AA 2022-2023 - Fisica - CdL Ingegneria e Scienze Informatiche

Luigi Guiducci - Esercitazioni

[1] Alle tre del pomeriggio l'angolo tra la lancetta delle ore e quella dei minuti di un orologio formano un angolo di $\pi/2$. Calcolare dopo quanto tempo le lancette si sovrappongono.

[16 minuti e 22 secondi]

[2] Un gatto su una giostra in moto circolare uniforme ha al tempo $t_1 = 2.00$ s una velocità $\overrightarrow{v}_1 = (3.00\ \mathrm{m/s})\hat{\imath} + (4.00\ \mathrm{m/s})\hat{\jmath}$. Al tempo $t_2 = 5.00$ s ha velocità $\overrightarrow{v}_2 = (-3.00\ \mathrm{m/s})\hat{\imath} + (-4.00\ \mathrm{m/s})\hat{\jmath}$. Calcolare 1) il modulo dell'accelerazione centripeta; 2) l'accelerazione media nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$.

[$a_c \simeq 5.24\ \mathrm{m/s^2}$; $|<\overrightarrow{a}>| \simeq 3.33\ \mathrm{m/s^2}$]

[3] Un bambino fa roteare un sasso attaccato ad una cordicella di lunghezza $L = 1.5$ m, in modo che si muova su una circonferenza orizzontale ad altezza $h = 2.0$ m dal suolo. La cordicella si rompe e il sasso vola via orizzontalmente, e tocca terra a $S = 10$ m di distanza. Quale era l'accelerazione centripeta del sasso quando stava compiendo il moto circolare?

[$a_c \simeq 160\ \mathrm{m/s^2}$]

[Esperimento di Guglielmini] La prima ipotesi del moto di rotazione della terra risale al III secolo a.C. (Aristarco di Samo) ma una prova sperimentale fu fornita da Giovanni Battista Guglielmini nel 1791. Lasciò cadere dalla sommità della torre degli Asinelli di Bologna ($h = 97.2$ m) delle sferette di piombo. Sistematicamente le sferette toccavano il suolo spostate verso est rispetto alla verticale. Si calcoli, trascurando l'attrito dell'aria, lo spostamento atteso, considerando la rotazione terrestre e la latitudine di Bologna ($\theta_L = 44.5^\mathrm{o}$).

[$S \simeq 2.24$ cm]

[1] Alle tre del pomeriggio l'angolo tra la lancetta delle ore e quella dei minuti di un orologio formano un angolo di $\pi/2$. Calcolare dopo quanto tempo le lancette si sovrappongono.

[16 minuti e 22 secondi]

Esprimiamo le velocità angolari delle lancette (utilizzo il pedice "o" per le ore, pedice "m" per i minuti):

$$\omega_m = \frac{2\pi}{60 \times 60}\ \text{rad/s}$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60}\ \text{rad/s}$$

Le leggi orarie degli angoli saranno quindi (velocità angolare costante):

$$\theta_m(t) = \omega_m t$$

$$\theta_o(t) = \pi/2 + \omega_o t$$

dove t è il tempo trascorso dalle 3 del pomeriggio, indicate dalle condizioni iniziali: lancetta delle ore a $\pi/2$, lancetta dei minuti a zero. Le lancette si sovrappongono quando $\theta_m = \theta_o$, quindi

$$\omega_m t = \pi/2 + \omega_o t$$

e risolvendo per t:

$$t = \frac{\pi/2}{\omega_m - \omega_o} = \frac{10800}{11}\ \text{s} \simeq 16'\ 22''$$

[2] Un gatto su una giostra in moto circolare uniforme ha al tempo $t_1 = 2.00$ s una velocità $\vec{v}_1 = (3.00 \text{ m/s})\hat{\imath} + (4.00 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. Al tempo $t_2 = 5.00$ s ha velocità $\vec{v}_2 = (-3.00 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-4.00 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. Calcolare 1) il modulo dell'accelerazione centripeta; 2) l'accelerazione media nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$.

[$a_c \simeq 5.24 \text{ m/s}^2$; $|<\vec{a}>| \simeq 3.33 \text{ m/s}^2$]

Si nota che $\vec{v}_2$ il vettore opposto di $\vec{v}_1$. Quindi nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ la giostra ha compiuto mezzo giro. Dato che $(t_2 - t_1) = 3 \text{ s} = T/2$, abbiamo che il periodo è $T = 6$ s. Di conseguenza, la velocità angolare sarà

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

e quindi l'accelerazione centripeta

Il modulo della velocità (costante) vale

$$v = |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 5.00 \text{ m/s}$$

dato che a questa velocità viene percorsa un'intera circonferenza in un tempo T abbiamo

$$\frac{2\pi R}{T} = v \implies R = \frac{vT}{2\pi} = \frac{15.0}{\pi} \text{ m}$$

quindi possiamo calcolare l'accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = \frac{15.0}{\pi}\frac{\pi^2}{9} = \frac{5}{3}\pi \simeq = 5.24 \text{ m/s}^2$$

Calcoliamo l'accelerazione media, invece, secondo la sua definizione:

$$<\vec{a}> = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-6.00 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-8.00 \text{ m/s})\hat{\jmath}}{3 \text{ s}} = (-2.00 \text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (-2.67 \text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$$

Il modulo di questa accelerazione vale

$$|<\vec{a}>| = \sqrt{(2.00 \text{ m/s}^2)^2 + (2.67 \text{ m/s}^2)^2} \simeq 3.33 \text{ m/s}^2$$

[3] Un bambino fa roteare un sasso attaccato ad una cordicella di lunghezza $L = 1.5$ m, in modo che si muova su una circonferenza orizzontale ad altezza $h = 2.0$ m dal suolo. La cordicella si rompe e il sasso vola via orizzontalmente, e tocca terra a $S = 10$ m di distanza. Quale era l'accelerazione centripeta del sasso quando stava compiendo il moto circolare?

[$a_c \simeq 160$ m/s^2]

Procediamo ad utilizzare le informazioni date sul modo del sasso dopo la rottura della cordicella: si tratta di un moto di proiettile. Scelto un sistema di riferimento con asse y verticale avente lo zero al suolo, e asse x orizzontale diretto come la velocità del sasso quando si rompe la cordicella e avente lo zero nel punto in cui si trova il sasso quando la cordicella si rompe, abbiamo:

$$\begin{cases} x = v_s t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il punto in cui il sasso tocca terra ha, in questo sistema di riferimento, ha coordinate $x_t = S$ e $y_t = 0$. Sostituendole nel sistema di equazioni abbiamo

$$\begin{cases} S = v_s t \\ 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \implies \begin{cases} t = S/v_s \\ h = \frac{gS^2}{2v_s^2} \end{cases}$$

Otteniamo quindi la velocità del sasso nell'istante in cui si rompe la cordicella

$$v_s = S\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

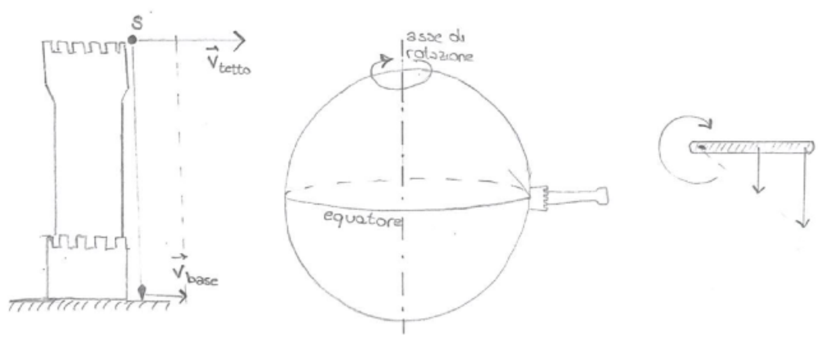
Questa era anche la velocità del sasso durante il suo moto circolare, calcoliamo quindi la accelerazione centripeta che subiva

$$a_c = \frac{v_s^2}{L} = \frac{S^2 g}{2hL} \simeq 163.5 \simeq 160 \text{ m/s}^2$$

(si noti che abbiamo arrotondato il risultato in modo che avesse solo due cifre significative come i dati del problema)

[Esperimento di Guglielmini] La prima ipotesi del moto di rotazione della terra risale al III secolo a.C. (Aristarco di Samo) ma una prova sperimentale fu fornita da Giovanni Battista Guglielmini nel 1791. Lasciò cadere dalla sommità della torre degli Asinelli di Bologna ($h = 97.2$ m) delle sferette di piombo. Sistematicamente le sferette toccavano il suolo spostate verso est rispetto alla verticale. Si calcoli, trascurando l'attrito dell'aria, lo spostamento atteso, considerando la rotazione terrestre e la latitudine di Bologna ($\theta_L = 44.5^o$).

[$S \simeq 2.24$ cm]



Nel moto rotatorio la velocità dipende dalla distanza dal centro. Supponiamo che la torre degli asinelli si trovi all'equatore. Detto R_T il raggio della terra alla base della torre degli asinelli, sulla sommità della stessa la distanza dal centro della terra sarà $R_T + h$. Quindi un corpo "fermo" si sta muovendo con velocità, dovuta alla rotazione della terra, che alla base e alla sommità valgono

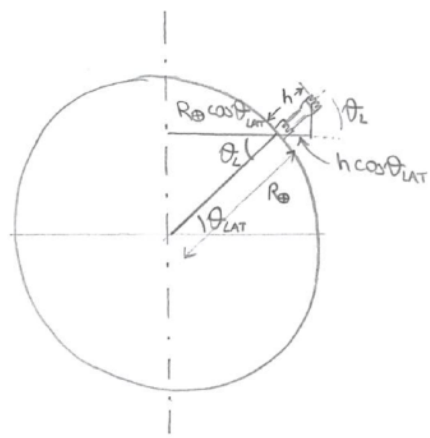
$$v_{base} = \omega_T R_T \qquad\qquad v_{tetto} = \omega_T(R_T + h)$$

Quindi la differenza di velocità della sommità della torre rispetto al suolo sottostante vale

$$v_{rel} = v = v_{tetto} - v_{base} = \omega_T h$$

In realtà, Bologna non si trova all'equatore, ma alla latitudine θ_L. Con un po' di trigonometria, vediamo che tutte le distanze radiali sono corrette per il fattore $\cos\theta_L$:

$$v = \omega_T h \cos\theta_L$$



Ora consideriamo il moto parabolico della sferetta, fissando un sistema di riferimento con origine nel punto in cui la sferetta viene rilasciata ma che "si muove insieme al suolo", cosicché la velocità iniziale della sferetta rispetto al suolo è la v appena calcolata:

$$\begin{cases} x = (\omega_T h \cos\theta_L)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La sferetta tocca il suolo quando $y = -h$, quindi dopo un tempo $t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

In questo tempo percorre una distanza orizzontale $S = \omega_t h \cos\theta_L \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

La velocità angolare di rotazione della terra corrisponde ad un angolo giro (2π) in un giorno (86400 s) quindi

$$S = \frac{2\pi}{86400\ \mathrm{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 97.2\ \mathrm{m}}{9.81\ \mathrm{m/s^2}}} (97.2\ \mathrm{m}) \cos(44.5^{\mathrm{o}}) \simeq 2.24\ \mathrm{cm}$$