PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA

6 Giugno 2022

Domanda teorica: Sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare. Dare la definizione di autovalori, autovettori ed autospazi di f.

(1) Si consideri il seguente sistema al variare del parametro reale k nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ x + y + 3z = k - 1 \\ 2x + ky - z = 1. \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di k tale sistema é compatibile;
(b) stabilire per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione e in questi casi determinarla;
(c) stabilire per quali valori di k il sistema ammette infinite soluzioni e in questi casi determinarle;

Soluzione. Il sistema è equivalente al seguente sistema a scala

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ (k-2)y - (1+2k)z = -3 \\ (3-k)z = k - 3. \end{cases}$$

Se $k \neq 2, 3$ il rango della matrice completa e della matrice incompleta sono entrambi uguali a 3 per cui la soluzione esiste ed è unica: svolgendo i dovuti calcoli la soluzione è in questo caso

$$\Big(\frac{k^2+2k}{k-2}, -\frac{4+2k}{k-2}, -1\Big).$$

Se $k = 3$ il rango della matrice incompleta e della matrice completa sono entrambi uguali a 2 per cui esistono infinite soluzioni. Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 7z = -3 \end{cases}$$

e le soluzioni sono

$$\{(5 - 10z, -3 + 7z, z) :\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Per $k = 2$ la matrice incompleta ha rango 2 e la matrice incompleta ha rango 3 per cui il sistema è incompatibile.

(2) Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $U = \langle (2,0,2,0), (2,1,0,1) \rangle$ e $W_k = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - 2y - z = 0, 2x - 4y - 2z + tk = 0\big\}$.
(a) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione e una base di W_k.

(b) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $U + W_k$ e $U \cap W_k$ e una loro base.
(c) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ i sottospazi U e W_k sono in somma diretta.
(d) Determinare per quali $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ esiste un'applicazione lineare iniettiva $G_s \colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}(G_s) = U$ e, se possibile, esibire tale applicazione lineare G_s.

Soluzione. *Ad (a)* Osserviamo che W_k si può scrivere attraverso le seguenti equazioni indipendenti:

$$W_k = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - 2y - z = 0, tk = 0\right\}.$$

Abbiamo quindi due casi:

(a) $k = 0$. In questo caso W_0 è completamente descritto da un'unica equazione cartesiana. Poichè W_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, abbiamo

$$\dim(W_0) = 4 - 1 = 3.$$

Calcoliamo ora una base di W_0. Per farlo riscriviamo W_0 attraverso equazioni parametriche:

$$W_0 = \{(x, y, x - 2y, t) \in \mathbb{R}^4 | x, y, t \in \mathbb{R}\}.$$

Questo mostra che $W_0 = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, -2, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$. Poichè sappiamo che $\dim(W_0) = 3$, i precedenti vettori formano una base di W_0.

(b) $k \neq 0$. In questo caso W_k è descritto da due equazioni cartesiane indipendenti, da cui si può dedurre come sopra che

$$\dim(W_k) = 4 - 2 = 2.$$

Non ci resta che esibire una base per W_k. Per farlo scriviamo W_k tramite equazioni parametriche:

$$W_k = \{(x, y, x - 2y, 0) \in \mathbb{R}^4 | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Questo mostra che $W_k = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, -2, 0)\rangle$. Poichè W_k ha dimensione 2 e abbiamo trovato due generatori, questi formano anche una base per W_k.

Ad (b) Dobbiamo considerare i due casi precedenti:

(a) $k = 0$. Scriviamo un vettore di U in forma generica:

$$u = \alpha(2, 0, 2, 0) + \beta(2, 1, 0, 1) = (2\alpha + 2\beta, \beta, 2\alpha, \beta)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Imponendo che il vettore $u \in U$ sia contenuto in W_0, abbiamo la seguente condizione

$$2\alpha + 2\beta - 2\beta - 2\alpha = 0$$

che è sempre verificata. Ne segue che $U \subset W_0$. In particolare, abbiamo che

$$U \cap W_0 = U \quad \text{ e } U + W_0 = W_0.$$

Quindi $U \cap W_0$ ha dimensione 2 ed ammette una base costituita dai due vettori: $(2, 0, 2, 0)$ e $(2, 1, 0, 1)$. Analogamente $U + W_0$ avrà dimensione 3 ed ammetterà come base la stessa di W_0 calcolata nel punto precedente.

(b) $k \neq 0$. In questo caso ogni vettore che appartiere a W_k deve avere l'ultima coordinata nulla. Quindi se consideriamo nuovamente:

$$u = \alpha(2,0,2,0) + \beta(2,1,0,1) = (2\alpha + 2\beta, \beta, 2\alpha, \beta) \in U$$

con α e $\beta \in \mathbb{R}$, si vede immediatamente che β deve essere uguale a zero. Quindi non ci resta che verificare che $(2\alpha, 0, 2\alpha, 0) \in W_k$ per concludere che:

$$\dim(U \cap W_k) = 1 \quad e \quad \mathcal{B}_{U\cap W_k} = \{(2,0,2,0)\}.$$

Usando la formula di Grassmann si deduce quindi che:

$$\dim(U + W_k) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Una base per $U+W_k$ è quindi $\mathcal{B}_{U+W_k} = \{(1,0,1,0), (0,1,-2,0), (2,1,0,1)\}$.

Ad (c) Dal punto precedente si deduce che non esiste alcun $k \in \mathbb{R}$ per cui $U \cap W_k = 0_{\mathbb{R}^4}$. Questo mostra che non esiste alcun $k \in \mathbb{R}$ tale che U e W_k siano in somma diretta.

Ad (d) Per stabilire il valore di $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ osserviamo che:

$$s = \dim(\mathbb{R}^s) = \dim(\ker(G_s)) + \dim(\mathrm{Im}(G_s)) = 0 + \dim(U) = 0 + 2 = 2,$$

dato che G_s deve essere iniettiva (e quindi avere kernel nullo). Una volta stabilito che $s = 2$, possiamo definire G_2 sulla base canonica $\{(1,0),(0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ come:

$$G_2(1,0) = (2,0,2,0) \quad \text{e} \quad G_2(0,1) = (2,1,0,1).$$

Per costruzione l'immagine di G_2 è generata da $G_2(1,0)$ e $G_2(0,1)$ e quindi coincide con U. Inoltre è iniettiva per il conto fatto in precedenza.

(3) Consideriamo la seguente matrice dipendente da un parametro reale k

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostrare che il vettore $(-2,1,0,1)$ è un autovettore di A_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.
(b) Determinare gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche.
(c) Mostrare che A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = -2$.
(d) Per $k = -2$ determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A_k.

Soluzione. (1) Basta moltiplicare A_k per il vettore colonna $(-2,1,0,1)$: si ottiene il vettore colonna $(-4,2,0,2)$ per cui $(-2,1,0,1)$ è un autovettore di autovalore 2.

(2) Il polinomio caratteristico è $P_{A_k}(t) = t(t-3)^2(t-2)$ per cui gli autovalori sono 0,2,3, i primo due con molteplicità algebrica 1 il terzo con molteplicità algebrica 2

(3) Per il teorema di diagonalizzabilità dobbiamo solo mostrare che la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 è 2 se e solo se $k = -2$.

Per questo basta mostrare che il rango di $A_k - 3I$ è 2 se e solo se $k = -2$.

(4) Poniamo $k = -2$. L'autospazio dell'autovalore 3 è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} y - 2z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

per cui l'autospazio è

$$U_3 = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle$$

Analogamente possiamo calcolare

$$U_0 = \langle (0, 1, 0, -1) \rangle$$

e conosciamo già

$$U_2 = \langle (-2, 1, 0, 1) \rangle.$$