# Ordinamenti e grafi

Vittorio Maniezzo - Universita di Bologna

1

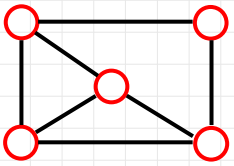
## Grafo: definizione

Un grafo G = (V,E) è composto da:

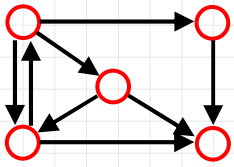
- V: insieme di vertici
- E ⊂ V´ × V: insieme di archi *(edge)* che connettono i vertici

Un arco *a* = {u,v} è una coppia di vertici

Se (u,v) è ordinato allora G è un grafo diretto (orientato)



```
V = {a,b,c,d,e}
E = {{a,b},{a,c},{a,d},
     {b,e}, {c,d},
     {c,e}, {d,e}}
```



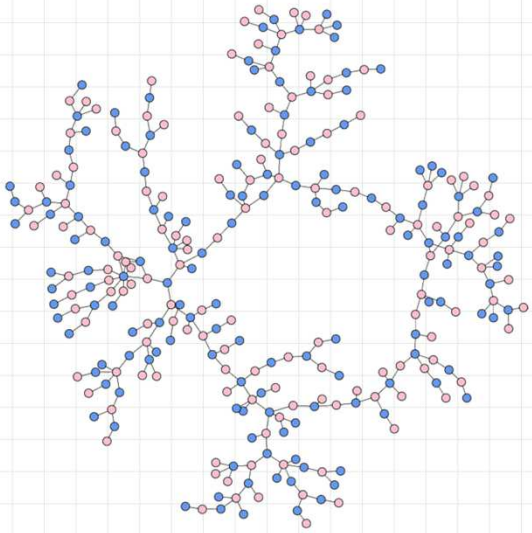
```
V = {a,b,c,d,e}
A = {(a,b),(a,c),(a,d),
     (d,a),(b,e),(c,d),
     (c,e),(d,e)}
```

Vittorio Maniezzo - Universita di Bologna



2

# Flessibilitá rappresentativa ...





3

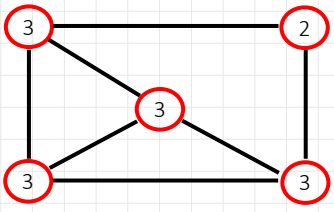
# Terminologia

Vertici adiacenti: connessi da un arco

Grafo non orientato: u,v adiacenti se $\{u,v\} \in E$

Grafo orientato: se $(u,v) \in A \rightarrow$ v adiacente a u e (u,v) è incidente in v

Grado (di un **vertice**): num. di vertici adiacenti




$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2(num\ di\ archi)$$

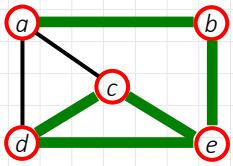
Cammino: sequenza di vertici $v_1, v_2, \ldots v_k$ tale per cui ogni coppia di vertici consecutivi $v_i$ e $v_{i+1}$ è adiacente (in grafo orientato: *catena*)



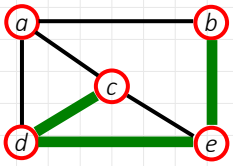
4

# Terminologia (2)

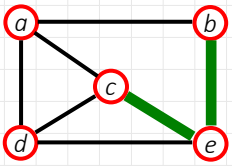
Cammino elementare: non ci sono vertici ripetuti




a b e d c e




b e d c



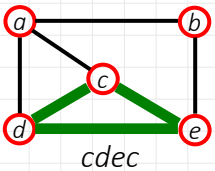

b e c



5

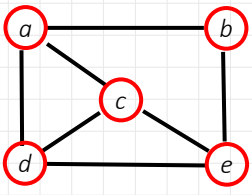
# Terminologia (3)

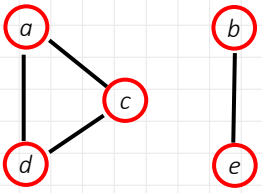
Ciclo: cammino elementare, tranne che per il primo vertice che coincide con l'ultimo (in grafo orientato: *circuito*)




*cdec*

Grafo connesso: qualsiasi coppia di vertici è unita da almeno un cammino









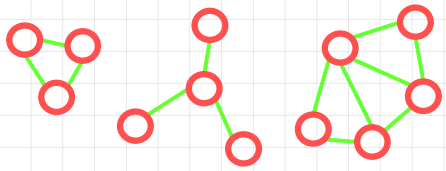
6

# Terminologia ( 4 )

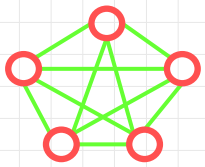
Sottografo: sottinsieme di vertici e archi di un grafo dato

Componente connessa: sottografo connesso massimale.

Ad es., il grafo sotto ha 3 componenti connesse



Grafo completo: ha un arco fra ogni coppia di nodi



$$m = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

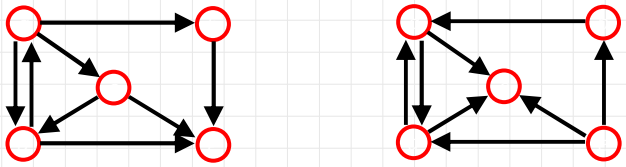


7

# Grafo trasposto

Il grafo $G^T=(V,E^T)$ è il trasposto di $G=(V,E)$ se $E^T = \{(u,v):(v,u)\in E\}$ (rovescia il senso di percorrenza degli archi di G).

G e $G^T$ hanno le stesse componenti fortemente connesse.

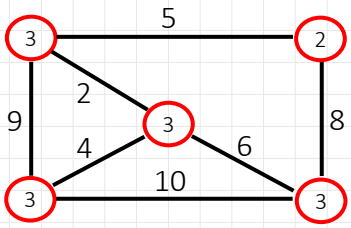




8

# Terminologia ( 5 )

Grafi pesati:
Gli archi possono avere un peso (costo, guadagno) associato.
Il peso può essere determinato da una funzione $p: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
Se non è specificato un peso su un arco, lo si assume infinito



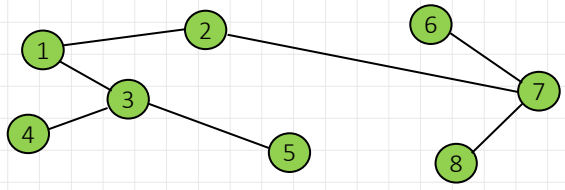



9

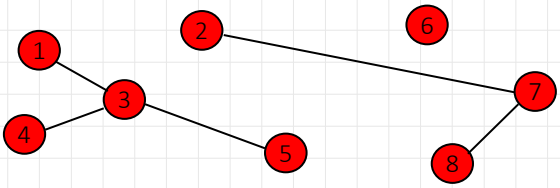
# Alberi

Un albero è un grafo aciclico con un numero di nodi uguale al numero di archi più uno ( |E|=|V|-1 ).

Equiv., un albero è un grafo aciclico totalmente connesso.
Può esistere un nodo particolare chiamato radice.




Albero




Foresta



10

# Alberi, definizioni

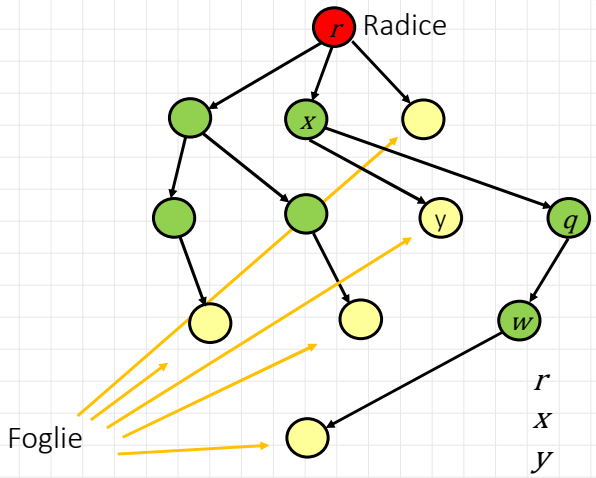
Se c'è un nodo radice viene implicitamente definita una relazione di ordinamento fra nodi basata sulla distanza dalla radice in cui:

- Ogni nodo non radice ha un unico predecessore / padre
- Un nodo può avere più successori / discendenti / figli
- Un nodo senza successori è una foglia
- Un nodo con successori è un nodo interno
- La profondità di un nodo è la lunghezza di un cammino dalla radice al nodo
- L'altezza di un nodo è la massima lunghezza di un cammino dal nodo a una foglia discendente del nodo
- L'altezza di un albero è l'altezza della radice
- Un livello / strato di un albero consiste di tutti i nodi con la stessa profondità
- Il *numero di livelli* di un albero è pari alla sua *altezza +1*



11

# Arborescenza




$r$ è la radice
$x$ è il padre di $y$
$y$ è un figlio di $x$
$x$ e $q$ sono avi di $w$
$w$ e $q$ sono discendenti di $x$
$q$ è fratello di $y$



12

# Problema: Ordinamento

*Input*: una sequenza di $n$ numeri $<a_1,a_2,\ldots,a_n>$

*Output*: *i numeri ricevuti in input ordinati dal più piccolo al più grande ovvero:*

$<a_{\pi(1)},a_{\pi(2)},\ldots,a_{\pi(n)}>$ *dove* $a_{\pi(i)} \leq a_{\pi(i+1)}$

$\pi$ *è una opportuna permutazione degli indici* $1,\ldots,n$

*Esempio*: $a = [7, 32, 88, 21, 92, -4]$

$\pi = [6, 1, 4, 2, 3, 5]$

$a[\pi[]] = [-4, 7, 21, 32, 88, 92]$





# Ordinamento di chiavi

***Più in generale***, spesso è dato un array di n elementi, dove ciascun elemento è composto da:
– una chiave, con le chiavi confrontabili tra loro
– un contenuto (valore), arbitrario

Vogliamo permutare l'array delle chiavi in modo che esse compaiano in ordine non decrescente (oppure non crescente)

*Esempio*:

| Chiave | Valore |
|---|---|
| 4 | quattro |
| 2 | due |
| 5 | cinque |
| 1 | uno |
| 3 | tre |

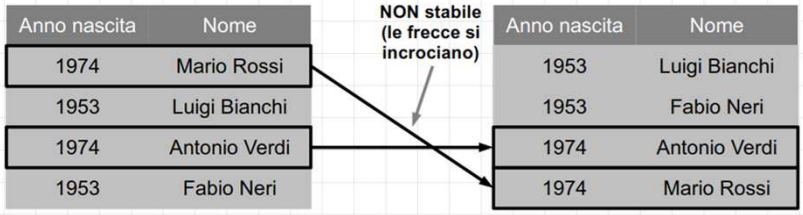
| Chiave | Valore |
|---|---|
| 1 | uno |
| 2 | due |
| 3 | tre |
| 4 | quattro |
| 5 | cinque |

Sarà una semplice estensione degli algoritmi affrontati.

# Definizioni

Ordinamento in place (*in loco*)
- L'algoritmo permuta gli elementi direttamente nell'array originale, senza usare un altro array di appoggio

Ordinamento stabile
- L'algoritmo preserva l'ordine con cui elementi con la stessa chiave compaiono nell'array originale






15

# Limite inferiore di complessità

Molti algoritmi di ordinamento, noi vedremo:

Insertion-sort
Merge-sort
Heap-sort
Quick-sort

Tutti "*comparison-sort*": algoritmi basati su confronti di coppie di elementi

Questi metodi calcolano una soluzione che dipende esclusivamente dall'esito di confronti fra numeri

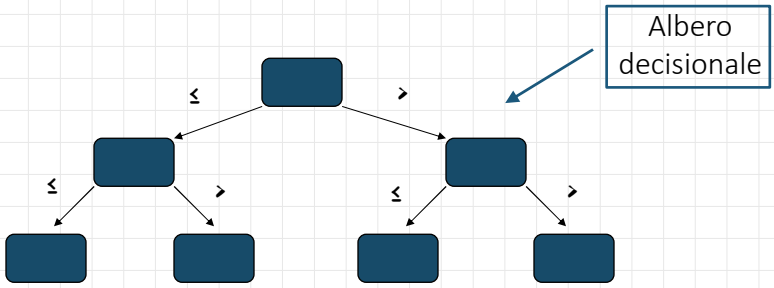
TEOREMA (Lower Bound per algoritmi comparison-sort): Qualsiasi algoritmo "comparison-sort" deve effettuare nel caso pessimo $\Omega(n \log(n))$ confronti per ordinare una sequenza di $n$ numeri.



16

# lower bound per comparison sort

Dimostrazione (idea): con $n$ numeri ho $n!$ possibili ordinamenti.
Possiamo scegliere quello giusto tramite una sequenza di confronti fra coppie di elementi.




Ogni nodo rappresenta un confronto
Ogni arco porta alla decisone successiva da prendere

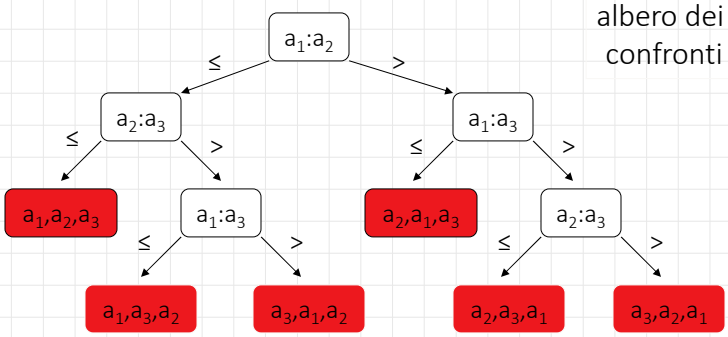


17

# Esempio

n=3 $\{a_1,a_2,a_3\}$

albero dei confronti




Ogni nodo bianco rappresenta un confronto.
Ogni nodo rosso rappresenta una possibile soluzione.



18

## Limite inf al num dei confronti

Nell'esempio, 3 elementi.

$3! = 6$ : numero di foglie dell'albero dei confronti.

- ogni (cammino dalla radice ad una) foglia rappresenta un ordinamento
- ci sono $n!$ ordinamenti.

quanto deve essere alto un albero per avere $n!$ foglie ?

- un albero binario alto $h$ ha al massimo $2^h$ foglie
- dobbiamo avere $2^h \geq n!$
- Formula di Stirling: $n! > (n/e)^n$ $e$=2.17…

$h \geq log[(n/e)^n] = n\ log(n) - n\ log(e) = \Omega(n\ log(n))$





## Limite inf al num dei confronti

Il caso pessimo di un qualsiasi algoritmo comparison-sort eseguito su una sequenza di *n* numeri è dato dall'altezza dell'albero di decisione associato a quell'algoritmo.

MA

Un albero binario con n! foglie (ordinamenti) ha un altezza $\Omega(n\ log(n))$

QUINDI

qualsiasi algoritmo comparison-sort, nel caso pessimo, esegue $\Omega(n\ log(n))$ *confronti.*

□

# Dimostrazione alternativa

$2^h \geq n!$

$h \geq log(n!)$

$= log(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n)$

$\geq log(1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot n/2 \ldots \cdot n/2\ )$

$= log((\ n/2\ )^{\,n/2}\ )$

$= n/2\ log(\ n/2\ )$

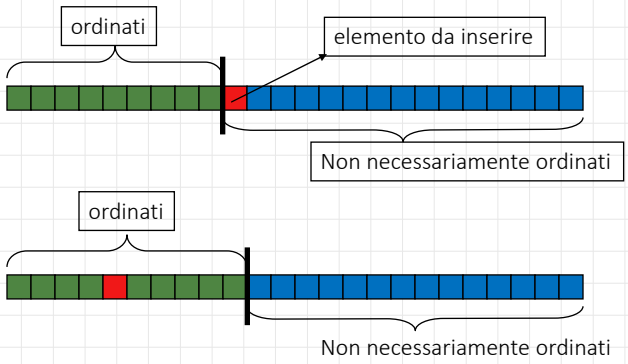
quindi $h \in \Omega(n\ log\ n)$





# Idea per ordinare...

Ad ogni passo ho una sottosequenza ordinata in cui inserisco un nuovo elemento dell'input:



# Insertion Sort

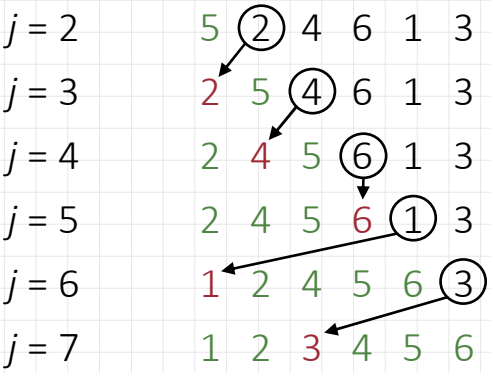
```
Insertion-sort(A)
1.  for j=2 to size(A)
2.    do key = A[j]
3.       // insert A[j] in A[1,...,j-1]
4.       i = j-1
5.       while i>0 and A[i]>key
6.         do A[i+1] = A[i]
7.            i=i-1
8.       A[i+1] = key
```

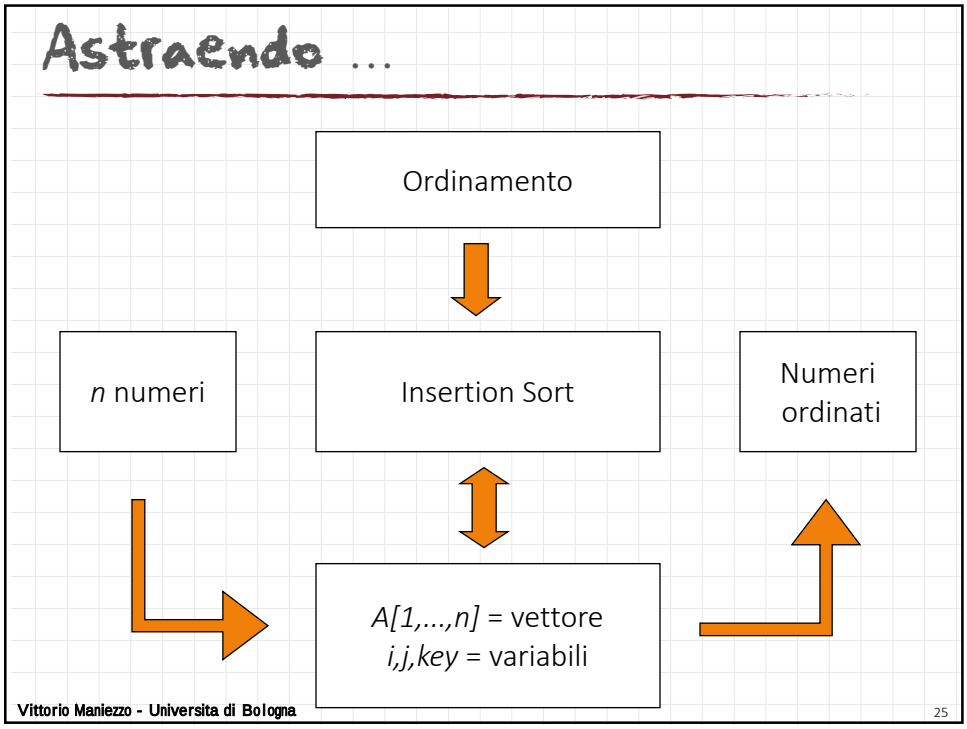




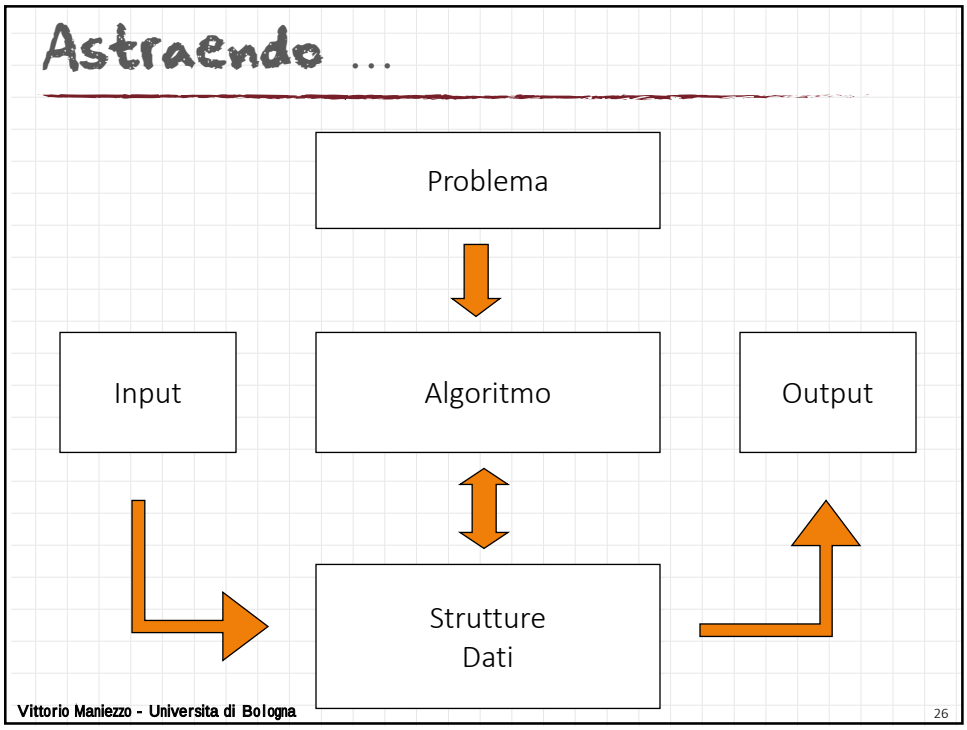
# Esempio:

A = {5,2,4,6,1,3}




Astraendo ...
Ordinamento
n numeri
Insertion Sort
Numeri ordinati
A[1,...,n] = vettore
i,j,key = variabili
Vittorio Maniezzo - Universita di Bologna
25

25


Astraendo ...
Problema
Input
Algoritmo
Output
Strutture Dati
Vittorio Maniezzo - Universita di Bologna
26

26

## Insertion Sort

```
Insertion-sort(A)
1.  for j=2 to size(A)
2.    do key = A[j]
3.       // insert A[j] in A[1,...,j-1]
4.       i = j-1
5.       while i>0 and A[i]>key
6.         do A[i+1] = A[i]
7.            i=i-1
8.       A[i+1] = key
```



27

## Insertion Sort

```
Insertion-sort(A)
1.  for j=2 to size(A)
2.    do key = read(j)
3.       {insert A[j] in A[1,...,j-1]}
4.       i = j-1
5.       while i>0 and read(i)>key
6.          do modify(i+1,read(i))
7.             i=i-1
8.       modify(i+1,key)
```



28

# Strutture dati di Insertion-Sort

DATI: Insieme di numeri: A

OPERAZIONI: *read(i)*
*size(S)*
*modify(i,x)*

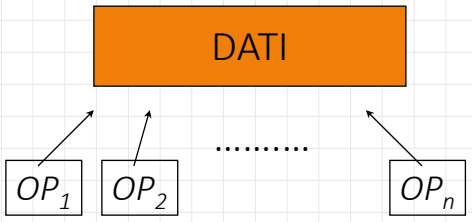




# Strutture Dati Astratte

DATI
+
OPERAZIONI

} "Che cosa"



# Esempio di ADS

Dati = insieme S di numeri

$OP_1$ = estrai il minimo

$OP_2$ = estrai il massimo

$OP_3$ = restituisci la taglia di S

$OP_4$ = inserisci un nuovo numero in S





# ADS

ADS = Insieme S di numeri + Read, Size, Modify

DS = S="A[1,…,n]" (vettore)
Read(i)="A[i]"
Modify(i,x)="A[i]=x"

# ADS

ADS = che cosa vogliamo ?

DS = come lo implementiamo ?



33

# Insertion Sort: pseudocodice

Pseudo codice dell'algoritmo InsertionSort.

```
 1: procedure InsertionSort(A)
 2:   for j ← 2 to Length(A) do
 3:     key ← A[j]
 4:     i ← j - 1
 5:     while i > 0 & A[i]>key do
 6:       A[i+1] ← A[i]
 7:       i ← i - 1
 8:     end while
 9:     A[i+1] ← key
10:   end for
11: end procedure
```

*Attenzione se lo si implementa in C!*



34

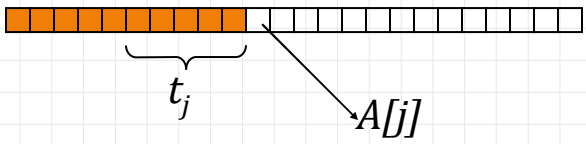
# Costo computazionale

| Insertion-sort(A) | costo | Num. ripetizioni |
|---|---|---|
| 1. for j=2 to length(A) | $C_1$ | $n$ |
| 2. do key = A[j] | $C_2$ | $n-1$ |
| 3. i = j-1 | $C_3$ | $n-1$ |
| 4. while i>0 and A[i]>key | $C_4$ | $\sum_{j=2}^{n} t_j$ |
| 5. do A[i+1] = A[i] | $C_5$ | $\sum_{j=2}^{n} (t_j-1)$ |
| 6. i=i-1 | $C_6$ | $\sum_{j=2}^{n} (t_j-1)$ |
| 7. A[i+1] = key | $C_7$ | $n-1$ |





# costo computazionale




$t_j$ numero di volte in cui viene eseguita l'istruzione while
Dipende dai dati in input

- caso ottimo: $t_j = 1$ $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_j = n$
- *caso pessimo:* $t_j = j$ $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_j = \frac{n(n+1)}{2}$
- *caso medio:* $t_j = j/2$ $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_j = \ldots$

# Costo computazionale

$$T(n) = c_1 n + c_2 (n-1) + c_3 (n-1) + c_4 \sum t_j + (c_5+c_6) \sum (t_j-1) + c_7 (n-1)$$

$t_j$ *numero di esecuzioni istruzione while* dipende dai dati in input

- caso ottimo: $t_j = 1$ — $T(n) = an + b$; *lineare*
- *caso pessimo:* $t_j = j$ — $T(n) = an^2 + bn + c$; *quadratico*
- *caso medio:* $t_j = j/2$ — *???*