ESERCIZI INTEGRALI per parti

① $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \Big[\tan x \cdot \log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

$$= \dots + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx}_{I}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, dx = \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

② $$\int_1^2 x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]_1^2$$

$$\underbrace{-\int_1^2 \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\frac{2}{\cancel{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}\,dx}_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{I} = +\int_1^2 \frac{x}{x+2}\,dx = \int_1^2\left(\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}} - \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= \Big[x - 2\log(x+2)\Big]_1^2$$

③ $2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$

Pong $t=\sqrt{x}$

$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$= 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\log(1+t)}{1+t}\,dt = \left[\log^2(1+t)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$

④ $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{(1+e^x)\log(1+e^x)}\,dx$

Pong $t=e^x$

$dt=e^x\,dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{dt}{(1+t)\log(1+t)} = \left[\log(\log(1+t))\right]_{1}^{e}$

$\left[\log(\log(1+e^x))\right]_{0}^{1}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}\, dx$$

Pongo $t = \cos x$

$dt = -\operatorname{sen} x\, dx$

$$= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{(t-2)(t-1)}$$

Cerco A e B t.c.: $\dfrac{1}{(t-2)(t-1)} = \dfrac{A}{t-2} + \dfrac{B}{t-1}$

Simme

$\Leftrightarrow At - A + Bt - 2B = 1$

$\Leftrightarrow t(A+B) - A - 2B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\log|t-2| - \log|t-1|\right]$$

$$\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = -2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{-\,dx}{2\sqrt{1-x}} + \underbrace{2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}}_{\mathrm{I}}$$

$$= \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} + 2\int_{\sqrt{\frac{1}{8}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\left[\operatorname{arcsen} t\right]_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}}$$

Poniamo
$$t = \sqrt{x}$$
$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{x \,\text{sen}x \cos x}\, dx =$$ per parti

$$= \left[\frac{\text{sen}^2 x}{2} \, x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2 x \, dx}$$

da finire

ELEMENTI di ALGEBRA LINEARE e GEOM. ANAL.

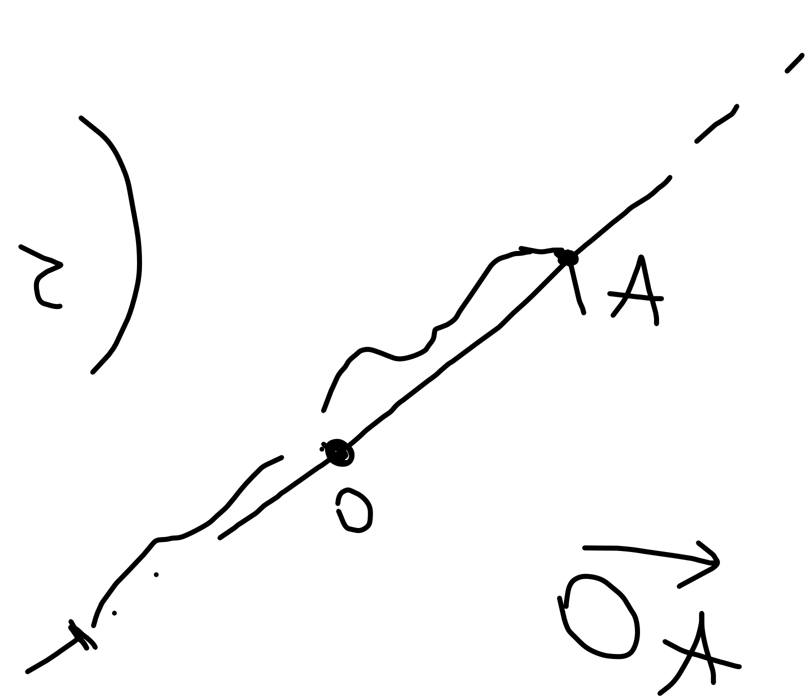
Vettori nel piano e nello spazio

Un vettore è individuato da:

a) Un numero reale ≥ 0 che ne indica la lunghezza (MODULO)

b) Una DIREZIONE (individuata da una retta r)

c) Un VERSO



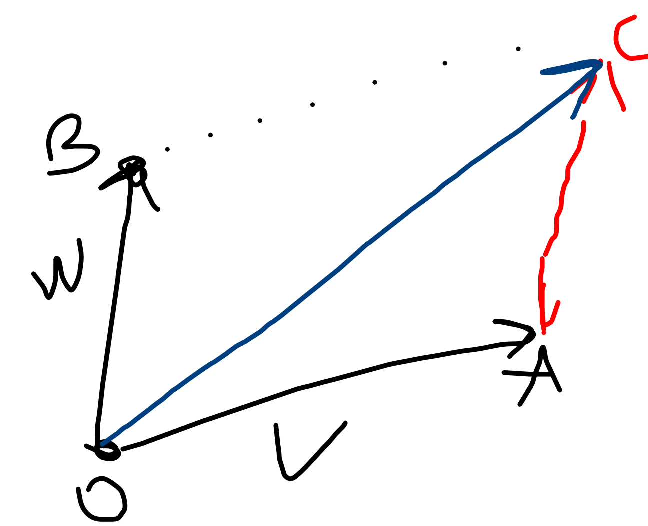
SOMMA di VETTORI (nel piano : $\mathbb{R}^2$)

Dati due vettori $V = \overrightarrow{OA}$ e $W = \overrightarrow{OB}$

la SOMMA $V+W$ si definisce così:

si applica W in A cioè

scrivo $W = \overrightarrow{AC}$ (con C opportuno)



Allora $V + W = \overrightarrow{OC}$

(soddisfa propr. commutativa, associativa)

- L'OPPOSTO di V lo indico con $-V$ ed è il vettore che ha stesso modulo, stessa direzione e verso opposto di V.

Definiamo la differenza $v - w$ come la somma $v + \underbrace{(-w)}_{\text{opposto } w}$

- **MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE**

Siano $t \in \mathbb{R}$, v un vettore, definiamo il vettore tv come il vettore t.c.

1) $|tv| = |t| \cdot |v|$

2) direzione di tv è la direzione

3) verso di tv =
$$= \begin{cases} \text{verso di } v \text{ se } t>0 \\ \text{verso di } -v \text{ se } t<0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ $\qquad v$ vettore, $\quad s,t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 1 \cdot v = v \\ s(tv) = (st) \cdot v \\ (s+t)v = sv + tv \end{cases}$$

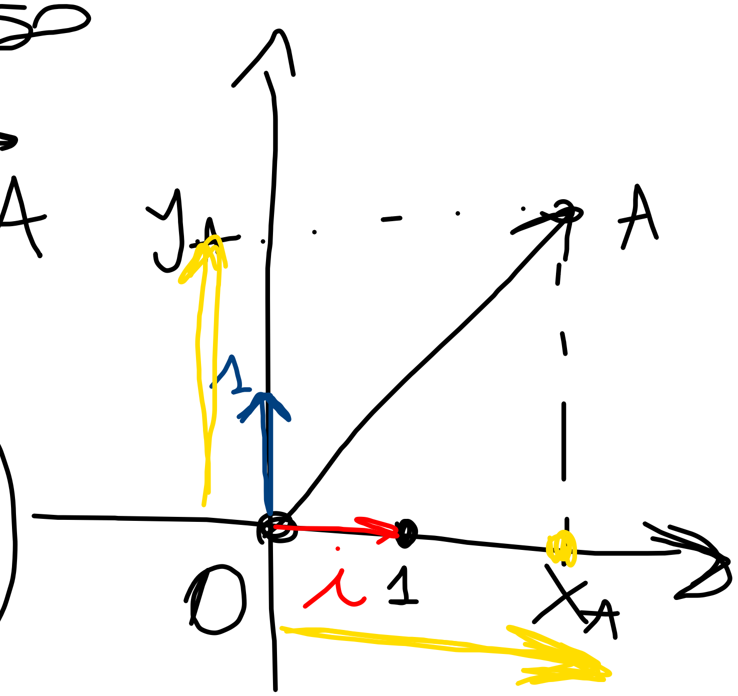
Def VERSORE: vettore di modulo $= 1$

(In particolare $\dfrac{v}{|v|}$ è un versore)

Rappresentazione in $\mathbb{R}^2$

Fisso un sistema di riferimento con origine O.

Ad ogni punto $A(x_A, y_A)$ posso associare il vettore $V = \overrightarrow{OA}$



Si ha:

$$|V| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$ (per il Teor di Pitagora)

Definiamo i 2 seguenti vettori:

$$\left.\begin{array}{l} i = (1,0) \\ j = (0,1) \end{array}\right\}$$ VERSORI FONDAMENTALI

Il vettore $v = \vec{OA}$ lo posso scrivere come

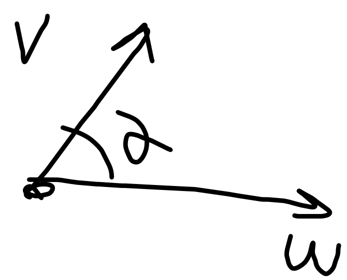
$$v = x_A \, i + y_A \cdot j \quad (= (x_A, y_A))$$

• **PRODOTTO SCALARE** (tra 2 vettori)

Dati v, w vettori di $\mathbb{R}^2$ definiamo il

Def PRODOTTO SCALARE tra v e w:

$$\boxed{v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \alpha}$$



α = angolo tra v e w

$0 \le \alpha \le \pi$

OSS

1) $\underbrace{v \perp w}_{\text{ORTOGONALI}} \iff v \cdot w = 0$

2) $v \cdot v = |v|^2$

PROPRIETÀ Dati u, v, w vettori, $t \in \mathbb{R}$

1) $v \cdot w = w \cdot v$

2) $u \cdot (w+v) = u \cdot w + u \cdot v$

3) $(tv) \cdot w = t\,(v \cdot w)$

OPERAZIONI IN COORDINATE

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Dati $v = (x_A, y_A) = x_A i + y_A j$, $w = (x_B, y_B) = x_B i + y_B j$

$\Rightarrow v + w = (x_A + x_B, y_A + y_B) = (x_A + x_B)\, i + (y_A + y_B)\, j$

PRODOTTO SCALARE

$$V = x_A \imath + y_A \jmath \qquad W = x_B \imath + y_B \jmath$$

$$\boxed{V \cdot W = (x_A \imath + y_A \jmath) \cdot (x_B \imath + y_B \jmath)}$$

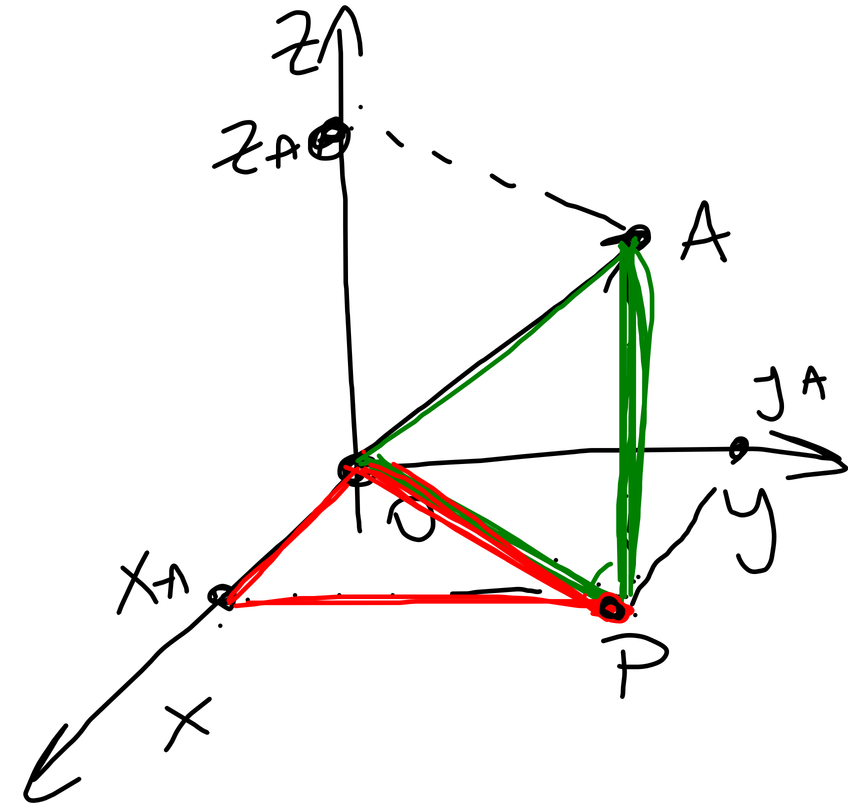
$$= x_A x_B \underbrace{|\imath|^2}_{=1} + x_A y_B \underbrace{\imath \cdot \jmath}_{=0} +$$

$$+ y_A x_B \underbrace{\imath \cdot \jmath}_{=0} + y_A y_B \underbrace{|\jmath|^2}_{=1}$$

$$\boxed{= x_A x_B + y_A y_B}$$

VETTORI in $\mathbb{R}^3$

Identifico il vettore $\overrightarrow{OA}$ col punto $A = (x_A, y_A, z_A)$



$$|\overrightarrow{OA}|^2 = \underbrace{|\overline{OP}|^2}_{x_A^2 + y_A^2} + \underbrace{|\overline{AP}|^2}_{z_A^2}$$

$$= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

Definiamo $i = (1,0,0)$ $\quad j = (0,1,0)$ $\quad k = (0,0,1)$

Posso scrivere un vettore $V = (x_A, y_A, z_A)$

come $V = x_A i + y_A j + z_A k$

Analogamente a prima:

<u>SOMMA</u>: $V = (x_A, y_A, z_A)$, $W = (x_B, y_B, z_B)$

$$\Rightarrow V + W = (x_A + x_B, y_A + y_B, z_A + z_B)$$

$$= (x_A + x_B) i + (y_A + y_B) j + (z_A + z_B) k$$

PRODOTTO SCALARE

$$\boxed{V \cdot W = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B}$$

(Conto analogo a prima)