Programmazione Lineare Intera: Algoritmo Branch and Bound

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.)

rev. 2.2(AH) – 2024

Algoritmi generali per PLI

- Metodi esatti tradizionali (anni 60-oggi):
  - Metodo dei piani di taglio (cutting planes)
  - Branch-and-Bound
  - Programmazione Dinamica
- …
- Metodi esatti più avanzati (anni 90-oggi):
  - Branch-and-Bound + Cutting planes = Branch-and-Cut
  - Branch-and-Price/Column generation

Branch and Bound

- Tecnica generale per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria (F finito)
- Si basa sulla scomposizione del problema in sottoproblemi ("Divide and Conquer")
- Problema da risolvere: $P^0 = (z(\cdot), F(P^0))$
  - Funzione obiettivo: $z(\cdot)$
  - Regione ammissibile: $F(P^0)$
- Soluzione ottima: $z^* = z(P^0) = \min\{z(x) : x \in F(P^0)\}$
- Miglior soluzione ammissibile nota: z^{Best}
  (alla fine $z^* = z^{Best}$)

Branch and Bound (2)

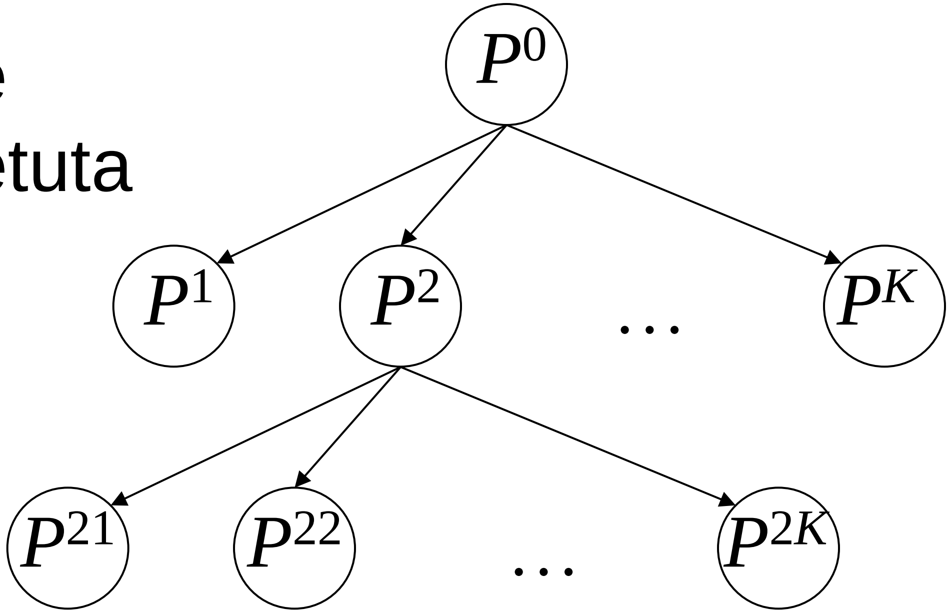
- Suddivisione di P^0 in K sottoproblemi: P^1, P^2, …, P^K la cui totalità rappresenti P^0
- Ad esempio si ottiene suddividendo $F(P^0)$ in sottoinsiemi $F(P^1)$, $F(P^2)$, …, $F(P^K)$ tali che

$$\bigcup_{k=1}^{K} F\left(P^k\right) = F\left(P^0\right)$$

- preferibilmente la regione ammissibile va partizionata: $F(P^i) \cap F(P^j) = \emptyset \quad \forall\ P^i, P^j: i \neq j$

Rappresentazione

- Il processo di suddivisione (ramificazione, Branching) si può rappresentare mediante un albero decisionale (Branch Decision Tree)
  - Nodi: problemi, Archi: relazione di discendenza
  - La suddivisione può essere ripetuta ricorsivamente



Branch and Bound (3)

- La soluzione ottima del sottoproblema P^k è:
  $$z^k = z(P^k) = \min\{z(x) : x \in F(P^k)\}$$
- risolvere P^0 equivale a risolvere tutti i P^k generati:
  $$z^* = z(P^0) = \min\ \{z(P^1), z(P^2), \ldots, z(P^K), \ldots\}$$
- Un sottoproblema P^k è risolto se:
  1. Si determina la soluzione ottima di P^k
     (Es. PLI: $P^k \rightarrow C(P^k)$ con soluzione x^{Ck} intera);
  2. Si dimostra che $F(P^k) = \emptyset$ (P^k impossibile);
  3. Si dimostra che $z(P^k) \geq z^{Best}$
     (Es. PLI : se $z^{Ck} \geq z^{Best}$ allora anche $z^k \geq z^{Best}$)
- I sottoproblemi non risolti vanno suddivisi

Branch and Bound per PLI

- (P^0) min $z^0 = c^T x$

$$Ax = d$$

$$x \geq 0, \text{ intero}$$

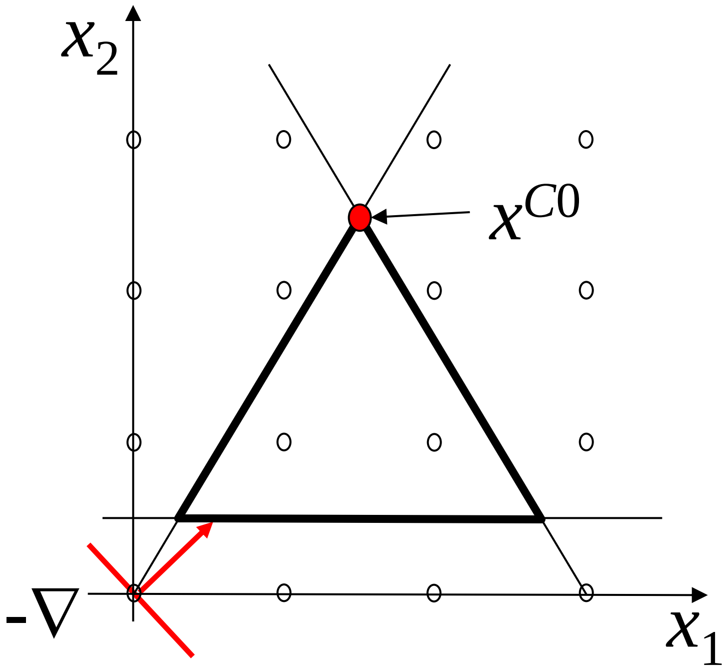
Notazione:

  - x^k soluzione ottima di P^k (intera), di valore z^k ($z^0 \equiv z^*$)
  - x^{Ck} soluzione ottima di $C(P^k)$, di valore z^{Ck}
- Si noti che: $z^{Ck} = c^T x^{Ck} \leq z^k = c^T x^k$
- Se x^{C0} è intera $\Rightarrow x^* = x^0 = x^{C0}$ (soluzione ottima);
- Altrimenti …

Branch and-Bound per PLI (2)

Esempio di problema PLI:

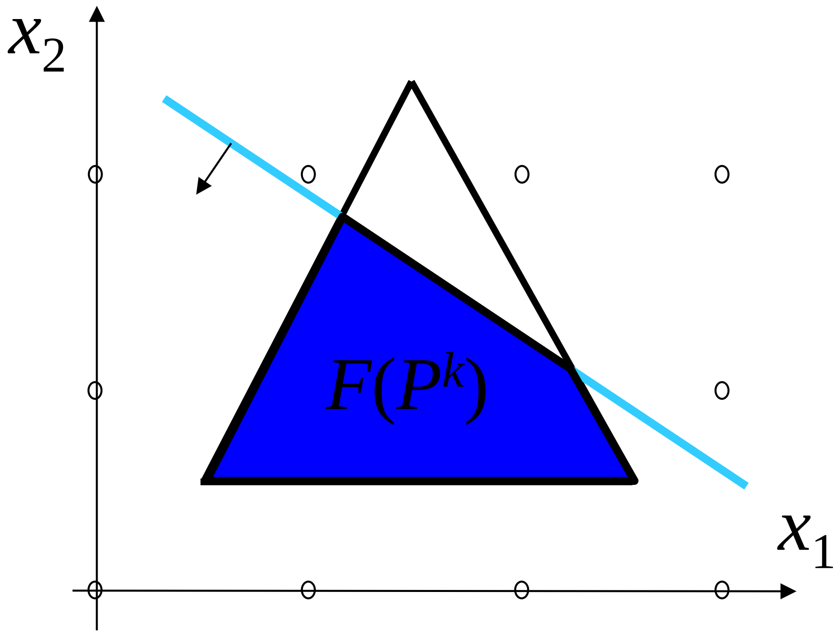
$$\begin{array}{llll} \max z & x_1 & +x_2 & \\ s.t. & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 \\ & 5x_1 & -3x_2 & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 1/2 \\ & x_1 \quad , & x_2 & \geq 0 \\ & & & \text{intere} \end{array}$$



- $x^{C0} = (3/2,5/2)$

Branching

- La soluzione di $C(P^0)$ è frazionaria:
  ➔ suddividi $F(P^0)$ in K parti (Es. K=2)
- $F(P^k)$ si può ottenere aggiungendo a $F(P^0)$ un vincolo $\alpha^k x \leq \beta^k$



Branching (2)

- Scelta una componente x^{C0}_j frazionaria, imponiamo due condizioni mutuamente esclusive ed esaustive, valide per ogni soluzione intera di P^0:

$$x_j \le \lfloor x^{C0}_j \rfloor \quad \text{or} \quad x_j \ge \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

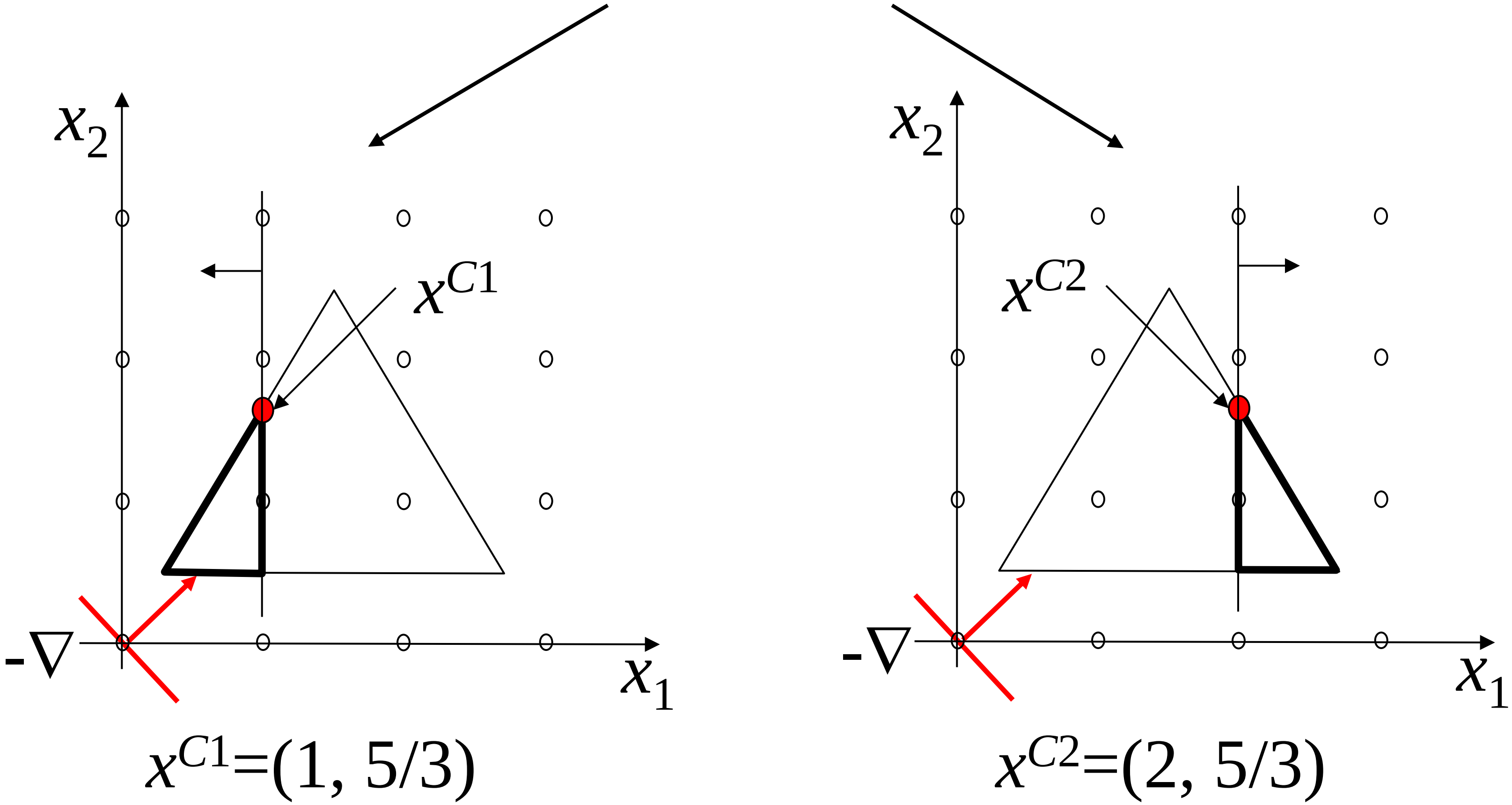
$$(P^1) \ \min z^1 = c^T x$$
$$Ax = d$$
$$x \ge 0 \text{ ,intero}$$
$$x_j \le \lfloor x^{C0}_j \rfloor$$

$$(P^2) \ \min z^2 = c^T x$$
$$Ax = d$$
$$x \ge 0 \text{ ,intero}$$
$$x_j \ge \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

$$\boxed{z^0 = \min (z^1 , z^2)}$$

Prima ramificazione

- Es : $x^{C0}_1 = 3/2 \Rightarrow x_1 \leq 1$ or $x_1 \geq 2$:



Branching (3)

- Normalmente x^{C1} e /o x^{C2} non sono interi
  $\Rightarrow$ si continua a ramificare, cioè :
- Da ogni problema P^i si creano due nuovi problemi P^j e P^k a meno che :
  - x^{Ci} sia intero, oppure
  - il rilassamento continuo di P^i sia impossibile
- Quale variabile si sceglie per il Branching ?
  - la prima frazionaria
  - quella con parte frazionaria maggiore
  - …

Strategia di esplorazione

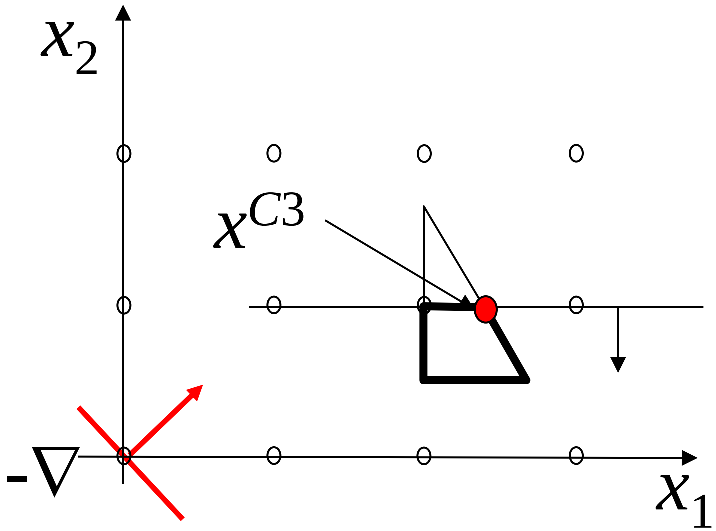
- Se esiste più di un sottoproblema “in sospeso”, qual è il prossimo da esaminare ?
- $z^{C1} = 8/3 \geq z^1$; $z^{C2} = 11/3 \geq z^2$ (problema di max)
- se c^T è intero, allora $z^* = c^T x$ è intera con x intera da cui $z^C \geq \lfloor z^C \rfloor \geq z^*$ (upper bound migliore) (se problema di minimo: $z^C \leq \lceil z^C \rceil \leq z^*$)
- Prossimo sottoproblema da esaminare:
  - $z^1 \leq \lfloor 8/3 \rfloor = 2$, mentre $z^2 \leq \lfloor 11/3 \rfloor = 3$

  ➔ meglio P^2 !

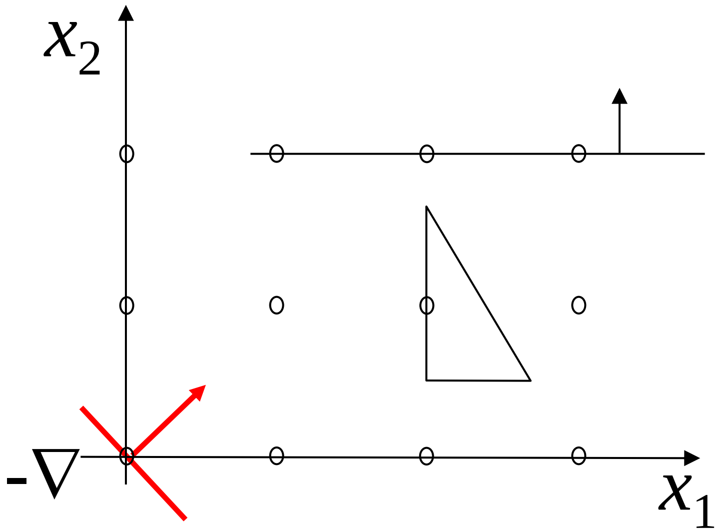
Seconda ramificazione

- Es: da P^2 : $x^{C2}{}_2 = 5/3$

$(P^3)\ P^2 + x_2 \le 1$ $(P^4)\ P^2 + x_2 \ge 2$



x^{C3}=(12/5, 1)



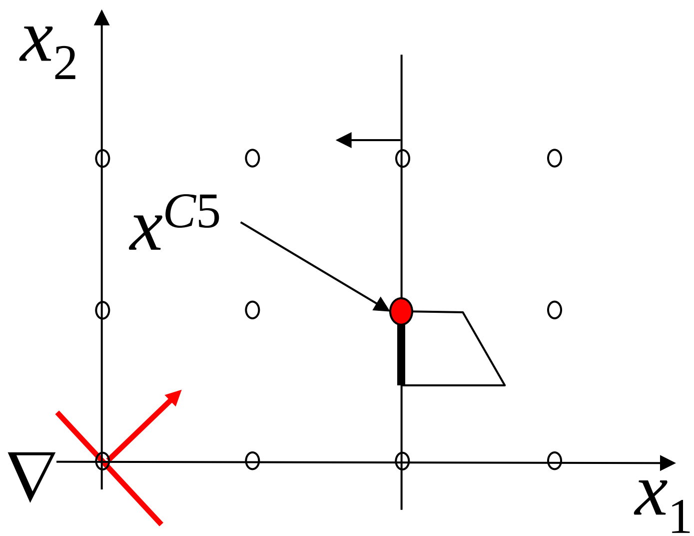
impossibile

Terza ramificazione

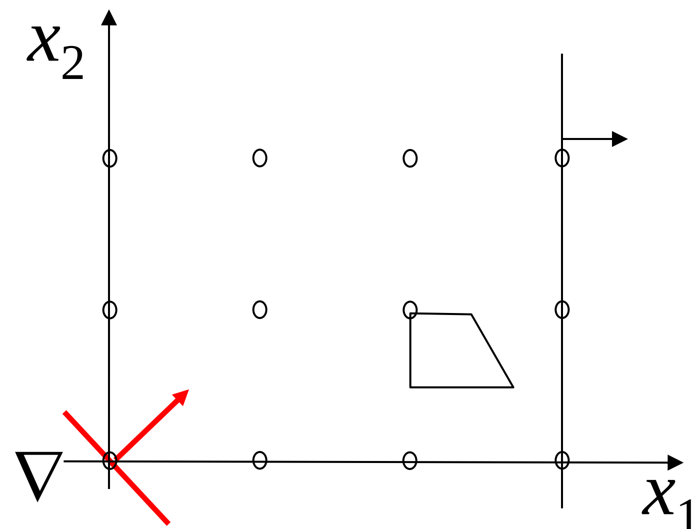
- Es: da P^3 : $x^{C3}{}_1 = 12/5$

$(P^5)\ P^3 + x_1 \le 2$

$(P^6)\ P^3 + x_1 \ge 3$

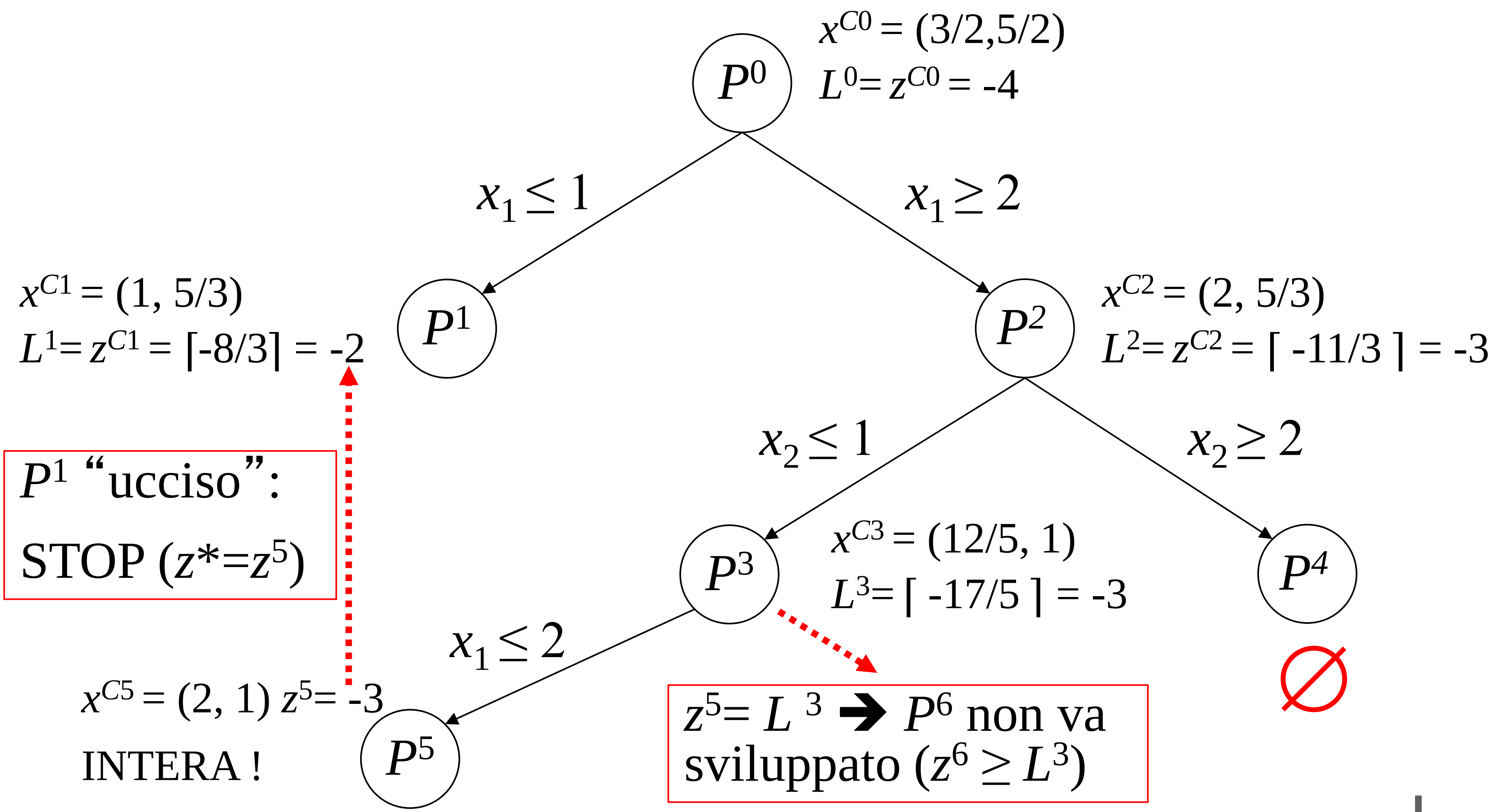


x^{C5}=(2, 1) INTERA !



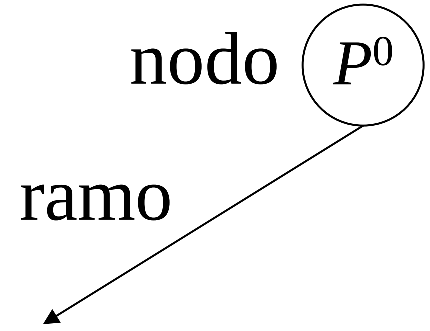
impossibile

Albero decisionale



Terminologia

- 0 (o P^0) nodo radice
- 4, 5, … nodi "foglia"
- 2 "padre" di 3 e 4
- 3 e 4 "figli" di 2
- 2 "progenitore" di 3, 4 e 5
- 3, 4, 5 "discendenti" di 0 e 2



- Si continua il branching finché esistono nodi attivi
- Soluzione di P^0 = sol. della foglia di costo massimo