Teorema della formula di Taylor con resto di Lagrange

Problema: Data f(x) regolare, $x_0 \in$ dom(f), $n \in \mathbb{N}$, vogliamo trovare il polinomio $P_n(x)$ di grado n che approssima meglio f(x) vicino x_0.

Il teorema della formula di Taylor con resto di Lagrange è un teorema fondamentale dell'analisi matematica che fornisce **un'approssimazione locale di una funzione derivabile** con un polinomio di Taylor.

Enunciato:

Sia `f(x)` una funzione derivabile `n` volte in un intervallo I contenente il punto x_0. Allora, per ogni `x` in `I`, esiste un punto `c` tra x_0 e `x` tale che:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

dove:

- P_n `(x)` è il polinomio di Taylor di ordine `n` di `f(x)` centrato in x_0:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- R_n `(x)` è il resto di Lagrange, dato da:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

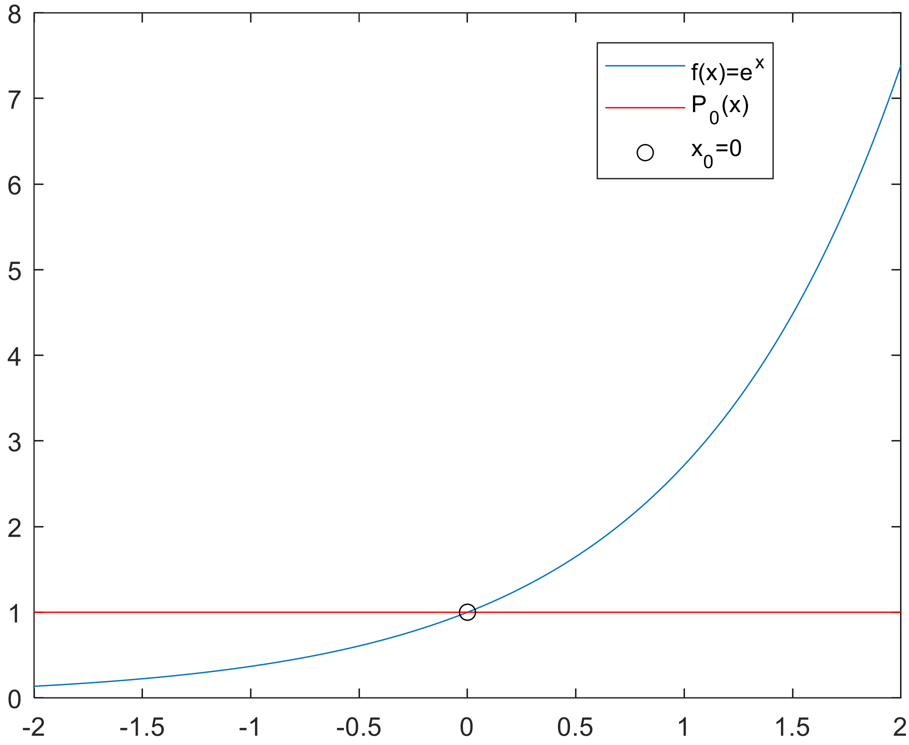
Interpretazione:

- Il teorema afferma che, **in un intorno di un punto x_0, una funzione derivabile `n` volte può essere approssimata con un polinomio di Taylor di grado `n`.**
- L'errore di approssimazione è dato dal resto di Lagrange, che tende a zero all'aumentare di `n`.

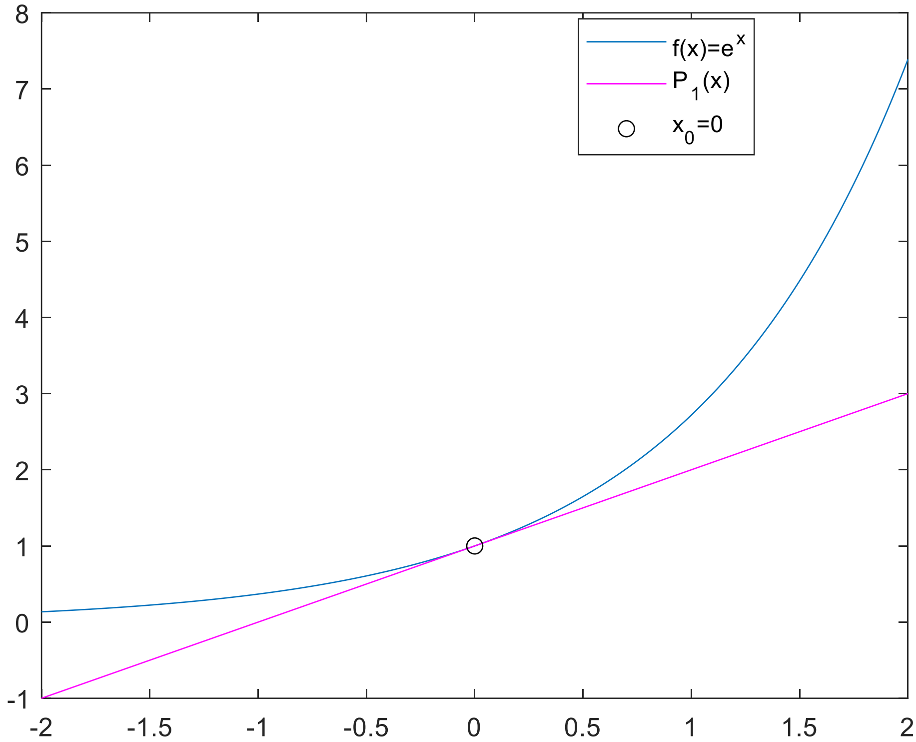
Sia $f(x) = e^x$, ed $x_0 = 0$

Calcoliamo $f(0) = e^0 = 1$ $f'(x) = e^x$, $f'(0) = e^0 = 1$, $f''(0) = e^0 = 1$, $f'''(0) = e^0 = 1$

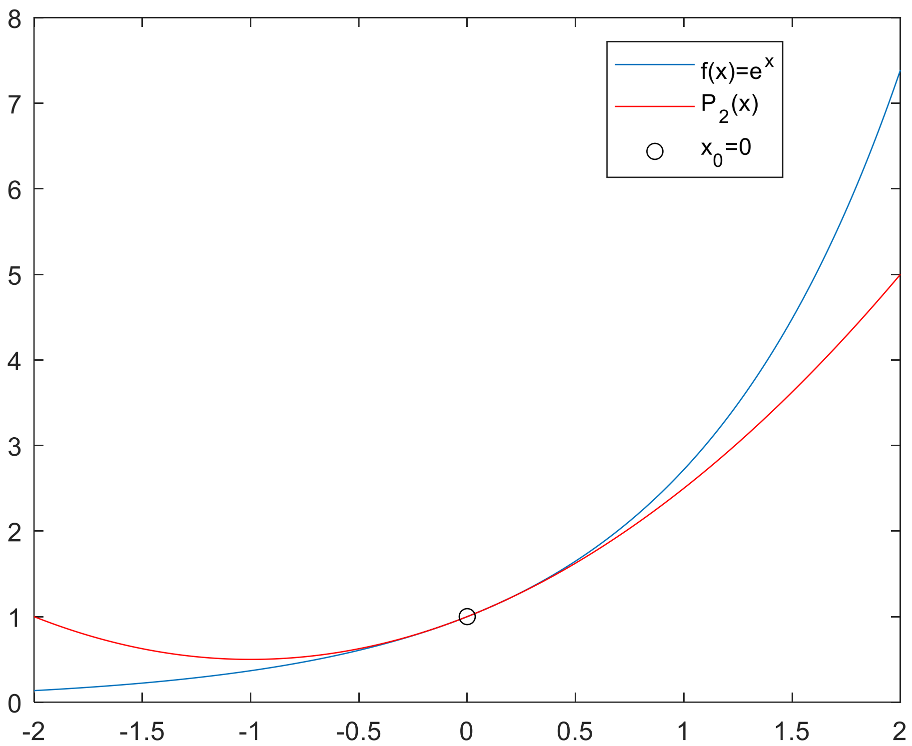
$$P_0(x) = f(0) = 1$$



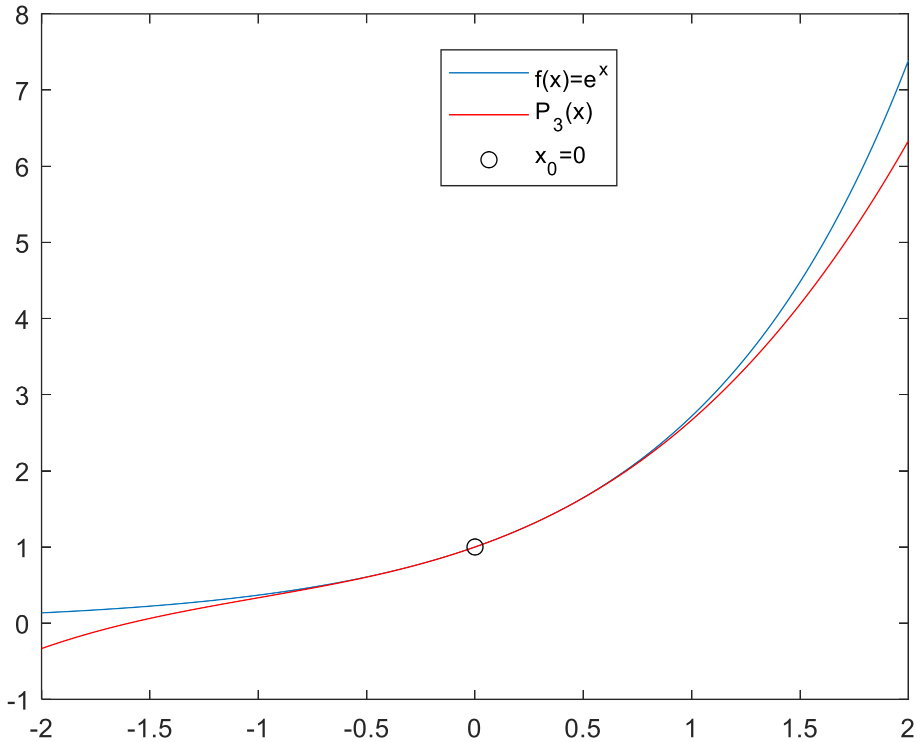
$$P_1(x) = \ f(0) + (x - 0)f'(x) = 1 + x$$



$$P_2(x) = \ f(0) + (x-0)f'(0) + \ f(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}\ \ f''(0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$



$$
\begin{aligned}
P_3(x) = {} & f(0) + (x-0)f'(0) + \ f(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}\ f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}\ f''(0) \\
= {} & \ 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3
\end{aligned}
$$



in un intorno di un punto x_0, una funzione derivabile n volte può essere approssimata con un polinomio di grado n.

Se interessa un'approssimazione in $x + \delta$, è possibile utilizzare il teorema della formula di Taylor con resto di Lagrange sostituendo x_0 con x. In questo caso, il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ centrato in x è:

$$P_n(x + \delta) = f(x) + f'(x)(x + \delta - x) + \frac{f''(x)(x + \delta - x)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)\delta(x + \delta - x)^n}{n!}$$

Il resto di Peano è dato da:

$$R_{n(x+\delta)} = \frac{f^{n+1}(c)(x + \delta - x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

dove c è un punto tra x e $x + \delta$.

$$P_n(x + \delta) = f(x) + f'(x)(\delta) + \frac{f''(x)(\delta)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)\delta(\delta)^n}{n!}$$

$$R_{n(x+\delta)} = \frac{f^{n+1}(c)(\delta)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Nel caso consideriamo uno sviluppo del 1° ordine , il polinomio di Taylor di $f(x)$ centrato in x è:

$$P_1(x + \delta) = f(x) + f'(x)\delta$$

$$f(x + \delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(c)\delta^2}{2}$$

$$f(x + \delta) \approx f(x) + f'(x)\delta$$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$, ed $x_0 = x = 0$. Supponiamo $\delta = 0.1$

Vogliamo approssimare $f(x + \delta) = f(0.1) \approx f(0) + f'(0)\delta = 1 + 1 * 0.1 = 1.1$

Mentre $e^{0.1} = 1.1052$