

Esercizio 1 – 19 Marzo 2024

Si consideri l'equazione quadratica $x^2 + 2px - q = 0$ con $p = 10^5$ e $q = 10^{-i}$ $i = 0, \dots, 10$

Si stabilisca se il problema relativo al calcolo della soluzione $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$ risulta essere ben condizionato per tutti i valori di q assegnati

$x = -p + \sqrt{p^2 + q}$ può essere considerato come l'output di una funzione di q , essendo p fisso.

$$f(q) = -p + \sqrt{p^2 + q}$$

Ricordiamo la formula dell'indice di condizionamento del problema di valutare una funzione in un punto q :

$$K \approx \left| \frac{f'(q)}{f(q)} q \right|$$

Nel nostro caso:

$$f'(q) = \frac{1}{2\sqrt{p^2 + q}}$$

Studiamo come si comporta l'indice di condizionamento per $q \rightarrow 0$

$$\frac{f'(q)}{f(q)} q = \frac{1}{2\sqrt{p^2 + q}} \frac{1}{-p + \sqrt{p^2 + q}} q$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{p + \sqrt{p^2 + q}}$

$$\begin{aligned} \frac{f'(q)}{f(q)} q &= \frac{1}{2\sqrt{p^2 + q}} \frac{1}{-p + \sqrt{p^2 + q}} \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{p + \sqrt{p^2 + q}} q = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{p^2 + q}} \frac{1}{-p + \sqrt{p^2 + q}} \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{p + \sqrt{p^2 + q}} q \\ &= \frac{1}{2\sqrt{p^2 + q}} \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{p^2 + q - p^2} q = \frac{1}{2\sqrt{p^2 + q}} \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{q} q = \\ &= \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{2\sqrt{p^2 + q}} \end{aligned}$$

$$K \approx \left| \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{2\sqrt{p^2 + q}} \right|$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left| \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{2\sqrt{p^2 + q}} \right| = \frac{p + \sqrt{p^2}}{2\sqrt{p^2}} = \frac{p + p}{2p} = 1$$

Il problema della valutazione della funzione

$$f(q) = -p + \sqrt{p^2 + q}$$

è **ben condizionato**, in quanto $K \rightarrow 1$ quando $q \rightarrow 0$