

## Interpolazione polinomiale di dati sperimentali

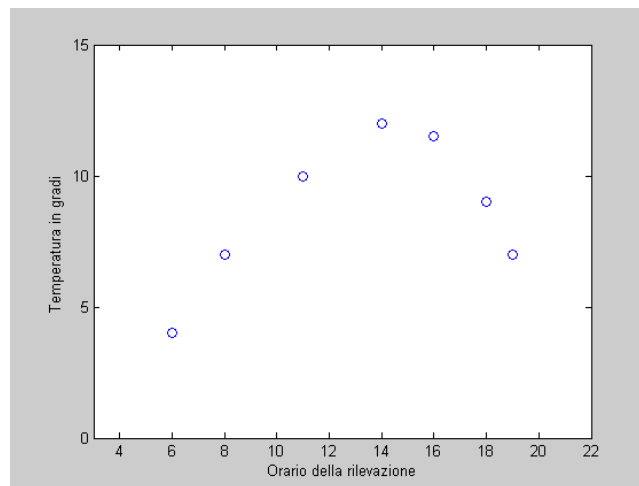
### Ricostruzione di dati sperimentali

Il problema generale della ricostruzione di dati sperimentali nasce in situazioni in cui dalle misure sperimentali, da cui si ricavano le coppie  $(x_i, y_i), i=0, \dots, n$  che rappresentano il campionamento di un fenomeno fisico, si abbia l'esigenza di una rappresentazione continua, in maniera tale che sia possibile stimare il fenomeno anche in  $\bar{x} \neq x_i, i = 0, \dots, n$ .

### Esempio 1:

Rileviamo la temperatura in alcune ore della giornata e vogliamo sapere l'andamento della temperatura anche in istanti della giornata in cui non l'abbiamo rilevata, ma che siano compresi tra l'istante iniziale e l'istante finale in cui sono avvenute le nostre rilevazioni.

Orario della rilevazione (tempo)	Temperatura
$x(0) = 6.00$	$y(0) = 4$
$x(1) = 8.00$	$y(1) = 7$
$x(2) = 11.00$	$y(2) = 10$
$x(3) = 14.00$	$y(3) = 12$
$x(4) = 16.00$	$y(4) = 11.5$
$x(5) = 18.00$	$y(5) = 9$
$x(6) = 19.00$	$y(6) = 7$



In pratica, note le temperature  $y_i$ , rilevate negli istanti di tempo  $x_i$  vogliamo avere un'idea dell'andamento della temperatura ad esempio alle ore 12, alle ore 15, cioè in orari in cui non l'abbiamo effettivamente rilevata.

Si può inoltre presentare il caso in cui si abbia una funzione estremamente complicata il cui calcolo richiede un elevato tempo macchina  $\Rightarrow$  si tabula la funzione in un prefissato numero di punti  $(x_i, y_i), i=0, \dots, n$  e si approssima con una funzione più semplice.

Definiamo  $\mathbb{P}_n[x]$  lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile  $x$  di grado minore od uguale ad  $n$  e a coefficienti reali.

$$\mathbb{P}_n[x] := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

**Nota:** La base canonica per lo spazio  $\mathbb{P}_n[x]$  è rappresentata dalle funzioni base  $\phi_0(x) = x^0 = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2, \phi_3(x) = x^3, \dots, \phi_n(x) = x^n$ .

**Es.**  $\mathbb{P}_3[x]$  è lo spazio di polinomi a coefficienti in  $\mathbb{R}$  i cui elementi sono polinomi di grado al più 3 nella variabile  $x$ . Alcuni suoi elementi sono:

$$p(x) = 1 + 2x + x^2 + 3x^3; \quad q(x) = 1 + 5x^2 - 7x^3, \quad z(x) = 2 - \frac{3}{2}x^2$$

### Interpolazione polinomiale di dati sperimentali

Note le coppie  $(x_i, y_i)$   $i=0, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_k$   $i \neq k$ , dove  $x_i$  sono detti **nodi** ed  $y_i$   $i=0, \dots, n$  rappresentano le valutazioni di un fenomeno nelle posizioni  $x_i$ , il problema dell'interpolazione polinomiale consiste nel determinare il polinomio  $P_n(x) \in \mathbb{P}_n[x]$

$$P_n(x) = \alpha_0 \phi_0(x) + \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x) + \dots + \alpha_n \phi_n(x)$$

cioè

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$$

in maniera tale che

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i=0, \dots, n$$

Questo equivale ad individuare i coefficienti  $\alpha_i, i = 0, \dots, n$  del polinomio  $P_n(x)$  tali che sia soddisfatta le condizioni  $P_n(x_i) = y_i, \quad i=0, \dots, n$ , detta **condizione di interpolazione**.

Una volta individuati tali coefficienti, avremo a disposizione la formula analitica del polinomio interpolatore che potremo valutare anche in altre posizioni  $\bar{x}$  che non fanno parte del nostro insieme di punti di valutazione.

Se  $\xi_1 = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  e  $\xi_2 = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , parleremo di

**interpolazione** se  $\bar{x} \in [\xi_1, \xi_2]$

**estrapolazione** se  $\bar{x} \notin [\xi_1, \xi_2]$ .

Imporre  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $i=0, \dots, n$ , significa

$$P_n(x_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 + \dots + \alpha_n x_i^n = y_i \quad \text{per ogni } i=0, \dots, n$$

Se scriviamo questa relazione per ogni  $i$ , ricaveremo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \dots + \alpha_n x_0^n = y_0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \dots + \alpha_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Quindi i coefficienti  $\alpha_i$   $i=0, \dots, n$  del polinomio  $p(x)$ , che soddisfa le condizioni  $p(x_i) = y_i$ ,  $i=0, \dots, n$ , sono la soluzione del precedente sistema lineare.

In termini matriciali, questo sistema lineare si può scrivere nel seguente modo:

$$A \alpha = y \quad (1)$$

dove la matrice dei coefficienti  $A$  di questo sistema lineare è la matrice di dimensione  $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

che è la matrice di Vandermonde ,  $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$  è il vettore di ordine  $n+1$ , la cui  $i$ -esima

componente è rappresentata dalla  $i$ -esima valutazione  $y_i$ , ed  $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$  è il vettore delle incognite di ordine  $n+1$ .

Il sistema lineare (1) ammette una ed una soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti è quadrata ed ha rango massimo.

La matrice dei coefficienti è quadrata perché il numero delle condizioni che imponiamo è uguale al numero delle incognite. E' sempre a rango massimo purchè  $x_i \neq x_k$   $i \neq k$ . Vale infatti il seguente risultato.

***La matrice di Vandermonde ha sempre rango massimo purchè  $x_i \neq x_k$   $i \neq k$ .***

Quindi siamo sicuri che, dal punto di vista teorico, il problema dell'interpolazione polinomiale ammette sempre soluzione e questa è unica.

**Il polinomio interpolatore esiste sempre ed è unico.**

### **Esempio 2:**

Supponiamo di voler costruire il polinomio di grado 2, cioè la parabola, che interpola le coppie di dati:

$$(-1,2), (1,1), (2,1)$$

$$P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

tale che:

$$P_2(x_i) = y_i, \quad i=0, \dots, 2.$$

Imponendo queste condizioni di interpolazione nasce il sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 = 2 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 = 1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 4 = 1 \end{cases}$$

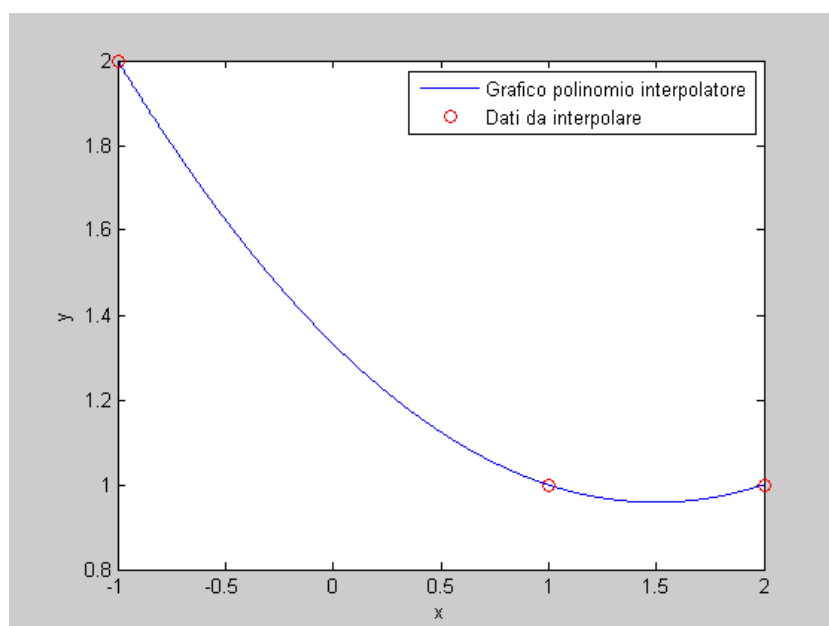
la cui soluzione ci fornisce i coefficienti del polinomio cercato:

$$\alpha_0 = \frac{4}{3}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}$$

Quindi

$$P_2(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$$

è il polinomio interpolatore che stiamo cercando.



**Osservazione:** La matrice dei coefficienti di Vandermonde, come abbiamo visto nelle lezioni precedenti, è una **matrice molto mal condizionata**, per cui la soluzione del sistema lineare (1) è un problema mal condizionato e quindi molto sensibile alle piccole inevitabili perturbazioni sui dati.

Occorre quindi cambiare approccio al problema.

Bisogna **cambiare base per lo spazio**  $\mathbb{P}_n[x]$ .

Una base che fa sì che la matrice del sistema lineare che nasce dall'imposizione delle condizioni di interpolazione coincida con la matrice identità è **la base di Lagrange**.

Gli  $n+1$  polinomi di Lagrange,  $L_j^{(n)}(x)$  sono polinomi di grado  $n$  che rappresentano una base per lo spazio dei **polinomi**  $\mathbb{P}_n[x]$  e soddisfano le condizioni

$$L_j^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (*)$$

Quindi il polinomio  $P_n(x) \in \mathbb{P}_n[x]$  nella base di Lagrange si esprime nella forma:

$$P_n(x) = \alpha_0 L_0^{(n)}(x) + \alpha_1 L_1^{(n)}(x) + \alpha_2 L_2^{(n)}(x) + \dots + \alpha_n L_n^{(n)}(x)$$

Imponendo le condizioni di interpolazione  $P_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$  ricaveremo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha_0 L_0^{(n)}(x_0) + \alpha_1 L_1^{(n)}(x_0) + \alpha_2 L_2^{(n)}(x_0) + \dots + \alpha_n L_n^{(n)}(x_0) = y_0 \\ \alpha_0 L_0^{(n)}(x_1) + \alpha_1 L_1^{(n)}(x_1) + \alpha_2 L_2^{(n)}(x_1) + \dots + \alpha_n L_n^{(n)}(x_1) = y_1 \\ \dots \\ \alpha_0 L_0^{(n)}(x_n) + \alpha_1 L_1^{(n)}(x_n) + \alpha_2 L_2^{(n)}(x_n) + \dots + \alpha_n L_n^{(n)}(x_n) = y_n \end{cases}$$

che scritto in termini matriciali diventa:

$$\begin{bmatrix} L_0^{(n)}(x_0) & L_1^{(n)}(x_0) & L_2^{(n)}(x_0) & \dots & L_n^{(n)}(x_0) \\ L_0^{(n)}(x_1) & L_1^{(n)}(x_1) & L_2^{(n)}(x_1) & \dots & L_n^{(n)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_0^{(n)}(x_n) & L_1^{(n)}(x_n) & L_2^{(n)}(x_n) & \dots & L_n^{(n)}(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

che per la proprietà dei polinomi base di Lagrange (\*) si riduce a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

e quindi il vettore soluzione  $\alpha$  coincide con il vettore termine noto  $y$ .

Ricaviamo adesso le funzioni base  $L_j^{(n)}, j=0, \dots, n$ .

$L_j^{(n)}$  è un polinomio di grado  $n$  che soddisfa le condizioni  $L_j^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

cioè che si annulla in tutti i punti  $x_i$   $i \neq j$  ed è diverso da zero solo nel punto  $x_j$ ; sarà quindi della forma

$$L_j^{(n)}(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

Determiniamo  $c$  in maniera tale che  $L_j^{(n)}(x_j) = 1$

$$L_j^{(n)}(x_j) = c \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k) = 1$$

da cui segue

$$c = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)}$$

e quindi

$$L_j^{(n)}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$$

$$L_j^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

I polinomi  $L_j^{(n)}(x)$  sono chiamati **polinomi base di Lagrange**.



Essi godono della proprietà di partizione dell'unità, cioè:

$$\sum_{j=0}^n L_j^{(n)}(x) = 1 \quad \forall x \in [x_0, x_n] \text{ se } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

### Polinomio interpolatore nella forma di Lagrange

Date le coppie  $(x_i, y_i)$   $i=0, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_k$   $i \neq k$ , il polinomio di grado  $n$  che le interpola può essere espresso nella seguente **forma di Lagrange**:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j^{(n)}(x) \quad (2)$$

Sfruttando la proprietà (\*) dei polinomi base di Lagrange relativi ai punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  si vede immediatamente che  $P_n(x)$  dato dalla (2) fornisce una nuova espressione del polinomio interpolatore dei dati  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0, \dots, n$ . Infatti, se calcoliamo  $P_n(x)$  in un qualunque punto  $x_i$  otteniamo:

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j L_j^{(n)}(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$$

Infatti, calcoliamo  $P_n(x_i)$  e verifichiamo che vale esattamente  $y_i$

$$P_n(x_i) = y_0 L_0^{(n)}(x_i) + y_1 L_1^{(n)}(x_i) + \dots + y_i L_i^{(n)}(x_i) + \dots + y_n L_n^{(n)}(x_i)$$

Nella relazione precedente, per la proprietà (\*) dei polinomi di base di Lagrange, l'unico polinomio di Lagrange diverso da zero nel punto  $x_i$  è  $L_i^{(n)}(x)$  che nel punto  $x_i$  vale 1, quindi segue che :

$$P_n(x_i) = y_i$$

Poiché questo vale per tutti i punti  $x_i$ ,  $i=0, \dots, n$ , abbiamo verificato che la (2) fornisce un'espressione del polinomio interpolatore di Lagrange.

### Esempio 3:

Costruiamo i polinomi di base di Lagrange con  $n=2$ .

Siano  $x_0=0$   $x_1=1$   $x_2=2$ .

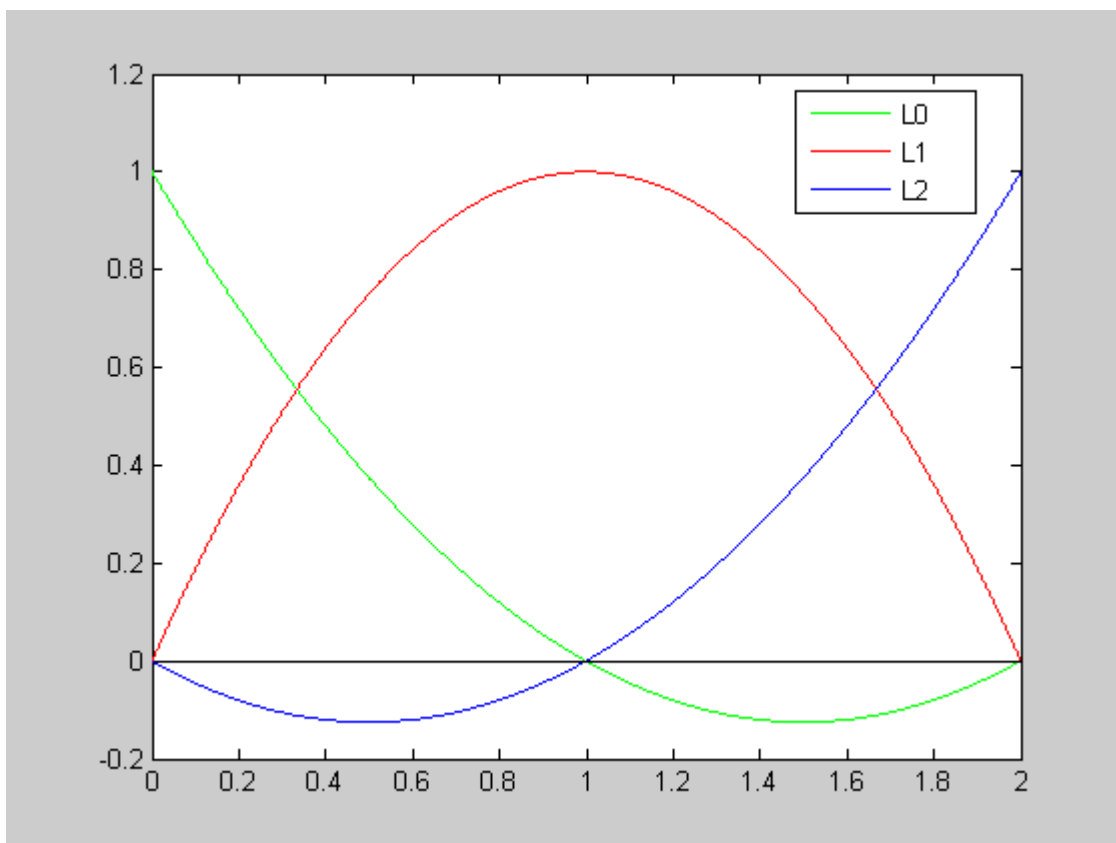
$$L_j^{(2)}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$$

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

$$L_1^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0) \cdot (x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} = -x^2 + 2x$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0) \cdot (x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

Nella figura successiva sono visualizzati i grafici di questi tre polinomi:



#### Esempio 4.

Supponiamo di voler costruire il polinomio nella forma di Lagrange che interpola le coppie di dati:

$$(-1, 2), (1, 1), (2, 1)$$

Dobbiamo quindi individuare il polinomio di grado 2 che interpola i dati assegnati:

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^2 y_j L_j^{(2)}(x)$$

$$P_2(x) = y_0 L_0^{(2)}(x) + y_1 L_1^{(2)}(x) + y_2 L_2^{(2)}(x) \quad (3)$$

Calcoliamo i polinomi di base di Lagrange:

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - 2)}{(-1 - 1)(-1 - 2)} = \frac{1}{6}(x - 1) \cdot (x - 2)$$

$$L_1^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{(1 + 1)(1 - 2)} = -\frac{1}{2}(x + 1) \cdot (x - 2)$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{(2 + 1)(2 - 1)} = \frac{1}{3}(x + 1) \cdot (x - 1)$$

Sostituendo in (3) queste espressioni per gli  $L_j^{(2)}(x)$   $j=0,1,2$  e  $y_0=2$   $y_1=1$   $y_2=1$ , si ha

$$P_2(x) = 2 \cdot \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)\right) + 1 \left(\frac{1}{3}(x + 1)(x - 1)\right)$$

Effettuando le opportune moltiplicazioni e raccogliendo si ottiene

$$P_2(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$$

**Osservazione :** Abbiamo trovato la stessa espressione del polinomio interpolatore che avevamo trovato imponendo le condizioni di interpolazione e risolvendo il sistema lineare. Il **polinomio interpolatore è unico**.

**Complessità computazionale del calcolo del Polinomio interpolatore nella forma di Lagrange.**

Abbiamo visto che la formula del polinomio interpolatore nella forma di Lagrange è:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j^{(n)}(x)$$

con

$$L_j^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

Per il calcolo del polinomio di Lagrange  $L_j^{(n)}(x)$  di grado  $n$  sono necessarie  $n$  moltiplicazioni per determinare il numeratore ed  $n$  moltiplicazioni per determinare il denominatore, quindi  $2n$  moltiplicazioni in totale.

Di questi polinomi ne dobbiamo calcolare  $n+1$  e quindi in totale il numero di moltiplicazioni da effettuare è  $2n(n+1)$ . A queste bisogna aggiungere  $(n+1)$  moltiplicazioni per calcolare la sommatoria. **Quindi la valutazione del polinomio interpolatore di Lagrange in un punto è dell'ordine  $O(2n^2)$ .**

Se dobbiamo effettuare la valutazione del polinomio interpolatore di Lagrange in  $M > n$  punti avremo una complessità computazionale dell'ordine di  $O(2n^2 \cdot M)$ .

In genere  $M$  è molto maggiore di  $n$ . Questa complessità è molto elevata.

Inoltre, **il polinomio interpolante di Lagrange presenta difficoltà di applicazione:** infatti se dopo aver costruito il polinomio di grado  $n$  che interpola le coppie  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0, \dots, n$ , si vuole aggiungere una coppia  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  è necessario ricostruire ex-novo tutte le funzioni base di Lagrange, in quanto dipendono da tutti i punti  $x_i$ .

Sarebbe auspicabile un metodo che permettesse di costruire facilmente il polinomio di interpolazione di  $n+1$  nodi a partire dal polinomio di interpolazione di  $n$  nodi. Il polinomio interpolatore di Newton soddisfa questa richiesta ed ha una complessità computazionale  $O(\frac{n^2}{2} + n \cdot M)$ .

## Errore nell'interpolazione polinomiale

Stimiamo adesso l'errore che si compie quando al posto della funzione che ha generato i dati si sostituisce la formula del polinomio interpolatore.

### Teorema dell'errore

Siano assegnate le coppie  $(x_i, y_i)$   $i=0, \dots, n$

$$a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$$

e  $y_i=f(x_i)$  siano i valori assunti in questi punti da una funzione  $f(x)$  definita in  $[a,b]$  e continua insieme alle sue derivate fino a quella di ordine  $n+1$ , ( $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ ).

Sia  $P_n(x)$  il polinomio di grado  $n$  che interpola tali coppie di dati.

Sia  $\bar{x} \in [a,b]$ , indichiamo con

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}).$$

Risulta allora che

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)$$

dove  $\xi \in (a,b)$  e  $\omega_{n+1}(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n)$

Se  $\bar{x} = x_i$  allora l'errore è nullo perchè si annulla il fattore  $\omega_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_i) \dots (x_i - x_n) = 0$ .

Inoltre, l'errore risulta nullo anche nel caso di dati provenienti da funzioni che hanno la derivata  $n+1$  nulla, cioè per funzioni che sono polinomi di grado  $n$ .

## Convergenza del Polinomio interpolatore.

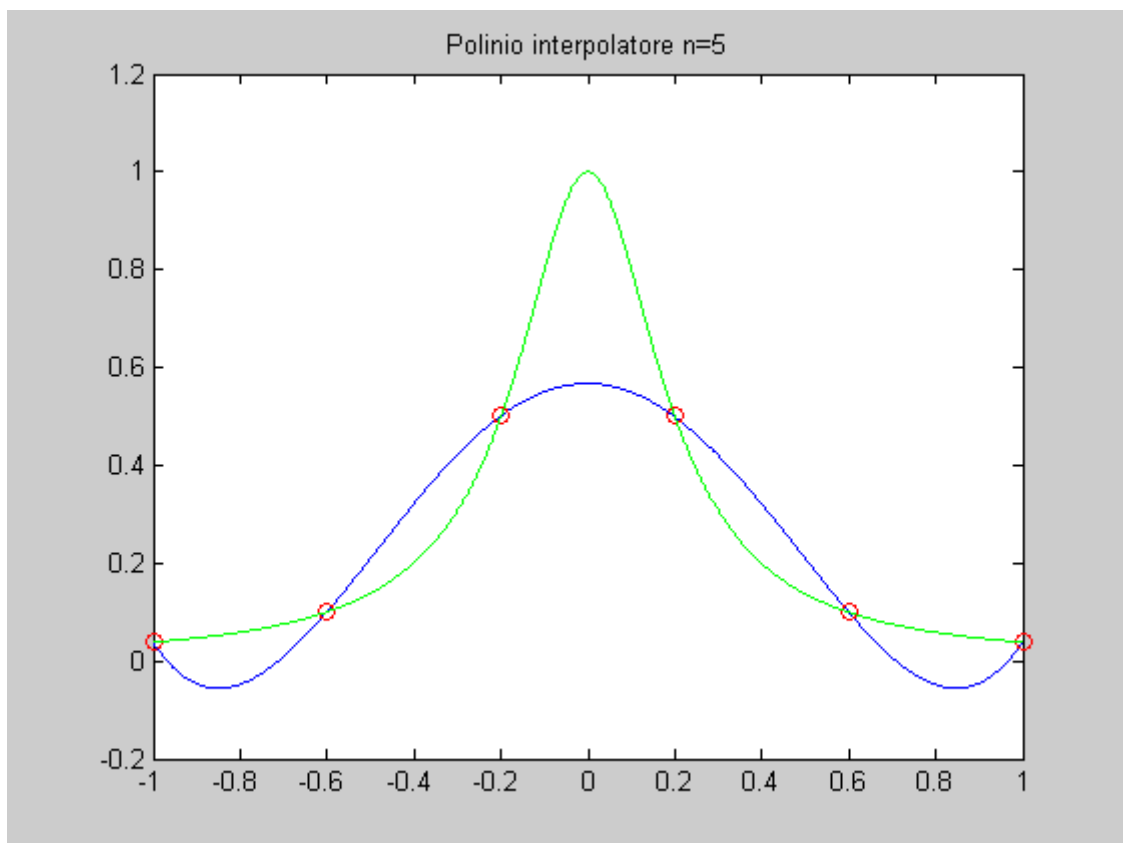
Al crescere del numero dei punti di interpolazione, e quindi del grado del polinomio interpolatore, nel caso in cui i punti  $x_i$  siano scelti equidistanti nell'intervallo  $[a,b]$  non si ha, in genere, la convergenza del polinomio interpolatore alla funzione che ha generato i dati: in particolare si ha al centro dell'intervallo una buona approssimazione e delle fitte oscillazioni agli estremi, tipiche dei polinomi di grado elevato.

### Esempio 6:

Consideriamo la funzione di Runge

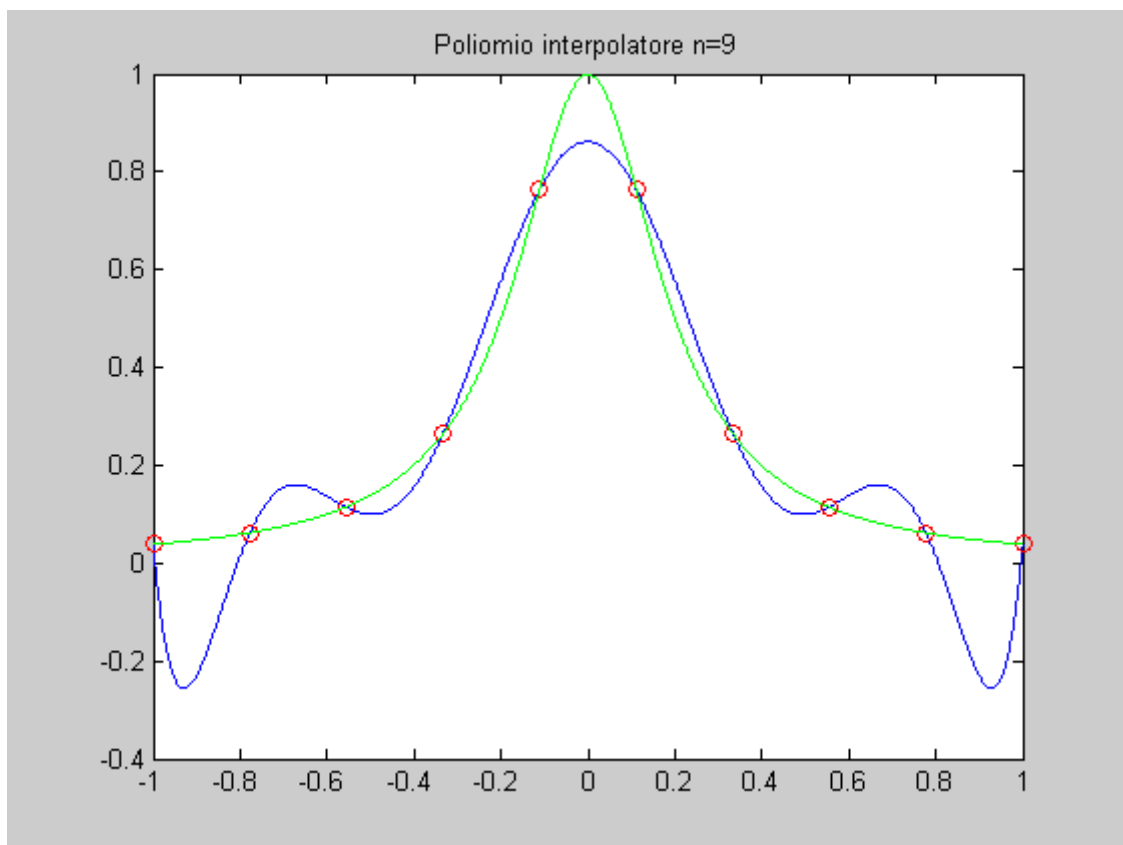
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

Costruiamo il polinomio di grado 5 che interpola le coppie  $(x_i, y_i)$   $i=0, \dots, 5$  con  $x_i$  equidistanti in  $[-1,1]$  ed  $y_i = f(x_i)$

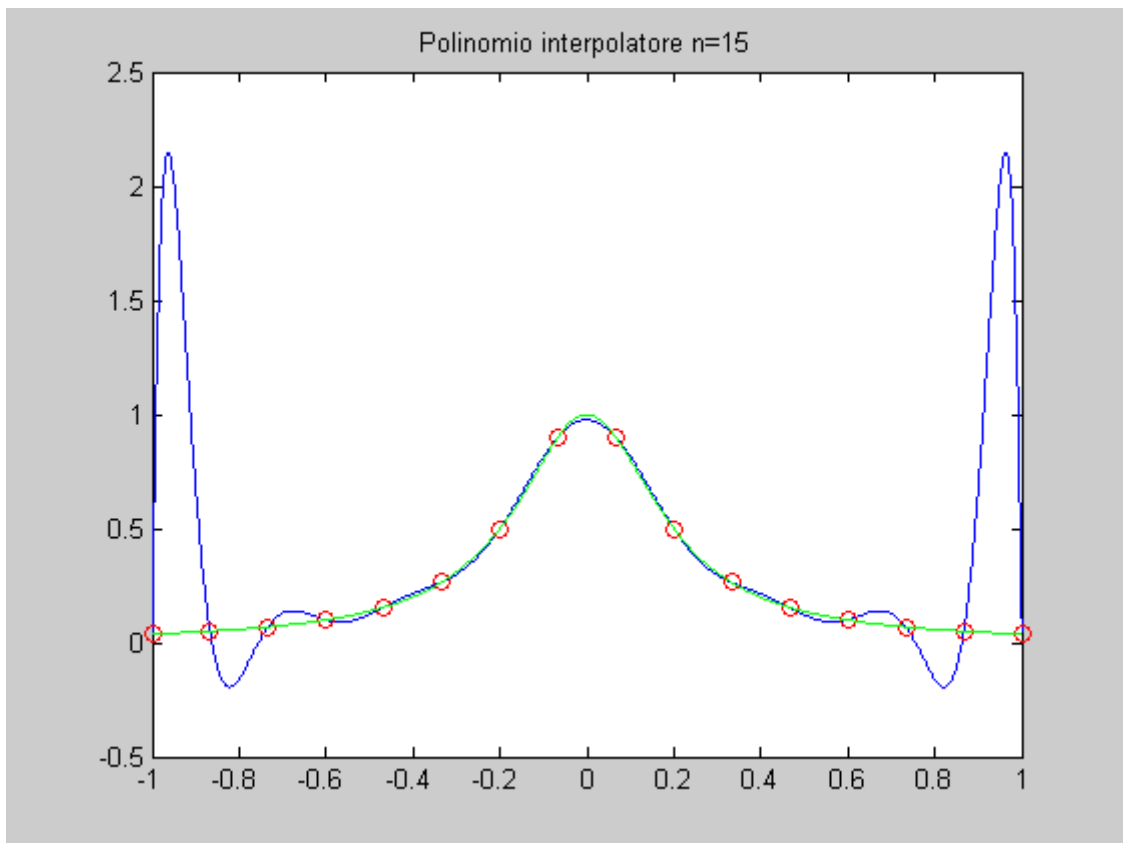


Costruiamo il polinomio di grado 9 che interpola le coppie  $(x_i, y_i)$   $i=0, \dots, 9$  con  $x_i$  equidistanti in  $[-1, 1]$  ed  $y_i = f(x_i)$





Aumentiamo le coppie di osservazioni e consideriamo  $(x_i, y_i)$   $i=0, \dots, 15$



Come si può osservare al crescere del numero delle osservazioni si ha un miglioramento della approssimazione al centro dell'intervallo e delle fitte oscillazioni ai bordi.

Il polinomio interpolatore, in questo caso, al crescere del numero delle osservazioni non converge alla funzione che ha generato i dati.

Da cosa dipende l'errore di interpolazione?

- ☐ Regolarità della funzione
- ☐ Disposizione dei punti di interpolazione sull'asse delle ascisse

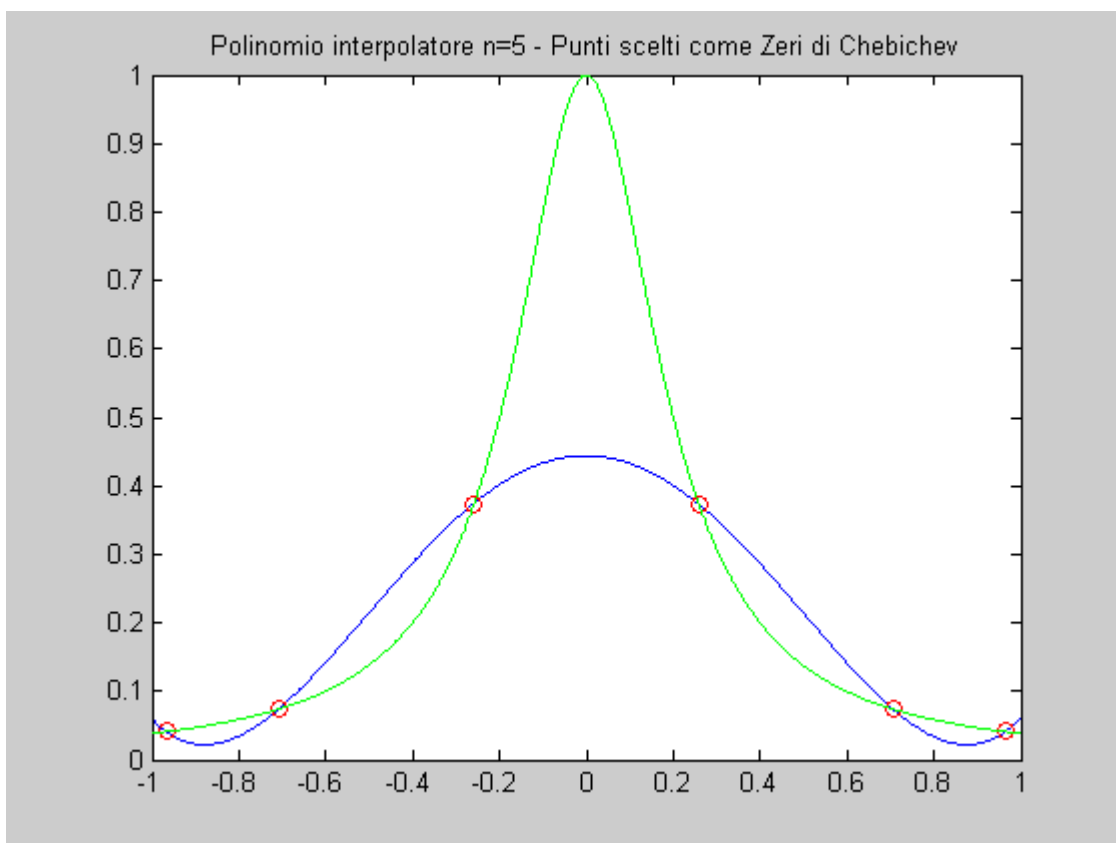
$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \omega(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)$$

Possiamo minimizzare l'errore, determinando i punti  $x_i$  in modo che risulti minimo, per qualunque  $\bar{x}$ , il termine  $\omega_{n+1}(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n) = \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i)$

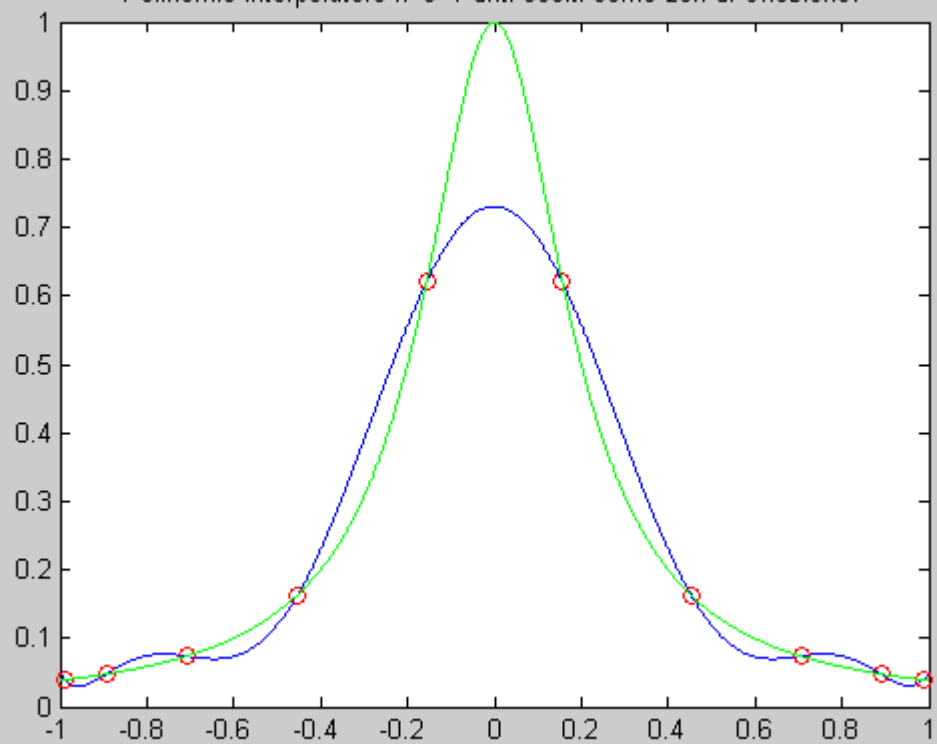
**Si dimostra che** se i punti  $x_i$  vengono scelti come **zeri dei polinomi di Chebichev**

$$x_i = \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot i}{2 \cdot (n + 1)}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n$$

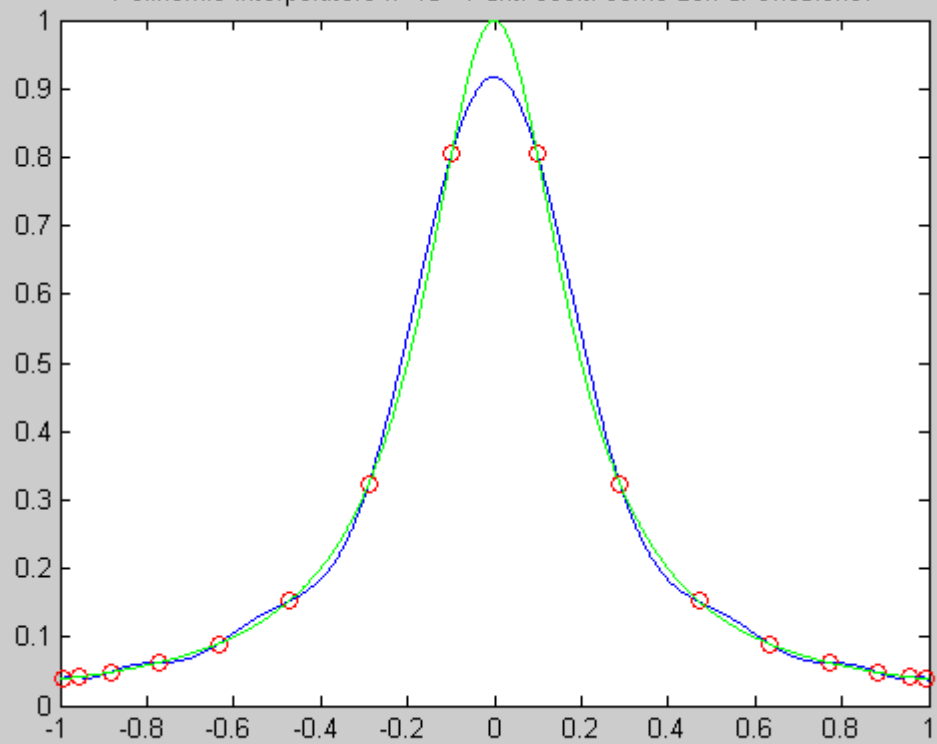
allora risulta minimo  $\omega_{n+1}(\bar{x})$  ed all'aumentare del numero dei punti di interpolazione si ha la convergenza del polinomio interpolatore alla funzione che ha generato di dati, come mostrato nei seguenti grafici.



Polinomio interpolatore  $n=9$  - Punti scelti come zeri di Chebichev



Polinomio interpolatore  $n=15$  - Punti scelti come zeri di Chebichev



## Condizionamento del problema dell'interpolazione polinomiale.

Siano date le coppie  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$  con  $x_i, i = 0, \dots, n$  appartenenti all'intervallo  $[a, b]$ .

Consideriamo le perturbazioni sui dati  $\tilde{y}_i = y_i + \epsilon_i, i = 0, \dots, n$  e l'errore relativo sui dati:

$$\frac{\|\tilde{y} - y\|_{\infty}}{\|y\|_{\infty}}$$

dove  $\tilde{y} = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)^T$  e  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$ .

Sia  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$  il polinomio che interpola le coppie  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$

e  $\tilde{P}_n(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i L_i(x)$  il polinomio che interpola le coppie  $(x_i, \tilde{y}_i), i = 0, \dots, n$

Consideriamo la differenza tra il polinomio di interpolazione calcolato a partire dai dati perturbati e quello costruito a partire dai dati esatti.

$$\tilde{P}_n(x) - P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)(\tilde{y}_i - y_i)$$

Passando ai valori assoluti si ottiene:

$$|\tilde{P}_n(x) - P_n(x)| \leq \max_{i=0, \dots, n} |\tilde{y}_i - y_i| \sum_{i=0}^n |L_i(x)| = \|\tilde{y} - y\|_{\infty} \lambda_n(x)$$

**Definizione**  $\lambda_n(x) := \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$  **funzione di Lebesgue.**

Passando alle norme infinito abbiamo:

$$\max_{x \in [a, b]} |\tilde{P}_n(x) - P_n(x)| \leq \|\tilde{y} - y\|_{\infty} \max_{x \in [a, b]} \lambda_n(x) \quad (a)$$

Poiché

$$\max_{x \in [a,b]} \lambda_n(x) = \|\lambda_n\|_\infty$$

e

$$\max_{x \in [a,b]} |\tilde{P}_n(x) - P_n(x)| = \|\tilde{P}_n(x) - P_n(x)\|_\infty$$

Allora la relazione (a) diventa:

$$\|\tilde{P}_n(x) - P_n(x)\|_\infty \leq \|\lambda_n\|_\infty \|\tilde{y} - y\|_\infty \quad \text{(b)}$$

La costante positiva  $\Lambda_n := \|\lambda_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$  si chiama **costante di**

**Lebesgue**

$$\|P_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |P_n(x)| \geq \max_{i=0,\dots,n} |P_n(x_i)| = \max_{i=0,\dots,n} |y_i| = \|y\|_\infty$$

Quindi  $\|P_n(x)\|_\infty \geq \|y\|_\infty$ , da cui passando ai reciproci si ottiene

$$\frac{1}{\|P_n(x)\|_\infty} \leq \frac{1}{\|y\|_\infty} \quad \text{(c)}$$

Moltiplicando membro a membro le relazioni (b) e (c) si ricava facilmente la seguente condizione sugli errori relativi:

$$\frac{\|\tilde{P}_n(x) - P_n(x)\|_\infty}{\|P_n(x)\|_\infty} \leq \Lambda_n \frac{\|\tilde{y} - y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

La costante di Lebesgue risulta essere il **coefficiente di amplificazione degli errori relativi sui dati e pertanto identifica il numero di condizionamento del problema di interpolazione polinomiale.**

Risulta che  $\Lambda_n \geq 1$ , infatti

$$\sum_{i=0}^n |L_i(x)| \geq \sum_{i=0}^n L_i(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

Da cui segue che

$$\max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)| \geq 1$$

Dalla definizione di  $\Lambda_n$  si vede facilmente che la scelta dei nodi dell'interpolazione  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  è fondamentale per il valore che può assumere la costante di Lebesgue.

Si può dimostrare che:

**con i nodi equispaziati  $\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{n \log_e(n)}$  per n grandi**

**con i nodi di Chebichev  $\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \log_e(n)$  per n grandi**

Quindi, anche se in entrambi i casi per  $n \rightarrow +\infty$  la costante di Lebesgue tende a infinito, per i nodi di Chebyshev la crescita è logaritmica invece che esponenziale.

In ogni caso, però se vengono scelti gradi  $n$  troppo elevati, il problema dell'interpolazione polinomiale risulta sensibile alle perturbazioni sui dati.

Per interpolare un numero elevato di nodi, al fine di evitare l'utilizzo di un polinomio  $P_n(x)$  di grado  $n$  elevato, si consiglia l'utilizzo delle spline interpolanti.