ESERCIZI DI MDP PER IL 11 NOVEMBRE 2022

(1) Quanti dadi devo lanciare affinché la probabilità che esca almeno un 6 sia maggiore della probabilità che non ne esca nessuno?
E quanti ne devo lanciare affinché la probabilità che esca esattamente un 6 sia maggiore della probabilità che non ne esca nessuno?

(2) I bulloni prodotti da una fabbrica sono difettosi con probabilità del 20%, e vengono commercializzati in confezioni da 3. Qual'è la probabilità che una scatola contenga al più un bullone difettoso?

(3) Un bambino colleziona le figurine di un piccolo album contenente 80 figurine e ne ha già 50. Il nonno gli compra un pacchetto nuovo di 4 figurine (si supponga che un pacchetto contiene sempre 4 figurine diverse tra loro).
  (a) Determinare la probabilità di trovare almeno 3 figurine nuove.
  (b) Qual è la probabilità di trovare tutte doppie (cioè tutte figurine che il bambino ha già)?
  (c) Se il nonno comprasse 2 pacchetti, quale sarebbe la probabilità di trovare complessivamente 6,7 o 8 nuove figurine?

(4) Organizzando una gita abbiamo a disposizione un pullmino da 28 posti e, confidando nel fatto che la probabilità che una persona a caso che ha comprato il biglietto non si presenti alla partenza è del 10%, decidiamo di vendere 30 biglietti. Qual è la probabilità di essere nei guai (cioè che qualcuno non trovi posto)? Quanti biglietti avremmo potuto vendere ammettendo un rischio massimo del 50% di ritrovarci nei guai?

(5) Lanciamo due dadi, uno rosso e uno blu, per 4 volte e consideriamo le seguenti variabili
  (a) $X=$ numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato maggiore del blu. Che densità ha la variabile X?
  (b) $Y=$ numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato uguale al lancio precedente. Che densità ha Y?
  (c) $Z=$ il primo lancio in cui la somma di tutti i risultati ottenuti fino a quel momento è almeno 6. Che densità ha Z?

(6) Supponiamo che la probabilità che nessun bambino nato a Cesena in questo mese diventi un dottore di ricerca sia e^{-1}.
  (a) Qual è la probabilità che almeno due bambini nati in questo mese a Cesena diventino dottori di ricerca?
  (b) Qual è la probabilità che in un anno nascano almeno 4 bambini che diventeranno dottori di ricerca?

Cenni di soluzioni

(1) Sia X il numero di 6 risultati dal lancio di dadi.

Affinché $P(X=0) < 1/2$ deve essere $n \geq 4$. Infatti $5^4 = 625 < 648 = 6^4/2$, mentre $5^3 = 125 > 108 = 6^3/2$. Dunque $(5/6)^n < 1/2$ se e solo se $5^n < 6^n/2$ se e solo se $n \geq 4$.

Affinché $P(X=0) < P(X=1)$ deve essere $n > 5$. Infatti $(5/6)^n < n5^{n-1}/6^n$ se e solo se $n > 5$.

(2) Sia X il numero di bulloni difettosi presenti in una scatola, allora $X \sim B(3, 0.2)$. Pertanto

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = (0.8)^3 + 3(0.2)(0.8)^2 = 0,896$$

(3) (a) L'acquisto di un pacchetto può essere visto come l'estrazione di 4 palline di un'urna contenente 30 figurine blu (corrispondenti alla figurine che il bambino non ha) e 50 palline blu (corrispondenti alle figurine che già ha). la variabile $X=$ numero di figurine che non ha già nell'album è una variabile $X \sim H(4; 30, 50)$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,1457$$

(b) Analogamente al punto precedente abbiamo:

$$P(X=0) = \frac{\binom{50}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,1456$$

(c) Consideriamo la variabile $Y =$ numero di figurine nuove nel secondo pacchetto. Chiaramente la densità di Y dipende da quante figurine nuove sono state trovate nel primo pacchetto: usiamo quindi la formula della probabilità totali e abbiamo

$$P(X+Y=8) = P(X=4)P(Y=4|X=4) = \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,0002$$

$$\begin{aligned} P(X+Y=7) &= P(X=3)P(Y=4|X=3) + P(X=4)P(Y=3|X=4) \\ &= \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{27}{4}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{3}\binom{54}{1}}{\binom{80}{4}} = 0,0029 \end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned} P(X+Y=6) &= P(X=4)P(Y=2|X=4) + P(X=3)P(Y=3|X=3) + P(X=2)P(Y=4|X=2) \\ &= \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{2}\binom{54}{2}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{27}{3}\binom{53}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{2}\binom{50}{2}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{28}{4}}{\binom{80}{4}} \\ &= 0,0220. \end{aligned}$$

(4) (a) Possiamo assumere che la variabile $X =$ numero di persone che si presentano sia una variabile binomiale $X \sim B(30, \frac{9}{10})$. Trovarsi nei guai vuol dire "$X \geq 29$" per cui la probabilità di trovarsi nei guai è

$$P(X=29) + P(X=30) = \binom{30}{29}(0.9)^{29}(0.1)^1 + \binom{30}{30}(0.9)^{30} = 0,1837.$$

(b) Qui bisogna procedere per tentativi: se vendiamo 31 biglietti abbiamo $X \sim B(31, 0.9)$ e quindi

$$\begin{aligned}
P(X \geq 29) &= P(X=29) + P(X=30) + P(X=31) \\
&= \binom{31}{29}(0.9)^{29}(0.1)^{2} + \binom{31}{30}(0.9)^{30}(0.1)^{1} + \binom{31}{31}(0.9)^{31} \\
&= 0,3886
\end{aligned}$$

Vendendo 32 biglietti il rischio si calcola analogamente e in questo caso otteniamo

$$\begin{aligned}
P(X \geq 29) &= P(X=29) + P(X=30) + P(X=31) + P(X=32) \\
&= \binom{32}{29}(0.9)^{29}(0.1)^{3} + \binom{32}{30}(0.9)^{30}(0.1)^{2} + \binom{32}{31}(0.9)^{31}(0.1) + (0,9)^{32} \\
&= 0,6003.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi vendere al più 31 biglietti se vogliamo correre un rischio inferiore al 50% di trovarci nei guai.

(5) (a) Questo è uno schema successo-insuccesso con 4 prove indipendenti in cui ad ogni tentativo la probabilità di avere successo è 5/12 per cui

$$X \sim B(4, 5/12).$$

(b) In questo caso abbiamo 3 tentativi ognuno dei quali dà successo con probabilità 1/6 e quindi

$$Y \sim B(3, 1/6)$$

(c) La variabile Z assume valori 1,2,3: infatti con 3 lanci siamo sicuri ch la somma dei risultati ottenuti sia almeno 6. Abbiamo

$$P(Z=1) = \frac{26}{36} = 0.722$$

Inoltre $Z = 3$ si verifica esattamente nei casi in cui i primi due lanci abbiano dato quattro 1, oppure tre 1 e un 2 e quindi

$$P(Z=3) = \frac{1+4}{6^4} = 0.004$$

La probabilità $P(Z = 2)$ può a questo punto essere calcolata per differenza e quindi la densità di Z risulta

$$d_Z(k) = \begin{cases} 0.722 & \text{se } k = 1 \\ 0.274 & \text{se } k = 2 \\ 0.004 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(6) (a) Sia X il numero di bambini che diventeranno dottori di ricerca nati in un mese. Il dato del problema è $P(X = 0) = e^{-1}$. La variabile X può essere pensata come una variabile di Poisson (tanti tentativi corrispondenti a tutti i bambini nati ognuno dei quali diventerà dottore

di ricerca con probabilità senz'altro molot bassa) e quindi $X \sim P(\lambda)$. Per determinare il parametro λ ricordiamo che

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

per cui abbiamo $\lambda = 1$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} = 0.264$$

(b) Sia Y il numero di bambini nati in un anno che diventeranno dottori di ricerca. La variabile Y è la somma di 12 variabili di Poisson di parametro 1 e quindi è una variabile di Poisson di parametro 12. In alternativa uno può pensare che la probabilità che non nascano dottori di ricerca in un anno è $(e^{-1})^{12} = e^{-12}$ e procedere come nel primo punto. Abbiamo quindi

$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - e^{-12}(1 + \frac{12}{1} + \frac{12^2}{2!} + \frac{12^3}{3!}) = 0,9977.$$