

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/02/2023

Esercizio 1 Un sacchetto contiene 6 palline gialle e 6 palline rosse e 6 palline blu. Riempiamo tre urne U_1 , U_2 e U_3 (da fuori indistinguibili) ciascuna con 3 palline estratte dal sacchetto. Per $i = 1, 2, 3$, sia X_i il numero di palline rosse presenti in U_i , sia Y_i il numero di palline gialle presenti in U_i , e indichiamo con U un'urna scelta a caso.

- Descrivere uno spazio di probabilità Ω che modella questo fenomeno aleatorio e determinare il numero di risultati possibili $|\Omega|$.
- Stabilire se X_1 e Y_2 sono indipendenti.
- Qual è la probabilità che U contenga una pallina blu?
- Qual è la probabilità che U contenga palline di tutti i colori?
- Supponiamo che U_1 contenga 3 palline rosse, che U_2 ne contenga 3 gialle, e che U_3 ne contenga 2 rosse e 1 gialla. Estraiamo una pallina da U , e constatiamo che la pallina è rossa. Qual è la probabilità che U sia U_1 ?

Soluzione

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua uniforme sull'intervallo $[-1, 1]$, sia $Y = X^2 - 1$ e sia Z una variabile aleatoria esponenziale di parametro 2, indipendente con X .

- a) Calcolare $P(Y < -\frac{1}{2})$.
- b) Determinare la funzione di ripartizione e la densità di Y .
- c) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y .
- d) Determinare l'insieme dei valori assunti dalla variabile YZ e calcolarne il valore atteso.
- e) Calcolare la probabilità che $\max(|Y|, Z)$ sia maggiore di $\frac{1}{2}$.

Soluzione

Esercizio 3 Una società di assicurazioni per auto ha 300 000 clienti, di cui il 60% sono maschi e il 40% femmine. Un terzo degli assicurati (indipendentemente dal sesso) possiede un'auto di grossa cilindrata.

Ricerche statistiche hanno mostrato che la probabilità di avere un incidente grave in un anno è del 2% per i maschi e del 1% per le femmine, e che tali probabilità raddoppiano per chi possiede un'auto di grossa cilindrata.

- a) Qual è la probabilità che un assicurato a caso abbia un incidente grave nel prossimo anno?
- b) Supponiamo che un dato assicurato abbia avuto un incidente grave. Qual è la probabilità che sia un maschio con un'auto di grossa cilindrata?
- c) Calcolare la probabilità che il numero di assicurati maschi con un'auto di grossa cilindrata che avrà un incidente grave nel corso dell'anno sia maggiore di 2500.

Soluzione