 0) & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t < t_2 \\ -B_s/(t_3 - t_2) & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$i(t) = \begin{cases} -\frac{\pi r^2 B_s}{R t_1} \simeq -1.33 \text{ mA} & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t < t_2 \\ \frac{\pi r^2 B_s}{R(t_3 - t_2)} \simeq 1.33 \text{ mA} & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

6) Una lunga spira rettangolare, di larghezza $L = 22$ cm, resistenza $R = 0.35\ \Omega$ e massa $m = 25$ g, è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e orizzontale e perpendicolare all'area della spira. Il campo magnetico ove presente ha modulo $B = 1.50$ T ma si manifesta solo al di sopra della linea aa in figura. La spira viene lasciata cadere; durante la caduta essa accelera fino ad una velocità massima v_m. Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli v_m.

[$v_m \simeq 0.788$ m/s]



Durante la caduta, la parte di superficie della spira soggetta a campo magnetico diminuisce, dunque diminuisce il flusso del campo magnetico. Se in un certo istante la spira sta cadendo con velocità v, avremo

$$\mathscr{E}_{IND} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -BL\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -BLv$$

Tale forza elettromotrice indotta genera una corrente nella spira, che secondo la legge di ohm sarà

$$i = \mathscr{E}_{IND}/R = -\frac{BLv}{R}$$

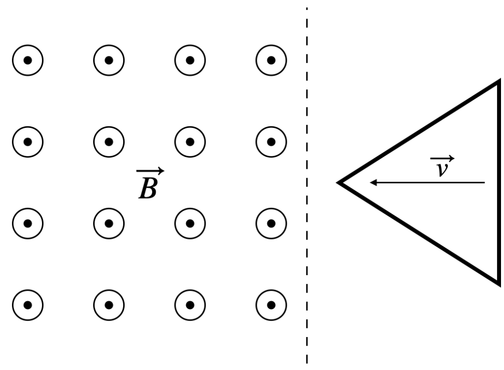
Questa corrente, che circola in senso antiorario in figura, si trova a muoversi perpendicolarmente al campo magnetico nei tratti della spira che vi sono immersi; i tratti verticali, percorsi in direzione opposta, produrranno una forza netta nulla; invece solo uno dei due tratti orizzontali è immerso nel campo, e produrrà una forza netta diretta verso l'alto che secondo la legge di Biot e Savart ha modulo:

$$F_B = iLB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

La spira smette di accelerare quando questa forza sarà di modulo pari alla forza peso, quindi

$$\frac{B^2L^2v_m}{R} = mg \implies v_m = \frac{mgR}{B^2L^2} \simeq 0.788 \text{ m/s}$$

7) Una spira a forma di triangolo equilatero di base $b = 25.0$ cm, ha una resistenza di $R = 2.50\ \Omega$ e si muove a velocità costante di modulo $v = 3.50$ cm/s. Si trova inizialmente in una regione priva di campo magnetico, e all'istante $t = 0$ inizia ad entrare in una regione occupata da un campo magnetico uniforme di modulo $B = 1.25$ T continuando a muoversi a velocità costante. Si consideri la figura per determinare l'orientamento della spiare triangolare e direzione e verso della sua velocità e del campo magnetico. Si determini:



1) qual è il verso della corrente indotta nella spira;
2) il valore della forza elettromotrice negli istanti $t = 0$ s e $t = 2$ s;
3) il valore della corrente indotta nella spira negli istanti $t = 0$ s e $t = 2$ s;
4) se la forza elettromotrice può tornare ad annullarsi e perché; se sì, in quale istante.

[vedere soluzione a lezione]

Mentre il triangolo entra nella regione in cui è presente il campo magnetico, si ha un aumento del flusso dello stesso attraverso la spira; dato che il campo magnetico è uscente dalla pagina, per la legge di Lenz la corrente indotta nella spira circolerà in senso orario.

L'area del triangolo che all'istante t si trova dentro alla regione in cui è presente campo magnetico si può scrivere come

$$A(t) = \frac{1}{2} b(t) h(t)$$

D'altra parte per un triangolo equilatero $h = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ quindi

$$A(t) = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} h(t) h(t) = \frac{h^2 t}{\sqrt{3}} = \frac{v^2 t^2}{\sqrt{3}}$$

dato che, essendo il moto uniforme, e $h(0) = 0$, si ha $h(t) = vt$.

La forza elettromotrice indotta è (in modulo)

$$\mathscr{E}_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{B} \cdot \vec{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} BA \cos\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} BA = \frac{2Bv^2}{\sqrt{3}} t$$

dove abbiamo sostituito $\cos\theta = 1$, visto che il campo magnetico è perpendicolare alla superficie del triangolo.

Abbiamo quindi:

$$\mathscr{E}_{ind}(t = 0\ \mathrm{s}) = 0\ \mathrm{V}$$

$$\mathscr{E}_{ind}(t = 2\ \mathrm{s}) = \frac{4Bv^2}{\sqrt{3}} \simeq 0.10\ \mathrm{V}$$

Per trovare la corrente indotta sarà sufficiente dividere per la resistenza i valori trovati:

$$i(t = 0\ \mathrm{s}) = \frac{\mathscr{E}_{ind}(t = 0\ \mathrm{s})}{R} = 0\ \mathrm{A}$$

$$i(t = 2\ \text{s}) = \frac{\mathcal{E}_{ind}(t = 2\ \text{s})}{R} = \frac{4Bv^2}{\sqrt{3}R} \simeq 40\ \text{mA}$$

Quando la spira è *completamente* entrata nella regione in cui è presente il campo magnetico, non si ha più variazione del flusso del campo magnetico e quindi non c'è più forza elettromotrice indotta; ciò accade quando

$$vt^* = h = \frac{\sqrt{3}}{2}b \implies t^* = \frac{\sqrt{3}b}{2v} \simeq 6.2\ \text{s}$$