Norme vettoriali e matriciali

I dati di un problema in generale non sono solo scalari appartenenti ad R, ma possono essere vettori di R^n oppure matrici di $R^{m\times n}$. Diventa necessario, quindi, introdurre uno strumento matematico che estenda l'errore relativo, definito per scalari in R, al caso più generale di vettori e di matrici.

Introduciamo perciò dapprima il concetto di **norma vettoriale** e successivamente di **norma matriciale**.

La norma di un vettore è una funzione che associa ad ogni vettore una lunghezza non negativa. In altre parole, è un modo per quantificare la "grandezza" di un vettore.

Definizione di norma di un vettore

Ogni applicazione $\|\cdot\|: R^n a\ R_+ \cup \{0\}$ *si chiama* <u>*norma su*</u> R^n, *se gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|x\| > 0\ \ \forall\ x \in R^n$ *e* $\|x\| = 0$ *se e solo se x=0*

La norma di un vettore è sempre non negativa, è nulla se e solo se il vettore è nullo.

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\ \ \forall\ \lambda \in R, \forall\ x \in R^n$

La norma di un vettore scalato è uguale al valore assoluto dello scalare per la norma del vettore.

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \ \forall\ x, y \in R^n$

La norma di un vettore somma è minore o uguale alla somma delle norme dei due vettori.

Esempi di norme di vettori sono:

1) **Norma infinito**

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

2) **Norma 1**

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3) Norma 2

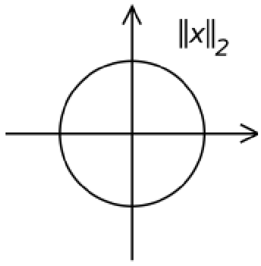
$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Essendo il prodotto scalare canonico tra due vettori di R^n definito come la somma dei prodotti delle loro componenti, la norma due di un vettore può essere definita come la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore,

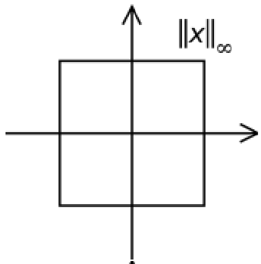
cioè $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}$

Norme vettoriali a confronto

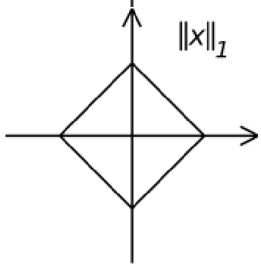
La forma della sfera unitaria di $\mathbb{R}^2$ è interamente dipendente dalla norma scelta.



- $S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \}$



- $S_\infty = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1 \}$



- $S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1 \}$

S_2, S_∞, S_1 sono note come le sfere unitarie di $\mathbb{R}^2$ associate rispettivamente alla norma 2, norma infinito, norma 1.

Osservazione:

Per una **matrice ortogonale** A (ossia t.c. $A^T A = AA^T = I$, cioè tale che **la sua inversa coincida con la sua trasposta**) risulta:

$$\| Ax\|_2 = \sqrt{(Ax)^T (Ax)} = \sqrt{x^T (A^T A)x} = \sqrt{x^T x} = \| x \|_2 \;\; \forall x \in R^n$$

Si dimostra facilmente che le norme definite soddisfano le proprietà 1), 2), 3).

Le norme definite, nonostante producano risultati diversi, hanno la proprietà di produrre risultati "confrontabili".

Questo è garantito dal seguente Teorema.

Teorema: *Per ogni coppia di norme di vettori, ad esempio* $\|x\|$ *e* $\|x\|_*$*, esistono costanti positive m ed M tali che ogni* $x \in R^n$

$$m \cdot \|x\|_* \le \|x\| \le M \cdot \|x\|_*$$

Si dice che le norme $\|x\|$ *e* $\|x\|_*$ *sono equivalenti.*

Quindi tutte le norme su R^n sono equivalenti.

Si può fare vedere che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$$

da cui si ottiene:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

L'equivalenza delle norme è importante perché garantisce che i risultati ottenuti con una norma siano validi anche per le altre norme equivalenti

Esempio

Calcolare la norma $\infty, 1\ e\ 2$ del seguente vettore e verificare che vale la relazione

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

- $\|x\|_\infty = \max(1, |-4|, 2) = \max(1,4,2) = 4$
- $\|x\|_1 = 1 + |-4| + 2 = 7$
- $\|x\|_2 = \sqrt{1 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{21} \cong 4.58257$

$$4 \le 4.58257 \le 7$$

Richiami:

▶ $A \in$ M(n×n) è detta **simmetrica** se $A^T = A$;

Esempio:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \quad \text{è} \quad \textit{simmetrica}$$

▶ λ ∈ C è un autovalore di A ∈ M(n×n) se esiste un vettore x ∈ $R^n \setminus \{0\}$. (diverso dal vettore nullo) per cui

$$Ax = \lambda x,$$

o equivalentemente se det(A−λI) = 0;

▶ A ∈ M(n×n) è detta **semidefinita positiva** se $x^T Ax \geq 0$, ∀x ∈ $R^n \setminus \{0\}$.

▶ A ∈ M(n×n) è detta **definita positiva** se $x^T Ax > 0$, ∀x ∈ $R^n \setminus \{0\}$.

In particolare,

- nel caso di A **simmetrica e semidefinita positiva** tutti gli autovalori di A sono **reali non-negativi.**
- nel caso di **A simmetrica e definita positiva** tutti gli autovalori di A **sono reali e positivi.**

Norme di matrici

Definizione: *Sia $M(m \times n)$ lo spazio vettoriale delle matrici m×n su R, si dice che l'applicazione $\|A\|$ da $M(m \times n)$ a $R_+ \cup \{0\}$ è norma della matrice A se gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|A\| > 0$ *per tutte* $A \neq 0$ *e* $\|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow A = 0$
2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \quad \forall \quad A \in M(m \times n), \ \forall \quad \alpha \in R$
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall \quad A, B \in M(m \times n)$
4) $\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\| \quad \forall \quad \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}), \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{n})$

Norme compatibili:

*Si dice che **la norma di una matrice $\|\ \|$ è compatibile con una data norma di vettori $\|\ \|_p$** se $\forall \quad A \in M(n \times n)$ e $\forall \quad x \in R^n$ si ha:*

$$\|Ax\|_p \leq \|A\| \cdot \|x\|_p$$

Poiché si conoscono le norme di vettori è interessante definire norme di matrici indotte dalle corrispondenti norme di vettori.

Un modo per definire una norma indotta è il seguente:

Sia $A \in M(m \times n)$ e $x \in R^n, x \neq 0$, si consideri ad esempio $\|x\|_p$. Poiché $Ax \in R^m$, si consideri poi la norma vettoriale $\|Ax\|_p$. Si definisce norma indotta (o norma naturale) $\|A\|_p$, *la più piccola costante C per cui vale la maggiorazione*

$$\|Ax\|_p \leq C \cdot \|x\|_p \qquad (1)$$

da cui

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p$$

Poiché $\|A\|_p$ è la più piccola delle costanti per cui vale la maggiorazione (1), significa che:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

Norme indotte dalle norme più comuni su R^n

1**)** **p=1** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\|A\|_1 = \max_{j=1,..n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|}$ si considera la norma 1 di tutte le colonne e si prende il valore massimo

2) **p=∞** $\|x\|_1 = \max_j |x_j|$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\|A\|_\infty = \max_{i=1,..m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$ si considera la norma 1 di tutte le righe e si prende il valore massimo.

2) **p=2**

$\boldsymbol{\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}}$ dove $\boldsymbol{\rho}$ è il raggio spettrale, cioè l'autovalore di modulo massimo della matrice $\boldsymbol{A^T A}$.

N.B. $A^T A$ è simmetrica e semidefinita positiva.

E' simmetrica perché $(A^T A)^T = A^T A$

$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = y^T y = \sum_i y_i^2 \geq 0$

Per una matrice simmetrica e semidefinita positiva gli autovalori sono reali e non negativi, quindi $\rho(A^T A)$ è il massimo autovalore di $A^T A$ ed è sempre non negativo.

N.B. Se $A \in R^{n \times n}$ è **simmetrica** allora $\boldsymbol{\|A\|_1 = \|A\|_\infty}$

Anche per le matrici vale il concetto di norme equivalenti.

Teorema: *Per ogni coppia di norme di matrici, ad esempio* $\|A\|$ *e* $\|A\|_*$ *esistono sempre due costanti m ed M tali che* $\forall \quad A \in M(nxn)$ *si ha:*

$$m\|A\|_* \leq \|A\| \leq M\|A\|_*$$

Si dice che $\|A\|$ *e* $\|A\|_*$ *sono norme equivalenti.*

Esempio:

Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty \quad .$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$$

Poiché il calcolo di $\| A \|_2$ *risulta più oneroso di quello di* $\| A \|_\infty$ *o di* $\| A \|_1$*, le precedenti relazioni possono essere utili nel caso sia sufficiente disporre solo di una stima di* $\| A \|_2$.

1. **Esempi relativi al calcolo delle norme matriciali indotte dalle norme vettoriali ∞, 1 e 2.**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 9/2 \end{bmatrix}$$

- **Calcolo di $|| A ||_\infty$**

$$|| A ||_\infty = \max\left\{4 + |-1| + 6, 2 + 3 + |-3|, 1 + |-2| + \frac{9}{2}\right\}$$
$$= \max\left\{11, 8, \frac{15}{2}\right\} = 11$$

- **Calcolo di $|| A ||_1$**

$$|| A ||_1 = \max\left\{4 + 2 + 1, |-1| + 3 + |-2|, 6 + |-3| + \frac{9}{2}\right\}$$
$$= \max\left\{7, 6, \frac{27}{2}\right\} = \frac{27}{2} = 13.5$$

- **Calcolo di $|| A ||_2$**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 9/2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 9/2 \end{bmatrix}$$

$$M = A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 45/2 \\ 0 & 14 & -24 \\ 45/2 & -24 & 261/4 \end{bmatrix}$$

- **Calcoliamo gli autovalori di M**

$$det(M - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 21 - \lambda & 0 & \frac{45}{2} \\ 0 & 14 - \lambda & -24 \\ \frac{45}{2} & -24 & \frac{261}{4} - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + \frac{401}{4}\lambda^2 - \frac{2991}{2}\lambda$$

$$= -\frac{1}{4}\,\lambda(4\,\lambda^2 - 401\,\lambda + 5982)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono

$\lambda = 0,\ \ \lambda_1 = \frac{401+\sqrt{65089}}{8}$**=82.0157,** $\lambda_2 = \frac{401-\sqrt{65089}}{8}$**=18.2343**

Da cui si ottiene:

$$\rho(M) = max\,\{0, 18.2343, 82.0157\} = 82.0157$$

E pertanto $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(M)} = \sqrt{82.0157} = 9.0563$