NOTAZIONI

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

MAX/MIN – INF/SUP

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

Un numero reale λ si dice MASSIMO di A se

- $\lambda \in A$
- $\lambda \geq x \quad \forall x \in A$.

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

Un numero reale μ si dice

MINIMO di A se

- $\mu \in A$
- $\mu \leq x \quad \forall x \in A$

ES 1 $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underline{x \geq 0} \}$

$\exists \min A$ e vale 0, $\nexists \max A$

2) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$\exists \max A = 1$

$\nexists \min A$, infatti:

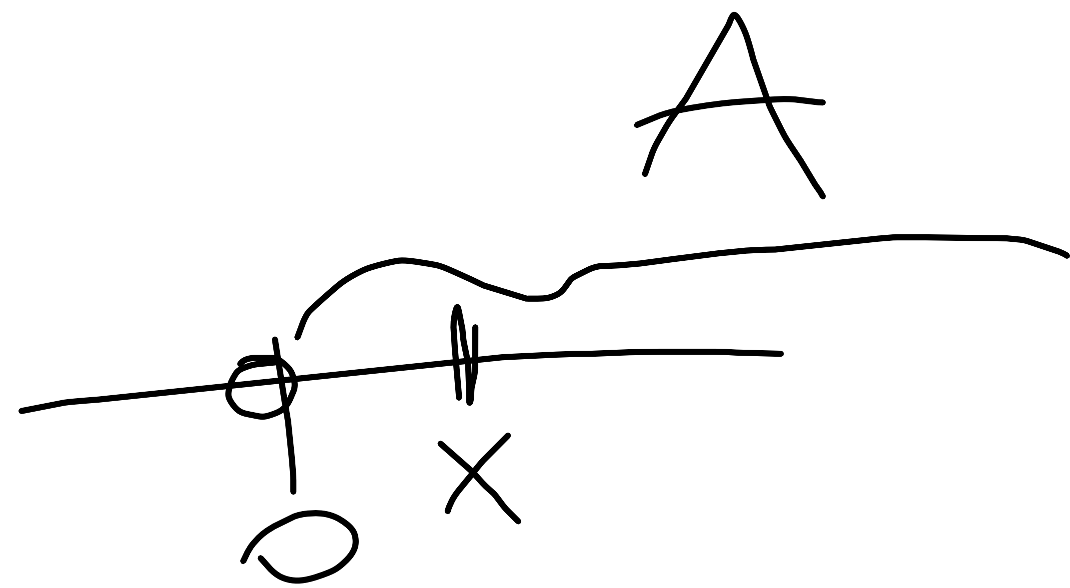
dato $\frac{1}{n} \in A$ si ha che

$\frac{1}{n+1} \in A$ e $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\nexists \max A$

$\nexists \min A$



infatti, dat $x \in A$

si ha che $\frac{x}{2} \in A$, $\frac{x}{2} < x$

<u>Def</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un <u>MAGGIORANTE</u> di A se
  $$\lambda \geq x \quad \forall x \in A.$$

- Diciamo che $\mu \in \mathbb{R}$ è un <u>MINORANTE</u> di A se
  $$\mu \leq x \quad \forall x \in A$$

Def. • Se A ammette un maggiorante si dice **SUPERIORMENTE LIMITATO**

• Se A ammette un minorante si dice **INFERIORMENTE LIMITATO**

• A si dice **LIMITATO** se è inf. limitato e sup. limitato.

ES $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

è sup. limitato, ma non inf. limitato

OSS Se A è finito $\Rightarrow A$ è limitato

ma A limitato $\not\Rightarrow A$ finito

es $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

TEOR Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- Sia A sup. limitato
  $\Rightarrow$ l'insieme dei maggioranti ammette minimo.

- Se A è inf. limitato
  $\Rightarrow$ l'insieme dei minoranti ammette massimo.

OSS Se un insieme ammette massimo (o minimo), esso è **UNICO**

Def: Se A è sup. limitato chiamo **ESTREMO SUPERIORE** di A (e lo indico con $\sup A$) il minimo dell'insieme dei maggioranti.

Def Se A è inf. limitato

chiamiamo ESTREMO INFERIORE di A

il massimo dei minoranti

(lo indichiamo con $\underline{\inf A}$)

- Se A non è sup. limitato,

poniamo $\sup A = +\infty$

- Se A non è inf. limitato,

poniamo $\inf A = -\infty$

ES

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$

- $\inf A = \min A = 0$

- $\sup A = 3$ $\quad \nexists \max A$

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

$\sup A = +\infty$ $\quad (\nexists \max A, \min A)$

$\inf A = -1$

TEOR **PRINCIPIO DI INDUZIONE**

Sia $P(n)$ un insieme di proposizioni al variare di $n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che

$$\begin{cases} \bullet\ P(0) \text{ sia vera} \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \text{ vera} \Longrightarrow P(n+1) \text{ vera} \end{cases}$$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

ES DIMOSTRARE:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

DIM (PER INDUZIONE)

1) • $P(1)$ è vera $(1 = 1)$

2) • $\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

2) Assumo che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\big(P(n)$ vera$\big)$

e voglio dimostrare

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$ $\big(P(n+1)$ vera$\big)$

Infatti:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k} = \underbrace{1+2+\dots+n}_{\sum_{k=1}^{n} k} + n+1 \underset{\text{per ip. induttiva}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 =$$

$$= n+1\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \boxed{n+1\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

2) DISUGUAGLIANZA di BERNOULLI

$\forall x \in \mathbb{R},\ x > -1,\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

DIM PER INDUZIONE

- $P(1)$ è vera $\left(1+x \geq 1+x\right)$

- $\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Infatti:

$$\boxed{(1+x)^{n+1}} = \underbrace{(1+x)^n}\,\underbrace{(1+x)}_{>0}$$

$$\geq (1+nx)(1+x)$$

ip. induttiva

$$= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + nx + x$$

$$= \boxed{1 + (n+1)x}$$

Dimostrazione per induzione dei

- $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

- $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$