SCHEDA DI ESERCIZI DEL 27/03/2022

Risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1

Si verifichi che $\{(1,2,3),(0,1,0),(0,0,1)\}$ sia una base per $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2

Stabilire se le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendendenti in $M_{2,2}(\mathbb{R})$. In caso di risposta positiva, completare $\{A, B\}$ ad una base.

Esercizio 3

Dato l'insieme $I = \{(0,1,1),(1,0,-1),(2,3,4),(2,1,0)\}$ di vettori di $\mathbb{R}^3$ stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera.

(1) Ogni insieme che contiene I genera $\mathbb{R}^3$;
(2) Esiste un insieme X che contiene I costituito da vettori linearmente indipendenti;
(3) L'insieme I è una base di $\mathbb{R}^3$.

Estrarre, se possibile, una base da I.

Esercizio 4

Sia

$$W := \{(2s+t, s-t, s+t, s+2t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$.

(1) Stabilire se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
(2) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W;
(3) Completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5

Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'incognita x aventi grado minore o uguale a 3.

(1) Mostrare che l'insieme $I = \{1, x, x^2, x^3\}$ è una base per $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Dedurre che la dimensione di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è uguale a 4.
(2) I vettori $\{2x^2+1, 2x+1, x^3\}$ sono linearmente indipendenti? Completare l'insieme ad una base per $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ se possibile.

(3) Esiste una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ costituita da polinomi di grado esattamente 3? In caso affermativo, esibire un esempio.
(4) Esiste una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ cosituita da polinomi di grado minore o uguale a 2? In caso affermativo, esibire un esempio.

Esercizio 6

Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (2, 1, 0, 3)$, $v_2 = (-5, 3, 4, 0), v_3 = (-1, -1, 0, 2), v_4 = (3, 2, 0, 1)$

Esercizio 7

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito da

$$W \coloneqq \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,|\, x_1 - x_2 - 2x_5 = 0, x_3 + x_4 + x_5 = 0\} \ .$$

Si determini una base $\mathcal{B}$ di W e la dimensione di W. Poi si determino le coordinate del vettore $(-4, 0, 1, 1, -2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.