$B = (\underbrace{(0,1,1)}_{=b_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{=b_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{=b_3})$ E base canonica

$$M^B_E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che $M^B_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Dobbiamo verificare che

$f(b_1) = (3,1,0)_B = 3b_1 + b_2 = (1,4,3)$ ✓

$f(b_2) = (1,3,0)_B = 1 \cdot b_1 + 3b_2 = (3,4,1)$ ✓

$f(b_3) = (-4,-1,-2)_B = -4b_1 - b_2 - 2b_3 = (-1,-5,-6)$ ✓

Se avessimo dovuto calcolare $M^B_B(f)$?

$$f(b_1) = (1,4,3) = (\alpha, \beta, \gamma)_B$$

$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = (1,4,3)$$

$$(0,\alpha,\alpha) + (\beta,\beta,0) + (0,0,\gamma) = (1,4,3)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha+\beta = 4 \\ \alpha+\gamma = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 3 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto la 1ª colonna di $M^B_B(f)$. Le altre due si calcolano in modo analogo.

In alternativa, possiamo usare il teorema della composizione.

$$M^{\cancel{E}}_{B}(id)\cdot M^{B}_{\cancel{E}}(f) = M^{B}_{B}(f)$$

Calcoliamo $M^{E}_{B}(id)$

$$(1,0,0)=\alpha(0,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,0,1) \Longrightarrow \begin{array}{l}\beta=1\\ \alpha=-1\\ \gamma=1\end{array}$$

$$M^{E}_{B}(id)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(0,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,0,1)=(0,1,0)$$

$\beta=0$
$\alpha=1$
$\gamma=-1$

$$\alpha(0,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,0,1)=(0,0,1)$$

$\beta=0$
$\alpha=0$
$\gamma=1$

$$M^E_B(id)\cdot M^B_E(f)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & 4 & -5\\ 3 & 1 & -6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Richiamo del teorema della composizione

$$U_B \xrightarrow{F} V_C \xrightarrow{G} W_D$$

$$G \circ F : U \longrightarrow W$$

$$\boxed{M^B_D(G \circ F) = M^C_D(G) \cdot M^B_C(F)}$$

Torniamo all'esercizio

$$M^E_E(f) = M^B_E(f) \cdot M^E_B(id)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +1 & 2 & -1 \\ -5 & 9 & -5 \\ -8 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

(c) $f(v)=2v \qquad f(u)=3u$

Sarà più comodo utilizzare le coordinate rispetto alla base B.

$$f((x,y,z)_B)=(3x+y-4z,\ x+3y-z,\ -2z)_B=(2x,2y,2z)_B$$

$$\begin{cases} z=0 \\ 3x+y=2x \\ x+3y=2y \end{cases}$$

Abbiamo

$$v=(1,-1,0)_B \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 $\dim V = 3$ $B = (b_1, b_2, b_3)$ base.

$F: V \longrightarrow V$

$F(b_1) = (k+1)b_1 - b_3$

$F(b_2) = k b_2 + (k+1) b_3$

$F(b_3) = k b_3$

a) per quali k F è invertibile?

$$M_B^B(F) = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -1 & k+1 & k \end{pmatrix}$$

Dobbiamo capire quando

$\dim(\operatorname{Im} F) = \operatorname{rg}(M_B^B(F)) = 3$

Il rango è 3 $\quad \forall k \neq 0, -1$

(b) per i valori di k per cui F è invertibile scrivere le equazioni dell'inverso.

$$F^{-1}(b_1) = v_1 \iff b_1 = F(v_1)$$

$$v_1 = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$$

$$F(v_1) = \alpha F(b_1) + \beta F(b_2) + \gamma F(b_3)$$
$$= \alpha\big((k+1)b_1 - b_3\big) + \beta\big(k b_2 + (k+1) b_3\big) + \gamma k b_3 = b_1$$

$$\alpha\big((k+1)b_1 - b_3\big) + \beta\big(k b_2 + (k+1) b_3\big) + \gamma k b_3 = b_1$$

$$\alpha (k+1) b_1 = b_1 \implies \alpha = \frac{1}{k+1}$$

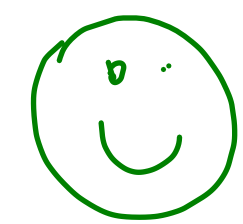
$$\beta k b_2 = 0 \implies \beta = 0 \qquad (\text{ricordo che } k \neq 0)$$

$$-\alpha + (k+1)\beta + \gamma k = 0 \implies \gamma = \frac{\alpha}{k} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$M_B^B(F^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} \\ 0 \\ \frac{1}{k(k+1)} \end{pmatrix}$$

Facciamo una prova:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -1 & k+1 & k \end{pmatrix}}_{M_B^B(F)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} \\ 0 \\ \frac{1}{k(k+1)} \end{pmatrix}}_{v_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}$$



Analogamente possiamo determinare $F^{-1}(b_2)$ e $F^{-1}(b_3)$

Oss.:

$$M^{\cancel{B}}_{B}(F) \cdot M^{B}_{\cancel{B}}(F^{-1}) = M^{B}_{B}(F \circ F^{-1})$$

$$= M^{B}_{B}(Id)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow M^{B}_{B}(F^{-1}) = \left(M^{B}_{B}(F)\right)^{-1}$$

Esercizio 4

$W \subseteq \mathbb{R}^4$ di equazione $x+y+z+t=0$

$f: W \to \mathbb{R}^2$

$g: \mathbb{R}^2 \to W$

$f(x,y,z,t) = (x+y, z)$

$g(x,y) = (x, 0, -y, y-x)$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & W \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

(a) Base di W

$$B = ((1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1))$$

(b) Osserviamo che g è un'applicazione lineare. Siccome abbiamo eq. lineari omogenee ci basta osservare che $g(x,y) \in W \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\overset{\shortparallel}{(x,0,-y,y-x)} \in W \quad \checkmark$$

Scriviamo le matrici associate

$$M^B_E(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(b_1) = f(1,-1,0,0) = (0,0)$$

$$f(b_2) = f(0,1,-1,0) = (1,-1)$$

$$f(b_3) = f(0,0,1,-1) = (0,1)$$

$$M^E_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(e_1) = (1,0,0,-1)$$

$$= b_1 + b_2 + b_3$$

$$g(e_2) = (0,0,-1,1)$$

$$= -b_3$$

(c) $f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$M_E^E(f \circ g) = M_E^B(f) \cdot M_B^E(g)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 $\Rightarrow f \circ g$ è invertibile

L'altro caso si affronta in modo analogo e NON viene invertibile.