ESERCIZI DI MDP PER IL 18 NOVEMBRE 2022

(1) Si considerino 2 variabili aleatorie indipendenti X ed Y. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta

$Y \backslash X$	0	2
0		$\frac{1}{5}$
-1		$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	

(a) Detto $t = d_{X,Y}(2,3)$ giustificare il fatto che t soddisfa la seguente equazione:
$\left(\frac{1}{12}+t\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{15}+t\right) = t$

(b) Calcolare i possibili valori per t.

(c) Scelto uno di questi valori completare la tabella a doppia entrata della densità congiunta delle variabili X ed Y.

(2) Si lanciano simultaneamente una moneta e un dado, e si ripete il lancio fino a che non siano usciti almeno una volta sia una testa che un 6.

- Sia W il primo lancio in cui è uscita una testa oppure un 6. Qual'è la probabilità che W sia maggiore di 3?
- Sia Z il numero totale di lanci effettuati. Qual'è la probabilità che Z sia minore di 3?

(3) Un'urna contiene 4 palline numerate 1,2,3,4. Effettuiamo 6 estrazioni con rimpiazzo. Consideriamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 date da $X_i = 1$ se la pallina con il numero i è stata estratta almeno una volta e $X_i = 0$ altrimenti.

– Stabilire se X_1 e X_3 sono indipendenti.

– Determinare la densità congiunta delle variabili (X_1, X_2, X_3, X_4),

(4) Due dadi, uno rosso e uno blu, vengono lanciati simultaneamente per 3 volte. Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

- X = Numero di volte in cui un dado ha dato come risultato 1 o 6;
- Y = Numero di lanci in cui il dado rosso ha dato risultato minore o uguale a 3;
- Z = Numero di lanci in cui la somma dei dadi ha dato 7.

(a) Determinare la densità delle variabili X, Y e Z;

(b) Stabilire se X ed Y sono indipendenti;

(c) Stabilire se Y e Z sono indipendenti;

(d) Stabilire se X e Z sono indipendenti.

CENNI DI SOLUZIONI

(1) (a) Abbiamo $d_Y(3) = \frac{1}{12} + t$ e $d_X(2) = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} + t$ per cui questa equazione viene semplicemente dalla condizione

$$d_{X,Y}(2,3) = d_X(2)d_Y(3).$$

(b) L'equazione del punto precedente diventa $180t^2 - 81t + 7 = 0$ che ha come soluzioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{7}{60}$.

(c) Per completare la tabella è sufficiente osservare che vale l'identità $d_{X,Y}(a,b)d_{X,Y}(c,d) = d_{X,Y}(a,d)d_{X,Y}(c,b)$ per ogni scelta di a, b, c, d. Otteniamo

$$d_{X,Y}(0,-1)t = \frac{4}{15}\frac{1}{12}$$

da cui ricaviamo $d_{X,Y}(0,-1) = \frac{1}{45t}$ e similmente possiamo ottenere $d_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{60t}$

Scegliendo quindi $t = \frac{1}{3}$ otteniamo la tabella

$Y \backslash X$	0	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Scegliendo invece $t = \frac{7}{60}$ otterremmo

$X \backslash Y$	0	2
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{60}$

Entrambe le tabelle sono valide.

(2) Si lanciano simultaneamente una moneta e un dado, e si ripete il lancio fino a che non siano usciti almeno una volta sia una testa che un 6.

- Sia W il primo lancio in cui è uscita una testa oppure un 6. Qual'è la probabilità che W sia minore di 5?
- Sia Z il numero totale di lanci effettuati. Qual'è la probabilità che Z sia minore di 3?

Sia X il primo lancio in cui esce una testa, e sia Y il primo lancio in cui esce un 6. Allora $W = \min(X,Y)$ e $Z = \max(X,Y)$.

Sia X che Y sono variabili geometriche modificate, rispettivamente $X \sim \tilde{G}(1/2)$ e $Y \sim \tilde{G}(1/6)$. Per quanto visto a lezione, anche W è una variabile geometrica modificata, di parametro

$$p + q - pq = 1/2 + 1/6 - 1/12 = 7/12.$$

Pertanto

$$P(W < 5) = \sum_{k=1}^{4} P(W = k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{7}{12} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} = \frac{7}{12} \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{5}{12}\right)^{k} =$$

$$= \frac{7}{12} \cdot \frac{1-(5/12)^4}{1-5/12} = \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{7} \cdot (1-(5/12)^4) = 1-(5/12)^4 \sim 0,97$$

Per calcolare la densità di Z, ricordiamo la relazione $P(\max(X,Y) = k) + P(\min(X,Y) = k) = P(X = k) + P(Y = k)$. Pertanto

$$P(Z = 1) = P(X = 1) + P(Y = 1) - P(W = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12} \sim 0,083$$

$$P(Z = 2) = P(X = 2) + P(Y = 2) - P(W = 2) = \frac{1}{2^2} + \frac{5}{6^2} - \frac{5 \cdot 7}{12^2} = \frac{21}{144} \sim 0,146$$

da cui otteniamo

$$P(Z < 3) = P(Z = 1) + P(Z = 2) = \frac{33}{144} \sim 0,229$$

Potevamo anche calcolare queste probabilità direttamente: $P(Z = 1) = 1/12$ è chiaro, mentre

$$P(Z = 2) = P(\times\times|T6) + P(T\times|-6) + P(\times 6|T-) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{144} + \frac{5}{72} + \frac{1}{24} = \frac{21}{144}$$

(3) (a) X_1 e X_3 sono dipendenti perché $X_1 = 0$ (non peschiamo mai la pallina 1) "fa aumentare" la probabilità che $X_3 = 1$ (la pallina 3 viene pescata almeno uno volta). E infatti

$$P(X_1 = 0, X_3 = 0) = (\frac{1}{2})^6$$

mentre

$$P(X_1 = 0) = P(X_3 = 0) = (\frac{3}{4})^6$$

per cui $P(X_1 = 0, X_3 = 0) \neq P(X_1 = 0) \cdot P(X_3 = 0)$.

(b) per simmetria sarà sufficiente calcolare la densità congiunta in $(0,0,0,0)$, $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$ e $(1,1,1,1)$. Abbiamo

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0) = 0$$

(non è possibile che nessuna pallina sia stata pescata)

$$P(X_1 = 1, X_2 = X_3 = X_4 = 0) = (\frac{1}{4})^6 = \frac{1}{4096}$$

(probabilità di pescare sempre la pallina 1)

$$P(X_1 = X_2 = 1, X_3 = X_4 = 0) = (\frac{1}{2})^6 - 2(\frac{1}{4})^6 = \frac{62}{4096}$$

(probabilità di pescare sempre 1 o 2, meno probabilità di pescare sempre 1, meno probabilità di pescare sempre 2)

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = 1, X_4 = 0) = (\frac{3}{4})^6 - 3 \cdot \frac{62}{4096} - 3 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{540}{4096}$$

e infine

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1) = 1 - 4 \cdot \frac{540}{4096} - 6 \cdot \frac{62}{4096} - 4 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{1560}{4096}.$$

(4) (a) Scriviamo $X = X_1 + X_1' + X_2 + X_2' + X_3 + X_3'$, $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$. Allora $X_i, X_i' \sim B(1, \frac{1}{3})$, $Y_i' \sim B(1, \frac{1}{2})$, $Z_i \sim B(1, \frac{1}{6})$. Dunque

$$X \sim B(6, \frac{1}{3}),\ Y \sim B(3, \frac{1}{2}),\ Z \sim B(3, \frac{1}{6}).$$

(b) Scriviamo X, e Y come somma di variabili di Bernoulli nel modo ovvio

$$X = X_1 + X_1' + X_2 + X_2' + X_3 + X_3' \qquad Y = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Per mostrare che X ed Y sono indipendenti è sufficiente mostrare che le variabili X_i, X_j' e Y_k sono indipendenti al variare di i, j, k. Se le variabili riguardano lanci diversi questo è evidente. Se riguardano lo stesso lancio invece è una semplice verifica.

(c) Come nel punto precedente.

(d) Queste sono invece dipendenti perché ad esempio $P(X = 5, Z = 3) = 0$ mentre $P(X = 5)$ e $P(Z = 3)$ sono entrambe non nulle. In effetti in questo caso le variabili X_i, X_i', Z_i non sono indipendenti:

$$X_i = 1, Z_i = 1 \Longrightarrow X_i' = 1$$