SCHEDA DI ESERCIZI DEL 06/03/2022

Risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1

Mostrare che l'insieme

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

è uno spazio vettoriale se dotato delle seguenti operazioni:

$$+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) \coloneqq (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

e

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\lambda \cdot (x_1, \cdots, x_n) \coloneqq (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \ .$$

Esercizio 2

Mostrare che l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale se dotato delle seguenti operazioni: date $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ abbiamo

$$+\colon \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$
$$A + B \coloneqq (a_{ij} + b_{ij}) \ ,$$

e

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$
$$\lambda \cdot A \coloneqq (\lambda a_{ij}) \ .$$

Esercizio 3

Sia X un insieme. Mostrare che l'insieme delle funzioni da X in $\mathbb{R}$

$$F(X, \mathbb{R}) \coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$$

è uno spazio vettoriale se dotato delle seguenti operazioni:

$$+\colon F(X, \mathbb{R}) \times F(X, \mathbb{R}) \to F(X, \mathbb{R})$$
$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x) \ \forall x \in X \ ,$$

e

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times F(X, \mathbb{R}) \to F(X, \mathbb{R})$$
$$\lambda \cdot f(x) \coloneqq \lambda f(x) \ \forall x \in X \ .$$

Esercizio 4

Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali. Mostrare che $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale se dotato delle seguenti operazioni:

$$+\colon\ \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$
$$\sum_i a_i x^i + \sum_i b_i x^i := \sum_i (a_i + b_i) x^i,$$

e

$$\cdot\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$
$$\lambda \cdot (\sum_i a_i x^i) := \sum_i \lambda a_i x^i\ .$$

Esercizio 5

Sia $\mathbb{R}^2$ dotato della somma standard (ossia quella dell'Esercizio 1), ma con il seguente prodotto esterno:

$$\circ\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\lambda \circ (x, y) := (\lambda x, 0).$$

Mostrare che $\mathbb{R}^2$ con queste operazioni non è uno spazio vettoriale ed indicare quale condizione non è rispettata.

Esercizio 6

Sia V uno spazio vettoriale e siano W_1 e W_2 due sottospazi di V. Dimostrare che in generale $W_1 \cup W_2$ non è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 7

Si determini quali dei seguenti insieme sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

(1) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$,
(2) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$,
(3) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y = 0\}$,
(4) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.

Esercizio 8

Si dimostri che lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 4y - 4z - w = 0 \\ y + z + 2w = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z, w è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.