NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI MDP, 29/01/2024

Riportare sotto ad ogni esercizio il relativo svolgimento in bella copia.

Esercizio 1 Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Facciamo tre estrazioni con reinserimento. Per ognuna delle estrazioni, vinciamo o perdiamo dei soldi con la seguente regola: se il numero pescato è dispari, vinciamo un importo uguale al numero riportato, se invece è pari perdiamo un importo uguale al numero riportato. Per $n = 1, 2, 3$ indichiamo con X_n l'importo della vincita ricavata dalle prime n estrazioni (negativo in caso di perdita).

i) Determinare la densità di X_1.
ii) Calcolare $P(X_2 > 0)$ e $P(X_2 > 0|X_1 = 1)$. Determinare quindi se gli eventi $X_2 > 0$ e $X_1 = 1$ sono indipendenti.
iii) Supponiamo che nelle tre estrazioni sia stato estratto almeno due volte il 9; calcolare la probabilità che X_3 sia positivo.
iv) Calcolare $P(X_3 = 0)$.
v) Calcolare il valore atteso e la varianza di X_3.

Soluzione. i) La variabile X_1 è uniforme sull'insieme $-10, -8, -6, -4, -2, 1, 3, 5, 7, 9$.

ii) Siccome le estrazioni sono tutte equiprobabili, dobbiamo calcolare i casi favorevoli. Chiaramente $P(X_2 = 0) = 0$. I casi favorevoli all'evento $X_2 > 0$ sono quelli in cui il maggiore dei due numeri estratti è dispari. Distinguendo il caso in cui i due numeri sono uguali da quello in cui sono diversi, troviamo

$$P(X_2 > 0) = \frac{2 \cdot (8 + 6 + 4 + 2) + 5}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

D'altra parte se $X_1 = 1$, allora $X_2 > 0$ se e solo se alla seconda estrazione estraggo un numero dispari: vale a dire, abbiamo $P(X_2 > 0|X_1 = 1) = 1/2$. Dunque i due eventi sono dipendenti.

iii) Estraendo 2 nove, la vincita è necessariamente positiva. Dunque la probabilità richiesta è 1.

iv) Osserviamo che se pesco 3 numeri pari vinco necessariamente, mentre se pesco 3 numeri dispari perdo necessariamente. Se inoltre pesco esattamente 2 numeri pari, allora la vincita non può essere nulla.

Pertanto affinché $X_3 = 0$ devo necessariamente pescare un numero pari e due numeri dispari, e la somma dei 2 dispari deve coincidere con il numero pari. Tutte le configurazioni sono equiprobabili, quindi dobbiamo contare il numero di tali configurazioni.

Supponiamo di avere 3 numeri $a > b \geq c$ compresi tra 1 e 10, con $a = b + c$, e supponiamo che a sia pari e che b, c siano dispari. Chiaramente a varia tra 2 e 10, mentre per b e c abbiamo le seguenti possibilità

2	(1,1)		
4	(3,1)		
6	(5,1)	(3,3)	
8	(7,1)	(5,3)	
10	(9,1)	(7,3)	(5,5)

Andando a calcolare tutte le possibili permutazioni di tali configurazioni (a, b, c) troviamo

$$P(X_3 = 0) = \frac{3 + 6 + 6 + 3 + 6 + 6 + 6 + 6 + 3}{10^3} = \frac{45}{10^3} = \frac{9}{200}$$

v) Osserviamo che X_3 è somma di 3 variabili aleatorie indipendenti dello stesso tipo di X_1, vale a dire uniformi sull'insieme $-10, -8, -6, -4, -2, 1, 3, 5, 7, 9$. Abbiamo

$$E(X_1) = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10}{10} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$E(X_1^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100}{10} = \frac{385}{10} = 38.5$$

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 38.5 - \frac{1}{4} = 38.25$$

Pertanto

$$E(X_3) = -\frac{3}{2} \qquad Var(X_3) = 38.25 \cdot 3 = 114.75$$

Esercizio 2 Giovanni si rade la barba ogni giorno nel suo bagno in un momento a caso della giornata, utilizzando un rasoio elettrico e impiegandovi 10 minuti ogni volta. In assenza di danneggiamenti esterni, il tempo di vita del rasoio (inteso come tempo in cui il rasoio è effettivamente in funzione) espresso in minuti è stimato avere densità normale di media 4000 e scarto quadratico medio 150.

i) Qual è la probabilità che, con un uso di 10 minuti al giorno e in assenza di danneggiamenti esterni, il tempo di vita del rasoio sia superiore a 365 giorni?

L'impianto elettrico dell'appartamento di Giovanni subisce ogni giorno uno sbalzo di corrente, che avviene in un istante a caso della giornata. Se tale sbalzo si verifica mentre Giovanni si fa la barba, il rasoio si rompe.

ii) Qual è la probabilità che il rasoio di Giovanni subisca uno sbalzo di corrente in un dato giorno?

iii) Qual è la probabilità che il rasoio di Giovanni rimanga in vita per più di 200 giorni?

iv) Qual è la probabilità che il rasoio di Giovanni si rompa nell'arco del 201-esimo giorno di utilizzo?

Soluzioni.

i) Sia X il tempo di vita del rasoio, in assenza di cause esterne che lo danneggino. Allora

$$P(X > 3650) = P(\zeta_0 > \tfrac{3650-4000}{150}) = P(\zeta_0 > -2.33) = 1 - P(\zeta_0 < 2.33) = 0.9901,$$

ii) Una giornata è fatta da $24 \cdot 60 = 1440$ minuti. Dunque la probabilità che lo sbalzo di corrente si verifichi nei 10 minuti di utilizzo del rasoio è $10/1440 = 1/144 \simeq 0.007$.

iii) Sia Y il tempo di vita del rasoio di Giovanni, espresso in giorni. Osserviamo che 200 giorni equivalgono a un utilizzo per 2000 minuti. Allora

$$P(X > 2000) = P(\zeta_0 > \tfrac{2000-4000}{150}) = P(\zeta_0 > -\tfrac{2000}{15}) = 1$$

Dunque

$$P(Y > 200) = (\tfrac{143}{144})^{200} P(X > 2000) = (\tfrac{143}{144})^{200} = 0.2481$$

iv) La probabilità che il rasoio si rompa nell'arco del 201-esimo giorno (e non prima) è

$$P(200 < Y < 201) = \frac{143^{200}}{144^{200}} \cdot \frac{P(X > 2000) + 143 \cdot P(2000 < X < 2010)}{144}$$

D'altra parte

$$P(2000 < X < 2010) = P(-\tfrac{2000}{150} < \zeta_0 < -\tfrac{1990}{150}) = 0$$

Pertanto nei fatti la probabilità che il rasoio si rompa nell'arco del 200-esimo giorno (e non prima) coincide con la probabilità che il rasoio subisca uno sbalzo di corrente nell'arco del 200-esimo giorno (e non prima), ovverosia

$$P(200 < Y < 201) = \frac{143^{200}}{144^{201}} = 0.0017$$

Esercizio 3 Sia X una variabile aleatoria continua uniforme sull'intervallo $[0,2]$ e sia Y una variabile aleatoria continua con densità

$$f_Y(t) = \begin{cases} 4t^3 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Supponiamo che X, Y siano indipendenti, e sia $Z = \max(X, Y)$.

i) Determinare una densità per Z.

ii) Calcolare valore atteso e varianza di Z.

iii) Date variabili aleatorie continue indipendenti $Z_1, \ldots, Z_{100}$ tutte con la stessa densità di Z, calcolare

$$P(Z_1 + \ldots + Z_{100} > 150)$$

Soluzione. i) La funzione di ripartizione di X è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t/2 & \text{se t } \in [0,2] \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

La funzione di ripartizione di Y è ottenuta integrando la densità, dunque

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t^4 & \text{se } t \in [0,1] \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Pertanto la funzione di ripartizione di Z è data da

$$F_Z(t) = F_X(t) F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t^5/2 & \text{se } t \in [0,1] \\ t/2 & \text{se } t \in [1,2] \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Una densità per Z è ottenuta dervando la ripartizione, dunque troviamo

$$f_Z(t) = \begin{cases} 5t^4/2 & \text{se } t \in [0,1] \\ 1/2 & \text{se } t \in [1,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ii) Il valore atteso di Z è dato dall'integrale

$$E(Z) = \int_0^2 t f_Z(t) dt = \frac{5}{2} \int_0^1 t^5 dt + \frac{1}{2} \int_1^2 t dt = \frac{5}{12} + \frac{3}{4} = \frac{7}{6} = 1.1667$$

Per calcolare la varianza, calcoliamo

$$E(Z^2) = \int_0^2 t^2 f_Z(t) dt = \frac{5}{2} \int_0^1 t^6 dt + \frac{1}{2} \int_1^2 t^2 dt = \frac{5}{14} + \frac{7}{6} = \frac{64}{42} = 1.5238$$

dunque

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1.5238 - 1.3612 = 0.1626$$

iii) Per il Teorema del limte centrale possiamo approssimare $Z_1 + \ldots + Z_{100} \sim N(116.67, 16.26)$. Pertanto

$$P(Z_1 + \ldots + Z_{100} > 150.5) = P(\zeta_0 > \frac{150.5 - 116.67}{4.03}) = 1 - \Phi(8.39) = 0$$