Esempio B&B

Un'azienda produce due tipi di pezzi meccanici denominati C e D in lotti indivisibili da 1000 pezzi. Il profitto di vendita di un lotto di D è doppio rispetto a quello ottenibile da un lotto di C. La produzione di un lotto di C richiede 8000 unità di elementi M mentre quella di D ne richiede 14000. Sono disponibili complessivamente 56000 unità di M.

Per ragioni di mercato il quantitativo di lotti di C prodotti deve essere superiore di almeno una unità rispetto alla metà del quantitativo di lotti di D prodotti.

Si richiede di determinare la produzione di massimo profitto compatibile con i vincoli descritti.

Esempio B&B

In particolare si richiede di:

a) Definire il modello di ottimizzazione lineare intera per la determinazione della soluzione, utilizzando coefficienti **interi e piccoli** in valore assoluto.

b) Supponendo inizialmente accettabili soluzioni frazionarie si risolva il rilassamento del problema del punto a) con l'algoritmo grafico (verificare con ExcelSolver).

c) Si disegni con cura la regione ammissibile (3 quadretti per unità) e si riporti su di essa con chiarezza la soluzione ottima (continua) del problema.

d) Determinare la produzione ottima del problema **intero** definito al punto a) mediante l'impiego dell'algoritmo del Branch and Bound. A tal fine:

- Si utilizzi per il nodo radice la soluzione del rilassamento continuo determinata al punto b).
- Si risolvano **per via grafica o usando ExcelSolver** gli eventuali ulteriori rilassamenti continuo associati agli altri nodi dell'albero decisionale. Si disegni con cura la regione ammissibile (3 quadretti per unità) e si riportino su di essa le soluzioni corrispondenti ai diversi nodi esplorati ed i tagli richiesti dal Branch and Bound.
- Si esegua il branching utilizzando la variabile frazionaria di indice MASSIMO e si generi per primo il nodo corrispondente alla condizione ≤
- Si disegni l'albero decisionale esaminato e si riporti in corrispondenza di ogni nodo la soluzione ed il valore del bound corrispondente.

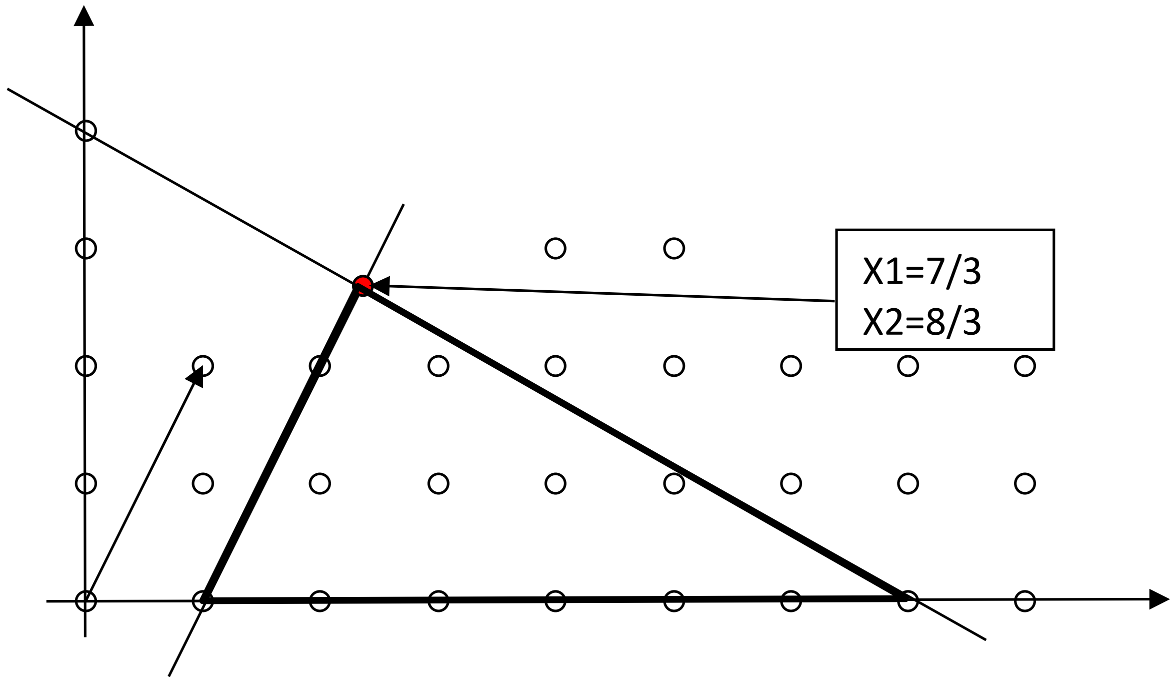
Modello

a) Modello

X1, X2 = n. di lotti di C e D prodotti

Max	$X1$	$+2X2$		
s.t.	$2X1$	$-X2$	$\geq$	2
	$4X1$	$+7X2$	$\leq$	28
	$X1$	$X2$	$\geq$	0, intere

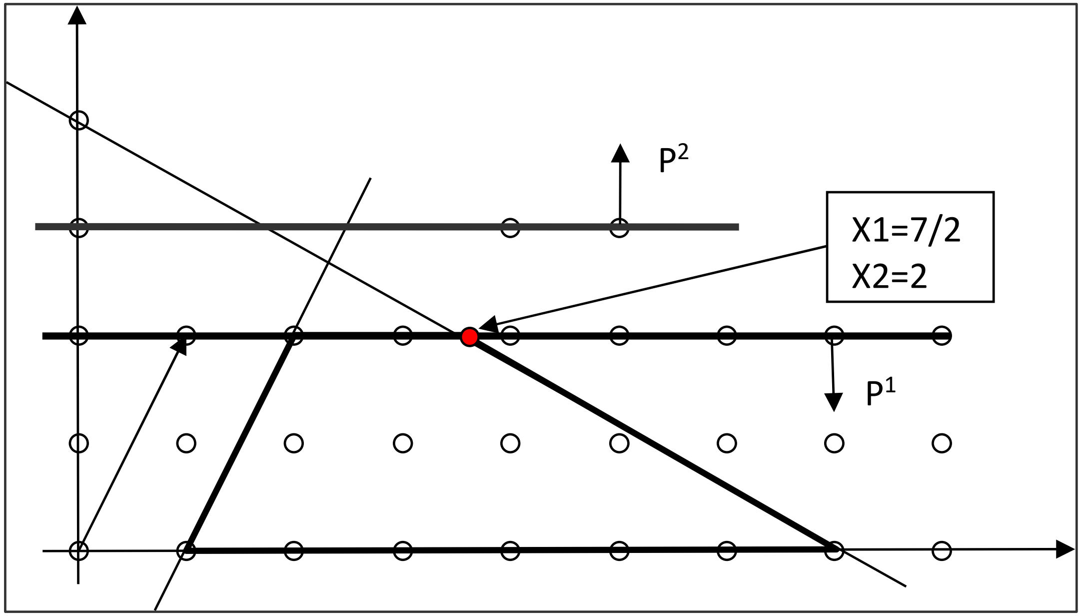
Regione ammissibile

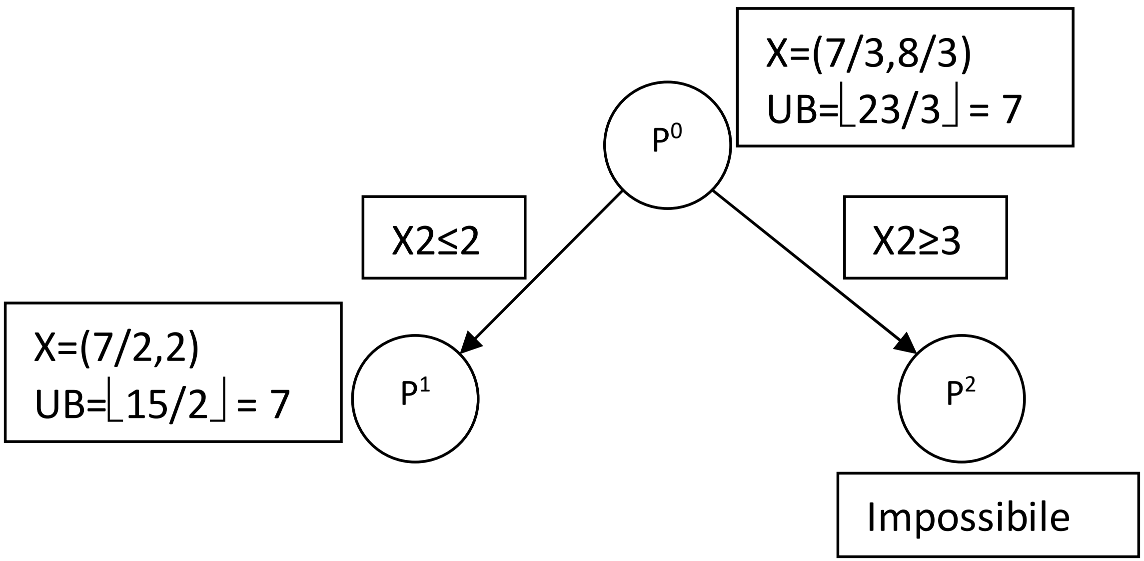


Branch and Bound

- La soluzione del rilassamento continuo del problema originale (nodo P0) è stata determinata al punto b). La soluzione frazionaria è : X1= 7/3, X2=8/3, z= 23/3. Branching sulla variabile frazionaria di indice MASSIMO (X2):

- P^1: problema associato al taglio X2 ≤ 2 ➔ x1=7/2, x2= 2, z= 15/2 ➔ 7
- P^2: problema associato al taglio X2 ≥ 3 ➔ Problema impossibile

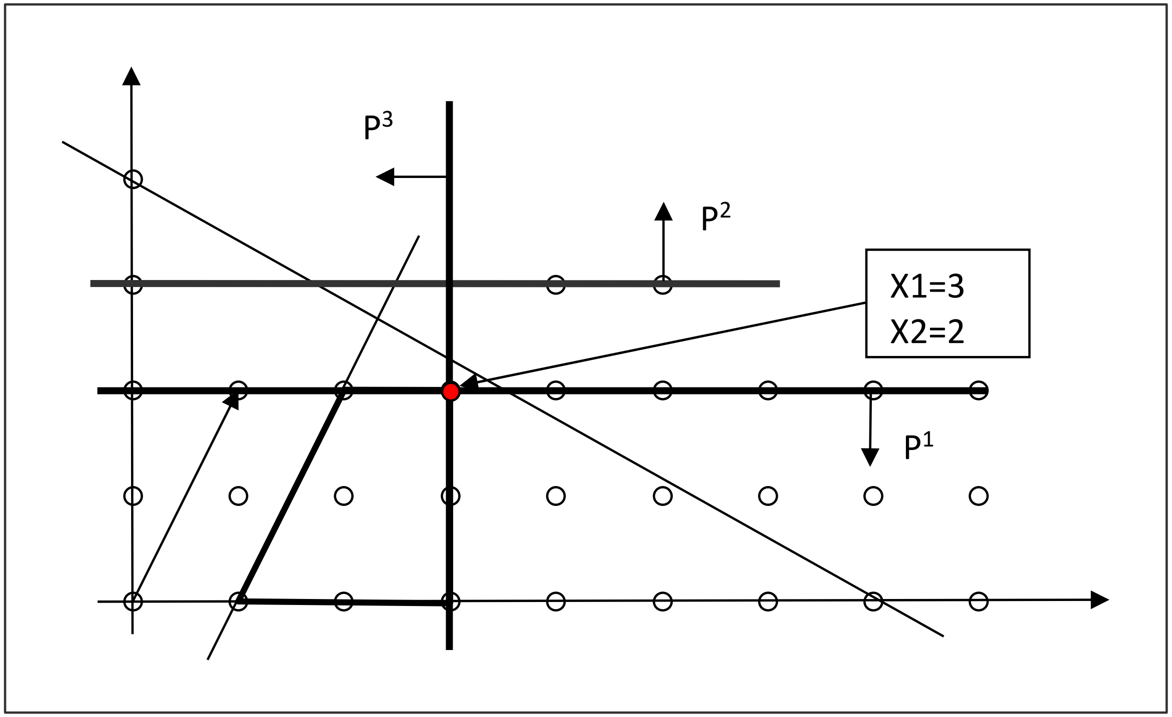


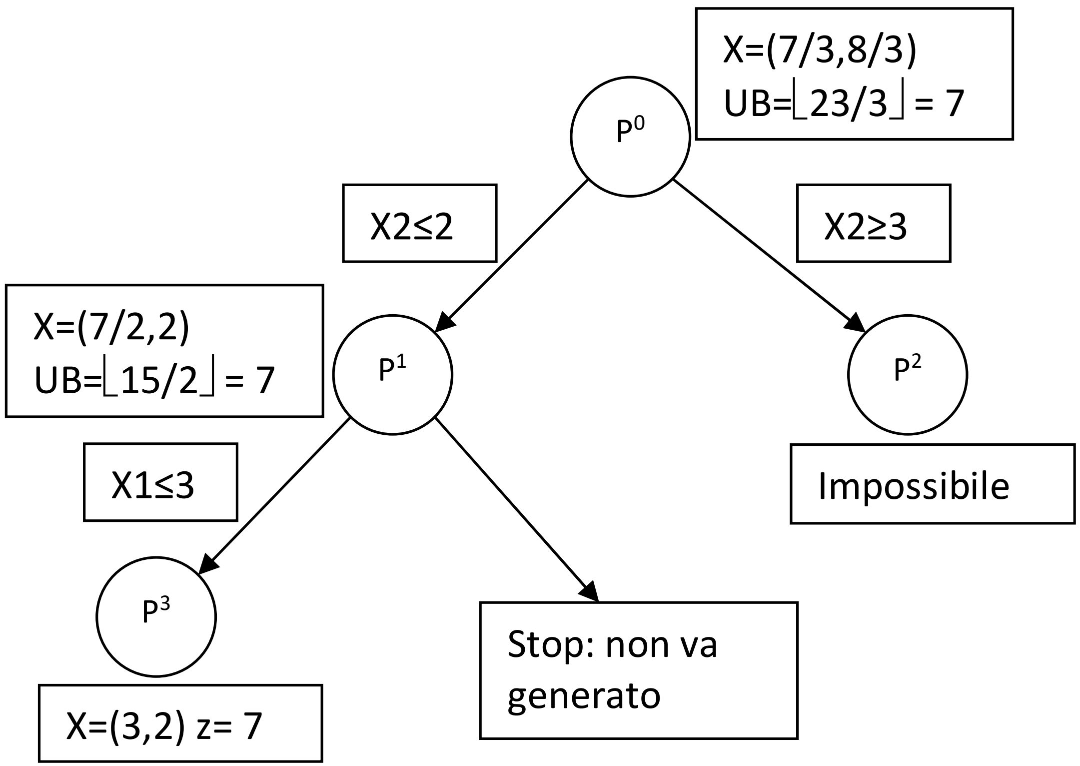


X=(7/3,8/3)
UB=$\lfloor 23/3 \rfloor$ = 7
P^0
X2≤2
X2≥3
X=(7/2,2)
UB=$\lfloor 15/2 \rfloor$ = 7
P^1
P^2
Impossibile

Si passa ad esplorare il nodo P^1 : la variabile frazionaria è $X1=7/2$

- P^3: problema associato al taglio $X1 \leq 3$ ➔Soluzione intera: $X1= 3$, $X2=2$, $z=7$
- P^4: il nodo non va generato dato che la soluzione di P^3 ha lo stesso valore del bound del nodo padre P^1.





Soluzione ottima X1=3, X2=2, z= 7

Esempio 2

Un’azienda deve determinare il mix ottimale per la produzione oraria di due nuovi fertilizzanti denominati A e B, che richiedono Azoto come prima di base. Produrre una unità del primo composto richiede 2 unità di Azoto, mentre una unità del secondo ne richiede 4. Complessivamente, ogni ora sono disponibili per la produzione 8 unità di Azoto. La lavorazione dei due composti A e B produce inoltre due sostanze, denominate P e Q, importanti per una successiva fase di lavorazione. Una unità del composto A produce 1 unità di P e 3 di Q, mentre una unità di B produce 6 unità di P ed 1 di Q. E’ necessario che le quantità di A e B prodotte siano tali da far ottenere almeno 6 unità di P e 3 di Q per ogni ora. Il guadagno della vendita dei due composti è uguale a 1000 Euro per unità ed essi possono essere prodotti in qualsiasi quantità, anche frazionaria.

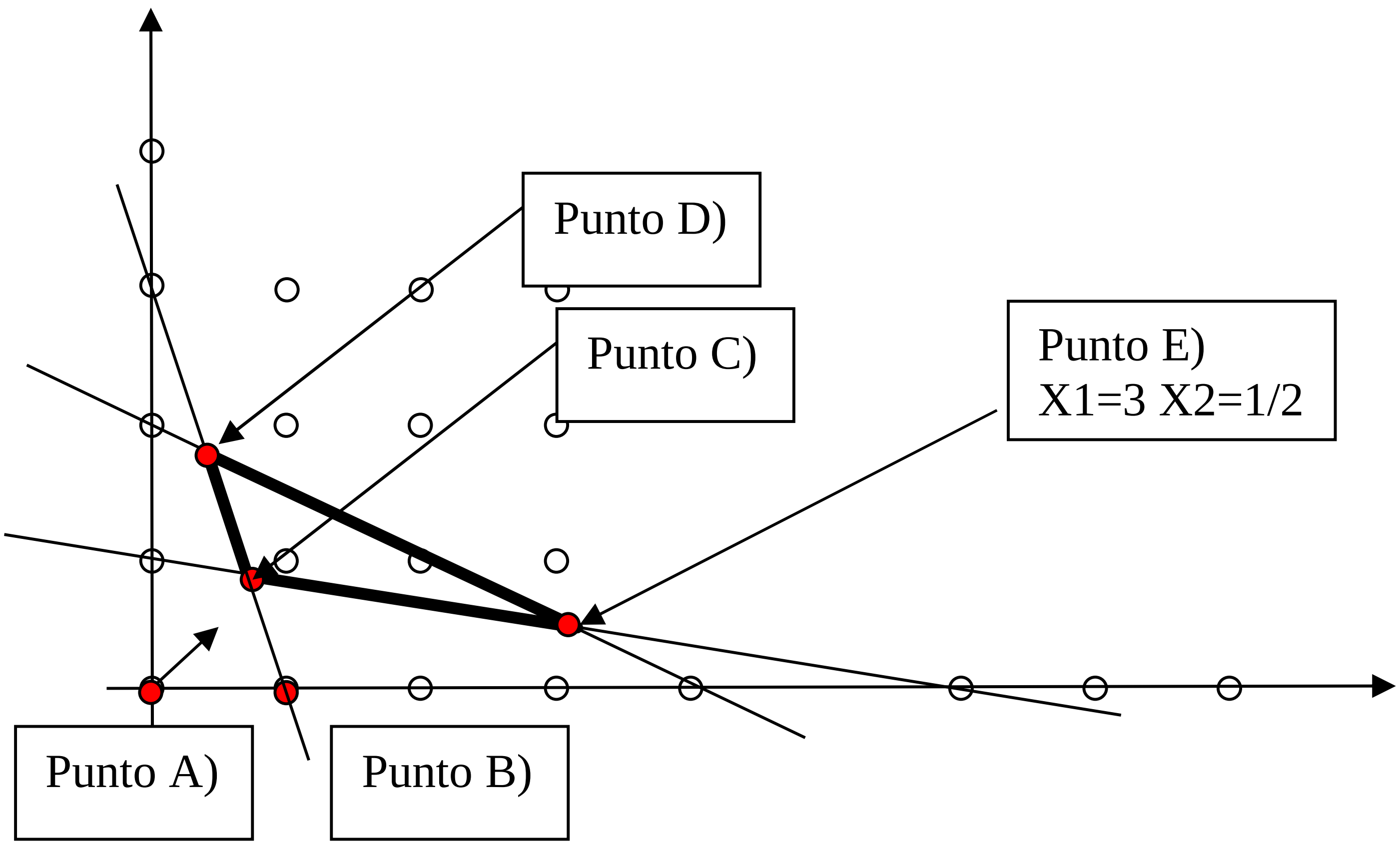
a) Definire il modello di programmazione lineare.
b) Disegnare con cura la regione ammissibile.
c) Risolvere il problema mediante ExcelSolver.
d) Si imponga ora il vincolo di interezza per le variabili e si determini la soluzione del problema con il metodo Branch and Bound. Si risolvano gli ulteriori rilassamenti continui **per via grafica** e si scelga per il branching la variabile frazionaria di indice **massimo**. Si utilizzi un disegno per ogni nodo padre dell’albero e si riporti l’albero decisionale esplorato.

Modello

X1, X2 = quantità dei composti A e B da produrre

Max	X1	+ X2		
s.t.	2X1	+ 4X2	$\leq$	8
	X1	+ 6X2	$\geq$	6
	3X1	+ X2	$\geq$	3
	X1	X2	$\geq$	0

Regione ammissibile



Esempio 3

Il gestore di un allevamento desidera determinare il mix ottimale di mangimi da aggiungere al frumento per la dieta giornaliera degli animali. Nell'hard discount di fiducia sono disponibili due tipi di mangimi A e B, un etto dei quali costa, rispettivamente, 50 e 65 Cent. Un etto di mangime A contiene 25 grammi di proteine ed una unità di vitamine, mentre un etto di B contiene 40 grammi di proteine ed una unità di vitamine. Ogni giorno gli animali necessitano complessivamente di 100 grammi di proteine e di tre unità di vitamine.

a) Definire il modello di programmazione lineare per la determinazione del mix ammissibile di minimo costo.

b) Disegnare con cura la regione ammissibile (6 quadretti per unità).

c) Risolvere il problema mediante ExcelSolver.

d) Si imponga ora il vincolo di interezza per le variabili e si determini la soluzione del problema con il metodo Branch and Bound. Si risolvano gli ulteriori rilassamenti continui **per via grafica** e si scelga per il branching la variabile frazionaria di indice **minimo**. Si utilizzi un disegno per ogni nodo padre dell'albero e si riporti l'albero decisionale esplorato.

e) Quale e il resultato usando le euristica di arrotondamento?

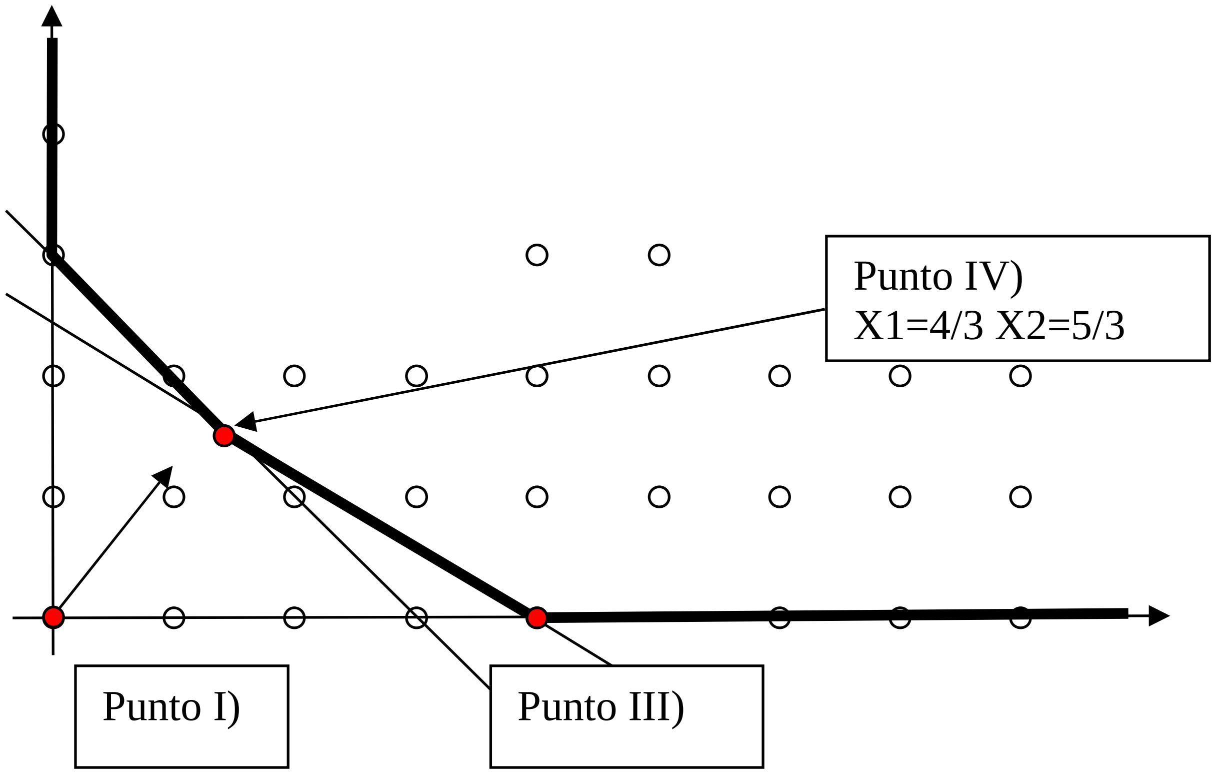
Modello

X1, X2 = n. di etti di mangimi A e B acquistati

Min	50X1	+65X2	
s.t.	25X1+40X2	$\geq$	100
	X1+X2	$\geq$	3
	X1X2	$\geq$	0

Regione Ammissibile

Min	50X1	+65X2		
s.t.	25X1	+40X2	$\geq$	100
	X1	+X2	$\geq$	3
	X1	X2	$\geq$	0

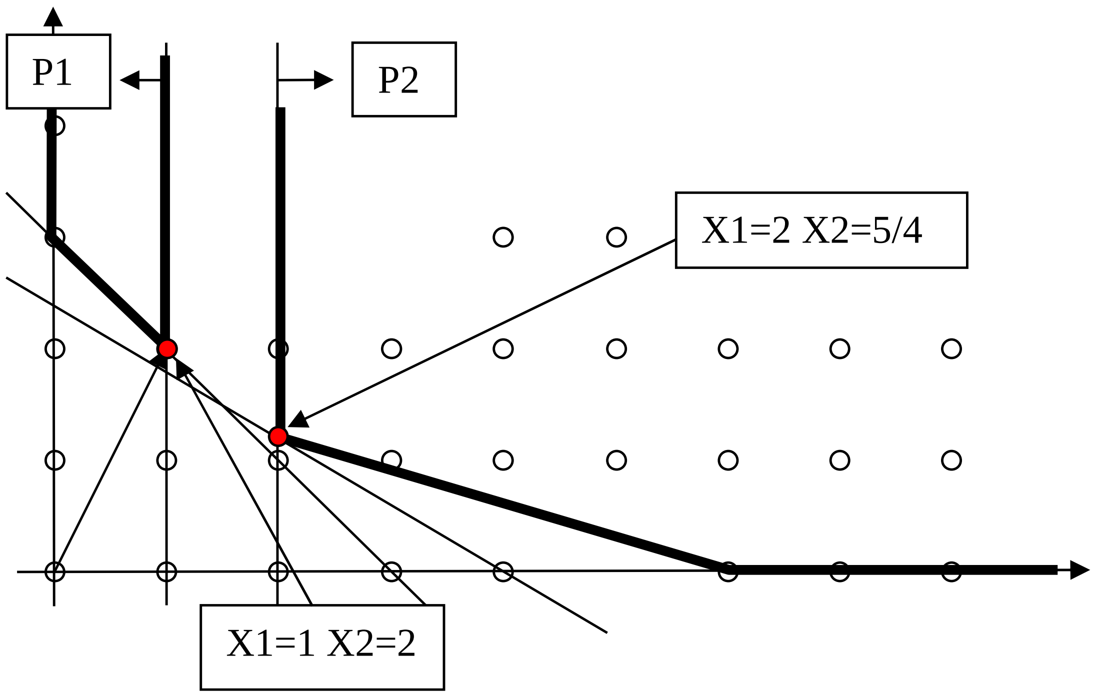


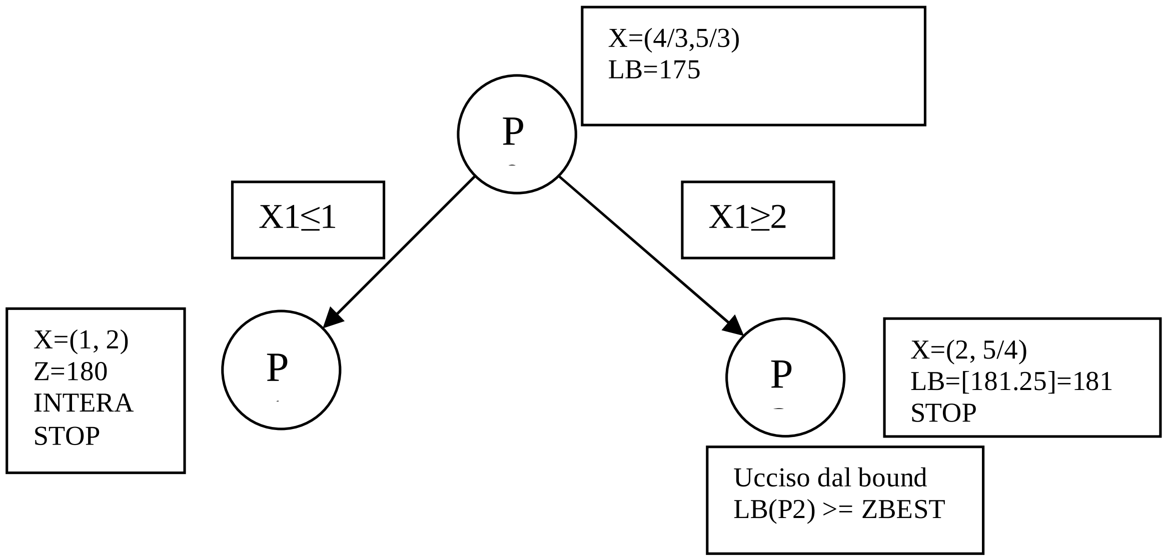
Branch and Bound

Branching sulla variabile frazionaria di indice MINIMO (X1=4/3):

P1: problema associato al taglio X1 ≤ 1
P2: problema associato al taglio X1 ≥ 2

Disegno della regione ammissibile





La soluzione ottima trovata è quindi X1=1, X2 = 2 ed il costo totale è pari a 180 cent

Esempio 4

Un’azienda produce due tipi di panettone, Normale (N) e Super (S). Il panettone N rende 1 Euro al pezzo mentre quello S rende 3 Euro. Il quantitativo di lievito da utilizzare per un panettone N è di 3 grammi mentre per quelli di tipo S è di 6 grammi. Per ogni infornata sono disponibili 21 grammi di lievito. Ogni panettone S **consuma** 5 grammi di aromi mentre ogni panettone di tipo N **ne produce** 1 grammo. Per ogni informata non si possono usare più di 5 grammi di aromi.

- Si richiede la determinazione del mix ottimale di panettoni da inserire in una informata.

Modello

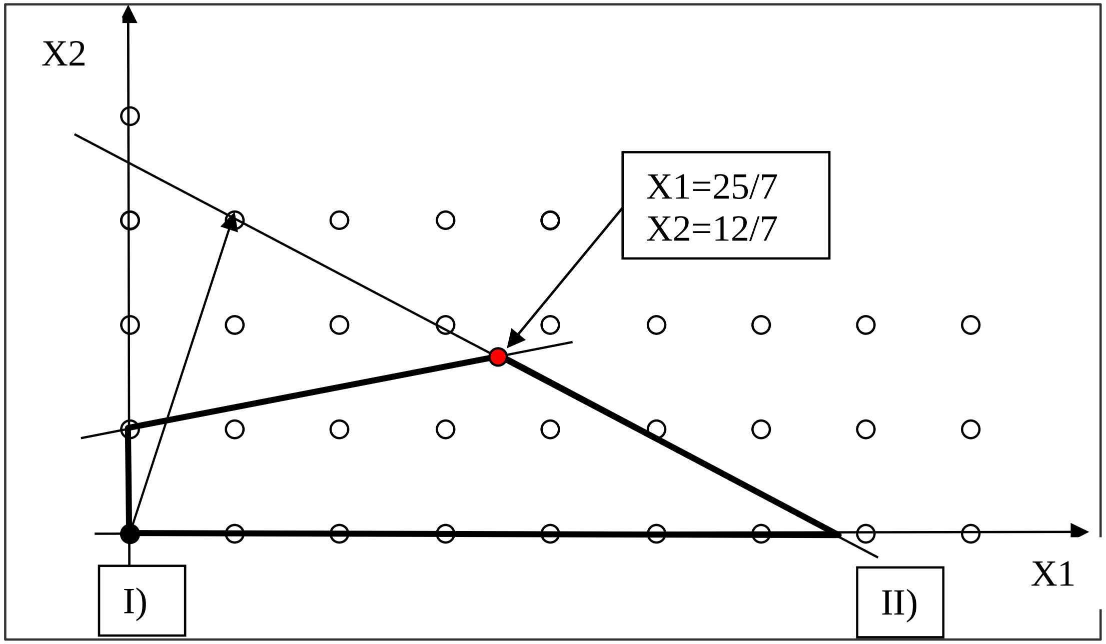
X1 panettoni N in una infornata
X2 panettoni S in una informata

Z in Euro

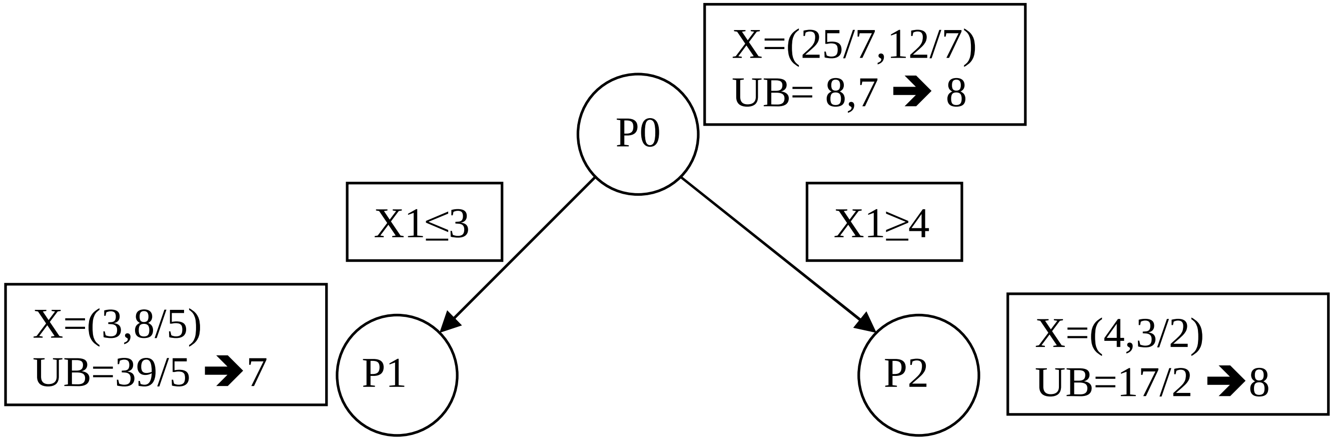
$$
\begin{array}{lrrcl}
Z = \text{Max} & 1\,X1 & +\,3\,X2 & & \\
\text{s.t.} & & & & \\
 & 3X1 & +6X2 & \leq & 21 \\
 & -X1 & +5X2 & \leq & 5 \\
 & X1 & X2 & \geq & 0
\end{array}
$$

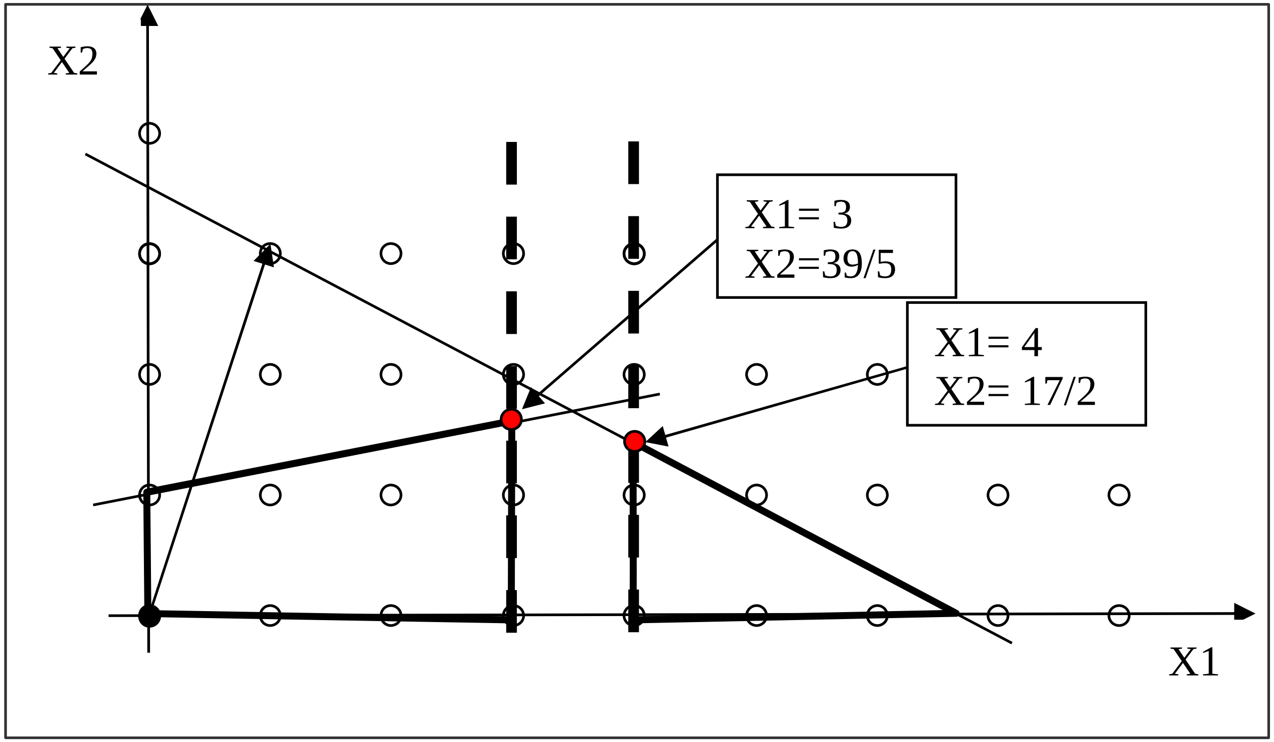
Regione ammissibile

$$
\begin{array}{lrrcl}
Z = \text{Max} & 1\,X1 & +\,3\,X2 & & \\
\text{s.t.} & & & & \\
 & 3X1 & +6X2 & \leq & 21 \\
 & -X1 & +5X2 & \leq & 5 \\
 & X1 & X2 & \geq & 0
\end{array}
$$

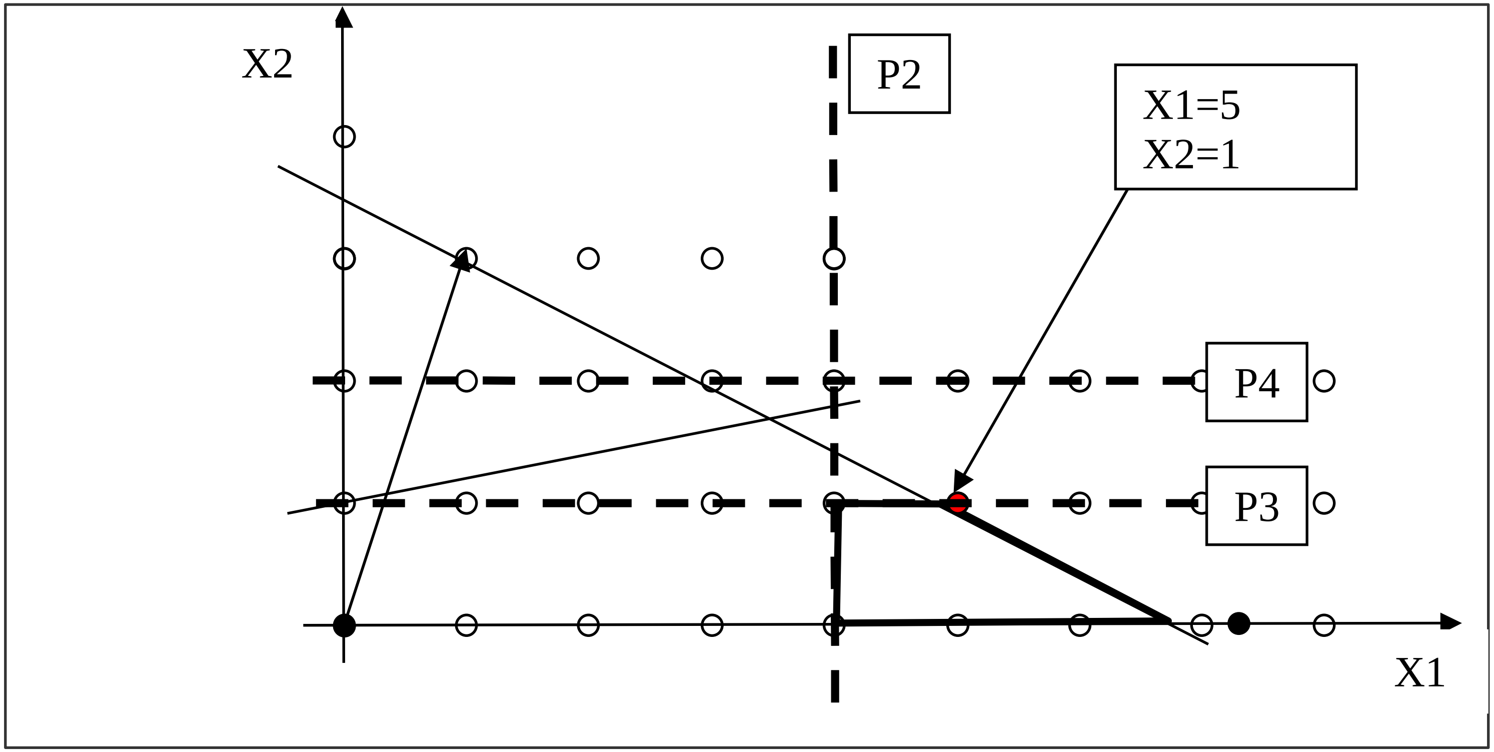


Il problema richiede di effettuare il branch sulla variabile di indice minimo pertanto si sceglie X1=25/3




X2
X1= 3
X2=39/5
X1= 4
X2= 17/2
X1

Proseguo lo sviluppo del nodo P2 cui è associato il bound migliore. La variabile frazionaria è X2=4/3.



La soluzione ottima è pertanto X1=5, X2=1 e vale z= 8. Si noti che il nodo P4 non va sviluppato in quanto il bound del nodo padre P2 è uguale al valore della soluzione intera ottenuta al nodo P3. Inoltre il nodo P1 viene eliminato dal bound.