Algebra e geometria,

20 Aprile 2022

Cambio di coordinate

V sp. vettoriale

$\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$ base ordinata di V

$v \in V$

$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_d b_d$

scriviamo

$$v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)_{\mathcal{B}}$$

Problema: se abbiamo due basi B e C come possiamo passare dalle coordinate rispetto a B a quelle rispetto a C?

Per semplicità di notazione prendiamo $d=3$.

$B = (b_1, b_2, b_3)$ $\qquad$ $C = (c_1, c_2, c_3)$

Determiniamo, prima di tutto le coordinate dei vettori di B rispetto alla base C.

$$b_1 = \underline{a_{11}\, c_1 + a_{21}\, c_2 + a_{31}\, c_3} \qquad b_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})_C$$

$$b_2 = \underline{a_{12}\, c_1 + a_{22}\, c_2 + a_{32}\, c_3}$$

$$b_3 = \underline{a_{13}\, c_1 + a_{23}\, c_2 + a_{33}\, c_3}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = M_C^B = \text{matrice del cambio di base da } B \text{ a } C.$$

$v \in V$

$v = (x_1, x_2, x_3)_B = (y_1, y_2, y_3)_C$

Vogliamo scrivere le y rispetto alle x.

$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3$

$= x_1(a_{11} c_1 + a_{21} c_2 + a_{31} c_3) + x_2(a_{12} c_1 + a_{22} c_2 + a_{32} c_3)$
$+ x_3(a_{13} c_1 + a_{23} c_2 + a_{33} c_3)$

$= \underbrace{(x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13})}_{= y_1} c_1 + \overbrace{(x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23})}^{= y_2} c_2$
$+ \underbrace{(x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33})}_{= y_3} c_3$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

sono equivalenti a

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Esempio: $V \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione $2x - y + 3z = 0$

$$B = (\overset{b_1}{(1,2,0)}, (-1,1,1)) \qquad C = ((1,5,1), (0,3,1))$$

Determinare la matrice M_C^B del cambio di base.

$$b_1 = (1,2,0) = a_{11} c_1 + a_{21} c_2$$
$$= (a_{11}, 5a_{11} + 3a_{21}, a_{11} + a_{21})$$

$a_{11} = 1$

$a_{21} = -1$

$$b_2 = (-1,1,1) = a_{12} c_1 + a_{22} c_2$$

$$= a_{12}(1,5,1) + a_{22}(0,3,1)$$

$$= (a_{12},\ 5a_{12} + 3a_{22},\ a_{12} + a_{22})$$

$a_{12} = -1$

$a_{22} = 2$

$$M^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sia $v = (2, -3)_B$ Che coordinate ha rispetto a C?

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$v = (5, -8)_C$$

$$v = 2(1,2,0) - 3(-1,1,1) = (5,1,-3)$$
$$= 5(1,5,1) - 8(0,3,1) = (5,1,-3)$$

Applicazioni lineari

Sono le funzioni tra spazi vettoriali che ne "rispettano" le strutture.

Def: U, V spazi vettoriali. Una funzione

$$F : U \longrightarrow V$$

si dice applicazione lineare se

1. $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U$
2. $F(\alpha u) = \alpha F(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u \in U$

1 + 2 $F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 F(u_1) + \alpha_2 F(u_2)$

Funzioni che non sono lineari

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = (x-y+1, -y)$

$\alpha = 0$
$u = (0,0)$

2 $\underset{\underset{(1,0)}{\parallel}}{F(\alpha u)} \overset{?}{=} \alpha \underset{\underset{(0,0)}{\parallel}}{F(u)}$

la 2 non è soddisfatta $\Rightarrow F$ non è lineare.

Lemma: $F: U \to V$ è lineare, allora

$$F(0_U) = 0_V$$

Dim

$$\underset{\substack{\| \\ F(0_U)}}{F(0 \cdot 0_U)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pr} \\ 2}}{=} 0\,F(0_U) = 0_V$$

$\square$

Altro non esempio $\quad F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (xy, -x)$$

$$F(0,0) = (0,0) \checkmark$$

$u = (1,0) \quad \alpha = 2$

$$F(\alpha u) = F(2,0) = (0,-2)$$

$$\alpha F(u) = 2F(1,0) = (0,-2)$$

$u = (1,1) \quad \alpha = 2$

$$F(\alpha u) = F(2,2) = (4,-2)$$

$$\alpha F(u) = 2 \cdot (1,-1) = (2,-2)$$

Esempio

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y) = (x-y,\ 2x)$$

Verifichiamo ① + ②

$u_1 = (x_1, y_1)$

$u_2 = (x_2, y_2)$

$$F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2,\ 2\alpha_1 x_1 + 2\alpha_2 x_2)$$

$$\alpha_1 F(u_1) + \alpha_2 F(u_2) = \alpha_1 (x_1 - y_1, 2x_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2, 2x_2)$$

$$= (\alpha_1 x_1 - \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_2 y_2,\ 2\alpha_1 x_1 + 2\alpha_2 x_2)$$

Questo esempio si generalizza:

se una funzione tra due spazi vettoriali si esprime tramite funzioni lineari omogenee nelle coordinate esso è automaticamente lineare.

Esempio: $U \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad U = \langle (1,1,1),(1,0,1) \rangle$

$B = ((1,1,1),(1,0,1))$

$V = \mathbb{R}^3$

$F : U \to V$ $\qquad F((x,y)_B) = (x-y,\ y,\ 2x)$

Matrice associata ad un'applicazione lineare.

$U = \langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle$

$V = \mathbb{R}^3 \qquad F((x,y)_B) = (x-y, y, 2x)$

B base del dominio

E base del codominio

$F(b_1) = F((1,0)_B) = \underline{(1,0,2)}$

$F(b_2) = F((0,1)_B) = \underline{(-1,1,0)}$

$$M_E^B(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_E^B(F)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y\\2x\end{pmatrix}$$