PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA

20 Giugno 2022

- Dare una (breve) spiegazione di tutte le risposte date e dei passaggi svolti.
- Consegnare solo la bella copia
- Scrivere le soluzioni degli esercizi indicando *c*hiaramente la domanda a cui si sta rispondendo.
- Consegnare un foglio protocollo per ogni esercizio

Domanda teorica: data un'applicazione lineare $F : V \to W$ definire l'immagine $Im(F)$ e mostrare che $Im(F)$ é un sottospazio di W.

(1) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ consideriamo l'applicazione lineare $F_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F_k(x, y, z) = (2kx + y + 3kz, kx + 2y + 3kz, kx + 3y + 4kz)$.

(1a) Determinare la dimensione e una base di $\ker(F_k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1b) determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(F_k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1c) Mostrare che per $k \neq -2/5$ i sottospazi $\mathrm{Im}(F_k)$ e $\ker(F_k)$ sono in somma diretta

(1d) per $k = -2/5$ trovare una base per $\mathrm{Im}(F_k) \cap \ker(F_k)$.

(1e) Per $k = 1$ trovare, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $G \circ F_1$ sia l'applicazione nulla.

(1f) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione F_k è invertibile e, se possibile, calcolarne l'inversa.

Soluzione. *Ad (1a & 1b)* Per calcolare il kernel e l'immagine di F_k, scriviamo la matrice associata ad F_k rispetto alla base canonica:

$$A_k = \begin{bmatrix} 2k & 1 & 3k \\ k & 2 & 3k \\ k & 3 & 4k \end{bmatrix}.$$

Consideriamo i seguenti casi:

(i) $k = 0$. In questo caso la matrice A_0 assume la seguente forma:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè A_0 ha rango 1, l'immagine di F_0 ha dimensione uno e concide con $\mathrm{Im}(F_0) = \langle (1, 2, 3) \rangle$. Similmente il kernel di F_0 ha dimensione 2 ed è generato da $\ker(F_0) = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Per motivi dimensionali i vettori trovati costituiscono anche una base dei rispettivi spazi.

(ii) $k \neq 0$. Per calcolare l'immagine di $\mathrm{Im}(F_k)$ riduciamo a scala la matrice A_k tramite operazioni elementari:

$$\begin{bmatrix} 2k & 1 & 3k \\ k & 2 & 3k \\ k & 3 & 4k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2k & 1 & 3k \\ 0 & 3/2 & (3/2)k \\ 0 & 5/2 & (5/2)k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2k & 1 & 3k \\ 0 & 3 & 3k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè la matrice ridotta a scala ha rango 2 (ricordiamo che $k \neq 0$), concludiamo che $\dim(\mathrm{Im}(F_k)) = 2$. In particolare una base per $\mathrm{Im}(F_k)$ si può ottenere considerando i vettori colonna nella matrice di partenza corrispondenti alle colonne dei pivots. Questo mostra che $\mathrm{Im}(F_k) = \langle (2k, k, k), (1, 2, 3) \rangle$, e una sua base è formata da tali vettori.
Non ci resta che calcolare la dimensione ed una base per $\ker(F_k)$. Per farlo ricordiamo che

$$\dim(\ker(F_k)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(F_k)) = 3 - 2 = 1.$$

Troviamo quindi una base per $\ker(F_k)$ risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2kx + y + 3kz = 0 \\ 3y + 3kz = 0 \end{cases}$$

che ammette come spazio delle soluzioni

$$\ker(F_k) = \{(-z, -kz, z) \in \mathbb{R}^3 \,|z \in \mathbb{R}\}.$$

Ne segue che una base per $\ker(F_k)$ è data da $\{(-1, -k, 1)\}$.

Ad (1c) Dobbiamo studiare quando i sottospazi $\ker(F_k)$ e $\mathrm{Im}(F_k)$ di $\mathbb{R}^3$ sono in somma diretta. Per farlo consideriamo i due casi precedenti:

(i) $k = 0$. Per capire se $\ker(F_0)$ e $\mathrm{Im}(F_0)$ sono in somma diretta dobbiamo studiarne l'intersezione. In altre parole, dobbiamo chiederci se il vettore $(1, 2, 3)$ possa essere scritto come combinazione lineare dei vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Poichè questo è chiaramente impossibile (la seconda coordinata dovrebbe essere nulla), si deduce immediatamente che $\ker(F_0) \cap \mathrm{Im}(F_0) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ne segue che i due spazi sono in somma diretta.

(ii) $k \neq 0$. Analogamente a prima dobbiamo capire se $\ker(F_k) \cap \mathrm{Im}(F_k)$ è il sottospazio banale oppure no. Poichè $\ker(F_k)$ ha dimensione uno, è sufficiente chiedersi se il vettore $(-1, -k, 1) \in \mathrm{Im}(F_k) = \langle (2k, k, k), (1, 2, 3) \rangle$, ossia se il seguente sistema lineare ammette soluzione:

$$\begin{cases} 2k\alpha + \beta = -1 \\ k\alpha + 2\beta = -k \\ k\alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

Per capire se il sistema ammette soluzione riduciamo a scala la matrice completa ($k \neq 0$):

$$\begin{bmatrix} 2k & 1 & -1 \\ k & 2 & -k \\ k & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} k & 2 & -k \\ 0 & -3 & -1 + 2k \\ 0 & 1 & 1 + k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} k & 2 & -k \\ 0 & 1 & 1 + k \\ 0 & 0 & 2 + 5k \end{bmatrix}$$

Quindi, l rango della matrice completa ed il rango della matrice incompleta coincidono solamente se $2 + 5k = 0$, ossia per $k = -2/5$.

Questo mostra che l'intersezione fra $\ker(F_k)$ e $\mathrm{Im}(F_k)$ non è banale, solamente per $k = -2/5$. Abbiamo così mostrato che i sottospazi $\ker(F_k)$ e $\mathrm{Im}(F_k)$ sono in somma diretta per ogni $k \neq -2/5$.

Ad (1d) Non ci resta che calcolare una base per $\ker(F_k) \cap \mathrm{Im}(F_k)$, quando $k = -2/5$. Tuttavia per motivi dimensionali abbiamo che $\ker(F_{-2/5}) = \ker(F_{-2/5}) \cap \mathrm{Im}(F_{-2/5})$, quindi come base possiamo prendere quella di $\ker(F_{-2/5})$:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 2/5, 1)\}.$$

Ad (1e) Consideriamo $k = 1$, quindi siamo nella situazione in cui il kernel e l'immagine di F_1 sono in somma diretta. Per definizione di somma diretta (e motivi dimensionali) abbiamo che

$$\ker(F_1) \oplus \mathrm{Im}(F_1) = \mathbb{R}^3$$

e che l'unione delle loro basi forma una base di $\mathbb{R}^3$. L'esercizio ci chiede di trovare un'applicazione lineare non nulla

$$G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tale che $G \circ F_k = 0$. Per farlo sarà quindi sufficiente definire G come l'applicazione nulla sui vettori nell'immagine di F_1 e come un'applicazione non nulla sui vettori nel kernel di F_1.

Più precisamente consideriamo la base calcolata in precedenza ($k = 1$):

$$\mathcal{B} = \{(-1, -1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 3)\}$$

dove il primo vettore appartiene al kernel, mentre i seguenti all'immagine di F_1. Possiamo così definire G_0 su questa base come

$$G(-1, -1, 1) = (1, 0, 0) \quad G(2, 1, 1) = (0, 0, 0) \quad \text{e} \quad G(1, 2, 3) = (0, 0, 0).$$

Chiaramente G è ben definita, in quanto definita su elementi di una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, non è l'applicazione nulla in quanto il vettore $(-1, -1, 1)$ non viene mandato nel vettore nullo. Proviamo che la composizione $G \circ F_1$ sia effettivamente l'applicazione nulla.

Per farlo consideriamo un vettore $v \in \mathbb{R}^3$. Per definizione di immagine di F_1 (e di base di uno spazio vettoriale), sappiamo che

$$F_1(v) = \alpha(2, 1, 1) + \beta(1, 2, 3)$$

per opportuni (ed unici) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} G \circ F_1(v) = G(F_1(v)) &= G(\alpha(2, 1, 1) + \beta(1, 2, 3)) \\ &= \alpha G(2, 1, 1) + \beta G(1, 2, 3) = \alpha \mathbf{0}_{R^3} + \beta \mathbf{0}_{R^3} = \mathbf{0}_{R^3}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato prima la linearità di G e poi il fatto che G mandi i vettori $(2, 1, 1)$ e $(1, 2, 3)$ nel vettore nullo. Poichè il vettore $v \in \mathbb{R}^3$ era generico, abbiamo mostrato che la compisizione coincide con l'applicazione nulla.

Ad (1f) Dai punti precedenti abbiamo visto che per ogni $k \in \mathbb{R}$, il kernel di F_k è non nullo. Questo ci dice che l'applicazione in questione non è iniettiva, e quindi non invertibile. Altrimenti, uno avrebbe potuto calcolare il determinante di F_k e mostrare che $\det(F_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|2x + 3y - z + 4t = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(2a) Determinare le equazioni parametriche di V e calcolare una base $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ di V.

(2b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo l'unica (perché?) applicazione lineare $F_k \colon V \to V$ tale che $F_k(\mathbf{b_1}) = 2\mathbf{b_1}+k\mathbf{b_2}+5\mathbf{b_3}$, $F_k(\mathbf{b_2}) = \mathbf{b_2}+(k-2)\mathbf{b_3}$ e $F_k(\mathbf{b_3}) = \mathbf{b_3}$. Trovare i $k \in \mathbb{R}$ tali che F_k è diagonalizzabile.

(2c) Quando F_k è diagonalizzabile, trovare una base di V composta da autovettori.

(2d) Mostrare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é diagonalizzabile.

(2e) Per $k = 3$, stabilire se esiste una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di V tale che

$$M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(F_3) = A$$

Soluzione. *Ad (2a)* Per scrivere V in equazioni parametriche scriviamo z in funzione di x, y e t. Otteniamo così:

$$V = \{(x, y, 2x + 3y + 4t, t) \in \mathbb{R}^4 \,|x, y, t \in \mathbb{R}\}.$$

Da questa scrittura si deduce subito che una base di V (che ha dimensione 3 essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto da un'unica equazione cartesiana) è data da:

$$\mathcal{B}_V = \{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 4, 1)\}.$$

Ad (2b) L'applicazione lineare $F_k \colon V \to V$ esiste ed è unica perché è definita su una base di V. Per stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare F_k è diagonalizzabile, scriviamo la matrice associata ad F_k rispetto alla base $\mathcal{B}_V$ calcolata prima. Per definizione di F_k abbiamo:

$$M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}(F_k) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dato che la matrice in questione è triangolare inferiore, il polinomio caratteristico è:

$$p_k(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2.$$

Quindi gli autovalori di F_k sono 2 e 1 con molteplicità algebrica $m_a(2) = 1$ e $m_a(1) = 2$. Per vedere se F_k è diagonalizzabile dobbiamo perciò calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1. Calcoliamo quindi la dimensione dell'autospazio V_1. Per definizione V_1 è lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo nelle variabili α, β e γ:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ k\alpha = 0 \\ 5\alpha + (k-2)\beta = 0. \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ (k-2)\beta = 0. \end{cases}$$

Abbiamo quindi due casi:

(a) $k = 2$. In questa situazione, $V_1 = \langle (0,1,0)_{\mathcal{B}_V}, (0,0,1)_{\mathcal{B}_V} \rangle$. In particolare, V_1 ha dimensione 2 (dato che i generatori sono indipendenti). Quindi abbiamo che $m_g(1) = m_a(1) = 2$, e quindi F_k è diagonalizzabile.

(b) $k \neq 2$. In questa situazione $V_1 = \langle (0,0,1)_{\mathcal{B}_V} \rangle$. Quindi la dimensione di V_1 è 1, da cui $m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$. Ne segue che F_k non è diagonalizzabile.

Ad (2c) Dobbiamo esibire una base di autovettori per V nel caso in cui $k = 2$. In questa situazione sappiamo che $V_1 \oplus V_2$ e quindi l'unione delle loro basi fornisce la base richiesta. Abbiamo già calcolato prima che i vettori $(0,1,0)_{\mathcal{B}_V}$ e $(0,0,1)_{\mathcal{B}_V}$ costituiscono una base per V_1. Non ci rimane che cercare una base per V_2. Ricordiamo che V_2 corrisponde alle soluzioni del seguente sistema omogeneo in α, β e γ ($k = 2$):

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ 5\alpha - \gamma = 0. \end{cases}$$

Questo mostra che $V_2 = \langle (1,2,5)_{\mathcal{B}_V} \rangle$. Ne segue che una base di autovettori per V è:

$$\mathcal{B}_{\text{autovettori}} = \{(0,1,0)_{\mathcal{B}_V}, (0,0,1)_{\mathcal{B}_V}, (1,2,5)_{\mathcal{B}_V}\}.$$

Ad (2d) Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poichè si tratta di una matrice triangolare superiore è immediato vedere che gli autovalori di A sono 1 e 2 di molteplicità algebrica 2 e 1, rispettivamente. Per mostrare che è diagonalizzabile è quindi sufficiente studiare la molteplicità geometrica $m_g(1)$, che dovrà essere pari a 2. Calcoliamo quindi la dimensione dell'autospazio V_1. Questo autospazio corrisponde allo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo in α, β e γ:

$$\begin{cases} 3\gamma = 0 \\ 4\gamma = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Si vede immediatamente che $V_2 = \langle (1,0,0)_{\tilde{\mathcal{B}}}, (0,1,0)_{\tilde{\mathcal{B}}} \rangle$, da cui $\dim(V_2) = 2$ (dato che i vettori sono indipendenti). Questo mostra quindi che $m_a(1) = m_g(1) = 2$ e quindi che la matrice è diagonalizzabile (dato che sapevamo di già che $m_a(2) = m_g(2) = 1$).

Ad (1e) Ricordiamo che per $k = 3$ l'endomorfismo $F_3 \colon V \to V$ non è diagonalizzabile. Questo significa che per qualsiasi scelta di una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di V, la matrice associata:

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(F_3)$$

non può essere diagonalizzabile. Dato che la matrice A è diagonalizzabile per quanto visto nel punto precedente, possiamo concludere che *non* esiste alcuna base $\tilde{\mathcal{B}}$ di V tale che

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(F_3) = A.$$