# LEZIONE ②

23.02.2022
Marco Moraschini

DEF.: Una matrice è detta A SCALA (PER RIGHE) o semplicemente a SCALA se vale:

(i) Eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrice

(ii) Il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) si trova "più a destra" del primo elemento non nullo della riga precedente.

ES.: (1) La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ non è a scala (viola condizione (i))

(2) La matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scala (valgono (i) & (ii))

(3) La matrice $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1/5 \end{bmatrix}$ NON è a scala, perché (ii) non vale.

DEF.: Sia $A$ una matrice a scala. Si chiama PIVOT di $A$ il primo elemento non nullo di ogni riga di $A$. Si chiama RANGO DI $A$ ($rg(A)$) il numero di righe non nulle di $A$ o, equivalentemente, il numero di pivot di $A$.

ES.: Sia $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Allora i pivot di $A$ sono $1, -1, 1/3 \Rightarrow rg(A)=3$.

OSS.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ allora $A$ ha $m$ righe $\Rightarrow rg A \leq m$.

FATTO: $rg(A) \leq \min(m,n)$.

DIM.: Se $m \leq n$ allora è ovvio. ($rg(A) \leq m \leq n$)

Supponiamo che $n < m$. Per definizione di matrice a scala, ogni pivot occupa una colonna diversa $\Rightarrow \underbrace{\#\text{pivot}}_{= rg A} \leq \underbrace{\#\text{colonne di } A}_{= n}$. □

DEF.: Il sistema lineare $A\underline{x}=\underline{b}$ si dice A SCALA se la matrice $[A|\underline{b}]$ è in forma a scala.

## COME RISOLVERE I SISTEMI A SCALA

ES.: Consideriamo:
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ x_2-2x_3=2 \\ x_3-x_4=0 \\ x_4=1 \end{cases}$$

In questo caso la matrice completa associata è:
$$[A|\underline{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
CHE É A SCALA E HA RANGO = 4

Ovviamente anche $A$ è a scala e ha rango = 4.

Poiché $A$ è a scala in ogni riga del sistema compare una incognita che non compariva in quella "sotto". Quindi si può effettuare la SOSTITUZIONE

SUCCESSIVA DAL BASSO. Più precisamente abbiamo $x_4 = 1$, $x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$, $x_2 - 2x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + 2x_3 = 2 + 2\cdot 1 = 4$ e $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \Rightarrow 4x_1 = 1 - 8 - 3 - 4 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(-14) = -\frac{7}{2}$.

Quindi $(-\frac{7}{2}, 4, 1, 1)$ è l'UNICA SOLUZIONE del sistema.

ES.: Consideriamo il sistema: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ = (quello di prima senza ultima riga)

La matrice associata è $[A|\underline{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

che è in forma a scala.

In particolare $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = 3$. Naturalmente la soluzione $(-\frac{7}{2}, 4, 1, 1)$ di prima vale ancora. Quindi il sistema è compatibile. Ma quante soluzioni?

Procedendo per sostituzioni successive dal basso si ha:

$$S = \{ (\tfrac{1}{4}(-3 - 11x_4), 2 + 2x_4, x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \}.$$

PROP.: Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare a scala nelle $n$ incognite $x_1, \dots, x_n$.

Allora:

(i) Il sistema ammette soluzioni se e solo se $rg(A) = rg(A|\underline{b})$;

(ii) Se $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = n$, allora ammette una sola soluzione;

(iii) Se $rg(A) = rg(A|\underline{b}) < n$, allora ammette infinite soluzioni.

DIM.: Osserviamo che $A$ è a forma di scala.

Cancellando la colonna $\underline{b}$ da $(A|\underline{b})$ il numero di pivot può diminuire al più di 1.

In particolare ciò accade quando $A$ ha una riga i-esima nulla e $b_i \neq 0 \Rightarrow$ non esiste soluzione. $(0 = b_i \neq 0)$

Quindi $rg(A|\underline{b}) \neq rg(A) \Rightarrow$ non ci sono soluzioni. ($\exists$ soluzioni $\Rightarrow rg(A) = rg(A|\underline{b})$)

Supponiamo ora: $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = n$. In questo caso il numero di pivot di $A$ e $(A|\underline{b})$ è uguale e coincide con il numero di incognite. Quindi in ogni riga l'equazione lineare corrispondente avrà un'incognita in più di quella sottostante. Il sistema si potrà perciò risolvere attraverso sostituzioni successive dal basso. Ne segue che $\exists!$ soluzione.

Supponiamo ora: $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = k < n$. Allora procedendo per sostituzione successive dal basso possiamo esprimere le soluzioni in termini di $n-k$ incognite. Quindi il sistema ha infinite soluzioni, dato che le incognite assumono valori reali. □

ES.: Risolviamo il seguente sistema nelle incognite $x_1, \dots, x_4$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{1}{2} x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice completa associata è:

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$$

Si ha $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = 2 \Rightarrow \exists$ soluzione. Poiché $2 < n = 4$

Quindi per sostituzioni successive: $x_3 = -\frac{1}{2}x_4$ e $x_1 = 1 + x_2 + \frac{3}{2}x_4 \Rightarrow \{(1 + x_2 + \frac{3}{2}x_4, x_2, -\frac{1}{2}x_4, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

La scelta delle variabili "libere" non è obbligata. Tuttavia si possono sempre scegliere quelle non corrispondenti a pivot ed esprimere queste ultime in funzione delle altre.