Esercizi di Algebra e Geometria

Contents

Esercizi per il 13 Aprile 2022.
Equazioni cartesiane e parametriche, intersezione e somma di sottospazi

(1) Siano $U = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$.
(a) È possibile descrivere U con una sola equazione lineare? In caso affermativo determinarla.
(b) Determinare una base B di $U \cap V$;
(c) Completare B ad una base di U e ad una base di V;
(d) Determinare una base di $U + V$.

(2) Consideriamo il sottospazio di $\mathbb{R}^5$

$$U = \langle (1,2,1,4,5), (2,-1,3,-1,3), (0,5,-1,9,7) \rangle.$$

(a) Determinare delle equazioni parametriche di U;
(b) Determinare delle equazioni cartesiane di U.

(3) Consideriamo in $\mathbb{R}^5$ il sottospazio U_k dipendente da un parametro reale k dato da

$$U_k = \langle (1,2,k,1,0), (0,1,1,-1,1) \rangle$$

e W di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare $\dim U_k$ al variare del parametro k;
(b) Determinare una base di W;
(c) Stabilire per quali valori di k si ha $U_k \cap W = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

(4) Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $U = \langle (1,-1,2,1), (2,0,3,1) \rangle$ e $W_k = \langle (6,-2,k,4), (1,2,3,4)$.
(a) Determinare una base di U e una base di W_k al variare del parametro k.
(b) Determinare per quali valori di k si ha $U + W_k = \mathbb{R}^4$.
(c) Determinare per quali valori di k si ha $U \cap W_k = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

(5) In $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ e il sottospazio $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$ dove $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{u}_2 = (2,0,-4,-4)$, $\mathbf{w}_1 = (1,2,0,0), \mathbf{w}_2 = (2,3,3,3), \mathbf{w}_3 = (3,3,2,5)$.
(a) Determinare $\dim U$ e $\dim W$ (b) determinare le equazioni cartesiane di U tramite il metodo di eliminazione dei parametri, del rango e ad "occhio"; (c) determinare le equazioni cartesiane di W; (d) determinare una base di $U \cap W$; (e) determinare una base per $U + W$.

(6) Consideriamo i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,-1,0,-2,1), \mathbf{v}_3 = (2,0,1,1,1)$ in $\mathbb{R}^5$.
(a) determinare le equazioni cartesiane del sottospazio $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$.
(b) determinare una base di $\mathbb{R}^5$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(7) In $\mathbb{R}^5$ si consideri il sottospazio V generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 1, 0, 4)$.
(a) Determinare le equazioni cartesiane di V (b) determianre le equazioni cartesiane di un sottospazio W di dimensione 3 tale che $\dim(V \cap W) = 0$; (c) determinare le equazioni cartesiane di un sottospazio U di dimensione 3 tale che $\dim(V \cap U) = 1$.

Esercizi per il 27 Aprile 2022.
Somme dirette. Coordinate rispetto ad una base.

(1) Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i tre sottospazi $U = \langle(1,-1,0,1),(2,3,1,0)\rangle$, $V = \langle(3,2,1,2)\rangle$ e $W = \langle(0,0,0,1)\rangle$.
(a) Stabilire se le somme $U+V$, $U+W$ e $V+W$ sono dirette.
(b) Mostrare che la somma $U+V+W$ non è diretta nel senso che è possibile trovare $u_1, u_2 \in U$, con $u_1 \neq u_2$, $v_1, v_2 \in V$ e $w_1, w_2 \in W$ tali che

$$u_1 + v_1 + w_1 = u_2 + v_2 + w_2.$$

(2) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi

$$U_1 = \{(x,y,z) : (x, x+2y, x+y+3z) = (x,y,z)\}$$

$$U_2 = \{(x,y,z) : (x, x+2y, x+y+3z) = (2x,2y,2z)\}$$

e

$$U_3 = \{(x,y,z) : (x, x+2y, x+y+3z) = (3x,3y,3z)\}.$$

(a) Mostrare che U_1, U_2, U_3 sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
(b) Mostrare che $U_1 \oplus U_2$ e che $(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3$.

(3) In $\mathbb{R}^4$ consideriamo il sottospazio $U = \langle(1,2,1,3),(1,3,1,2)\rangle$ e il sottospazio W_k dipendente dal parameto reale k di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ x + y - 3t = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di k la somma $U + W_k$ è diretta;
(b) nei casi in cui la somma non è diretta determinare, se possibile, due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ linearmente indipendenti che si possano scrivere in due modi diversi come somma di un vettore di U e uno di W_k.
(c) determinare al variare di k una base (più semplice possibile) di $U + W_k$

(4) (a) In $\mathbb{R}^4$ mostrare che

$$B = ((1,-1,2,0),(2,0,1,1),(5,-1,-1,2))$$

e

$$C = ((1,-3,1,-1),(-1,5,-2,2),(1,1,4,1))$$

sono entrambe basi (ordinate) di un sottospazio vettoriale U.
(b) Mostrare che $u = (5,5,5,5) \in U$ e determinare le coordinate di u sia rispetto alla base B che alla base C.
(c) Determinare il vettore $(1,-1,0)_B$;
(d) Quali sono le coordinate rispetto alla base C del vettore $(11/5, -13/5, 4/5)_B$?

Soluzione. B e C sono basi dello spazio U di equazione $x + y - 2t = 0$ ed é quindi chiaro che $u \in U$.
Abbiamo $u = (-3,9,-2)_B = (9,6,2)_C$

Questo vettore é $(-1,-1,1,-1)$
Si ha semplicemente $(11/5,-13/5,4/5)_B = (1,0,0)_C$.

(5) Consideriamo il sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x-y+3z=0$. Si considerino le due basi di U date da
$$B = ((1,2,0),(-1,1,1)), \quad C = ((1,5,1),(0,3,1))$$
Determinare il cambio di coordinate dalla base B alla base C e viceversa, cioè determinare le coordinate rispetto a C di un generico elemento $(a,b)_B$ e viceversa.

(6) In R^3 consideriamo le base canonica E e la base $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Determinare la matrice del cambio di base M_B^E e la matrice del cambio di base M_E^B.

Esercizi per il 04 Maggio 2022.
Applicazioni lineari. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare

(1) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare di equazione
$$F(x, y, z) = (x - z, 2x - y + 3z).$$
Determinare la matrice $M^{E_3}_{E_2}(F)$ associata ad F rispetto alla base canonica E_3 di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica E_2 di $\mathbb{R}^2$.

(2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x + y + z = 0$. Consideriamo l'applicazione lineare $F : U \to U$ data da
$$F(x, y, z) = (x - y, 3y + 2z, -y - z).$$
(a) Mostrare che $B = ((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ è una base di U
(b) Determinare la matrice associata $M^B_B(F)$.
(c) Sia $\mathbf{u} = (2, 3)_B$. Determinare $F(\mathbf{u})$.

(3) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare determinata da $f(1, 1) = (1, 2)$ e $f(1, -1) = (3, 4)$. Determinare $f(1, 0)$ e $f(0, 1)$. Determinare inoltre le equazioni di f rispetto alle coordinate canoniche.

(4) Scrivere le equazioni di due diverse applicazioni lineari $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $f(1, 2, 1) = g(1, 2, 1) = (2, 1, 3)$ e $f(1, 2, 3) = g(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

(5) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 2, 1) = (2, 3)$, $f(0, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 0, -1) = (2, 2)$.

(6) Siano $S, T \in \mathbb{R}^3$ dati da $S = \{(x, y, z) : x + y = 0\}$ e $T = \langle C\rangle$ dove $C = \{(1, 1, 1), (2, 3, 1)\}$. Sia $B = ((1, -1, 0), (-2, 2, 1))$. Sia $f : S \to T$ data da $f((x, y)_B) = (x + 2y, y - 2x)_C$. Determinare $f(3, -3, 3)$.

(7) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y - z = 0$.
Stabilire quante sono le applicazioni lineari $F : U \to \mathbb{R}^2$ tali che $F(1, -1, 0) = (3, -2)$, $F(0, 1, 1) = (-1, 2)$, $F(1, 1, 2) = (1, 2))$. Se possibile scrivere le equazioni di una tale applicazione lineare rispetto a delle basi scelte.

(8) Sia h un parametro reale e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(1, 1, 1) = (3, h, h)$, $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $f(1, 1, 0) = (2, h + 1, h - 1)$.
(a) Giustificare il fatto che tale applicazione lineare esiste ed è unica.
(b) determinare, al variare di h, la matrice $M^E_E(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio;
(c) mostrare che per ogni h esiste un vettore $\mathbf{v}_h$ tale che $f(\mathbf{v}_h) = 2\mathbf{v}_h$.

(9) Sia $W_k \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio dipendente da un parametro reale k dato da
$$W_k = \langle(1, 2, k), (1, k, 1), (2, 4, 3)\rangle.$$

(a) Al variare del parametro reale k determinare una base $\mathcal{B}_k$ di W_k.
(b) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (1, 2, 2)$ appartiene a W_k;
(c) Determinare per quali valori del parametro k esiste un'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im}(F_k) = W_k$ e $\ker(F_k) = \langle v \rangle$. Per questi valori di k descrivere un tale endomorfismo F_k esplicitamente (cioè dandone le equazioni rispetto alla base canonica).

(10) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$

$$U = \langle (1, 3, 2, 0, 0), (0, 2, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 0, 0) \rangle$$

(a) Mostrare che $B = ((1, 3, 2, 0, 0), (0, 2, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 0, 0))$ è una base di U.
(b) Consideriamo l'applicazione lineare $F : U \to \mathbb{R}^3$ data da

$$F((x_1, x_2, x_3)_B) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3).$$

Determinare la matrice

$$M_E^B(F)$$

dove E indica la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(c) Determinare $\ker F$ e $\text{Im}\ F$.

(11) Siano $U \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione $x - 2y + 3z = 0$ e $W \subseteq \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0$. Denotiamo con E_3 ed E_4 le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$ rispettivamente.
(a) Determinare se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con $\ker F = U$ e $\text{Im}F = W$. In caso affermativo scrivere la matrice associata $M_{E_4}^{E_3}(F)$;
(b) Determinare se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con $\ker F = U$. In caso affermativo scrivere la matrice associata $M_{E_4}^{E_3}(F)$;
(c) Determinare se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con $\ker F = W$ e $\text{Im}F = U$. In caso affermativo scrivere la matrice associata $M_{E_4}^{E_4}(F)$;
(d) Determinare se esiste un'applicazione lineare iniettiva $F : U \to W$. In caso affermativo scrivere la matrice associata $M_C^B(F)$ dove B e C sono basi scelte di U e W rispettivamente.
(e) Determinare se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con $\text{Im}\ F = U$ e $\ker(F) = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$. In caso affermativo scrivere la matrice associata $M_{E_3}^{E_4}(F)$.

Esercizi per l'11 Maggio 2022.
Matrici associate, inverse, composizioni

(1) Si considerino la base $B = ((0,1,1),(1,1,0),(0,0,1))$ e la base canonica E di $\mathbb{R}^3$ e f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ determinato da
$$M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare la matrice $M_E^E(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.

(c) Determinare se esistono due vettori non nulli $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{u}) = 3\mathbf{u}$.

(2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e B una sua base costituita dai vettori $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$. Consideriamo l'applicazione lineare $F : V \to V$ definita da
$$F(\mathbf{b_1}) = (k+1)\mathbf{b_1} - \mathbf{b_3},\ F(\mathbf{b_2}) = k\mathbf{b_2} + (k+1)\mathbf{b_3},\ F(\mathbf{b_3}) = k\mathbf{b_3}.$$

(a) stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è invertibile;

(b) per i valori per cui F è invertibile determinare le equazioni di F^{-1};

(3) Sia B la base di $\mathbb{R}^3$ data da $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ ed E la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da
$$M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si dica se la funzione f è iniettiva e/o suriettiva.

b) Si determini, se possibile, un sottospazio di W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 la cui immagine tramite f abbia dimensione 1.

c) Si determinino, se possibile, due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ non appartenenti all'immagine di f.

d) Si determini la controimmagine mediante f del vettore $(1,1,0,1)$, cioè l'insieme
$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 :\ f(\mathbf{v}) = (1,1,0,1)\}.$$

(4) Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ dato da
$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x+y+z+t = 0\}$$
e le applicazioni lineari $f : W \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to W$ date da
$$f(x,y,z,t) = (x+y, z), \qquad \forall (x,y,z,t) \in W$$
$$g(x,y) = (x, 0, -y, y-x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Determinare una base B di W;
b) Determinare le matrici associate $M_E^B(f)$ e $M_B^E(g)$, dove B è la base determinata nel punto precedente e E è la base canonica di $\mathbb{R}^2$;
c) Stabilire se $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è invertibile ed in tal caso determinarne l'inversa.
d) Stabilire se $g \circ f : W \to W$ è invertibile ed in tal caso determinarne l'inversa.

(5) Consideriamo il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $x + y + z = 0$, $y + z + t = 0$.
(a) Determinare una base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ di U;
(b) Descrivere l'applicazione lineare iniettiva $F : U \to U$ tale che $F(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$ e $F(\mathbf{b}_2) = 3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$.
(c) Determinare $F(3, 5, -8, 3)$.
(d) Mostrare che F è invertibile
(e) Determinare $M_B^B(F^{-1})$.

Esercizi per il 18 Maggio 2022.
Determinante e inverse

(1) Determinare, se esiste, l'inversa A^{-1} della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Determinare per quali valori del parametro reale t la seguente matrice è invertibile. In tali casi determinarne l'inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & k+1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Calcolare il determinante delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k+1 & 2k+2 & -k-1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 25 & -34 & 41 \\ -k & -2k & -3k & -4k \end{pmatrix}$$

(4) Sappiamo che se A e B sono due matrici ottenute l'una dall'altra scambiando due righe allora $\det A = -\det B$. Provate a dimostrare questa affermazione nel caso di matrici 2×2 e 3×3 (sugg.: usare vari sviluppi di Laplace).

(5) Utilizzando l'algoritmo di Gauss mostrare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Extra (difficile)Quanto fa

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}?$$

(6) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostrare che A è invertibile e determinare $\det(A^{-1})$.

(b) Sia $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinare

$$\det(H^{-1}AH).$$

(7) Esibire una matrice B simile alla matrice A dell'esercizio precedente (ma diversa da A).

(8) Questo esercizio ha dei numeri grandi (addirittura a due cifre! :-) Per risolverlo non è comunque necessario fare molti conti se si ha un po' di attenzione)
Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $3x + 3y - z = 0, y - t = 0$. Consideriamo l'endomorfismo di W $F : W \to W$ dato da

$$F(x, y, z, t) = (-27x - 27y + 3z, 43x + 39y - z, 66x + 54y, 43x + 36y - z + 3t)$$

(a) Mostrare che questa funzione effettivamente definisce un endomorfismo di W.
(b) Mostrare che $B = ((1, -1, 0, -1), (1, 0, 3, 0))$ e $C = ((-1, 0, -3, 0), (1, -1, 0, -1)$ sono due basi di W.
(c) Mostrare che esiste un vettore $w \in W$, $w \neq 0_W$, tale che $F(w) = 6w$.
(d) Mostrare che $\det(M_B^B(F) - 6I) = 0$.
(e) Mostrare che $\det(M_C^C(F) - 6I) = 0$.

Esercizi per il 25 Maggio 2022.
Autovalori, autospazi, diagonalizzabilità

(1) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Mostrare che -1 è un autovalore di A. Determinare tutti gli autovettori corrispondenti.

(2) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
 (a) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
 (b) Determinare tutte le matrici D diagonali simili ad A.
 (c) Per ogni matrice D trovata nel punto precedente determinare una matrice H tale che $D = H^{-1}AH$.

(3) Siano $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,3,0)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,-1)$.
 (a) Mostrare che esiste un unico endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ come autovettori di autovalori rispettivamente $0, -1, 2$.
 (b) Determinare $M_E^E(F)$.
 (c) Determinare $\ker F$.

(4) Consideriamo l'endomorfismo F_A di $\mathbb{R}^4$ dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
 (a) Stabilire se F_A è diagonalizzabile
 (b) Determinare gli autospazi di F_A.

(5) Trovare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ tale che $(2,2)$ e $(-1,3)$ siano autovettori e $f(0,1) = (2,1)$.

(6) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x - y + 3z = 0$.
 (a) Determinare una base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ di W.
 (b) Scrivere le equazioni (nelle coordinate rispetto alla base B scelta) di un endomorfismo f di W che abbia $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ come autovettori di autovalore 1 e -2 rispettivamente.
 (c) Determinare un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ che ristretto a W sia uguale a f (cioè tale che $f(w) = g(w)$ per ogni $w \in W$).

(7) Consideriamo il seguente endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$:
$$F(x,y,z) = (x - y - z, -2x + y - 2z, 2z + y + 4z.$$
 (a) Determinare gli autovalori di F.
 (b) Stabilire se F è diagonalizzabile.

(c) Determinare una base di autovettori.

(8) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 avente per base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Sia k un parametro reale e consideriamo l'unico endomorfismo F_k tale che

- $F(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$
- $F(\mathbf{b}_2) = (k+1)\mathbf{b}_1 + (k+2)\mathbf{b}_2 - (k+1)\mathbf{b}_3$
- $F(\mathbf{b}_3) = (k+1)\mathbf{b}_1 + (k-1)\mathbf{b}_2 + (-k+2)\mathbf{b}_3$

(a) Determinare gli autovalori di F_k (al variare di k)

(b) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F_k è diagonalizzabile.

(c) Determinare gli autospazi di F_k.

(d) Per i valori di k per cui è possibile determinare una matrice invertibile H_k tale che

$$H_k^{-1} M_B^B(F_k) H_k$$

sia diagonale.