

Polinomio di Taylor di una funzione bivariata

Sia $f(x, y): R^2 \rightarrow R$ una funzione derivabile n volte in un intervallo $I \subset R^2$ contenente il punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Il polinomio di Taylor di ordine n , $P_n(x, y)$, di $f(x, y)$ centrato in $P_0 \equiv (x_0, y_0)$

rappresenta il polinomio bivariato di grado n che meglio approssima $f(x, y)$ in un intorno di P_0 :

$$P_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{i! j!} \frac{\partial^{i+j} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^j} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$
$$i + j \leq n$$

$n = 1$

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Rappresenta il piano che meglio approssima la funzione bivariata in un intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e rappresenta il piano tangente alla superficie in $P_0 = (x_0, y_0)$:

$n = 2$

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right]$$

Rappresenta il polinomio di grado 2 bivariato che meglio approssima la funzione bivariata in un intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$

$n = 3$

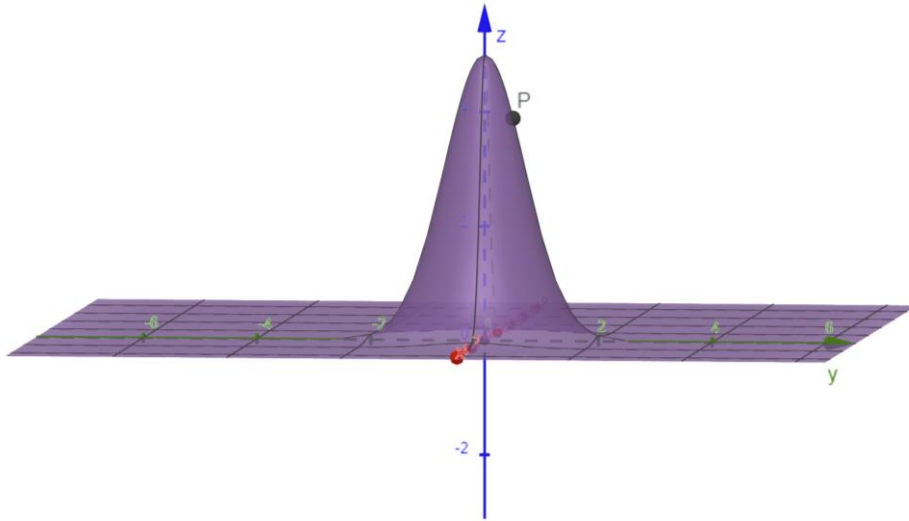
$$\begin{aligned} P_n(x, y) = & f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] + \\ & + \frac{1}{3!} \left[(x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) + 3(x - x_0)^2(y - y_0) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) \right. \\ & \left. + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) + (y - y_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) \right] \end{aligned}$$

Rappresenta il polinomio di grado 3 bivariato che meglio approssima la funzione bivariata in un intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$

Esempio:

$$f(x, y) = 5e^{-x^2-y^2}$$

Sia $P \equiv (0, 0.5)$



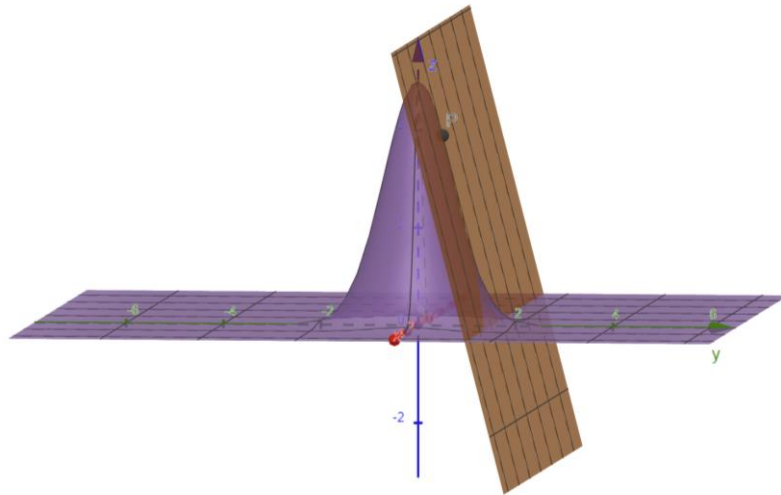
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -10xe^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -10ye^{-x^2-y^2}$$

Il polinomio bivariato di grado 1 che meglio approssima la funzione in un intorno di questo punto ha equazione:

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$P_1(x, y) = f(P) + (x - 0) \cdot (-10 \cdot 0 \cdot e^{-0^2-0.5^2}) + (y - 0.5) \cdot (-10 \cdot 0.5 \cdot e^{-0^2-0.5^2})$$



Calcoliamo adesso il polinomio di Taylor di grado $n=2$

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right]$$

Valutiamo le derivate seconde parziali

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -10e^{-x^2-y^2} + 20x^2e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -10e^{-x^2-y^2} + 20y^2e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 20xye^{-x^2-y^2}$$

