Metodi Numerici
A.A. 2023-2024

Prof.ssa Damiana Lazzaro damiana.lazzaro@unibo.it

Dipartimento di Matematica Unibo

42 ore frontali + 18 ore di laboratorio

Settore Scientifico Disciplinare MAT/08 ANALISI NUMERICA

Prof. Guido Borghi guido.borghi@unibo.it

Dipartimento di Informatica - Scienza e Ingegneria

5 ore frontali + 3 ore di laboratorio

Settore scientifico disciplinare ING-INF/05 SISTEMI DI ELABORAZIONE DELLE INFORMAZIONI

Lezioni frontali:

Lunedì ore 9-12 – AULA 2.12

Laboratorio:

Martedì ore 9-11 Lab. 2.2 (A-L)

Martedì ore 14-16 Lab. 3.3 (M-Z)

Tutor in Laboratorio: Dott. Andrea Togni

andrea.togni3@unibo.it

- **Prof. Borghi:**

Lezioni Frontali

- Lunedì 19 Febbraio: ore 10-12 (2 ore)
- Lunedì 26 Febbraio: ore 9-12   (3 ore)

Lezioni in Laboratorio

- Martedì 21 Maggio (1 ora)
- Martedì 28 Maggio (2 ore)

Materiale Didattico

- Il materiale didattico sarà reperibile sulla piattaforma virtual learning dedicata al corso: https://virtuale.unibo.it
- Per approfondimenti consultare i seguenti testi:

[1] R. Johansson: Numerical Python - Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib (2nd edition), Apress, 2019

[2] J. Kiusalaas: Numerical Methods in Engineering with Python 3, Cambridge University Press, 2013

[3] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, P. Gervasio: Matematica Numerica (4a edizione), Springer Verlag, 2014

[4] R. Bevilacqua, D. Bini, M. Capovani, O. Menchi: Metodi Numerici, Zanichelli, Bologna, 1992

[5] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi: Metodi numerici per l'algebra lineare, Zanichelli, Bologna, 1996

Prof.ssa Lazzaro:

Ricevimento presso Nuovo Campus Universitario, **STUDIO 4141** via dell’Università 50, nei giorni

Martedì ore 11-13
Mercoledì ore 9-10

(si prega comunque di fissare l’appuntamento via email ed attendere conferma).

E' possibile anche fissare un appuntamento telematico tramite applicativo teams in giorno ed ora da concordare con il docente.

Prof. Borghi:

Ricevimento:

Visita la seguente pagina per prendere appuntamento: https://miatbiolab.csr.unibo.it/?page_id=142

Obiettivo dell’ analisi numerica

- Risolvere numericamente (mediante un calcolatore) un problema matematico che modellizza un problema reale.

Problema reale:

rimuovere la sfocatura da un'immagine per renderla più nitida e dettagliata (deconvolution).

Immagine acquisita

Deconvolution dell'immagine

Problema reale:

rimuovere la sfocatura da un'immagine per renderla più nitida e dettagliata (deconvolution).

Strumento di acquisizione

Scena reale

Immagine Acquisita

Immagine Acquisita

Deconvolution
dell’immagine

a) Passare dal problema reale al problema matematico mediante un processo di idealizzazione e approssimazione basate sull'esperienza e sulla comprensione del problema: si tratta di tradurre un problema reale, e quindi complesso, in un insieme di equazioni matematiche in grado di descriverlo;

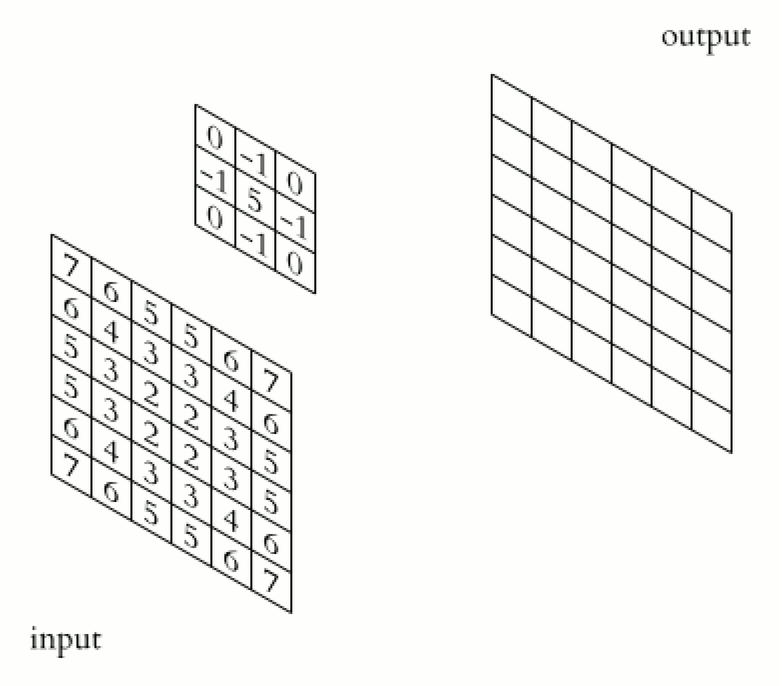
Modello matematico che lega l'immagine acquisita $g(x, y)$ all'immagine originale $f(u, v)$

$$g(x, y) = \iint f(u, v) k(x - u, y - v)\, du dv$$

g(x, y) è la funzione continua che rappresenta l'immagine acquisita
f(u,v) è la funzione continua che descrive l'immagine originale (incognita da determinare)
k(x, y) è il kernel di convoluzione, che caratterizza la lente dello strumento di acquisizione

b) Trasformare il problema matematico (continuo) in un problema numerico (discreto) che sia risolubile;

$$g(m,n) = \sum_i \sum_j f(i,j) * k(m-i, n-j)$$



Questo problema può essere scritto in formato matricale come:

$$Kf = g$$

che rappresenta un sistema lineare, dove K è ma matrice di convoluzione che caratterizza la lente dello strumento di acquisizione, g è l'immagine acquisita vettorizzata e f è l'immagine reale (incognita)

d) Risolvere il problema numerico al calcolatore mediante l'applicazione di algoritmi numerici capaci di determinare la soluzione nel minimo tempo possibile e con la massima accuratezza ;

e) Interpretare la soluzione numerica nei termini della situazione reale (confrontando i risultati ottenuti tramite il modello scelto, con quelli sperimentali raccolti) e verificare così sia l'adeguatezza del modello matematico che la robustezza e l'efficienza dell'algoritmo risolutivo.

Altro semplice esempio:

Consideriamo **il problema di calcolare l'area di un cerchio con raggio R**.

Modello matematico: L'area del cerchio è data dalla formula $A = \pi R^2$.

Discretizzazione:

Dividiamo il cerchio in un numero finito di triangoli e calcoliamo l'area di ciascun triangolo.

Soluzione numerica:

Sommiamo le aree dei triangoli per ottenere l'area approssimata del cerchio.

Analisi dell'errore:

L'errore di approssimazione dipende dal numero di triangoli utilizzati.

Sorgenti di errore nella risoluzione di problemi matematici al calcolatore

1. **Errori del modello matematico** (prodotti nel **passaggio dal problema reale al problema matematico**): sono dovuti all'introduzione di ipotesi semplificative nella costruzione del modello matematico che sostituisce il problema reale: Ad esempio: Il modello è supposto lineare, alcune grandezze fisiche sono considerate trascurabili, ...
2. **Errori del modello numerico-computazionale** (prodotti **nel passaggio dal problema matematico al problema numerico**), detti anche errori di discretizzazione o troncamento: sono gli errori che si introducono quando un procedimento infinito e approssimato mediante un procedimento finito (richiesto dalla risoluzione del problema a calcolatore) Ad esempio: Derivata approssimata con un rapporto incrementale, Integrale approssimato con una formula di quadratura

3. **Errori presenti nei dati:** dovuti al fatto che, generalmente, i dati di un problema sono ottenuti mediante misurazioni che possono essere influenzate da errori sistematici (che dipendono dalla sensibilità dello strumento di misurazione e/o da errori random (dovuti al verificarsi di eventi imprevedibili)
4. **Errori di arrotondamento nei dati e nei calcoli**: sono gli errori introdotti nella rappresentazione dei numeri (dati in ingresso o risultati di operazioni) sul calcolatore

La soluzione del problema numerico ottenuta mediante l'algoritmo computazionale può essere solo un'approssimazione della soluzione del problema reale.

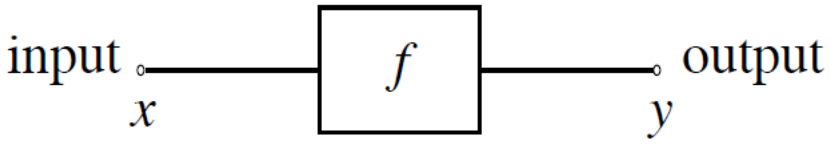
Classificazione dei problemi computazionali

Per **problema numerico** intendiamo una **descrizione chiara e non ambigua di una relazione funzionale tra i dati (input) del problema e i risultati desiderati (output).**

La relazione funzionale (che denotiamo con f) può essere espressa in forma esplicita o implicita, ossia possiamo avere le seguenti rappresentazioni schematiche di un problema numerico

$$y = f(x) \text{ oppure } f(x, y) = 0$$

dove, a seconda del tipo di problema, x e y potranno essere numeri reali, vettori ecc.



Per **algoritmo** di un problema numerico intendiamo una descrizione completa e ben definita di operazioni che permetta di trasformare (in un numero finito di passi) ogni vettore di dati (permissibili) x nel corrispondente output y_* non necessariamente uguale a y. Ad ogni problema numerico possiamo associare più algoritmi, ognuno dei quali in genere fornirà risultati con precisione diversa.

1. **Problema diretto**:

x e f sono dati, y è incognito

Esempi:

- Calcolo del valore di una funzione assegnata in corrispondenza di un valore fissato della variabile indipendente
- Calcolo di un integrale definito

2. **Problema inverso:**

f e y sono noti, x è incognito

Esempi:

- Soluzione di un sistema lineare

3. **Problema di identificazione**:

x e y sono noti, f è incognita

Esempi:

- Approssimazione di dati sperimentali

Principali campi di applicazione dei metodi numerici:

- In **Ingegneria e scienze fisiche**: per **simulare e analizzare** il comportamento di sistemi fisici, come la dinamica dei fluidi, la diffusione del calore, la propagazione delle onde elettromagnetiche, la meccanica strutturale, la termodinamica e altre aree dell'ingegneria.

- In **Scienze della terra:** per **simulare** il comportamento dei sistemi geologici, come la formazione delle rocce, la dinamica degli oceani, la propagazione delle onde sismiche e la diffusione dei contaminanti.

- In **Biologia e medicina:** per **simulare e analizzare** processi biologici complessi, come l'evoluzione delle popolazioni, la dinamica dei sistemi immunitari, la diffusione di sostanze chimiche nel corpo umano e l'analisi di immagini mediche.

- in **Finanza:** per **analizzare e valutare** i mercati finanziari, valutare strumenti finanziari, risolvere equazioni differenziali stocastiche e ottimizzare portafogli di investimento.

- in Intelligenza artificiale: per **allenare le reti neurali**, un tipo di algoritmo di intelligenza artificiale, e migliorare la loro capacità di fare previsioni e riconoscere schemi.

- **Altre applicazioni in : statistica, teoria del controllo, la grafica computazionale, la robotica, la geoinformatica**, etc

Metodi Numerici per l'intelligenza artificiale (AI).

I metodi numerici sono utilizzati in diversi aspetti delle reti neurali, in quanto consentono di analizzare e comprendere i dati, identificare i pattern e creare modelli predittivi che possono essere utilizzati per fare previsioni accurate.

- **Ottimizzazione:** l'ottimizzazione è un problema fondamentale in AI, poiché spesso è necessario trovare i parametri del modello di AI che massimizzano la sua capacità di fare previsioni accurate. I metodi numerici, come la discesa del gradiente e il metodo di Newton, sono utilizzati per risolvere questi problemi di ottimizzazione.
- **Reti neurali:** le reti neurali sono composte da molteplici neuroni artificiali che operano in parallelo. I metodi numerici sono utilizzati per allenare le reti neurali mediante l'aggiornamento dei pesi dei neuroni in base ai dati di addestramento.
- **Analisi dei dati:** l'AI spesso richiede l'analisi di grandi quantità di dati. I metodi numerici, come la decomposizione a valori singolari e l'analisi dei componenti principali, sono utilizzati per ridurre la dimensionalità dei dati e identificare i pattern.
- **Visione artificiale:** la visione artificiale è una tecnologia che permette ai computer di analizzare e comprendere le immagini. I metodi numerici, come le trasformate di Fourier e le reti neurali convoluzionali, sono utilizzati per rilevare e classificare oggetti nelle immagini.
- **Elaborazione del linguaggio naturale**: l’elaborazione del linguaggio naturale è un campo dell'AI che si occupa dell'analisi e della comprensione del linguaggio umano. I metodi numerici, come la statistica bayesiana e le reti neurali ricorrenti, sono utilizzati per elaborare il testo e identificare le informazioni rilevanti.

Programma del Corso

Introduzione all' Intelligenza Artificiale (AI) **(Prof. Borghi)**

a. Cenni ad applicazioni di AI, ML e DL
b. Impatto dell'AI nell'Economia
c. Breve storia dell'evoluzione dell'AI
d. Definizioni e paradigma generale del ML e DL

Introduzione alle Reti Neurali) **(Prof. Borghi)**

a. Task del ML (classificazione, regressione e clustering)
b. Apprendimento (supervisionato, non supervisionato, reinforcement)
c. Definizione di Artificial Neuron e Multi-Layer Perceptron (MLP)
d. Definizione di Convolutional Neural Network (CNN)
e. Funzione obiettivo (Loss Function)

Metodi Numerici : (**Prof.ssa Lazzaro**)

- Numeri finiti - Stabilità degli algoritmi
- Richiami su vettori, matrici e spazi vettoriali. Norme di vettori e norme di matrici.
- Autovalori ed Autovettori.
- Cenni su metodi numerici per zeri di Funzione (bisezione e Newton).
- Metodi diretti e metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari.
- Decomposizione ai valori singolari (SVD) .

Modelli di regressione - Minimi quadrati

Interpolazione polinomiale di dati.

Elementi di analisi multivariata

Gradiente, Jacobiano, Hessiano, Teorema di Taylor. Insiemi e funzioni convesse.

Elementi di ottimizzazione numerica multivariata per il Machine Learning

Metodi di discesa del gradiente,

Metodi Stocastici di discesa del gradiente per il calcolo del minimo di funzioni in più variabili.

Loss function, back propagation e differenziazione automatica.

Laboratorio in Python

Alle lezioni frontali in aula, in cui vengono presentati i metodi numerici di base per risolvere problemi classici della matematica mediante l'uso di un calcolatore, fanno seguito **esercitazioni in laboratorio** che mirano all'implementazione di tali metodi **in Python** e allo sviluppo di un'adeguata sensibilità e consapevolezza del loro utilizzo.

Laboratorio sull'addestramento delle reti neurali (con Colab)

a. Breve introduzione a Colab
b. Training di un MLP
c. Training di una CNN

Esame

L'esame di fine corso (la cui valutazione è in trentesimi) si svolgerà in un'unica prova che comprende

- la realizzazione al calcolatore di codici **Python** per la risoluzione di problemi
- la risposta scritta a domande teoriche sugli argomenti trattati nelle lezioni frontali.