Prove scritte di Algebra e Geometria
dal 2015/2016 al 2019/2020

Indice

Prova parziale, 27/04/2015

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\Sigma_t : \begin{cases} tx + 2y = t \\ 2x + ty = 2 \\ y + tz = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t.

(a) Stabilire per quali valori di t il sistema ammette soluzioni.
(b) Risolvere il sistema lineare Σ_t per $t = 2$.
(c) Stabilire se esistono valori di t tali che il sistema lineare Σ_t sia equivalente all'equazione $x + 2y = 1$ (nelle incognite x, y, z).

Esercizio 2. (15 punti) Un vettore di $\mathbb{R}^n$ si dice simmetrico se le sue componenti possono essere lette indifferentemente da destra verso sinistra o da sinistra verso destra. In $\mathbb{R}^4$, con coordinate x, y, z, t rispetto alla base canonica, sia U l'insieme dei vettori simmetrici e W il sottospazio di equazione $x - y - z = 0$.

(a) Verificare che U è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$;
(b) determinare la dimensione e una base $\mathcal{B}$ di U;
(c) determinare la dimensione e una base $\mathcal{C}$ di W;
(d) determinare se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $T + U = T + W$;
(e) determinare $U \cap W$;
(f) scelto un vettore $v \in U \cap W$, determinare le coordinate di v rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di U e W determinate nei punti (b) e (c).

Prova parziale, 03/06/2015

Tema 1

1. (15 punti) Sia k un parametro reale e f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,1,1) = (3, k+2, k+2)$, $f(1,0,1) = (2,0,2)$, $f(1,1,0) = (2, k+3, k+1)$.

(a) Giustificare il fatto che tale endomorfismo esiste ed è unico.

(b) determinare, al variare di k, la matrice associata ad f rispetto alla base canonica;

(c) verificare che 2 è un autovalore di f per ogni k;

(d) per $k = -1$ determinare gli autospazi di f.

(e) determinare per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile;

Soluzione

(a) Basta osservare che i tre vettori $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica. Abbiamo

- $f(0,1,0) = f(1,1,1) - f(1,0,1) = (1, k+2, k)$;
- $f(0,0,1) = f(1,1,1) - f(1,1,0) = (1,-1,1)$;
- $f(1,0,0) = f(1,0,1) - f(0,0,1) = (1,1,1)$

per cui abbiamo

$$A = M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+2 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Basta osservare che $f(1,0,1) = 2(1,0,1)$.

(d) Calcoliamo il polinomio caratteristico con $k = -1$ (caso particolare del punto successivo per cui non scrivo i passaggi): abbiamo in questo caso

$$P_A(t) = -(t-2)^2(t+1)$$

per cui abbiamo come autovalori 2 e -1 con $m_a(2) = 2$ e $m_a(-1) = 1$. Calcoliamo gli autospazi. Per V_2 le equazioni sono date dal sistema omogeneo in cui la matrice dei coefficienti è data da $A - 2I$ per cui otteniamo

$$V_2 : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Osserviamo quindi che V_2 è dato dalla singola equazione $x - y - z = 0$. Possiamo a questo punto dedurre che f è diagonalizzabile per $k = -1$; Similmente abbiamo

$$V_{-1} : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

che si riduce a

$$V_{-1} : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

(e) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla prima riga; otteniamo

$$\begin{aligned}\det(A-tI) &= \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & k+2-t & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1-t)((k+2-t)(1-t)+k) - 1(1-t+1) + 1(k-k-2+t) \\ &= (1-t)(t^2-(k+3)t+2k+2) + 2(t-2) \\ &= (1-t)((t-k-1)(t-2)) + 2(t-2) \\ &= (t-2)((1-t)(t-k-1)+2) \\ &= (t-2)(-t^2+(k+2)t+1-k) \\ &= (2-t)(t^2-(k+2)t+k-1)\end{aligned}$$

Usando la formula risolutiva per l'equazione tra parentesi otteniamo i 3 autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{k+2-\sqrt{k^2+8}}{2}$. Sicuramente λ_2 e λ_3 sono sempre distinti. Rimane da capire se possono coincidere con λ_1. Vediamo quando $\lambda_1 = \lambda_2$. Otteniamo l'equazione

$$\frac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2} = 2,$$

che ha come unica soluzione $k = -1$: in questo caso già sappiamo dal punto precedente che f é diagonalizzabile. Analogamente si verifica che $\lambda_1 \neq \lambda_3$ per ogni valore di k. In conclusione abbiamo che f è diagonalizzabile per ogni valore di k perché abbiamo sempre 3 autovalori distinti tranne nel caso $k = -1$ in cui è comunque diagonalizzabile.

2. (15 punti) Sia $V = \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ e $W = \mathbb{R}^{\leq 1}[x]$. Siano inoltre $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$ e $\mathcal{C} = (x, 1)$ basi di V e W rispettivamente e consideriamo le due funzioni $f : V \to W$ e $g : W \to V$ date da $f(P(x)) = P'(x)$, la derivata di P, e $g(Q(x)) = xQ(x)$.

(a) Verificare che f e g sono applicazioni lineari;
(b) determinare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ e $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g)$;
(c) determinare nucleo e immagine di $f \circ g$;
(d) determinare nucleo e immagine di $g \circ f$.

Tema 2

1. (15 punti) Sia h un parametro reale e f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,1,1) = (3,h,h)$, $f(1,0,1) = (2,0,2)$, $f(1,1,0) = (2,h+1,h-1)$.

(a) Giustificare il fatto che tale endomorfismo esiste ed è unico.
(b) determinare, al variare di h, la matrice associata ad f rispetto alla base canonica;
(c) verificare che 2 è un autovalore di f per ogni h;
(d) per $h = 1$ determinare gli autospazi di f.
(e) determinare per quali valori di h l'endomorfismo f è diagonalizzabile;

2. (15 punti) Sia $V = \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ e $W = \mathbb{R}^{\leq 1}[x]$. Siano inoltre $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ e $\mathcal{C} = (1, x)$ basi di V e W rispettivamente e consideriamo le due funzioni $f : V \to W$ e $g : W \to V$ date da $f(P(x)) = P'(x)$, la derivata di P, e $g(Q(x)) = xQ(x)$.

(a) Verificare che f e g sono applicazioni lineari;
(b) determinare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ e $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g)$;
(c) determinare nucleo e immagine di $f \circ g$;
(d) determinare nucleo e immagine di $g \circ f$.

Prova scritta, 03/06/2015

Esercizio 1 (10 punti)
Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, w:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 4w = 0 \\ 2x + z - 3w = 0 \\ -2y + az + w = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di a in $\mathbb{R}$, stabilire per quali valori di a il sistema è risolubile e, quando possibile, determinare le sue soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti)
Sia $U = \langle(-1, 2, 1, 0), (0, -1, -1, 1), (-1, 0, -1, 2)\rangle$

(1) Calcolare la dimensione di U ed esibire una sua base.
(2) Determinare un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.
(3) Posto $W = \langle(1, 2, 0, -1), (-2, -2, -1, 3)\rangle$, determinare una base di $U + W$ ed una base di $U \cap W$.

Esercizio 3 (10 punti)
Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che:

$$f_a(1, -1, 1) = (0, 0, 0), \quad f_a(1, a, 0) = (-1 + a, 0, 0), \quad f_a(0, 1, 0) = -(0, 1, 0).$$

(1) Giustificare il fatto che l'endomorfismo f_a esiste ed è unico.
(2) Calcolare la matrice $M^C_C(f_a)$ di f_a rispetto alla base canonica C di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).
(3) Esistono valori di a tali che l'endomorfismo f_a ha un autovalore di molteplicità algebrica 2? Stabilire se, in tal caso, l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile.

Prova scritta, 22/06/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ ky + y - z = 0 \\ kx + z = -1 \end{cases}$$

Esistono valori di k tali che il sistema abbia infinite soluzioni? In caso affermativo determinare tali soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti) Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ $T = \langle (2,-1,0,0), (3,0,-1,0) \rangle$ e $S = \{(x,y,z,t) : x + 3z + 4t = 0,\ y = 0\}$ e $W = S + T$. Sia inoltre $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x,y,z,t) = (x + y, y - z + t, x + z - t).$$

(1) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W;
(2) Determinare una base $\mathcal{C}$ di $f(W)$;
(3) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$;
(4) Detta $g = f|_W : W \longrightarrow f(W)$ la restrizione di f a W determinare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g)$ rispetto alle basi calcolate nei punti (1) e (2).

Esercizio 3 (10 punti)
Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che:

$$f_a(1,1,1) = (0,0,0), \quad f_a(1,0,a) = (1+a,0,0), \quad f_a(0,0,1) = (0,0,1).$$

(1) Giustificare il fatto che l'endomorfismo f_a esiste ed è unico.
(2) Calcolare la matrice $M^C_C(f_a)$ di f_a rispetto alla base canonica C di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).
(3) Esistono valori di a tali che l'endomorfismo f_a ha un autovalore di molteplicità algebrica 2? Stabilire se, in tal caso, l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile.

Prova scritta, 13/07/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema e, quando è possibile determinarne le soluzioni

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 7y + (k^2 + 4)z = k - 1 \end{cases}$$

Esercizio 2 (10 punti) Siano $U = \langle (1, 1, 0, 0), (1, -2, 0, 0), (2, 1, 0, 0) \rangle$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, z - t = 0, y - t = 0\}$.

(1) Calcolare la dimensione di U e V e fornire una base di ciascuno di essi.
(2) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.
(3) Stabilire se esiste una matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ avente U e V come autospazi (relativi a due autovalori diversi).
(4) Costruire, se possibile, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = U$, $Im(f) = V$.

Esercizio 3 (10 punti) Si considerino la base $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$ e la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ e f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ determinato da

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
(2) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.
(3) Verificare che l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
(4) Determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) P$ sia diagonale.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/07/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema e, quando è possibile determinarne le soluzioni

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 7y + (h^2 + 2h + 5)z = h \end{cases}$$

Esercizio 2 (10 punti) Siano $U = \langle (0,0,2,1), (0,0,-1,2), (0,0,3,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0, x - y = 0, y - z = 0\}$.

(1) Calcolare la dimensione di U e V e fornire una base di ciascuno di essi.
(2) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.
(3) Stabilire se esiste una matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ avente U e V come autospazi (relativi a due autovalori diversi).
(4) Costruire, se possibile, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = U$, $Im(f) = V$.

Esercizio 3 (10 punti) Si considerino la base $\mathcal{B} = ((0,0,1), (1,1,0), (0,1,1))$ e la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ e f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ determinato da

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 4 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
(2) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.
(3) Verificare che l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
(4) Determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) P$ sia diagonale.

Prova scritta, 14/09/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 5kx + 5y - 3z = 3 \\ kx + y - 3z = 0 \\ x + ky - z = k \\ 2kx + 2y + 6z = 3 \end{cases}$$

e, quando è possibile, determinarne le soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $W_k \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio dipendente da un parametro reale k dato da

$$W_k = \langle (1,2,k), (1,k,1), (2,4,3) \rangle.$$

(1) Al variare del parametro reale k determinare una base $\mathcal{B}_k$ di W_k.
(2) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (1,2,2)$ appartiene a W_k;
(3) Determinare per quali valori del parametro k esiste un endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ tale che $Im(F_k) = W_k$ e $\ker(F_k) = \langle v \rangle$. Per questi valori di k descrivere un tale endomorfismo F_k esplicitamente.

Esercizio 3 (10 punti) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente come autospazi $\langle (1,1,1), (1,1,0) \rangle$ e $\langle (1,0,0) \rangle$ rispettivamente rispetto agli autovalori 2 e 3.

(1) Scrivere le equazioni di F.
(2) Stabilire se l'endomorfismo F è diagonalizzabile.
(3) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta F è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

In caso affermativo determinare tale base.

Prova scritta, 14/09/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 5hx - 5y + 3z = -3 \\ hx - y + 3z = 0 \\ -x + hy + z = k \\ 2hx - 2y - 6z = -3 \end{cases}$$

e, quando è possibile, determinarne le soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $U_h \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio dipendente da un parametro reale h dato dato da

$$U_h = \langle (0, h+2, -h-1), (1, -h, 1), (2, 4, 3) \rangle.$$

(1) Al variare del parametro reale h determinare una base $\mathcal{B}_h$ di U_h.
(2) Stabilire per quali valori di h il vettore $v = (1, 2, 2)$ appartiene a U_h;
(3) Determinare per quali valori del parametro h esiste un endomorfismo F_h di $\mathbb{R}^3$ tale che $Im(F_h) = U_h$ e $\ker(F_h) = \langle v \rangle$. Per questi valori di h descrivere un tale endomorfismo F_h esplicitamente.

Esercizio 3 (10 punti) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente come autospazi $\langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$ e $\langle (0, 0, 1) \rangle$ rispettivamente rispetto agli autovalori 2 e 3.

(1) Scrivere le equazioni di F.
(2) Stabilire se l'endomorfismo F è diagonalizzabile.
(3) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta F è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

In caso affermativo determinare tale base.

Prova parziale, 29/05/2017

1. Sia a un parametro reale e f_a un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$f_a(0,1,1) = (2, a-1, a-1)$, $f_a(1,0,1) = (2,0,2)$, $f_a(1,1,0) = (2, a+1, a-1)$.

(i) Giustificare il fatto che tale endomorfismo esiste ed è unico.
(ii) determinare, al variare di a, la matrice associata ad f_a rispetto alla base canonica;
(iii) verificare che 2 è un autovalore di f_a per ogni a;
(iv) determinare gli autospazi di f_1.
(v) determinare, se esiste, un valore di a per cui l'endomorfismo f_a non è diagonalizzabile.

2. Nello spazio euclideo tridimensionale con un riferimento ortonormale $RO(O; x, y, z)$ consideriamo la retta r passante per i punti $P = (1,2,3)$ e $Q = (3,2,1)$ determinare:

(i) la giacitura di r;
(ii) le equazioni cartesiane di r;
(iii) l'equazione del piano π ortogonale ad r passante per P;
(iv) l'equazione della retta s ortogonale ed incidente ad r e passante per l'origine.
(v) l'equazione di una retta t incidente ad r nel punto Q e che forma con r un angolo di 45°.

PARZIALE n.2 DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 29/05/2017

1. Sia a un parametro reale e f_a un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f_a(0,1,-1) = (0, a+1, a-1),\ f_a(1,0,1) = (2,0,2),\ f_a(1,-1,0) = (0, 1-a, 1-a).$$

(i) Giustificare il fatto che tale endomorfismo esiste ed è unico.
(ii) determinare, al variare di a, la matrice associata ad f_a rispetto alla base canonica;
(iii) verificare che 2 è un autovalore di f_a per ogni a;
(iv) determinare gli autospazi di f_1.
(v) determinare, se esiste, un valore di a per cui l'endomorfismo f_a non è diagonalizzabile.

2. Nello spazio euclideo tridimensionale con un riferimento ortonormale $RO(O; x, y, z)$ consideriamo la retta r passante per i punti $P = (0,1,2)$ e $Q = (2,1,0)$ determinare:
(i) la giacitura di r;
(ii) le equazioni cartesiane di r;
(iii) l'equazione del piano π ortogonale ad r passante per P;
(iv) l'equazione della retta s ortogonale ed incidente ad r e passante per l'origine.
(v) l'equazione di una retta t incidente ad r nel punto Q e che forma con r un angolo di 45°.

Prova scritta, 13/06/2017

1. Si considerino i seguenti sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) : x + y - z = 0,\ 2x - 3y + 4t = 0\},\ W = \langle(2, 3, 3, 0), (2, 1, 5, 1)\rangle.$$

(i) Determinare una base di U e una base di W;
(ii) determinare le equazioni cartesiane di W;
(iii) determinare le equazioni di $U \cap W$ e di $U + W$;
(iv) determinare, se possibile un'applicazione lineare invertibile $F : U \to W$;

U ha dimensione 2 perché è dato da due equazioni indipendenti in $\mathbb{R}^4$. Una base di U si ottiene risolvendo le equazioni: ad esempio si ottiene $U = \langle(2, 0, 2, -1), (0, 4, 4, 3)\rangle$ (osserviamo che effettivamente questi due vettori sono due soluzioni indipendenti delle equazioni che definiscono U. La base di W è quella data: $\{(2, 3, 3, 0), (2, 1, 5, 1)\}$.
Le equazioni di U le abbiamo già nel testo. Per ottenere quelle di W imponiamo che

$$rg \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ x & y & z & t \end{bmatrix} = 2.$$

Riducendo a scala si ottengono ad esempio le equazioni $-3x + y + z = 0$ e $y - z + 4t$ (osserviamo che la base data di W soddisfa queste due equazioni).
Per $U \cap W$ prendiamo un elemento generico $a(2, 3, 3, 0) + b(2, 1, 5, 1)$ di W e determiniamo a, b in modo che questo elemento soddisfi le equazioni di U. Otteniamo

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3a + b - 3a - 5b = 0 \\ 2(2a + 2b) - 3(3a + b) + 4b = 0 \end{cases}$$

Semplificando questo sistema rimane l'unica condizione $a = b$ da cui

$$U \cap W = \langle(4, 4, 8, 1)\rangle.$$

Le equaioni di W sono date da 3 equazioni lineari omogenee indipendenti soddisfatte da $(4, 4, 8, 1)$ ad esempio $x = y$, $2x = z$, $x = 4t$.
Per determinare la somma (che sappiamo già avere dimensione 3) possiamo procedere come nel punto 1 imponendo che

$$rg \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ x & y & z & t \end{bmatrix} = 3.$$

Si ottiene l'equazione $9x - y - 5z + 8t = 0$.
e. Siccome U e W hanno entrambi dimensione 2 tale applicazione lineare esiste: basta mandare una base di U in una base di W ad esmpio imponendo $F(2, 0, 2, -1) = (2, 3, 3, 0)$ e $F(0, 4, 4, 3) = (2, 1, 5, 1)$.

2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con un riferimento ortonormale $RO(O; x, y, z, t)$ consideriamo il sottospazio U dato da $U = \{(x, y, z, t) : x + y - z = 0,\ 2x - 3y + 4t = 0\}$.
(i) determinare una base ortogonale di U contenente il vettore $(2, 0, 2, -1)$;
(ii) determinare le equazioni di $U^\perp$;
(iii) determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (13, 0, 5, 0)$ su U;

Nell'esercizio precedente avevamo già determinato una base di U: $\{(2,0,2,-1),(0,4,4,3)\}$. Questa base tuttavia non è ortogonale. La possiamo rendere ortogonale sostituendo $(0,4,4,3)$ con

$$(0,4,4,3)-\frac{((0,4,4,3),(2,0,2,-1))}{((2,0,2,-1),(2,0,2,-1))}(2,0,2,-1)=(0,4,4,3)-\frac{5}{9}(2,0,2,-1)=\frac{2}{9}(-5,18,13,16)$$

o più semplicemente con $(-5,18,13,16)$ che è un suo multiplo scalare.
Avendo una base di U (ad esempio $\{(2,0,2,-1),(0,4,4,3)\}$) le equazioni di $U^{\perp}$ si ottengono semplicemente imponendo l'ortogonalità con i vettori della base di U. Tali equazioni sono quindi

$$\begin{cases}((2,0,2,-1),(x,y,z,t))=0\\((0,4,4,3),(x,y,z,t))=0\end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases}2x+2z-t=0\\4y+4z+3t=0\end{cases}$$

Per determinare la proiezione basta utilizzare la formula che conosciamo utilizzando la base ortogonale calcolata nel punto a.:

$$\begin{aligned}P_U((13,0,5,0))&=\frac{((13,0,5,0),(2,0,2,-1))}{((2,0,2,-1),(2,0,2,-1))}(2,0,2,-1)+\frac{((13,0,5,0),(-5,18,13,16))}{((-5,18,13,16),(-5,18,13,16))}(-5,18,13,16)\\&=\frac{36}{9}(2,0,2,-1)+0\\&=(8,8,0,-4).\end{aligned}$$

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e $\mathcal{B}$ una sua base costituita dai vettori $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$. Consideriamo l'applicazione lineare $F: V\to V$ definita da

$$F(\mathbf{b_1})=(k+1)\mathbf{b_1}-\mathbf{b_3},\ F(\mathbf{b_2})=k\mathbf{b_2}+(k+1)\mathbf{b_3},\ F(\mathbf{b_3})=k\mathbf{b_3}.$$

Denotiamo con A la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(i) stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è invertibile;
(ii) stabilire per quali valori di k $2\mathbf{b_1}-2\mathbf{b_3}$ è un autovettore di F;
(iii) stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile;
(iv) per i valori di k ottenuti nel punto precedente determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

La matrice A si calcola facilmente

$$A=\begin{bmatrix}k+1&0&0\\0&k&0\\-1&k+1&k\end{bmatrix}$$

F è invertibile se e solo se A ha determinante $\neq 0$. Siccome A è triangolare il determinante di A è il prodotto dei coefficienti sulla diagonale e quindi è diverso da 0 se e solo se $k\neq 0,-1$.
$2\mathbf{b_1}-2\mathbf{b_3}=(2,0,-2)_{\mathcal{B}}$ e quindi

$$[F(2\mathbf{b_1}-2\mathbf{b_3})]_{\mathcal{B}}=A\cdot\begin{matrix}2\\0\\-2\end{matrix}=(k+1)\begin{matrix}2\\0\\-2\end{matrix}.$$

Concludiamo che $2\mathbf{b_1}-2\mathbf{b_3})$ è sempre autovettore (di autovalore $k+1$).
Essendo A triangolare gli autovalori di F sono $k+1$ con molteplicità algebrica 1, e k, con nolteplicità algebrica 2. Dobbiamo quindi capire per quali valori di k, l'autovalore k ha molteplicità geometrica 2. La matrice $A-kI$ ha rango 1 se e solo se $k=-1$ e quindi questo è l'unico valore per cui F è diagonalizzabile.

Abbiamo $k = -1$ e in questo caso una base per l'autospazio relativo all'autovalre -1 è $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ e una base per l'autospazio 0 è data da $(1,0,-1)$. La matrice H è quindi data da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

TEMA N.2

Prova scritta DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/06/2017

1. Si considerino i seguenti sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,t) : x+y+z=0,\ 2x-3y-4t=0\},\ W = \langle(2,3,-3,0),(2,1,-5,-1)\rangle.$$

(i) Determinare una base di U e una base di W;
(ii) determinare le equazioni cartesiane di W;
(iii) determinare le equazioni di $U \cap W$ e di $U + W$;
(iv) determinare, se possibile un'applicazione lineare invertibile $F : U \to W$;

2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con un riferimento ortonormale $RO(O;x,y,z,t)$ consideriamo il sottospazio U dato da $U = \{(x,y,z,t) : x+y+z=0,\ 2x-3y-4t=0\}$.

(i) determinare una base ortogonale di U contenente il vettore $(2,0,-2,1)$;
(ii) determinare le equazioni di $U^{\perp}$;
(iii) determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (13,0,-5,0)$ su U;

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e $\mathcal{B}$ una sua base costituita dai vettori $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$. Consideriamo l'applicazione lineare $F : V \to V$ definita da

$$F(\mathbf{b_1}) = (k-1)\mathbf{b_1},\ F(\mathbf{b_2}) = (k-1)\mathbf{b_2} + k\mathbf{b_1},\ F(\mathbf{b_3}) = -\mathbf{b_1} + k\mathbf{b_3}.$$

Denotiamo con A la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(i) stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è invertibile;
(ii) stabilire per quali valori di k $2\mathbf{b_1} - 2\mathbf{b_3}$ è un autovettore di F;
(iii) stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile;
(iv) per i valori di k ottenuti nel punto precedente determinare una matrice H tale che HAH^{-1} sia diagonale.

Prova scritta, 10/07/2017

TEMA 1

(a) **Esercizio 1** Si consideri l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$F_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a non è suriettivo.
b) Si determinino una base dell'immagine ed una base del nucleo di f_a al variare di a.
c) Si determini una base di $\ker f_a \cap Im f_a$ al variare di a.
d) Si determini una base del sottospazio ortogonale a $ker f_a$ al variare di a.

(b) **Esercizio 2** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2a^2 & 4 & 2a \end{pmatrix}.$$

i) Per quali valori del parametro reale a il vettore $(1, 2, 1)$ è autovettore di A?
ii) Stabilire se esistono valori di a tali che 0 sia autovalore di A.
iii) Posto $a = 0$, stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. Determinare in questo caso gli autospazi di A.

(c) **Esercizio 3**

a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r per $P(1, 1, 0)$ e $Q(0, 1, 1)$.
b) Stabilire la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} x + y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$.
c) Determinare, se possibile, un piano contenente r parallelo ad s.
d) Determinare, se possibile, un piano contenente r ortogonale ad s.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 10/07/2017
TEMA 2

(1) **Esercizio 1** Si consideri l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$F_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a non è suriettivo.
b) Si determinino una base dell'immagine ed una base del nucleo di f_a al variare di a.
c) Si determini una base di $\ker f_a \cap Imf_a$ al variare di a.
d) Si determini una base del sottospazio ortogonale a $kerf_a$ al variare di a.

(2) **Esercizio 2** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ b^2 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

i) Per quali valori del parametro reale b il vettore $(1, 1, -1)$ è autovettore di A?
ii) Stabilire se esistono valori di b tali che 0 sia autovalore di A.
iii) Posto $b = 1$, stabilire se la matrice A è diagonalizzabile e determinare i suoi autospazi.

(3) **Esercizio 3**
a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r per $P(1, 0, 1)$ e $Q(0, 1, 1)$.
b) Stabilire la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} x + z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.
c) Determinare, se possibile, un piano contenente r parallelo ad s.
d) Determinare, se possibile, un piano contenente r ortogonale ad s.

Prova scritta, 04/09/2017

TEMA1

(1) **Esercizio 1** Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ dato da
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$
e le applicazioni lineari $f : W \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to W$ date da
$$f(x, y, z, t) = (x + y, z), \qquad \forall (x, y, z, t) \in W$$
$$g(x, y) = (x, 0, -y, y - x) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W;
b) Determinare le matrici associate $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g)$, dove $\mathcal{B}$ è la base determinata nel punto precedente e $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$;
c) Stabilire se $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è invertibile ed in tal caso determinarne l'inversa.
d) Stabilire se $g \circ f : W \to W$ è invertibile ed in tal caso determinarne l'inversa.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ consideriamo il sottospazio W dato da
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + t = 0, \, y + z + t = 0\}.$$

i) Determinare una base ortogonale di W;
ii) Determinare le equazioni del complemento ortogonale $W^{\perp}$;
iii) Posto $v = (1, 2, 3, 4)$ determinare la proiezione ortogonale $P_W(v)$ di v su W.

(3) **Esercizio 3** Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ dato da
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Verificare che 1 è un autovalore di f;
b) Determinare le equazioni dell'autospazio relativo all'autovalore 1;
c) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0$
d) Stabilire se f è diagonalizzabile.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 04/09/2017
TEMA 2

(1) **Esercizio 1** Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ dato da
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$
e le applicazioni lineari $f : W \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to W$ date da
$$f(x, y, z, t) = (z, x + y), \qquad \forall (x, y, z, t) \in W$$
$$g(x, y) = (y, 0, -x, x - y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W;
b) Determinare le matrici associate $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g)$, dove $\mathcal{B}$ è la base determinata nel punto precedente e $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$;
c) Stabilire se $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è invertibile ed in tal caso determinarne l'inversa.
d) Stabilire se $g \circ f : W \to W$ è invertibile ed in tal caso determinarne l'inversa.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ consideriamo il sottospazio W dato da
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z + t = 0,\ y + z + t = 0\}.$$
i) Determinare una base ortogonale di W;
ii) Determinare le equazioni del complemento ortogonale $W^{\perp}$;
iii) Posto $v = (1, 2, 3, 4)$ determinare la proiezione ortogonale $P_W(v)$ di v su W.

(3) **Esercizio 3** Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ dato da
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
a) Verificare che 1 è un autovalore di f;
b) Determinare le equazioni dell'autospazio relativo all'autovalore 1;
c) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0,$
d) Stabilire se f è diagonalizzabile.

Prova scritta, 08/01/2018

TEMA 1

(1) **Esercizio 1** Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si dica se la funzione f è iniettiva e/o suriettiva.
La funzione non è suriettiva perché la dimensione dell'immagine è al più la dimensione del dominio, cioè 3. La funzione non è neanche iniettiva perché il rango di A è 2 e quindi il nucleo ha dimensione 1: calcolandolo si ha $ker(f) = \langle (1, -2, 1) \rangle$.

b) Si determinino, se possibile, due vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^3$ aventi la stessa immagine.
Due tali vettori devono appartenere necessariamente al nucleo: ad esempio $(1, -2, 1)$ e $(2, -4, 2)$.

c) Si determinino, se possibile, due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ non appartenenti all'immagine di f.
L'immagine di f ha equazione

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \end{cases}$$

e quindi, ad esempio, i vettori $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 0)$ non appartengono all'immagine e sono linearmente indipendenti.

d) Si determini la controimmagine mediante f del vettore $(1, 1, 0, 1)$.
Osserviamo che $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$ e quindi $f^{-1}(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0) + ker(f)$ da cui

$$f^{-1}(1, 1, 0, 1) = \{(1 + a, -2a, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

(2) **Esercizio 2** Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
Si vede immediatamente che A ha rango 1 e quindi 0 è un autovalore di molteplicità geometrica 2. Inoltre

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

da cui 6 è autovalore di molteplicità geometrica almeno 1. Ne segue che 0 ha molteplcità geometrica 2 e 6 ha molteplicità geometrica 1 e quindi A è diagonalizzabile. In alternativa si può calcolare il polinomio caratteristico e procedere come di consueto.

ii) Stabilire se $H^{-1}AH$ è diagonale.
Basta osservare H è invertibile e che le colonne di H sono autovettori di autovalori rispettivamente 0,6,0 per concludere che

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è quindi diagonale.

iii) Calcolare $\det(A^{50})$.
per il Teorema di Binet

$$\det(A^{50}) = \det(A)^{50} = 0^{50} = 0.$$

(3) **Esercizio 3** Si considerino i sottospazi $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-2z+t = 0,\ x+y+t = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0\}$.

a) Stabilire se i sottospazi V e W sono ortogonali.
Osserviamo subito che $\dim(V) = 2$ e $\dim(W) = 3$ per cui non possono essere ortogonali: infatti $\dim(W^{\perp}) = 1$ e quindi V non può essere contenuto in $W^{\perp}$.

b) Stabilire se esiste un sottospazio vettoriale T di W che sia ortogonale a V e in caso affermativo determinarlo.
Il sottospazio banale è sicuramente contenuto in W e ortogonale a V. Se vogliamo determinare un sottospazio T più grande possibile (anche se non richiesto) ci basta intersecare W con $V^{\perp}$: si ha che $V^{\perp} \subset W$ e quindi potremo scegliere $T = V^{\perp}$ che è il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} -x + t = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

c) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ che abbiano proiezione ortogonale nulla sia su V che su W.
Sia $v \in \mathbb{R}^4$. Se la proiezione su V è nulla abbiamo $v \in V^{\perp}$. Ma $V^{\perp} \subset W$ per cui la proiezione di v su W è proprio v: concludiamo che v è il vettore nullo.

Prova scritta, 05/02/2018

(1) **Esercizio 1** Sia $\mathcal{B}$ la base ordinata di $\mathbb{R}^3$ data da $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ ed $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si dica se la funzione f è iniettiva e/o suriettiva.
b) Si determini, se possibile, un sottospazio di W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 la cui immagine tramite f ha dimensione 1.
c) Si determinino, se possibile, due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ non appartenenti all'immagine di f.
d) Si determini la controimmagine mediante f del vettore $(1,1,0,1)$.
a) La funzione non può essere suriettiva perché la dimensione del dominio è minore di quella del codominio. La dimensione dell'immagine è uguale al rango della matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$ che è 2. Quindi la dimensione del nucleo è 1 e la funzione non è neanceh iniettiva.
b) Calcoliamo esplicitamente il nucleo utilizzando le coordinate (x,y,z) rispetto alla base $\mathbb{B}$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzione il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(1,-2,1)_{\mathcal{B}}$, cioè dal vettore $(0,-1,1)$.
c) $Im(f)$ è generata dai vettori $(1,1,0,1)$ e $(2,1,1,0)$. Basterà scegliere due vettori linearmente indipendenti da questi due (e indipendenti tra di loro). Ad esempio $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$.
d) Dalla matrice data osserviamo che una controimmagine di $(1,1,0,1)$ è data dal primo vettore della base $\mathcal{B}$, cioè da $(1,0,0)$; tutte le altre controimmagini si ottengono da questa aggiungendo un arbitrario elemetno del nucleo e quindi abbiamo

$$f^{-1}(1,1,0,1) = \{(1,-t,t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

(2) **Esercizio 2** Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire quali tra i seguenti vettori sono autovettori per A: $(2,-1,1)$, $(3,1,0)$, $(1,1,1)$.
b) Dedurre dal punto precedente che A è diagonalizzabile.
c) Mostrare che A e B sono matrici simili.
d) Determinare una matrice H tale che $A = H^{-1}BH$.

a) Basta effettuare le moltiplicazioni. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

per cui $(2, -1, 1)$ è autovettore di autovalore -1;

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui anche $(3, 1, 0)$ è autovettore di autovalore -1;

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

per cui $(1, 1, 1)$ non è autovettore.

b) Dal punto precedente abbiamo che -1 è autovalore di autovalore almeno 2. Inoltre, osservando che $(1, 0, 0)$ è anche un autovettore di autovalore 2 abbiamo che la somma delle molteplicità geometriche degli autovaloi è almeno 3, e quindi è proprio 3 e la matrice A è diagonalizzabile.

c) Basta mostrare che anche B è diagonalizzabile con gli stessi autovalori di A. Infatti gli autovalori di B sono chiaramente 2 con molteplicità algebrica 1 e -1 con molteplicità algebrica 2. E in effetti l'autovalore -1 ha anche molteplicità geometrica 2: il suo autospazio è dato dall'equazione $3x + y = 0$.

d) Se H_A è la matrice che ha per colonne una base di autovettori per A per gli autovalori $2, -1, -1$ rispettivamente e H_B è definita analogamente abbiamo

$$H_A^{-1} A H_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = H_B^{-1} B H_B$$

e quindi basterà prendere $H = H_B H_A^{-1}$.

(3) **Esercizio 3** In $\mathbb{R}^3$

a) si scrivano le equazioni della retta r passante per i punti $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, 0, 0)$.

b) Determinare le equazioni di due piani distinti π_1 e π_2 paralleli alla retta r e passanti per il punto $R = (2, 3, 4)$.

c) Determinare l'equazione di una retta s incidente sia la retta r che i piani π_1 e π_2.

a) Dobbiamo trovare due equazioni indipendenti soeddisfatte da P e Q, ad esempio

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) Basterà traslare i due piani di equaione $x = 1$ e $3y - 2z = 0$ che si intersecano in r in modo che passino per il punto R: otteniamo

$$\pi_1 : x = 2, \quad \pi_2 : 3y - 2z = 1$$

c) Una qualunque retta che passa per un punto di r che non sia parallela ai piani π_1 e π_2 andrà bene. Ad esempio scegliamo le retta che passa per Q:

$$s : \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Osserviamo infatti che la retta s interseca π_1 in $(2, 1, -1)$ e π_2 in $(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice quadrata che non ha rango massimo ha almeno una riga nulla. Falso, una qualunque matrice 2×2 con due righe uguali (ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non ha rango massimo.

(2) L'equazione $x + y + z = 2$ in $\mathbb{R}^3$ descrive una retta. Falso, un'equazione non nulla in $\mathbb{R}^3$ descrive uno spazio di dimensione 2 cioé un piano.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y + 5z = k \end{cases}$$

Scrivere, se possibile, un sistema lineare di quattro equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
Soluzione. Dalle prime due equazioni si ricava immediatamente (facendone la differenza) $z = -1$ e quindi, facendo la differenza tra la seconda e la terza, abbiamo $z = k - 6$ e quindi il sistema è risolubile solo per $k = 5$. Per $k = 5$ il sistema si riduce alle due equazioni $x + 2y = 10$ e $z = -1$.

In conclusione:

- Per $k \neq 5$ il sistema é impossibile;
- Per $k = 5$ il sistema é compatibile e le soluzioni dipendono da una variabile libera e sono

$$\{(x, y, z) = (10 - 2y, y, -1) : y \in \mathbb{R}\}$$

Un sistema equivalente a Σ si ottiene ad esempio aggiungendo l'equazione $z = -1$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z)$$

e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.

(a) Determinare una base del nucleo di f.
(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

Soluzione.

(a) Dobbiamo risolvere il sistema di equazioni $x - 2y + z = 0$ e $x - z = 0$. Siccome queste sono due equazioni indipendenti abbiamo $\dim \ker(f) = 1$. Una base di $\ker(f)$ é data da un suo qualunque vettore non nullo, ad esempio $(1, 1, 1)$.
(b) Si verifica subito che $(1, 1, 1) \notin W$ per cui $\ker(f) \cap W = 0$ e quindi $\ker(f)$ e W sono in somma diretta. Una base di W é data dai vettori $(5, 2, 0)$ e $(0, 7, 5)$ per cui possiamo scegliere

$$B = ((1, 1, 1), (5, 2, 0), (0, 7, 5)).$$

(c) Calcoliamo le immagini dei vettori di B e chiamiamo $C = ((1, 1), (1, -1))$ la base di $\mathbb{R}^2$ da considerare. Abbiamo

- $f(1, 1, 1) = (0, 0) = (0, 0)_C$;

- $f(5,2,0) = (1,5) = (3,-2)_C$;
- $f(0,7,5) = (-9,-5) = (-7,-2)$;

e quindi

$$M_C^B(f)) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) Siccome $f(1,0,0) = (1,1)$ e $f(0,1,0) = (-2,0)$ ci basterá scegliere come g l'unica applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ tale che $g(1,1) = (1,0,0)$ e $g(-2,0) = (0,1,0)$. Chiamando (a,b) le coordinate canoniche di $\mathbb{R}^2$ (per non confonderci con le coordinate (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$) la g avrá equazioni

$$g(a,b) = (b, \frac{1}{2}(b-a), 0)$$

Una tale funzione h non puó esistere perché non puó essere iniettiva.

(e) Abbiamo $W^\perp = \langle(2,-5,7)\rangle$ per i vettori la cui proiezione ortogonale su W é $(1,-1,-1)$ sono esattamente tutti i vettori della forma

$$(1,-1,-1) + h(2,-5,7)$$

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.

(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione.

(a) Chiamiamo F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice A. Abbiamo $F(1,0,0) = (2,0,1)$, $F(0,1,0) = (0,2,1)$, $F(0,0,1) = (0,0,-1)$ per cui solo $(0,0,1)$ é un autovettore (l'immagine é un multiplo scalare di se stesso.

(b) La matrice A ha autovalori 2 (con molteplicità algebrica 2) e -1 (con molteplicità algebrica 1). Siccome $rg(A-2I) = 1$ abbiamo che 2 ha molteplicitá geometrica 2 e quindi la matrie A é diagonalizzabile. L'autospazio V_2 ha equazione $x + y - 3z = 0$ per cui una sua base é data da $((1,-1,0),(0,3,1))$. Abbiamo quindi che $B = ((1,-1,0),(0,3,1),(0,0,1))$ é una base di autovettori per A e quindi possiamo scegliere

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Una base di autovettori é costituita da una base di V_2 e una base di V_{-1}. Tuttavia i vettori di V_{-1} (cioé i multipli di $(0,0,1)$) non sono orotogonali a tutti i vettori di V_2 (ad esempio a $(0,3,1)$) e quindi non puó esistere una base di V_2 costituita da vettori tutti ortogonali a $(0,0,1)$.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice quadrata che non ha rango massimo ha sempre due righe che sono una multiplo dell'altra.
(2) Le equazioni $x + y + z = 2$ e $2x + 2y + 2z = 4$ in $\mathbb{R}^3$ descrivono due piani paralleli distinti.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ x + 4y + 2z = 6 \\ x + 5y + 2z = k \end{cases}$$

Scrivere, se possibile, un sistema lineare di quattro equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z)$$

e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.

(a) Determinare una base del nucleo di f.
(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 2), (2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 3

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Il rango di una matrice A è il numero di righe non nulle di A.
(2) Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\Sigma : \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x + y + 3z = 5 \\ x + y + 4z = k \end{cases}$$

Scrivere, se possibile, un sistema lineare di cinque equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + z)$$

e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.

(a) Determinare una base del nucleo di f.
(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, -1), (1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 4

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice quadrata che ha determinante nullo ha almeno una riga nulla.
(2) Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è suriettiva.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:
$$\Sigma : \begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ x + 3y + 4z = k \end{cases}$$
Scrivere, se possibile, un sistema lineare di quattro equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:
$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - z)$$
e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.
(a) Determinare una base del nucleo di f.
(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(-1, 1), (1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 02/07/2018
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Un sottospazio non banale di $\mathbb{R}^3$ ha infinite basi.
Vero. Sostituendo un vettore di una base con un suo multiplo scalare non nullo si ottiene una nuova base.

(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è necessariamente iniettiva.
Falso. L'applicazione $L(x, y) = (0, 0, 0)$ è lineare ma non iniettiva.

(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 4x + az = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = 1 \\ bx - 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.

(a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;
(b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.

Si ha sempre $(0, 0, 0)$ soluzione di $\Sigma_1(a)$ per ogni a, mentre $(0, 0, 0)$ non è mai soluzione di $\Sigma_2(b)$ per cui $S_1(a)$ non è mai contenuto in $S_2(b)$.

Viceversa, ogni soluzione di $\Sigma_2(b)$ soddisfa l'equazione $-x + y + z = 2$ e quindi non soddisfa l'equazione $x - y - z = 0$ di $\Sigma_1(a)$. Dunque $S_2(b)$ non è mai contenuto in $S_1(a)$ a meno che non sia vuoto. Si tratta dunque di stabilire per quali valori di b il sistema $\Sigma_2(b)$ non ammette soluzioni. Riducendo a scala la matrice completa associata a $\Sigma_2(b)$ si ottiene che questo accade per $b = 2$ e quindi $S_1(a) \supseteq S_2(b)$ per $b = 2$ e per ogni a.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 0 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, 3, -4), (-7, -3, 3, 2), (-3, -11, 15, -14) \rangle$$

(a) Determinare una base di U e una base di W.
(b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$
(c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.
(d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.

Il sottospazio U ha chiaramente dimensione 2 ed una sua base è $\{(-7, 1, 3, 0), (0, 2, 0, -1)\}$. Una base di W è data da $\{(1, -2, 3, -4), (-7, -3, 3, 2)\}$.

Il rango della matrice che ha per righe questi quattro vettori è 3 e dunque $\dim(U+W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = 1$. Il vettore $(-7, -3, 3, 2)$ di W soddisfa le equazioni di U e quindi genera $U \cap W$. Una base della somma è data ad esempio da $\{(1, -2, 3, -4), (-7, -3, 3, 2), (0, 2, 0, -1)\}$

Per determinare il sottospazio T richiesto abbiamo bisogno di un vettore v di $U + W$ che non stia né in U né in W. Ad esempio basta scegliere $T = \langle (1, 0, 3, -5) \rangle$. In tal modo abbiamo

$$U \oplus T = W \oplus T = U + W.$$

Per determinare il sottospazio S è sufficiente scegliere un sottospazio di dimensione 2 che intersechi banalmente sia U che W. Basta scegliere ad esempio $S = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$.

(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x-y=0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x,y,z) = (x-2y+3z, 2x-3y+3z, 3x-3y+2z)$
   (a) Verificare che l'equazione $F(x,y,z) = (x-2y+3z, 2x-3y+3z, 3x-3y+2z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
   (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.
   (c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
   (d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

Basta verificare che $F(w) \in W$ per ogni $w \in W$ e questo è sufficiente mostrarlo se w appartiene ad una base di W. Scegliendo ad esempio la base $B = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$ si ha $F(1,1,0) = (-1,-1,0) \in W$ e $F(0,0,1) = (3,3,2) \in W$. Abbiamo inoltre che la matrice associata è

$$M^B_B(F) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha 2 autovalori distinti (-1 e 2) e pertanto è diagonalizzabile.

Per verificare se anche L è diagonalizzabile scegliamo una base C di $\mathbb{R}^3$ contenente la base B, ad esempio $C = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,0)$. La matrice associata è

$$M^C_C(L) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha autovalori -1 di molteplicità algebrica 2 e 2 di molteplicità algebrica 1. Tuttavia la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 è

$$3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

e dunque L non è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 02/07/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Gli autovalori di un endomorfismo possono essere uguali a 0.
(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è necessariamente suriettiva.

(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ 4x + 4y + az = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -x + z = 2 \\ x = 1 \\ bx + (b-2)y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.
 (a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;
 (b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 0 \\ x + y + 2z + 4t = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, 7, -4), (-7, -3, 1, 2), (-3, -11, 29, -14) \rangle$$

 (a) Determinare una base di U e una base di W.
 (b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$
 (c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.
 (d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.

(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x, y, z) = (x + y + 3z, 2x + 3z, x - y + 2z)$
 (a) Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = (x + y + 3z, 2x + 3z, x - y + 2z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
 (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.
 (c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
 (d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 02/07/2018
TEMA 3

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ ha sempre due autovettori linearmente indipendenti.
(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non può essere suriettiva
(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 6x + y = 0 \\ 8x + az = 0 \end{cases} \quad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ 2x - y = 1 \\ 2bx - 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.
(a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;
(b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 8t = 0 \\ x + y + 2z + 4t = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, 3, -2), (-7, -3, 3, 1), (-3, -11, 15, -7) \rangle$$

(a) Determinare una base di U e una base di W.
(b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$
(c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.
(d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.

(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - 2y = 0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x, y, z) = (x - 4y + 6z, 2x - 8y + 3z, 3x - 6y + 2z)$
(a) Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = (x - 4y + 6z, 2x - 8y + 3z, 3x - 6y + 2z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
(b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.
(c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
(d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 02/07/2018
TEMA 4

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Se V è uno spazio vettoriale e $v \in V$, $v \neq 0$, allora esiste sempre una base di V contenente v.
(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non può essere iniettiva.
(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 4x + az = 0 \end{cases} \quad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ bx - 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.
  (a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;
  (b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 7t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, -1, -4), (-7, -3, 5, 2), (-3, -11, 1, -14) \rangle$$

  (a) Determinare una base di U e una base di W.
  (b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$
  (c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.
  (d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.
(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x, y, z) = (x - 2y + 6z, 2x - 3y + 6z, 3x - 3y + 4z)$
  (a) Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = (x - 2y + 6z, 2x - 3y + 6z, 3x - 3y + 4z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
  (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.
  (c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
  (d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 16/07/2018
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Le coordinate del vettore $(1,1,0)$ nella base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ sono $(1,1,0)$.
(2) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzabile è anche invertibile.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
 (a) un sistema lineare che ha $(2,1,-1),(-2,1,5),(0,1,2)$ come uniche soluzioni;
 (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(2,1,-1),(-2,1,5),(0,1,2)$ tra le soluzioni;
 (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(2,1,-1),(-2,1,5),(0,1,2)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle(0,1,2),(1,0,1)\rangle$.
 (a) Determinare una base di $U^\perp$.
 (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
 (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle(1,0,1,0),(1,5,1,0)\rangle$ e $V_1 = \langle(0,0,0,1),(1,1,3,0)\rangle$.
 (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
 (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
 (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 16/07/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Le coordinate del vettore $(1,1,1)$ nella base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ sono $(1,1,0)$.
(2) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ invertibile è anche diagonalizzabile.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
   (a) un sistema lineare che ha $(2,-1,1),(-2,5,1),(0,2,1)$ come uniche soluzioni;
   (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(2,-1,1),(-2,5,1),(0,2,1)$ tra le soluzioni;
   (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(2,-1,1),(-2,5,1),(0,2,1)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle(2,1,0),(1,0,1)\rangle$.
   (a) Determinare una base di $U^\perp$.
   (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
   (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle(1,1,0,0),(1,1,5,0)\rangle$ e $V_1 = \langle(0,0,0,1),(1,3,1,0)\rangle$.
   (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
   (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
   (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 16/07/2018
TEMA 3

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ non invertibile non può essere diagonalizzabile.
(2) Il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente i vettori $(1,1)$, $(2,2)$ è $\mathbb{R}^2$ stesso.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
  (a) un sistema lineare che ha $(-1,2,1),(5,2,1),(2,2,1)$ come uniche soluzioni;
  (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(-1,2,1),(5,2,1),(2,2,1)$ tra le soluzioni;
  (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(-1,2,1),(5,2,1),(2,2,1)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle(0,2,1),(1,1,0)\rangle$.
  (a) Determinare una base di $U^\perp$.
  (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
  (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle(1,0,0,1),(1,5,0,1)\rangle$ e $V_1 = \langle(0,0,1,0),(1,1,0,3)\rangle$.
  (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
  (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
  (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 16/07/2018
TEMA 4

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ è una matrice diagonalizzabile allora $\det(A) \neq 0$.
(2) Il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente il vettore $(1,1)$ ha dimensione uno.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
   (a) un sistema lineare che ha $(1,-1,2),(1,5,-2),(1,2,0)$ come uniche soluzioni;
   (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(1,-1,2),(1,5,-2),(1,2,0)$ tra le soluzioni;
   (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(1,-1,2),(1,5,-2),(1,2,0)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle (0,2,1),(1,1,0) \rangle$.
   (a) Determinare una base di $U^\perp$.
   (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
   (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle (1,0,1,0),(1,0,1,5) \rangle$ e $V_1 = \langle (0,1,0,0),(1,0,3,1) \rangle$.
   (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
   (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
   (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/09/2018
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$ generano $\mathbb{R}^2$.
(2) Dato un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 esiste un unico sottospazio T di dimensione 2 tale che $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

(1) **Esercizio 1** Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari Σ e Σ'_k nelle incognite x, y, z sono equivalenti:

$$\Sigma : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma'_k : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ kx + ky + kz = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

Per i valori di k trovati determinare le soluzioni dei sistemi Σ e Σ'_k.

(2) **Esercizio 2** Siano $S = \langle (1, -1, 0), (2, 1, 1) \rangle$ e $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$.
   (a) Determinare una base di $S + T$ ed una base di $S \cap T$.
   (b) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = S$, $Im(f) = T$.
   (c) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(g) = T$, $Im(g) = S$.
   (d) Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.
   (e) Determinare, se possibile, un vettore di T la cui proiezione ortogonale su S sia $(1, -1, 0)$

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, -1, -1)$, $f(0, 1, -1) = (0, -1, 1)$.
   (a) Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile.
   (b) Calcolare gli autovalori di f.
   (c) Stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
   (d) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.
   (e) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/09/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due vettori di $\mathbb{R}^2$ che generano $\mathbb{R}^2$ sono anche linearmente indipendenti.
(2) Dato un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 esiste un unico sottospazio T di dimensione 1 tale che $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

(1) **Esercizio 1** Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari Σ e Σ'_k nelle incognite x, y, z sono equivalenti:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\Sigma'_k : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ kx + ky + kz = 6k \\ y + 2z = -6 \end{cases}$$

Per i valori di k trovati determinare le soluzioni dei sistemi Σ e Σ'_k.

(2) **Esercizio 2** Siano $S = \langle (1, 1, 1), (2, 1, 0) \rangle$ e $T = \langle (1, 0, -1) \rangle$.
  (a) Determinare una base di $S + T$ ed una base di $S \cap T$.
  (b) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = S$, $Im(f) = T$.
  (c) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(g) = T$, $Im(g) = S$.
  (d) Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.
  (e) Determinare, se possibile, un vettore di T la cui proiezione ortogonale su S sia $(1, 1, 1)$

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, 2, 2)$, $f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$.
  (a) Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile.
  (b) Calcolare gli autovalori di f.
  (c) Stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
  (d) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.
  (e) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA 08/01/2019

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Non esiste alcuna applicazione lineare invertibile $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.
(2) Ogni matrice diagonalizzabile è invertibile.

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y) = (3x + y, y - x, 2y + 3x).$$

a) Verificare che f è iniettiva;
b) determinare una base di $Im(f)$;
c) descrivere $Im(f)$ mediante equazioni cartesiane;
d) determinare una base di $(Im(f))^{\perp}$.

Esercizio 2 Sia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito da

$$V := \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

(a) Dimostrare che $f_A(V) \subset V$ e quindi è possibile definire un'applicazione lineare

$$f : V \to V$$
$$v \mapsto f_A(v).$$

(b) Sia $\mathcal{B}$ la base di V data da $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(c) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3 Costruire, se possibile, una funzione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$f(1, 0, 1) = (1, 1), \quad f(1, 0, -1) = (1, 1), \quad f(2, 0, 3) = (2, 2).$$

Calcolare la controimmagine del vettore $(-1, -1)$ mediante la funzione f costruita.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 06/02/2019
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice 3×3 con tre autovalori distinti è sempre diagonalizzabile.
(2) L'intersezione di due sottospazi di dimensione 3 in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione maggiore di 1.

(1) **Esercizio 1** Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti da un parametro k.
$$U = \{(x, y, z, t) : \ x - 2y + z + kt = 0, \ x + z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, t), \ x - kz = 0, \ 2x + y - 2kz + 2t = 0\}.$$
   a. Stabilire per quali valori di k si ha $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

   b. Stabilire per quali valori di k si ha $W = U^{\perp}$.
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle (0, 1, 2), (1, 0, 1) \rangle$ e $W = \{(x, y, z) : \ x + y = 0\}$.
   (a) Determinare, se esiste, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(u) \in W$ per ogni $u \in U$.
   (b) Determinare, se esiste una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(G) = U$, $Im(G) = W$.
   (c) Sia $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $H(x, y, z) = (-2x - 2y + z, -x - 3y + z, x + 2y - 2z)$. Verificare che U è un autospazio di H mentre W non lo è.
(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, -1, -1)$.
   (a) Determinare la matrice associata all'endomorfismo f rispetto alla base canonica.
   (b) Determinare gli autovalori di f e stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
   (c) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:
$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova scritta, 11/06/2018

TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice quadrata che non ha rango massimo ha almeno una riga nulla. Falso, una qualunque matrice 2×2 con due righe uguali (ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non ha rango massimo.

(2) L'equazione $x + y + z = 2$ in $\mathbb{R}^3$ descrive una retta. Falso, un'equazione non nulla in $\mathbb{R}^3$ descrive uno spazio di dimensione 2 cioé un piano.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y + 5z = k \end{cases}$$

Scrivere, se possibile, un sistema lineare di quattro equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
Soluzione. Dalle prime due equazioni si ricava immediatamente (facendone la differenza) $z = -1$ e quindi, facendo la differenza tra la seconda e la terza, abbiamo $z = k - 6$ e quindi il sistema è risolubile solo per $k = 5$. Per $k = 5$ il sistema si riduce alle due equazioni $x + 2y = 10$ e $z = -1$.

In conclusione:

- Per $k \neq 5$ il sistema é impossibile;
- Per $k = 5$ il sistema é compatibile e le soluzioni dipendono da una variabile libera e sono

$$\{(x, y, z) = (10 - 2y, y, -1) : y \in \mathbb{R}\}$$

Un sistema equivalente a Σ si ottiene ad esempio aggiungendo l'equazione $z = -1$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z)$$

e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.

(a) Determinare una base del nucleo di f.
(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

Soluzione.

(a) Dobbiamo risolvere il sistema di equazioni $x - 2y + z = 0$ e $x - z = 0$. Siccome queste sono due equazioni indipendenti abbiamo $\dim \ker(f) = 1$. Una base di $\ker(f)$ é data da un suo qualunque vettore non nullo, ad esempio $(1, 1, 1)$.

(b) Si verifica subito che $(1,1,1) \notin W$ per cui $\ker(f) \cap W = 0$ e quindi $\ker(f)$ e W sono in somma diretta. Una base di W é data dai vettori $(5,2,0)$ e $(0,7,5)$ per cui possiamo scegliere

$$B = ((1,1,1),(5,2,0),(0,7,5)).$$

(c) Calcoliamo le immagini dei vettori di B e chiamiamo $C = ((1,1),(1,-1))$ la base di $\mathbb{R}^2$ da considerare. Abbiamo
- $f(1,1,1) = (0,0) = (0,0)_C$;
- $f(5,2,0) = (1,5) = (3,-2)_C$;
- $f(0,7,5) = (-9,-5) = (-7,-2)$;

e quindi

$$M_C^B(f)) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) Siccome $f(1,0,0) = (1,1)$ e $f(0,1,0) = (-2,0)$ ci basterá scegliere come g l'unica applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ tale che $g(1,1) = (1,0,0)$ e $g(-2,0) = (0,1,0)$. Chiamando (a,b) le coordinate canoniche di $\mathbb{R}^2$ (per non confonderci con le coordinate (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$) la g avrá equazioni

$$g(a,b) = (b, \frac{1}{2}(b-a), 0)$$

Una tale funzione h non puó esistere perché non puó essere iniettiva.

(e) Abbiamo $W^\perp = \langle(2,-5,7)\rangle$ per i vettori la cui proiezione ortogonale su W é $(1,-1,-1)$ sono esattamente tutti i vettori della forma

$$(1,-1,-1) + h(2,-5,7)$$

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione.

(a) Chiamiamo F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice A. Abbiamo $F(1,0,0) = (2,0,1)$, $F(0,1,0) = (0,2,1)$, $F(0,0,1) = (0,0,-1)$ per cui solo $(0,0,1)$ é un autovettore (l'immagine é un multiplo scalare di se stesso.

(b) La matrice A ha autovalori 2 (con molteplicità algebrica 2) e -1 (con molteplicità algebrica 1). Siccome $rg(A-2I) = 1$ abbiamo che 2 ha molteplicitá geometrica 2 e quindi la matrie A é diagonalizzabile. L'autospazio V_2 ha equazione $x + y - 3z = 0$ per cui una sua base é data da $((1,-1,0),(0,3,1))$. Abbiamo quindi che $B = ((1,-1,0),(0,3,1),(0,0,1))$ é una base di autovettori per A e quindi possiamo scegliere

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Una base di autovettori é costituita da una base di V_2 e una base di V_{-1}. Tuttavia i vettori di V_{-1} (cioé i multipli di $(0,0,1)$) non sono orotogonali a tutti i vettori di V_2 (ad esempio a $(0,3,1)$) e quindi non puó esistere una base di V_2 costituita da vettori tutti ortogonali a $(0,0,1)$.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice quadrata che non ha rango massimo ha sempre due righe che sono una multiplo dell'altra.
(2) Le equazioni $x + y + z = 2$ e $2x + 2y + 2z = 4$ in $\mathbb{R}^3$ descrivono due piani paralleli distinti.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ x + 4y + 2z = 6 \\ x + 5y + 2z = k \end{cases}$$

Scrivere, se possibile, un sistema lineare di quattro equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z)$$

e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.

(a) Determinare una base del nucleo di f.
(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 2), (2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 3

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Il rango di una matrice A è il numero di righe non nulle di A.
(2) Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:
$$\Sigma : \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x + y + 3z = 5 \\ x + y + 4z = k \end{cases}$$
Scrivere, se possibile, un sistema lineare di cinque equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:
$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + z)$$
e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.
 (a) Determinare una base del nucleo di f.
 (b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
 (c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, -1), (1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
 (d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
 (e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
 (a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
 (b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
 (c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 4

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice quadrata che ha determinante nullo ha almeno una riga nulla.
(2) Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è suriettiva.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ x + 3y + 4z = k \end{cases}$$

Scrivere, se possibile, un sistema lineare di quattro equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - z)$$

e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.

(a) Determinare una base del nucleo di f.
(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.
(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(-1, 1), (1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Prova scritta, 02/07/2018

TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Un sottospazio non banale di $\mathbb{R}^3$ ha infinite basi.
Vero. Sostituendo un vettore di una base con un suo multiplo scalare non nullo si ottiene una nuova base.

(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è necessariamente iniettiva.
Falso. L'applicazione $L(x, y) = (0, 0, 0)$ è lineare ma non iniettiva.

(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 4x + az = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = 1 \\ bx - 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.

(a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;

(b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.

Si ha sempre $(0, 0, 0)$ soluzione di $\Sigma_1(a)$ per ogni a, mentre $(0, 0, 0)$ non è mai soluzione di $\Sigma_2(b)$ per cui $S_1(a)$ non è mai contenuto in $S_2(b)$.

Viceversa, ogni soluzione di $\Sigma_2(b)$ soddisfa l'equazione $-x + y + z = 2$ e quindi non soddisfa l'equazione $x - y - z = 0$ di $\Sigma_1(a)$. Dunque $S_2(b)$ non è mai contenuto in $S_1(a)$ a meno che non sia vuoto. Si tratta dunque di stabilire per quali valori di b il sistema $\Sigma_2(b)$ non ammette soluzioni. Riducendo a scala la matrice completa associata a $\Sigma_2(b)$ si ottiene che questo accade per $b = 2$ e quindi $S_1(a) \supseteq S_2(b)$ per $b = 2$ e per ogni a.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 0 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, 3, -4), (-7, -3, 3, 2), (-3, -11, 15, -14) \rangle$$

(a) Determinare una base di U e una base di W.

(b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$

(c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.

Il sottospazio U ha chiaramente dimensione 2 ed una sua base è $\{(-7, 1, 3, 0), (0, 2, 0, -1)\}$. Una base di W è data da $\{(1, -2, 3, -4), (-7, -3, 3, 2)\}$.

Il rango della matrice che ha per righe questi quattro vettori è 3 e dunque $\dim(U+W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = 1$. Il vettore $(-7, -3, 3, 2)$ di W soddisfa le equazioni di U e quindi genera $U \cap W$. Una base della somma è data ad esempio da $\{(1, -2, 3, -4), (-7, -3, 3, 2), (0, 2, 0, -1)\}$

Per determinare il sottospazio T richiesto abbiamo bisogno di un vettore v di $U + W$ che non stia né in U né in W. Ad esempio basta scegliere $T = \langle (1, 0, 3, -5) \rangle$. In tal modo abbiamo

$$U \oplus T = W \oplus T = U + W.$$

Per determinare il sottospazio S è sufficiente scegliere un sottospazio di dimensione 2 che intersechi banalmente sia U che W. Basta scegliere ad esempio $S = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0) \rangle$.

(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x,y,z) = (x - 2y + 3z, 2x - 3y + 3z, 3x - 3y + 2z)$

(a) Verificare che l'equazione $F(x,y,z) = (x-2y+3z, 2x-3y+3z, 3x-3y+2z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.

(b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.

(c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.

(d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

Basta verificare che $F(w) \in W$ per ogni $w \in W$ e questo è sufficiente mostrarlo se w appartiene ad una base di W. Scegliendo ad esempio la base $B = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$ si ha $F(1,1,0) = (-1,-1,0) \in W$ e $F(0,0,1) = (3,3,2) \in W$. Abbiamo inoltre che la matrice associata è

$$M^B_B(F) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha 2 autovalori distinti (-1 e 2) e pertanto è diagonalizzabile.

Per verificare se anche L è diagonalizzabile scegliamo una base C di $\mathbb{R}^3$ contenente la base B, ad esempio $C = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,0)$. La matrice associata è

$$M^C_C(L) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha autovalori -1 di molteplicità algebrica 2 e 2 di molteplicità algebrica 1. Tuttavia la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 è

$$3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

e dunque L non è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 02/07/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Gli autovalori di un endomorfismo possono essere uguali a 0.
(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è necessariamente suriettiva.

(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ 4x + 4y + az = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -x + z = 2 \\ x = 1 \\ bx + (b-2)y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.
 (a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;
 (b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 0 \\ x + y + 2z + 4t = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, 7, -4), (-7, -3, 1, 2), (-3, -11, 29, -14) \rangle$$

 (a) Determinare una base di U e una base di W.
 (b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$
 (c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.
 (d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.

(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x, y, z) = (x + y + 3z, 2x + 3z, x - y + 2z)$
 (a) Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = (x + y + 3z, 2x + 3z, x - y + 2z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
 (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.
 (c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
 (d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 02/07/2018
TEMA 3

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ ha sempre due autovettori linearmente indipendenti.
(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non può essere suriettiva

(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 6x + y = 0 \\ 8x + az = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ 2x - y = 1 \\ 2bx - 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.
  (a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;
  (b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 8t = 0 \\ x + y + 2z + 4t = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, 3, -2), (-7, -3, 3, 1), (-3, -11, 15, -7) \rangle$$

  (a) Determinare una base di U e una base di W.
  (b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$
  (c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.
  (d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.

(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - 2y = 0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x, y, z) = (x - 4y + 6z, 2x - 8y + 3z, 3x - 6y + 2z)$
  (a) Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = (x - 4y + 6z, 2x - 8y + 3z, 3x - 6y + 2z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
  (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.
  (c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
  (d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 02/07/2018
TEMA 4

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Se V è uno spazio vettoriale e $v \in V$, $v \neq 0$, allora esiste sempre una base di V contenente v.
(2) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non può essere iniettiva.
(1) **Esercizio 1**Si considerino i seguenti sistemi lineari al variare dei parametri reali a, b.

$$\Sigma_1(a) : \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 4x + az = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_2(b) : \begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ bx - 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

Sia $S_1(a)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_1(a)$ e $S_2(b)$ l'insieme delle soluzioni di $\Sigma_2(b)$.
(a) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \subseteq S_2(b)$;
(b) Determinare tutti i valori di a, b per cui $S_1(a) \supseteq S_2(b)$.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 7t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio

$$W = \langle (1, -2, -1, -4), (-7, -3, 5, 2), (-3, -11, 1, -14) \rangle$$

(a) Determinare una base di U e una base di W.
(b) Determinare $U \cap W$ e $U + W$
(c) Determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus T = W \oplus T$.
(d) Determinare, se possibile, un sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U \oplus S = W \oplus S$.

(3) **Esercizio 3** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0$ e si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $L(x, y, z) = (x - 2y + 6z, 2x - 3y + 6z, 3x - 3y + 4z)$
(a) Verificare che l'equazione $F(x, y, z) = (x - 2y + 6z, 2x - 3y + 6z, 3x - 3y + 4z)$ definisce un'applicazione lineare $F : W \to W$.
(b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W e determinare la matrice associata $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.
(c) Stabilire se $F : W \to W$ è diagonalizzabile.
(d) Stabilire se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

Prova scritta, 16/07/2018

TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Le coordinate del vettore $(1,1,0)$ nella base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ sono $(1,1,0)$.
(2) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzabile è anche invertibile.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
   (a) un sistema lineare che ha $(2,1,-1),(-2,1,5),(0,1,2)$ come uniche soluzioni;
   (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(2,1,-1),(-2,1,5),(0,1,2)$ tra le soluzioni;
   (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(2,1,-1),(-2,1,5),(0,1,2)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle(0,1,2),(1,0,1)\rangle$.
   (a) Determinare una base di $U^\perp$.
   (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
   (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle(1,0,1,0),(1,5,1,0)\rangle$ e $V_1 = \langle(0,0,0,1),(1,1,3,0)\rangle$.
   (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
   (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
   (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 16/07/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Le coordinate del vettore $(1,1,1)$ nella base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ sono $(1,1,0)$.
(2) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ invertibile è anche diagonalizzabile.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
   (a) un sistema lineare che ha $(2,-1,1),(-2,5,1),(0,2,1)$ come uniche soluzioni;
   (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(2,-1,1),(-2,5,1),(0,2,1)$ tra le soluzioni;
   (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(2,-1,1),(-2,5,1),(0,2,1)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle(2,1,0),(1,0,1)\rangle$.
   (a) Determinare una base di $U^\perp$.
   (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
   (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle(1,1,0,0),(1,1,5,0)\rangle$ e $V_1 = \langle(0,0,0,1),(1,3,1,0)\rangle$.
   (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
   (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
   (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 16/07/2018
TEMA 3

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ non invertibile non può essere diagonalizzabile.
(2) Il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente i vettori $(1,1)$, $(2,2)$ è $\mathbb{R}^2$ stesso.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
  (a) un sistema lineare che ha $(-1,2,1),(5,2,1),(2,2,1)$ come uniche soluzioni;
  (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(-1,2,1),(5,2,1),(2,2,1)$ tra le soluzioni;
  (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(-1,2,1),(5,2,1),(2,2,1)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle(0,2,1),(1,1,0)\rangle$.
  (a) Determinare una base di $U^\perp$.
  (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
  (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle(1,0,0,1),(1,5,0,1)\rangle$ e $V_1 = \langle(0,0,1,0),(1,1,0,3)\rangle$.
  (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
  (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
  (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 16/07/2018
TEMA 4

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ è una matrice diagonalizzabile allora $\det(A) \neq 0$.
(2) Il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente il vettore $(1, 1)$ ha dimensione uno.

(1) **Esercizio 1** Se possibile, si scriva:
   (a) un sistema lineare che ha $(1, -1, 2), (1, 5, -2), (1, 2, 0)$ come uniche soluzioni;
   (b) un sistema lineare di rango 1 che ha $(1, -1, 2), (1, 5, -2), (1, 2, 0)$ tra le soluzioni;
   (c) un sistema lineare di rango 2 che ha $(1, -1, 2), (1, 5, -2), (1, 2, 0)$ tra le soluzioni;
(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle(0, 2, 1), (1, 1, 0)\rangle$.
   (a) Determinare una base di $U^\perp$.
   (b) Stabilire se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus U^\perp$.
   (c) Stabilire se esiste un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = T + U = T + U^\perp$.
(3) **Esercizio 3** Siano $V_0 = \langle(1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 5)\rangle$ e $V_1 = \langle(0, 1, 0, 0), (1, 0, 3, 1)\rangle$.
   (a) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V_0 \oplus V_1$.
   (b) Costruire, se possibile, una matrice A avente V_0 e V_1 come autospazi relativi a 0 e 1, rispettivamente.
   (c) Stabilire se A è diagonalizzabile.

Prova scritta, 13/09/2018

TEMA 1 QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$ generano $\mathbb{R}^2$.
(2) Dato un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 esiste un unico sottospazio T di dimensione 2 tale che $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

(1) **Esercizio 1** Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari Σ e Σ'_k nelle incognite x, y, z sono equivalenti:

$$\Sigma : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma'_k : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ kx + ky + kz = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

Per i valori di k trovati determinare le soluzioni dei sistemi Σ e Σ'_k.

(2) **Esercizio 2** Siano $S = \langle (1, -1, 0), (2, 1, 1) \rangle$ e $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$.
   (a) Determinare una base di $S + T$ ed una base di $S \cap T$.
   (b) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = S$, $Im(f) = T$.
   (c) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(g) = T$, $Im(g) = S$.
   (d) Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.
   (e) Determinare, se possibile, un vettore di T la cui proiezione ortogonale su S sia $(1, -1, 0)$

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, -1, -1)$, $f(0, 1, -1) = (0, -1, 1)$.
   (a) Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile.
   (b) Calcolare gli autovalori di f.
   (c) Stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
   (d) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.
   (e) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/09/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due vettori di $\mathbb{R}^2$ che generano $\mathbb{R}^2$ sono anche linearmente indipendenti.
(2) Dato un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 esiste un unico sottospazio T di dimensione 1 tale che $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

(1) **Esercizio 1** Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari Σ e Σ'_k nelle incognite x, y, z sono equivalenti:
$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$
$$\Sigma'_k : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ kx + ky + kz = 6k \\ y + 2z = -6 \end{cases}$$
Per i valori di k trovati determinare le soluzioni dei sistemi Σ e Σ'_k.
(2) **Esercizio 2** Siano $S = \langle(1, 1, 1), (2, 1, 0)\rangle$ e $T = \langle(1, 0, -1)\rangle$.
   (a) Determinare una base di $S + T$ ed una base di $S \cap T$.
   (b) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = S$, $Im(f) = T$.
   (c) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(g) = T$, $Im(g) = S$.
   (d) Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.
   (e) Determinare, se possibile, un vettore di T la cui proiezione ortogonale su S sia $(1, 1, 1)$
(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, 2, 2)$, $f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$.
   (a) Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile.
   (b) Calcolare gli autovalori di f.
   (c) Stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
   (d) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.
   (e) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:
$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova scritta, 08/01/2019

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Non esiste alcuna applicazione lineare invertibile $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.
(2) Ogni matrice diagonalizzabile è invertibile.

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y) = (3x + y, y - x, 2y + 3x).$$

a) Verificare che f è iniettiva;
b) determinare una base di $Im(f)$;
c) descrivere $Im(f)$ mediante equazioni cartesiane;
d) determinare una base di $(Im(f))^{\perp}$.

Esercizio 2 Sia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito da

$$V := \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

(a) Dimostrare che $f_A(V) \subset V$ e quindi è possibile definire un'applicazione lineare

$$f : V \to V$$
$$v \mapsto f_A(v).$$

(b) Sia $\mathcal{B}$ la base di V data da $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(c) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3 Costruire, se possibile, una funzione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$f(1, 0, 1) = (1, 1), \quad f(1, 0, -1) = (1, 1), \quad f(2, 0, 3) = (2, 2).$$

Calcolare la controimmagine del vettore $(-1, -1)$ mediante la funzione f costruita.

Prova scritta, 06/02/2019

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice 3×3 con tre autovalori distinti è sempre diagonalizzabile.

(2) L'intersezione di due sottospazi di dimensione 3 in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione maggiore di 1.

(1) **Esercizio 1** Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti da un parametro k.

$$U = \{(x, y, z, t) : \, x - 2y + z + kt = 0, \, x + z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, t), \, x - kz = 0, \, 2x + y - 2kz + 2t = 0\}.$$

a. Stabilire per quali valori di k si ha $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

b. Stabilire per quali valori di k si ha $W = U^{\perp}$.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle (0, 1, 2), (1, 0, 1) \rangle$ e $W = \{(x, y, z) : \, x + y = 0\}$.

(a) Determinare, se esiste, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(u) \in W$ per ogni $u \in U$.

(b) Determinare, se esiste una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(G) = U$, $Im(G) = W$.

(c) Sia $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $H(x, y, z) = (-2x - 2y + z, -x - 3y + z, x + 2y - 2z)$. Verificare che U è un autospazio di H mentre W non lo è.

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, -1, -1)$.

(a) Determinare la matrice associata all'endomorfismo f rispetto alla base canonica.

(b) Determinare gli autovalori di f e stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova scritta, 14/06/2019

TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

1) Ogni applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,0) = (0,0)$ è lineare.
FALSO: per esempio l'applicazione $f(x,y) = (x^2, 0)$ soddisfa la condizione $f(0,0) = (0,0)$ ma non è lineare. Infatti $f(1,0) = (1,0)$, $f(-1,0) = (1,0)$ ma $f((1,0) + (-1,0)) = f(0,0) = (0,0) \neq (1,0) + (1,0) = (2,0)$.

2) Se una matrice quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.
VERO: in tal caso infatti la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale ad 1 e pertanto coincide con la molteplicità geometrica e la somma delle molteplicità è n.

3) Due sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ sono sempre in somma diretta.
FALSO: controesempio: $S = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$, $T = \langle (1,0,0,0), (0,0,1,0) \rangle$. Si ha $S \cap T = \langle (1,0,0,0) \rangle$.

Esercizio 1 Siano $U = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.

a) È possibile descrivere U mediante una sola equazione lineare? In caso affermativo determinarla.
b) Calcolare una base $\mathcal{B}$ di $U \cap V$.
c) Completare $\mathcal{B}$ in una base di U e in una base di V.
d) Determinare una base di $U + V$.

SVOLGIMENTO. a) I vettori $(1,1,1)$ e $(1,2,1)$ sono linearmente indipendenti perciò U ha dimensione 2 e può essere descritto mediante l'equazione $x = z$.

b) Da a) segue che $U \cap V$ è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x = z \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Quindi $U \cap V = \{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,0,1) \rangle$.

c) $U = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$, $V = \langle (1,0,1), (1,1,0) \rangle$.

d) Dal momento che $\dim(U) = 2 = \dim(V)$ e $\dim(U \cap V) = 1$, per la formula di Grassmann si ha $\dim(U + V) = 3$, pertanto $U + V = \mathbb{R}^3$. Basta dunque scegliere una base qualsiasi di $\mathbb{R}^3$ (ad esempio la base canonica).

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z) = (x - y, 2x - 2y, z).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
c) Sia $W = \langle (0,0,1), (1,2,0) \rangle$. Mostrare che $f(W) \subseteq W$ e scrivere la matrice della restrizione $f_{|W} : W \to W$ rispetto ad una base fissata.

SVOLGIMENTO. a) $ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, z = 0\} = \langle(1, 1, 0)\rangle$. $Im(f) = \langle f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\rangle = \langle(1, 2, 0), (-1, -2, 0), (0, 0, 1)\rangle = \langle(1, 2, 0), (0, 0, 1)\rangle$.

b) Poiché il nucleo di f non è banale essa non è iniettiva e dunque nemmeno suriettiva.

c) Si ha: $f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \in W$ e $f(1, 2, 0) = (-1, -2, 0) \in W$. Pertanto la matrice di $f_{|W}$ rispetto alla base $\{(0, 0, 1), (1, 2, 0)\}$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + 2y + 3z - t = 0$.

a) Determinare una base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di U.
b) Sia F l'unico endomorfismo di U tale che $F(\mathbf{b}_1) = F(\mathbf{b}_2) = F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Determinare $F(1, 1, 1, 6)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile.
d) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate rispetto alla base B.
e) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^4$.

SVOLGIMENTO. a) Scegliamo $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1, 3)$.

b) Poiché $(1, 1, 1, 6) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, abbiamo $F(1, 1, 1, 6) = F(\mathbf{b}_1) + F(\mathbf{b}_2) + F(\mathbf{b}_3) = 3(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) = (3, 3, 3, 18)$.

c) F ha nucleo di dimensione 2 generato dai vettori $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$ che sono linearmente indipendenti. Il vettore $(1, 1, 1, 6)$ è autovettore di autovalore 3. Inoltre 0 è autovalore di molteplicità geometrica 2 e di molteplicità algebrica 2. Possiamo concludere che F è diagonalizzabile.

d) Rispetto alla base B abbiamo $V_0 = \{(x, y, z)_B \mid x + y + z = 0\}$ e $V_3 = \{(x, y, z)_B \mid x = y = z\}$.

e) Rispetto alla base canonica abbiamo $V_0 = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z = 0; y + 2z - t = 0\}$ e $V_3 = \{(x, y, z, t) \mid x - y = 0, y - z = 0, 6z - t = 0\}$.

TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
(2) Se una matrice quadrata di ordine 4 ha 3 autovalori distinti allora non è diagonalizzabile.
(3) Due sottospazi distinti di dimensione 1 di $\mathbb{R}^4$ sono sempre in somma diretta.

Esercizio 1 Siano $U = \langle (1, 2, 3), (1, 2, -1) \rangle$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.

a) È possibile descrivere U mediante una sola equazione lineare? In caso affermativo determinarla.
b) Calcolare una base $\mathcal{B}$ di $U \cap V$.
c) Completare $\mathcal{B}$ in una base di U e in una base di V.
d) Determinare una base di $U + V$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, z).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
c) Sia $W = \langle (0, 0, 1), (1, 2, 0) \rangle$. Mostrare che $f(W) \subseteq W$ e scrivere la matrice della restrizione $f_{|W} : W \to W$ rispetto ad una base fissata.

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x - 2y + 3z + t = 0$.

a) Determinare una base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di U.
b) Sia F l'unico endomorfismo di U tale che $F(\mathbf{b}_1) = F(\mathbf{b}_2) = F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Determinare $F(1, -1, 1, -6)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile.
d) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate rispetto alla base B.
e) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^4$.

TEMA 3

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Ogni applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,0) = (1,0)$ non è lineare.
(2) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice quadrata di ordine n è sempre n.
(3) Se $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ appartiene a U o a W (o a entrambi).

Esercizio 1 Siano $U = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

a) È possibile descrivere U mediante una sola equazione lineare? In caso affermativo determinarla.
b) Calcolare una base $\mathcal{B}$ di $U \cap V$.
c) Completare $\mathcal{B}$ in una base di U e in una base di V.
d) Determinare una base di $U + V$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z) = (x - y, -y + z, z - x).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
c) Sia $W = \langle (0,1,1), (1,1,0) \rangle$. Mostrare che $f(W) \subseteq W$ e scrivere la matrice della restrizione $f_{|W} : W \to W$ rispetto ad una base fissata.

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $-x - 2y + 3z + t = 0$.

a) Determinare una base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di U.
b) Sia F l'unico endomorfismo di U tale che $F(\mathbf{b}_1) = F(\mathbf{b}_2) = F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Determinare $F(1,1,-1,6)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile.
d) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate rispetto alla base B.
e) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^4$.

TEMA 4

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Ogni applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,0) = (0,0)$ è lineare.
(2) Se una matrice quadrata di ordine 4 ha 3 autovalori distinti allora non è diagonalizzabile.
(3) Se $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ appartiene a U o a W (o a entrambi).

Esercizio 1 Siano $U = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

a) È possibile descrivere U mediante una sola equazione lineare? In caso affermativo determinarla.
b) Calcolare una base $\mathcal{B}$ di $U \cap V$.
c) Completare $\mathcal{B}$ in una base di U e in una base di V.
d) Determinare una base di $U + V$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z) = (x - y + z, 2x - 2y - 2z, 2z).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
c) Sia $W = \langle (1,0,1), (1,2,0) \rangle$. Mostrare che $f(W) \subseteq W$ e scrivere la matrice della restrizione $f_{|W} : W \to W$ rispetto ad una base fissata.

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + 2y + 3z - t = 0$.

a) Determinare una base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di U.
b) Sia F l'unico endomorfismo di U tale che $F(\mathbf{b}_1) = F(\mathbf{b}_2) = F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Determinare $F(1,1,1,6)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile.
d) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate rispetto alla base B.
e) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^4$.

Prova scritta, 01/07/2019

QUESITI PRELIMINARI.
TEMA 1

(1) Non esistono funzioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
VERO: per il teorema delle dimensioni $\dim \ker f = 3 - \dim Imf \geq 1$.

(2) Ogni matrice invertibile è diagonalizzabile.
FALSO: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile ma non diagonalizzabile.

(3) Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione.
VERO: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ è soluzione di ogni sistema lineare omogeneo

TEMA 2

(1) Non esistono funzioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
FALSO: $f(x, y, z) = (x, y)$ è suriettiva

(2) Ogni matrice diagonalizzabile è invertibile.
FALSO: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonale ma non invertibile.

(3) Un sistema lineare ha sempre almeno una soluzione.
FALSO: il sistema $0 = 1$ non ha soluzioni.

TEMA 3

(1) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un isomorfismo.
FALSO: $f(x, y) = (x, x)$ non è un isomorfismo.

(2) Ogni matrice 2×2 diagonalizzabile ha due autovalori distinti.
FALSO: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un controesempio

(3) Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione.
VERO: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ è soluzione di ogni sistema lineare omogeneo

TEMA 4

(1) Esistono funzioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
VERO: $f(x, y) = (x, y, 0)$ è iniettiva

(2) Se F è un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 0) \neq (2, 0)$ allora 2 non è un autovalore di F.
FALSO: $F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è un controesempio

(3) Ogni sistema lineare di due equazioni in quattro incognite ha infinite soluzioni.
FALSO: può anche non avere soluzioni. Ad esempio $x + y + z + t = 0$, $x + y + z + t = 1$.

TEMA 2

Esercizio 1 Siano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x + 2y + 4z = 0\}$, $W = \langle(3, 2, -1)\rangle$ e $\mathbf{v} = (-2, -5, 6)$.

a) Stabilire se i sottospazi U e W sono in somma diretta.

b) Scrivere, se possibile, il vettore v come somma di un vettore di U e di un vettore di W.

c) Determinare un sistema lineare avente W come insieme di soluzioni.

Soluzione.

a) Siccome $\dim W = 1$ basta mostrare che $(3, 2, -1) \notin U$. Infatti $7 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \neq 0$.

b) È sicuramente possibile perché $\dim U = 2$ e $\dim W = 1$ e quindi per il punto precedente $U \oplus W = \mathbb{R}^3$. Un generico elemento di U è della forma $\mathbf{u} = a(2, -7, 0) + b(0, 2, -1)$ e un generico elemento di W è della forma $\mathbf{w} = c(3, 2, -1)$. Dobbiamo quindi trovare a, b, c tali che $\mathbf{v} = a(2, -7, 0) + b(0, 2, -1) + c(3, 2, -1)$. Risolvendo il relativo sistema otteniamo $a = -1$, $b = -6$, $c = 0$ per cui $\mathbf{u} = -1(2, -7, 0) - 6(0, 2, -1) = (-2, -5, 6) \in U$ e $\mathbf{w} = 0(3, 2, -1) = (0, 0, 0) \in W$ e $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

c) Basta trovare un sistema omogenoe di rango 2 che abbia $(3, 2, -1)$ come soluzione. Ad esempio

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z) = (z, x, y).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.

b) Stabilire se f è invertibile.

c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

Soluzione.

a) Il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui $\ker(f)$ è banale e una base di $\ker f$ è $\emptyset$. Per il teorema delle dimensioni $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ e una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Per il punto precedente f è iniettiva e suriettiva e quindi è invertibile.

c) La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è

$$A = M_E^E(f)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il polinomio caratteristico è

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} = 1 - t^3 = (1 - t)(1 + t + t^2).$$

Abbiamo quindi un solo autovalore 1, con $m_a(1) = 1$ (il polinomio $1 + t + t^2$ non ha radici). Di conseguenza f non è diagonalizzabile. L'autospazio dell'autovalore 1 ha necessariamente dimensione 1 per il teorema delle molteplicità ed è dato da $V_1 = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

Esercizio 3

a) Mostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(2, -1) = (2, -1)$, $f(1, 2) = (-1, -2)$.

b) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
c) Determinare $f^2 = f \circ f$.
d) Stabilire se f è invertibile. In caso affermativo calcolare f^{-1}.

Soluzione.

a) Basta osservare che i vettori su cui è definita f, cioè $(2,1)$ e $(1,2)$ formano una base del dominio: questo è chiaro perché non sono proporzionali.
b) Abbiamo $(1,0) = \frac{2}{5}(2,-1) + \frac{1}{5}(1,2)$ e $(0,1) = -\frac{1}{5}(2,-1) + \frac{2}{5}(1,2)$ per cui
   - $f(1,0) = \frac{2}{5}f(2,-1) + \frac{1}{5}f(1,2) = \frac{2}{5}(2,-1) + \frac{1}{5}(-1,-2) = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$;
   - $f(0,1) = -\frac{1}{5}f(2,-1) + \frac{2}{5}f(1,2) = -\frac{1}{5}(2,-1) + \frac{2}{5}(-1,-2) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. Concludiamo che
   $$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$
c) Per definizione abbiamo $f^2(2,-1) = f(2,-1) = (2,-1)$ e $f^2(1,2) = f(-1,-2) = -f(1,2) = (1,2)$. Deduciamo che f^2 agisce coem l'identità su una base di $\mathbb{R}^2$ e quindi $f^2 = Id$. In alternativa si poteva osservare che la matrice associata ad f^2 rispetto alla base canonica è, per il teorema della composizione,
$$M_E^E(f^2) = M_E^E(f)M_E^E(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
da cui deduciamo ancora che $f^2 = Id$.
d) Dal punto precedente segue immediatamente che $f^{-1} = f$.

TEMA 1

Esercizio 1 Siano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x-5y+4z = 0\}$, $W = \langle(1, 2, -1)\rangle$ e $v = (3, -5, 6)$.

a) Stabilire se i sottospazi U e W sono in somma diretta.
b) Scrivere, se possibile, il vettore v come somma di un vettore di U e di un vettore di W.
c) Determinare un sistema lineare avente W come insieme di soluzioni.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z) = (z, y, x).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è invertibile.
c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

Esercizio 3

a) Mostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1, -1) = (1, -1)$, $f(1, 1) = (-1, -1)$.
b) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
c) Determinare $f^2 = f \circ f$.
d) Stabilire se f è invertibile. In caso affermativo calcolare f^{-1}.

TEMA 3

Esercizio 1 Siano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - y + 4z = 0\}$, $W = \langle(1, 2, 1)\rangle$ e $v = (3, -5, -1)$.

a) Stabilire se i sottospazi U e W sono in somma diretta.
b) Scrivere, se possibile, il vettore v come somma di un vettore di U e di un vettore di W.
c) Determinare un sistema lineare avente W come insieme di soluzioni.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z) = (y, z, x).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è invertibile.
c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

Esercizio 3

a) Mostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1, -1) = (1, -1)$, $f(1, 1) = (-1, 1)$.
b) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
c) Determinare $f^2 = f \circ f$.
d) Stabilire se f è invertibile. In caso affermativo calcolare f^{-1}.

TEMA 4

Esercizio 1 Siano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - 5y + 4z = 0\}$, $W = \langle(-1,-2,1)\rangle$ e $v = (-3,5,-6)$.

a) Stabilire se i sottospazi U e W sono in somma diretta.
b) Scrivere, se possibile, il vettore v come somma di un vettore di U e di un vettore di W.
c) Determinare un sistema lineare avente W come insieme di soluzioni.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z) = (x+z, 2y, x+z).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è invertibile.
c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

Esercizio 3

a) Mostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,2) = (1,2)$, $f(3,4) = (-3,-4)$.
b) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
c) Determinare $f^2 = f \circ f$.
d) Stabilire se f è invertibile. In caso affermativo calcolare f^{-1}.

Prova scritta, 16/07/2019

QUESITI PRELIMINARI.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:
TEMA 1

(1) Una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.
FALSO. $f(x, y, z) = (x, x, x)$: Si ha $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1) = f(1, 1, 0)$.
(2) Ogni matrice triangolare superiore è diagonalizzabile.
FALSO. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.
(3) Se un sistema lineare ha due soluzioni distinte allora ne ha infinite.
VERO. Le soluzioni di un sistema lineare sono 0,1 o infinite.

TEMA 2

(1) Una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ manda vettori linearmente dipendenti in vettori linearmente dipendenti.
VERO. Se $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k = 0_V$ allora anche $\alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{u}_k) = 0_V$.
(2) Ogni matrice triangolare inferiore è diagonalizzabile.
FALSO. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.
(3) Se un sistema lineare ha tre soluzioni distinte allora ne ha infinite.
VERO. Le soluzioni di un sistema lineare sono 0,1 o infinite.

TEMA 3

(1) Esistono funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che mandano vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.
VERO. Basta prendere $f = Id$.
(2) Ogni matrice triangolare superiore è invertibile.
FALSO $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile.
(3) Se un sistema lineare ha una soluzione allora ne ha infinite.
FALSO Il sistema $x = 1$ in una variabile x ha esattamente una soluzione.

TEMA 4

(1) Esistono funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che mandano vettori linearmente dipendenti in vettori linearmente indipendenti.
FALSO. Se $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = 0_{\mathbb{R}^3}$ allora anche $a_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f(\mathbf{v}_n) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
(2) Ogni matrice triangolare inferiore è invertibile.
FALSO.$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.
(3) Se un sistema lineare omogeneo ha una sola soluzione allora è quella banale.
VERO Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione banale.

TEMA 1

Esercizio 1 Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - x + y = 0, x - z = 0\}$.

a) *Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.*
U ha dimensione 2 e una sua base è data da $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$. Si verifica subito che i vettori $\mathbf{w}_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{w}_2 = (0, 0, 0, 1)$ generano un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 4.

b) *Determinare una applicazione lineare suriettiva $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(U) \subseteq U$.*
Basta prendere $L = Id$.

c) *Scrivere la matrice di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.*
Abbiamo

$$M_E^E(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$ e $\ker(f) = \langle(1, -1, 0), (0, 1, -1)\rangle$.

a) *Determinare una base dell'immagine di f.*
L'immagine di un'applicazione lineare è sempre generata dalle immagini dei vettori di una qualunque base del dominio. In questo caso abbiamo semplicemente

$$Im(f) = \langle(3, 3, 3), (0, 0, 0), (0, 0, 0)\rangle = \langle(1, 1, 1)\rangle.$$

e quindi $\{(1, 1, 1)\}$ è una base di $Im(f)$.

b) *Stabilire se f è diagonalizzabile.*
f è chiaramente diagonalizzabile perché $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ èuna base di autovettori (di autovalore rispettivamente 3,0 e 0).

c) *Calcolare $f(1, 0, 0)$.*
Abbiamo $(1, 0, 0) = \frac{1}{4}(1, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1, 0) + \frac{1}{4}(1, 1, -1)$ e quindi

$$f(1, 0, 0) = \frac{1}{4}f(1, 1, 1) + \frac{1}{2}f(1, -1, 0) + \frac{1}{4}f(1, 1, -1) = \frac{1}{4}(3, 3, 3) = \frac{3}{4}(1, 1, 1).$$

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 2, 3, 4)$ e $(4, 3, 2, 1)$. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) *Calcolare la dimensione di U e V.*
Si ha $\dim U = 2$ in quanto U è generato da due vettori non proporzionali e quindi linearmente indipendenti. Osserviamo che la terza equazione di V è 3 volte la prima più 2 volte la seconda e quindi può essere eliminata. Le altre due equazione sono non proporzionali e quindi linearmente indipendenti. Ne segue che $\dim V = 4 - 2 = 2$.

b) *Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.*
Sia $(a + 4b, 2a + 3b, 3a + 2b, 4a + b)$ un generico vettore di U e vediamo sotto quali

condizioni appartiene anche a V. Sostituiamo quindi nelle equazioni di V e otteniamo

$$\begin{cases} a + 4b + (2a + 3b) + (3a + 2b) + (4a + b) = 0 \\ (2a + 3b) + 4(3a + 2b) - (4a + b) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 10a + 10b = 0 = 0 \\ 10a + 10b = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo che il vettore generico di U $(a+4b, 2a+3b, 3a+2b, 4a+b)$ appartiene anche a V se e solo se $a = -b$ cioé se e solo se è della forma $(-3a, -a, a, 3a)$. Ne segue che $U \cap V$ è generato da $(-3, -1, 1, 3)$ e quindi $\dim(U \cap V) = 1$ e per la formula di Graassmann abbiamo $\dim(U + V) = 3$.

TEMA 2

Esercizio 1 Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - y + x = 0, y - z = 0\}$.

a) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

b) Determinare una applicazione lineare suriettiva $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(U) \subseteq U$.

c) Scrivere la matrice di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ e $\ker(f) = \langle(1, -1, 0), (0, 1, -1)\rangle$.

a) Determinare una base dell'immagine di f.

b) Stabilire se f è diagonalizzabile.

c) Calcolare $f(0, 0, 1)$.

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(2, 1, 3, 4)$ e $(3, 4, 2, 1)$. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.

b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

TEMA 3

Esercizio 1 Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - x + 2y = 0, x - z = 0\}$.
a) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
b) Determinare una applicazione lineare suriettiva $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(U) \subseteq U$.
c) Scrivere la matrice di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ e $\ker(f) = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$.
a) Determinare una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è diagonalizzabile.
c) Calcolare $f(0, 1, 0)$.

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 3, 2, 4)$ e $(4, 2, 3, 1)$. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 11x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.
b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

TEMA 4

Esercizio 1 Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - x + z = 0, x - y = 0\}$.

a) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

b) Determinare una applicazione lineare suriettiva $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(U) \subseteq U$.

c) Scrivere la matrice di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$ e $\ker(f) = \langle (1, -1, 0), (0, 1, -1) \rangle$.

a) Determinare una base dell'immagine di f.

b) Stabilire se f è diagonalizzabile.

c) Calcolare $f(0, 0, 1)$.

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 2, 4, 3)$ e $(4, 3, 1, 2)$. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.

b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

Prova scritta, 10/09/2019

TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due matrici sono simili se e solo se hanno gli stessi autovalori.
(2) Una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ non puó avere piú di 3 elementi.
(3) La somma di due soluzioni di un sistema lineare é ancora una soluzione dello stesso sistema.

(1) **Esercizio 1** Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti da un parametro k.

$$U = \{(x, y, z, t) : \; x - 2y + z + kt = 0, \; x + z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, t), \; x - kz = 0, \; 2x + y - 2kz + 2t = 0\}.$$

a. Stabilire per quali valori di k si ha $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
b. Stabilire per quali valori di k i sottospazi U e W hanno dei vettori non nulli in comune.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle (0, 1, 2), (1, 0, 1) \rangle$ e $W = \{(x, y, z) : \; x + y = 0\}$.

(a) Determinare, se esiste, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(u) \in W$ per ogni $u \in U$.
(b) Determinare, se esiste una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(G) = U$, $Im(G) = W$.
(c) Sia $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $H(x, y, z) = (-2x - 2y + z, -x - 3y + z, x + 2y - 2z)$. Verificare che U è un autospazio di H mentre W non lo è.

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, -1) = (-3, 0, 3)$, $f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, -1, -1)$.

(a) Determinare la matrice associata all'endomorfismo f rispetto alla base canonica.
(b) Determinare gli autovalori di f e stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
(c) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due matrici sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.
(2) La dimensione del nucleo di un'applicazione lineare é minore o uguale della dimensione del suo codominio.
(3) La somma di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo é ancora una soluzione dello stesso sistema.

(1) **Esercizio 1** Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti da un parametro k.

$$U = \{(x, y, z, t) : \, x - 2y + z + kt = 0, \, x + z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, t), \, kx + z = 0, \, 2x - 2ky + 2kz + t = 0\}.$$

a. Stabilire per quali valori di k si ha $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
b. Stabilire per quali valori di k i sottospazi U e W hanno dei vettori non nulli in comune.

(2) **Esercizio 2** In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle (0, 1, 1), (2, 0, -1) \rangle$ e $W = \{(x, y, z) : \, x + 2z = 0\}$.

(a) Determinare, se esiste, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(u) \in W$ per ogni $u \in U$.
(b) Determinare, se esiste una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(G) = U$, $Im(G) = W$.
(c) Sia $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $H(x, y, z) = (2y - 2z, -x + 3y - 2z, -2x + 3y - 2z)$. Verificare che U è un autospazio di H mentre W non lo è.

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 1, -1) = (-2, -2, 2)$, $f(-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, $f(1, -1, 1) = (1, -1, 1)$.

(a) Determinare la matrice associata all'endomorfismo f rispetto alla base canonica.
(b) Determinare gli autovalori di f e stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
(c) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova scritta, 13/01/2020

TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari tali che $Imf = Im\ g$, allora $f = g$.
(2) Se due vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti allora generano $\mathbb{R}^2$.
(3) Due sottospazi distinti di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 sono in somma diretta.

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + ky - 2z = k \\ -x + z = 1 - k \\ -2x - 3ky + (k+4)z = -k \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni e determinare, quando possibile, tali soluzioni.

Esercizio 2

a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $Imf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ e $\ker f = \langle (1, 1, 1) \rangle$.
b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica.
c) Esiste un solo endomorfismo soddisfacente le condizioni richieste?
d) Stabilire se esistono delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice associata ad f sia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare autovalori ed autospazi di A e stabilire se è diagonalizzabile.
b) Determinare una matrice B simile ad A.
c) Stabilire se A è invertibile.

TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due sottospazi distinti di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 sono in somma diretta.
(2) Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari tali che $\ker f = \ker g$, allora $f = g$.
(3) Se due vettori generano $\mathbb{R}^2$ allora sono linearmente indipendenti.

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x - z = 1 - k \\ -2x + ky + z = k \\ kx - ky = k \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni e determinare, quando possibile, tali soluzioni.

Esercizio 2

a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $Imf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ e $\ker f = \langle (1, 0, 1) \rangle$.
b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica.
c) Esiste un solo endomorfismo soddisfacente le condizioni richieste?
d) Stabilire se esistono delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice associata ad f sia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare autovalori ed autospazi di A e stabilire se è diagonalizzabile.
b) Determinare una matrice B simile ad A.
c) Stabilire se A è invertibile.

Prova scritta, 14/02/2020

TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Siano A e B due matrici 3×3 che ammettono una stessa base di autovettori. Allora A e B sono simili.
(2) Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ tali che $\dim U = 2$ $\dim W = n - 1$. Allora l'intersezione di U e W è non banale.
(3) La molteplicità algebrica di un autovalore è minore della sua molteplicità geometrica.

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale a:

$$\begin{cases} (2a-2)x + 2y - z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ 4ax + (4a+2)y + (2a+1)z = a^2 + a \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di a il sistema ha soluzioni;
b) Per i valori di a per cui esistono infinite soluzioni, determinare tali soluzioni;
c) Per i valori di a per cui esiste un'unica soluzione, determinare tale soluzione;

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \{(x, y, z, t) : x + y - 2z = 0,\ y + z - t = 0\}$ e il sottospazio dipendente da un parametro reale k dato da

$$W_k = \langle (3-k, 0, 1, 1), (4, -2, 1, -1), (3+3k, -2, k+1, k-1) \rangle$$

a) Determinare la dimensione e una base di U;
b) Determinare la dimensione di W_k al variare di k;
c) Determinare per quali valori di k si ha $U = W_k$;
d) Determinare per quali valori di k si ha $U \subseteq W_k$;

Esercizio 3 Siano $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (0, 1, 1)$, $c_1 = (1, 0, 1)$, $c_2 = (3, 2, 1)$ e $c_3 = (2, 4, 4)$.

a) Mostrare che $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ e $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$;
b) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F(b_i) = c_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Determinare la matrice associata $M_C^B(F)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile;
d) Determinare gli autospazi di F.

TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Siano A e B due matrici 3×3 che ammettono gli stessi tre autovalori. Allora A e B sono simili.
(2) Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ tali che $\dim U = 2$ $\dim W = n-2$. Allora l'intersezione di U e W è banale.
(3) La molteplicità algebrica di un autovalore è minore o uguale alla sua molteplicità geometrica.

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale a:

$$\begin{cases} 2ax + 2y - z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ (4a+4)x + (4a+6)y + (2a+3)z = a^2 + 3a + 2 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di a il sistema ha soluzioni;
b) Per i valori di a per cui esistono infinite soluzioni, determinare tali soluzioni;
c) Per i valori di a per cui esiste un'unica soluzione, determinare tale soluzione;

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \{(x, y, z, t) : x + y - z = 0, \; y + 2z - t = 0\}$ e il sottospazio dipendente da un parametro reale k dato da

$$W_k = \langle (3-k, -1, 1, 1), (4, -3, 1, -1), (3+3k, -3-k, k+1, k-1) \rangle$$

a) Determinare la dimensione e una base di U;
b) Determinare la dimensione di W_k al variare di k;
c) Determinare per quali valori di k si ha $U = W_k$;
d) Determinare per quali valori di k si ha $U \subseteq W_k$;

Esercizio 3 Siano $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (0, 1, 1)$, $c_1 = (1, 0, 1)$, $c_2 = (3, 2, 1)$ e $c_3 = (2, 4, 4)$.

a) Mostrare che $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ e $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$;
b) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F(b_i) = c_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Determinare la matrice associata $M_C^B(F)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile;
d) Determinare gli autospazi di F.