PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/07/2021

Esercizio 1 Dato l'insieme $V = \{(b, 2a-b, 2a+b, a+2b) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0\}$ si chiede di:
(a) dimostrare che V é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
(b) determinare una base B di V;
(c) se necessario, completare l'insieme B per avere una base B' di $\mathbb{R}^4$;
(d) determinare il sottospazio $K = V \cap W$ e $\dim(K)$.

Esercizio 2 Dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 1, k)$, con $k \in \mathbb{R}$, e l'insieme $W = \langle (0, 2, h) \rangle$, con $h \in \mathbb{R}$, si chiede di:
(a) dimostrare per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$;
(b) determinare la dimensione di $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ al variare di k;
(c) determinare $K = V + W$ e verificare per quali valori di k e h tale somma è diretta.

Esercizio 3 Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0$ e si consideri l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x, y, z) = (x-2y+3z, 2x-3y+3z, 3x-3y+2z)$.
(a) Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 2x - 3y + 3z, 3x - 3y + 2z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
(b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.
(c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
(d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.