LEZIONE ① ALGEBRA E GEOMETRIA

21.02.2022

APPUNTI RISERVATI AGLI STUDENTI DEL CORSO ALGEBRA E GEOMETRIA

Modulo I - MARCO MORASCHINI : marco.moraschini2@unibo.it , Ricevimento su appuntamento 4020 MERC., 15-16
↳ specificare nell'oggetto "Algebra e Geometria".
Modulo II - FABRIZIO CASELLI

ORARIO: 9.15-12 LUN, 13.00-14.45 MERC

LEZIONE ① - INTRODUZIONE AI SISTEMI LINEARI

L'obiettivo di questa prima parte del corso è di imparare a risolvere i sistemi lineari. In seguito vedremo come i sistemi lineari fanno parte di una teoria più ampia.

§1 PRIMI ESEMPI

DEF.: Un' EQUAZIONE LINEARE è un'equazione le cui incognite hanno grado 1:

$$(*) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \dots, a_n, b$ sono numeri assegnati e $x_1, \dots, x_n$ le incognite.

I numeri $a_1, \dots, a_n$ sono detti COEFFICIENTI dell'equazione lineare e b è detto TERMINE NOTO.

Se $b = 0$ diremo che $(*)$ è OMOGENEA.

Una SOLUZIONE di $(*)$ è una n-upla (ordinata!) di numeri $(s_1, \dots, s_n)$ che sostituiti alle incognite $x_1, \dots, x_n$ verificano l'uguaglianza:

$$a_1s_1 + \dots + a_ns_n = b.$$

ES.: (i) $2x_1 + 7x_2 - x_3 = -5$ ha come soluzione $(1, 1, 14)$ e anche $(3, -1, 4)$.

(ii) $2x_1 + 3x_2 = 0$ è omogenea e $x_1 = -\frac{3}{2}x_2$ quindi $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ è (ad esempio) una soluzione.

DEF.: Un SISTEMA LINEARE DI m EQUAZIONI NELLE n INCOGNITE $x_1, \dots, x_n$ è un insieme di m equazioni lineari ad n incognite che devono essere soddisfatte simultaneamente:

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

I numeri a_{ij} sono i COEFFICIENTI DEL SISTEMA e $b_1, \dots, b_m$ i TERMINI NOTI.

Se $b_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, m$, allora il sistema è detto OMOGENEO.

Una soluzione di $(**)$ è una n-upla $(s_1, \dots, s_n)$ di numeri che sia soluzione di tutte le m equazioni.

ES.: $(1,2)$ è soluzione di $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$.

[ES.: Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione $(0, \dots, 0)$.]

⚠ In questo corso considereremo solo coefficienti REALI. Quindi i numeri a_{ij} (coefficienti) ed i termini noti $b_1, \dots, b_m$ saranno sempre numeri reali.

{OBIETTIVI

DOMANDE NATURALI: (i) Il sistema ha soluzioni?

(ii) Se "sì", quante e quali?

A volte rispondere è facile anche senza teoria:

ES.: Consideriamo: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

È evidente che la somma di due numeri non possa fare contemporaneamente 3 ed 1. Quindi il sistema NON ammette soluzioni.

In altre parole le due equazioni sono INCOMPATIBILI.

DEF.: Un sistema si dice COMPATIBILE se ammette soluzioni.

ES.: Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Sostituendo il valore di x_2 sopra si ottiene: $x_1 - 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 4$.

Il sistema è dunque compatibile e ha un'unica soluzione $(4, -1)$.

MORALE: due variabili + due equazioni compatibili (non si contraddicono e sono "indipendenti" (i.e. non si ottengono una dall'altra) = unica soluzione.

ES.: Consideriamo il sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$.

Diversamente a prima qui le due equazioni lineari NON sono indipendenti, dato che la seconda si ottiene dalla prima moltiplicando per 2.

Quindi risolvere il sistema equivale a risolvere $x_1 + x_2 = 3$. Questa ha per soluzione, e.g., $(1, 2)$ ma anche $(2, 1)$ e $(-1, 4)$.

Quante esattamente? Come possiamo descriverle?

Abbiamo una variabile libera x_1 e x_2 che sarà vincolata ad x_1: $(x_1, 3 - x_1)$.

Dato che $x_1 \in \mathbb{R}$ abbiamo infinite soluzioni:

$$S = \{(x_1, 3 - x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

$$\overset{!}{=} \{(3 - x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

MORALE: due variabili reali + una sola condizione = infinite soluzioni.

OBIETTIVO: Formalizzare "la morale".

esattamente tutte

DEF.: Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

ES. $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ 2x_1+2x_2=6 \end{cases}$ è equivalente a $x_1+x_2=3$.

§ MATRICI

DEF.: Dati due numeri naturali $m,n \in \mathbb{N}$, si chiama MATRICE $m\times n$ a coefficienti reali una tabella di mn numeri reali collocati su m righe ed n colonne.

ES.: la tabella $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ è una matrice 2×3.

DEF.: Se $m=n$ si parla di MATRICI QUADRATE:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix}$.

Indichiamo con $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $m\times n$ a coefficienti reali e con $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme di quelle quadrate.

DEF.: Data una matrice A l'elemento di posto (i,j), indicato come a_{ij}, è quello che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna.

ES.: Data $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ l'elemento $(1,3)$ è 0 e $(2,2)$ è 3.

DEF.: Date due matrici $A=(a_{ij})$ e $A'=(a'_{ij})$ diremo che $A=B$ se $a_{ij}=a_{ij}'$ $\forall\, i=1,\dots,m$, $\forall j=1,\dots,n$.

§ ALCUNE OPERAZIONI

Se $A=(a_{ij})$ è una matrice $m\times n$ e $B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix}$ una matrice $n\times 1$, possiamo moltiplicare

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \end{bmatrix}$$

Il risultato è una matrice $m\times 1$ (colonna) (c_{i1}) in cui nella posizione $(i,1)$ avremo: $c_{i1} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}$.

ES.: Siano $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Allora si ha:

$AB=\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$, dove:

$c_{11} = \sum_{j=1}^{4} a_{1j}b_{j1} = 1\cdot 0 + 0\cdot(-3) + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = 3-2 = 1$

$c_{21} = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}b_{j1} = 0\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 6+2+2 = 10$

$c_{31} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}b_{j1} = 1\cdot 0 + 0\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 = -1$.

In conclusione $A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Questa situazione è il caso più semplice dell'operazione "RIGHE PER COLONNE" fra matrici $m\times n$ e $n\times p$ (che studieremo più avanti).

§ APPLICAZIONI AI SISTEMI LINEARI

Vogliamo ora interpretare un sistema lineare in termini matriciali.

ES.: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ può essere espresso come: $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

NOTAZIONE: Scriveremo per comodità $A\underline{x} = \underline{b}$ dove $\underline{x}$ e $\underline{b}$ indicano matrici $n \times 1$ e $m \times 1$ rispettivamente.

DEF.: $A = (a_{ij})$ è la matrice $m \times n$ dei coefficienti delle incognite, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ la colonna delle incognite e $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ la colonna degli m termini noti.

A = MATRICE INCOMPLETA associata al sistema e $(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ COMPLETA.

ES.: Consideriamo il sistema lineare. $\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{2}\,x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$

abbiamo che $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ è la matrice incompleta e $(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \sqrt{2} & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$ quella completa.

OSS.: Usare matrici è solo un modo più facile e comodo di trattare i sistemi lineari, dato che ogni riga corrisponde ad un'equazione lineare in cui vengono sottintese le incognite.

DEF.: Una matrice è detta A SCALA (PER RIGHE) o semplicemente a SCALA se vale:

(i) Eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrice

(ii) Il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) si trova "più a destra" del primo elemento non nullo della riga precedente.

ES.: (1) La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ non è a scala (viola condizione (i))

(2) La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scala (valgono (i) & (ii))

(3) La matrice $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1/5 \end{bmatrix}$ NON è a scala, perché (ii) non vale.