Analisi asintotica

Analisi asintotica

Obiettivo:

- semplificare l'analisi del consumo di risorse di un algoritmo prescindendo dai dettagli implementativi o di altro genere.
- Classificare gli algoritmi in base al loro comportamento asintotico.

Astrazione: come il tempo di esecuzione cresce in funzione della taglia dell'input *asintoticamente*.

Asintoticamente implica ***non per tutti gli input***. Esempio: non per input di piccole dimensioni.

Costo di esecuzione

Definizione

Un algoritmo A ha costo di esecuzione $O(f(n))$

- rispetto ad una certa risorsa di calcolo
- su istanze di ingresso di dimensione n

se la quantità $r(n)$ di risorsa sufficiente per eseguire A su una qualunque istanza di dimensione n verifica la relazione $r(n)=O(f(n))$.

Le risorse di calcolo di interesse sono soprattutto tempo di calcolo e occupazione di memoria.

Esempio: sequenza di istruzioni

```
istruzione 1;
istruzione 2;
...
istruzione k;
```

Il tempo totale è dato dalla somma dei tempi di ciascuna istruzione:

t totale = t (istruzione 1) + t (istruzione 2) + ... + t (istruzione k)

Se ogni istruzione è "semplice" (coinvolge solo operazioni che vengono tradotte in un numero fisso di istruzioni assembler) allora il tempo di ogni istruzione è costante, e lo è anche il tempo totale: $\Theta(1)$.

Nel seguito assumeremo sempre che le istruzioni siano semplici.

Blocchi if - then - else

```
if (condizione)
then sequenza di istruzioni 1
else sequenza di istruzioni 2
```

Viene eseguita o la sequenza 1 o la sequenza 2.

Il tempo nel caso pessimo è il maggiore dei due:

$$max(\ t(\text{sequenza 1}), t(\text{sequenza 2})\ )$$

Per esempio, se la sequenza 1 fosse Θ(n) e la sequenza 2 fosse Θ(1), il tempo nel caso pessimo del blocco if-then-else sarebbe Θ(n).

Cicli for

```
for (i = 1 ... n)
    sequenza di istruzioni
```

Il ciclo viene eseguito n volte, quindi anche la sequenza di istruzioni viene eseguita n volte.

Assumendo che ogni istruzione sia Θ(1), il tempo totale del ciclo è n*Θ (1), cioè Θ(n).

Costo: Θ(n)

Cicli for annidati

Caso 1: cicli in cui il numero di ripetizioni del ciclo interno è indipendente dall'indice del ciclo esterno:

```
for (i = 1 ... n)
   for (j = 1 ... m)
      sequenza di istruzioni
```

- Il ciclo esterno viene eseguito n volte.
- Ad ogni iterazione esterna, il ciclo interno viene eseguito m volte.
- Le istruzioni dentro al ciclo interno vengono eseguite n*m volte.

Un caso particolare si ha quando anche il ciclo interno è eseguito n volte, complessità $\Theta(n^2)$

Cicli for annidati

Caso 2: cicli in cui il numero di ripetizioni del ciclo interno è dipendente dall'indice del ciclo esterno:

```
for (i = 1 ... n)
   for (j = 1 ... i)
      sequenza di istruzioni
```

Costo: ?

Cicli for annidati

```
for (i = 1 ... n)
    for (j = 1 ... n)
        for (k = 1 ... n)
            sum[i][j] += entry[i][j][k];
```

Costo: ?

Cicli for annidati

```
for (i = 1 ... n)
    for (j = 1 ... n)
        sum[i] += entry[i][j][0];

for (i = 1 ... n)
    for (k = 1 ... n)
        sum[i] += entry[i][0][k];
```

Cicli for annidati

```
for (i = 1 ... n)
   for (j = 1 ... sqrt(n))
      sequenza di istruzioni

for (i = 1 ... n)
   for (j = 1 ... sqrt(995))
      sequenza di istruzioni
```


Cicli while

```
i = tot = 1
while (i < n)
   tot += i
   i = i * 2
endWhile
```

Costo: ?

Serie i: $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k$.

Ci si ferma se $2^k = n$, i.e. $k = \lg n$

Cicli while: equivalente?

```
i = tot = n;
while (i > 0)
    tot += i;
    i = i / 2;
endWhile
```

(i variabile intera)
Costo: ?

Serie i: n*1, n*1/2, n*1/ 2^2, n*1/ 2^3, … , n*1/ 2^k.

Ci si ferma se n*1/ 2^k = 1, i.e. $2^k = n$, i.e. $k = \lg n$

Subroutines

```
procedure main
  for (i = 1 ... n)
     tot += total(i);

procedure total(k)
  for(i = 1 ... k)
     subtotal += i;
  return subtotal
```

Costo: ?

Analisi di algoritmi non ricorsivi

Ricerca il valore minimo in un array v[] non vuoto

```
procedure minimo (v[])
m = 1; // posizione dell'elemento minimo
for (i = 2 ... v.length)
  if(v[i]<v[m]) then m = i
return v[m]
```

Analisi

Sia n la lunghezza del vettore v.

- Il corpo del ciclo viene eseguito n-1 volte;
- Ogni iterazione ha costo O(1) (vengono eseguite solo istruzioni elementari).
- Il costo di esecuzione della funzione minimo rispetto al tempo è quindi O(n) (o meglio, Θ(n)).

Esercizi: complessitá

e

- Due cicli in fila:

```
for (i = 1 ... n)
   sequenza di istruzioni
for (j = 1 ... m)
   sequenza di istruzioni
```

  Quale sarebbe la complessità se il secondo ciclo fosse ripetuto n volte?

- Ciclo annidato seguito da uno non annidato:

```
for (i = 1 ... n)
   for (j = 1 ... n)
      sequenza di istruzioni
for (k = 1 ... n)
   sequenza di istruzioni
```

- Ciclo annidato in cui il ciclo interno dipende dall'indice di quello esterno:

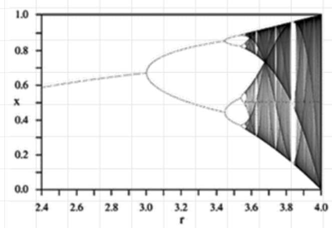
```
for (i = 1 ... n)
   for (j = i ... n)
      sequenza di istruzioni
```

Algoritmi ricorsivi

Risultati usando *equazioni ricorsive*

Un'**equazione** tempi di esecuzione di algoritmi ricorsivi possono essere descritti **ricorsiva** esprime il valore di *f(n)* come combinazione di $f(n_1),\ldots,f(n_k)$ dove $n_i < n$.

- In pratica, data una sequenza $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, l'equazione ricorsiva richiede il calcolo di tutti i termini precedenti per poter calcolare a_n.
- È necessario ***conoscere esplicitamente il valore del primo termine***.



Esempi:

Mappa logistica: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

Data la costante r e $0<x_0<1$.

Numeri di Fibonacci

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ con valori iniziali $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

Un algoritmo ricorsivo

Cerca l'elemento val in un array v *ordinato*

```
ricercaBinaria(val,v[],i,j)
if(i>j)
then return -1     // non trovato
else
   m=(i+j)/2
   if (v[m]==val)
   then return m       // trovato
   else
      if(v[m]>val)
      then return RicercaBinaria(val,v,i,m-1)
      else return RicercaBinaria(val,v,m+1,j)
```

Algoritmo ricorsivo

Analisi dell'algoritmo di ricerca binaria

Sia T(n) il tempo di esecuzione della funzione `ricercaBinaria` su un vettore di n=j−i+1 elementi.

- In generale T(n) dipende non solo dal numero di elementi su cui fare la ricerca, ma anche dalla posizione dell'elemento cercato (oppure dal fatto che l'elemento non sia presente).
- Nell'ipotesi più favorevole (caso ottimo) l'elemento cercato è proprio quello che occupa posizione centrale; in tal caso T(n) =O(1).
- Nel caso meno favorevole (caso pessimo) l'elemento cercato non esiste.

  Quanto vale T(n) in questa situazione?

Equazioni ricorsive:ricerca binaria

Analisi dell'algoritmo di ricerca binaria

Possiamo definire $T(n)$ per ricorrenza, come segue.

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & se\ n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + c_2 & se\ n > 1 \end{cases}$$

soluzione: metodo iterativo

$T(n) =$ $T(n/2)$ $+ c_2$

$T(n/4)$ $+ c_2$ $+ c_2$

$T(n/8)$ $+ c_2$ $+ c_2$ $+ c_2$

....

$T(n/n) + c_2$ .... $+ c_2$

$\underbrace{c_1 + c_2 \text{ .... } + c_2}_{k}$

k chiamate ricorsive

Ci fermiamo quando
$2^k = n$

soluzione: metodo iterativo

Dobbiamo valutare k.

sappiamo che $2^k = n$, quindi

$\log_2(2^k) = \log_2(n)$, ovvero

$k = \log_2(n)$

2- Dimostrazione per induzione

Dobbiamo dimostrare che una affermazione è vera per ogni n≥0

Teorema

se

1. affermazione(0) è vera.
2. affermazione(n-1) vera implica affermazione(n) vera.

allora

affermazione(n) vera per ogni n ≥ 0

Es. dimostrazione per induzione:

Teorema

$$affermazione(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$

Ipotesi

$affermazione(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1(1+1)/2$ Base

$affermazione(n\text{-}1) \rightarrow affermazione(n)$: Induttiva

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = (n\text{-}1)(n)/2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$

... ma $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = (n\text{-}1)(n)/2 + n = n(n+1)/2$ □

L'uguaglianza tra questi due termini è *affermazione*$(n\text{-}1)$ che assumiamo vera per *ipotesi induttiva.*

Metodo di sostituzione

Primo passo:

Ci buttiamo a "indovinare" una possibile soluzione:
$T(n) \leq c \log_2(n)$

Secondo passo:

La *verifichiamo* per induzione come segue:

Assumiamo che $T(n') \leq c \log_2(n')$ *per* $n' < n$

e dimostriamo che $T(n) \leq c \log_2(n)$

c è una costante (indipendente da n) che determineremo strada facendo

Metodo di sostituzione

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

$$\leq c \log_2(n/2) + 1$$

Ipotesi induttiva !!!

$$= c \log_2(n) - c \log_2(2) + 1$$

$$= c \log_2(n) - c + 1$$

se $c \geq 1$ allora

$$\leq c \log_2(n) \quad \square$$

un esempio piú complicato

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Soluzione $T(n) = \Theta(n \log(n))$

Albero di ricorsione

$Cn + 2T(n/2)$ $= c\,n +$

$C(n/2) + 2T(n/4)$ $C(n/2) + 2T(n/4)$ $= c\,n +$

$C(n/4)+2T(n/8)$ $C(n/4)+2T(n/8)$ $C(n/4)+2T(n/8)$ $C(n/4)+2T(n/8)$ $= c\,n +$

…… …… …… …… ……

$\Theta(1)$ $\Theta(1)$ …… …… …… $\Theta(1)$ $\Theta(1)$ $= c\,n$

$= cn(\log(n))$

Il fattore $\log(n)$ deriva dal fatto che l'albero ha un altezza $\log(n)$

"Master Method"

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$ $\quad a \geq 1,\ b > 1,\ f(n) > 0$

Poniamo $x = \log_b a$

$f(n) = O(n^{x-\varepsilon})$ con $\varepsilon>0$

$f(n) = \Theta(n^x)$ $\quad \Theta(n^x \log(n))$

$f(n) = \Omega(n$

$af(n/b) \leq cf($ $\quad$ allora $T(n) = \Theta(f(n))$

per tutti gli n>

Non lo chiedo