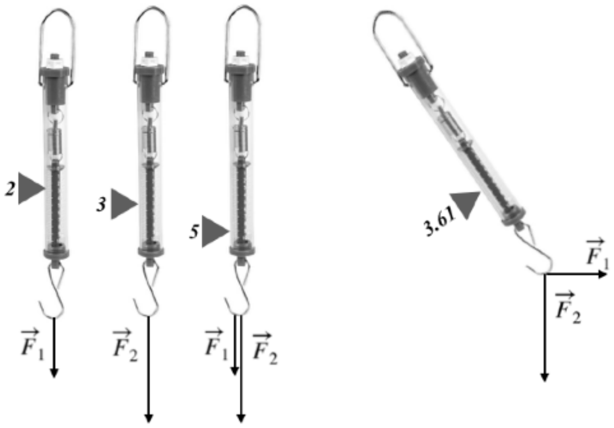
5. Le leggi di Newton e la dinamica del punto materiale

5.1 La forza

L'esperienza quotidiano delle *forze* può darci un'idea intuitiva. Possiamo osservare forze che provocano il moto, o che non lo provocano. Aristotele riteneva che il moto fosse causato dalla forza e che lo stato "naturale" dei corpi fosse la quiete. Newton invece afferma che sono le forze a causare ogni cambiamento di *velocità* di un corpo. Così la luna gira intorno alla Terra (ovvero la sua velocità cambia continuamente direzione) a causa della forza forza gravitazionale esercitata dalla Terra. Possiamo fare una prima classificazione delle forze nel modo seguente:
Forze di contatto: tirare una molla; tirare un carro; calciare una palla; la pressione di un gas; i piedi appoggiati a terra.
Forze di campo: agiscono attraverso lo spazio vuoto: forza gravitazionale, forza elettrica, forza magnetica.
(in realtà, a livello microscopico, esistono solo forze di campo…)

Primo esperimento: le forze sono vettoriali.



5.2 La prima legge di Newton: sistemi di riferimento inerziali

Il passaggio del *gran naviglio* di Galileo:

"Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non piú gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con piú forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con piú fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave,

dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non piú verso questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave, differenze piú e men notabili si vedrebbero in alcuni de gli effetti nominati: e non è dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le mosche parimente e le farfalle, impedite dall'aria, non potrebber seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai notabile si separassero; ma trattenendovisi vicine, perché la nave stessa, come di fabbrica anfrattuosa, porta seco parte dell'aria sua prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta, le mosche importune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora in quella parte del corpo; ma nelle gocciole cadenti pochissima sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto impercettibile."

La prima legge di Newton può essere così formulata:

"Se un corpo non interagisce con altri corpi, si può trovare un sistema di riferimento nel quale la sua accelerazione è nulla."

Un tale sistema di riferimento è detto inerziale. Una formulazione alternativa:

"In assenza di forze esterne e se osservato da un sistema di riferimento inerziale, un corpo in quiete resta in quiete e un corpo in moto continua con moto rettilineo uniforme."

La prima legge di Newton è detta *Legge di Inerzia* (si dice inerzia la tendenza di ogni corpo a NON modificare il moto). In base alla prima legge, osservando da un sistema di riferimento inerziale un corpo che sta accelerando, concludiamo che su di esso sta agendo una forza. Quindi in base alla prima legge definiamo:

La forza è ciò che provoca la variazione di moto di un corpo.

In realtà, la prima legge di Newton è fondamentale esattamente per *definire* i sistemi di riferimento inerziali. Un sistema di riferimento è inerziale quando un corpo non soggetto a forze esterne non ha accelerazione in tale sistema di riferimento. Una *classe* di sistemi di riferimento inerziali è costituita da tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (vedi le trasformazioni di Galileo: in questo caso tutti i sistemi di riferimento misurano un'accelerazione nulla, come quello di partenza). Le successive leggi di Newton sono formulate considerando sistemi di riferimento inerziali, che quindi sono i sistemi di riferimento privilegiati per lo studio del moto dei corpi; anche se è possibile studiare la dinamica di un sistema anche in un sistema di riferimento non inerziale, anzi a volte può essere conveniente. Vedremo più avanti alcuni esempi.

5.3 La massa

La massa è la proprietà di un corpo che rappresenta *quanta resistenza esso oppone ai cambiamenti di velocità*. Se applico la stessa forza a due corpi *1* e *2* e se misuriamo le accelerazioni a_1 e a_2, si definisce

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

La massa di un corpo è una sua proprietà intrinseca; la massa è una proprietà additiva. Da notare con attenzione la differenza tra *massa* e *peso*, da cui approfondiremo i concetti di massa inerziale e di massa gravitazionale.

5.4 La seconda legge di Newton

Che cosa succede ad un corpo se su di esso agiscono forze? In base alle osservazioni, vediamo che $\vec{F} \propto \vec{a}$. Discutendo la massa, poco sopra si è osservato che $|\vec{a}| \propto 1/m$. Quindi, possiamo concludere che

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

La costante di proporzionalità si sceglie pari all'unità, arriviamo così alla ***seconda legge di Newton***:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$\sum \vec{F}$ è la somma di tutte le forze agenti sul corpo ed è una forza detta *forza risultante*. Usando le componenti cartesiane in modo esplicito, la seconda legge di Newton si scrive

$$\sum F_x = m a_x \ ; \quad \sum F_y = m a_y \ ; \quad \sum F_z = m a_z$$

L'unità di misura della forza è il Newton: 1 N = 1 kg m / s^2.

5.5 La terza legge di Newton

Le forze sono *interazioni* tra due corpi. Se due corpi interagiscono tra loro, la forza $\vec{F}_{12}$ esercitata dal corpo 1 sul corpo 2 è uguale in intensità e direzione ed opposta in verso alla forze $\vec{F}_{21}$ esercitata dal corpo 2 sul corpo 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

La terza legge è anche detta ***legge di azione e reazione***.

Esempi:

un proiettile in volo sente la forza gravitazionale della terra ed è accelerato verso il basso, e la terra sente la forza gravitazionale del proiettile ed è accelerata verso l'alto;

un oggetto posto su una superficie: il suo peso preme sulla superficie, la superficie oppone una *forza normale:* la forza normale assume qualunque valore sia necessario fino al limite di rottura!

Introduciamo la *quantità di moto*

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Considerando la massa di un punto materiale una quantità costante, risulta che

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

Quindi la seconda legge di Newton può essere scritta come

$$\sum \vec{F} = \cancel{m}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Se consideriamo una coppia di corpi interagenti, per la terza legge di Newton avremo

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \implies \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t}$$

il che può essere riorganizzato come

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

Il che significa che la quantità

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante}$$

La chiameremo *quantità di moto totale,* e **resta costante a seguito di interazioni tra i due corpi.**

Questo risultato si può generalizzare ad un generico sistema di molti corpi: **se ci sono solo interazioni *interne* al sistema**, cioè ciascun corpo del sistema risente esclusivamente di forze causate da altri corpi dello stesso sistema, **la quantità di moto totale si conserva**, cioè resta costante nel tempo. L'unica situazione in cui la quantità di moto totale di un sistema di corpi può cambiare è quando sono presenti forze *esterne* al sistema (causate cioè da corpi che non sto considerando parte del sistema).

La conservazione della quantità di moto, implicita nelle leggi di Newton, è una delle leggi fondamentali di conservazione della natura. È in realtà il riflesso di una proprietà di *simmetria* della natura: dal fatto che le leggi fisiche non cambiano a seguito di una traslazione dello spazio (ad esempio passare ad un sistema di riferimento con origine in un altro punto, o riprodurre lo stesso fenomeno fisico da un'altra parte) consegue che la quantità di moto totale è costante nel tempo. Questo legame tra simmetrie e quantità conservate è dimostrato nel *teorema di Noether.*

5.6 Diagramma di corpo libero

Nell'applicare le leggi di Newton, uno strumento fondamentale è il ***diagramma di corpo libero***. Si tratta in sostanza di un disegno in cui sono riportate tutte le forze che agiscono su un corpo. Questo diagramma consente di "visualizzare" le interazioni dell'ambiente esterno con il corpo e di determinare il modo in cui si calcolerà la somma delle forze esterne. Attraverso gli esempi e gli esercizi nel seguito sarà possibile capire meglio come utilizzare questo strumento. Alcune note: 1) la forza normale **non** ha *sempre* modulo pari al modulo della forza peso! Si pensi al piano inclinato… 2) la terza legge di Newton parla di due forze che agiscono su *corpi diversi*! 3) nel diagramma di corpo libero è fondamentale mettere *tutte* le forze che agiscono sul corpo!

Esempi:

Un uomo spinge una slitta di masssa m=240 kg, che scivola senza attrito, inizialmente ferma, con una forza costante orizzontale di modulo F=130 N per una certa distanza d=2.3 m. Qual è la velocità finale della slitta?

Due casse adiacenti, la prima di massa m_1=4.2 kg e la seconda di massa m_2=1.4 kg, sono poggiate su un piano privo di attrito. Un uomo spinge la prima cassa con una forza orizzontale di modulo F_1=3.0 N. Trovare l'accelerazione delle due casse e la forza con cui la seconda cassa è spinta dalla prima.

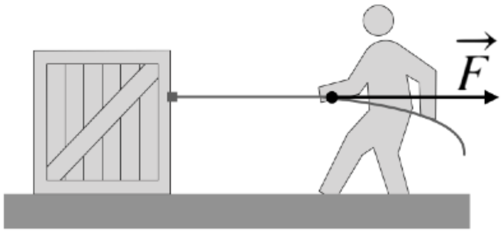
Pesarsi in ascensore. Se la bilancia riporta il mio peso pari a m=72.2 kg, una pesata in ascensore che accelera verso l'alto con a=3.20 m/s^2 quale peso riporterà? Cosa succede se l'ascensore si muove a velocità costante? Cosa succede se accelera verso il basso? E se accelera verso il basso con a_y=-g?

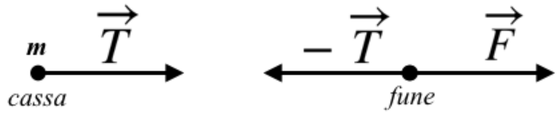
5.7 Forza peso

Dato che ogni corpo lasciato libero di cadere presenta una accelerazione g diretta verso il basso, in termini di forza possiamo dire che esso è soggetto ad una forza di modulo mg, diretta verso il basso. Chiameremo tale forza *forza peso*. Spesso è comodo, fissato un sistema di riferimento, definire l'accelerazione di gravità come vettore $\vec{g}$, indicheremo quindi la forza peso vettoriale come $\vec{P} = m\vec{g}$.

5.8 Forze di tensione

Chiamiamo *fune ideale* una fune molto sottile di massa trascurabile, perfettamente flessibile, e inestensibile.





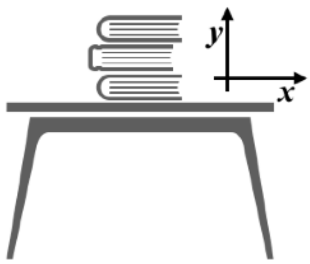
Posto un asse *x* orizzontale diretto verso destra, cosa possiamo dire sulla somma delle forze sulla fune, dato che ha massa nulla?

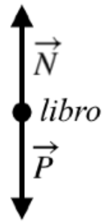
$$\sum F_x = F - T = m_{fune}a_X = 0 \text{ perché } m_{fune} = 0\,; \quad \text{quindi } T = F$$

In altre parole, l*a fune ideale non fa altro che trasmettere la forza per tutta la sua lunghezza, eventualmente cambiandone la direzione.*

5.9 La forza normale

Un libro appoggiato sul tavolo sta fermo, dunque la sua accelerazione è nulla. In base alla seconda legge di Newton, la somma delle forze agenti su di esso sarà anch'essa nulla. In particolare





$$\vec{a} = 0 \implies \sum \vec{F} = 0$$

Fissiamo un asse y verticale diretto verso l'alto. Il peso $\vec{P} = -mg\hat{j}$ sarà dunque bilanciato da una forza che il tavolo esercita sul libro: la *forza normale*. (Normale in questo contesto non significa "ordinaria" ma "perpendicolare" alla superficie che la esercita!)

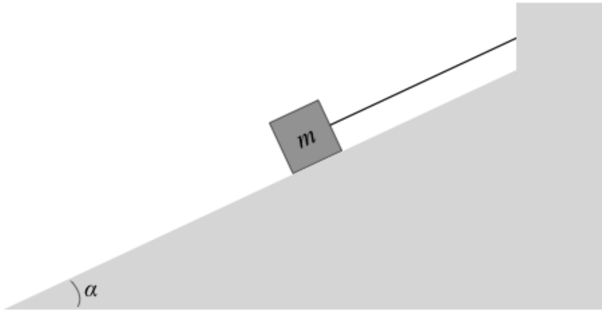
NOTA BENE: $\vec{P}$ e $\vec{N}$ NON formano una coppia azione-reazione!

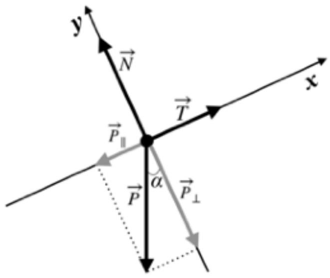
> $\vec{P}$ = forza gravitazionale che la terra esercita sul libro
>> esiste una reazione: la forza gravitazionale che il libro esercita sulla terra
> $\vec{N}$ = forza che il tavolo esercita sul libro. È una reazione alla forza che il libro esercita sul tavolo.

Esempio su forze normali e forze di tensione: piano inclinato.

Un corpo di massa m=18.0 kg è poggiato su un piano, privo di attrito, inclinato di $\theta = 27^o$ rispetto all'orizzontale, Il corpo è trattenuto da una fune che sale parallela al piano. Calcolare la tensione nella fune e la forza normale esercitata dal piano sul corpo.

Scelgo un asse *x* lungo il piano, con verso nella salita, e un asse *y* perpendicolare, diretto verso l'alto. Disegnati tali assi, pongo il corpo nell'origine e disegno le forze che agiscono su di esso (vedi figura). La forza peso può essere scomposta nelle sue componenti cartesiane in questo sistema di riferimento:





$$\vec{P} = -P_{\parallel}\hat{\imath} - P_{\perp}\hat{\jmath} = -(mg\sin\alpha)\hat{\imath} - (mg\cos\alpha)\hat{\jmath}$$

La tensione della fune è parallela al piano quindi all'asse *x,* la forza normale è perpendicolare al piano quindi parallela all'asse *y:*

$$\vec{T} = T\hat{\imath}\ ; \qquad \vec{N} = N\hat{\jmath}$$

Dal momento che il corpo è fermo, si tratta di un problema di statica. L'accelerazione del corpo è nulla, ovvero sono nulle le componenti cartesiane dell'accelerazione. Quindi la somma delle forze è nulla, ovvero sono nulle le somme delle componenti cartesiane delle forze.

$$\begin{cases} 0 = ma_x = \sum F_x = T - mg\sin\alpha \\ 0 = ma_y = \sum F_y = N - mg\cos\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

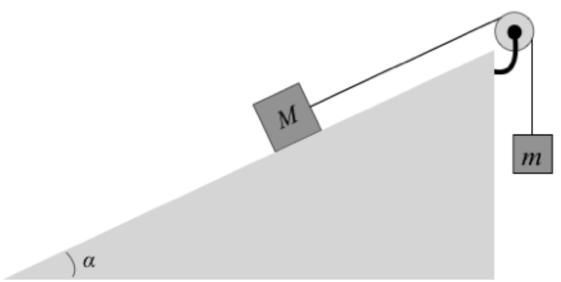
In forma vettoriale, quindi, ho ottenuto:

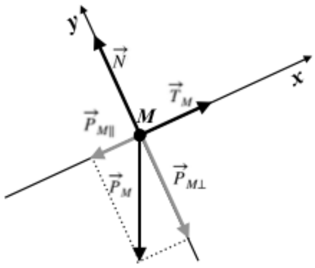
$$\vec{T} = (mg\sin\alpha)\hat{\imath}\ ; \qquad \vec{N} = (mg\cos\alpha)\hat{\jmath}$$

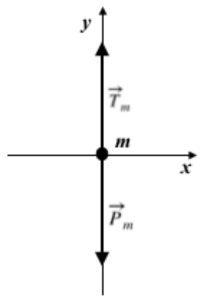
Se taglio la corda, cosa succede? La tensione della fune viene a mancare. Quindi non ci sarà più equilibrio delle forze lungo l'asse *x*, e avrò una componente lungo *x* dell'accelerazione diversa da zero. Lungo l'asse *y*, invece, la forza normale continuerà a bilanciare il peso del corpo.

$$\begin{cases} ma_x = \sum F_x = -mg\sin\alpha \\ 0 = ma_y = \sum F_y = N - mg\cos\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} a_x = -g\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Ulteriore esempio su forze normali e forze di tensione: per i due corpi connessi da una fune come nella figura seguente (considerando il piano inclinato ancora privo di attrito) si calcoli l'accelerazione e la tensione della fune.







In questo caso, scegliamo convenientemente sistemi di riferimento diversi per ciascun blocco. Il fatto che la fune sia ideale implica che il modulo della sua tensione sia uguale alle due estremità (cioè che $|\overrightarrow{T}_M| = |\overrightarrow{T}_m|$) e che le due accelerazioni siano uguali in modulo (infatti la fune è inestensibile, quindi ad ogni spostamento del blocco *M* lungo il piano corrisponde uno spostamento della stessa entità di *m* in verticale) cioè che $|\overrightarrow{a}_M| = |\overrightarrow{a}_m|$. Tradotto nelle componenti dei vettori coinvolti, e tenuto conto della direzione e verso degli assi nei due sistemi di riferimento, tali relazioni diventano:

$$\begin{cases} T_{Mx} = T_{my} \equiv T \\ a_{Mx} = -a_{my} \equiv a \end{cases}$$

dove abbiamo convenientemente chiamato T il modulo della tensione della fune e *a* il modulo dell'accelerazione del blocco *M.* Infatti il sistema ha un solo *grado di libertà*: ovvero il suo moto può essere definito da una sola accelerazione (quella lungo il piano per *M*, corrispondente a quelle verticale, cambiata di segno, per *m*) determinata dalle forze parallele al piano agenti su *M* e da quelle verticali agenti su *m*.

Ora possiamo scrivere la seconda legge di Newton per ciascuno dei due blocchi, considerando le componenti cartesiane nei due sistemi di riferimento indipendenti:

$$\begin{cases} \sum F_{Mx} = T - Mg\sin\alpha = Ma_{Mx} = Ma \\ \sum F_{My} = N - Mg\cos\alpha = 0 \\ \sum F_{my} = T - mg = m a_{my} = -ma \\ \sum F_{mx} = 0 \end{cases}$$

Tale sistema si risolve facilmente, riportando i risultati in forma vettoriale abbiamo:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N} = Mg\cos\alpha\hat{j} \quad \text{(SdR 1)} \\ \overrightarrow{a}_M = \frac{m - M\sin\alpha}{M+m}g\hat{i} \quad \text{(SdR 1)} \\ \overrightarrow{T} = \frac{Mmg}{M+m}(1+\sin\alpha)\hat{i} \quad \text{(SdR 1)} \end{cases}$$

con l'aggiunta che, ovviamente

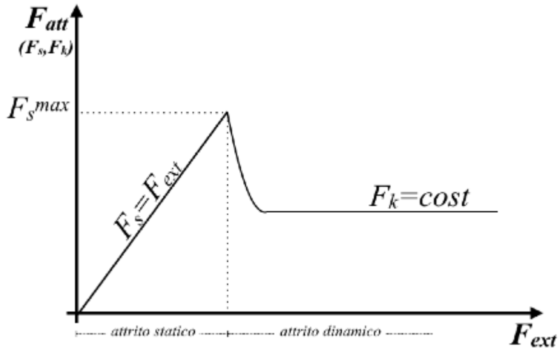
$$\overrightarrow{a}_m = -\frac{m - M\sin\alpha}{M+m}g\hat{j} \quad \text{(SdR 2)}$$

5.10 Forze di attrito

Un corpo che striscia su un piano ad un certo punto si ferma. Ha subito una accelerazione opposta al verso del moto, quindi ne concludiamo che ha subito una forza. Chiamiamo tale forza *forza di attrito (radente)*. Il valore medio di tale forza sarà pari alla massa del corpo per l'accelerazione media osservata.

Dall'osservazione si può ricavare una legge di natura empirica sulle forze di attrito tra le superfici secche (nel senso di non oliate o in generale lubrificate con materiale fluido). Se applico una forza crescente nel tempo per misurare la forza di attrito, osservo una situazione simile a quella riportata nel grafico.

Finché il corpo è fermo, la forza di attrito sarà uguale in modulo, e opposta in verso, alla forza esterna applicata (perché, restando il corpo fermo, avrò $\sum F = 0$). All'improvviso, superato un certo valore della forza applicata, il corpo si mette in moto, avrà accelerazione diversa da zero e quindi la forza di attrito ora è minore di quella esterna, e non dipende più da essa. Chiamiamo *attrito statico* quello presente quando il corpo è in quiete, e *attrito dinamico*



quello presente quando il corpo è in moto (striscia). L'attrito statico è dunque caratterizzato dall'avere un valore massimo. Si osserva che tale valore, in prima approssimazione, 1) non dipende dall'area di contatto 2) è proporzionale alla forza normale. Scriviamo quindi

$$F_s \leq \mu_s N$$

dove μ_s, detto *coefficiente di attrito statico*, è il rapporto tra la *massima* intensità della forza di attrito statico possibile e la forza normale.

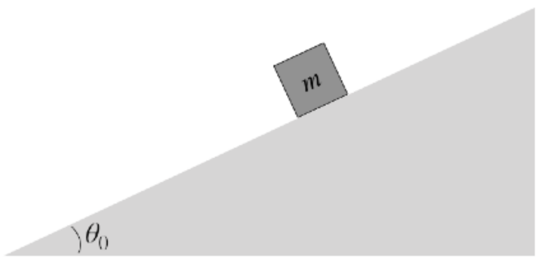
Anche la forza di attrito dinamico segue le stesse due leggi empiriche citate sopra. Si introduce quindi un analogo coefficiente di attrito, detto *coefficiente di attrito dinamico*, μ_k

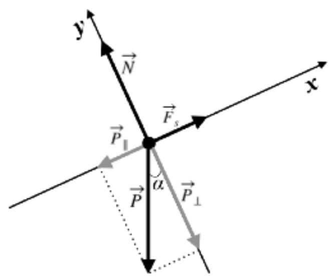
$$F_k = \mu_k N$$

Di solito, nella stragrande maggioranza dei casi, si ha $\mu_s > \mu_k$.

Esempio con attrito

Ponendo un oggetto su un piano inclinato e aumentando progressivamente l'angolo che questo forma con l'orizzontale, troviamo un angolo θ_0 a partire dal quale il corpo scivola. In questo modo è possibile determinare il coefficiente di attrito statico μ_s.





Un attimo prima che il corpo scivoli siamo ancora in una situazione statica, in cui $\sum F = 0$. In particolare, detto *x* un asse parallelo al piano, avremo $\sum F_x = -mg\sin\theta + F_s = 0$. Per l'angolo θ_0, ho raggiunto la massima forza di attrito possibile F_s^{max}:

$$-mg\sin\theta_0 + F_s^{max} = 0$$
$$-mg\sin\theta_0 + \mu_s N = 0$$
$$-mg\sin\theta_0 + \mu_s mg\cos\theta_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_s = \tan\theta_0$$

Analogamente potrei determinare μ_k: mentre il corpo scivola sul piano, riduco l'angolo θ fino a quando osservo il corpo proseguire il moto a velocità costante: l'accelerazione è nulla, quindi la somma delle forze parallele al piano è nulla, quindi sono nella stessa situazione mostrata sopra, ma in regime di attrito dinamico. Detto θ_k l'angolo che annulla l'accelerazione, avremo quindi $\mu_k = \tan \theta_k$.

5.11 La forza elastica: l'oscillatore armonico

Tutti abbiamo familiarità con le *molle*. Una molla è un oggetto che tipicamente esercita una forza di richiamo: può "tirare" se la allunghiamo o "spingere" se la comprimiamo, ha quindi la tendenza a riportarsi ad una sua lunghezza "naturale". Osserviamo che la forza che la molla esercita è proporzionale all'allungamento/compressione. Caratterizziamo quindi la molla con una lunghezza a riposo, l_0, e con una costante elastica k, che determina la proporzionalità tra la forza espressa e l'allungamento:

$$F = -k(l - l_0)$$

Il segno meno è fondamentale: ci dice che se *aumentiamo l* oltre la lunghezza di riposo, la molla "tira" (allungamento positivo, forza negativa), mentre se *diminuiamo l* oltre la lunghezza di riposo, la molla "spinge" (allungamento negativo, forza positiva).

Vediamo come studiare dal punto di vista dinamico questa semplice forza. Scelgo un sistema di riferimento con asse *x* tale che *x*=0 nella posizione di riposo. Allora l'espressione della forza si semplifica ulteriormente:

$$F = -kx$$

Ora utilizziamo la seconda legge di Newton e riarrangiamo un po'

$$ma = -kx \quad \Longrightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2} = -kx$$

cioè

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

Abbiamo una equazione differenziale, chiaramente ricordiamo che la *x* e la *a* scritte sopra sono funzioni del tempo. Anzi scriviamolo esplicitamente:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Quindi questa equazione differenziale è soddisfatta da una *f(t)* tale che la sua derivata seconda è uguale a sé stessa, a meno di un fattore moltiplicativo negativo. Conosciamo una classe di funzioni con questa proprietà: seni e coseni. Proviamo con una soluzione avente questa forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

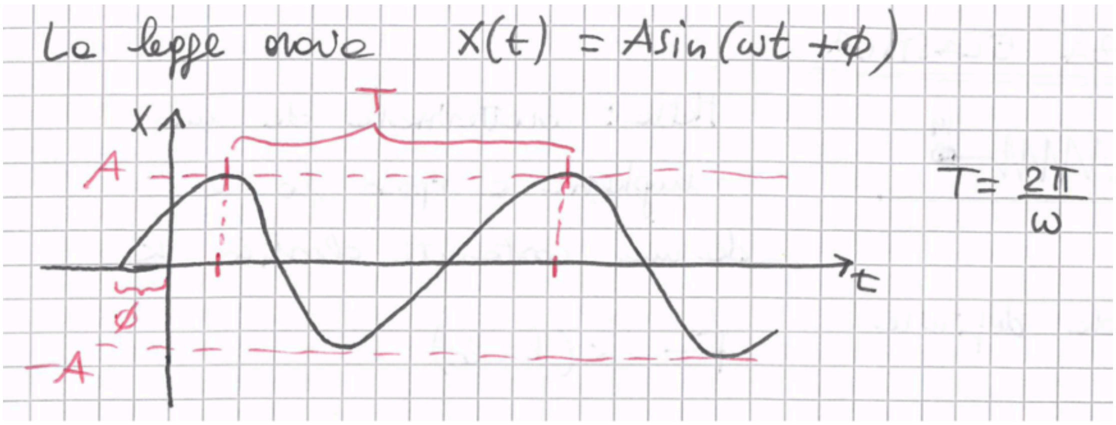
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

Vediamo che la *x(t)* scelta soddisfa l'equazione differenziale quando $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Un sistema che soddisfa l'equazione differenziale della forza elastica, e ha soluzioni *armoniche* (cioè composte da seni o coseni o una loro combinazione lineare) è detto un *oscillatore armonico*. Nel seguito vedremo come un tale sistema si presti a descrivere un grande insieme di fenomeni di oscillazione, in alcuni casi esattamente, in alcuni casi in modo approssimato.

Proviamo a disegnare il grafico della legge oraria $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$:



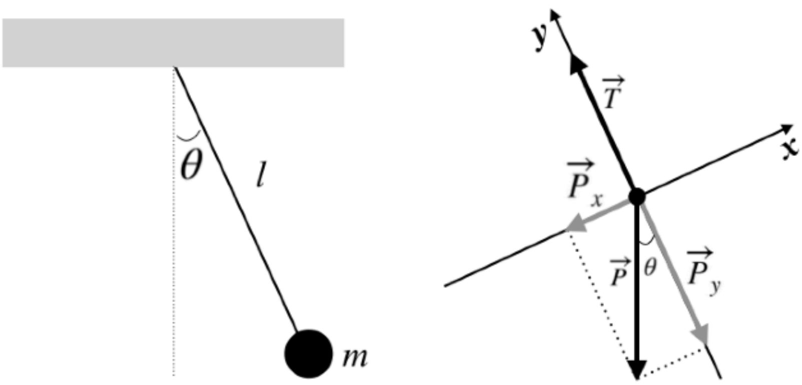
Vediamo il periodo di questa funzione è $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Dove ω è detta *pulsazione*; T è detto *periodo*; ν è detta *frequenza.*

5.12 Il pendolo semplice

Scriviamo la somma delle forze lungo l'asse *x* sccelto come in figura, applicando la seconda legge di Newton:

$$\sum F_x = -mg\sin\theta = ma \implies a = -g\sin\theta$$



dato che la massa *m* si muove su un arco di circonferenza di raggio *l*, la sua accelerazione tangenziale sarà pari al raggio per l'accelerazione angolare:

$$a = l\alpha = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

quindi, abbiamo l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Nell'ipotesi di *piccole oscillazioni*, ovvero che la massima escursione angolare θ sia piccola, possiamo approssimare $\sin\theta \simeq \theta$, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

Si tratta dunque dell'equazione differenziale di un oscillatore armonico con pulsazione e periodo

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \ ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Questo spiega il fenomeno dell'*isocronismo* del pendolo per piccole oscillazioni (il periodo delle oscillazioni non dipende dall'ampiezza, come per una forza elastica), e dunque la sua utilità nella costruzione di orologi. A differenza di una forza elastica, il periodo non dipende però dalla massa appesa al filo, ma solo dalla sua lunghezza e dall'accelerazione di gravità. Questo fatto è stato utilizzato per ricavare misure precise dell'accelerazione gravitazionale, misurando il periodo di un pendolo di lunghezza nota. L'indipendenza del periodo dalla massa del pendolo è conseguenza del fatto che l'accelerazione di gravità è la stessa per tutti i corpi, e cioè nella proporzionalità fra *massa inerziale* e *massa gravitazionale*. Torneremo su questo concetto quando studieremo la legge di gravitazione universale.