ESERCIZI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

12 Settembre 2022

- Dare una (breve) spiegazione di tutte le risposte date e dei passaggi svolti.
- Consegnare solo la bella copia
- Scrivere le soluzioni degli esercizi indicando *c*hiaramente la domanda a cui si sta rispondendo.
- Consegnare un foglio protocollo per ogni esercizio

Domanda teorica: dare la definizione di autospazio di un endomorfismo e mostrare che un autospazio é un sottospazio vettoriale.

1. Esercizi

1.1. **Esercizio 1.** Sia $k \in \mathbb{R}$ e consideriamo la seguente matrice:

$$A_k := \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -k \\ 3 & -k & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Scrivere le equazioni Cartesiane dell'applicazione lineare $F_{A_k} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice A_k;
(2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori di F_{A_k} e la loro molteplicità algebrica.
(3) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$, se F_{A_k} è diagonalizzabile;
(4) Per $k = 0$, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori.
(5) Per $k = 0$, esibire una matrice invertibile $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ tale che $B^{-1}A_0B$ sia una matrice diagonale;
(6) Per $k = 0$, calcolare la dimensione ed una base per $\mathrm{Im}(F_{A_0})$ e $\ker(F_{A_0})$.

1.2. **Soluzione Esercizio 1.** *Ad (1)* Per scrivere le equazioni Cartesiane dell'applicazione lineare associata ad A_k è sufficiente applicare un vettore generico (x, y, z) alla matrice A_k:

$$F_{A_k}(x, y, z) = (kx, 2x + y - kz, 3x - ky + z).$$

Ad (2) Calcoliamo il polinomio caratteristico associato a A_k:

$$p_k(\lambda) = \det \begin{bmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -k \\ 3 & -k & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Calcolando il determinante usando Lagrange rispetto alla prima riga, otteniamo:

$$\begin{aligned} p_k(\lambda) &= (k-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda)-k^2] \\ &= (k-\lambda)[(1-\lambda)^2-k^2] \\ &= (k-\lambda)(1-\lambda-k)(1-\lambda+k) \\ &= -(\lambda-k)(\lambda-(1-k))(\lambda-(1+k)). \end{aligned}$$

Questo mostra che le radici del polinomio caratteristico sono:

$$\lambda_1 = k, \lambda_2 = 1-k, \lambda_3 = 1+k.$$

Studiamo ora la molteplicità algebrica degli autovalori di F_{A_k} al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$k = 0$) In questo caso abbiamo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, da cui gli autovalori di F_{A_k} sono 0 e 1 con molteplicità algebrica 1 e 2, rispettivamente.

$k = 1/2$) In questo caso abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ e $\lambda_3 = 3/2$, da cui gli autovalori di F_{A_k} sono $1/2$ e $3/2$ con molteplicità algebrica 2 e 1, rispettivamente.

$k \neq 0, 1/2$) In questo caso abbiamo tre autovalori distinti di molteplicità algebrica 1.

Ad (3) Studiamo quando F_{A_k} è diagonalizzabile al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per farlo consideriamo i casi calcolati al punto precedente:

$k \neq 0, 1/2$) In questa situazione abbiamo visto che ci sono tre autovalori reali distinti di molteplicità algebrica uguale a 1. Ne segue che tutti gli autovalori hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica, quindi F_{A_k} è diagonalizzabile.

$k = 0$) In questa situazione, dobbiamo calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1. Infatti sappiamo già che $m_a(0) = m_g(0) = 1$. Calcoliamo quindi le equazioni Cartesiane dell'autospazio corrispondente all'autovalore 1:

$$\begin{aligned} V_1 &:= \ker(F_{A_0} - \mathrm{Id}) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x = 0, 2x = 0, 3x = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}. \end{aligned}$$

Poichè V_0 è definito in termine di una sola equazione Cartesiana, ne segue che V_0 ha dimensione $\dim(V_0) = 3 - 1 = 2$. Concludiamo così che

$$m_g(1) = \dim(V_0) = 2 = m_a(1),$$

ossia che F_{A_0} è diagonalizzabile.

$k = 1/2$) In maniera analoga al caso precedente, sappiamo già che

$$m_a(3/2) = m_g(3/2) = 1.$$

Quindi, dobbiamo calcolare la molteplicità algebrica dell'autovalore $1/2$. Calcoliamo quindi le equazioni Cartesiane dell'autospazio corrispondente all'autovalore $1/2$:

$$\begin{aligned} V_{1/2} &:= \ker(F_{A_{1/2}} - (1/2)\mathrm{Id}) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0, 3x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0\}. \end{aligned}$$

Poichè le due equazioni sono indipendenti, abbiamo quindi che

$$m_g(1/2) = \dim(V_{1/2}) = 3 - 2 = 1 < m_a(1/2) = 2.$$

Abbiamo così mostrato che l'applicazione lineare $F_{A_{1/2}}$ non è diagonalizzabile.

Ad (4) Per $k = 0$, abbiamo già calcolato le equazioni cartesiane di V_1:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}.$$

Da qui si può vedere direttamente che una base di V_1 è data da $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Non ci resta altro quindi che calcolare un autovettore corrispondente all'autovalore 0 per F_{A_0}. Cerchiamo quindi un vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $F_{A_0}(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + z = 0, \end{cases}$$

che ammette come soluzioni $\{(x, -2x, -3x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Quindi una base di V_0 è data da $(1, -2, -3)$ e una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di F_{A_0} è data da:

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -2, -3)\}.$$

Ad (5) Dobbiamo trovare una matrice invertibile $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ tale che $B^{-1}A_0B$ sia una matrice diagonale. Sappiamo che questo è possibile perchè abbiamo mostrato che F_{A_0} è diagonalizzabile. Poichè nel punto precedente abbiamo già calcolato una base di autovettore di $\mathbb{R}^3$ nel caso $k = 0$, possiamo definite la matrice B ponendo in ogni colonna un autovettore di quella base:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Per costruzione abbiamo $M^E_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = B$ concide con la matrice di cambio di base dalla base di autovettori $\mathcal{B}$ alla base canonica E. Quindi otteniamo che B soddisfa la richiesta, ossia

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_{A_0}) = B^{-1}A_0B$$

è diagonale.

Ad (6) Dobbiamo calcolare la dimensione e la base sia di $\ker(F_{A_0})$ che di $\mathrm{Im}(F_{A_0})$. Poichè F_{A_0} ammette autovalore 0, sappiamo che il kernel di F_{A_0} non è banale. Più precisamente, abbiamo che $\ker(F_{A_0}) = V_0$, dove V_0 è l'autospazio corrispondente all'autovalore 0. Abbiamo già visto in precedenza che questo spazio ha dimensione 1 ed ammette come base $\{(1, -2, -3)\}$. Quindi possiamo concludere che

$$\ker(F_{A_0}) = \langle (1, -2, -3) \rangle$$

ha dimensione 1. Per il teorema delle dimensioni, sappiamo quindi che

$$\dim(\mathrm{Im}(F_{A_0})) = 3 - 1 = 2.$$

Per calcolare una base di $\mathrm{Im}(F_{A_0})$ è sufficiente calcolare l'immagine dei due vettori della base $\mathcal{B}$ non appartenenti al kernel rispetto all'applicazione F_{A_0}. Abbiamo così:

$$F_{A_0}(0,1,0) = (0,1,0)$$

e

$$F_{A_0}(0,0,1) = (0,0,1).$$

Ne segue che $\mathrm{Im}(F_{A_0}) = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.

1.3. **Esercizio 2.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, consideriamo il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V_k := \langle (1,2,3), (k, k+1, k+2), (1+4k, 2+7k, 3+9k) \rangle.$$

(1) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1+4k, 1+7k, 1+9k)$ appartiene a V_k.
(2) Determinare una base e la dimensione di V_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(3) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ stabilire la dimensione ed una base del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W_\alpha := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2\alpha x - 10y = 0, (\alpha - 1)z = 0\}.$$

(4) Fissato $k = 1$, calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la dimensione ed una base per $V_1 \cap W_\alpha$.
(5) Fissato $k = 1$, calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la dimensione ed una base per $V_1 + W_\alpha$.
(6) Fissato $k = 1$, stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, V_1 e W sono in somma diretta.

1.4. **Soluzione Esercizio 2.** Per semplicità svolgiamo prima il punto (*2*) e poi il punto (*1*).

Ad (2) Per calcolare la dimensione di V_k e una sua base al variare di $k \in \mathbb{R}$, consideriamo la tecnica del rango per stabilire quali vettori sono linearmente indipendenti. Prendiamo quindi la seguente matrice:

$$A_k := \begin{bmatrix} 1 & k & 1+4k \\ 2 & k+1 & 2+7k \\ 3 & k+2 & 3+9k \end{bmatrix}$$

e riduciamola a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1+4k \\ 2 & k+1 & 2+7k \\ 3 & k+2 & 3+9k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & k & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k \\ 0 & -2k+2 & -3k \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & k & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}.$$

A questo punto vediamo che abbiamo tre casi:

$k = 1$) In questo caso il rango di A_1 è uguale a 2 e quindi $\dim(V_1) = 2$. Prendendo i vettori in corrispondenza dei pivots, si vede che una base di V_1 è data da:

$$\mathcal{B}_{V_1} = \{(1,2,3), (5,9,12)\}.$$

$k=0$) Anche in questo caso il rango di A_0 è uguale a 2 e quindi $\dim(V_0) = 2$. Prendendo i vettori in corrispondenza dei pivots, si vede che una base di V_1 è data da:

$$\mathcal{B}_{V_0} = \{(1,2,3),(0,1,2)\}.$$

$k \neq 0,1$) In questa situazione il rango di A_k è massimo e quindi $\dim(V_k) = 3$. Una base di V_k è quindi data dai tre vettori di partenza:

$$\mathcal{B}_{V_k} = \{(1,2,3),(k,k+1,k+2),(1+4k,2+7k,3+9k)\}.$$

Ad (1) Per stabilire quando il vettore $(1+4k,1+7k,1+9k)$ appartiene allo spazio V_k, utilizziamo il punto (*2*). Abbiamo visto che per $k \neq 0,1$ lo spazio V_k ha dimensione 3. Poichè è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ concludiamo che $V_k = \mathbb{R}^3$. Ne segue che il vettore $(1+4k,1+7k,1+9k)$ appartiene a V_k per ogni $k \neq 0,1$. Ci rimangono due casi da trattare:

$k=0$) Dobbiamo verificare se il vettore $(1,1,1) \in \langle (1,2,3),(0,1,2)\rangle$. Poichè $(1,1,1) = (1,2,3)-(0,1,2)$, si ha che la precedente condizione è verificata.

$k=1$) Dobbiamo verificare se il vettore $(5,8,10) \in \langle (1,2,3),(5,9,12)\rangle$. Per farlo, dobbiamo chiederci se il seguente sistema ammetta soluzioni:

$$\begin{cases} s+5t = 5 \\ 2s+9t = 8 \\ 3s+12t = 10. \end{cases}$$

Consideriamo la matrice completa associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 12 & 10 \end{bmatrix}.$$

Riducendola a scala otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che la matrice completa ed incompleta hanno rango differente (rispettivamente 3 e 2) e quindi il sistema non ammette soluzioni. Concludiamo così che il vettore $(1,1,1)$ non appartiene a V_0.

Ad (3) Per calcolare la dimensione e una base di W_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ dobbiamo stabilire il numero di equazioni Cartesiane indipendenti in W_α. Abbiamo due casi:

$\alpha = 1$) In questa situazione, W_1 è definito da una sola equazione Cartesiana e quindi

$$\dim(W_1) = 3-1 = 2.$$

Una base si può calcolare come segue:

$$W_1 = \{(5y,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \langle (5,1,0),(0,0,1)\rangle.$$

Dato che W_1 ha dimensione 2, i due generatori appena trovati costituiscono una base per W_1:

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{(5,1,0),(0,0,1)\}.$$

$\alpha \neq 1$) In questa situazione, W_α è definito da due equazioni Cartesiane indipendenti. Quindi abbiamo:

$$\dim(W_\alpha) = 3 - 2 = 1.$$

Ne segue che una base di W_α è data da un vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfi:

$$\begin{cases} 2\alpha x - 10y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ossia ad esempio

$$\mathcal{B}_{W_\alpha} = \{(1, \frac{1}{5}\alpha, 0)\}.$$

Ad (4) Consideriamo $k = 1$. In questa situazione abbiamo già visto (*Ad (2)*) che V_1 ha dimensione 2 ed ha una base data da:

$$\mathcal{B}_{V_1} = \{(1, 2, 3), (5, 9, 12)\}.$$

Abbiamo adesso due casi:

$\alpha = 1$) In questa situazione W_1 ha dimensione 2 ed è definito dalla seguente equazione Cartesiana:

$$2x - 10y = 0.$$

Per calcolare l'intersezione prendiamo un vettore generico di V_1:

$$(s + 5t, 2s + 9t, 3s + 12t)$$

al variare di $s, t \in \mathbb{R}$, e sostituiamolo all'equazione Cartesiana di W_1. Otteniamo così:

$$0 = 2(s + 5t) - 10(2s + 9t) = 2s + 10t - 20s - 90t = -18s - 80t.$$

Isolando s otteniamo:

$$s = -\frac{40}{9}t.$$

Quindi un'equazione parametrica di $V_1 \cap W_1$ è data da:

$$V_1 \cap W_1 := \{(\frac{5}{9}t, \frac{t}{9}, -\frac{12}{9}t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(5t, t, -12t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Abbiamo così mostrato che $\dim(V_1 \cap W_1) = 1$ e che una sua base è data da:

$$\mathcal{B}_{V_1 \cap W_1} = \{(5, 1, -12)\}.$$

$\alpha \neq 1$) In questa situazione W_α ha dimensione 1 ed ammette come equazioni Cartesiane:

$$\begin{cases} 2\alpha x - 10y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi dobbiamo chiederci quando il vettore generico di V_1:

$$(s + 5t, 2s + 9t, 3s + 12t)$$

soddisfa queste equazioni. Per prima cosa imponendo $z = 0$ si deduce che

$$s = -4t.$$

Quindi dobbiamo vedere quando si ha che

$$0 = 2\alpha(s + 5t) - 10(2s + 9t) = 2\alpha t - 10t = (2\alpha - 10)t.$$

Abbiamo così due posibilità. Se $\alpha \neq 5$, $t = s = 0$ e quindi l'intersezione è banale. Altrimenti per $\alpha = 5$ si ha:

$$W_5 \cap V_1 = \{(t, t, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0) \rangle,$$

quindi $W_5 \cap V_1$ ha dimensione 1 ed una sua base è

$$\mathcal{B}_{W_5 \cap V_1} = \{(1, 1, 0)\}.$$

Ad (6) Ricordiamo che V_1 è in somma diretta con W_α se e soltanto se $V_1 \cap W_\alpha = \{0\}$. Il punto precedente mostra quindi che si ha $V_1 \oplus W_\alpha$ per ogni $\alpha \neq 1, 5$.

Ad (5) Dobbiamo ora studiare la dimensione (e trovare una base) per $V_1 + W_\alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Per il punto (*Ad (4)*) sappiamo già calcolare le dimensioni delle somme:

$\alpha \neq 1, 5)$ Per la formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(V_1 + W_\alpha) = \dim(V_1) + \dim(W_\alpha) - \dim(V_1 \cap W_\alpha) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

Abbiamo quindi che $V_1 + W_\alpha$ coincide con $\mathbb{R}^3$ e una base è semplicemente quella canonica.

$\alpha = 5)$ Per la formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(V_1 + W_5) = \dim(V_1) + \dim(W_5) - \dim(V_1 \cap W_5) = 2 + 1 - 1 = 2.$$

In altre parole, lo spazio W_5 è contenuto in V_1. Quindi possiamo prendere come base di $V_1 + W_5$ quella di V_1 calcolata in precedenza:

$$\mathcal{B}_{V_1 + W_5} = \{(1, 2, 3), (5, 9, 12)\}.$$

$\alpha = 1)$ Per la formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(V_1 + W_1) = \dim(V_1) + \dim(W_1) - \dim(V_1 \cap W_1) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

In questo caso otteniamo nuovamente che $V_1 + W_1$ coincide con $\mathbb{R}^3$ e quindi che possiamo scegliere la base canonica di $\mathbb{R}^3$ come sua base.