<u>TEOR</u> (DERIVATA FUNZ. COMPOSTA)

Siano I, J int. di $\mathbb{R}$, $c \in I$

$f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$.

Se f è derivabile in c e g è derivabile in $f(c)$, allora $(g \circ f)$ è derivabile in c e vale:

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

DIM Considero:

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x-c} = \boxed{\frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x-c}}$$

Perché f è derivabile in c, allora f è continua in c
e quindi $f(x) \xrightarrow[x \to c]{} f(c)$.
Per il Teor di caratterizzazione (applicato a g)
sappiamo che:

$$g(y) = g(f(c)) + g'(f(c)) \cdot (y - f(c)) + o(y - f(c)) \quad y \to f(c)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(f(x)) = g(f(c)) + g'(f(c))(f(x) - f(c)) + o(f(x) - f(c)) \text{ per } x \to c}$$

Passo al limite per $x \to c$

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(c)}{x-c}} =$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{\cancel{g(f(c))} + g'(f(c))\big(f(x)-f(c)\big) + o\big(f(x)-f(c)\big) - \cancel{g(f(c))}}{x-c}$$

$$= g'(f(c)) \cdot \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \underbrace{\lim_{x\to c} \left[\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{\to f'(c)} \cdot o(1) \right]}_{\to 0}$$

$$= \boxed{g'(f(c)) \cdot f'(c)}$$

ES

- $h(x) = e^{\text{sen}\,x}$

$h'(x) = e^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x$

$$\begin{cases} f(x) = \text{sen}\,x \\ g(y) = e^{y} \end{cases}$$

$\hookrightarrow h(x) = (g \circ f)(x)$

- $h(x) = \cos\left(e^{x^2}\right)$

$h'(x) = -\text{sen}\left(e^{x^2}\right) \cdot \left[e^{x^2} \cdot 2x\right]$

TEOR (DERIVATA di f^{-1})

Siano I int. di $\mathbb{R}$, $c \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ invertibile e derivabile in c.

Supponiamo inoltre che $f'(c) \neq 0$.

Chiamo $y = f(c)$.

Allora f^{-1} è derivabile in y e vale

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

"DIM GEOMETRICA"

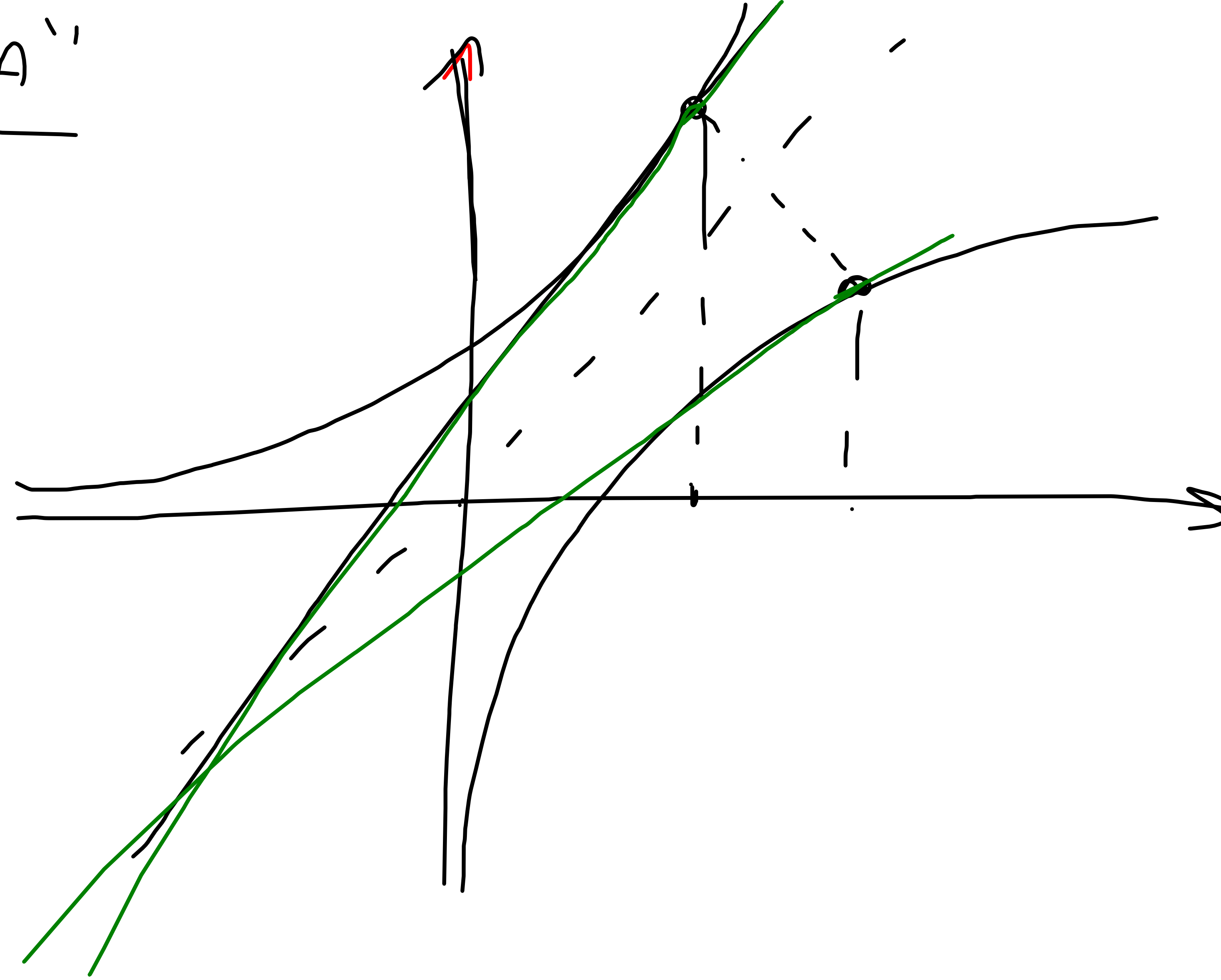
eq. di r:

$$y = m x + q$$

eq di s

$$y = \frac{1}{m} x - \frac{q}{m}$$

$$(f^{-1})'(f(c))$$



ES

- $f(x) = \log x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{e^{\log x}} = \dfrac{1}{x} \quad \forall x > 0$

- $f(x) = \arcsin x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$

uso che

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $f(x) = \arccos x \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f(x) = \arctan x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = x^b, \quad x > 0 \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{f'(x) = b x^{b-1}}$$

Infatti, $f(x)$ $x^b = e^{\log(x^b)} = e^{b \log x}$

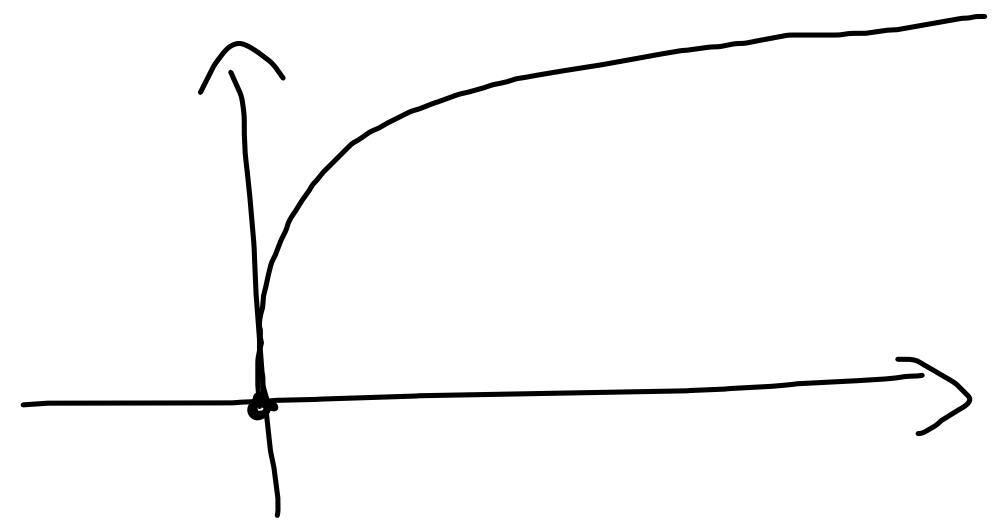
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{b}{x} e^{b \log x} = b \frac{x^b}{x} = \boxed{b x^{b-1}}$$

Verifico se $f(x) = x^b$ è derivabile in $\emptyset$:

$\underline{b > 0}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^b}{x} = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{se } b \geq 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

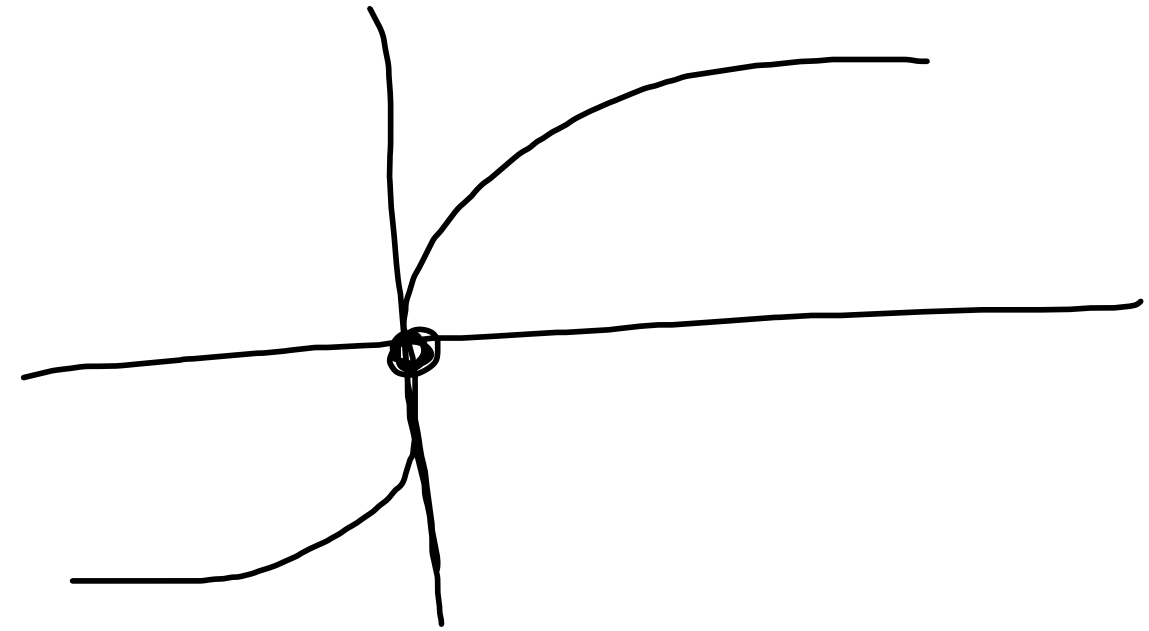
x^b NON è DERIVABILE in $\emptyset$ se $0 < b < 1$



$\underline{\text{Es}}$ $f(x) = \sqrt{x}$

ES. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

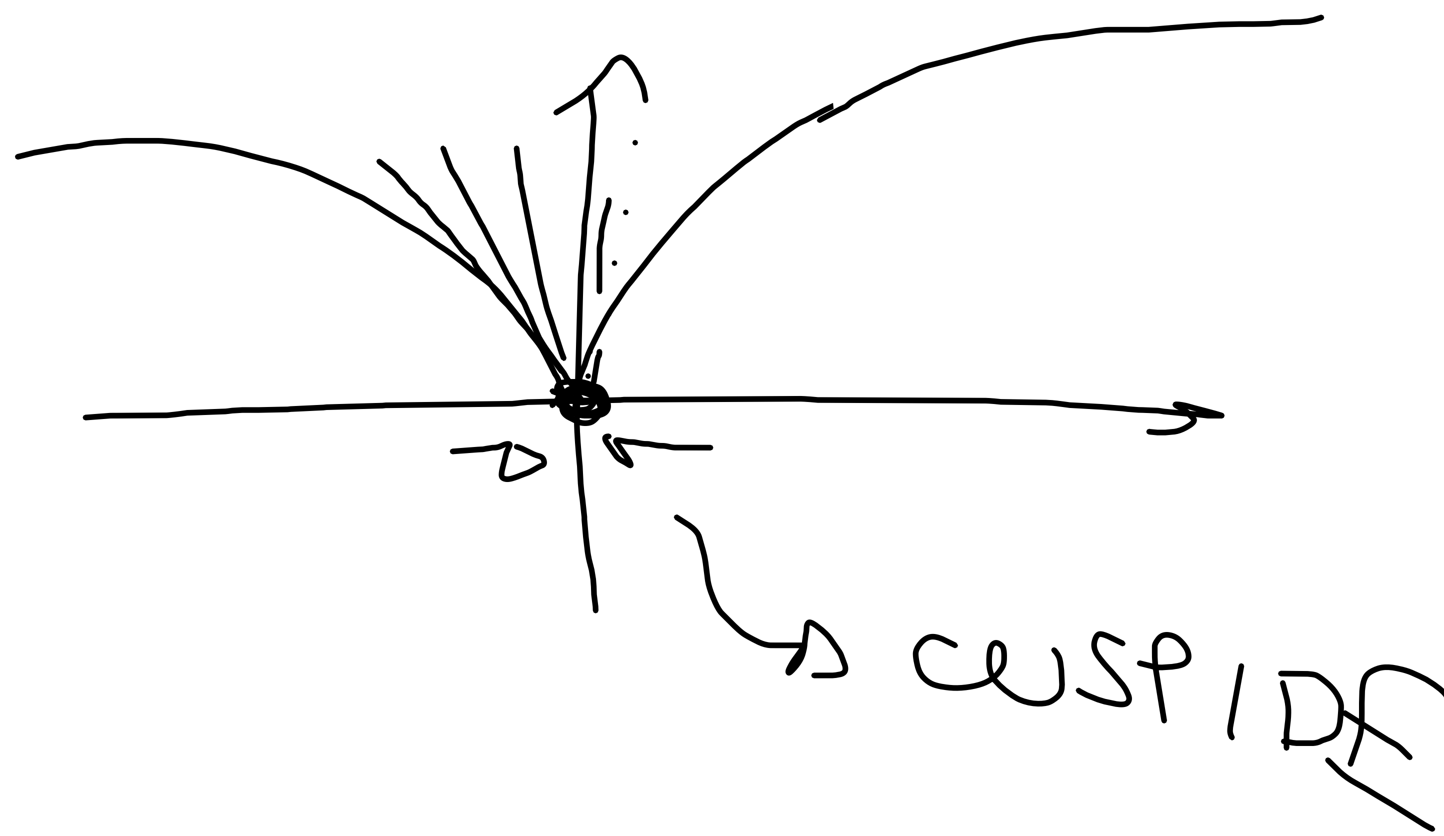
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$$



- $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x} = -\infty$$



ESTREMANTI LOCALI

Sia I int. di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$

Def Diciamo che c è PUNTO di MAX LOCALE per f se esiste un intorno U di c t.c.

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in U \cap I$$

Ovvero: $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I$$

Analogamente, diciamo che c è PUNTO di MIN. LOCALE per f se

$\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$f(c) \le f(x) \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I$$

- Punti di max o min locali si dicono ESTREMANTI LOCALI