Modelli PLI

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.)

rev. 1.1(AH) – 2024

(0) Furniture
Setup Costs

Furniturissimo has the capability to manufacture luxury desks, cabinets, and chairs. In order to manufacture these products, it must rent the appropriate equipment at a weekly cost of 120 for the desks, 130 for the cabinets, and 70 for the chairs. The labor and material requirements for each product are shown in the table, along with the selling price and variable cost.

	LABOR HOURS	LUMBER	SALES PRICE	VARIABLE COST
Desks	16	10	330	82
Cabinets	29	15	620	97
Chairs	10	3	150	28

There are 200 labor hours and 100 square feet of lumber available each week. The company identified that they want to <u>maximize their weekly profit</u> while <u>minimizing the weekly labor hours</u> used.

How can we support their planning using optimization?

(I) Indagine di Mercato

- Mix di utenti da intervistare telefonicamente:

	Categoria				
	A	B	C	D	
	150	110	120	100	
mattina	30%	10%	10%	10%	40%
sera	30%	20%	30%	15%	5%

- Telefonate in 2 fasce orarie:
  - Mattina: 1 € per telefonata (almeno il 50%)
  - Sera: 1.5 € per telefonata
- *minimizzare il costo complessivo delle telefonate*

Modello matematico (PLI)

- x_1 : numero di telefonate alla mattina
- x_2 : numero di telefonate alla sera

$$
\begin{array}{lrcrl}
\min & x_1 & + & 1.5\,x_2 & \\
\text{A1:} & 0.3\,x_1 & + & 0.3\,x_2 & \geq 150 \\
\text{A2:} & 0.1\,x_1 & + & 0.2\,x_2 & \geq 110 \\
\text{B1:} & 0.1\,x_1 & + & 0.3\,x_2 & \geq 120 \\
\text{B2:} & 0.1\,x_1 & + & 0.15\,x_2 & \geq 100 \\
 & x_1 & - & x_2 & \geq 0 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \quad \text{INTERE}
\end{array}
$$

(II) Noleggio di macchinari

- Un ente pubblico deve noleggiare dei macchinari

Mese	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
Fabbisogno	9	5	7	9	10	5

- Noleggi possibili per 3 periodi diversi:
  - 1 mese: 400 €
  - 2 mesi: 700 € (= 350 €/mese)
  - 3 mesi: 900 € (= 300 €/mese)
- *minimizzare il costo complessivo di noleggio*

Modello PLI

- Non basta sapere quanti macchinari noleggiare
  - quando (gennaio, febbraio, …)
  - per quanto tempo (1,2 o 3 mesi)

GE1, GE2, GE3 = n. macch. affittati a Gennaio per 1, 2 e 3 mesi.

….

GI1, GI2, GI3 = n. macch. affittati a Giugno per 1, 2 e 3 mesi.

Modello PLI

$$
\begin{array}{ll}
\min & 400\,GE1 + 400\,FE1 + \ldots + 400\,GI1 + \\
 & 700\,GE2 + 700\,FE2 + \ldots + 700\,GI2 + \\
 & 900\,GE3 + 900\,FE3 + \ldots + 900\,GI3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
GE1 + GE2 + GE3 & \geq & 9 \\
FE1 + FE2 + FE3 + GE2 + GE3 & \geq & 5 \\
MA1 + MA2 + MA3 + FE2 + FE3 + GE3 & \geq & 7 \\
AP1 + AP2 + AP3 + MA2 + MA3 + FE3 & \geq & 9 \\
MG1 + MG2 + MG3 + AP2 + AP3 + MA3 & \geq & 10 \\
GI1 + GI2 + GI3 + MG2 + MG3 + AP3 & \geq & 5 \\
GE1, GE2, \ldots, GI2, GI3 & \geq & 0 \quad \text{INTERE}
\end{array}
$$

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
Alessandro Hill – DEI "Guglielmo Marconi"

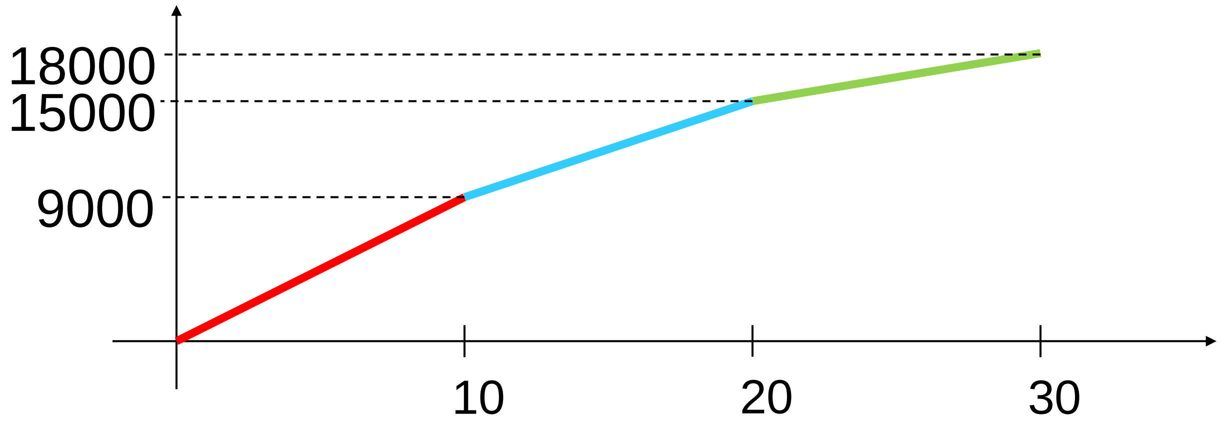
(III) Mix di pubblicità

- Budget di 150 K € per pubblicizzare una nuova iniziativa.
- Due possibili canali pubblicitari:
  - Giornali: 1 K€ per annuncio
  - TV: 10 K€ per annuncio
- Al massimo 30 annunci su giornali e 15 annunci su TV
- Il numero di utenti raggiunti dipende in modo non lineare dal numero di annunci inviati.
- *massimizzare il numero totale di utenti raggiunti*

Mix di pubblicità (2)

Giornali	
n. annunci	Nuovi utenti per annuncio
1−10	900
11−20	600
21−30	300

TV	
n. annunci	Nuovi utenti per annuncio
1−5	10000
6−10	5000
11−15	2000



Modello PLI

- si possono usare variabili binarie per indicare se le variabili decisionali sono nella 1ª, 2ª o 3ª fascia
- Vincoli di tipo logico

Modello PLI

G1, G2, G3 = n. annunci su giornali nelle 3 fasce
T1, T2, T3 = n. annunci su TV nelle 3 fasce

$$\max \quad 900\,G1 + 600\,G2 + 300\,G3 + 10000\,T1 + 5000\,T2 + 2000\,T3$$

$$G1 + G2 + G3 + 10\,T1 + 10\,T2 + 10\,T3 \le 150$$

$$G1,\ G2,\ G3 \le 10$$

$$T1,\ T2,\ T3 \le 5$$

$$G1,\ G2,\ G3,\ T1,\ T2,\ T3 \ge 0, \text{ INTERE}$$

(IV) Turnazione del personale

- personale richiesto per giorno della settimana:

Lu	Ma	Me	Gi	Ve	Sa	Do
22	18	13	14	15	18	25

- ogni persona
  - lavora 5 giorni consecutivi
  - i 2 giorni successivi sono di riposo
- *minimizzare il numero di persone necessarie*
- altri vincoli possibili in problemi reali:
  - turni diversi
  - preferenze

Modello matematico (PLI)

x_1 : numero di persone che iniziano il turno Lun

x_2 : numero di persone che iniziano il turno Mar …

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & \min & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & \\
\text{Lu:} & & x_1 & & & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & \geq 22 \\
\text{Ma:} & & x_1 & + x_2 & & & + x_5 & + x_6 & + x_7 & \geq 18 \\
\text{Me:} & & x_1 & + x_2 & + x_3 & & & + x_6 & + x_7 & \geq 13 \\
\text{Gi:} & & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & & & + x_7 & \geq 14 \\
\text{Ve:} & & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & & & \geq 15 \\
\text{Sa:} & & & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & & \geq 18 \\
\text{Do:} & & & & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & \geq 25
\end{array}
$$

$$x_1 \quad \ldots\ x_7 \geq 0 \ \text{ INTERE}$$

Turnazione personale: varianti

- Una volta stabiliti il numero di persone necessarie per turno, i turni vanno attribuiti alle persone
- Ogni persona esprime una preferenza per il turno (7=prima, 1=ultima scelta)
- Assegnare le persone ai turni massimizzando la preferenza espressa
- Idem tenendo conto dell'anzianità di servizio: punteggio di assegnazione=preferenza*anzianità

(V) Assegnazione di incarichi

- Una compagnia desidera assegnare n =14 impiegati ai suoi m=10 uffici, che hanno una richiesta r_j

Ufficio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Richiesta	1	1	1	1	2	1	2	2	2	1

  - Ogni impiegato ha espresso la propria preferenza p_{ij} per uno specifico ufficio (1=prima …10=ultima)
  - *Assegnare gli impiegati agli uffici massimizzando la soddisfazione per l'ufficio ottenuto (= minimizzazione preferenze assegnate)*

Modello matematico

- Funzione obiettivo (min. preferenze assegnate)

$$\min \quad \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,m} p_{ij} x_{ij}$$

- Un solo ufficio per impiegato:

$$\sum_{j=1,m} x_{ij} \quad = \quad 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

- Il numero richiesto di impiegati per ufficio :

$$\sum_{i=1,n} x_{ij} \quad = \quad r_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

$$x_{ij} \quad \in \{0, 1\} \qquad (i,=1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m)$$

(VI) Riorganizzazione del personale

- Un'azienda prevede la necessità di migliorare nel breve periodo la preparazione del suo personale
- Tre categorie: inesperto, addestrato ed esperto

	Costo licenziamento	Costo assunzione	Assumibili per anno
Esperti	700 €	250 €	500
Addestrati	500 €	150 €	800
Inesperti	350 €	100 €	1200

Riorganizzazione del personale (2)

- Costo di riaddestramento:
  - inesperti $\Rightarrow$ addestrati : 400 €
  - addestrati $\Rightarrow$ esperti : 500 €
- Stima impiegati necessari

	Attuale	Anno 1	Anno 2	Anno 3
Esperti	800	1200	1500	2000
Addestrati	1500	1500	2000	2500
Inesperti	2000	1600	1000	0

Riorganizzazione del personale (3)

- Determinare il piano di assunzioni, licenziamenti ed addestramenti per i prossimi tre anni.
- Obiettivi:
  - minimizzazione dei costi
  - minimizzazione dei licenziamenti

(VII) Localizzazione infrastrutture

«Facility Location Problem»

- apertura centri CUP in una città divisa in 6 zone
- 1 sito per quartiere
- tempi di trasferimento tra i quartieri (in minuti):

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	30	20
2	10	0	25	35	20	10
3	20	25	0	15	30	20
4	30	35	15	0	15	25
5	30	20	30	15	0	15
6	20	10	20	25	15	0

Localizzazione infrastrutture (2)

- massimo tempo di trasferimento 15 minuti

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	–	–	–	–
2	10	0	–	–	–	10
3	–	–	0	15	–	–
4	–	–	15	0	15	–
5	–	–	–	15	0	15
6	–	10	–	–	15	0

- *minimizzare il numero di centri aperti*

Modello matematico (PLI)

x_i : 1 se si attiva il sito nel quartiere *i*, 0 altrimenti

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & \min & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & & \\
1: & & x_1 & + x_2 & & & & & \geq & 1 \\
2: & & x_1 & + x_2 & & & & + x_6 & \geq & 1 \\
3: & & & & + x_3 & + x_4 & & & \geq & 1 \\
4: & & & & + x_3 & + x_4 & + x_5 & & \geq & 1 \\
5: & & & & & + x_4 & + x_5 & + x_6 & \geq & 1 \\
6: & & & + x_2 & & & + x_5 & + x_6 & \geq & 1
\end{array}
$$

$x_1 \quad \ldots x_6 \geq 0$ INTERE

(VIII) Problema dello zaino (KP01)

«Knapsack Problem»

- Problema di selezione:
- n oggetti
- P_j profitto dell'oggetto j (j=1,…,n)
- W_j peso dell'oggetto j (j=1,…,n)
- 1 contenitore (zaino) di capacità K
- *determinare un <u>sottoinsieme</u> di oggetti avente massimo profitto e peso complessivo non superiore alla capacità K dello zaino*

Modello PLI

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel contenitore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\max \quad \sum_{\mathrm{j}=1,n} P_j x_j$$

$$\sum_{\mathrm{j}=1,n} W_j x_j \leq K$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

oppure $\quad 0 \leq x_j \leq 1$ INTERA $(j = 1, \ldots, n)$

The Knapsack Problem

The Knapsack Problem is one of the most useful models in applications. Assume that a hiker wants to carry a knapsack not heavier than 21 lbs. He has 8 articles he can choose from. Value and weight of each article are:

Article	1	2	3	4	5	6	7	8
Value	3	6	2	6	7	4	5	2
Weight	2	5	3	9	1	4	7	8

Determine a knapsack packing that maximizes the value of packed items!

Decision Variables:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ if article } i \text{ is packed } (i = 1, \ldots, 8) \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Binary decision variables!

Objective: Max $3X_1 + 6X_2 + 2X_3 + \ldots + 2X_8$

Constraints: The model has a single capacity constraint.

$$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 + \ldots + 8X_8 <= 21$$

Possible applications?

(IX) Problema KP multiplo (MKP01)

Multi-Knapsack Problem

- n oggetti
- P_j profitto dell'oggetto j (j=1,…,n)
- W_j peso dell'oggetto j (j=1,…,n)
- m contenitori, ciascuno di capacità K_i (i=1,…,m)
- un oggetto può al più andare in un solo contenitore
- *impaccare nei contenitori un sottoinsieme di oggetti avente massimo profitto in modo che la somma dei pesi degli oggetti inseriti in ogni contenitore non superi la corrispondente capacità K_i*

Modello PLI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\max \sum_{j=1,n} P_j \left(\sum_{i=1,m} x_{ij}\right)$$

$$\sum_{j=1,n} W_j x_{ij} \le K_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1,m} x_{ij} \le 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

(X) Bin Packing (1BP)

- n oggetti
- W_j peso dell'oggetto j (j=1,…,n)
- n contenitori (bin), ciascuno di capacità K

- *impaccare tutti gli oggetti nel minor numero possibile di contenitori in modo che la somma dei pesi degli oggetti inseriti in ogni contenitore non superi la capacità K*

Modello PLI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } i \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello PLI

$$\min \quad \sum_{i=1,n} y_i$$

$$\sum_{j=1,n} w_j x_{ij} \leq K y_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1,n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

(XI) Assegnazione di incarichi

n persone ed *n* incarichi

c_{ij} tempo/costo ass. incarico *j* alla pers. *i*

- *determinare l'assegnamento delle persone agli incarichi di costo complessivo minimo*
- Es. $n = 2$

	lavoro	
pers.	1	2
1	20	40
2	30	20

Assegnazione di incarichi (2)

- $n = 3$

	lavoro		
pers.	1	2	3
1	20	60	30
2	80	40	90
3	50	70	80

N. soluzioni = $n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots = n!$

se $n = 20 \rightarrow\ n! \cong 2.4 * 10^{18}$

enumerazione su PC (1 Gflop/sec.): 4.6K anni !

Variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la persona } i \text{ esegue l'incarico } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

	lavoro		
pers.	1	2	3
1	20	60	30
2	80	40	90
3	50	70	80

	variabili		
	1	2	3
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0

Matrice di permutazione: un solo 1 ∀ riga e colonna

Modello matematico (PLI)

- Funzione obiettivo (min. costo)

$$\min \quad \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} c_{ij} x_{ij}$$

	variabili		
	1	2	3
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0

- Un solo lavoro per persona:

$$\sum_{j=1,n} x_{ij} \quad = \quad 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

- Una sola persona per lavoro:

$$\sum_{i=1,n} x_{ij} \quad = \quad 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \quad \in \{0, 1\} \qquad (i,j = 1, \ldots, n)$$

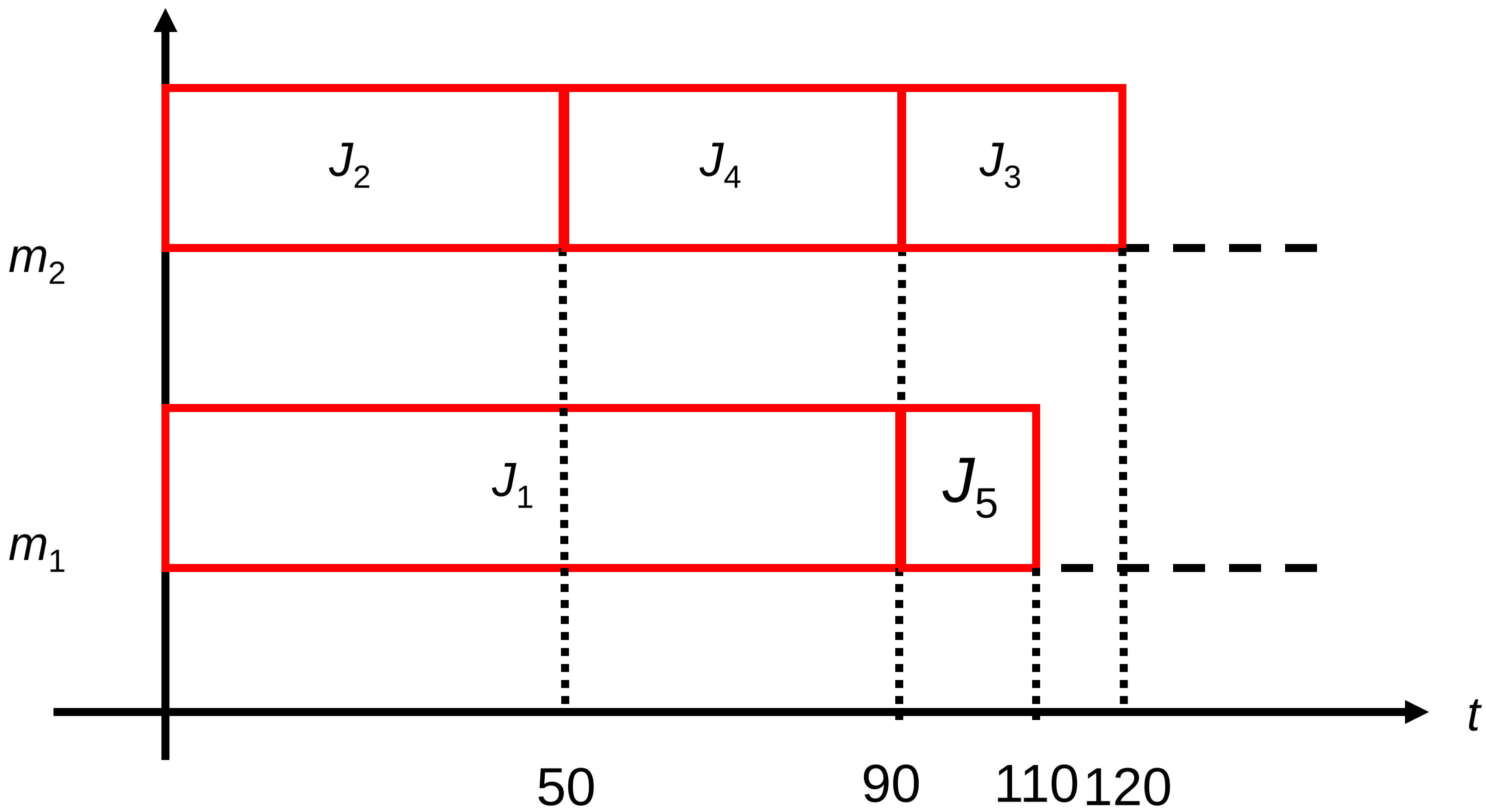
(XII) Sequenziamento di lavorazioni

- *n* lavorazioni
- p_j tempo di processamento lavorazione *j*
- no preemption = una volta iniziata la lavorazione non può essere interrotta
- *m* macchine identiche
- una sola lavorazione alla volta per ogni macchina

- *assegnare le lavorazioni alle macchine in modo tale che il tempo totale di processamento sia minimo*

Sequenziamento di lavorazioni (2)

- n = 5, m = 2, p_j = {90, 50, 30, 40, 20}



Variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la macchina } i \text{ esegue lavorazione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

	lavorazioni				
macch.	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	0	1	1	1	0

z = massimo tempo di lavorazione (makespan)

Modello matematico (PL mista)

- Funzione obiettivo (min. makespan)

$$\min \quad z$$

- definizione makespan:

$$\sum_{j=1,n} p_j x_{ij} \quad \leq z \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

- Ogni lavorazione su una sola macchina:

$$\sum_{i=1,m} x_{ij} \quad = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \quad \in \{0, 1\} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

$$z \quad \geq 0$$