ESERCIZI DI MDP PER IL 4 NOVEMBRE 2022

(1) Consideriamo 4 scatole contenenti 2 palline ciascuna indistinguibili al tatto. La scatola i ha una pallina numerata con 1 e l'altra numerata con i (quindi nella prima entrambe le palline sono numerate 1). Si estrae una pallina per scatola. Determinare
   (a) la probabilità che la somma delle palline estratte sia almeno 7;
   (b) la probabilità di aver estratto la biglia con il 4 sapendo che la somma delle palline estratte è almeno 7;
   (c) la probabilità di aver estratto esattamente tre palline numerate con 1;

(2) Stabilire quali delle seguenti funzioni sono densità discrete astratte:

$$d_1(k) = \begin{cases} 0.2 & \text{se } k = -1, 2, 4 \\ 0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_2(k) = \begin{cases} 0.2 & \text{se } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ -0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_3(k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{2^k} & \text{se } k \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(3) Lanciamo un dado per 4 volte e denotiamo X_1, X_2, X_3, X_4 i risultati dei quattro lanci. Consideriamo le seguenti variabili aleatorie

$$Y = |\{i : X_i = 6\}|, \quad Z = |X_1 - X_2|, \quad W = \min\{|X_i - X_j| : i \neq j\}.$$

Determinare le densità di Y, Z e W.

(4) Lanciamo una moneta ripetutamente e registriamo i risultati in una sequenza binaria $\omega = (a_1, a_2, \ldots)$ in cui inseriamo 0 quando otteniamo testa e 1 quando otteniamo croce. Consideriamo le seguenti variabili aleatorie

$$X(\omega) = \min\{i : a_{i-1} = a_i\}, \qquad Y(\omega) = \min\{i : a_{i-1} = a_i = 1\},$$

dove poniamo $X(\omega) = 0$ se non dovesse mai capitare che $a_{i-1} = a_i$, mentre poniamo $Y(\omega) = 0$ se non dovesse mai capitare che $a_{i-1} = a_i = 1$.

Ad esempio, se la serie di lanci ha determinato una sequenza $\omega = 1001011...$, allora abbiamo $X(\omega) = 3$ e $Y(\omega) = 7$.
   (a) Determinare $P(a_i = a_{i-1})$ per ogni $i > 1$.
   (b) Determinare la probabilità $P(X = k)$ per ogni k (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno lo stesso risultato siano i lanci $k - 1$ e k);
   (c) Determinare la probabilità $P(Y = k)$ (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno testa siano i lanci $k - 1$ e k) per ogni k tra 2 e 8;
   (d) Dimostrare che $P(Y = k) = \frac{F_{k-3}}{2^k}$ per ogni $k > 3$, dove F_k è il k-esimo numero di Fibonacci.

CENNI DI SOLUZIONI

(1) In questo caso questo caso possiamo considerare uno spazio di probabilità uniforme costituito da 8 possibili risultati e cioè:

$$\Omega = \{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,3,1),(1,1,1,4),(1,2,3,1),(1,2,1,4),(1,1,3,4),(1,2,3,4)\}$$

(a) La somma delle palline estratte è almeno 7 in 5 casi su 8 per cui la probabilità è $\frac{5}{8}$;

(b) Sia A l'insieme dei risultati in cui la somma é almeno 7 e B l'insieme dei risultati in cui viene estratto il 4 abbiamo

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/8}{5/8} = \frac{4}{5}$$

(c) Abbiamo 3 risultati in cui compaiono esattamente tre palline numerate con 1 e quindi la probabilità è $3/8$.

(2) d_1 è una densità discreta perché assume tutti valori non negativi con somma 1.
d_2 non è una densità perché assume valore $-0,4$.
d_3 non è una densità perché la somma dei valori che assume è maggiore di 1: infatti già la somma dei primi 4 termini è maggiore di 1.

(3) La variabile Y è binomiale $Y \sim B(4, 1/6)$.
La variabile Z assume valori $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Abbiamo

$$d_Z(k) = \begin{cases} \frac{6}{36} & \text{se } k = 0 \\ \frac{10}{36} & \text{se } k = 1 \\ \frac{8}{36} & \text{se } k = 2 \\ \frac{6}{36} & \text{se } k = 3 \\ \frac{4}{36} & \text{se } k = 4 \\ \frac{2}{36} & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Avendo 4 numeri tra 1 e 6 questi non possono essere tutti a distanza ≥ 2 l'uno dall'altro: avremmo almeno differenza 8 tra il massimo e il minimo. La variabile W può assumere quindi solo valori 0 e 1 (e quindi è una variabile di Bernoulli). Abbiamo che W vale 1 quindi se i numeri sono tutti distinti e quindi

$$P(W = 1) = \frac{(6)_4}{6^4} = \frac{5}{18}$$

per cui $W \sim B(1, \frac{5}{18})$.

(4) (a) Abbiamo

$$P(a_i = a_{i-1}) = P(a_i = 1, a_{i-1} = 1) + P(a_i = 0, a_{i-1} = 0) = \frac{1}{2}.$$

(b) Consideriamo come spazio di probabilità l'insieme dei risultati dei primi k lanci, abbiamo quindi 2^k possibili risultati, tutte le sequenze binarie di lunghezza k. Di questi risultati solo 2 danno come esito $X = k$, in quanto l'elemento che compare in posizione k forza tutti gli altri precedenti. Per cui per ogni $k > 1$ vale

$$P(X = k) = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Se invece $X = 0$, allora ci sono solamente due casi favorevoli, in cui 0 e 1 non compaiono mai in posizioni adiacenti. Questi due casi hanno entrambi probabilità 0: infatti, guardando solamente ai primi k lanci, abbiamo per esempio $P(0101...) \leq 1/2^k$ per ogni $k > 0$.

(c)

(d) Nello stesso spazio di probabilità del punto precedente, prendendo $k = 2$ vediamo che $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$, mentre prendendo $k = 3$ vediamo che $P(Y = 3) = \frac{1}{8}$. Se invece $k > 3$, allora le sequenze favorevoli sono quelle che terminano con 011 e hanno nei primi $k - 3$ posti una qualunque sequenza binaria in cui non cisono due 1 consecutivi, vale a dire una sequenza di Fibonacci. Abbiamo quindi $P(Y = k) = \frac{F_{k-3}}{2^k}$. Rimarrebbe da calcolare la probabilità del fenomemo $\{Y = 0\}$ (che non era richiesto dall'esercizio). Con quache nozione in più, utilizzando quanto calcolato sopra si può in effetti vedere che

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(Y = k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{F_{k-3}}{2^k} = 1,$$

da cui concludiamo che

$$P(Y = 0) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} P(Y = n) = 0.$$