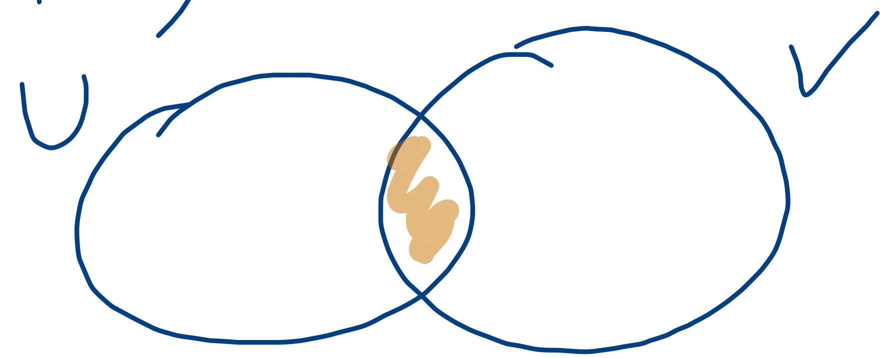
Lezione del 6 Aprile 2022.

U, V sottospazi di $\mathbb{R}^n$ allora

- $U \cap V$ è sempre un sottospazio.
- $U \cup V$ è sottospazio solo se $U \subseteq V$ oppure $V \subseteq U$.

Qualche osservazione su $\dim(U \cap V)$

$$\left.\begin{array}{l} U \cap V \subseteq U \\ U \cap V \subseteq V \end{array}\right\} \text{sempre vero}$$



$$\Longrightarrow \dim(U \cap V) \leq \min(\dim U, \dim V)$$

L'uguaglianza vale solo se uno dei due è contenuto nell'altro.

Se così non è $U \cap V$ è <u>strettamente</u> contenuto sia in U che in V $\Longrightarrow$ vale la disuguaglianza stretta.

Esempi di calcolo di intersezione

① Sottospazi presentati tramite equazioni cartesiane.

$U, W \leq \mathbb{R}^3$

U di equazione $x+y+z=0$

W di equazione $x-y+2z=0$

Le equazioni cartesiane di $U \cap W$ sono

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \qquad 2x+3z=0 \implies x=-\frac{3}{2}z$$

$$x = -\frac{3}{2}z$$

$$x + y + z = 0$$

$$-\frac{3}{2}z + y + z = 0$$

$$y = \frac{1}{2}z$$

$$\Rightarrow U \cap W = \left\{ \left(-\frac{3}{2}z, \frac{1}{2}z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\rangle = \left\langle \left(-3, 1, 2 \right) \right\rangle$$

② Sottospazi presentati tramite una base.

$$U = \langle (1,-1,0), (0,1,-1) \rangle$$

$$W = \langle (1,1,0), (1,-1,-1) \rangle$$

$$\underbrace{a(1,-1,0)+b(0,1,-1)}_{\text{vettore generico di } U} = \underbrace{c(1,1,0)+d(1,-1,-1)}_{\text{vettore generico di } W}$$

$$\begin{cases} a = c+d \\ -a+b = c-d \\ -b = -d \end{cases} \qquad \begin{cases} a - c - d = 0 \\ -a+b-c+d = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-2c + d = 0 \qquad b = 2c$$

$$d = 2c \qquad a = c+d = 3c$$

Nella 1ª forma ho

$$3c(1,-1,0)+2c(0,1,-1)=(3c,-c,-2c)$$

$$U\cap W=\langle(3,-1,-2)\rangle$$

Nell'altra forma

$$c(1,1,0)+2c(1,-1,-1)=(3c,-c,-2c)$$

(3) Un sottospazio presentato con una base e uno con equazioni cartesiane.

$$U = \langle (1,-1,0), (0,1,-1) \rangle$$

$$W: \quad x - y + 2z = 0$$

Prendiamo un vettore generico di U, $a(1,-1,0)+b(0,1,-1)$ $= (a, -a+b, -b)$

e vediamo quando soddisfa le equazioni di W.

$$a - (-a+b) - 2b = 0$$

$$2a - 3b = 0 \qquad a = \frac{3}{2}b \implies \left(\frac{3}{2}b, -\frac{3}{2}b + b, -b\right)$$

Somma di sottospazi

U, W sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Def.: La somma di U e W è

$$U + W = \{ u + w : u \in U, w \in W \}$$

Esempio in $\mathbb{R}^3$ $U = \langle (1,1,0) \rangle$

$W = \langle (1,2,0) \rangle$

$$U+W = \{ \underset{\substack{\cap \\ U}}{a(1,1,0)} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{b(1,2,0)} \ : \ a,b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (a+b, a+2b, 0) : a,b \in \mathbb{R} \}$$

$U+W$ è un sottospazio.

Prop.: U, W sottospazi di $\mathbb{R}^n$, allora
$U+W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dim.: 0) $0_{\mathbb{R}^n} = \underset{\displaystyle U}{\underset{\cap}{0_{\mathbb{R}^n}}} + \underset{\displaystyle W}{\underset{\cap}{0_{\mathbb{R}^n}}}$ ✓

1) $u_1 + w_1,\ u_2 + w_2 \in U + W$
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Facciamo la combinazione lineare e verifichiamo

se sta ancora in $U+W$,

$$\alpha_1(u_1+w_1)+\alpha_2(u_2+w_2) = \underset{\substack{\Uparrow \\ U}}{(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2)} \in U+W$$

Osservazioni sulla somma $U+W$

$$U+W \supseteq U$$

$$U+W \supseteq W$$

infatti, se $u \in U \Rightarrow u = u + \underbrace{0_{\mathbb{R}^n}}_{\in W} \in U+W$

e analogamente $w = 0_{\mathbb{R}^n} + w \in U+W$

In particolare $\dim(U+W) \geq \max(\dim U, \dim W)$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se uno è contenuto nell'altro.

Prop.: se $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_h \rangle$

$$\Rightarrow U + W = \langle u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h \rangle$$

Equivalentemente, se $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, allora

$$\langle S \rangle + \langle T \rangle = \langle S \cup T \rangle$$

Dim.: verifichiamo la doppia inclusione

$\subseteq$: sia $u+w \in U+W$

$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$

$w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_h w_h$

$$u+w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_h w_h$$

$$\in \langle u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_h \rangle$$

$\supseteq$: sia $v \in \langle u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_h \rangle$

$$v = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k}_{\in U} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_h w_h}_{\in W}$$

$\in U + W$.

Esempio:

& W

$$U = \langle (1,0,1,1), (1,-1,-1,1) \rangle$$

$$W : \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z-t=0 \end{cases}$$

Determinare una base di $U+W$.

Abbiamo bisogno di una base di W

$(1,1,2,3), (1,0,1,1)$ (viste ad occhio

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z-t=0 \end{cases}$$

z, t variabili libere

$(2, -1, 1, 0)$

$(-1, 1, 0, 1)$

dalla 2ª equazione

dalla 1ª equazione.

$W = \langle (2,-1,1,0), (-1,1,0,1) \rangle$

Per la proposizione

$$U+W=\langle (1,0,1,1),(1,-1,-1,1),(2,-1,1,0),(-1,1,0,1)\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(U+W)=3$$

$$U+W=\langle (1,0,1,1),(0,1,2,0),(0,0,1,-2)\rangle$$

Osservazione

se $\dim U = 4$

$\dim W = 3$

$\dim(U \cap W) = 2$

Allora: sia v_1, v_2 base di $U \cap W$

Posso completare ad una base di U: v_1, v_2, u_1, u_2

" " " " " " W: v_1, v_2, w_1

Allora

$$U+W = \langle \underbrace{v_1, v_2, u_1, u_2}_{\text{generatori di } U}, \underbrace{v_1, v_2, w_1}_{\text{generatori di } W} \rangle$$

$$= \langle v_1, v_2, u_1, u_2, w_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \dim(U+W) \leq 5$$