AA 2023-2024 - Fisica - CdL Ingegneria e Scienze Informatiche

Luigi Guiducci - Esercitazioni

1) In un filo passa una corrente costante di 2.5 A. Quanti elettroni passano attraverso una sezione del filo in cinque minuti?

[$n \simeq 4.7 \times 10^{21}$]

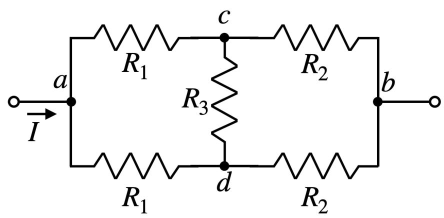
2) Una rotaia di alimentazione di un treno della metropolitana ha sezione 5.3×10^{-3} m^2 ed è fatta di acciaio con una resistività di 3×10^{-7} Ωm. Qual è la resistenza di 1 km di rotaia?

[$R \simeq 57$ mΩ]

3) Un filo ha una resistenza di 40 mΩ; viene fuso e si ricava un filo lungo il triplo. Quanto vale la resistenza del nuovo filo?

[$R' \simeq 360$ mΩ]

4) Nel sistema di resistenze in figura, si ha $R_1 = 5.0\ \Omega$, $R_2 = 3.0\ \Omega$ e $R_3 = 4.0\ \Omega$. Si trovi la differenza di potenziale tra i punti c e d. Se la d.d.p. tra i punti a e b è di 8.0 V, si dica la d.d.p. ai capi di ciascuna resistenza e qual è la corrente che scorre in ciascuna di esse.

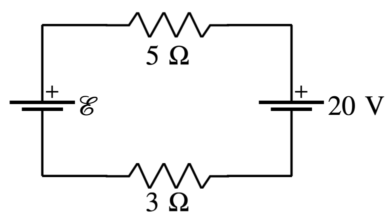


[$V_c - V_d = 0$; $V_1 = 5.0$ V; $V_2 = 3.0$ V; $I_1 = I_2 = 1.0$ A]

5) Le resistenze usate nei circuiti hanno delle potenze massime nominali raccomandate. Supponiamo di collegare in parallelo una resistenza $R_1 = 200\ \Omega$ e una resistenza $R_2 = 400\ \Omega$ con entrambe le resistenze aventi una $P_{max} = 0.50$ W. Qual è la massima corrente che può circolare in questo sistema? Qual è la massima d.d.p. che si può applicare agli estremi? Quali sono le potenze dissipate in questa condizione?

[$I_{max} \simeq 75$ mA; $V_{max} \simeq 10$ V; $P_1 \simeq 0.5$ W; $P_2 \simeq 0.25$ W]

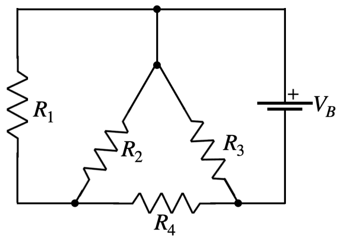
6) Nel circuito in figura, si trovi il valore di $\mathscr{E}$ in modo che circoli una corrente di 2 A in senso antiorario, poi il valore di $\mathscr{E}$ in modo che circoli una corrente di 2 A in senso orario.



[$\mathscr{E}_1 \simeq 4$ V; $\mathscr{E}_2 \simeq 36$ V]

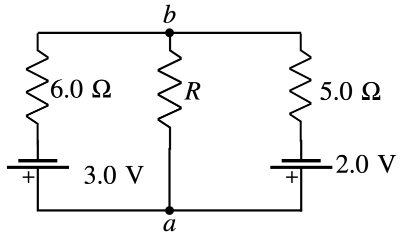
7) Nel circuito in figura si ha $V_B = 6.0$ V, $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$, $R_3 = 18\ \Omega$, $R_4 = 4.5\ \Omega$. Si calcoli la resistenza equivalente del circuito, la corrente nella resistenza R_3, la corrente nella resistenza R_1 e la potenza dissipata nella resistenza R_4.

[$R^{eq} \simeq 7.41\ \Omega$; $I_3 \simeq 0.33$ A; $I_1 \simeq 0.322$ A; $P_4 \simeq 1.02$ W]



8) Nel circuito in figura, si trovi il valore di R in modo che la corrente che passa in R sia $I_R = 0.50$ A con senso da a a b.

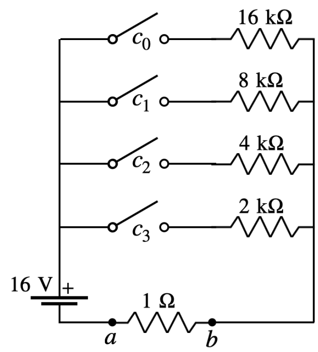
[$R \simeq 2.2\ \Omega$]



9) Un condensatore viene caricato da una batteria da 26 V attraverso una resistenza da 6.2 kΩ. 3.1 ms dopo la chiusura dell'interruttore, la differenza di potenziale sul condensatore è di 13 V. Quanto vale la capacità del condensatore?

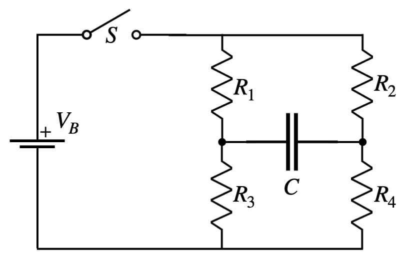
[$C \simeq 0.72\ \mu$F]

10) Si mostri che il circuito rappresentato a destra funziona come un *Digital to Analog Converter* (DAC, convertitore digitale-analogico). Un numero intero c viene rappresentato in notazione binaria per mezzo dei quattro bit $c_3c_2c_1c_0$, dove ciascun bit può chiudere (se vale '1') o aprire (se vale 'o') il corrispondente interruttore, e può dunque rappresentare tutti gli interi nell'intervallo [0,15]. La differenza di potenziale $V_b - V_a$ rappresenta il numero stesso, in mV.



11) Nel circuito rappresentato in figura, si ha $V_B = 12$ V, $R_1 = 1.0\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 9.0\ \Omega$, $R_4 = 5.0\ \Omega$ e $C = 2.2\ \mu$F. Si trovi la tensione e la carica del condensatore quando è completamente carico (S chiuso). Poi S viene aperto: quanto tempo occorre perché C si scarichi fino al 3% della carica iniziale?

[$V_C \simeq 6.8$ V; $Q_C \simeq 15\ \mu$C; $t^* \simeq 48\ \mu$s]



SOLUZIONI

1) In un filo passa una corrente costante di 2.5 A. Quanti elettroni passano attraverso una sezione del filo in cinque minuti?

[$n \simeq 4.7 \times 10^{21}$]

La corrente è la quantità di carica per unità di tempo; esprimendo la carica come il numero di elettroni per la carica dell'elettrone, abbiamo

$$I = \frac{n e}{\Delta t}$$

e quindi

$$n = \frac{I \Delta t}{e} \simeq 4.7 \times 10^{21}$$

2) Una rotaia di alimentazione di un treno della metropolitana ha sezione 5.3×10^{-3} m^2 ed è fatta di acciaio con una resistività di 3×10^{-7} Ωm. Qual è la resistenza di 1 km di rotaia?

[$R \simeq 57$ mΩ]

Dato che

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

dove ρ è la resistività, l la lunghezza del conduttore e A l'area della sua sezione, otteniamo

$$R \simeq 57 \text{ m}\Omega$$

3) Un filo ha una resistenza di 40 mΩ; viene fuso e si ricava un filo lungo il triplo. Quanto vale la resistenza del nuovo filo?

[$R' \simeq 360$ mΩ]

Il nuovo filo avrà lo stesso volume del filo originale, quindi l'area della sua sezione sarà un terzo:

$$V = lA = 3lA' \quad \Longrightarrow \quad A' = A/3$$

Inoltre il materiale è sempre lo stesso, quindi esso avrà la stessa resistività. Per il vecchio filo

$$\rho = R \frac{A}{l}$$

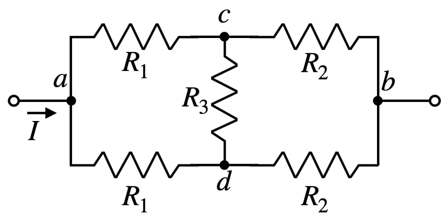
e per il nuovo filo

$$R' = \rho \frac{l'}{A'} = R \frac{A}{l} \frac{3l}{A/3}$$

in conclusione

$$R' = 9R \simeq 360 \text{ m}\Omega$$

4) Nel sistema di resistenze in figura, si ha $R_1 = 5.0\ \Omega$, $R_2 = 3.0\ \Omega$ e $R_3 = 4.0\ \Omega$. Si trovi la differenza di potenziale tra i punti c e d. Se la d.d.p. tra i punti a e b è di 8.0 V, si dica la d.d.p. ai capi di ciascuna resistenza e qual è la corrente che scorre in ciascuna di esse.



[$V_c - V_d = 0$; $V_1 = 5.0$ V; $V_2 = 3.0$ V; $I_1 = I_2 = 1.0$ A]

La differenza di potenziale tra c e d sarà pari a zero, in quanto il ramo superiore e quello inferiore presenta resistenze di pari valore. Quindi il circuito è equivalente a un circuito più semplice in cui R_3 non è presente. Il valore complessivo della resistenza del ramo superiore è $R = R_1 + R_2$ ed è uguale a quella del ramo inferiore; la resistenza complessiva è quindi quella di due resistenze di valore R in parallelo, cioè

$$R_{tot} = \frac{R_1 + R_2}{2} \simeq 4.0\ \Omega$$

Abbiamo quindi, in presenza di d.d.p. tra a e b di 8.0 V, una corrente totale pari a

$$I_{tot} = \frac{8.0\ \text{V}}{4.0\ \Omega} \simeq 2.0\ \text{A}$$

che si divide in parti uguali nei due rami. Quindi tutte le resistenze sono attraversate da una corrente

$$I_1 = I_2 = 1.0\ \text{A}$$

e le differenze di potenziale ai capi delle R_1 e delle R_2 saranno

$$V_1 = R_1 I_1 = 5.0\ \text{V} \qquad V_2 = R_2 I_2 = 3.0\ \text{V}$$

5) Le resistenze usate nei circuiti hanno delle potenze massime nominali raccomandate. Supponiamo di collegare in parallelo una resistenza $R_1 = 200\ \Omega$ e una resistenza $R_2 = 400\ \Omega$ con entrambe le resistenze aventi una $P_{max} = 0.50$ W. Qual è la massima corrente che può circolare in questo sistema? Qual è la massima d.d.p. che si può applicare agli estremi? Quali sono le potenze dissipate in questa condizione?

[$I_{max} \simeq 75$ mA; $V_{max} \simeq 10$ V; $P_1 \simeq 0.5$ W; $P_2 \simeq 0.25$ W]

Dato che la d.d.p. sulle due resistenze è la stessa, la corrente totale si divide in modo che

$$V_1 = R_1 I_1 = V_2 = R_2 I_2 \implies I_1 = \frac{R_2}{R_1} I_2 = 2I_2$$

cioè come è intuitivo la corrente sulla resistenza da 200 Ω è sempre il doppio della corrente sulla resistenza da 400 Ω. Quindi, detta $I = I_1 + I_2$ la corrente totale che entra, avremo

$$I_1 = \frac{2}{3} I \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{1}{3} I$$

Le due potenze dissipate sono

$$P_1 = R_1 I_1^2 \quad \text{e} \quad P_2 = R_2 I_2^2$$

ovvero

$$P_1 = \frac{4}{9} R_1 I^2 \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{1}{9} R_2 I^2$$

Entrambe le potenze devono essere minori del massimo valore ammesso, P_{max}, e la prima resistenza che rischia di incontrare il limite è la R_1, quindi

$$P_1 < P_{max} \implies \frac{4}{9} R_1 I^2 < P_{max} \implies I < \sqrt{\frac{9P_{max}}{4R_1}} \simeq 75 \text{ mA}$$

Nella configurazione parallela, le due resistenze equivalgono ad una resistenza complessiva

$$R_{tot} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \simeq 133\ \Omega$$

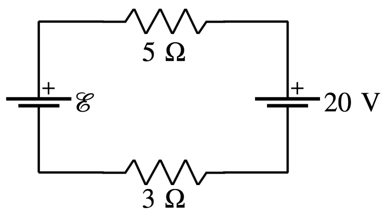
quindi la massima d.d.p. che si può applicare ai capi del circuito vale

$$V_{max} = R_{tot} \sqrt{\frac{9P_{max}}{4R_1}} \simeq 10 \text{ V}$$

Le potenze dissipate in queste condizioni sono

$$P_1 = \frac{V_{max}^2}{R_1} \simeq 0.5 \text{ W} \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{V_{max}^2}{R_2} \simeq 0.25 \text{ W}$$

6) Nel circuito in figura, si trovi il valore di $\mathscr{E}$ in modo che circoli una corrente di 2 A in senso antiorario, poi il valore di $\mathscr{E}$ in modo che circoli una corrente di 2 A in senso orario.



[$\mathscr{E}_1 \simeq 4$ V; $\mathscr{E}_2 \simeq 36$ V]

Applichiamo la legge di Kirchoff delle maglie:

$$(20\ \mathrm{V}) - (5\ \Omega)(2\ \mathrm{A}) - \mathscr{E} - (3\ \Omega)(2\ \mathrm{A}) = 0$$

da cui

$$\mathscr{E} = 4\ \mathrm{V}$$

per una corrente in senso antiorario. Per una corrente in senso orario, avremo

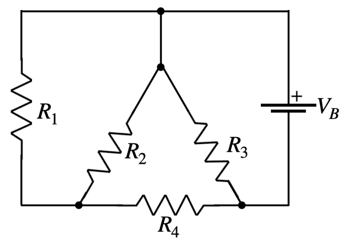
$$(-20\ \mathrm{V}) - (5\ \Omega)(2\ \mathrm{A}) + \mathscr{E} - (3\ \Omega)(2\ \mathrm{A}) = 0$$

da cui

$$\mathscr{E} = 36\ \mathrm{V}$$

Si noti che sulle resistenze si ha sempre una caduta di tensione (quindi entra nella legge di Kirchoff sempre con il segno meno), invece le d.d.p. introdotte dai generatori di tensione hanno il segno dipendente dal verso della corrente (positivo se la corrente circola uscendo dal terminale positivo, negativo se la corrente circola entrando nel terminale positivo).

7) Nel circuito in figura si ha $V_B = 6.0$ V, $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$, $R_3 = 18\ \Omega$, $R_4 = 4.5\ \Omega$. Si calcoli la resistenza equivalente del circuito, la corrente nella resistenza R_3, la corrente nella resistenza R_1 e la potenza dissipata nella resistenza R_4.



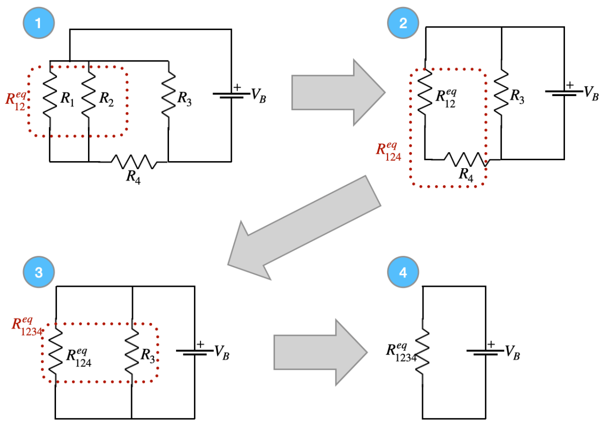
[$R^{eq} \simeq 7.41\ \Omega$; $I_3 \simeq 0.33$ A; $I_1 \simeq 0.322$ A; $P_4 \simeq 1.02$ W]

È utile ridisegnare il circuito e procedere a calcolare le resistenze equivalenti passo dopo passo. Innanzi tutto, ridisegniamo il circuito originale per rendere più chiara la situazione, poi procediamo a semplificare il circuito sostituendo via via le resistenze equivalenti, come mostrato nella figura seguente. Dunque si ha:

$$R_{12}^{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \simeq 8.11\ \Omega$$

$$R_{124}^{eq} = R_{12}^{eq} + R_4 \simeq 12.6\ \Omega$$

$$R_{1234}^{eq} = \frac{R_{124}^{eq} R_3}{R_{124}^{eq} + R_3} \simeq 7.41\ \Omega$$



La corrente complessivamente erogata dalla batteria sarà

$$I = \frac{V_B}{R_{1234}^{eq}} \simeq 0.809\ \text{A}$$

Ora che abbiamo semplificato completamente il circuito, trovando la resistenza equivalente e quindi la corrente erogata dalla batteria, procediamo a ritroso per rispondere alle altre domande. Per trovare la corrente in R_3, facciamo riferimento alla figura 3: la resistenza R_3 è sottoposta direttamente alla d.d.p. della batteria quindi

$$V_B = R_3 I_3 \quad \Longrightarrow \quad I_3 = \frac{V_B}{R_3} \simeq 0.33\ \text{A}$$

La corrente che passa in R_{124}^{eq} sarà $I_{124} = I - I_3 = \dfrac{V_B}{I_{124}} \simeq 0.476$ A. Come si vede nella figura 2 questa corrente passa tutta da R_{12}^{eq} e poi in R_4. Ai capi di R_{12}^{eq} c'è quindi una d.d.p.

$$V_{12} = R_{12}^{eq} I_{124} \simeq 3.86\ \text{V}$$

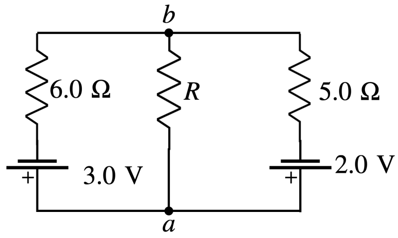
Questa d.d.p. è quindi applicata ai capi di R_1 e di R_2 (figura 1) corrisponde ad una corrente I_1

$$I_1 = \frac{V_{12}}{R_1} \simeq 0.322\ \text{A}$$

Anche nella resistenza R_4 passa la corrente I_{124}, quindi la potenza da essa dissipata sarà

$$P_4 = R_4 {I_{124}}^2 \simeq 1.02\ \text{W}$$

8) Nel circuito in figura, si trovi il valore di R in modo che la corrente che passa in R sia $I_R = 0.50$ A con senso da a a b.



[$R \simeq 2.2\ \Omega$]

Chiamiamo I_1 la corrente che esce dal generatore di sinistra e I_2 quella che esce dal generatore di destra, avremo che la corrente che passa nella resistenza R sarà $I_R = I_1 + I_2$ e si avrà una d.d.p. ai capi di R pari a

$$V_R = RI_R = RI_R$$

La legge di Kirchoff applicata alle due maglie fornisce le equazioni:

$$\begin{cases} (3.0\ \mathrm{V}) - \mathrm{RI_R} - (6.0\ \Omega)\mathrm{I_1} = 0 \\ (2.0\ \mathrm{V}) - \mathrm{RI_R} - (5.0\ \Omega)(\mathrm{I_R} - \mathrm{I_1}) = 0 \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare il valore

$$R \simeq 2.2\ \Omega$$

9) Un condensatore viene caricato da una batteria da 26 V attraverso una resistenza da 6.2 kΩ. 3.1 ms dopo la chiusura dell'interruttore, la differenza di potenziale sul condensatore è di 13 V. Quanto vale la capacità del condensatore?

[$C \simeq 0.72\ \mu$F]

La tensione sul condensatore, durante la carica, segue la legge

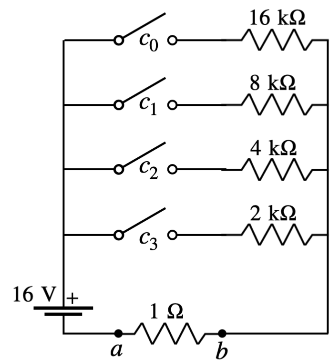
$$V(t) = V_B\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

quindi

$$\ln\left(\frac{V_B - V(t^*)}{V_B}\right) = -\frac{t^*}{RC}$$

$$C = \frac{t^*}{R\ln\left(\frac{V_B}{V_B - V(t^*)}\right)} \simeq 0.72\ \mu\mathrm{F}$$

10) Si mostri che il circuito rappresentato a destra funziona come un *Digital to Analog Converter* (DAC, convertitore digitale-analogico). Un numero intero c viene rappresentato in notazione binaria per mezzo dei quattro bit $c_3c_2c_1c_0$, dove ciascun bit può chiudere (se vale '1') o aprire (se vale '0') il corrispondente interruttore, e può dunque rappresentare tutti gli interi nell'intervallo [0,15]. La differenza di potenziale $V_b - V_a$ rappresenta il numero stesso, in mV.



Il numero binario $c_3c_3c_1c_0$ si converte in decimale con $c^{\text{dec}} = 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0$. Ora dobbiamo dimostrare che tale espressione rappresenta proprio la tensione $V_b - V_a = V_{ab}$, in mV.

Se gli switch sono tutti aperti, cioè il numero $c_3c_2c_1c_0 = 0000$, si ha $I = 0$, e quindi $V_{ab} = 0$.

Chiamiamo R_{eq} la resistenza presente sul DAC quando almeno un interruttore c_j è chiuso e verifichiamo subito che possiamo fare una piccola approssimazione.

La resistenza totale del circuito sarà $R_{eq} + 1\ \Omega$. Il valore minimo di R_{eq} si avrà con tutti gli interruttori chiusi (tutte le resistenze in parallelo), si avrà $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_j \frac{1}{R_j}$ dunque $R_{eq} = \frac{16}{15}\ \text{k}\Omega$.

Quindi anche per il valore minimo possibile, $R_{eq} \gg 1\ \Omega$. Trascuriamo quindi, nei vari casi, la presenza della resistenza da $1\ \Omega$ nel calcolare la resistenza totale. In questo caso, con tutti gli switch chiusi e quindi $c_3c_2c_1c_0 = 1111$, si ha $R_{eq} = \frac{16}{15}\ \text{k}\Omega$, la corrente circolante nel circuito sarà $I = \frac{16\ \text{V}}{\frac{16}{15}\ \text{k}\Omega} = 15\ \text{mA}$, mentre la differenza di potenziale ab sarà $V_{ab} = (15\ \text{mA})(1\ \Omega) = 15\ \text{mV}$, come atteso. Ora verifichiamo che in generale la misura di V_{ab} in mV è la rappresentazione decimale del numero binario $c_3c_2c_1c_0$. Il valore della resistenza presente sul circuito DAC sarà in generale tale che

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_j \frac{c_j}{R_j}$$

quindi

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{c_0(2\ \text{k}\Omega)(4\ \text{k}\Omega)(8\ \text{k}\Omega) + c_1(2\ \text{k}\Omega)(4\ \text{k}\Omega)(16\ \text{k}\Omega) + c_2(2\ \text{k}\Omega)(8\ \text{k}\Omega)(16\ \text{k}\Omega) + c_3(4\ \text{k}\Omega)(8\ \text{k}\Omega)(16\ \text{k}\Omega)}{(2\ \text{k}\Omega)(4\ \text{k}\Omega)(8\ \text{k}\Omega)(16\ \text{k}\Omega)}$$

$$\implies \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3}{16\ \text{k}\Omega} \qquad \implies \quad R_{eq} = \frac{16\ \text{k}\Omega}{c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3}$$

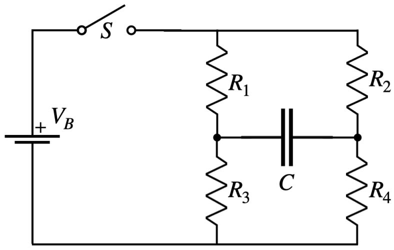
La tensione su ab quindi sarà

$$V_{ab} = I(1\ \Omega) = \frac{16\ \text{V}}{16\ \text{k}\Omega}(c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3)(1\ \Omega)$$

$$V_{ab} = (c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3)\ \text{mV}$$

CVD

11) Nel circuito rappresentato in figura, si ha $V_B = 12$ V, $R_1 = 1.0\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 9.0\ \Omega$, $R_4 = 5.0\ \Omega$ e $C = 2.2\ \mu$F. Si trovi la tensione e la carica del condensatore quando è completamente carico (S chiuso). Poi S viene aperto: quanto tempo occorre perché C si scarichi fino al 3% della carica iniziale?



[$V_C \simeq 6.8$ V; $Q_C \simeq 15\ \mu$C; $t^* \simeq 48\ \mu$s]

La corrente erogata dal generatore si divide sui due rami

$$I_{13} = \frac{V_B}{R_1 + R_3} = 1.2 \text{ A} \qquad I_{24} = \frac{V_B}{R_2 + R_4} = 0.8 \text{ A}$$

Per trovare la differenza di potenziale ai capi del condensatore, possiamo calcolare la differenza tra la caduta di potenziale su R_3 e su R_4:

$$V_C = I_{13}R_3 - I_{24}R_4 = 6.8 \text{ V}$$

La carica presente sul condensatore è dunque

$$Q = CV_C \simeq 15\ \mu\text{C}$$

Quando S viene aperto, il condensatore si scarica su un circuito resistivo costituito dal parallelo tra la serie di R_1 e R_2 con la serie di R_3 e R_4, che ha resistenza equivalente:

$$R'_{tot} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \simeq 6.16\ \Omega$$

L'equazione della carica sul condensatore in funzione del tempo è

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{R'_{tot}C}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-\frac{t}{R'_{tot}C}}$$

quindi

$$-\frac{t^*}{R'_{tot}C} = \ln 0.03 \quad \Longrightarrow \quad t = -R'_{tot}C \ln 0.03 \simeq 47.5\ \mu\text{s}$$