

# Introduzione alla Ricerca Operativa ed al Supporto alle Decisioni

Alessandro Hill

Basato sul materiale di  
Daniele Vigo (D.E.I.) & Marco Boschetti (D.M.).

rev. 1.2(AH) – 2024



# Cos'è la ricerca operativa (RO)?

## What is Operations Research (OR)?

**“OR is the application of scientific & mathematical methods to the study & analysis of problems involving complex systems.”** (INFORMS)

«La RO è l'applicazione di metodi scientifici e matematici allo studio e all'analisi di problemi che coinvolgono sistemi complessi.»

**“In a nutshell, OR is the discipline of applying advanced analytical methods to help make better decisions.”** ([www.scienceofbetter.org](http://www.scienceofbetter.org))

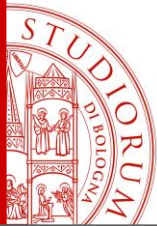
«In poche parole, la RO è la disciplina che applica metodi analitici avanzati per aiutare a prendere decisioni migliori.»

**“OR applies scientific method to the management of organized systems in business, industry, government and other enterprises.”** (Cornell University)

«La RO applica il metodo scientifico alla gestione di sistemi organizzati in ambito aziendale, industriale, governativo e in altre imprese.»

**“The central objective of OR is optimization, i.e., to do things best under the given circumstances.”** (Wolfram MathWorld)

«L'obiettivo centrale della RO è l'ottimizzazione, ossia fare le cose nel modo migliore possibile nelle circostanze date.»



# Cos'è la ricerca operativa?

**La Ricerca Operativa è l'approccio scientifico alla decisione esecutiva, che consiste in:**

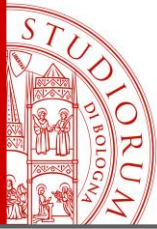
- 1. L'arte della modellizzazione** matematica dei sistemi complessi,
- 2. La scienza dello sviluppo di tecniche di soluzione** utilizzate per risolvere questi modelli,
- 3. La capacità di comunicare** efficacemente i **risultati** al decisore.



# Utilizzi dei modelli decisionali

- Risolvi **problemi complessi**.
- Quadro analitico per valutare i **problemi aziendali moderni**.
- Tecniche applicabili in **molte aree** come:
  - Contabilità, Economia e Finanza
  - Logistica, Management e Marketing
  - Produzione, Operazioni e Trasporti

Tuttavia, esse sono soggette a **limitazioni**...

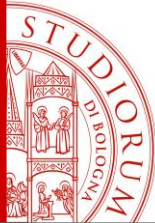


# Utilizzi dei modelli decisionali

Possono essere applicati quando:

- Si progetta e si implementa **nuove operazioni o procedure**,
- Si valuta un insieme di **operazioni o procedure in corso**,
- Si determinano e si raccomandano **azioni correttive** per operazioni e procedure che producono risultati insoddisfacenti.

→ Discussion



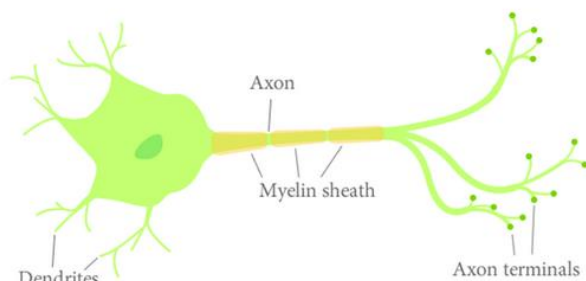
# Introduzione

- I metodi di ottimizzazione hanno un'ampia gamma di applicazioni e tra i diversi ambiti abbiamo il **Supporto alle Decisioni**.
- In questa introduzione forniremo il contesto generale e degli **esempi di applicazioni**. Lo scopo è quello di motivare quanto vedremo nelle lezioni successive, che saranno necessariamente più impegnative.
- Il corso si concentrerà sui metodi dell'ottimizzazione propri della **Ricerca Operativa**, ma in questa introduzione proveremo a definire le possibili interrelazioni con altri ambiti.
- Ricordate che la matematica non è una punizione per chi si è iscritto a un corso di laurea scientifico, ma **uno strumento di lavoro molto prezioso**.

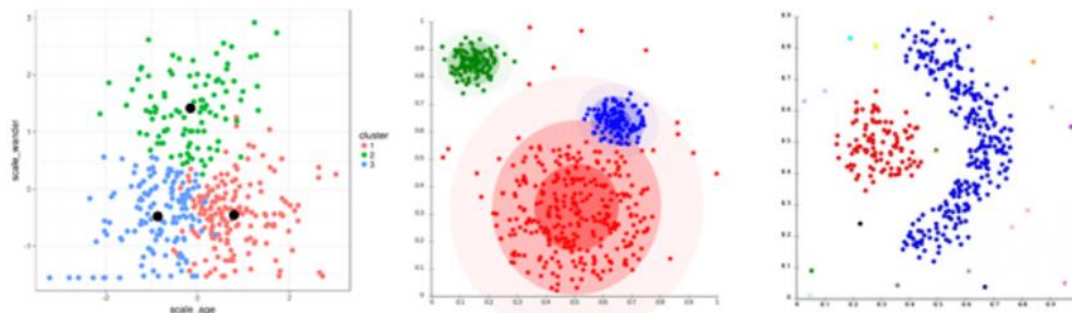
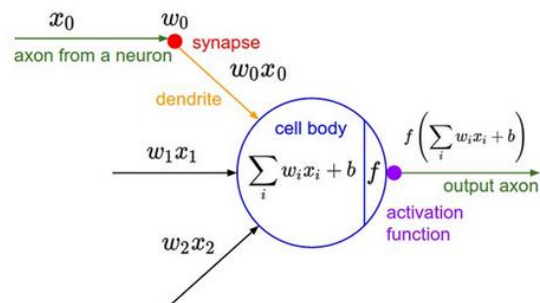
# Introduzione

Dietro all'Intelligenza Artificiale c'è molta ottimizzazione.

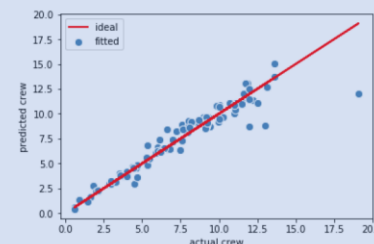
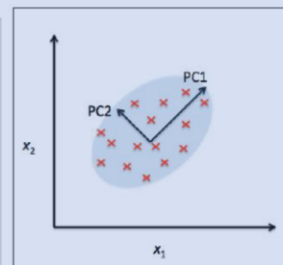
Real Neuron



Artificial Neuron



$X_1^{(1)}$	$X_2^{(1)}$	$X_3^{(1)}$	$X_4^{(1)}$
$X_1^{(2)}$	$X_2^{(2)}$	$X_3^{(2)}$	$X_4^{(2)}$
$X_1^{(3)}$	$X_2^{(3)}$	$X_3^{(3)}$	$X_4^{(3)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_1^{(n)}$	$X_2^{(n)}$	$X_3^{(n)}$	$X_4^{(n)}$

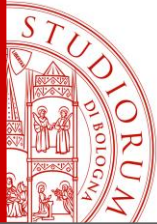


$$\sigma_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_j^{(i)} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \left( \frac{X_k^{(i)} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \quad MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i| \quad P(B/A) = \frac{P(B) \times P(A/B)}{P(A)}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{precision} + \frac{1}{recall} \right) \quad \hat{y}_i = \omega_0 + \sum_{j=1}^4 X_{ij} \omega_j$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$Sensitivity = \frac{TP}{TP + FN}$$



# Introduzione

- Il processo di **Trasformazione Digitale** ha pervaso l'intera società e le aziende, per cui il ruolo dell'ICT (Information & Communications Technology) è diventato centrale.
- Chi progetta e sviluppa soluzioni ICT è prima di tutto un consulente che deve saper **risolvere problemi**.
- Uno degli ambiti di applicazione dell'ICT è il supporto alle decisioni, che consiste nel realizzare **soluzioni software** che aiutano manager, medici, operatori, etc., a individuare la “miglior” decisione in ambito aziendale, finanziario, medico, etc.
- I metodi utilizzati per sviluppare soluzioni software per il supporto alle decisioni spaziano **dall'ottimizzazione all'intelligenza artificiale** e richiedono una conoscenza approfondita della matematica.
- L'ottimizzazione matematica e l'intelligenza artificiale sono settori strettamente legati e **spesso sovrapponibili**, ma non coincidono.

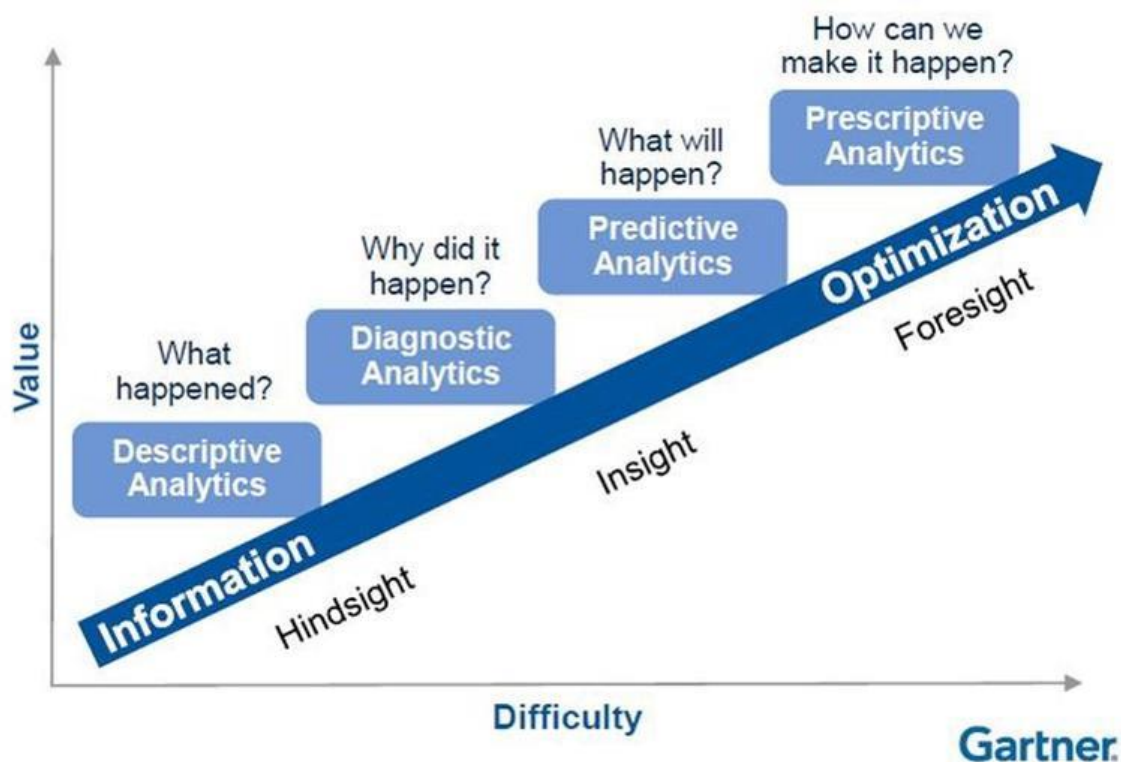


# Introduzione

- In questo corso dimostreremo che per sviluppare una soluzione per il supporto alle decisioni sono necessari i seguenti passi:
  1. modellare matematicamente il problema che si vuole risolvere;
  2. identificare la sua complessità (se possibile);
  3. progettare un algoritmo più adatto,
- Mostreremo come problemi **molto semplici** da formulare possono risultare molto difficili da risolvere e.
- Problemi **molto complessi** da descrivere possono essere in realtà molto facili da risolvere.
- **Partiremo definendo** cosa è un problema, un modello e un algoritmo.

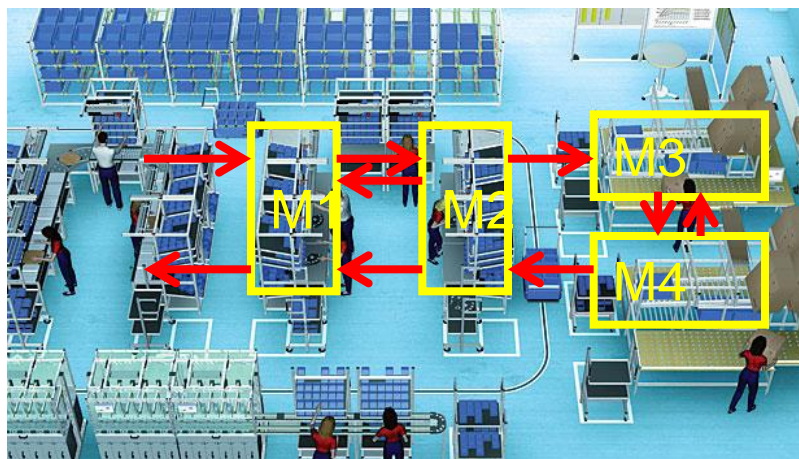
# Operations Research & Analytics

La R.O. è una disciplina dell'Intelligenza Artificiale nota anche come:  
**Prescriptive Analytics**



# Cosa è un problema decisionale ?

- Scelta, tra diverse **alternative**, della combinazione di un insieme di decisioni (=soluzione) che consente di ottenere dal sistema le prestazioni desiderate
- Es. Impianto produttivo con macchine multiutensile



## Decisioni:

- layout impianto
- tipo di macchine
- sequenza lavorazioni

**Prestazioni (KPI):** max produttività, min costo, ...

# Le basi della Ricerca Operativa ?

Matematica,  
Fisica, Statistica

Ingegnerie



Informatica

Economia

Ricerca Operativa (Operations Research)

Scienza della Gestione (Management Science)

Scienza delle Decisioni (Decision Science)



# Decisioni quaLitative

- Un qualsiasi problema decisionale può essere affrontato in maniera **qualitativa**, ad esempio:
  1. scegliendo la decisione più simile a quelle prese in passato;
  2. attraverso una votazione democratica;
  3. basandosi sull'esperienza;
  4. ...



# Decisioni quaNTitative

- Oppure, si può procedere in maniera **quantitativa**:
  1. definendo una funzione di merito (profitto, costo) per ciascuna delle opzioni possibili;
  2. valutando ciascuna delle alternative rispetto a vincoli e obiettivi, e
  3. scegliendo l'alternativa che rispetta obiettivi e vincoli e **massimizza la funzione di merito**.



# Decisioni quantitative (#2)

- Il passo precedente

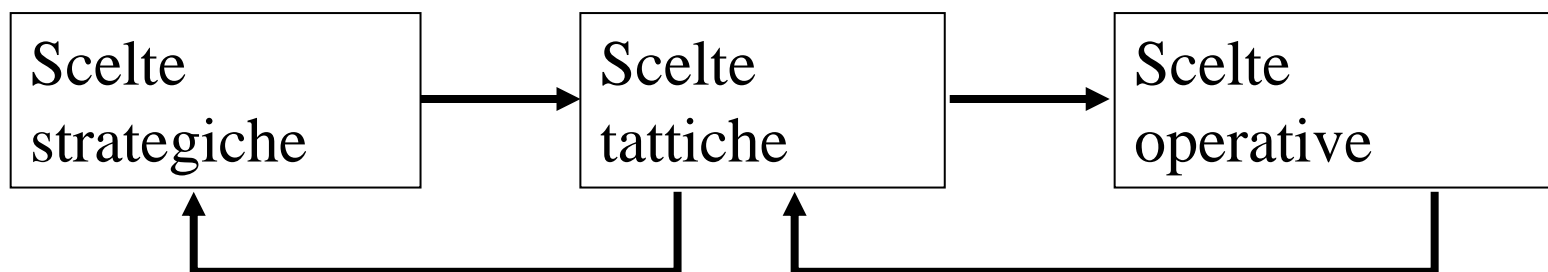
2. *valutando ciascuna delle alternative rispetto a vincoli e obiettivi*

richiede di applicare un **algoritmo**, in quanto nei problemi decisionali non banali il numero di alternative è enorme e la valutazione di vincoli e obiettivi può essere di per sé complessa.

- La Ricerca Operativa favorisce l'**approccio algoritmico alle decisioni**.

# Problemi decisionali (2)

- Livello **Strategico** (Pianificazione/Planning)
  - Definizione e valutazione delle alternative
  - Es. layout impianto, scelta delle macchine, ...
- Livello **Tattico** (Pianificazione/Planning)
  - Definizione e valutazione delle alternative
  - Es. configurazione macchine, numero di turni di lavoro, ...
- Livello **Operativo** (Programmazione/Management)
  - Definizione della prassi operativa nell'ambito delle scelte tattiche fatte







# Tipo di decisioni

- a **valori continui** (frazionari)
  - consumo di gas per una certa quantità di calore
  - percentuale di prodotti di un certo tipo da produrre
  - posizione nel piano di un punto
  - traiettoria di un drone nello spazio
- a **valori discreti** (interi)
  - numero di depositi da utilizzare in una rete
  - posizione di un cliente in un viaggio
  - acquisto o meno di un bene (si/no)



# Difficoltà di un problema

- = **tempo necessario** a risolverlo ... al crescere della sua dimensione  
1s+2s, 23s+55s, ..., 12332345342s + 2331123423s
- I problemi di decisione sono facili o difficili?
- In generale hanno **molte soluzioni** possibili



# •Assegnamento di incarichi

- $n$  incarichi,  $n$  persone
- tempo che ogni persona impiega per incarico
- assegnare gli incarichi (uno per ogni persona)
- Si desidera minimizzare il tempo complessivo necessario per svolgere tutti gli incarichi.
- Esempio:  $n = 2$

		Incarichi	
		$C_1$	$C_2$
Persone	$I_1$	20	40
	$I_2$	30	25

Soluzione immediata:  
 $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2$ , tempo = 45

# Enumerare o ottimizzare?

- Esempio :  $n = 3$ ,

Incarichi

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$I_1$	20	60	30
$I_2$	80	40	90
$I_3$	50	70	90

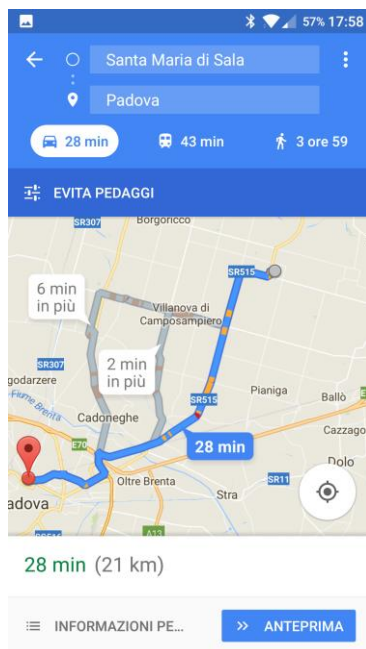
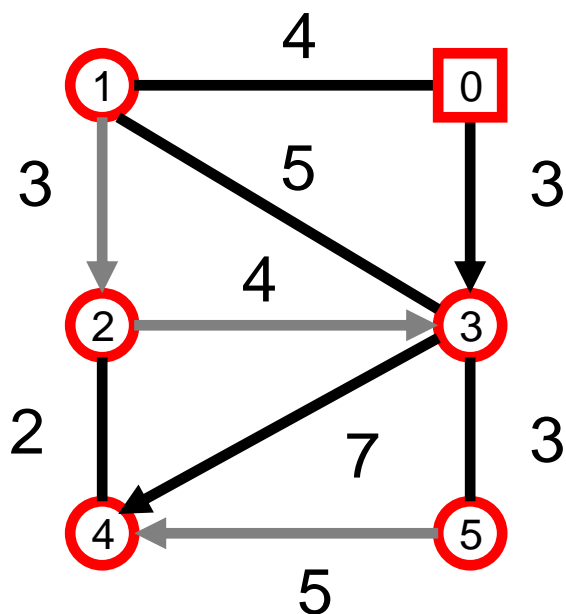
Persone

## Strategia alternativa?

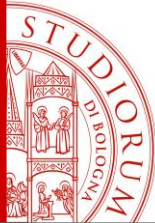
- Per enumerazione (6 soluzioni possibili, tutte le permutazioni di 3 elementi):  $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, t = 120$ .
- Ma se  $n = 20 \Rightarrow$  Numero di soluzioni =  $20! \approx 2.4 \cdot 10^{18}$
- Un PC a 3GHz impiega circa 2 secoli per esaminarle tutte.

# Percorso stradale minimo

- Rete stradale
  - Incroci, punti di interesse
  - tratti stradali (lunghezza, durata)



I percorsi in una rete “densa” con  $n$  tratti possono essere fino a  $n!$ .



# Problemi ed Algoritmi

---

- La ricerca operativa mette a disposizione metodi (algoritmi) efficienti per risolvere molti problemi decisionali
  - Assegnamento: Alg. Ungherese (Kuhn, 1955)
  - Percorsi minimi: Alg. di Dijkstra (1959)
  - ...

# .. e il progresso tecnologico ?

- Negli ultimi 30-40 anni la potenza dei calcolatori è cresciuta vorticosamente...

1960-80



1980-90



1990-2000



# Il Teorema della Spiaggia

- ... Se hai un problema computazionale che richiede molto tempo ...
- ... rilassati, vai in spiaggia per un paio d'anni



- ... quando torni acquista un pc appena uscito e sarà sufficientemente potente per risolvere il tuo problema !



# Enumerare o ottimizzare?



- Un **supercomputer come IBM Blue Gene**:
  - Velocità:  $\sim 1$  Petaflop ( $10^{15}$  operazioni al secondo);
  - Processori: 182,000 Opterons, 2.3 GHz;
  - Memoria: 362 TB (Tera byte, 1 TB =  $10^{12}$  bytes)
- può esaminare tutte le soluzioni per  **$n = 20$  in circa 10 ore**, ma ...
- se  **$n = 24$  a Blue Gene servono 200 anni** per esaminare tutte le soluzioni.
- se  **$n = 30$**  servono 84 miliardi di anni, 6 volte l'età dell'Universo



# Tempo e tecnologia

funzione	computer attuale	computer <b>100 volte</b> più veloce	computer <b>1000 volte</b> più veloce
$n$	$N_1$	$100 N_1$	$1000 N_1$
$n^2$	$N_2$	$10 N_2$	$31.6 N_2$
$n^3$	$N_3$	$4.64 N_3$	$10 N_3$
$n^5$	$N_4$	$2.5 N_4$	$3.98 N_4$
<b><math>2^n</math></b>	$N_5$	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
<b><math>3^n</math></b>	$N_6$	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$

PC 486/33 1.3 Mflop/s   Cray C90 (16 proc) 479 Mflop/s  
Blue Gene 1 Petaflop/s

# Algoritmi e “business”

- Gli algoritmi e gli approcci quantitativi servono veramente o sono roba da nerd?
- Può un algoritmo ben fatto fare la differenza e “creare valore” in un prodotto?





# Chi riconosce questi due?







# E questo?



La differenza tra chi ha avuto «l'idea originale» e chi l'ha realizzata è che il secondo era in grado di realizzarla con una soluzione informatica eccellente, robusta, stabile e performante !!





# Motori di ricerca anni 90

**Yahoo! Message**  
new! create your own weblogs

 Know what friends are online?  
Click to download Yahoo! Messenger!

 Mail.com  
 FreeMail  
 Hotmail

**Yahoo! Mail**  
free from anywhere

advanced search

---

**Y! Shopping**    Deptos: Books, CDs, Computers, DVDs    Stores: Gap, Charge, Coach and more

Shop Auctions Autos Classifieds Fashioning Travel Tickets/Pages Maps Media Finance Quotes News Sports Weather  
Connect Careers Chat Cities Cooking Electronics Mail Movements Music/Movies Newspaper People Search Photos  
Personal Relationships Shopping Software Support Tools Webmaster WebTV Y! Buzz Y! Groups Y! Home Y! Kids Y! Local Y! More

---

<b>Yahoo! Auctions</b>		Bid, buy, or sell anything!		<b>In the News</b>	
<b>Categories</b>	<b>Items</b>	<b>Name</b>	<b>Date Expiry</b>		
Antiques	Computers	Clothes	Date Expiry	U.S. opens 25M pop phone biz	
Arts/Crafts	Electronics	Gift Cards	Bikes/Vehicles	Sensar: Concorde admits it caused collision with incoming jet	
Cars	Sports/Cards	Real Estate	Languages	Attorney: Barry Levin found dead	
Collectibles	Stamps	Tickets	Tools	Date Expiry: U.S. won't open 400	
Collectible Cards: McGraw-Hill, John Deere, Books, Sony, Geoffrey H. Johns				Wimbledon - Tour de France	

---

<b>Arts &amp; Humanities</b>	<b>News &amp; Media</b>
Language, Philosophy	Fall Coverage, News, Sports, TV

---

<b>Business &amp; Economy</b>	<b>Recreation &amp; Sports</b>
Bank Finance, Shipping, Jobs	Sports, Travel, Autos, Outdoors

---

<b>Computers &amp; Internet</b>	<b>Reference</b>
Internet, WWW, Software, Games	Literature, Dictionaries, Quotations

---

<b>Education</b>	<b>Regional</b>
College and University, K-12	Countries, Regions, US States

---


<b>Entertainment</b>	<b>Science</b>
Cine/Lit/Arts, Movies, Home Video	Astronomy, Astronomy, Engineering

---

<b>Government</b>	<b>Social Science</b>
Legislation, Military, Law, Taxes	Archaeology, Economics, Languages

---

<b>Health</b>	<b>Society &amp; Culture</b>
Medicine, Diseases, Drugs, Fitness	People, Environment, Religion



---

**Local Yahoo's**

Europe: Denmark • France • Germany • Italy • Norway • Spain • Sweden • UK & Ireland  
Asia Pacific: Asia • Australia & NZ • China • HK • India • Japan • Korea • Singapore • Taiwan  
Americas: Argentina • Brazil • Canada • Chile • Mexico • Spanish  
U.S. Cover: Atlanta • Boston • Chicago • Dallas/F.W. • LA • NYC • SE Bay • Washington DC • more...

**More Yahoo's**

Canada: Alaska • Barbados • Cayman Islands • Hong Kong • Indonesia • Israel • Jamaica • Luxembourg  
Newswatch: Australia • Broadcast • Events • Games • Movies • Music • Radio • Tickets • TV • more  
Finance: Banking • Bid/Ask • Insurance • Loans • Stocks • Futures • Bonds • Technology • Weather  
Local: Classifieds • Events • Listings • Maps • Reminders • Yellow Pages • more  
News: Top Stories • Business • Entertainment • Health • Politics • Sports • Technology • Weather  
Publishing: Interfaces • Charts • Imports • Images • Photos • Home Pages • Message Boards  
Small Business: Biz 24/7 • Database • Domain Registration • Small Biz Center • Store Building • Web Hosting  
Arts/Video: Arts • Pages • PDAs • Web-enabled Phones and Tapes (1-800-ME-Yahoo)

Make Yahoo! your home page

---

How to Suggest a Site • Company Info • Copyright Policy • Terms of Service • Contributions • Info • Advertising

Copyright © 2001 Yahoo! Inc. All rights reserved.  
Privacy Policy








[people finder](#)
[maps](#)
[yellow pages](#)
[news](#)



**"Turbo Search!"**  
[Download](#)  
[Excite Direct](#)

Take an  
[ExciteSeeing Tour](#)

[Excite on TV](#)





Make your website  
[searchable. FREE!](#)

**Excite Search:** twice the power of the competition.

What:

Where:

[\[Help\]](#)  
[\[Advanced Search\]](#)

**INTEGRATED BROWSING, EMAIL, NEWSGROUPS AND PAGE CREATION.**



**Excite Reviews:** site reviews by the web's best editorial team.

- Arts
- Business
- Computing
- Education
- Entertainment
- Health
- Hobbies
- Life & Style
- Money
- News & Reference
- Personal Pages
- Politics & Law
- Regional
- Science
- Shopping
- Sports

**Excite City.Net**  
Plan your weekend, your travels.  
Find A Destination

[Take me there!](#)

[Maps](#)   [Top Cities](#)   [Concierge](#)

**Excite Seeing Tours**  
Choose from hundreds.

- X-Files. The truth is out there!
- Dr. Ruth's guide to safer sex
- Windows 95 shareware and freeware
- Celebrating Thanksgiving
- Investing in high-tech stocks
- New to the Net?

**Excite Live!**  
Your news, your way.

- Latest news
- Sports scores
- Local weather
- Movie reviews
- Stock quotes
- TV listings
- Horoscopes
- Site reviews

**Excite Reference**  
Just the facts, ma'am.

- Yellow Pages
- People Finder
- Email Lookup
- Maps
- Shareware
- Dictionary








[people finder](#)
[maps](#)
[yellow pages](#)
[news](#)



**infoseek™**  
 Once you know, you know.™



Type a specific question, phrase or Name.

the Web  [Tips](#)

To explore the Web's largest directory, click a topic below.

- [Arts](#) - books, photography, fashion, museums ...
- [Business](#) - business tools, find a job, small business ...
- [Computers](#) - desktop computers, hardware, software ...
- [Education](#) - colleges, teaching, adult education ...
- [Entertainment](#) - music, games, TV, movies ...
- [Health](#) - drugs, disease, fitness, women's health ...
- [Hobbies & Interests](#) - buy a car, shopping, buy a home, food & drink ...
- [Internet](#) - intranet, HTML, web publishing ...
- [Politics](#) - elections, government, taxes, law ...
- [Science](#) - space, dinosaurs, environment, engineering ...
- [Sports](#) - football, golf, basketball, hockey ...
- [Travel](#) - airlines, destinations, lodging, cruises ...

 [get PowerCentral!](#)

Visit our [Holiday Ultrashop!](#)

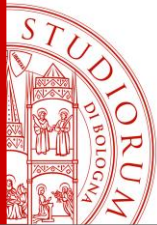
Make advertising \$\$\$ with the [Infoseek Network!](#)

Download [free software](#) from Infoseek, now featuring the NEW [Quickseek 2.0](#) for Windows!

Family PC Magazine rates [Infoseek #1!](#)

[Ultraseek](#) | [News Center](#) | [Smart Info](#)

[ [Basic Tips](#) | [Feedback](#) | [Add Site](#) | [About Infoseek](#) ]

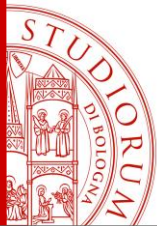


# ... and the winner is...



Cerca con Google

Mi sento fortunato



# Google algorithm, Wikipedia

---

- Google was founded by Larry Page and Sergey Brin while they were Ph.D. students (of Computer Science) at Stanford University.
- While conventional search engines ranked results by counting how many times the search terms appeared on the page, **the two theorized about a better system that analyzed the relationships between websites.**
- di nuovo il successo è legato ad un metodo migliore !
- Per un approfondimento sull'algoritmo pagerank
- <https://www.youtube.com/watch?v=ZIOayEGku0U>





# Origini della Ricerca Operativa

- Seconda Guerra Mondiale in Inghilterra
- Battaglia di Inghilterra:
  - prevenzione degli attacchi di bombardieri tedeschi:
  - radar (risorsa scarsa)
  - raggio d'azione, definizione ...
- Dove localizzare i radar per massimizzare la probabilità di intercettazione ?
- Come coordinare le operazioni (radar, radio, pattuglie aeree ...) per facilitare l'identificazione dei nemici e degli amici ?



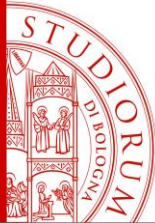
# Origini della Ricerca Operativa (2)

- Gruppi di lavoro misti  
(matematici, fisici, ingegneri, militari ... )
- **Research** on military **Operations**
- messa a punto di
  - metodi quantitativi di analisi
  - metodologie di soluzione (algoritmi)
- notevole contributo nel miglioramento dell'efficacia dell'avvistamento radar
- numerose applicazioni in altri settori (logistica ...)



# Evoluzione

- Dopo la guerra: diffusione della disciplina in
  - Industria
  - Pubblica amministrazione
  - Università
- 1940-60: Sviluppo di modelli ed algoritmi di R.O.
  - programmazione lineare
  - teoria dei grafi
  - simulazione numerica ...
- 1960-70: Diffusione degli elaboratori
  - grande impulso alla R.O.
  - teoria della complessità



# Problemi decisionali e modelli

- La Ricerca Operativa fornisce metodi per rappresentare (modelli) e risolvere (algoritmi) problemi decisionali.
- In generale i modelli usano una rappresentazione logico-matematica del problema decisionale
  - Astratta e precisa
  - Permette di evidenziare e sfruttare le proprietà del problema da risolvere

- Modello:
  - rappresentazione semplificata di un sistema reale,
  - progettata per rispondere, mediante analisi sperimentali, a domande specifiche
  - (risposta agli ingressi/decisioni).

Ingressi  
(Decisioni/  
Controlli)



Uscite  
(Prestazioni)



# Classificazione

1. Modello Fisico:  
riproduzione in scala (similitudine o analogia)
2. Modello Matematico:  
insieme di relazioni logico/matematiche che descrivono il comportamento del sistema
  - **Statico**: sistema in equilibrio
  - **Dinamico**: sistema in evoluzione (nel tempo)
  - **Analitico**: descritto mediante equazioni/disuguaglianze
  - **Numerico**: descritto mediante algoritmi di calcolo

# Modello Matematico

insieme di relazioni logico/matematiche che descrivono il comportamento del sistema

$$\text{spazio} = \text{velocità} * \text{tempo}$$

Variabile  
dipendente

parametro

Variabile  
indipendente

- Assunzione: Assenza di attrito (friction) ...
  - accuratezza sufficiente ?
  - se no modello più complesso (non lineare)



# Modello Matematico

$$z = f(x_1, x_2, \dots)$$

- $z$  valore delle “prestazioni” (v. **dipendente**)
- $x_1, x_2, \dots$  variabili decisionali (v. **indipendenti**)
- spesso  $(x_1, x_2, \dots)$  devono assumere valori entro un insieme specifico (**regione ammissibile**)
- Es.  $z = \max \{f(x), x \in F\}$





# Modello Matematico

- Modelli Prescrittivi:
  - forma di  $f(\bullet)$  nota
  - valori delle  $x$  noti e controllabili dal decisore
  - normalmente usati a livello Operativo per la determinazione dei valori di  $x$  che “massimizzano”  $z$
- Modelli Descrittivi:
  - forma di  $f(\bullet)$  nota
  - valori delle  $x$  non noti e/o non controllabili dal decisore
  - normalmente usati a livello Strategico per la determinazione/stima dei valori di alcune  $x$  in funzione di altre

# Modelli e Realtà

- Proprietà di un modello:
    - astrazione (scalabilità, generalità)
    - sintesi (solo le caratteristiche rilevanti)
    - economicità (costa meno analizzare il modello)
    - rapidità (si ottengono risposte più rapidamente)
    - fattibilità (si possono analizzare sistemi inesistenti)
  - Un modello può migliorare il grado di comprensione della realtà:
    - individuazione delle componenti importanti
    - relazioni di causa effetto
- ⇒ Può migliorare le decisioni



# Buone Decisioni vs. Buoni Risultati

- Le buone decisioni non fanno sempre arrivare a buoni risultati...
  - Se è previsto tempo soleggiato puoi (giustamente) decidere di lasciare l'ombrello a casa.
  - Se inaspettatamente piove puoi bagnarti (un cattivo esito), il che non significa che tu abbia preso una decisione sbagliata (**incertezza/rischio**).
- Una approccio modellistico strutturato per il supporto alle decisioni (decision making) aiuta a prendere buone decisioni, ma non può ovviamente garantire di ottenere buoni risultati.



# Modelli di ottimizzazione **lineare**

- Variabili decisionali:  $x_1, x_2 \dots$ 
  - livelli di produzione, somme da investire ...
  - Fare o non fare ? (binarie: 0/1) ...
- Funzione obiettivo:  $z = c_1x_1 + c_2x_2 \dots$ 
  - Costo o profitto della soluzione
- Regione ammissibile:
  - Insieme dei valori delle  $x$  compatibili con le “regole”
  - Definita elencando le regole (vincoli) espresse matematicamente  $a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots \leq b$

# Mix Produzione di vasche

- Una fabbrica produce due tipi di vasche: Blue Tornado e Hot Spring

	BT	HS
Motore	1	1
Lavoro	9 ore	6 ore
Tubazione	12 metri	16 metri
Profitto Unitario	350€	300€

- Per un turno (shift) di lavoro sono disponibili: 200 motori, 1566 ore di lavoro, e 2880 metri di tubazione



# Formulazione del problema

---

1. Capire il problema
2. Individuare le **variabili** decisionali
3. Definire la **funzione obiettivo** come combinazione delle variabili decisionali
4. Definire i **vincoli** come combinazione delle variabili decisionali



# 1. Definizione e 2. Variabili

- Dati:

- Consumi di risorse (ore, motori, tubi per pezzo)
- Disponibilità reparti (ore, motori, tubi per periodo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)

*Quante vasche di ciascun tipo devono essere prodotte per massimizzare il ricavo ?*

- Variabili decisionali:

- $x_1$  = n. di BT prodotte in un periodo
- $x_2$  = n. di HS prodotte in un periodo
- $x_1$  ed  $x_2$  possono essere frazionarie (un periodo)





### 3. Funzione Obiettivo

- Profitto per unità di prodotto:

BT	HS
350	300

$$\max z = 350 x_1 + 300 x_2$$



## 4. Vincoli

- Consumo risorse per unità di prodotto:

Risorsa	BT	HS	Disp.
Lavoro	9	6	1566
Motori	1	1	200
Tubi	12	16	2880

$$\max z = 350 x_1 + 300 x_2$$

$$\begin{array}{llll} \text{L)} & 9 x_1 + 6 x_2 & \leq & 1566 \\ \text{M)} & 1 x_1 + 1 x_2 & \leq & 200 \\ \text{T)} & 12 x_1 + 16 x_2 & \leq & 2880 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



# Modello Produzione di Vasche

MAX:  $350X_1 + 300X_2$  } profitto

S.A.:  $1X_1 + 1X_2 \leq 200$  } motori

$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$  } lavoro

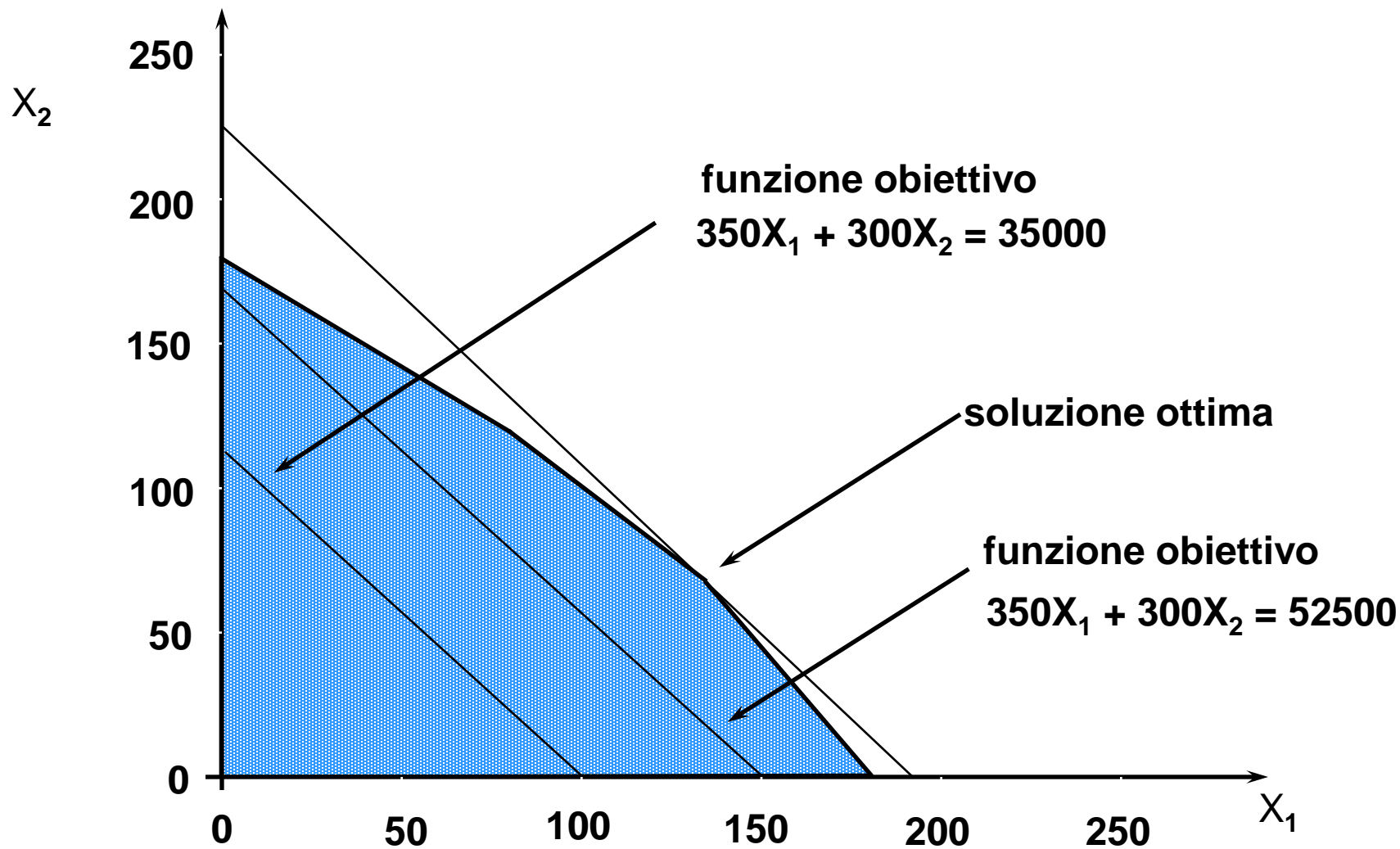
$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$  } tubazione

$X_1, X_2 \geq 0$  } non negatività

# Soluzione: Approccio intuitivo

- BT ( $x_1$ ) ha un profitto unitario più alto
  - conviene produrne il maggior numero possibile
  - Ponendo  $x_2 = 0$ 
    - Vincolo 1:  $x_1 \leq 200$
    - Vincolo 2:  $9 x_1 \leq 1566$  o  $x_1 \leq 174$
    - Vincolo 3:  $12 x_1 \leq 2880$  o  $x_1 \leq 240$
- Il massimo valore di  $x_1$  è 174 e il profitto totale è  $350 \cdot 174 + 300 \cdot 0 = 60,900$
- Questa soluzione è ammissibile: è anche ottima?
- **No!** ( $x_1 = 122$ ,  $x_2 = 78$ , è amm. e vale 66,100)

# Soluzione Grafica



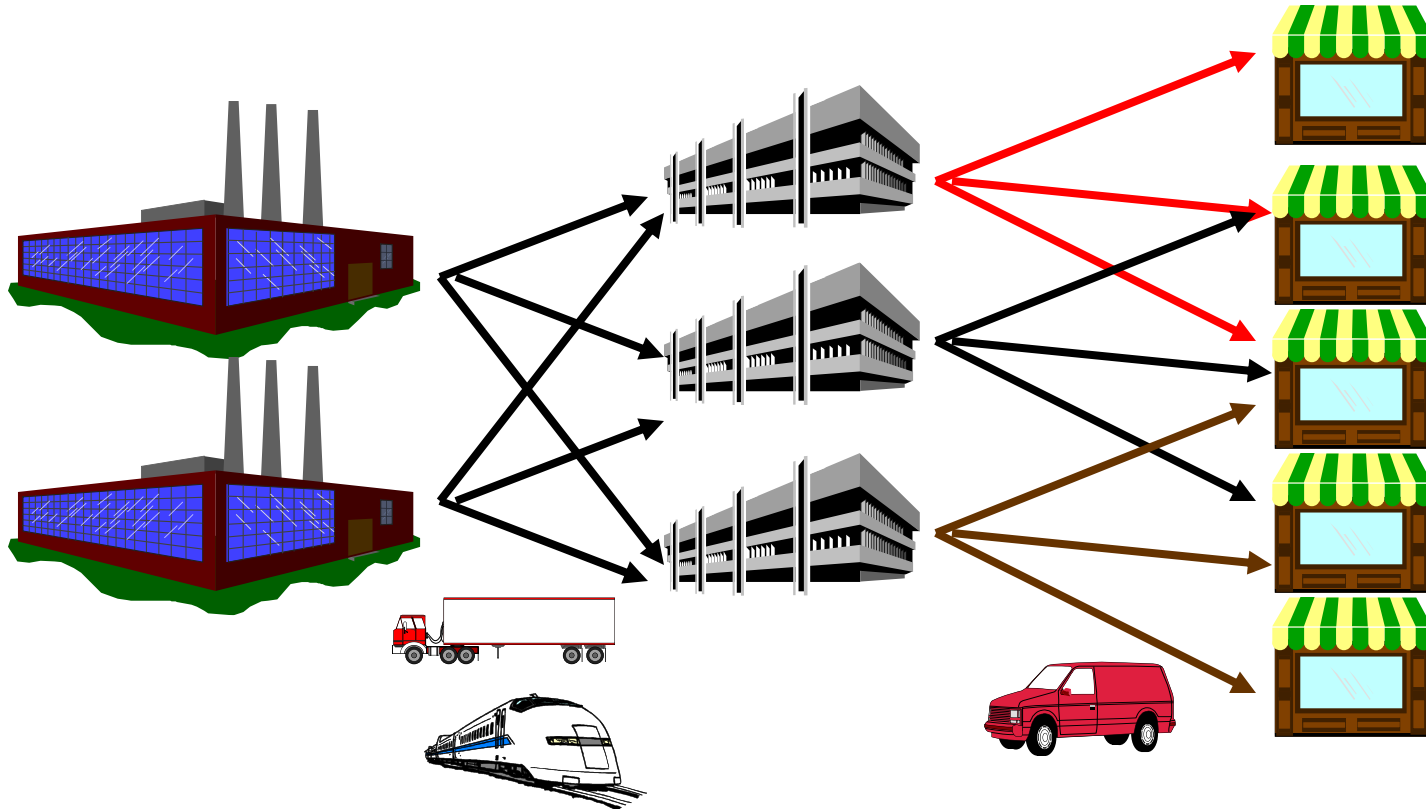


# Risolutori e modelli LP

- La risoluzione grafica di problemi LP è possibile solamente quando ci sono due o tre variabili decisionali
- La risoluzione di problemi LP reali (con molte variabili) può essere ottenuta mediante metodi numerici (Es. Algoritmo del Simplexso)
- Disponibili in solver software (CPLEX, LINDO ...)
- Come insiemi di funzioni in fogli elettronici (Excel)

# Modelli e Ricerca Operativa (1)

- Sistema “reale” di distribuzione merci





# Modelli e Ricerca Operativa (2)

- Problemi di livello **Strategico**:
  - dimensionamento di fabbriche, magazzini, flotte ...
  - assegnazione dei clienti ai magazzini
- Problemi di livello **Tattico-Operativo**:
  - definizione dei flussi “ottimi” di merce
- Definizione del problema e degli obiettivi:
  - a) contenimento dei **costi**  
(n. di magazzini, costi di trasporto ...)
  - b) buon **livello di servizio** (tempi di servizio, bilanciamento del carico di lavoro tra i magazzini)

⇒ obiettivi a) e b) in contrasto tra loro !
- ... formulazione vaga





# I. Formulazione del Problema (1)

- Definizione degli obiettivi e dei vincoli:
- i) minimizzare il costo totale (fisso+trasporto) con ...
  - tempo medio di servizio non superi  $K$  giorni
  - non più del  $p\%$  dei clienti aspetti oltre  $K$  giorni
  - $\Rightarrow$  a) obiettivo, b) vincolo
- ii) minimizzare il tempo di servizio con ...
  - costo annuo non superiore a  $Q$  milioni
  - $\Rightarrow$  b) obiettivo, a) vincolo



# I. Formulazione del Problema (2)

- Raccolta di informazioni e dati sul sistema:
  - a) domanda dei clienti,
    - tasso di ordinazione, quantità medie, stagionalità ...?
  - b) Tempi e costi di trasporto (primario e locale)
    - funzione della quantità di merce trasportata e del mezzo,
    - costi di stoccaggio,
  - c) Regole operative e livello di servizio
    - organizzazione dei magazzini e delle fabbriche
    - modalità di carico/scarico e di trasporto
- Indagini statistiche o analogie rispetto ad altri sistemi



## II. Definizione del modello (1)

- Scelta del paradigma di rappresentazione del problema, in base a:
  - natura del sistema (statico, dinamico, ...)
  - obiettivo/i e vincoli
  - tipo e qualità dei dati disponibili

**Es.** Dati domanda  $d$ , costi  $\gamma$ , n. di magazzini  $n$ , calcolare:

$x$  = distribuzione dei flussi di merce

$C$  = costo complessivo del servizio

$P$  = probabilità che un cliente attenda più di  $K$  giorni

## II. Definizione del modello (2)

- Definizione del problema di ottimizzazione  
si esprimono **obiettivo** e **vincoli** mediante **funzioni** di:
  - $n, x \dots$  (variabili decisionali)
  - $d, \gamma, \dots$  (parametri)
  - $C, P, \dots$  (prestazioni)

$$\min f(n, x, d, \gamma, C, P, \dots)$$

con  $x \in X$ , tale che:

$$g_1(n, x, d, \gamma, C, P, \dots) \geq a_1$$

$$g_2(n, x, d, \gamma, C, P, \dots) \geq a_2$$

...

## II. Definizione del modello (2)

- Modello Analitico

se è possibile esprimere  $C, P, \dots$  mediante **funzioni** di  $n, x, \gamma, \dots$  (casi semplici)

**Es.** assunzioni di linearità, staticità, ...

- Modello di Simulazione Numerica (normalmente)

se **non** è possibile esprimere  $C, P, \dots$  mediante **funzioni** di  $n, x, \gamma, \dots$

(sistema complesso, fenomeni di saturazione, code ...)

- **Programma** che riproduce il funzionam. del sistema
- dati  $n, x, \gamma, \dots$  si “misurano”  $C, P, \dots$

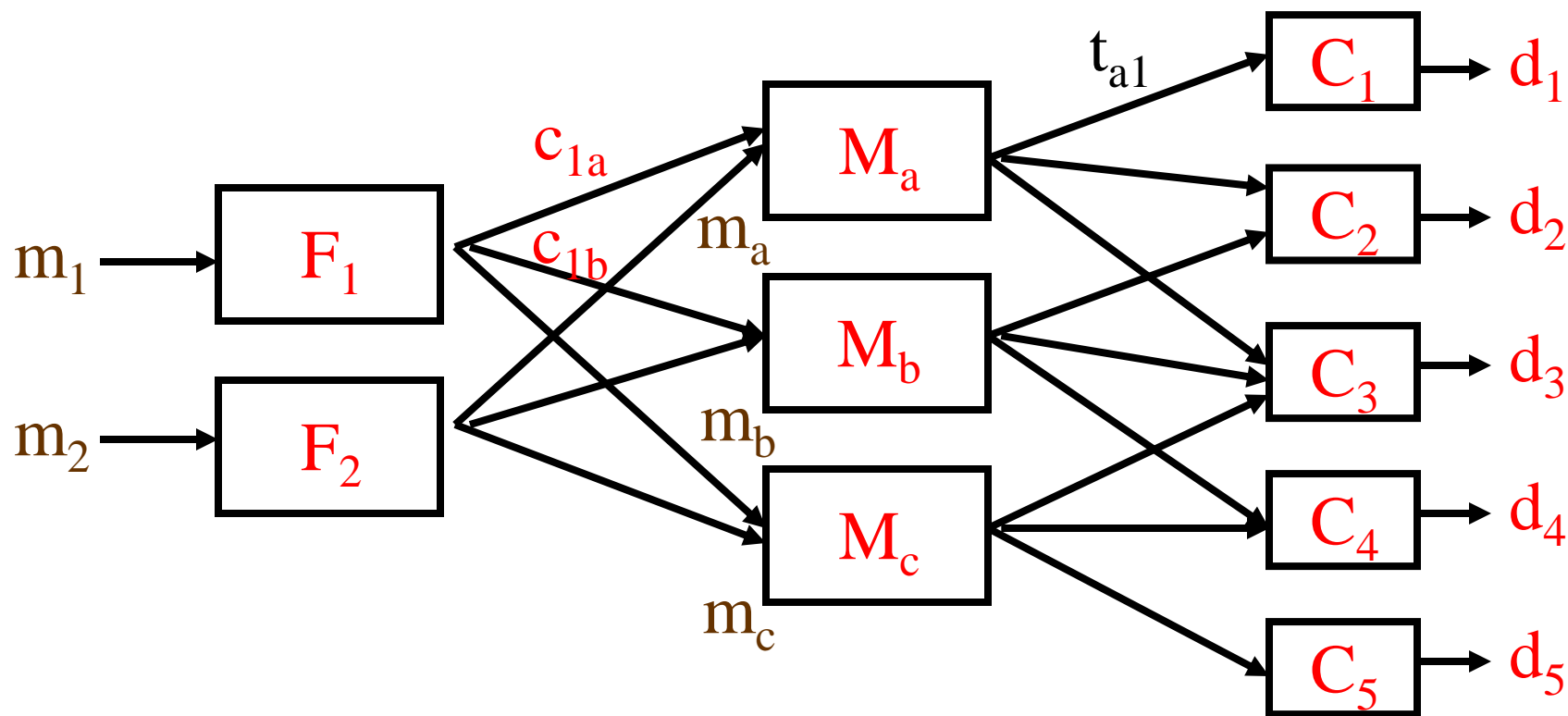
# Assunzioni ed ipotesi

Problema tattico di determinazione dei flussi:

- staticità (Es. problema “giornaliero”):
  - domanda media
  - non si considerano i tempi di servizio
- costi di trasporto “lineari” =  $c_{ij} x_{ij}$
- solo vincoli di capacità:
  - fabbriche (produzione massima nel periodo)
  - magazzini (massima q.tà di merce “trattabile”)

⇒ modello di **programmazione lineare**

# Modello schematico (astratto)



Capacità

Costi

Capacità

Costi

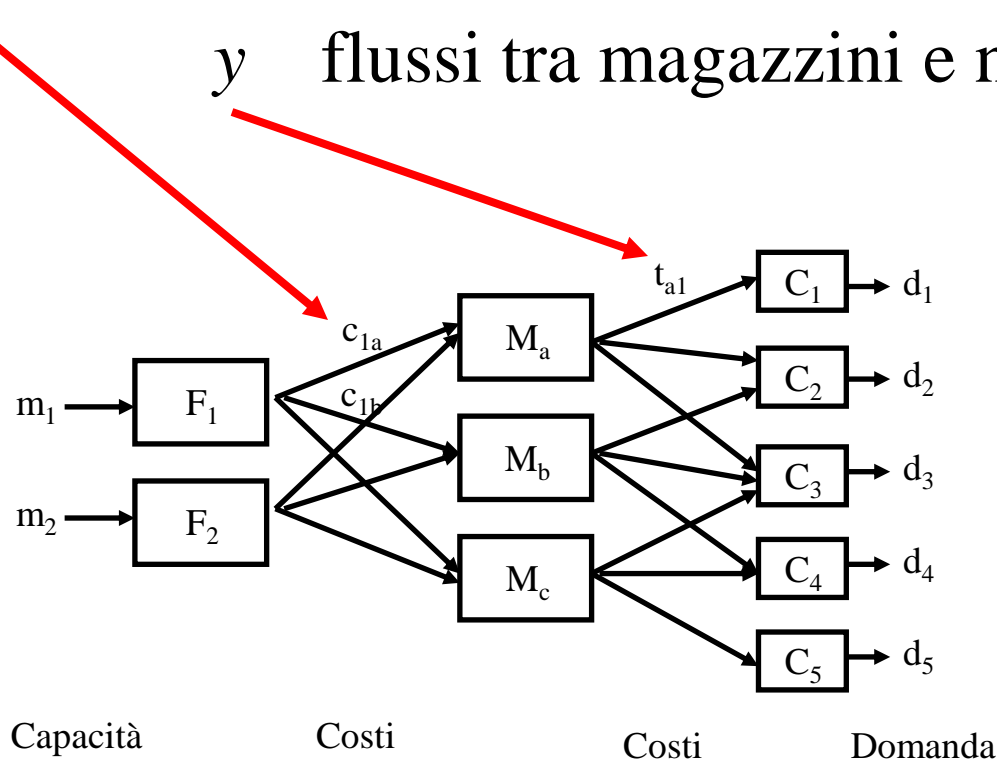
Domanda

# Modello Matematico

- Variabili decisionali:

$x$  flussi tra fabbriche e magazzini

$y$  flussi tra magazzini e negozi





# Modello matematico (2)

(obiettivo)

$$\min \quad c_{1a} x_{1a} + c_{1b} x_{1b} + \dots \quad t_{a1} y_{a1} + t_{a2} y_{a2} + \dots$$

(vincoli di capacità)

$$\forall f: \quad x_{1a} + x_{1b} + \dots \leq m_1$$

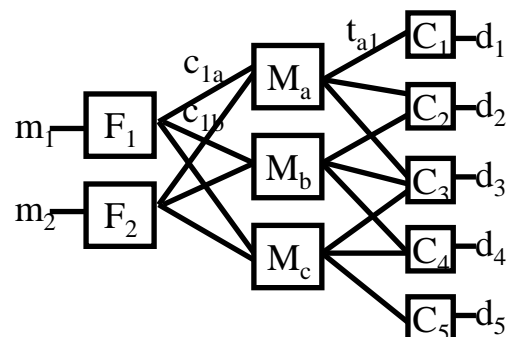
$$\forall m: \quad x_{1a} + x_{2a} + \dots \leq m_a$$

(vincoli sulla domanda)

$$y_{a1} + y_{b1} + \dots = d_1$$

(bilanciamento dei flussi)

$$x_{1a} + x_{2a} \dots = y_{a1} + y_{a2} \dots$$



# III. Verifica del modello

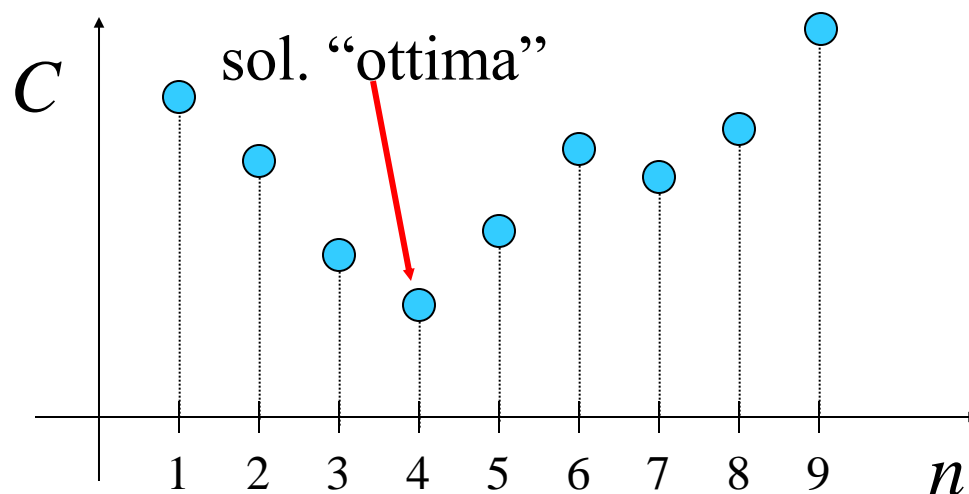
- Calibrazione dei parametri del modello:
  - si determinano i valori dei parametri caratteristici in modo che il modello fornisca risposte (valori misurati) aderenti alla realtà



- Esperimenti sul modello e confronto dei risultati con valori osservati nella realtà
- Eventuale revisione del modello

## IV. Determinazione delle soluzioni

- Mediante un “algoritmo” si generano soluzioni alternative (Es. diversi  $n$ ) e si sceglie la “migliore” (minor costo)
- Es. pochi valori di  $n$  da “tentare”: enumerazione



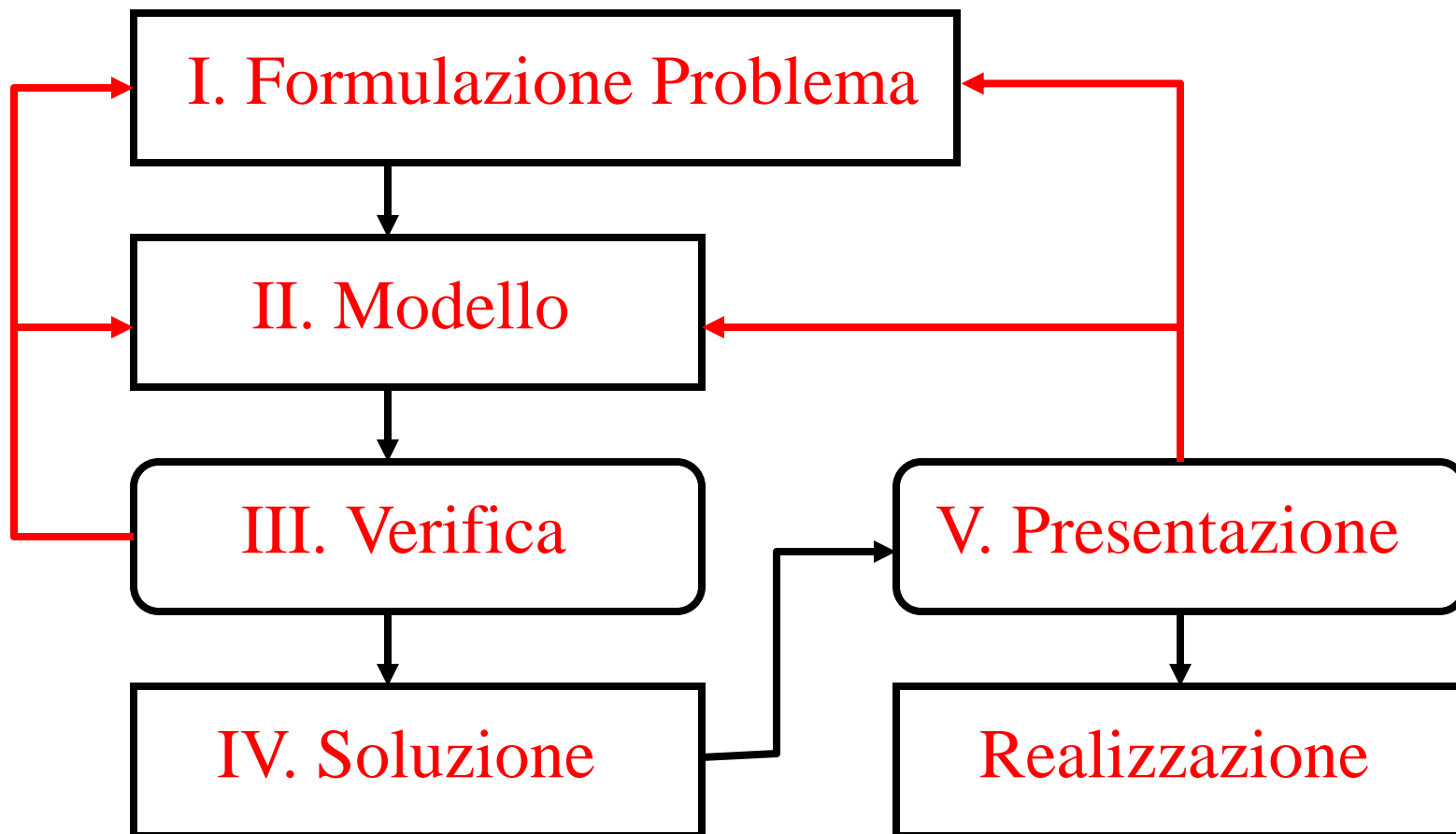


## V. Presentazione dei risultati

---

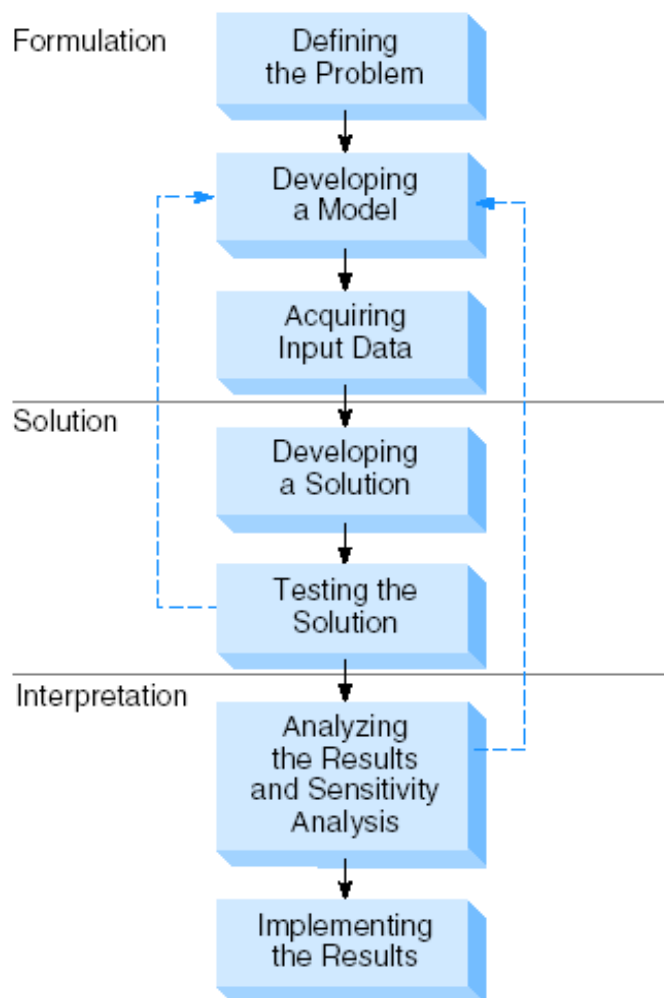
- Modello e risultati vengono sottoposti ai decisori:
  - verifica delle ipotesi sul modello
  - esame dell'obiettivo e delle soluzioni
  - se insoddisfacente: revisione del modello e nuove soluzioni
- Implementazione della soluzione
- Monitoraggio del sistema nel tempo

# Metodologia della R.O.



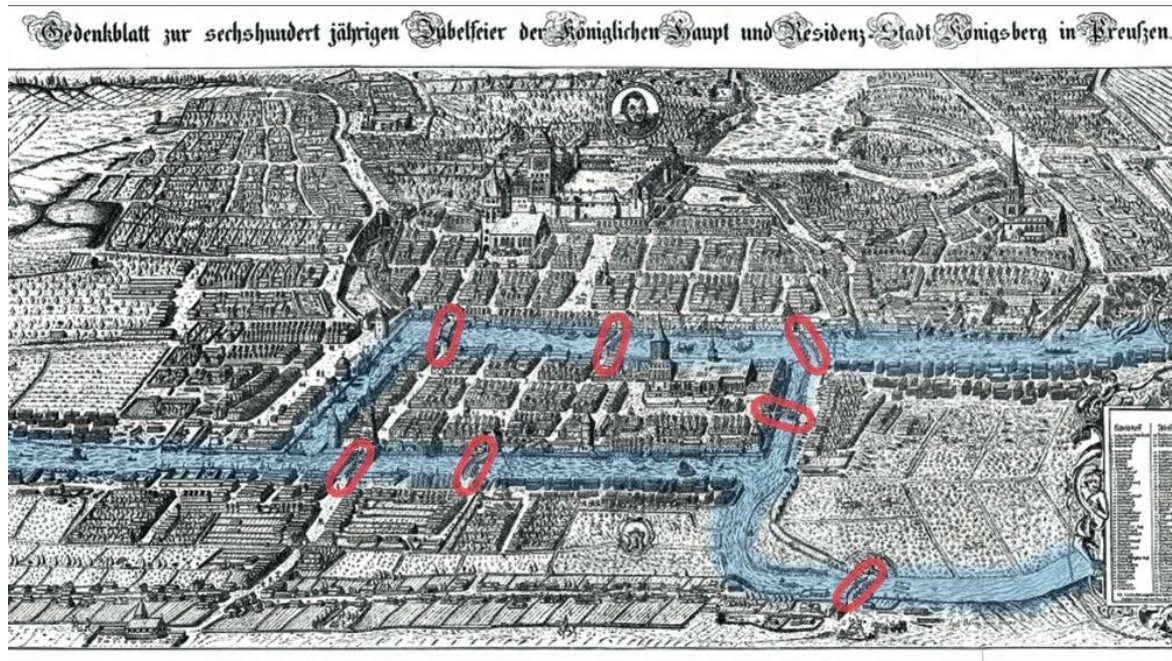


# Metodologia della R.O.



# I sette ponti di Königsberg

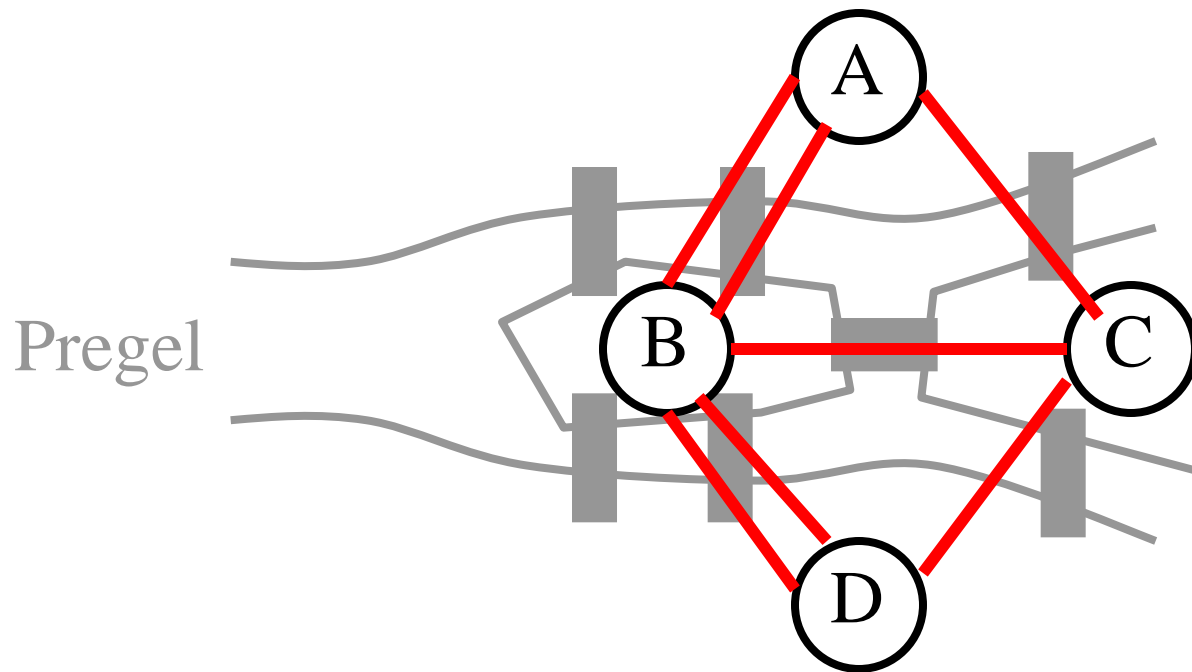
- Problema di Eulero (1707-1783)



*È possibile effettuare una passeggiata, ritornando al punto di partenza, dopo aver attraversato tutti i ponti una sola volta ?*

# Modello del problema dei ponti

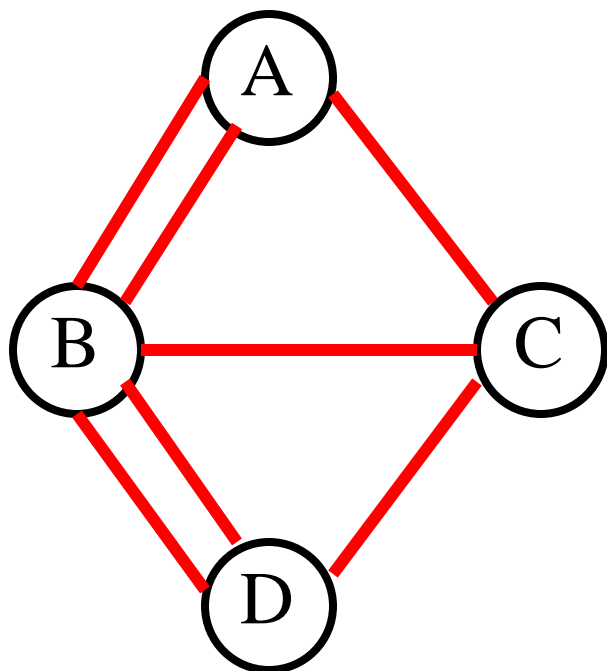
- Rappresentazione astratta del problema:  
nascita della **Teoria dei Grafi**
- Grafo equivalente alla mappa:





# Soluzione del problema

- Esiste un percorso chiuso che attraversa tutti gli archi del grafo una ed una sola volta ?  
(Circuito Euleriano)



Cond. necessaria e sufficiente  
(Eulero, 1736):

*Il circuito esiste se e solo se in ogni nodo ha un numero **pari** di lati **incidenti**.*

⇒ Il problema di Königsberg non ha soluzione !!



# Applicazioni della R.O.

- Problemi **decisionali**
  - Scelta di investimenti
  - Localizzazione sul territorio (impianti, servizi...)
  - Dimensionamento (impianti, personale ...)
  - Attivazione di rotte aeree (linee di autobus)
  - Attribuzione di compiti al personale
  - ...



# Applicazioni della R.O. (2)

- Problemi **Gestionali**
  - organizzazione della produzione
  - sequenziamento di lavori
  - pianificazione dei lavori
  - instradamento di veicoli
  - turnazione del personale
  - controllo del traffico aereo
  - caricamento di containers, pallets
  - taglio ed impaccamento di oggetti
  - ...



# Associazioni Professionali R.O.

---

- AIRO – Associazione Italiana:  
<https://www.airo.org>
- EURO – Associazione Europea:  
<https://www.euro-online.org>
- INFORMS – Associazione Statunitense:  
<https://www.informs.org>
- ALIO – Associazione Latino-Ibero-Americana:  
<https://www.alio-online.com>