LEZIONE 4

02.03.2022
Marco Moraschini

EX.: Stabilire se esistono $k \in \mathbb{R}$ t.c. il sistema lineare

$$\Sigma = \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

(le variabili sono x_1, x_2, x_3.)

sia equivalente a $\Pi_k = \begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ kx_1 - 4x_2 + 3x_3 = k \end{cases}$.

SOL.: Due sistemi sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni. Cominciamo a studiare Σ:

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 & -3/2 \end{array}\right]$$

Riduciamo $(A|\underline{b})$ a scala: $\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

Ne segue che $x_3 = 3$ $\quad -3x_2 = 6 - 4 \cdot 3 \Leftrightarrow x_2 = 2$, $\quad x_1 = -\frac{3}{2} - 1 + 3 = \frac{1}{2}$ $\quad (\frac{1}{2}, 2, 3)$.

Consideriamo Π_k e sostituiamo la soluzione:

$$\begin{cases} 1/2 + 2 - 1/2\,(3) = 1 \\ 2 \cdot 1/2 - 2 + 3 = 2 \\ k\,1/2 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ k/2 + 1 = k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} k = 2k - 2 \\ k = 2. \end{array}$$

Quindi per $k \neq 2$ NON sono equivalenti. Vediamo se Π_2 ha infinite soluzioni o no:

$$[A'|\underline{b}'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $rg(A''|\underline{b}'') = rg(A'') = 2 < 3 \Rightarrow$ infinite soluzioni $S = \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{2}{3}x_3, \frac{2}{3}x_3, x_3\right) \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$\Downarrow$
$x_3 = 3$ la precedente.

Si conclude che NON esistono $k \in \mathbb{R}$ per cui i due sistemi siano equivalenti!

EX.: Risolvere il seguente sistema lineare x, y, z, t:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ -2y + 3z - 4t = -11 \\ -3z + 4t = 15 \end{cases}$$

SOL.: la matrice associata è:

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right]$$

Procediamo con la riduzione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{II \to I + II} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[IV \to IV + III]{III \to -III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

Abbiamo che $rg\,A = rg(A|\underline{b}) = 4 \Rightarrow \exists!$ soluzione: $(1, -2, -1, 3)$

EX.: Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z - t = -1 \\ x + 2y + (2\alpha+1)z + 3t = 2\alpha - 1 \\ 3x + 4y + (3\alpha+2)z + (\alpha+5)t = 3\alpha - 1 \end{cases}$$

SOL.: In questo esercizio bisogna far variare $\alpha \in \mathbb{R}$ e trovare le soluzioni (se esistono) dei risultanti sistemi lineari. Noi li tratteremo il "più possibile" come uno solo.

Scriviamo la matrice completa associata:

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & (2\alpha+1) & 3 & 2\alpha-1 \\ 3 & 4 & (3\alpha+2) & (\alpha+5) & 3\alpha-1 \end{array}\right]$$

Procediamo con l'algoritmo di Gauss:

$$\xrightarrow[\substack{III \to III - I \\ IV \to IV - 3I}]{II \to II - I} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 2 & 2\alpha-1 \\ 0 & 1 & 3\alpha-1 & \alpha+2 & 3\alpha-1 \end{array}\right] \xrightarrow[IV \to IV - II]{\substack{II \to -II \\ III \to III - II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha-2 & 0 & 2\alpha-2 \\ 0 & 0 & 3\alpha-3 & \alpha & 3\alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow{III \to \frac{1}{2} III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 3\alpha-3 & \alpha & 3\alpha-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{IV - 3III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right] = (A'|\underline{b}')$$

Si può perché $3 \neq 0$

Studiamo ora $(A'|\underline{b}')$. Se $\alpha = 0 \Rightarrow rg(A') < rg(A'|\underline{b}') \Rightarrow \nexists$ soluzioni.

Se $\alpha = 1 \Rightarrow rg(A'|\underline{b}') = rg(A') = 3 < 4 \Rightarrow \exists$ infinite soluzioni

Se $\alpha \neq 0, 1 \Rightarrow rg(A'|\underline{b}') = rg(A') = 4 \Rightarrow \exists!$ soluzione.

Caso $\alpha = 1$) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{IV \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \underset{z}{0} & 0 & 0 \end{array}\right]$ z è libera: $t = 1$, $y = 1 - 2z - 2 \cdot 1 = -2z - 1$, $x = -1 - z + 2z + 1 = z$.

Quindi $S = \{(z, -2z-1, z, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$. FARE SEMPRE CONTROPROVA!

Caso $\alpha \neq 0, 1$) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left(1-2-\frac{2}{\alpha}-1-\frac{1}{\alpha},\ 1-2-\frac{2}{\alpha},\ 1,\ \frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}, -1-\frac{2}{\alpha}, 1, \frac{1}{\alpha}\right)$ Fare la controprova!

EX.: Si consideri il sistema lineare Σ_α di incognite x_1, x_2, x_3 dipendenti da $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Sigma_\alpha = \begin{cases} \alpha x_1 + (\alpha+3)x_2 + 2\alpha x_3 = \alpha+2 \\ \alpha x_1 + (2\alpha+2)x_2 + 3\alpha x_3 = 2\alpha+2 \\ 2\alpha x_1 + (\alpha+7)x_2 + 4\alpha x_3 = 2\alpha+4. \end{cases}$$

(i) Determinare le soluzioni al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) Determinare le soluzioni di Σ_α come sistema in $x_1, \dots, x_4$.

SOL.: (i) $$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ \alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha & 2\alpha+2 \\ 2\alpha & \alpha+7 & 4\alpha & 2\alpha+4 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2\mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - \mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha+1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{III} \to \mathrm{III} + \mathrm{II}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array}\right]}_{= (A'''|\underline{b}''')}$$

Casi interessanti sono $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$:

Caso $\alpha = 1$) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = (A'|\underline{b}') \Rightarrow \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg}(A'|\underline{b}) = 2 < 3 \Rightarrow \exists$$ infinite soluzioni.

Caso $\alpha = 0$) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{II} \to \mathrm{I} + \mathrm{II}]{\mathrm{I} \to \mathrm{I}/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = (A''|\underline{b}'').$$ $\operatorname{rg}(A'') = 1 \neq \operatorname{rg}(A''|\underline{b}'') = 2 \Rightarrow \nexists$ soluzioni

Caso $\alpha \neq 0, 1$) Si ha $\operatorname{rg}(A'''|\underline{b}''') = \operatorname{rg}(A''') = 3 = 3 = \#$ incognite $\Rightarrow \exists!$ soluzione:

$\alpha x_3 = \alpha \Rightarrow x_3 = 1$, $(\alpha - 1)x_2 + \alpha x_3 = \alpha \iff x_2 = 0$, $\alpha x_1 + 2\alpha = \alpha + 2 \iff \frac{2-\alpha}{\alpha}$

Quindi $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ Σ^α ha soluzione $\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}, 0, 1\right)$.

Caso $\alpha = 1$ in dettaglio) $x_3 = 1$ x_2 libera e $x_1 = 3 - 2 - 4x_2 = 1 - 4x_2 \Rightarrow S = \{(1 - 4x_2, x_2, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Aggiungendo x_4 non cambia molto:

Caso $\alpha = 1$) $S = \{(1 - 4x_2, x_2, 1, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

Caso $\alpha = 0$) No soluzioni

Caso $\alpha \neq 0, 1$) Il rango non può essere $= \#$ incognite $\Rightarrow \exists$ infinite soluzioni $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$S = \left\{\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}, 0, 1, x_4\right) \mid x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$