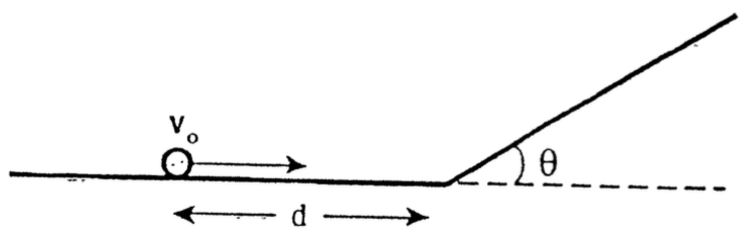
Esercizi di Fisica, seconda esercizio della seconda esercitazione

Niccolò Puccetti

May 2024

1 Testo

Un corpo di massa $m = 1\,\text{kg}$ possiede una velocità iniziale $v_0 = 10\,\text{m/s}$. Esso si muove lungo un piano orizzontale coprendo una distanza $d = 1\,\text{m}$, poi sale lungo un piano inclinato di $\theta = 30$. Calcolare dove e quando si ferma e ripetere il calcolo in presenza di un coefficiente di attrito $\mu = 0.2$. **Soluzione:**



1)Caso senza attrito. Troviamo l'altezza alla quale il corpo si ferma sul piano inclinato. Siamo in assenza di forze di attrito, dunque l'energia si conserva, all'inizio il corpo possiede solo energia cinetica, infatti se uno pone come altezza zero il livello a cui si trova inizialmente il corpo la sua energia potenziale sarà nulla. Quando invece il corpo raggiunge il massimo del piano inclinato vuol dire che ha trasformato tutta la sua energia cinetica in energia potenziale, si ha quindi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \rightarrow\ h = \frac{v_0^2}{2g} \tag{1}$$

La distanza l percorsa sul piano inclinato sarà quindi:

$$l = \frac{h}{\sin(\theta)} = \frac{v_0^2}{2g\sin(\theta)} = 10.2\,\text{m} \tag{2}$$

Il tempo totale sarà dato dal primo tratto t_1 in cui il corpo si muove di moto rettilineo uniforme, si ha quindi:

$$t_1 = \frac{d}{v_0} \tag{3}$$

Per trovare il tempo t_2 bisogna considerare l'equazione del moto uniformemente accelerato, in questo caso l'accelerazione sarà data dalla componente parallela dell'accelerazione di gravità $g_{\parallel} = g\sin(\theta)$, l'equazione oraria diventa:

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g \sin(\theta) t^2 \tag{4}$$

Qui $s(t)$ rappresenta la coordinata lungo il piano inclinato. Per trovare il tempo conviene calcolare la derivata e ricordare che il corpo si ferma quando la sua velocità è nulla, ovvero quando la velocità è zero ha raggiunto il punto più alto del piano. Per trovare la velocità basta derivare rispetto al tempo e trovare:

$$v(t) = v_0 - g\sin(\theta)t \tag{5}$$

Ponendo $v(t) = 0$ troviamo il tempo t_2:

$$t_2 = \frac{v_0}{g\sin(\theta)} \tag{6}$$

Il tempo totale sarà quindi $t_{tot} = t_1 + t_2$.
2)Caso con attrito. In presenza di attrito il moto è uniformente accelerato (decelarato in realtà perchè l'accelerazione è negativa) anche lungo la parte piana. Nel tratto piano la forza d'attrito è $F_a = \mu mg$. Questa forza d'attrito compie un lavoro sul corpo, riducendone l'energia meccanica. Lungo il piano inclinato ci saranno due forze ad opporsi al moto, la forza d'attrito come nel caso piano e la componente parallela dell'accelerazione di gravità, la forza totale è $F_{tot} = mg\sin(\theta) + \mu mg\cos(\theta)$. Troviamo intanto la velocità v con cui il corpo raggiunge l'inizio del piano inclinato:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \mu m g d = \frac{1}{2} m v^2 \to v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} = 9.8\, m/s \tag{7}$$

Nota bene che la velocità iniziale è ridotta a causa del lavoro della forza d'attrito, ottenuto moltiplicando la distanza percorsa d per la forza d'attrito. Per trovare il tempo t_1 che impiega a percorrere il tratto piano scriviamo la sua equazione del moto:

$$x(t) = -d + v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 \tag{8}$$

L'equazione è ottenuta considerando come zero del sistema di coordinate il punto in cui inizia il piano inclinato, comunque sia questa scelta sarà ininfluente, perché derivando si ottiene:

$$v(t) = v_0 - \mu g t \tag{9}$$

Adesso ponendo $v(t) = v$ si trova:

$$v = v_0 - \mu g t_1 \to t_1 = \frac{v_0 - v}{\mu g} = 0.10\,\mathrm{s} \tag{10}$$

A questo punto ragioniamo sul tratto in salita, come al solito quando il corpo raggiunge l'altezza massima la sua velocità si annulla, di conseguenza anche l'energia cinetica sarà nulla e quindi l'unica energia sarà quella potenziale:

$$\frac{1}{2} m v^2 - mg\mu\cos(\theta) l = mgh \tag{11}$$

Nota che l è la lunghezza del tratto percorso lungo il piano inclinato prima di fermarsi, h è l'altezza a cui si ferma, chiaramente queste due quantità sono legate, infatti $h = l\sin(\theta)$. Scrivendo tutto in funzione di l si trova:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\mu\cos(\theta)l = mgl\sin(\theta) \tag{12}$$

Da cui si trova l:

$$l = \frac{v^2}{2g(\sin(\theta) + \mu\cos(\theta))} = 7.3\,m \tag{13}$$

Riscrivendo l'equazione oraria lungo il piano tenendo conto anche della forza d'attrito si ottiene:

$$s(t) = vt - \frac{1}{2}g\sin(\theta)t^2 - \frac{1}{2}\mu g\cos(\theta)t^2 \tag{14}$$

Ragionando come nel caso senza attrito si ha:

$$v(t) = v - gsin(\theta)t - \mu g\cos(\theta)t \tag{15}$$

Ponendo $v(t) = 0$ si ottiene t_2:

$$t_2 = \frac{v}{g(\sin(\theta) + \mu\cos(\theta))} = 1.49\,\mathrm{s} \tag{16}$$

Quindi il tempo totale sarà $t = t_1 + t_2$.