**PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA**

Esame 16 gennaio 2023

- Dare una (breve) spiegazione di tutte le risposte date e dei passaggi svolti.
- Consegnare solo la bella copia
- Scrivere le soluzioni degli esercizi indicando $c$hiaramente la domanda a cui si sta rispondendo.
- Consegnare un foglio protocollo per ogni esercizio.
- Mettere nome, cognome e matricola su ogni foglio consegnato.

**Domanda teorica:** Dare la definizione di applicazione lineare $f\colon V \to V$, di nucleo e di spazio immagine.

(1) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia $F_k\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$F_k(x,y,z,t) = \Big((2k+3)x-y+z-t, (k+1)x+(k+1)y+(-k+1)z+(k-1)t, kx-ky+(k+2)z-kt, 2t\Big)$$

(a) Per $k = -1$ esibire, se possibile, un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$v \notin \mathrm{Im}(F_{-1});$$

(b) Mostrare che 2 è un autovalore di $F_k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$;

(c) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini una base dell'autospazio $V_2$, ossia quello corrispondente all'autovalore 2, di $F_k$;

(d) Per $k = -1$ mostrare che per $s \geq 4$ non esiste un'applicazione lineare

$$G_s\colon\ \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^4$$

tale che l'applicazione lineare $F_{-1} \circ G_s\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^4$ sia *iniettiva.*

(e) Per $k = -1$ stabilire per quali $s \in \{1,2,3\}$ esiste un'applicazione lineare

$$G_s\colon\ \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^4$$

tale che l'applicazione lineare $F_{-1} \circ G_s\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^4$ sia *iniettiva.* Quando possibile costruire tale applicazione $G_s$.

**Soluzione (1) :** *Ad a)* Per stabilire se è possibile trovare un vettore che non sta nell'immagine di $F_{-1}$, dobbiamo calcolare la dimensione di $\mathrm{Im}(F_{-1})$. Quindi scriviamo $F_k$ in forma matriciale rispetto alla base canonica $E$ di $\mathbb{R}^4$:

$$M_E^E(F_k) = \begin{bmatrix} 2k+3 & -1 & 1 & -1 \\ k+1 & k+1 & -k+1 & k-1 \\ k & -k & k+2 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

che per $k = -1$ diventa:

$$M_E^E(F_{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo quindi il rango di questa matrice che sarà uguale al numero massimo di colonne linearmente indipendenti e quindi alla dimensione dell'immagine di $F_{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo così stabilito che il rango di questa matrice è uguale a 3 e che quindi $\dim(\mathrm{Im}(F_{-1}) = 3 < \dim(\mathbb{R}^4)$. Quindi è possibile trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $v \notin \mathrm{Im}(F_{-1})$. Consideriamo quindi una base di $\mathrm{Im}(F_{-1})$:

$$\{(1, 0, -1, 0), (1, 2, 1, 0), (-1, -2, 1, 2)\},$$

questa base di può trovare prendendo i vettori colonna (nella matrice originale) corrispondenti ai pivot, oppure osservando che le prime due colonne della matrice originale sono una il multiplo dell'altra. Per trovare un vettore linearmente indipendente ai vettori della base appena esibita, scriviamo quindi un vettore generico dell'immagine di $F_{-1}$:

$$(\alpha + \beta - \gamma, 2\beta - 2\gamma, -\alpha + \beta + \gamma, 2\gamma)$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Questo mostra immediatamente che il vettore $(1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ non appartiene all'immagine di $F_{-1}$. Infatti il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ 2\beta - 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 2\gamma = 0 \end{cases}$$

non ammette soluzioni.

*Ad b)* Per mostrare che 2 è autovalore per ogni $k \in \mathbb{R}$ dobbiamo verificare che

$$\det(M_E^E(F_k) - 2I) = 0.$$

Tuttavia osserviamo che:

$$M_E^E(F_k) - 2I = \begin{bmatrix} 2k+1 & -1 & 1 & -1 \\ k+1 & k-1 & -k+1 & k-1 \\ k & -k & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha l'ultima riga nulla, quindi necessariamente il determinante sarà nullo per ogni $k \in \mathbb{R}$.

*Ad c)* Possiamo quindi calcolare una base di $V_2$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per farlo dobbiamo calcolare:

$$V_2 = \ker(F_k - 2\mathrm{Id})$$

Questo significa risolvere il seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} (2k+1)x - y + z - t = 0 \\ (k+1)x + (k-1)y + (-k+1)z + (k-1)t = 0 \\ kx - ky + kz - kt = 0 \\ 0x + 0y + 0z + 0t = 0 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a scala la matrice corrispondente:

$$\begin{bmatrix} 2k+1 & -1 & 1 & -1 \\ k+1 & k-1 & -k+1 & k-1 \\ k & -k & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2k+1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2k-1 & -2k+1 & 2k-1 \\ k & -k & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2k-1 & -2k+1 & 2k-1 \\ 2k+1 & -1 & 1 & -1 \\ k & -k & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2k-1 & -2k+1 & 2k-1 \\ 0 & -4k^2 & 4k^2 & -4k^2 \\ 0 & -2k^2 & 2k^2 & -2k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2k-1 & -2k+1 & 2k-1 \\ 0 & -2k^2 & 2k^2 & -2k^2 \\ 0 & -2k^2 & 2k^2 & -2k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2k-1 & -2k+1 & 2k-1 \\ 0 & -2k^2 & 2k^2 & -2k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo quindi due casi:

- $k = 0$) In questo caso il rango è uguale a 1 e quindi $V_2$ ha dimensione 3:

$$V_2 = \{(y - z + t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle.$$

Poichè $V_2$ ha dimensione 3 i generatori sono anche una base.

- $k \neq 0$) In questo caso il rango è uguale a 2 e quindi $V_2$ ha dimensione 2:

$$V_2 = \{(0, z - t, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle.$$

Poichè $V_2$ ha dimensione 2 questa è anche una base (non solo un insieme di generatori).

*Ad d & e)* Per stabilire per quali $s \in \mathbb{N} \geq 1$ esiste un'applicazione lineare $G_s$ tale che $F_{-1} \circ G_s \colon \mathbb{R}^s \to R^4$ sia iniettiva dobbiamo iniziare osservando che:

$$0 = \dim(\ker(F_{-1} \circ G_s) = \dim(\mathbb{R}^s) - \dim(\mathrm{Im}(F_{-1} \circ G_s)) = s - \dim(\mathrm{Im}(F_{-1} \circ G_s)).$$

Questo mostra che gli $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ammissibili sono esattamente le dimensioni possibili di

$$\dim(\mathrm{Im}(F_{-1} \circ G_s)),$$

ossia $1 \leq s = \dim(\mathrm{Im}(F_{-1} \circ G_s)) \leq \dim(\mathrm{Im}(F_{-1})) = 3$. Abbiamo quindi tre possibilità: $s = 1, 2, 3$. Per esibire ora tali $G_s$ è sufficiente ricordarsi dai punti precedenti che

$$\langle F_{-1}(1, 0, 0, 0), F_1(0, 0, 1, 0), F_{-1}(0, 0, 0, 1) \rangle$$

sono linearmente indipendenti (si veda il punto $(a)$ in cui esibiamo una base per l'immagine di $F_{-1}$). Quindi possiamo definire:

$$G_1 \colon \mathbb{R} \to R^4$$

come

$$1 \to (1, 0, 0, 0).$$

Poi

$$G_2 \colon \mathbb{R}^2 \to R^4$$

come

$$G_2(1, 0) = (1, 0, 0, 0), G_2(0, 1) = (0, 0, 1, 0),$$

ed infine:

$$G_3(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0), G_3 = (0, 1, 0) = (0, 0, 1, 0), G_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1).$$

Un calcolo immediato mostra che la dimensione dell'immagine di $F_{-1} \circ G_s$ coincide sempre con la dimensione di $\mathbb{R}^s$, per $s = 1, 2, 3$, e quindi il kernel è banale. Ne segue che le applicazioni $F_{-1} \circ G_s$ sono iniettive.

(2) Consideriamo al variare di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$V_k = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \mid -x + y = 0, -x + z = 0, -5(k + 3)x + (k + 3)w = 0\}$$

e

$$W_k = \langle (2, k + 3, 1, 1, 5), (-2, k - 1, 0, -1, -5), (0, 0, 0, 1, k + 3) \rangle.$$

(a) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $V_k$ ed una sua base;
(b) Determinare al variare di $k \in R$ la dimensione di $W_k$ ed una sua base;
(c) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ calcolare la dimensione di $V_k \cap W_k$ ed una sua base;
(d) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ calcolare la dimensione di $V_k + W_k$ ed una sua base;
(e) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la somma $V_k + W_k$ è diretta;

**Soluzione (2) :** *Ad a)* Per stabilire la dimensione ed una base di $V_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ osserviamo che per $k = -3$ la terza equazione diventa banale. Quindi abbiamo due casi:

- $k = -3$) In questo caso abbiamo due equazioni che definiscono $V_{-3}$ per cui la sua dimensione è
$$\dim(V_{-3}) = \dim(\mathbb{R}^5) - 2 = 5 - 2 = 3.$$
Una base è data da:
$$\{(1,1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$$
- $k \neq -3$) In questo caso abbiamo tre equazioni che definiscono $V_k$ per cui la dimensione è:
$$\dim(V_{-3}) = \dim(\mathbb{R}^5) - 3 = 5 - 3 = 2.$$
Una base è data da:
$$\{(1,1,1,0,5),(0,0,0,1,0)\}$$

*Ad b)* Per stabilire al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione e una base di $W_k$ scriviamo i vettori generatori di $W_k$ come righe di una matrice:
$$\begin{bmatrix} 2 & k+3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & k-1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k+3 \end{bmatrix}$$
di cui calcoliamo il rango:
$$\begin{bmatrix} 2 & k+3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & k-1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k+3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & k+3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2k+2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k+3 \end{bmatrix}.$$
La matrice ha rango uguale a 3 per ogni $k \in \mathbb{R}$, quindi $\dim(W_k) = 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Inoltre, una base è data da:
$$\{(2,k+3,1,1,5),(0,2k+2,1,0,0),(0,0,0,1,k+3)\}$$

*Ad c)* Per calcolare l'intersezione al variare di $k \in \mathbb{R}$ abbiamo due casi:

- $k = -3$) In questa situazione possiamo imporre che un vettore generico di $W_{-3}$ soddisfi le equazioni cartesiane di $V_{-3}$. Ricordiamo che una base di $W_{-3}$ è data da
$$\{(2,0,1,1,5),(0,-4,1,0,0),(0,0,0,1,0)\}.$$
Quindi un vettore generico è
$$(2\alpha, \alpha - 4\beta, \alpha + \beta, \alpha + \gamma, 5\alpha),$$
con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Imponiamo:
$$\begin{cases} -2\alpha + \alpha - 4\beta = 0 \\ -2\alpha + \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$
ossia $\alpha = \beta = 0$. Ne segue che
$$V_{-3} \cap W_{-3} = \{(0,0,0,\gamma,0) \in \mathbb{R}^5 \mid \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,0,1,0) \rangle.$$
Quindi l'intersezione ha dimensione 1 e $\{(0,0,0,1,0)\}$ è una sua base.

- $k \neq -3$) In questa situazione abbiamo che un vettore generico di $W_k$ è dato da:

  $$(2\alpha, (k+3)\alpha + (2k+2)\beta, \alpha+\beta, \alpha+\gamma, 5\alpha + (k+3)\gamma),$$

  con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

  $$\begin{cases} -2\alpha + (k+3)\alpha + (2k+2)\beta = 0 \\ -2\alpha + \alpha + \beta = 0 \\ -10(k+3)\alpha + (k+3)5\alpha + (k+3)^2\gamma = 0 \end{cases}$$

  ossia

  $$\begin{cases} (k+1)\alpha + (2k+2)\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -5\alpha + (k+3)\gamma = 0 \end{cases}$$

  dove abbiamo diviso per $k+3$ dato che $k \neq -3$. Scriviamo la matrice associata al sistema e riduciamola a scala:

  $$\begin{bmatrix} k+1 & 2k+2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & k+3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k+1 & 2k+2 & 0 \\ -5 & 0 & k+3 \end{bmatrix}$$
  $$\to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3k+3 & 0 \\ 0 & -5 & k+3 \end{bmatrix}$$
  $$\to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & k+3 \\ 0 & 0 & (3k+3)(k+3)/5 \end{bmatrix}$$

Dal momento che stiamo supponendo $k \neq -3$ abbiamo solo due casi: $k \neq -1$ e $k = -1$.

- $k = -1$) Il rango è uguale a 2 e la soluzione è $(\frac{2}{5}\gamma, \frac{2}{5}\gamma, \gamma)$. In questa situazione l'intersezione è data dai vettori della forma

  $$(\frac{4}{5}\gamma, \frac{4}{5}\gamma, \frac{4}{5}\gamma, \frac{7}{5}\gamma, 4\gamma)$$

  Quindi $W_{-1} \cap V_{-1} = \langle(4,4,4,7,20)\rangle$ ha dimensione 1 e il generatore dato è una sua base.
- $k \neq -1, -3$) Abbiamo che il sistema ammette l'unica soluzione $(0,0,0)$ quindi l'unico vettore nell'intersezione è il vettore nullo.

*Ad d)* La dimensione della somma la sappiamo già calcolare in tutte le situazioni:

- $k = -3$) In questa situazione abbiamo che

$$\dim(V_{-3} + W_{-3}) = \dim(V_{-3}) + \dim(W_{-3}) - \dim(V_{-3} \cap W_{-3}) = 3 + 3 - 1 = 5.$$

  Abbiamo quindi che $V_{-3} + W_{-3} = \mathbb{R}^5$ e una sua base è data dalla base canonica.
- $k \neq -3, -1$) In questa situazione abbiamo che

$$\dim(V_k + W_k) = \dim(V_k) + \dim(W_k) - \dim(V_k \cap W_k) = 2 + 3 - 0 = 5.$$

  Analogamente a prima, anche qui $V_k + W_k = \mathbb{R}^5$ e una sua base è quella canonica.

- $k = -1$) In questa situazione abbiamo che

$$\dim(V_{-1} + W_{-1}) = \dim(V_{-1}) + \dim(W_{-1}) - \dim(V_{-1} \cap W_{-1}) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Quindi dobbiamo trovare una base per la somma. Per farlo mettiamo in una matrice come righe i vettori delle basi di $V_{-1}$ e $W_{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e riduciamola a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base per la somma è quindi data da:

$$\{(1,1,1,0,5), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,-5)\}.$$

*Ad e)* Per quanto visto prima la dimensione dell'intersezione è zero se e soltanto se $k \neq -1, -3$. Quindi per ogni $k \neq -1, -3$ la somma è diretta.