LEZIONE 7

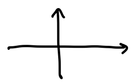
Marco Moraschini
14.03.2022

ES.: Ogni spazio vettoriale V ha almeno due sottospazi: $W = V$ e $W = 0_V$.
Inoltre ogni sottospazio $W \subseteq V$ non banale (i.e. $W \neq 0_V$) ha infiniti elementi. Infatti, dato $w \neq 0_V \in W$ si ha che $\alpha w \in W \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Poiché $\alpha w = \beta w \iff \alpha w - \beta w = 0_V \iff (\alpha - \beta) w = 0_V \overset{w \neq 0_V}{\iff} \alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta$, si ha che W ha infiniti elementi.

ES.: L'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$:

- $X \neq \emptyset$: $(x,0) \in X \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\alpha(x,0) + \beta(x',0) = (\alpha x, 0) + (\beta x', 0) = (\alpha x + \beta x', 0) \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x,0), (x',0) \in X$.

Geometricamente fissato il riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^2$



X coincide con l'asse delle ascisse.

Si vede che sommando vettori nell'asse delle ascisse si ottengono vettori nell'asse delle ascisse. Lo stesso avviene per la moltiplicazione per scalare.

OSS.: Se $W \subseteq V$ è un sottospazio allora $0_V \in W$, quindi è una condizione necessaria.

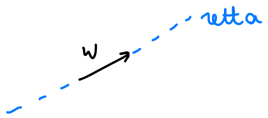
ES.: $X = \{(x,y) \mid y = x+1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ NON è un sottospazio vettoriale, perché $(0,0) = \underline{0}_{\mathbb{R}^2} \notin X$.

⚠ $0_V \in W$ è necessaria MA NON sufficiente

ES.: Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = z\}$. Per definizione $S \subseteq \mathbb{R}^3$ contiene $\underline{0}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$.
Tuttavia S non è chiuso rispetto la somma: $(1,1,1), (-1,-1,1) \in S$ MA $(1,1,1) + (-1,-1,1) = (0,0,2) \notin S$.

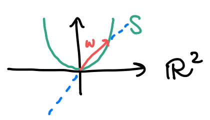
Quindi S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

OSS.: Geometricamente il fatto che un sottospazio sia chiuso rispetto al prodotto per scalare, significa che se $W \subseteq \mathbb{R}^2$ contiene un vettore non nullo w, deve contenere tutta la retta del piano individuata da w:



Questo ci permette di escludere alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

ES.: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$



Vediamo che dato $w \neq \underline{0}_{\mathbb{R}^2} \in S$, la retta di $\mathbb{R}^2$ individuata da w non è contenuta interamente in S. Quindi S NON è un sottospazio vettoriale.

OSS.: In conclusione: per verificare che $W \subseteq V$ sia un sottospazio vettoriale bisogna verificare che sia chiuso sia rispetto alla somma sia rispetto al prodotto per scalare.
Al contrario, per mostrare che W NON sia un sottospazio vettoriale è sufficiente che una delle due proprietà precedenti non valga.

ES.: Si stabilisca se l'insieme $X := \{(r, s, r-s) \in \mathbb{R}^3\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

SOL.: $X \neq \emptyset$ perché $(0,0,0) \in X$. Consideriamo ora:

• **SOMMA**: $\forall\, (r, s, r-s), (a, b, a-b) \in X$ si ha:

$$(r, s, r-s) + (a, b, a-b) = (r+a, s+b, r-s+a-b) = (r+a, s+b, (r+a)-(s+b)) \in X.$$

• **PRODOTTO PER SCALARE**: $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, (r, s, r-s) \in X$ si ha:

$$\alpha \cdot (r, s, r-s) = (\alpha r, \alpha s, \alpha(r-s)) = (\alpha r, \alpha s, \alpha r - \alpha s) \in X.$$

Quindi X è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

ES.: Si stabilisca se $W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale.

SOL.: $(0,0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$. Mostriamo che W NON è chiuso rispetto alla somma:

$$(-2, 2) \in W \quad e \quad (-2, -2) \in W, \quad \text{MA}$$

$$(-2, 2) + (-2, -2) = (-4, 0) \notin W.$$

Quindi, W NON è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

ES.: Si determini un insieme non vuoto di $\mathbb{R}^3$ che sia chiuso rispetto alla somma, ma non al prodotto per scalare.

SOL.: $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \geq 0, z = 0\}$. Poiché $(0,0,0) \in S$, S è non vuoto.

Inoltre, $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x+x', y+y', 0) \in S \quad \forall\, (x,y,0), (x',y',0) \in S$, dato che la somma di numeri non negativi è non negativa.

Tuttavia: $-1 \cdot (x, y, 0) = (-x, -y, 0) \notin S \quad \forall\, (x,y,0) \in S \setminus \{0\}$.

§ GENERATORI

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ scalari. Allora possiamo considerare la somma:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$

DEF.: Dato uno spazio vettoriale V e dati $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori, diremo che un vettore $v \in V$ è loro COMBINAZIONE LINEARE se esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$

Diremo che $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono i COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE.

ES.: Consideriamo i seguenti casi in $\mathbb{R}^2$:

(i) Il vettore $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $(1,-1)$ e $(0,\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$.

Infatti $\quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}(1,-1) + 2(0,\sqrt{2})$.

(ii) Ogni vettore $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $(1,0), (0,1) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) .$$

OSS.: Consideriamo $0_V \in V$. Allora 0_V è combinazione lineare di qualsiasi insieme di vettori: $\quad 0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$, qui $0 = 0_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$.

DEF.: Uno spazio vettoriale V è FINITAMENTE GENERATO se $\exists\, v_1, \dots, v_n \in V$ t.c. ogni vettore $v \in V$ si scrive come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono GENERATORI di V.

ES.: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $\mathbb{R}^n$ è finitamente generato. Infatti, ogni vettore $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare di $\underbrace{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), (0,0,1,\dots,0), \dots, (0,\dots,1,0), (0,\dots,0,1)}_{\text{sono } n \text{ vettori in cui tutte le entrate sono nulle tranne la } i\text{-esima che è } 1, \text{ dove } 1 \le i \le n.} \in \mathbb{R}^n$, poiché:

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot (1,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_{n-1}(0,\dots,1,0) + x_n(0,\dots,0,1).$$

ES.: lo spazio vettoriale V dato dalle sequenze infinite di numeri reali $(a_1, \dots, a_n, \dots) \in V$ non è finitamente generato. (vedere scheda degli esercizi.)

DOMANDA: Dato uno spazio vettoriale V, l'insieme dei generatori è unico?

ES.: Abbiamo visto che i vettori $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ generano $\mathbb{R}^3$. Per prima cosa osserviamo che di conseguenza anche $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (3,2,\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$ generano $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) + 0(3,2,\sqrt{2}) \quad , \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

Tuttavia, uno può esibire anche TRE vettori di $\mathbb{R}^3$ diversi a quelli dati che generano

Consideriamo $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (0,1,2)$, $u_3 = (0,-2,3) \in \mathbb{R}^3$. Vogliamo provare che $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (x,y,z)$.

Si tratta di risolvere il seguente sistema lineare in λ_1, λ_2 e λ_3:

$$\begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = y \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = z \end{cases}$$

Considero $[A|\underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & -2 & y \\ -1 & 2 & 3 & z \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II}-\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & -2 & y-x \\ 0 & 2 & 3 & z+x \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{III} \to \mathrm{III}-2\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & 7 & z-2y+3x \end{array}\right] = [A'|\underline{b}']$

e applico Gauss

Quindi $\mathrm{rg}\, A' = \mathrm{rg}(A'|\underline{b}') = 3 =$ numero incognite $\Rightarrow \exists!$ soluzione. $\lambda_3 = \frac{z}{7} - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}x$, $\lambda_2 = y - x + 2\lambda_3 =$
$= y - x + 2\left[\frac{z}{7} - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}x\right] = \frac{7}{7}y - \frac{7}{7}x + \frac{2}{7}z - \frac{4}{7}y + \frac{6}{7}x = \frac{3}{7}y - \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}z$, $\lambda_1 = x$.

Questo mostra che u_1, u_2, u_3 generano $\mathbb{R}^3$.

ES.: lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato. Infatti se $\mathbb{R}[x]$ fosse generato da $p_1(x), \dots, p_n(x) \in \mathbb{R}[X]$, avremmo che ogni polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ è loro combinazione lineare. Sia $g_i =$ grado del polinomio $p_1(x)$ e sia $g := \max\{g_1, \dots, g_n\}$. Allora ogni polinomio che è combinazione lineare di $p_1(x), \dots, p_n(x)$ avrà al più grado g. Ne segue che $q(x) := x^{g+1}$ non si può scrivere come combinazione lineare di $p_1(x), \dots, p_n(x)$. Quindi $\mathbb{R}[x]$ NON è finitamente generato.