FUNZIONI

Siano A, B insiemi

$A, B \neq \emptyset$

Una legge $f : A \longrightarrow B$ si dice FUNZIONE se

$\forall x \in A, \exists! y \in B$ t.c. $f(x) = y$

A = DOMINIO

B = CODOMINIO

$\underline{f(A)} = \{ y \in B \mid \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = y \}$

IMMAGINE

Def Diciamo che una funzione $f : A \to B$ è **SURIETTIVA** se

$$f(A) = B$$

$$\left(\forall y \in B, \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = y \right)$$

Def Diciamo che $f : A \to B$ è **INIETTIVA** se

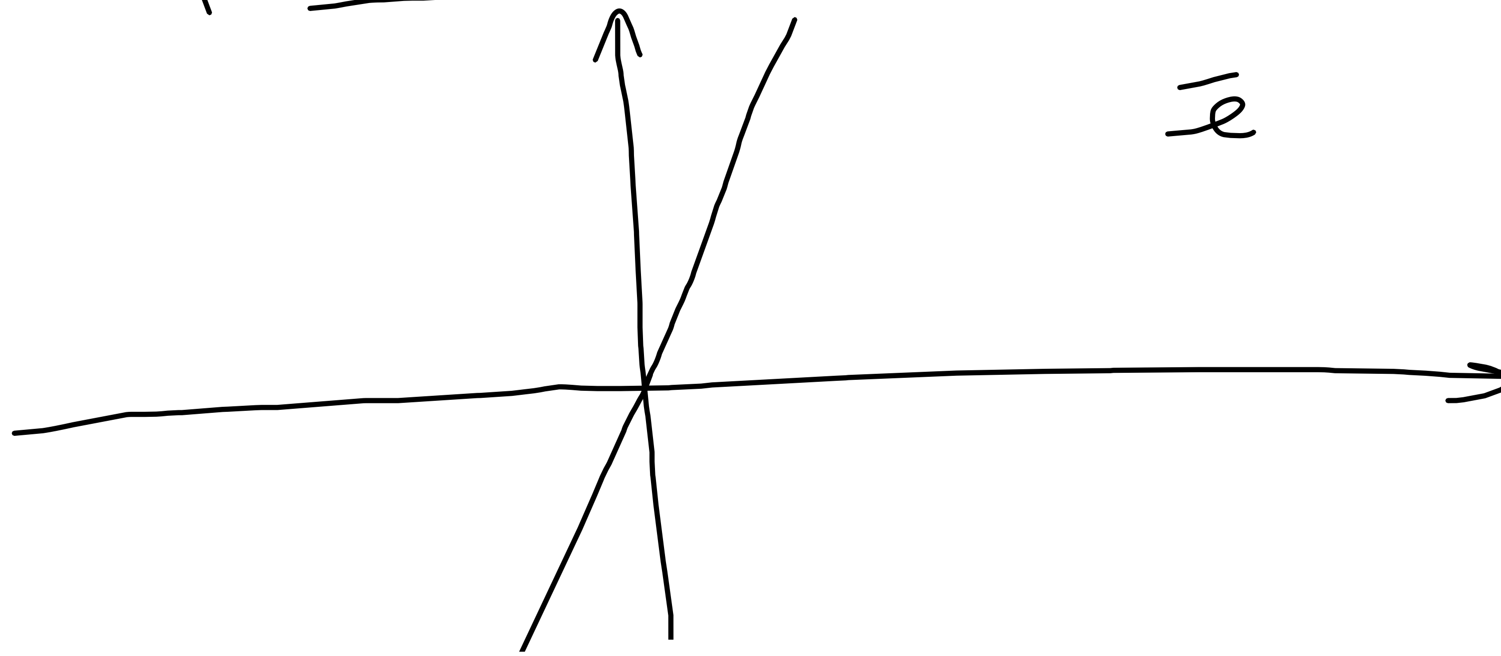
$$\forall y \in f(A) \; \exists! \, x \in A \text{ t.c. } f(x) = y$$

Def Diciamo che $f: A \to B$ è BIUNIVOCA (BIETTIVA, INVERTIBILE) se è iniettiva e suriettiva.

Notazione
- f è $\underline{1\text{-}1}$ $\left(f: A \xrightarrow[1-1]{} B\right)$ INIETTIVA
- f è $\underline{\text{SU}}$ $\left(f: A \xrightarrow[\text{SU}]{} B\right)$ SURIETTIVA

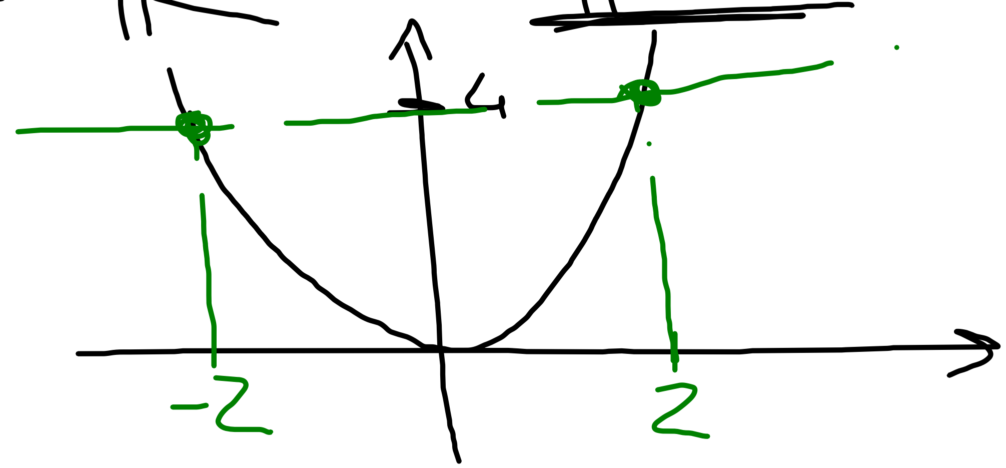
ES: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x$

è 1-1, su



ES: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

f NON è su



ES f è 1-1 se $\forall x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- $f(x) = 2x$. Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

t.c. $2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

- $f(x) = x^2$ Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

t.c. $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \begin{cases} x_2 \\ -x_2 \end{cases}$

Def Sia $f : A \xrightarrow[su]{1-1} B$ /

chiamiamo FUNZIONE INVERSA di f (e la indichiamo con f^{-1}) la funzione

$\underline{\underline{f^{-1}}} : B \longrightarrow A$

che agisce così :

$\forall\, \underline{y \in B}$, : $f^{-1}(y)$ è l'unico soluzione dell'equazione $\underline{\underline{f(x) = y}}$.

COMPOSIZIONE di FUNZIONI

Def Siano X, Y, Z, W insiemi $\neq \emptyset$

$f : X \to Y$, $g : Z \to W$

t.c. $f(X) \subseteq Z$.

Chiamiamo FUNZIONE COMPOSTA $g \circ f$

la funzione

$g \circ f : X \to W$, $g \circ f(x) = g(f(x))$ $\forall x \in X$

ES:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x+1$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(y) = y^2$

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1)$

$= (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$

- $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^2) =$

$= 2y^2+1$

$f : A \xrightarrow[su]{1-1} B$

$Id(x) = x$

- $(f \circ f^{-1}) = Id|_B$
- $(f^{-1} \circ f) = Id|_A$

TEOR Siano $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ invertibili, $Y = Z$

$\Rightarrow g \circ f$ è invertibile e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

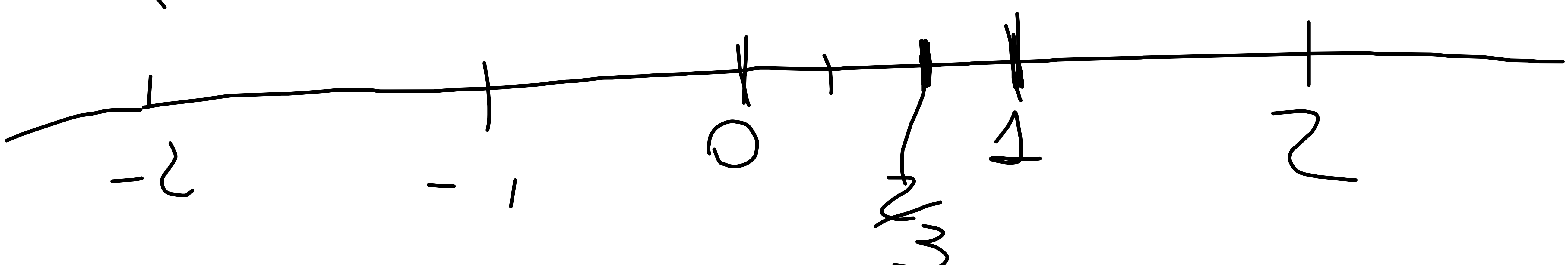
- $\mathbb{N}$ = numeri naturali
  $= \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

- $\mathbb{Z}$ = numeri interi
  $= \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

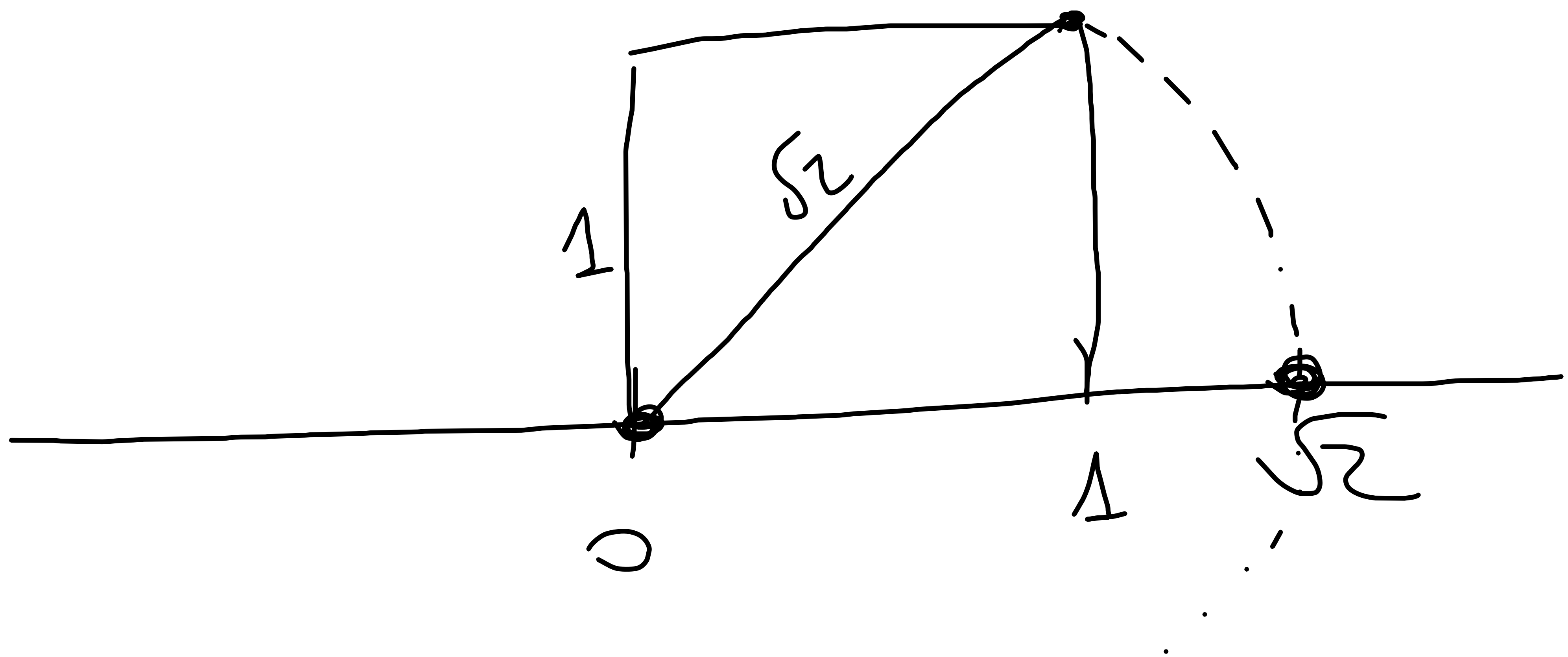
- $\mathbb{Q}$ = numeri razionali
  $= \left\{ q = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R}$ = numeri reali

$\mathbb{Q}$



$q \in \mathbb{Q} \quad q = \frac{2}{3}$



1
√2
0
1
√2

TEOR

Se $\underbrace{q \in \mathbb{Q}}_{\text{IPOTESI}} \Rightarrow \underbrace{q^2 \neq 2}_{\text{TESI}}$.

DIM per ASSURDO.

Supponiamo per assurdo che $q^2 = 2$.

Per ipotesi $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

e possiamo supporre che $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

Quindi $\frac{m^2}{n^2} = 2 \iff m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ è pari $\Rightarrow$ $\boxed{m \text{ è pari}}$

Quindi m è della forma

$m = 2p$ per qualche $p \in \mathbb{Z}$

Si deduce che:

$4p^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2$

$\Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow$ $\boxed{n \text{ pari}}$

ASSURDO perché $\frac{m}{n}$ ridotta ai minimi termine.

ASSIOMI di $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$ è un <u>CAMPO</u>, cioè un insieme su cui sono definite le due operazioni $(+, \cdot)$ con le seguenti proprietà:

- $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ $\quad (x+y)+z = x+(y+z)$

  PROPR. ASSOCIATIVA $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x+y = y+x$

  PROPR. COMMUTATIVA $\quad x \cdot y = y \cdot x$

- $\exists$ ELEMENTO NEUTRO $\quad 0 + x = x \quad \forall x$

  $1 \cdot x = x, \ \forall x$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $x + y = 0$

  si chiama <u>OPPOSTO</u> di x

  e si denota con <u>$-x$</u>

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $x \cdot y = 1$

  si chiama RECIPROCO o INVERSO

  e si denota x^{-1} o $\frac{1}{x}$

- <u>PROPR DISTRIBUTIVA</u> $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

ASSIOMA di ORDINE:

$\mathbb{R}$ è un campo **Totalmente ordinato** $(\leq)$

ASSIOMA di COMPLETEZZA

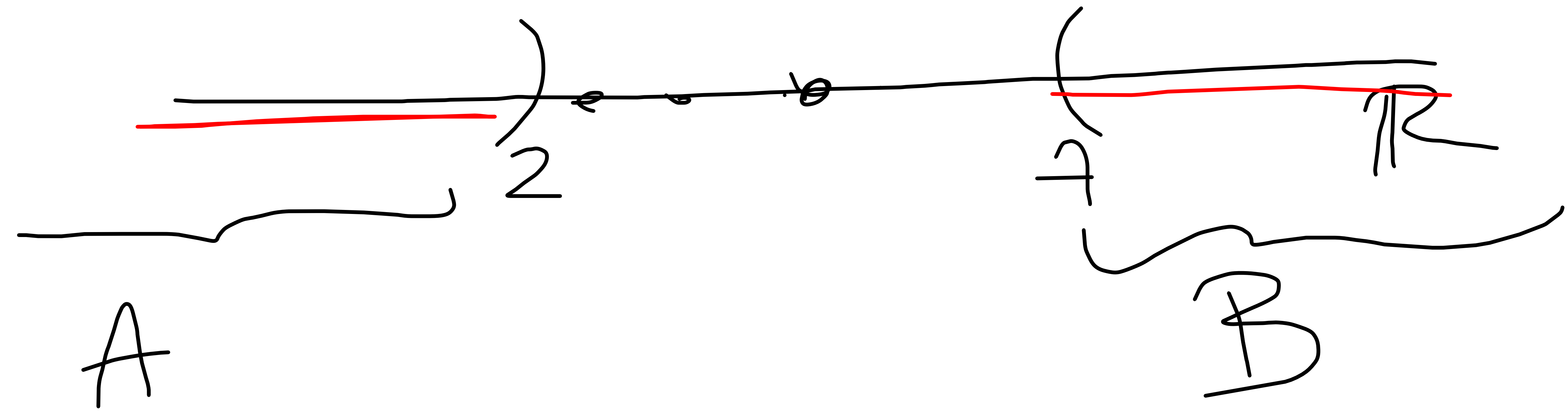
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ **SEPARATI**

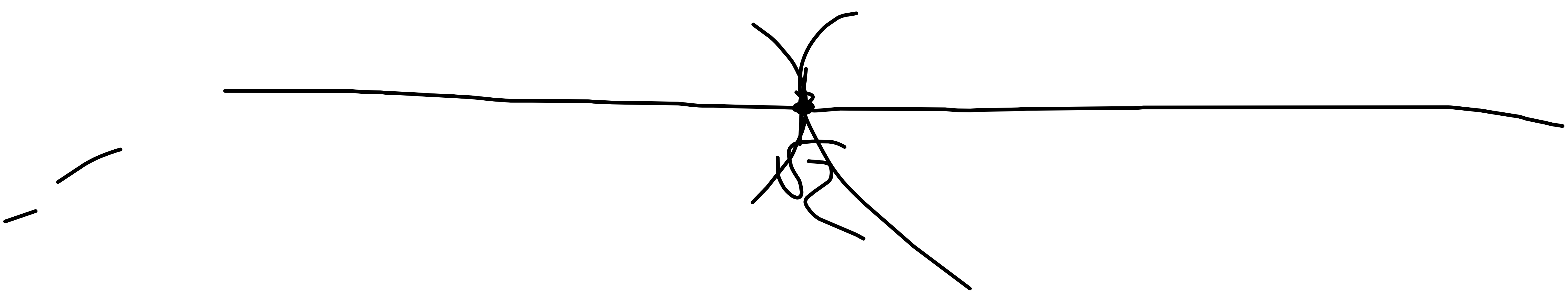
(cioè $\forall a \in A, \forall b \in B$ si ha $a \leq b$)

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$

$\forall a \in A, b \in B$

ELEMENTO di SEPARAZIONE


2
7
ℝ
A
B


√2

CARDINALITÀ :

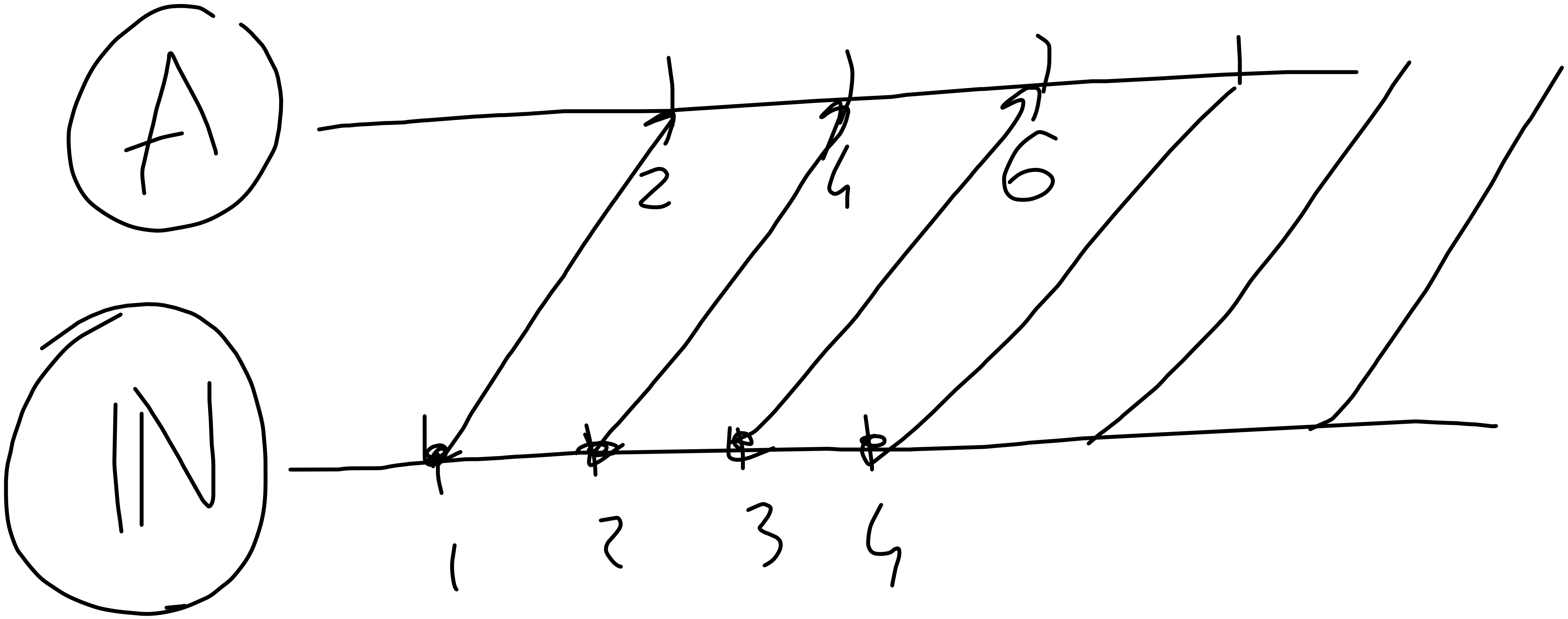
"Contare" gli elementi di un insieme A significa stabilire una corrispondenza iniettiva con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$

ES $A = \{ \cdot, \cdot, \cdot \} \longleftrightarrow \{1, 2, 3\}$

3 elementi

Se A ha infiniti elementi e può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ A si dice NUMERABILE

ES $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari} \}$



Q è NUMERABILE

$\mathbb{R}$ non è numerabile

- $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$\exists c \in \mathbb{Q}$ t.c. $a < c < b$