AA 2022-2023 - Fisica - CdL Ingegneria e Scienze Informatiche
Luigi Guiducci - Esercitazioni

Cinematica unidimensionale

[1] Sia $x(t) = 3t^3 - 5t^2 + 2$ la legge oraria del moto di un punto materiale. Di che tipo di moto si tratta?

[2] Un uomo si trova a 6.0 m di altezza e tiene in mano un sasso, sopra la testa, a 2.0 m dai piedi. All'istante t_0 il sasso e' lasciato libero di cadere. A livello del suolo è presente una piscina di profondità p; una volta entrato in acqua, il moto del sasso continua con velocità costante. Il sasso tocca il fondo della piscina dopo un tempo $t_p - t_0 = 1.45$ s. Si chiede di:

a) discutere i grafici orari (qualitativi) di accelerazione, velocità e spostamento
b) calcolare p
c) calcolare il modulo della velocità media del sasso tra $t = t_0$ e $t = t_p$

[a) discussione a lezione; b) $p \simeq 2.2$ m ; c) $\overline{v} = 7.0$ m/s]

[3] Un automobile A viaggia alla velocità di $v_0^A = 60$ km/h. Una seconda automobile B sopraggiunge alla velocità di $v_0^B = 150$ km/h ed inizia a frenare con decelerazione costante $a = -8.5$ m/s^2 quando si trova ad una distanza d dalla automobile A. Calcolare la minima distanza d tale da evitare l'urto tra le due automobili.

[$d > 36.8$ m]

[4] Un punto materiale A viene lasciato libero di cadere da un'altezza $h_A = 45$ m. Nel medesimo istante, a un altro punto materiale B che si trova sulla verticale e inizialmente a un'altezza $h_B = 21$ m viene impressa una velocità v_0 verso l'alto. Calcolare:

a) dopo quanto tempo dal rilascio simultaneo i due corpi A e B si urtano (calcolarlo in funzione di v_0)
b) qual è il valore minimo v_0^* di v_0 affinché l'urto avvenga in volo
c) quanto vale la velocità relativa di urto;
d) quanto deve valere v_0 affinché A e B si urtino a quota 40 m.

[a) discussione a lezione; b) $v_0^* = 7.9$ m/s; c) v_0; d) $v_0 = 24$ m/s]

[5] Si determini la profondità h di un pozzo con i seguenti dati: si lancia un sasso al suo interno, e si sente il suono dell'urto sul fondo dopo un tempo $\tau = 2$ s. Si consideri $v_s = 340$ m/s la velocità del suono. Che errore si commetterebbe trascurando l'effetto della velocità finita del suono?

[$h \simeq 18.5$ m; un errore del 6%]

Soluzioni

[1] Sia $x(t) = 3t^3 - 5t^2 + 2$ la legge oraria del moto di un punto materiale. Di che tipo di moto si tratta?

La derivata seconda della legge oraria rappresenta l'accelerazione, si ottiene

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 3t^3 - 5t^2 + 2 \\
v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = 9t^2 - 10t \\
a(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) = 18t - 10
\end{aligned}
$$

cioè un'accelerazione dipendente dal tempo. Quindi si tratta di un moto ad accelerazione variabile.

[2] Un uomo si trova a 6.0 m di altezza e tiene in mano un sasso, sopra la testa, a 2.0 m dai piedi. All'istante t_0 il sasso e' lasciato libero di cadere. A livello del suolo è presente una piscina di profondità p; una volta entrato in acqua, il moto del sasso continua con velocità costante. Il sasso tocca il fondo della piscina dopo un tempo $t_p - t_0 = 1.45$ s. Si chiede di:

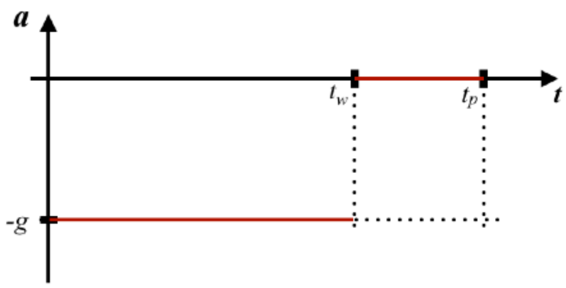
a) discutere i grafici orari (qualitativi) di accelerazione, velocità e spostamento

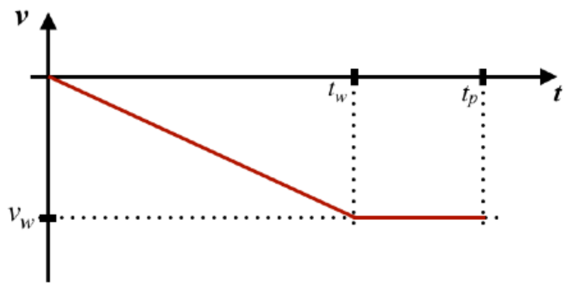
b) calcolare p

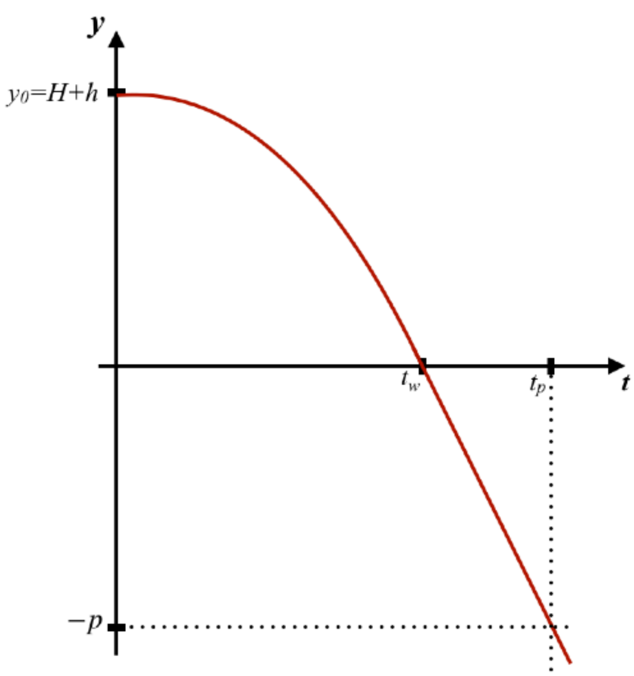
c) calcolare il modulo della velocità media del sasso tra $t = t_0$ e $t = t_p$

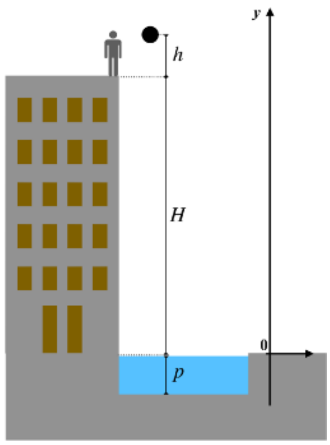
[a) discussione a lezione; b) $p \simeq 2.2$ m ; c) $\overline{v} = 7.0$ m/s]

a) Iniziamo disegnando una rappresentazione grafica della situazione, poi procediamo a tracciare i grafici orari di accelerazione, velocità e spostamento (verticale).









Descrizione del moto: l'oggetto cade con accelerazione di modulo g fino all'acqua, poi prosegue a velocità costante. Scelgo un asse y rivolto verso l'alto, scelgo l'origine in modo che sia a livello del suolo. Scelgo di avere $t_0 = 0$ e chiamo t_w l'istante (ignoto) in cui il corpo tocca l'acqua.

Accelerazione: con questo sistema di riferimento, avrò un moto con $a = -g$ tra t_0 e t_w, e $a = 0$ tra t_w e t_p.

Velocità: aumenta (in modulo) linearmente fino a che c'è accelerazione, poi resta costante. Tra t_0 e t_w la pendenza della $v(t)$ è $-g$.

Posizione: parte da $y_0 = H + h > 0$. Il moto è rettilineo uniformemente accelerato finché è in aria quindi la $y(t)$ è una parabola. Continua con moto rettilineo uniforme in acqua, quindi la $y(t)$ è una retta.

Osserviamo che in questo moto c'è una discontinuità nell'accelerazione. Prima e dopo t_w abbiamo leggi orarie diverse. È in pratica come risolvere due problemi separati, che si raccordano quanto a posizione e velocità nel punto $t = t_w$.

b) Nella parte di moto per $t < t_w$ e $y > 0$, è un m.r.u.a., la cui legge oraria è in generale:

$$\begin{aligned} & y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ & v_y(t) = v_0 + at \\ & a_y(t) = a = \text{costante} \end{aligned}$$

Nel caso specifico avremo:

$$y_0 = H + h; \quad v_0 = 0; \quad a = -g$$

quindi

$$\begin{cases} y(t) = H = h - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

Al tempo t_w finisce questa parte del moto. Per definizione, $y(t_w) = 0$, quindi

$$0 = H + h - \frac{1}{2} g t_w^2 \implies t_w = \sqrt{\frac{2(H+h)}{g}}$$

e avremo la velocità nell'istante di ingresso nell'acqua

$$v_w = v(t_w) = -g t_w = -\sqrt{2g(H+h)}$$

Dopo t_w ho la seconda parte del moto, in cui considero le nuove condizioni iniziali:

$$t_0 = t_w; \quad v_0 = v_w; \quad a = 0 \ (v \ \text{costante})$$

e quindi una legge oraria della posizione:

$$y(t) = v_w(t - t_w)$$

L'istante in cui tocca il fondo è t_p, nella posizione $y = -p$. Quindi

$$y(t_p) = -p \implies v_w(t_p - t_w) = -p \implies p = -v_w(t_p - t_w)$$

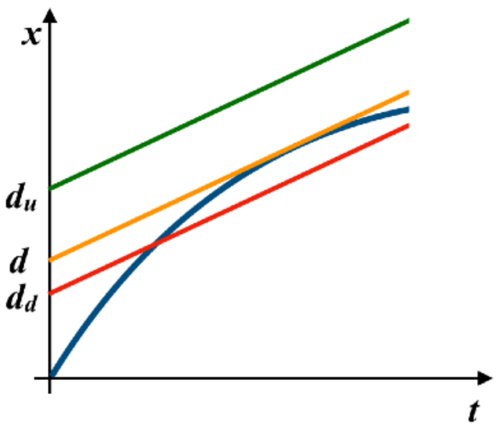
e sostituendo le espressioni precedenti:

$$p = \sqrt{2g(H+h)}\left[t_p - \sqrt{\frac{2(H+h)}{g}}\right] = t_p\sqrt{2g(H+h)} - 2(H+h) \simeq 2.17 \text{ m}$$

c) $$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{p+H+h}{t_p} \simeq -7.01 \text{ m/s}$$

[3] Un automobile A viaggia alla velocità di $v_0^A = 60\ \mathrm{km/h}$. Una seconda automobile B sopraggiunge alla velocità di $v_0^B = 150\ \mathrm{km/h}$ ed inizia a frenare con decelerazione costante $a = -8.5\ \mathrm{m/s^2}$ quando si trova ad una distanza d dalla automobile A. Calcolare la minima distanza d tale da evitare l'urto tra le due automobili.

[$d > 36.8\ \mathrm{m}$]



$v_0^A = 60\ \mathrm{km/h} = 16.7\ \mathrm{m/s}$
$v_0^B = 150\ \mathrm{km/h} = 41.7\ \mathrm{m/s}$
$a_B = -8.5\ \mathrm{m/s^2} = -a$

Risolviamo il problema con due diversi approcci.

Primo caso: descrizione del moto tramite le due leggi orarie nel SdR della strata.
Fisso $t_0 = 0$ istante in cui B comincia a frenare.
Fisso $x_B(t=0) = 0$, quindi $x_A(t=0) = d$.

Le due leggi orarie sono

$$x_A(t) = d + v_0^A t$$
$$x_B(t) = v_0^B t - \frac{1}{2} a t^2$$

Cosa significa "si urtano"? Che nello stesso istante si trovano nella stessa posizione. Chiamiamo l'istante dell'urto t^*, quindi

$$x_A(t^*) = x_B(t^*) \implies d + v_0^A t^* = v_0^B t^* - \frac{1}{2} a t^{*2}$$

$$\frac{1}{2} a t^{*2} + (v_0^A - v_0^B) t^* + d = 0$$

Le radici di questa equazione possono essere: due distinte (collisione, rosso), due coincidenti (quasi-collisione, arancio), nessuna (no collisione, verde).
Le situazioni elencate corrispondono ai diversi valori del determinante dell'equazione di secondo grado:

$$\Delta = \left(v_0^A - v_0^B\right)^2 - 2ad$$

ovvero se

$\Delta > 0$: urto con velocità relativa non nulla;
$\Delta = 0$: urto con velocità relativa nulla;
$\Delta < 0$: nessun urto.

quindi per evitare l'urto dovremo avere

$$d > \frac{\left(v_0^A - v_0^B\right)^2}{2a} \simeq 36.8\ \mathrm{m}$$

Secondo caso: descrizione del moto nel SdR inerziale in moto con A

In questo SdR, l'automobile A è in quiete, l'automobile B procede inizialmente con velocità $v_0^{BA} = v_0^B - v_0^A$ e frena con accelerazione $-a$. La minima distanza per evitare la collisione sarà quindi lo spazio necessario a B per fermarsi (nel SdR di A).

Utilizziamo la nota formula che lega velocità e distanza in caso di accelerazione costante:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a(x_f - x_i)$$

Nel caso in esame dovremo utilizzare $v_0 = v_0^{BA} = v_0^B - v_0^A$, $v_f = 0$ e $x_f - x_i = d$:

$$0 = {v_0^{BA}}^2 - 2a\,d$$

da cui ricaviamo la distanza percorsa (nel SdR della strada) da B

$$d = \frac{{v_0^{BA}}^2}{2a} = \frac{\left(v_0^B - v_0^A\right)^2}{2a}$$

che è appunto il risultato ottenuto in precedenza, che si può leggere come: spazio di frenata necessario ad un punto in moto con velocità iniziale $v_0^B - v_0^A$ e decelerazione a.

[4] Un punto materiale A viene lasciato libero di cadere da un'altezza $h_A = 45\ \text{m}$. Nel medesimo istante, a un altro punto materiale B che si trova sulla verticale e inizialmente a un'altezza $h_B = 21\ \text{m}$ viene impressa una velocità v_0 verso l'alto. Calcolare:

a) dopo quanto tempo dal rilascio simultaneo i due corpi A e B si urtano (calcolarlo in funzione di v_0)

b) qual è il valore minimo v_0^* di v_0 affinché l'urto avvenga in volo

c) quanto vale la velocità relativa di urto;

d) quanto deve valere v_0 affinché A e B si urtino a quota $40\ \text{m}$.

[a) discussione a lezione; b) $v_0^* = 7.9\ \text{m/s}$; c) v_0; d) $v_0 = 24\ \text{m/s}$]

I dati iniziali: $h_A = 45\ \text{m}$; $h_B = 21\ \text{m}$; $v_0^A = 0$; $v_0^B = v_0$

I due moti saranno descritti dalle leggi orarie:

$$y_A(t) = h_A - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_B(t) = h_B + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

a) Urto in generale: ad un dato istante t^*, i due corpi occupano la stessa posizione.

$$y_A(t^*) = y_B(t^*) \implies h_A - \frac{1}{2}gt^{*2} = h_B + v_0 t^* - \frac{1}{2}gt^{*2}$$

ricaviamo dunque

$$t^* = \frac{h_a - h_B}{v_0}$$

b) Urto in volo: $y_A(t^*) = y_B(t^*) > 0$, quindi

$$y_A(t^*) = h_A - \frac{1}{2}gt^{*2} = h_A - \frac{1}{2}g\left(\frac{h_A - h_B}{v_0}\right)^2 > 0$$

risolviamo ponendo y_A(t^*)=0 per trovare la velocità minima v_0^*:

$$\frac{2h_A}{g} = \left(\frac{h_A - h_B}{v_0^*}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{2h_A}{g}} = \frac{h_A - h_B}{v_0^*} \implies v_0^* = (h_A - h_B)\sqrt{\frac{g}{2h_A}} \simeq 7.92\ \text{m/s}$$

c) Si intuisce che è v_0. Comunque:

$$v_A(t) = -\,gt; \quad v_B(t) = v_0 - gt$$

$$v_A(t) - v_B(t) = v_0 = \text{costante}$$

d) Si ha

$$y_A(t^*) = y_B(t^*) = 40 \text{ m}$$

$$y_A(t^*) = h_A - \frac{1}{2}g\left(\frac{h_A - h_B}{v_0}\right)^2 = 40 \text{ m}$$

$$\frac{2\left(h_A - 40 \text{ m}\right)}{g} = \left(\frac{h_A - h_B}{v_)}\right)^2 \implies$$

$$v_0 = \left(h_A - h_B\right)\sqrt{\frac{2\left(h_A - 40 \text{ m}\right)}{g}} \simeq 24.2 \text{ m/s}$$

[5] Si determini la profondità h di un pozzo con i seguenti dati: si lancia un sasso al suo interno, e si sente il suono dell'urto sul fondo dopo un tempo $\tau = 2\ \mathrm{s}$. Si consideri $v_s = 340\ \mathrm{m/s}$ la velocità del suono. Che errore si commetterebbe trascurando l'effetto della velocità finita del suono?

[$h \simeq 18.5\ \mathrm{m}$; un errore del 6%]

Il tempo totale τ sarà pari alla somma del tempo di caduta τ_c e il tempo impiegato dal suono per risalire τ_s.
Trascurando l'attrito con l'aria, la caduta è un moto uniformemente accelerato quindi

$$h = \frac{1}{2} g \tau_c^2 \implies \tau_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Il suono si muove a velocità costante v_s, quindi

$$\tau_s = \frac{h}{v_s}$$

Dunque il tempo totale

$$\tau = \tau_c + \tau_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}$$

Per trovare il valore di h, poniamo $y = \sqrt{h}$ e otteniamo

$$y^2 + \sqrt{\frac{2v_s^2}{g}}\, y - v_s \tau = 0$$

$$y = -\sqrt{\frac{v_s^2}{2g}} + \sqrt{\frac{v_s^2}{2g} + v_s \tau} = \frac{\tau\sqrt{2g}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2g\tau}{v_s}}}$$

$$h = y^2 \simeq 18.5\ \mathrm{m}$$

Trascurare la velocità del suono significa considerare
$v_s \to \infty$, quindi $y \to \tau\sqrt{g/2} \implies y^2 \to g\tau^2/2 \simeq 19.6\ \mathrm{m}$, compiendo dunque un errore di circa il 6% (rispetto al risultato precedente).