§ ALGORITMO DI GAUSS

28.02.2022
Marco Moraschini

Sappiamo risolvere il sistema a scala. Cosa succede nel caso di $A\underline{x}=\underline{b}$?

Cerchiamo $A'\underline{x}=\underline{b}'$ a scala che sia equivalente a $A\underline{x}=\underline{b}$.

ES.: I seguenti sistemi in x_1 e x_2 sono equivalenti:

$$I=\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \qquad II=\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ 2x_2=1 \end{cases}$$

Infatti, l'unica soluzione $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ di II è anche l'unica di I.

Verifichiamo che la prima equazione è la stessa in entrambi e che la 2ª soddisfa:

2ª eq di II = 2ª eq di I − 1ª eq. di I.

Operazioni consentite:

(i) Scambio di due equazioni;

(ii) Moltiplicazione per $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ di una riga;

(iii) Sostituzione della j-esima riga con la somma fra j-esima riga + $\alpha\cdot$(i-esima riga) $(\alpha\in\mathbb{R})$:

$$j\text{-esima} \mapsto j\text{-esima} + \alpha(i\text{-esima}).$$

OSS.: (i) non altera le soluzioni (ordine delle equazioni è irrilevante).

(ii) non altera le soluzioni: $(s_1,\dots,s_n)$ è soluzione di $a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$ se e soltanto se $(s_1,\dots,s_n)$ è soluzione di $\alpha a_1x_1+\dots+\alpha a_nx_n=\alpha b$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$a_1s_1+\dots+a_ns_n=b \iff \underset{\alpha\neq 0}{\alpha(a_1s_1+\dots+a_ns_n)=\alpha b} \iff \alpha a_1s_1+\alpha a_2s_2+\dots+\alpha a_ns_n=\alpha b \quad \alpha\neq 0.$$

(iii) coinvolge solo la j-esima equazione e la i-esima eq. del sistema. Dobbiamo quindi verificare che

$$I=\begin{cases} i\text{-esima} \\ j\text{-esima} \end{cases} \text{ equivalente a } II=\begin{cases} i\text{-esima} \\ j\text{-esima}+\alpha(i\text{-esima}) \end{cases} ?$$

$(s_1,\dots,s_n)$ soddisfa $I \iff \begin{cases} a_{i1}s_1+\dots+a_{in}s_n=b_i \\ a_{j1}s_1+\dots+a_{jn}s_n=b_j \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a_{i1}s_1+\dots+a_{in}s_n=b_i \\ a_{j1}s_1+\dots+a_{jn}s_n+\alpha(a_{i1}s_1+\dots+a_{in}s_n)=b_j+\alpha b_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_{i1}s_1+\dots+a_{in}s_n=b_i \\ (a_{j1}+\alpha a_{i1})s_1+\dots+(a_{jn}+\alpha a_{in})s_n=b_j+\alpha b_i \end{cases}$$

$\iff (s_1,\dots,s_n)$ è soluzione di II.

§ TRADUZIONE IN LINGUAGGIO MATRICIALE

(i) coincide con scambiare due righe in $(A|\underline{b})$;

(ii) equivale a moltiplicare la i-esima riga di $(A|\underline{b})$ per $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(iii) equivale a cambiare $(a_{ij}|b_i)$ con
$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1}+\alpha a_{i1} & \dots & a_{jn}+\alpha a_{in} & b_j+\alpha b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

DEF.: Data una matrice A le OPERAZIONI ELEMENTARI sulle righe di A sono le seguenti:

(i) Scambio di due righe;

(ii) Moltiplicazione di una riga per un numero reale non nullo;

(iii) Sostituzione della i-esima riga con la somma della i-esima riga + α(j-esima riga), $\alpha \in \mathbb{R}$.

OSS.: In (iii) $\alpha = 0$ è lecito. In questo caso lasciamo invariata la riga i-esima.

§ RIDUZIONE DI GAUSS (USANDO L'ALGORITMO DI GAUSS)

Introduciamo l'ALGORITMO DI GAUSS per $A = (a_{ij})$ che la riduce a scala attraverso operazioni ELEMENTARI:

1) Se $a_{11} = 0$ scambiamo la 1ª riga con una qualsiasi avente l'elemento in posizione $a_{j1} \neq 0$.
Se $a_{j1} = 0 \ \forall j = 1, \dots, m$ si va al punto 3.

2) Si controllano tutte le righe tranne la prima. Se $a_{j1} \neq 0$ (con $j > 1$), allora sostituiamo la riga j con j-esima + $\left(-\frac{a_{j1}}{a_{11}}\right)$ 1-esima. In questo modo $a'_{j1} = 0$.

3) A questo punto tutti gli elementi$^{\neq 0}$ della prima colonna saranno tutti nulli eccetto al più a_{11}. Si considera ora la matrice A' t.c. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & A' \end{bmatrix}$ (i.e. quella ottenuta da A rimuovendo la prima riga e colonna) e si riparte dal punto 1. (Se $a_{11} = 0$ si rimuove solo la prima colonna.)

ES.: Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Applichiamo l'algoritmo di Gauss:

Poiché $a_{11} = 0$ $\quad A \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{III \to III - 2I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ora elimino prima riga e colonna $\quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{II + 5I} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Otteniamo quindi:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

CONCLUSIONE: Abbiamo imparato a risolvere qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = b$.
Infatti basta considerare la matrice COMPLETA $(A|\underline{b})$ ed applicare la riduzione di Gauss, ottenendo: $(A'|\underline{b}')$ a scala t.c.

$$A\underline{x} = \underline{b} \text{ sia equivalente a } A'\underline{x} = \underline{b}'.$$

PROP.: Dato un qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ a coefficienti reali SOLO UNA delle seguenti possibilità è vera:

(i) NON ci sono soluzioni;

(ii) $\exists!$ soluzione;

(iii) $\exists$ infinite soluzioni.

DIM.: Poiché l'algoritmo di Gauss è tramite operazioni elementari che preservano le soluzioni del sistema associato, ogni sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ è equivalente a $A'\underline{x}=\underline{b}'$ a scala, per cui abbiamo già visto l'enunciato essere vero.

⚠ Il teorema dice che se un sistema lineare ha almeno due soluzioni (distinte) allora ne ha infinite.

OSS.: L'algoritmo di Gauss non ha mosse prefissate. Differenti mosse porteranno a differenti matrici a scala B MA TUTTE tali che i sistemi lineari associati saranno equivalenti fra loro.

ES.: Risolviamo il seguente sistema in u, v, w, x, y:

$$\begin{cases} u+2v+3w+x+y=4 \\ u+2v+3w+2x+3y=-2 \\ u+v+w+x+y=-2 \\ -3u-5v-7w-4x-5y=0 \end{cases}$$

Per prima cosa scriviamo la matrice completa associata:

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Riduciamo $(A|\underline{b})$ a scala. Dato che $a_{j1}\neq 0 \ \forall j=1,\dots,4$ abbiamo:

$$(A|\underline{b}) \xrightarrow[\substack{III \to III - I \\ IV \to IV + 3I}]{II \to II - I} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right]$$

Ora ci concentriamo sulla matrice senza la prima colonna e prima riga: poiché $a_{22}=0$ sostituiamo la IV riga con la II:

$$\dots \xrightarrow{II \leftrightarrow IV} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{III \to III + II} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

Consideriamo ora la matrice $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -6 \end{array}\right]$ che si riduce a $(II \to II + I)$ $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Per comodità $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{I \to -I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

In conclusione abbiamo:

$$\begin{array}{cccccc} & & w & & y & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Poiché $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = 3 < 5 \Rightarrow \exists$ infinite soluzioni.

Calcoliamo le soluzioni che avranno $5-3=2$ gradi di libertà. Fissiamo w e y come gradi di libertà:

$x + 2y = -6 \iff x = -2y - 6$.

$v + 2w - x - 2y = 12 \iff v = 12 - 2w + 2y + (-2y-6) = 6 - 2w$

Infine: $u = -2v - 3w - x - y + 4 = -2(6-2w) - 3w - (-2y-6) - y + 4 = -12 + 4w - 3w + 2y + 6 - y + 4 =$
$= -2 + w + y$

Le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$ sono quindi: $S = \{(w+y-2,\ 6-2w,\ w,\ -2y-6,\ y) \mid w, y \in \mathbb{R}\}$.

Ex.: Risolvere il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$$

SOL.: Considero la matrice associata completa $(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ e applico l'algoritmo di Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 3\mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III} \to -\mathrm{III}]{\substack{\mathrm{II} \to -\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A'|\underline{b}].$$

Quindi $rg(A') = rg(A'|\underline{b}') = 3 =$ numero delle incognite $\Rightarrow \exists!$ soluzione: $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$.