ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA E PROBABILITÀ

FABRIZIO CASELLI

Contents

1. Combinatoria intuitiva

Questi esercizi vanno risolti con le mani, possibilmente senza utilizzare alcuna formula.

Es. 1.1. Devo regalare due biglietti per uno spettacolo a due tra dieci miei amici. In quanti modi posso fare questa scelta?

Es. 1.2. Quante sono le possibili classifiche finali in un torneo a tre squadre (considerando anche possibili parimerito)?

Es. 1.3. Quanti sono i possibili lanci di tre dadi in cui il risultato pi grande almeno 5, il secondo almeno 4, il terzo almeno 3?

Es. 1.4. Mostrare che i sottoinsiemi di cardinalità pari di un insieme con 11 elementi sono tanti quanti quelli di cardinalità dispari.

Es. 1.5. Quattro coppie moglie-marito di scambisti decidono di scambiarsi i propri partner per una serata. In quanti modi possono effettuare questa scelta (in modo che ogni uomo passi la serata con la moglie di un altro)?

Es. 1.6. Sia A=1,2,3,4. Quante sono le sequenze in A di lunghezza 6 in cui ogni elemento di A compare un numero pari di volte? E quante quelle in cui ogni elemento di A compare un numero dispari di volte?

2. Combinatoria di base

Es. 2.1. Quanti sono i numeri tra 0 e 700 che non sono divisibili né per 2 né per 5, né per 7?

Es. 2.2. Quante sono le disposizioni di lunghezza 5 in $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ in cui compaiono almeno due cifre minori di 5?

Es. 2.3. Quante sono le disposizioni di lunghezza 6 in $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ in cui compaiono 3 cifre pari e 3 cifre dispari?

Es. 2.4. Quante sono le sequenze in $\{1,2,3,4,5,6\}$ di lunghezza 4? Quelle in cui la somma delle cifre pari? Quelle in cui la somma delle cifre multiplo di 3?

Es. 2.5. Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1,2,3,4,5,6\}$ che contengono almeno uno tra 5 e 6?

Es. 2.6. Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ che se contengono i allora non contengono $11-i$? (cio non possono contenere ad esempio sia 1 che 10, non possono contenere sia 2 che 9, ecc.)

Es. 2.7. Stabilire la cardinalitá del seguente insieme:

$$A = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{Z}, 0 < a < 6, b + a = 4, -3 < c - a < 3\}$$

Es. 2.8. Stabilire la cardinalitá del seguente insieme:

$$B = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{Z}, 0 < a < 6, b + a = 4, -3 < 2c - a < 3\}$$

Es. 2.9. Determinare quante sono le sequenze strettamente crescenti di lunghezza 5 in $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. E quante sono quelle debolmente crescenti?

Es. 2.10. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola CAPPALLACCA. Stabilire in quanti di questi anagrammi le lettere A non compaiono mai in posti vicini.

3. Combinatoria avanzata

Es. 3.1. Consideriamo un mazzo di carte da poker contenente le carte numerate 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A e contenente quindi 32 carte. Quante sono le mani in cui si ha un punteggio pari o superiore alla scala (cioè o scala, o colore, o full, o poker o scala reale)?

Es. 3.2. Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. In quanti modi è possibile colorarle di blu o di rosso in modo che ce ne siano esattamente 8 rosse con un numero pari e 3 rosse con un numero dispari?

Es. 3.3. Un'urna contiene 6 palline rosse, 6 gialle, 6 blu, 6 verdi e 6 arancioni. Determinare in quanti modi si possono pescare 8 palline in modo che queste palline siano esattamente di 3 colori differenti. Risolvere questo esercizio sia supponendo che le palline siano indistinguibili, sia supponendo che siano distinguibili, ad esempio supponendo che siano numerate da 1 a 30.

Es. 3.4. Fare lo stesso esercizio supponendo che le palline siano 9 anziché 6 per ciascun colore.

Es. 3.5. Stabilire quante sono le permutazioni di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in cui almeno tre numeri rimangono al loro posto.

Es. 3.6. Stabilire quanti sono gli anagrammi della parola LALLANLA in cui almeno 4 lettere non hanno cambiato posto.

Es. 3.7. Consideriamo un insieme A di 16 palline, di cui 8 rosse numerate da 1 a 8, e le altre 8 blu, sempre numerate da 1 a 8. Determinare quanti sono i sottoinsiemi di A costituiti da 10 palline in cui c'è almeno una pallina per ogni valore.
Determinare quanti sono i sottoinsiemi in cui compaiono tutti i valori da 1 a 8 tranne al più un valore.

Es. 3.8. Lanciamo un dado per 12 volte.

(1) Determinare quante sono le possibili sequenze di risultati in cui tutti i numeri da 1 a 6 compaiono almeno una volta.
(2) Determinare quante sono quelle in cui ogni risultato compare esattamente due volte.
(3) Determinare quante sono quelle in cui 1,2,3,4 compaiono almeno due volte e 5,6 almeno una volta.

4. Partizioni

Es. 4.1. Scrivere una partizione di $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ con un blocco di 3 elementi, una costituita da 3 blocchi, una in cui 3 forma un blocco da solo, una in cui non ci sono blocchi con 3 elementi e una in cui 10 appartiene ad un blocco di 3 elementi.

Es. 4.2. Quante sono le partizioni dell'insieme $\{1,2,3,4\}$?

Es. 4.3. Quante sono le partizioni dell'insieme $\{1,2,3,4,5\}$?

Es. 4.4. Calcolare i numeri di Stirling $S_{10,4}$ e $S_{9,3}$.

Es. 4.5. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in quattro blocchi in cui i blocchi non sono costituiti unicamente da un numero pari?

Es. 4.6. Mostrare che, per ogni $n \geq 2$, il numero di partizioni di $\{1,2,\ldots,n\}$ in $n-1$ blocchi è $\binom{n}{2}$.

Es. 4.7. Mostrare che per ogni $n \geq 2$ il numero di partizioni di $\{1,2,\ldots,n\}$ in 2 blocchi è $2^{n-1}-1$.

Es. 4.8. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in cui ogni blocco contiene almeno un numero pari e un numero dispari?

Es. 4.9. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in cui ogni blocco ha solo numeri pari o solo numeri dispari?

Es. 4.10. Quante sono le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in cui almeno un blocco è costituito da un solo numero pari?

Es. 4.11. Stabilire in quanti modi 10 persone possono essere suddivise in 3 gruppi (non vuoti).

Es. 4.12. (difficile) Sia $R_{n,k}$ il numero di partizioni di $\{1,\ldots,n\}$ in k blocchi in cui ogni blocco contiene almeno due elementi. Mostrare che

$$R_{n,k} = (n-1)R_{n-2,k-1} + kR_{n-1,k}$$

per ogni $n > 1$ dove poniamo per convenzione $R_{0,0} = 1$ e $R_{0,k} = 0$ se $k > 0$.

5. Statistica descrittiva

Es. 5.1. Un bambino di 6 mesi mangia tutti i giorni una pappa di 200 grammi. In una settimana ha registrato i seguenti tempi (espressi in minuti) per consumare il suo pasto: 5,10,4,12,20,10,4.

(1) Determinare le velocità (espressa in grammi al minuto) registrate dal bambino nel consumare il suo pasto;
(2) Determinare la velocità media complessiva nei sette giorni;

Es. 5.2. In 25 scatole di 100 viti si sono contati il numero di pezzi difettosi ottenendo i seguenti dati

$$1, 4, 3, 1, 3, 2, 2, 1, 2, 5, 3, 0, 1, 4, 3, 7, 1, 3, 1, 7, 2, 1, 2, 4, 8.$$

Determinare le modalità, le frequenze, la media, i quartili, la moda, la varianza, e il range.

Es. 5.3. Sono state recensite 512 famiglie di 6 figli. Per ognuna è stato osservato il numero di figlie femmine. I dati sono riportati nella tabella seguente.

Numero di figlie	frequenza
0	23
1	64
2	131
3	123
4	107
5	48
6	16

Qual è il numero medio di figlie? Calcolare la varianza sia usando la definizione che usando la formula vista a lezione.

Es. 5.4. Sette adulti scelti a caso hanno peso e altezza (espressi in kilogrammi e centimetri) come nella seguente tabella.

Peso	Altezza
80	175
90	175
75	180
85	190
70	170
100	195
80	170

Disegnare il diagramma a dispersione; stimare il peso di un adulto alto 177 centimetri e l'altezza di un adulto che pesa 80 chili.

Es. 5.5. Il PIL in Italia ha fatto registrare le seguenti variazioni percentuali negli ultimi anni

Anno	Variazione
2020	-8.9%
2019	+0.3%
2018	+0.9%
2017	+1.7%
2016	+1.3%

6. Probabilitá di base e uniforme

Es. 6.1. Costruire uno spazio di probabilità (non uniforme) sull'insieme $\Omega = \{1, 2, a, b\}$.

Es. 6.2. Sia $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Quante sono le famiglie di eventi su Ω (cioé famiglie di sottoinsiemi chiuse rispetto a unione, intersezione e complementare che contengono Ω e $\emptyset$)?

Es. 6.3. Un'urna contiene 6 palline rosse, 6 gialle, 6 blu, 6 verdi e 6 arancioni. Determinare la probabilitá che pescando 8 palline a caso queste siano di esattamente 3 colori differenti.

Es. 6.4. Determinare la probabilità che scegliendo un anagramma a caso della parola LALLANLA si ottenga una parola con le tre A in posizioni consecutive

Es. 6.5. Un insegnante interroga casualmente ogni giorno uno dei suoi sei studenti. Determinare la probabilitè che dopo 10 giorni abbia interrogato almeno una volta tutti i sei studenti.

Es. 6.6. Una classe di 10 bambini viene divisa in tre gruppi in modo casuale. Determinare la probabilità che il bambino Andrea finisca nello stesso gruppo della bambina Margherita.

Es. 6.7. Abbiamo tre urne contenenti una pallina bianca e rispettivamente 1,3 e 5 palline rosse. Estraendo una pallina a caso da un'urna, qual è la probabilità che sia bianca?

Es. 6.8. Una moneta (truccata) dà testa con probabilità 0.6. Qual è la probabilità che lanciandola 5 volte otteniamo più teste che croci?

Es. 6.9. Avendo a disposizione la moneta dell'esercizio precedente e una regolare, ne scegliamo una a caso e la lanciamo tre volte.

(1) Qual è la probabilità di ottenere 3 teste?
(2) Sapendo che il primo lancio ha dato come risultato testa, qual è la probabilità che la moneta sia truccata?
(3) Stabilire se gli eventi $E_1 =$"testa al primo lancio" ed $E_2 =$"testa al secondo lancio" sono dipendenti o indipendenti.

7. Variabili aleatorie discrete

Es. 7.1. Un bambino colleziona le figurine di un piccolo album contenente 80 figurine e ne ha già 50. Il nonno gli compra un pacchetto nuovo di 4 figurine (si supponga che un pacchetto contiene sempre 4 figurine diverse tra loro).

(1) Determinare la probabilità di trovare almeno 3 figurine nuove.
(2) Qual è la probabilità di trovare tutte doppie (cioè tutte figurine che il bambino ha già)?
(3) Se il nonno comprasse 2 pacchetti, quale sarebbe la probabilità di trovare complessivamente 6,7 o 8 nuove figurine?

Es. 7.2. Consideriamo 4 scatole contenenti 2 palline ciascuna indistinguibili al tatto. La scatola i ha una pallina numerata con 1 e l'altra numerata con i (quindi nella prima entrambe le palline sono numerate 1). Si estrae una pallina per scatola. Determinare

(1) la probabilità che la somma delle palline estratte sia almeno 7;
(2) la probabilità di aver estratto la biglia con il 4 sapendo che la somma delle palline estratte è almeno 7;
(3) la probabilità di aver estratto esattamente tre palline numerate con 1.

Es. 7.3. Stabilire quali delle seguenti funzioni rappresentano una densità discreta astratta.

$$d_1(k) = \begin{cases} 0,2 & \text{se } k = -1, 2, 4 \\ 0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_2(k) = \begin{cases} 0,2 & \text{se } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ -0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_3(k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{2^k} & \text{se } k \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Es. 7.4. Lanciamo un dado per 4 volte e denotiamo X_1, X_2, X_3, X_4 i risultati dei quattro lanci. Poniamo $Y = |\{i : X_i = 6\}|$, $Z = |X_1 - X_2|$, $W = \min\{|X_i - X_j| : i \neq j\}$. Determinare le densità di Y, Z e W.

Es. 7.5. Lanciamo una moneta ripetutamente e registriamo i risultati in una sequenza binaria $(a_1, a_2, \ldots)$ in cui inseriamo 0 quando otteniamo testa e 1 quando otteniamo croce. Poniamo $X = \min\{i : a_{i-1} = a_i\}$ e $Y = \min\{i : a_{i-1} = a_i = 1\}$. Ad esempio ottenendo una sequenza 1001011 abbiamo $X = 3$ e $Y = 7$.

(1) Determinare $P(a_i = a_{i-1})$ per ogni $i > 1$.
(2) Determinare la probabilità $P(X = k)$ per ogni k (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno lo stesso risultato siano i lanci $k-1$ e k)
(3) Determinare la probabilità $P(Y = k)$ (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno testa siano i lanci $k-1$ e k) per ogni $k \leq 8$;

(4) Dimostrare che $P(Y = k) = \frac{F_{k-3}}{2^k}$ per $k > 3$, dove F_k è il k-esimo numero di Fibonacci.

Es. 7.6. Organizzando una gita abbiamo a disposizione un pulmino da 28 posti e, confidando nel fatto che la probabilità che una persona a caso che ha comprato il biglietto non si presenti alla partenza è del 10%, decidiamo di vendere 30 biglietti. Qual è la probabilità di essere nei guai (cioè che qualcuno non trovi posto)?

Quanti biglietti avremmo potuto vendere ammettendo un rischio massimo del 50% di ritrovarci nei guai?

Es. 7.7. Supponiamo che la probabilità che nessun bambino nato a Cesena in un mese diventi un dottore di ricerca sia e^{-1}.

(1) Qual è la probabilità che almeno due bambini nati a Cesena in un mese diventino dottori di ricerca?
(2) Qual è la probabilità che in un anno nascano almeno 4 bambini che diventeranno dottori di ricerca?

Es. 7.8. Lanciamo due dadi, uno rosso e uno blu, per 4 volte e consideriamo le seguenti variabili

(1) $X=$ numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato maggiore del blu. Che densità ha la variabile X?
(2) $Y=$ numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato uguale al lancio precedente. Che densità ha Y?
(3) $Z=$ il primo lancio in cui la somma di tutti i risultati ottenuti fino a quel momento è almeno 6. Che densità ha Z?

8. Densità congiunta e indipendenza

Es. 8.1. Si considerino 2 variabili aleatorie indipendenti X ed Y. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta

$Y \backslash X$	0	2
0		$\frac{1}{5}$
-1		$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	

(1) Detto $t = d_{X,Y}(2,3)$ giustificare il fatto che t soddisfa la seguente equazione: $\left(\frac{1}{12}+t\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{15}+t\right)=t$
(2) Calcolare i possibili valori per t.
(3) Scelto uno di questi valori completare la tabella a doppia entrata della densità congiunta delle variabili X ed Y.

Es. 8.2. Un'urna contiene 4 palline numerate 1,2,3,4. Effettuiamo 6 estrazioni con rimpiazzo. Consideriamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 date da $X_i = 1$ se la pallina con il numero i è stata estratta almeno una volta e $X_i = 0$ altrimenti.
– Stabilire se X_1 e X_3 sono indipendenti.
– Determinare la densità congiunta delle variabili (X_1, X_2, X_3, X_4),

Es. 8.3. Due dadi, uno rosso e uno blu, vengono lanciati simultaneamente per 3 volte. Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

- X = Numero di volte in cui un dado ha dato come risultato 1 o 6;
- Y = Numero di lanci in cui il dado rosso ha dato risultato minore o uguale a 3;
- Z = Numero di lanci in cui la somma dei dadi ha dato 7.

(1) Determinare la densità delle variabili X, Y e Z;
(2) Stabilire se X ed Y sono indipendenti;
(3) Stabilire se Y e Z sono indipendenti;
(4) Stabilire se X e Z sono indipendenti.

9. Valore atteso e varianza

Es. 9.1. Avendo a disposizione 10 Euro vogliamo fare 6 scommesse da 5 euro ciascuna. Ad ogni puntata abbiamo probabilità 60% di perdere i 5 Euro puntati e 40% di vincere 5 Euro. Poniamo Y_i = numero di vittorie nelle prime i scommesse e X_i = soldi rimasti dopo le prime i scommesse (con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

a. Determinare la densità di X_1 e di X_2;
b. Determinare la densità delle Y_i;
c. Mostrare che $X_i = 10 + 5Y_i - 5(i - Y_i)$;
d. Determinare il valore atteso di X_6;
e. Determinare $P(X_4 > 0)$ e $P(X_6 > 0)$;
f. Determinare $P(X_4 > 0, X_6 > 0)$.

Es. 9.2. Sette coppie marito-moglie in viaggio di nozze vogliono partecipare ad una attività extra in cui però ci sono solo 10 posti disponibili. Vengono pertanto estratte a caso 10 persone che parteciperanno a questa attivitá. Sia X il numero di coppie di cui viene estratto almeno un rappresentante e Y il numero di donne estratte.

a. Qual é la probabilitá di estratte almeno un rappresentante di ogni coppia?
b. Determinare la densitá, valore atteso e varianza di X;
c. determinare la densitá di Y;
d. determinare $P(X = 6, Y = 6)$;
e. per ogni $k \geq 0$ determinare $P(Y = k|X = 7)$.

Es. 9.3. Lanciamo un dado 3 volte. Denotiamo con X_1, X_2, X_3 i risultati dei tre lanci e con $Y = |X_1 - X_2|$.

a. Stabilire se gli eventi $\{X_2 = 2\}$ e $\{Y = 0\}$ sono indipendenti.
b. Stabilire se le variabili Y e X_2 sono indipendenti.
c. Determinare $E[Y]$;
d. Determinare $P(Y = 0|X_1 + X_2 + X_3 = 7)$.

Es. 9.4. Siano $X \sim U(\{0, 1, 2, 3\})$ e $Y = U(\{1, 2, 3, 4\})$ due variabili aleatorie indipendenti e $Z = \max(X, Y)$.

a. Stabilire quali valori può assumere la variabile Z e determinarne la funzione di ripartizione.
b. determinare $E[Z]$;
c. determinare $Var(Z)$.

Es. 9.5. Siano $X \sim B(4, \frac{1}{3})$ ed $Y \sim H(4; 3, 3)$ due variabili indipendenti. Determinare

a. la funzione di ripartizione di X;
b. la funzione di ripartizione di Y;
c. densità, valore atteso e varianza di $\min(X, Y)$

Es. 9.6. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti aventi le seguenti densità

$$d_Y(k) = d_X(k) = \begin{cases} 0,1 & \text{se } k = -1, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } k = -2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(1) Determinare il valore atteso di XY;
(2) Determinare il valore atteso di X^2;
(3) Determinare il valore atteso e la varianza di $|X| + |Y|$.

10. Variabili aleatorie continue

Es. 10.1.
Sia X una variabile continua uniforme nell'intervallo $[0,2]$. Si consideri la variabile $Y = \frac{1}{X+1}$.

(1) Determinare $P(Y < \frac{1}{2})$.
(2) Determinare la funzione di ripartizione di Y;
(3) Determinare la densità di Y.

Es. 10.2. Ubaldo prende il tram tutte le mattine per andare al lavoro. Arriva alla fermata in un orario casuale e sappiamo che passa un autobus ogni dieci minuti. Siano T_i, $i = 1, \ldots, 30$ i tempi di attesa in 30 giorni di lavoro.

(1) Determinare la densità delle T_i;
(2) Qual è la probabilità che aspetti sempre (in questi 30 giorni) più di 5 minuti?

Es. 10.3. Un impianto d'allarme dà falsi allarmi in intervalli di tempo di densità esponenziale di parametro 1 (se espressi in anni).

(1) Calcolare la probabilità che nel prossimo anno ci sia qualche falso allarme.
(2) Sapendo che in un anno ci sono stati 2 falsi allarmi, qual è la probabilità che nell'anno successivo ci sia almeno un falso allarme?
(3) Due case montano questo impianto d'allarme. Qual è la probabilità che almeno 1 dia un falso allarme nei prossimi 6 mesi? E tutti e 2?

Es. 10.4. Sia X una variabile aleatoria continua la cui funzione di ripartizione è

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0; \\ \frac{2t}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{t+1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2; \\ 1 & \text{se } t > 2; \end{cases}$$

(1) Determinare la densità di X;
(2) determinare media e varianza di X.

Es. 10.5. Sia

$$f(s) = \begin{cases} as(s-20) & \text{se } 0 \leq s \leq 20 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

una funzione dipendente da un parametro reale a.

a. Mostrare che esiste un unico valore a per cui $f(s)$ è la densità di una variabile aleatoria continua X.
b. Determinare il valore atteso $E[X]$.
c. Stabilire se $P(X > 5 | X > 4) = P(X > 1)$.

Es. 10.6. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } |s| > 1 \\ 1 + s & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1 - s & \text{se } 0 < s < 1 \end{cases}$$

(1) verificare che f è una densità continua;
(2) detta X una variabile aleatoria continua di densità continua f determinare la funzione di ripartizione di X;
(3) determinare $E[X^2]$, $E[X^4]$ e $Var(X^2)$.

11. Variabili normali e teorema del limite centrale

Es. 11.1. [Vedi esercizio 10.2] Ubaldo prende il tram tutte le mattine per andare al lavoro. Arriva alla fermata in un orario casuale e sappiamo che passa un autobus ogni dieci minuti. Siano T_i, $i = 1, \ldots, 30$ i tempi di attesa in 30 giorni di lavoro. Qual è la probabilità che aspetti mediamente più di 6 minuti?

Es. 11.2. [Vedi esercizio 10.4] Siano date 44 variabili indipendenti $X_1, \ldots, X_{44}$, tutte con la stessa funzione di ripartizione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descritta come segue

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0; \\ \frac{2t}{3} & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ \frac{t+1}{3} & \text{se } 1 < t \leq 2; \\ 1 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{44} > 40)$.

Es. 11.3. [Vedi esercizio 10.6] Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } |s| > 1 \\ 1 + s & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1 - s & \text{se } 0 < s < 1 \end{cases}$$

Siano $X_1, \ldots, X_{180}$ variabili aleatorie continue indipendenti, tutte con densità continua f. Calcolare $P(X_1^2 + \cdots + X_{180}^2 > 25)$.

Es. 11.4. Sia

$$p(k) = \begin{cases} 2^{-k} & k = 1, 2, \ldots, 5 \\ 2^{-5} & k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(1) Verificare che $p(k)$ è la densità di una variabile aleatoria discreta X.
(2) Determinare media e varianza di X.
(3) Date 32 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \ldots, X_{32}$ tutte aventi densità $p(k)$ determinare

$$P(X_1 + \cdots + X_{32}) \geq 65.$$

Es. 11.5. Giovanni è un esperto di tiro con l'arco. La variabile $X =$"distanza dal centro del bersaglio di un suo tiro (espressa in decimetri)" è data dal valore assoluto di una variabile aleatoria normale standard, cioè $X = |\zeta_0|$, dove $\zeta_0 \sim N(0, 1)$.

(1) Determinare la probabilità che un suo tiro termini a meno di 5 centimetri di distanza dal centro del bersaglio.
(2) Determinare la funzione di ripartizione $F_X(t)$ di X (espressa in termini di $\Phi(t)$, la funzione di ripartizione di ζ_0)
(3) Determinare la probabilità che il migliore di 5 suoi lanci termini a meno di 1 centimetro di distanza dal centro del bersaglio.

(4) Supponendo che il bersaglio abbia un raggio di 30 centimetri, determinare la probabilità che almeno 1 dei suoi 5 lanci non centri il bersaglio.

Es. 11.6. Consideriamo 100 variabili $X_1, \dots, X_{100}$ di densità uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$ e indipendenti tra loro.

(1) Determinare la densità della variabile $|X_1|$.
(2) Determinare $P(\frac{|X_1|+\cdots+|X_{100}|}{100} > 0.01)$.
(3) Determinare $P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}}{100} > 0.01)$.
(4) Determinare $P(\frac{X_1^2+\cdots+X_{100}^2}{100} > 0.01)$.
(5) Determinare $P(\frac{(X_1+\cdots+X_{100})^2}{100} > 0.01)$.

Es. 11.7. Una miscela radioattiva contiene 10^6 particelle ognuna delle quali decade in un tempo aleatorio di densità esponenziale di media 1 anno.

(1) Determinare la probabilità che una data particella decada in meno di 2 anni.
(2) Sia X la variabile "numero di particelle che decadono in 5 anni". Che densità ha X?
(3) Determinare la probabilità che almeno il 99,3% di queste particelle decada in 5 anni (cioè $P(X > 0,993 \cdot 10^6)$).

Es. 11.8. Consideriamo 50 variabili $X_1, \dots, X_{50}$ di densità esponenziale di parametro 2 e indipendenti tra loro.

(1) Determinare la densità, media e varianza della variabile $X_1 - 1$.
(2) Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{50} > 45)$.
(3) Determinare $P(X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \cdots + X_{49} - X_{50} > 0.1)$.

Es. 11.9. Siano $X \sim N(5, 25)$ e $Y \sim U(\{4, 5, 6\})$ indipendenti.

(1) Determinare $P(X > 6, Y > 5)$;
(2) Determinare $P(X + Y < 7 | Y \leq 5)$;
(3) determinare $P(X + Y < 8)$;
(4) determinare la funzione di ripartizione di $X + Y$ (in funzione della funzione di ripartizione di una variabile normale standard);

12. Soluzioni: combinatoria intuitiva

Es. 1.1 In questo esercizio l'ordine con cui scelgo i miei due amici non importante. Se li regalo a Luca e Aldo oppure a Aldo e Luca chiaramente la stessa cosa. Possiamo rispondere in questo modo: chiamiamo 1,2,3,...,10 i miei amici. Conto quante sono le scelte in cui 1 riceve il biglietto: sono 9. Conto ora quelle in cui 1 non riceve il biglietto e procedo similmente a prima: inizio contando quelle in cui 2 riceve il biglietto (e 1 no): sono 8 e poi conto quelle in cui n 1 , n 2 ricevono il biglietto. Proseguendo in questo modo le possibili scelte sono: 9+8+7+6+5+4+3+2=45. 2

Es. 1.2 Chiamiamo A,B,C le tre squadre. Abbiamo una possibile classifica in cui le 3 squadre finiscono a parimerito. Contiamo le classifiche in cui due squadre finiscono a parimerito e la terza no. Abbiamo 3 possibili scelte per le due squadre a parimerito: AB,AC,BC. Contiamo quelle in cui AB sono a parimerito. Abbiamo AB prime e C terza, oppure C prima e AB seconde, quindi due possibilità. In tutto abbiamo quindi 6 classifiche con due squadre a parimerito. Infine le classifiche in cui non ci sono parimerito sono 6. In tutto abbiamo quindi 13 classifiche.

Es. 1.3 Bisogna contare con ordine tutte le possibilitá. Se i dadi danno risultati distinti i valori possibili sono 345, 346,356,456. Se ho due valori uguali questi devono essere almeno 4: abbiamo quindi 445,446,553,554,556,663,664,665, Se ho tre valori uguali ho solo 555 e 666. In tutto 14 possibilità. Si osservi come in questo caso l'ordine non sia importante.

Es. 1.4 La funzione che associa ad ogni sottoinsieme il suo complementare una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi di cardinalità pari e quelli di cardinalità dispari.

Es. 1.5 Ogni scelta la possiamo pensare come una permutazione dei numeri da 1 a 4 in cui non ci sono numeri che rimangono al loro posto: ad esempio 2341 sta ad indicare che i mariti 1,2,3,4 si accompagnano alle mogli 2,3,4,1. Per simmetria possiamo supporre che il marito 1 vada con la moglie 2 e poi moltiplicheremo il risultato per tre per considerare le altre possibili scelte (moglie 3 e moglie 4) Abbiamo 2341, 2143, 2413 e quindi in tutti 9 possibili scelte.

Es. 1.6 Ogni elemento puó comparire 0,2,4,6 volte e abbiamo quindi diversi casi da affrontare.

(1) C'é un numero che compare 6 volte e tutti gli altri 0: queste sono 4, le possibili scelte del numero;
(2) C'é un numero che compare 4 volte e uno che compare 2 volte: scegliamo il numero che compare 4 volte (4 possibilitá), scegliamo il numero che compare 2 volte (3 possibilitá), infine scegliamo i 4 posti dove inserire il primo numero scelto ($\binom{6}{4} = 15$ possibilitá): in tutto abbiamo quindi $4 \cdot 3 \cdot 15 = 180$ scelte.
(3) Ci sono 3 numeri, ciascuno dei quali compare 2 volte: scegliamo i 3 numeri ($\binom{4}{3} = 4$ scelte) e poi scegliamo la combinazione di tipo $(2, 2, 2)$ per posizionarli ($\binom{6}{2\,2\,2} = 90$ scelte): abbiamo quindi 360 possibilitá

Complessivamente abbiamo $4 + 180 + 360 = 544$ scelte.

Se tutti i numeri devono comparire un numero dispari di volte l'unica possibilitá é che uno compaia 3 volte e gli altri tre una volta. Il numero da inserire r volte lo possiamo scegliere in 4 modi. Poi abbiamo $\binom{6}{3\,1\,1\,1} = 120$ modi di posizionare i numeri. In tutti abbiamo quindi 480 modi.

13. Soluzioni: combinatoria di base

Es. 2.1 Siccome 0 non fa parte di questo insieme possiamo considerare i seguenti insiemi: A=multipli di 2 tra 1 e 700, B=multipli di 5 tra 1 e 700 e C=multipli di 7 tra 1 e 700 e l'insieme di cui dobbiamo calcolare la cardinalità è il complementare dell'unione tra A,B e C nell'insieme dei numeri tra 1 e 700. Abbiamo quindi

$$|A| = 350,\ |B| = 140,\ |C| = 100,$$

$$|A \cap B| = 70,\ |A \cap C| = 50,\ |B \cap C| = 20,\ |A \cap B \cap C| = 10$$

Per il principio di inclusione esclusione abbiamo quindi

$$|(A \cup B \cup C)^C| = 700 - 350 - 140 - 100 + 70 + 50 + 20 - 10 = 240.$$

Es. 2.2 Contiamo quelle in cui ci sono zero o una cifra minore di 5. Quelle senza cifre minori di 5 sono le disposizioni dil unghezza 5 in $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ e sono quindi

$$(5)_5 = 120.$$

Quelle con esattamente una cifra le contiamo con scelte successive che determinano in modo univoco la disposizione. Scelgo prima l'unica cifra minore di 5 da inserire: 4 scelte. Scelgo la posizione dove inserire questa cifra: 5 scelte. Scelgo la disposizione di lunghezza 4 in $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ da inserire nei rimanenti quattro posti: $(5)_4$ scelte. Le disposizioni in cui compare esattamente una cifra minore di 5 sono quindi $4 \cdot 5 \cdot (5)_4 = 2400$. In tutto le disposizioni con almeno due cifre minori di 5 sono quindi

$$(9)_5 - 120 - 2400 = 15120 - 120 - 2400 = 12600.$$

Es. 2.3 Procediamo anche in questo caso per scelte successive: scegliamo le tre cifre pari: $\binom{4}{3} = 4$ scelte; scegliamo le cifre dispari: $\binom{5}{3} = 10$ scelte; scelgo come permutare fra di loro i 6 numeri selezionati nei primi due punti; 6! scelte. In tutto ho

$$4 \cdot 10 \cdot 6! = 28800.$$

Es. 2.4 le sequenze di lunghezza 4 sono $6^4 = 1296$. Possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra le sequenze con somma pari e quelle con somma dispari. Basta infatti sostituire l'ultimo coefficiente seguendo questa regola: al posto di 1 metto 2 e viceversa, al posto di 3 metto 4 e viceversa, al posto di 6 metto 6 e viceversa. Ne segue che le sequenze lunghe 4 con somma pari sono esattamente la metá, cioé $1296/2 = 648$. In alternativa si puó pensare ad un prodotto condizionato: 6 scelte per ciascuno dei primi 3 coefficienti. L'ultimo coefficiente puó essere scelta in 3 modi sia se la somma dei precedenti é pari (e in questo caso le scelte possibili sono 2,4,6), sia se la somma dei precedenti é dispari (e in questo caso le scelte possibili sono 1,3,5). Analogamente si puó procedere se si vuole che la somma dei coefficienti sia un multiplo di 3: l'ultima coordinata puó sempre essere scelta in 2 modi, quali che siano le prime tre coordinate.

Es. 2.5 Un sottoinsieme che contiene almeno uno tra 5 e 6 lo possiamo ottenere in questo modo: scegliamo un qualsiasi sottoinsieme dei numeri da 1 a 4 (2^4 possibili scelte) e poi aggiungiamo solo il 5, oppure solo il 6 oppure entrambi: abbiamo quindi in tutto

$2^4 \cdot 3 = 48$. Oppure utilizzando il principio di inclusione esclusione: sia A l'insieme dei sottoinsiemi che contengono 5 e B l'insieme sei sottoinsiemi che contengono 6. Abbiamo $|A| = |B| = 2^5$ e $|A \cap B| = 2^4$ da cui

$$|A \cup B| = 2^5 + 2^5 - 2^4 = 48.$$

Oppure, basta considerare il numero totale di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ meno il numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4\}$: abbiamo quindi $2^6 - 2^4 = 48$.

Es. 2.6 Per ogni coppia $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$ abbiamo 3 possibilità: scegliamo solo il primo, scegliamo solo il secondo, non scegliamo nessuno dei 2. I sottoinsiemi cercati sono quindi $3^5 = 243$.

In alternativa possiamo procedere in questo modo: abbiamo cinque coppie di numeri e possiamo selezionare solo un numero per ogni coppia. Procediamo quindi in questo modo: per ogni $k = 0, \ldots, 5$ selezioniamo un sottoinsieme di cardinalitá k delle 5 coppie: $\binom{5}{k}$ scelte. Per ogni coppia scelta selezioniamo solo uno dei due elementi corrispondenti: ho 2^k scelte. Complessivamente abbiamo quindi

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^k = 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243.$$

Es.2.7 Abbiamo un prodotto condizionato di tipo $(5, 1, 5)$ e quindi abbiamo 25 soluzioni. Infatti a é un numero in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$: 5 scelte. Scelto a abbiamo $b = 4 - a$ e quindi abbiamo una sola scelta. Infine, scelti a e b abbiamo $c \in \{a-2, a-1, a, a+1, a+2\}$.

Es. 2.8 In questo caso non abbiamo un prodotto condizionato perché il numero di scelte per c dipende dalle scelte precedenti. Dividiamo quindi il problema in due casi, caso a pari e caso a dispari. Se a é pari abbiamo $a \in \{2, 4\}$ quindi due scelte per a, una scelta per b e $c \in \{\frac{a}{2} - 1, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} + 1\}$ quindi tre scelte per c: abbiamo quindi 6 soluzioni. Se A é dispari abbiamo $a \in \{1, 3, 5\}$ quindi tre scelte per a, una scelta per b e $c \in \{\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}\}$, quindi due scelte per c: in tutto abbiamo quindi 6 soluzioni.

Complessivamente ci sono 12 soluzioni.

Es. 2.9 Le sequenze strettamente crescenti di lunghezza 5 sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi dicardinalità 5: sono quindi $\binom{8}{5} = 56$.

Per determinare le sequenze debolmente crescenti possiamo procedere nel seguente modo: sia $(a_1, \ldots, a_5)$ con $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_5 \leq 8$. Allora la sequenza $(a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3, a_4 + 4, a_5 + 5)$ è una sequenza strettamente crescente di numeri in $\{2, 3, \ldots, 13\}$. Questa è una corrispondenza biunivoca e quindi concludiamo che il numero di sequenze debolmente crescenti è $\binom{12}{5} = 792$.

In alternativa si può procedere nel seguente modo. Per ogni $k = 0, \ldots, 4$ scelgo un sottoinsieme di $\{1, 2, 3, 4\}$ dato dai posti i in cui $a_i = a_{i+1}$. Ad esempio se scelgo il sottoinsieme $\{2, 4\}$ vorrò $a_2 = a_3$ e $a_4 = a_5$. Una volta effettuata questa scelta dovrò scegliere i $5 - k$ numeri distinti da inserire in ordine crescente. Abbiamo quindi

$$\sum_{k=0} 4\binom{4}{k}\binom{8}{5-k} = 792.$$

Es. 2.10 Nel primo caso abbiamo gli anagrammi di tipo $(4,3,2,2)$ che sono

$$\binom{11}{4\,3\,2\,2} = 69300.$$

Per la seconda parte dobbiamo prima scegliere i posti dove inserire le 4 A: questi li possiamo scegliere in $\binom{11-(4-1)}{4} = 70$ modi: come visto a lezione questo è il numero di sequenze binarie lunghe 11, con quattro 1 in cui non cisono due 1 consecutivi. Le altre 7 lettere le possiamo anagrammare in $\binom{7}{3\,2\,2} = 210$ modi per cui in tutto abbiamo 14700 anagrammi.

14. Soluzioni: combinatoria avanzata

Es. 3.1 Chiamiamo A, B, C, D, E le seguenti mani A: cinque valori distinti ordinati, B: 5 carte dello stesso seme, C una coppia e un tris, D un poker e E 5 carte ordinate dello stesso seme. Dobbiamo calcolare $|A \cup B \cup C \cup D \cup E|$. Osservando che $E = A \cap B$ abbiamo

$$|A \cup B \cup C \cup D \cup E| = |A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |E|$$

per il principio di inclusione-esclusione. Abbiamo quindi

A: scegliamo il valore più piccolo in 4 modi (7,8,9,10) e una volta effettuata questa scelta abbiamo 4^5 modi di scegliere i semi delle cinque carte: $|A| = 4^6 = 4096$.

B: abbiamo $|B| = \binom{8}{5} = 56$.

C: scelgo il valore del tris (8 modi), poi scelgo il valore della coppia (7 modi), poi i semi delle 3 carte del tris (4 modi) e infine i semi delle due carte della coppia (6 modi). In tutto ho $|C| = 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 = 1344$.

D: scelgo il valore del poker (8 scelte) e poi scelgo la carte rimanente (28 scelte): $|D| = 224$.

E: scelgo il valore minimo (4 scelte), scelgo il seme delle carte: (4 scelte): $|E| = 16$.

Abbiamo quindi in tutto:

$$|A| + |B| + |C| + |D| - |E| = 4096 + 56 + 1344 + 224 - 16 = 6004$$

mani con un punteggio pari o superiore alla scala.

Es. 3.2 In questo esercizio dobbiamo semplicemente scegliere 8 palline pari ($\binom{10}{8} = 45$ scelte) e 3 palline dispari ($\binom{10}{3} = 120$ scelte). In tutto ho $45 \cdot 120 = 5400$ scelte.

Es. 3.3 Caso indistinguibili.

Possiamo avere le seguenti possibilità

(a) 6 di un colore, 1 di un altro, 1 di un altro;
(b) 5, 2, 1;
(c) 4, 2, 2;
(d) 4, 3, 1;
(e) 3, 3, 2.

Nei casi (a), (c), (e) possiamo scegliere i colori in 30 modi. Nei casi (b) e (d) possiamo scegliere i colori in 60 modi. Abbiamo in tutto quindi 210 modi.

Caso distinguibili.

Contiamo prima in quanti modi possiamo scegliere 8 palline in modo che siano di colore rosso, giallo e blu, almeno una di ciascun colore. Poniamo $A =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore rosso o giallo;

Poniamo $B =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore rosso o blu;

Poniamo $C =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore blu o giallo;

E poniamo $U =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore rosso, blu o giallo;

Dobbiamo calcolare $|U| - |A \cup B \cup C|$. Osserviamo che $|U| = \binom{18}{8} = 43758$. Per calcolare $|A \cup B \cup C|$ osserviamo che questi tre insiemi sono disgiunti e che abbiamo

$|A| = |B| = |C| = \binom{12}{8} = 495$. Abbiamo quindi

$$|U| - |A \cup B \cup C| = 43758 - 3 \cdot 495 = 42273.$$

Le scelte possibili dei tre colori sono $\binom{5}{3} = 10$ per cui in tutto ho 422730 possibilitá.

Es. 3.4

Es. 3.5 Contiamo quante sono le permutazioni in cui esattamente tre numeri rimangono al loro posto: scelti questi tre i due rimanenti devono necessariamente essere scambiati tra di loro: abbiamo quindi $\binom{5}{3} = 10$ permutazioni di questo tipo. Permutazioni in cui abbiamo esattamente quattro numeri che rimangono al loro posto non esistono. E abbiamo una sola permutazione in cui tutti i numeri rimangono al loro posto. In tutto tali permutazioni sono quindi 11.

Es. 3.6 Il numero di lettere fuori posto puó essere 0, 2, 3, 4. Se le lettere fuori posto sono 0, ho chiaramente una sola parola. Se le lettere fuori posto sono 2 queste devono essere necessariamente distinte: sono quindi $4 \cdot 3 + 4 + 3 = 19$.

Se le lettere fuori posto sono 3 queste devono essere necessariamente distinte: sono quindi $4 \cdot 3 = 12$: queste tre lettere possono essere scombussolate in 2 modi diversi e quindi ho 24 anagrammi.

Se le lettere fuori posto sono 4 devono essere due L, una A e una N, oppure due A, una L e una N. Abbiamo quindi $6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 30$ scelte. Effettuata questa scelta abbiamo due modi di scombussolare le 4 lettere e quindi abbiamo 60 anagrammi di questo tipo. In tutto abbiamo $1 + 19 + 24 + 60 = 104$ anagrammi di LALLANLA in cui almeno 4 lettere rimangono al loro posto.

Es. 3.7 Un insieme di 10 palline in cui compaiono tutti i valori da 1 a 8 é composto da due valori che compaiono sia in rosso che in blu e tutti gli altri valori che compaiono una volta sola. Procediamo quindi scegliendo i due valori sia in rosso che in blu ($\binom{8}{2} = 28$ scelte) e poi il colore per ogni altro valore $2^6 = 64$ scelte. Abbiamo in tutto quindi $28 \cdot 64 = 1792$ possibilitá.

I sottoinsiemi in cui compaiono tutti i valori li possiamo costruire cosí: per ogni valore scegliamo se prendere la carta rossa, la blu, o tutte e due: abbiamo in tutto 3^8 possibili scelte. Se vogliamo tutti i valori tranne uno scegliamo questo valore in 8 modi e poi per ciascuno degli altri abbiamo 3 scelte come sopra e quindi $8 \cdot 3^7$ possibilitá.

In tutto abbiamo $3^8 + 8 \cdot 3^7 = 11 \cdot 3^7 = 24057$.

Es. 3.8 (a) Questo è dato dal numero di funzioni suriettive da $\{1, 2, \ldots, 12\}$ a $\{1, 2, \ldots, 6\}$ (o equivalentemente le sequenze 6-piene di lunghezza 12). Sono quindi

$$\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^{12} = 6^{12} - 6 \cdot 5^{12} + 15 \cdot 4^{12} - 20 \cdot 3^{12} + 15 \cdot 2^{12} - 6$$

(b) Queste sono proprio le combinazioni di tipo $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$, e sono quindi

$$\binom{12}{2\,2\,2\,2\,2\,2} = \frac{479001600}{2^6} = 7484400.$$

(c) In questo caso abbiamo

$$4 \cdot \binom{12}{4\,2\,2\,2\,1\,1} + 2 \cdot \binom{12}{2\,2\,2\,2\,3\,1} + \binom{4}{2}\binom{12}{3\,3\,2\,2\,1\,1} + \binom{12}{2\,2\,2\,2\,2\,2} + 4 \cdot 2 \cdot \binom{12}{3\,2\,2\,2\,2\,1}$$

15. Soluzioni: partizioni

Es. 4.1 $\{\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8,9,10\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5,6,7,8,9,10\}\}$, $\{\{1,2,4,5,6,7,8,9,10\},\{3\}\}$, $\{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$, $\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8,9,10\}\}$.

Es. 4.2 Abbiamo $B_0 = B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$ giá calcolati in aula. Per calcolare B_4 usiamo la formula ricorsiva

$$B_4 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 5 + 6 + 3 + 1 = 15.$$

Es. 4.3 Proseguendo dall'esercizio precedente abbiamo

$$B_5 = B_4 + 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 15 + 20 + 12 + 4 + 1 = 52.$$

In entrambi i casi potremmo anche utilizzare il triangolo di Bell che riportiamo in figura e che abbiamo visto a lezione

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 2\\
2 \quad 3 \quad 5\\
5 \quad 7 \quad 10 \quad 15\\
15 \quad 20 \quad 27 \quad 37 \quad 52\\
52 \quad 67 \quad 87 \quad 114 \quad 151 \quad 203\\
203 \quad 255 \quad 322 \quad 409 \quad 523 \quad 674 \quad 877\\
877 \quad 1080 \quad 1335 \quad 1657 \quad 2066 \quad 2589 \quad 3263 \quad 4140
\end{array}$$

Es. 4.4 Riportiamo anche il "triangolo di Stirling" costruito utilizzando la formula ricorsiva

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

e che sarà utile nei prossimi esercizi.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 15 \quad 25 \quad 10 \quad 1\\
1 \quad 31 \quad 90 \quad 65 \quad 15 \quad 1\\
1 \quad 63 \quad 301 \quad 350\\
1 \quad 127 \quad 966 \quad 1701\\
1 \quad 255 \quad 3025 \quad 7770\\
1 \quad 511 \quad 9330 \quad 34105
\end{array}$$

Es. 4.5 Prendiamo come insieme universo U tutte le partizioni di $\{1,2,\ldots,10\}$ in 4 blocchi per cui $|U| = S_{10,4} = 34105$Chiamiamo A_2 le partizioni in quattro blocchi che hanno un blocco formato dal solo numero 2 e similmente definiamo A_4, A_6, A_8, A_{10}. L'insieme considerato é il complementare di $A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8 \cup A_{10}$ Abbiamo $|A_2| = S_{9,3} = 3025$ e similmente gli altri (un blocco é formato dal solo 2 e gli altri numeri devono essere partizionati in 3 blocchi.
Abbiamo $|A_2 \cap A_4| = S_{8,2} = 127$.

Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6| = 1$ Usando il principio di inclusione esclusione abbiamo quindi

$$|(A_2 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{10})^C| = 34105 - 5 \cdots 3025 + 10 \cdot 127 - 10 \cdot 1 = 20240.$$

Es. 4.6 L'unico modo per partizionare n elementi in $n-1$ blocchi e quello di fare un blocco da 2 e tutti gli altri da 1. Questo corrisponde quindi a scegliere i due elementi nel blocco da 2 tra gli n disponibili e quindi abbiamo proprio $\binom{n}{2}$.

Es. 4.7 Per formare due blocchi possiamo procedere come segue: consideriamo il blocco che contiene n: oltre ad n puó contenere un qualunque sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ tranne tutto l'insieme perché in questo caso l'altro blocco rimarrebbe vuoto e questo non é accettabile. Abbiamo quindi $2^{n-1} - 1$ scelte.

Es. 4.8 Se ho una partizione di questo tipo in k blocchi eliminando i numeri pari ottengo una partizione dei dispari in k blocchi e viceversa. Possiamo quindi ottenere una partizione di questo tipo considerando una partizione dei numeri pari e una dei numeri dispari nello stesso numero di blocchi, per poi combinarle in tutti i modi possibili. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} S_{5,1}^2 \cdot 1! + & S_{5,2}^2 \cdot 2! + S_{5,3}^2 \cdot 3! + S_{5,4}^2 \cdot 4! + S_{5,5}^2 \cdot 5! \\ &= 1 + 15^2 \cdot 2 + 25^2 \cdot 6 + 10^2 \cdot 24 + 1^2 \cdot 120 = 6721. \end{aligned}$$

Es. 4.9 Ogni partizione di questo tipo si ottiene partizionando i pari e separatamente i dispari per cui otteniamo esattamente

$$B_5^2 = 52^2 = 2704$$

Es. 4.10 Questo simile al precedente esercizio (4): qui chiamiamo A_2 le partizioni che hanno un blocco formato dal solo numero 2 e similmente definiamo A_4, A_6, A_8, A_{10}. L'insieme considerato è $A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8 \cup A_{10}$ Abbiamo $|A_2| = B_9 = 21147$ e similmente gli altri (un blocco é formato dal solo 2 e gli altri numeri devono essere partizionati.
Abbiamo $|A_2 \cap A_4| = B_8 = 4140$.
Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6| = B_7 = 877$
Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_8| = B_6 = 203$
Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_8 \cap A_{10}| = B_5 = 52$. Usando il principio di inclusione esclusione abbiamo quindi per il principaio di inclusione-esclusione

$$|(A_2 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{10})| = 5 \cdot 21147 - 10 \cdot 4140 + 10 \cdot 877 - 5 \cdot 203 + 1 \cdot 52 = 72142.$$

Es. 4.11 Questo è semplicemente $S_{10,3} = 9330$.

Es. 4.12 In questo esercizio contiamo queste partizioni dividendole in due casi
1 caso: n sta in un blocco con esattamente 2 elementi. In questo caso abbiamo $n-1$ modi di scegliere il "compagno" di n e poi gli altri $n-2$ elementi li dobbiamo partizionare in $k-1$ blocchi con la stessa proprietà: abbiamo in questo caso $(n-1)R_{n-2,k-1}$ possibili scelte.
2 caso: n sta in un blocco con almeno 3 elementi. In questo caso possiamo provedere

scegliendo prima un partizione di questo tipo su $n-1$ elementi e poi scegliere uno dei k blocchi per aggiungergli n. Totale $R_{n-1,k}k$.

16. Soluzioni: statistica descrittiva

Es. 5.1 (a) Le velocità in grammi al minuto si ottengono dividendo 200 per i tempi registrati e quindi: 40, 20, 50, 16.66, 10, 20, 50

(b) Il modo più semplice per ottenere la velocità media è di fare la quantità totale di pappa fratto il tempo totale impiegato: $\frac{1400}{5+10+4+12+20+10+4} = 21.53\, g/min.$ In alternativa si poteva fare la media armonica delle velocità ottendo equivalentemente

$$\Big(\frac{1}{7}\big(\frac{1}{40}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}+\frac{1}{16.66}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}\big)\Big)^{-1} = 21.53\, g/min.$$

Es. 5.2 Le modalità sono i valori da 0 a 8 con frequenze rispettive 1, 7, 5, 5, 3, 1, 0, 2, 1. La media é 2.84, i quartili sono 1,2,4 la moda é 2, la varianza é 4.21 e il range é 8.

Es. 5.3 La media é 2.85. Usando la definizione abbiamo che la varianza σ_x^2 è

$$\frac{23(0-2.85)^2+64(1-2.85)^2+131(2-2.85)^2+123(3-2.85)^2+107(4-2.85)^2+48(5-2.85)^2+16(6-2.85)^2)}{512} = 2.00.$$

Calcolando invece la media dei quadrati abbiamo

$$\overline{x^2} = \frac{64+131\cdot 4+123\cdot 9+107\cdot 16+48\cdot 25+16\cdot 36}{512} = 10.12$$

e quindi

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 10.12 - 8.12 = 2.00.$$

Es. 5.4 Siccome dobbiamo stimare il peso rispetto all'altezza scegliamo x =altezza e y=peso. Abbiamo

- $\bar{x} = 180 + 5 \cdot \frac{-1-1+0+2-2+3-2}{7} = 179,29$ cm.
- $\bar{y} = 80 + 5 \cdot \frac{0+2-1+1-2+4+0}{7} = 82,86$ kg.
- $\overline{x^2} = 32225$ cm^2.
- $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 80,1$ cm^2.
- $\overline{y^2} = 6950$ kg^2
- $\overline{xy} = 14914$ cm·kg.
- $\sigma_{x,y} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = 58,0306$ cm·kg.
- $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 84,22$

L'equazione della retta ai minimi quadrati $y = ax + b$ è quindi data da

$$a = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} = 0,72$$

e

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = -47,03$$

e quindi abbiamo l'equazione

$$y = 0,72x - 47,03.$$

Per un'altezza di 177 centimetri possiamo quindi stimare un peso di

$$0,72 \cdot 177 - 47,03 = 80,41$$

kilogrammi.

Invertendo i ruoli di x ed y otteniamo la retta ai minimi quadrati $x = a'y + b'$ con

$$a' = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_y^2} = 0,69$$

e $b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 179,29 - 0,69 \cdot 82.86 = 122,12$ e abbiamo quindi l'equazione

$$x = 0,69x + 122,12$$

e l'altezza di un adulto che pesa 80 chili viene stimata da

$$0,69 \cdot 80 + 122,12 = 177,32\,cm.$$

Es. 5.5 Consideriamo i fattori moltiplicativi corrispondenti alle variazioni percentuali

Anno	Variazione	Fattore
2020	-8.9%	0.911
2019	+0.3%	1.003
2018	+0.9%	1.009
2017	+1.7%	1.017
2016	+1.3%	1.013

Calcoliamo quindi la media geometrica dei fattori moltiplicativi ottenendo

$$(0.911 \cdot 1.003 \cdot 1.009 \cdot 1.017 \cdot 1.013)^{1/5} = (0,9498)^{1/5} = 0.990$$

La variazione percentuale media è stata quindi del -1.0%

17. Soluzioni: probabilitá di base e uniforme

Es. 6.1 Basta considerare come insieme di eventi $\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{a,b\}$ e probabilità data da $P(\{1,2\}) = 1/2$ e $P(\{a,b\}) = 1/2$. Questo non è uno spazio di probabilità uniforme perché non tutti i risultati sono eventi. Questo spazio di probabilità potrebbe modellizzare il seguente fenomeno aleatorio. Abbiamo due urne, una contenente palline numerate 1 o 2 , ma non sappiamo quante di ciascun tipo, e una con palline etichettate a o b, ma non sappiamo quante di caiscun tipo ed estraiamo una pallina a caso da un'urna scelta a caso. Non possiamo dire che il risultato 1 sia un evento perché non possiamo calcolarne la probabilità.

Es. 6.2 In questo caso abbiamo 5 possibili famiglie di eventi: esse sono

- $\Omega, \emptyset$
- $\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2,3\}$
- $\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1,3\}$
- $\Omega, \emptyset, \{3\}, \{1,2\}$
- $\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

Es. 6.3 Consideriamo in questo esempio lo spazio Ω dato da tutte le combinazioni (sottoinsiemi) di lunghezza 8 in un insieme di cardinalità 30 con probabilità uniforme. Abbiamo $|\Omega| = \binom{30}{8} = 5852925$. La cardinalità dell'evento A costituito da tutte le combinazioni di 8 palline in cui compaiono esattamente 3 colori diversi era stata calcolata nell'Esercizio 3.3 $|A| = 422730$. Abbiamo quindi

$$P(A) = \frac{422730}{5852925} = 0,0722$$

La probabilità richiesta è quindi del 7,22%.

Es. 6.4 In questo caso consideriamo come Ω l'insieme di tutti i possibili anagrammi della parola LALLANLA. Come abbiamo visto nell'esercizio 3.6

$$|\Omega| = \binom{8}{4\,3\,1} = 280$$

Dobbiamo ora determinare la cardinalità dell'evento $E = \{$ anagrammi con le 3 A in posizioni consecutive $\}$. Per calcolare la cardinalità di E procediamo per scelte successive: determiniamo prima le posizioni in cui inserire le 3 A: abbiamo 6 scelte. Dopodiché dobbiamo decidere dove scrivere la N: 5 scelte. Abbiamo quindi $|E| = 30$ e di conseguenza abbiamo

$$P(E) = \frac{30}{280} = \frac{3}{28} = 10.7\,\%,$$

Es. 6.5 L'insieme Ω in questo caso è dato da tutte le sequenze di lunghezza 10 con coefficienti in $\{1,2,3,4,5,6\}$ e quindi $|\Omega| = 6^{10} = 60.466.176$. Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento E costituito da tutte le sequenze in Ω che contengono tutti i numeri da 1 a 6. La cardinalità di E può essere calcolata con la formula per le funzioni suriettive

$$
\begin{aligned}
|E| &= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^{10} \\
&= 6^{10} - 6 \cdot 5^{10} + 15 \cdot 4^{10} - 20 \cdot 3^{10} + 15 \cdot 2^{10} - 6 \\
&= 16.435.440
\end{aligned}
$$

e quindi

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = 0.272$$

Es. 6.6 Qui Ω è dato da tutte le partizioni di un insieme di 10 elementi in 3 blocchi e quindi

$$|\Omega| = S_{10,3} = 9330$$

(che si può ottenere dal triangolo di Stirling). I risultati favorevoli si possono pensare come la partizioni di un insieme di 9 elementi in 3 blocchi: basta infatti pensare a Margherita e ad Andrea come se fossero un elemento solo. Abbiamo quindi $|E| = S_{9,3} = 3025$ e quindi

$$P(E) = \frac{3025}{9330} = 0.324$$

Es. 6.7 Usiamo in questo esercizio la formula delle probabilità totali. Chiamiamo U_i l'evento "pallina estratta dall'urna i e B l'evento "estrazione di una pallina bianca". Abbiamo

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(U_1)P(B|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) + P(U_3)P(B|U_3) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6+3+1}{36} = \frac{5}{18}.
\end{aligned}
$$

Es. 6.8 Abbiamo 10 combinazioni di tre teste e due croci ognuna con probabilità $0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,03456$.
Abbiamo 5 combinazioni di quattro teste e una croce ognuna con probabilità $0,6^4 \cdot 0,4 = 0,05184$.
Infine abbiamo una sola combinazioni di cinque teste con probabilità $0,6^5 = 0,07776$. la probabilità di aver più teste che croci è quindi

$$10 \cdot 0,03456 + 5 \cdot 0,05184 + 0,07776 = 0,6826$$

cioè il 68,26%.

Es. 6.9 (a) Utilizziamo la formula delle probabilità totali con A_1 ="moneta truccata", A_2 ="moneta regolare" ed E ="escono 3 teste. Abbiamo

$$P(E) = P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) = \frac{1}{2}0,6^3 + \frac{1}{2}0,5^3 = 0,1705.$$

(b) La probabilità di ottenere testa al primo lancio è

$$P(E_1) = P(A_1)P(E_1|A_1) + P(A_2)P(E_1|A_2) = \frac{1}{2}0,6 + \frac{1}{2}0,5 = 0,55.$$

Abbiamo quindi che la probabilità che la moneta sia truccata sapendo che il primo lancio ha dato testa è

$$P(A_2|E_1) = \frac{P(E_1|A_2)P(A_2)}{P(E_1)} = \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,55} = 0,5454$$

(c) Abbiamo, similmente al punto (a)

$$P(E_1 \cap E_2) = P(A_1)P(E_1 \cap E_2|A_1) + P(A_2)P(E_1 \cap E_2|A_2) = \frac{1}{2}0,6^2 + \frac{1}{2}0,5^2 = 0,305$$

che è diverso da $P(E_1)P(E_2) = 0,55^2 = 0,3025$ per cui gli eventi sono dipendenti. Ciò poteva anche essere intuito dal punto (b): infatti sapere che il primo lancio ha dato testa fa diventare 0,5454 la probabilità che la moneta sia truccata e quindi aumenta la probabilità che il secondo lancio sia come risultato testa.

18. Soluzioni: variabili aleatorie discrete

Es. 7.1 (a) L'acquisto di un pacchetto può essere visto come l'estrazione di 4 palline di un'urna contenente 30 figurine blu (corrispondenti alla figurine che il bambino non ha) e 50 palline blu (corrispondenti alle figurine che già ha). la variabile $X=$ numero di figurine che non ha già nell'album è una variabile $X \sim H(4; 30, 50)$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,1457$$

(b) Analogamente al punto precedente abbiamo:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{50}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,1456$$

(c) Consideriamo la variabile $Y =$ numero di figurine nuove nel secondo pacchetto. Chiaramente la densità di Y dipende da quante figurine nuove sono state trovate nel primo pacchetto: usiamo quindi la formula della probabilità totali e abbiamo

$$P(X + Y = 8) = P(X = 4)P(Y = 4|X = 4) = \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,0002$$

$$\begin{aligned} P(X + Y = 7) &= P(X = 3)P(Y = 4|X = 3) + P(X = 4)P(Y = 3|X = 4) \\ &= \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{27}{4}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{3}\binom{54}{1}}{\binom{80}{4}} = 0,0029 \end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned} P(X + Y = 6) &= P(X = 4)P(Y = 2|X = 4) + P(X = 3)P(Y = 3|X = 3) + P(X = 2)P(Y = 4|X = 2) \\ &= \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{2}\binom{54}{2}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{27}{3}\binom{53}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{2}\binom{50}{2}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{28}{4}}{\binom{80}{4}} \\ &= 0,0220. \end{aligned}$$

Es. 7.2 In questo caso questo caso possiamo considerare uno spazio di probabilità uniforme costituito da 8 possibili risultati e cioè:

$$\Omega = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 3, 1), (1, 1, 1, 4), (1, 2, 3, 1), (1, 2, 1, 4), (1, 1, 3, 4), (1, 2, 3, 4)\}$$

(a) La somma delle palline estratte è almeno 7 in 5 casi su 8 per cui la probabilità è $\frac{5}{8}$;

(b) Sia A l'insieme dei risultati in cui la somma é almeno 7 e B l'insieme dei risultati in cui viene estratto il 4 abbiamo

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{4/8}{5/8} = \frac{4}{5}$$

(c) Abbiamo 3 risultati in cui compaiono esattamente tre palline numerate con 1 e quindi la probabilità è $3/8$.

Es. 7.3 d_1 è una densità discreta perché assume tutti valori non negativi con somma 1.
d_2 non è una densità perché assume valore $-0,4$.
d_3 non è una densità perché la somma dei valori che assume è maggiore di 1: infatti già la somma dei primi 4 termini è maggiore di 1.

Es. 7.4 La variabile Y è binomiale $Y \sim B(4, 1/6)$.
La variabile Z assume valori $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Abbiamo

$$d_Z(k) = \begin{cases} \frac{6}{36} & \text{se } k = 0 \\ \frac{10}{36} & \text{se } k = 1 \\ \frac{8}{36} & \text{se } k = 2 \\ \frac{6}{36} & \text{se } k = 3 \\ \frac{4}{36} & \text{se } k = 4 \\ \frac{2}{36} & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Avendo 4 numeri tra 1 e 6 questi non possono essere tutti a distanza ≥ 2 l'uno dall'altro: se così fosse avremmo almeno differenza 6 tra il massimo e il minimo, che è evidentemente assurdo. La variabile Y può assumere quindi solo valori 0 e 1 (e quindi è una variabile di Bernoulli). Abbiamo che W vale 1 quindi se i numeri sono tutti distinti e quindi

$$P(W = 1) = \frac{(6)_4}{6^4} = \frac{5}{18}$$

per cui $W \sim B(1, \frac{5}{18})$.

Es. 7.5 (a) Abbiamo

$$P(a_i = a_{i-1}) = P(a_i = 1, a_{i-1} = 1) + P(a_i = 0, a_{i-1} = 0) = \frac{1}{2}.$$

(b) Consideriamo come spazio di probabilità l'insieme dei risultati dei primi k lanci, abbiamo quindi 2^k possibili risultati, tutte le sequenze binarie di lunghezza k. Di questi risultati solo 2 danno come esito $X = k$ per cui

$$P(X = k) = \frac{2}{2^k} = 2^{1-k}$$

(c)

(d) Nello stesso spazio di probabilità del punto precedente, abbiamo chiaramente per $k = 2$, $P(Y = 2) = \frac{1}{2}$, mentre per $k \geq 3$ le sequenze favorevoli sono quelle che terminano con 011 e hanno nei primi $k - 3$ posti una qualunque sequenza di Fibonacci, cioè una sequenza binaria in cui non cisono due 1 consecutivi. Abbiamo quindi $P(Y = k) = \frac{F_{k-3}}{2^k}$.

Es. 7.6 (a) Possiamo assumere che la variabile X = numero di persone che si presentano sia una variabile binomiale $X \sim B(30, \frac{9}{10})$. Trovarsi nei guai vuol dire "$X \geq 29$" per cui la probabilità di trovarsi nei guai è

$$P(X = 29) + P(X = 30) = \binom{30}{29}(0.9)^{29}(0.1)^{1} + \binom{30}{30}(0.9)^{30} = 0,1837.$$

(b) Qui bisogna procedere per tentativi: se vendiamo 31 biglietti abbiamo $X \sim B(31, 0.9)$ e quindi

$$\begin{aligned} P(X \geq 29) &= P(X = 29) + P(X = 30) + P(X = 31) \\ &= \binom{31}{29}(0.9)^{29}(0.1)^{2} + \binom{31}{30}(0.9)^{30}(0.1)^{1} + \binom{31}{31}(0.9)^{31} \\ &= 0,3886 \end{aligned}$$

Vendendo 32 biglietti il rischio si calcola analogamente e in questo caso otteniamo

$$\begin{aligned} P(X \geq 29) &= P(X = 29) + P(X = 30) + P(X = 31) + P(X = 32) \\ &= \binom{32}{29}(0.9)^{29}(0.1)^{3} + \binom{32}{30}(0.9)^{30}(0.1)^{2} + \binom{32}{31}(0.9)^{31}(0.1) + (0,9)^{32} \\ &= 0,6003. \end{aligned}$$

Possiamo quindi vendere al più 31 biglietti se vogliamo correre un rischio inferiore al 50% di trovarci nei guai.

Es. 7.7 (a) Sia X il numero di bambini che diventeranno dottori di ricerca nati in un mese. Il dato del problema è $P(X = 0) = e^{-1}$. La variabile X può essere pensata come una variabile di Poisson (tanti tentativi corrispondenti a tutti i bambini nati ognuno dei quali diventerà dottore di ricerca con probabilità senz'altro molto bassa) e quindi $X \sim P(\lambda)$. Per determinare il parametro λ ricordiamo che

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

per cui abbiamo $\lambda = 1$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} = 0.264$$

(b) Sia Y il numero di bambini nati in un anno che diventeranno dottori di ricerca. La probabilità che non nascano dottori di ricerca in un anno è $(e^{-1})^{12} = e^{-12}$, dunque possiamo pensare come al primo punto che Y sia una variabile di Poisson di parametro 12. In alternativa, possiamo vedere Y come somma di 12 variabili di Poisson di parametro 1, e di nuovo ottenere che Y è una variabile di Poisson di parametro 12. Abbiamo quindi

$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - e^{-12}(1 + \frac{12}{1} + \frac{12^2}{2!} + \frac{12^3}{3!}) = 0,9977.$$

Es. 7.8 (a) Questo è uno schema successo-insuccesso con 4 prove indipendenti in cui ad ogni tentativo la probabilità di avere successo è 5/12 per cui

$$X \sim B(4, 5/12).$$

(b) In questo caso abbiamo 3 tentativi ognuno dei quali dà successo con probabilità 1/6 e quindi

$$Y \sim B(3, 1/6)$$

(c) La variabile Z assume valori 1,2,3: infatti con 3 lanci siamo sicuri che la somma dei risultati ottenuti sia almeno 6. Abbiamo

$$P(Z=1) = \frac{5+6+5+4+3+2+1}{36} = 0.722$$

Inoltre $Z = 3$ si verifica esattamente nei casi in cui i primi due lanci abbiano dato quattro 1, oppure tre 1 e un 2 e quindi

$$P(Z=3) = \frac{1+4}{6^4} = 0.004$$

La probabilità $P(Z = 2)$ può a questo punto essere calcolata per differenza e quindi la densità di Z risulta

$$d_Z(k) = \begin{cases} 0.722 & \text{se } k = 1 \\ 0.274 & \text{se } k = 2 \\ 0.004 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

19. Soluzioni: densità congiunta e indipendenza

Es. 8.1 (a) Abbiamo $d_Y(3) = \frac{1}{12} + t$ e $d_X(2) = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} + t$ per cui questa equazione viene semplicemente dalla condizione

$$d_{X,Y}(2,3) = d_X(2)d_Y(3).$$

(b) L'equazione del punto precedente diventa $180t^2 - 81t + 7 = 0$ che ha come soluzioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{7}{60}$.

(c) Per completare la tabella è sufficiente osservare che vale l'identità

$$d_{X,Y}(a,b)d_{X,Y}(c,d) = d_{X,Y}(a,d)d_{X,Y}(c,b)$$

per ogni scelta di a, b, c, d. Otteniamo quindi

$$d_{X,Y}(0,-1)t = d_{X,Y}(0,-1)d_{X,Y}(2,3) = d_{X,Y}(0,3)d_{X,Y}(2,-1) = \frac{1}{12}\frac{4}{15}$$

da cui ricaviamo $d_{X,Y}(0,-1) = \frac{1}{45t}$ e similmente possiamo ottenere $d_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{60t}$

Scegliendo quindi $t = \frac{1}{3}$ otteniamo la tabella

Y \ X	0	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Scegliendo invece $t = \frac{7}{60}$ otterremmo

Y \ X	0	2
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{60}$

Entrambe le tabelle sono valide.

8.2 (a) X_1 e X_3 sono dipendenti perché $X_1 = 0$ (non peschiamo mai la pallina 1) "fa aumentare" la probabilità che $X_3 = 1$ (la pallina 3 viene pescata almeno uno volta). E infatti

$$P(X_1 = 0, X_3 = 0) = (\frac{1}{2})^6$$

mentre

$$P(X_1 = 0) = P(X_3 = 0) = (\frac{3}{4})^6$$

per cui $P(X_1 = 0, X_3 = 0) \neq P(X_1 = 0) \cdot P(X_3 = 0)$.

(b) per simmetria sarà sufficiente calcolare la densità congiunta in $(0,0,0,0)$, $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$ e $(1,1,1,1)$. Abbiamo

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0) = 0$$

(non è possibile che nessuna pallina sia stata pescata)

$$P(X_1 = 1, X_2 = X_3 = X_4 = 0) = (\frac{1}{4})^6 = \frac{1}{4096}$$

(probabilità di pescare sempre la pallina 1)

$$P(X_1 = X_2 = 1, X_3 = X_4 = 0) = (\frac{1}{2})^6 - 2(\frac{1}{4})^6 = \frac{62}{4096}$$

(probabilità di pescare sempre 1 o 2, meno probabilità di pescare sempre 1, meno probabilità di pescare sempre 2)

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = 1, X_4 = 0) = (\frac{3}{4})^6 - 3 \cdot \frac{62}{4096} - 3 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{540}{4096}$$

e infine

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1) = 1 - 4 \cdot \frac{540}{4096} - 6 \cdot \frac{62}{4096} - 4 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{1560}{4096}.$$

8.3 (a) Abbiamo

$$X \sim B(6, \tfrac{1}{3}),\ Y \sim B(3, \tfrac{1}{2}),\ Z \sim B(3, \tfrac{1}{6}).$$

(b) Scriviamo $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ e $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ come somma di variabili di Bernoulli indipendenti come al solito. Per mostrare che X ed Y sono indipendenti, dobbiamo mostrare che le 9 variabili coinvolte

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y_1, Y_2, Y_3$$

sono tutte indipendenti. Siccome lanci diversi non si influenzano, basta vedere che le variabili coinvolte sono indipendenti quando riguardano lo stesso lancio. Ma questa è una semplice verifica.

(c) Come nel punto precedente.

(d) Queste sono invece dipendenti perché ad esempio $P(X = 5, Z = 3) = 0$ mentre $P(X = 5)$ e $P(Z = 3)$ sono entrambe non nulle.

20. Soluzioni: valore atteso e varianza

Es. 9.1 a. Si ha

$$d_{X_1}(k) = \begin{cases} 0.4 & \text{se } k = 15 \\ 0.6 & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad d_{X_2}(k) = \begin{cases} 0.16 & \text{se } k = 20 \\ 0.48 & \text{se } k = 10 \\ 0.36 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b. Si ha $Y_i \sim B(i, 0.4)$.

c. Y_i é il numero di vittorie e $i - Y_i$ é il numero di perdite nell prime i scommesse e quindi il risultato segue.

d. Abbiamo dal punto precedente $X_6 = 10Y_6 - 20$ e quindi

$$E[X_6] = 10E[Y_6] - 20 = 10 \cdot 2.4 - 20 = 4.$$

e. Per il punto c abbiamo

$$P(X_4 > 0) = P(Y_4 > 1) = 1 - P(Y_4 = 0) - P(Y_4 = 1) = 1 - 0.6^4 - 4 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4 = 0.5248$$

e similmente possiamo calcolare $P(X_6 > 0) = 0.4557$.

f. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X_4 > 0, X_6 > 0) &= P(X_4 \geq 20, X_6 > 0) + P(X_4 = 10, X_6 > 0) \\ &= P(X_4 \geq 20) + P(X_4 = 10) \cdot P(X_6 > 0 | X_4 = 10). \end{aligned}$$

Ora $P(X_4 = 10) = 0.3456$ e $P(X_4 \geq 20) = P(X_4 > 0) - P(X_4 = 10) = 0.5248 - 0.3456 = 0.1792$ e quindi possiamo concludere

$$\begin{aligned} P(X_4 > 0, X_6 > 0) &= 0.1792 + 0.3456 \cdot (1 - 0.6^2) \\ &= 0.4004. \end{aligned}$$

Es. 9.2 a.

$$\frac{\binom{7}{3} 2^4}{\binom{14}{10}} = \frac{560}{1001} = \frac{80}{143}.$$

b. $P(X = 7) = \frac{80}{143}$ l'abbiamo già calcolata. $P(X = 6) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{2}2^2}{\binom{14}{10}} = \frac{420}{1001} = \frac{60}{143}$. L'altro valore possibile per X è 5 e la relativa probabilità può essere calcolata per differenze oppure come $P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{14}{10}} = \frac{3}{143}$. Concludiamo

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{80}{143} & \text{se } k = 7; \\ \frac{60}{143} & \text{se } k = 6; \\ \frac{3}{143} & \text{se } k = 5; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque calcoliamo

$$E(X) = 5\frac{3}{143} + 6\frac{60}{143} + 7\frac{80}{143} = \frac{85}{13} = 6,54$$

$$E(X^2) = 25\frac{3}{143} + 36\frac{60}{143} + 49\frac{80}{143} = \frac{6155}{143} = 43,04$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{540}{1859} = 0,29$$

c. $Y \sim H(10; 7, 7)$;

d. $P(X = 6, Y = 6) = \frac{\binom{7}{6}\binom{6}{4}}{\binom{14}{10}} = \frac{15}{143}$;

e. Gli unici valori possibili con probabilità non nulla sono $k = 3, 4, 5, 6, 7$. Per tali valori di k, abbiamo

$$P(X = 7, Y = k) = \frac{\binom{7}{3}\binom{4}{k-3}}{\binom{14}{10}}.$$

Infatti, se $X = 7$, ci saranno esattamente 3 coppie che partecipano con entrambi i partner, e 4 coppie che partecipano solamente con uno dei due partner. D'altra parte, se $Y = k$, ci saranno esattamente 3 mogli che partecipano con marito, e $k - 3$ mogli che partecipano senza marito.
Dunque i casi favorevoli dell'evento $\{X = 7, Y = k\}$ sono determinati dalla scelta delle 3 mogli che partecipano con marito (per le quali ci sono $\binom{7}{3}$ scelte in totale), e dalla scelta delle rimanenti $k - 3$ mogli che partecipano senza marito (per le quali ci sono $\binom{4}{k-3}$ scelte in totale).
Pertanto del punto (a) troviamo

$$P(Y = k|X = 7) = \frac{P(X = 7, Y = k)}{P(X = 7)} = \frac{\binom{4}{k-3}}{2^4} = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{se } k = 3, 7; \\ \frac{4}{16} & \text{se } k = 4, 6; \\ \frac{6}{16} & \text{se } k = 5; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

.

Es. 9.3 (a) Abbiamo $P(Y = 0) = P(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$, $P(Y_2 = 2) = \frac{1}{6}$ e $P(Y = 0, X_2 = 2) = P(X_1 = X_2 = 2) = \frac{1}{36}$ per cui gli eventi "$Y = 0$" e "$X_2 = 2$" sono indipendenti.

(b) Sono dipendenti. Infatti $P(Y = 5, X_2 = 3) = 0$ mentre $P(Y = 5) \neq 0$ e $P(X_2 = 3) \neq 0$.

(c) Abbiamo bisogno della densità di Y. Abbiamo già visto $P(Y = 0) = \frac{1}{6}$. Gli altri valori della densità sono

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{3}{18} & \text{se } k = 0 \\ \frac{5}{18} & \text{se } k = 1 \\ \frac{4}{18} & \text{se } k = 2 \\ \frac{3}{18} & \text{se } k = 3 \\ \frac{2}{18} & \text{se } k = 4 \\ \frac{1}{18} & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui

$$E[Y] = \frac{1}{18}(5+8+9+8+5) = \frac{35}{18}.$$

(d) La condizione $X_1+X_2+X_3 = 7$ si verifica in 15 modi per cui $P(X_1+X_2+X_3 = 7) = \frac{15}{216}$. Di questi 15 modi esattamente tre soddisfano anche la condizione $Y = 0$ per cui $P(X_1 + X_2 + X_3 = 7, Y = 0) = \frac{3}{216}$. Concludiamo che

$$P(Y = 0|X_1 + X_2 + X_3 = 7) = \frac{P(X_1 + X_2 + X_3 = 7, Y = 0)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = 7)} = \frac{1}{5}.$$

Es. 9.4 (a) La variabile Z può assumere valori $\{1, 2, 3, 4\}$. Possiamo scrivere le funzioni di ripartizione delle variabili coinvolte. Siccome tutte queste variabili assumono solo valori interi ci limitiamo a considerare le funzioni di ripartizione calcolate su valori interi. Abbiamo

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ \frac{k+1}{4} & \text{se } k = 0, 1, 2, 3 \\ 1 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

e

$$F_Y(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 1 \\ \frac{k}{4} & \text{se } k = 1, 2, 3, 4 \\ 1 & \text{se } k \geq 4 \end{cases}$$

Ricordando che $F_{\max(X,Y)}(k) = F_X(k)F_Y(k)$ abbiamo

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 1 \\ \frac{k(k+1)}{16} & \text{se } k = 1, 2, 3 \\ 1 & \text{se } k \geq 4 \end{cases}$$

(b) La densità di Z la possiamo ottenere per sottrazione dalla funzione di ripartizione osservando che

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1) = F_Z(k) - F_Z(k-1)$$

e abbiamo quindi

$$p_Z(k) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } k = 1 \\ \frac{2}{8} & \text{se } k = 2 \\ \frac{3}{8} & \text{se } k = 3 \\ \frac{2}{8} & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo quindi

$$E[Z] = \frac{1}{8}(1+4+9+8) = \frac{11}{4}.$$

(c) Calcoliamo

$$E[Z^2] = \frac{1}{8}(1 + 8 + 27 + 32) = \frac{17}{2}$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = \frac{17}{2} - \frac{121}{16} = \frac{15}{16}.$$

Es. 9.5 Le variabili X e Y hanno densità

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{16}{81} & \text{se } k = 0 \\ \frac{32}{81} & \text{se } k = 1 \\ \frac{24}{81} & \text{se } k = 2 \\ \frac{8}{81} & \text{se } k = 3 \\ \frac{1}{81} & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad p_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se } k = 1 \\ \frac{3}{5} & \text{se } k = 2 \\ \frac{1}{5} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzioni di ripartizione di X e di Y sono quindi

$$F_X(k) \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ \frac{16}{81} & \text{se } k = 0 \\ \frac{48}{81} & \text{se } k = 1 \\ \frac{72}{81} & \text{se } k = 2 \\ \frac{80}{81} & \text{se } k = 3 \\ 1 & \text{se } k \geq 4 \end{cases} \qquad F_Y(k) \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{se } k = 1 \\ \frac{4}{5} & \text{se } k = 2 \\ 1 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

Detto $W = \min(X, Y)$ abbiamo che W può assumere valori 0,1,2,3. Abbiamo $P(W = 0) = P(X = 0) = \frac{16}{81}$. Inoltre

$$P(W = 1) = P(X = 1) + P(X > 1, Y = 1) = \frac{32}{81} + \frac{33}{81}\frac{1}{5} = \frac{193}{405}$$

$$P(W = 2) = P(X = 2, Y \geq 2) + P(X > 2, Y = 2) = \frac{24}{81}\frac{4}{5} + \frac{9}{81}\frac{3}{5} = \frac{123}{405}$$

$$P(W = 3) = P(X \geq 3, Y = 3) = \frac{9}{81}\frac{1}{5} = \frac{9}{405}$$

per cui ricapitolando abbiamo

$$p_W(k) = \begin{cases} \frac{80}{405} & \text{se } k = 0 \\ \frac{193}{405} & \text{se } k = 1 \\ \frac{123}{405} & \text{se } k = 2 \\ \frac{9}{405} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo ora calcolare

$$E[W] = \frac{1}{405}(193 + 246 + 27) = \frac{466}{405}$$

$$E[W^2] = \frac{1}{405}(193 + 492 + 81) = \frac{766}{405}$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(W) = E[W^2] - E[W]^2 = 0,567$$

Es. 9.6

(1) Abbiamo

$$E[X] = E[Y] = \frac{1}{10}(-1 + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}(-2) = -0,4.$$

Dunque siccome X e Y sono indipendenti troviamo

$$E[XY] = E[X]E[Y] = 0,16.$$

(2)

$$E[X^2] = \frac{1}{10}(1 + 1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}) + \frac{1}{2}4 = 3,45.$$

(3) Le variabili $|X|$ ed $|Y|$ sono indipendenti perché lo erano X ed Y. Abbiamo

$$E[|X|] = E[|Y|] = \frac{1}{10}(1 + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}(2) = 1,8$$

per cui $E[|X| + |Y|] = 3,6$. Inoltre

$$E[|X|^2] = E[X^2] = 3,45$$

per cui

$$\mathrm{Var}(|X|) = \mathrm{Var}(|Y|) = 3,45 - 1,8^2 = 0,21$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(|X| + |Y|) = 0,42.$$

21. Soluzioni: variabili aleatorie continue

Es. 10.1 Ricordiamo che la funzione di ripartizione di X è data da

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

(a) Abbiamo

$$P(Y < \frac{1}{2}) = P(\frac{1}{X+1} < \frac{1}{2}) = P(X > 1) = \frac{1}{2}.$$

(b) Osserviamo intanto che Y assume valori in $[1/3, 1]$ prendiamo quindi $t \in [1/3, 1]$ e calcoliamo

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X > \frac{1-t}{t}) = 1 - F_X(\frac{1-t}{t}) = 1 - \frac{1-t}{2t} = \frac{3t-1}{2t}$$

e concludiamo

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3t-1}{2t} & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

(c) La densità di Y possiamo a questo punto determinarla per derivazione della funzione di ripartizione e otteniamo quindi

$$f_Y(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < \frac{1}{3} \text{ oppure } s > 1 \\ \frac{1}{2s^2} & \text{se } \frac{1}{3} < s < 1 \\ 1 & \text{se } s > 1. \end{cases}$$

Es. 10.2 (a) Le variabili T_i sono tutte continue uniformi $T_i \sim U([0, 10])$ se espresse in minuti.

(b) Abbiamo

$$P(T_1 > 5, \ldots, T_{30} > 5) = (1/2)^{30} = 0.$$

Es. 10.3 Sia T il tempo di attesa del prossimo falso allarme.

(a) Usando il fatto che le variabili esponenziali mancano di memoria, vediamo che T anche una variabile esponenziale di parametro 1. Sia infatti X l'intervallo il tempo che separa il prossimo falso allarme dal precedente, allora dal testo $X \sim Exp(1)$. Detto u il tempo già trascorso dall'ultimo falso allarme, troviamo dunque

$$\begin{aligned} P(T \leq t) = P(X \leq t + u | X \geq u) = 1 - P(X \geq t + u | X \geq u) = \\ = 1 - P(X \geq t) = P(X \leq t). \end{aligned}$$

Pertanto $T \sim Exp(1)$ e troviamo $P(T \leq 1) = 1 - e^{-1} = 0,632$.

(b) Falsi allarmi distinti sono fenomeni indipendenti, e le variabili esponenziali mancano di memoria. Pertanto tale probabilità è sempre $0,632$.

(c) Siano T_1 e T_2 i tempi di attesa per un falso allarme nelle due case. La risposta alla prima domanda è

$$P(\min(T_1,T_2) < \frac{1}{2}) = 1 - P(T_1 > \frac{1}{2})P(T_2 > \frac{1}{2}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = 0,632.$$

La risposta all'ultima domanda è

$$P(\max(T_1,T_2) < \frac{1}{2}) = P(T_1 < \frac{1}{2})P(T_2 < \frac{1}{2}) = (1 - e^{-\frac{1}{2}})^2 = 0,155.$$

Es. 10.4 (a) La densità si ottiene per derivazione. Abbiamo

$$f_X(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \text{ oppure } s > 2 \\ \frac{2}{3} & \text{se } 0 < s < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 < s < 2 \end{cases}$$

(b) Calcoliamo

$$E[X] = \int_0^1 s\frac{2}{3}\,ds + \int_1^2 s\frac{1}{3}\,ds = \frac{2}{3}\Big[\frac{s^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{1}{3}\Big[\frac{s^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{5}{6}.$$

Similmente

$$E[X^2] = \frac{2}{3}\Big[\frac{s^3}{3}\Big]_0^1 + \frac{1}{3}\Big[\frac{s^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\frac{7}{3} = 1$$

e quindi

$$Var(X) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Es. 10.5 a. Si ha $f(s) \geq 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ se e solo se $a \leq 0$. Inoltre calcoliamo l'integrale su tutto $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,ds = \int_0^{20} as(s-20)\,ds = -\frac{4000}{3}a$$

da cui, per essere 1, otteniamo $a = -\frac{3}{4000}$ che essendo < 0 è accettabile.

b. Osserviamo che il grafico di $f(s)$ è una parabola che si annulla in 0 e 20 ed è quindi simmetrica rispetto all'asse $s = 10$. Deduciamo che $E[X] = 10$. Altrimenti possiamo calcolare

$$E[X] = -\frac{3}{4000}\int_0^{20}(s^3 - 20s^2)ds = -\frac{3}{4000}\Big[\frac{s^4}{4} - \frac{20s^3}{3}\Big]_0^{20} = 10.$$

c. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X > 5|X > 4) &= \frac{P(X>5)}{P(X>4)} = \frac{-\frac{3}{4000}\int_5^{20}(s^2 - 20s)\,ds}{-\frac{3}{4000}\int_4^{20}(s^2 - 20s)\,ds} \\ &= \frac{[s^3/3 - 10s^2]_5^{20}}{[s^3/3 - 10s^2]_4^{20}} \\ &= \frac{3375}{3584} = 0.95. \end{aligned}$$

Invece

$$\begin{aligned}P(X > 1) &= 1 - (-3/4000)) \int_0^1 (s^2 - 20s)\, ds \\ &= 1 + \frac{3}{4000}(-29/3) \\ &= \frac{3971}{4000} \\ &= 0.99\end{aligned}$$

per cui le due probabilità sono diverse.

Es. 10.6 (a) La funzione è sempre ≥ 0, continua e inoltre si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds = 1$$

(per questo basta calcolare l'area dei triangoli individuati dal grafico di f) per cui f è una densità continua.

(b) Se $-1 < t < 0$ abbiamo

$$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds = \int_{-1}^{t} (1+s) ds = \frac{(t+1)^2}{2}$$

mentre se $0 < t < 1$ abbiamo

$$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds = \frac{1}{2} + \int_{0}^{t} (1-s) ds = 1 - \frac{(1-t)^2}{2}$$

e quindi

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ \frac{t^2+2t+1}{2} & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{-t^2+2t+1}{2} & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

(c) Abbiamo

$$E[X_1^2] = \int_{-1}^{0} s^2(1+s) ds + \int_0^1 s^2(1-s)\, ds = \frac{1}{6}.$$

Similmente calcoliamo

$$E[X_1^4] = \frac{1}{15},$$

da cui

$$Var(X_1^2) = E[X_1^4] - E[X_1^2]^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{36} = \frac{7}{180}.$$

22. Soluzioni: variabili normali e teorema del limite centrale

Es. 11.1 Abbiamo gi considerato le variabili T_i nell'esercizio 10.2. In particolare, espresse in minuti, le variabili T_i sono tutte continue uniformi $T_i \sim U([0,10])$. Ricordando che $E[T_i] = 5$ e $Var(T_i) = \frac{100}{12}$, dal teorema del limite centrale otteniamo

$$T_1 + \cdots + T_{30} \sim N(150, 250).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{30}(T_1 + \cdots T_{30}) > 6)) &= P(T_1 + \cdots T_{30} > 180) \\ &= P(\sqrt{250}\zeta_0 + 150 > 180) \\ &= P(\zeta_0 > 1,89) = 1 - \Phi(1,89) = 0,03. \end{aligned}$$

Es. 11.2 Abbiamo già considerato la funzione di ripartizione in questione nell'esercizio 10.4. In particolare, abbiamo calcolato il valore atteso $E[X_i] = \frac{5}{6}$ e la varianza $Var(X_i) = \frac{11}{36}$. Per il teorema del limite centrale abbiamo dunque

$$X_1 + \cdots + X_{44} \sim N(\frac{110}{3}, \frac{121}{9}).$$

Quindi

$$P(X_1 + \cdots + X_{44} > 40) = P(\frac{11}{3}\zeta_0 + \frac{110}{3} > 40) = P(\zeta_0 > \frac{10}{11}) = 1 - \Phi(0,91) = 0,181.$$

Es. 11.3 Abbiamo già considerato la densità in questione nell'esercizio 10.6. In particolare, abbiamo calcolato $E[X_1^2] = \frac{1}{6}$ e $Var(X_1^2) = \frac{7}{180}$. Applicando il teorema del limite centrale abbiamo quindi

$$X_1^2 + \cdots + X_{180}^2 \sim N(30, 7)$$

da cui otteniamo

$$P(X_1^2 + \cdots + X_{180}^2 > 25) = P(\sqrt{7}\zeta_0 + 30 > 25) = 1 - \Phi(-1,89) = \Phi(1,89) = 0,97.$$

Es. 11.4 (a) La funzione p assume solo un numero finito di valori non nulli, che sono tutti positivi. Per vedere che $p(k)$ una densità astratta basta vedere che

$$\sum_{k \in \mathbb{R}} p(k) = \sum_{k=1}^{6} p(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = 1.$$

Sia $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ con famiglia di eventi $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e con funzione di probabilità $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definita da

$$P(A) = \sum_{k \in A} p(k)$$

Allora $X(k) = k$ una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, e p coincide con la densità di X.

(b) Abbiamo

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 6 \cdot \frac{1}{32} = \frac{63}{32} \sim 1,97$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} + 25 \cdot \frac{1}{32} + 36 \cdot \frac{1}{32} = \frac{177}{32} \sim 5,53$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \sim 5,531 - 3,877 = 1,66$$

(c) Detti $\mu = 1.97$ e $\sigma^2 = 1.66$, dal teorema del limite centrale abbiamo $X_1 + \ldots + X_{32} \sim N(32 \cdot \mu, 32 \cdot \sigma^2)$. Essendo $\frac{64.5-32\mu}{\sqrt{32}\sigma} \simeq 0.20$, applicando la correzione di continuità troviamo che

$$\begin{aligned} P(X_1 + \ldots + X_{32} \geq 65) &= P(X_1 + \ldots + X_{32} \geq 64.5) \simeq P(\sqrt{32}\sigma\zeta_0 + 32\mu \geq 64.5) = \\ &= P(\zeta_0 \geq \frac{64.5 - 32\mu}{\sqrt{32}\sigma}) \simeq P(\zeta_0 \geq 0.20) = 1 - P(\zeta_0 < 0.20) = \\ &= 1 - \Phi(0.20) \simeq 1 - 0.57926 = 0.42074 \end{aligned}$$

Es. 11.5 (a) Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X < 0.5) = P(|\zeta_0| < 0.5) = P(-0.5 < \zeta_0 < 0.5) &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \\ &= \Phi(0.5) - (1 - \Phi(-0.5)) = 2\Phi(0.5) - 1 = 0,383 \end{aligned}$$

(b) In generale se $t \geq 0$ abbiamo

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(-t \leq \zeta_0 \leq t) = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1.$$

Pertanto

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 2\Phi(t) - 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

(c) Per $i = 1, \ldots, 5$, sia X_i la distanza dal centro del bersaglio ottenuta al tiro i. Possiamo assumere che le variabili $X_1, \ldots, X_5$ sono indipendenti. Per ogni $i = 1, \ldots, 5$ abbiamo

$$P(X_i \geq 0.1) = 1 - F_{X_i}(0.1) = 2 - 2\Phi(0.1) = 0.9204$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(\min(X_1, \ldots, X_5) < 0.1) = 1 - P(X_1 \geq 0.1, \ldots, X_5 \geq 0.1) &= 1 - \prod_{i=1}^{5} P(X_i \geq 0.1) = \\ 1 - (0.9204)^5 &= 1 - 0,6606 = 0,3394 \end{aligned}$$

(d) Procedendo come al punto precedente, per ogni $i = 1, \ldots, 5$ abbiamo

$$P(X_i \leq 3) = F_{X_i}(3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9974$$

Pertanto

$$P(\max(X_1,\dots,X_5)>3)=1-P(X_1\le 3,\dots,X_5\le 3)=1-\prod_{i=1}^{5}P(X_i\le 3)=$$
$$1-(0.9974)^5=1-0,9871=0,0129$$

Es. 11.6 (a) E' abbastanza chiaro che $|X_1|\sim U([0,1])$. In effetti $|X_1|$ ha ripartizione

$$F_{|X_1|}(t)=P(-t<X_1<t)=\begin{cases}0 & \text{se } t<0\\ t & \text{se } t\in[0,1]\\ 1 & \text{se } t>1\end{cases}$$

da cui derivando otteniamo la densità

$$f_{|X_1|}(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\in[0,1]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

(b) Essendo $|X_1|\sim U([0,1])$, abbiamo

$$\mu=E(|X_1|)=\frac{1}{2},\qquad \sigma^2=Var(|X_1|)=\frac{1}{12}.$$

Dal teorema del limite centrale ricaviamo dunque

$$\frac{|X_1|+\ldots+|X_{100}|}{100}\sim N(\mu,\tfrac{\sigma^2}{100})=N(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{1200}),$$

da cui

$$P(\tfrac{|X_1|+\ldots+|X_{100}|}{100}>0.01)\simeq P(\tfrac{\sigma}{10}\zeta_0+\mu>0.01)=P(\zeta_0>\tfrac{10}{\sigma}\cdot(\tfrac{1}{100}-\mu))=$$
$$P(\zeta_0>-10\sqrt{12}\cdot\tfrac{49}{100})=P(\zeta_0>-\tfrac{49\sqrt{3}}{5})=P(\zeta_0>-16.97)=1.$$

(c) Essendo $X_1\sim U([-1,1])$, abbiamo

$$\mu=E(X_1)=0,\qquad \sigma^2=Var(|X_1|)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Dal teorema del limite centrale ricaviamo dunque

$$\frac{X_1+\ldots+X_{100}}{100}\sim N(\mu,\tfrac{\sigma^2}{100})=N(0,\tfrac{1}{300}),$$

da cui

$$P(\tfrac{X_1+\ldots+X_{100}}{100}>0.01)\simeq P(\zeta_0>\tfrac{10}{\sigma}\cdot(\tfrac{1}{100}-\mu))=P(\zeta_0>\tfrac{10\sqrt{3}}{100})=P(\zeta_0>\tfrac{\sqrt{3}}{10})=$$
$$=P(\zeta_0>0.17)=1-P(\zeta_0\le 0.17)=1-\Phi(0.17)=0.4325$$

(d) Abbiamo

$$\mu=E(X_1^2)=\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{2}dt=\left[\frac{t^3}{6}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$
$$E(X_1^4)=\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{2}dt=\left[\frac{t^5}{10}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{5}$$

$$\sigma^2 = Var(X_1^2) = E(X_1^4) - E(X_1^2)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45} \simeq 0.09$$

Pertanto dal teorema del limite centrale abbiamo

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_{100}^2}{100} \sim N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{100}) = N(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{1125}),$$

da cui

$$P(\tfrac{X_1^2+\ldots+X_{100}^2}{100} > 0.01) = P(\zeta_0 > \tfrac{10}{\sigma} \cdot (\tfrac{1}{100} - \mu)) = P(\zeta_0 > -\tfrac{97}{30\sigma}) \simeq P(\zeta_0 > -\tfrac{97}{9}) = 1$$

(e) Detto $S_{100} = X_1 + \ldots + X_{100}$, abbiamo

$$P(\tfrac{(X_1+\ldots+X_{100})^2}{100} > 0.01) = P(S_{100}^2 > 1) = P(S_{100} < -1) + P(S_{100} > 1).$$

D'altra parte, come nel punto c), dal teorema del limite centrale abbiamo

$$S_{100} \sim N(100\mu, 100\sigma^2) = N(0, \tfrac{100}{3}).$$

Quindi ricaviamo

$$P(S_{100} < -1) = P(\zeta_0 < -\tfrac{\sqrt{3}}{10}) = \Phi(-0.17) = 1 - \Phi(0.17) = 1 - 0.5675 = 0.4325$$

$$P(S_{100} > 1) = P(\zeta_0 > \tfrac{\sqrt{3}}{10}) = 1 - \Phi(0.17) = 0.4325$$

Da cui otteniamo

$$P(\tfrac{(X_1+\ldots+X_{100})^2}{100} > 0.01) = 0,865.$$

Es. 11.7 (a) Sia Y_i il tempo di decadimento della i-esima particella radioattiva. Allora $Y_i \sim Exp(1)$. Dunque

$$P(Y_i < 2) = 1 - e^{-2} \simeq 0,865.$$

(b) Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se l'i-esima particella decade in meno di 5 anni. Allora

$$P(X_i = 1) = P(Y_i < 5) = 1 - e^{-5} \simeq 0,993,$$

quindi $X_i \sim B(1, 1 - e^{-5},)$. D'altra parte $X_1, \ldots, X_{10^6}$ sono tutte variabili indipendenti e $X = X_1 + \ldots + X_{10^6}$, pertanto $X \sim B(10^6, 1 - e^{-5})$.

(c) Osserviamo che

$$E(X_i) = 1 - e^{-5}, \qquad Var(X_i) = e^{-5}(1 - e^{-5})$$

Quindi per il teorema del limite centrale possiamo approssimare X con una variabile normale

$$X \sim N\Big(10^6(1 - e^{-5}),\, 10^6 e^{-5}(1 - e^{-5})\Big)$$

Pertanto, essendo $e^{-5} \sim 0.007$, otteniamo

$$P(X > 0.993 \cdot 10^6) \simeq P\Big(\zeta_0 > \frac{0.993 - 1 + e^{-5}}{\sqrt{e^{-5}(1 - e^{-5})}} 10^3\Big) \simeq P(\zeta_0 > 0) = \frac{1}{2}.$$

Es. 11.8 (a) La variabile $Y = X_1 - 1$ ha funzione di ripartizione

$$F_Y(t) = P(X < t+1) = F_X(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1 \\ 1 - e^{-2(t+1)} & \text{se } t \geq -1 \end{cases}$$

Una densità per Y pu essere ricavata da F_Y per derivazione

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1 \\ 2e^{-2(t+1)} & \text{se } t \geq -1 \end{cases}$$

Infine abbiamo

$$E(Y) = E(X_1) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = Var(X_1) - Var(1) = Var(X_1) = \frac{1}{4}.$$

(b) Abbiamo $E(X_1) = \frac{1}{2}$, $Var(X_1) = \frac{1}{4}$, vale a dire $\mu = \sigma = \frac{1}{2}$. Usando l'approssimazione normale troviamo quindi

$$X_1 + \ldots + X_{50} \sim N(25, \tfrac{25}{2}).$$

Dunque

$$P(X_1 + \ldots + X_{50} > 45) \simeq P(\zeta_0 > \tfrac{\sqrt{2}(45-25)}{5}) = P(\zeta_0 > 4\sqrt{2}) \simeq 0$$

(c) Le 25 variabili $X_1 - X_2, X_3 - X_4, \ldots, X_{49} - X_{50}$ sono tutte indipendenti e con la stessa densità. D'altra parte

$$E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0,$$

$$Var(X_1 - X_2) = Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) = 2Var(X_1) = \frac{1}{2}$$

Pertanto $\mu = 0$ e $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e dal teorema del limite centrale troviamo

$$(X_1 - X_2) + \ldots + (X_{49} - X_{50}) \sim N(0, \tfrac{25}{2})$$

da cui

$$P(X_1 - X_2 + \ldots + X_{49} - X_{50} > 0.1) = P(\zeta_0 > \tfrac{\sqrt{2}}{5 \cdot 10}) = P(\zeta_0 > 0.03) =$$
$$= 1 - \Phi(0.03) = 0.5120$$

Es. 11.9 (a) Abbiamo

$$P(X > 6, Y > 5) = P(X > 6)P(Y > 5) = P(\zeta_0 > \tfrac{1}{5})\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - \Phi(0.20)) = \frac{0.4207}{3} = 0.1402$$

(b) Abbiamo

$$P(X + Y < 7 | Y \leq 5) = \frac{P(X + Y < 7, Y \leq 5)}{P(Y \leq 5)} = \frac{P(X + Y < 7, Y = 4) + P(X + Y < 7, Y = 5)}{2/3} =$$
$$= \frac{3}{2}P(X < 3, Y = 4) + \frac{3}{2}P(X < 2, Y = 5) = \frac{3}{2}P(X < 3)P(Y = 4) + \frac{3}{2}P(X < 2)P(Y = 5) =$$
$$= \frac{1}{2}P(X < 3) + \frac{1}{2}P(X < 2)$$

D'altra parte

$P(X < 2) = P(\zeta_0 < \frac{2-5}{5}) = P(\zeta_0 < -\frac{3}{5}) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$

$P(X < 3) = P(\zeta_0 < \frac{3-5}{5}) = P(\zeta_0 < -\frac{2}{5}) = 1 - \Phi(0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$

Pertanto otteniamo

$$P(X + Y < 7|Y \le 5) = \frac{0.2743 + 0.3446}{2} = 0.30945$$

(c) Dal punto successivo, abbiamo

$$P(X + Y < 8) = \frac{1}{3}\Big(\Phi(-\tfrac{1}{5}) + \Phi(-\tfrac{2}{5}) + \Phi(-\tfrac{3}{5})\Big) = 1 - \frac{1}{3}\Big(\Phi(\tfrac{1}{5}) + \Phi(\tfrac{2}{5}) + \Phi(\tfrac{3}{5})\Big) =$$
$$= 1 - \frac{1}{3}\Big(0.5739 + 0.6554 + 0.7257\Big) = 1 - \frac{1}{3}1.955 = 0.3483$$

(d) Determiniamo la funzione di ripartizione F_{X+Y} in termini di $\Phi(t)$. Abbiamo

$$F_{X+Y}(t) = P(X + Y \le t) = \sum_{k=4}^{6} P(X \le t - k, Y = k) = \sum_{k=4}^{6} P(X \le t - k)P(Y = k) =$$
$$\frac{1}{3}\sum_{k=4}^{6} P(X \le t - k) = \frac{1}{3}\sum_{k=4}^{6} P(\zeta_0 \le \tfrac{t-k-5}{5}) = \frac{1}{3}\Big(\Phi(\tfrac{t-9}{5}) + \Phi(\tfrac{t-10}{5}) + \Phi(\tfrac{t-11}{5})\Big)$$