ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA E PROBABILITÀ

FABRIZIO CASELLI

Contents

1. Combinatoria intuitiva

Questi esercizi vanno risolti con le mani, possibilmente senza utilizzare alcuna formula.

{biglietti}

Es. 1.1. Devo regalare due biglietti per uno spettacolo a due tra dieci miei amici. In quanti modi posso fare questa scelta?

{classifiche}

Es. 1.2. Quante sono le possibili classifiche finali in un torneo a tre squadre (considerando anche possibili parimerito)?

{3dadi}

Es. 1.3. Quanti sono i possibili lanci di tre dadi in cui il risultato più grande è almeno 5, il secondo è almeno 4, il terzo almeno 3?

{11elementi}

Es. 1.4. Mostrare che i sottoinsiemi di cardinalità pari di un insieme con 11 elementi sono tanti quanti quelli di cardinalità dispari.

{scambisti}

Es. 1.5. Quattro coppie moglie-marito di scambisti decidono di scambiarsi i propri partner per una serata. In quanti modi possono effettuare questa scelta (in modo che ogni uomo passi la serata con la moglie di un altro)?

{seq6pari}

Es. 1.6. Sia A=1,2,3,4. Quante sono le sequenze in A di lunghezza 6 in cui ogni elemento di A compare un numero pari di volte? E quante quelle in cui ogni elemento di A compare un numero dispari di volte?

2. Combinatoria di base

Es. 2.1. Quanti sono i numeri tra 0 e 700 che non sono divisibili né per 2 né per 5, né per 7? {700}

Es. 2.2. Quante sono le disposizioni di lunghezza 5 in $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ in cui compaiono almeno due cifre minori di 5? {disp5}

Es. 2.3. Quante sono le disposizioni di lunghezza 6 in $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ in cui compaiono 3 cifre pari e 3 cifre dispari? {disp6}

Es. 2.4. Quante sono le sequenze in $\{1,2,3,4,5,6\}$ di lunghezza 4? Quelle in cui la somma delle cifre è pari? Quelle in cui la somma delle cifre è multiplo di 3? {seq4}

Es. 2.5. Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1,2,3,4,5,6\}$ che contengono almeno uno tra 5 e 6? {sott56}

Es. 2.6. Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ che se contengono i allora non contengono $11-i$? (cioè non possono contenere ad esempio sia 1 che 10, non possono contenere sia 2 che 9, ecc.) {sott11i}

Es. 2.7. Stabilire la cardinalitá del seguente insieme: {abc}

$$A = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{Z}, 0 < a < 6, b + a = 4, -3 < c - a < 3\}$$

Es. 2.8. Stabilire la cardinalitá del seguente insieme: {abcbis}

$$B = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{Z}, 0 < a < 6, b + a = 4, -3 < 2c - a < 3\}$$

Es. 2.9. Determinare quante sono le sequenze strettamente crescenti di lunghezza 5 in $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. E quante sono quelle debolmente crescenti? {seqcr}

Es. 2.10. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola CAPPALLACCA. Stabilire in quanti di questi anagrammi le lettere A non compaiono mai in posti vicini. {cappall}

3. Combinatoria avanzata

{poker}

Es. 3.1. Consideriamo un mazzo di carte da poker contenente le carte numerate 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A e contenente quindi 32 carte. Quante sono le mani in cui si ha un punteggio pari o superiore alla scala (cioè o scala, o colore, o full, o poker o scala reale)?

{20palline}

Es. 3.2. Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. In quanti modi è possibile colorarle di blu o di rosso in modo che ce ne siano esattamente 8 rosse con un numero pari e 3 rosse con un numero dispari?

{66666}

Es. 3.3. Un'urna contiene 6 palline rosse, 6 gialle, 6 blu, 6 verdi e 6 arancioni. Determinare in quanti modi si possono pescare 8 palline in modo che queste palline siano esattamente di 3 colori differenti. Risolvere questo esercizio sia supponendo che le palline siano indistinguibili, sia supponendo che siano distinguibili, ad esempio supponendo che siano numerate da 1 a 30.

{66666bis}

Es. 3.4. Fare lo stesso esercizio supponendo che le palline siano 9 anziché 6 per ciascun colore.

{perm3fix}

Es. 3.5. Stabilire quante sono le permutazioni di $\{1,2,3,4,5\}$ in cui almeno tre numeri rimangono al loro posto.

{lallanla}

Es. 3.6. Stabilire quanti sono gli anagrammi della parola LALLANLA in cui almeno 4 lettere non hanno cambiato posto.

{16pallin}

Es. 3.7. Consideriamo un insieme A di 16 palline, di cui 8 rosse numerate da 1 a 8, e le altre 8 blu, sempre numerate da 1 a 8. Determinare quanti sono i sottoinsiemi di A costituiti da 10 palline in cui c'è almeno una pallina per ogni valore.
Determinare quanti sono i sottoinsiemi in cui compaiono tutti i valori da 1 a 8 tranne al più un valore.

{12dad}

Es. 3.8. Lanciamo un dado per 12 volte.

(1) Determinare quante sono le possibili sequenze di risultati in cui tutti i numeri da 1 a 6 compaiono almeno una volta.
(2) Determinare quante sono quelle in cui ogni risultato compare esattamente due volte.
(3) Determinare quante sono quelle in cui 1,2,3,4 compaiono almeno due volte e 5,6 almeno una volta.

4. Partizioni

{easypart}

Es. 4.1. Scrivere una partizione di $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ con un blocco di 3 elementi, una costituita da 3 blocchi, una in cui 3 forma un blocco da solo, una in cui non ci sono blocchi con 3 elementi e una in cui 10 appartiene ad un blocco di 3 elementi.

{B4}

Es. 4.2. Quante sono le partizioni dell'insieme $\{1,2,3,4\}$?

{B5}

Es. 4.3. Quante sono le partizioni dell'insieme $\{1,2,3,4,5\}$?

{s104}

Es. 4.4. Calcolare i numeri di Stirling $S_{10,4}$ e $S_{9,3}$.

{4blocchi}

Es. 4.5. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in quattro blocchi in cui i blocchi non sono costituiti unicamente da un numero pari?

{n-1bloc}

Es. 4.6. Mostrare che, per ogni $n \geq 2$, il numero di partizioni di $\{1,2,\ldots,n\}$ in $n-1$ blocchi è $\binom{n}{2}$.

{2blocc}

Es. 4.7. Mostrare che per ogni $n \geq 2$ il numero di partizioni di $\{1,2,\ldots,n\}$ in 2 blocchi è $2^{n-1}-1$.

{blocparedis}

Es. 4.8. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in cui ogni blocco contiene almeno un numero pari e un numero dispari?

{blocsolopari}

Es. 4.9. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in cui ogni blocco ha solo numeri pari o solo numeri dispari?

{bloc1pari}

Es. 4.10. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in cui almeno un blocco è costituito da un solo numero pari?

{10pers}

Es. 4.11. Stabilire in quanti modi 10 persone possono essere suddivise in 3 gruppi (non vuoti).

{Rnk}

Es. 4.12. (difficile) Sia $R_{n,k}$ il numero di partizioni di $\{1,\ldots,n\}$ in k blocchi in cui ogni blocco contiene almeno due elementi. Mostrare che

$$R_{n,k} = (n-1)R_{n-2,k-1} + kR_{n-1,k}$$

per ogni $n > 1$ dove poniamo per convenzione $R_{0,0} = 1$ e $R_{0,k} = 0$ se $k > 0$.

5. Statistica descrittiva

{bappa}

Es. 5.1. Un bambino di 6 mesi mangia tutti i giorni una pappa di 200 grammi. In una settimana ha registrato i seguenti tempi (espressi in minuti) per consumare il suo pasto: 5,10,4,12,20,10,4.

(1) Determinare le velocità (espressa in grammi al minuto) registrate dal bambino nel consumare il suo pasto;
(2) Determinare la velocità media complessiva nei sette giorni;

{25scatole}

Es. 5.2. In 25 scatole di 100 viti si sono contati il numero di pezzi difettosi ottenendo i seguenti dati

$$1, 4, 3, 1, 3, 2, 2, 1, 2, 5, 3, 0, 1, 4, 3, 7, 1, 3, 1, 7, 2, 1, 2, 4, 8.$$

Determinare le modalità, le frequenze, la media, i quartili, la moda, la varianza, e il range.

{512famiglie}

Es. 5.3. Sono state recensite 512 famiglie di 6 figli. Per ognuna è stato osservato il numero di figlie femmine. I dati sono riportati nella tabella seguente.

Numero di figlie	frequenza
0	23
1	64
2	131
3	123
4	107
5	48
6	16

Qual è il numero medio di figlie? Calcolare la varianza sia usando la definizione che usando la formula vista a lezione.

{sette adulti}

Es. 5.4. Sette adulti scelti a caso hanno peso e altezza (espressi in kilogrammi e centimetri) come nella seguente tabella.

Peso	Altezza
80	175
90	175
75	180
85	190
70	170
100	195
80	170

Disegnare il diagramma a dispersione; stimare il peso di un adulto alto 177 centimetri e l'altezza di un adulto che pesa 80 chili.

{pil}

Es. 5.5. Il PIL in Italia ha fatto registrare le seguenti variazioni percentuali negli ultimi anni

Anno	Variazione
2020	-8.9%
2019	+0.3%
2018	+0.9%
2017	+1.7%
2016	+1.3%

6. Probabilitá di base e uniforme

{nonuni}

Es. 6.1. Costruire uno spazio di probabilità (non uniforme) sull'insieme $\Omega = \{1, 2, a, b\}$.

{quantefamiglie}

Es. 6.2. Sia $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Quante sono le famiglie di eventi su Ω (cioé famiglie di sottoinsiemi chiuse rispetto a unione, intersezione e complementare che contengono Ω e $\emptyset$)?

{668}

Es. 6.3. Un'urna contiene 6 palline rosse, 6 gialle, 6 blu, 6 verdi e 6 arancioni. Determinare la probabilitá che pescando 8 palline a caso queste siano di esattamente 3 colori differenti.

{problallanla}

Es. 6.4. Determinare la probabilità che scegliendo un anagramma a caso della parola LALLANLA si ottenga una parola con le tre A in posizioni consecutive

{interrogaz}

Es. 6.5. Un insegnante interroga casualmente ogni giorno uno dei suoi sei studenti. Determinare la probabilitè che dopo 10 giorni abbia interrogato almeno una volta tutti i sei studenti.

{andreamarghe}

Es. 6.6. Una classe di 10 bambini viene divisa in tre gruppi in modo casuale. Determinare la probabilità che il bambino Andrea finisca nello stesso gruppo della bambina Margherita.

{135}

Es. 6.7. Abbiamo tre urne contenenti una pallina bianca e rispettivamente 1,3 e 5 palline rosse. Estraendo una pallina a caso da un'urna, qual è la probabilità che sia bianca?

{montruc}

Es. 6.8. Una moneta (truccata) dà testa con probabilità 0.6. Qual è la probabilità che lanciandola 5 volte otteniamo più teste che croci?

{montruc2}

Es. 6.9. Avendo a disposizione la moneta dell'esercizio precedente e una regolare, ne scegliamo una a caso e la lanciamo tre volte.

(1) Qual è la probabilità di ottenere 3 teste?
(2) Sapendo che il primo lancio ha dato come risultato testa, qual è la probabilità che la moneta sia truccata?
(3) Stabilire se gli eventi E_1 ="testa al primo lancio" ed E_2 ="testa al secondo lancio" sono dipendenti o indipendenti.

7. Probabilitá discreta

{135rosse}

Es. 7.1. Abbiamo tre urne contenenti una pallina bianca e rispettivamente 1,3 e 5 palline rosse. Estraendo una pallina a caso da un'urna, qual è la probabilità che sia bianca?

{moneta06}

Es. 7.2. Una moneta (truccata) dà testa con probabilità 0.6. Qual è la probabilità che lanciandola 5 volte otteniamo più teste che croci?

{mon06ereg}

Es. 7.3. Avendo a disposizione la moneta dell'esercizio precedente e una regolare, ne scegliamo una a caso e la lanciamo tre volte.

(1) Qual è la probabilità di ottenere 3 teste?
(2) Sapendo che il primo lancio ha dato come risultato testa, qual è la probabilità che la moneta sia truccata?
(3) Stabilire se gli eventi $E_1 =$"testa al primo lancio" ed $E_2 =$"testa al secondo lancio" sono dipendenti o indipendenti.

{figurine}

Es. 7.4. Un bambino colleziona le figurine di un piccolo album contenente 80 figurine e ne ha già 50. Il nonno gli compra un pacchetto nuovo di 4 figurine (si supponga che un pacchetto contiene sempre 4 figurine diverse tra loro).

(1) Determinare la probabilità di trovare almeno 3 figurine nuove?.
(2) Qual è la probabilità di trovare tutte doppie (cioè tutte figurine che il bambino ha già)?
(3) Se il nonno comprasse 2 pacchetti, quale sarebbe la probabilità di trovare complessivamente 6,7 o 8 nuove figurine?

{42i}

Es. 7.5. Consideriamo 4 scatole contenenti 2 palline ciascuna indistinguibili al tatto. La scatola i ha una pallina numerata con 1 e l'altra numerata con i (quindi nella prima entrambe le palline sono numerate 1). Si estrae una pallina per scatola. Determinare

(1) la probabilità che la somma delle palline estratte sia almeno 7;
(2) la probabilità di aver estratto la biglia con il 4 sapendo che la somma delle palline estratte è almeno 7;
(3) la probabilità di aver estratto esattamente tre palline numerate con 1;

{densastr}

8. Densitá discrete

Es. 8.1. Stabilire quali delle seguenti funzioni rappresentano una densità discreta astratta.

$$d_1(k) = \begin{cases} 0.2 & \text{se } k = -1, 2, 4 \\ 0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_2(k) = \begin{cases} 0.2 & \text{se } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ -0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_3(k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{2^k} & \text{se } k \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

{dado4volte}

Es. 8.2. Lanciamo un dado per 4 volte e denotiamo X_1, X_2, X_3, X_4 i risultati dei quattro lanci. Poniamo $Y = |\{i : X_i = 6\}|$, $Z = |X_1 - X_2|$, $W = \min\{|X_i - X_j| : i \neq j\}$. Determinare le densità di Y, Z e W.

{monetaripet}

Es. 8.3. Lanciamo una moneta ripetutamente e registriamo i risultati in una sequenza binaria $(a_1, a_2, \ldots)$ in cui inseriamo 0 quando otteniamo testa e 1 quando otteniamo croce. Poniamo $X = \min\{i : a_{i-1} = a_i\}$ e $Y = \min\{i : a_{i-1} = a_i = 1\}$. Ad esempio ottenendo una sequenza 1001011 abbiamo $X = 3$ e $Y = 7$.

(1) Determinare $P(a_i = a_{i-1})$ per ogni $i > 1$.
(2) Determinare la probabilità $P(X = k)$ per ogni k (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno lo stesso risultato siano i lanci $k-1$ e k)
(3) Determinare la probabilità $P(Y = k)$ (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno testa siano i lanci $k-1$ e k) per ogni $k \leq 8$;
(4) Dimostrare che $P(Y = k) = \frac{F_{k-3}}{2^k}$ per $k > 3$, dove F_k è il k-esimo numero di Fibonacci.

{gita}

Es. 8.4. Organizzando una gita abbiamo a disposizione un pullmino da 28 posti e, confidando nel fatto che la probabilità che una persona a caso che ha comprato il biglietto non si presenti alla partenza è del 10%, decidiamo di vendere 30 biglietti. Qual è la probabilità di essere nei guai (cioè che qualcuno non trovi posto)?

Quanti biglietti avremmo potuto vendere ammettendo un rischio massimo del 50% di ritrovarci nei guai?

{phd}

Es. 8.5. Supponiamo che la probabilità che nessun bambino nato a Cesena in questo mese diventi un dottore di ricerca sia e^{-1}.

(1) Qual è la probabilità che almeno due bambini nati in questo mese a Cesena diventino dottori di ricerca?
(2) Qual è la probabilità che in un anno nascano almeno 4 bambini che diventeranno dottori di ricerca?

{dadrosblu}

Es. 8.6. Lanciamo due dadi, uno rosso e uno blu, per 4 volte e consideriamo le seguenti variabili

(1) X= numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato maggiore del blu. Che densità ha la variabile X?
(2) Y = numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato uguale al lancio precedente. Che densità ha Y?
(3) Z = il primo lancio in cui la somma di tutti i risultati ottenuti fino a quel momento è almeno 6. Che densità ha Z?

{congind}

9. Indipendenza

Es. 9.1. Si considerino 2 variabili aleatorie indipendenti X ed Y. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta

$Y \backslash X$	0	2
0		$\frac{1}{5}$
-1		$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	

(1) Detto $t = d_{X,Y}(2,3)$ giustificare il fatto che t soddisfa la seguente equazione: $\left(\frac{1}{12} + t\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{15} + t\right) = t$
(2) Calcolare i possibili valori per t.
(3) Scelto uno di questi valori completare la tabella a doppia entrata della densità congiunta delle variabili X ed Y.

{palline1234}

Es. 9.2. Un'urna contiene 4 palline numerate 1,2,3,4. Effettuiamo 6 estrazioni con rimpiazzo. Consideriamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 date da $X_i = 1$ se la pallina con il numero i è stata estratta almeno una volta e $X_i = 0$ altrimenti.
– Stabilire se X_1 e X_3 sono indipendenti.
– Determinare la densità congiunta delle variabili (X_1, X_2, X_3, X_4),

{roseblusimul}

Es. 9.3. Due dadi, uno rosso e uno blu, vengono lanciati simultaneamente per 3 volte. Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

- $X =$ Numero di volte in cui un dado ha dato come risultato 1 o 6;
- $Y =$ Numero di lanci in cui il dado rosso ha dato risultato minore o uguale a 3;
- $Z =$ Numero di lanci in cui la somma dei dadi ha dato 7.

(1) Determinare la densità delle variabili X, Y e Z;
(2) Stabilire se X ed Y sono indipendenti;
(3) Stabilire se Y e Z sono indipendenti;
(4) Stabilire se X e Z sono indipendenti.

10. Valore atteso e varianza

{10euro}

Es. 10.1. Avendo a disposizione 10 Euro vogliamo fare 6 scommesse da 5 euro ciascuna. Ad ogni puntata abbiamo probabilità 60% di perdere i 5 Euro puntati e 40% di vincere 5 Euro. Poniamo Y_i = numero di vittorie nelle prime i scommesse e X_i = soldi rimasti dopo le prime i scommesse (con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

a. Determinare la densità di X_1 e di X_2;
b. Determinare la densità delle Y_i;
c. Mostrare che $X_i = 10 + 5Y_i - 5(i - Y_i)$;
d. Determinare il valore atteso di X_6;
e. Determinare $P(X_4 > 0)$ e $P(X_6 > 0)$;
f. Determinare $P(X_4 > 0, X_6 > 0)$.

{settecoppie}

Es. 10.2. Sette coppie marito-moglie in viaggio di nozze vogliono partecipare ad una attività extra in cui però ci sono solo 10 posti disponibili. Vengono pertanto estratte a caso 10 persone che parteciperanno a questa attivitá. Sia X il numero di coppie di cui viene estratto almeno un rappresentante e Y il numero di donne estratte.

a. Qual é la probabilitá di estratte almeno un rappresentante di ogni coppia?
b. Determinare la densitá, valore atteso e varianza di X;
c. determinare la densitá di Y;
d. determinare $P(X = 6, Y = 6)$;
e. per ogni $k \geq 0$ determinare $P(Y = k|X = 7)$.

{dadp3times}

Es. 10.3. Lanciamo un dado 3 volte. Denotiamo con X_1, X_2, X_3 i risultati dei tre lanci e con $Y = |X_1 - X_2|$.

a. Stabilire se gli eventi $\{X_2 = 2\}$ e $\{Y = 0\}$ sono indipendenti.
b. Stabilire se le variabili Y e X_2 sono indipendenti.
c. Determinare $E[Y]$;
d. Determinare $P(Y = 0|X_1 + X_2 + X_3 = 7)$.

{uniform}

Es. 10.4. Siano $X \sim U(\{0, 1, 2, 3\})$ e $Y = U(\{1, 2, 3, 4\})$ due variabili aleatorie indipendenti e $Z = \max(X, Y)$.

a. Stabilire quali valori può assumere la variabile Z e determinarne la funzione di ripartizione.
b. determinare $E[Z]$;
c. determinare $Var(Z)$.

{BeH}

Es. 10.5. Siano $X \sim B(4, \frac{1}{3})$ ed $Y \sim H(4; 3, 3)$ due variabili indipendenti. Determinare

a. la funzione di ripartizione di X;
b. la funzione di ripartizione di Y;
c. densità, valore atteso e varianza di $\min(X, Y)$

{XeYstes}

Es. 10.6. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti aventi le seguenti densità

$$d_Y(k) = d_X(k) = \begin{cases} 0.1 & \text{se } k = -1, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } k = -2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(1) Determinare il valore atteso di XY;
(2) Determinare il valore atteso di X^2;
(3) Determinare il valore atteso e la varianza di $|X| + |Y|$.

11. Densitá continue

{1sux+1}

Es. 11.1.
Sia X una variabile continua uniforme nell'intervallo $[0,2]$. Si consideri la variabile $Y = \frac{1}{X+1}$.

(1) Determinare $P(Y < \frac{1}{2})$.
(2) Determinare la funzione di ripartizione di Y;
(3) Determinare la densità di Y.

{tram}

Es. 11.2. Ubaldo prende il tram tutte le mattine per andare al lavoro. Arriva alla fermata in un orario casuale e sappiamo che passa un autobus ogni dieci minuti. Siano T_i, $i = 1, \dots, 30$ i tempi di attesa in 30 giorni di lavoro.

(1) Determinare la densità delle T_i;
(2) Qual è la probabilità che aspetti sempre (in questi 30 giorni) più di 5 minuti?
(3) Qual è la probabilità che aspetti mediamente più di 6 minuti?

{allarmi}

Es. 11.3. Un impianto d'allarme dà falsi allarmi in intervalli di tempo di densità esponenziale di parametro 1 (se espressi in anni).

(1) Calcolare la probabilità che nel prossimo anno ci sia qualche falso allarme;
(2) sapendo che in un anno ci sono stati 2 falsi allarmi, qual è la probabilità che nell'anno successivo ci sia almeno un falso allarme?
(3) Due case montano questo impianto d'allarme. Qual è la probabilità che almeno 1 dia un falso allarme nei prossimi 6 mesi? E tutti e 2?

{44indip}

Es. 11.4. Sia X una variabile aleatoria continua la cui funzione di ripartizione è

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0; \\ \frac{2t}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{t+1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2; \\ 1 & \text{se } t > 2; \end{cases}$$

(1) Determinare la densità di X;
(2) determinare media e varianza di X;
(3) date 44 variabili indipendenti $X_1, \dots, X_{44}$ la cui funzione di ripartizione è $F(t)$ determinare
$P(X_1 + \cdots + X_{44} > 40)$.

{s-20}

Es. 11.5. Sia

$$f(s) = \begin{cases} as(s-20) & \text{se } 0 \leq s \leq 20 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

una funzione dipendente da un parametro reale a.

a. Mostrare che esiste un unico valore a per cui $f(s)$ è la densità di una variabile aleatoria continua X.
b. Determinare il valore atteso $E[X]$.
c. Stabilire se $P(X > 5 | X > 4) = P(X > 1)$.

{1+s}

Es. 11.6. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } |s| > 1 \\ 1+s & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1-s & \text{se } 0 < s < 1 \end{cases}$$

(1) verificare che f è una densità continua;
(2) dette $X_1, \ldots, X_{180}$ variabili aleatorie indipendenti di densità continua f determinare la loro funzione di ripartizione;
(3) determinare $E[X_1^2]$ e $E[X_1^4]$;
(4) determinare la probabilità $P(X_1^2 + \cdots + X_{180}^2 > 25)$.

12. Teorema centrale del limite

{32ind}

Es. 12.1. Sia

$$p(k) = \begin{cases} 2^{-k} & k = 1, 2, \dots, 5 \\ 2^{-5} & k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(1) Verificare che $p(k)$ è la densità di una variabile aleatoria discreta X.
(2) Determinare media e varianza di X.
(3) Date 32 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \dots, X_{32}$ tutte aventi densità $p(k)$ determinare

$$P(X_1 + \cdots + X_{32}) \geq 65.$$

{Giovanni}

Es. 12.2. Giovanni è un esperto di tiro con l'arco. La variabile $X =$"distanza dal centro del bersaglio di un suo tiro (espressa in decimetri)" è data dal valore assoluto di una variabile aleatoria normale standard, cioè $X = |\zeta_0|$, dove $\zeta_0 \sim N(0, 1)$.

(1) Determinare la probabilità che un suo tiro termini a meno di 5 centimetri di distanza dal centro del bersaglio.
(2) Determinare la funzione di ripartizione $F_X(t)$ di X (espressa in termini di $\Phi(t)$, la funzione di ripartizione di ζ_0)
(3) Determinare la probabibilità che il migliore di 5 suoi lanci termini a meno di 1 centimetro di distanza dal centro del bersaglio.
(4) Supponendo che il bersaglio abbia un raggio di 30 centimetri, determinare la probabilità che almeno 1 dei suoi 5 lanci non centri il bersaglio.

{100uniformi}

Es. 12.3. Consideriamo 100 variabili $X_1, \dots, X_{100}$ di densità uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$ e indipendenti tra loro.

(1) Determinare la densità della variabile $|X_1|$.
(2) Determinare $P(\frac{|X_1|+\cdots+|X_{100}|}{100} > 0.01)$.
(3) Determinare $P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}}{100} > 0.01)$.
(4) Determinare $P(\frac{X_1^2+\cdots+X_{100}^2}{100} > 0.01)$.
(5) Determinare $P(\frac{(X_1+\cdots+X_{100})^2}{100} > 0.01)$.

{radioattiva}

Es. 12.4. Una miscela radioattiva contiene 10^6 particelle ognuna delle quali decade in un tempo aleatorio di densità esponenziale di media 1 anno.

(1) Determinare la probabilità che una data particella decada in meno di 2 anni.
(2) Sia X la variabile "numero di particelle che decadono in 5 anni". Che densità ha X?
(3) Determinare la probabilità che almeno il 99,3% di queste particelle decada in 5 anni (cioè $P(X > 0,993 \cdot 10^6)$).

{50esp}

Es. 12.5. Consideriamo 50 variabili $X_1, \dots, X_{50}$ di densità esponenziale di parametro 2 e indipendenti tra loro.

(1) Determinare la densità, media e varianza della variabile $X_1 - 1$.

(2) Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{50} > 45)$.
(3) Determinare $P(X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \cdots + X_{49} - X_{50} > 0.1)$.

{n525}

Es. 12.6. Siano $X \sim N(5, 25)$ e $Y \sim U(\{4, 5, 6\})$ indipendenti.

(1) Determinare $P(X > 6, Y > 5)$;
(2) Determinare $P(X + Y < 7 | Y \leq 5)$;
(3) determinare $P(X + Y < 8)$;
(4) determinare la funzione di ripartizione di $X + Y$ (in funzione della funzione di ripartizione di una variabile normale standard);

13. Soluzioni: combinatoria intuitiva

Es. 1.1 In questo esercizio l'ordine con cui scelgo i miei due amici non è importante. Se li regalo a Luca e Aldo oppure a Aldo e Luca è chiaramente la stessa cosa. Possiamo rispondere in questo modo: chiamiamo 1,2,3,...,10 i miei amici. Conto quante sono le scelte in cui 1 riceve il biglietto: sono 9. Conto ora quelle in cui 1 non riceve il biglietto e procedo similmente a prima: inizio contando quelle in cui 2 riceve il biglietto (e 1 no): sono 8 e poi conto quelle in cui né 1 , né 2 ricevono il biglietto. Proseguendo in questo modo le possibili scelte sono: 9+8+7+6+5+4+3+2=45. 2

Es. 1.2 Chiamiamo A,B,C le tre squadre. Abbiamo una possibile classifica in cui le 3 squadre finiscono a parimerito. Contiamo le classifiche in cui due squadre finiscono a parimerito e la terza no. Abbiamo 3 possibili scelte per le due squadre a parimerito: AB,AC,BC. Contiamo quelle in cui AB sono a parimerito. Abbiamo AB prime e C terza, oppure C prima e AB seconde, quindi due possibilità. In tutto abbiamo quindi 6 classifiche con due squadre a parimerito. Infine le classifiche in cui non ci sono parimerito sono 6. In tutto abbiamo quindi 13 classifiche.

Es. 1.3 Bisogna contare con ordine tutte le possibilitá. Se i dadi danno risultati distinti i valori possibili sono 345, 346,356,456. Se ho due valori uguali questi devono essere almeno 4: abbiamo quindi 445,446,553,554,556,663,664,665, Se ho tre valori uguali ho solo 555 e 666. In tutto 14 possibilità. Si osservi come in questo caso l'ordine non sia importante.

Es. 1.4 La funzione che associa ad ogni sottoinsieme il suo complementare è una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi di cardinalità pari e quelli di cardinalità dispari.

Es. 1.5 Ogni scelta la possiamo pensare come una permutazione dei numeri da 1 a 4 in cui non ci sono numeri che rimangono al loro posto: ad esempio 2341 sta ad indicare che i mariti 1,2,3,4 si accompagnano alle mogli 2,3,4,1. Per simmetria possiamo supporre che il marito 1 vada con la moglie 2 e poi moltiplicheremo il risultato per tre per considerare le altre possibili scelte (moglie 3 e moglie 4) Abbiamo 2341, 2143, 2413 e quindi in tutti 9 possibili scelte.

Es. 1.6 Ogni elemento puó comparire 0,2,4,6 volte e abbiamo quindi diversi casi da affrontare.

(1) C'é un numero che compare 6 volte e tutti gli altri 0: queste sono 4, le possibili scelte del numero;
(2) C'é un numero che compare 4 volte e uno che compare 2 volte: scegliamo il numero che compare 4 volte (4 possibilitá), scegliamo il numero che compare 2 volte (3 possibilitá), infine scegliamo i 4 posti dove inserire il primo numero scelto ($\binom{6}{4} = 15$ possibilitá): in tutto abbiamo quindi $4 \cdot 3 \cdot 15 = 180$ scelte.
(3) Ci sono 3 numeri, ciascuno dei quali compare 2 volte: scegliamo i 3 numeri ($\binom{4}{3} = 4$ scelte) e poi scegliamo la combinazione di tipo $(2, 2, 2)$ per posizionarli ($\binom{6}{2\,2\,2} = 90$ scelte): abbiamo quindi 360 possibilitá

Complessivamente abbiamo $4 + 180 + 360 = 544$ scelte.

Se tutti i numeri devono comparire un numero dispari di volte l'unica possibilitá é che uno compaia 3 volte e gli altri tre una volta. Il numero da inserire r volte lo possiamo scegliere in 4 modi. Poi abbiamo $\binom{6}{3\,1\,1\,1} = 120$ modi di posizionare i numeri. In tutti abbiamo quindi 480 modi.

14. Soluzioni:combinatoria di base

Es. 2.1 Siccome 0 non fa parte di questo insieme possiamo considerare i seguenti insiemi: A=multipli di 2 tra 1 e 700, B=multipli di 5 tra 1 e 700 e C=multipli di 7 tra 1 e 700 e l'insieme di cui dobbiamo calcolare la cardinalità è il complementare dell'unione tra A,B e C nell'insieme dei numeri tra 1 e 700. Abbiamo quindi

$$|A| = 350,\ |B| = 140,\ |C| = 100,$$

$$|A \cap B| = 70,\ |A \cap C| = 50,\ |B \cap C| = 20,\ |A \cap B \cap C| = 10$$

Per il principio di inclusione esclusione abbiamo quindi

$$|(A \cup B \cup C)^C| = 700 - 350 - 140 - 100 + 70 + 50 + 20 - 10 = 240.$$

Es. 2.2 Contiamo quelle in cui ci sono zero o una cifra minore di 5. Quelle senza cifre minori di 5 sono le disposizioni dil unghezza 5 in $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ e sono quindi

$$(5)_5 = 120.$$

Quelle con esattamente una cifra le contiamo con scelte successive che determinano in modo univoco la disposizione. Scelgo prima l'unica cifra minore di 5 da inserire: 4 scelte. Scelgo la posizione dove inserire questa cifra: 5 scelte. Scelgo la disposizione di lunghezza 4 in $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ da inserire nei rimanenti quattro posti: $(5)_4$ scelte. Le disposizioni in cui compare esattamente una cifra minore di 5 sono quindi $4 \cdot 5 \cdot (5)_4 = 2400$. In tutto le disposizioni con almeno due cifre minori di 5 sono quindi

$$(9)_5 - 120 - 2400 = 15120 - 120 - 2400 = 12600.$$

Es. 2.3 Procediamo anche in questo caso per scelte successive: scegliamo le tre cifre pari: $\binom{4}{3} = 4$ scelte; scegliamo le cifre dispari: $\binom{5}{3} = 10$ scelte; scelgo come permutare fra di loro i 6 numeri selezionati nei primi due punti; 6! scelte. In tutto ho

$$4 \cdot 10 \cdot 6! = 28800.$$

Es. 2.4 le sequenze di lunghezza 4 sono $6^4 = 1296$. Possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra le sequenze con somma pari e quelle con somma dispari. Basta infatti sostituire l'ultimo coefficiente seguendo questa regola: al posto di 1 metto 2 e viceversa, al posto di 3 metto 4 e viceversa, al posto di 6 metto 6 e viceversa. Ne segue che le sequenze lunghe 4 con somma pari sono esattamente la metá, cioé $1296/2 = 648$. In alternativa si puó pensare ad un prodotto condizionato: 6 scelte per ciascuno dei primi 3 coefficienti. L'ultimo coefficiente puó essere scelta in 3 modi sia se la somma dei precedenti é pari (e in questo caso le scelte possibili sono 2,4,6), sia se la somma dei precedenti é dispari (e in questo caso le scelte possibili sono 1,3,5). Analogamente si puó procedere se si vuole che la somma dei coefficienti sia un multiplo di 3: l'ultima coordinata puó sempre essere scelta in 2 modi, quali che siano le prime tre coordinate.

Es. 2.5 Un sottoinsieme che contiene almeno uno tra 5 e 6 lo possiamo ottenere in questo modo: scegliamo un qualsiasi sottoinsieme dei numeri da 1 a 4 (2^4 possibili scelte) e poi aggiungiamo solo il 5, oppure solo il 6 oppure entrambi: abbiamo quindi in tutto

$2^4 \cdot 3 = 48$. Oppure utilizzando il principio di inclusione esclusione: sia A l'insieme dei sottoinsiemi che contengono 5 e B l'insieme sei sottoinsiemi che contengono 6. Abbiamo $|A| = |B| = 2^5$ e $|A \cap B| = 2^4$ da cui

$$|A \cup B| = 2^5 + 2^5 - 2^4 = 48.$$

Oppure, basta considerare il numero totale di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ meno il numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4\}$: abbiamo quindi $2^6 - 2^4 = 48$.

Es. 2.6 Per ogni coppia $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$ abbiamo 3 possibilità: scegliamo solo il primo, scegliamo solo il secondo, non scegliamo nessuno dei 2. I sottoinsiemi cercati sono quindi $3^5 = 243$.

In alternativa possiamo procedere in questo modo: abbiamo cinque coppie di numeri e possiamo selezionare solo un numero per ogni coppia. Procediamo quindi in questo modo: per ogni $k = 0, \ldots, 5$ selezioniamo un sottoinsieme di cardinalitá k delle 5 coppie: $\binom{5}{k}$ scelte. Per ogni coppia scelta selezioniamo solo uno dei due elementi corrispondenti: ho 2^k scelte. Complessivamente abbiamo quindi

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^k = 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243.$$

Es.2.7 Abbiamo un prodotto condizionato di tipo $(5, 1, 5)$ e quindi abbiamo 25 soluzioni. Infatti a é un numero in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$: 5 scelte. Scelto a abbiamo $b = 4 - a$ e quindi abbiamo una sola scelta. Infine, scelti a e b abbiamo $c \in \{a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2\}$.

Es. 2.8 In questo caso non abbiamo un prodotto condizionato perché il numero di scelte per c dipende dalle scelte precedenti. Dividiamo quindi il problema in due casi, caso a pari e caso a dispari. Se a é pari abbiamo $a \in \{2, 4\}$ quindi due scelte per a, una scelta per b e $c \in \{\frac{a}{2} - 1, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} + 1\}$ quindi tre scelte per c: abbiamo quindi 6 soluzioni. Se A é dispari abbiamo $a \in \{1, 3, 5\}$ quindi tre scelte per a, una scelta per b e $c \in \{\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}\}$, quindi due scelte per c: in tutto abbiamo quindi 6 soluzioni.

Complessivamente ci sono 12 soluzioni.

Es. 2.9 Le sequenze strettamente crescenti di lunghezza 5 sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi dicardinalità 5: sono quindi $\binom{8}{5} = 56$.

Per determinare le sequenze debolmente crescenti possiamo procedere nel seguente modo: sia $(a_1, \ldots, a_5)$ con $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_5 \leq 8$. Allora la sequenza $(a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3, a_4 + 4, a_5 + 5)$ è una sequenza strettamente crescente di numeri in $\{2, 3, \ldots, 13\}$. Questa è una corrispondenza biunivoca e quindi concludiamo che il numero di sequenze debolmente crescenti è $\binom{12}{5} = 792$.

In alternativa si può procedere nel seguente modo. Per ogni $k = 0, \ldots, 4$ scelgo un sottoinsieme di $\{1, 2, 3, 4\}$ dato dai posti i in cui $a_i = a_{i+1}$. Ad esempio se scelgo il sottoinsieme $\{2, 4\}$ vorrò $a_2 = a_3$ e $a_4 = a_5$. Una volta effettuata questa scelta dovrò scegliere i $5 - k$ numeri distinti da inserire in ordine crescente. Abbiamo quindi

$$\sum_{k=0} 4\binom{4}{k}\binom{8}{5-k} = 792.$$

Es. 2.10 Nel primo caso abbiamo gli anagrammi di tipo $(4, 3, 2, 2)$ che sono

$$\binom{11}{4\,3\,2\,2} = 69300.$$

Per la seconda parte dobbiamo prima scegliere i posti dove inserire le 4 A: questi li possiamo scegliere in $\binom{11-(4-1)}{4} = 70$ modi: come visto a lezione questo è il numero di sequenze binarie lunghe 11, con quattro 1 in cui non cisono due 1 consecutivi. Le altre 7 lettere le possiamo anagrammare in $\binom{7}{3\,2\,2} = 210$ modi per cui in tutto abbiamo 14700 anagrammi.