Esercizio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Mostrare che -1 è autovalore

(b) determinare U_{-1}

-1 è autovalore se e solo se $\det(A-(-1)I)=0$

$\iff rg(A+I) < 3$

$$A+I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ci sono due colonne uguali

$\Rightarrow rg(A+I) = 2$

U_{-1} è lo spazio delle soluzioni del sistema la cui matrice dei coefficienti è $A+I$

$\Rightarrow \dim U_{-1} = 3 - rg(A+I) = 1$

$m_g(-1) = 1$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$U_{-1} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

Facciamo la verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è l'autovettore moltiplicato per l'autovalore.

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) è diagonalizzabile?

Oss.: gli autovalori di una matrice triangolare sono i coefficienti sulla diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad P_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & * & * \\ 0 & b-t & * \\ 0 & 0 & c-t \end{pmatrix} = (a-t)(b-t)(c-t)$$

e le radici sono a, b, c.

gli autovalori di A sono quindi

1 con $m_a(1)=1$

-2 con $m_a(-2)=2$

$m_a(1)+m_a(-2)=3$ ✓

$m_a(1)=m_g(1)$ ✓

rimane da mostrare che $m_g(-2)=2$

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rango 1 $\Rightarrow$

$\dim U_{-2} = 3-1 = 2 = m_g(-2)$

e U_{-2} ha equazione $\boxed{3x-y-z=0}$

(b) determinare le matrici D diagonali simili ad A.

La matrice D deve avere sulla diagonale gli autovalori di A, con le stesse molteplicità

Tre possibilità:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \qquad D_3 = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Trovare H_1, H_2, H_3 t.c.

$$D_1 = H_1^{-1} A H_1 \qquad D_2 = H_2^{-1} A H_2 \qquad D_3 = H_3^{-1} A H_3 .$$

Abbiamo bisogno degli autovettori.

$3x - y - z = 0$ è l'eq. di U_{-2}

$u_1 = (1, 3, 0)$

$u_2 = (0, 1, -1)$

Determiniamo l'autospazio U_1

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow U_1 = \langle \underbrace{(1,0,0)}_{= u_3} \rangle$$

$$B = \big((1,3,0), (0,1,-1), (1,0,0) \big)$$

$$M^B_B(F_A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{M^B_B(F_A)}_{= D_3} = M^E_B \, \overbrace{M^E_E(F_A)}^{A =} \, M^B_E$$

Esercizio 3

$v_1 = (1,0,1)$

$v_2 = (1,3,0)$

$v_3 = (0,1,-1)$

(a) $\exists !\ F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(v_1) = (0,0,0)$$
$$F(v_2) = -v_2$$
$$F(v_3) = 2v_3$$

Basta verificare che v_1, v_2, v_3 formano una base

(non lo faccio, ma all'esame fatelo).

$$M_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = H_3$$

Similmente

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

$v_1 = (1, 0, 1)$

$v_2 = (1, 3, 0)$

$v_3 = (0, 1, -1)$

i) $\exists!\ F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(v_1) = (0,0,0)$$
$$F(v_2) = -v_2$$
$$F(v_3) = 2v_3$$

Basta verificare che v_1, v_2, v_3 formano una base (non lo faccio, ma all'esame fatelo).

$M^E_E(F) = ?$

Possiamo scrivere "facilmente"

$$M^B_E(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^E_E(F) = M^B_E(F)\, M^E_B$$

$$M^B_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^E_B = \left(M^B_E\right)^{-1}$$

dove $B = (v_1, v_2, v_3)$

$$M_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_B^E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & +2 & +3 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right)$$

$$M^E_E(F) = M^B_E(F) \cdot M^E_B$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 9 & -5 & -9 \\ -6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x-y-z,\ 9x-5y-9z,\ -6x+2y+6z\right)$$

(c) Ker F ?

Ker F = autospazio dell'autovalore 0

$= \langle v_1 \rangle$

Esercizio 6

$W: x-y+3z=0$ in $\mathbb{R}^3$

(a) $B=((1,1,0),(0,3,1))$ base di W.

(b) scrivere equazioni rispetto a B di $f: W \longrightarrow W$ con $f(b_1)= b_1$ $f(b_2)=-2b_2$

$M_B^B(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f((x,y)_B)=(x,-2y)_B$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ristretto a W sia uguale a f.
(cioè $f(w) = g(w) \quad \forall w \in W$.)

Formiamo la base C di $\mathbb{R}^3$

$$C = \Big(\underset{c_1}{\underset{\shortparallel}{b_1}}, \underset{c_2}{\underset{\shortparallel}{b_2}}, \underset{c_3}{\underset{\shortparallel}{(0,1,0)}} \Big)$$

$g(c_3) = (0,0,0)$ arbitrario.

$M^E_E(g)$?

$$M^{C}_{E}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{E}_{E}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$g(x,y,z) = (x, x-6z, -2z).$$

$$M^{E}_{E}(g) = M^{C}_{E}(g) \cdot M^{E}_{C}$$

e procediamo come prima.

In alternativa, procediamo con le mani:

$$g(e_1) = g(c_1 - c_3) = g(c_1) - \cancel{g(c_3)} = (1,1,0)$$

$$g(e_2) = g(c_3) = (0,0,0) \qquad g(e_3) = g(c_2 - 3c_3) = (0,-6,-2)$$