4. Cinematica del punto materiale

4.1 Introduzione alla cinematica del punto

La meccanica, oggetto di questo corso, è sostanzialmente costituita dalla unione di due campi, la cinematica, che si occupa della descrizione del moto, e la dinamica, che si occupa delle cause del moto.

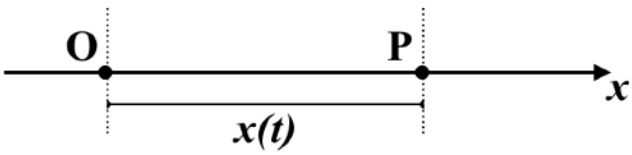
Il moto può essere in generale complicato. Iniziamo lo studio del moto dal più semplice corpo: il punto materiale (o particella): un corpo che presenta dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi (o degli altri corpi). Ad esempio, la terra non è certamente un corpo "piccolo" (rispetto a che?), ma nel suo moto orbitale intorno al sole, può, con un livello di approssimazione accettabile, essere trattata come un punto materiale. Un corpo esteso si muove come un punto materiale se compie soltanto traslazioni; in generale, per un corpo non puntiforme, possono esserci anche rotazioni e vibrazioni.

Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la posizione del punto, in funzione del tempo, in un dato sistema di riferimento, ad esempio se sono note le coordinate $x(t), y(t), z(t)$ in un sistema di riferimento cartesiano. La traiettoria è il luogo dei punti occupati dal corpo in movimento: è una curva nello spazio. La variazione nel tempo della posizione porta al concetto di velocità. La variazione nel tempo della velocità porta al concetto di accelerazione.

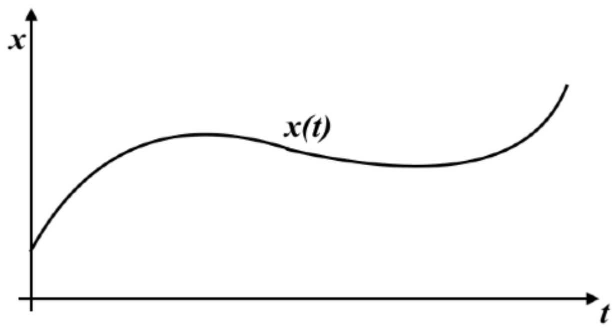
Le grandezze in gioco sono comunque: lo spazio, il tempo, la velocità e l'accelerazione. **NB: è essenziale specificare sempre il sistema di riferimento rispetto al quale si osserva il moto.** Discuteremo della relazione tra le quantità che descrivono del moto osservate da sistemi di riferimento differenti in seguito.

3.2 Il moto rettilineo

Il moto rettilineo si svolge lungo una retta, sulla quale fissiamo un'origine e un verso. Di conseguenza, il moto può essere descritto tramite una unica coordinata scalare, che chiameremo $x(t)$.



Chiameremo *diagramma orario* un grafico che riporta il tempo (t) in ascissa e la posizione (x) in ordinata, come nell'esempio seguente:



4.2 La velocità nel moto rettilineo

Se a $t=t_1$ il corpo si trova in $x=x_1$, e a $t=t_2$ il corpo si trova in $x=x_2$, si avrà che $\Delta x = x_2 - x_1$ è lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Definiamo la velocità media il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo necessario a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

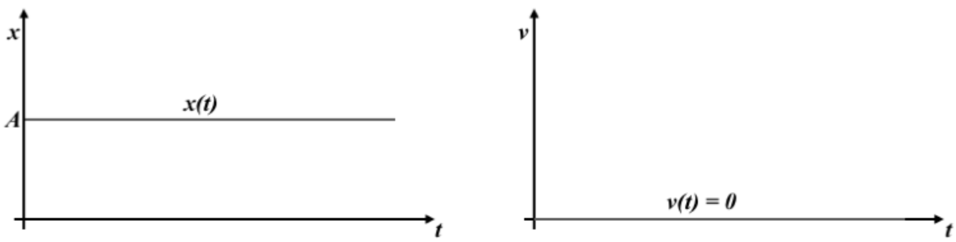
Se ora rendo sempre più piccoli gli intervalli temporali Δt, giungo alla definizione di velocità istantanea:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$$

In parole, *la velocità istantanea rappresenta la rapidità di variazione della posizione in un dato istante.*

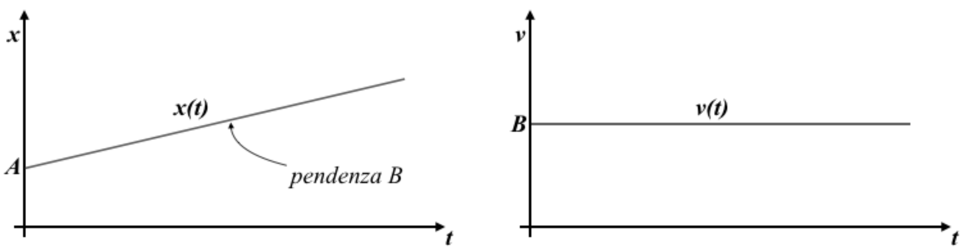
Il segno della velocità indica la direzione del moto. Anche la velocità può essere funzione del tempo. Se $v = v(t)$ è costante, si parla di *moto rettilineo uniforme.* Se è nota la legge oraria $x(t)$, tramite l'operazione di derivazione rispetto al tempo si ricava la velocità.

4.3 Esempi di moto unidimensionale



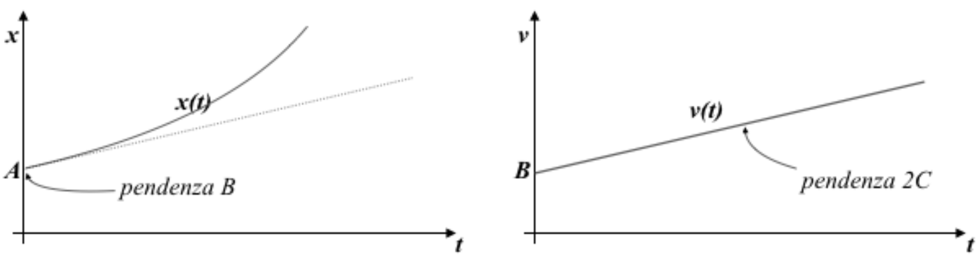
1) Nessun moto. La posizione non varia, $x(t) = A$. Ne consegue che $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$.

2) Moto a velocità costante. La posizione ha legge della forma $x(t) = A + Bt$.



Sarà $x(0) = A; \frac{\Delta x}{\Delta t} = v = B$.

3) Moto accelerato. La velocità cambia. Quindi cambia anche la pendenza del grafico della $x(t)$. Ad esempio, $x(t) = A + Bt + Ct^2$, oppure $x(t) = A \cos \omega t$.



Se $x(t) = A + Bt + Ct^2$, avremo $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A + Bt + Ct^2) = B + 2Ct$.
4) Automobile che accelera e frena.
5) Disco da hockey che rimbalza sulla parete. Discussione delle discontinuità.

4.4 Problema inverso

Se un punto materiale si trova in x al tempo t e in $(x + \mathrm{d}x)$ al tempo $(t + \mathrm{d}t)$, varrà la relazione $\mathrm{d}x = v(t)\mathrm{d}t$. Quindi, per trovare un Δx finito, avrò

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t \implies x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

da cui estraiamo due informazioni: che la legge oraria $x(t)$ sarà ricavabile tramite

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

e che la velocità media sarà ottenuta tramite

$$v_m = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

come atteso, essendo questa la definizione di media della funzione $v(t)$ sull'intervallo $t - t_0$.

Nel caso del moto rettilineo uniforme, v è costante. Allora

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t = x_0 + v\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = x_0 + v(t - t_0)$$

naturalmente, scelto $t_0 = 0$, si avrà

$$x(t) = x_0 + vt$$

Notare che nel caso del moto rettilineo uniforme la velocità istantanea coincide con la velocità media.

4.5 Moto accelerato

In generale la velocità è funzione del tempo: $v = v(t)$. Possiamo descrivere le variazioni di v esattamente come in precedenza abbiamo descritto le variazioni di x. Se la velocità varia di Δv in un Δt, avremo la definizione di accelerazione media

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

e di accelerazione istantanea

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Se $a = 0$, v è costante: siamo nel caso del moto rettilineo uniforme. Il segno dell'accelerazione dice se la velocità aumenta o diminuisce nel tempo. Attenzione che il *verso del moto* è determinato dal segno della velocità e non da quello dell'accelerazione.

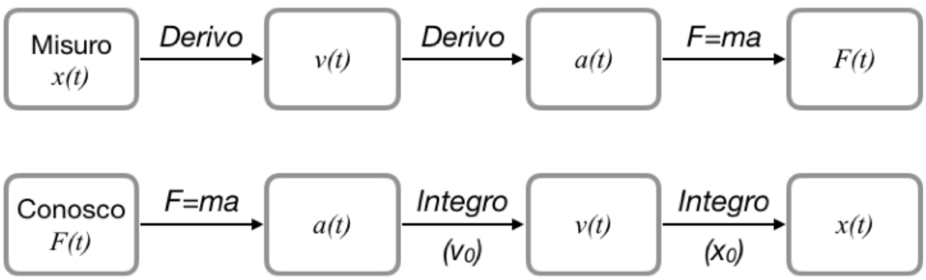
Anche in questo caso risolviamo il problema inverso:

$$\mathrm{d}v = a(t)\mathrm{d}t \implies \Delta v = \int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{t+0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$$

L'accelerazione è una quantità cinematica molto importante in quanto è quella legata all'azione di una forza (come vedremo, in base alla seconda legge di Newton, $F = ma$). Quindi, in generale, possiamo, semplificando un po', catalogare lo studio del moto tramite il legame tra la cinematica e la dinamica secondo le due possibili "direzioni" seguenti:

- Nota la $x(t)$, derivando due volte ottengo $a(t)$ e quindi posso dire quali forze hanno agito sul moto
  oppure
- nota la forza agente sul punto, $F(t)$, da essa posso ottenere la $a(t)$ e integrando due volte trovare le leggi orarie $x(t)$ e $v(t)$ (se sono note le condizioni iniziali).



Possiamo supporre di conoscere $a(x)$ invece di $a(t)$. In questo caso:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \implies a\mathrm{d}x = v\mathrm{d}v$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v \implies \int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

quindi:
$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x$$

4.6 Unità di misura delle grandezze cinematiche fin qui utilizzate

Il moto è espresso come una posizione nel tempo. Nel Sistema Internazionale queste due grandezze si esprimono in metri (m) e secondi (s). In base alle rispettive definizioni, dato che $[v] = [LT^{-1}]$ e $[a] = [LT^{-2}]$:

quantità	***unità di misura***	***simbolo***
posizione	metri	m
velocità	metri al secondo	$\mathrm{m/s}$
accelerazione	metri al secondo quadrato	$\mathrm{m/s^2}$
tempo	secondi	s

La misura delle velocità è frequentemente espressa in km/h. La conversione in m/s è semplice:

$$1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{10^3\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 0.278\ \mathrm{m/s} \qquad \text{e} \qquad 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3.6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

4.7 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Un moto generico può essere definito *vario*, quando l'accelerazione non è costante. Se l'accelerazione è costante, il moto è detto *uniformemente accelerato*. Ricaviamo esplicitamente la $v(t)$ e la $x(t)$:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t = v_0 + a\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = v_0 + a(t - t_0)$$

quindi

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\mathrm{d}t = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)\mathrm{d}t$$

Quindi

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Nel caso in cui si abbia $t_0 = 0$ (piuttosto frequente nei casi concreti, dato che la scelta di un'origine per l'asse dei tempi è sostanzialmente arbitraria), avremo la seguente forma per le leggi orarie del moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Se è necessaria la relazione tra velocità e posizione, sempre nel caso di moto uniformemente accelerato:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \implies a\mathrm{d}x = v\mathrm{d}v$$

$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v \Longrightarrow a(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Esercizi

Guido l'automobile a 43 km/h per 5.2 km su una strada rettilinea. Resto senza benzina e percorro a piedi 1.2 km in 27 minuti, fino al distributore. Qual è stata la mia velocità media? Disegnare anche un grafico di *x(t)*.

Sto viaggiando a 112 km/h e mi distraggo per un secondo. Quanta strada ho percorso durante questo istante?

Un 747 decolla alla velocità di 360 km/h. Se la pista è lunga 1.8 km, quanto vale l'accelerazione minima necessaria per riuscire a decollare (supposta costante)?

Un elettrone in un tubo catodico entra nella regione di accelerazione, lunga 1.2 cm, con una velocità iniziale di $1.5 \cdot 10^5$ m/s, e ne esce alla velocità di $5.8 \cdot 10^6$ m/s. Qual è stata l'accelerazione, supposta costante?

Lancio verso l'alto una pallina: con che velocità se raggiunge un'altezza massima di 53.7 m? (accelerazione di gravità è $g \simeq 9.8$ m/s^2, diretta verso il basso).

4.8 La caduta verticale dei gravi

Osservazione sperimentale: trascurando l'attrito con l'aria, qualunque corpo lasciato libero di cadere in prossimità della superficie terrestre si muove verso il basso con accelerazione costante che vale in modulo $g = 9.8(1)\ \mathrm{m/s^2}$. In altre parole, fissato un asse diretto verso l'alto, $a = -g = -9.8(1)\ \mathrm{m/s^2}$. Si tratta di un normalissimo moto uniformemente accelerato con accelerazione identica per tutti i gravi. Vediamo nel seguito alcuni esempi che si differenziano per le condizioni iniziali.

1) Un corpo cade da un'altezza h con $v_0 = 0$:

Con le condizioni iniziali: $x_0 = h$; $v_0 = 0$; $t_0 = 0$, sono valide le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} v = -gt \\ x = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x) = \sqrt{2g(h - x)} \\ t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} \end{cases}$$

Dalle ultime due espressioni, si ottiene, ponendo $x = 0$:

- il tempo di caduta $t_c = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$
- la velocità al suolo $v_c = \sqrt{2gh}$

2) Un corpo cade da altezza *h* con $v_0 < 0$ (verso il basso):

Con le condizioni iniziali: $x_0 = h$; $v_0 = -v_i$ $(v_i > 0)$; $t_0 = 0$, sono valide le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} v = -v_1 - gt \\ x = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(h-x)} \\ t(x) = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}} \end{cases}$$

Come sopra, ricaviamo tempo e velocità di arrivo al suolo:

- il tempo di caduta $t_c = -\dfrac{v_1}{g} + \sqrt{\dfrac{v_1^2}{g^2} + \dfrac{2h}{g}}$
- la velocità al suolo $v_c = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$

Notare che per $t(x)$ abbiamo scartato la soluzione negativa.

3) Un corpo lanciato verso l'alto ($v_0 > 0$), partendo dal suolo.
Con le condizioni iniziali: $x_0 = 0;\ \ v_0 = v_2 > 0;\ \ \ t_0 = 0$

$$\begin{cases} v = -v_2 - gt \\ x = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

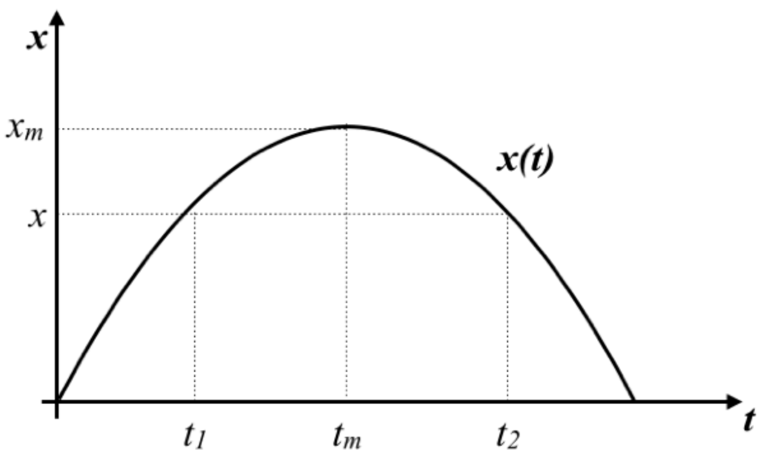
$$\begin{cases} v(x) = \pm\sqrt{v_2^2 - 2g(x)} \\ t(x) = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} \end{cases}$$

In questo caso, il "più o meno è dovuto al fatto che il corpo ripassa due volte nella stessa posizione, prima quando sta salendo, poi quando sta scendendo.

Ovviamente, otteniamo, al suolo:

$$t_c = \frac{v_2}{g} \pm \frac{v_2}{g}$$
$$v_c = \pm v_2$$

con l'ovvia interpretazione che il corpo si trova al livello del suolo una prima volta, a $t = 0$ con $v = v_2$, e una seconda volta, a $t = \dfrac{2v_2}{g}$, con $v = -v_2$. Vediamo la rappresentazione grafica della legge oraria di questo moto.

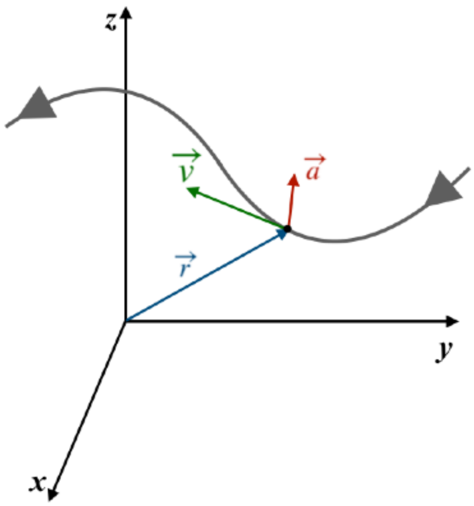


La figura mostra che $x = 0$ è posizione occupata alla partenza e all'arrivo:
$t = 0, v = v_2$ e $t = 2t_m, v = -v_2$.

La velocità è nulla in corrispondenza della massima altezza raggiunta (il verso del moto si inverte), ponendo quindi la velocità a zero nella legge oraria troviamo l'istante corrispondente t_m:
$0 = v_2 - gt_m \implies t_m = v_2/g$, e in questo istante il corpo si trova nella posizione di altezza massima, corrispondente a $x_m = v_2^2/2g$. Si capisce che per $t < t_m$, si ha $v > 0$; per $t > t_m$, si ha $v < 0$. Il tempo di volo totale sarà il doppio del tempo per raggiungere la massima altezza: $t_{tot} = 2t_m = 2v_2/g$.

4.9 Il moto nello spazio

Passiamo ora alla descrizione del moto nello spazio; cioè passiamo dal caso finora descritto del moto in una dimensione (il moto rettilineo) alla descrizione più generale del moto in



tre dimensioni spaziali.
La posizione di una particella nello spazio è individuata da un vettore posizione:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

I concetti di velocità media e velocità istantanea sono gli stessi: dati $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ e $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, definisco lo spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, avvenuto in un intervallo temporale $\Delta t = t_2 - t_1$, quindi:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}; \qquad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

In componenti cartesiane:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ ; \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\ ; \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Procediamo in modo analogo con l'accelerazione:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}; \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\ ; \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\ ; \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\ ; \quad a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\ ; \quad a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

Nota bene: è possibile produrre una accelerazione che varia soltanto la direzione della velocità $\vec{v}$, e non il modulo $|\vec{v}|$.

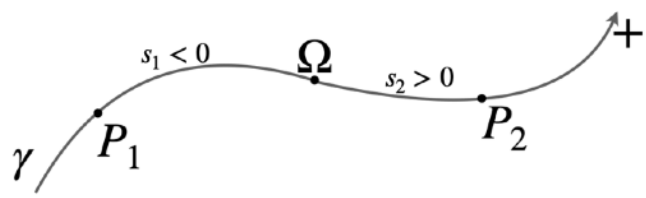
4.9.1 (Approfondimento) Rappresentazione del moto mediante la traiettoria

Una espressione del tipo

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

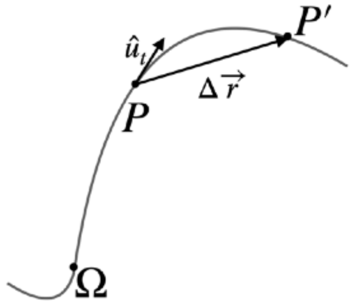
dal punto di vista geometrico rappresenta l'equazione parametrica di una curva nello spazio. Ovviamente il parametro ha in questo caso un significato fisico speciale!
Separando l'aspetto puramente geometrico da quello più propriamente cinematico giungiamo alla cosiddetta *rappresentazione intrinseca*.

Sia data una traiettoria (curva nello spazio) γ, orientata, dotata di un punto da utilizzare come origine (Ω) in modo da poter misurare la posizione dei punti appartenenti alla traiettoria (avendo definito una opportuna unità di misura della lunghezza lungo γ): ad ogni punto P possiamo associare un numero reale s, che ne individua la posizione: chiameremo s *ascissa curvilinea*. Allora potremo utilizzare per la $\vec{r}(t)$ una notazione modificata:



$$\vec{r}(t) \to \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases} \qquad \vec{r}(s) = \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

dove chiameremo la $\vec{r}(s)$ *equazione della traiettoria* e la $s(t)$ *legge oraria*.
Posso definire ora il versore tangente alla curva orientata: dati P e P', individuati dalle ascisse curvilinee s e $s' = s + \Delta s$, avremo



$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$$

e di conseguenza, in base alla definizione di velocità:

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t$$

Chiameremo $v_s = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ *velocità scalare*, a volte indicata anche con $\dot{s}$:

$$\overrightarrow{v} = v_s\hat{u}_t = \dot{s}\hat{u}_t$$

Continuiamo con l'accelerazione:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_s\hat{u}_t) = \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t + v_s\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}t}$$

Definiamo il primo termine *accelerazione tangenziale*

$$\overrightarrow{a}_t = \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\hat{u}_t = \ddot{s}\hat{u}_t$$

Vediamo il secondo termine:

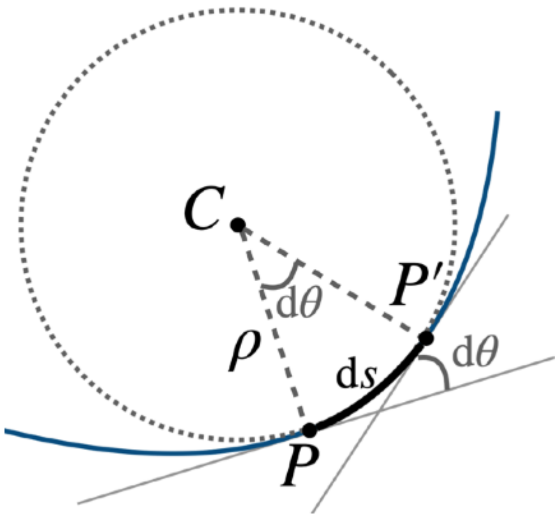
$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_s\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}s} = \dot{s}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}s}$$

Per la derivata rispetto ad s del versore tangente, ricordiamo da quando abbiamo esplicitato la derivata di un versore che

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\hat{u}_n$$

Il significato di questa espressione dovrebbe essere chiarito dalla figura: il tratto di curva in prossimità di un suo punto P è approssimato da un arco di circonferenza, parte del cosiddetto *cerchio osculatore* - il quale ha centro C nel cosiddetto *centro di curvatura* della traiettoria in quel punto, e raggio ρ, detto *raggio di curvatura* (mentre $1/\rho$ è detta *curvatura*).
Notiamo che $\mathrm{d}s = \rho\mathrm{d}\theta$ e quindi

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}s} = \frac{\hat{u}_n}{\rho}$$



Quindi completiamo la scomposizione
dell'accelerazione esprimendo il termine normale alla traiettoria:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_t + \overrightarrow{a}_n = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n$$

Il termine $\dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n = \dfrac{v_s^2}{\rho}\hat{u}_n$ è detto *accelerazione centripeta:* il termine è sempre positivo, quindi l'accelerazione centripeta è sempre diretta come $\hat{u}_n$ cioè verso il centro di curvatura (ovvero verso la concavità della curva). ***Ogni moto con traiettoria curva è accelerato!***

Possiamo procedere ora ad una formale classificazione dei moti partendo dalle espressioni di velocità e accelerazione in funzione di ascissa curvilinea e sue derivate:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \dot{s}\hat{u}_t \\ \overrightarrow{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n \end{cases}$$

1) ***Moti uniformi*** quando $v_s = \dot{s} = \text{costante} = \dot{s}_0$
2) ***Moti uniformemente vari*** quando $a_t = \ddot{s} = \text{costante} = \ddot{s}_0$
3) ***Moti rettilinei*** quando $\rho \to \infty$
4) ***Moti circolari*** quando $\rho = \text{costante}$