# PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 09/06/2021

**Esercizio 1** Dati i punti $(-1,1)$, $(1,1)$, $(k,h)$, con $h,k \in \mathbb{R}$, si chiede di determinare per quali valori di $k$ e $h$ è possibile determinare una parabola $y = ax^2 + bx + c$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, passante per i tre punti dati.

**Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ con coordinate canoniche $(x,y,z,t)$ consideriamo il sottospazio $U$ di equazioni cartesiane $x+y-t=0$, $y-2z+3t=0$ e il sottospazio

$$W_k = \langle (2,-1,1,k), (1,1,1,1) \rangle,$$

dipendente da un parametro reale $k$.

a) Determinare al variare del parametro $k$ la dimensione e una base di $U \cap W_k$;
b) Determinare una base di $U + W_k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$;
c) Stabilire se esiste un sottospazio $V$ di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $V \cap U = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ e $V \cap W_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. In caso positivo determinare tale sottospazio $V$.

**Esercizio 3** In $\mathbb{R}^4$ con coordinate canoniche $(x,y,z,t)$ sia $U$ il sottospazio di equazione cartesiana $x-2y+3z+t=0$.

a) Giustificare il fatto che $U$ ha dimensione 3 e determinare una base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ di $U$.
b) Sia $F$ l'unico endomorfismo di $U$ tale che $F(\mathbf{b}_1) = F(\mathbf{b}_2) = F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Determinare $F(2,1,1,-3)$.
c) Stabilire se $F$ è diagonalizzabile.
d) Determinare gli autospazi di $F$.