



# Programmazione Lineare: Introduzione

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.) & Marco Boschetti (D.M.).

rev. 2.1(AH) – 2024



# Programmazione Lineare

**Def.:**  $(F, \varphi)$  è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo  $\varphi$  è lineare

**Es.**  $\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

- la regione ammissibile  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  è definita da

$$g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p)$$

con  $g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineare  $\forall i$  e  $\forall j$

**Es.**  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq d_i$



# Forma matriciale

- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

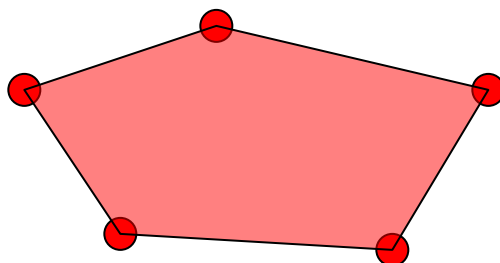
$$\min c^T x$$

$$Ax \geq d$$

$$x \geq 0$$

# Regione ammissibile di PL

- $F$  è un insieme convesso (poliedro)



- il numero di  $x \in F$  da esaminare per determinare  $x^*$  è un numero **finito** ( $\equiv$  **vertici** del poliedro )  
 $\Rightarrow$  **problema combinatorio**



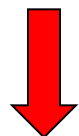
# Esempio

$$\min 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 1$$

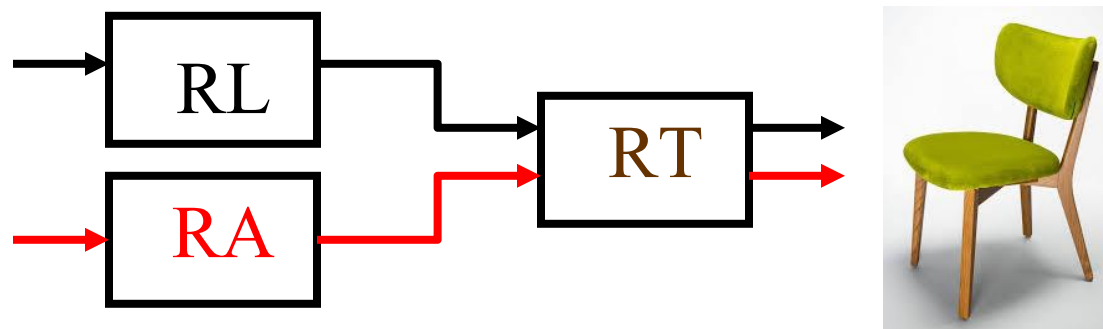
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3 \ -2 \ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

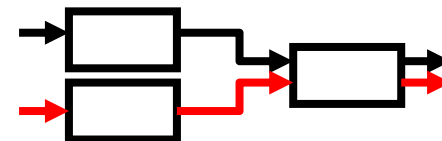
# Es. 1: Produzione di sedie (1)

- 2 prodotti:
  - Sedia in Legno (SL)
  - Sedia in Alluminio (**SA**)
- 3 reparti:
  - Lavorazione parti in Legno (RL)
  - Lavorazione parti in Alluminio (RA)
  - Lavorazione parti in Tessuto (RT)



# Produzione di sedie (2)

- Tempi di Produzione (min. per pezzo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)
- Disponibilità reparti (min. per periodo)



	RL	RA	RT	Ricavo
SL	10	-	30	30
SA	-	20	20	50
D.	40	120	180	

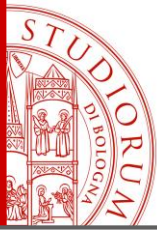


# Formulazione del problema LP (1)

---

0. Capire il problema.
1. Individuare le **variabili** decisionali.
2. Definire la **funzione obiettivo** come combinazione delle variabili decisionali.
3. Definire i **vincoli** come combinazione delle variabili.





# 1. Definizione e 2. Variabili

- Dati:

- Tempi di Produzione (min. per pezzo)
- Disponibilità reparti (min. per periodo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)

*Supponendo di poter vendere tutta la produzione quante sedie di ciascun tipo devono essere prodotte per massimizzare il ricavo ?*

- Variabili decisionali:

- $x_1$  = n. di sedie di legno prodotte in un periodo
- $x_2$  = n. di sedie di alluminio prodotte in un periodo
- $x_1$  ed  $x_2$  possono essere frazionarie



### 3. Funzione obiettivo

- Profitto per unità di prodotto:

SL	SA
30	50

$$\max z = 30 x_1 + 50 x_2$$



## 4. Vincoli

- Consumo tempo per unità di prodotto:

<i>Reparto</i>	SL	SA	Disp.
RL	10	–	40
RA	–	20	120
RT	30	20	180

$$\max z = 30 x_1 + 50 x_2$$

$$(RL) \quad 10 x_1 \leq 40$$

$$(RA) \quad 20 x_2 \leq 120$$

$$(RT) \quad 30 x_1 + 20 x_2 \leq 180$$



## 5. Upper e lower bound

- valori negativi delle  $x$  privi di senso
- vincoli di non negatività delle variabili:

$$\max z = 30 x_1 + 50 x_2$$

$$\text{RL)} \quad 10 x_1 \leq 40$$

$$\text{RA)} \quad 20 x_2 \leq 120$$

$$\text{RT)} \quad 30 x_1 + 20 x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Modello LP completo

- stabilità numerica degli algoritmi:
- coefficienti interi e piccoli in valore assoluto

$$\begin{array}{llllll} \max & 3 x_1 & + & 5 x_2 & & \\ \text{RL)} & x_1 & & & \leq & 4 \\ \text{RA)} & & & 2 x_2 & \leq & 12 \\ \text{RT)} & 3 x_1 & + & 2 x_2 & \leq & 18 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

## Es. 2: Produzione di vasche (1)

- Un'azienda produce due tipi di vasche: Blue Tornado e Hot Spring

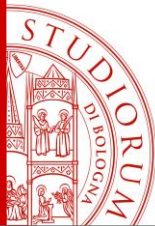
	BT	HS
Motore	1	1
Lavoro	9 ore	6 ore
Tubazione	12 metri	16 metri
Profitto Unitario	€350	€300

- sono disponibili: 200 motori, 1566 ore di lavoro, e 2880 metri di tubazione



# Modello LP

$$\begin{array}{llll} \max & 350 x_1 & + & 300 x_2 \\ \text{s.t.} & 1 x_1 & + & 1 x_2 \leq 200 \\ & 9 x_1 & + & 6 x_2 \leq 1566 \\ & 12 x_1 & + & 16 x_2 \leq 2880 \\ & & & x_1 \geq 0 \\ & & & x_2 \geq 0 \end{array}$$



# Problemi di Mix di Produzione

- $n$  prodotti,  $m$  risorse (materie prime, macchine ...)
- $a_{ij}$  quantità della risorsa  $i$  necessaria per produrre 1 unità del prodotto  $j$  ( $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$ )
- $d_i$  quantitativo di risorsa  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ) disponibile
- $r_j$  ricavo per 1 unità del prodotto  $j$  ( $j=1, \dots, n$ )
- $x_j$  quantità del prodotto  $j$  da produrre ( $j=1, \dots, n$ )

$$\max r^T x$$

$$Ax \leq d$$

$$x \geq 0$$



# Es. 3: Problema della dieta

... per cani e gatti

Sostanze	Alimenti (contenuto g/Kg)			Contenuto minimo (g)
	A1	A2	A3	
Proteine	500	300	300	800
Grassi	300	300	100	400
Carboidrati	0	100	200	2000

Costo (€/Kg)	5	2	1
--------------	---	---	---

Variabili (Kg)	$x_1$	$x_2$	$x_3$
----------------	-------	-------	-------



# Modello LP

$x_1, x_2, x_3$  : Kg di A2, A2, A3 da acquistare

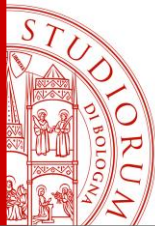
$$\min z = 5x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 8$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



# Problema della dieta (generale)

- $n$  alimenti,  $m$  sostanze nutritive
- $a_{ij}$  quantità della sostanza  $i$  in 1 unità dell'alimento  $j$  ( $i=1,\dots,m; j=1,\dots,n$ )
- $d_i$  fabbisogno della sostanza  $i$  ( $i=1,\dots,m$ )
- $c_j$  costo 1 unità dell'alimento  $j$  ( $j=1,\dots,n$ )
- $x_j$  quantità dell'alimento  $j$  da acquistare ( $j=1,\dots,n$ )

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq d$$

$$x \geq 0$$

# Soluzione LP: Approccio intuitivo

- Blue Tornado ( $x_1$ ) ha un profitto unitario più alto
- conviene produrne il maggior numero possibile
- Ponendo  $x_2 = 0$ 
  - Vincolo 1:  $x_1 \leq 200$
  - Vincolo 2:  $9 x_1 \leq 1566$  o  $x_1 \leq 174$
  - Vincolo 3:  $12 x_1 \leq 2880$  o  $x_1 \leq 240$
- Il massimo valore di  $x_1$  è 174 e il profitto totale è  $€350 \cdot 174 + €300 \cdot 0 = €60900$
- Questa soluzione è ammissibile: è anche ottima?
- **No!** ( $x_1 = 122, x_2 = 78$ , è amm. e vale €66100)

max	$350 x_1 + 300 x_2$	
s.t.	$1 x_1 + 1 x_2 \leq 200$	
	$9 x_1 + 6 x_2 \leq 1566$	
	$12 x_1 + 16 x_2 \leq 2880$	
	$x_1 \geq 0$	
	$x_2 \geq 0$	



# Soluzione LP: Approccio Grafico

- I vincoli di un problema LP definiscono la sua regione ammissibile.
- Il punto migliore nella regione ammissibile è la soluzione ottima per il problema.
- Per problemi LP con 2 (o 3) variabili, è possibile disegnare la regione ammissibile e trovare la soluzione ottima.



# Interpretazione geometrica di LP

- $F$  è l'intersezione di insiemi convessi associati ai vincoli

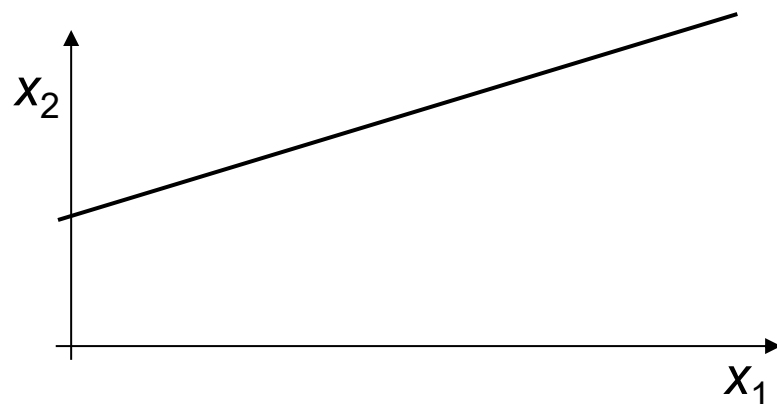
$$H = \{ x \in R^n : a^T x = d \}$$

$$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$$

- $F$  è un insieme convesso intersezione di un numero finito di insiemi convessi definiti dalle relazioni lineari: **poliedro convesso** (se limitato: **politopo**)

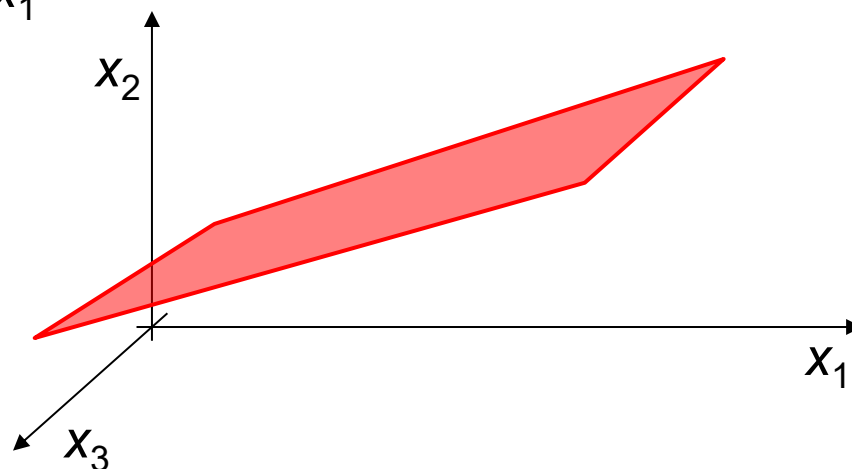
# Equazioni Lineari

$H = \{ x \in \mathbb{R}^n : a^T x = d \}$  è un **iperpiano**



$a_1 x_1 + a_2 x_2 = d$   
in  $\mathbb{R}^2$  è una **retta**

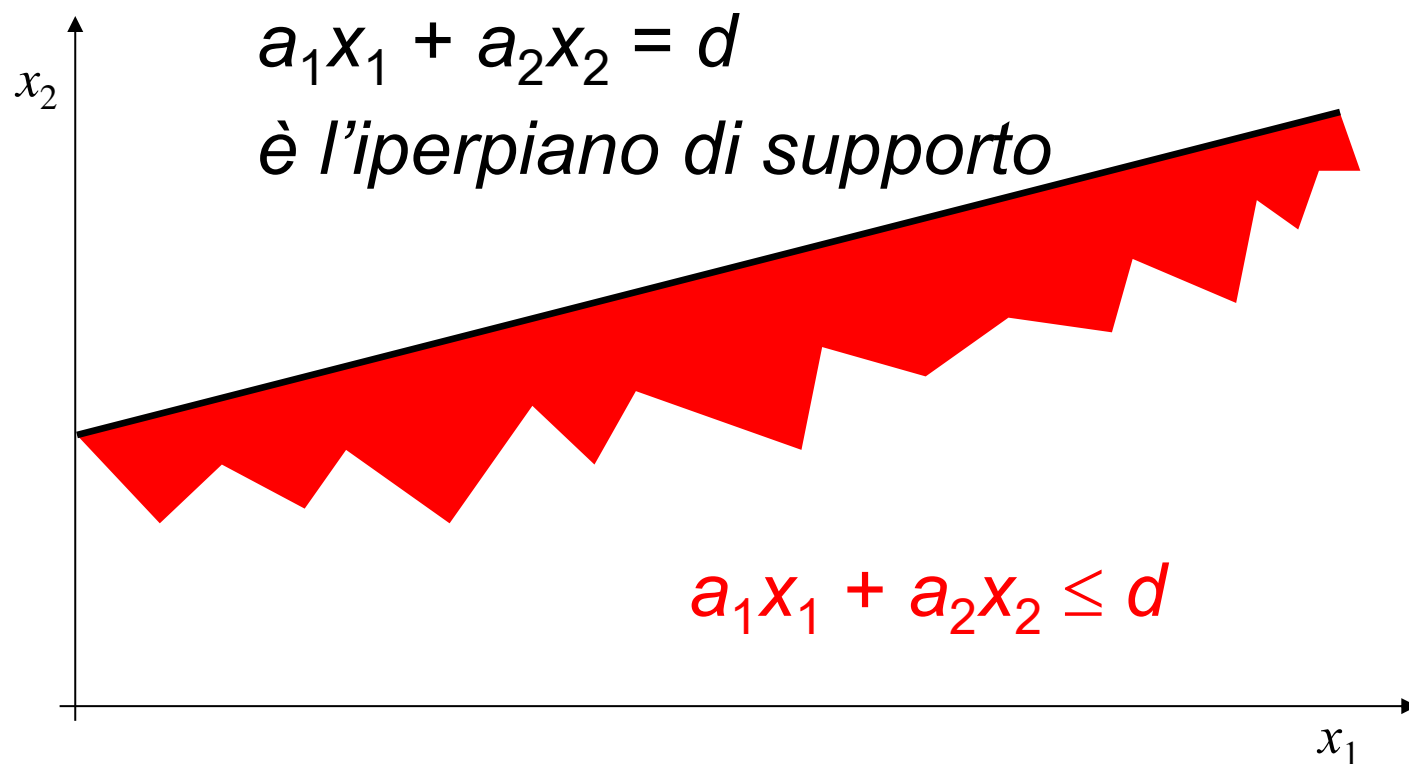
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d$   
in  $\mathbb{R}^3$  è un **piano**





# Disequazioni Lineari

$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$  è un **semispazio**

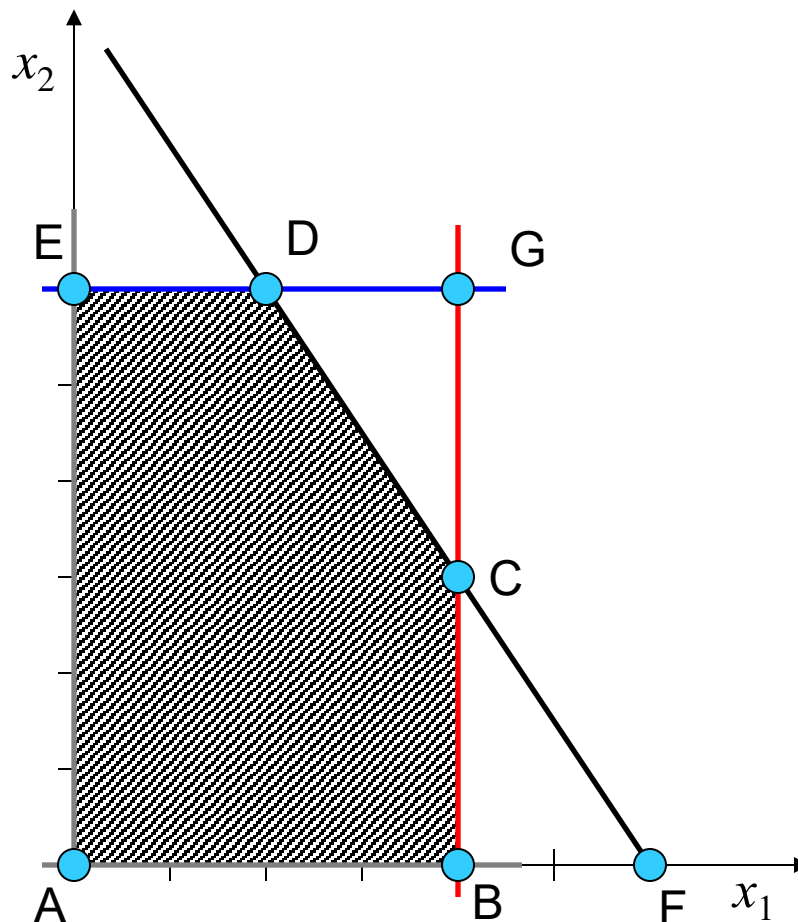




# Regione ammissibile

$$\begin{aligned}
 \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 4 \\
 & 2x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

**Vertici:** intersezione di vincoli o di iperpiani di supporto



$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

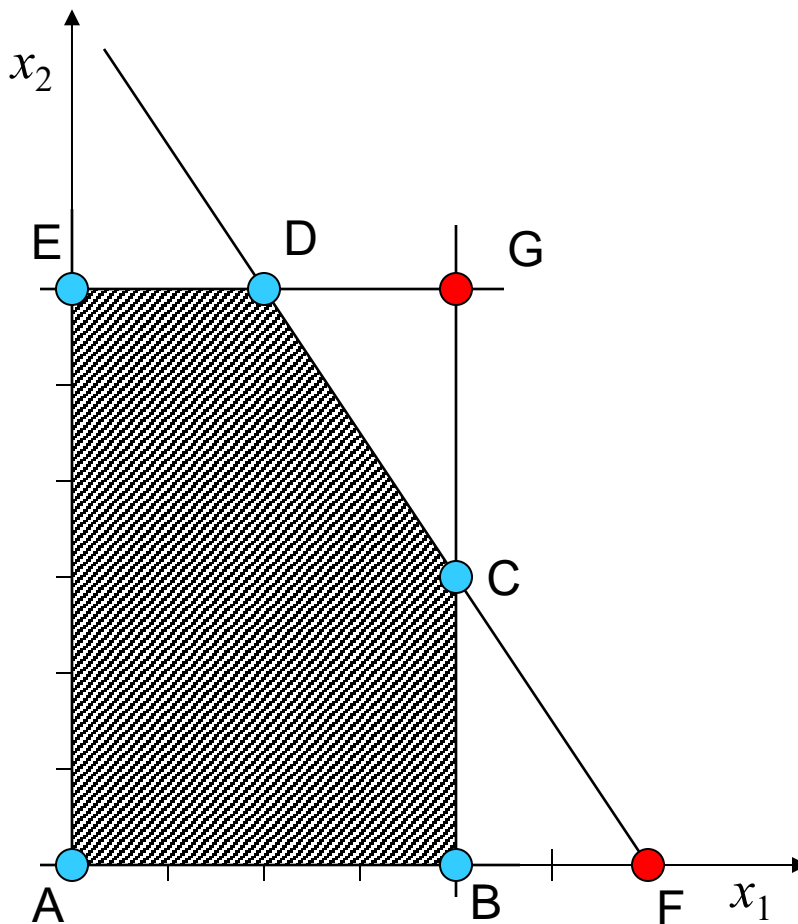
***s.t.***

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



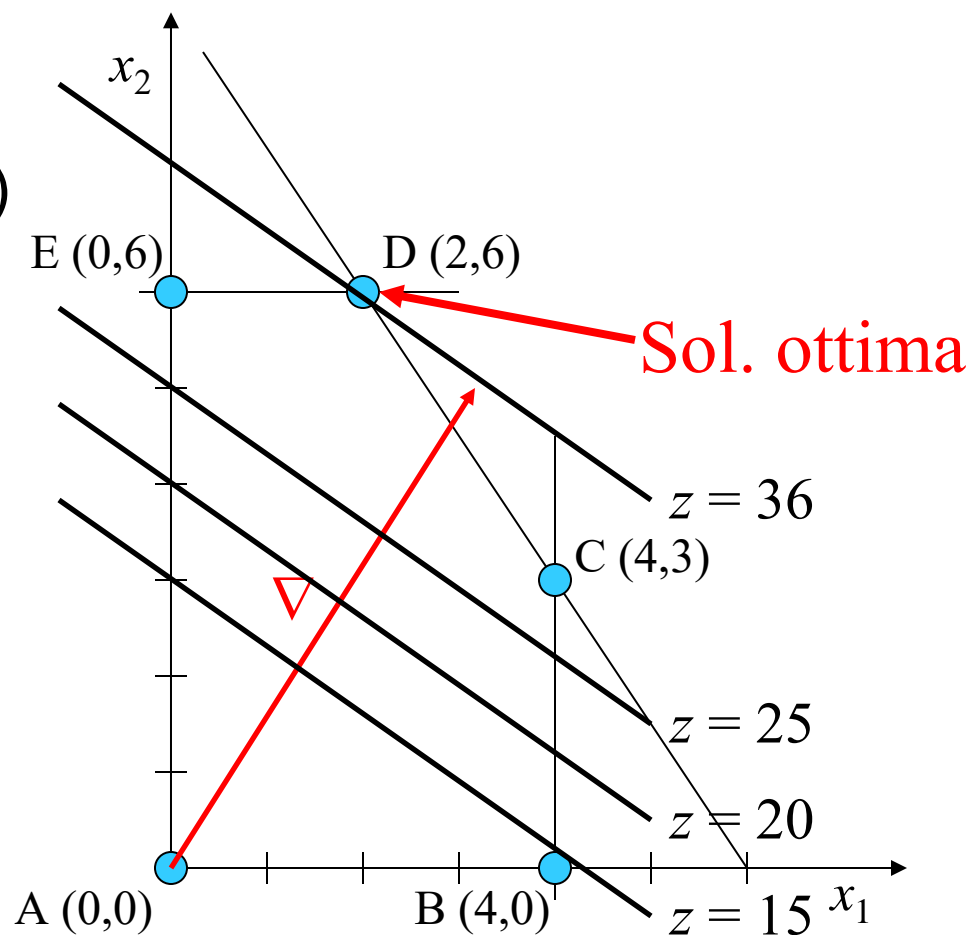


# Soluzione grafica (1)

- si disegnano le rette  
 $z = c^T x = \text{costante}$   
(perpendicolari al gradiente)
- si cerca l'intersezione tra  
 $F$  e la retta con  $z$   
massimo (minimo)

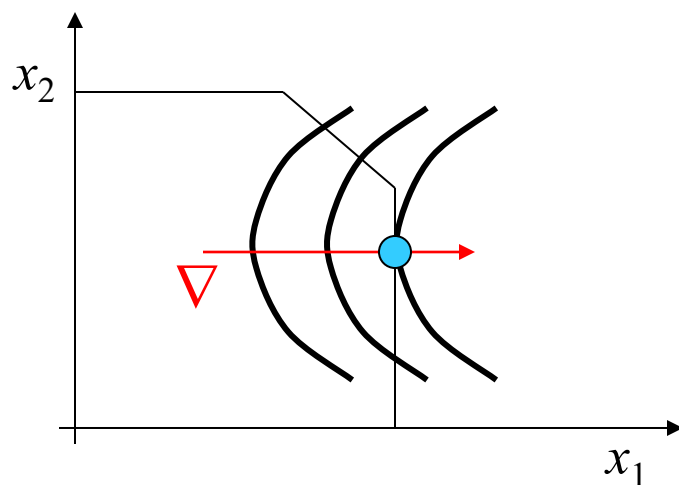
$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\nabla = (3, 5)$$

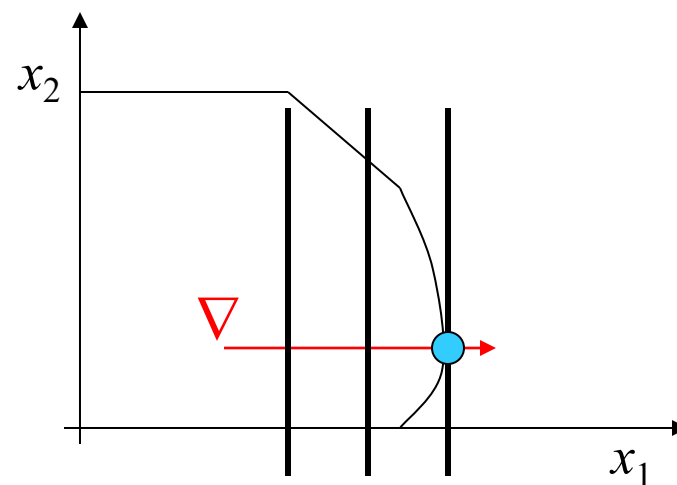


# Soluzione grafica (2)

- L'intersezione ottima avviene sempre in corrispondenza di almeno **un vertice** di  $F$
- vero solo per LP



$\varphi$  non lineare



vincoli non lineari



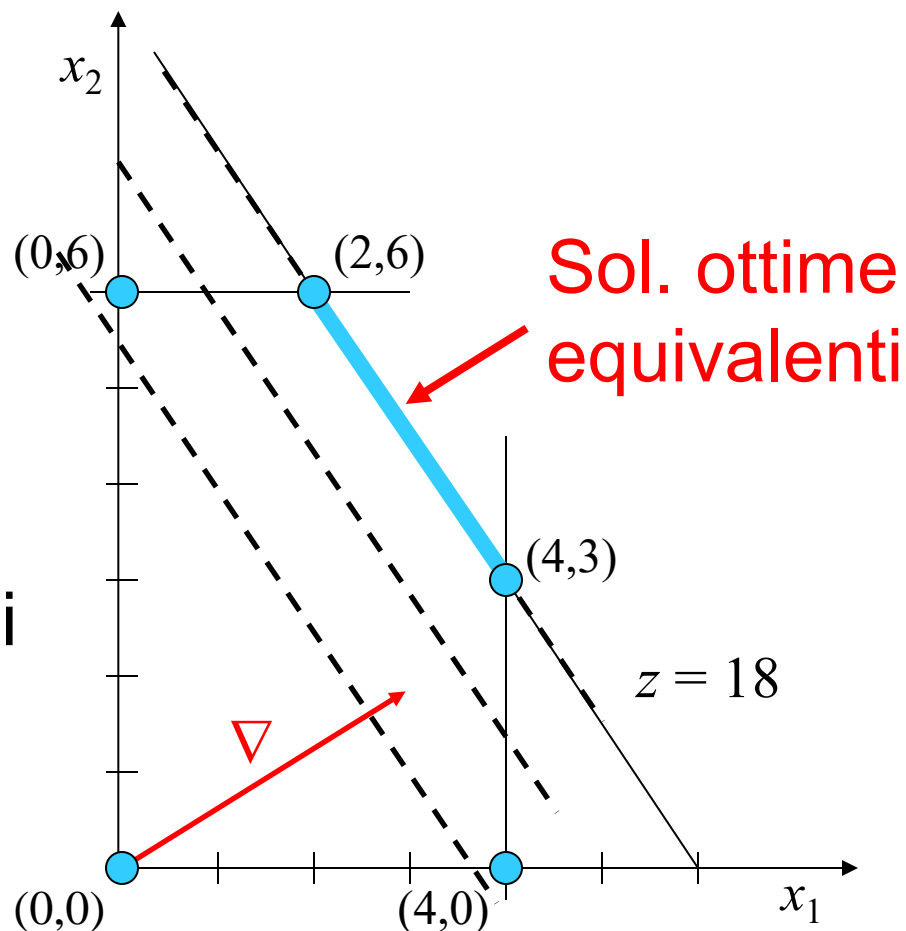
# Soluzioni ottime alternative

- Esempio di soluzioni ottime alternative

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\nabla = (3, 2)$$

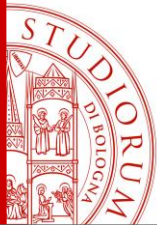
- tra le infinite soluzioni ottime ci sono anche dei vertici





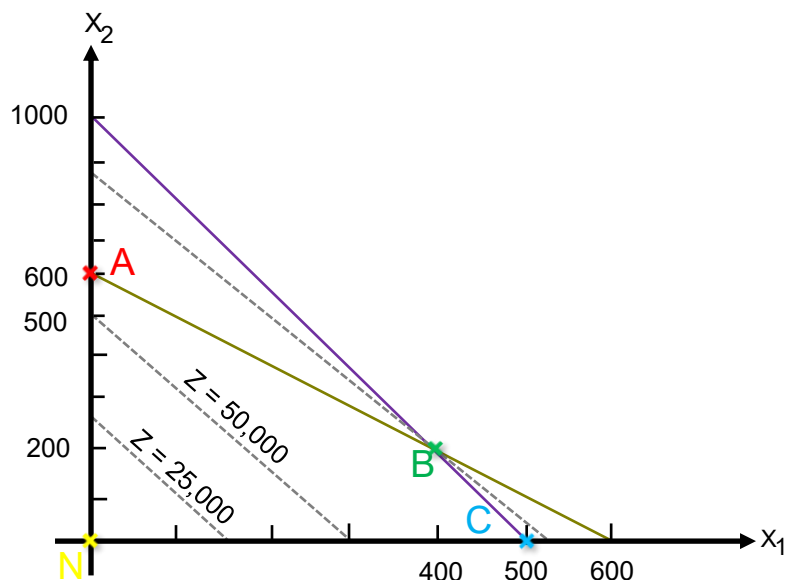
# Esercizio

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = & 150 X_1 + 100 X_2 \\ \text{Subject to:} & X_1 + X_2 \leq 600 \\ & 2 X_1 + X_2 \leq 1000 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$



# Graphical Solution

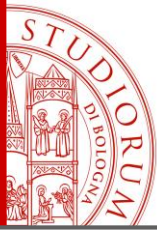
$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 150 X_1 + 100 X_2 \\ \text{Subject to: } & X_1 + X_2 \leq 600 \\ & 2 X_1 + X_2 \leq 1000 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Corner Points	$X_1$	$X_2$	$Z$
N	0	0	0
A	0	600	60,000
B	400	200	80,000*
C	500	0	75,000

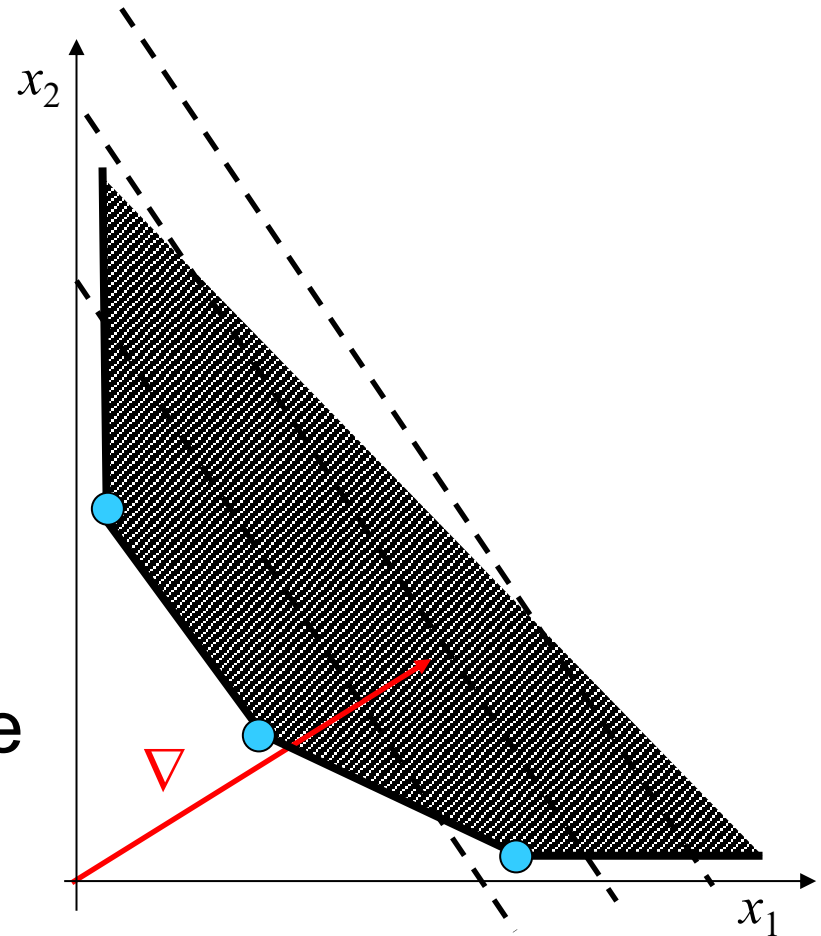
Corner point **B** is the (unique) optimal solution with objective value  $Z = 80,000$ .

- Notes:**
- *Active or binding* constraints intersect with solution point.
  - *Redundant* constraints have no effect on the feasible region.



# Soluzione ottima illimitata

- La **regione** ammissibile può essere **illimitata**
- La **soluzione** può a sua volta essere **illimitata**
- Normalmente significa che il modello è “**sbagliato**”







# Limiti di LP

- Assunzioni implicite nella formulazione di un modello LP:
  - 1) Proporzionalità
  - 2) Additività
  - 3) Divisibilità
  - 4) Certezza

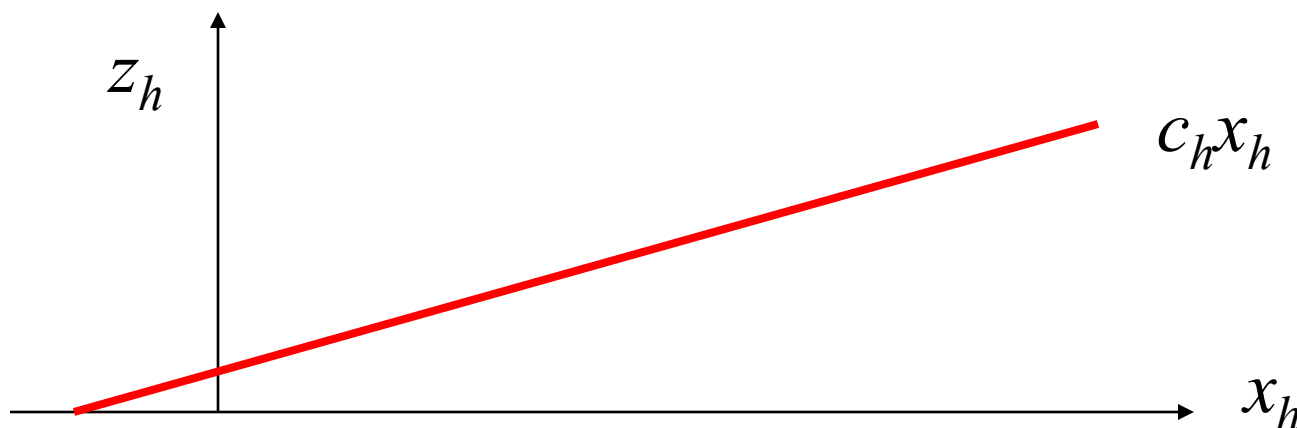


# Proporzionalità

$$Z = \dots + c_h x_h \dots$$

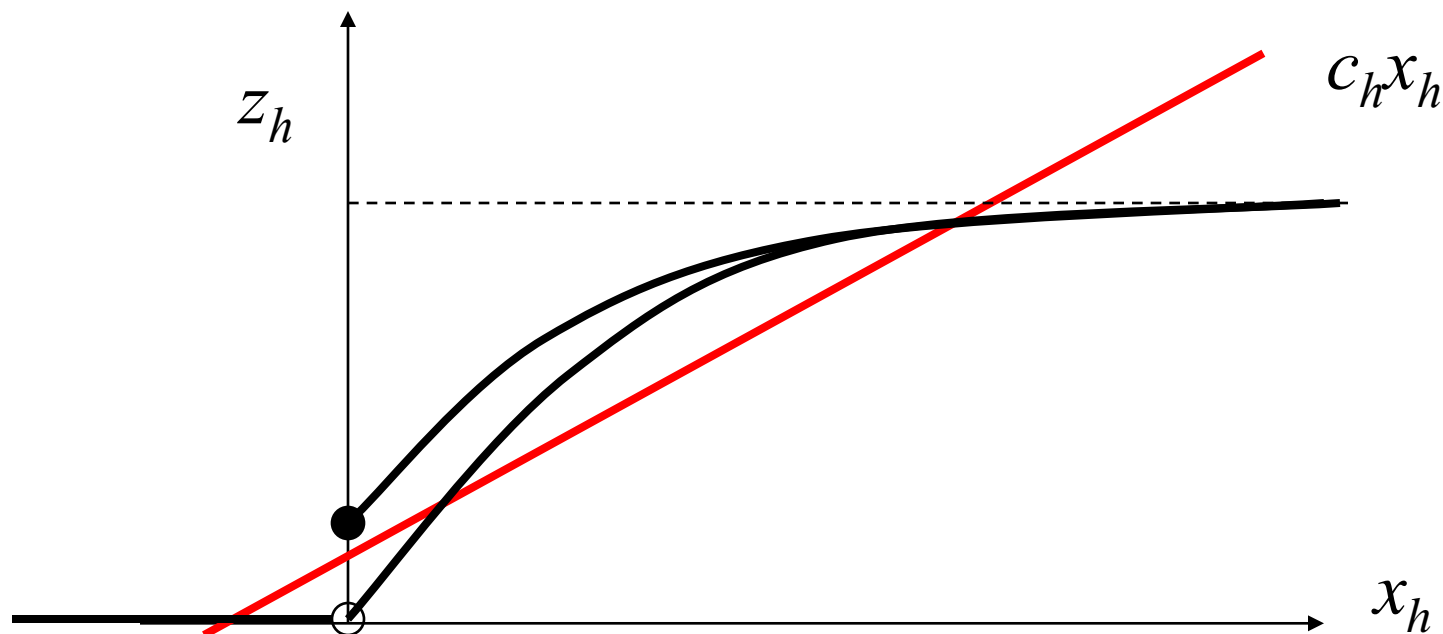
$$\dots + a_{ih} x_h + \dots \leq d_i$$

- l'effetto dell'uso della risorsa  $h$  (f.o., vincoli) è **proporzionale** al livello  $x_h$  impiegato
- la proporzionalità si mantiene in tutto l'intervallo di ammissibilità per  $x_h$



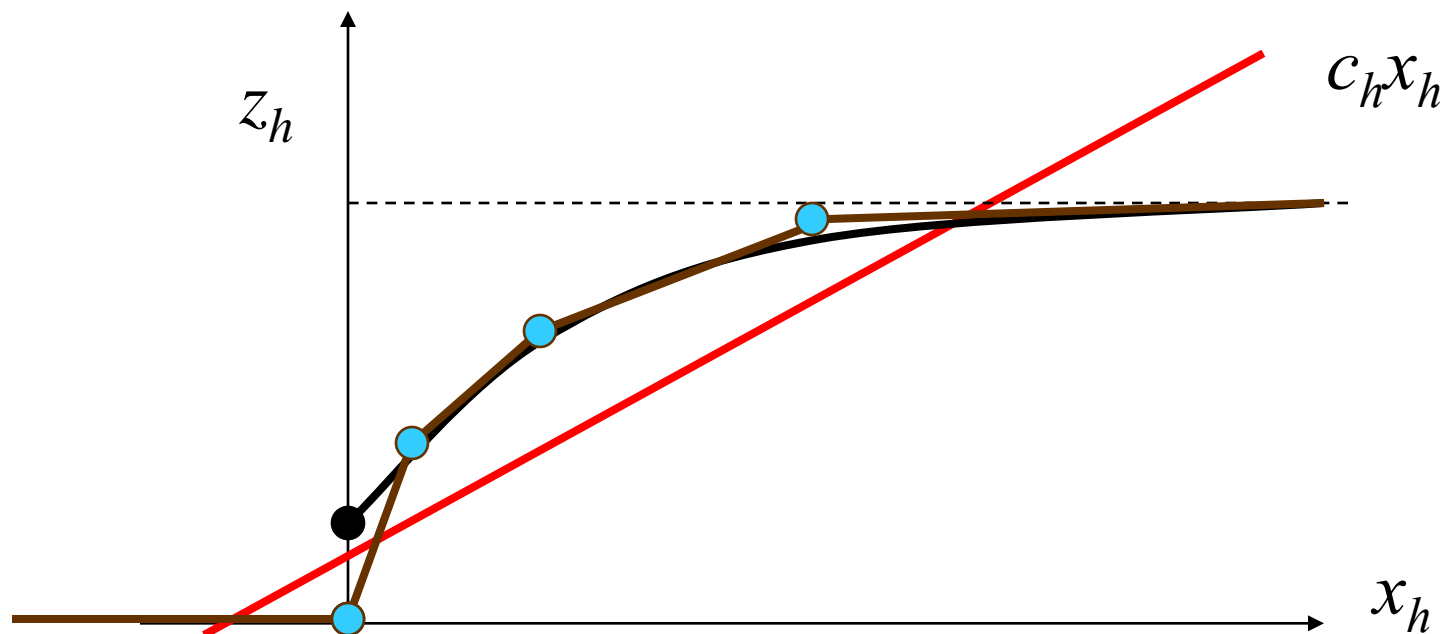
# Proporzionalità (2)

- fenomeni di **saturazione** (costo marginale decrescente)
- situazioni di **start-up** (avviamento)



# Proporzionalità (3)

- Migliore approssimazione con funzione lineare **a tratti**  
modello MILP (**es.** fixed-charge problem)





# Additività

- costo soluzione e consumo delle risorse nei vincoli

$$Z = \dots + c_h x_h + c_k x_k \dots$$

$$\dots + a_{ih} x_h + a_{ik} x_k \dots \leq d_i$$

- somma** dei termini indipendenti legati alle attività  
⇒ Non vi sono **interazioni** tra le diverse attività che influenzano il costo o i vincoli  
⇒ L'effetto dovuto ad una attività non dipende dal livello di produzione delle altre



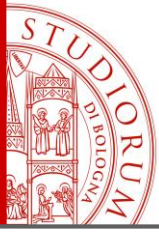
# Divisibilità

- Le variabili decisionali possono essere suddivise ed assumere anche valori **non interi** (**Es.** tasso di produzione....)
- Spesso solo i valori interi hanno significato (**Es.** n. addetti, n. di pezzi prodotti...):
  - riformulazione con variabili che rappresentano percentuali sul numero totale (**Es.** tasso di produzione....)
  - formulazione con modelli ILP e MILP
  - alcuni LP hanno soluzione ottima sempre intera



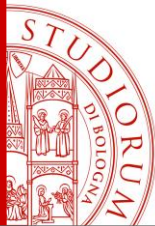
# Certezza

- Tutti i parametri del modello sono **costanti note**
- Spesso i parametri sono frutto di stime, previsioni o sono affetti da errori di misura
- se si modifica un costo o un coefficiente la soluzione resta ottima?
- analisi di sensitività della soluzione alla variazione dei parametri



# Forme di PL





# Programmazione Lineare

Def.:  $(F, \varphi)$  è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo  $\varphi$  è lineare

**Es.**  $\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

- la regione ammissibile  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  è definita da

$$g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p)$$

con  $g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineare  $\forall i$  e  $\forall j$

**Es.**  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq d_i$



# Regione ammissibile di PL

- $F$  è un insieme convesso (poliedro)
- il numero di  $x \in F$  da esaminare per determinare  $x^*$  è un numero **finito** ( $\equiv$  **vertici** del poliedro )  
 $\Rightarrow$  **problema combinatorio**
- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq d$$

$$x \geq 0$$



# Esempio

$$\min 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3 \ -2 \ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Forme di PL (1)

- Forma generale

$A$  = matrice intera  $m \times n$

$d$  = vettore intero di  $m$  elementi

$c$  = vettore intero di  $n$  elementi

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & a_i^T x = d_i \quad i \in M \\ & a_i^T x \geq d_i \quad i \in M' \\ & x_j \geq 0 \quad j \in N \\ & x_j \text{ libera} \quad j \in N' \end{array}$$



# Esempio

min

$x_1$

$+ x_3$

$x_2$	$-2x_3$	$= 4$
-------	---------	-------

$$M = \{1\}$$

$$m = 2$$

$$n = 3$$

$x_1$	$+ x_2$	$\geq 3$
-------	---------	----------

$$M' = \{2\}$$

$x_1$	$, x_2$	$\geq 0$
-------	---------	----------

$x_3$	libera
-------	--------

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \{1, 2\} \quad N' = \{3\}$$

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Forme di PL (2)

- Forma canonica

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ & Ax \geq d \\ & x \geq 0\end{array}$$

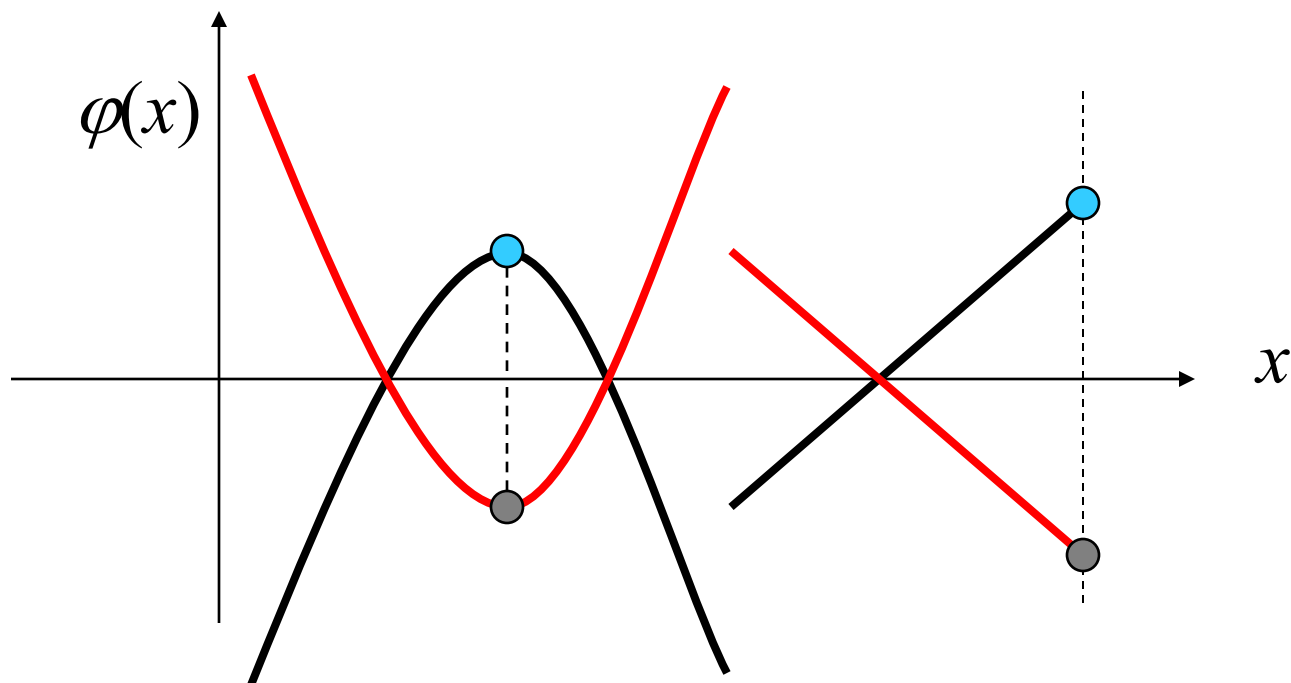
- Forma standard

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ & Ax = d \\ & x \geq 0\end{array}$$

# Le 3 forme sono equivalenti (1)

a) Funzione obiettivo:

$$\max c^T x = -\min (-c^T x)$$





# Le 3 forme sono equivalenti (2)

b) Trasformazione di **disequazioni** in **equazioni**:

$$\text{b1) } x_1 \leq d_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_s = d_1$$

$x_s \geq 0$  variabile **slack**

In ogni soluzione ammissibile  $(x_1, x_s)$ :

**se**  $x_s = 0 \Rightarrow x_1 = d_1$ ; **se**  $x_s > 0 \Rightarrow x_1 < d_1$

$$\text{b2) } x_1 \geq d_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_s = d_1$$

$x_s \geq 0$  variabile **surplus**





# Le 3 forme sono equivalenti (3)

c) Trasformazione di **equazioni** in **disequazioni**:

$$a_i^T x = d_i \Rightarrow \begin{cases} a_i^T x \geq d_i \\ -a_i^T x \geq -d_i \end{cases}$$

d) Variabili **libere**

$$x_i \text{ libera} \Rightarrow x_i = x_i^+ - x_i^- \text{ con } x_i^+, x_i^- \geq 0$$

b), d) *aumentano* ***n***

c) *aumenta* ***m***



# Esempio

$$\begin{array}{rcll} \max z = & -2x_1 + 3x_2 & & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 - x_2 & = & 2 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & & \text{libera} \end{array}$$



# Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (1)

$$\max z = -2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 - x_2$$

$$-2x_1 + x_2$$

$$x_1$$

$$x_2$$

$$\leq 4$$

$$= \cancel{2} \geq 2$$

$$\geq -2$$

$$\geq 0$$

libera



# Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (2)

$$\begin{aligned} \max z = & -2x_1 + \cancel{3x_2} + \color{red}{+3x_2^+ - 3x_2^-} \\ & x_1 + \cancel{2x_2} + \color{red}{+2x_2^+ - 2x_2^-} \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 - \color{red}{x_2^+} + \color{red}{x_2^-} \geq 2 \\ & -2x_1 + \cancel{x_2} + \color{red}{+x_2^+ - x_2^-} \geq -2 \\ & x_1, \color{red}{x_2^+, x_2^-} \geq 0 \\ & \cancel{x_2} \text{ libera} \end{aligned}$$



# Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (3)

$$\begin{array}{rcl} \max z = & -2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- & \\ & \underline{-} \quad \underline{-} \quad \underline{+} & \\ & x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- & \leq 4 \geq -4 \\ & 2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \geq 2 \\ & -2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq -2 \\ & x_1, x_2^+, x_2^- & \geq 0 \end{array}$$



# Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (4)

$$\begin{array}{lcl} \text{max } z = & \cancel{+} 2x_1 & \cancel{-} 3x_2^+ & \cancel{+} 3x_2^- \\ -\text{min } -z = & -x_1 & -2x_2^+ & +2x_2^- & \geq -4 \\ & 2x_1 & -x_2^+ & +x_2^- & \geq 2 \\ & -2x_1 & +x_2^+ & -x_2^- & \geq -2 \\ & x_1 & , x_2^+ & , x_2^- & \geq 0 \end{array}$$



# Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (5)

$$\begin{aligned} -\min -z = & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\ & -x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \geq -4 \\ & 2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \geq 2 \\ & -2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq -2 \\ & x_1, x_2^+, x_2^- & \geq 0 \end{aligned}$$



# Forma generale $\rightarrow$ Forma standard

$$\begin{aligned} - \min - z = & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\ & x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - x_2^+ + x_2^- = 2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0$$

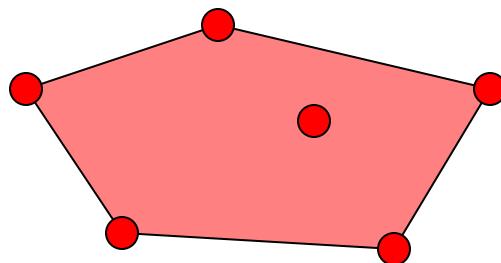


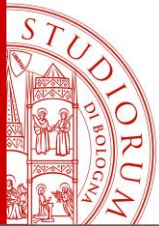
# Vertici ed Insiemi Convessi

Def.:  $z$  è **vertice** di un insieme convesso  $S$

$\Leftrightarrow$  non è esprimibile come combinazione convessa di altri punti di  $S$

Def.: Dato un insieme di punti  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_K\} \subset \mathbb{R}^n$  si dice **chiusura convessa** di  $P$ ,  $\text{conv}(P)$  il più piccolo insieme convesso che contiene  $P$ .





# Teoremi

---

Th. 1:

Ogni punto di un politopo (poliedro limitato) è combinazione convessa dei vertici del politopo

Th. 2:

In un problema PL con  $F$  non vuoto e limitato esiste sempre almeno un vertice ottimo

# Dimostrazione (probl. di minimo)

$c$  = vettore costo;

$x^{(0)}$  = soluzione ottima (non vertice)

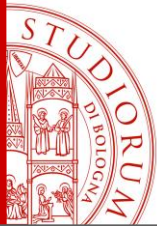
$x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$  = vertici di  $F$

$x^{(0)} \in F \Rightarrow x^{(0)} = \sum_{i=1,p} \lambda_i x^{(i)}$  con  $\sum_{i=1,p} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$

sia  $x^{(j)}$  il vert. di costo min.:  $c^T x^{(j)} = \min_{1 \leq i \leq p} \{c^T x^{(i)}\}$

$$\begin{aligned} c^T x^{(0)} &= c^T \sum_{i=1,p} \lambda_i x^{(i)} \geq c^T x^{(j)} \sum_{i=1,p} \lambda_i = c^T x^{(j)} \\ &\Rightarrow c^T x^{(0)} \geq c^T x^{(j)} \end{aligned}$$

*Esiste un vertice  $x^{(j)}$  cui corrisponde una soluzione non peggiore di  $x^{(0)}$  !!!*



# Esercizi su modelli PL