Lezione 11 - 30.03.2022 - Marco Moraschini

§METODO 3 - RANGO

Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ le righe possono essere viste come vettori di $\mathbb{R}^n$ e le colonne come vettori di $\mathbb{R}^m$.

DEF.: Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si chiama RANGO RIGHE di A il numero massimo di righe linearmente indipendenti (come vettori di $\mathbb{R}^n$); si chiama RANGO COLONNE di A il numero massimo di colonne linearmente indipendenti (come vettori di $\mathbb{R}^m$).

OSS.: Il rango righe ed il rango colonne non sono indipendenti, anzi sono legati dal seguente:

TEOR. (SENZA DIMOSTRAZIONE): Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora il rango righe di A coincide con il rango colonne di A.

DEF.: Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ chiameremo RANGO di A, e lo indicheremo con $rg(A)$, sia il rango righe di A sia il rango colonne di A (dato che coincidono).

OSS.: Per una matrice a scala la nozione di rango coincide con quella già studiata:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha $rg A = 3$. Mostriamo che è il numero massimo di righe linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,2,3,-1),\ v_2 = (0,0,-5,3),\ v_3 = (0,0,0,-2),\ v_4 = (0,0,0,0).$$

Chiaramente v_4 non è linearmente indipendente. Dobbiamo quindi verificare che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti. Poiché $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ e v_2 non è multiplo di

$v_1 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti. Mostriamo che $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$.
Se $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha(1,2,3,-1)+\beta(0,0,-5,3) = (0,0,0,-2)$,
allora avremmo $(\alpha, 2\alpha, 3\alpha-5\beta, -\alpha+3\beta) = (0,0,0,-2)$.
In particolare $\alpha=0$, da cui $(0,0,-5\beta,3\beta) = (0,0,0,-2)$ che non puo' verificarsi per alcun $\beta \in \mathbb{R}$. Segue la tesi.

OSS.: Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, il rango di A è uguale alla dimensione di $W = \{$sottospazio generato dalle righe di $A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e di $Z = \{$sottospazio generato dalle colonne di $A\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

PROP.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Le operazioni elementari sulle righe di A preservano il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A e quindi IL RANGO.

DIM.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e indichiamo con $v_1, \dots, v_m$ le sue righe pensate come vettori di $\mathbb{R}^n$. Vogliamo mostrare che le operazioni elementari sulle righe non modificano $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Chiaramente scambiare due righe non altera il sottospazio.
Analogamente se sostituiamo ad una riga un suo multiplo non nullo, preserviamo il sottospazio: ossia

$$\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_k \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Infatti $\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_k \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\ \forall i=1,\dots,m\} = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha v_i + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\ \forall i=1,\dots,k\}$
$= \{\beta_1 v_1 + \dots + \beta_i \alpha v_i + \dots + \beta_k v_k \mid \beta_i \in \mathbb{R}\ \forall i=1,\dots,k\} = \langle v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_k \rangle$.

Infine mostriamo che se sostituiamo alla riga i-esima la riga i-esima $+ \alpha$(riga j-esima) il sottospazio non varia. Più precisamente dato che l'operazione coinvolge solo le righe i e j dobbiamo provare che:

$$\langle v_j, v_i \rangle = \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente $\langle v_j, v_i \rangle \supseteq \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle$: Dato $a v_j + b(v_i + \alpha v_j) \in \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle$ si ha:

$$a v_j + b(v_i + \alpha v_j) = a v_j + b v_i + b\alpha v_j = (a + b\alpha) v_j + b v_i \in \langle v_j, v_i \rangle.$$

Viceversa, proviamo che $\langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle \supseteq \langle v_i, v_j \rangle$. Dato $a v_j + b v_i \in \langle v_i, v_j \rangle$, possiamo scrivere:

$$a v_j + b v_i = a v_j + b v_i + \underbrace{(b\alpha v_j - b\alpha v_j)}_{= 0_{\langle v_j, v_i \rangle}} = (a v_j - b\alpha v_j) + b v_i + b\alpha v_j = (a - b\alpha) v_j + \underbrace{b(v_i + \alpha v_j)}_{\in \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle}$$

Quindi abbiamo provato che $\langle v_j, v_i \rangle = \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle$, da cui la tesi.

$\square$

Possiamo quindi descrivere il METODO 3.

§ METODO 3 - RANGO: DETTAGLI

Dati i vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ si costruisce la matrice $A \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ che ha tali vettori per righe. Poi la si riduce a scala con l'algoritmo di Gauss e si calcola il rango della matrice a scala ottenuta.

OSS.: lo spazio generato da $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ coincide con lo spazio generato dalle righe della matrice a scala ottenuta da A tramite l'algoritmo di Gauss.

ES.: Stabilire se $v_1 = (1,2,0,1)$, $v_2 = (-1,1,1,1)$, $v_3 = (3,3,-1,1)$, $v_4 = (-3,0,2,1)$ sono linearmente indipendenti.

SOL.: Scriviamo $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \in \mathbb{R}^4$. Riduciamo A a scala:

$$A \xrightarrow[\text{IV} \to \text{IV} + 3\text{I}]{\substack{\text{II} \to \text{II} + \text{I} \\ \text{III} \to \text{III} - 3\text{I}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{IV} \to \text{IV} - 2\text{II}]{\text{III} \to \text{III} + \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Abbiamo $\text{rg}A = \text{rg}A' = 2$, il che significa che SOLO DUE vettori fra $v_1, \dots, v_4$ sono linearmente indipendenti. Perciò $\{v_1, \dots, v_4\}$ sono linearmente dipendenti.

In particolare $\langle v_1, \dots, v_4 \rangle = \langle (1,2,0,1), (0,3,1,2) \rangle$.

ES.: Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ i vettori $(1,k,1), (k,1,-k), (k,k,1)$ sono linearmente indipendenti.

SOL.: Scriviamo una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ con righe uguali ai vettori dati e riducendola a scala:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -k \\ 0 & k-1 & 1+k \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II} \to \text{II} - k\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & -2k \\ 0 & k-1 & 1+k \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1+k \\ 0 & (1+k)(1-k) & -2k \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - (1+k)\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1+k \\ 0 & 0 & -2k + (1+k)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1+k \\ 0 & 0 & k^2+1 \end{bmatrix} = A'.$$

$\text{rg}A = \text{rg}A'$. Poiché $k^2+1 > 0$ sempre, $\text{rg}A = \text{rg}A' \geq 2$ sempre. Tuttavia il $\text{rg}(A') = 2 \iff k-1=0 \iff k=1$.

Abbiamo quindi mostrato che $\forall k \neq 1$ i vettori dati sono linearmente indipendenti.