

Ordinamento topologico

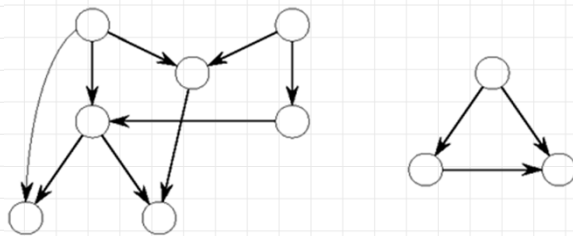
Vittorio Maniezzo - Università di Bologna

1/7

1

Grafi diretti aciclici

Un **grafo diretto e aciclico** (Directed Acyclic Graph, **DAG**) è un grafo diretto che non contiene cicli diretti



Spesso un DAG è utilizzato per rappresentare **precedenze** fra eventi, specificando cioè che un evento a deve accadere prima di b

Un esempio può essere la temporizzazione delle attività di un progetto

L'**induzione di un ordine totale** può essere fatta per mezzo dell'**Ordinamento topologico**

Vittorio Maniezzo - Università di Bologna

2

2

Ordinamento topologico

Ordinamento di un DAG

L'ordinamento topologico di un DAG è **un ordinamento lineare di tutti i suoi vertici**, tale che per ogni arco (u,v) nel DAG, u appare prima di v nell'ordinamento.

L'algoritmo seguente ordina topologicamente un DAG

Topological-Sort(G)

- chiama DFS(G) per calcolare i tempi di fine visita $f[v]$ per ogni vertice v .
- appena la visita di un vertice è finita, inseriscilo in testa ad una lista concatenata.
- return la lista concatenata dei vertici.

La lista concatenata contiene l'ordinamento

Vittorio Maniezzo - Università di Bologna

3

3

Teorema DAG

Un grafo diretto G è aciclico **sse** una ricerca DFS su G non produce archi all'indietro

Dim.

- si supponga che **ci sia un arco all'indietro** (u,v) ; v è un antenato di u nella foresta DFS. Quindi, c'è un cammino da v a u in G e (u,v) chiude il ciclo
- si supponga che **G contenga un ciclo** c ; sia v il primo vertice in c ad essere scoperto e sia u un predecessore di v in c .
 - Al tempo $d(v)$ il ciclo da v a u è bianco
 - Bisogna visitare tutti i nodi raggiungibili su questo cammino prima di ritornare dalla DFS-Visit(v), quindi u diventa un discendente di v
 - Quindi (u,v) è un arco all'indietro

Vittorio Maniezzo - Università di Bologna

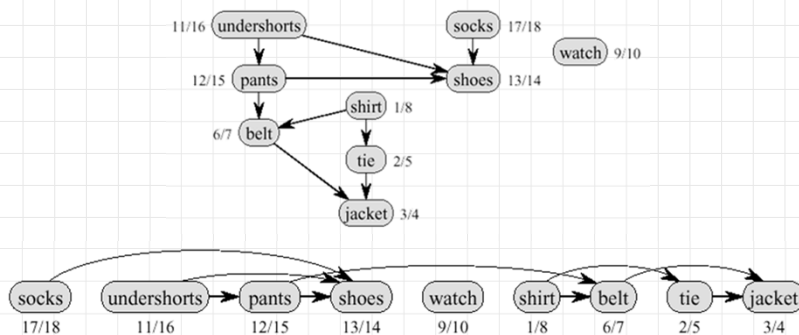
4

4

Ordinamento topologico, esempio

Relazioni di precedenza: un arco da x a y indica che l'operazione x deve essere svolta prima di y

Si può attivare una operazione solo quando tutte le sue precedenze sono completate



Vittorio Maniezzo - Università di Bologna

5

5

Ordinamento topologico

Tempo

- ricerca DFS: $O(V+E)$
- inserimento di ciascuno dei $|V|$ vertici in testa alla lista : $O(1)$ per inserimento

Quindi il tempo totale è $O(V+E)$

Vittorio Maniezzo - Università di Bologna

6

6

Ordinamento topologico, correttezza

Tesi: dato un DAG, un arco $(u,v) \in E$ implica che $f[v] < f[u]$

Dimostrazione:

Quando (u,v) viene percorso, u è grigio. 3 casi:

- **v grigio**
 $\Rightarrow (u,v)$ è un arco all'indietro (ciclo, contraddizione)
- **v bianco**
 $\Rightarrow v$ diventa un discendente di u
 $\Rightarrow v$ sarà finito prima di u
 $\Rightarrow f[v] < f[u]$
- **v nero**
 $\Rightarrow v$ è già finito
 $\Rightarrow f[v] < f[u]$

La definizione di ordinamento topologico è soddisfatta