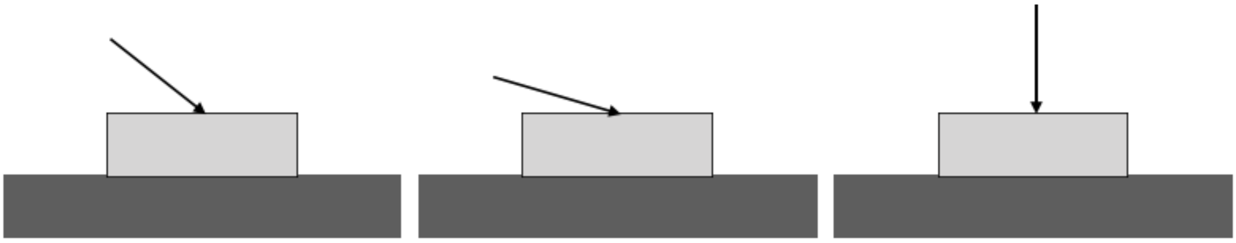
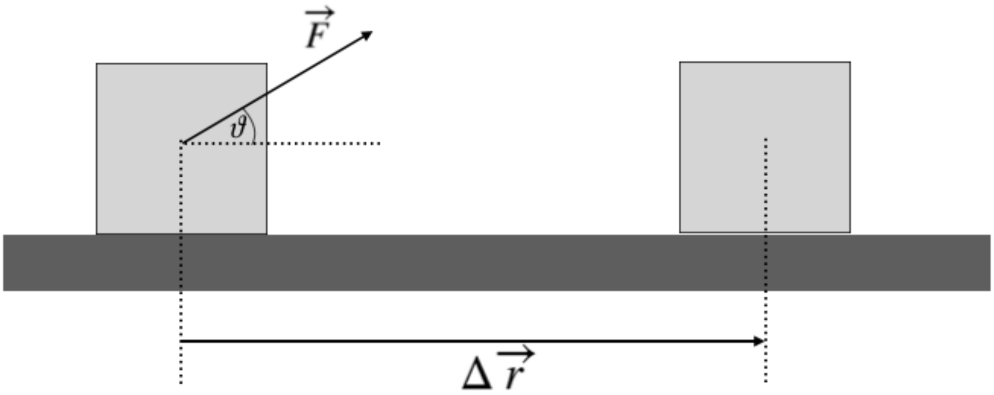
6. Il lavoro e l’energia meccanica

6.1 Il lavoro di una forza costante

Chiaramente, c’é una differenza nell’effetto prodotto da una forza dello stesso modulo applicata ad un oggetto nelle tre seguenti situazioni:



Risulta evidente che la differenza sta nell’angolo che la forza forma con lo spostamento (eventuale) del corpo. Definiamo allora la quantità ***lavoro per una forza costante***, nel modo seguente:



$$\mathscr{L} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

Alcuni commenti:
- lo spostamento è quello del *punto di applicazione della forza*;
- se non c’é spostamento il lavoro è nullo;
- se la forza è perpendicolare allo spostamento, il lavoro è nullo;
- il lavoro ha un segno: se la proiezione della forza lungo lo spostamento ha verso opposto allo spostamento, il lavoro è negativo (ad esempio, il lavoro fatto dalla forza peso quando sollevo un oggetto);
- l’unità di misura del lavoro è il *Joule:* J $[\mathscr{L}] = \mathrm{J} = \mathrm{Nm} = \mathrm{kgm^2s^{-2}}$;
- il lavoro è un trasferimento di energia: **verso il sistema** se $L > 0$, **dal sistema** se $L < 0$;
- il risultato del lavoro è un cambiamento della quantità di energia immagazzinata dal sistema.

6.2 Il lavoro di una forza variabile

La definizione di lavoro di una forza costante si estende naturalmente al caso di una forza variabile, considerando la somma dei lavori infinitesimi corrispondenti a spostamenti infinitesimi lungo la traiettoria, quindi

$$\mathscr{L} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

6.3 Teorema dell'energia cinetica

Consideriamo per semplicità un caso unidimensionale. Partendo dalla definizione di lavoro, costruiamo con alcuni passaggi una espressione basata sulle velocità iniziali e finali del corpo:

$$\mathscr{L} = \int_{x_i}^{x_f} F \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_f} ma \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}v = \int_{x_i}^{x_f} mv \mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Definiamo una nuova quantità: l'*energia cinetica*

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Quindi la relazione appena ricavata può essere scritta come $L = K_f - K_i$, o in breve

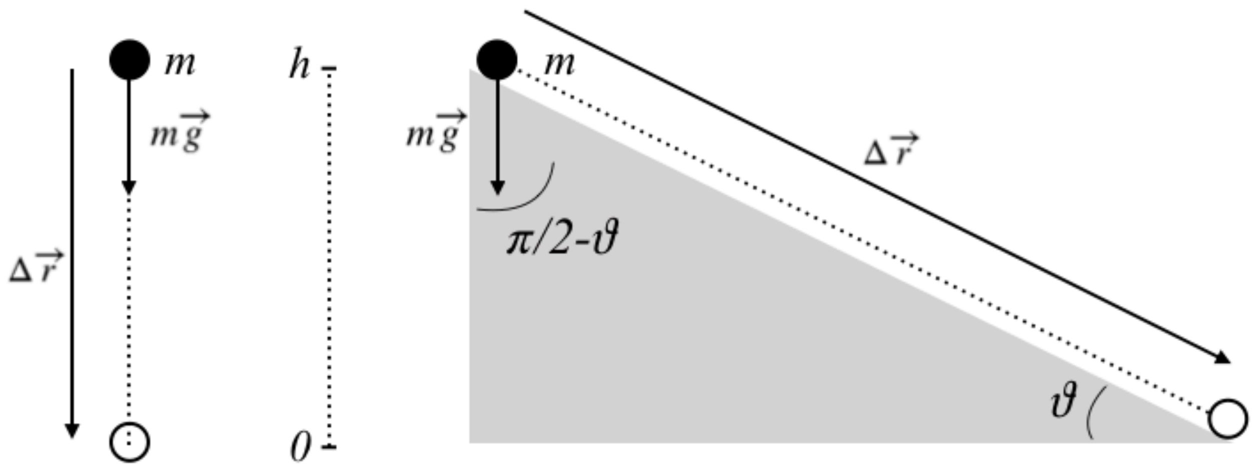
$$\mathscr{L} = \Delta K$$

Espresso a parole: *quando si compie lavoro su un sistema ottenendo esclusivamente una variazione della sua velocità, il lavoro complessivo è uguale alla variazione della sua energia cinetica.* Alcune note:

- *K* aumenta se *L*>0, *K* diminuisce se *L*<0;
- il teorema consente di considerare solo le velocità iniziali e finali; molto utile per capire come si muoverà un corpo dopo che è stato fatto un certo lavoro, potendo ignorare cioè che succede *durante* il moto intermedio.

6.4 Forze conservative e non conservative

Pensiamo alla forza peso. Consideriamo un corpo che possa passare da una quota *h* ad una quota 0 in due modi: verticalmente (a sinistra in figura) o scivolando (senza attrito) lungo un



piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale.

Calcoliamo il lavoro nel caso di moto verticale: avremo spostamento di modulo $\Delta r = h$, una forza peso mg, spostamento e forza sono paralleli e concordi, quindi

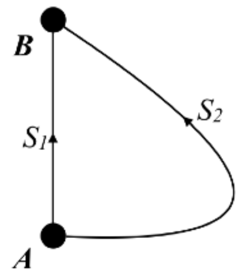
$$\mathscr{L}_{vert} = mgh\cos(0) = mgh$$

Nel caso del moto obliquo, avremo spostamento di modulo $\Delta r = h/\sin\theta$, mentre l'angolo formato dalla forza peso e il vettore spostamento sarà $\pi/2 - \theta$. Avremo quindi lavoro

$$\mathscr{L}_{obliq} = mg\frac{h}{\sin\theta}\cos(\pi/2 - \theta) = mgh\frac{sin\theta}{\sin\theta} = mgh$$

Quindi *il lavoro fatto dalla forza peso è lo stesso per i due percorsi.* Contano solo l'altezza iniziale e l'altezza finale.

Pensiamo ora ad una forza di tipo completamente diverso, la forza di attrito dinamico. Ho un punto materiale poggiato sul piano che si sposta dalla posizione *A* alla posizione *B*.



La forza di attrito è sempre opposta alla direzione del moto, ed ha modulo costante. Quindi il lavoro da essa fatto sulle due traiettorie in figura, S_1 ed S_2, sarà diverso, e sarà

$$|\mathscr{L}_{S1}| < |\mathscr{L}_{S2}|\ , \quad \mathscr{L}_{S1} < 0\ ,\ \mathscr{L}_{S2} < 0$$

Forze del primo tipo (il lavoro non dipende dal percorso ma solo dalle posizioni iniziale e finale) sono dette ***forze conservative***. Forze del secondo tipo (il lavoro dipende anche dal percorso) sono dette ***forze non conservative***.

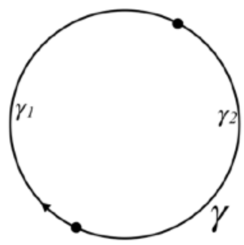
Vediamo dunque di formalizzare due definizioni equivalenti per le forze conservative:

Il lavoro compiuto da una forza conservativa agente su un punto materiale che si muove tra due punti qualsiasi non dipende dal percorso.

o equivalentemente

Il lavoro compiuto da una forza conservativa agente su un punto materiale che descrive un percorso chiuso è nullo.

Le due definizioni sono equivalenti, e lo dimostriamo nel seguito. Prendiamo due punti sul percorso chiuso γ, tali da dividere tale percorso in due tratti, γ_1 e γ_2.



Avremo:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{B\,\gamma_2}^{A} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{A\,\gamma_2}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

quindi

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \iff \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A\,\gamma_2}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Abbiamo dunque dimostrato che le due definizioni di forza conservativa sono equivalenti.

6.4.1 Approfondimento: la forza di attrito dinamico non è conservativa

Scriviamo la forza di attrito dinamico come

$$\vec{F}_D = -\mu_D N \hat{u}_v$$

dove μ_D è il coefficiente di attrito dinamico, N è il modulo della forza normale, e $\hat{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ il versore della velocità. Tale espressione consente di specificare correttamente direzione e verso di $\vec{F}_D$, oltre che il suo modulo. Se un corpo si muove su un piano orizzontale ed uniforme, avremo μ_D ed N costanti, calcoliamo il lavoro compiuto nello spostamento da un punto A ad un punto B lungo una traiettoria γ:

$$\mathscr{L}_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}_D \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A\,\gamma}^{B} -\mu_D N \hat{u}_v \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

possiamo scrivere

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t = v\hat{u}_v\mathrm{d}t$$

quindi

$$\hat{u}_v \cdot \mathrm{d}\vec{r} = v\hat{u}_v \cdot \hat{u}_v\mathrm{d}t = v\mathrm{d}t$$

e, nell'ipotesi che coefficiente di attrito e forza normale siano costanti,

$$\mathscr{L}_{AB} = -\mu_D N \int_{A\,\gamma}^{B} v\mathrm{d}t = -\mu_D N \; l_{AB}^{(\gamma)}$$

dove con $l_{AB}^{(\gamma)}$ abbiamo indicato la lunghezza del percorso γ tra A e B. È quindi dimostrato che il lavoro svolto dalla forza di attrito dinamico dipende dal percorso, in particolare dalla sua lunghezza. Notiamo che

$$\int_{A\,\gamma}^{B} v\mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall \quad \gamma$$

(ricordando che $v = |\vec{v}| \geq 0$), anche quando γ è un percorso chiuso.

6.5 Energia potenziale

Per forze conservative, è conveniente definire l'*energia potenziale*:

Il lavoro L compiuto da una forza conservativa su un elemento di un sistema quando questo si sposta da un punto ad un altro è uguale alla differenza tra l'energia potenziale del sistema iniziale e quella finale.

$$\mathscr{L} = U_i - U_f = -\Delta U$$

L'energia potenziale racchiude le informazioni sulla forza corrispondente. Vediamolo in un caso unidimensionale: l'espressione

$$\mathscr{L} = \int_{x_i}^{x_f} F \mathrm{d}x = -\Delta U$$

può essere riscritto in forma differenziale

$$\mathrm{d}U = -F\mathrm{d}x$$

quindi

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

Nel caso tridimensionale, si introduce il *gradiente,* indicato dal simbolo $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

6.6 Energia Meccanica

Consideriamo un sistema sul quale agiscano solo forze conservative. Combinando la definizione di energia potenziale con il teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$\mathscr{L} = -\Delta U = U_i - U_f \ ; \qquad L = \Delta K = K_f - K_i$$

quindi

$$U_i - U_f = K_f - K_i \implies U_i + K_i = U_f + K_f$$

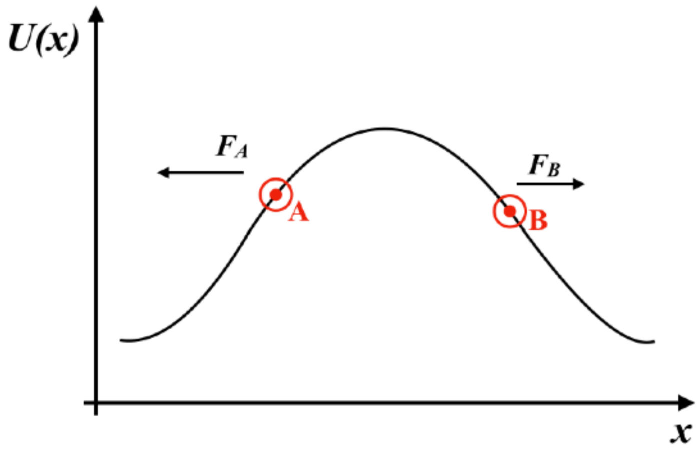
Definiamo *energia meccanica* la somma di energia potenziale ed energia cinetica:

$$E = U + K \ : \qquad E_i = E_f \implies \Delta E = 0$$

Quindi *in un sistema in cui agiscono solo forze conervative l'energia meccanica si conserva.*

6.7 Diagrammi energetici: punti di equilibrio e punti di inversione del moto

Si consideri, per un semplice caso unidimensionale, una energia potenziale $U(x)$ della forma seguente:

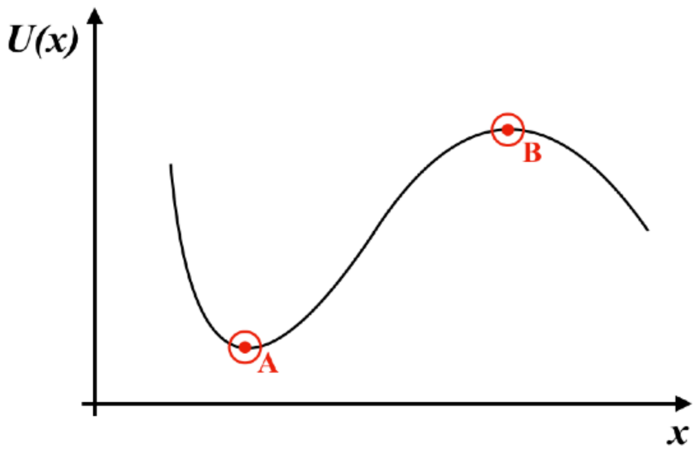


Nel punto A, abbiamo $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} > 0$; ne segue che $F = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} < 0$, cioè diretta verso sinistra.

Nel punto B, al contrario, avremo $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} < 0$, quindi $F = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} > 0$, cioè diretta verso destra.

Quindi, la pendenza del grafico dell'energia potenziale ci dà l'informazione sul segno della forza corrispondente.

Si osservi ora il seguente grafico di $U(x)$, prestando particolare attenzione ai punti di massimo e minimo.



Nei punti A e B si ha $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0$, quindi in questi punti abbiamo $F = 0$. Si tratta di *punti di equilibrio.* Se un corpo si trova in tali punti con velocità nulla, resta fermo in quella posizione, in quanto non ci sono forze agenti su di esso. In cosa consiste la differenza tra le due situazioni? Consideriamo un piccolo spostamento ϵ rispetto alla posizione di equilibrio. Nel caso del punto A, abbiamo:

$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(A+\epsilon) > 0 \implies F < 0$: il punto spostato a destra di A accelera verso sinistra, cioè verso A;

$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(A-\epsilon) < 0 \implies F > 0$: il punto spostato a sinistra di A accelera verso destra, cioè verso A;

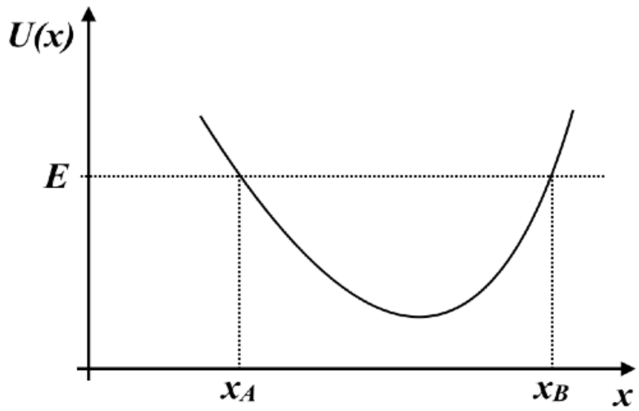
Mentre nel caso del punto B:

$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(B+\epsilon) < 0 \implies F > 0$: il punto spostato a destra di B accelera verso destra, cioè si allontana da B;

$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(B-\epsilon) > 0 \implies F < 0$: il punto spostato a sinistra di B accelera verso sinistra, cioè si allontana da B.

Quindi, in caso di piccoli spostamenti in qualunque direzione da **A**, il punto tende a ritornare in **A**: ***A è un punto di equilibrio stabile***.
In caso di piccoli spostamenti in qualunque direzione da **B**, il punto tende ad allontanarsi ancora di più da **B**: ***B è un punto di equilibrio instabile.***

Consideriamo ora il significato che può avere visualizzare sul grafico dell'energia potenziale il valore dell'energia meccanica.



Nei punti x_A e x_B si ha $U(x_A) = U(x_B) = E$. Dal momento che l'energia meccanica $E = K + U$, si avrà necessariamente $K(x_A) = K(x_B) = 0$, e quindi $v_A = v_B = 0$. Se il corpo che ha l'energia meccanica E mostrata in figura si trova ad un dato istante in un qualsiasi punto compreso tra x_A e x_B, tale corpo non potrà mai uscire dalla regione $x_A \leq x \leq x_B$, e i punti x_A e x_B sono detti *punti di inversione del moto*, in quanto il corpo che si muova ad esempio verso x_B, quindi con velocità positiva, diminuisce la sua velocità fino a zero, e poi (vedere la forza e quindi l'accelerazione!) la velocità diventa negativa e il corpo torna indietro (analogamente per il moto verso x_A).

6.8 Energia potenziale della forza peso

Si ricava immediatamente che, detta y la coordinata della direzione verticale, si ha

$$U(y) = mgy$$

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = F_{y,peso} = -mg$$

$$\vec{F}_{peso} = \vec{\nabla} U(x,y,z) = -mg\hat{j}$$

6.9 Energia potenziale elastica

$$F = -kx$$

$$\mathscr{L} = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

$$\Delta U = -\mathscr{L} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Scegliendo $U(0) = 0$, si ottiene

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

e

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = F = -kx$$

6.10 Energia meccanica di un oscillatore armonico

$$E = k + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Per la posizione di equilibrio

$$U(0) = 0, \quad K = E$$

Per la massima elongazione (moto di ampiezza A)

$$U(A) = E, \quad K = 0$$

6.10.1 Approfondimento: approssimazione del moto intorno a posizioni di equilibrio di potenziali arbitrari per mezzo di un oscillatore armonico

Ricordiamo lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione generica f intorno ad un punto dato x_0:

$$f(x-x_0) \simeq f(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\big(x-x_0\big) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\big(x-x_0\big)^2 + \dots$$

Consideriamo $f(x) = U(x)$ una funzione energia potenziale, dove x_0 sia un punto di minimo. Essendo x_0 un punto di minimo, si ha

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$$

e quindi

$$U(x-x_0) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\big(x-x_0\big)^2$$

Dato che il valore assoluto di U è arbitrario, poniamo per semplicità $U(x_0) = 0$

$$U(x-x_0) \simeq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\big(x-x_0\big)^2$$

riconosciamo l'espressione dell'energia potenziale di una forza elastica con costante elastica

$$k = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$

Quindi i fenomeni di piccola oscillazione attorno ad una posizione di equilibrio possono essere approssimati con un'oscillazione armonica, ovvero con l'effetto di una forza elastica, la cui costante elastica è pari alla derivata seconda dell'energia potenziale della forza data calcolata nel punto di equilibrio.

6.11 Conservazione dell'energia in presenza di forze non conservative

Partiamo dal teorema dell'energia cinetica, che è valido indipendentemente dalla presenza di forze conservative e/o non conservative:

$$\Delta K = K_f - K_i = \mathscr{L}_{tot}$$

Se sono presenti sia forze conservative che non conservative, possiamo separare i due contributi al lavoro:

$$\mathscr{L}_{tot} = \mathscr{L}_{con} + \mathscr{L}_{n.c.}$$

Per le forze conservative utilizzo la definizione di energia potenziale

$$\mathscr{L}_{con} = -\Delta U = -\left(U_f - U_i\right)$$

Quindi

$$K_f - K_i = \mathscr{L}_{tot} = \mathscr{L}_{cons} + \mathscr{L}_{n.c.} = -\left(U_f - U_i\right) + \mathscr{L}_{n.c.}$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i + \mathscr{L}_{n.c.}$$

$$E_f = E_i + \mathscr{L}_{n.c.}$$

La variazione di energia meccanica è pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative.

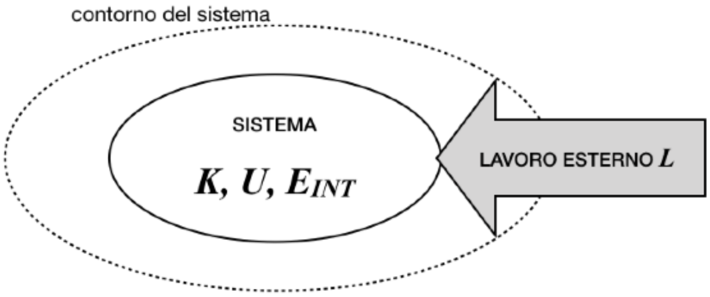
Esempio: bambino che scende uno scivolo in presenza di attrito.

6.12 Legge di conservazione dell'energia

Pensiamo al seguente, semplice esempio: una cassa che ha inizialmente una certa velocità striscia e rallenta fino a fermarsi. Dove è andata l'energia meccanica? Possiamo interpretare questo fenomeno come un processo di *conversione dell'energia:* da meccanica ad altra forma.

Dall'esperienza, vediamo che cassa e pavimento si sono leggermente scaldati. L'energia meccanica si è trasformata in calore, in questo caso. Cioè in energia cinetica e potenziale delle molecole. Se consideriamo come "sistema" *l'insieme di cassa e pavimento*, possiamo far entrare nel gioco una quantità che chiameremo *energia interna*.

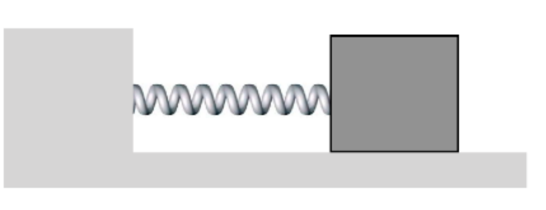
$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = \mathscr{L}_{ext}$$



Nel sistema cassa+pavimento, l'attrito è una forza interna al sistema. Avrei dunque

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0$$

Vediamo nel seguente esempio come posso utilizzare diversi punti di vista per comprendere lo stesso fenomeno, a seconda di cosa definisco come "sistema". Consideriamo un blocco connesso ad una molla, poggiato su un tavolo con attrito.



a) **Il sistema è il blocco.** L'ambiente fa lavoro sul blocco per mezzo della molla (lavoro $\mathscr{L}_k$) e per mezzo dell'attrito (lavoro $\mathscr{L}_A$). Quindi per l'energia scriverò

$$\Delta K + \Delta E_{int} = \mathscr{L}_k + \mathscr{L}_A$$

Non c'è alcuna ΔU: la molla non fa parte del sistema!

b) **Il sistema è il blocco e la molla.** C'è una energia potenziale (molla), e l'unica forza esterna è l'attrito. Quindi

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = \mathscr{L}_A$$

In questo caso il trasferimento di energia dalla molla al blocco è interno al sistema e non cambia l'energia. Solo il lavoro della forza di attrito lo fa.

c) **Il sistema è il blocco, la molla e il tavolo.** Non c'è nessuna forza esterna in questo caso.

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0$$

Tutti i trasferimenti di energia sono interni. Ad esempio, il blocco parte da fermo con la molla compressa, e finisce fermo con la molla in posizione di riposo: $\Delta K = 0$, $\Delta E_{int} = -\Delta U$.

In considerazione degli esempi fin qui affrontati, possiamo affermare che, considerando *sistemi isolati* (cioè non sono presenti forze *esterne* al sistema), passiamo al più generale *principio di conservazione dell'energia:*

L'energia totale di un sistema isolato si conserva

NOTA: nell'esempio dell'attrito, che converte energia meccanica (cinetica) in energia interna (calore) succede qualcosa di "irreversibile". C'è una "dissipazione" di energia meccanica che non potrà essere recuperata. Un ulteriore esempio: una palla che rimbalza e alla fine si ferma: la palla, il pavimento e l'aria alla fine avranno aumentato un po' la loro temperatura. Non osservo MAI palla, pavimento e aria diminuire un po' la loro temperatura e come conseguenza di ciò la palla mettersi a rimbalzare da sola!

6.13 Definizione di Potenza

In numerose situazioni è utile caratterizzare la "rapidità" con cui è compiuto un certo lavoro, o la quantità di energia scambiata per unità di tempo: si introduce il concetto di *potenza:* una grandezza scalare che quantifica la capacità di un sistema di compiere lavoro in un certo tempo.

Se può essere compiuto un lavoro $\Delta\mathscr{L}$ in un tempo Δt

$$P_m = \frac{\Delta\mathscr{L}}{\Delta t} \quad \text{potenza media}$$

$$P = \frac{\delta\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} \quad \text{potenza istantanea}$$

Se il lavoro è effettuato da una forza che agisce su un punto materiale, ho anche la seguente relazione:

$$P = \frac{\delta\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$