PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA

18 Luglio 2022

- Dare una (breve) spiegazione di tutte le risposte date e dei passaggi svolti.
- Consegnare solo la bella copia
- Scrivere le soluzioni degli esercizi indicando chiaramente la domanda a cui si sta rispondendo.
- Consegnare un foglio protocollo per ogni esercizio

Domanda teorica: dare la definizione di vettori linearmente indipendenti, di sistema di generatori e di base di V.

(1) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ consideriamo l'applicazione lineare $F_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F_k(x,y,z) = \Big((k+2)x + 2ky - z, 2x - 4y + 2kz, y + z\Big)$.

(1a) Mostrare che $\ker(F_k) = \{(0,0,0)\}$ se e solo se $k \neq -1, -5$.

(1b) Stabilire al variare di $k \in \mathbb{R}$ se il vettore $w_k = (1, -2k, k)$ è contenuto in $\mathrm{Im}(F_k)$.

(1c) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ lo scalare 0 è un autovalore per F_k.

(1d) Mostrare che esiste unica l'applicazione lineare $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(1,1,0) = (1,0,0), G(1,0,1) = (2,1,0)$ e $G(0,1,1) = (1,-1,0)$.

(1e) Sia E la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Per $k = 0$, mostrare che l'applicazione lineare $G \circ F_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ammette la seguente matrice associata (rispetto alla base canonica E):

$$M_E^E(G \circ F_0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(1f) Stabilire se l'applicazione lineare $G \circ F_0$ è diagonalizzabile;

(1g) Trovare (se possibile) una matrice $V \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale $D \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tali che $V^{-1} M_E^E(G \circ F_0) V = D$.

Soluzione: *Ad (1a & 1b)* Per stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore dato appartiene all'immagine di F_k dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} (k+2)x + 2ky - z = 1 \\ 2x - 4y + 2kz = -2k \\ y + z = k \end{cases}$$

Per risolverlo consideriamo la matrice completa associata e riduciamola a scala tramite operazioni elementari sulle righe:

$$\begin{bmatrix} k+2 & 2k & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2k & -2k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2k & -2k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ k+2 & 2k & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ k+2 & 2k & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 4k+4 & -k^2-2k-1 & k^2+2k+1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & -k^2-6k-5 & -3k^2-2k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & -(k+1)(k+5) & (k+1)(-3k+1) \end{bmatrix}$$

Possiamo ora considerare i diversi casi:

(a) $k \neq -1, -5$. In questa situazione la matrice completa e quella incompleta hanno entrambe rango uguale a 3. Questo significa che esiste un'unica soluzione del sistema. In particolare, il vettore $w_k \in \mathrm{Im}(F_k)$.

(b) $k = -1$. In questa situazione la matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango uguale a 2. Ne segue che esistono infinite soluzioni e quindi il vettore w_k appartiene all'immagine di F_k.

(c) $k = -5$. Per questo valore di k, la matrice incompleta ha rango 2, mentre la matrice completa ha rango 3. Questo mostra che non esistono soluzioni per il precedente sistema lineare. In particolare, w_k *non* appartiene all'immagine di F_k.

Non ci resta che rispondere al punto *Ad (1a)*. Per il teorema delle dimensioni, abbiamo:

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(F_k)) + \dim(\mathrm{Im}(F_k)).$$

Quindi $\ker(F_k) = 0_{\mathbb{R}^3}$ se e soltanto se $\dim(\mathrm{Im}(F_k)) = 3$. Dobbiamo quindi capire quando l'immagine dell'applicazione lineare F_k ha dimensione massima (ossia uguale a 3). Per quanto visto nel punto precedente questo accade quando $k \neq -1, -5$, cioè quando la matrice associata ha rango uguale a 3.

Ad (1c) Ricordiamoci che 0 è un autovalore per l'applicazione lineare F_k se e soltanto se l'autospazio corrispondente V_0 ha dimensione almeno 1. Per definizione l'autospazio V_0 consiste nei vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$F_k(v) = 0v = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Questo mostra che $V_0 = \ker(F_k)$. Quindi per il punto precedente 0 è un autovalore di F_k se e soltanto se il kernel di F_k non è banale. Quindi se e solntanto se $k = -1, -5$.

Ad (1d) L'applicazione lineare G esiste ed è unica in quanto è definita su una base.

Ad (1e & 1f) Per capire se l'applicazione $G \circ F_0 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile dobbiamo per prima cosa scrivere la sua matrice associata. Consideriamo la base canonica E di $\mathbb{R}^3$. Per definizione di F_0 abbiamo:

$$M_E^E(F_0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice associata a G rispetto alla base canonica. Per farlo dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica rispetto all'applicazione G:

$$\begin{aligned} G(1,0,0) &= G\Big(\frac{1}{2}(1,1,0)+\frac{1}{2}(1,0,1)-\frac{1}{2}(0,1,1)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(1,0,0)+\frac{1}{2}(2,1,0)-\frac{1}{2}(1,-1,0)=(1,1,0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(0,1,0) &= G\Big(\frac{1}{2}(1,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1)-\frac{1}{2}(1,0,1)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(1,0,0)+\frac{1}{2}(1,-1,0)-\frac{1}{2}(2,1,0)=(0,-1,0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(0,0,1) &= G\Big(\frac{1}{2}(0,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(1,-1,0)+\frac{1}{2}(2,1,0)-\frac{1}{2}(1,0,0)=(1,0,0). \end{aligned}$$

Questo mostra che la matrice associata a G nella base canonica è:

$$M_E^E(G)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo finalmente calcolare la matrice associata alla composizione $G\circ F_0$ rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned} M_E^E(G\circ F_0) &= M_E^E(G)M_E^E(F_0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poichè la matrice risultante è triangolare superiore, quando calcoliamo il polinomio caratteristico otteniamo:

$$p(\lambda)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Questo mostra che gli autovalori di $G\circ F_0$ sono esattamente $\lambda=0,2,4$. Poichè abbiamo trovato tre autovalori distinti (e reali) e $G\circ F_0\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, possiamo concludere che l'applicazione lineare in questione è diagonalizzabile.

Ad (1g) Abbiamo già visto nel punto precedente che l'applicazione lineare $G\circ F_0$ è diagonalizzabile. Per questo possiamo ottenere la matrice diagonale D semplicemente mettendo lungo la diagonale gli autovalori di $G\circ F_0$:

$$D:=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre, per la teoria sappiamo che la matrice V è ottenuta semplicemente ponendo gli autovettori nelle sue colonne:

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} .$$

Per completezza ricordiamo come calcolare gli autovettori in questione. Per quanto riguarda l'autovalore 2 bisogna considerare il seguente sistema omogeneo:

$$(M_E^E(G \circ F_0) - 2\mathrm{Id})(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \ .$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} ,$$

ossia $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} = \langle(1, 0, 0)\rangle$.

Similmente per l'autovalore 4 si ottiene il seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} ,$$

da cui $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 = -2x + y\} = \langle(1, 2, 0)\rangle$.

Infine, per l'autovalore uguale a 0 otteniamo:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases} ,$$

da cui $U_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0 = 4y - z\} = \langle(1, -2, -8)\rangle$. Questo conclude l'esercizio.

(2) Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - x = 0, -3x - 2y + 3z + 2t = 0\}$$

e

$$W_k := \langle(3, 0, 3, k), (1, 2, 0, 2)\rangle \ ,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(2a) Calcolare la dimensione ed esibire una base di V. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione ed esibire un base di W_k;

(2b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ calcolare la dimensione di $V + W_k$ ed esibire una sua base.

(2c) Esprimere $V + W_k$ in equazioni cartesiane;

(2d) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ calcolare la dimensione ed una base per $V \cap W_k$;

(2e) Stabilire se esistono $k \in \mathbb{R}$ per cui V e W_k siano in somma diretta;

(2f) Fissato $k = 0$, stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$Z_\alpha := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - \alpha t = y - z + \alpha t = 0\}$$

sia tale che:

$$V \oplus Z_\alpha = W_0 \oplus Z_\alpha = \mathbb{R}^4 \ .$$

Soluzione: *Ad (2a)* Osserviamo che V è descritto da due equazioni cartesiane indipendenti. Quindi otteniamo che la sua dimensione è

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^4) - 2 = 4 - 2 = 2 \ .$$

Per trovare una base di V è ora sufficiente esprimere V in equazioni parametriche. Osserviamo che V si può scrivere in equazioni cartesiane nel modo seguente:

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - x = 0, -y + t = 0\}$$

da cui è immediato dedurre le equazioni parametriche:

$$V = \{(x, y, x, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Ne segue che una base per V è data da:

$$\mathcal{B}_V = \{(1, 0, 1, 0, (0, 1, 0, 1)\} \ .$$

Per quanto riguarda W_k, confrontando la terza coordinata dei due vettori che lo generano, si può concludere che i due vettori in questione sono linearmente indipendenti. Infatti, la terza coordinata del primo vettore è non nulla, mentre la terza coordinata del secondo vettore è nulla. Questo mostra che non esiste nessun scalare per cui il secondo vettore è multiplo del primo (poichè non è il vettore nullo). Questo ci porta a concludere che i vettori in questione formano una base di W_k per ogni $k \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_{W_k} = \{(3, 0, 3, k), (1, 2, 0, 2)\} \ .$$

Ne segue che la dimensione di W_k è 2.

Ad (2b) Per calcolare una base e la dimensione di $V + W_k$ consideriamo la matrice le cui colonne sono date dai vettori delle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_{W_k}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{bmatrix} .$$

Riducendola a scala (sottraiamo la prima riga alla terza, poi sottraiamo la seconda riga alla quarta, ed infine scambiamo la terza riga con la quarta):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si vede immediatamente che il rango di A è uguale a 4 se $k \neq 0$, altrimenti è uguale a 3. Ne segue che la dimensione di $V + W_k$ è uguale a 4 se $k \neq 0$, mentre è uguale a 3 se $k = 0$.

Non ci resta che calcolare una base per $V + W_k$. Abbiamo due casi: se $k \neq 0$, allora una base è ottenuta semplicemente dall'unione delle due basi di V e W_k:

$$\mathcal{B}_{V+W_k} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 2), (3, 0, 3, k)\} \ .$$

Se, invece, $k = 0$, una base di $V + W_0$ può essere ricostruita guardando le colonne della matrice A corrispondenti ai pivots nella sua forma ridotta a scala. Più precisamente, otteniamo la seguente base:

$$\mathcal{B}_{V+W_0} = \{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,2,0,2)\} \ .$$

Ad (2c) Calcoliamo ora le equazioni cartesiane degli spazi $V+W_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quanto appena visto, sappriamo che per $k \neq 0$ il sottospazio vettoriale $V+W_k$ di $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e quindi coincide con $\mathbb{R}^4$. Ne segue che:

$$V + W_k = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathbb{R}^4 \ .$$

Invece, per $k = 0$, dobbiamo vedere quando le matrici

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 2 & t \end{bmatrix}$$

hanno lo stesso rango. In altre parole dobbiamo vedere quando $\mathrm{rg}(B') = 3$. Riducendo a scala B' (sottraiamo la prima riga alla terza e poi sottraiamo la seconda riga alla quarta), si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & -1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & t-y \end{bmatrix}$$

Quindi B' ha rango uguale a 3 se e soltanto se $t - y = 0$. Ne segue che l'equazione cartesiona di $V + W_0$ è

$$V + W_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - y = 0\} \ .$$

Ad (2d) Nuovamente abbiamo due casi. Se $k \neq 0$, abbiamo visto che $V+W_k$ è $\mathbb{R}^4$ ed in particolare ha dimensione 4. Quindi otteniamo per la formula di Grassmann:

$$\dim(V \cap W_k) = -\dim(V + W_k) + \dim(V) + \dim(W_k) = -4 + 2 + 2 = 0$$

Ne segue che $\dim(V \cap W_k) = 0$ e quindi $V \cap W_k = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Consideriamo ora il caso in cui $k = 0$. La formula di Grassmann mostra che:

$$\dim(V \cap W_0) = -\dim(V + W_0) + \dim(V) + \dim(W_0) = -3 + 2 + 2 = 1 \ .$$

Non ci resta che trovare un vettore che appartenga sia a V che a W_0 per descrivere la base dell'intersezione. Ma se $k = 0$ è immediato vedere che il vettore $(1,0,1,0)$ appartiene ad entrambi i sottospazi. Ne segue che

$$\mathcal{B}_{V \cap W_0} = \{(1,0,1,0)\} \ .$$

Ad (2e) Sappiamo per la teoria che V e W_k sono in somma diretta se e soltanto se $V \cap W_k = 0_{\mathbb{R}^4}$. Per quanto visto al punto precedente, questo accade se e soltanto se $k \neq 0$.

Ad (2f) Consideriamo il sottospazio vettoriale

$$Z_\alpha := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - \alpha t = y - z + \alpha t = 0\} .$$

Per prima cosa notiamo che si può riscrivere come:

$$Z_\alpha := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - \alpha t = y = 0\} .$$

Ne segue che $\dim(Z_\alpha) = 2$ ed una sua base è data da

$$\mathcal{B}_{\mathcal{Z}_\alpha} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, \alpha, 1)\} .$$

L'esercizio ci chiede di stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, questo sottospazio è in somma diretta sia con V che con W_0 e sia tale che la loro somma dia sempre $\mathbb{R}^4$. Per motivi dimensionali (e la definizione di somma diretta) vediamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ questo è possibile se e soltanto se $Z_\alpha \cap W_0 = Z_\alpha \cap V = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Osserviamo che i vettori della base di V sono linearmente indipendenti da quelli della base di Z_α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Quindi in questa situazione si ha sempre che $Z_\alpha \oplus V$.

Non ci resta che studiare quando $Z_\alpha \cap W_0 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Per farlo, è sufficiente studiare quando la dimensione di $Z_\alpha + W_0$ è uguale a 4 (basta infatti poi applicare la formula di Grassmann ed il fatto che $\dim(Z_\alpha) = \dim(W_0) = 2$ per concludere). Calcoliamo la dimensione di $Z_\alpha + W_0$ mediante il rango della matrice le cui colonne sono i vettori della base di W_0 e Z_α:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Riducendo a scala otteniamo così la seguente matrice:

$$C' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 2 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Abbiamo quindi che $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(C') = 4$ per qualsiasi scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$. Questo prova che per qualsiasi scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$, la condizione richiesta su Z_α è soddisfatta.