ESERCIZI DI MDP PER IL 2 DICEMBRE 2022

(1) Sia X una variabile continua uniforme nell'intervallo $[0, 2]$. Si consideri la variabile $Y = \frac{1}{X+1}$.
  (a) Determinare $P(Y < \frac{1}{2})$.
  (b) Determinare la funzione di ripartizione di Y.
  (c) Determinare la densità di Y.

(2) Ubaldo prende il tram tutte le mattine per andare al lavoro. Arriva alla fermata in un orario casuale e sappiamo che passa un autobus ogni dieci minuti. Siano T_i, $i = 1, \ldots, 30$ i tempi di attesa in 30 giorni di lavoro.
  (a) Determinare la densità delle T_i.
  (b) Qual è la probabilità che aspetti sempre (in questi 30 giorni) più di 5 minuti?
  (c) Calcolare valore atteso e varianza delle T_i.
  (d) Qual è la probabilità che aspetti mediamente più di 6 minuti?

(3) Un impianto d'allarme dà falsi allarmi in intervalli di tempo di densità esponenziale di parametro 1 (se espressi in anni).
  (a) Qual è la probabilità che il tempo trascorso tra due falsi allarmi consecutivi sia minore di un anno?
  (b) Supponiamo che nell'ultimo anno ci siano stati due falsi allarmi. Qual è la probabilità che il prossimo falso allarme si verifichi in meno di un anno?
  (c) Qual è la probabilità che nel prossimo anno ci sia qualche falso allarme?
  (d) Supponiamo di aver montato due impianti d'allarme di questo tipo. Qual è la probabilità che almeno 1 dia un falso allarme nei prossimi 6 mesi? E quale che diano entrambi un falso allarme nei prossimi 6 mesi?

(4) Sia X una variabile aleatoria continua la cui funzione di ripartizione è

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0; \\ \frac{2t}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{t+1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2; \\ 1 & \text{se } t > 2; \end{cases}$$

  (a) Determinare la densità di X;
  (b) Determinare valore atteso e varianza di X;
  (c) Date 44 variabili indipendenti $X_1, \ldots, X_{44}$ la cui funzione di ripartizione è $F(t)$ determinare $P(X_1 + \cdots + X_{44} > 40)$.

(5) Sia

$$f(s) = \begin{cases} as(s-20) & \text{se } 0 \leq s \leq 20 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

una funzione dipendente da un parametro reale a.

(a) Mostrare che esiste un unico valore a per cui $f(s)$ è una densità continua astratta.

(b) Sia X una variabile aleatoria continua con la densità determinata al punto precedente. Calcolare il valore atteso $E[X]$.

(c) Stabilire se $P(X > 5|X > 4) = P(X > 1)$. Cosa possiamo dedurre sulla mancanza di memoria di X?

(6) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } |s| > 1 \\ 1+s & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1-s & \text{se } 0 < s < 1 \end{cases}$$

(a) Verificare che f è una densità continua astratta.

(b) Dette $X_1, \dots, X_{180}$ variabili aleatorie indipendenti di densità continua f, determinare la loro funzione di ripartizione.

(c) Determinare valore atteso e varianza di X_i^2.

(d) Determinare la probabilità $P(X_1^2 + \dots + X_{180}^2 > 25)$.

Cenni di soluzioni

(1) Ricordiamo che la funzione di ripartizione di X è data da

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

(a) Abbiamo

$$P(Y < \tfrac{1}{2}) = P(\tfrac{1}{X+1} < \tfrac{1}{2}) = P(X > 1) = \frac{1}{2}.$$

(b) Osserviamo intanto che $X(\omega) \in [0,2]$ se e solo se $Y(\omega) \in [1/3, 1]$: pertanto Y assume valori in $[1/3, 1]$. Prendiamo quindi $t \in [1/3, 1]$ e calcoliamo

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X \geq \tfrac{1-t}{t}) = 1 - F_X(\tfrac{1-t}{t}) = 1 - \frac{1-t}{2t} = \frac{3t-1}{2t}$$

Concludiamo quindi

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3t-1}{2t} & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

(c) La densità di Y possiamo a questo punto determinarla per derivazione della funzione di ripartizione. Otteniamo quindi

$$f_Y(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < \frac{1}{3} \text{ oppure } s > 1 \\ \frac{1}{2s^2} & \text{se } \frac{1}{3} < s < 1 \end{cases}$$

(2) (a) Le variabili T_i sono tutte continue uniformi $T_i \sim U([0, 10])$ se espresse in minuti.

(b) Abbiamo

$$P(T_1 > 5, \ldots, T_{30} > 5) = (1/2)^{30} \sim 0$$

(c) Abbiamo $E[T_i] = 5$ e $Var(T_i) = \frac{100}{12}$ per ogni i.

(d) Applicando il teorema del limite centrale abbiamo $T_1 + \cdots + T_{30} \sim N(150, 250)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{30}(T_1 + \cdots + T_{30}) > 6)) &= P(T_1 + \cdots + T_{30} > 180) \\ &= P(\sqrt{250}\zeta_0 + 150 > 180) \\ &= P(\zeta_0 > 1,89) = 1 - \Phi(1,89) = 0,03. \end{aligned}$$

(3) (a) Sia T il tempo di attesa del prossimo falso allarme, allora abbiamo $P(T < 1) = 1 - e^{-1} = 0,632$.

(b) Gli intervalli di tempo che separano falsi allarmi diversi non si influenzano a vicenda e danno luogo a variabili aleatorie indipendenti. Per cui tale probabilità è sempre $0,632$.

(c) Sia X il tempo di attesa del prossimo falso allarme. Poiché le variabili esponenziali godono della mancanza di memoria, abbiamo sempre $X \sim Exp(1)$, da cui $P(X < 1) = 0.632$.

Sia infatti T l'intervallo di tempo che separa il prossimo falso allarme dal precedente, allora $T \sim Exp(1)$. Detto u il tempo trascorso dall'ultimo falso allarme, allora troviamo

$$P(T \leq 1+u | T \geq u) = \frac{P(u \leq T \leq 1+u)}{P(T \geq u)} = $$
$$= \frac{(1-e^{-(u+1)}) - (1-e^{-u})}{1-(1-e^{-u})} = \frac{e^{-u} - e^{-(u+1)}}{e^{-u}} = 1 - e^{-1}$$

(d) Siano T_1 e T_2 i tempi di attesa per il prossimo falso allarme nei due impianti: allora T_1 e T_2 sono due variabili esponenziali indipendenti di parametro 1. Quindi la risposta alla prima domanda è

$$P(\min(T_1, T_2) < \tfrac{1}{2}) = 1 - P(T_1 > \tfrac{1}{2})P(T_2 > \tfrac{1}{2}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = 1 - e^{-1} \sim 0,632.$$

La risposta alla seconda domanda invece è

$$P(\max(T_1, T_2) < \tfrac{1}{2}) = P(T_1 < \tfrac{1}{2})P(T_2 < \tfrac{1}{2}) = (1 - e^{-\frac{1}{2}})^2 \sim 0,155.$$

(4) (a) La densità si ottiene per derivazione. Abbiamo

$$f_X(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \text{ oppure } s > 2 \\ \frac{2}{3} & \text{se } 0 < s < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 < s < 2 \end{cases}$$

(b) Calcoliamo

$$E[X] = \int_0^1 s\frac{2}{3}\,ds + \int_1^2 s\frac{1}{3}\,ds = \frac{2}{3}\Big[\frac{s^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{1}{3}\Big[\frac{s^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{5}{6}.$$

Similmente

$$E[X^2] = \frac{2}{3}\Big[\frac{s^3}{3}\Big]_0^1 + \frac{1}{3}\Big[\frac{s^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\frac{7}{3} = 1$$

e quindi

$$Var(X) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

(c) Per il teorema del limite centrale abbiamo

$$X_1 + \cdots + X_{44} \sim N(\tfrac{110}{3}, \tfrac{121}{9})$$

e quindi

$$P(X_1 + \cdots + X_{44} > 40) = P(\tfrac{11}{3}\zeta_0 + \tfrac{110}{3} > 40) = P(\zeta_0 > \tfrac{10}{11}) = 1 - \Phi(0,91) = 0,181.$$

(5) (a) Si ha $f(s) \geq 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ se e solo se $a \leq 0$. Inoltre calcoliamo l'integrale su tutto $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,ds = \int_0^{20} as(s-20)\,ds = -\frac{4000}{3}a$$

Affinché tale integrale valga 1 deve essere $a = -\frac{3}{4000}$, che essendo negativo è un valore accettabile.

(b) Osserviamo che il grafico di $f(s)$ è una parabola che si annulla in 0 e 20 ed è quindi simmetrica rispetto all'asse $s = 10$. Deduciamo che $E[X] = 10$. Altrimenti possiamo calcolare

$$E[X] = -\frac{3}{4000}\int_0^{20}(s^3 - 20s^2)ds = -\frac{3}{4000}\Big[\frac{s^4}{4} - \frac{20s^3}{3}\Big]_0^{20} = 10.$$

(c) Abbiamo

$$P(X > 5|X > 4) = \frac{P(X > 5)}{P(X > 4)} = \frac{-\frac{3}{4000}\int_5^{20}(s^2 - 20s)\,ds}{-\frac{3}{4000}\int_4^{20}(s^2 - 20s)\,ds}$$
$$= \frac{[\frac{s^3}{3} - 10s^2]_5^{20}}{[\frac{s^3}{3} - 10s^2]_4^{20}} = \frac{3375}{3584} \sim 0.95.$$

Invece

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 + \frac{3}{4000}\int_0^1 (s^2 - 20s)\,ds =$$
$$= 1 + \frac{3}{4000}\cdot\big(-\frac{29}{3}\big) = \frac{3971}{4000} \sim 0.99$$

per cui le due probabilità sono diverse. In particolare X non gode della proprietà di mancanza di memoria.

(6) (a) La funzione è sempre ≥ 0 e integrabile (in quanto continua). Inoltre si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,ds = 1$$

(che si vede calcolando l'area dei triangoli individuati dal grafico di f), per cui f è una densità continua astratta.

(b) Se $-1 < t < 0$ abbiamo

$$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^t f(s)\,ds = \int_{-1}^t (1+s)ds = \frac{(t+1)^2}{2}$$

mentre se $0 < t < 1$ abbiamo

$$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^t f(s)\,ds = \frac{1}{2} + \int_0^t (1-s)ds = 1 - \frac{(1-t)^2}{2}$$

e quindi

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ \frac{t^2+2t+1}{2} & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{-t^2+2t+1}{2} & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

(c) Abbiamo

$$E[X_1^2] = \int_{-1}^0 s^2(1+s)ds + \int_0^1 s^2(1-s)\,ds = \frac{1}{6}$$

$$E[X_1^4] = \int_{-1}^0 s^4(1+s)ds + \int_0^1 s^4(1-s)\,ds = \frac{1}{15}$$

Dunque

$$Var(X_1^2) = E[X_1^4] - E[X_1^2]^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{36} = \frac{7}{180}.$$

(d) Applicando il teorema del limite centrale abbiamo quindi

$$X_1^2 + \cdots + X_{180}^2 \sim N(30, 7)$$

e quindi

$$P(X_1^2 + \cdots + X_{180}^2 > 25) = P(\sqrt{7}\zeta_0 + 30 > 25) = 1 - \Phi(-1,89) = \Phi(1,89) = 0,97.$$