PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA

Esame 6 febbraio 2023

- Dare una (breve) spiegazione di tutte le risposte date e dei passaggi svolti.
- Consegnare solo la bella copia
- Scrivere le soluzioni degli esercizi indicando chiaramente la domanda a cui si sta rispondendo.
- Consegnare un foglio protocollo per ogni esercizio.
- Mettere nome, cognome e matricola su ogni foglio consegnato.

Domanda teorica: Dare la definizione di applicazione lineare $f\colon V \to V$ invertibile.

(1) Sia
$$V = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y = 0, z + 3w = 0\}$$
un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

(a) Determinare la dimensione di V ed esibire una sua base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$;

(b) Sia $F_k\colon V \to V$ l'unica applicazione lineare definita da
$$F_k(b_1) = 3kb_1 + 3kb_2$$
$$F_k(b_2) = -3kb_1 - 3kb_2$$
$$F_k(b_3) = kb_1 + kb_2.$$
Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione ed una base di $\ker(F_k)$ e di $\mathrm{Im}(F_k)$.

(c) Sia $G\colon V \to V$ un'applicazione lineare data da
$$G((x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}) = (4x_1 - 12x_2 + 12x_3, 14x_1 - 22x_2 + 14x_3, 6x_1 - 6x_2 - 2x_3)_{\mathcal{B}}$$
e sia, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $H_k = G + F_k\colon V \to V$ l'applicazione lineare definita da $H(v) = G(v) + F_k(v)$. Mostrare che la matrice associata ad H_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da
$$A_k = \begin{bmatrix} 3k+4 & -3k-12 & k+12 \\ 3k+14 & -3k-22 & k+14 \\ 6 & -6 & -2 \end{bmatrix};$$

(d) Mostrare che -8 è un autovalore dell'endormofismo H_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(e) Calcolare la molteplicità geometrica di -8 al variare di $k \in \mathbb{R}$;

(f) Determinare se per $k = 0$ l'endomorfismo H_k è diagonalizzabile.

Soluzione (1) : *Ad a)* Dato che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito da 2 equazioni cartesiane la sua dimensione è uguale a $5-2=3$. Ne segue che una sua base è data da

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,0,0,0),(0,0,-3,0,1),(0,0,0,1,0)\}.$$

Ad b) Per stabilire dimensione e base di $\ker(F_k)$ e $\operatorname{Im}(F_k)$ iniziamo scrivendo la matrice associata ad F_k rispetto a $\mathcal{B}$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_k) = \begin{bmatrix} 3k & -3k & k \\ 3k & -3k & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede immediatamente che se $k=0$ la matrice è quella nulla, quindi la dimensione di $\operatorname{Im}(F_0)$ e $\ker(F_0)$ sono rispettivamente uguali a 0 e 3. Una base per $\ker(F_0)$ è uguale a quella trovata per V:

$$\{(1,-1,0,0,0),(0,0,-3,0,1),(0,0,0,1,0)\}.$$

Se invece $k \neq 0$, si vede che tutte le colonne sono una il multiplo dell'altra e per cui tutte linearmente dipendenti. Ne segue che

$$\operatorname{Im}(F_k) = \langle (k,k,0) \rangle,$$

ha dimensione uguale a 1. Per il teorema delle dimensioni abbiamo quindi che $\dim(\ker(F_k)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}(F_k)) = 3-1 = 2$. Le equazioni cartesiane di $\ker(F_k)$ sono quindi

$$\ker(F_k) = \{(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in V \mid 3kx - 3ky + kz = 0\} = \langle (1,1,0)_{\mathcal{B}}, (1,0,-3)_{\mathcal{B}} \rangle$$

e una base è data da

$$\{(1,1,0)_{\mathcal{B}}, (1,0,-3)_{\mathcal{B}}\}.$$

Ad c) Scriviamo la matrice associata a G rispetto

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(G) = \begin{bmatrix} 4 & -12 & 12 \\ 14 & -22 & 14 \\ 6 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Questo implica che la matrice associata ad H_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ non è altro che la somma delle matrici associate a G e F_k:

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(H_k) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(G) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_k) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -12 & 12 \\ 14 & -22 & 14 \\ 6 & -6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -3k & k \\ 3k & -3k & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3k+4 & -3k-12 & k+12 \\ 3k+14 & -3k-22 & k+14 \\ 6 & -6 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ad d) Per rispondere alla domanda, è sufficiente verificare che -8 sia una radice del polinomio caratteristico di H_k, ossia che il seguente determinante sia nullo:

$$\det(H_k + 8I) = \begin{bmatrix} 3k+12 & -3k-12 & k+12 \\ 3k+14 & -3k-14 & k+14 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tuttavia, si vede immediatamente che la prima e la seconda colonna sono una l'opposta dell'altra (e quindi le due colonne solo linearmente indipendenti). Ne segue che il determinante si annulla.

Alternativamente, uno può calcolare il polinomio caratteristico di H_k; per farlo usiamo le operazioni elementari sulla matrice:

$$\begin{aligned}
p_k(\lambda) &= \det(H_k - \lambda I)\\
&= \det \begin{bmatrix} 3k+4-\lambda & -3k-12 & k+12 \\ 3k+14 & -3k-22-\lambda & k+14 \\ 6 & -6 & -2-\lambda \end{bmatrix}\\
&= -\det \begin{bmatrix} 6 & -6 & -2-\lambda \\ 3k+14 & -3k-22-\lambda & k+14 \\ 3k+4-\lambda & -3k-12 & k+12 \end{bmatrix}\\
&= -\det \begin{bmatrix} 6 & -6 & -2-\lambda \\ 0 & -\lambda-8 & \frac{(3k+14)\lambda+12k+112}{6} \\ 0 & -\lambda-8 & \frac{-\lambda^2+(3k+2)\lambda+12k+80}{6} \end{bmatrix}\\
&= 6(\lambda+8)[\frac{-\lambda^2-12\lambda-32}{6}]\\
&= -(\lambda+8)(\lambda+8)(\lambda+4)\\
&= -(\lambda+8)^2(\lambda+4).
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto che per ogni $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di H_k sono -8 e -4 di molteplicità algebrica rispettivamente uguale a 2 e 1.

Ad e) Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore -8. Per farlo è sufficiente studiare il rango della matrice:

$$Z_k = \begin{bmatrix} 3k+12 & -3k-12 & k+12 \\ 3k+14 & -3k-14 & k+14 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Usiamo l'algoritmo di Gauss per ridurla a scala:

$$\begin{bmatrix} 3k+12 & -3k-12 & k+12 \\ 3k+14 & -3k-14 & k+14 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3k+12 & -3k-12 & k+12 \\ 3k+14 & -3k-14 & k+14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2k \\ 0 & 0 & -2k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$m_g(-8) = \dim(V_{-8}) = \dim(V) - \mathrm{rg}(Z_k) = \begin{cases} 3-1=2 \text{ se } k=0 \\ 3-2=1 \text{ se } k \neq 0 \end{cases}.$$

Ad f) Abbiamo già calcolato che per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono -8 con molteplicità algebrica uguale a 2 e -4 con molteplicità algebrica uguale a 1. Ne segue che per $k = 0$, il conto del punto precedente implica che

$m_g(-8) = m_a(-8) = 2$. Dato che abbiamo sempre $m_a(-4) = m_g(-4) = 1$, si conclude che l'endomorfismo per $k = 0$ è diagonalizzabile (e per quanto visto prima questo è anche l'unico caso!).

(2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$V_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2kx + z = 0, (2-k)x + y + 2t = 0\}$$

(a) Mostrare che $\{(0, 2, 0, -1), (1, k-2, 2k, 0)\}$ é una base di V_k per ogni $k \in \mathbb{R}$;

(b) Sia

$$W_k = \langle (0, 7k, 1-4k^2, 9+2k), (0, 1, 0, 0), (1, k-2, 2k, -1) \rangle$$

un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Stabilire al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W_k ed una sua base;

(c) Calcolare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $V_k + W_k$ ed una sua base;

(d) Calcolare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $V_k \cap W_k$ ed una sua base;

(e) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la somma $V_k + W_k$ è diretta.

Soluzione (2) : *Ad a)* Per studiare la dimensione di V_k ed una sua base al variare di $k \in \mathbb{R}$ dobbiamo considerare 3 casi:

- $k = 0$) In questo caso le equazioni sono

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2x + y + 2t = 0. \end{cases}$$

Quindi abbiamo

$$V_0 = \{(x, -2x-2t, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 0, 0), (0, -2, 0, 1) \rangle.$$

Questi generatori formano una base dato che è un sottospazio di dimensione 4 (essendo definito da due equazioni non banali ed indipendenti).

- $k = 2$) In questo caso le equazioni sono

$$\begin{cases} -4x + z = 0 \\ y + 2t = 0. \end{cases}$$

Quindi,

$$V_2 = \{(x, -2t, 4x, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 4, 0), (0, -2, 0, 1) \rangle$$

Anche qui i generatori sono anche una base dato che abbiamo un sottospazio di dimensione 2.

- $k \neq 0, 2$) In questo caso abbiamo

$$V_k = \{(x, (k-2)x - 2t, 2kx, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, k-2, 2k, 0), (0, -2, 0, 1) \rangle.$$

Anche qui i generatori formano una base dato che la dimensione è uguale a 2.

Ad b) Per stabilire la dimensione ed una base di W_k scriviamo i vettori come righe di una matrice e calcoliamone il rango:

$$\begin{bmatrix} 0 & 7k & 1-4k^2 & 9+2k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k-2 & 2k & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & k-2 & 2k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7k & 1-4k^2 & 9+2k \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & k-2 & 2k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 & 9+2k \end{bmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è sempre uguale a 3 dato che i termini dell'ultima riga non si possono annullare simultaneamente. Abbiamo quindi che W_k ha sempre dimensione uguale a 3 ed una sua base è data da:

$$\{(1, k-2, 2k, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1-4k^2, 9+2k)\}.$$

Ad d) Consideriamo tre casi:

- $k = 0$) In questa situazione abbiamo che i vettori della base di W_0 sono
$$(1, -2, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 9)$$
e quindi un vettore generico è dato da:
$$(\alpha, -2\alpha + \beta, \gamma, -\alpha + 9\gamma)$$
per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Sostituiamo questo vettore generico nelle equazioni cartesiane di V_0:
$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\alpha + \beta + 2(-\alpha + 9\gamma) = 0, \end{cases}$$
ossia
$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 2\alpha = 0. \end{cases}$$
che ha come soluzione $(\alpha, 2\alpha, 0)$. Quindi l'intersezione è data da:
$$V_0 \cap W_0 = \{(\alpha, 0, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0, -1) \rangle,$$
di dimensione 1 dove il generatore esibito costituisce una base.
- $k = 2$) Abbiamo che un vettore generico di W_2 è:
$$\alpha(1, 0, 4, -1) + \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(0, 0, -15, 13) = (\alpha, \beta, 4\alpha - 15\gamma, -\alpha + 13\gamma)$$
per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Sostituendo alle equazioni cartesiane di V_2 otteniamo:
$$\begin{cases} -4\alpha + 4\alpha - 15\gamma = 0 \\ \beta + 2(-\alpha + 13\gamma) = 0, \end{cases}$$
ossia
$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 2\alpha = 0. \end{cases}$$
Quindi la soluzione è $(\alpha, 2\alpha, 0)$:
$$V_2 \cap W_2 = \{(\alpha, 2\alpha, 4\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2, 4, -1) \rangle.$$
Similmente a prima, la dimensione è uguale a 1 e una base è data dal generatore esibito.

- $k \neq 0, 2$) In questa situazione abbiamo che un vettore generico di W_k è:

$$\alpha(1, k-2, 2k, -1)+\beta(0, 1, 0, 0)+\gamma(0, 0, 1-4k^2, 9+2k) = (\alpha, (k-2)\alpha+\beta, 2k\alpha+(1-4k^2)\gamma, -\alpha+(9+2k)\gamma).$$

Sostituiamo il vettore alle equazioni:

$$\begin{cases} -2k\alpha + 2k\alpha + (1-4k^2)\gamma = 0 \\ (2-k)\alpha + (k-2)\alpha + \beta + 2(-\alpha + (9+2k)\gamma) = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (1-4k^2)\gamma = 0 \\ \beta - 2\alpha + 2(9+2k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Se $k \neq \pm 1/2$, si ottiene la soluzione $(\alpha, 2\alpha, 0)$. Quindi

$$V_k \cap W_k = \{(\alpha, k\alpha, 2k\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1, k, 2k, -1)\rangle$$

ha dimensione 1 e una base è data dal generatore esibito. Se invece $k = \pm 1/2$, si ha che la soluzione è $(\alpha, 2\alpha - 2(9+2k)\gamma, \gamma)$ da cui

$$V_{1/2}\cap W_{1/2} = \{(\alpha, \frac{1}{2}\alpha - 20\gamma, \alpha, -\alpha+10\gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 1, 2, -2), (0, -2, 0, 1)\rangle$$

e

$$V_{-1/2}\cap W_{-1/2} = \{(\alpha, -\frac{1}{2}\alpha - 16\gamma, -\alpha, -\alpha+8\gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle (2, -1, -2, -2), (0, -2, 0, 1)\rangle.$$

In questi casi la dimensione è uguale a 2 e le basi sono quelle esibite dai generatori.

Ad c, e) Per quanto riguarda le dimensioni i conti precedenti mostrano che abbiamo due casi:

- $k \neq \pm 1/2$) In questa situazione V_k e W_k hanno dimensione 2 e 3, mentre la loro intersezione ha dimensione uguale a 1. Quindi, usando Grassmann:

$$\dim(V_k + W_k) = \dim(V_k) + \dim(W_k) - \dim(V_k \cap W_k) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

- $k = \pm 1/2$) In questa situazione V_k e W_k hanno dimensione 2 e 3, ma la loro intersezione ha dimensione uguale a 2:

$$\dim(V_k + W_k) = \dim(V_k) + \dim(W_k) - \dim(V_k \cap W_k) = 2 + 3 - 2 = 3.$$

Questo già ci permette di concludere per il punto (e) per nessun $k \in \mathbb{R}$ la somma è diretta (dato che l'intersezione non è mai banale).

Per calcolare la base della somma procediamo facendo un unico calcolo. Per farlo osserviamo che

$$\{(1, k-2, 2k, 0), (0, -2, 0, 1)\}$$

è una base di V_k per ogni $k \in \mathbb{R}$ (infatti sostituendo $k = 0, 2$ si ottengono le basi esibite). Possiamo quindi ridurre a scala la seguente matrice ottenuta mettendo nelle righe i vettori della base di V_k e W_k:

$$\begin{bmatrix} 1 & k-2 & 2k & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & k-2 & 2k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 & 9+2k \end{bmatrix}.$$

Con l'eliminazione di Gauss otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & k-2 & 2k & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & k-2 & 2k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 & 9+2k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & k-2 & 2k & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 & 9+2k \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & k-2 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 & 9+2k \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & k-2 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4k^2 & 9+2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto che il rango è uguale a 4 o 3 a seconda se $k \neq \pm 1/2$ oppure no. Questo conferma quanto visto sopra e ci permette di trovare le basi cercate:

- $k \neq \pm 1/2$) Una base della somma è data da:
  $$\{(1, k-2, 2k, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1-4k^2, 9+2k), (0, 0, 0, 1)\}.$$
- $k = \pm 1/2$) Una base della somma è data da:
  $$\{(1, k-2, 2k, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$