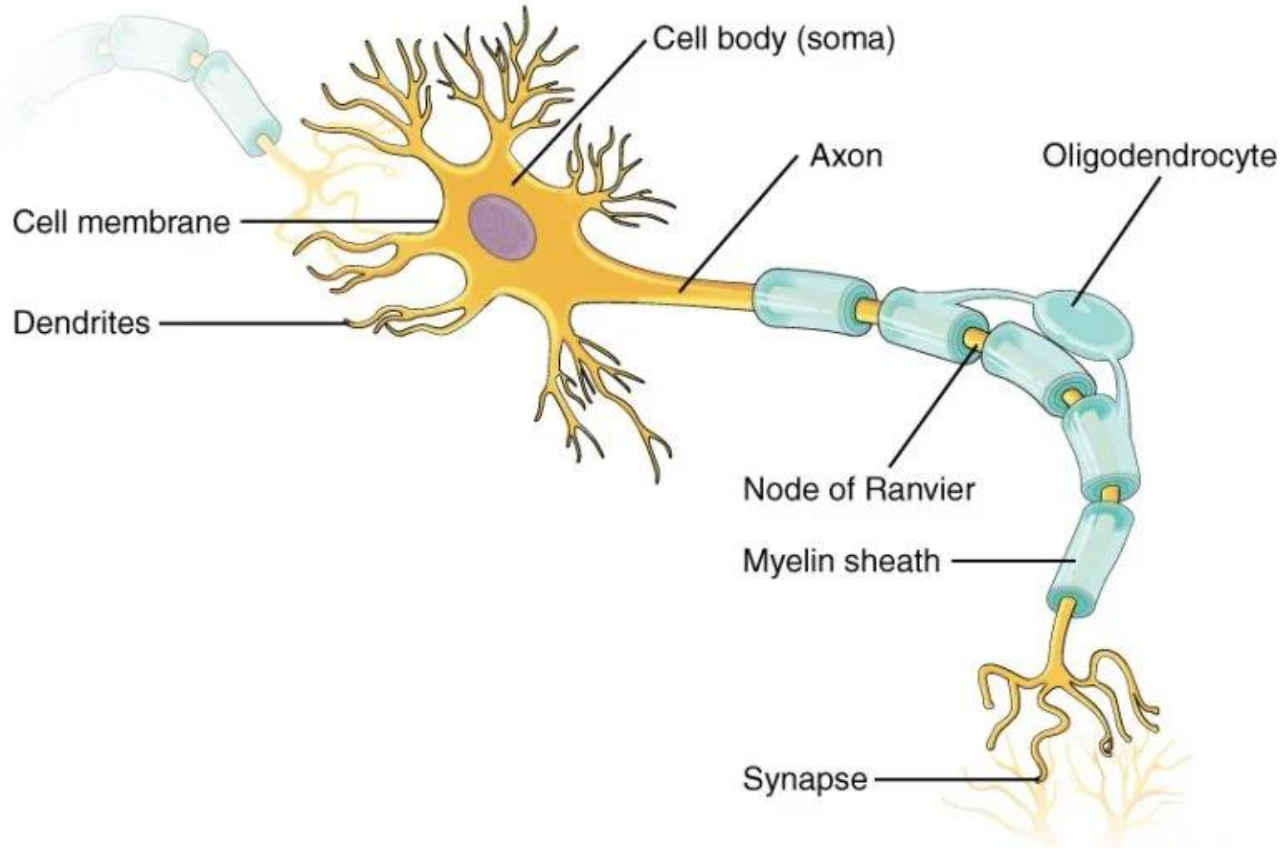
Artificial Neural Networks

Il neurone Biologico

Il neurone biologico è composto da 4 parti principali:

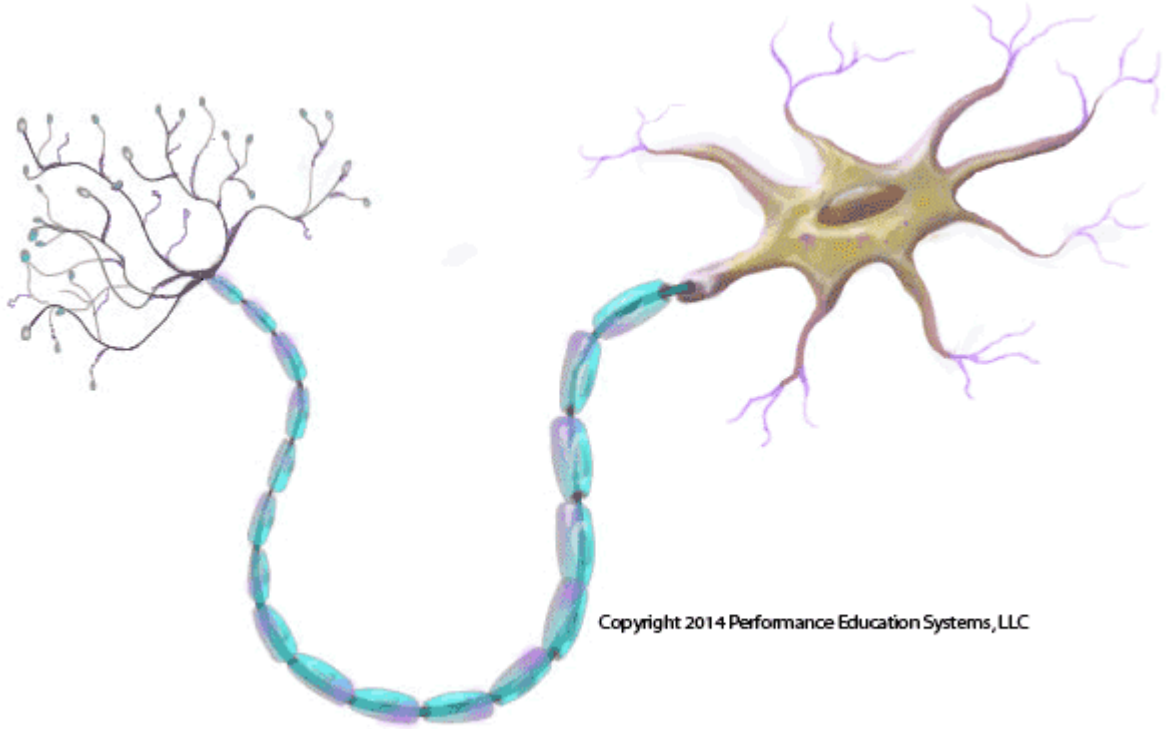
- **Il corpo cellulare o soma**,
- **Le estensioni delle cellule, dendriti**
- **Un'ulteriore estensione**, **assone**
- **Le sinapsi**



- I **dendriti** ricevono (*input*) segnali elettrici e chimici dagli altri neuroni e li trasmettono al **soma**.
- il **soma** elabora i segnali in ingresso nel tempo e converte il valore elaborato in un output.
- **L'assone**, invece, trasmette il segnale elettrico dal soma ad altri neuroni o a cellule muscolari o ghiandolari.
- All'estremità dell'assone ci sono le **sinapsi, che collegano il neurone ad** altri neuroni per trasmettere il segnale in uscita (*output*).

Ogni singola **sinapsi può modificare la propria risposta** e **variare, in questo modo, l'efficienza di trasporto dell'informazione.**

Il neurone Biologico

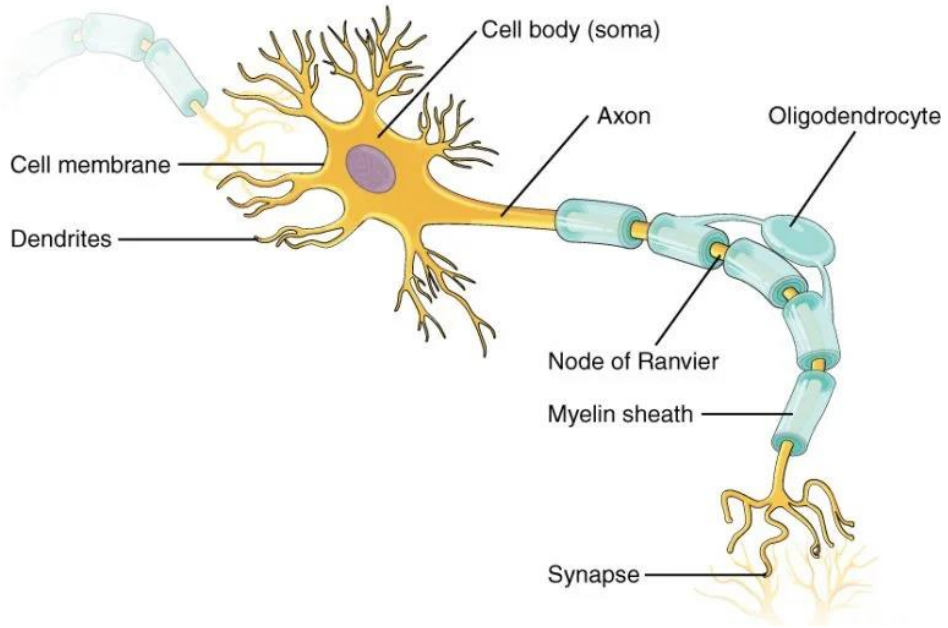


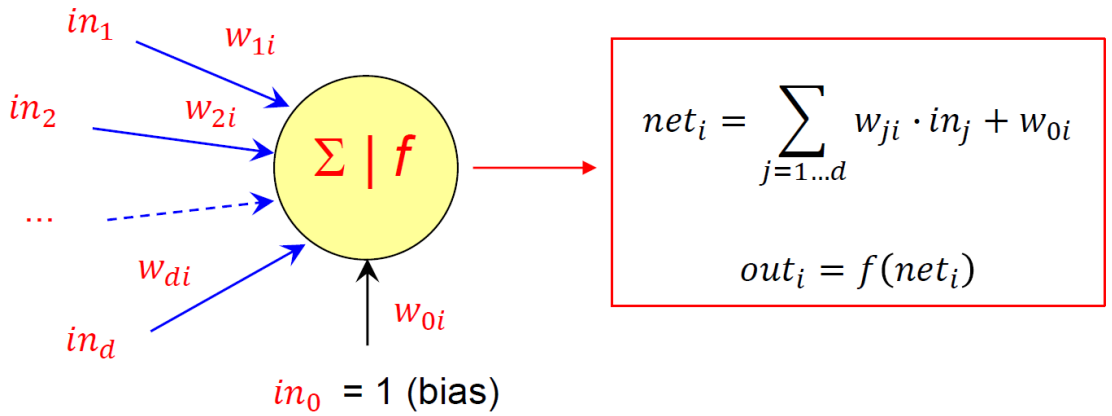
Quando il soma riceve i segnali in ingresso dai dendriti, esegue una “elaborazione”. **Se i segnali ricevuti superano una certa soglia**, viene prodotto un nuovo segnale di uscita sull’assone. Questo segnale si propagherà ad altri neuroni, anche molto distanti tra loro.

Il valore di questa soglia e l’efficienza di trasmissione elettrochimica delle sinapsi sono strettamente legate ai processi di apprendimento.

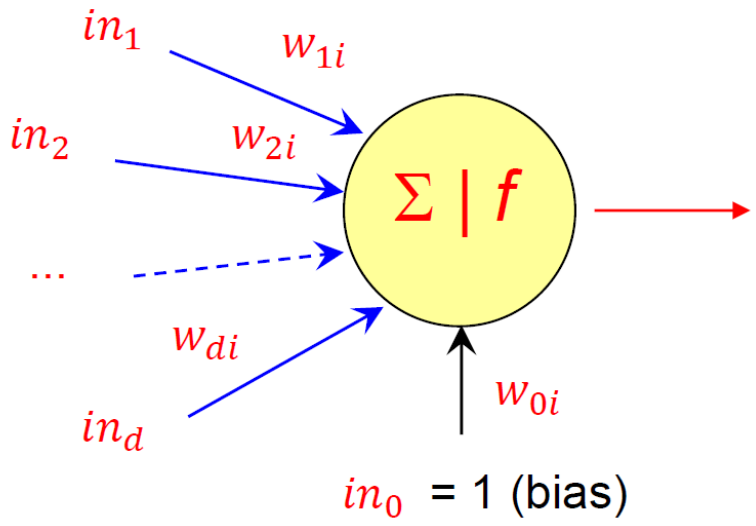
Neurone Artificiale

- Primo schema di funzionamento del neurone biologico ad opera di di *McCulloch* and *Pitts* (1943)
- 1957: *Rosenblatt* inventa il percettrone (**perceptron**), primo esempio di rete neurale:
  - **Formulazione matematica** del neurone artificiale del 1943
  - Idea della possibilità di **addestrarlo** in base all'errore dell'output





Neurone Artificiale



$$net_i = \sum_{j=1\ldots d} w_{ji} \cdot in_j + w_{0i}$$

$$out_i = f(net_i)$$

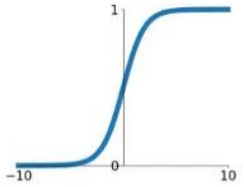
- $\boldsymbol{in_1, in_2, \ldots, in_d}$ sono i d **ingressi** che il neurone i riceve da assoni di neuroni afferenti
- $\boldsymbol{w_{1i}, w_{2i}, \ldots, w_{di}}$ sono i pesi (**weight**) che determinano l'efficacia delle connessioni sinaptiche dei dendriti (agiremo su questi valori durante l'apprendimento), l'importanza dell'input i-esimo sull'output.
- $\boldsymbol{w_{0i}}$(detto **bias**) è un ulteriore peso che si considera collegato a un input fittizio con valore sempre 1 questo peso è utile per «tarare» il punto di lavoro ottimale del neurone.
- $\boldsymbol{f(\cdot)}$ è la **funzione di attivazione** simula il comportamento del neurone biologico di attivarsi solo se i segnali in ingresso **superano una certa soglia**. È una sorta di **interruttore** della cellula.

Funzioni di attivazione

- Una funzione di attivazione determina se un neurone deve essere **attivato o meno**.
- Si tratta di alcune semplici **operazioni matematiche** per determinare se l'input del neurone alla rete è rilevante o meno nel processo di previsione.
- Le funzioni di attivazione possono essere di diversi tipi, ma in generale devono essere **non lineari** per consentire alla rete di apprendere relazioni complesse tra le sue variabili di input, e **derivabili.**

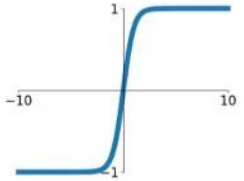
Sigmoid

$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$



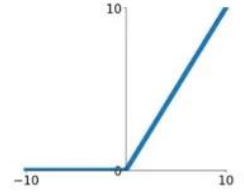
tanh

$\tanh(x)$



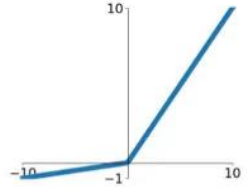
ReLU

$\max(0, x)$



Leaky ReLU

$\max(0.1x, x)$

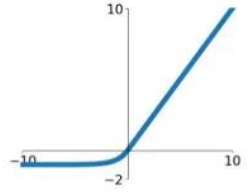


Maxout

$\max(w_1^T x + b_1, w_2^T x + b_2)$

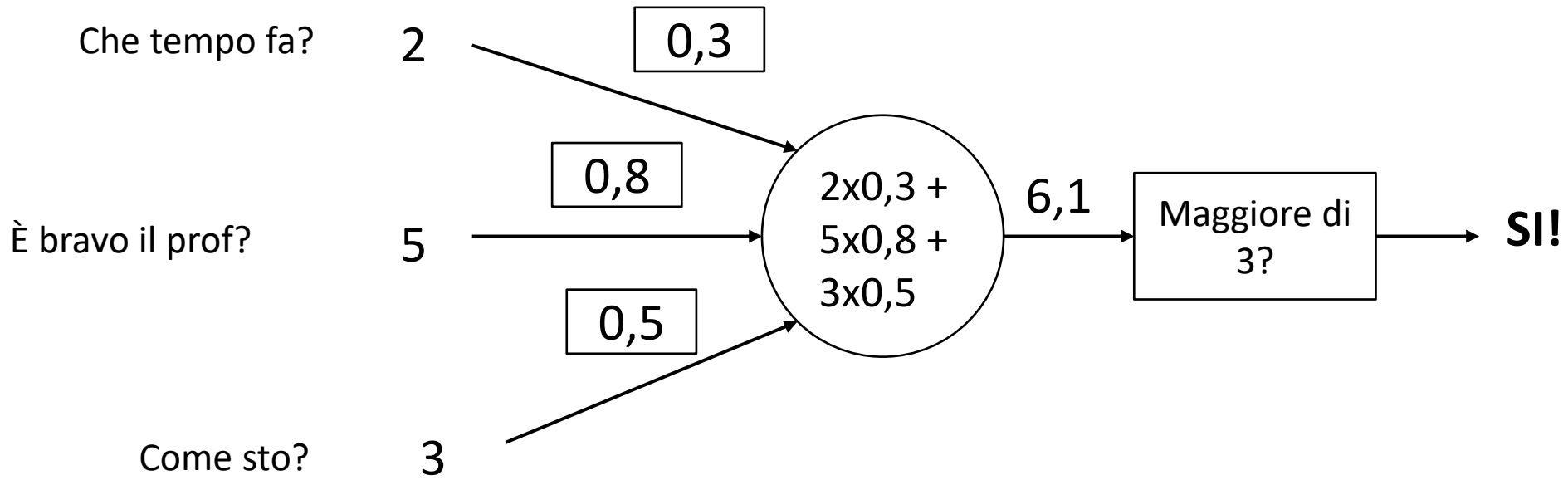
ELU

$$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ \alpha(e^x - 1) & x < 0 \end{cases}$$



Esempio pratico

Stamattina esco per andare alla lezione?



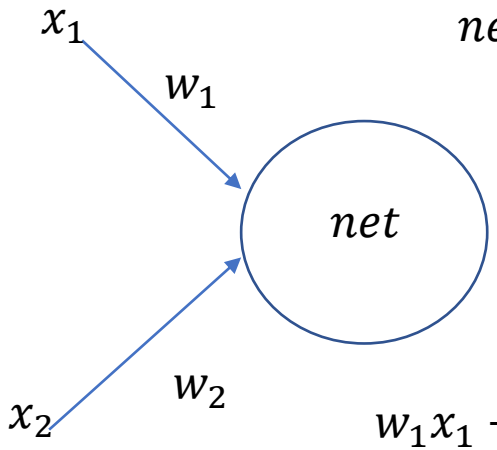
Esempio pratico (più generale)

Singolo neurone artificiale che effettua una separazione lineare tra due classi

Per semplicità consideriamo il caso di 2 soli input, con bias=0

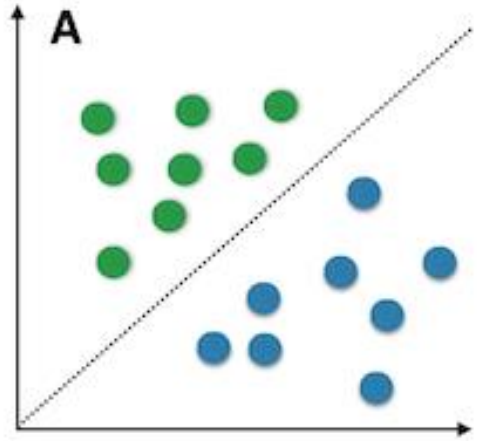
$$f(net) = \begin{cases} -1 & \text{se } net < \theta \\ 1 & \text{se } net > \theta \end{cases}$$

Funzione di attivazione a soglia θ



$$net = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

f



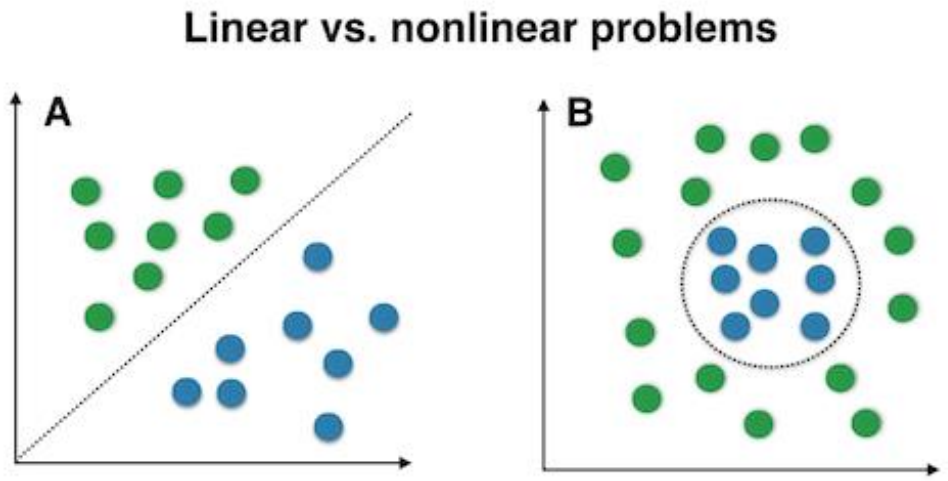
$$w_1 x_1 + w_2 x_2 < \theta \longrightarrow w_1 x_1 + w_2 x_2 - \theta < 0 \qquad (x_1, x_2)\ sta\ sopra\ la\ retta$$

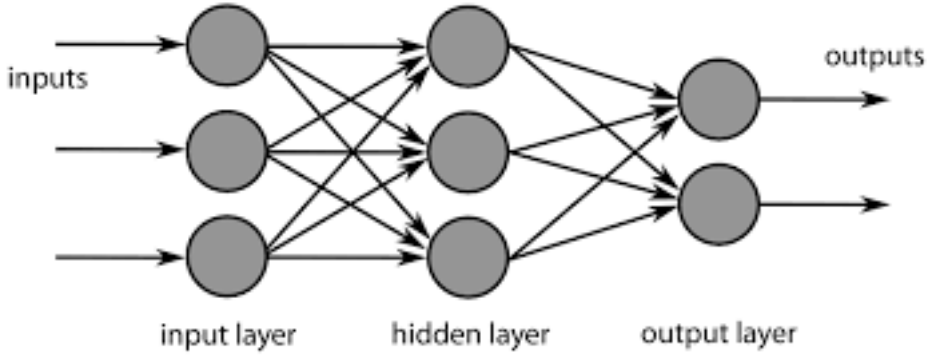
$$w_1 x_1 + w_2 x_2 > \theta \longrightarrow w_1 x_1 + w_2 x_2 - \theta > 0 \qquad (x_1, x_2)\ sta\ sotto\ la\ retta$$

Equazione implicita della retta $w_1 x_1 + w_2 x_2 - \theta = 0$

Per poter avere separazioni più complicate rispetto a quelle lineari:

- la soluzione è utilizzare più neuroni artificiali organizzati su diversi (*tanti*) strati (**layer**) **Multilayer Perceptron (MLP)**



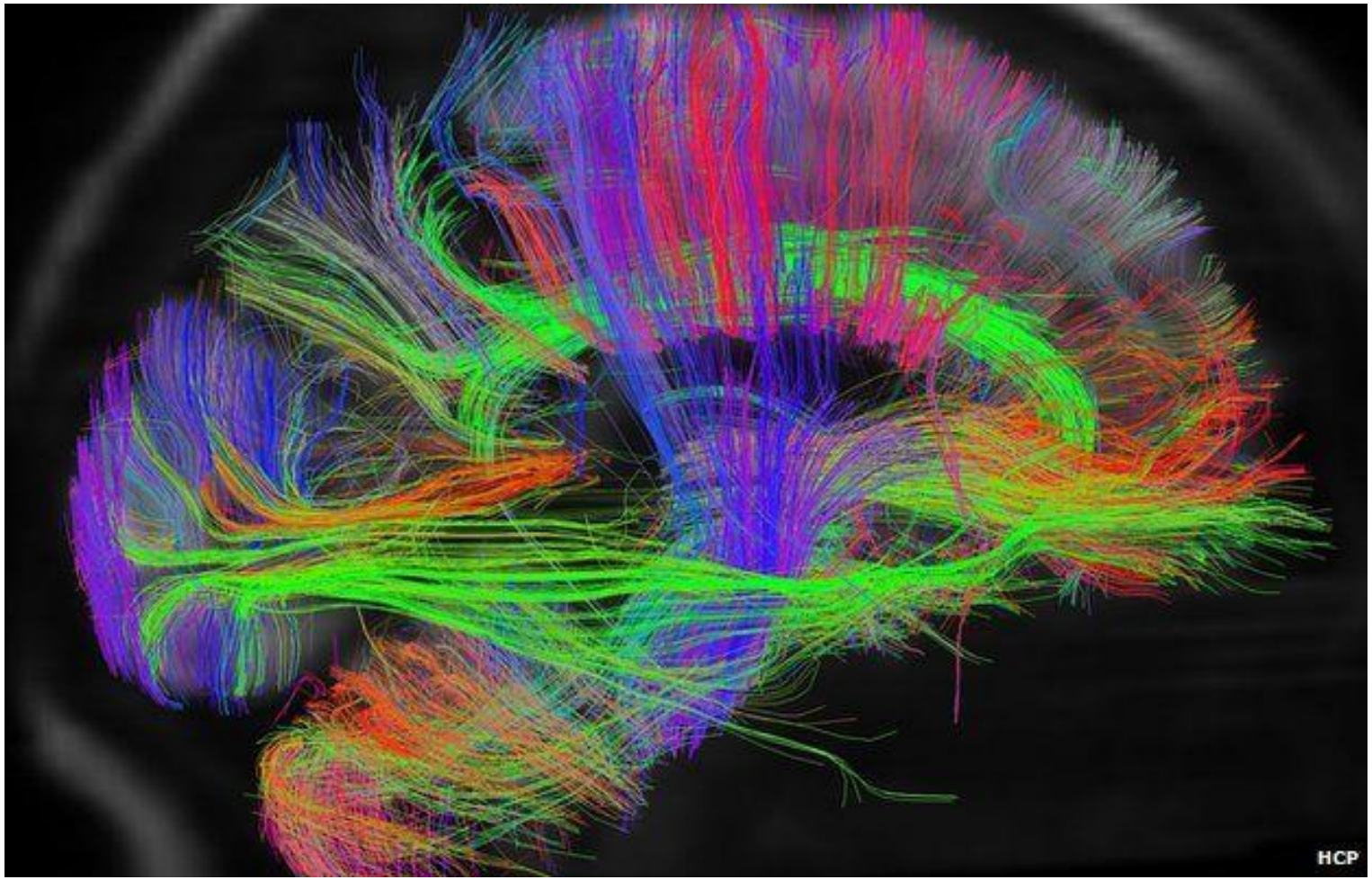


Cervello umano

- **È quanto accade anche in natura!**
  - Un singolo neurone biologico è un elemento debole, ma **connesso con miliardi di altri neuroni** diventa una potente **rete**, chiamata cervello.
  - Il cervello umano contiene circa 100 miliardi di neuroni (10^{11}) che comunicano tramite segnali elettrici e chimici attraverso più di **100 trilioni** $(\mathbf{10^{14}})$ **di sinapsi**.

- **Nuove sinapsi** vengono costantemente create in modo **casuale**.
  - Se due neuroni connessi da una sinapsi si attivano **nello stesso momento**, la sinapsi che li connette è **rinforzata → abbiamo imparato**
  - Se due neuroni connessi da una sinapsi **non si attivano mai insieme**, la sinapsi si **indebolisce** finchè viene rimossa → **abbiamo dimenticato**
- È il motivo per cui anche se nasciamo con già tutti i neuroni, non sappiamo già tutto.

Connettoma

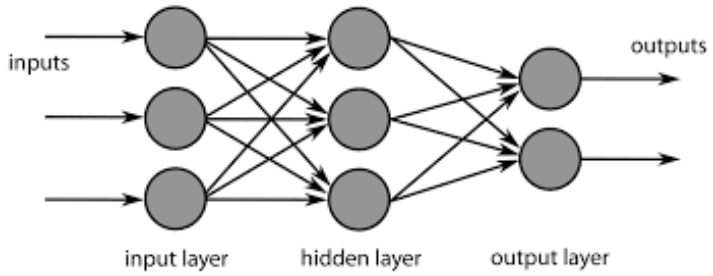


Tipologie di reti neurali

- Le reti neurali sono composte da gruppi di neuroni artificiali organizzati in **livelli**.
- Tipicamente sono presenti un livello di **input**, un livello di **output**, e uno o più **livelli intermedi**.
- Ogni livello contiene uno o più neuroni. I **layer intermedi** sono chiamati **hidden layer** in quanto restano "invisibili" dall'esterno della rete, la quale si interfaccia all'ambiente solo tramite il layer di ingresso e quello di uscita.

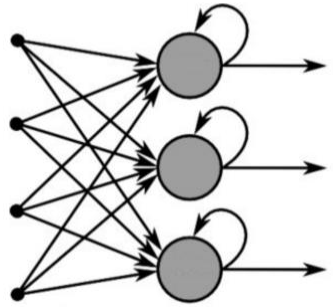
Feedforward (FFNN)

Nelle reti **feedforward** («alimentazione in avanti») le connessioni collegano i neuroni di un livello con i neuroni di un livello successivo. **Non** sono consentite connessioni all'indietro o connessioni verso lo stesso livello. **È di gran lunga il tipo di rete più utilizzata.**



Ricorrenti

Sono previste connessioni di **feedback**, in genere verso **neuroni dello stesso livello**, ma anche **all'indietro**. Questo tipo di rete crea una sorta di **memoria** di quanto accaduto in passato e rende quindi l'uscita attuale **non solo dipendente dall'ingresso attuale**, ma anche da tutti gli **ingressi precedenti**.



Come imparano le Reti Neurali?

- Abbiamo visto che le macchine possono apprendere dai **dati**
- Imparare dai dati spesso è simile a imparare a suonare la chitarra
  - *Uno* dei modi con cui l'essere umano impara

- Elementi principali:
  - Devo osservare **come** si fa un accordo → dati annotati
  - Devo tentar e **ripetere** diverse volte → apprendimento iterativo
  - Non imparo **tutti** gli accordi subito → apprendimento per batch
  - Qualcuno mi deve **correggere** → funzione obiettivo/costo/loss

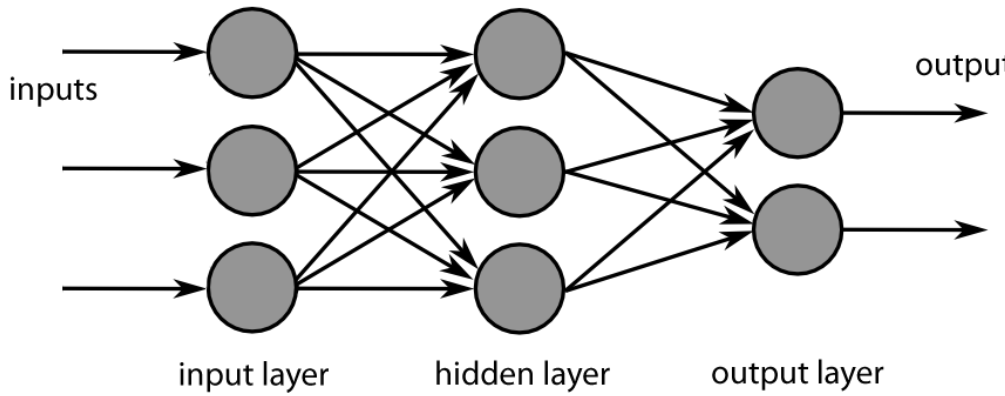
Addestramento di una rete

Devo ripetere tante volte per diventare bravo

Ripetizione

4. Errore

1. Dati di input divisi in piccolo gruppi (*mini batch*)



2. Output e label

3. Funzione di loss

Ho tanti dati annotati!

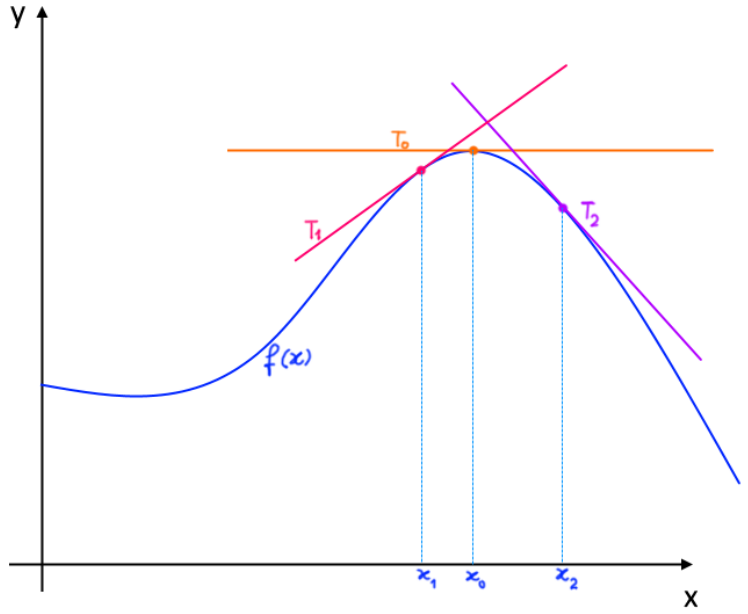
Cambio la posizione delle mie dita per ottenere accordi diversi

Qualcuno mi deve dire come sto andando.
È l'obiettivo del mio apprendere!

Problema

- Ma come faccio a capire in automatico se sto **incrementando** o **diminuendo** l'errore?
  - Quindi se mi sto avvicinando o allontanando dalla soluzione desiderata

- Soluzione: utilizzo la **matematica**!
  - Il mio obiettivo è una **funzione**
  - Calcolo la **derivata** di questa funzione
  - Capisco da che parte sto andando!



Addestramento di una rete

- Per una rete neurale

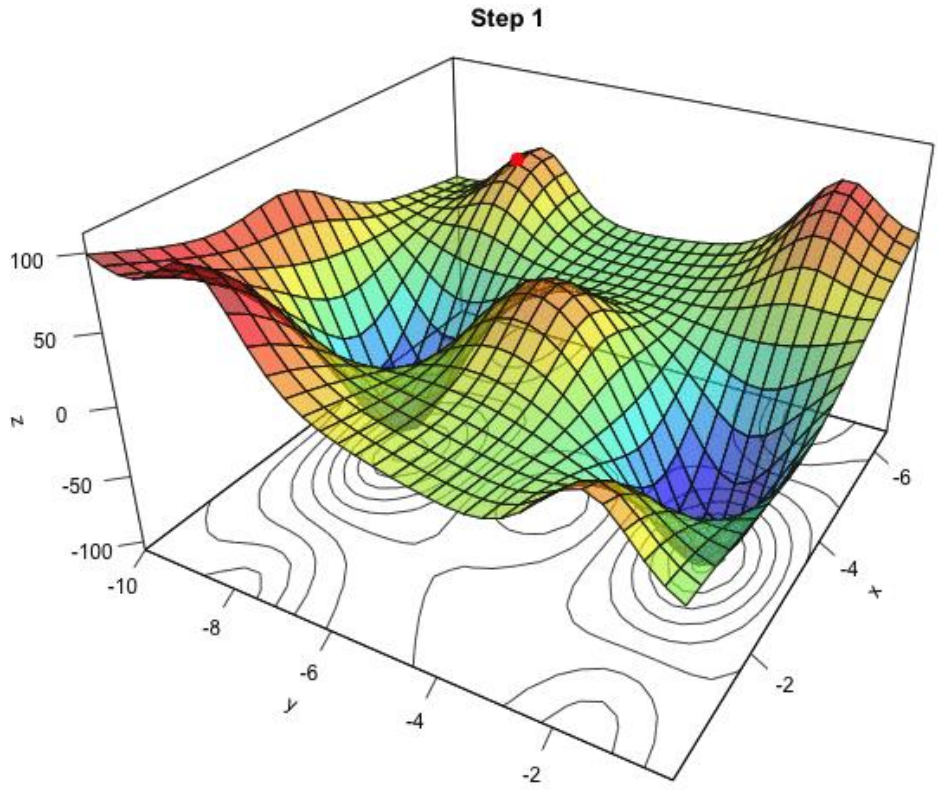
APPRENDERE

=

MINIMIZZARE LA **FUNZIONE OBIETTIVO**

Discesa del gradiente

- Fissata la topologia (numero di livelli e neuroni), l'addestramento di una rete neurale consiste nel determinare il valore dei pesi **w** che determinano il **mapping desiderato** tra input e output.
- Passo dopo passo, tramite la **discesa del gradiente**, mi avvicino all'obiettivo.



Riassumendo l'addestramento

Loss function → output desiderato della rete

↓ *Come?*

Minimizzando la loss function → mi avvicino all'obiettivo

↓ *In pratica, come la realizzo?*

Aggiustando i pesi (e bias) della rete

↓ *tramite*

Discesa del gradiente → **Ottimizzatore**

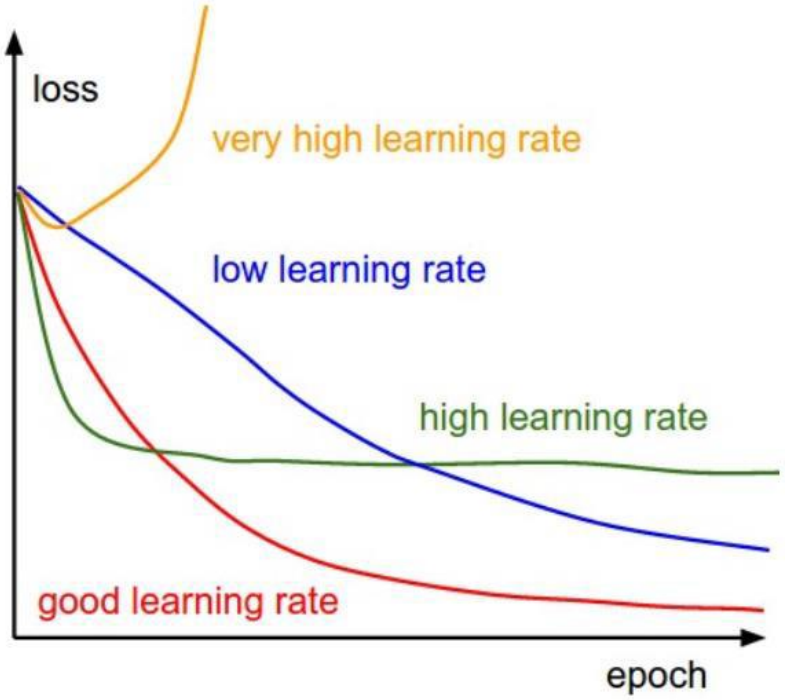
Parametri:
- Learning rate
- Batch size
- …

↓ *Basato su*

Backpropagation + **Regola della catena** (*chain rule*)

↓ *Quindi*

La funzione di loss deve essere derivabile!



Cost Function

- La loss function, o funzione di perdita, è **una misura dell'errore della previsione prodotta da un modello di machine learning rispetto ai dati di training**. Essa rappresenta la **discrepanza tra l'output previsto dal modello e l'output reale associato ai dati di training.**

- In pratica, la scelta della loss function dipende dal tipo di problema di machine learning che si vuole risolvere.

- Ad esempio, se si sta risolvendo un **problema di classificazione binaria**, la loss function più comune è la funzione di entropia incrociata binaria **(Binary Cross-Entropy)**:

$$BCE = -y_i \cdot \log \hat{y}_i - (1 - y_i) \cdot \log(1 - \hat{y}_i)$$

- Se si sta risolvendo un problema di **classificazione multiclasse**, la loss function più comune è la funzione di **entropia incrociata categorica (Categorical Cross-Entropy):**

$$CCE = -\sum_i y_i \cdot \log \hat{y}_i$$

In entrambi i casi, $\hat{y}_i$ è lo *i*-esimo valore scalare emesso dal modello (*predizione*), y_i è la corrispondente label (*etichetta*).

Cost Function

- Per usare la Cross Entropy loss, nel layer di output dobbiamo avere delle **probabilità**
- Solitamente si utilizza il **softmax layer** per trasformare l'output della rete (*logits*) in probabilità (valori nel range [0, 1] che sommano a 1)
- Il softwmax è una funzione continua e differenziabile

Example :

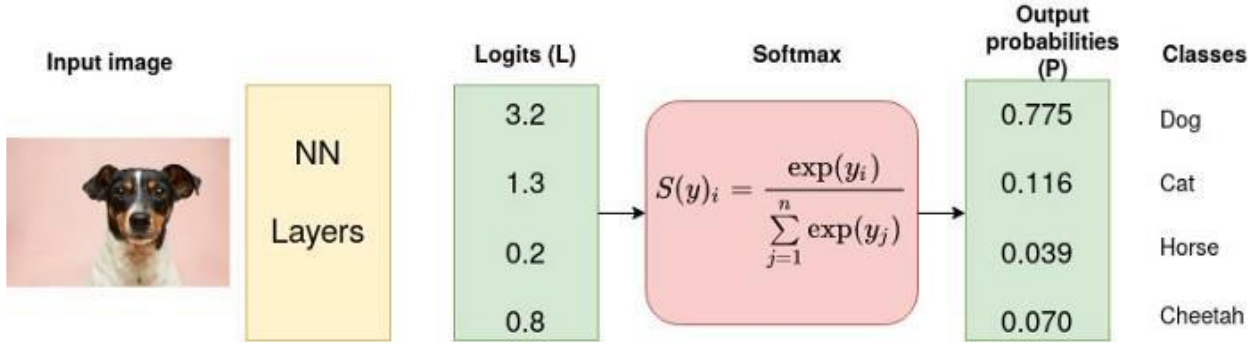
2.33 → P (Class 1) = $\frac{\exp(2.33)}{\exp(2.33) + \exp(-1.46) + \exp(0.56)}$ = 0.83827314

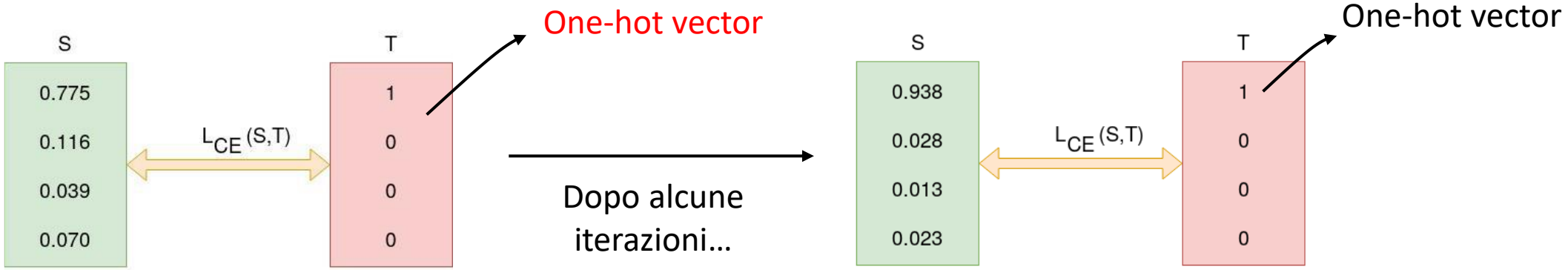
-1.46 → P (Class 2) = $\frac{\exp(-1.46)}{\exp(2.33) + \exp(-1.46) + \exp(0.56)}$ = 0.01894129

0.56 → P (Class 3) = $\frac{\exp(0.56)}{\exp(2.33) + \exp(-1.46) + \exp(0.56)}$ = 0.14278557

$$p_i = \frac{e^{a_1}}{\sum_{k=1}^{n} e^{a_k}}$$

Addestramento di una rete





$CCE = -\log_2 0{,}775 = 0{,}3677$

$CCE = -\log_2 0{,}938 = 0{,}0923$

La loss è scesa, la rete ha imparato!

Cost Function

- Nel caso di un task di regressione, **la cost function** più comune:
  - Errore quadratico medio (Mean Squared Error o MSE): definito come la media dei quadrati delle differenze tra l'output previsto dal modello e l'output reale associato ai dati di training.
    In altre parole, l'MSE è calcolato come:

$$C(W) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i(W))^2}{n}$$

dove n è il numero di esempi di training, y_i è **l'output reale associato a ciascun esempio di training** e $\hat{y}_i(W)$, che dipende dai parametri della rete che indichiamo con W, è l'output previsto dal modello per l'input corrispondente.

- Esistono anche altre cost function utilizzate in problemi di regressione, come ad esempio la cost function di errore assoluto medio (Mean Absolute Error o MAE).

$$C(W) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i(W)|}{n}$$

Esempio: MLP per il riconoscimento di cifre scritte a mano

Numeri (vettori)

Immagini