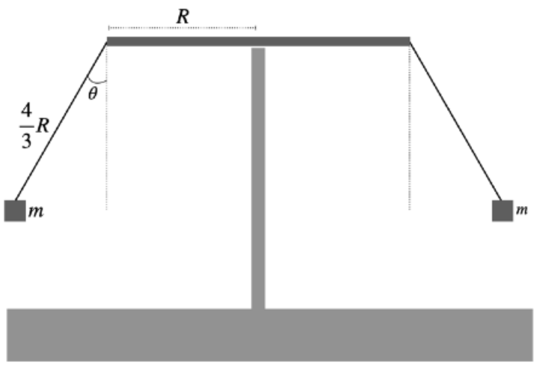
Esercizio 1

Una giostra per bambini è costituita da un disco orizzontale di raggio $R = 3.5$ m, sostenuto da un palo in modo da poter ruotare intorno al proprio asse. Sul bordo del disco sono fissati, per mezzo di catene lunghe $4R/3$, inestensibili e di massa trascurabile, alcuni seggiolini. Ciascun seggiolino può essere considerato una massa $m = 7.5$ kg puntiforme (in figura ne sono rappresentati due). Quando la giostra gira alla velocità di regime, le catene formano con la verticale un angolo $\theta = 30^o$ e i seggiolini percorrono una traiettoria circolare sul piano orizzontale. Si calcoli:



1) la velocità angolare di rotazione della giostra;
2) la tensione della catena.
3) la velocità tangenziale del seggiolino;

Soluzione

1,2) Considerando un seggiolino, esso è sottoposto a due forze: la tensione sulla catena e la forza peso. La risultante delle due forze deve produrre sul seggiolino l'accelerazione centripeta orizzontale cui è sottoposto, muovendosi di moto circolare, e nessuna accelerazione verticale. Il raggio del moto circolare è pari a

$$R' = R + \frac{4}{3}R\sin\theta = \frac{5}{3}R$$

Chiamiamo x la direzione orizzontale e y la direzione verticale; si ha:

$$\begin{cases} a_C = R'\omega^2 = \frac{5}{3}R\omega^2 \\ \sum F_x = T\sin\theta = ma_x = ma_C \\ \sum F_y = T\cos\theta - mg = ma_y = 0 \end{cases}$$

otteniamo quindi:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \simeq 85.0 \text{ N}$$

$$T\sin\theta = mg\tan\theta = \frac{5}{3}mR\omega^2$$

e quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\tan\theta}{5R}} \simeq 0.99 \text{ rad/s}$$

3) La velocità tangenziale è semplicemente la velocità angolare per il raggio della circonferenza, quindi

$$v = \omega R' = \frac{5}{3}R\sqrt{\frac{3g\tan\theta}{5R}} = \sqrt{\frac{5}{3}R\tan\theta} \simeq 1.84 \text{ m/s}$$

Esercizio 2

Un uomo di massa $m = 80$ kg fa bungee jumping da un ponte, utilizzando una corda elastica di lunghezza a riposo $l_0 = 16$ m. La massima lunghezza raggiunta dalla corda durante il salto è $l = 63$ m. Si determini, trascurando gli attriti e la massa della corda:

1) la costante elastica della corda;
2) la velocità massima raggiunta dall'uomo subito prima che la corda elastica inizi ad allungarsi;
3) la massima accelerazione cui è soggetto l'uomo;
4) la lunghezza della corda quando il salto è finito e l'uomo penzola in equilibrio statico.

Soluzione

1) Quando la corda elastica raggiunge l'allungamento massimo, l'uomo è istantaneamente fermo (subito dopo inizia a risalire). Quindi la sua energia cinetica è nulla, come prima del salto. Possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia uguagliando l'energia potenziale gravitazionale che ha l'uomo quando è ancora sul ponte (scegliendo come zero il punto più basso raggiunto successivamente) all'energia potenziale elastica corrispondente al massimo allungamento:

$$mgl = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \implies k = \frac{2mgl}{(l - l_0)^2} \simeq 44.8 \text{ N/m}$$

2) Fino al momento in cui la corda è ancora a riposo, subito prima di iniziare ad allungarsi, frenando la caduta, l'uomo è caduto liberamente, di un'altezza l_0; la corda non ha ancora immagazzinato alcuna energia potenziale, quindi la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgl_0 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \implies v_{max} = \sqrt{2gl_0} \simeq 17.7 \text{ m/s} \ \text{(circa 64 km/h)}$$

3) La massima accelerazione cui è soggetto l'uomo si avrà quando la corda è al massimo allungamento ed esercita dunque la massima forza verso l'alto sull'uomo; in quella situazione, nella direzione verticale (chiamiamola z) l'uomo è soggetto alla forza elastica, verso l'alto, di modulo $k\Delta l$, e alla forza peso, verso il basso, di modulo mg. Quindi

$$\sum F_z = k(l - l_0) - mg = ma \implies a = \frac{k}{m}(l - l_0) - g \simeq 16.5 \text{ m/s}^2$$

4) L'equilibrio statico corrisponde all'equilibrio della forza elastica e della forza peso, quindi

$$\sum F_z = k(l' - l_0) - mg = 0 \implies l' = l_0 + \frac{mg}{k} \simeq 33.5 \text{ m}$$

Esercizio 3
Una sottile asta rettilinea è lunga $l = 9.85$ m ed è caricata uniformemente con una carica elettrica $Q = 640$ mC. Si trovino:
1) la densità lineare di carica;
2) il campo elettrico in un punto P nelle vicinanze del punto medio dell'asta, ad una distanza di $R = 37.5$ mm da essa (sfruttando le approssimazioni consentite dal fatto che $R \ll l$);
3) quale sarebbe il periodo di rivoluzione di un elettrone che orbitasse in un'orbita circolare intorno all'asta, nelle vicinanze del punto medio, a distanza R da essa.

Soluzione

1) La densità lineare di carica è semplicemente la carica totale divisa per la lunghezza dell'asta:

$$\lambda = \frac{Q}{l} \simeq 65.0 \text{ mC/m}$$

2) Se non ricordiamo l'espressione per il campo elettrico prodotto da un filo infinito uniformemente carico, possiamo ricavarla facilmente sfruttando la legge di Gauss. Consideriamo un filo infinito sia perché viene suggerito di considerare che $R \ll l$, ma anche perché, per simmetria, il campo nelle vicinanze del punto medio sarà diretto radialmente (come per il caso di un'asta di lunghezza infinita); scegliamo una superficie gaussiana cilindrica, coassiale con il filo, di altezza h e raggio r. Avremo contributo al flusso del campo elettrico solo dalla superficie laterale del cilindro, in corrispondenza della quale il campo è uniforme su tutta la superficie e in ogni punto ortogonale ad essa. Quindi il calcolo del flusso diventa semplicemente il prodotto del modulo del campo per la superficie laterale totale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = E 2\pi R h$$

Per la legge di Gauss,

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} \implies E 2\pi R h = \lambda h$$

otteniamo quindi

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \simeq 31.1 \text{ MN/C}$$

3) Se l'elettrone resta su un'orbita circolare, la forza dovuta al campo elettrostatico costituisce la forza centripeta del suo moto di raggio r e periodo T (ricordando che $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$):

$$a_c = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

La forza esercitata dal campo elettrico

$$F = eE$$

corrisponde alla massa dell'elettrone per la sua accelerazione:

$$eE = m_e a_c$$

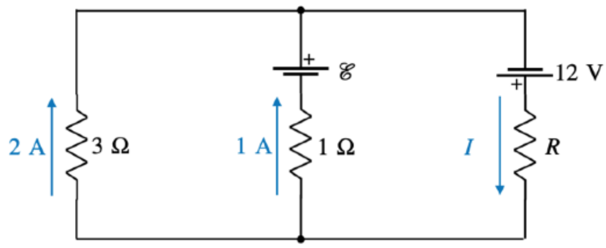
quindi

$$\frac{\lambda e}{2\pi\varepsilon_0 R} = m_e \frac{4\pi^2}{T^2} R \implies T = 2\pi R \sqrt{\frac{m_e l 2\pi\varepsilon_0}{Qe}} \simeq 1.64 \times 10^{-11} \text{ s}$$

Esercizio 4

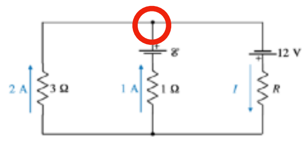
Nel circuito mostrato in figura, una sorgente di forza elettromotrice da 12 V con una resistenza interna R sconosciuta è connessa ad una batteria ricaricabile esaurita, con una forza elettromotrice $\mathscr{E}$ sconosciuta e resistenza interna da $1\ \Omega$, e a una spia realizzata con una lampadina di resistenza $3\ \Omega$ attraversata da una corrente di $2\ \mathrm{A}$. La corrente attraverso la batteria scarica è di $1\ \mathrm{A}$ nella direzione mostrata. Trovare:

1) la corrente I erogata dalla sorgente a $12\ \mathrm{V}$;
2) la resistenza incognita R;
3) il valore della forza elettromotrice incognita $\mathscr{E}$;
4) spiegare, in base ai risultati ottenuti, se nello schema del circuito la batteria ricaricabile è disegnata con la polarità giusta.



Soluzione

1) Per la legge dei nodi, nel nodo al di sopra di $\mathscr{E}$

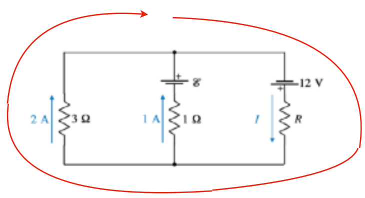


$$-I + 1\ \mathrm{A} + 2\ \mathrm{A} = 0$$

quindi

$$I = 3\ \mathrm{A}$$

2) Per la legge delle maglie, applicata alla maglia esterna più grande

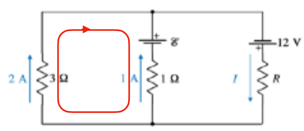


$$12\ \mathrm{V} - R(3\ \mathrm{A}) - (3\ \Omega)(2\ \mathrm{A}) = 0$$

quindi

$$R = 2\ \Omega$$

3) Per la legge delle maglie, applicata alla maglia a sinistra, quella comprendente le resistenze da $3\ \Omega$ e da $1\ \Omega$ e la batteria $\mathscr{E}$, si ha



$$-\mathscr{E} + (1\ \Omega)(1\ \mathrm{A}) - (3\ \Omega)(2\ \mathrm{A}) = 0$$

dove abbiamo scritto un meno davanti a $\mathscr{E}$ in quanto, con il verso di percorrenza scelto, attraversiamo tale fem dal polo positivo a quello negativo. Quindi, si ottiene

$$\mathscr{E} = -5\ \mathrm{V}$$

4) Il valore negativo trovato per $\mathscr{E}$ indica che la polarità di questa forza elettromotrice è opposta a quella mostrata nel disegno, e utilizzata nell'applicare la legge delle maglie al punto 3). Quindi nel disegno la polarità dovrebbe essere opposta. In effetti, per poter ricaricare la batteria rappresentata da $\mathscr{E}$, essa deve essere connessa alla sorgente esterna ($12\ \mathrm{V}$) in modo da accoppiare insieme i poli positivi e i poli negativi.