

Prove scritte di MDP dal 2017

Contents

PROVA SCRITTA DI MDP, 16/01/2017

Esercizio 1 Tre palline rosse e tre blu vengono partizionate in modo casuale in tre urne in modo che nessuna urna rimanga vuota. Scegliamo una urna a caso ed estraiamo una pallina da quest'urna.

- Verificare che il numero di Stirling $S_{6,3} = 90$.
- Descrivere uno spazio di probabilità che modella il fenomeno aleatorio. Quanti sono i risultati possibili?
- Qual è la probabilità che l'urna scelta contenga una sola pallina?
- (*) Qual è la probabilità che l'urna prescelta contenga un'altra pallina dello stesso colore di quella estratta?
- Siano X e Y il numero di palline rosse e blu rispettivamente contenute nell'urna prescelta. Qual è la densità di X ?
- Determinare $E[X]$.
- Stabilire se X e Y sono indipendenti.

Soluzione.

- Si ha $S_{6,3} = S_{5,2} + 3S_{5,3}$, $S_{5,3} = S_{4,2} + 3S_{4,3} = S_{4,2} + 3 \cdot 6$, $S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$ e sostituendo otteniamo $S_{6,3} = 90$.
- Per quanto riguarda solo il fenomeno della partizione possiamo scegliere Ω come l'insieme delle partizioni delle 6 palline in 3 parti (e quindi $|\Omega| = 90$). Volendo considerare anche l'estrazione della pallina abbiamo bisogno di prendere Ω come l'insieme delle coppie (S, b) dove S è una partizione come sopra e b è una pallina. La probabilità del risultato (A, b) è dato da $\frac{1}{90 \cdot 3 \cdot k}$ dove k è la cardinalità della parte di S che contiene la pallina b .
- Sia A l'evento costituito dalle partizioni con sottoinsiemi di cardinalità 4,1,1, B di cardinalità 3,2,1 e C di cardinalità 2,2,2. Abbiamo

$$|A| = \binom{6}{4} = 15, \quad |B| = \binom{6}{3} \binom{3}{2} = 60, \quad |C| = \binom{6}{2} \binom{4}{2} \frac{1}{6} = 15.$$

Detto E l'evento "scelta di un'urna con una pallina sola" abbiamo

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = \frac{15}{90} \frac{2}{3} + \frac{60}{90} \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

- (*) Calcoliamo la probabilità di estrarre una rossa da un'urna che contiene almeno due rosse. Quest'urna potrà essere dei seguenti tipi:
 - A_1 : "l'urna scelta ha 2 rosse e 0 blu"
 - A_2 : "l'urna scelta ha 2 rosse e 1 blu"
 - A_3 : "l'urna scelta ha 2 rosse e 2 blu"
 - A_4 : "l'urna scelta ha 3 rosse e 0 blu"
 - A_5 : "l'urna scelta ha 3 rosse e 1 blu"

Detto RR l'evento "estrazione di una pallina rossa da un'urna che ne contiene almeno due" abbiamo

$$\begin{aligned} P(RR) &= P(A_1)P(RR|A_1) + P(A_2)P(RR|A_2) + P(A_3)P(RR|A_3) + P(A_4)P(RR|A_4) + P(A_5)P(RR|A_5) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\binom{3}{2}S_{4,2}}{90} \cdot 1 + \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}S_{3,2}}{90} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}S_{2,2}}{90} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{3}{3}S_{3,2}}{90} \cdot 1 + \frac{\binom{3}{3}\binom{3}{1}S_{2,2}}{90} \cdot \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{270}(21 + 18 + 4.5 + 3 + 2.25) \\ &= \frac{48.75}{270} \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

per cui la probabilità richiesta è 36%.

- e. f. Ci aspettiamo che le 3 urne contengano mediamente lo stesso numero di palline rosse. E siccome il numero totale di palline rosse è 3 abbiamo che il valore atteso di palline rosse in un'urna è 1 e quindi $E[X] = 1$. Calcoliamo ora la densità:

$$P(X = 3) = P(A_4) + P(A_5) = \frac{2}{90}$$

e

$$P(X = 2) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{19}{90}.$$

Ora $P(X = 1)$ lo possiamo anche calcolare ricordando che $E[X] = 1$ per cui

$$1 = P(X = 1) + 2\frac{19}{90} + 3\frac{2}{90}$$

da cui

$$P(X = 1) = \frac{49}{90}$$

e infine

$$P(X = 0) = 1 - \frac{46}{90} - \frac{19}{90} - \frac{2}{90} = \frac{23}{90}.$$

- g. Le variabili X e Y sono dipendenti in quanto, ad esempio,

$$0 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0).$$

Esercizio 2 Consideriamo due variabili aleatorie X e Y indipendenti e definite sullo stesso spazio di probabilità. X è esponenziale di media 1, Y è continua uniforme di media 1.

- Scrivere la densità e la funzione di ripartizione di X .
- Determinare la densità di Y sapendo che $P(X > 1, Y < 2) = \frac{1}{5}$.
- Determinare la densità di $\max(X, Y)$.

Soluzione

- a. Si ha

$$f_X(s) = \begin{cases} e^{-s} & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

e

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

b. Abbiamo

$$P(X > 1)P(Y < 2) = \frac{1}{5}$$

da cui $P(Y < 2) = \frac{e}{5} \sim 0.544$. Sia $Y \sim U([a, b])$. Abbiamo $a + b = 2$ dal dato sulla media. La funzione di ripartizione di Y è data da $F_Y(t) = \frac{t-a}{b-a}$ se $t \in [a, b]$ e quindi $\frac{e}{5} = F_Y(2) = \frac{2-a}{b-a}$. Sostituendo $b = 2 - a$ e risolvendo otteniamo

$$a = \frac{2e - 10}{2e - 5} \sim -10.45$$

e quindi $b = \frac{2e}{2e-5} \sim 12.45$.

c. La funzione di ripartizione del massimo di due variabili indipendenti è data dal prodotto delle rispettive funzioni di ripartizione. Per cui otteniamo

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ (1 - e^{-t})^{\frac{t-a}{b-a}} & 0 \leq t \leq b \\ (1 - e^{-t}) & t \geq b \end{cases}$$

La densità si ottiene derivando la funzione di ripartizione per cui abbiamo

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-t} \frac{t-a}{b-a} + (1 - e^{-t}) \frac{1}{b-a} & 0 \leq t \leq b \\ e^{-t} & t \geq b \end{cases}$$

Esercizio 3 Un corridore si allena effettuando 10 giri di 400 metri registrando i seguenti tempi (espressi in secondi): 120, 124, 110, 130, 128, 130, 108, 126, 112, 114.

- Determinare le velocità ottenute nei 10 giri (esprese in m/s e in min/km).
- Determinare la velocità media complessiva (espressa in m/s e in min/km).
- Determinare la varianza delle velocità (esprese in min/km).
- Determinare l'intervallo di confidenza al 95% per il valore atteso della velocità in un giro di campo di allenamento di questo corridore (espressa in min/km).

Soluzione.

- Le velocità in m/s sono $\frac{400}{120}, \frac{400}{124}, \frac{400}{110}, \frac{400}{130}, \frac{400}{128}, \frac{400}{130}, \frac{400}{108}, \frac{400}{126}, \frac{400}{112}, \frac{400}{114}$.
Le velocità in min/km sono date da $\frac{t}{400} \cdot \frac{1000}{60} = \frac{t}{24}$ per cui sono $\frac{120}{24}, \frac{124}{24}, \frac{110}{24}, \frac{130}{24}, \frac{128}{24}, \frac{130}{24}, \frac{108}{24}, \frac{126}{24}, \frac{112}{24}, \frac{114}{24}$.
- Per ottenere la velocità media in m/s bisogna fare la media armonica delle singole velocità. Per ottenere quella in min/km basta farne la media campionaria. Oppure semplicemente considerare tempo totale (1202 secondi) e spazio totale (4000 metri), per cui la velocità media complessiva è $4000/1202 = 3.328 m/s$ e $\frac{1202}{60 \cdot 4} = 5.008 min/km$.
- Calcoliamo la media (campionaria) dei quadrati delle velocità esprese in min/km . Otteniamo

$$\frac{1}{10} \left(\frac{120^2 + 124^2 + 110^2 + 130^2 + 128^2 + 130^2 + 108^2 + 126^2 + 112^2 + 114^2}{24^2} \right) = 25.20.$$

per cui la varianza è $\sigma^2 = 25.20 - (5.008)^2 = 0.12 min^2/km^2$.

- La semiampiezza dell'intervallo di confidenza è

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 1.96 \frac{0.35}{\sqrt{10}} = 0.22$$

per cui l'intervallo di confidenza è

$$[4.79, 5.23]$$

intervallo piuttosto ampio date le piccole dimensioni del campione.

PROVA SCRITTA DI MDP, 31/01/2017

Esercizio 1 (12 punti) La spesa di un cliente casuale di un bar è una variabile esponenziale di media 5 Euro. Ogni 6 Euro di spesa un cliente del bar riceve un biglietto di una lotteria che risulta vincente con probabilità 0.30. (Tutte le probabilità vanno approssimate alla seconda cifra decimale).

- Determinare la probabilità che il cliente spenda più di 10 Euro.
- Determinare il valore atteso per il numero di biglietti ricevuti da un cliente casuale.
- Determinare la probabilità che un cliente riceva esattamente un biglietto vincente.
- Verificare che se A, B, C sono tre eventi in uno spazio di probabilità allora $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C)$.
- Calcolare la probabilità che il cliente abbia speso meno di 15 euro sapendo che ha trovato esattamente un biglietto vincente.

Soluzione.

- Detta X la spesa del cliente casuale si ha $X \sim \text{Exp}(1/5)$ e quindi

$$P(X > 10) = e^{-\frac{10}{5}} = 0.14.$$

- Sia Y la variabile “numero di biglietti ricevuti”. Abbiamo

$$P(Y = k) = P(6k < X < 6k + 6)$$

per ogni $k \geq 0$. Per cui $P(Y = 0) = P(0 < X < 6) = 1 - e^{-6/5} = 0.70$ e similmente $P(Y = 1) = e^{-6/5} - e^{-12/5} = 0.21$, $P(Y = 2) = 0.06$, $P(Y = 3) = 0.02$, $P(Y = 4) = 0.01$ e $P(Y = k) = 0$ per ogni $k > 4$. Abbiamo quindi

$$E[Y] = 1 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.06 + 3 \cdot 0.02 + 4 \cdot 0.01 = 0.43.$$

- Sia Z la variabile “numero di biglietti vincenti ricevuti”. Abbiamo, usando la formula delle probabilità totale

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(Z = 1|Y = 1)P(Y = 1) + P(Z = 1|Y = 2)P(Y = 2) \\ &\quad + P(Z = 1|Y = 3)P(Y = 3) + P(Z = 1|Y = 4)P(Y = 4) \\ &= 0.30 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.70 \cdot 0.06 + 3 \cdot 0.30 \cdot 0.70^2 \cdot 0.02 + 4 \cdot 0.30 \cdot 0.70^3 \cdot 0.01 \\ &= 0.10 \end{aligned}$$

- Si ha

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A|B \cap C)P(B|C). \end{aligned}$$

e. Abbiamo

$$\begin{aligned}P(X < 15|Z = 1) &= P(6 < X < 12|Z = 1) + P(12 < X < 15|Z = 1) \\&= P(Z = 1|6 < X < 12) \frac{P(6 < X < 12)}{P(Z = 1)} + P(Z = 1|12 < X < 15) \frac{P(12 < X < 15)}{P(Z = 1)} \\&= 0.30 \frac{e^{-6/5} - e^{-12/5}}{0.10} + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.70 \frac{e^{-12/5} - e^{-15/5}}{0.10} \\&= 0.80.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (10 punti) Sia

$$f(s) = \begin{cases} as(s-20) & \text{se } 0 \leq s \leq 20 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

una funzione dipendente da un parametro reale a .

- Mostrare che esiste un unico valore a per cui $f(s)$ è la densità di una variabile aleatoria continua X .
- Determinare il valore atteso $E[X]$.
- Stabilire se $P(X > 5|X > 4) = P(X > 1)$.

Soluzione

a. Si ha $f(s) \geq 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ se e solo se $a \leq 0$. Inoltre calcoliamo l'integrale su tutto \mathbb{R}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds = \int_0^{20} as(s-20) ds = -\frac{4000}{3}a$$

da cui, per essere 1, otteniamo $a = -\frac{3}{4000}$ che essendo < 0 è accettabile.

b. Osserviamo che il grafico di $f(s)$ è una parabola che si annulla in 0 e 20 ed è quindi simmetrica rispetto all'asse $s = 10$. Deduciamo che $E[X] = 10$. Altrimenti possiamo calcolare

$$E[X] = -\frac{3}{4000} \int_0^{20} (s^3 - 20s^2) ds = -\frac{3}{4000} \left[\frac{s^4}{4} - \frac{20s^3}{3} \right]_0^{20} = 10.$$

c. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X > 5|X > 4) &= \frac{P(X > 5)}{P(X > 4)} = \frac{-\frac{3}{4000} \int_5^{20} (s^2 - 20s) ds}{-\frac{3}{4000} \int_4^{20} (s^2 - 20s) ds} \\ &= \frac{[s^3/3 - 10s^2]_5^{20}}{[s^3/3 - 10s^2]_4^{20}} \\ &= \frac{3375}{3584} = 0.95. \end{aligned}$$

Invece

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - (-3/4000) \int_0^1 (s^2 - 20s) ds \\ &= 1 + \frac{3}{4000}(-29/3) \\ &= \frac{3971}{4000} \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

per cui le due probabilità sono diverse.

Esercizio 3 (10 punti) Consideriamo 80 variabili aleatorie indipendenti X_1, \dots, X_{80} uniformi nell'insieme $\{1, 2, 3\}$.

- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{80} > 122)$.
- Determinare $P(X_1 - X_2 + X_3 - X_4 \dots + X_{79} - X_{80} > 3)$.
- Determinare $P(X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 + \dots + X_{79} + 2X_{80} > 200)$.

Soluzione. a. Le X_i hanno valore atteso $E[X_i] = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}3 = 2$ per ogni i . Inoltre

$$E[X_i^2] = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}9 = \frac{14}{3}$$

da cui $\text{Var}(X_i) = \frac{2}{3}$ per ogni i . La variabile $X = X_1 + \dots + X_{80}$ per il teorema limite centrale è

$$X \sim N(160, \frac{160}{30})$$

per cui

$$P(X > 122) = P\left(\zeta_0 > \frac{122 - 160}{\sqrt{160/3}}\right) = P(\zeta_0 > -5.20) = 1$$

b. Poniamo $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_3 - X_4$ e così via. Abbiamo $E[Y_1] = 0$ e $\text{Var}(Y_1) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = \frac{4}{3}$. Per il teorema limite centrale $Y = Y_1 + \dots + Y_{40}$ soddisfa $Y \sim N(0, \frac{160}{3})$ per cui

$$P(Y > 3) = P\left(\zeta_0 > \frac{3 - 0}{\sqrt{160/3}}\right) = P(\zeta_0 > 0.41) = 0.34.$$

c. Poniamo ora $Z_1 = X_1 + 2X_2$, $Z_2 = X_3 + 2X_4, \dots$ Abbiamo $E[Z_1] = 6$ e $\text{Var}(Z_1) = 1 \text{Var}(X_1) + 4 \text{Var}(X_2) = \frac{10}{3}$ per cui $Z = Z_1 + \dots + Z_{40} \sim N(240, \frac{400}{3})$ e quindi

$$P(Z > 200) = P\left(\zeta_0 > \frac{200 - 240}{\sqrt{400/3}}\right) = P(\zeta_0 > -3.46) = 1.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 15/02/2017

Esercizio 1 (12 punti) Un corridore effettua una corsa ad ostacoli con un tempo ζ normale di media 100 secondi e varianza 4 secondi². Questo corridore abbatte ciascuno dei 3 ostacoli con probabilità $\frac{1}{5}$ indipendentemente l'uno dall'altro. Per ogni ostacolo abbattuto subisce una penalità di 2 secondi e denotiamo con T il tempo complessivo tenendo conto delle eventuali penalità.

- Determinare il valore atteso per T ;
- Determinare la varianza di T ;
- Determinare $P(T < 98)$;
- Determinare $E[\zeta T]$.

Esercizio 2 (10 punti) Si considerino le seguenti funzioni

$$f_1(s) = \begin{cases} s^2 - \frac{5}{6}s & \text{se } 0 \leq s \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad f_2(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}s^2 + \frac{7}{6}s & \text{se } 0 \leq s \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad f_3(s) = \begin{cases} 2s - s^2 & \text{se } 0 \leq s \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Stabilire quali tra f_1 , f_2 , f_3 sono densità continue;
- Scelto un valore di i per cui f_i è una densità, tracciarne il relativo grafico;
- Sia X una variabile aleatoria tale che X abbia la densità f_i scelta nel punto precedente. Determinare $P(X > 1 | X < \frac{3}{2})$.
- Calcolare la funzione di ripartizione di $2X + 1$.

Esercizio 3 (10 punti) I voti ottenuti negli scritti di MDP negli scorsi due appelli sono riportati nella seguente tabella:

Voto	Frequenza
0-6	15
7-10	10
11-14	15
15-17	10
18-21	16
22-25	15
26-30	8

- Determinare media e varianza del campione.
- Disegnare un istogramma relativo a questi dati.
- Determinare la mediana, la moda e lo scarto interquartile.

PROVA SCRITTA DI MDP, 12/06/2017

Esercizio 1 Un insieme di 7 amici A,B,C,D,E,F,G viene partizionato in 3 gruppi (non vuoti) in modo casuale.

- Determinare la probabilità che la partizione ottenuta sia $\{\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F, G\}\}$.
- Determinare la probabilità che A rimanga da solo.
- Determinare la probabilità che A sia nello stesso gruppo di B .
- Determinare la probabilità che A sia nello stesso gruppo di B sapendo che non sta da solo;
- Determinare mediamente da quante persone è composto il gruppo di A .

- Il numero di partizioni è $S_{7,3} = S_{6,2} + 3S_{6,3} = \dots = 301$ e quindi la probabilità richiesta è $1/301$;
- Il numero di partizioni in 3 gruppi in cui A rimane da solo è il numero di partizioni dei rimanenti 6 amici in due soli gruppi, cioè $S_{6,2} = 2^5 - 1 = 31$. Di conseguenza la probabilità che A rimanga da solo è $31/301$.
- In questo caso possiamo pensare ad A e B come se fossero un solo elemento per cui il numero di partizioni in cui A e B stanno nello stesso gruppo è $S_{6,3} = 90$ per cui la probabilità richiesta è $90/301$.
- Sia E l'evento "A è in gruppo con B" e E' l'evento "A non sta da solo" abbiamo

$$P(E|E') = P(E \cap E')/P(E') = \frac{90/301}{270/301} = \frac{1}{3}.$$

e. Abbiamo $P(X = 1) = \frac{31}{301}$

$$P(X = 2) = 6S_{5,2} = \frac{90}{301}$$

$$P(X = 3) = 15S_{4,2} = \frac{105}{301}$$

$$P(X = 4) = 20S_{3,2} = \frac{60}{301}$$

$$P(X = 5) = 15. \text{ Per cui}$$

$$E[X] = \frac{31 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 105 + 4 \cdot 60 + 5 \cdot 15}{301} = \frac{841}{301} = 2.79.$$

Esercizio 2 Sia T il tempo di attesa affinché due bambini A e B nati oggi in Romagna si conoscano. Supponiamo che T sia una variabile esponenziale di media 25 anni.

- Determinare la probabilità che A e B si conoscano prima di compiere 18 anni;
- Stimare la probabilità che A e B non si conosceranno mai.
- Detto C un altro bambino nato oggi in Romagna determinare la probabilità che A conoscerà nei prossimi 50 anni almeno uno tra B e C .

a. Si ha $1 - e^{-\frac{18}{25}} = 51.3\%$; b. Per adattare questa variabile al problema concreto assumiamo che non conoscersi mai corrisponda a non conoscersi per 80 anni (tempo di vita medio). Si ha quindi

$$e^{-\frac{80}{25}} = 4\%.$$

c. In questo caso otteniamo

$$2(1 - e^{-2}) - (1 - e^{-2})^2 = 99\%.$$

Esercizio 3 Consideriamo 80 variabili aleatorie indipendenti X_1, \dots, X_{80} aventi tutte densità continua

$$f(s) : \begin{cases} 3s^2 & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a. Determinare media e varianza delle variabili X_i .
 - b. Determinare $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{80} > 35)$.
 - c. Determinare $P(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \dots + \sqrt{X_{80}} > 40)$.
- a. $E[X_i] = \int_0^1 s 3s^2 ds = \frac{3}{4}$ e $E[X_i]^2 = \int_0^1 s^2 3s^2 ds = \frac{3}{5}$ e quindi

$$\text{Var}(X_i) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Per cui

b. $X_1 + X_2 + \dots + X_{80} \sim N(60, 3)$ e quindi si ha sicuramente $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{80} > 35) = 1$ (avendo media 60 e varianza 3 assumerà valori compresi tra 55 e 65 circa, e di sicuro ben superiori a 35).

- c. $E[\sqrt{X_1}] = \int_0^1 \sqrt{s} 3s^2 ds = \frac{6}{7}$ e quindi

$$\text{Var}(\sqrt{X_1}) = E[X_1] - E[\sqrt{X_1}]^2 = \frac{3}{4} - \frac{36}{49}$$

e si conclude analogamente a prima che la probabilità richiesta è 1.

PROVA SCRITTA DI MDP, 11/07/2017

Esercizio 1 Sei scatole sono numerate da 1 a 6; ogni scatola contiene 2 palline numerate 1 e 2. Tiriamo un dado ed estraiamo senza rimpiazzo un numero di palline corrispondenti al numero uscito nel dado, di volta in volta scegliendo la scatola casualmente e mettendo da parte le scatole eventualmente rimaste vuote. Denotiamo con X il numero uscito dal dado, Y_1 e Y_2 il numero di 1 e 2 estratti rispettivamente, e Z_1, \dots, Z_6 il numero di palline estratte dalle sei scatole rispettivamente.

- Descrivere un insieme Ω dei possibili risultati di questo fenomeno aleatorio e determinare $|\Omega|$;
- Determinare i valori attesi per T , X_1 e X_2 ;
- Stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti;
- Stabilire se gli eventi $\{Y_1 = 1\}$ e $\{Z_1 = 1\}$ sono indipendenti;
- Determinare la densità di Z_1 ;
- Determinare $P(X_1 = 3|T = 5)$;

Esercizio 2 Sia X una variabile continua che assume valori in $[0, 1]$ e tale che $P(X < 0.5) = \frac{2}{3}$.

- Determinare una possibile densità e la corrispondente funzione di ripartizione per la variabile X ;
- Determinare il valore atteso di X usando la densità del punto precedente;
- Determinare $P(X^2 < 0.5)$.

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie X_1, \dots, X_{100} indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-2, 4]$.

- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{100} > 102)$;
- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{100} > 102|X_1^2 = 4)$;
- Determinare $P(\max(X_1, X_2) > 3|\min(X_1, X_2) > 0)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 06/09/2017

Esercizio 1 Una statistica rivela che il 50% dei ragazzi che si iscrivono alle scuole superiori scelgono un liceo, il 30% un istituto tecnico e il 20% un istituto professionale. Consideriamo un campione di 6 ragazzi che chiamiamo 1,2,3,4,5,6 che si devono iscrivere ad una scuola superiore e denotiamo con $L_i, T_i, P_i, i = 1, \dots, 6$ le variabili aleatorie definite da

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ si iscrive ad un liceo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad T_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ si iscrive ad un ist. tecnico} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad P_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ si iscrive ad un ist. prof.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

Denotiamo inoltre con L il numero di ragazzi del campione che si iscrivono ad un liceo ed analogamente definiamo T e P .

- Descrivere un insieme Ω dei possibili risultati di questo fenomeno aleatorio e determinare $|\Omega|$;
- Determinare la probabilità che vadano due ragazzi per ogni tipo di scuola;
- Determinare la probabilità che vadano due ragazzi per ogni tipo di scuola sapendo che 3 ha già scelto un liceo;
- Determinare la densità congiunta di (L, T) ;
- Stabilire se gli eventi $\{L = 3\}$ e $\{T = 2\}$ sono indipendenti;
- Determinare $E[L]$;

Esercizio 2 Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, X esponenziale di media 2 e Y uniforme nell'intervallo $[0, 4]$. Sia inoltre $Z = \min(X, Y)$.

- Determinare $P(X > 3, Y > 3)$;
- Determinare $P(Z > 3)$ e $P(Z > 5)$;
- Determinare la funzione di ripartizione di Z ;
- Determinare $E[Z]$.

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie X_1, \dots, X_{100} indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-2, 4]$.

- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{100} > 102)$;
- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{50} - X_{51} - \dots - X_{100} > 0.2)$;
- Determinare $P(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{100}^2 > 400)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 10/01/2018

Esercizio 1 Nove diverse bottiglie di vino numerate da 1 a 9 devono essere riposte in modo casuale in tre confezioni contenenti rispettivamente 2, 3 e 4 bottiglie ciascuna. Le bottiglie 1,2,3 valgono 10 Euro ciascuna, le altre valgono 5 Euro.

- a. Determinare in quanti modi può essere effettuata tale operazione;
Sono le composizioni di tipo $(2, 3, 4)$ e quindi sono $\binom{9}{2,3,4} = 1260$.
- b. determinare la probabilità che le bottiglie 1 e 2 finiscano nella stessa confezione; Nella confezione da due ho $\binom{7}{3} = 35$ modi, in quella da 3 $\binom{7}{1,2,4} = 105$ modi, in quella da 4 $\binom{7}{2,3,2} = 210$ modi e quindi, se A è l'evento "le bottiglie 1 e 2 finiscano nella stessa confezione" abbiamo la probabilità richiesta è

$$P(A) = \frac{35 + 105 + 210}{1260} = \frac{5}{18} = 0.28$$

- c. sapendo che le bottiglie 1 e 2 finiscono nella stessa confezione, qual è la probabilità che tale confezione contenga anche la bottiglia numero 3?

La probabilità dell'evento B ="le 3 bottiglie nella stessa confezione" si calcola similmente al caso precedente ed è $P(B) = \frac{75}{1260}$. Abbiamo quindi

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3}{18} = 0.17$$

- d. determinare la probabilità che la confezione da 3 bottiglie valga 20 Euro;
È come considerare una variabile ipergeometrica $H(3, 3, 6)$ e quindi abbiamo, detto E l'evento "la confezione con 3 bottiglie vale 20 Euro"

$$P(E) = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{15}{28} = 0.53$$

- e. stabilire se gli eventi "la confezione con 3 bottiglie vale 20 Euro" e "la confezione con 2 bottiglie contiene la bottiglia numero 1" sono indipendenti.

Sia E' l'evento "la confezione con 2 bottiglie contiene la bottiglia numero 1". Abbiamo

$$P(E') = \frac{\binom{8}{1,3,4}}{1260} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{1260}$$

e

$$P(E \cap E') = \binom{2}{1} \binom{6}{2} \cdot 5$$

e si osserva che $P(E)P(E') = P(E \cap E')$ per cui sono indipendenti.

Esercizio 2 Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ con probabilità uniforme e X la variabile aleatoria su Ω data da

$$X(\omega) = (-1)^\omega, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

- a. Definire una variabile aleatoria Y su Ω indipendente da X ;
Si può ad esempio scegliere

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = 1, 2, 3, 4 \\ 1 & \text{se } \omega = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

È chiaro che sapere il valore di X corrisponde a sapere se il risultato è pari o dispari e questo non altera la probabilità che Y valga 0 o 1.

- b. definire una variabile aleatoria Z su Ω dipendente da X ;
Basta scegliere $Z = X$.
c. calcolare i valori attesi $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$;
 $E[X] = 0$, $E[Y] = 1/2$, $E[Z] = 0$.
d. calcolare la varianza di $X - Y$;
 $E[X^2] = 1$ mentre $\text{Var}(Y) = \frac{1}{4}$ per cui, sfruttando l'indipendenza di X e Y abbiamo

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \frac{5}{4}$$

- e. calcolare la covarianza $\text{Cov}(X, Z)$
Abbiamo $\text{Cov}(X, Z) = E[XZ] - E[X]E[Z] = 1$.

Esercizio 3 Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(s) = \begin{cases} \frac{3}{2}(s+1)^2 & \text{se } -1 \leq s \leq 0 \\ \frac{3}{2}(s-1)^2 & \text{se } 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a. Verificare che f è una densità continua;
La f è una funzione pari e sempre positiva, nulla fuori dell'intervallo $[-1, 1]$ basta quindi mostrare che

$$\int_0^1 f(s) ds = \frac{1}{2}.$$

E infatti

$$\int_0^1 f(s) ds = \frac{3}{2} \left[\frac{(s-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- b. Sia X una variabile aleatoria di densità f . Determinare $E[X]$; Si ha $E[X] = 0$ perché la densità è pari (simmetrica rispetto all'asse y).
c. determinare $\text{Var}(X)$.
è sufficiente calcolare $E[X^2]$ e ancora, sfruttando la simmetria di f abbiamo

$$E[X^2] = 2 \int_0^1 s^2 \frac{3}{2}(s-1)^2 ds = \frac{1}{10}$$

per cui $\text{Var}(X) = \frac{1}{10}$.

- d. Date 90 variabili aleatorie X_1, \dots, X_{90} indipendenti di densità f determinare $P(X_1 + \dots + X_{90} > 1.5)$.
Per il teorema centrale del limite abbiamo $X_1 + \dots + X_{90} \sim N(0, 9)$ per cui

$$P(X_1 + \dots + X_{90} > 1.5) = P(\zeta_0 > \frac{1.5}{3}) = 1 - \Phi(0.5) = 0.31$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 29/01/2018

Esercizio 1 Nelle ultime elezioni i partiti 1,2,3 e 4 hanno tutti ottenuto il 25% dei voti. Scelti sei elettori a caso consideriamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 date da

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se qualcuno dei sei elettori ha votato il partito } i, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$.

- Determinare le densità delle variabili X_1, X_2, X_3, X_4 ;
- stabilire se X_1, X_2, X_3, X_4 sono indipendenti;
- determinare la probabilità che almeno uno dei quattro partiti non abbia ricevuto voti da questi sei elettori;
- determinare il valore atteso per il numero di partiti che hanno ricevuto almeno un voto da questi sei elettori.

Esercizio 2 Un'orchidea che si secca mediamente ogni sette anni è nata sulle pendici di un vulcano che erutta mediamente ogni dieci anni.

- Determinare la probabilità il vulcano erutti nei prossimi sette anni;
- determinare la probabilità che l'orchidea viva almeno sette anni (l'orchidea muore se si secca o se il vulcano erutta);
- determinare l'aspettativa di vita di questa orchidea.

Esercizio 3 Consideriamo cinquanta variabili di Poisson X_1, \dots, X_{50} di parametro $\lambda = 2$ e cinquanta variabili Y_1, \dots, Y_{100} uniformi in $\{1, 2, 3\}$, tutte indipendenti tra loro.

- Determinare valore atteso e varianza di $X = X_1 + \dots + X_{50}$;
- determinare valore atteso e varianza di $Y = Y_1 + \dots + Y_{50}$;
- determinare $P(X_1 = Y_1)$;
- determinare $P(X > 105)$ e $P(Y > 105)$;
- determinare $P(X + Y > 210)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 12/02/2018

Esercizio 1 Un insieme S è costituito da 10 palline, 5 rosse, numerate da 1 a 5, e 5 bianche, anch'esse numerate da 1 a 5.

- Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 6 di S ?
- Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 6 di S in cui troviamo almeno una pallina numerata i per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

Consideriamo ora il fenomeno aleatorio dato dall'estrazione di 6 palline da un'urna contenente le palline di S . Sia X = "numero di valori distinti estratti" e Y = "numero di palline bianche estratte"

- Descrivere uno spazio di probabilità che modellizzi questo fenomeno aleatorio;
- Determinare la densità di Y ;
- Determinare la densità di X ;
- Determinare la densità congiunta di X e Y .

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}t + 1 & -\frac{4}{3} \leq t \leq 0 \\ (t-1)^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Verificare che $f(t)$ è la densità di una variabile aleatoria continua X .
- Determinare $P(X \leq \frac{1}{2})$.
- Determinare $P(X \leq \frac{1}{2} | X > 0)$.

Esercizio 3 Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$p(k) = \begin{cases} 2^{-k} & k = 1, 2, \dots, 5 \\ 2^{-5} & k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Verificare che $p(k)$ è la densità di una variabile aleatoria discreta X .
- Determinare media e varianza di X .
- Date 32 variabili aleatorie indipendenti X_1, \dots, X_{32} tutte aventi densità $p(k)$ determinare

$$P(X_1 + \dots + X_{32} \geq 65).$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 20/06/2018

Esercizio 1 Consideriamo il fenomeno aleatorio dato da una sequenza di 8 lanci di una moneta equilibrata. Sia N_T il massimo numero di lanci consecutivi che hanno dato testa e X il numero di teste ottenute complessivamente.

- Determinare uno spazio di probabilità Ω che descriva tale fenomeno aleatorio.
- Determinare $P(N_T = 4)$ e $P(N_T = 6)$.
- Determinare le probabilità condizionali $P(N_T = 4|X = 8)$ e $P(X = 8|N_T = 4)$.
- Determinare $P(N_T \leq 1)$;
- Determinare $P(N_T \leq 2)$.

Esercizio 2 Si consideri la seguente funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ -s^4 + 2s^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

- Verificare che F è una funzione di ripartizione continua.
- Sia ora X la percentuale (espressa come numero tra 0 e 1) di un percorso ad ostacoli che una persona scelta a caso riesce a superare prima di fermarsi e supponiamo che F sia la funzione di ripartizione di X . Determinare la probabilità che una persona scelta a caso riesca a completare il percorso.
- Determinare la probabilità che una persona scelta a caso riesca a superare almeno i $2/3$ del percorso.
- Determinare la probabilità che una persona arrivata a metà del percorso riesca a completare il 90% del percorso stesso.
- Scelte due persone a caso qual è la probabilità che almeno una delle due riesca a completare il 90% del percorso?

Esercizio 3 Consideriamo 80 variabili aleatorie indipendenti X_1, \dots, X_{80} aventi tutte densità continua

$$f(s) : \begin{cases} 3s^2 & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare media e varianza delle variabili X_i .
- Determinare $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{80} > 62)$.
- Determinare $P(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \dots + \sqrt{X_{80}} > 70)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 05/07/2018

Esercizio 1 Lanciamo un dado bilanciato a cinque facce numerate da 1 a 5 e indichiamo con X il risultato ottenuto. Estraiamo poi X carte da un mazzo di 6 carte numerate da 1 a 6 e indichiamo con S la somma delle carte pescate.

- Determinare la densità di X .
- Determinare $P(S = 6)$.
- Determinare la probabilità che S sia pari.
- Stabilire se gli eventi $\{X = 3\}$ e $\{S \text{ è pari}\}$ sono indipendenti.
- Stabilire se gli eventi $\{X = 3\}$ e $\{S > 6\}$ sono indipendenti.

Esercizio 2 Sia $X \sim U([1, 3])$ una variabile continua uniforme nell'intervallo $[1, 3]$ e poniamo $Y = \frac{1}{4-X}$.

- Stabilire per quali valori di t si ha $P(Y < t) = 0$.
- Determinare la funzione di ripartizione di Y .
- Determinare $P(Y < \frac{2}{5} | X < 2)$.
- Determinare $P(Y < \frac{2}{5} | X > 2)$.

Esercizio 3 In una colonia di uccelli 30 mamme condividono il cibo che riescono a procurarsi per i loro 30 neonati pulcini. Supponiamo che quotidianamente le mamme riescano a procurare una quantità di cibo esponenziale di media 19 grammi e i cuccioli mangino ciascuno una quantità di cibo esponenziale di media 20 grammi.

- Determinare la varianza del cibo totale procurato dalle mamme.
- Determinare la probabilità che le mamme riescano a procurare complessivamente almeno 600 grammi di cibo.
- Determinare la probabilità che il cibo procurato riesca a sfamare tutti i pulcini.

PROVA SCRITTA DI MDP, 13/09/2018

Esercizio 1 Lanciamo un dado 3 volte e indichiamo con X_1, X_2, X_3 i risultati dei 3 lanci. Poniamo inoltre $Y_1 = (-1)^{X_1 - X_2}$ e $Y_2 = (-1)^{X_3 - X_2}$.

- Determinare la densità di X_1, X_2 e X_3 .
- Determinare la densità di Y_1 , di Y_2 e di $Y = Y_1 + Y_2$
- Stabilire se Y_1 e Y_2 sono indipendenti.
- Stabilire se X_1 e Y_1 sono indipendenti.
- Determinare $P(X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 \geq 17)$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(s) = \begin{cases} 1 + 2s & \text{se } -\frac{1}{2} \leq s \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}s & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Mostrare che f è la densità continua di una variabile aleatoria X ;
- Determinare la funzione di ripartizione della variabile $-X$;
- Determinare il valore atteso di $|X|$.

Esercizio 3 Siano X_1, \dots, X_{50} 50 variabili aleatorie indipendenti la cui funzione di ripartizione è:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ \frac{1}{4}(-t^2 + 2t + 3) & \text{se } -1 < t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

- determinare la densità di X_1 ;
- determinare media e varianza di X_1 ;
- determinare $P(X_1 + \dots + X_{50} > 0)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 08/01/2019

Esercizio 1 Avendo a disposizione 10 Euro vogliamo fare 6 scommesse da 5 euro ciascuna. Ad ogni puntata abbiamo probabilità 60% di perdere i 5 Euro puntati e 40% di vincere 5 Euro. Poniamo Y_i = numero di vittorie nelle prime i scommesse e X_i = soldi rimasti dopo le prime i scommesse (con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

- Determinare la densità di X_1 e di X_2 ;
- Determinare la densità delle Y_i ;
- Mostrare che $X_i = 10 + 5Y_i - 5(i - Y_i)$;
- Determinare il valore atteso di X_6 ;
- Determinare $P(X_4 > 0)$ e $P(X_6 > 0)$;
- Determinare $P(X_4 > 0, X_6 > 0)$.

Soluzione.

- a. Si ha

$$p_{X_1}(k) = \begin{cases} 0.4 & \text{se } k = 15 \\ 0.6 & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad p_{X_2}(k) = \begin{cases} 0.16 & \text{se } k = 20 \\ 0.48 & \text{se } k = 10 \\ 0.36 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- b. Si ha $Y_i \sim B(i, 0.4)$.
c. Y_i è il numero di vittorie e $i - Y_i$ è il numero di perdite nelle prime i scommesse e quindi il risultato segue.
d. Abbiamo dal punto precedente $X_6 = 10Y_6 - 20$ e quindi

$$E[X_6] = 10E[Y_6] - 20 = 10 \cdot 2.4 - 20 = 4.$$

- e. Per il punto c abbiamo

$$P(X_4 > 0) = P(Y_4 > 1) = 1 - P(Y_4 = 0) - P(Y_4 = 1) = 1 - 0.6^4 - 4 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4 = 0.5248$$

e similmente possiamo calcolare $P(X_6 > 0) = 0.4557$.

- f. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X_4 > 0, X_6 > 0) &= P(X_4 \geq 20, X_6 > 0) + P(X_4 = 10, X_6 > 0) \\ &= P(X_4 \geq 20) + P(X_4 = 10) \cdot P(X_6 > 0 | X_4 = 10). \end{aligned}$$

Ora $P(X_4 = 10) = 0.3456$ e $P(X_4 \geq 20) = P(X_4 > 0) - P(X_4 = 10) = 0.5248 - 0.3456 = 0.1792$ e quindi possiamo concludere

$$\begin{aligned} P(X_4 > 0, X_6 > 0) &= 0.1792 + 0.3456 \cdot (1 - 0.6^2) \\ &= 0.4004. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Consideriamo 3 variabili X, Y, Z la cui densità congiunta è data da

$$p_{X,Y,Z}(h, k, m) = \begin{cases} 1/9 & \text{se } (h, k, m) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 2, 2) \\ 2/9 & \text{se } (h, k, m) = (1, 2, 1), (1, 2, 2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare le densità marginali delle variabili X, Y, Z ;
- Stabilire se X e Y sono indipendenti;
- Stabilire se X e Z sono indipendenti;

Soluzione.

- Abbiamo

$$p_X(h) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } h = 1 \\ 1/3 & \text{se } h = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad p_Y(k) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } k = 1 \\ 2/3 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad p_Z(m) = \begin{cases} 5/9 & \text{se } m = 1 \\ 4/9 & \text{se } m = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Calcoliamo la densità congiunta di X, Y . Abbiamo

$$p_{X,Y}(h, k) = \begin{cases} 2/9 & \text{se } (h, k) = (1, 1), (2, 2) \\ 4/9 & \text{se } (h, k) = (1, 2) \\ 1/9 & \text{se } (h, k) = (2, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo quindi che $p_{X,Y}(h, k) = p_X(h)p_Y(k)$ per ogni h, k e quindi X e Y sono indipendenti.

- Osserviamo che $p_{X,Z}(1, 1) = 1/3 \neq p_X(1)p_Z(1)$ e quindi X e Z sono dipendenti.

Esercizio 3 Un certo componente elettrico di una macchina ha durata esponenziale di media 30 giorni e ogni volta che si rompe viene prontamente sostituito.

- Determinare la probabilità che un tale componente duri almeno 30 giorni;
- determinare la probabilità che i primi 3 componenti durino ciascuno almeno 25 giorni;
- determinare la probabilità che 38 componenti siano sufficienti a coprire le necessità di 3 anni di utilizzo di questa macchina.

Soluzione.

- Abbiamo $T \sim \text{Exp}(1/30)$ e quindi $P(T > 30) = e^{-1} = 0.3679$.
- Abbiamo $P(T_1 > 25, T_2 > 26, T_3 > 25) = P(T > 25)^3 = e^{-5/2} = 0.0821$.
- Le T_i hanno media 30 e varianza 900. Usiamo il Teorema centrale del limite: $T_1 + \dots + T_{38} \sim N(1140, 34200)$ e quindi, considerando che in 3 anni ci sono 1095 giorni abbiamo

$$P(T_1 + \dots + T_{38} > 1095) = P(\zeta_0 > \frac{1095 - 1140}{\sqrt{34200}}) = P(\zeta_0 > -0.24) = \Phi(0.24) = 0.5948.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 29/01/2019

Esercizio 1 Sette coppie marito-moglie in viaggio di nozze vogliono partecipare ad una attività extra in cui però ci sono solo 10 posti disponibili. Vengono pertanto estratte a caso 10 persone che parteciperanno a questa attività. Sia X il numero di coppie di cui viene estratto almeno un rappresentante e Y il numero di donne estratte.

- Qual è la probabilità di estratte almeno un rappresentante di ogni coppia?
- Determinare la densità di X ;
- determinare la densità di Y ;
- determinare $P(X = 6, Y = 6)$;
- per ogni $k \geq 0$ determinare $P(Y = k | X = 7)$.

Soluzione.

a.

$$\frac{\binom{7}{3} 2^4}{\binom{14}{10}} = \frac{560}{1001} = \frac{80}{143}.$$

- b. $P(X = 7) = \frac{80}{143}$ l'abbiamo già calcolata. $P(X = 6) = \frac{\binom{7}{4} \binom{3}{2} 2^2}{\binom{14}{10}} = \frac{420}{1001} = \frac{60}{143}$. L'altro valore possibile per X è 5 e la relativa probabilità può essere calcolata per differenze oppure come $P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{14}{10}} = \frac{3}{143}$. Concludiamo

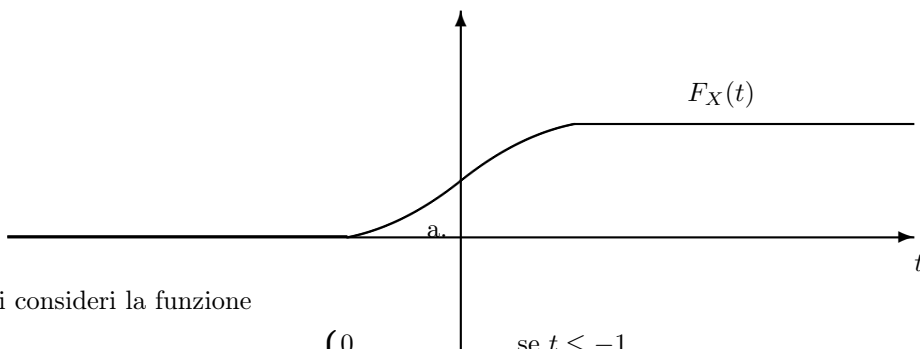
$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{80}{143} & \text{se } k = 7; \\ \frac{60}{143} & \text{se } k = 6; \\ \frac{3}{143} & \text{se } k = 5; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- c. $Y \sim H(10; 7, 7)$;

d. $P(X = 6, Y = 6) = \frac{\binom{7}{6} \binom{6}{4}}{\binom{14}{10}} = \frac{15}{143}$;

- e. gli unici valori possibili con probabilità non nulla sono $k = 3, 4, 5, 6, 7$. Si ha

$$P(Y = k | X = 7) = \begin{cases} \frac{1}{16} & k = 3, 7; \\ \frac{4}{16} & k = 4, 6; \\ \frac{6}{16} & k = 5; \\ = & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ \frac{1}{2}(t+1)^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

- Tracciare un grafico approssimativo di F e mostrare che F è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua X ;
- determinare $P(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{3})$;
- determinare la funzione di ripartizione della variabile $Y = (X+1)^2$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione.

La funzione $F(t)$ è continua, debolmente crescente e va da 0 a 1 e quindi è una funzione di ripartizione di una variabile continua.

- $P(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{3}) = F_X(\frac{1}{3}) - F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{47}{72}$.
- Y assume valore compresi tra 0 e 4. Abbiamo, osservando che $X+1 \geq 0$,

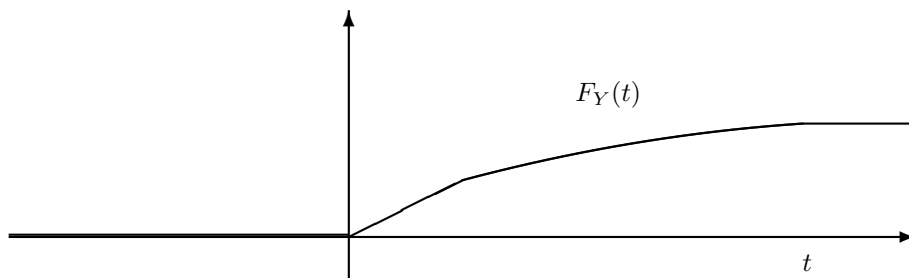
$$F_Y(t) = P((X+1)^2 \leq t) = P(X+1 \leq \sqrt{t}) = P(X \leq \sqrt{t}-1) = F_X(\sqrt{t}-1)$$

e quindi

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{t}-1+1)^2 = \frac{1}{2}t & \text{se } 0 < t < 1; \\ -\frac{1}{2}t + 2\sqrt{t} - 1 & \text{se } 1 < t < 4 \\ 1 & \text{se } t > 4. \end{cases}$$

Esercizio 3 La concentrazione di PM10 nell'aria non dovrebbe superare per legge il limite di $50 \mu g/m^3$. A Cesena la concentrazione di PM10 si può approssimare con una variabile normale di media 44 e varianza 49.

- Determinare la probabilità che a Cesena in un determinato giorno venga superato il limite di legge.



- b. Determinare la probabilità che a Cesena tale limite sia superato per almeno 2 giorni di una settimana.
- c. Determinare la probabilità che a Cesena tale limite sia superato per almeno 30 giorni in un anno.

Soluzione.

- a. Sia X la concentrazione di PM10 in un giorno casuale. Si ha $X \sim N(44, 49)$ e quindi

$$P(X > 50) = P(7\zeta_0 + 44 > 50) = P(\zeta_0 > \frac{6}{7}) = 1 - \Phi(0.86) = 1 - 0.805 = 19.5 \%$$

- b. Sia ora Y il numero di giorni di una settimana in cui viene superato tale limite. Abbiamo $Y \sim B(7, 0.195)$ e quindi

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - (0.805)^7 - 7 \cdot (0.195) \cdot (0.805)^6 = 0.41$$

- c. Sia Z il numero di giorni di un anno in cui viene superato tale limite. Per il TCL abbiamo $Z \sim N(365 * 0.195, 365 * 0.195 * 0.805) = N(71.2, 57.3)$ e quindi

$$P(Z \geq 30) = P(Z \geq 29.5) = P(\sqrt{57.3}\zeta_0 + 71.2 > 29.5) = P(\zeta_0 > -5.5) = 1.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 12/02/2019

Esercizio 1 Lanciamo un dado 3 volte. Denotiamo con X_1, X_2, X_3 i risultati dei tre lanci e con $Y = |X_1 - X_2|$.

- Stabilire se gli eventi $\{X_2 = 2\}$ e $\{Y = 0\}$ sono indipendenti.
- Stabilire se le variabili Y e X_2 sono indipendenti.
- Determinare $E[Y]$;
- Determinare $P(Y = 0 | X_1 + X_2 + X_3 = 7)$.

Esercizio 2 Siano $X \sim U([0, 3])$ e $Y = U([1, 4])$ due variabili aleatorie indipendenti e $Z = \max(X, Y)$.

- Stabilire quali valori può assumere la variabile Z e determinarne la funzione di ripartizione.
- determinare $E[Z]$;
- determinare $\text{Var}(Z)$.

Esercizio 3 La cometa di Halley ha un periodo orbitale di circa 76 anni e quindi ogni 76 anni può essere avvistata ad occhio nudo dalla Terra. L'ultima avvistamento dalla Terra è accaduto nel 1986. Il tempo di vita di una persona in Italia è una variabile che assumiamo normale di media 82 anni e varianza 49.

- determinare la probabilità che una persona nata nel 1987 riesca ad avvistare la cometa di Halley ad occhio nudo durante la sua vita.
- determinare la probabilità che almeno 80 persone su 100 nate nel 1987 scelte a caso riescano ad avvistare la cometa nella loro vita.
- supponendo che una persona viva esattamente 80 anni (e senza sapere il suo anno di nascita), qual è la probabilità che riesca ad avvistarla per 2 volte?

PROVA SCRITTA DI MDP, 13/06/2019

Esercizio 1 Abbiamo 8 variabili X_1, \dots, X_8 indipendenti di Poisson, quattro di parametro 1 e quattro di parametro 2 e sia $X = \max\{X_1, \dots, X_8\}$.

- Determinare $P(X < 3)$;
- Determinare la probabilità che almeno 3 delle 8 variabili assumano un valore < 3 ;
- Determinare $P(X_1 + X_2 + \dots + X_8) > 5$;
- Determinare $E[X_1 + \dots + X_8]$.

Esercizio 2 Siano $X \sim U([-1, 1])$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$ due variabili aleatorie indipendenti e $Z = \min(X, Y)$.

- Stabilire quali valori può assumere la variabile Z ;
- Sia $-1 < t < 0$. Determinare $P(Z < t)$;
- determinare la funzione di ripartizione di Z e tracciarne un grafico approssimativo;
- stabilire se le variabili $X - Y$ e $X + Y$ sono indipendenti

Esercizio 3 Scegliamo a caso 80 numeri reali compresi tra -1 e 5 e denotiamo con X la loro somma.

- determinare media e varianza di X ;
- determinare la probabilità che X sia compreso tra 150 e 190.
- determinare la probabilità che la metà dei numeri scelti sia maggiore di 2 e l'altra metà minore di 2.
- determinare la probabilità che almeno la metà dei numeri estratti sia maggiore di 2.

PROVA SCRITTA DI MDP, 17/07/2019

Esercizio 1 In una gara di ippica partecipano quattro cavalli numerati 1,2,3,4 aventi la stessa probabilità di vincere. Cinque amici scommettono su un cavallo ciascuno, senza comunicare agli altri il cavallo su cui hanno puntato.

- Consideriamo gli eventi $A =$ "qualcuno ha puntato sul cavallo 1" e $B =$ "qualcuno ha puntato sul cavallo 2". Determinare $P(A)$ e $P(B)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.
- Determinare la probabilità che almeno un cavallo non abbia ricevuto scommesse a suo favore.
- Determinare mediamente quanti cavalli ricevono almeno una scommessa a loro favore in una situazione di questo tipo.
- Determinare la probabilità che almeno due dei cinque amici vincano la scommessa.

Esercizio 2 Consideriamo due variabili aleatorie X e Y indipendenti e definite sullo stesso spazio di probabilità. La variabile X è continua di densità

$$f_X(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq -1 \text{ oppure } s \geq 1 \\ s+1 & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1-s & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sappiamo inoltre che Y è continua uniforme di media 1.

- Scrivere la funzione di ripartizione di X e tracciarne un grafico approssimativo.
- Determinare la densità di Y sapendo che $P(X > 0, Y < 2) = \frac{3}{8}$.
- Determinare la densità di $\max(X, Y)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Esercizio 3 In una gara podistica sui 10000 metri partecipano 80 atleti dello stesso livello. Tutti percorrono la distanza mediamente in 40 minuti con uno scarto quadratico medio di 30 secondi.

- Determinare la probabilità che un atleta scelto a caso finisca la gara in meno di 39' 50".
- Determinare la probabilità che il tempo medio degli 80 atleti in gara sia inferiore a 39' 50".
- Determinare la probabilità che almeno 3 atleti finiscano la gara in meno di 39' 50".

PROVA SCRITTA DI MDP, 06/09/2019

Esercizio 1 Un'urna contiene due palline bianche e una pallina rossa. Estraiamo senza rimpiazzo le palline fino ad ottenere una pallina bianca e denotiamo con X il numero di estrazioni effettuate. Dopodiché prendiamo $3X$ carte numerate da 1 a $3X$, estraiamo due carte a caso e denotiamo con Y_1 e Y_2 i valori delle due carte ottenute rispettivamente.

- (1) Determinare la densità di X , di Y_1 , e di Y_2 ;
- (2) Determinare la probabilità che la prima carta abbia valore più piccolo della seconda.
- (3) Stabilire se X e Y_1 sono indipendenti;
- (4) Stabilire se Y_1, Y_2 sono indipendenti;

Esercizio 2 Ci sottoponiamo ad una certa dieta dimagrante di due mesi e sappiamo che il numero di chili che si perdono in questa dieta è una variabile aleatoria di densità

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{50}(10 - s) & \text{se } s \in [0, 10] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a. Determinare la probabilità di dimagrire esattamente 5 chili.
- b. Determinare la probabilità di dimagrire almeno 5 chili.
- c. Determinare mediamente quanti chili si perdono con questa dieta.

Esercizio 3 Sia

$$p(k) = \begin{cases} 3/k^2 & \text{se } k = 2, 4, 8 \\ 1/64 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a. Mostrare che $p(k)$ è la densità di una variabile aleatoria discreta X .
- b. Determinare media e varianza di X .
- c. Determinare la probabilità che 32 variabili aleatorie indipendenti aventi densità $p(k)$ valgano mediamente almeno 2.

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/01/2020

Esercizio 1 Gli studenti volontari di MDP vengono divisi in sei gruppi. Una volta a settimana, per dieci settimane, viene estratto a sorte un gruppo che deve consegnare gli esercizi assegnati.

- Determinare la probabilità che il gruppo 1 non venga mai chiamato.
- determinare la probabilità che almeno uno dei sei gruppi non venga mai chiamato.
- dette X_1, \dots, X_6 le variabili date dal numero di volte in cui ciascun gruppo viene chiamato, stabilire se queste variabili sono indipendenti.
- determinare $p_{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6}(2, 1, 0, 3, 1, 3)$;
- determinare $\text{Var}(X_1 + \dots + X_5)$.

Esercizio 2 In una certa autostrada si registrano mediamente 52 incidenti gravi ogni anno. Sia X = tempo di attesa per il prossimo incidente grave.

- determinare la densità di X ;
- determinare la probabilità che in ciascuna delle prossime tre settimane si verifichi almeno un incidente grave;
- determinare la probabilità che non ci siano incidenti nelle prossime due settimane.

Esercizio 3 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{140} & 0 \leq t \leq 70 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{70}{3}}e^{-\frac{t}{3}} & t \geq 70 \end{cases}$$

- Mostrare che $F(t)$ è una funzione di ripartizione continua e tracciarne un grafico approssimativo;
- Supponiamo che la variabile X = "tempo di vita in anni di un uomo nato oggi" abbia funzione di ripartizione $F(t)$. Determinare la probabilità che quest'uomo viva almeno 60 anni.
- Supponendo un uomo viva almeno 50 anni determinare la probabilità che muoia prima di compiere 80 anni.
- Determinare $E[X]$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 30/01/2020

Esercizio 1 Consideriamo un gruppo di 15 persone di cui 5 maschi e 10 femmine che si mettono in coda ad uno sportello in modo casuale.

- Determinare la probabilità che non ci siano due maschi vicini tra loro in coda;
- determinare la probabilità che tra due maschi non ci siano femmine;
- detta X la posizione della prima femmina in coda determinare la densità di X ;
- detta Y la posizione del primo maschio in coda, stabilire se X ed Y sono indipendenti;
- detta Z la variabile che vale 1 se al primo posto c'è un maschio e 0 altrimenti determinare la densità di Z .

Esercizio 2 In un piccolo ospedale si registrano mediamente ogni settimana 4 ricoveri.

- determinare la probabilità che in una settimana si registri un numero di ricoveri compreso tra 3 e 5.
- determinare la probabilità che in un anno ci siano almeno 180 ricoveri;
- detto T in tempo di attesa per il prossimo ricovero determinare la funzione di ripartizione della variabile T .

Esercizio 3 Consideriamo 3 variabili X, Y, Z la cui densità congiunta è data da

$$p_{X,Y,Z}(h, k, m) = \begin{cases} 1/9 & \text{se } (h, k, m) = (1, 1, 0), (1, 1, 2), (2, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2) \\ 2/9 & \text{se } (h, k, m) = (1, 2, 0), (1, 2, 2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare le densità marginali delle variabili X, Y, Z ;
- Stabilire se X e Y sono indipendenti;
- Stabilire se X e Z sono indipendenti;
- Determinare $\text{Var}(X - 2Y + 3)$.
- Determinare $E[Y - Z]$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 18/02/2020

Esercizio 1 Tre urne contengono rispettivamente 4, 5 e 6 palline ciascuna. Ogni urna ha una pallina rossa e le rimanenti blu. Effettuiamo 4 estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo. Sia X = "numero di urne da cui è stata estratta almeno una pallina" e

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$.

- Determinare $P(X = 3)$;
- Determinare la densità delle variabili Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ;
- Stabilire se Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sono indipendenti;
- Detto Y il numero totale di palline rosse estratte determinare $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(X = 1|Y = 2)$;
- Determinare $E[Y]$;
- Determinare $E[X]$.

Esercizio 2 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2t}{2t+1} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Mostrare che $F(t)$ è una funzione di ripartizione continua;
- Sia X la variabile "tempo di vita in anni di un certo frutteto". Supponendo che $F(t)$ sia la funzione di ripartizione di X stabilire se X soddisfa la proprietà di mancanza di memoria;
- Determinare la probabilità che uno di questi smartphone duri almeno un anno e la probabilità che dopo un anno di utilizzo duri ancora per un altro anno;
- Un'azienda acquista 30 di questi smartphone per i suoi dipendenti. Determinare la probabilità che almeno 15 di questi smartphone durino almeno due anni.

Esercizio 3 È stato misurato il peso in grammi di un campione di 1000 mele prodotte in un certo campo e i dati sono riportati in tabella

Peso	Numero
200–300	110
300–400	400
400–500	440
500–600	50

- Determinare la media campionaria e lo scarto quadratico medio del campione;
- scelta una mela a caso di questo frutteto, determinare la probabilità che pesi almeno 370 grammi;
- scelte 50 mele a caso di questo frutteto, determinare la probabilità che pesino mediamente più di 370 grammi.

CHAPTER 1

PROVA SCRITTA DI MDP, 18/02/2020

Esercizio 1 Tre urne contengono rispettivamente 4, 5 e 6 palline ciascuna. Ogni urna ha una pallina rossa e le rimanenti blu. Effettuiamo 4 estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo. Sia X = "numero di urne da cui è stata estratta almeno una pallina" e

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$.

- Determinare $P(X = 3)$;
- Determinare la densità delle variabili Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ;
- Stabilire se Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sono indipendenti;
- Detto Y il numero totale di palline rosse estratte determinare $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(X = 1|Y = 2)$;
- Determinare $E[Y]$;
- Determinare $E[X]$.

Esercizio 2 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2t}{2t+1} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Mostrare che $F(t)$ è una funzione di ripartizione continua;
- Sia X la variabile "tempo di vita in anni di un certo frutteto". Supponendo che $F(t)$ sia la funzione di ripartizione di X stabilire se X soddisfa la proprietà di mancanza di memoria;
- Determinare la probabilità che uno di questi smartphone duri almeno un anno e la probabilità che dopo un anno di utilizzo duri ancora per un altro anno;
- Un'azienda acquista 30 di questi smartphone per i suoi dipendenti. Determinare la probabilità che almeno 15 di questi smartphone durino almeno due anni.

Esercizio 3 È stato misurato il peso in grammi di un campione di 1000 mele prodotte in un certo campo e i dati sono riportati in tabella

Peso	Numero
200–300	110
300–400	400
400–500	440
500–600	50

- Determinare la media campionaria e lo scarto quadratico medio del campione;
- scelta una mela a caso di questo frutteto, determinare la probabilità che pesi almeno 370 grammi;
- scelte 50 mele a caso di questo frutteto, determinare la probabilità che pesino mediamente più di 370 grammi.

PROVA SCRITTA DI MDP, 08/01/2021

Esercizio 1 Una nonna fa un regalo per Natale a ciascuno dei suoi 6 nipoti. Tuttavia confeziona i regali in pacchetti identici e dimenticandosi di indicare i nomi sui pacchetti, i quali vengono quindi distribuiti casualmente.

- Determinare la probabilità che ciascun nipote riceva il proprio regalo;
- determinare la probabilità che nessun nipote riceva il proprio regalo;
- consideriamo gli eventi A_1 = "il nipote 1 riceve il proprio regalo" e A_2 = "il nipote 2 riceve il proprio regalo". Stabilire se A_1 e A_2 sono indipendenti;
- Determinare il valore atteso per il numero di nipoti che ricevono il proprio regalo.

Esercizio 2 Sia

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq -1 \text{ o } s \geq 1 \\ \frac{1}{2}(s+1) & \text{se } -1 < s < 0 \\ \frac{3}{2}(1-s) & \text{se } 0 \leq s < 1. \end{cases}$$

- Disegnare un grafico approssimativo di $f(s)$ e mostrare che $f(s)$ è una densità continua astratta;
- Sia X una variabile aleatoria di densità continua $f(s)$.
Determinare $P(X > 1/2)$ e $P(X > 1/2 \mid X > -1/2)$;
- Determinare $P(X^2 > 1/4)$.

Esercizio 3 In un appello di MDP con 48 studenti viene assegnato ad ogni studente un voto aleatorio di densità uniforme nell'intervallo $[0, 30]$. Uno studente viene promosso se il voto assegnato è almeno 18.

- Determinare la probabilità che un dato studente venga promosso;
- determinare la probabilità che il voto medio assegnato sia almeno 16;
- determinare la probabilità che ci siano almeno 20 promossi.

Soluzioni

Esercizio 1

- a. Scegliamo lo spazio di probabilità Ω dato da tutte le possibili permutazioni di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con probabilità uniforme. Abbiamo un solo caso favorevole in questo caso e quindi otteniamo

$$\frac{1}{720} = 0.0014$$

- b. i risultati favorevoli in questo caso sono gli scombussolamenti su 6 numeri che sono

$$(6)_4 - (6)_3 + (6)_2 - (6)_1 + (6)_0 = 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265$$

per cui la probabilità richiesta è

$$\frac{265}{720} = 0.368$$

- c. abbiamo $P(A_1) = P(A_2) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$ mentre $P(A_1 \cap A_2) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ e quindi i due eventi sono dipendenti.
d. Consideriamo le variabili

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ riceve il proprio regalo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Abbiamo $X_i \sim B(1, 1/6)$ e dobbiamo calcolare il valore atteso di $X = X_1 + \dots + X_6$: utilizzando la linearità del valore atteso abbiamo

$$E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_6] = 1.$$

Dobbiamo quindi aspettarci che uno dei sei nipoti riceva il proprio regalo.

Esercizio 2

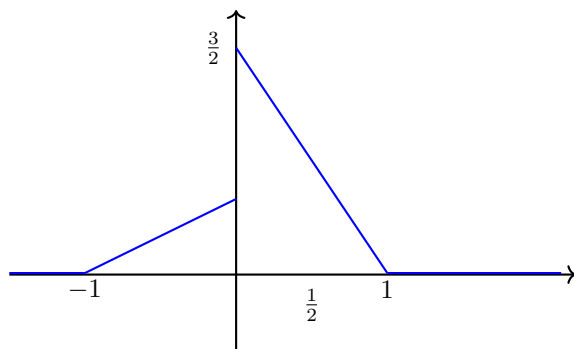


FIGURE 1. La densità $f(s)$.

- a. Il grafico è rappresentato in figura. Per mostrare che si tratta di una densità continua basta sommare le aree dei due triangoli rappresentati e osservare che si ottiene 1 (infatti quello a sinistra ha area $1/4$ e quello a destra $3/4$).
b. $P(X > 1/2)$ è l'area del triangolo da $1/2$ in poi che è

$$P(X > 1/2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{16}.$$

Per l'altro punto abbiamo bisogno di calcolare

$$P(X > -\frac{1}{2}) = 1 - P(X < -\frac{1}{2}) = 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{16}$$

e quindi

$$P(X > 1/2 \mid X > -1/2) = \frac{P(X > 1/2)}{P(X > -1/2)} = \frac{1}{5}.$$

c. Qui basta calcolare

$$P(X^2 > 1/4) = P(X > 1/2) + P(X < -1/2) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 In un appello di MDP con 48 studenti viene assegnato ad ogni studente un voto aleatorio di densità uniforme nell'intervallo $[0, 30]$. Uno studente viene promosso se il voto assegnato è almeno 18.

a. Chiamiamo X_1, \dots, X_{48} i voti assegnati. Ciascuno di essi è una variabile $U([0, 30])$. La probabilità che uno studente venga promosso è

$$\frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 40\%.$$

b. Abbiamo $E[X_i] = 15$ e $\text{Var}(X_i) = \frac{30^2}{12}$ per cui la variabile $X = X_1 + \dots + X_{48}$ ha valore atteso

$$E[X] = 48 \cdot 15 = 720$$

e varianza

$$\text{Var}(X) = 48 \frac{30^2}{12} = 60^2.$$

Per il teorema centrale del limite possiamo approssimare la X con una variabile normale di densità $N(720, 60^2)$. Voto medio almeno 16 si ha se $\frac{X}{48} > 16$, cioè se $X > 768$. Abbiamo quindi

$$P(X > 768) = P(60\zeta_0 + 720 > 768) = P(\zeta_0 > 0.80) = 1 - \Phi(0.80) = 1 - 0.788 = 0.212.$$

c. consideriamo le variabili Y_1, \dots, Y_{48} che valgono 1 o 0 a seconda che lo studente corrispondente sia promosso o meno. Abbiamo $Y_i \sim B(1, 0.40)$ e quindi $Y = Y_1 + \dots + Y_{48}$ = "numero di studenti promossi" avrà valore atteso

$$E[Y] = 48 \cdot 0.40 = 19.2$$

e varianza

$$\text{Var}(Y) = 48 \cdot 0.40 \cdot 0.60 = 11.52.$$

Usiamo il teorema centrale del limite per la variabile Y con correzione di continuità per cui

$$P(Y \geq 20) = P(Y > 19.5) = P(\sqrt{11.52}\zeta_0 + 19.2 > 19.5) = P(\zeta_0 > 0.09) = 1 - \Phi(0.09) = 1 - 0.536 = 0.464.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 27/01/2021

Nota. Questo compito presenta dei conti più impegnativi del solito per cui sono stati assegnati 3 punti per ogni quesito, per un totale di 39 punti.

Esercizio 1 Quattro amici al bar (bei tempi!) possono scegliere tra tre possibili cocktail numerati 1,2,3. Consideriamo le variabili X_1, X_2, X_3, X_4 date da " $X_i = j$ se l'amico i sceglie il cocktail j ". Sappiamo che X_1 è uniforme in $\{1, 2, 3\}$ e per ogni $i = 2, 3, 4$ sappiamo che l'amico i sceglie lo stesso cocktail dell'amico $i - 1$ con probabilità $1/2$ e indifferentemente gli altri due con probabilità $1/4$ ciascuno.

- Determinare la densità di X_2 ;
- stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti;
- stabilire se X_1 e X_3 sono indipendenti;
- determinare la probabilità che i quattro amici scelgano tutti lo stesso cocktail;
- determinare mediamente quanti cocktail diversi ordinano i quattro amici.

Esercizio 2 Consideriamo due variabili indipendenti X e Y . Sia

$$f_X(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} < s < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità (continua) di X e supponiamo che Y sia continua uniforme di media $\frac{1}{2}$.

- Sapendo che $P(X > 0, Y > 1) = \frac{1}{8}$ determinare la densità di Y .
- determinare la funzione di ripartizione di X e disegnarne un grafico approssimativo
- sia $Z = \max(X, Y)$; che valori può assumere Z ?
- Determinare la funzione di ripartizione di Z e disegnarne un grafico approssimativo;

Esercizio 3 Consideriamo 80 variabili aleatorie continue X_1, \dots, X_{80} indipendenti e aventi tutte densità continua

$$f(s) = \begin{cases} 3(s-1)^2 & \text{se } 1 < s < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Determinare valore atteso e varianza di X_1 ;
- determinare $P(X_1 + \dots + X_{80} < 145)$;
- determinare la densità della variabile $Y = \sqrt{X_1}$;
- determinare $P(\sqrt{X_1} + \dots + \sqrt{X_{80}} < 96)$.

Soluzioni

Esercizio 1

- a. Per simmetria del problema tutte le variabili X_1, X_2, X_3, X_4 sono variabili $U(\{1, 2, 3\})$.
 b. Chiaramente le variabili X_1 e X_2 sono dipendenti per come è formulato il problema. Infatti

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{6} \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{1}{9}.$$

- c. Anche X_1 e X_3 sono dipendenti: infatti

$$P(X_1 = 1, X_3 = 1) = P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

che è diverso da $P(X_1 = 1)P(X_3 = 1) = \frac{1}{9}$.

- d. Qui abbiamo

$$3 \cdot P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1) = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

- e. Sia Y la variabile numero di cocktail diversi serviti. Abbiamo già calcolato nel punto precedente $P(Y = 1) = \frac{1}{8}$. Calcoliamo $P(Y = 3)$. Chiaramente un cocktail sarà scelto da due amici: possiamo supporre che sia il numero 1 e poi moltiplichiamo il risultato per 3 le altre due possibilità. Abbiamo 12 possibili anagrammi di 1123 da considerare. Di questi 12 ne abbiamo 6 con due 1 consecutivi e 6 che non hanno due 1 consecutivi. I primi hanno probabilità $\frac{1}{96}$ gli altri hanno probabilità $\frac{1}{192}$. Abbiamo quindi in tutto

$$P(Y = 3) = 3 \cdot (6 \cdot \frac{1}{96} + 6 \cdot \frac{1}{192}) = \frac{9}{32}.$$

e per differenza $P(Y = 2) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{9}{32} = \frac{19}{32}$. Di conseguenza abbiamo

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{19}{32} + 3 \cdot \frac{9}{32} = \frac{4 + 38 + 27}{32} = \frac{69}{32} = 2.16$$

Esercizio 2

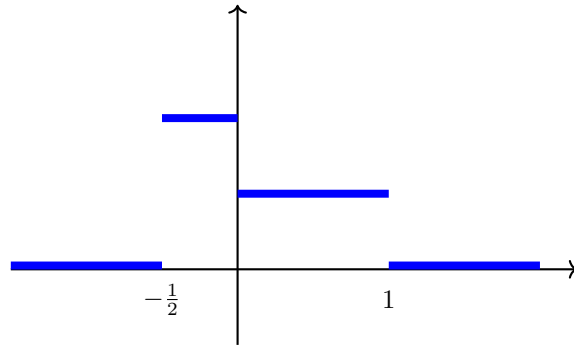


FIGURE 2. La densità $f_X(s)$.

- a. Sappiamo $\frac{1}{8} = P(X > 0, Y > 1) = P(X > 0)P(Y > 1) = \frac{1}{2}P(Y > 1)$ per cui $P(Y > 1) = \frac{1}{4}$.

Sappiamo che Y è uniforme in un intervallo $[a, b]$ e che $E[Y] = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$ (vedi Figura 2). L'area del rettangolo evidenziato deve essere $1/4$ per cui otteniamo

$$(b - 1) \frac{1}{b - a} = \frac{1}{4}$$

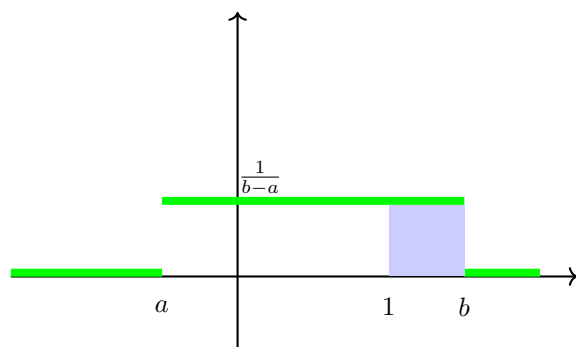


FIGURE 3. La densità $f_Y(s)$.

che con l'equazione precedente fornisce la soluzione $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$:

$$Y \sim U\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right).$$

b. La funzione di ripartizione di X è data da:

se $-1/2 < t < 0$ abbiamo (area del rettangolo tra $-1/2$ e t)

$$F_X(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = t + 1/2.$$

se $0 < t < 1$ abbiamo

$$F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

per cui concludiamo

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

e un suo grafico è rappresentato in Figura 3

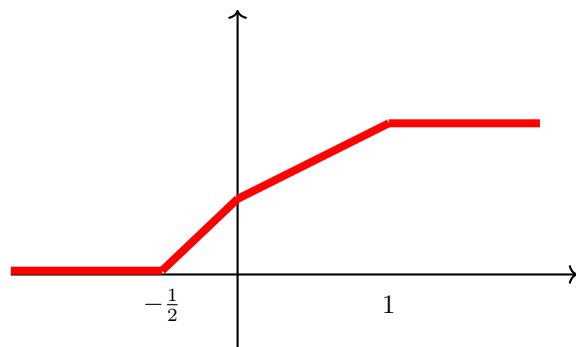


FIGURE 4. La funzione di ripartizione $F_X(t)$.

- c. La variabile Z assume valori tra $-1/2$ e $3/2$.
d. La funzione di ripartizione di Z è il prodotto tra le funzioni di ripartizione di X (calcolata nel punto precedente) e la funzione di ripartizione di Y che sappiamo essere data da

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1/2 \\ \frac{2t+1}{4} & \text{se } -1/2 \leq t \leq 3/2 \\ 1 & \text{se } t \geq 3/2. \end{cases}$$

in conclusione abbiamo

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\frac{1}{2} \\ (t + \frac{1}{2})\frac{2t+1}{4} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)\frac{2t+1}{4} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2t+1}{4} & \text{se } 1 \leq t \leq 3/2 \\ 1 & \text{se } t \geq 3/2 \end{cases}$$

e un suo grafico approssimato è rappresentato in Figura 4

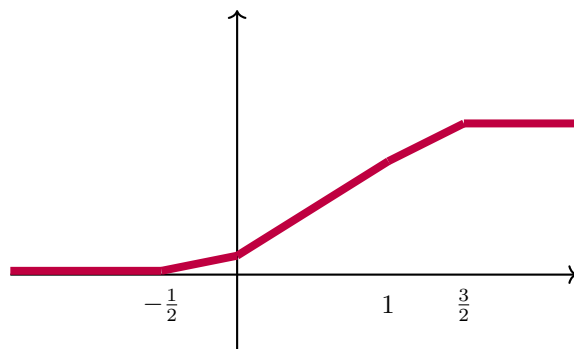


FIGURE 5. La funzione di ripartizione $F_Z(t)$.

Esercizio 3

- a. Abbiamo

$$E[X_1] = \int_1^2 3s(s-1)^2 ds = \frac{7}{4} = 1.75$$

e

$$E[X_1^2] = \int_1^2 3s^2(s-1)^2 ds = 3.1$$

e quindi

$$\text{Var}(X_1) = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \frac{3}{80} = 0,0375.$$

- b. Usiamo il teorema centrale del limite per cui $X_1 + \dots + X_{80} = \zeta \sim N(140, 3)$ e quindi

$$P(\zeta < 145) = P(140 + \sqrt{3}\zeta_0 < 145) = P(\zeta_0 < 2.88) = 0.998.$$

c. Y assume valori in $[1, \sqrt{2}]$ e per t in questo intervallo abbiamo

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y < t) = P(\sqrt{X_1} < t) = P(X_1 < t^2) \\ &= \int_1^{t^2} 3(s-1)^2 ds \\ &= 3 \left[\frac{s^3}{3} - s^2 + s \right]_1^{t^2} \\ &= t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1. \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1 \\ t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 & \text{se } 1 \leq t \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{se } t \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

e quindi la densità di Y è

$$f_Y = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 1 \text{ oppure } s > \sqrt{2} \\ 6s^5 - 12s^3 + 6s & \text{se } 1 \leq s \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

In alternativa si poteva calcolare la funzione di ripartizione $F_{X_1}(t)$ e quindi $F_Y(t) = F_{X_1}(t^2)$ usando le osservazioni qui sopra.

d. Dobbiamo calcolare

$$E[Y] = \int_1^{\sqrt{2}} s f_Y(s) ds = \int_1^{\sqrt{2}} (6s^6 - 12s^4 + 6s^2) ds = \frac{44\sqrt{2} - 16}{35} = 1.32$$

Chiaramente $E[Y^2] = E[X_1] = 1.75$ per cui

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = 1.75 - 1.32^2 = 0.0057$$

Abbiamo quindi per il teorema centrale del limite

$$\zeta = \sqrt{X_1} + \cdots + \sqrt{X_{80}} \sim N(105.6, 0.456)$$

e quindi

$$P(\zeta < 96) = P(\zeta_0 < \frac{96 - 105.6}{\sqrt{0.456}}) = 0$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 15/02/2021

Esercizio 1 Consideriamo un mazzo di 20 carte in cui abbiamo le carte dall'1 al 5 dei quattro semi: cuori, quadri, fiori, picche. Mischiamo e giriamo le prime 8.

- Determinare la probabilità che l'ultima carta girata sia di cuori;
- qual è la probabilità di aver girato almeno una carta di ogni valore? E almeno una di ogni seme?
- sia X = "numero di valori che non sono stati estratti". Determinare la densità di X .
- sia Y = "numero di carte di cuori estratte". Determinare la densità di Y .
- stabilire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 2 Consideriamo la funzione $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$d(k) = \begin{cases} 1/9 & \text{se } k = -1 \\ 2/9 & \text{se } k = -2 \\ 3/9 & \text{se } k = 1, 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Stabilire se $d(k)$ è una densità discreta astratta;
- determinare valore atteso e varianza di una variabile aleatoria avente densità discreta $d(k)$.
- date 81 variabili indipendenti X_1, \dots, X_{81} di densità discreta $d(k)$ determinare $P(X_1 + \dots + X_{81} > 37)$;
- determinare $P(X_1^2 + \dots + X_{81}^2 < 230)$.

Esercizio 3 Sia b un parametro reale positivo e consideriamo una variabile aleatoria X di densità continua

$$f_X(s) = \begin{cases} (b+1)s^b & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Calcolare la funzione di ripartizione $F_X(t)$ e disegnarne un grafico approssimativo
- determinare $P(X > -\frac{1}{2})$ e $P(X > \frac{1}{2})$;
- sia $Y = -\log X$. Che valori può assumere la variabile Y ?
- determinare la funzione di ripartizione di Y . Che variabile è?

Soluzioni

Esercizio 1

- a. Per simmetria del problema questa probabilità è $1/4$: i quattro semi devono avere la stessa probabilità di essere estratti all'ottava carta.
- b. Consideriamo Ω insieme di tutte le possibili combinazioni di 8 carte pescate: abbiamo $|\Omega| = \binom{20}{8} = 125970$ con probabilità uniforme. Detto A_i l'evento "non viene girata neanche una carta di valore i (con $i = 1, 2, 3, 4, 5$)" dobbiamo calcolare $P((A_1 \cup \dots \cup A_5)^C)$ e procediamo quindi con il principio di inclusione-esclusione:

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \dots \cup A_5)^C| &= |\Omega| - 5|A_1| + \binom{5}{2}|A_1 \cap A_2| - \binom{5}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= \binom{20}{8} - 5\binom{16}{8} + 10\binom{12}{8} - 10 = 66560 \end{aligned}$$

e quindi la probabilità richiesta è $\frac{66560}{125970} = 0.5284$.

La probabilità che venga girata almeno una carta di ogni seme viene determinata in modo analogo considerando gli eventi B_1, B_2, B_3, B_4 corrispondenti ai casi in cui non vengono girate carte di cuori, quadri, fiori, picche rispettivamente. Abbiamo

$$|(B_1 \cup \dots \cup B_4)^C| = |\Omega| - 4|B_1| + \binom{4}{2}|B_1 \cap B_2| = \binom{20}{8} - 4\binom{15}{8} + 6\binom{10}{8} = 100500$$

e quindi $P((B_1 \cup \dots \cup B_4)^C) = \frac{100500}{125970} = 0.7978$

- c. Abbiamo già calcolato $P(X = 0) = 0.5284$. Dal problema abbiamo che X può assumere i valori 0,1,2,3. Calcoliamoli:

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{10}{125970} = 0 \\ P(X = 2) &= \frac{\binom{5}{2} \left(\binom{12}{8} - 3 \right)}{125970} = 0.0391 \end{aligned}$$

e quindi per differenza $P(X = 1) = 0.4325$.

- d. La variabile Y è una variabile ipergeometrica $Y \sim H(8; 5, 15)$: basta pensare alle carte di cuori come palline bianche e le carte degli altri semi come palline rosse.
- e. Le variabili sono dipendenti. Ad esempio

$$0 = P(Y = 5, X = 1) \neq P(Y = 5)P(X = 1).$$

Infatti se $Y = 5$ allora tutti i valori sono stati estratti per cui necessariamente $X = 0$.

Esercizio 2

- a. La funzione d è una densità discreta astratta perché è non nulla solo su quattro valori, in questi casi è sempre > 0 e la somma di questi valori:

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = 1$$

è uguale a 1.

- b. Abbiamo

$$E[X] = -1 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{9}.$$

e

$$E[X^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{9} + (-2)^2 \cdot \frac{2}{9} + 1^2 \cdot \frac{3}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

e quindi

$$\text{Var}(X) = \frac{24}{9} - \frac{16}{81} = \frac{200}{81}$$

- c. La variabile $X = X_1 + \dots + X_{81}$ è per il TCL una variabile normale $X \sim N(36, 200)$ e quindi, usando anche la correzione di continuità abbiamo

$$P(X > 37) = P(36 + \sqrt{200}\zeta_0 > 37.5) = P(\zeta_0 > 0.11) = 1 - \Phi(0.11) = 1 - 0.544 = 0.456$$

- d. Calcoliamo

$$E[X^4] = (-1)^4 \cdot \frac{1}{9} + (-2)^4 \cdot \frac{2}{9} + 1^4 \cdot \frac{3}{9} + 2^4 \cdot \frac{3}{9} = \frac{84}{9}$$

per cui

$$\text{Var}(X^2) = \frac{84}{9} - \frac{64}{9} = \frac{20}{9}.$$

Usando ancora il TCL abbiamo $Y = X_1^2 + \dots + X_{81}^2 \sim N(216, 180)$ e quindi

$$P(Y < 230) = P(216 + \sqrt{180}\zeta_0 < 229.5) = P(\zeta_0 < 1.01) = 0.844$$

Esercizio 3

- a. Chiaramente X assume valori in $[0, 1]$ e per $t \in [0, 1]$ abbiamo

$$F_X(t) = \int_0^t (b+1)s^b ds = [s^{b+1}]_0^t = t^{b+1}.$$

e quindi

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^{b+1} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

- b. Abbiamo $P(X > -\frac{1}{2}) = 1$ perché X assume solo valori tra 0 e 1 e

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - F_X(1/2) = 1 - (1/2)^{b+1}.$$

- c. Siccome X varia tra 0 e 1 e ricordando che \log tra 0 e 1 varia tra $-\infty$ e 0 abbiamo che $Y = -\log X$ varia tra 0 e $+\infty$.

- d. Per $t > 0$ abbiamo

$$P(Y < t) = P(-\log X < t) = P(X > e^{-t}) = 1 - (e^{-t})^b + 1 = 1 - e^{-(b+1)t}.$$

Di conseguenza

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-(b+1)t} & \end{cases}$$

che è la funzione di ripartizione di una variabile $\text{Exp}(b+1)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/06/2021

Esercizio 1 Tre palline rosse e tre blu vengono inserite in modo casuale e indipendente l'una dall'altra in tre urne numerate 1,2,3.

- Determinare la probabilità che l'urna 1 contenga esattamente due palline.
- Determinare la probabilità che l'urna 1 contenga esattamente una pallina rossa e una blu.
- inseriamo la mano nella prima urna e, se non è vuota, estraiamo una pallina. Determinare la probabilità di estrarre una pallina rossa;
- determinare la probabilità che ogni urna contenga almeno una pallina;
- determinare la probabilità che ogni urna contenga una pallina rossa.

Esercizio 2 Consideriamo due variabili indipendenti X e Y definite sullo stesso spazio di probabilità, X uniforme nell'intervallo $[0, 2]$ e Y di densità continua

$$f_Y(s) = \begin{cases} 3s^2 & \text{se } s \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Mostrare che effettivamente f_Y è una densità continua e tracciarne un grafico approssimativo;
- detto $Z = \max(X, Y)$ determinare la funzione di ripartizione di Z ;
- determinare i valori attesi $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$;
- determinare $\text{Var}(X - Y)$.

Esercizio 3 Consideriamo 72 variabili di Poisson X_1, \dots, X_{72} indipendenti tra loro e di media 8.

- determinare $P(X_1 + X_2 < 5)$;
- determinare $P(X_1 + \dots + X_{72} < 580)$;
- determinare $P(X_1 - 2X_2 + X_3 - 2X_4 + \dots + X_{71} - 2X_{72}) < -285$;

Soluzioni

Esercizio 1

- a. Il numero X di palline nella prima urna è una $B(6, 1/3)$: infatti ogni pallina ha $1/3$ di probabilità di finire nell'urna 1, indipendentemente l'una dall'altra. Per cui abbiamo

$$\binom{6}{2} (1/3)^2 (2/3)^4 = 0.329$$

- b. Il numero R di palline rosse nella prima urna e il numero B di palline bianche nella prima urna sono $B(3, 1/3)$ per cui

$$P(B = 1, R = 1) = \frac{4}{9} \frac{4}{9} = 0.198$$

- c. Calcoliamo la probabilità che la prima non sia vuota:

$$1 - P(X = 0) = 1 - (2/3)^6 = \frac{665}{729}$$

Sapendo che l'urna non è vuota la probabilità di pescare una rossa è chiaramente $1/2$ per cui

$$P(\text{estrarre rossa}) = P(\text{urna non vuota})P(\text{estrarre rossa}|\text{urna non vuota}) = \frac{1}{2} \frac{665}{729} = 0.456$$

- d. Possiamo pensare alle palline come se fossero numerate da 1 a 6 e quindi ogni assegnazione di un'urna ad una pallina è una funzione da $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $\{1, 2, 3\}$. I casi in cui non ci sono urne vuote corrispondono alle funzioni suriettive. Abbiamo quindi

$$\frac{3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3}{3^6} = \frac{540}{729}$$

- e. Qui analogamente e similmente a prima abbiamo

$$\frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 2

- a. Basta osservare che $f_Y \geq 0$ e che

$$\int_0^1 3s^2 ds = [s^3]_0^1 = 1.$$

- b. Abbiamo

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^3 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Z(t) = F_X(t)F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0; \\ \frac{1}{2}t^4 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1\frac{1}{2}t & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

c. Abbiamo $E[X] = 1$ perché X è uniforme in $[0, 2]$.

$$E[Y] = \int_0^1 s \, 3s^2 \, ds = \left[\frac{3}{4} s^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4};$$

Per calcolare $E[Z]$ abbiamo bisogno della sua densità che otteniamo per derivazione della funzione di ripartizione per cui

$$f_Z(s) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ oppure } t > 2; \\ 2s^3 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < t < 2 \end{cases}$$

da cui

$$E[Z] = \int_0^1 2s^4 \, ds + \int_1^2 \frac{1}{2} s \, ds = \left[2\frac{s^5}{5} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} s^2 \right]_1^2 = \frac{23}{20}.$$

d. Abbiamo $\text{Var}(X) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$. Per calcolare $\text{Var}(Y)$ determiniamo

$$E[Y^2] = \int_0^1 s^2 \, 3s^2 \, ds = \int_0^1 3s^4 \, ds = \left[\frac{3s^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

e quindi $\text{Var}(Y) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{3}{80}$. Concludiamo che

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \frac{89}{240}.$$

Esercizio 3

a. Ricordiamo che la somma di variabili di Poisson indipendenti è ancora una variabile di Poisson con parametro somma dei parametri. Per cui $X + Y \sim P(16)$ e quindi

$$P(X + Y < 5) = e^{-16} \left(1 + 16 + \frac{16^2}{2} + \frac{16^3}{6} + \frac{16^4}{24} \right) = 0,0004$$

b. Ricordando che le X_i hanno media e varianza 8 deduciamo che

$$X_1 + \dots + X_{72} \sim N(576, 576)$$

per il teorema centrale del limite e quindi

$$P(X_1 + \dots + X_{72} < 580) = P(\zeta_0 < \frac{579.5 - 576}{24}) = P(\zeta_0 < 0.15) = 0.55962.$$

c. Chiamando $Y_1 = X_1 - 2X_2$, $Y_2 = X_3 - 2X_4$, ecc abbiamo che le Y_i hanno media

$$E[Y_1] = E[X_1] - 2E[X_2] = -8$$

e varianza

$$\text{Var}(Y_1) = \text{Var}(X_1) + (-2)^2 \text{Var}(X_2) = 5 \text{Var}(X_1) = 40$$

e quindi $Y_1 + \dots + Y_{36} \sim N(-288, 1440)$ e

$$P(Y_1 + \dots + Y_{36} < -285) = P(\zeta_0 < \frac{-285.5 + 288}{\sqrt{1440}}) = P(\zeta_0 < 0.07) = 0.5279.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/07/2021

Esercizio 1 Una statistica rivela che il 50% degli adulti Romagnoli sono vaccinati, il 30% prevede di farlo e il 20% prevede di non farlo. Consideriamo un campione di 6 persone che chiamiamo 1,2,3,4,5,6 V_i , F_i , N_i , $i = 1, \dots, 6$ le variabili aleatorie definite da

$$V_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è vaccinato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, F_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ prevede di vaccinarsi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, N_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ prevede di non vaccinarsi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

Denotiamo inoltre con V il numero persone del campione che si sono vaccinate ed analogamente definiamo F e N .

- Descrivere un insieme Ω dei possibili risultati di questo fenomeno aleatorio e determinare $|\Omega|$;
- Determinare la probabilità che due siano vaccinati, due prevedono di farlo e due prevedono di non farlo;
- Determinare la probabilità che due siano vaccinati, due prevedono di farlo e due prevedono di non farlo sapendo che 3 è vaccinato;
- Determinare la densità congiunta di (V, F) ;
- Stabilire se gli eventi $\{V = 3\}$ e $\{N = 2\}$ sono indipendenti;
- Determinare $E[V]$;

Esercizio 2 Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, X esponenziale di media 1 e Y uniforme nell'intervallo $[0, 3]$. Sia inoltre $Z = \min(X, Y)$.

- Determinare $P(X > 2, Y > 2)$;
- Determinare $P(Z > 2)$ e $P(Z > 4)$;
- Determinare la funzione di ripartizione di Z ;
- Determinare $E[Z]$.

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie X_1, \dots, X_{100} indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-3, 5]$.

- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{100} > 101)$;
- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{50} - X_{51} - \dots - X_{100} > 0.2)$;
- Determinare $P(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{100}^2 > 400)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/09/2021

Risolvere i seguenti problemi giustificando tutte le risposte date.

Esercizio 1 Tre urne contengono rispettivamente 3, 5 e 7 palline ciascuna. Ogni urna ha una pallina rossa e le rimanenti blu. Effettuiamo 3 estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo. Sia X = "numero di urne da cui è stata estratta almeno una pallina" e

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3$.

- Determinare $P(X = 3)$;
- Determinare la densità delle variabili Y_1, Y_2, Y_3 ;
- Stabilire se Y_1, Y_2, Y_3 sono indipendenti;
- Detto Y il numero totale di palline rosse estratte determinare $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(X = 1|Y = 2)$;
- Determinare $E[Y]$;
- Determinare $E[X]$.

Esercizio 2 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{t}{2-t} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

- Mostrare che $F(t)$ è una funzione di ripartizione continua;
- Sia X la variabile "qualità di una mela prodotta in Italia (espressa come numero tra 0 e 1)". Supponendo che $F(t)$ sia la funzione di ripartizione di X determinare la probabilità che una mela scelta a caso abbia qualità superiore a 0.9;
- Scegliendo 30 mele a caso determinare la probabilità che almeno 15 di esse abbiano qualità superiore a 0.9.
- Rispondere alla domanda [c.] sapendo che le mele di qualità inferiore a 0.5 erano state preventivamente scartate.

Esercizio 3 È stato misurato il numero di anticorpi per unità di volume in un campione di 1000 adulti vaccinati

Anticorpi	Frequenza
200–300	110
300–400	400
400–500	440
500–600	50

- Determinare la media campionaria e lo scarto quadratico medio del campione;
- scelta una persona a caso in questa popolazione, determinare la probabilità che abbia almeno 370 anticorpi per unità di volume;
- scelte 50 persone a caso in questa popolazione, determinare la probabilità che abbiano mediamente almeno 370 anticorpi per unità di volume.

PROVA SCRITTA DI MDP, 11/01/2022

Esercizio 1 Abbiamo un'urna contenente una pallina gialla, una rossa e due blu e un'urna contenente una gialla, una rossa e tre blu. Effettuiamo tre estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo delle palline estratte. Consideriamo le variabili X_1, X_2, X_3 definite da

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è gialla} \\ 2 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} , \\ 3 & \text{se la } i\text{-esima estratta è blu} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3$.

- Determinare la densità di X_1 ;
- determinare la densità di X_2 ;
- stabilire se le variabili X_1, X_2, X_3 sono indipendenti;
- sia Y = "numero di volte in cui abbiamo scelto la prima urna, e B il numero di palline blu estratte: determinare $P(B = 0|Y = 1)$ e $P(B = 0, Y = 1)$;
- determinare la probabilità di non estrarre palline blu;
- (extra) determinare la probabilità di estrarre una pallina per colore.

Esercizio 2 Una banana è considerata di 1a scelta se non presenta macchie sulla buccia. Il tempo T di attesa dopo il raccolto per la comparsa di una macchia espresso in giorni è una variabile continua di densità

$$f_T(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \text{ o } s > 10; \\ \frac{s}{25} & \text{se } 0 < s < 5; \\ \frac{2}{5} - \frac{s}{25} & \text{se } 5 < s < 10. \end{cases}$$

- determinare la probabilità che una banana sia ancora di 1a scelta ad una settimana dal raccolto;
- determinare la probabilità che almeno una di due banane sia ancora di 1a scelta dopo una settimana;
- determinare la probabilità che su 100 banane almeno 50 siano ancora di prima scelta dopo una settimana.

Esercizio 3 Lanciamo due dadi 140 volte. Ad ogni lancio diciamo che abbiamo un successo se abbiamo ottenuto almeno 7.

- determinare la probabilità di avere successo al 1o tentativo;
- determinare la probabilità di avere complessivamente almeno 80 successi;
- chiamiamo Z_i il valore assoluto della differenza dei due dadi al lancio i . Determinare la probabilità che la media di questi valori $\frac{1}{140}(Z_1 + \dots + Z_{140})$ sia almeno 2.

Cenni di soluzioni

- (1) (a) Se indichiamo con U_1 e U_2 rispettivamente la scelta dell'urna 1 e 2 alla prima estrazione abbiamo $P(X_1 = 1) = P(U_1)P(X_1|U_1) + P(U_2)P(X_1 = 1|U_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{5} = \frac{9}{40}$.
La probabilità $P(X_1 = 2)$ è uguale a $P(X_1 = 1)$ perché la probabilità che una pallina sia estratta alla prima o alla seconda estrazione è la stessa. Per differenza $P(X_1 = 3) = 22/40$ e quindi

$$d_{X_1}(k) = \begin{cases} \frac{9}{40} & \text{se } k = 1, 2 \\ \frac{22}{40} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (b) La densità di X_2 è uguale a quella di X_1 : infatti la probabilità di ogni singola pallina di essere pescata al primo tentativo è uguale alla probabilità di essere pescata al secondo tentativo.
(c) Sono dipendenti. Infatti

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0 \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1).$$

- (d) $P(B = 0|Y = 1) = \frac{2}{4}\frac{1}{10} = \frac{1}{20}$. $P(B = 0, Y = 1) = \frac{1}{20}P(Y = 1) = \frac{3}{160}$.
(e) $P(B = 0) = P(Y = 0)P(B = 0|Y = 0) + P(Y = 1)P(B = 0|Y = 1) + P(Y = 2)P(B = 0|Y = 2) + P(Y = 3)P(B = 0|Y = 3) = 0 + \frac{3}{160} + \frac{1}{40} + 0 = \frac{7}{160}$.
(2) (a) $P(T > 7) = \int_7^{10} f(s)ds = \frac{9}{50} = 0.18$
(b) $P(T_1 > 7) + P(T_2 > 7) - P(T_1 > 7, T_2 > 7) = \frac{9}{50} + \frac{9}{50} - (9/50)^2 = \frac{819}{2500} = 0.328$
(c) Detto X il numero di banane ancora di 1a scelta dopo 7 giorni abbiamo che $X \sim B(100, 0.18)$ e per il TCL la possiamo approssimare con una normale $X \sim N(18, 14.76)$. Abbiamo quindi

$$P(X > 50) = P(\zeta_0 > \frac{32}{\sqrt{14.76}}) = 0$$

- (3) (a) $P(X_1 \geq 7) = \frac{7}{12}$
(b) $X_1 + \dots + X_{140} \sim N(81.67, (35/6)^2)$ e quindi
 $P(X_1 + \dots + X_{140} \geq 80) = P(\zeta_0 > \frac{79.5 - 81.67}{35/6}) = P(\zeta_0 > -0.37) = \Phi(0.37) = 0.644$
(c) Abbiamo bisogno della densità di Z_1 che è

$$d_{Z_1}(k) = \begin{cases} 3/18 & k = 0 \\ 5/18 & k = 1 \\ 4/18 & k = 2 \\ 3/18 & k = 3 \\ 2/18 & k = 4 \\ 1/18 & k = 5 \end{cases}$$

Abbiamo quindi

$$E[Z_1] = \frac{5 + 8 + 9 + 8 + 5}{18} = \frac{35}{18} = 1.94$$

$$E[Z_1^2] = \frac{5 + 16 + 27 + 32 + 25}{18} = \frac{105}{18} = 5.83$$

$$Var(Z_1) = \frac{665}{18^2} = 2.05$$

Per il TCL abbiamo quindi

$$Z_1 + \dots + Z_{140} \sim N(272.22, 287.3)$$

e quindi

$$P(Z_1 + \cdots + Z_{140} > 280) = P(\zeta_0 > 0.46) = 1 - \Phi(0.46) = 0.323.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 31/01/2022

Esercizio 1 Nelle prossime Olimpiadi invernali ci sono 4 atleti italiani che hanno probabilità $2/3$ di vincere una medaglia, e 4 atleti che hanno probabilità $1/3$ di vincere una medaglia. La probabilità che gli altri atleti italiani possano vincere una medaglia è trascurabile. Si considerino le seguenti variabili:

$$X = \#\{\text{medaglie vinte dall'Italia nelle prossime Olimpiadi invernali}\}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se l'Italia vince almeno 6 medaglie} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare il valore atteso e la varianza di X ;
- Determinare la densità di Y ;
- Supponendo che l'Italia abbia vinto almeno 6 medaglie qual è la probabilità che tutti i quattro atleti più forti abbiano vinto la medaglia?
- Vi sembra conveniente una scommessa con quota 10:1 (cioè si vincono 10 euro per ogni euro puntato) sul fatto che l'Italia vinca almeno 6 medaglie?

Esercizio 2 Si sa che statisticamente l'Etna erutta mediamente ogni 5 anni.

- Si determini la probabilità di avere un'eruzione nei prossimi 2 anni.
- Supponendo di non aver avuto eruzioni nei prossimi 2 anni, si determini la probabilità di avere un'eruzione nei successivi 2 anni.
- supponendo che la prossima eruzione avverrà nei prossimi 4 anni determinare la probabilità che non ci siano eruzioni nei prossimi due anni.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nello scegliere a caso 50 numeri *reali* compresi tra 1 e 3.

Sia X la variabile aleatoria data dalla somma di questi 50 numeri.

- Determinare il valore atteso e la varianza di X .
- Determinare la probabilità che X sia compreso tra 95 e 110.
- Determinare la probabilità che la media dei numeri scelti sia minore di 1.9

Cenni di soluzioni

- (1) (a) Numeriamo gli atleti da 1 a 8, da 1 a 4 quelli più forti, da 5 a 8 gli altri. Sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l}'i\text{-esimo atleta vince una medaglia} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le X_i sono tutte variabili di Bernoulli. Per $i = 5, 6, 7, 8$ si ha $X_i \sim B(1, \frac{1}{3})$ e per $i = 1, 2, 3, 4$ si ha $X_i \sim B(1, \frac{2}{3})$. Si ha $X = X_1 + X_2 + \dots + X_8$ e quindi

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_8] = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

Inoltre, siccome le X_i si possono assumere indipendenti ed hanno tutte varianza $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ si ha

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_8) = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}.$$

- (b) Siccome Y può assumere i soli valori 0 e 1, Y è una variabile di Bernoulli $B(1, p)$. Per determinare il parametro p utilizziamo le variabili ausiliarie $X' = X_5 + X_6 + X_7 + X_8$ e $X'' = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Si ha chiaramente $X' \sim B(4, \frac{1}{3})$ e $X'' \sim B(4, \frac{2}{3})$. calcoliamo

$$p = P(Y = 1) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8).$$

Ma

$$\begin{aligned} P(X = 6) &= P(X' = 4)P(X'' = 2) + P(X' = 3)P(X'' = 3) + P(X' = 2)P(X'' = 4) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) 4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\ &= \frac{24}{3^8} + \frac{256}{3^8} + \frac{384}{3^8} = \frac{664}{3^8}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} P(X = 7) &= P(X' = 4)P(X'' = 3) + P(X' = 3)P(X'' = 4) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\ &= \frac{32}{3^8} + \frac{128}{3^8} = \frac{160}{3^8}. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} P(X = 8) &= P(X' = 4)P(X'' = 4) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\ &= \frac{16}{3^8} \end{aligned}$$

Concludendo

$$P(Y = 1) = \frac{664}{3^8} + \frac{160}{3^8} + \frac{16}{3^8} = \frac{840}{3^8} = 0.128,$$

e quindi la densità di Y è $B(1, 0.128)$.

(c) La probabilità richiesta è

$$\begin{aligned}
 P(X'' = 4|Y = 1) &= \frac{P(X'' = 4 \cap Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
 &= \frac{P(X'' = 4) \left(P(X' = 2) + P(X' = 3) + P(X' = 4) \right)}{P(Y = 1)} \\
 &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right)}{\frac{840}{3^8}} \\
 &= \frac{22}{35} = 0.63.
 \end{aligned}$$

(d) Detta T la variabile T ="soldi vinti dopo una scommessa di un euro" si ha:

$$E[T] = 10 \cdot P(Y = 1) + 0 \cdot P(Y = 0) = 10 \cdot 0.128 = 1.28.$$

Con una scommessa di 1 euro si vincono mediamente 1.28 euro e quindi la scommessa è conveniente.

(2) (a) La variabile T tempo di attesa per un'eruzione è esponenziale di parametro $\lambda = 1/5$. Quindi la funzione di ripartizione di T è data da:

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/5} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$P(T < 2) = F_T(2) = 1 - e^{-2/5} = 0.33.$$

(b) Ricordando che una variabile esponenziale soddisfa la proprietà della mancanza di memoria si ha

$$P(2 < T < 4|T > 2) = P(0 < T < 2) = 1 - e^{-2/5} = 0.33.$$

(c) Dobbiamo qui calcolare

$$P(2 < T < 4|T < 4) = \frac{P(2 < T < 4)}{P(T < 4)} = \frac{(1 - e^{-4/5}) - (1 - e^{-2/5})}{1 - e^{-4/5}} = \frac{0.55 - 0.33}{0.55} = 0.40$$

(3) (a) Siano X_1, X_2, \dots, X_{50} i 50 numeri estratti. Le variabili X_i sono indipendenti e uniformi nell'intervallo $[1, 3]$. Hanno quindi tutte media 2 e varianza $\frac{(4-2)^2}{12} = \frac{1}{3}$. Ne segue che

$$E[X] = 50 \cdot E[X_1] = 50 \cdot 2 = 100,$$

e

$$Var(X) = 50 \cdot Var(X_1) = \frac{50}{3}.$$

(b) Determinare la probabilità che X sia compreso tra 95 e 110.

Per il teorema centrale del limite possiamo approssimare X con una variabile normale $\zeta \sim N(100, \frac{50}{3})$. Si ha

$$\begin{aligned}
 P(95 < \zeta < 110) &= P\left(\frac{95 - 100}{\sqrt{\frac{50}{3}}} < \zeta_0 < \frac{110 - 100}{\sqrt{\frac{50}{3}}}\right) \\
 &= P(-1.22 < \zeta_0 < 2.45) \\
 &= \Phi(2.45) - (1 - \Phi(1.22)) \\
 &= 0.99286 + 0.88877 - 1 \\
 &= 0.88.
 \end{aligned}$$

(c) Dobbiamo calcolare

$$P\left(\frac{1}{50}(X_1 + \cdots + X_{50}) < 1.9\right) = P(\zeta < 95) = P(\zeta_0 < -1.22) = 1 - \Phi(1.22) = 1 - 0.88877 = 0.111$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 15/02/2022

Esercizio 1 Un'urna contiene 5 palline rosse, 5 gialle e 5 blu. Le palline di ciascun colore sono numerate da 1 a 5. Effettuiamo 5 estrazioni casuali senza rimpiazzo.

- Determinare il numero atteso di palline rosse estratte;
- determinare la probabilità di estrarre 5 palline con numeri diversi;
- determinare la probabilità di estrarre almeno una pallina di ciascun colore;
- consideriamo gli eventi A ="viene estratta esattamente una pallina numerata con 1" e B ="vengono estratte esattamente due palline rosse". Determinare $P(A)$ e $P(B)$;
- Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti.

Esercizio 2 Si considerino una variabile X che può assumere valori 1 e 2 e una variabile Y che può assumere valori 1,2,3, indipendenti tra loro. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta:

$$d_{X,Y}(2,1) = \frac{4}{15}, \quad d_{X,Y}(1,2) = \frac{1}{30}, \quad d_{X,Y}(2,3) = \frac{2}{5}.$$

- Detto $t = d_{X,Y}(2,2)$ mostrare che t soddisfa l'equazione $t^2 - \frac{3}{10}t + \frac{1}{45} = 0$.
- Mostrare che $t = \frac{2}{15}$ oppure $t = \frac{1}{6}$
- Posto $t = \frac{2}{15}$ determinare la densità congiunta $d_{X,Y}$ e le densità marginali di X e Y ;
- Determinare una densità congiunta $d' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da $d_{X,Y}$ ma che abbia le stesse densità marginali di $d_{X,Y}$.

Esercizio 3 Un'indagine statistica mostra che a Cesena ci sono mediamente 50 giorni di pioggia ogni anno.

- Determinare la probabilità che domani piovga;
- determinare la probabilità che l'anno prossimo ci siano esattamente 50 giorni di pioggia;
- determinare la probabilità che l'anno prossimo ci siano almeno 60 giorni di pioggia;

Cenni di soluzioni

Esercizio 1

- a. Detto R il numero di rosse estratte abbiamo $R \sim H(5; 5, 10)$ per cui $E[R] = 5 \cdot \frac{5}{15} = \frac{5}{3} = 1.67$
- b. Non tenendo in considerazione l'ordine delle estrazioni i casi possibili sono $\binom{15}{5} = 3003$, e i casi favorevoli sono $3^5 = 243$ e quindi la probabilità richiesta è $\frac{243}{3003} = \frac{81}{1001} = 0,081$.
- c. Chiamiamo A_1, A_2, A_3 rispettivamente i modi possibili per pescare 5 palline che non rosse, non gialle, non blu. Abbiamo $|A_1| = \binom{10}{5} = 252$. Applicando il principio di inclusione esclusione dobbiamo determinare

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^C| = |U| - 3|A_1| + 3|A_1 \cap A_2| = 3003 - 756 + 3 = 2250$$

e la probabilità richiesta è $\frac{2250}{3003} = \frac{750}{1001} = 0,75$

d.

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{12}{4}}{\binom{15}{5}} = \frac{3 \cdot 495}{3003} = \frac{45}{91} = 0.495$$

e

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{10 \cdot 120}{3003} = \frac{400}{1001} = 0,400$$

- e. Per calcolare $P(A \cap B)$ dobbiamo considerare due casi: il caso in cui viene estratto l'1 rosso e il caso in cui non viene estratto. Abbiamo quindi

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{1} \binom{8}{3} + \binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{8}{2}}{3003} = \frac{560}{3003} = 0,186$$

Siccome $P(A)P(B) = 0,197$ gli eventi sono dipendenti (anche se non molto)

Esercizio 2

- a. I dati forniscono $d_X(2) = \frac{4}{15} + t + \frac{2}{5} = t + \frac{2}{3}$ e $d_Y(2) = t + \frac{1}{30}$ la condizione di indipendenza $d_{X,Y}(2, 2) = d_X(2)d_Y(2)$ diventa

$$t = (t + \frac{2}{3})(t + \frac{1}{30})$$

che ridotta in forma normale si riduce alla formula richiesta.

- b. Basta a questo punto risolvere l'equazione del punto precedente che fornisce le due soluzioni
- c. La tavola della densità congiunta può a questo punto essere completata in modo unico con i valori $d_{X,Y}(1, 1) = \frac{1}{15}$, $d_{X,Y}(1, 3) = \frac{1}{10}$. Le densità marginali sono

$$d_X(k) = \begin{cases} 1/5 & k=1 \\ 4/5 & k=2 \end{cases} \quad d_Y(k) = \begin{cases} 1/3 & k=1 \\ 1/6 & k=2 \\ 1/2 & k=3 \end{cases}$$

- d. Ci sono infiniti modi di rispondere

Esercizio 3

- a. Supponiamo che i giorni di pioggia sia una variabile binomiale $X \sim B(365, p)$ dove p è la probabilità che piova in un determinato giorno. Allora $E[X] = 365p = 50$ da cui $p = \frac{50}{365} = 0,137$.
- b. Usiamo il teorema centrale del limite con correzione di continuità. Abbiamo $X \sim N(50, 50 \cdot \frac{315}{365}) = N(50, 43,15)$ per cui

$$P(X = 50) = P(49.5 < X < 50.5) = P(\frac{-0.5}{\sqrt{43.15}} < \zeta_0 < \frac{0.5}{\sqrt{43.15}}) = P(-0,08 < \zeta_0 < 0,08) = 2\Phi(0,08) - 1 = 2 \cdot 0.532 - 1 = 0,064.$$

c. Analogamente al punto precedente possiamo calcolare

$$P(X \geq 60) = P(\zeta_0 > \frac{59.5 - 50}{6.57}) = P(\zeta_0 > 1,45) = 1 - \Phi(1,45) = 1 - 0,926 = 0,074.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 09/06/2022

Scrivere nome e cognome sulla prima facciata in alto del foglio consegnato.

Motivare (sinteticamente) tutte le risposte date.

Iniziare una nuova facciata del foglio per ogni esercizio, indicando "chiaramente" l'esercizio svolto.

Esercizio 1 Un tram passa alla fermata da orario ogni 10 minuti. Tuttavia in una giornata di sciopero c'è un rischio del 20% che un tram non passi. Supponiamo di andare alla fermata in un istante casuale e chiamiamo T il tempo di attesa e X il numero di corse consecutive saltate dal momento in cui arriviamo in fermata.

- Determinare la densità di X ;
- mostrare che $T = 10X + Y$, dove Y è una variabile continua uniforme. Che densità ha Y ?
- Determinare il valore atteso di T
- determinare $P(T < 60 | X > 3)$

Esercizio 2 Sia T il tempo di attesa affinché in Italia ci sia un incidente aereo mortale. Supponiamo che mediamente ci sia un incidente mortale ogni 2 anni.

- Determinare la densità di T .
- Determinare la probabilità che ci sia almeno un incidente mortale nel prossimo anno;
- determinare la probabilità che in almeno uno dei prossimi due anni ci sia almeno un incidente mortale
- determinare la probabilità che in almeno 30 dei prossimi 50 anni ci sia almeno un incidente mortale;

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie X_1, \dots, X_{100} indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-1, 3]$.

- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{100} > 102)$;
- Determinare $P(X_1 + \dots + X_{100} > 102 | X_1 + \dots + X_{100} > 90)$;
- Determinare $P(\max(X_1, X_2) > 2 | \min(X_1, X_2) > 0)$.

Cenni di soluzioni

- (1) (a) X è geometrica standard $X \sim G(4/5)$ perché conta il numeri di insuccessi prima di aver un successo
 (b) $T = 10X + Y$: infatti $10X$ è il tempo di attesa dovuto alle corse saltate, mentre $Y \sim U([0, 10])$ è il tempo di attesa standard senza sciopero
 (c) Ricordando che $X + 1$ è una variabile geometrica modificata il cui valore atteso è $5/4$ abbiamo che $E[X] = 1/4$ per cui

$$E[T] = 10E[X] + E[Y] = 10 \cdot \frac{1}{4} + 5 = 7.5 \text{ min}$$

- (d) Il dato $X > 3$ o equivalentemente $X \geq 4$ vuol dire che sono saltate le prime quattro corse e la probabilità richiesta è quindi equivalente a

$$P(T < 20) = P(X \leq 1) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

In alternativa abbiamo

$$P(T < 60 | X > 3) = \frac{P(T < 60, X > 3)}{P(X > 3)}$$

e

$$P(T < 60, X > 3) = P(T < 60, X = 4) + P(T < 60, X = 5) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

e poi si può concludere con i conti.

- (2) (a) La variabile T è un tempo di attesa che evidentemente gode di mancanza di memoria. Siccome il suo valore atteso è 2 anni abbiamo che $T \sim \text{Exp}(1/2)$
 (b) Avere almeno un incidente in un anno vuol dire che il tempo di attesa è minore di un anno per cui

$$P(T < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.393$$

- (c) Si sta chiedendo la probabilità che ci sia almeno un incidente nei prossimi due anni per cui abbiamo

$$P(T < 2) = 1 - e^{-\frac{2}{2}} = 0.632$$

- (d) La variabile X = numero di anni nei prossimi 50 in cui si verificano incidenti è un a variabile binomiale $X \sim B(50, 0.393)$ che approssimiamo quindi con una normale $N(19.67, 11.94)$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 30) = P(\zeta_0 > \frac{29.5 - 19.67}{\sqrt{11.94}}) = P(\zeta_0 > 2.84) = 1 - \Phi(2.84) = 1 - 0.998 = 0.002$$

- (3) (a) Siccome $E[X_1] = 1$ e $\text{Var}(X_1) = \frac{4}{3}$ abbiamo $\zeta = X_1 + \dots + X_{100} \sim N(100, \frac{400}{3})$ da cui

$$P(\zeta > 102) = P(\zeta_0 > \frac{102 - 100}{\frac{20}{\sqrt{3}}}) = P(\zeta_0 > 0.17) = 0.433.$$

- (b) Abbiamo

$$P(\zeta > 90) = P(\zeta_0 > -0.87) = 0.807$$

$$P(\zeta > 102 | \zeta > 90) = \frac{P(\zeta > 102)}{P(\zeta > 90)} = 0.535$$

- (c) Abbiamo

$$P(\min(X_1, X_2) > 0) = P(X_1 > 0, X_2 > 0) = \frac{9}{16}.$$

e

$$P(\max(X_1, X_2) > 2, \min(X_1, X_2) > 0) = P(X_1 > 2, X_2 > 0) + P(0 < X_1 < 2, X_2 > 2) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

per cui

$$P(\max(X_1, X_2) > 2 | \min(X_1, X_2) > 0) = \frac{P(\max(X_1, X_2) > 2, \min(X_1, X_2) > 0)}{P(\min(X_1, X_2) > 0)} = \frac{1}{3}.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 04/07/2022

Esercizio 1 Angelo, Bruno e Carlo vanno in un centro estivo insieme ad altri 9 bambini. Per fare un gioco vengono divisi in modo casuale in 3 squadre da 4

- Determinare in quanti modi si può effettuare tale operazione;
- determinare la probabilità che Angelo e Bruno finiscano nella stessa squadra.
- sapendo che Angelo e Bruno sono nella stessa squadra, qual è la probabilità che anche Carlo sia in squadra con loro?
- determinare la probabilità che Angelo, Bruno e Carlo finiscano in squadre diverse.

Esercizio 2 Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ con probabilità uniforme e consideriamo le tre variabili aleatorie X, Y, Z su Ω date da

$$X(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, 2, 3 \\ 2 & \text{se } n = 4, 5, 6 \\ 3 & \text{se } n = 7, 8, 9 \end{cases} \quad Y(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 1, 4, 7 \\ 2 & \text{se } n = 2, 5, 8 \\ 1 & \text{se } n = 3, 6, 9 \end{cases} \quad Z(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2, 4, 6, 8 \\ 1 & \text{se } n = 1, 3, 5, 7, 9 \end{cases}$$

- Stabilire se X e Y sono indipendenti;
- stabilire se X e Z sono indipendenti;
- determinare $E[X + Y]$ e $\text{Var}(X + Y)$;
- determinare $E[X - Z]$.

Esercizio 3 Consideriamo la funzione

$$f(s) = \begin{cases} (s+1)^2 & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1-s^2 & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(s)$ e mostrare che $f(s)$ è una densità continua astratta.
- Date 50 variabili indipendenti X_1, \dots, X_{50} aventi tutte densità $f(s)$ determinare il loro valore atteso
- Determinare $\text{Var}(X_1)$;
- detta $\bar{X}_{50} = \frac{1}{50}(X_1 + \dots + X_{50})$ determinare $P(\bar{X}_{50} < 18)$

Cenni di soluzioni

- (1) (a) Si possono considerare le combinazioni di tipo (4,4,4) facendo attenzione però che l'ordine non è importante in questo caso. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{6} \binom{12}{4\,4\,4} = 5775$$

- (b) Ho $\binom{10}{2} = 45$ modi di scegliere gli altri compagni di A e B. I rimanenti 8 si possono dividere in $\frac{1}{2} \binom{8}{4} = 140$. I risultati favorevoli sono quindi $140 \cdot 45 =$