TEOR (UNICITÀ del LIMITE)

Sia $I$ intervallo o intervallo forato, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in [\inf I, \sup I]$, $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to c} f(x) = m$

allora $\ell = m$.

**TEOR** (PERMANENZA del SEGNO)

Sia $I$ int. o int. forato di $\mathbb{R}$,
sia $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in [\inf I, \sup I]$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Supponiamo $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

Allora:

i) se $l < 0 \Rightarrow \exists\, U$ intorno di $c$ t.c. $f(x) < 0 \ \forall x \in U \cap I \setminus \{c\}$

ii) se $l > 0 \Rightarrow \exists\, U$ intorno di $c$ t.c. $f(x) > 0 \ \forall x \in U \cap I \setminus \{c\}$

TEOR (dei 2 CARABINIERI)

Sia $I$ int. o int forato di $\mathbb{R}$, $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $c \in [\inf I, \sup I]$, $\ell \in \mathbb{R}$.

Se $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = \ell$

e se $\exists$ $U$ intorno di $c$ t.c.

$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in U \cap I \setminus \{c\}$

Allora $\lim_{x \to c} g(x) = \ell$.

## O-PICCOLO (FUNZ. TRASCURABILE ... -

**Def** $I$ int. o int. forato, $f, g : I \to \mathbb{R}$

$c \in [\inf I, \sup I]$

Scriviamo che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$

se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

**ES** • $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$

• $x^2 = o(x^3)$ per $x \to +\infty$

## FUNZIONI EQUIVALENTI per $x \to c$

Scriviamo che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$

se $f(x) = g(x)\left(1 + o(1)\right)$ per $x \to c$

ES: $\boxed{\frac{3x^4 - 2x + 1}{2x^2 + x + 5}} = \frac{3x^4\left(1 + o(1)\right)}{2x^2\left(1 + o(1)\right)}$

$\sim \frac{3x^4}{2x^2} = \frac{3}{2}x^2$ per $x \to +\infty$

- $$\frac{x^3-2x^2+x}{x+3x^4-1} = \frac{x(1+o(1))}{-1} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\sim -x \quad \text{per } x \to 0$$

---

LIMITI UNILATERI

Sia $I$ int, int forato di $\mathbb{R}$, $c \in ]\inf I, \sup I]$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

- Diciamo che $f$ ha LIMITE per $x \to c$ da SINISTRA

se $$\lim_{x\to c} \underbrace{f|_{I\cap]-\infty,c[}}(x) = \ell$$

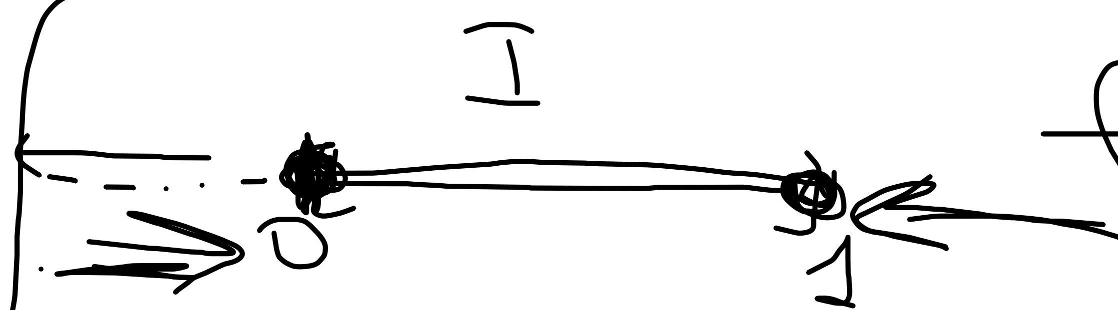
RESTRIZIONE di $f$ a $I \cap ]-\infty, c[$:
$f|: I \cap ]-\infty, c[ \to \mathbb{R}$

RESTRIZIONE di $f$ ad $A$ $(A \subseteq \mathbb{R})$

$f|_A$ è la funzione

$$f|_{A\cap I} : A \cap I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

$\operatorname{sen}|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$




$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$I \cap ]-\infty, 0[ = \emptyset$

Diciamo che $f$ ha LIMITE per $x \to c$ da DESTRA

( dove $c \in [\inf I, \sup I[$ )

quando $\lim\limits_{x \to c} f_{|I \cap ]c, +\infty)}(x) = \ell$

NOTAZIONE. Se esiste il LIMITE da DESTRA lo indichiamo con $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \ell$

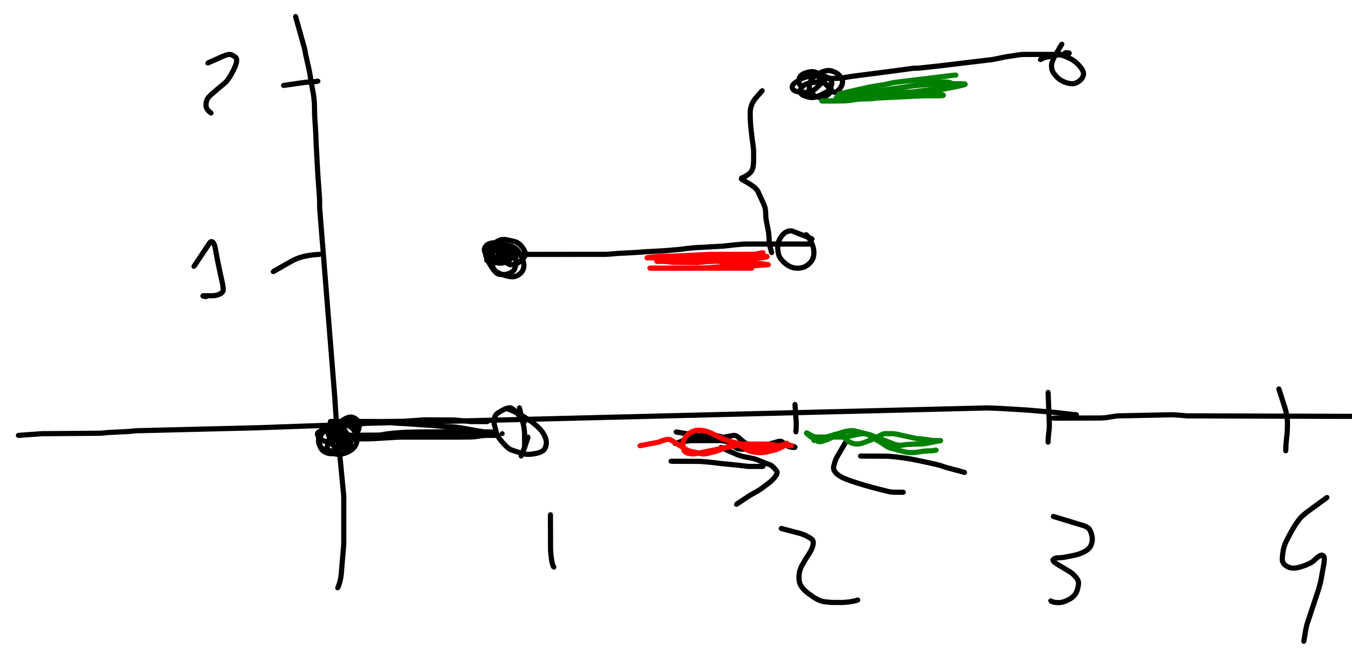
. Se esiste il LIMITE da SINISTRA lo indichiamo con $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \ell$

ES • $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

• $f(x) = [x]$



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

TEOR

Sia $I$ int, int forato, $f: I \to \mathbb{R}$,

$c \in \,]\inf I, \sup I[$.

Allora $\exists \lim_{x \to c} f(x)$

$\Updownarrow$

$\exists \lim_{x \to c^+} f(x)$, $\exists \lim_{x \to c^-} f(x)$ e coincidono

# TEOR (CAMBIO di VARIABILE)

Siano $I, J$ int. o int. forati di $\mathbb{R}$,

siano $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$,

$f(I) \subseteq J$.

Siano $x_0 \in [\inf I, \sup I]$ e $\ell \in [\inf J, \sup J]$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{y \to \ell} g(y) = k$

(*) e $\exists\, U$ intorno di $x_0$ t.c. $f(x) \neq \ell$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = k$

(*) non serve se $\ell \in J$ e $g(\ell) = k$

# ESEMPI ed ESERCIZI

- Limiti di funzioni razionali

per $x \to \pm\infty \rightsquigarrow$ come per le successioni

- $$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^p}} = \begin{cases} \text{NON ESISTE se } p \text{ è dispari} \\ +\infty \quad \text{se } p \text{ è pari} \end{cases}$$

Se $p$ è dispari

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^p} = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^p} = -\infty$$

# FUNZ. ESPONENZIALE

$$f(x) = a^x \quad a > 0$$

$\boxed{a>1}$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

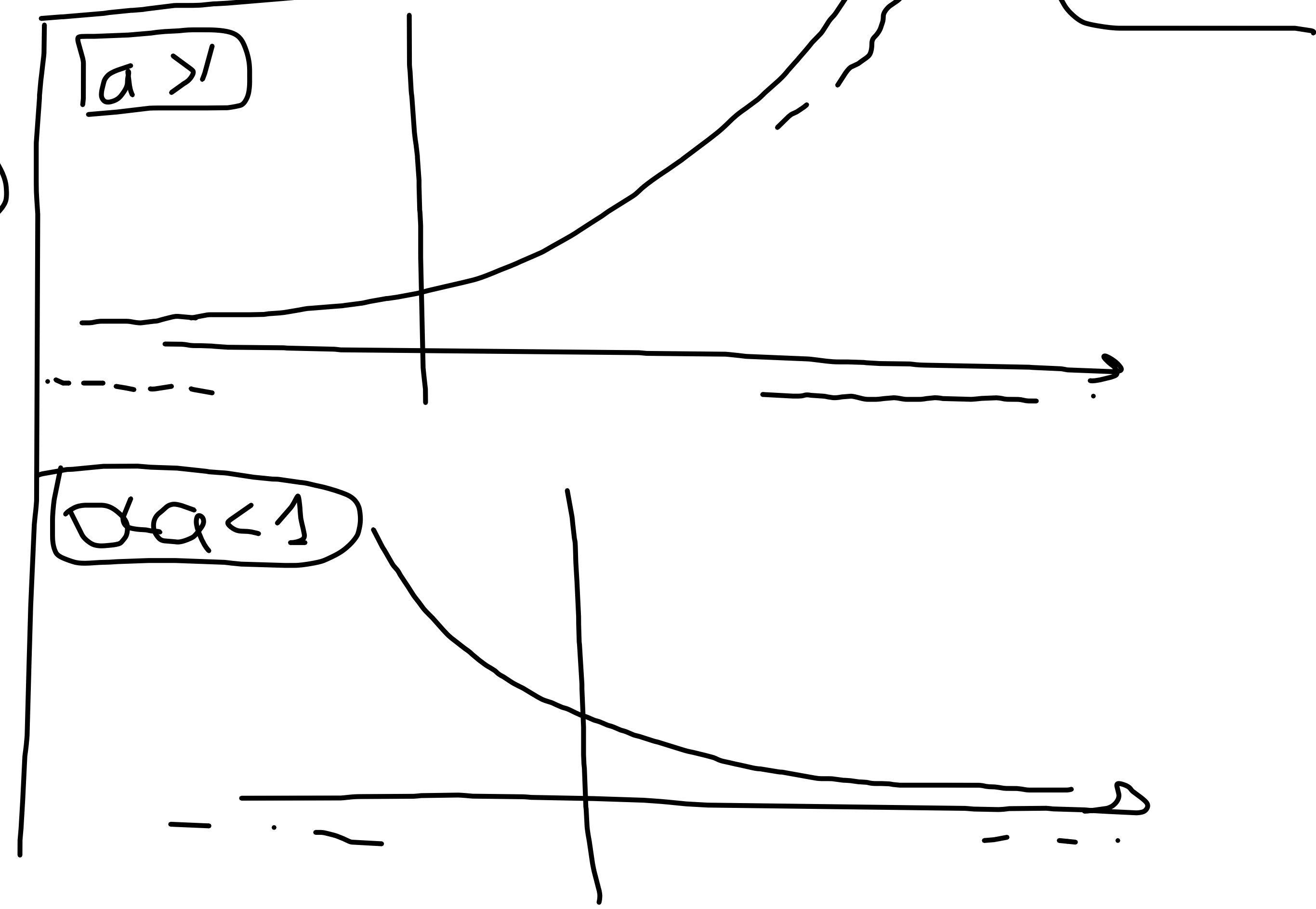
osservo che

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^y \quad \frac{1}{a} < 1$$

$\boxed{0<a<1}$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$



# FUNZ. LOG.

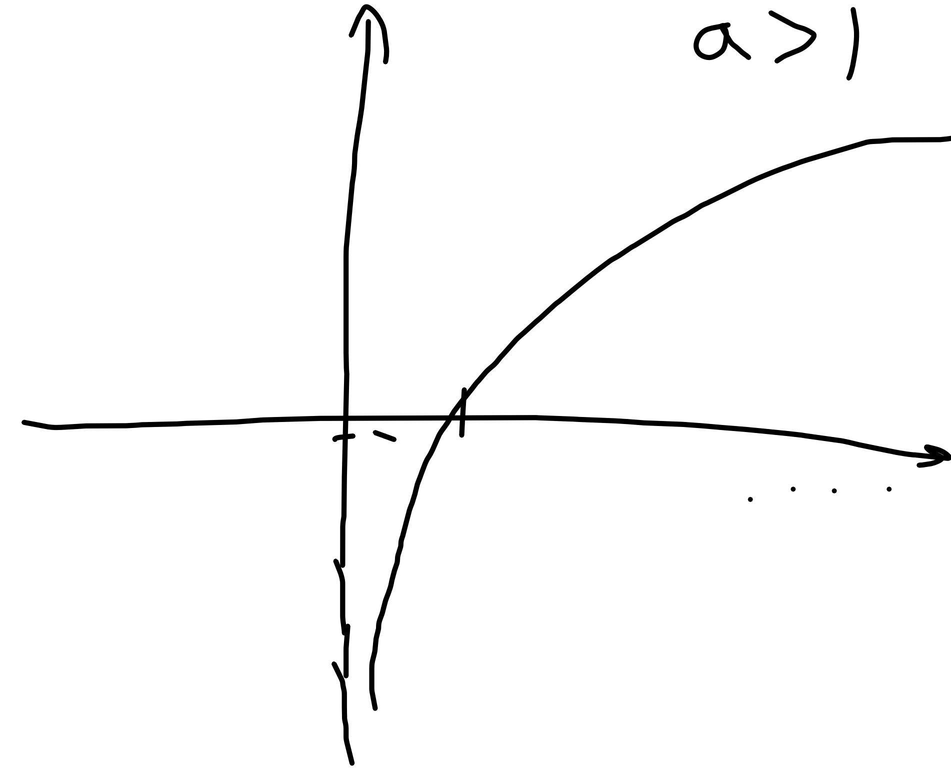
$\log_a x$

$\boxed{a > 1}$

$$\log_a x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$$\log_a x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

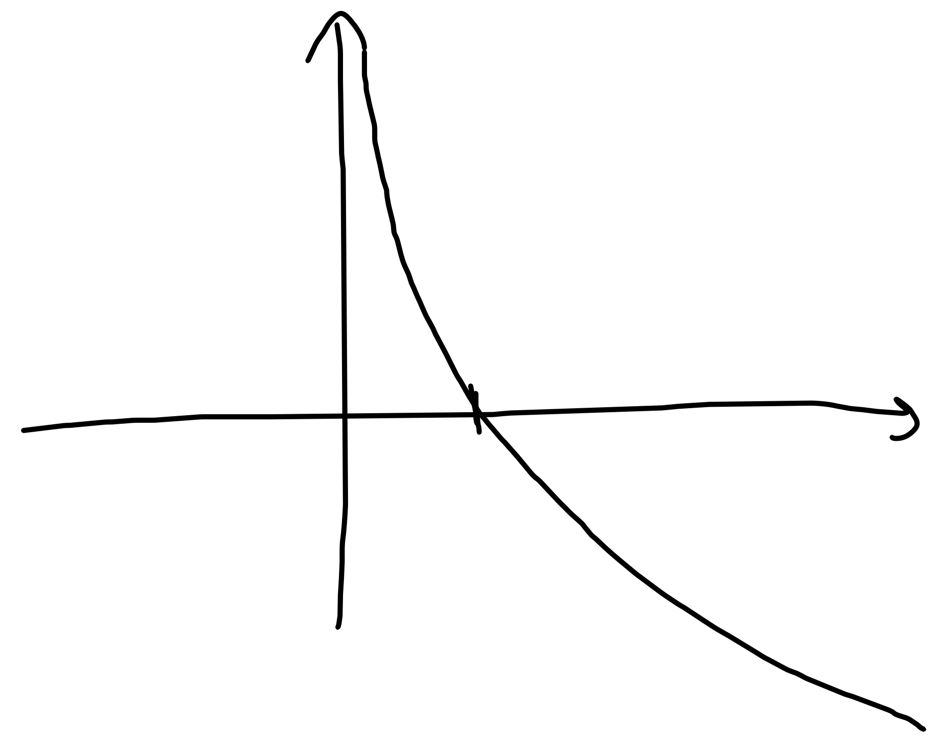
$a > 1$



$\boxed{0 < a < 1}$

$$\log_a x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

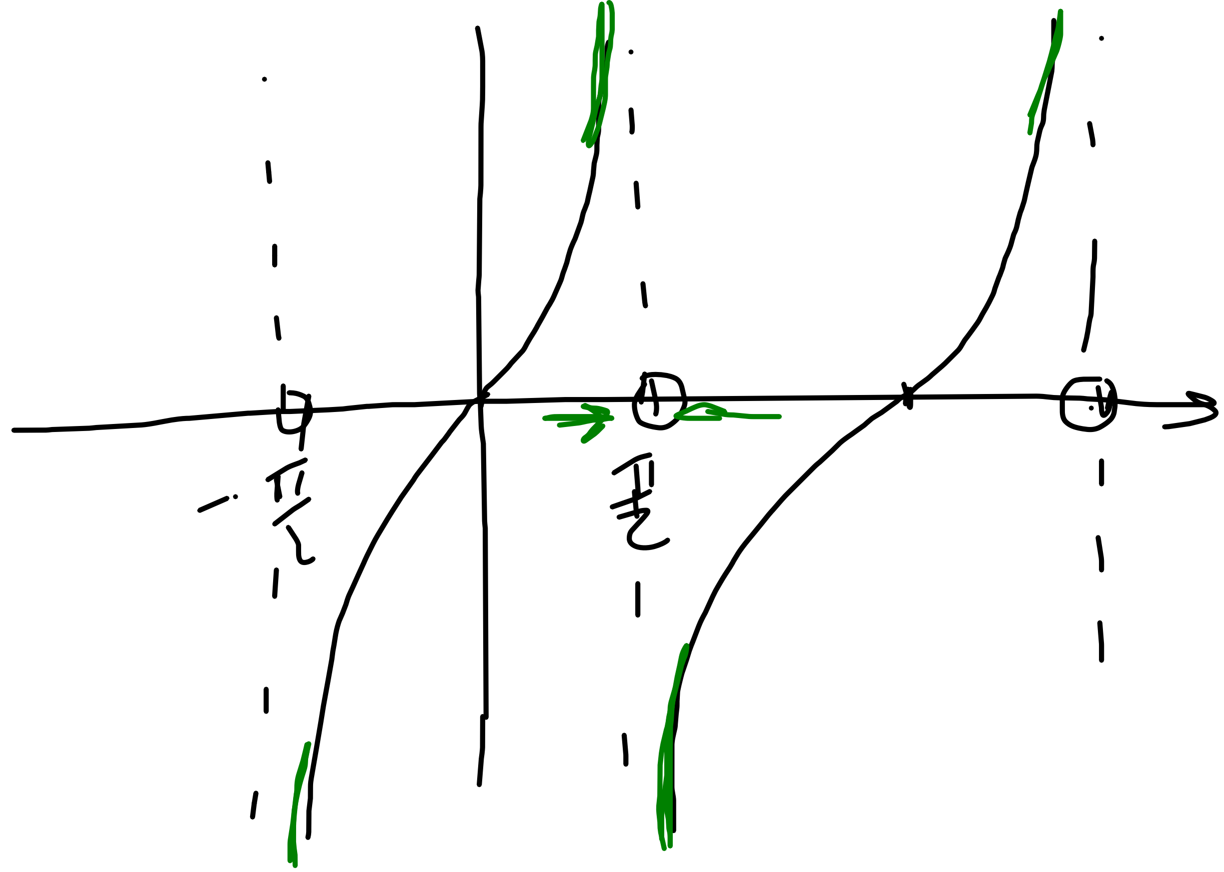
$$\log_a x \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$



## TANGENTE

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

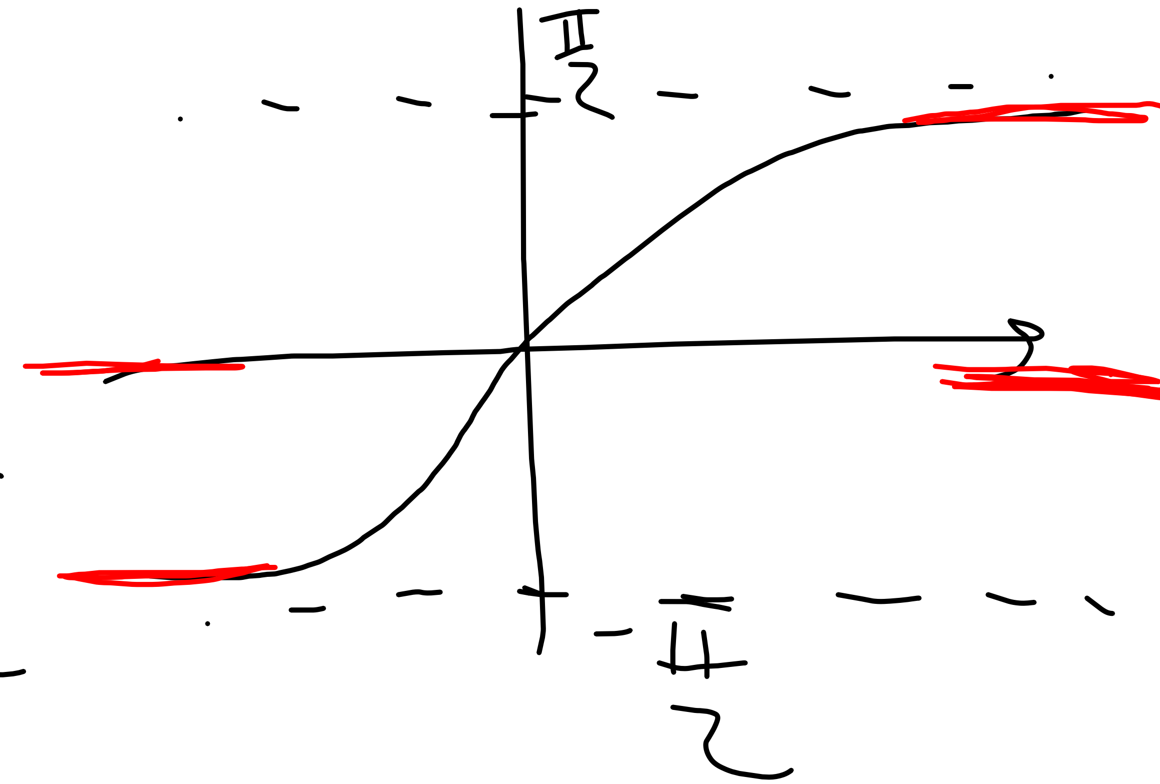
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$




## ARCOTANGENTE

- $$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$



Dai limiti di successioni, possiamo dedurre che:

$a > 1,\ b > 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} a^x |x|^b = 0 \end{cases}$$

$0 < a < 1,\ b > 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x^b \cdot a^x = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{|x|^b} = +\infty \end{cases}$$

- $\boxed{a>1}$ $\boxed{b>0}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b}$$

cambio variabile, ~~pongo~~ pongo

$$y = \log_a x$$

$$x = a^y$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{b} \frac{by}{a^{by}} = 0$$

$\lim_{x\to\infty} \log_a x$

$$\log_a x = o(x^b) \text{ per } x \to +\infty$$