CONTINUITÀ

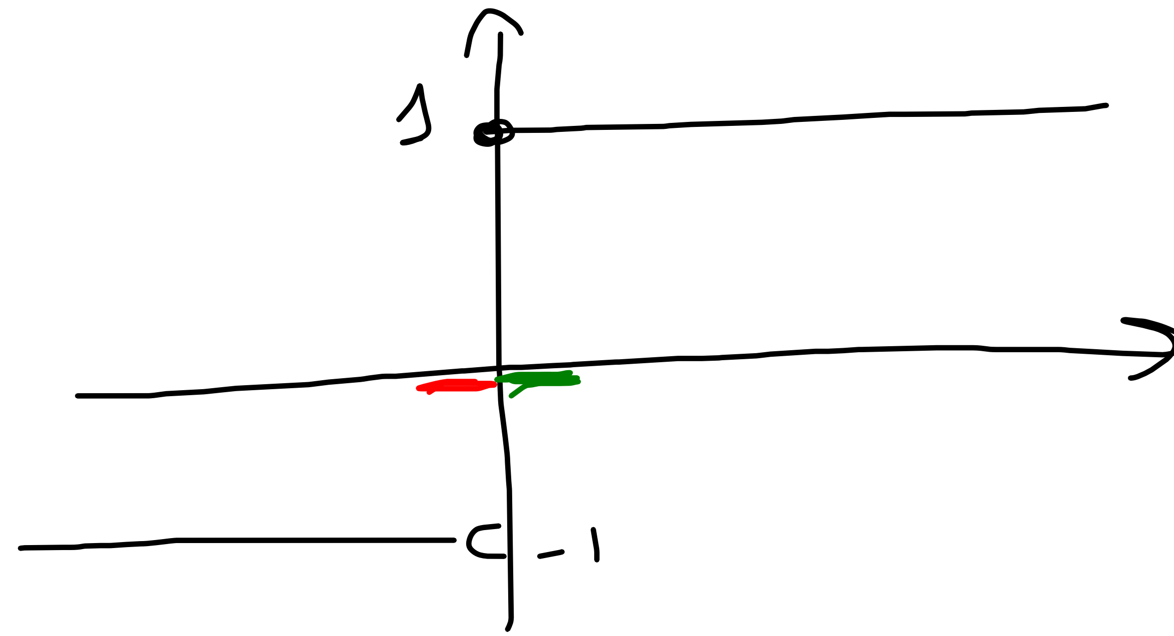
Def Sia I intervallo o int. forato di $\mathbb{R}$, sia $f: I \to \mathbb{R}$, sia $c \in I$.

- Diciamo che f è CONTINUA in c se

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)}.$$

- Diciamo che f è continua in I se è continua in ogni punto di I.

<u>ES</u>. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



f è continua in tutti i punti eccetto lo 0.

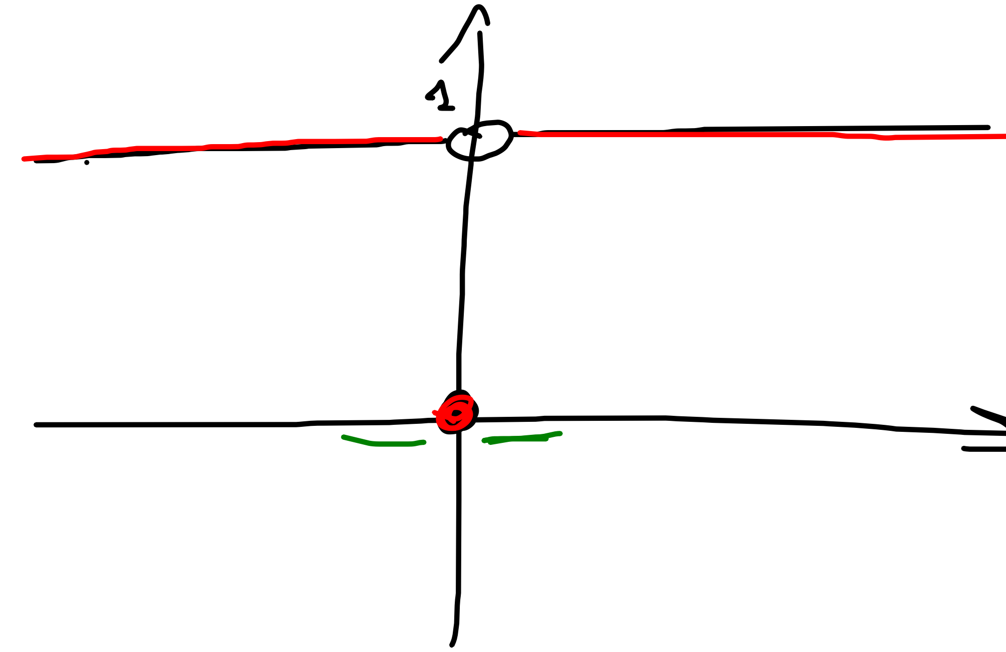
Infatti:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

• $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

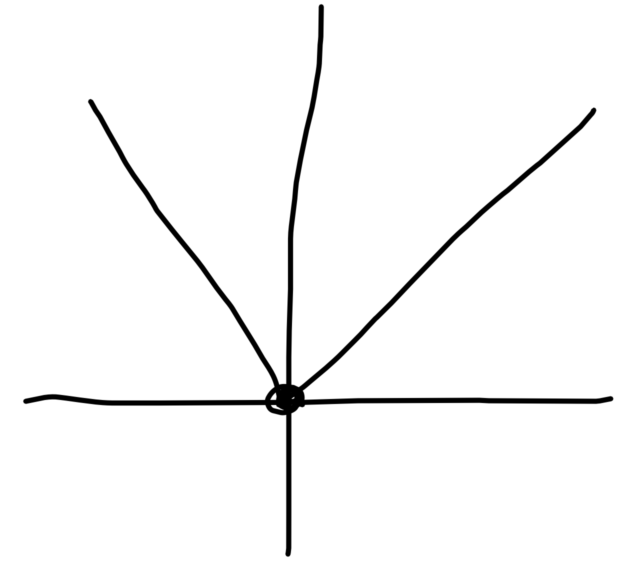


f è continua in tutti i punti eccetto l'origine,

infatti:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \\ \text{ma } f(0) = 0 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow f \text{ non è continua in } 0.$$

- $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

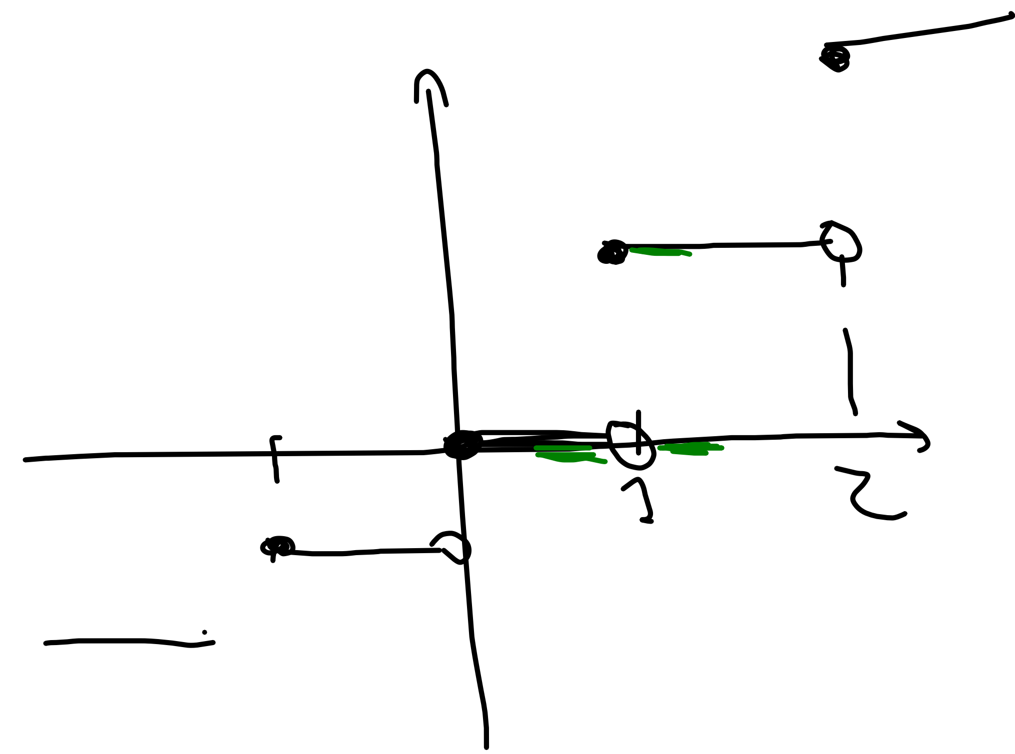


è continua su tutto $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D: \mathbb{R}^*$

è continua su $\mathbb{R}^*$

- $f(x) = [x]$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$



Le funzioni: polinomi, razionali, radici, esponenziale, logaritmo, funz. trigonometriche

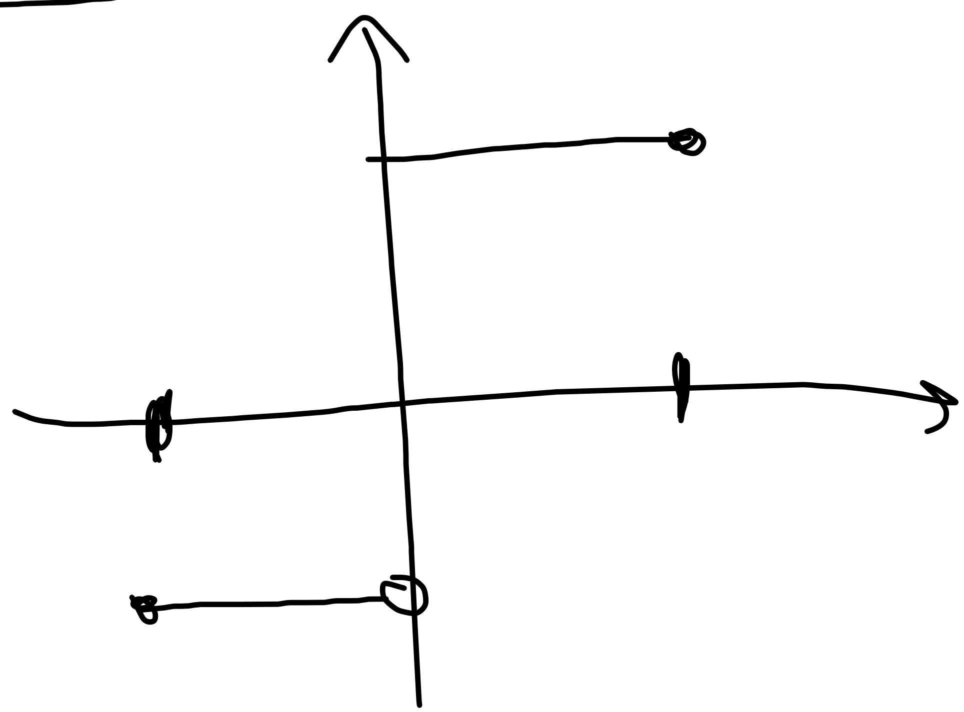
sono continue sui loro domini.

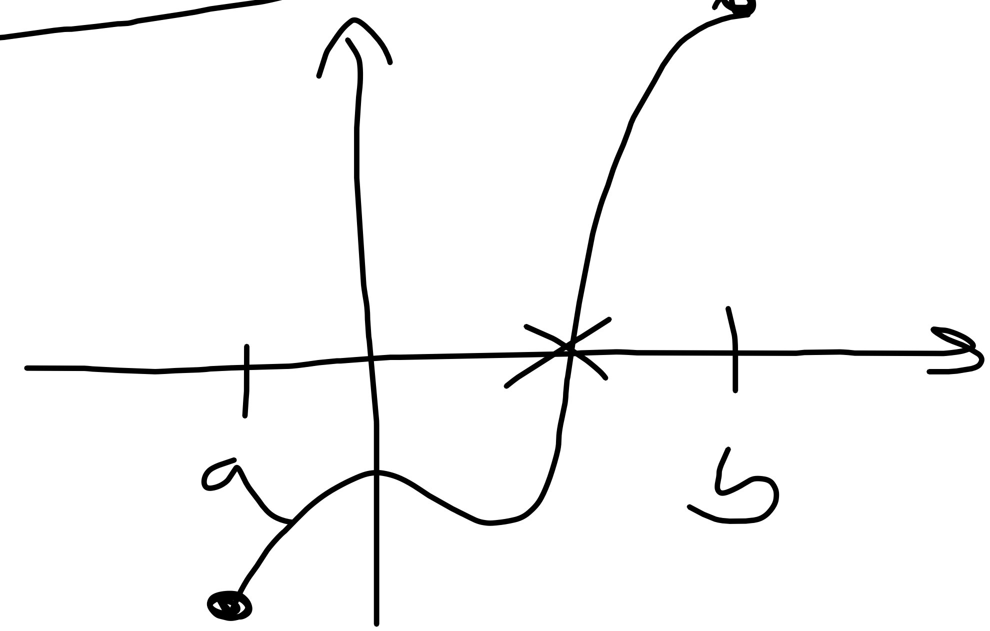
TEOR degli ZERI

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

e t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora: $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

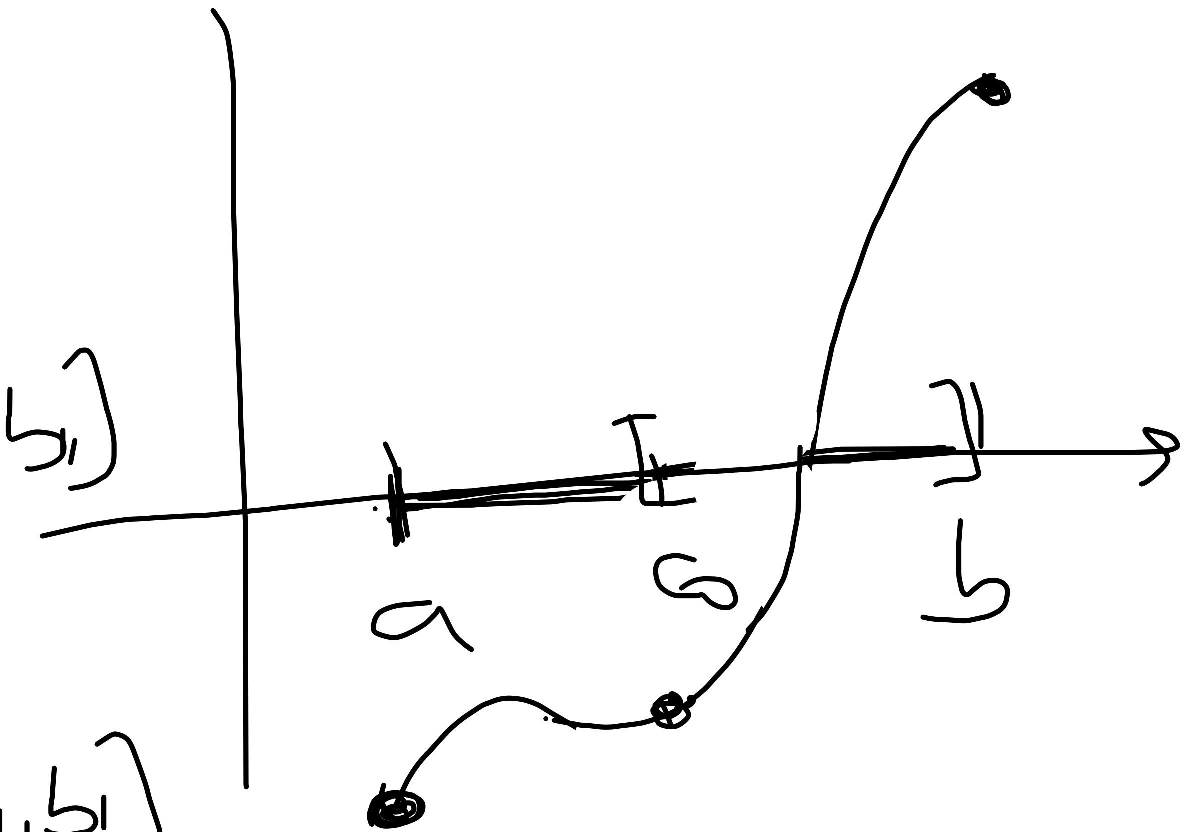




DIM Usiamo il METODO di BISEZIONE

Sia $c_0 = \frac{a+b}{2}$ (punto medio di $[a,b]$). Supp. $f(a)<0<f(b)$

Ho 3 possibilità:



- $f(c_0)=0 \to$ ho finito
- $f(c_0)>0 \to$ considero $[a, c_0]=[a_1, b_1]$
- $f(c_0)<0 \to$ considero $[c_0, b]=[a_1, b_1]$

In entrambi i casi f soddisfa le ipotesi del Teor. nell'intervallo che ho scelto

Ora considero $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ (punto medio di $[a_1, b_1]$)

come prima, ho 3 possibilità:

- $f(c_1) = 0 \to$ ho finito
- $f(c_1) > 0 \to$ considero $[a_1, c_1] =: [a_2, b_2]$
- $f(c_1) < 0 \to$ considero $[c_1, b_1] =: [a_2, b_2]$

f soddisfa le ipotesi del Teor in $[a_2, b_2]$

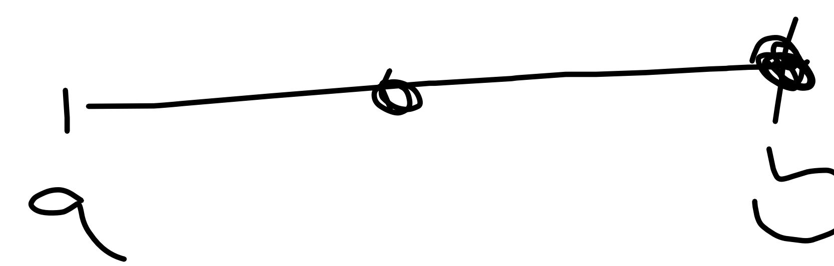
Si possono verificare due situazioni:

1) dopo un numero finito di passi trovo c t.c. $f(c)=0$.

2) il procedimento continua indefinitivamente. In tal caso: ho costruito due successioni a_n e b_n:

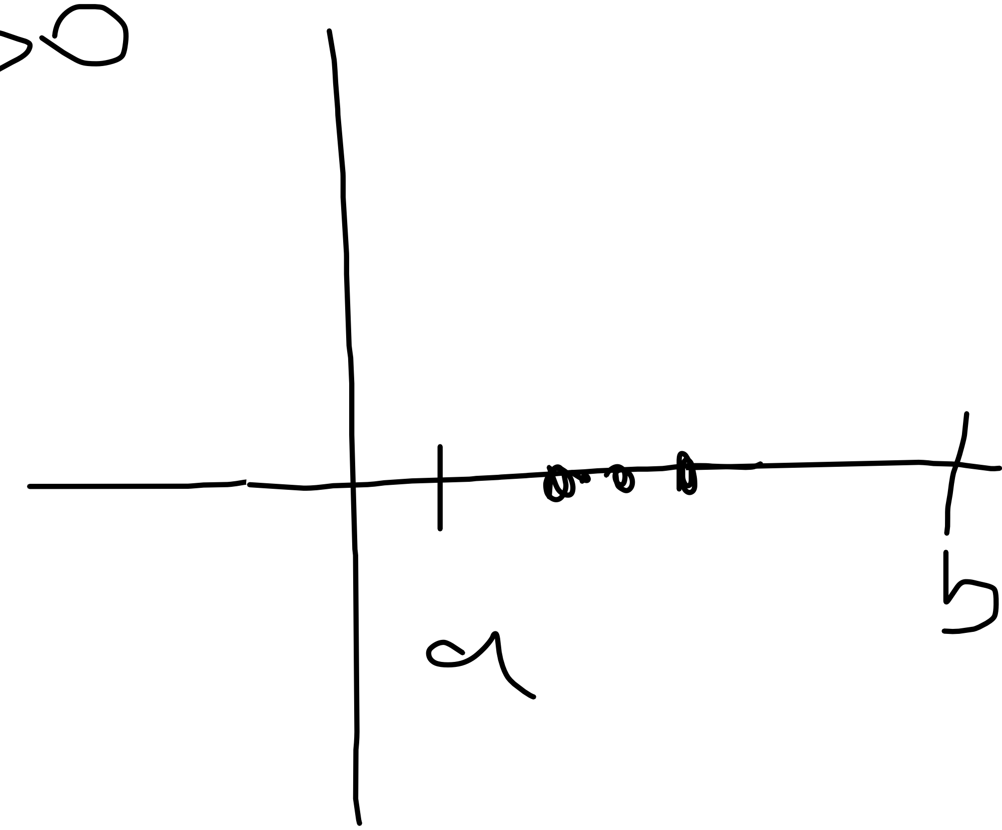
a) $a \le a_n \le b_n \le b$

b) $\begin{cases} a_n \nearrow & (a_{n+1} \geq a_n \ \forall n) \\ b_n \searrow & (b_{n+1} \leq b_n \ \forall n) \end{cases}$



c) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

d) $\to f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0$



Da b) e a) deduco

che $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c \in [a,b]$

$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c' \in [a,b]$

Da c) segue che $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow c = c'$

Ma, dato che f è continua: e per d)

- $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$
- $\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$

Quindi $f(c) = 0$. #

TEOR (dei VALORI INTERMEDI)

Sia I intervallo,

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora: $f(I)$ è un intervallo (eventualm. degenere)

DIM Se f è costante $= k \Rightarrow f(I) = \{k\}$ int. degenere.

- Supponiamo che f non sia costante,

$\exists\, y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \neq y_2$.

Devo mostrare che $\forall y_1, y_2 \in f(I)$, $\forall y : y_1 < y < y_2$

$\Rightarrow y \in f(I)$.

Dato che $y_1, y_2 \in f(I)$, $\exists\, x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$

t.c. $f(x_1) = y_1$ Suppoiamo $x_1 < x_2$

$f(x_2) = y_2$.

Considero la funzione g:

$g : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y$

g soddisfa le seguenti proprietà:

- g è continua su $[x_1, x_2]$ (poiché lo è f)

- $g(x_1) = f(x_1) - y = y_1 - y < 0$ (poiché $y > y_1$)

  $g(x_2) = f(x_2) - y = y_2 - y > 0$ ($y < y_2$)

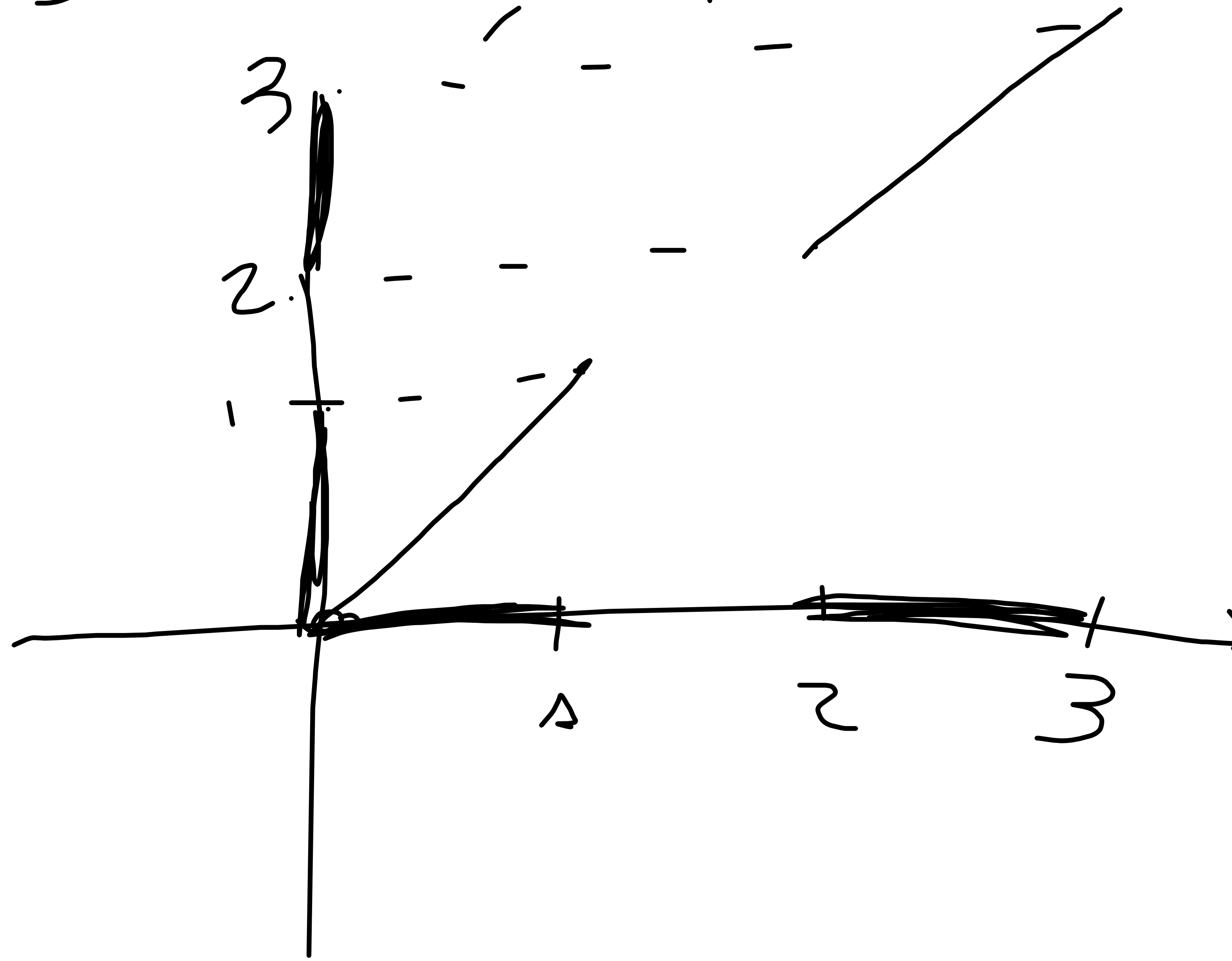
Quindi g soddisfa le ipotesi del Teorema degli zeri (in $[x_1, x_2]$)

$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c. $g(c) = 0 \Longleftrightarrow f(c) - y = 0$

$\Longleftrightarrow f(c) = y \Rightarrow y \in f(I)$ #

ES $f : [0,1] \cup [2,3]$ $f(x) = x$

$$f([0,1] \cup [2,3]) = [0,1] \cup [2,3]$$



ES $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ DOMINIO $= \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ non è continua in 0.

$f(I) = \{-1, 1\}$

$\Rightarrow$ NON è un intervallo.

TEOR Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue,

$\Rightarrow f + g$ è continua $\quad \frac{f}{g}$ è cont. $(g \neq 0)$

$f \cdot g$ " "