3. Trigonometria, calcolo differenziale e integrale, vettori

3.1 Compendio di trigonometria elementare

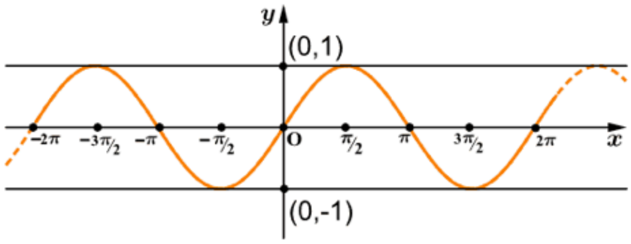
- Un angolo orientato è definito da una coppia ordinata *ab* di semirette con la stessa origine O.
- Definizione pedante di $\sin \alpha$, $\cos \alpha$: considerando un sistema di assi cartesiani con origine in O nel vertice di un angolo a, b, il semiasse positivo delle ascisse che si sovrappone ad a, una circonferenza di raggio unitario centrata in O, indichiamo con A, B le intersezioni di questa circonferenza con a, b. Se $B = (x, y)$, allora definiamo $\sin \alpha = y$ e $\cos \alpha = x$.
- Per il teorema di pitagora, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ sono funzioni con valori in [-1,1], periodiche di periodo 360 gradi o 2π radianti.
- Ricordare i valori di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ per angoli notevoli (30, 45, 60 gradi e relativi multipli).
- Teorema dei seni: dato un triangolo di lati abc, e detti α, β, γ gli angoli opposti a tali lati, vale la relazione: $a/\sin \alpha = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$
- Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- Misura degli angoli in radianti sta in $[0,2\pi]$
- Tangente: $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Il dominio non è tutto $\mathfrak{R}$! Quando $\cos \alpha = 0$ non è definita.
- Angoli notevoli:

$0^o = 0$ rad	$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\tan(0) = 0$
$30^o = \pi/6$	$\sin(\pi/6) = 1/2$	$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$	$\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$
$45^o = \pi/4$	$\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$	$\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$	$\tan(\pi/4) = 1$
$60^o = \pi/3$	$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$	$\cos(\pi/3) = 1/2$	$\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$
$90^o = \pi/2$	$\sin(\pi/2) = 1$	$\cos(\pi/2) = 0$	$\tan(\pi/2)$ non esiste

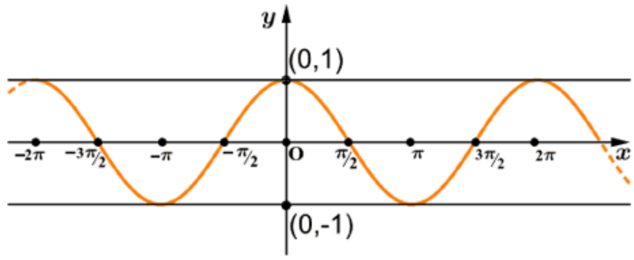
Ulteriori proprietà e formule utili:

- $\sin(-a) = -\sin(a)$; $\cos(-a) = \cos(a)$; $\tan(-a) = -\tan(a)$
- $sin(\pi - a) = \sin(a)$; $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$; $\tan(\pi - a) = -\tan(a)$
- $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$; $\cos(\pi + a) = -\cos(a)$; $\tan(\pi + a) = \tan(a)$
- $\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$; $\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$; $\tan(pi/2 - a) = \cot(a)$
- $\sin(\pi/2 + a) = \cos(a)$; $\cos(\pi/2 + a) = -\sin(a)$; $\tan(\pi/2 + a) = -cot(a)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- formule di prostaferesi… formule di Wener…
- Le funzioni inverse:
  $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$; $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$; $\arctan : \mathfrak{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$

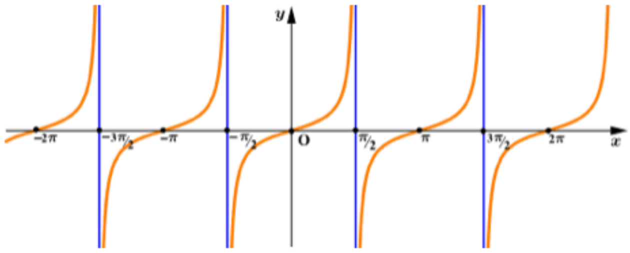
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



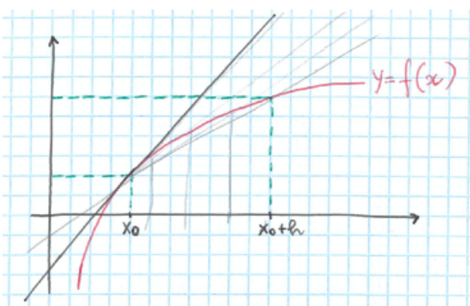
3.2 Cenni di calcolo differenziale

3.2.1 Derivata di una funzione - interpretazione geometrica

Vogliamo risoltere il seguente problema: trovare l'equazione di una retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0. Una retta che passi per $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ha forma generale

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

Considero una ascissa $(x_0 + h)$ e la retta che passa per i punti $\left(x_0, f(x_0)\right)$ e $\left(x_0 + h, f(x_0 + h)\right)$. Questa avrà coefficiente angolare



$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h \ - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La retta è secante la curva rappresentata da $y = f(x)$, diventerà la retta tangente nel punto x_0 nel limite in cui h tende a zero:

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) + h - f(x_0)}{h}$$

Se tale limite esiste ed è finito, la funzione $y = f(x)$ si dice derivabile nel punto di ascissa x_0 e il valore di tale limite è detto derivata di f in x0. Si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \ \text{ oppure } \ \dot{f}(x_0) \text{ oppure } \ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

3.2.2 Derivate prime di alcune funzioni elementari

$f(x) = k$ (costante)	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 0$
Se $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = x^n$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = n\,x^{n-1}$
Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^\alpha$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \alpha\,x^{\alpha-1}$
Se $f(x) = \sin(x)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}(x) = \cos(x)$
Se $f(x) = \cos(x)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -\sin(x)$
Se $f(x) = \mathrm{e}^x$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \mathrm{e}^x$
Se $f(x) = \ln(x)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{x}$

3.2.3 Regole di derivazione

Somma: $f(x) = p(x) + q(x)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x)$
Prodotto: $f(x) = p(x)q(x)$	$\frac{df}{dx}(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x)q(x) + p(x)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x)$
Reciproco: $f(x) = 1/q(x)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{1}{q^2(x)}$
Rapporto: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x)q(x) - p(x)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x)}{q^2(x)}$
Funzione composta: $h(x) = f\left(g(x)\right)$	$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\right)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$

3.3 Cenni di calcolo integrale

3.3.1 Integrale indefinito

Si definisce integrale indefinito di $f(x)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

l'insieme di tutte le primitive $F(x)$ per le quali vale $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$.

3.3.2 Integrali immediati

$$\int \mathrm{d}x = x + c \qquad \int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)dx \qquad \int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \qquad \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c \qquad \int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + c \qquad \int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + c \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x) + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

ecc.

3.3.3 Integrale definito

Si definisce integrale definito della funzione $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

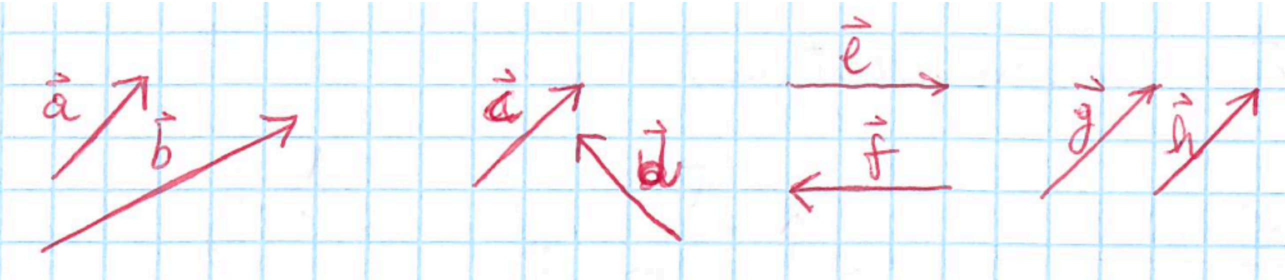
Il valore di tale integrale corrisponde all'area racchiusa dall'ascissa, le due rette $x = a$ ed $x = b$, e la funzione $f(x)$.

Tre semplici proprietà:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \;; \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \;; \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

3.4 Grandezze vettoriali

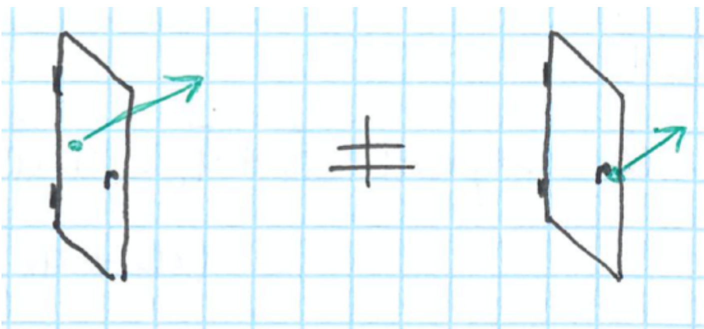
Le grandezze definite da un numero sono dette *scalari*. Ad esempio, temperatura, pressione, massa, densità… Possono essere uniformi e/o costanti o funzione di posizione e/o tempo, non è rilevante ai fini di questa classificazione. Ci sono grandezze per le quali un numero non basta. Ad esempio, lo spostamento. Se dico “spostati di l in linea retta da O”, so che alla fine dello spostamento disterò l da O, ma non so in quale punto di una sfera di raggio l e centrata in O sono finito. Se preciso anche la *direzione* r, riduco le possibilità a due punti della sfera. Se preciso anche il *verso* dello spostamento, ho un unico punto possibile. Quindi per lo spostamento nello spazio tridimensionale occorrono tre grandezze: ***il modulo, la direzione e il verso***. Un oggetto definito da queste tre grandezze è detto ***vettore***.



Guardando gli esempi mostrati in figura, possiamo affermare le seguenti cose:

- $\vec{a} \neq \vec{b}$;
- $\vec{c} \neq \vec{d}$ ma $|\vec{c}| = |\vec{d}|$;
- $\vec{e} \neq \vec{f}$ ma $|\vec{e}| = |\vec{f}|$ e $\mathrm{dir}\,\vec{e} = \mathrm{dir}\,\vec{f}$;
- $\vec{g} = \vec{h}$;
- infine $\vec{e} = -\vec{f}$

Il vettore definito come fino a qui è detto *vettore libero*.
Se il vettore ha un punto di applicazione definito è detto *vettore applicato*.
Ad esempio, quando spingo una porta con una forza (è un vettore) il risultato dipende da dove sto premendo - in particolare, a quale distanza dall’asse di rotazione, oltre che in quale direzione.



3.4.1 Prodotto di uno scalare per un vettore

Dato un vettore $\vec{a}$ e uno scalare m, ne definisco il prodotto

$$\vec{b} = m\vec{a}$$

dove *i)* $\vec{b}$ ha la stessa direzione di $\vec{a}$; ii) $\vec{b}$ ha modulo m volte il modulo di $\vec{a}$; iii) $\vec{b}$ ha lo stesso verso di $\vec{a}$ se $m > 0$, altrimenti ha verso opposto.

Ponendo $m = -1$ posso scrivere $\vec{b} = -\vec{a}$: definizione di vettore opposto.

3.4.2 Versori

Fissata una direzione orientata r, esistono infiniti vettori con quella direzione, che differiscono tra loro per modulo e verso. Tra questi, esiste un vettore $\vec{u}$ che ha la stessa direzione e verso di r e modulo unitario, $|\vec{u}| = 1$. Tutti i vettori di cui sopra possono quindi essere scritti come

$$\vec{a} = a\vec{u}$$

dove quindi $\vec{u}$ specifica la direzione, e a specifica il modulo e il verso del vettore $\vec{a}$. Dunque, $\vec{u}$ rappresenta il *versore* della direzione orientata r. Comunemente si scrive come $\vec{u}_r$, e spesso si indicano i versori usando la notazione “hat”, “^”, invece della freccina, ad esempio $\hat{u}_r$. Dato un generico vettore $\vec{a}$, il “suo” versore può essere espresso come il vettore diviso per il suo modulo, ottenendo così il versore con stessa direzione e verso di $\vec{a}$ e modulo unitario:

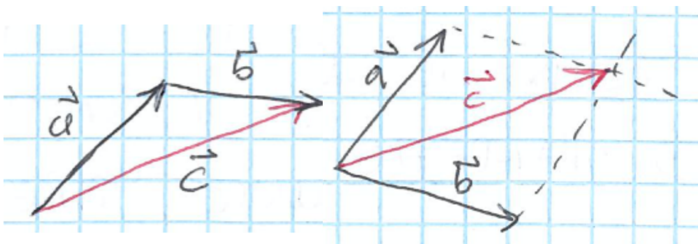
$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

3.4.3 Somma e differenza di vettori

Somma di vettori:

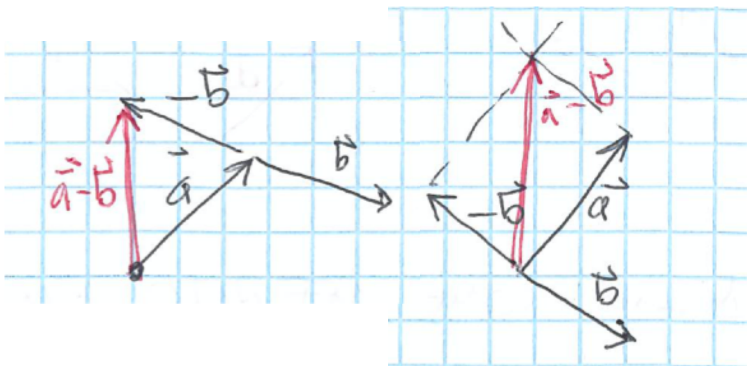
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

graficamente, ponendo gli addendi “uno in coda all’altro", o costruendo il parallelogramma (vedi figura).

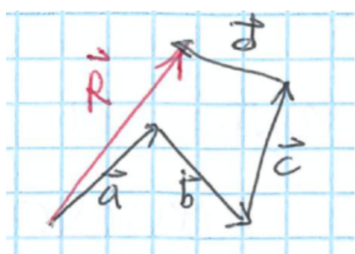


La somma di vettori gode della proprietà commutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

La differenza di vettori si definisce come la somma del vettore opposto: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



La somma di più vettori, ad esempio $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, mostrata in modo grafico (vedi figura).



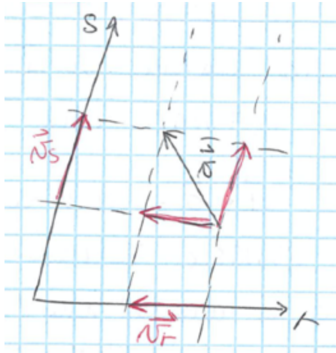
Vale la proprietà associativa:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Nel caso i vettori siano paralleli, si sommano i moduli, con segno determinato dal verso: si comprende utilizzando la notazione con il versore:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1\hat{u} + a_2\hat{u} = (a_1 + a_2)\hat{u}$$

3.4.4 Scomposizione di un vettore



Dato un vettore $\vec{v}$, e due direzioni orientate r ed s, voglio scrivere

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_s = v_r\hat{r} + v_s\hat{s}$$

dove abbiamo battezzato $\hat{r}$ e $\hat{s}$ i versori che definiscono le direzioni orientate r ed s, rispettivamente. Chiamiamo $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ *vettori componenti* di $\vec{v}$ lungo r e lungo s.

L'esempio appena fatto era sul piano. Nello spazio occorrono almeno tre direzioni orientate, e la scelta più ovvia è la *terna cartesiana*:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

dove è comune chiamare $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ i versori degli assi (x, y, z).

La somma di vettori espressi per mezzo delle componenti è molto semplice: dati

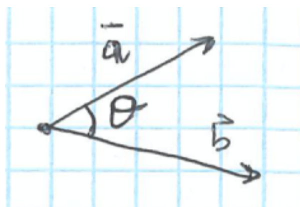
$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

si ha

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

cioè "il vettore somma ha come componenti le somme delle componenti".

3.4.5 Prodotto scalare



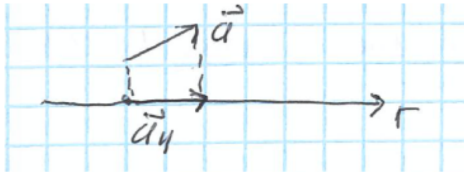
Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si definisce il prodotto scalare come la quantità scalare definitica

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

dove θ è l'angolo formato dai due vettori. Le proprietà:

- è nullo quando almeno uno dei vettori è nullo o quando $\theta = 90^o = \pi/2$
- è commutativo: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ dato che $ab\cos(\theta) = ab\cos(-\theta)$
- se $\vec{a} = \vec{b}$, si ha $\theta = 0$ quindi $\cos\theta = 1$: ne segue che $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$
- non si può iterare! dato che il risultato è uno scalare
- proprietà distributiva rispetto alla somma: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- gli scalari possono essere spostati: $\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \cdot \vec{b}$

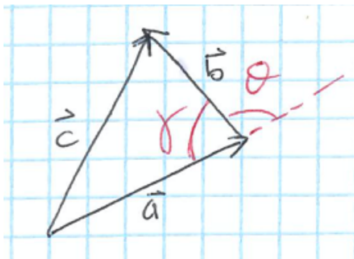
L'interpretazione geometrica del prodotto scalare sta nella *proiezione ortogonale*: si potrebbe infatti enunciare come "il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la proiezione ortogonale dell'altro sul primo". Quindi quando utilizziamo le componenti, possiamo vedere che



$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = (\vec{a}\cdot\hat{\imath})\hat{\imath} + (\vec{a}\cdot\hat{\jmath})\hat{\jmath} + (\vec{a}\cdot\hat{k})\hat{k}$$

cioè la componente di un vettore su un asse cartesiano si può esprimere come prodotto scalare del vettore per il versore dell'asse.

Può essere interessante notare come il teorema del coseno (e quindi il teorema di Pitagora come caso particolare) sia esprimibile in termini del prodotto scalare:



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \implies$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \\ &= a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

Dato che $\gamma = \pi - \theta$, e che $\cos\gamma = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, otteniamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Vediamo ora di esprimere il prodotto scalare tramite le componenti cartesiane. Siano dati i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, espressi come

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\,; \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

Osserviamo che i prodotti scalari dei versori, essendo essi o paralleli o ortogonali ed avendo tutti modulo unitario, sono i seguenti:

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0$$

quindi utilizzando la proprietà distributiva abbiamo

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + c_xc_y$$

"Il prodotto scalare di due vettori è uguale alla somma dei prodotti delle componenti omologhe dei singoli vettori". In particolare, si ha

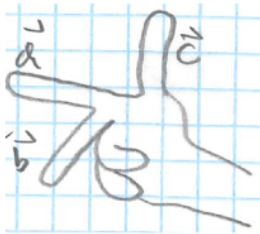
$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

(come evidente dal punto di vista geometrico - per il teorema di Pitagora).

3.4.6 Prodotto vettoriale

Scriviamo il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il cui risultato è un vettore, con la notazione:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$



Il risultato del prodotto vettoriale soddisfa le seguenti condizioni:

- la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
- il verso è destrorso rispetto alla rotazione $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$ (regola della mano destra)
- il modulo è $c = ab\sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$, e corrisponde all'area del parallelogrammo formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

In base alla definizione, si hanno le seguenti proprietà:

- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ e $\vec{a} \times \lambda\vec{a} = 0$
- proprietà anticommutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- proprietà distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- NON vale la proprietà associativa; in caso di prodotto iterato, l'ordine è importante: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Otteniamo ora l'espressione del prodotto vettoriale per mezzo delle componenti cartesiane. Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, espressi come

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

definiamo prima i prodotti vettoriali dei versori

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}; \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}; \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}; \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}; \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

arriviamo a

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$$

cosa che si può comodamente scrivere per mezzo del determinate di una matrice:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3.4.7 Note più formali sulla terna cartesiana

Una retta orientata sulla quale sia definito un punto specifico detto origine è detta *asse.* Prendendo tre rette orientate perpendicolari, ciascuna con origine nel punto comune di intersezione, abbiamo una *terna cartesiana ortogonale*. Utilizzeremo sempre *terne cartesiane ortogonali destrorse*: immaginando di stare sull'asse z, con i piedi sul piano xy, vedo che x deve ruotare di $\pi/2$ in senso ANTIORARIO per sovrapporsi a y. Questa definizione equivale ad utilizzare la regola della mano destra con asse x associato all'indice, y al medio e z al pollice.

La scomposizione di un vettore sulla terna cartesiana può essere condotta in due passaggi, prima riportandosi alla somma di un vettore parallelo all'asse z con un vettore che giace sul piano xy, poi scomponendo quest'ultimo sui due assi del piano.

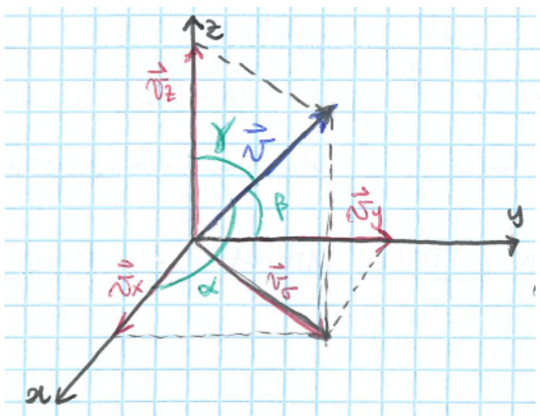
$$\vec{v} = \vec{v}_z + \vec{v}_\sigma \quad (\vec{v}_z \perp \vec{v}_\sigma)$$

$$\vec{v}_\sigma = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\begin{cases} v_x = \vec{v} \cdot \hat{i} = v\cos\alpha \\ v_y = \vec{v} \cdot \hat{j} = v\cos\beta \\ v_z = \vec{v} \cdot \hat{k} = v\cos\gamma \end{cases}$$



I coseni degli angoli α, β, γ formati dal vettore con i tre assi x, y, z sono detti *coseni direttori*.

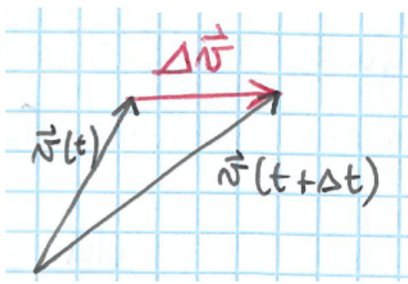
3.4.8 Derivata di un vettore

Sia il vettore $\vec{v}$ funzione di una variabile scalare t.

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta\vec{v}$$

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



Note:

- In generale, $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ NON è parallelo a $\vec{v}$, vedi esempio in figura.
- $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ è un VETTORE
- valgono le consuete regole di derivazione:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad (m \text{ costante})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad (m \text{ funzione di } t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

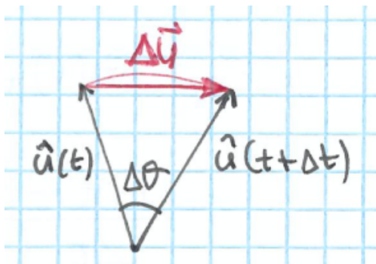
Rappresentando un vettore $\vec{v}(t)$ sulla terna cartesiana,

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

avremo

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

Un caso particolare è la derivata di un versore. Un versore ha per definizione modulo unitario, dunque può variare nel tempo solo la direzione:



$$\Delta\hat{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)$$

Nel limite $\Delta t \to 0$, $\Delta\hat{u} \to \mathrm{d}\hat{u}$ e tale $\mathrm{d}\hat{u}$ sarà perpendicolare a $\hat{u}(t)$ con un modulo uguale (sempre nel limite) alla lunghezza dell'arco di circonferenza, e quindi all'angolo stesso:

$$|\mathrm{d}\hat{u}| = |\hat{u}(t)|\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$$

da cui possiamo scrivere il vettore $\mathrm{d}\hat{u}$ come

$$\mathrm{d}\hat{u} = \mathrm{d}\theta\,\hat{u}_n$$

dove ho definito $\hat{u}_n$ il versore perpendicolare a $\hat{u}$. In conclusione

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{u}_n$$

ovvero, “la derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore, di modulo pari alla velocità con cui il versore cambia direzione $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, modulo che in generale è diverso da uno”.

Consideriamo la scrittura di un generico vettore in termini del versore direzione. $\vec{v} = v\hat{u}$. Si avrà:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u} + v\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

(il modulo della derivata è diverso dalla derivata del modulo….)

Inoltre, se $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, cioè $|\vec{v}|$ è costante, $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{u}_n \perp \vec{v}$: $\vec{v}$ varia solo in direzione!

Infine, se $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$, allora $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}$: varia solo in modulo mantenendo invariata la direzione.