

## AA 2023-2024 - Fisica - CdL Ingegneria e Scienze Informatiche

### Luigi Guiducci - Esercitazioni

1) Devo costruire un condensatore piano con lastre quadrate distanti 10 mm, con il vuoto in mezzo. Se mi occorre una capacità di 1.0 F, quanto deve essere lungo il lato delle lastre?

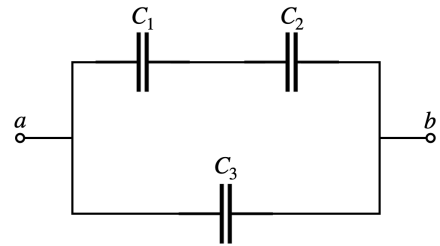
$$[ l \simeq 34 \text{ km} ]$$

2) Se un condensatore da  $2.4 \mu\text{F}$  è collegato in parallelo con un condensatore da  $3.1 \mu\text{F}$  e il sistema viene caricato con una batteria da 6.1 V, si trovi: la capacità del sistema; la differenza di potenziale ai capi di ciascun condensatore; la carica di ciascun condensatore.

$$[ C_{tot} \simeq 5.5 \mu\text{F}; V = 6.1 \text{ V}; Q_{2.4} \simeq 15 \mu\text{C}; Q_{3.1} \simeq 19 \mu\text{C} ]$$

3) Si veda il circuito in figura, con  $C_1 = 4.0 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6.0 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 5.0 \mu\text{F}$ . Qual è la capacità equivalente del sistema? Se  $V_b - V_a = 65 \text{ V}$ , qual è la differenza di potenziale tra le armature di ciascun condensatore e qual è la carica di ciascuno?

$$[ C_{eq} \simeq 7.4 \mu\text{F}; V_1 \simeq 39 \text{ V}; V_2 \simeq 26 \text{ V}; V_3 \simeq 65 \text{ V}; \\ Q_1 = Q_2 \simeq 160 \mu\text{C}; Q_3 \simeq 325 \mu\text{C} ]$$



4) Quanta energia contiene un condensatore da  $1.0 \mu\text{F}$  caricato con una batteria da 10 V? E con una batteria da 20 V?

$$[ U(10 \text{ V}) \simeq 50 \mu\text{J}; U(20 \text{ V}) \simeq 200 \mu\text{J} ]$$

5) Supponiamo che il campo elettrico nell'atmosfera terrestre abbia un'intensità uniforme di 100 V/m nella regione compresa tra la superficie e la ionosfera. Si trovi la densità di energia elettrica nell'atmosfera; poi, sapendo che il raggio della terra è 6400 km e l'altezza della ionosfera è circa 100 km, si stimi l'energia elettrica contenuta nell'atmosfera terrestre.

$$[ u \simeq 44 \text{ nJ/m}^3; E \simeq 2.3 \times 10^{12} \text{ J} ]$$

6) Per misurare la costante dielettrica di un materiale procedo nel modo seguente: costruisco un condensatore piano con armature di area  $0.087 \text{ m}^2$  e distanti 1.8 mm, e ne misuro la capacità quando il materiale riempie completamente il volume tra le piastre, trovando 2.4 nF. Quanto vale la costante dielettrica relativa del materiale?

$$[ \epsilon_r \simeq 5.6 ]$$

## SOLUZIONI

1) Devo costruire un condensatore piano con lastre quadrate distanti 10 mm, con il vuoto in mezzo. Se mi occorre una capacità di 1.0 F, quanto deve essere lungo il lato delle lastre?

$$[ l \simeq 34 \text{ km} ]$$

Prima di tutto, mi sorprende la domanda: una capacità di 1 F è enorme! Vediamo. La capacità di un condensatore piano si esprime come

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

quindi

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0}$$

e dunque il lato

$$l = \sqrt{S} = \sqrt{\frac{Cd}{\epsilon_0}} \simeq 34 \text{ km}$$

2) Se un condensatore da  $2.4 \mu\text{F}$  è collegato in parallelo con un condensatore da  $3.1 \mu\text{F}$  e il sistema viene caricato con una batteria da 6.1 V, si trovi: la capacità del sistema; la differenza di potenziale ai capi di ciascun condensatore; la carica di ciascun condensatore.

$$[ C_{tot} \simeq 5.5 \mu\text{F}; V = 6.1 \text{ V}; Q_{2.4} \simeq 15 \mu\text{C}; Q_{3.1} \simeq 19 \mu\text{C} ]$$

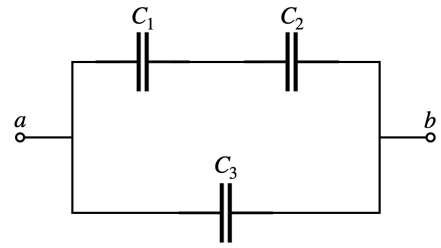
La capacità equivalente di due condensatori in parallelo è la somma delle capacità, dunque

$$C_{tot} = (2.4 + 3.1) \mu\text{F} = 5.5 \mu\text{F}$$

Sempre per la configurazione in parallelo, la differenza di potenziale è uguale ai capi di ciascun condensatore è la stessa ed è pari a quella esterna, dunque 6.1 V. La carica presente su ciascun condensatore si ottiene dalla definizione stessa di capacità,

$$C = \frac{Q}{V} \implies Q_{2.4} = (2.4 \mu\text{F})(6.1 \text{ V}) \simeq 15 \mu\text{C}; Q_{3.1} = (3.1 \mu\text{F})(6.1 \text{ V}) \simeq 19 \mu\text{C}$$

3) Si veda il circuito in figura, con  $C_1 = 4.0 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6.0 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 5.0 \mu\text{F}$ . Qual è la capacità equivalente del sistema? Se  $V_b - V_a = 65 \text{ V}$ , qual è la differenza di potenziale tra le armature di ciascun condensatore e qual è la carica di ciascuno?



$$[ C_{eq} \simeq 7.4 \mu\text{F}; V_1 \simeq 39 \text{ V}; V_2 \simeq 26 \text{ V}; V_3 \simeq 65 \text{ V}; \\ Q_1 = Q_2 \simeq 160 \mu\text{C}; Q_3 \simeq 325 \mu\text{C} ]$$

Tra  $a$  e  $b$  abbiamo  $C_3$  in parallelo con la serie di  $C_1$  e  $C_2$ . Quest'ultima

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

e quindi

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 \simeq 7.4 \mu\text{F}$$

La differenza di potenziale ai capi di  $C_3$  è pari a  $V_b - V_a$ ; e quindi la sua carica

$$V_3 = 65 \text{ V}; \quad Q_3 = C_3 V_3 \simeq 325 \mu\text{C}$$

La configurazione serie di  $C_1$  e  $C_2$  avrà una carica

$$Q_{12} = C_{eq} V_3 \simeq 160 \mu\text{C}$$

e questa è la carica su ciascuno dei due condensatori in serie (serie  $\implies$  stessa carica)

$$Q_1 = Q_2 \simeq 160 \mu\text{C}$$

La tensione presente su ciascuno si ottiene subito

$$V_1 = Q_1 / C_1 \simeq 39 \text{ V}; \quad V_2 = Q_2 / C_2 \simeq 26 \text{ V}$$

4) Quanta energia contiene un condensatore da  $1.0 \mu\text{F}$  caricato con una batteria da  $10 \text{ V}$ ? E con una batteria da  $20 \text{ V}$ ?

$$[ U(10 \text{ V}) \simeq 50 \mu\text{J}; U(20 \text{ V}) \simeq 200 \mu\text{J} ]$$

L'energia contenuta in un condensatore si può scrivere come

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

quindi, nei due casi, abbiamo

$$U(10 \text{ V}) \simeq 50 \mu\text{J} \quad U(20 \text{ V}) \simeq 200 \mu\text{J}$$

5) Supponiamo che il campo elettrico nell'atmosfera terrestre abbia un'intensità uniforme di 100 V/m nella regione compresa tra la superficie e la ionosfera. Si trovi la densità di energia elettrica nell'atmosfera; poi, sapendo che il raggio della terra è 6400 km e l'altezza della ionosfera è circa 100 km, si stimi l'energia elettrica contenuta nell'atmosfera terrestre.

$$[ u \simeq 44 \text{ nJ/m}^3; E \simeq 2.3 \times 10^{12} \text{ J} ]$$

La densità di energia si esprime come

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \simeq 44 \text{ nJ/m}^3$$

Il volume del guscio sferico corrispondente all'atmosfera sarà

$$V_{atm} = \frac{4}{3} \pi ((6500 \text{ km})^3 - (6400 \text{ km})^3) \simeq 5.22 \times 10^{10} \text{ km}^3 \simeq 5.22 \times 10^{19} \text{ m}^3$$

e quindi l'energia totale contenuta

$$E = u V_{atm} \simeq 2.3 \times 10^{12} \text{ J}$$

La capacità equivalente sarebbe quindi

$$C = \frac{2E}{V^2} = \frac{2 \times 2.3 \times 10^{12} \text{ J}}{((100 \text{ V/m})(100 \text{ km}))^2} \simeq 46 \text{ mF}$$

6) Per misurare la costante dielettrica di un materiale procedo nel modo seguente: costruisco un condensatore piano con armature di area 0.087 m<sup>2</sup> e distanti 1.8 mm, e ne misuro la capacità quando il materiale riempie completamente il volume tra le piastre, trovando 2.4 nF. Quanto vale la costante dielettrica relativa del materiale?

$$[ \epsilon_r \simeq 5.6 ]$$

La capacità di un condensatore piano in presenza di un dielettrico si scrive

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

quindi

$$\epsilon_r = \frac{Cd}{\epsilon_0 A} \simeq 5.6$$