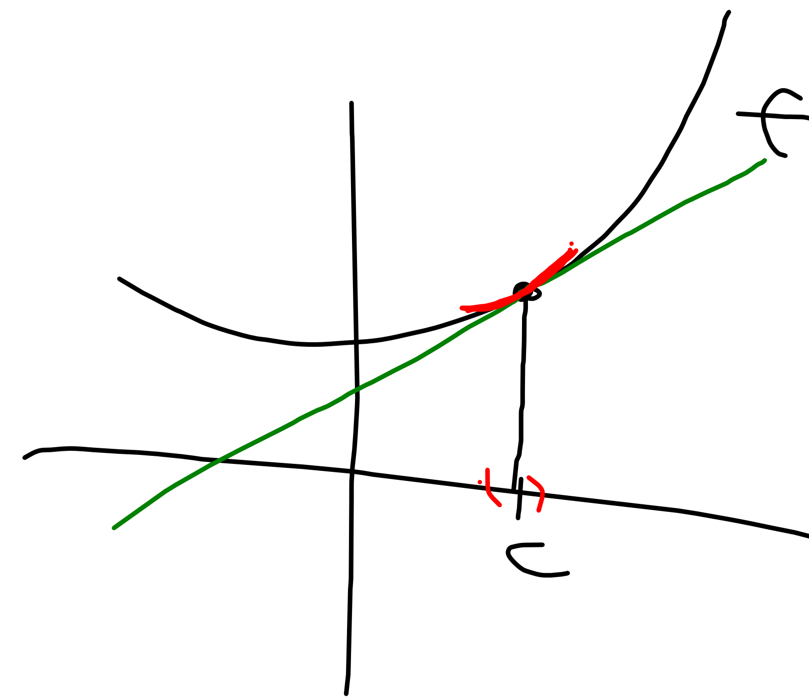
Ricordiamo:

f derivabile in c

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = \overbrace{\underbrace{f(c) + f'(c)(x-c)}_{\text{eq. retta tangente al grafico di } f \text{ nel punto } (c, f(c))}}^{T_1(x)} + o(x-c) \quad \text{per } x \to c$$



OSS

- $T_1(c) = f(c)$
- $T_1'(c) = f'(c)$

ES Sia $c=0$. Cerco un polinomio di 2^{nd} grado T_2 t.c.

$$T_2(0) = f(0)$$
$$T_2'(0) = f'(0)$$
$$T_2''(0) = f''(0)$$

[Supp f derivabile 2 volte in 0]

Sia $T_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$$T_2'(x) = 2\alpha x + \beta$$
$$T_2''(x) = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2}\alpha = \dfrac{f''(0)}{2} \\ \beta = f'(0) \\ \gamma = f(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_2(x) = \frac{1}{2} f''(0)x^2 + f'(0)x + f(0)$$

POLINOMIO di TAYLOR

Def Sia I int. di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, $n \in \mathbb{N}$

Supponiamo f derivabile n volte

Chiamiamo POLINOMIO di TAYLOR di f di punto iniziale c e ordine n, il polinomio:

$$\boxed{T_{c,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k} = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{6}(x-c)^3 + \dots$$

FORMULA di TAYLOR con RESTO di PEANO

TEOR Sia I int di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, $n \in \mathbb{N}$
f derivabile n volte

Allora: $f(x) = T_{c,n}(x) + \underbrace{o((x-c)^n)}_{\text{RESTO di PEANO}}$ per $x \to c$

DIM La dimostriamo nel caso particolare
$c = 0$, $n = 2$
Quindi vogliamo dimostrare che:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underline{o(x^2)} \text{ per } x \to 0$$

Se chiamo:

$$R_{0,2}(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2$$

devo mostrare che

$$\boxed{R_{0,2}(x) = o(x^2) \quad \text{per } x \to 0}$$

Derivo $R_{0,2}$:

$$(*) \quad R_{0,2}'(x) = f'(x) - f'(0) - \cancel{2}\,\frac{f''(0)}{\cancel{2}}\,x$$

Dato che f è derivabile 2 volte, si ha che f' è derivabile e dunque (per il Teor di caratterizzazione... applicato a f'), ottengo

$$\to f'(x) = f'(0) + f''(0)\cdot x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi, sostituendo in (*), deduco

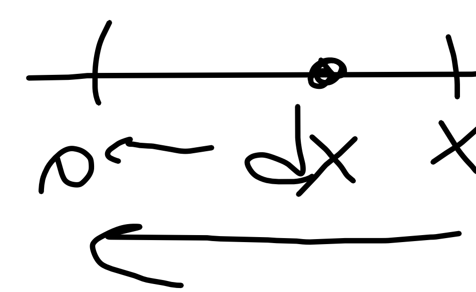
$$R'_{0,2}(x) = o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

Applico il Teor di Lagrange a $R_{0,2}$ nei punti $x, 0$ (supponiamo $x > 0$)

$\exists\ d_x \in (0, x)$ t.c.

$$\frac{R_{0,2}(x) - R_{0,2}(0)}{x} = R'_{0,2}(d_x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left| \frac{R_{0,2}(x)}{x^2} \right|} = \left| \frac{R'_{0,2}(d_x)}{x} \right| \leq \underbrace{\left| \frac{R'_{0,2}(d_x)}{d_x} \right|}_{\to 0}$$



poiché $d_x < x$

Ora

$$0 \leq \left| \frac{R_{0,2}(x)}{x^2} \right| \leq \underbrace{\left| \frac{R'_{0,2}(d_x)}{d_x} \right|}_{\downarrow \, 0} \qquad d_x \in (0, x)$$

$\hookrightarrow$ se $x \to 0$
$\Rightarrow d_x \to 0$

perché avevo dimostrato $R'_{0,2}(x) = o(x)$ per $x \to 0$

Per il Teor. dei 2 carabinieri:

$$\left| \frac{R_{0,2}(x)}{x^2} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{R_{0,2}(x)}{x^2} \longrightarrow 0 \iff R_{0,2}(x) = o(x^2) \text{ per } x \to 0$$

###

Consideriamo $\underline{c=0}$

$$\boxed{f(x)=e^x}$$

- $f(0)=1$
- $f'(x)=e^x \rightarrow f'(0)=1$
- $f''(0)=1$

$\vdots$

- $f^{(k)}(0)=1$

per $x\to 0$

$$\Rightarrow \boxed{e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+o(x^n)}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4!}+\dots\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = \cos x \to f'(0) = \underline{1}$
- $f''(x) = -\operatorname{sen} x \to f''(0) = \underline{0}$
- $f'''(x) = -\cos x \to f'''(0) = \underline{-1}$

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \Big| + o(x^{10})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{\underline{2k+1}} + o(x^{2n+2})$$

$f(x) = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x \rightarrow f^{IV}(0) = +1$

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \cdots (-1)\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})} = \boxed{\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2m+1})}$$

$$\boxed{f(x)} = \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$$

$$\boxed{= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}}$$

$\boxed{\text{ES}}$. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x}}{x^2}$$

Rifaccio:

$$\to \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) - \cancel{x}}{x^2} = 0$$

OSS Potevo anche concludere così:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + o(x^2) \cancel{- x}}{x^2} = 0$$

ES. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \cancel{- x}}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{1 - e^{x} + x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x}}{\cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{x} + o(x) + \cancel{x}}$$

NON POSSO CONCLUDERE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{x}}{\cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + \cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = 0$$

• $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{\sin(x^2)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x}}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2}$ non posso concludere

Riparto:

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{x}}{x^2 + o(x^2)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}}{\log\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$

per $x \to +\infty \to y \to 0$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y - y}{\log(1+y^3)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y} - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3) - \cancel{y}}{y^3 + o(y^3)} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2-x)+x-x^2}{x^3}$$

$$\sin(x^2-x) = x^2-x + \underbrace{o(x^2-x)}_{o(x)}$$