Def (INTORNO)

- Chiamiamo INTORNO di $+\infty$ un intervallo della forma $(a, +\infty)$ per un qualche $a \in \mathbb{R}$

- Chiamiamo INTORNO di $-\infty$ un intervallo della forma $(-\infty, b)$ per $b \in \mathbb{R}$.

II **Def** (LIMITE)

Sia I intervallo o intervallo forato di $\mathbb{R}$,

siano $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in [\inf I, \sup I]$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell$ se

$\forall$ intorno V di ℓ, $\exists$ intorno U_V di c

t.c. $\forall x \in U_V \setminus \{c\} \cap I$ si ha $f(x) \in V$.

La riscrivo in modo "più esplicito":

- <u>caso</u> <u>$c \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R}$</u>:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ t.c.
$\forall x \in I \setminus \{c\}$, <u>$|x - c| < \delta_\varepsilon$</u> si ha
$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- <u>caso</u> <u>$c \in \mathbb{R}, \ell = +\infty$</u>

$\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta_M > 0$ t.c. $\forall x \in I \setminus \{c\} : |x - c| < \delta_M$
si ha $f(x) > M$.

TEOR Le due definizioni di limite (con le successioni e con gli intorni) sono equivalenti

ES $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$c \in [\underbrace{\inf \mathbb{R}^*}_{-\infty}, \underbrace{\sup \mathbb{R}^*}_{+\infty}]$.

Posso definire $\lim_{x \to c} f(x)$ $\forall\, c \in \mathbb{R}$

- se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

  es $c = 2$

• $\underline{c = 0}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

(Usiamo la def di limite con le successioni)

Scelgo $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, sappiamo che $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ma $f(a_n) = \frac{n}{(-1)^n}$ NON ha LIMITE

Quindi $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

• $c = \pm\infty$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

Vediamolo in due modi:

1) (Usando la def con le successioni)

$\forall a_n \to +\infty$ è vero che $\frac{1}{a_n} \to 0$

ii) (Usando la def con gli intorni):

Devo mostrare che:

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > m_\varepsilon$ $(x \neq 0)$

si ha $|f(x)| < \varepsilon$

Infatti:

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff \underline{x < -\frac{1}{\varepsilon}} \quad \vee \quad \underline{x > \frac{1}{\varepsilon}}$$

- Quindi è vero che $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

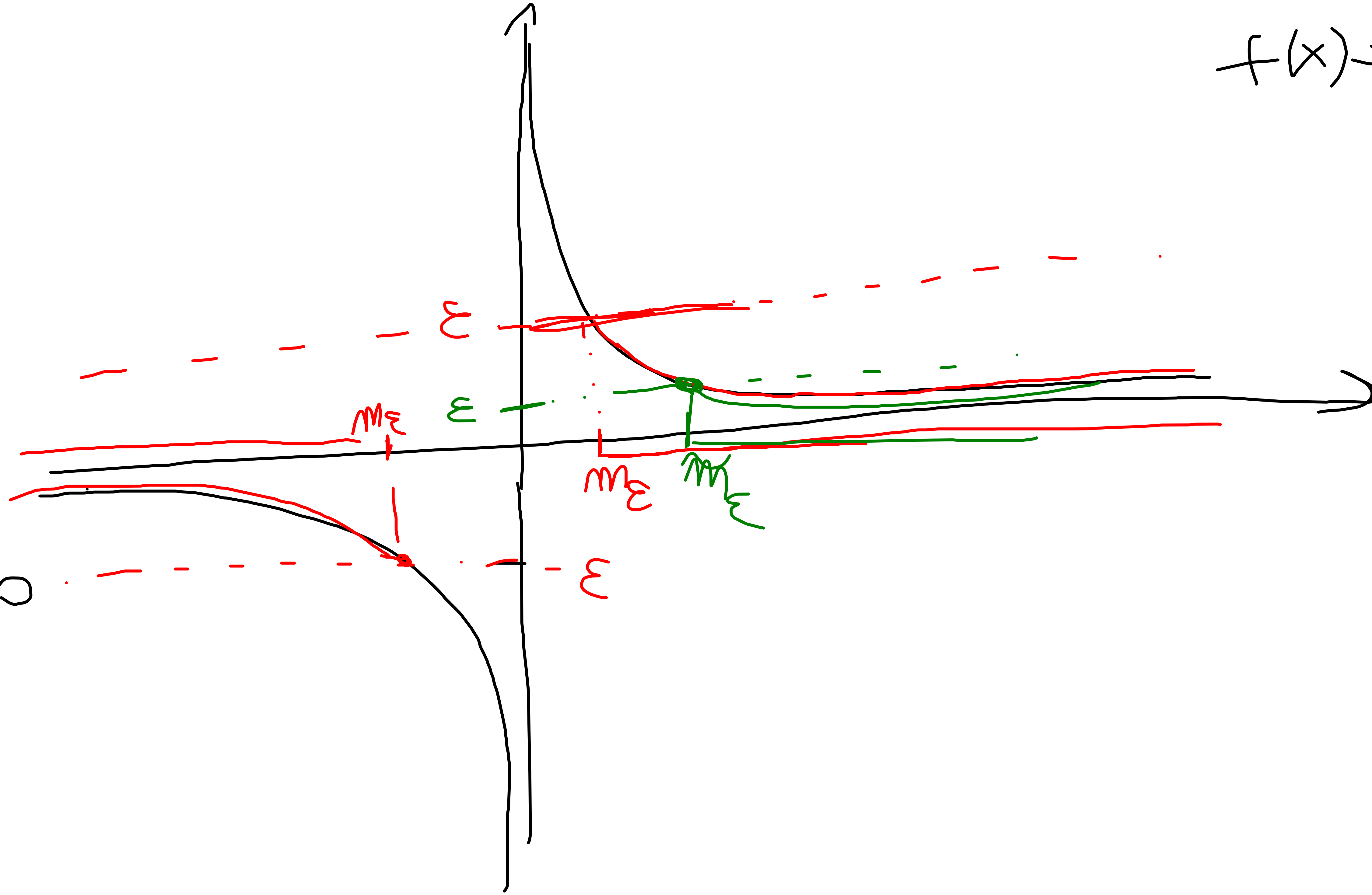
(posso scegliere $m_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$)

- Lo stesso conto mi dice che $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

(posso scegliere $m_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

• $f(x) = \operatorname{sen} x$

- se $c \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$

- se $c = +\infty$, $\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ infatti:

sia $\underline{a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Ma $\underline{f(a_n) = (-1)^n}$ non ha limite

- Analogamente $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$

- $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $\lim_{x \to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$

Lo verifichiamo usando la def:

Devo mostrare che:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $|x-1| < \delta_\varepsilon$

si ha: $\Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x}{1+x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{2x-1-x}{2(1+x)}\right|<\varepsilon$$

$$\iff \left|\frac{x-1}{2(1+x)}\right|<\varepsilon$$

Visto che $x \to 1$ ("è molto vicino a 1")

sicuramente $x>0$

$$\to \left|\frac{x-1}{2(1+x)}\right| \leq \left|\frac{x-1}{2}\right| < \varepsilon \iff |x-1| < \underbrace{2\varepsilon}_{\delta_\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to 2} x^2+1 = 5$$

Devo mostrare che:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall x : |x-2| < \delta_\varepsilon$

si ha $|x^2+1-5| < \varepsilon$

$|x^2-4| < \varepsilon \iff |\underbrace{(x-2)}(x+2)| < \varepsilon$

Visto che $x \to 2$, posso dire $(x+2) < 5$

$|(x-2)(x+2)| \leq 5|x-2| < \varepsilon \iff |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$ δ_ε