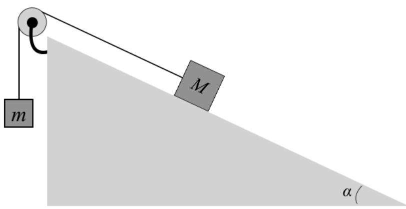
Università degli Studi di Bologna - Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche
Fisica - Appello del 11 Gennaio 2024 - Prof. L. Guiducci

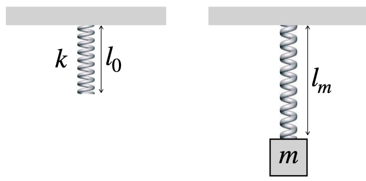
Esercizi

Esercizio 1 Un blocco di massa M=28.2 kg è appoggiato su un piano inclinato di α=30.0° rispetto all'orizzontale ed è collegato tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile che sale parallela al piano fino ad una carrucola, di massa trascurabile e priva di attrito; oltrepassata la carrucola, la fune scende verticalmente ed è agganciata ad un blocco di massa m=3.45 kg. Calcolare



1) il minimo coefficiente di attrito statico μ_{min} tra il piano inclinato e il blocco di massa M necessario affinché i blocchi restino in quiete, e la tensione T_1 della fune;
2) l'accelerazione dei blocchi a nel caso in cui tra il piano inclinato e il blocco di massa M non ci sia alcun attrito, e la tensione T_2 della fune in questo caso;
3) il lavoro complessivo $\mathscr{L}_{peso}$ fatto dalla forza peso nel caso 2) se il sistema viene lasciato libero di muoversi per un tempo t'=2.33 s.

Esercizio 2 Una molla di costante elastica $k = 12.3$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 25.0$ cm è appesa verticalmente al soffitto, e le viene appeso un corpo di massa $m = 250$ g. Si trovi:



1) la lunghezza l_m di equilibrio della molla con il corpo appeso.

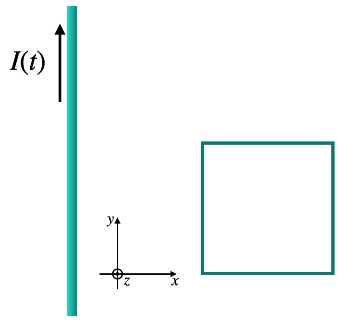
Viene prodotto un moto di oscillazione, ponendo il corpo in modo che la molla abbia lunghezza pari alla lunghezza a riposo per poi lasciarlo andare da fermo. Si trovi:

2) il periodo T delle oscillazioni del sistema;
3) la velocità v_m del corpo quando passa per la prima volta a distanza l_m dal soffitto.

Esercizio 3 Due piccole sfere conduttrici cariche di uguale raggio $R = 1.50$ cm sono poste con i centri a distanza $d = 22.0$ cm e si respingono con una forza di modulo $F = 3.50 \cdot 10^{-4}$ N (situazione iniziale). Le due sferette sono poste a contatto e poi rimesse nella posizione precedente, e si osserva che si respingono con una forza doppia (situazione finale). Si assumano positive le cariche delle sferette, calcolare:

1) il valore V_f del potenziale elettrostatico nel punto medio tra le due sfere nella situazione finale;
2) le due cariche iniziali Q_1 e Q_2 di ciascuna sfera;
3) il valore del campo elettrico iniziale E_i nel punto medio tra le due sfere, e il suo valore finale E_f.

Esercizio 4 Una spira quadrata di lato $a = 10$ cm e resistenza complessiva $R = 1.60$ mΩ è posta con due suoi lati paralleli ad un sottile filo rettilineo e molto lungo, posto sullo stesso piano della spira ad una distanza $d = a$ dal lato della spira più vicino. Si veda la figura. Nel filo scorre una corrente dipendente dal tempo secondo la funzione $I(t) = I_0 + Ct^2$, con $I_0 = 10.0$ A e $C = 5.00$ A/s^2, e verso come indicato in figura. Si calcoli:



1) il modulo B_0 del campo magnetico presente in corrispondenza del lato della spira più vicino al filo rettilineo all'istante $t_0 = 1.00$ s, e la sua direzione e verso rispetto al sistema di riferimento indicato in figura;
2) il flusso del campo magnetico Φ_1 attraverso la spira all'istante $t_1 = 12.0$ s (*);
3) la corrente I_2 indotta nella spira nell'istante $t_2 = 25.0$ s, specificando se tale corrente scorra in senso orario o antiorario (sempre in riferimento alla figura data).

(*) si noti che $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Università degli Studi di Bologna - Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche
Fisica - Appello del 11 Gennaio 2024 - Prof. L. Guiducci

Cognome: ___________________________ Nome:_______________________ Matr.:___________________

Domande aperte. Si dia risposta, su foglio protocollo (1 facciata massimo), ad una tra le seguenti domande:

1) Si discutano le leggi di Keplero, anche in connessione con la legge di gravitazione universale.

2) Si illustri la legge di Ampere per il campo magnetico e si faccia almeno un esempio dell'utilizzo di tale legge per il calcolo del campo data una distribuzione di corrente elettrica.

3) Si fornisca una trattazione del moto circolare mostrando la connessione tra coordinate cartesiane e coordinate angolari, e come calcolare quantità rilevanti (ad es. l'accelerazione centripeta) nel caso di moto circolare uniforme.

Quesiti a scelta multipla:

1) Due satelliti A e B orbitano intorno alla Terra su orbite circolari che hanno lo stesso raggio, ma la massa di A è il doppio della massa di B. Quale affermazione è vera?
(a) la velocità di A è il doppio della velocità di B
(b) la velocità di A è uguale alla velocità di B
(c) la velocità di B è il doppio della velocità di A
(d) il rapporto delle velocità dipende da altre informazioni

2) Un condensatore tra le cui armature è presente il vuoto è caricato con una carica Q e poi isolato. Inserendo un dielettrico ($\varepsilon_r > 1$),
(a) la differenza di potenziale tra le armature aumenta
(b) la differenza di potenziale tra le armature diminuisce
(c) la carica aumenta
(d) la carica diminuisce
(e) non cambia nessun parametro

3) Un punto materiale, appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito, è legato a una corda, incernierata a un punto del piano e descrive attorno a esso un moto circolare uniforme. L'energia cinetica del punto non varia perché la forza che agisce sul punto materiale:
(a) è conservativa
(b) è nulla
(c) è ortogonale alla traiettoria
(d) la forza centripeta è annullata dalla forza centrifuga
(e) nessuna delle risposte precedenti

4) Una carica puntiforme +Q si trova al centro di una sfera metallica cava. La sfera è carica con una carica totale -Q. Nella regione posta tra la carica puntiforme e l'interno del guscio sferico, quale delle seguenti affermazioni è vera?
(a) il campo elettrico è quello dovuto alla carica puntiforme, e diretto verso l'esterno
(b) il campo elettrico è zero
(c) il campo elettrico risulta doppio di quello dovuto alla carica puntiforme
(d) il campo elettrico è maggiore di quello della carica puntiforme, ma non il doppio

5) Viaggiate per 4 km a 30 km/h e poi per altri 4 km a 50 km/h. Quale sarà la vostra velocità scalare media per l'intero viaggio di 8 km?
(a) Più grande di 40 km/h
(b) Uguale a 40 km/h
(c) Minore di 40 km/h
(d) Mancano delle informazioni

6) Quando in un circuito RC in cui è presente una f.e.m. costante viene caricato il condensatore, la corrente che scorre attraverso la resistenza è
(a) crescente
(b) decrescente
(c) costante
(d) zero

7) Due oggetti sono lasciati cadere da un ponte a un intervallo di un secondo l'uno dall'altro. Mentre cadono, la distanza tra loro
(a) prima diminuisce poi rimane costante
(b) prima aumenta poi rimane costante
(c) diminuisce
(d) rimane costante
(e) aumenta

8) Un protone entra in un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità. Che succede all'energia cinetica del protone?
(a) aumenta
(b) diminuisce
(c) resta la stessa
(d) dipende dalla direzione della velocità
(e) dipende dalla direzione del campo magnetico

Risposte ai quesiti

1) Consideriamo la terza legge di Keplero, che applicheremo al moto dei satelliti della terra:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cost}\,.$$

Quindi tutti i corpi in orbita circolare con un dato raggio impiegano lo stesso tempo a compiere una rivoluzione, dunque si muovono con la stessa velocità e la risposta corretta è la (b).

2) La capacità di un condensatore è direttamente proporzionale alla costante dielettrica del mezzo isolante impiegato, per esempio per un condensatore a facce piane e parallele si scrive

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \qquad \big(A \text{ area delle armature, } d \text{ distanza tra le armature}\big)$$

Quindi, inserendo il dielettrico la capacità aumenta $\big(\varepsilon_r > 1\big)$. Dal momento che il condensatore è isolato, la carica Q sulle armature non varia. Data la definizione di capacità

$$C = \frac{Q}{V} \implies V = \frac{Q}{C}$$

concludiamo che ad un aumento della capacità del condensatore a carica costante corrisponde una diminuzione della differenza di potenziale tra le armature, e la risposta corretta è la (b).

3) Il corpo è mantenuto sulla traiettoria circolare dalla forza centripeta, in questo caso dovuta alla tensione della fune. La forza centripeta non è nulla (altrimenti non si avrebbe moto circolare), ma non fa lavoro in quanto sempre perpendicolare alla traiettoria (forza radiale per traiettoria circolare): infatti il lavoro $\mathscr{L} = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ è sempre nullo se la forza $\overrightarrow{F}$ e lo spostamento $\mathrm{d}\vec{s}$ sono tra loro perpendicolari. La risposta giusta è quindi la (c).

4) In base alla legge di Gauss, il flusso del campo attraverso una superficie chiusa è determinato unicamente dalla carica racchiusa *dentro* tale superficie. Possiamo quindi immaginare come superficie gaussiana una sfera centrata sulla carica puntiforme e di raggio minore di quello della superficie interna del guscio sferico, concludendo che il campo presente è quello determinato dalla carica puntiforme - la quale, essendo positiva, produce un verso uscente per il campo. La risposta corretta è la (a).

5) Possiamo procedere a calcolare la velocità media. I tempi Δt_1 e Δt_2 richiesti dal primo e dal secondo tratto rispettivamente saranno

$$\Delta t_1 = \frac{4\ \text{km}}{30\ \text{km/h}} = \frac{2}{15}\ \text{h} \qquad \Delta t_2 = \frac{4\ \text{km}}{50\ \text{km/h}} = \frac{2}{25}\ \text{h}$$

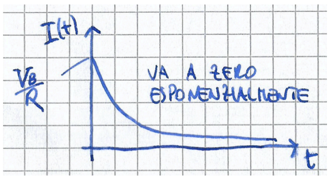
Nel tempo totale $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ sono percorsi 8 km, quindi la velocità media

$$v_m = \frac{8\ \text{km}}{16/75\ \text{h}} = \frac{75}{2}\ \text{km/h} = 37.5\ \text{km/h}$$

La risposta corretta è quindi la (c).

6) La tipica legge per la carica di un condensatore di capacità C in serie con una resistenza R e in presenza di una f.e.m.V_B si scrive

$$I(t) = \frac{V_B}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



quindi la risposta corretta è la (b).

7) È per lo più evidente che la distanza tra i due corpi aumenterà; dal momento in cui il secondo corpo è lasciato cadere abbiamo due moti uniformemente accelerati che differiscono solo per la velocità "iniziale" (nell'istante in cui parte il secondo corpo) del corpo lasciato cadere per primo, il quale continua ad avere questa velocità relativa al primo e quindi ad allontanarsi sempre più. Ad ogni modo diamone dimostrazione. Descriviamo il moto con un asse y rivolto verso l'alto il cui zero si trovi alla posizione iniziale dei due corpi. Per entrambi si ha una accelerazione $-g$. Sia il primo corpo lasciato cadere all'istante $t_1 = 0$ e il secondo corpo all'istante $t_2 = 1$ s. Le leggi orarie saranno

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \ (t > 0) \qquad\qquad y_2(t) = -\frac{1}{2}g\left(t - t_2\right)^2 \ (t > t_2)$$

La distanza tra i corpi $\Delta y = y_2 - y_1$ quindi

$$\Delta y(t) = -\frac{1}{2}g\left(t - t_2\right)^2 + \frac{1}{2}gt^2 = \left(-\frac{1}{2}gt_2^2\right) + \left(gt_2\right)t \ (t > t_2)$$

cioè la distanza, inizialmente ($t = t_2$) pari a $\Delta y(t_2) = \frac{1}{2}gt_2^2$, cresce linearmente con il tempo e la risposta corretta è la (e).

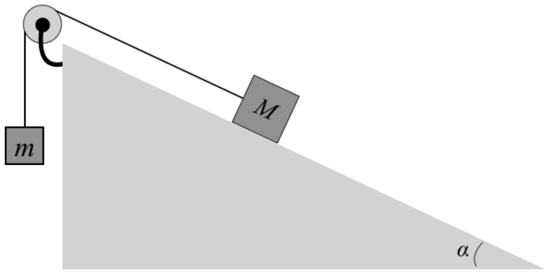
8) In un campo magnetico il protone $\left(q = e\right)$ è soggetto alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

La forza di Lorentz, per le caratteristiche del prodotto vettoriale, è quindi sempre perpendicolare alla velocità, di conseguenza non fa lavoro. Se non ci sono forze che fanno lavoro sul corpo, per il teorema dell'energia cinetica $\mathscr{L}_{ext} = \Delta K$ l'energia cinetica non varia, quindi la risposta corretta è la (c).

Esercizio 1

Un blocco di massa M=28.2 kg è appoggiato su un piano inclinato di α=30.0° rispetto all'orizzontale ed è collegato tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile che sale parallela al piano fino ad una carrucola, di massa trascurabile e priva di attrito; oltrepassata la carrucola, la fune scende verticalmente ed è agganciata ad un blocco di massa m=3.45 kg. Calcolare



1) il minimo coefficiente di attrito statico tra il piano inclinato e il blocco di massa M necessario affinché i blocchi restino in quiete, e la tensione della fune in questo caso;
2) l'accelerazione dei blocchi nel caso in cui tra il piano inclinato e il blocco di massa M non ci sia alcun attrito, e la tensione della fune in questo caso;
3) il lavoro complessivo fatto dalla forza peso nel caso 2) se il sistema viene lasciato libero di muoversi per un tempo t'=2.33 s.

Soluzione

1) Se il sistema è in quiete, analizzando la situazione del blocco di massa m risulta chiaro come la tensione della fune debba essere uguale, in modulo, al peso di tale blocco. Tale tensione, propagata invariata lungo la fune, contribuisce, assieme alla forza di attrito statico, ad impedire al blocco di massa M di scivolare in conseguenza della componente parallela al piano della forza peso. In formule, e considerando per il corpo m la direzione verticale con segno positivo verso l'alto, e per il corpo M la direzione paralella la piano inclinato con segno positivo verso la salita:

$$\begin{cases} |\vec{T}| - mg = T - mg = 0 \\ T + F_a - Mg\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava immediatamente che $T = mg \simeq 33.8$ N e che la forza di attrito presente nel caso statico:

$$F_a = g(M\sin\alpha - m)$$

Ricordiamo che il coefficiente di attrito statico consente di calcolare la *massima* forza di attrito statico che può essere generata; quindi il minimo coefficiente di attrito necessario sarà quello in grado di generare una forza di attrito massima pari a quella appena calcolata:

$$F_a^{max} = \mu_s^{min} N = \mu_s^{min} Mg\cos\alpha = F_a = g(M\sin\alpha - m)$$

da cui si ricava immediatamente

$$\mu_s^{min} = \frac{M\sin\alpha - m}{M\cos\alpha} \simeq 0.436$$

2) In questo caso è presente una accelerazione, uguale in modulo per i due corpi grazie alla presenza della fune inestensibile. La tensione della fune è comunque uguale in corrispondenza di ciascun corpo, dato che la carrucola non possiede inerzia né produce attriti. Possiamo quindi scrivere la seconda legge di Newton per ciascun corpo, considerando la direzione verticale per il corpo di massa *m* e la direzione parallela al piano inclinato per il corpo di massa *M*, con i segni individuati come in precedenza:

$$\begin{cases} \sum F_m = T - mg = ma_m = ma \\ \sum F_M = T - Mg\sin\alpha = Ma_M = -Ma_m = -Ma \end{cases}$$

È immediato ricavare accelerazione e tensione da questo sistema:

$$\begin{cases} a = \frac{g(M\sin\alpha - m)}{m+M} \simeq 3.30\ \mathrm{m/s^2} \\ T = m(a+g) \simeq 45.2\ \mathrm{N} \end{cases}$$

notando che un'accelerazione positiva, in base alla scelta dei segni degli assi di riferimento utilizzati, corrisponde alla salita del corpo *m* e alla discesa del corpo *M*.

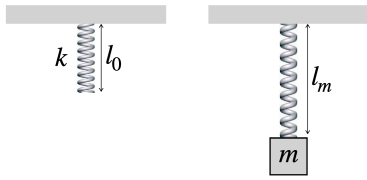
3) Avendo ricavato l'accelerazione, si ricava lo spostamento che avviene in un intervallo di tempo *t'*:

$$S = \frac{1}{2}at'^2$$

Possiamo calcolare il lavoro fatto dalla forza peso come l'opposto della variazione dell'energia potenziale gravitazionale del sistema, considerando che se *m* **sale** di *S*, *M* **scende** di (*S* sin*α*):

$$L^{peso} = -\Delta U^{peso} = -(mgS - MgS\sin\alpha) = gS(M\sin\alpha - m) = \frac{g}{2}at'^2(M\sin\alpha - m) \simeq 936\ \mathrm{J}$$

Esercizio 2



Una molla di costante elastica $k = 12.3$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 25.0$ cm è appesa verticalmente al soffitto, e le viene appeso un corpo di massa $m = 250$ g. Si trovi:

1) la lunghezza l_m di equilibrio della molla con il corpo appeso.

Viene prodotto un moto di oscillazione, ponendo il corpo in modo che la molla abbia lunghezza pari alla lunghezza a riposo per poi lasciarlo andare da fermo. Si trovi:

2) il periodo T delle oscillazioni del sistema;
3) la velocità v_m del corpo quando passa per la prima volta a distanza l_m dal soffitto.

Soluzione

1) La lunghezza di equilibrio quando il corpo è appeso è determinata dall'equilibrio delle forze agenti sul corpo nella direzione verticale: forza elastica dovuta alla molla e forza peso agente sul corpo. Poniamo un asse y diretto verticalmente verso l'alto,

$$\sum F_y = F_k - mg = k(l_m - l_0) - mg = 0$$

da cui ricaviamo che l'allungamento rispetto alla posizione di riposo vale $\Delta l = mg/k$ e la lunghezza della molla quando il corpo è in equilibrio vale

$$l_m = l_0 + \frac{mg}{k} \simeq 45 \text{ cm}$$

2) Le oscillazioni sono semplicemente di tipo armonico (vedi nota *a*) attorno alla nuova posizione di equilibrio, quindi la pulsazione vale

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Longrightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \simeq 0.90 \text{ s}$$

3) Per trovare la velocità del corpo possiamo usare la legge oraria del moto armonico appena descritto, oppure, forse ancora più semplicemente, la conservazione dell'energia meccanica, considerando lo stesso asse y utilizzato fino ad ora si ha che:

per l'istante iniziale $U_{k,i} = 0$, $U_{p,i} = 0$ e $K_i = 0$

per l'istante iniziale $U_{k,f} = \frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2$, $U_{p,f} = -mg\Delta l$ e $K_f = \frac{1}{2}mv^2$

dove $\Delta l = \dfrac{mg}{k}$, da cui, trattandosi di sistema conservativo e imponendo quindi che $E = U + K$ sia costante, ricaviamo

$$0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 - mg\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$v = \pm g\sqrt{\frac{m}{k}} \simeq \pm 1.4 \text{ m/s}$$

e sceglieremo, dato che stiamo utilizzando un asse rivolto verso l'alto, la soluzione con il segno meno. Per una soluzione per mezzo della legge oraria, vedi nota *b*.

Nota a

In caso di dubbi, si può dimostrare che il periodo è lo stesso che si avrebbe per una oscillazione attorno alla posizione di riposo della molla con un semplice cambio di variabili applicato all'equazione differenziale che descrive il sistema. Poniamo $y = 0$ in corrispondenza della posizione di riposo della molla, così si ha

$$\sum F_y = -ky - mg = ma_y = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}y - g$$

(dove giustamente quando il corpo scende, $y < 0$ e $F_k = -ky > 0$).

Ponendo $\Upsilon = y + \frac{mg}{k}$, si ha che

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Upsilon}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\Upsilon}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \text{e che} \quad -\frac{k}{m}y - g = -\frac{k}{m}\Upsilon,$$

quindi l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\mathrm{d}^2\Upsilon}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\Upsilon$$

che è appunto un normale oscillatore armonico di pulsazione $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Nota b

Utilizzando invece la legge oraria del moto armonico, abbiamo la soluzione generale

$$\Upsilon(t) = A\cos(\omega t + \phi); \qquad \dot{\Upsilon}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

Le condizioni iniziali sono ($y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$) che diventano ($\Upsilon_0 = \frac{mg}{k}$, $\dot{\Upsilon}_0 = 0$), quindi

$$\begin{cases} \frac{mg}{k} = A\cos(\phi) \\ 0 = -A\omega\sin(\phi) \end{cases} \qquad \text{da cui ricaviamo} \qquad \begin{cases} \phi = 0 \\ A = \frac{mg}{k} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} y(t) = \frac{mg}{k}\left(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - 1\right) \\ \dot{y}(t) = -g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \end{cases}$$

La posizione richiesta è $y_m = -\frac{mg}{k}$, quindi $\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_m\right) = 0$, da cui $t_m = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$; sostituendo nella legge oraria della velocità, abbiamo

$$v = \dot{y}(t_m) = -g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = = -g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

come ottenuto in precedenza.

Esercizio 3

Due piccole sfere conduttrici cariche di uguale raggio $R = 1.50$ cm sono poste con i centri a distanza $d = 22.0$ cm e si respingono con una forza di modulo $F = 3.50 \cdot 10^{-4}$ N (situazione iniziale). Le due sferette sono poste a contatto e poi rimesse nella posizione precedente, e si osserva che si respingono con una forza doppia (situazione finale). Si assumano positive le cariche delle sferette, calcolare:

1) il valore del potenziale elettrostatico nel punto medio tra le due sfere nella situazione finale;
2) le due cariche iniziali Q_1 e Q_2 di ciascuna sfera;
3) il valore del campo elettrico iniziale E_i nel punto medio tra le due sfere, e il suo valore finale E_f.

Soluzione

1) Una volta poste a contatto le due sfere, essendo esse di materiale conduttore si portano allo stesso potenziale; ed essendo esse identiche, ciò significa che la carica si distribuisce in parti uguali sulle due sfere. Detta Q la carica finale presente su ciascuna sfera, la forza di Coulomb si scrive

$$2F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \implies \qquad Q = 2d\sqrt{2\pi\varepsilon_0 F} \simeq 61.4 \text{ nC}$$

Il potenziale finale nel punto medio tra le due sfere sarà quindi

$$V_f = 2V_{f,una\ sfera} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d/2} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 d} = 2\sqrt{\frac{2F}{\pi\varepsilon_0}} \simeq 1.00 \text{ kV}$$

2) La carica totale disponibile è quindi $2Q$, ed è la stessa carica totale disponibile inizialmente. Quindi, detta Q_1 la carica iniziale sulla prima sfera, si avrà che la carica iniziale sulla seconda sfera vale $Q_2 = 2Q - Q_1$. La forza di Coulomb tra le due cariche Q_1 e Q_2 risulta

$$F = \frac{Q_1(2Q - Q_1)}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

in cui convenientemente sostituiamo $4\pi\varepsilon_0 d^2 = \dfrac{Q^2}{2F}$ ottenendo

$$Q_1 = \frac{2Q \pm \sqrt{4Q^2 - 2Q^2}}{2}$$

ovvero

$$Q_1 = Q\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 105 \text{ nC}; \quad 18.0 \text{ nC}$$

Le due radici corrispondono ai due valori richiesti; i ruoli di Q_1 e Q_2 sono del tutto intercambiabili.

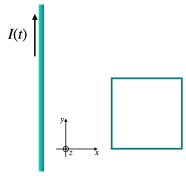
3) Il valore finale sarà ovviamente zero, dato che il campo generato da ciascuna sferetta nel punto medio ha stesso modulo e direzione ma verso opposto.

$$E_f = 0$$

All'inizio invece, avremo

$$E_i = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d^2/4} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2/4} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 d^2}\left(Q_1 - Q_2\right) = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{F}{\pi\varepsilon_0}} \simeq 6.54 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

Esercizio 4



Una spira quadrata di lato $a = 10$ cm e resistenza complessiva $R = 1.60$ mΩ è posta con due suoi lati paralleli ad un sottile filo rettilineo e molto lungo, posto sullo stesso piano della spira ad una distanza $d = a$ dal lato della spira più vicino. Si veda la figura.

Nel filo scorre una corrente dipendente dal tempo secondo la funzione $I(t) = I_0 + Ct^2$, con $I_0 = 10.0$ A e $C = 5.00$ A/s^2, e verso come indicato in figura. Si calcoli:

1) il modulo B_0 del campo magnetico presente in corrispondenza del lato della spira più vicino al filo rettilineo all'istante $t_0 = 1.00$ s, e la sua direzione e verso rispetto al sistema di riferimento indicato in figura;
2) il flusso del campo magnetico attraverso la spira all'istante $t_1 = 12.0$ s (*);
3) la corrente indotta nella spira nell'istante $t_2 = 25.0$ s, specificando se tale corrente scorra in senso orario o antiorario (sempre in riferimento alla figura data).

(*) si noti che $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Soluzione

1) La legge di Biot-Savart per un filo rettilineo ci dice che l'intensità del campo magnetico prodotto da un sottile filo di lunghezza infinita dipende dalla distanza r dallo stesso, secondo la formula

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Quindi il modulo del campo magnetico richiesto sarà

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi a}\left(I_0 + Ct_0^2\right) = \frac{2\cdot 10^{-7}}{a}\left(I_0 + Ct_0^2\right) \simeq 30.0\ \mu\mathrm{T}$$

Utilizzando la regola della mano destra, vediamo come le linee di campo siano entranti nella pagina in corrispondenza della spira; quindi possiamo scrivere

$$\overrightarrow{B}_0 = -B_0\hat{k}$$

2) Consideriamo, per il calcolo del flusso, l'area quadrata della spira come composta da rettangoli di altezza a e base dx; ciascuno di questi rettangoli è in tutti i punti alla stessa distanza (chiamiamola x) dal filo rettilineo, quindi per ciascun rettangolino il flusso vale

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}A = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a\,\mathrm{d}x \qquad \text{(si noti che } \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{A} = B\mathrm{d}A \text{ in quanto } \overrightarrow{B} \text{ e } \mathrm{d}\overrightarrow{A} \text{ sono paralleli)}$$

Per trovare il flusso totale integriamo da $x = a$ ad $x = 2a$:

$$\Phi(t) = \int \mathrm{d}\Phi = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi}\ln 2$$

ricordando che I è funzione del tempo. Sostituendo il valore di $I(t_1)$ otteniamo il flusso richiesto

$$\Phi(t_1) = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(I_0 + Ct_1^2\right)\ln 2 \simeq 1.01\cdot 10^{-5}\ \mathrm{Tm}^2$$

3) Ricordando che la forza elettromotrice indotta è pari a meno la derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico, utilizziamo l'espressione precedente per il flusso attraverso la spira, sostituendo ad $I(t)$ la sua derivata rispetto al tempo (tutti gli altri termini sono costanti):

$$|\mathscr{E}(t)| = \frac{\mu_0 a C t}{2\pi}\ln 2; \text{ quindi nell'istante richiesto } t_2 \text{ la corrente vale} \qquad I_{ind}(t_2) = \frac{|\mathscr{E}(t_2)|}{R} \simeq 1.08\ \mathrm{mA}$$

Il verso di percorrenza della corrente lo possiamo valutare considerando che abbiamo un campo entrante nella pagina (diretto come $-\hat{k}$) il cui flusso aumenta; per la legge di Lenz il campo generato dalla corrente indotta nella spira è tale da opporsi a tale variazione di flusso, deve essere quindi un campo uscente dalla pagina (diretto come $+\hat{k}$), quindi la corrente circola nella spira in senso antiorario.