SCHEDA DI ESERCIZI DEL 20/03/2022

Risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1

Determinare due insiemi distinti di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado ≤ 2.

Esercizio 2

Verificare che le matrici

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_12 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

generino lo spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2.

Esercizio 3

Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

(1) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 1\}$;
(2) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$;
(3) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y = 0\}$.

Esercizio 4

Verificare che i seguenti insiemi di matrici sono sottospazi vettoriali di $M_{3,3}(\mathbb{R})$ e per ciascuno di essi esibire un insieme di generatori.

(1) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(2) $B = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$;

(3) $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$;

Esercizio 5

Costruire un sottoinsieme di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ costituito da infiniti elementi che non sia un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 6

Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che l'insieme

$$S_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - kz + 8t = k\}$$

sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Per i valori di k trovati determinare un insieme di generatori di S_k e, se possibile, esibire un vettore di $\mathbb{R}^4$ che non sia combinazione lineare di questi.

Esercizio 7

Sia S l'insieme dei polinomi di grado esattamente 3 a coefficienti reali nella variabile x.

(1) Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$;
(2) Determinare il più piccolo sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}[x]$ contenente S.