Esercizi 27 Aprile 2022

Esercizio 1: in $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1,-1,0,1), (2,3,1,0) \rangle$$

$$V = \langle (3,2,1,2) \rangle \qquad W = \langle (0,0,0,1) \rangle$$

(a) $U+V$ è diretta?

Vogliamo stabilire se $U \cap V$ è banale.
(Usiamo Grassmann determinando $\dim(U+V)$)

$$\dim(U+V) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{w = v_1 - u_1 - u_2}$$

$\dim U+V = 3 \Rightarrow U \oplus V$

- V e W sono in somma diretta perché hanno dimensione 1 e non coincidono.
- U, W procediamo come per U e V

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

(b) Mostrare che $U+V+W$ non è diretta.

Nel punto (a) abbiamo mostrato che $(0,0,0,1) \in U+V$

$\Rightarrow (0,0,0,1) = u + v + 0 = 0 + 0 + w$

Esercizio 2

$\mathbb{R}^{\cancel{4}\,3}$

$$U_1 = \{(x,y,z) : (x,\ x+2y,\ x+y+3z) = (x,y,z)\}$$

$$U_2 = \{(x,y,z) : (x,\ x+2y,\ x+y+3z) = (2x,2y,2z)\}$$

$$U_3 = \{\ \ldots\ldots = (3x,3y,3z)\}$$

(a) Mostrare che U_1, U_2, U_3 sono sottospazi

infatti sono le soluzioni di eq. lineari omogenee

$$U_1 : \begin{cases} \cancel{0=0} \\ x+2y=y \\ x+y+3z=z \end{cases}$$

(b) Mostrare che $U_1 \oplus U_2$

se $\underset{\underset{(x,y,z)}{\parallel}}{u} \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow (x,y,z) = (2x,2y,2z)$

$\Longrightarrow u = (0,0,0)$.

Mostrare che $(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3$

Metodo 1: basta mostrare che $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = 3$

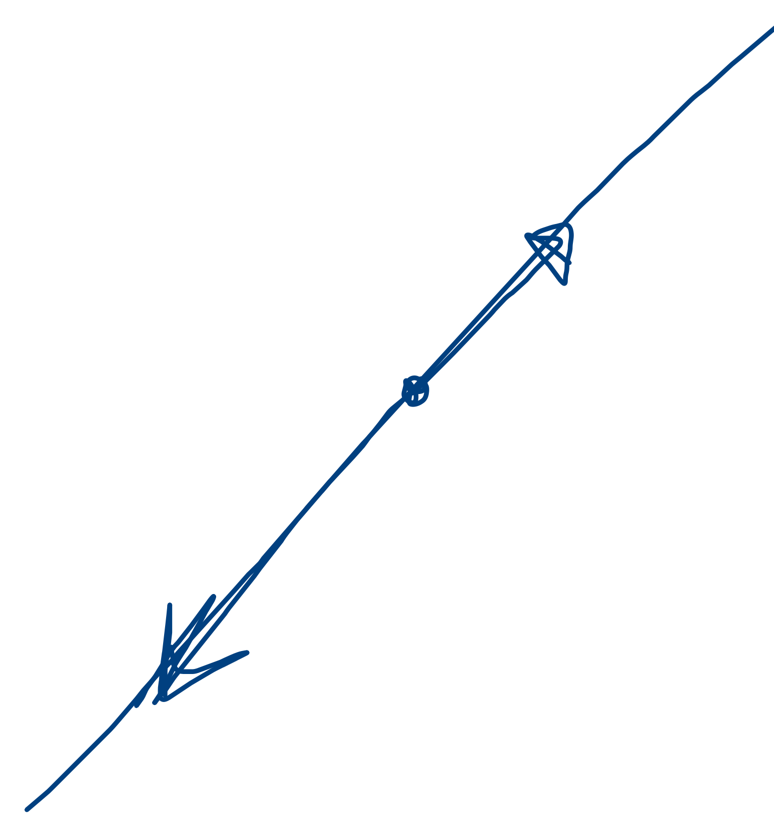
(perché sappiamo $\dim U_1 = \dim U_2 = \dim U_3 = 1$

$$U_1: \begin{cases} x+2y=y \\ x+y+3z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ \cancel{x+y}+2z=0 \end{cases}$$

$$U_1 = \langle (1,-1,0) \rangle$$

$$x = 2x$$

$$U_2: \begin{cases} x+2y=2y \\ x+y+3z=2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ \cancel{x}+y+z=0 \end{cases}$$



$$U_2 = \langle (0,1,-1) \rangle$$

$$U_3: \begin{cases} x+2y=3y \\ x+y+3\cancel{z}=3\cancel{z} \\ x=3x \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$U_3 = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Metodo 2 :

$$F(x,y,z) = (x, x+2y, x+y+3z)$$

$$U_1 = \{ u \ : \ F(u) = u \}$$

$$U_2 = \{ u \ : \ F(u) = 2u \}$$

$$U_3 = \{ u \ : \ F(u) = 3u \}$$

Goal: Mostrare che $(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = \{0\}$

sia $u \in (U_1 \oplus U_2) \cap U_3$

- $u = \underset{U_1}{\underset{\cap}{u_1}} + \underset{U_2}{\underset{\cap}{u_2}}$

$$F(u) = F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) = u_1 + 2u_2$$

siccome $u \in U_3$ $\quad F(u) = 3u = 3u_1 + 3u_2$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{F(u) - F(u)} = 2u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = 0 \quad u_2 = 0$$

Verifichiamo anche $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$u \in U_1 \cap U_2$

$F(u) = u$ perché $u \in U_1$

$F(u) = 2u$ " $u \in U_2$

$\Rightarrow u = 2u \Rightarrow u = 0$

Esercizio 4 $\quad \mathbb{R}^4$

$$B = ((1,-1,2,0),(2,0,1,1),(5,-1,-1,2))$$

$$C = ((1,-3,1,-1),(-1,5,-2,2),(1,1,4,1))$$

sono basi di uno stesso spazio vett. U.

Determiniamo l'eq. cartesiana del sottospazio generato da C

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & y+3x & z-x & t+x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2y+6x & 2z-2x & 2t+2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2y+6x & 2z-2x & 2t+2x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2t+2x-(y+3x) \end{pmatrix}$$

$$-x-y+2t=0$$

Abbiamo quindi $\langle B \rangle = \langle C \rangle = U$ di equazione

$$\boxed{x+y-2t=0}$$

$u = (5,5,5,5) \in U$ perché soddisfa l'equazione.

$$\alpha(1,-1,2,0) + \beta(2,0,1,1) + \gamma(5,-1,-1,2) = (5,5,5,5)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 5\gamma = 5 \\ -\alpha - \gamma = 5 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 5 \\ \beta + 2\gamma = 5 \end{cases}$$

$\alpha = -\gamma - 5$

$\beta = -2\gamma + 5$

$2(-\gamma - 5) - 2\gamma + 5 - \gamma = 5$

$-5\gamma - 10 = 0$

$\gamma = -2 \quad \alpha = -3 \quad \beta = 9$

$u = (-3, 9, -2)_B$

Per calcolare le coordinate di U rispetto a C determiniamo la matrice del cambio di base.

$$M_C^B = \begin{pmatrix} a_{11} = 4/5 & 19/5 & 57/5 \\ a_{21} = 1/5 & 11/5 & 33/5 \\ a_{31} = 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \underline{a_{11} c_1 + a_{21} c_2 + a_{31} c_3}$$

$$(1,-1,2,0) = \alpha(1,-3,1,-1) + \beta(-1,5,-2,2) + \gamma(1,1,4,1)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ -3\alpha + 5\beta + \gamma = -1 \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = 2 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$5\gamma = 2 \qquad \alpha = 4/5 \qquad \beta = 1/5 \qquad \gamma = 2/5$

$$u = (9, 6, 2)_C$$