AA 2023-2024 - Fisica - CdL Ingegneria e Scienze Informatiche

Luigi Guiducci - Esercitazioni

1) Si calcoli la forza con cui si attrarrebbero due oggetti puntiformi, ottenuti separando completamente le cariche positive e negative contenute in $18\ \text{g}$ di acqua, posti alla distanza di $1\ \text{m}$.

[8.3×10^{21} N (!)]

2) A che accelerazione è sottoposto un protone in un campo elettrico di intensità $2.00 \times 10^4\ \text{N/C}$? Che velocità raggiunge se partendo da fermo è accelerato per una distanza di $1.00\ \text{cm}$?

[$a = 1.92 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2$; $v = 1.96 \times 10^5\ \text{m/s}$]

3) Due piastre molto grandi, parallele e dotate di cariche uguali e opposte, e distanti $2{,}0\ \text{cm}$ sono utilizzate per creare una regione di campo elettrico uniforme. Un elettrone è lasciato libero, da fermo, sulla superficie carica negativamente e raggiunge la piastra opposta in $1.5 \times 10^{-8}\ \text{s}$. Che velocità ha quando raggiunge la piastra positiva? Che intensità ha il campo elettrico presente tra le piastre?

[$v = 2.7 \times 10^6\ \text{m/s}$; $E = 1.0$ kN/C]

4) Un modello semplice dell'atomo di idrogeno consiste in un protone con un elettrone ($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) che gli gira intorno, attratto dalla forza elettrostatica (cariche di protone ed elettrone, in modulo, valgono $e = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$). Sapendo che il raggio dell'atomo è $r = 5.3 \times 10^{-11}$ m, trovare la velocità dell'elettrone rispetto al nucleo.

[$v \simeq 2.2 \times 10^6\ \text{m/s}$]

5) Una carica puntiforme $q = 10^{-8}\ \text{C}$ si trova al centro di un cubo di lato $l = 1\ \text{cm}$. Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso una delle facce del cubo.

[$\Phi \simeq 1.9 \times 10^2$ Vm]

6) Una carica q è distribuita su una sfera di raggio R. Il campo elettrostatico all'interno della sfera ha forma $E = \dfrac{\alpha}{r}$, dove α è una costante e r è la distanza dal centro della sfera ($r \leq R$). Trovare la densità volumica di carica in funzione di r. *(Difficile. Bisogna utilizzare esplicitamente la notazione integrale, per una distribuzione continua di carica, del teorema di Gauss:* $\displaystyle\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V$. *Non preoccuparsi se non si riesce a risolverlo da soli, studiare la soluzione sarà comunque istruttivo).*

[$\rho(r) = \dfrac{\epsilon_0 \alpha}{r^2}$]

7) Un protone parte con velocità v da un punto P a distanza $d = 10$ cm dal centro di una distribuzione di carica sferica uniforme di carica totale $Q = 1.6 \times 10^{-17}$ C e raggio $R = 1$ cm. Trovare la massima velocità iniziale perché il protone non penetri nella distribuzione di carica sferica.

[$v_i \simeq 49.8$ m/s]

8) Nell'esperimento di Rutherford particelle α ($m_\alpha = 6.65 \times 10^{-27}$ kg, $q_\alpha = 3.2 \times 10^{-19}$ C) sono sparate con una velocità $v_0 = 1.5 \times 10^7$ m/s verso una lamina di oro, i cui nuclei hanno raggio $R_{oro} = 7 \times 10^{-15}$ m e carica $q_{oro} = 1.26 \times 10^{-17}$ C. Se la particella α è diretta verso il centro del nucleo di oro, può essere completamente arrestata e deflessa di 180^o dal campo elettrostatico del nucleo? A che distanza dal centro del nucleo, eventualmente, inverte la sua velocità? Si confronti il risultato con le dimensioni tipiche degli atomi.

[sì; $r \simeq 4.8 \times 10^{-14}$ m; $r_{atomo} \approx 10^{-10}$ m]

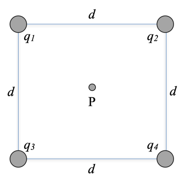
9) Negli schermi a tubo catodico, gli elettroni sono accelerati tramite una differenza di potenziale dell'ordine di 6 kV. Trascurando l'energia cinetica iniziale degli elettroni, a che velocità investono lo schermo?

[$v \simeq 46000$ km/s (!)]

10) Gli elettroni del tubo catodico si ottengono per effetto termoionico: una punta metallica viene riscaldata a temperatura dell'ordine di migliaia di gradi, e alcuni elettroni escono dal metallo. Considerando gli elettroni di conduzione in un metallo come un gas perfetto monoatomico, si spieghi perché è necessario riscaldare il metallo per ottenere un effetto termoionico apprezzabile, stimando l'energia cinetica media degli elettroni alle temperature di 300 K e 10000 K. Era corretto trascurare l'energia cinetica iniziale degli elettroni nell'esercizio precedente?

11) Si calcoli il potenziale nel punto P al centro del quadrato di cariche puntiformi mostrate in figura. Si assuma che la distanza tra due cariche limitrofe $d = 1$ m e le cariche siano $q_1 = 12$ nC, $q_2 = -24$ nC, $q_3 = 31$ nC e $q_4 = 17$ nC.

[$V \simeq 458$ V]



12) Un elettrone parte da fermo da un punto P a distanza $d = 1$ cm da due protoni che distano d tra loro (ovvero nell'istante iniziale l'elettrone e i due protoni sono ai vertici di un triangolo equilatero) e arriva nel punto medio Q tra i due protoni. Che velocità ha l'elettrone nel punto Q?

[$v \simeq 318$ m/s]

13) Una carica negativa $q = -1.5 \times 10^{-8}$ C di massa $m = 10^{-5}$ kg è posta inizialmente in un punto P sull'asse di una circonferenza di raggio $a = 10$ cm, tenuta fissa; P si trova a distanza $a\sqrt{3}$ dal centro della circonferenza. La circonferenza è caricata uniformemente, con una carica $Q = 6 \times 10^{-8}$ C. La carica $-q$ viene lasciata libera di muoversi partendo da ferma. Con che velocità passa dal centro della circonferenza?

[$v_f \simeq 2.84$ m/s]

Soluzioni

1) Si calcoli la forza con cui si attrarrebbero due oggetti puntiformi, ottenuti separando completamente le cariche positive e negative contenute in $18\ \text{g}$ di acqua, posti alla distanza di $1\ \text{m}$.

[$8.3 \times 10^{21}\ \text{N}$]

Il peso molecolare dell'acqua è circa 18 (ossigeno: 16, idrogeno: 1) quindi $18\ \text{g}$ di acqua contengono un numero di Avogadro, N_A, di molecole. L'ossigeno contiene 8 protoni ed 8 elettroni, l'idrogeno un protone ed un elettrone. Ogni molecola di acqua quindi contiene 10 protoni e 10 elettroni. I due oggetti puntiformi ottenuti separando completamente le cariche disponibili conterrebbero, quindi, una carica di modulo $q = 10eN_A \simeq 9.6 \times 10^5\ \text{C}$. Utilizzando la legge di Coulomb, si ottiene la forza richiesta:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(1\ \text{m})^2} \simeq 8.3 \times 10^{21}\ \text{N}$$

Una forza strabiliante! La ragione per cui non si manifestano, nella materia, forze di tale intensità, sta nell'intimo mescolamento delle cariche positive con quelle negative, che neutralizza gli effetti elettrostatici.

2) A che accelerazione è sottoposto un protone in un campo elettrico di intensità $2.00 \times 10^4\ \text{N/C}$? Che velocità raggiunge se partendo da fermo è accelerato per una distanza di $1.00\ \text{cm}$?

[$a = 1.92 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2$; $v = 1.96 \times 10^5\ \text{m/s}$]

Il modulo della forza di Coulomb agente sul protone vale

$$F = eE = m_p a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{eE}{m_p} \simeq 1.92 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2$$

Con la consueta formula della cinematica,

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{\frac{eES}{m_p}} \simeq 1.96 \times 10^5\ \text{m/s}$$

3) Due piastre molto grandi, parallele e dotate di cariche uguali e opposte, e distanti 2.0 cm sono utilizzate per creare una regione di campo elettrico uniforme. Un elettrone è lasciato libero, da fermo, sulla superficie carica negativamente e raggiunge la piastra opposta in 1.5×10^{-8} s. Che velocità ha quando raggiunge la piastra positiva? Che intensità ha il campo elettrico presente tra le piastre?

[$v = 2.7 \times 10^6$ m/s ; $E = 1.0$ kN/C]

Il moto dell'elettrone è uniformemente accelerato. Lo spazio percorso segue la legge oraria

$$S = \frac{1}{2}at^2 \implies a = \frac{2S}{t^2}$$

La velocità segue la legge oraria

$$v = at = \frac{2S}{t} \simeq 2.7 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Dato che abbiamo trovato l'accelerazione, moltiplicando per la massa dell'elettrone abbiamo la forza, che uguagliamo alla forza dovuta al campo elettrico:

$$F = m_e a = \frac{2Sm_e}{t^2} = eE \implies E = \frac{2Sm_e}{et^2} \simeq 1.0 \text{ kN/C}$$

4) Un modello semplice dell'atomo di idrogeno consiste in un protone con un elettrone ($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) che gli gira intorno, attratto dalla forza elettrostatica (cariche di protone ed elettrone, in modulo, valgono $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C). Sapendo che il raggio dell'atomo è $r = 5.3 \times 10^{-11}$ m, trovare la velocità dell'elettrone rispetto al nucleo.

[$v \simeq 2.2 \times 10^6$ m/s]

Ipotizzando una traiettoria circolare, la forza elettrostatica agisce come la forza centripeta responsabile di tale moto. Proiettando $\vec{F} = m\vec{a}$ nella direzione radiale, abbiamo

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

risulta quindi

$$v = \frac{e}{2}\sqrt{\pi\epsilon_0 m r} \simeq 2.18 \times 10^6 \text{ m/s}$$

5) Una carica puntiforme $q = 10^{-8}$ C si trova al centro di un cubo di lato $l = 1$ cm. Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso una delle facce del cubo.

[$\Phi \simeq 1.9 \times 10^2$ Vm]

Per la legge di Gauss, il flusso attraverso tutto il cubo (tutto l'angolo solido) è

$$\Phi_{tot} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Una faccia corrisponde a 1/6 dell'angolo solido totale, quindi

$$\Phi = \frac{q}{6\epsilon_0} \simeq 1.88 \times 10^2 \text{ Vm}$$

6) Una carica q è distribuita su una sfera di raggio R. Il campo elettrostatico all'interno della sfera ha forma $E = \dfrac{\alpha}{r}$, dove α è una costante e r è la distanza dal centro della sfera ($r \leq R$). Trovare la densità volumica di carica in funzione di r.

[$\rho(r) = \dfrac{\epsilon_0 \alpha}{r^2}$]

Per la legge di Gauss,

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{r} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

dove abbiamo specificato il volumetto come un guscio sferico di raggio r e spessore $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Quindi

$$\epsilon_0 \alpha r = \int_0^r \rho(r) r^2 \mathrm{d}r \quad (0 \leq r \leq R)$$

Se facciamo la derivata rispetto a r dei due mebri dell'equazione si ottiene:

$$\epsilon_0 \alpha = \rho(r) r^2 \quad \Longrightarrow \quad \rho(r) = \frac{\epsilon_0 \alpha}{r^2}$$

7) Un protone parte con velocità v da un punto P a distanza $d = 10$ cm dal centro di una distribuzione di carica sferica uniforme di carica totale $Q = 1.6 \times 10^{-17}$ C e raggio $R = 1$ cm. Trovare la massima velocità iniziale perché il protone non penetri nella distribuzione di carica sferica.

[$v_i \simeq 49.8$ m/s]

Perché il protone (di carica e) non penetri, è sufficiente che arrivi alla superficie con velocità (energia cinetica) nulla. Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m_p v_i^2 + \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 R}$$

da cui si ottiene immediatamente

$$v_i = \sqrt{\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right)\frac{2}{m_p}} \simeq 49.8 \text{ m/s}$$

8) Nell'esperimento di Rutherford particelle α ($m_\alpha = 6.65 \times 10^{-27}$ kg, $q_\alpha = 3.2 \times 10^{-19}$ C) sono sparate con una velocità $v_0 = 1.5 \times 10^7$ m/s verso una lamina di oro, i cui nuclei hanno raggio $R_{oro} = 7 \times 10^{-15}$ m e carica $q_{oro} = 1.26 \times 10^{-17}$ C. Se la particella α è diretta verso il centro del nucleo di oro, può essere completamente arrestata e deflessa di 180° dal campo elettrostatico del nucleo? A che distanza dal centro del nucleo, eventualmente, inverte la sua velocità? Si confronti il risultato con le dimensioni tipiche degli atomi.

[sì; $r \simeq 4.8 \times 10^{-14}$ m; $r_{atomo} \approx 10^{-10}$ m]

Considerando un SdR con l'origine nel nucleo di oro ed utilizzando la conservazione dell'energia (pensando alla velocità iniziale v_0 data nel testo corrispondente a distanza infinita della α dal nucleo, dove $U \rightarrow 0$):

$$\frac{1}{2} m_\alpha v^2 - \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_\alpha q_{oro}}{r}$$

Poniamo $v = 0$ per trovare a quale distanza dal nucleo la particella α si arresta, e troviamo il corrispondente valore della distanza:

$$r = \frac{2 q_\alpha q_{oro}}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v_0^2} \simeq 4.8 \times 10^{-14} \text{ m}$$

La particella α si ferma prima di toccare il nucleo e rimbalza indietro, ma lo fa dopo essere abbondantemente "entrata" nel volume atomico ($r_{atomo} \approx 10^{-10}$ m).

9) Negli schermi a tubo catodico, gli elettroni sono accelerati tramite una differenza di potenziale dell'ordine di 6 kV. Trascurando l'energia cinetica iniziale degli elettroni, a che velocità investono lo schermo?

[$v \simeq 46000$ km/s (!)]

Utilizziamo la conservazione dell'energia, assumendo una velocità iniziale nulla:

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}$$

Si ottiene, utilizzando i valori di e e di massa dell'elettrone m, un risultato

$$v \simeq 4.6 \times 10^7 \text{ m/s} = 46000 \text{ km/s} \qquad !\,!\,!$$

10) Gli elettroni del tubo catodico si ottengono per effetto termoionico: una punta metallica viene riscaldata a temperatura dell'ordine di migliaia di gradi, e alcuni elettroni escono dal metallo. Considerando gli elettroni di conduzione in un metallo come un gas perfetto monoatomico, si spieghi perché è necessario riscaldare il metallo per ottenere un effetto termoionico apprezzabile, stimando l'energia cinetica media degli elettroni alle temperature di 300 K e 10000 K. Era corretto trascurare l'energia cinetica iniziale degli elettroni nell'esercizio precedente?

Utilizziamo per l'energia cinetica media l'espressione $\frac{3}{2}k_BT$. Può essere conveniente utilizzare, come unità di misura dell'energia, l'elettronvolt eV (l'energia cinetica di una carica e spinta da una differenza di potenziale di un Volt) pari a 1.6×10^{-19} J. In queste unità la costante di Boltzmann ha il valore di $k_B = 8.62 \times 10^{-5}$ eV/K. Otteniamo quindi

$$< K > \simeq 0.04 \text{ eV} \quad \text{alla temperatura di 300 K}$$

$$< K > \simeq 1.3 \text{ eV} \quad \text{alla temperatura di 10000 K}$$

Le tipiche energie di legame chimico sono dell'ordine di un eV, questo spiega perché l'effetto termoionico sia trascurabile a temperatura ambiente ed occorra riscaldare la punta metallica. Inoltre, vediamo come l'energia cinetica dell'elettrone emesso sia molto più piccola dell'energia potenziale che esso si trova ad avere se soggetto ad un potenziale di migliaia di Volt.

11) Si calcoli il potenziale nel punto P al centro del quadrato di cariche puntiformi mostrate in figura. Si assuma che la distanza tra due cariche limitrofe $d = 1$ m e le cariche siano $q_1 = 12$ nC, $q_2 = 24$ nC, $q_3 = 31$ nC e $q_4 = 17$ nC.

[$V \simeq 458$ V]

Il potenziale elettrico è la somma algebrica dei potenziali generati da ciascuna carica. È una grandezza scalare e dipende solo dalla distanza da ciascuna carica, che è uguale per tutte e pari a $r = \frac{\sqrt{2}}{2}d$. Quindi

$$V = \sum_{i=1}^{4} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{r} \simeq 458 \text{ V}$$

12) Un elettrone parte da fermo da un punto P a distanza $d = 1$ cm da due protoni che distano d tra loro (ovvero nell'istante iniziale l'elettrone e i due protoni sono ai vertici di un triangolo equilatero) e arriva nel punto medio Q tra i due protoni. Che velocità ha l'elettrone nel punto Q?

[$v \simeq 318$ m/s]

Utilizziamo la conservazione dell'energia:

$$-eV_P = -eV_Q + \frac{1}{2}m_e v^2$$

I potenziali si trovano come

$$V_P = 2\frac{e}{4\pi\epsilon_0 d} \qquad \text{e} \qquad V_Q = 2\frac{e}{4\pi\epsilon_0 \frac{d}{2}} = \frac{e}{\pi\epsilon_0 d}$$

Quindi si ricava

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = e\left[\frac{e}{\pi\epsilon_0 d} - \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 d}\right] = e\frac{2e}{4\pi\epsilon_0 d}$$

e infine

$$v = \frac{e}{\sqrt{\pi\epsilon_0 m_e d}} \simeq 318 \text{ m/s}$$

13) Una carica negativa $q = -1.5 \times 10^{-8}$ C di massa $m = 10^{-5}$ kg è posta inizialmente in un punto P sull'asse di una circonferenza di raggio $a = 10$ cm, tenuta fissa; P si trova a distanza $a\sqrt{3}$ dal centro della circonferenza. La circonferenza è caricata uniformemente, con una carica $Q = 6 \times 10^{-8}$ C. La carica $-q$ viene lasciata libera di muoversi partendo da ferma. Con che velocità passa dal centro della circonferenza?

[$v_f \simeq 2.84$ m/s]

Un punto sull'asse della circonferenza si trova equidistante da tutti i punti della circonferenza. Quindi il valore del potenziale è lo stesso che si avrebbe da una carica puntiforme posta a tale distanza. Il punto P dista $r = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$. Il valore del potenziale è quindi

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}$$

Quanto la particella passa dal centro della circonferenza, la distanza è a, quindi

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}$$

La differenza di potenziale è quindi

$$\Delta V = V_C - V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}$$

La differenza di energia potenziale per la carica q è

$$\Delta U = q\Delta V = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 2a}$$

Poiché la forza elettrostatica è conservativa, l'energia meccanica totale si conserva. Quindi

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f = \frac{1}{2}mv^2 = -\Delta U$$

otteniamo infine

$$v_f = \sqrt{\frac{-2\Delta U}{m}} = \sqrt{\frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 a m}} \simeq 2.84 \text{ m/s}$$