**AA 2022-2023 - Fisica - CdL Ingegneria e Scienze Informatiche**
**Luigi Guiducci - Esercitazioni**

### *Un esercizio sulle generalità della cinematica in più di una dimensione*

[1] Si consideri l'equazione del moto vettoriale di un punto materiale

$$\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\hat{\imath} + Bt^2\hat{\jmath}$$

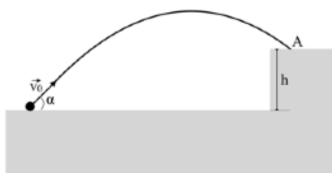
con $A, B$ e $\omega$ costanti positive. Si chiede di: i) specificare le dimensioni fisiche delle costanti $A, B$ e $\omega$; ii) calcolare i vettori velocità $\vec{v}$ e accelerazione $\vec{a}$ nell'istante $t^* = \pi/\omega$; iii) stabilire se, per $t = t^*$, il modulo della velocità sta aumentando o diminuendo.

### *Esercizi sul moto del proiettile*

[2] Un elicottero che vola con velocità orizzontale $v_0 = 70$ m/s deve lanciare un pacco di emergenza a due alpinisti che si trovano $h = 200$ m più in basso della quota di volo. 1) Quanto prima di giungere sulla verticale deve sganciare il pacco se lo lascia con velocità verticale iniziale nulla? 2) Con quale velocità verticale iniziale va lanciato il pacco, se viene sganciato 400 metri prima di essere sulla verticale degli alpinisti?

[ 1) 447 m  2) 7.0 m/s, verso il basso ]

[3] Un proiettile viene sparato con velocità iniziale $v_0 = 36.4$ m/s e inclinazione $\alpha = 32.0^\circ$ rispetto all'orizzontale, verso un'altura di altezza $h$. Il proiettile tocca il suolo (nel punto A, vedi figura) dopo un tempo $t' = 2.85$ s. Si calcoli:




1) la massima altezza raggiunta dal proiettile rispetto al suolo;
2) l'altezza h dell'altura;
3) la velocità (vettoriale) del proiettile immediatamente prima di toccare il suolo nel punto A.

[ 1) 19 m  2) 15.2 m  3) $|\vec{v}| = 31.1$ m/s ;  $\vartheta \simeq -15.6^\circ$ ]

[1] Si consideri l'equazione del moto vettoriale di un punto materiale

$$\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\hat{i} + Bt^2\hat{j}$$

con $A, B$ e $\omega$ costanti positive. Si chiede di: i) specificare le dimensioni fisiche delle costanti $A, B$ e $\omega$; ii) calcolare i vettori velocità $\vec{v}$ e accelerazione $\vec{a}$ nell'istante $t^* = \pi/\omega$; iii) stabilire se, per $t = t^*$, il modulo della velocità sta aumentando o diminuendo.

[ vedi discussione a lezione ]

i) Il prodotto $\omega t$ deve essere adimensionale (cioè deve avere dimensioni fisiche nulle), in quanto è l'argomento di una funzione trascendente. Ne segue che $\omega$ ha le dimensioni inverse di quelle di $t$:

$$[\omega] = [T^{-1}]$$

Le componenti di $\vec{r}$ devono avere le dimensioni di una lunghezza. Poiché la funzione $\cos(\omega t)$ ha dimensioni nulle, la costante $A$ deve avere le dimensioni di una lunghezza:

$$[A] = [L]$$

Poiché anche il termine $Bt^2$ deve avere le dimensioni di una lunghezza, ne segue che

$$[B] = [LT^{-2}]$$

ii) La velocità è la derivata rispetto al tempo della posizione, dunque

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t)\hat{i} + 2Bt\hat{j}$$

L'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità, dunque

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t)\hat{i} + 2B\hat{j}$$

I loro valori all'istante $t^* = \pi/\omega$ sono

$$\vec{v}^* = \frac{2\pi B}{\omega}\hat{j} \quad ; \qquad \vec{a}^* = A\omega^2\hat{i} + 2B\hat{j}$$

iii) Il modulo della velocità è modificato solo dalla componente tangenziale dell'accelerazione, mentre la componente normale ne modifica solo la direzione. Come si vede dal risultato ottenuto al punto precedente, nell'istante $t^*$ la velocità ha direzione $\vec{v}/|\vec{v}| = \hat{j}$; dunque l'accelerazione tangenziale ha modulo pari alla componente lungo $\hat{j}$ dell'accelerazione allo stesso istante: $a_t = 2B$, che è maggiore di zero per ipotesi ($B > 0$). Quindi il modulo di $\vec{v}$ sta aumentando.

[2] Un elicottero che vola con velocità orizzontale $v_0 = 70 \text{ m/s}$ deve lanciare un pacco di emergenza a due alpinisti che si trovano $h = 200$ m più in basso della quota di volo. 1) Quanto prima di giungere sulla verticale deve sganciare il pacco se lo lascia con velocità verticale iniziale nulla? 2) Con quale velocità verticale iniziale va lanciato il pacco, se viene sganciato 400 metri prima di essere sulla verticale degli alpinisti?

Nella direzione verticale, il pacco compie un moto uniformemente accelerato con accelerazione di modulo $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Fissiamo un asse $y$ rivolto verso l'alto con lo zero all'altezza degli alpinisti. Se il pacco viene lasciato cadere dall'elicottero con velocità verticale iniziale nulla, la legge oraria sarà

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Quindi, per giungere al suolo impiegherà un tempo

$$0 = y(t^*) = h - \frac{1}{2}gt^{*2} \implies t^* = \sqrt{2h/g} \simeq 6.39 \text{ s}$$

In questo tempo il pacco percorre una distanza orizzontale

$$x(t^*) = v_0 t^* = v_0\sqrt{2h/g} \simeq 447 \text{ m}$$

quindi l'elicottero deve lasciare cadere il pacco 447 metri prima di trovarsi sulla verticale degli alpinisti.

Se invece il pacco viene sganciato solo $S = 400$ m prima, calcoliamo prima il tempo necessario a percorrerli (in orizzontale) alla velocità costante $v_0$:

$$S = x(t^\circ) = v_0 t^\circ \implies t^\circ = S/v_0 \simeq 5.71 \text{ s}$$

L'equazione del moto nella direzione verticale è

$$y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

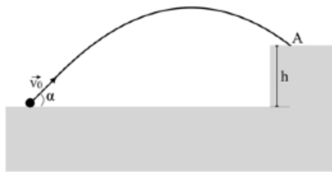
Ora sostituiamo il valore $t^\circ$ trovato, imponendo che $y(t^\circ)$ sia zero e ricavando il necessario valore di $v_{0y}$:

$$0 = y(t^\circ) = h + v_{0y}t^\circ - \frac{1}{2}gt^{\circ 2} \implies v_{0y} = \left(-h + \frac{1}{2}gt^{\circ 2}\right)\frac{1}{t^\circ}$$

sostituendo il valore precedentemente trovato di $t^\circ$ troviamo

$$v_{0y} = -\frac{hv_0}{S} + \frac{gS}{2v_0} \simeq -7.0 \text{ m/s}$$

[3] Un proiettile viene sparato con velocità iniziale $v_0$=36.4 m/s e inclinazione $\alpha$=32.0° rispetto all'orizzontale, verso un'altura di altezza $h$. Il proiettile tocca il suolo (nel punto A, vedi figura) dopo un tempo $t'$=2.85 s. Si calcoli:




1) la massima altezza raggiunta dal proiettile rispetto al suolo;
2) l'altezza h dell'altura;
3) la velocità (vettoriale) del proiettile immediatamente prima di toccare il suolo in A.

1) Si tratta di un tipico moto parabolico, in cui si ha un moto uniforme nella componente orizzontale (x, diretto verso destra) e uniformemente accelerato, con accelerazione -g, nella componente verticale (y, diretto verso l'alto). Le corrispondenti leggi orarie, ponendo l'origine del sistema di riferimento nel punto del lancio del proiettile, sono:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t \\ y(t) = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

La massima altezza raggiunta si ha per il tempo $t^*$ tale per cui $v_y(t^*) = 0$ quindi

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt^* \rightarrow t^* = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \rightarrow y_{max} = y(t^*) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \simeq 19.0 \text{ m}$$

2) Per t=t'=2.85 s:

$$y(t') = (v_0 \sin \alpha)t' - \frac{1}{2}gt'^2 \simeq 15.2 \text{ m}$$

3) Calcoliamo le componenti lungo x e y della velocità nell'istante t':

$$\begin{cases} v_y(t') = v_0 \sin \alpha - gt' \simeq -8.64 \text{ m/s} \\ v_x(t') = v_x(0) = v_0 \cos \alpha \simeq 30.87 \text{ m/s} \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{cases} |\vec{v}(t')| = \sqrt{v_y(t')^2 + v_x(t')^2} \simeq 32.1 \text{ m/s} \\ \theta = \arctan(\frac{v_y(t')}{v_x(t')}) \simeq -15.6^\circ \end{cases}$$