LEZIONE 8 -

Marco Moraschini
16.03.2022

DOMANDA: Dato un insieme di generatori $S=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ di uno spazio vettoriale V finitamente generato, la scrittura $v=\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_n u_n$ è unica?

ES.: I vettori $(1,1),(1,0)$ e $(0,1)\in\mathbb{R}^2$ generano $\mathbb{R}^2$. Infatti per ogni $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ si ha:

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)+0(1,1),\quad \text{ma anche}$$
$$(a,b)=0\cdot(1,0)+(b-a)\cdot(0,1)+a(1,1)\quad \text{e}$$
$$(a,b)=(a-b)\cdot(1,0)+0\cdot(0,1)+b(1,1).$$

Quindi la scrittura in generale NON è unica.

OSS.: In generale se S è un insieme di generatori di V, allora $\forall\, v\in V\setminus S$ anche $S\cup\{v\}$ è un insieme di generatori per V. Basta notare che dato $S=\{u_1,\dots,u_n\}$, allora

$$\forall\, w\in V\qquad w=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n+0\cdot v.$$

DEF.: Siano $\{u_1,\dots,u_k\}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Si chiama SOTTOSPAZIO DI V GENERATO DA $u_1,\dots,u_k$ e si indica con

$$\langle u_1,\dots,u_k\rangle$$

l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $u_1,\dots,u_k\in V$:

$$\langle u_1,\dots,u_k\rangle:=\left\{\sum_{i=1}^k \alpha_iu_i=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ku_k \;\middle|\; \alpha_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,k\right\}.$$

OSS.: Il sottospazio generato da $u_1,\dots,u_k$ è spesso anche chiamato SPAN di $u_1,\dots,u_k$ e indicato con $\mathrm{Span}(u_1,\dots,u_k)$.

LEMMA: L'insieme delle combinazioni lineari di $u_1,\dots,u_k$ è un sottospazio vettoriale di V.

DIM.: Dobbiamo provare che $\forall\,\lambda,\eta\in\mathbb{R}$ e $\forall\,\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ku_k,\ \beta_1u_1+\dots+\beta_ku_k\in\langle u_1,\dots,u_k\rangle$, si ha

$$\lambda(\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ku_k)+\eta(\beta_1u_1+\dots+\beta_ku_k)\in\langle u_1,\dots,u_k\rangle.$$

Calcoliamo: $\lambda(\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ku_k)+\eta(\beta_1u_1+\dots+\beta_ku_k)\overset{\text{DISTRIBUTIVITÀ}}{=}\lambda\alpha_1u_1+\dots+\lambda\alpha_ku_k+\eta\beta_1u_1+\dots+\eta\beta_ku_k\overset{\substack{\text{COMMUTATIVITÀ}\\\text{ASSOCIATIVITÀ}}}{=}$

$=(\lambda\alpha_1u_1+\eta\beta_1u_1)+\dots+(\lambda\alpha_ku_k+\eta\beta_ku_k)\overset{\text{DISTRIBUTIVITÀ}}{=}(\underbrace{\lambda\alpha_1+\eta\beta_1}_{\in\mathbb{R}})u_1+\dots+(\underbrace{\lambda\alpha_k+\eta\beta_k}_{\in\mathbb{R}})u_k\in\langle u_1,\dots,u_k\rangle.$

LEMMA: $\langle u_1,\dots,u_k\rangle\in V$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $u_1,\dots,u_k$.

DIM.: È sufficiente osservare che se T è un sottospazio vettoriale di V contenente $u_1,\dots,u_k$, allora deve contenere anche tutte le loro combinazioni lineari. Quindi deve contenere anche $\langle u_1,\dots,u_k\rangle$.

LEMMA: V è uno spazio vettoriale finitamente generato se e soltanto se $V=\langle u_1,\dots,u_n\rangle$ per qualche $u_1,\dots,u_n\in V$.

DIM.: ($\Rightarrow$) Se V è finitamente generato, allora $\exists\, u_1, \dots, u_n \in V$ t.c. ogni elemento $v \in V$ si scriva come $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ per qualche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Quindi $V \subseteq \langle u_1, \dots, u_n \rangle$. Dato che $\langle u_1, \dots, u_n \rangle \subseteq V$ si ha $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

($\Leftarrow$) Se $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, allora ogni vettore di V è combinazione lineare di un numero finito di vettori: $u_1, \dots, u_n$. Quindi V è finitamente generato.

ES.: Dato $v \in V$ si ha che $\langle v \rangle := \{ \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \subseteq V$.

DEF.: Dato un qualsiasi sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V, indichiamo con $\langle S \rangle$ il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente S. Allora $\langle S \rangle$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di S a coefficienti in $\mathbb{R}$.

ESERCIZI SUI GENERATORI

ES.: Stabilire se i seguenti insiemi di vettori generano $\mathbb{R}^3$:

(i) $(0,0,1)$, $(2,1,0)$, $(1,1,1)$

(ii) $(2,3,4)$, $(3,2,1)$

(iii) $(1,0,0)$, $(1,2,0)$, $(0,0,2)$, $(1,3,4)$.

SOL.: Bisogna controllare che ogni vettore $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ si possa scrivere come combinazione lineare dei vettori dati.

(i) Dato $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ ci chiediamo se $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ t.c.

$$(\alpha,\beta,\gamma) \overset{?}{=} \lambda(0,0,1)+\lambda_2(2,1,0)+\lambda_3(1,1,1)$$
$$= (2\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_3).$$

Questa uguaglianza di vettori si può interpretare come un sistema in $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$\begin{cases} 2\lambda_2+\lambda_3=\alpha \\ \lambda_2+\lambda_3=\beta \\ \lambda_1+\lambda_3=\gamma \end{cases}$$

Se tale sistema ammette soluzioni, allora i vettori generano $\mathbb{R}^3$, altrimenti no.

Studiamo la matrice completa associata (riducendola a scala tramite l'algoritmo di Gauss):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right] \xrightarrow{I\leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{III\to -2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \alpha-2\beta \end{array}\right] = [A'|\underline{b}'].$$

Poiché $rg[A'|\underline{b}'] = rg A' = 3 =$ numero delle incognite $\Rightarrow$ il sistema ammette un'unica soluzione:

$\lambda_3 = 2\beta-\alpha$, $\lambda_2=\alpha-\beta$, $\lambda_3 = \gamma-2\beta+\alpha$

Quindi i vettori dati generano $\mathbb{R}^3$.

(ii) Qui abbiamo da studiare:

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda_1(2,3,4)+\lambda_2(3,2,1).$$

Quindi il sistema associato ha 3 equazioni in 2 incognite. È quindi lecito aspettarsi che non abbia soluzioni in generale (ossia che la matrice completa ridotta a scala possa avere rango 3, mentre la incompleta 2).

Per questo è sufficiente cercare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che NON sia combinazione lineare di $(2,3,4)$ e $(3,2,1)$.

Consideriamo $(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$. Ci chiediamo: $\exists\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1(2,3,4)+\lambda_2(3,2,1)=(1,0,0)$?

Proviamo a risolvere il sistema associato:

$$\begin{cases} 2\lambda_1+3\lambda_2=1 \\ 3\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ 4\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases}$$

Procediamo per sostituzione. La III^a equazione mostra $\lambda_2 = -4\lambda_1$, da cui sostituendo nella II^a:
$3\lambda_1 - 4\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Ne segue che solamente $(0,0)$ soddisfa le ultime due equazioni.
Tuttavia, $(0,0)$ NON può soddisfare la prima equazione $\Rightarrow \nexists$ soluzioni.
In altre parole $(1,0,0)$ NON può essere combinazione lineare dei vettori dati.
Quindi $(2,3,4)$ e $(3,2,1)$ NON generano $\mathbb{R}^3$.

(iii) Nuovamente dobbiamo mostrare che $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,2,0) + \lambda_3(0,0,2) + \lambda_4(1,3,4).$$

Tuttavia, mostriamo un METODO ALTERNATIVO di procedere.
Guiziamo con il seguente:

FATTO: Sia $S \subseteq V$ un insieme di generatori e sia $I \subseteq V$ un insieme dato.
Se ogni elemento di S è combinazione lineare di elementi di I, allora I genera V.

DIM.: $\forall\, v \in V$ $v = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$, dove $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, per qualche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Sia $I = \{u_1, \dots, u_k\}$, allora $\forall i = 1, \dots, n$ $\quad s_i = \alpha_{1i} u_1 + \dots + \alpha_{ki} u_k$ per qualche $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ki} \in \mathbb{R}$. Ne segue che $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda_i \alpha_{ji} u_j$
$= \sum_{j=1}^k \big(\underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{ji}}_{\in \mathbb{R}} \big) u_j \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Quindi I genera V. $\square$

Torniamo all'esercizio: sappiamo che $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ generano $\mathbb{R}^3$. Quindi è sufficiente mostrare che i vettori dati $I = \{(1,0,0), (1,2,0), (0,0,2), (1,3,4)\}$ siano t.c.

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \in \langle I \rangle.$$

Chiaramente $(1,0,0) \in I \Rightarrow (1,0,0) \in \langle I \rangle$.
$(0,1,0) = \frac{1}{2}(1,2,0) - \frac{1}{2}(1,0,0) \in \langle I \rangle$
$(0,0,1) = \frac{1}{2}(0,0,2) \in \langle I \rangle$.

Quindi esplicitamente ogni vettore $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori in I come segue:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta\left[\tfrac{1}{2}(1,2,0) - \tfrac{1}{2}(1,0,0)\right] + \gamma\left[\tfrac{1}{2}(0,0,2)\right] =$$
$$= \alpha(1,0,0) + \frac{\beta}{2}(1,2,0) - \frac{\beta}{2}(1,0,0) + \frac{\gamma}{2}(0,0,2) = \left[\alpha - \frac{\beta}{2}\right](1,0,0) + \frac{\beta}{2}(1,2,0) + \frac{\gamma}{2}(0,0,2) \in \langle I \rangle.$$

Quindi abbiamo provato che i vettori dati sono generatori di $\mathbb{R}^3$.

OSS.: Notiamo che nell'ultimo esercizio abbiamo provato che $\mathbb{R}^3$ è generato da $(1,0,0)$, $(1,2,0)$, $(0,0,2)$. Quindi il vettore $(1,3,4) \in \mathbb{R}^3$ era "superfluo", ossia può anch'esso essere descritto come combinazione lineare di $(1,0,0), (1,2,0), (0,0,2)$. Tuttavia, abbiamo visto che se S genera V, anche $S \cup \{v\}$ genera V $(\forall v \in V)$, quindi non c'è problema nel concludere che i vettori dati generino $\mathbb{R}^3$.