10 Gravitazione

Oggi sappiamo che le "interazioni fondamentali" sono poche (4) e tutte le possibile "forze" che osserviamo sono riconducibili a queste. Le sorgenti delle interazioni sono alcune "cariche" che le particelle fondamentali possiedono. Per i fenomeni elettrici e magnetici, l'origine della forza è la *carica elettrica.* Nel caso delle interazioni a cui sono soggetti i quark, si hanno *cariche di colore*. Per la gravità, esiste una "carica di massa", normalmente detta *massa gravitazionale.*

10.1 Le leggi di Keplero

Iniziamo con un rapido riassunto della storia delle osservazioni astronomiche relative al moto dei pianeti e della loro interpretazione, per poi enunciare le *leggi di Keplero*.

Claudio Tolomeo (II secolo d.c.) elaborò un modello del sistema solare in cui tutti i pianeti, compresi il Sole e la Luna, ruotano intorno alla terra. Per giustificare le orbite complicate dei diversi corpi celesti in questo sistema di riferimento geocentrico, Tolomeo fu costretto ad introdurre gli *epicicli*, orbite complesse nelle quali i pianeti si muovono su piccole circonferenze i cui centri a loro volta si muovono su circonferenze più grandi centrate sulla terra.

Nicola Copernico (1473-1573) propose uno schema eliocentrico, nel quale la Terra e gli altri pianeti si muovono intorno al Sole. I criteri sono ancora puramente geometrici, ma ora è adottato il sistema di riferimento idoneo ad una maggiore comprensione dei fenomeni.

Tycho Brahe (1546-1601) fu un eccezionale astronomo, danese, che effettuò una lunga serie di accurate misure delle posizioni occupate dai pianeti nel loro moto di rivoluzione attorno al sole.

Giovanni Keplero (1571-163) fu allievo di Brahe e portò a compimento un'accurata analisi dei dati raccolti, e arrivò alla formulazione di tre leggi empiriche, che descrivono le caratteristiche del moto dei pianeti, pur senza entrare nel merito delle cause del moto.

Prima legge di Keplero, o legge delle orbite

Tutti i pianeti si muovono su orbite piane, ellittiche e aventi il sole in uno dei fuochi.

Seconda legge di Keplero, o legge delle aree

Il segmento che congiunge un pianeta al sole descrive aree uguali in tempi uguali:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{cost}\,.$$

Terza legge di Keplero, o legge dei periodi

Il quadrato del periodo orbitale di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cost}\,.$$

10.2 La mela e la luna

L'intuizione di Newton fu che la stessa forza fa cadere gli oggetti sulla terra e trattiene la luna sul suo moto circolare intorno alla terra. Di fatto, questo è uno dei primi e più grandi successi della fisica, trattandosi della "unificazione" delle forze agenti in ambiti apparentemente distinti.

La distanza terra-luna era nota sin dalla Grecia classica (Aristarco, 310-230 a.c.) grazie a misure di triangolazione. Anche il periodo di rivoluzione lunare intorno alla terra era noto. Possiamo fissare queste quantità:

$$D_{TL} \simeq 384000 \text{ km} \qquad T \simeq 28 \text{ d} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 2.59 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Dalla cinematica del moto circolare uniforme, sappiamo che è presente una accelerazione centripeta di modulo

$$a_L = \omega^2 D_{TL} \simeq 2.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

Questa accelerazione è molto più piccola di $g \simeq 9.8\ \mathrm{m/s^2}$. Newton ipotizzò di poter immaginare la massa di tutta la Terra concentrata nel suo centro, e che la forza agente “sulla mela” e “sulla luna” fosse la stessa forza originata da tale centro ma avente una intensità decrescente con la distanza. Quindi, le corrispondenti accelerazioni, per l’oggetto sulla superficie terrestre e per la luna, si devono poter scrivere come:

$$g \propto \frac{M_T}{R_T^{?}} \qquad\qquad a_L \propto \frac{M_T}{D_{TL}^{?}}$$

dove “?” sta ad indicare che non si conosce a priori la dipendenza dalla distanza, che può essere ricavata dai dati. Deve esistere una costante di proporzionalità, che indicheremo con G_N, che deve essere la stessa per i due oggetti. Dunque, in termini di forze:

$$\text{Mela:}\quad F_M = m_M\left(\frac{G_N M_T}{R_T^{?}}\right) \qquad\qquad \text{Luna:}\quad m_L\left(\frac{G_N M_T}{D_{TL}^{?}}\right)$$

Riducendo nuovamente le relazioni alle sole accelerazioni, abbiamo

$$g = \left(\frac{G_N M_T}{R_T^{?}}\right) \qquad\qquad a_L = \left(\frac{G_N M_T}{D_{TL}^{?}}\right)$$

ovvero

$$g R_T^{?} = a_L D_{TL}^{?} \implies \left(\frac{g}{a_L}\right) = \left(\frac{D_{TL}}{R_T}\right)^{?}$$

Si ha che

$$\left(\frac{g}{a_L}\right) \simeq \frac{9.8}{2.6 \times 10^{-3}} \simeq 3790$$

mentre

$$\left(\frac{D_{TL}}{R_T}\right) \simeq \left(\frac{384}{6.3}\right) \simeq 60.9$$

D’altra parte, se “?”=2, si ha

$$\left(\frac{D_{TL}}{R_T}\right)^2 \simeq (60.9)^2 \simeq 3800$$

Dunque utilizzando un esponente pari a 2, si ha l’espressione

$$F = G_N \frac{m M_T}{r^2}$$

che predice correttamente sia l’accelerazione della mela che cade in prossimità della superficie terrestre, sia l’accelerazione centripeta propria dell’orbita compiuta dalla luna intorno alla Terra. La costante di proporzionalità fin qui indicata con G_N è normalmente indicata con G, “g grande”.

10.3 Legge di gravitazione universale

Espressa a parole la legge di gravitazione dice: *ogni particella nell'Universo attrae ogni altra particella con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle rispettive masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro reciproca distanza. La forza è diretta lungo la linea congiungente le due particelle*.

In termini vettoriali, possiamo scrivere

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

dove $\vec{F}_{12}$ è la forza che la particella 1 esercita sulla particella 2, m_1 e m_2 sono le masse delle due particelle e r è la loro distanza. Il versore $\hat{r}$ indica la direzione che va dalla particella 1 alla particella 2, dunque il segno meno indica che la forza è attrattiva (la particella 2 sente una forza diretta verso la particella 1).

Un altro modo di scrivere la relazione precedente è

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

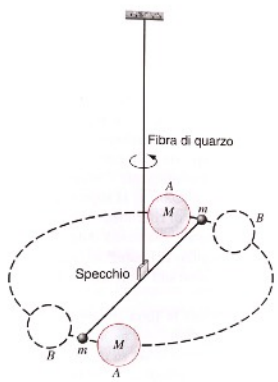
dove si rende esplicito il vettore spostamento che va dalla particella 1 alla particella 2, $\vec{r}_{12}$.

Con le usuali tecniche utilizzate per descrivere un corpo esteso come somma di punti di massa e dimensioni infinitesime, si può calcolare la forza gravitazionale esercitata da una distribuzione estesa di massa. Per distribuzioni sferiche di massa, la forza esercitata all'esterno di esse equivale a quella esercitata da un punto materiale situato al centro della distribuzione sferica, avente massa pari alla massa totale della distribuzione. Quindi se considero un corpo sulla superficie terrestre

$$F = G\frac{M_T m}{R_T^2} \qquad \Longrightarrow \qquad a = G\frac{M_T}{R_T^2} = g$$

Dunque conoscendo g, M_T, R_T potrei calcolare il valore di G. Ma ciò che non era noto al tempo di Newton era la massa della terra. L'avanzamento fondamentale fu *l'esperimento di Cavendish*, che misurò direttamente G, ed è trattato nel prossimo paragrafo.

10.4 L'esperimento di Cavendish



La più famosa determinazione di G fu effettuata da Cavendish nel 1798, con un dispositivo concettualmente molto semplice, una bilancia di torsione (di fatto, un pendolo di torsione come visto in precedenza). Un filo sottile sostiene un manubrio leggero, alle cui estremità sono attaccate due piccole masse. A terra, due grandi masse uguali sono posizionate in modo da provocare la torsione del filo per effetto dell'attrazione gravitazionale esercitata sulle masse sospese. Il sistema raggiunge una posizione di equilibrio quando il momento della forza causato dall'attrazione gravitazionale sulle piccole masse è equilibrato dal momento della forza generato dalla torsione del filo:

$$2Fb - k\theta = 0$$

dove F è il modulo della forza gravitazionale esercitato su ciascuna massa del manubrio, b è la semilunghezza dello stesso, k è la costante elastica di torsione del filo, e θ l'angolo formato dal manubrio all'equilibrio, rispetto alla posizione che ha quando le grandi masse sono allontanate (e dunque non esercitano più una attrazione gravitazionale apprezzabile sulle masse del manubrio).
L'idea è semplice, ma l'attuazione non così facile! Un accorgimento utilizzato da Cavendish fu di fare due misure, con le grandi masse spostate in posizione opposta e simmetrica, così da torcere il filo nell'altra direzione e raddoppiare l'effetto da misurare (in pratica, misurare 2θ invece di θ). Inoltre, per la misura dell'angolo posizionò uno specchio al centro del manubrio, in modo da poter utilizzare un raggio di luce da esso riflesso di cui misurare la posizione molto lontano dall'apparato (di fatto trasformando la misura di un piccolissimo angolo nella misura di un cambiamento macroscopico di posizione del puntino luminoso su uno schermo). Una domanda per il lettore: come fareste a misurare la costante elastica di torsione del filo?

Cavendish dichiarò che con la sua bilancia era stato in grado di *pesare la terra*. Infatti il peso mg dei corpi può essere attribuito alla forza di attrazione gravitazionale (trascurando alcuni effetti non inerziali, dovuti alla rotazione della terra…). Per una terra sferica e omogenea

$$mg = G\frac{mM_T}{{R_T}^2} \quad \Longrightarrow \quad M_T = \frac{g{R_T}^2}{G}$$

La conoscenza della massa della terra fu molto importante! Calcolandone la densità, si ottiene un valore intorno a $5.5\ \mathrm{g/cm^3}$. Dal momento che la densità dei materiali superficiali (rocce) è in media circa $2.5\ \mathrm{g/cm^3}$, fu subito evidente che che all'interno della terra sono presenti materiali molto più densi, quali ferro e nichel.

Il valore oggi accettato della costante G è

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

10.5 Orbite geostazionarie

I satelliti geostazionari sono molto importanti per le telecomunicazioni: ad esempio, l'antenna parabolica per la televisione satellitare punta sempre nello stesso punto del cielo, laddove il satellite che trasmette il segnale appare fermo. Risulta chiaro che affinché l'orbita di un satellite terrestre sia geostazionaria, esso deve compiere una intera rivoluzione intorno alla terra in 24 ore. Possiamo quindi calcolare il raggio di questa orbita, sapendo che $T = 24\ \mathrm{ore} = 86400\ \mathrm{s}$ e utilizzando la terza legge di Keplero, dove però consideriamo la Terra, invece che il Sole, come sorgente della forza gravitazionale:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \Longrightarrow \; R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \simeq 42160\ \mathrm{km}$$

Dato che il raggio medio della terra è circa $6370\ \mathrm{km}$, il satellite si trova circa $36000\ \mathrm{km}$ sopra la superficie terrestre. Per confronto, si pensi che la Stazione Spaziale Internazionale si trova su un'orbita la cui quota va da circa $278\ \mathrm{km}$ a $460\ \mathrm{km}$. Portare un satellite in orbita geostazionaria è molto dispendioso!

10.8 Energia potenziale gravitazionale

La forza gravitazionale è una forza conservativa. Si dimostra facilmente considerando che qualsiasi traiettoria chiusa può essere suddivisa in spostamenti infinitesimi che sono sempre o radiali o perpendicolari alla direzione radiale.

$$\delta\mathscr{L} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{r} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

ma $\hat{r} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ è pari alla proiezione di $\mathrm{d}\vec{s}$ su $\hat{r}$ e quindi è pari a $\mathrm{d}r$, la variazione della distanza tra i due corpi a seguito dello spostamento $\mathrm{d}\vec{s}$. Quindi

$$\mathscr{L} = \int_A^B \delta\mathscr{L} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{m_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r = -Gm_1m_2\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right)$$

Definiamo quindi

$$U = -G\frac{m_1m_2}{r}$$

dove abbiamo scelto come valore di riferimento $U \to 0$ per $r \to \infty$. Con questa convenzione, realizzando un diagramma energetico per un corpo che si muove sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale del Sole, possiamo distinguere tre situazioni: se $E > 0$, il corpo si può portare a qualunque distanza dal Sole; si può dimostrare che in questo caso la traiettoria è un iperbole. Anche se $E = 0$ non ci sono limiti alla distanza dal Sole che il corpo può raggiungere, anche se giungerebbe a distanza infinita con velocità nulla; si può dimostrare che in questo caso la traiettoria è una parabola. Se $E < 0$, esiste una distanza massima a cui il corpo può portarsi; si può dimostrare che in questo caso la traiettoria è una ellissi.

10.6 Velocità di fuga

Per mezzo dell'energia potenziale gravitazionale è molto semplice calcolare la velocità di fuga di un oggetto. Con velocità di fuga si intende la velocità minima che un corpo deve avere, partendo da un certo punto di un campo di forza gravitazionale, per riuscire a "liberarsi" dal campo, e dato che la forza di gravità ha un raggio d'azione infinito, ciò equivale a riuscire a portarsi a distanza infinita. Consideriamo un corpo lanciato dalla superficie terrestre: qual è la velocità minima per cui tale corpo non ricadrà sulla terra? In base a quanto visto precedentemente, è sufficiente che esso abbia un'energia meccanica positiva o uguale a zero. Quindi

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0 \implies v_f = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$$

Inserendo i valori noti per la Terra, si ottiene $v_f \simeq 11.2\ \mathrm{km/s}$.

È interessante riflettere sul fatto che all'aumentare di M e al diminuire di R si ottengono valori di v_f via via più grandi. Ma sappiamo che in natura esiste una velocità limite, la velocità della luce nel vuoto $c \simeq 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$. Esistono dunque combinazioni di M e R che producono una velocità di fuga teorica maggiore di c con la conseguenza che nessun corpo che si trovi a $r < R$ può effettivamente fuggire dal campo gravitazionale. Il raggio corrispondente a $v_f = c$ per una data massa M si chiama *raggio di Schwartzschild* e si ottiene sostituendo $v_f = c$ e ricavando R:

$$R_c = \frac{2GM}{c^2}$$

Se un oggetto di massa M si trasforma in un buco nero, *l'orizzonte degli eventi* di tale buco nero avrà raggio R_c. Tanto per dare un'idea, per un oggetto di massa pari a quella del sole il raggio di Schwartzschild è pari a circa 3 km; per un oggetto di massa pari alla massa della terra, il raggio è circa 9 mm; per una massa di 70 kg (e.g. persona media) il raggio è circa 10^{-25} m.

10.7 Massa inerziale e massa gravitazionale

In linea di principio la "carica di massa", responsabile della forza di gravità, insomma la massa gravitazionale, m_g, può essere diversa dalla *massa inerziale* che compare nella seconda legge di Newton. Dovremmo aggiungere un pedice "i" per ricordare che questo è valore dell'inerzia del corpo: la sua resistenza a variare la velocità, che viene "vinta" dalla forza:

$$\overrightarrow{F} = m_i \overrightarrow{a}$$

Il problema della possibile differenza tra m_g e m_i non è di natura filosofica, ma sperimentale. Fu riconosciuta da Newton stesso! In linea di principio due oggetti di materiali diversi aventi la stessa massa inerziale, potrebbero avere diversa massa gravitazionale.

Supponiamo di aver realizzato un pendolo utilizzando il campione di massa di platino-iridio di Sevres. Scriviamo l'equazione del moto, come visto nel paragrafo 10.3, tenendo distinte la massa inerziale del pendolo dalla sua massa gravitazionale, che è la sorgente della forza peso:

$$\overrightarrow{P} = m_g \overrightarrow{a}$$

$$m_g^{Pl} g \sin\theta = -\, m_i^{Pl} l \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

con soluzione

$$T^{Pl} = 2\pi \sqrt{\frac{m_i^{Pl}}{m_g^{Pl}} \frac{l}{g}}$$

Supponiamo che per questo campione si abbia $m_i^{Pl} \equiv m_g^{Pl}$. Ovvero decido io di definire, per questo campione di riferimento, la massa inerziale *identica* a quella gravitazionale.

Ora utilizzo per realizzare il pendolo un secondo oggetto che abbia la stessa massa gravitazionale (perché ad esempio la misuro con una bilancia) ma costituito di ferro. In generale, potrebbe essere che

$$\frac{m_g^{Fe}}{m_i^{Fe}} \neq \frac{m_g^{Pl}}{m_i^{Pl}}$$

Quindi, il periodo di oscillazione di un pendolo di ferro sarebbe

$$T^{Fe} = 2\pi \sqrt{\frac{m_i^{Fe}}{m_g^{Fe}} \frac{l}{g}} \neq T^{Pl}$$

È possibile realizzare degli esperimenti di questo tipo utilizzando diversi pendoli campioni.

Newton stesso giunse alla conclusione che

$$\frac{m_i - m_g}{m_i} < 10^{-3}$$

Eötvös agli inizi del '900 ottenne

$$R = \frac{\left(\frac{m_i}{m_g}\right)_1 - \left(\frac{m_i}{m_g}\right)_2}{\left(\frac{m_i}{m_g}\right)_1} < 3 \times 10^{-9}$$

Oggi si continua a fare esperimenti (ad esempio, anche presso i Laboratori del Gran Sasso), raggiungendo limiti del tipo $R \lesssim 10^{-12}$.

Il fatto che

$$m_g = m_i$$

è uno dei pilastri fondamentali della teoria di Einstein della gravità (teoria della relatività generale), detto *principio di equivalenza.* È un dato di fatto, finora mai smentito sperimentalmente: non è dimostrabile nell'ambito della teoria, ma è assunto a principio.