SCHEDA DI ESERCIZI DEL 13/03/2022

Risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1

Si determini un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che sia chiuso rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto per scalare.

Esercizio 2

Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x. Si provi che

$$X \coloneqq \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(x) \text{ ha grado esattamente } 2\}$$

non è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 3

Sia $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (come definito nell'esercizio 3 della scheda di esercizi precedente). Discutere se i seguenti sottoinsiemi di $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali:

(i) $X \coloneqq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(1) = 0\}$;
(ii) $Y \coloneqq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(0) = 1\}$.

Esercizio 4

Mostrare che l'insieme delle sequenze infinite di numeri reali

$$X \coloneqq \{(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

è uno spazio vettoriale con le seguenti operazioni:

$$+ : X \times X \to X$$
$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \coloneqq (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

e

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$
$$\alpha \cdot (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \coloneqq (\alpha x_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Mostrare inoltre che non è finitamente generato.

Esercizio 5

Discutere quali dei seguenti insiemi di vettori generarino $\mathbb{R}^3$:

- $u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 5, 4), u_3 = (0, 1, 1)$;
- $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (0, 5, 1), u_3 = (2, 10, 6)$;
- $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (0, 1, 0)$;
- $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (1, 1, 0)$.

Esercizio 6

Mostrare che l'insieme dei polinomi $3 + x, x^2, 1 + x^2 + x^3$ non è un insieme dei generatori di $\mathbb{R}_3[x]$, ossia lo spazio vettoriali dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado al più 3.