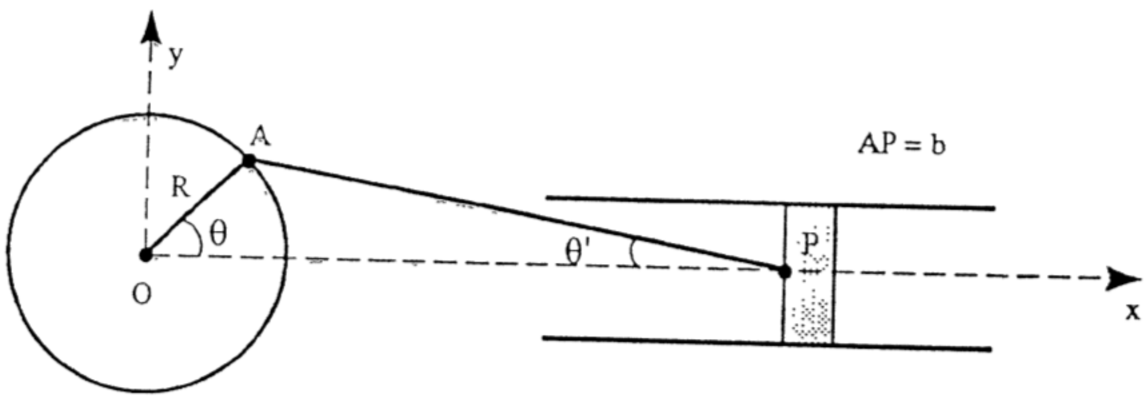
Esercizi di Fisica per seconda esercitazione

Niccolò Puccetti

April 2024

Esercizio 1

Un pistone P può scorrere lungo l'asse x di un cilindro; esso è collegato mediante una biella di lunghezza b a un perno situato sul bordo di un disco di raggio R. Determinare la velocità e l'accelerazione del pistone se il disco ruota con velocità angolare costante ω.



Risposta:

$$v_p = -\omega R \sin(\omega t) - \frac{\omega R^2 \sin(2\omega t)}{2\sqrt{b^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \tag{1}$$

$$a_p = -\omega^2 R \cos(\omega t) - \frac{\omega^2 R^2}{4} \frac{4\cos(\omega t)(b^2 - R^2 \sin^2(\omega t)) + R^2 \sin^2(2\omega t)}{(b^2 - R^2 \sin^2(\omega t))^{3/2}} \tag{2}$$

Soluzione Le coordinate del punto A sono:

$$x_A = R\cos(\omega t)\ ,\ y_A = R\sin(\omega t) \tag{3}$$

A questo punto è semplice legare la coordinata x_P con quella di A, infatti da semplici ragionamenti geometrici si ha:

$$x_P = X_A + b\cos(\theta') \tag{4}$$

Dal teorema dei seni si ha:

$$\frac{b}{\sin(\theta)} = \frac{R}{\sin(\theta')} \tag{5}$$

Ricordo che il teorema dei seni stabilisce che in un triangolo qualsiasi il rapporto fra un lato e la misura del seno dell'angolo opposto è costante. Dalla formula precedente si ottiene:

$$\sin(\theta') = \frac{R}{b}\sin(\theta) \tag{6}$$

Da cui, ricordando la relazione fondamentale della goniometria si ottiene:

$$\cos(\theta') = \sqrt{1 - \frac{R^2}{b^2}\sin^2(\theta)} \tag{7}$$

Ricordando che $\theta = \omega t$ otteniamo:

$$x_P = R\cos(\omega t) + b\sqrt{1 - \frac{R^2}{b^2}\sin(\omega t)} = R\cos(\omega t) + \sqrt{b^2 - R^2\sin(\omega t)} \tag{8}$$

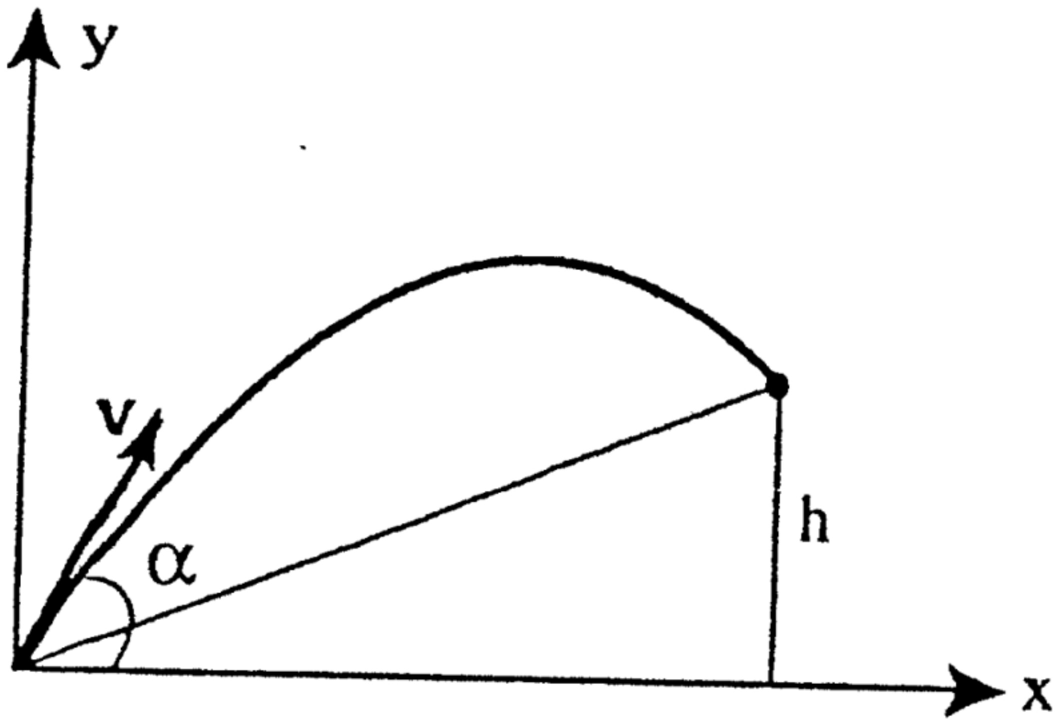
Adesso per ottenere la velocità e l'accelerazione basta derivare l'espressione di x_P rispetto al tempo, ottenendo:

$$v_p = -\omega R\sin(\omega t) - \frac{\omega R^2\sin(2\omega t)}{2\sqrt{b^2 - R^2\sin^2(\omega t)}} \tag{9}$$

$$a_p = -\omega^2 R\cos(\omega t) - \frac{\omega^2 R^2}{4}\frac{4\cos(\omega t)(b^2 - R^2\sin^2(\omega t)) + R^2\sin^2(2\omega t)}{(b^2 - R^2\sin^2(\omega t))^{3/2}} \tag{10}$$

Esercizio 2

Un cannone spara proiettili con velocità iniziale $v_0 = 300\,\mathrm{m/s}$ che devono colpire un bersaglio situato su un monte di altezza h=10^3m rispetto al cannone; la distanza in linea d'aria tra cannone e bersaglio è di $D = 5 \cdot 10^3$ m. Trovare l'angolo α di alzo.



Risposta $\alpha = 28.4°$, $\alpha = 72.5°$
Soluzione In problemi di questo tipo sul moto parabolico la prima cosa da fare è sempre scrivere le equazioni del moto nel sistema di coordinate scelto, oppure in questo caso fornito già dal testo. In questo caso il proiettile parte dall'origine del sistema del piano cartesiano, si ha quindi che la sua posizione iniziale in x e y è nulla, le equazioni del moto sono:

$$x = v_{0x} t \; , \; y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{11}$$

Nota che $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$ e $v_{0x} = v_0 \sin(\alpha)$. Combinando le espressioni di x e y si ha:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2} = x \tan(\alpha) - x^2 \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} \tag{12}$$

Ricordando che $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$ si ha:

$$y(x) = x\tan(\alpha) - \frac{gx^2\tan^2(\alpha)}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{13}$$

A questo punto abbiamo quasi finito, notiamo che la coordinata x corrispondente alla coordinata $y = h$ sarà semplicemente $x = \sqrt{D^2 - h^2}$. Si ha quindi che la parabola che descrive il moto deve necessariamente passare il punto di coordinate $(x, y) = (\sqrt{D^2 - h^2}, h)$, sostituendo nell'espressione di y(x) si ha:

$$h = \sqrt{D^2 - h^2}\tan(\alpha) - \frac{g(D^2 - h^2)\tan^2(\alpha)}{2v_0^2} - \frac{g(D^2 - h^2)}{2v_0^2} \tag{14}$$

A questo punto riconosciamo che abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado in $\tan(\alpha)$, riscrivendola in forma normale si ha:

$$\frac{g(D^2 - h^2)}{2v_0^2}\tan^2(\alpha) - \sqrt{D^2 - h^2}\tan(\alpha) + \left(h + \frac{g(D^2 - h^2)}{2v_0^2}\right) = 0 \tag{15}$$

Moltiplicando per $2v_0^2$ si ha:

$$g(D^2 - h^2)\tan^2(\alpha) - 2v_0^2\sqrt{D^2 - h^2}\tan(\alpha) + 2hv_0^2 + g(D^2 - h^2) = 0 \tag{16}$$

La soluzione dell'equazione porta a:

$$\tan(\alpha)_{1,2} = \frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2(D^2 - h^2)} - \frac{2v_0^2 h}{g(D^2 - h^2)} - 1} \tag{17}$$

Ottenendo quindi:

$$\tan(\alpha)_1 = 0.54 \rightarrow \alpha_1 = 28.4\,,\ \tan(\alpha)_2 = 3.18 \rightarrow \alpha_1 = 72.5 \tag{18}$$