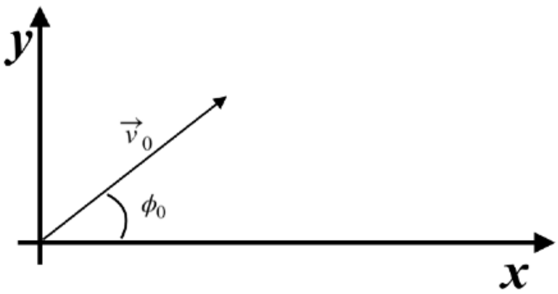
4.10 Moto di un proiettile

Descriviamo il moto di un grave nello spazio, ovvero di un proiettile che non avrà un moto puramente verticale. Nel seguito trascureremo l'attrito con l'aria.

Il proiettile ha un'accelerazione costante, di modulo g, diretta verso il basso. La componente orizzontale dell'accelerazione è nulla. Prendendo un asse y diretto verso l'alto, si avrà

$$a_y = -g \;; \quad a_x = a_z = 0$$

Scelto un sistema di riferimento così che si abbia $\vec{v}_0$ (la velocità iniziale) nel piano xy (il altre parole, posso sempre scegliere il sistema di riferimento in modo che $v_{0z} = 0$), si considera solo il piano xy, nel quale giace sempre la traiettoria ($v_z = 0$ per ogni istante). Posso altresì scegliere il sistema di riferimento in modo che $x_0 = 0 \;; \quad y_0 = 0$.



Esprimendo la velocità iniziale in componenti cartesiane, utilizzando il modulo della velocità iniziale e l'angolo di lancio rispetto all'orizzontale:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} = v_0 \cos\phi_0 \hat{i} + v_0 \sin\phi_0 \hat{j}.$$

Ricordiamoci che, in ogni istante, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, e che $\tan\phi_0 = v_y/v_x$.

Dato che $a_x = 0$, avremo

$$v_x(t) = \text{costante} = v_{0x} = v_0 \cos\phi_0$$

Invece, per il moto lungo y, abbiamo

$$v_y(t) = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin\phi_0 - gt$$

Passando quindi alla leggi orarie per la posizione, avremo:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\phi_0)t \\ y(t) = (v_0 \sin\phi_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Possiamo ricavare la traiettoria, avremo

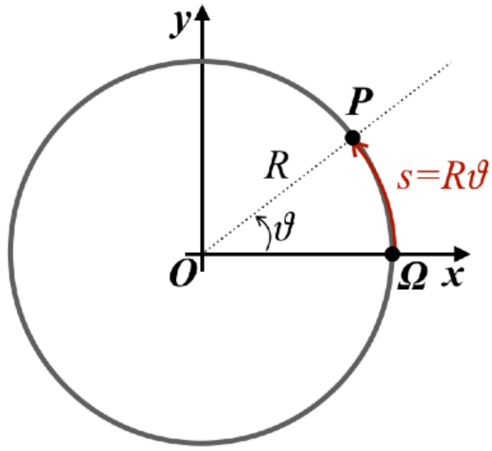
$$y(x) = (\tan\phi_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\phi_0}x^2$$

che è l'equazione di una parabola che passa per l'origine (il punto di lancio). Trovando la x corrispondente all'altra soluzione di y=0, ricaviamo la gittata:

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\phi_0\cos\phi_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\phi_0$$

4.11 Moto Circolare

Scelto un sistema di riferimento con origine nel centro della traiettoria circolare e piano xy nel piano della circonferenza, si avrà:



$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Il vettore posizione sarà quindi determinato unicamente dal raggio della circonferenza, R, e dall'angolo compreso tra l'asse x e la semiretta uscente dal centro O della circonferenza e passante per il punto P:

$$\vec{r} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$$

Si noti che se definiamo sulla circonferenza una ascissa curvilinea, con origine in $\Omega = (R,0,0)$ e rotazione antioraria, ovvero la distanza percorsa *lungo* la circonferenza, partendo da Ω e muovendosi in senso antiorario, per individuare P, si ha $s = R\theta$ $(0 \le s \le 2\pi R)$, ovvero $\theta = s/R$

Il moto circolare uniforme

In questo caso la velocità scalare v_s, cioè la quantità di spazio percorso *lungo la circonferenza* per unità di tempo, è costante. Per come l'abbiamo appena precisata, la velocità scalare può scriversi

$$v_S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\theta) = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

dove abbiamo chiamato $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v_s}{R}$ la *velocità angolare*. La legge oraria per l'angolo θ sarà

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

Possiamo ora utilizzare la notazione cartesiana per individuare il vettore posizione e procedere a calcolare le derivate rispetto al tempo per ottenere velocità ed accelerazioni vettoriali (poniamo per semplicità $t_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, sicché $\theta(t) = \omega t$:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\hat{\imath} + R\sin(\omega t)\hat{\jmath} \\ \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -\,\omega R\sin(\omega t)\hat{\imath} + \omega R\cos(\omega t)\hat{\jmath} \\ \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\,\omega^2 R\cos(\omega t)\hat{\imath} - \omega^2 R\sin(\omega t)\hat{\jmath} = -\,\omega^2\vec{r}(t) \end{cases}$$

Quindi, *nel moto circolare uniforme l'accelerazione è diversa da zero, è centripeta, ed è costante in modulo.* La direzione di $\vec{a}$ è la stessa di $\vec{r}$, il verso è opposto, quindi si tratta di un vettore che da P va verso O (il centro della circonferenza, di qui la denominazione "centripeta"). Il modulo dell'accelerazione centripeta, di solito denominato a_c può essere calcolato:

$$a_c = |\,\vec{a}(t)\,| = \sqrt{\omega^4R^2\cos^2(\omega t) + \omega^4R^2\sin^2(\omega t)} = \omega^2 R$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Vediamo quindi che è costante in modulo e proporzionale al quadrato della velocità angolare. È spesso comodo esprimere l'accelerazione centripeta in funzione della velocità scalare invece che della velocità angolare; dato che $\omega = v_s/R$, otteniamo

$$a_c = \frac{v_s^2}{R}$$

Si noti che nel caso di un moto circolare non uniforme la velocità scalare (e quella angolare ovviamente) non sono costanti; in questo caso l'accelerazione non è soltanto centripeta ma anche *tangenziale*. L'accelerazione totale (vettoriale) quindi si può ottenere come somma vettoriale di due accelerazioni tra loro perpendicolari: quella centripeta, sempre diretta verso il centro, e che ha, istante per istante, modulo v_s^2/R; e quella tangenziale, il cui ruolo è cambiare nel tempo il modulo della velocità scalare. Definita l'*accelerazione angolare*

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

il modulo dell'accelerazione tangenziale risulta essere

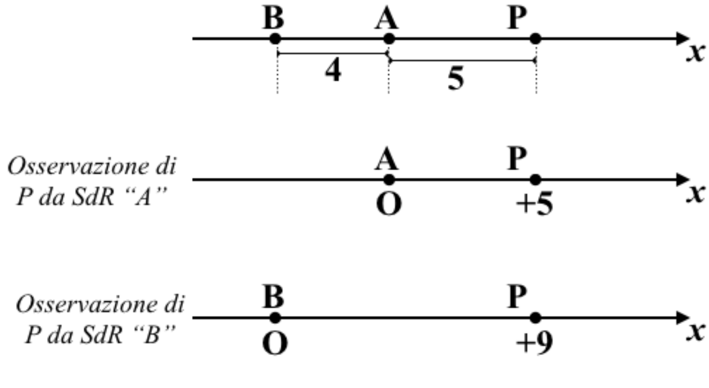
$$a_t = \alpha R$$

e l'accelerazione totale avrà modulo

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = R\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

4.12 Velocità ed accelerazioni relative: trasformazioni di Galileo

Riflettiamo su cosa succeda se osservo un punto che occupa una data posizione da sistemi di riferimento con origine in punti diversi (caso unidimensionale).



Ovviamente la posizione misurata nei due sistemi di riferimento dipende dalla posizione dell'origine. In particolare, dato che vale la relazione tra le distanze $\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AB}$,

$$x_{PB} = x_{PA} + x_{AB}$$

Ora pensiamo alla situazione in cui una persona su un tapis roulant sta camminando. Una persona ferma sul tapis roulant la vede passare a velocità $v_{cammina}$. Una persona ferma fuori dal tapis roulant la vede passare a velocità $v_{cammina} + v_{tapis}$. Quindi sembra esistere una legge di composizione delle velocità.

Formalizziamo un po' meglio questa osservazione. Consideriamo due sistemi di riferimento, S_A e S_B, con gli osservatori A e B nelle rispettive origini. S_B si muove rispetto a S_A con velocità $\vec{v}_{BA}$ *costante*. In altre parole, l'osservatore in A vede B muoversi con velocità $\vec{v}_{BA}$, e l'osservatore in B vede A muoversi con velocità $-\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{AB}$. Assumiamo anche, per semplicità che nell'istante $t = 0$ le due origini coincidano. Nell'istante *t*, la distanza tra le due origini sarà $\vec{v}_{BA}t$. Sempre al tempo *t*, un punto *P* si trova in $\vec{r}_{PA}$ per l'osservatore in *A*, e si trova in $\vec{r}_{PB}$ per un osservatore in *B*. È evidente che

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{v}_{BA}t$$

Derivando rispetto al tempo la precedente relazione

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{PA}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{PB}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}_{BA} \implies \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

L'insieme delle relazioni

$$\begin{cases} \vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{v}_{BA}t \\ \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \end{cases}$$ costituisce le ***Trasformazioni di Galileo***

Se derivo nuovamente rispetto al tempo, dato che in questa situazione ho assunto che la velocità relativa dei due sistemi di riferimento fosse costante, ottengo che le accelerazioni misurate nei due sistemi saranno uguali:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{PA}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{PB}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{BA}}{\mathrm{d}t} \; ; \quad \text{con } \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{BA}}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ per ipotesi} \implies \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

Dunque in sistemi di riferimento in moto relativo a velocità costante si misurano accelerazioni uguali.