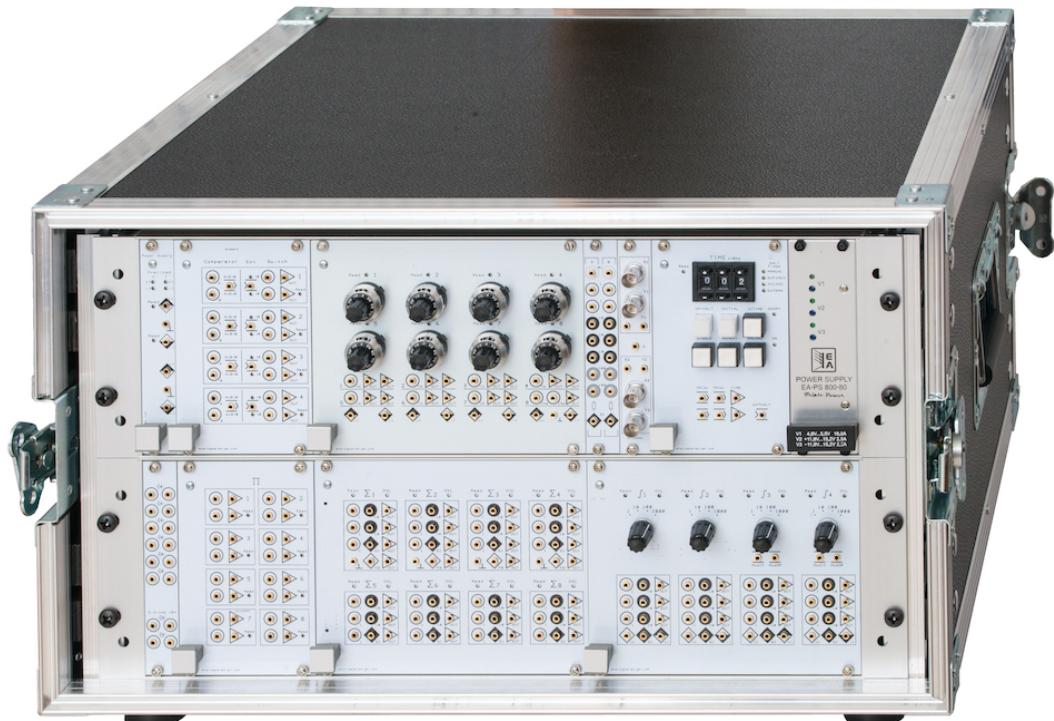


# Model-1

## Benutzerhandbuch





# 1

## Einleitung

Der Analog Paradigm „Model-1“ Analogrechner ist ein moderner, modular aufgebauter Analogrechner, der vor allem für den Einsatz in Forschung und Lehre konzipiert wurde, aber auch in der Messtechnik, beispielsweise zur Signalaufbereitung und anderen Bereichen, Anwendung finden kann. Das vorliegende Benutzerhandbuch beschreibt die verfügbaren Komponenten, ihre Bedienung und ihre Verwendung.

Das ab 2015 entwickelte System zeichnet sich durch konsequenten Einsatz moderner integrierter Bauelemente aus, was neben einer geringen Leistungsaufnahme auch eine hohe Rechengenauigkeit sowie geringe Größe der Rechenelemente zur Folge hat. Abbildung 1.1 zeigt exemplarisch zwei typische Module, wie sie in einem Model-1-System zum Einsatz gelangen: Oben ist die Präzisionsspannungsreferenz dargestellt, mit deren Hilfe die beiden hochstabilen und genauen Maschineneinheiten von  $\pm 10$  V bereitgestellt werden. Das untere Bild zeigt die Rückansicht des Vierfachintegrierermoduls INT4, das vier Integrierer mit je vier Zeitkonstanten enthält.

Alle Module sind im sogenannten Europakartenformat aufgebaut ( $100 \times 160 \text{ mm}^2$ ) und werden in standardisierte 19-Zoll Baugruppenträger eingesteckt. Hierbei kommt ein von Analog Paradigm entwickeltes Bussystem zum Einsatz, das es in typischen Ausbaustufen erlaubt, zwei bis vier Chassis zu einem Gesamtsystem zu verbinden. Bei Bedarf lassen sich aus derartigen Chassis auch sehr umfangreiche Systeme aufbauen, die hunderte von Rechenelementen umfassen können.

Die Verschaltung der Rechenelemente erfolgt mit Hilfe eines 2 mm Steckverbindersystems. Im Lieferumfang des Systems ist ein Satz sogenannter „Patchkabel“ unterschiedlicher Längen enthalten.

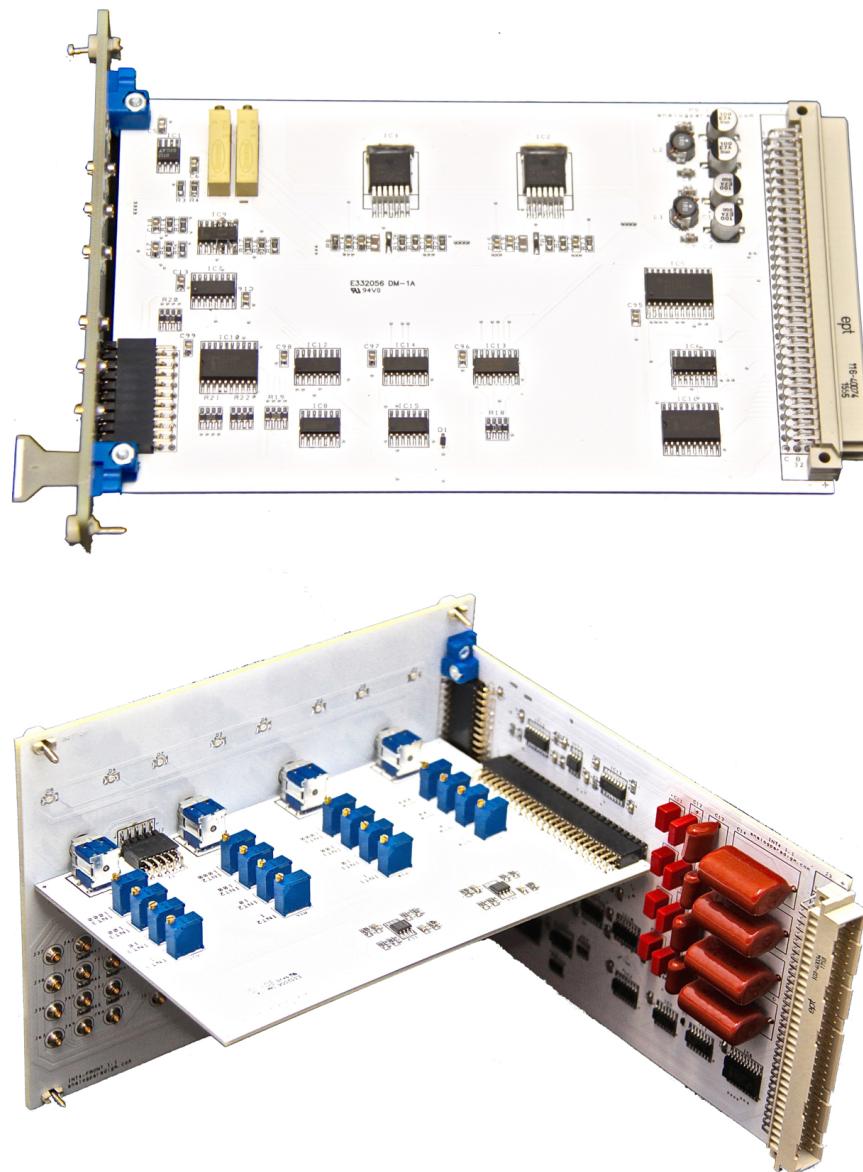


Abbildung 1.1: Typische Module

---

Prof. Dr. BERND ULMANN, 16.01.2017, Version 0.4



# 2

## Module

Im folgenden Kapitel werden die verfügbaren Analogrechnermodule beschrieben. Diese können, von wenigen Einschränkungen abgesehen, im Wesentlichen beliebig miteinander kombiniert werden, um maßgeschneiderte Analogrechnersysteme aufzubauen. Diese Einschränkungen bestehen darin, dass pro System nur ein Netzteil, eine PS-Karte und eine Bedieneinheit (CU) benötigt werden. Ein typisches Kleinsystem besteht aus zwei Chassis, die gemäß Tabelle 2.1 bestückt sind. Hierbei sind die Modulbreiten zu beachten – ein System aus zwei Chassis erlaubt beispielsweise nicht die gleichzeitige Verwendung aller drei Module XIR, XID und XIBNC.

Alle Module können über das Bussystem ausgelesen werden, wobei dies nur für größere Systeme eine auswählbare Option darstellt, die gegenwärtig jedoch noch nicht angeboten wird. Bestückt ist die Auslesefunktion jedoch bereits bei allen ausgelieferten Modulen, so dass diese später als Bestandteil eines größeren Systems, das über eine Ausleseeinheit verfügt, genutzt werden können. Hierfür finden sich auf den Frontplatten aller aktiven Module grüne LEDs mit der Bezeichnung „Read“, die anzeigen, welches Rechenelement gerade angewählt wurde.

Weiterhin kann bei Summierern, Integrierern und einigen anderen Rechenelementen ein Überschreiten des Rechenspannungsbereiches von  $\pm 10$  V auftreten. Eine solche „Overload“-Bedingung wird durch Aufleuchten einer roten LED auf der Frontplatte des betroffenen Rechenelementes angezeigt.

In der Regel ist ein Overload die Folge einer fehlerhaften Rechenschaltung beziehungsweise einer fehlerhaften Skalierung der zugrundeliegenden Maschinengleichungen. In beiden Fällen ist es meist nicht sinnvoll, den Rechenvorgang fortzusetzen. Entsprechend bietet das Bediengerät die Möglichkeit, den Rechenvorgang beim Auftreten eines Overloads automatisch zu beenden. In diesem Fall wird der Rechner in den HALT-Zustand versetzt, in dem die Integrierer ihre jeweils letzten Werte behalten, so dass die Ursache des Overloads analysiert werden kann.

Bezeichnung	Beschreibung	Bemerkung
NT	Linear geregeltes Netzteil	Nur einmal pro System
PS	Präzisionsspannungsreferenz	Nur einmal pro System
CU	Bedieneinheit	Nur einmal pro System
PT8	Acht Koeffizientenpotentiometer	
SUM8	Acht Summierer, davon vier als freie Summierer schaltbar	
INT4	Vier Integrierer mit je vier Zeitkonstanten	
MLT8	Acht Multiplizierer	Optional auch MDS2
CMP4	Vier Komparatoren mit elektronischen Schaltern	
XIR	Zwei freie Widerstandsnetzwerke	Optional auch XID/XIBNC

Tabelle 2.1: Bestückung eines typischen Kleinsystems

## 2.1 Stromversorgung

Die Stromversorgung des Systems erfolgt mit Hilfe eines linear geregelten Netzteiles, das die Grundspannungen +5 V sowie  $\pm 15$  V bereitstellt.<sup>1</sup> Die +5 V Spannung versorgt die Steuer- und Ausleselektronik, während die analogen Rechenelemente mit  $\pm 15$  V versorgt werden. Von diesem symmetrischen Spannungspaar werden auch die beiden hochstabilen und präzisen Maschineneinheiten von  $\pm 10$  V abgeleitet, auf die sich alle Variablen innerhalb einer Rechenschaltung beziehen.

Abbildung 2.1 zeigt die Frontansicht des PS-Modules, das diese Maschineneinheiten bereitstellt. Auf der Frontplatte befinden sich sechs Buchsen, an denen zweimal die Spannungen  $\pm 10$  V abgenommen werden können, wobei die mittlere von je drei dieser Buchsen mit Masse verbunden ist. Auf diese Masse beziehen sich alle Spannungen innerhalb des Systems. Sie ist an zentraler Stelle mit dem Schutzleiter der Netzbuchse verbunden.

Weiterhin finden sich auf der Frontplatte zwei grüne LEDs, die anzeigen, ob eine der beiden Maschinenspannungsreferenzen vom Auslesesystem angewählt wurde. Oben auf der Frontplatte sind vier rote LEDs angeordnet, die eine Überlastung der Maschineneinheiten anzeigen, wobei sowohl der maximal zulässige Strom als auch das Spannungsniveau überwacht werden. Leuchtet eine dieser LEDs auf, so liegt in der Regel ein schwerwiegender Patchfehler oder ein Hardwareproblem vor.

<sup>1</sup>Dieses wird im Folgenden nicht weiter behandelt, da es keine eigenen Bedienelemente enthält.



Abbildung 2.1: Maschinenspannungserzeugung

## 2.2 Bedieneinheit

Die Bedienung des Rechners, d. h. insbesondere der Integrierer, erfolgt über das als *CU*, kurz für *Control Unit*, bezeichnete Modul, dessen Frontplatte in Abbildung 2.2 dargestellt ist. Ein Analogrechner hat typischerweise drei Betriebszustände:

**Anfangsbedingung:** In diesem Zustand, meist als *IC*, kurz für *Initial Condition*, bezeichnet, nehmen die Integrierer ihre jeweiligen Anfangswerte an. Vor der eigentlichen Rechnung beziehungsweise Simulation muss stets dieser Zustand durchlaufen werden.

**Rechnen:** In dieser Betriebsart, meist einfach als *OP*, kurz für *Operate*, bezeichnet, arbeiten die Integrierer, bilden also das Zeitintegral über die Summe der an ihren Eingängen anliegenden Werte.

**Halt:** Im Zustand *HLT* werden die Integrierer angehalten und behalten ihren jeweils letzten Ausgangswert bei. Da kein Operationsverstärker und auch kein Kondensator der Integrierer perfekt ist, werden sich die solchermaßen festgehaltenen Werte langsam ändern, so dass die Verweildauer in diesem Zustand nicht unnötig ausgedehnt werden sollte.

Im einfachsten Fall erfolgt die Ablaufsteuerung manuell – zur Durchführung einer Rechnung wird zunächst durch Drücken der Taste *INITIAL* die Betriebsart *IC* ausgewählt. Im Anschluss hieran wird der Rechner durch Drücken der Taste *OP/HALT* in den Zustand *OP* versetzt. Erneutes Drücken dieser Taste wechselt in der Folge in den Zustand *HLT*, danach wieder in *OP* usf. Dieses manuelle Rechnen ist vor allem für langsam ablaufende Simulationen von Interesse.

Sollen, was den Normalfall darstellt, Overload-Bedingungen zum Anhalten der laufenden Rechnung führen, so kann dies durch Drücken der Taste *OVERLOAD* geschehen.

Um Rechnungen automatisch zu wiederholen, bietet die Bedieneinheit auch die Betriebsart *repetierendes Rechnen*, kurz *REPEAT* genannt, an. Durch Drücken der Taste *REPEAT* werden automatisch die Betriebsarten *IC*, *OP*, *IC*, *OP*, ... durchlaufen, wobei die Zeitspanne eines *OP*-Zyklus mit Hilfe der oben auf der Frontplatte angeordneten Dekade in Schritte von je 10 ms Dauer eingestellt werden kann.

An dieser Stelle muss der Frage, wie lange der Zustand *IC* eingenommen werden soll, Aufmerksamkeit geschenkt werden. Abhängig von der an den Integrierern eingestellten Zeitkonstanten dauert das Setzen des Anfangswertes unterschiedlich lange. Beinhaltet die Rechnung auch nur einen Integrierer, dessen Zeitkonstante auf 1 oder 10 (d. h. „langsam“) gestellt ist, so muss mit normaler *IC*-Zeit gearbeitet werden. Sind alle Integrierer auf Zeitkonstanten 100 oder 1000 gestellt, kann durch Drücken der Taste *ICTIME* die Zeitspanne, während derer der Zustand *IC* eingenommen wird, auf wenige 10 ms verringert werden.

Repetierender Betrieb eignet sich vor allem hervorragend dazu, Kurven oder geschlossene Figuren auf einem Oszilloskop darzustellen. Durch die hohe Wiederholrate kann häufig ein vergleichsweise

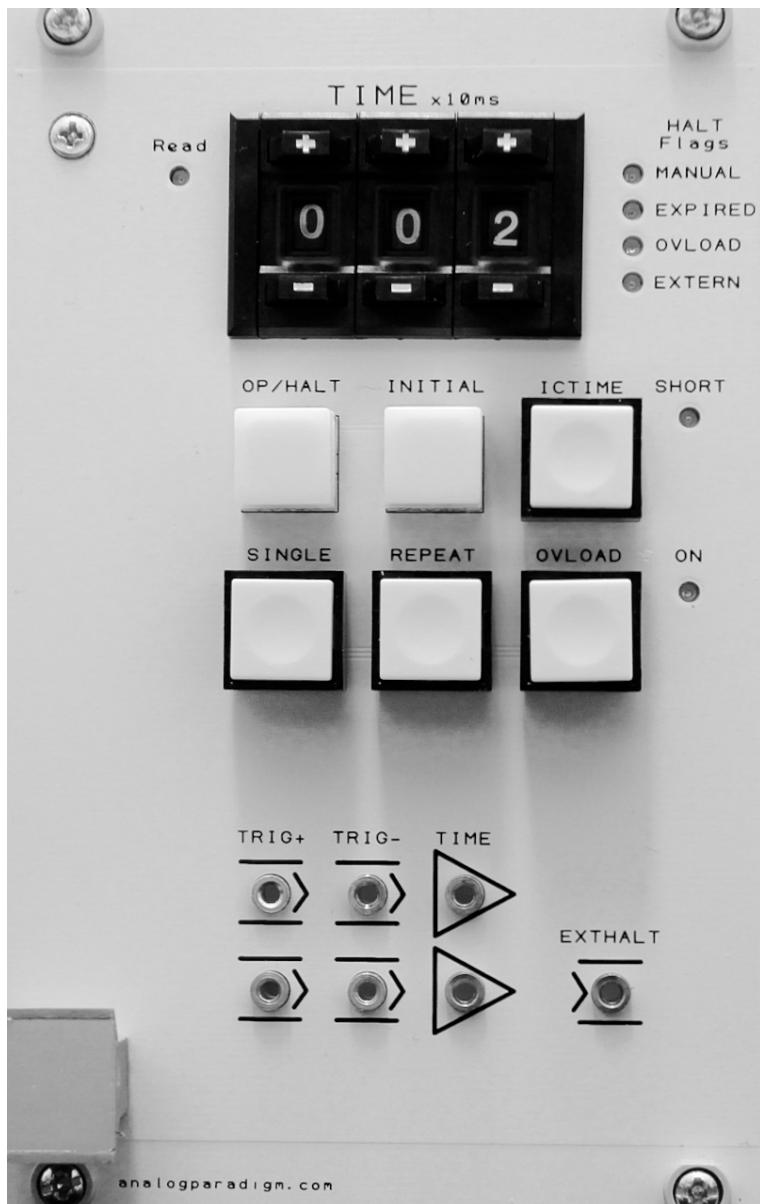


Abbildung 2.2: Bedieneinheit

flimmerfreies Bild erzeugt werden, anhand dessen der Einfluss von Parameteränderungen auf das Resultat einer Rechnung direkt sichtbar gemacht werden kann.

Im Zusammenspiel mit einem Plotter, aber auch bei Rechnungen, an deren Ende Werte ausgelesen werden sollen, bietet sich die Verwendung der Betriebsart *SINGLE* an, bei der ein einziger Zyklus IC, OP, HLT auf Basis der durch ICTIME und TIME eingestellten Zeiten für die Modi IC und OP durchlaufen wird.

## 2.3 Summierer

In Form des *SUM8*-Modules stehen acht Summierer, von denen vier als sogenannte *freie Verstärker* genutzt werden können, zur Verfügung. Abbildung 2.3 zeigt die Frontplatte dieses Moduls. Jedem Summierer sind zwei LEDs zugeordnet: Eine grüne Read-LED, die anzeigt, dass der jeweilige Summierer von der Ausleseeinheit angewählt wurde, sowie eine rote LED, die eine Überschreitung des zulässigen Wertebereiches anzeigt.

Alle Summierer verfügen über jeweils fünf Eingänge, von denen drei mit 1 und zwei weitere mit dem Faktor 10 gewichtet sind. Alle mit *OUT* gekennzeichneten Buchsen eines Summierers sind parallel geschaltet. An ihnen liegt das jeweilige Summationsergebnis an.

Abbildung 2.4 zeigt das allgemein für Summierer in einer Rechenschaltung übliche Symbol. Eingezeichnet sind hier drei implizit mit dem Faktor 1 gewichtete Eingänge  $e_1$  bis  $e_3$  sowie der sogenannte *Summenpunkt*, meist als *Summing Junction*, kurz *SJ*, bezeichnet. Ein mit einem Gewicht  $\neq 1$  gewichteter Eingang wird durch Notieren des Gewichtes neben dem betreffenden Eingang kenntlich gemacht. Am Ausgang dieses Summierers liegt bei freiem *SJ* der Wert  $-(e_1 + e_2 + e_3)$  an, prinzipiell bedingt nehmen Summierer und Integrierer eines Analogrechners einen impliziten Vorzeichenwechsel vor.

Figur 2.6 zeigt die Prinzipschaltung eines solchen Summierers. Die Gewichtung der Eingangswerte, d. h. ihre Multiplikation mit einem festen Vorfaktor, geschieht durch geeignete Wahl des Widerstandsverhältnisses  $R_i/R_f$ , wobei  $R_i$  den dem Eingang  $i$  zugeordneten Widerstand und  $R_f$  den sogenannten *Rückführungswiderstand (Feedback)* bezeichnen.<sup>2</sup> Üblich, und auch bei diesem Analogrechner so ausgeführt, sind Eingangsgewichte 1 und 10. Durch Zusammenführen weiterer Widerstände am Summenpunkt *SJ* kann die Anzahl der Eingänge eines solchen Rechenelementes erweitert werden. Hierzu steht das Modul *XID* zur Verfügung (siehe Abschnitt 2.8). In einigen Fällen ist es auch praktisch, zusätzliche Rechenelemente in die Rückführung eines Summierers zu schalten – typisch ist beispielsweise der Einsatz von Z-Dioden zur Begrenzung des Ausgangswertes. Hierzu wird das gewünschte Feedbackklemmen an die Buchsen *OUT* und *SJ* angeschlossen.

<sup>2</sup>Eine detaillierte Behandlung dieser Schaltung findet sich beispielsweise in [ULMANN (2013), S. 55 ff].

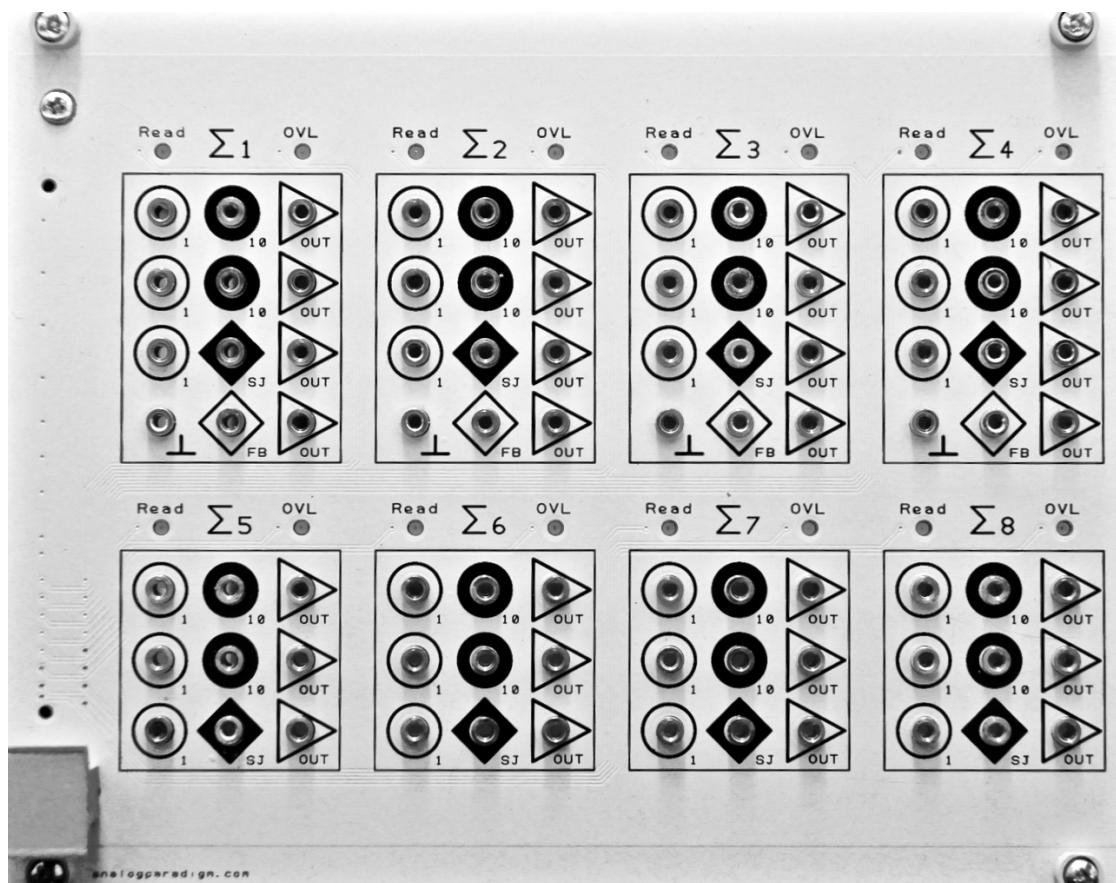


Abbildung 2.3: Summierermodul

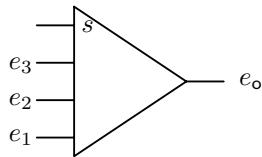


Abbildung 2.4: Symbolische Repräsentation eines Summierers

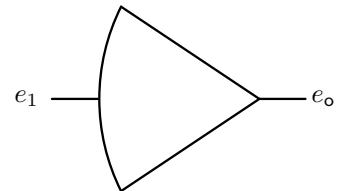


Abbildung 2.5: Symbol eines freien Verstärkers

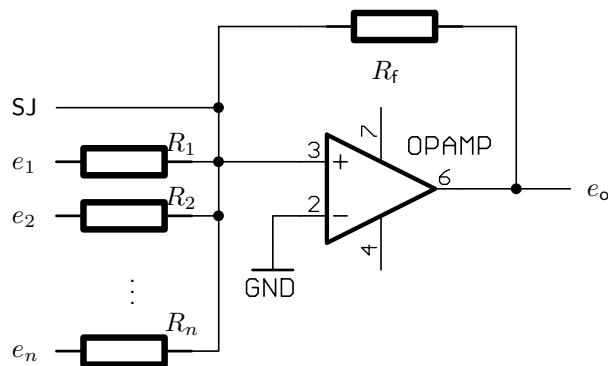


Abbildung 2.6: Operationsverstärker mit negativem Feedback als Summierer

Die oberen vier Summierer weisen eine Besonderheit gegenüber den unteren vier Elementen auf: Durch Verbinden der Buchsen  $\perp$  und  $FB$ , kurz für *Feedback*, kann der Rückführungswiderstand  $R_f$  (siehe Abbildung 2.6) deaktiviert werden, so dass der Summierer als freier Verstärker arbeitet. Diese Betriebsart wird mitunter für die Bildung sogenannter *impliziter Funktionen* genutzt. In einer Rechenschaltung wird dieses Element durch das in Abbildung 2.5 dargestellte Symbol repräsentiert.

Abbildung 2.7 zeigt ein Beispiel einer aus zwei Summierern bestehenden Rechenschaltung. Der erste Summierer hat durch die direkte Verbindung seines Ausganges mit einem mit 1 gewichteten Eingang zwei parallel geschaltete, gleich große Widerstände in seiner Rückführung, so dass alle Eingangsgewichte nurmehr die Hälfte ihres nominellen Wertes aufweisen. Am Ausgang dieses ersten Summierers liegt folglich der Wert  $-(e_1 + e_2)/2$  an. Dieser Wert wird einem mit 10 gewichteten Eingang eines zweiten Summierers zugeführt, der einen weiteren Eingang mit anliegendem Wert  $e_3$  besitzt. An seinem Ausgang findet sich dann entsprechend der Wert

$$-(10(-\frac{e_1 + e_2}{2} + e_3) = 5(e_1 + e_2) - e_3.$$

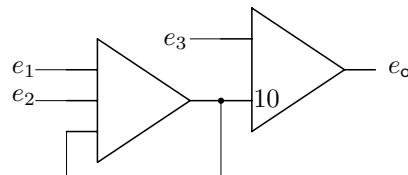


Abbildung 2.7: Beispielschaltung zur Berechnung von  $e_o = 5(e_1 + e_2) - e_3$

## 2.4 Integrierer

Wesentliches Element eines Analogrechners sind Integrierer, mit denen das Zeitintegral über die Summe der gewichteten Eingangssignale gebildet werden kann:

$$e_o = - \int_0^t \sum_{i=1}^n a_i e_i dt + e(0) \quad (2.1)$$

Abbildung 2.8 zeigt die Frontplatte des Moduls INT4, das vier identische Integrierer mit je vier Zeitkonstanten besitzt. Jeder dieser Integrierer verfügt über sechs Eingänge, von denen drei mit 1 und drei mit 10 gewichtet sind. Wie beim Summierer sind auch hier die drei mit OUT gekennzeichneten Ausgangsbuchsen eines jeden Integrierers parallel geschaltet. Der Anfangswert  $e(0)$  in Gleichung (2.1) wird über die mit IC gekennzeichnete Buchse bereitgestellt. An der SJ-Buchse liegt – analog zum Summierer – der Summenpunkt des Verstärkers an, so dass auch hier zusätzliche Elemente in die Rückführung geschaltet werden können. Weiterhin findet sich in der Buchsengruppe jedes Integrierers jeweils eine Buchse, an der die Konstante +1 beziehungsweise -1, d. h. die positive bzw. negative Maschineneinheit anliegt. Diese Werte werden oft als Anfangswerte einer Integration benötigt.

Von besonderer Bedeutung bei einem Integrierer ist die bereits erwähnte sogenannte *Zeitkonstante*  $k_0$ . Wird an einen mit 1 gewichteten Eingang eines Integrierers mit  $k_0$  der Wert -1 gelegt, so erreicht der Ausgang des Integrierers (aufgrund der auch hier stattfindenden impliziten Vorzeichenumkehr) bei einem Anfangswert von 0 nach einer Sekunde den Wert +1. Wird die Zeitkonstante auf  $k_0 = 10$  geändert, was mit Hilfe des über jedem Integrierer angeordneten Drehschalters geschieht, so erreicht die Ausgangsspannung des Integrierers unter gleichen Voraussetzungen bereits nach 100 ms den Wert +1 usf.

Die Integrierer der Baugruppe INT4 besitzen jeweils vier umschaltbare Zeitkonstanten 1, 10, 100 und 1000. Durch Umschalten der Zeitkonstanten aller an einer Rechnung beteiligten Integrierer lässt

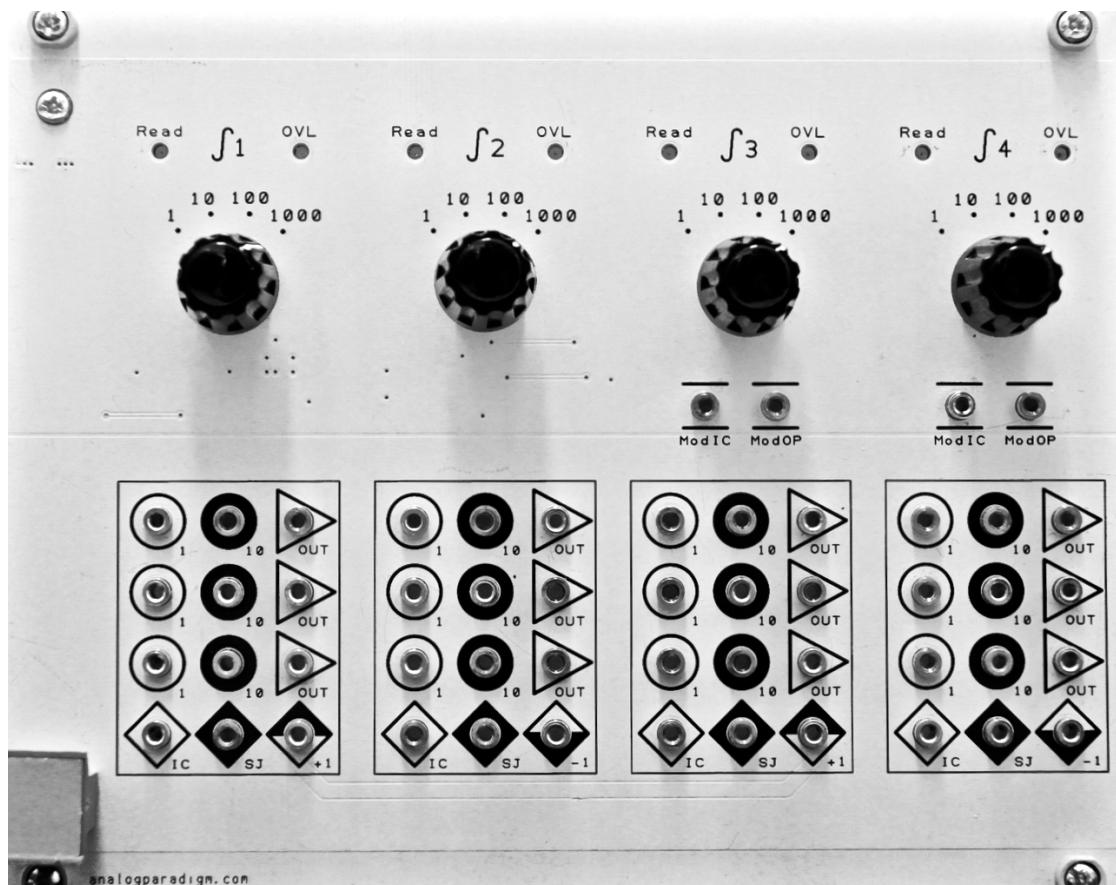


Abbildung 2.8: Integrierermodul

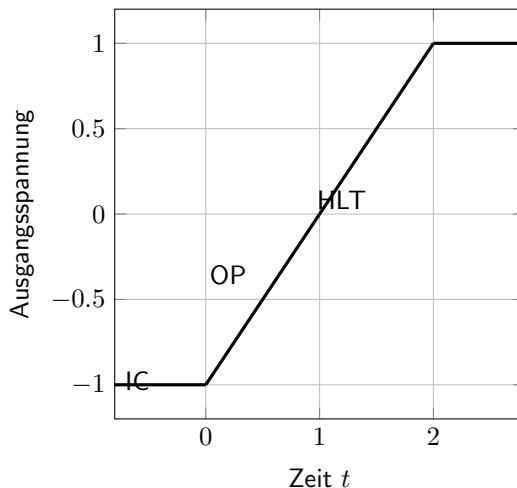


Abbildung 2.9: Zeitliches Verhalten eines Integrierers

sich eine Rechnung entsprechend um Faktoren  $10^n$  beschleunigen oder verlangsamen.<sup>3</sup>

Abbildung 2.9 zeigt das Verhalten eines Integrierers mit Anfangswert +1 und konstantem Eingangswert −1: Vor dem Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich der Integrierer im Zustand IC, sein Ausgang nimmt den negativen Wert seines IC-Einganges an. Im Bereich  $0 \leq t \leq 2$  befindet sich der durch das Bediengerät gesteuerte Integrierer im Zustand OP, integriert also über die an seinem Eingang anliegende Konstante −1, woraus sich eine Rampe von −1 bis +1 ergibt. Zum Zeitpunkt  $t = 2$  wird der Zustand HLT aktiviert, so dass der Integrierer den letzten Ausgangswert beibehält.

Abbildung 2.10 zeigt das in Rechenschaltungen verwendete Symbol eines Integrierers. Nicht näher bezeichnete Eingänge weisen hierbei stets ein Eingangsgewicht von 1 auf.

Im einfachsten und typischen Fall unterliegen alle Integrierer des Analogrechners der Steuerung durch das Bediengerät CU, d. h. alle Integrierer nehmen gleichzeitig den Zustand IC, OP beziehungsweise HLT an. In einigen Fällen ist es erforderlich, einige Integrierer von dieser zentralen Steuerung auszunehmen. Hierfür stehen an den beiden rechten Integrierern des Moduls INT4 jeweils zwei Steuereingänge *Mode IC* und *Mode OP* zur Verfügung. Bleiben diese unbeschaltet, werden die Integrierer zusammen mit allen anderen angesteuert. Durch Aufschalten geeigneter Signale lassen sich diese zentralen Steuersignale jedoch für die betreffenden Integrierer außer Kraft setzen. Hiermit ist es beispielsweise möglich, einen Teil einer Rechenschaltung repetierend zu betreiben, während ein an-

<sup>3</sup>Den gleichen Effekt haben die mit 1 und 10 gewichteten Eingänge.

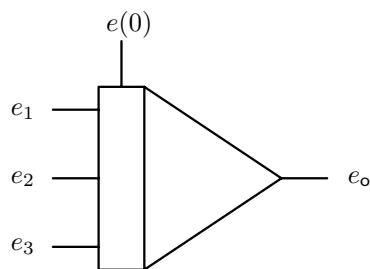


Abbildung 2.10: Symbolische Darstellung eines Integrierers

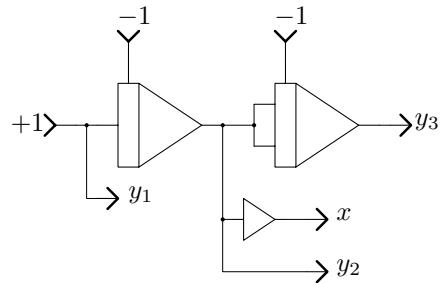


Abbildung 2.11: Erzeugung einer Parabel mit Hilfe zweier kaskadierter Integrierer

erer Teil beispielsweise Anfangswerte für diesen generiert, wofür einzeln gesteuerte Integrierer zum Einsatz gelangen.

Jeder Integrierer verfügt zudem über zwei LEDs, mit denen ein Auslesevorgang (grün) beziehungsweise eine Übersteuerung (rot) angezeigt werden.

Abbildung 2.11 zeigt eine einfache, aus zwei hintereinander geschalteten Integrierern und einem Summierer bestehende Rechenschaltung, die das zeitliche Verhalten dieser Rechenelemente verdeutlicht.

Vor Beginn der eigentlichen Rechnung befinden sich beide Integrierer in der Betriebsart IC, so dass an den Ausgängen beider Integrierer zunächst  $+1$  anliegt. Werden nun beide Integrierer in den Zustand OP versetzt, beginnt die Integration nach der Zeit. Am Ausgang des linken Integrierers ergibt sich

$$y_2 = - \left( \int_0^2 1 dt - 1 \right) = t - 1 \Big|_0^2,$$

wobei die Rechenzeit von 0 bis 2 Sekunden läuft, bevor der Integrierer entweder auf IC zurückgesetzt oder in den Zustand HLT versetzt werden muss, da ansonsten der zulässige Wertebereich des Ausgangssignals überschritten wird.

Dieses Signal erfährt durch einen Summierer mit nur einem einzigen Eingang eine Vorzeichenumkehr. (Solcherart eingesetzte Summierer werden häufig als *Inverter* bezeichnet.) Das resultierende Ausgangssignal kann beispielsweise für die  $x$ -Ablenkung eines Anzeigegeräts wie eines Oszilloskops oder eines Plotters verwendet werden.

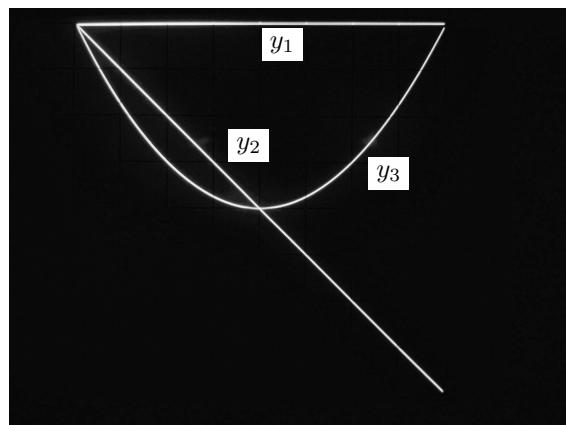


Abbildung 2.12: Erzeugung einer Parabel durch zweifache Integration über eine Konstante

Die Variable  $y_2$  dient ihrerseits als Input für den zweiten Integrierer, wobei hier durch Verwendung zweier mit 1 gewichteter Eingänge eine Gewichtung von 2 erzielt wird. Am Ausgang dieses Integrierers entsteht dann eine Parabelfunktion (das Eingangsgewicht 2 hebt den Faktor  $\frac{1}{2}$  auf, der bei der Integration über  $t - 1$  entsteht).

Abbildung 2.12 zeigt den zeitlichen Verlauf der drei betrachteten Variablen  $y_1$ ,  $y_2$  und  $y_3$ . Als Ausgabegerät wird ein Oszilloskop verwendet, wobei der Rechner im repetierenden Betrieb und mit einer Zeitkonstanten von  $k_0 = 10^2$  arbeitet, um alle 20 ms einen vollständigen Rechenablauf zu vollführen, so dass sich ein stehendes, flimmerfreies Bild ergibt. Wichtig ist hier, eine kurze IC-Zeit durch Drücken der Taste ICTIME auszuwählen, da die Darstellung bei langer IC-Zeit zu stark flimmert.

## 2.5 Potentiometer

Koeffizienten innerhalb einer Rechenschaltung können fast nie allein mit den gewichteten Eingängen der Summierer und Integrierer dargestellt werden. Hierfür stehen sogenannte *Koeffizientenpotentiometer*, meist kurz nur als *Potentiometer* bezeichnet, zur Verfügung, von denen das Modul PT8 acht Stück enthält. Abbildung 2.13 zeigt die Frontplatte dieses Moduls.

Allgemein können mit einem solchen Potentiometer, bei dem es sich im Wesentlichen um einen Spannungsteiler handelt, nur Faktoren  $0 \leq \alpha \leq 1$  eingestellt werden. Die ersten sieben Potentiometer des PT8-Moduls verfügen über je eine Eingangs- sowie zwei parallel geschaltete Ausgangsbuchsen. Das achte Potentiometer besitzt eine Sonderrolle, da bei ihm beide Eingänge des Potentiometers

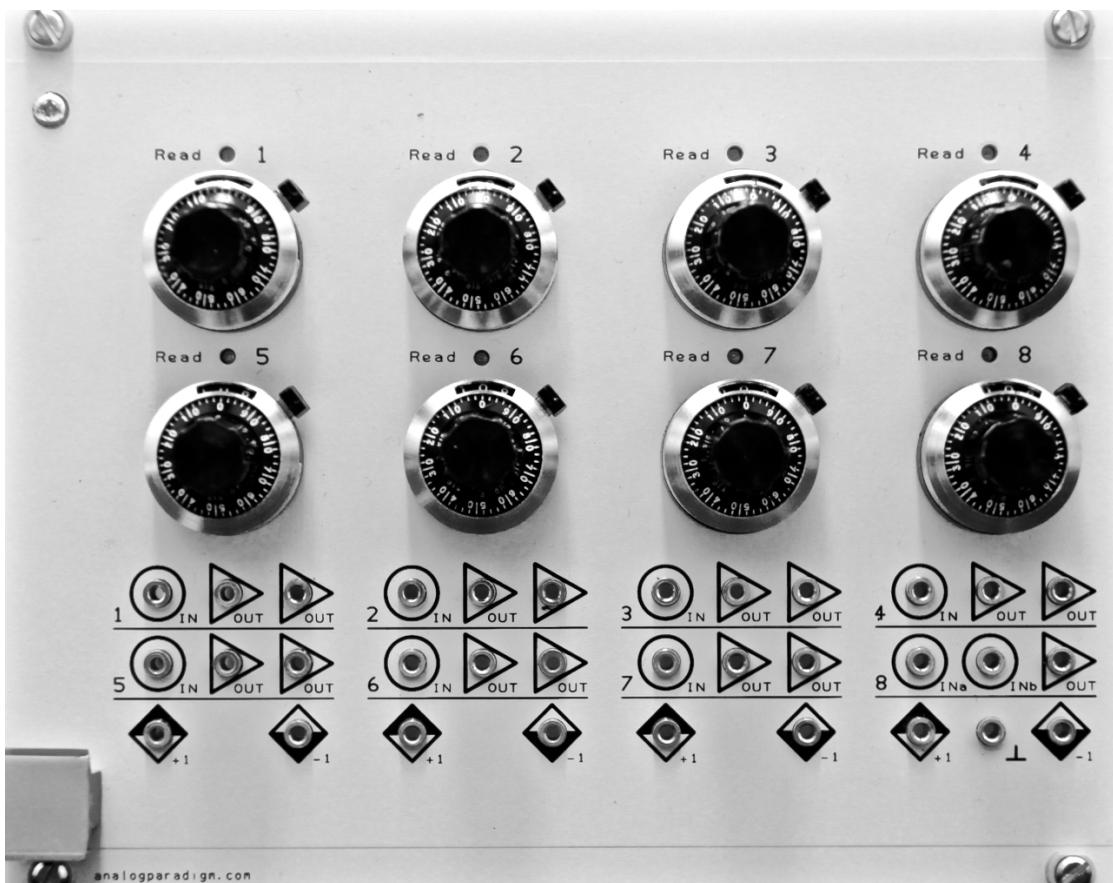


Abbildung 2.13: Koeffizientenpotentiometermodul

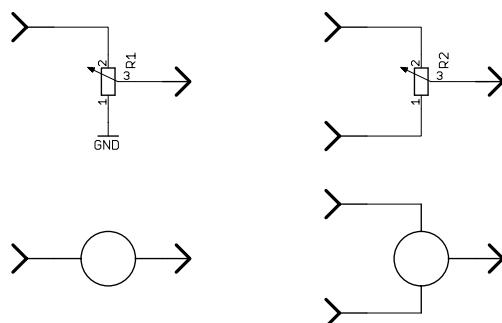


Abbildung 2.14: Koeffizientenpotentiometergrundschaltungen mit den zugehörigen Rechenschaltungssymbolen

zugänglich sind. Soll es, was den Normalfall darstellt, auch als einfacher Spannungsteiler genutzt werden, so ist der mit  $INb$  gekennzeichnete Eingang mit einem Patchkabel mit der darunter befindlichen Massebuchse zu verbinden. Werden beide Eingänge  $INa$  und  $INb$  dieses Potentiometers mit je einem Signal beaufschlagt, liegt am Ausgang die durch die Stellung des Schleifers gewichtete Summe dieser beiden Signale an, es kann also zwischen zwei Signalen „überblendet“ werden. Ein solches Potentiometer wird als *freies* Potentiometer bezeichnet.

Im Unterschied zu klassischen Analogrechnern, bei denen die Potentiometer wirklich nur einfache Spannungsteiler waren, verfügen die des Moduls PT8 jeweils über einen nachgeschalteten Verstärker, was zwei wesentliche Vorteile mit sich bringt: Zum einen sind die Schleifer der Potentiometer quasi nicht belastet, so dass sie direkt mit Hilfe der Präzisionsknöpfe eingestellt werden können. Zum anderen werden die Potentiometer nicht beschädigt, wenn ihr Ausgang versehentlich auf Masse, einen Ausgang eines anderen Rechenelementes oder eine Maschineneinheit gelegt wird. Bei der Umsetzung klassischer Rechenschaltungen ist aber aus diesem Grunde Vorsicht geboten: Mitunter finden sich hier Potentiometer, deren Ausgang beispielsweise direkt an den Summenpunkt eines Summierers oder Integrators geschaltet wird. Solche Tricksschaltungen sind mit den Potentiometern des PT8-Moduls nicht möglich. **Ihre Ausgänge dürfen niemals direkt mit einem Summenpunkt verbunden werden!**

Da bei einem Koeffizientenpotentiometer keine Wertebereichsüberschreitung auftreten kann, ist jedem Potentiometer nur eine einzige grüne LED zugeordnet, welche einen Auslesevorgang anzeigen.

Abbildung 2.14 zeigt die Grundschaltung dieser beiden Typen von Koeffizientenpotentiometern zusammen mit dem in Rechenschaltungen verwendeten jeweiligen Symbol.

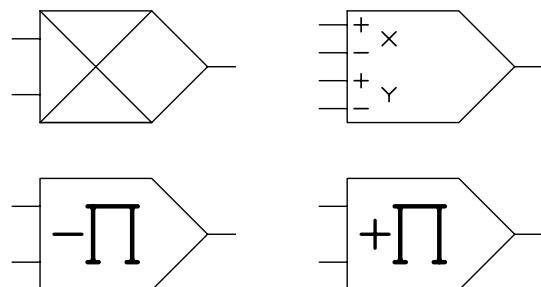


Abbildung 2.15: Symbolische Darstellungen von Multiplizierern

## 2.6 Multiplizierer

Viele Probleme, die mit einem Analogrechner behandelt werden, erfordern die Multiplikation oder Division zweier Werte beziehungsweise das Berechnen einer Quadratwurzel. Grundlegendes Rechenelement für diese Operationen sind Multiplizierer, die in der Regel durch die in Abbildung 2.15 dargestellten Symbole repräsentiert werden.

Am gebräuchlichsten sind heutzutage die beiden Symbole oben links beziehungsweise unten rechts, die jeweils einen Multiplizierer mit zwei Eingängen darstellen, der *keine* implizite Vorzeichenumkehr vornimmt. (Klassische Analogrechner verwendeten häufig sogenannte *Parabelmultiplizierer* die zur Multiplikation zweier Werte  $x$  und  $y$  die Werte  $\pm x$  und  $\pm y$  als Eingangssignale benötigten und darüberhinaus eine implizite Vorzeichenumkehr ausführten. Diese werden durch die Symbole oben rechts und unten links in Rechenschaltungen dargestellt.)

Bei der Programmierung eines Analogrechners bietet es sich an, niemals mit den Spannungspiegeln der Maschineneinheiten selbst zu rechnen, sondern diese als  $+1$  und  $-1$  zu interpretieren. Dies wird besonders beim Einsatz von Multiplizierern augenfällig, da diese das Ausgangssignal dergestalt skalieren, dass es nie den Wertebereich  $[-1 : +1]$  verlässt. Die Multiplikation  $(+1) \cdot (-1)$ , was bei dem hier behandelten Analogrechner den Spannungen  $+10\text{ V}$  und  $-10\text{ V}$  entspricht, liefert also das Resultat  $-1$ , was wiederum durch  $-10\text{ V}$  repräsentiert wird.

Gegenwärtig werden von Analog Paradigm zwei Module mit Multiplizierern angeboten, die im Folgenden behandelt werden.

### 2.6.1 MLT8

Das Modul *MLT8* enthält acht identische Multiplizierer. Seine Frontplatte ist in Abbildung 2.16 dargestellt. Jeder Multiplizierer verfügt über zwei Eingangsbuchsen sowie zwei parallel geschaltete Ausgangsbuchsen und besitzt eine grüne LED, um einen Auslesevorgang anzuzeigen.

Um Divisionen beziehungsweise Wurzeloperationen zu implementieren, bedient man sich in der Regel impliziter Funktionstechnik, bei der ein Summierer als freier Verstärker geschaltet wird, während ein Multiplizierer in die Rückführung zwischen OUT und einem mit 1 gewichteten Eingang geschaltet wird.<sup>4</sup>

### 2.6.2 MDS2

Das Modul *MDS2* enthält hingegen nur zwei Rechenelemente, die jeweils als Multiplizierer, Dividierer oder Quadraturwurzelschaltung genutzt werden können. Abbildung 2.17 zeigt die Frontplatte dieses Moduls. Da bei der Division ein Überschreiten des zulässigen Wertebereiches möglich ist, verfügt jedes der beiden Elemente nicht nur über eine grüne Readout-LED, sondern auch über eine rote Übersteuerungsanzeige. Beide Elemente weisen jeweils zwei Eingangs- sowie zwei parallel geschaltete Ausgangsbuchsen auf.

## 2.7 Komparatoren

Mit Hilfe eines *Komparators* können zwei Werte miteinander verglichen werden. Am Ausgang eines solchen Rechenelementes steht eine Steuerspannung, mit der in der Regel ein (elektronischer) Umschalter angesteuert wird. Das Modul *CMP4* beinhaltet vier solche Komparatoren sowie vier elektronische Umschalter. Seine Frontplatte ist in Abbildung 2.18 dargestellt.

Jeder Komparator verfügt über zwei Eingänge *A* und *B* und einen Ausgang, an dem ein logisches Signal anliegt, das High ist, falls  $A + B > 0$  erfüllt ist. Andernfalls ist der Ausgang Low. Jedem Komparator ist ein elektronischer Umschalter zugeordnet, der seinerseits einen Eingang besitzt, an den das Ausgangssignal eines Komparators angeschlossen werden kann. Falls diese Eingangsbuchse eines elektronischen Schalters unbeschaltet bleibt, ist sie intern automatisch mit dem Ausgang des zugeordneten Komparators verbunden. Diese Defaultkonfiguration wird in einer Rechenschaltung üblicherweise mit dem Symbol in Abbildung 2.19 dargestellt. Die beiden nach oben und unten weisenden Eingangsleitungen entsprechen den beiden Komparatoreingängen *A* und *B*, während der elektronische Schalter explizit dargestellt wird.

Falls der Komparator losgelöst von seinem zugeordneten elektronischen Schalter verwendet wird, was selten der Fall ist, wird er durch das in Abbildung 2.20 dargestellte Symbol repräsentiert.

<sup>4</sup>Siehe hierzu beispielsweise [ULMANN (2013), S. 79] oder [GILOI, LAUBER (1963), S. 165 ff.].

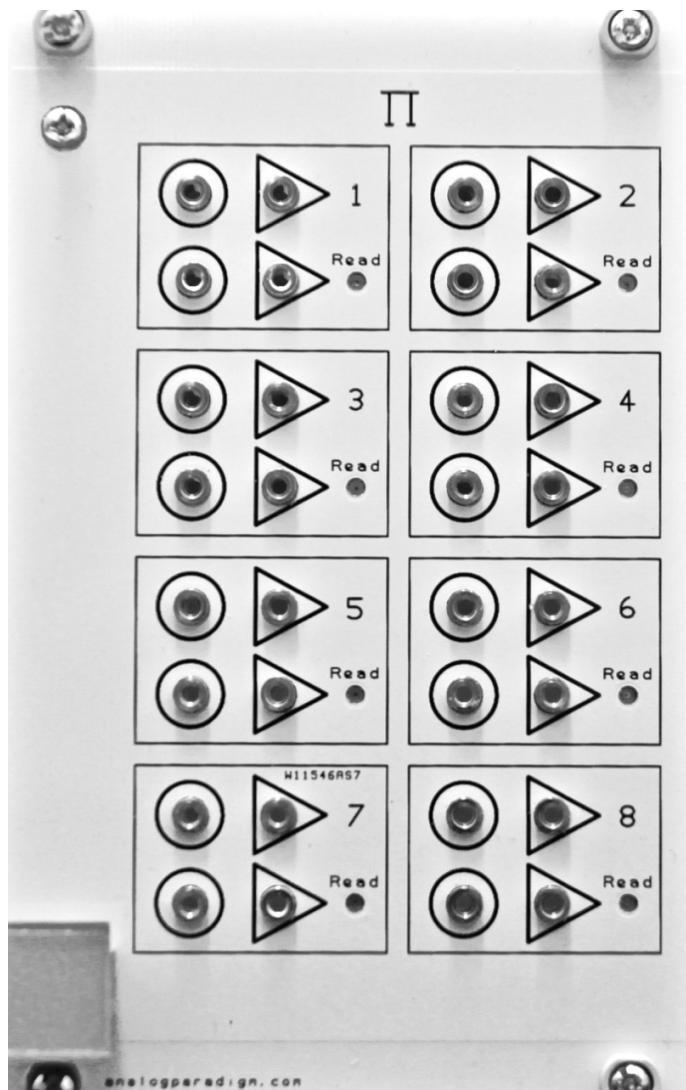


Abbildung 2.16: Multiplizierermodul MLT8

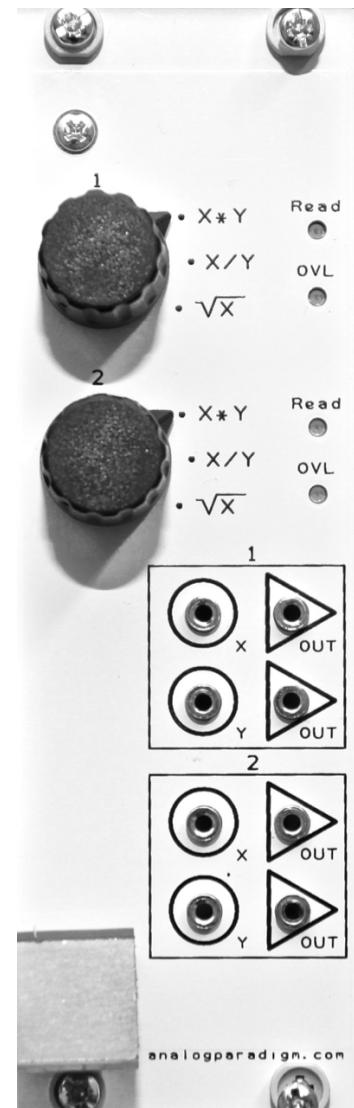


Abbildung 2.17: Multiplizierer-/Dividierer-/Quadratwurzelmodul

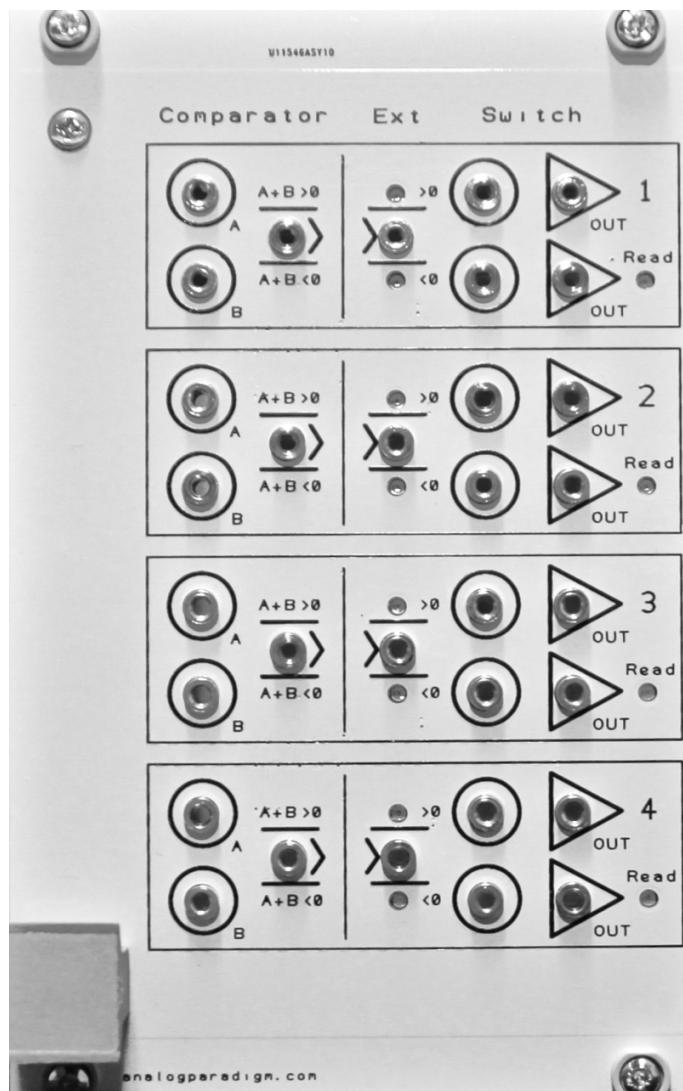


Abbildung 2.18: Komparatormodul

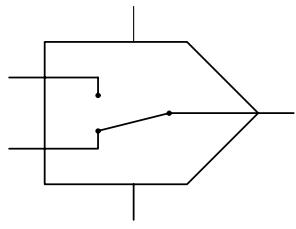


Abbildung 2.19: Symbol eines Komparators mit integriertem Umschalter

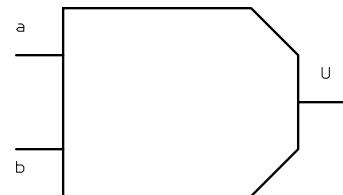


Abbildung 2.20: Symbolische Repräsentation eines reinen Komparators

## 2.8 XID, XIR, XIBNC

Neben diesen aktiven Rechenelementen steht eine Reihe passiver Module zur Verfügung, die in beliebiger Kombination eingesetzt werden können, solange freie Chassisplätze vorhanden sind. Hierbei handelt es sich um die in Abbildung 2.21 gezeigten Module:

**XID:** Dieses Modul enthält sechs freie Dioden sowie zwei freie Z-Dioden mit einer Durchbruchspannung von 10 V. Während die Z-Dioden häufig in der Rückführung von Summierern eingesetzt werden, um eine Amplitudenbegrenzung zu bewirken, können mit Hilfe der sechs freien Dioden zusammen mit Summierern und gegebenenfalls Koeffizientenpotentiometern spezielle Funktionen wie Absolutbetrag, Begrenzung, Hysterese etc. implementiert werden.

**XIR:** Das XIR-Modul enthält zwei Eingangswiderstandsnetzwerke, mit deren Hilfe Summierer und Integrierer um zusätzliche Eingänge erweitert werden können. Jedes dieser beiden Netzwerke besitzt einen mit  $\frac{1}{10}$ , zwei mit 1, drei mit 10 und zwei mit 100 gewichtete Eingänge. Die mit SJ bezeichnete Buchse kann direkt mit der SJ-Buchse des zu erweiternden Summierers beziehungsweise Integrierers verbunden werden, wobei möglichst kurze Patchkabel zum Einsatz gelangen sollten.

**XIBNC:** Für den Anschluss externer Geräte wie Oszilloskope oder Signalgeneratoren ist das Modul XIBNC praktisch, da es eine Umsetzung von vier BNC-Buchsen auf das im Analogrechner verwendete 2 mm Steckverbindersystem erlaubt.

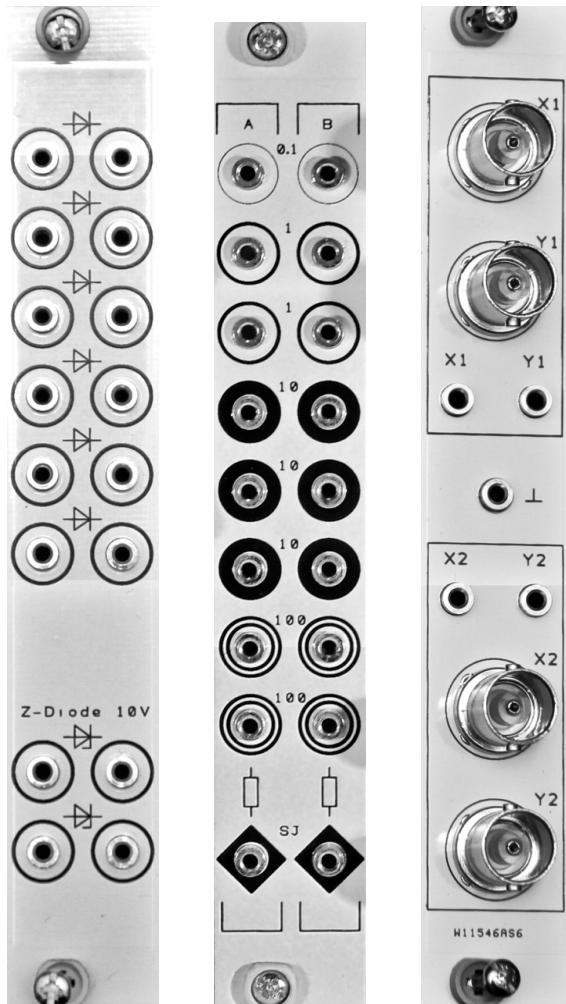


Abbildung 2.21: Freie Dioden (XID), freie Eingangsnetzwerke (XIR) und BNC-Adapter (XIBNC)

# 3

## Anwendungsbeispiele

Die im Folgenden behandelten Beispiele wurden sämtlich auf Analog Paradigm Analogrechnern implementiert. Sie sind im Wesentlichen nach steigendem Schwierigkeitsgrad angeordnet und reichen von „einfach“ bis „komplex“. Bei jedem Beispiel ist vermerkt, wieviele Rechenelemente welchen Typs benötigt werden.

### 3.1 Zombie-Apokalypse

Obwohl Zombie-Filme auf eine lange Geschichte zurück blicken können, wurden die ersten mathematischen Untersuchungen einer Zombie-Apokalypse erst in den letzten Jahren von ROBERT SMITH? und anderen durchgeführt (natürlich mit einem Augenzwinkern – ganz sinnlos sind derlei Analysen jedoch nicht, da sie auch in der Praxis bei der Untersuchung des Ausbreitungsverhaltens von Seuchen etc. angewandt werden können – siehe [SMITH? (2014)]). In einem Aufsatz von PHIL MUNZ werden die im ausgehenden neunzehnten, beginnenden zwanzigsten Jahrhundert von ALFRED JAMES LOTKA und VITO VOLTERRA aufgestellten Differentialgleichungen, die eigentlich ein einfaches, abgeschlossenes Ökosystem beschreiben, auf das Zombie-Problem angewandt, was im Folgenden auch geschieht.

Eine abstrahierte Welt, die lediglich aus Menschen und Zombies besteht, deren Anzahl durch  $h$  und  $z$  repräsentiert wird, lässt sich durch die beiden folgenden gekoppelten Differentialgleichungen

Rechenelement	Anzahl
Summierer	3
Integrierer	2
Potentiometer	7
Multiplizierer	1

Tabelle 3.1: Benötigte Rechenelemente

beschreiben:

$$\frac{dh}{dt} = \alpha h - \beta hz \quad (3.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = \delta hz - \gamma hz - \zeta z \quad (3.2)$$

Die menschliche Population wird durch die Geburtenrate  $\alpha$  erhöht und durch die Rate  $\beta$ , mit der Zombies Menschen attackieren und töten, verringert. Etwas komplexer ist es mit der Zombiepopulation: Diese wächst nur durch das „Infizieren“ von Menschen bei Kontakt mit (im Kampf erfolgreichen) Zombies mit der Rate  $\delta$ , wird aber durch zwei Terme reduziert – die natürliche „Sterberate“  $\zeta$  der Zombies sowie die Rate  $\gamma$ , mit der Menschen Zombies vernichten können. In der praktisch ausgeführten Rechenschaltung kommen noch zwei Anfangsbedingungen  $h_0$  und  $z_0$  hinzu, welche die initiale Menschen- und Zombie-Population beschreiben.

Aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) ergibt sich die in Abbildung 3.1 dargestellte Rechenschaltung, für welche die in Tabelle 3.1 aufgelisteten Rechenelemente benötigt werden.

Abbildung 3.2 zeigt die praktisch ausgeführte Rechenschaltung, während in 3.3 die Ergebnisse eines typischen Simulationslaufes dargestellt sind. Die Parameter wurden hierbei experimentell ermittelt ( $h_0 = z_0 = 0.6$ ,  $\alpha = 0.365$ ,  $\beta = 0.65$ ,  $\delta = 0.84$ ,  $\gamma = 0.44$  und  $\zeta = 0.09$ ), was verblüffend schnell geht und ein gutes Gefühl für das Verhalten des behandelten dynamischen Systems vermittelt.

Der Rechner wurde hierbei im repetierenden Modus mit kurzer IC-Zeit und einer OP-Zeit von 60 ms betrieben. Die Zeitkonstanten der Integrierer wurden auf  $k_0 = 10^3$  gesetzt, und es wurden jeweils die mit 10 gewichteten Integrierereingänge genutzt, um eine weitere Beschleunigung des Rechenablaufes zu erzielen. Das Oszilloskop wurde explizit durch einen der TRIG-Ausgänge der CU getriggert, um ein stehendes Bild zu erhalten. Ganz links im Oszilloskopogramm sind gut (von oben nach unten) die Anfangsbedingungen  $z_0$  und  $h_0$  zu erkennen.

## 3.2 Springender Ball

In diesem Abschnitt wird die Simulation eines in einer Kiste elastisch springenden Balles mit Hilfe eines Analogrechners beschrieben. Die Kiste entspricht der Fläche  $[-1 : +1] \times [-1 : +1]$ , die Position

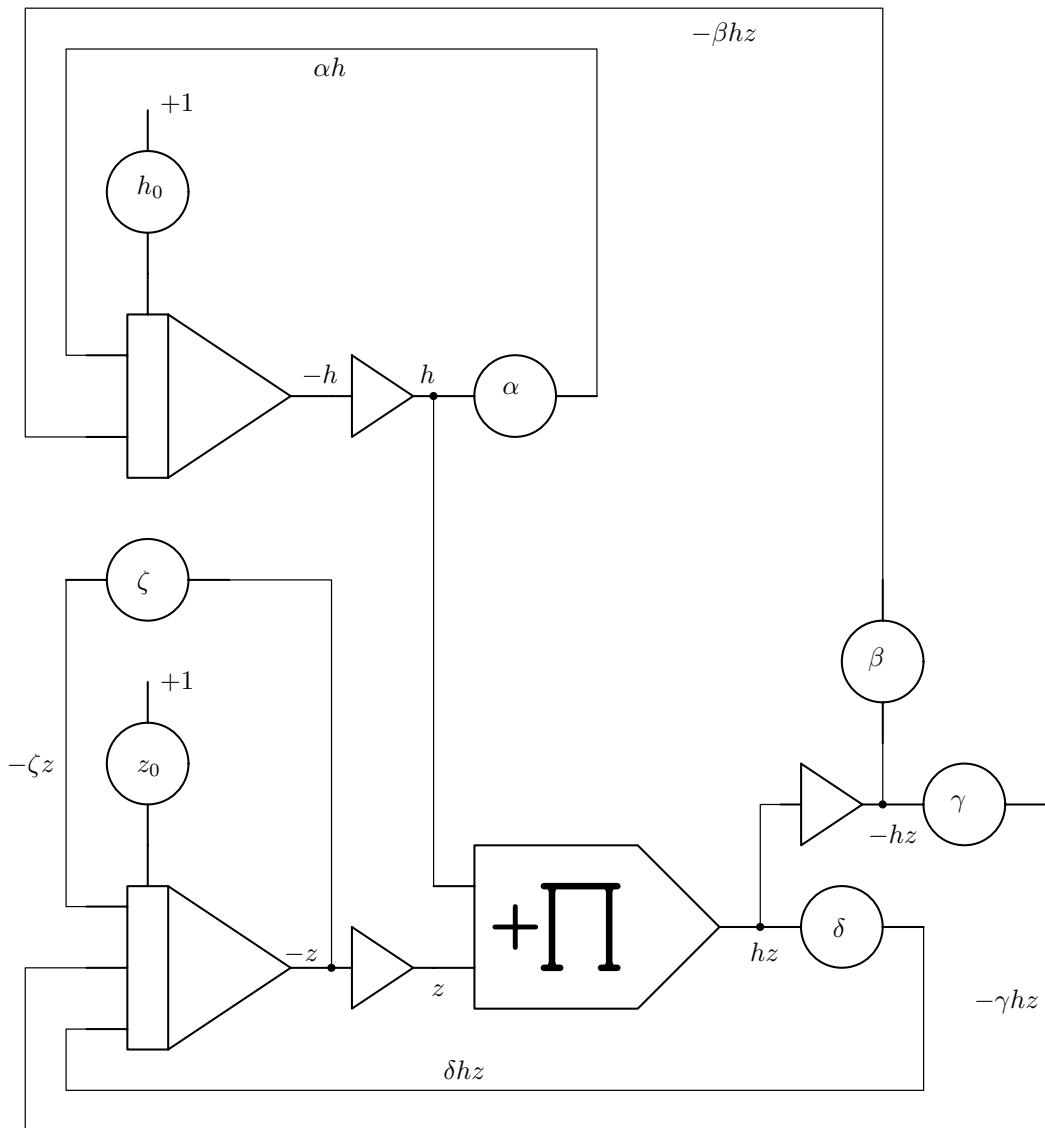


Abbildung 3.1: Rechenschaltung zu den Gleichungen (3.1) und (3.2)

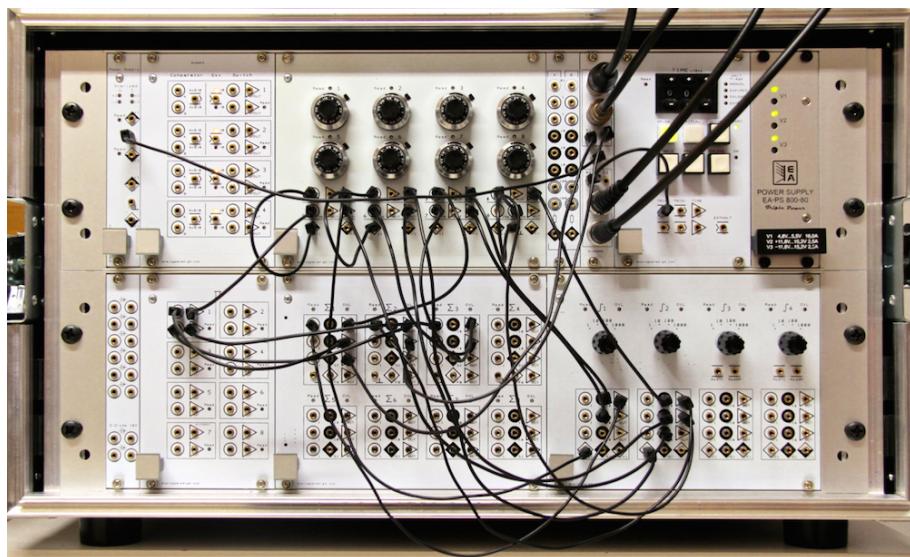


Abbildung 3.2: Zombie-Simulation auf einem Analog Paradigm Model-1 Analogrechner

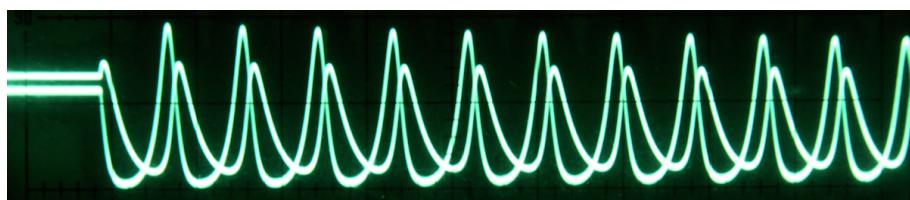


Abbildung 3.3: Ergebnisse eines typischen Simulationslaufes

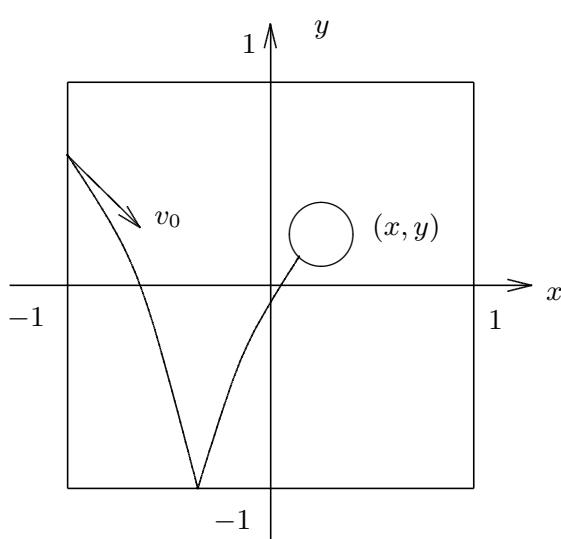


Abbildung 3.4: Springender Ball in Kiste

Abbildung 3.5:  $x$ - und  $y$ -Komponente des springenden Balles

des Balles innerhalb dieser wird durch ein  $(x, y)$ -Koordinatentupel repräsentiert, wie in Abbildung 3.4 dargestellt. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Bewegungen des Balles in  $x$ - und  $y$ -Richtung voneinander unabhängig sind, so dass sie durch zwei getrennte Rechenschaltungen erzeugt werden können.

Die Geschwindigkeit des Balles in  $x$ -Richtung,  $v_x$ , nimmt linear mit der Zeit ab. Die  $x$ -Position des Balles ergibt sich aus  $v_x$  durch einfache Integration nach der Zeit. Trifft der Ball auf die linke beziehungsweise rechte Wand muss eine Vorzeichenumkehr von  $v_x$  erfolgen, um das Zurückprallen des Balles zu simulieren.

Die  $y$ -Komponente entspricht zunächst der eines freien Falls und wird durch zweifache Integration über die auf den Ball wirkende Beschleunigung in  $y$ -Richtung,  $a_y$ , gewonnen. Diese Beschleunigung setzt sich zusammen aus der Erdbeschleunigung  $g$ , einer Beschleunigung aufgrund einer geschwindigkeitsproportionalen Luftreibung sowie der Beschleunigung, die entsteht, wenn der Ball auf den Boden der Kiste auftrifft. Abbildung 3.5 zeigt den zeitlichen Verlauf der  $x$ - und  $y$ -Komponente der Ballkoordinaten. Im linken Drittel befindet sich der Rechner im Zustand IC. Mit dem Start der Betriebsart OP beginnt der Ball zu fallen, während die  $x$ -Position (im Wesentlichen) linear ansteigt, bis der Ball auf die rechte Wand trifft. An dieser Stelle kehrt sich die Bewegung in  $x$ -Richtung um. Beim Auftreffen auf den Boden der Kiste springt der Ball elastisch zurück.

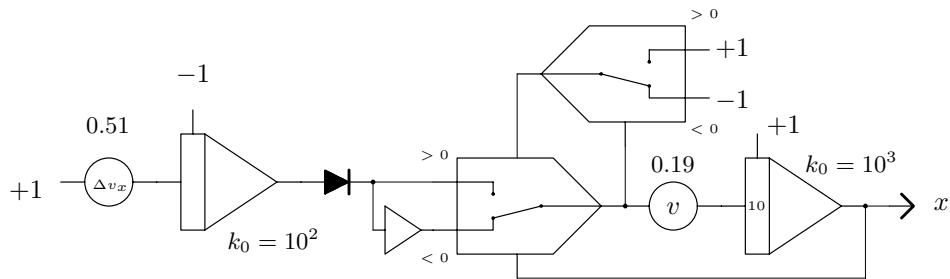


Abbildung 3.6: Erzeugen der  $x$ -Komponente der Ballkoordinaten

Abbildung 3.6 zeigt die Rechenschaltung zur Erzeugung der  $x$ -Komponente der Ball-Koordinaten: Der linke Integrierer integriert, beginnend beim Anfangswert +1 (Vorzeichenwechsel beachten), über eine Konstante und liefert so die linear abnehmende Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  des Balles. Die nachfolgende Diode ist optional und vereinfacht lediglich die Einstellung der Parameter, da sie eine negative Geschwindigkeit und damit ein ungewolltes Zurücklaufen des Balles verhindert. Die Umkehr der Bewegungsrichtung des Balles beim Auftreffen auf die rechte beziehungsweise linke Wand wird mit Hilfe der beiden Komparatoren mit elektronischen Umschaltern erzielt. Der linke dieser Komparatoren schaltet zwischen  $+v_x$  und  $-v_x$  um, während der obere rechte die zur jeweils zu überprüfenden Wand gehörende Bedingung bereitstellt. Der Integrierer rechts liefert dann die  $x$ -Komponente der Ballposition.

Wie bereits beschrieben, wird die  $y$ -Komponente der Ballposition durch zweifache Integration über die auf den Ball wirkenden Beschleunigungen gewonnen. Hierzu zählen die konstante Gravitation  $g$ , die durch geschwindigkeitsproportionale Luftreibung verursachte (Brems-)Beschleunigung sowie die Beschleunigung, die beim Aufprall auf den Boden der Kiste wirkt. Allgemein lässt sich hierfür

$$\ddot{y} = -g + d\dot{y} \begin{cases} +c(-y+1) & \text{falls } y < -1 \\ -c(y-1) & \text{falls } y > 1 \end{cases}$$

schreiben, wobei der Fall  $y > 1$  nicht eintreten kann, da der Ball den Deckel der Kiste nicht erreichen kann, solange, was im Folgenden der Fall ist, er keine Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  mit entsprechender  $y$ -Komponente besitzt.

Die Umsetzung in eine Rechenschaltung zeigt Abbildung 3.7: Der linke Integrierer integriert über  $g$ , die Luftreibungskomponente sowie die beim Aufprall auftretende Beschleunigung und liefert die  $y$ -Komponente der Ballgeschwindigkeit, über welche der rechte Integrierer integriert, um die  $y$ -Position des Balles zu erhalten. Anstelle eines Komparators zur Erkennung des Bodenkontaktees wird hier eine einfache ZENER-Diode mit einer Durchbruchspannung von 10 V eingesetzt, wie sie beispielsweise in

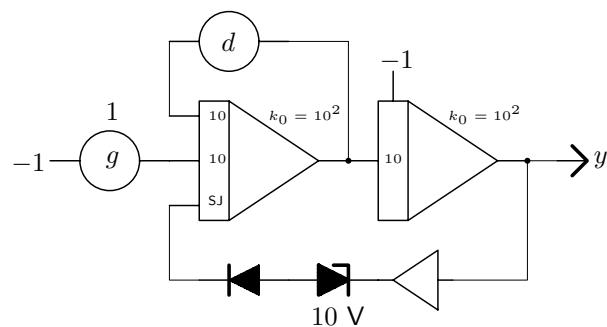


Abbildung 3.7: Erzeugung der  $y$ -Komponente der Ballposition

Form des XID-Moduls zur Verfügung steht. Unterschreitet die  $y$ -Komponente der Ballposition den Wert  $-1$ , d. h. trifft der Ball auf den Boden der Kiste auf, beginnt die Z-Diode zu leiten, so dass an ihrer Anode die Beschleunigung ansteht, welche den Ball nach oben reflektiert (die notwendige Vorzeichenumkehr erfolgt mit Hilfe des Summierers unten rechts). Die zur Z-Diode in Reihe geschaltete Diode ist erforderlich, um auszuschließen, dass eine Beschleunigung geliefert wird, solange sich der Ball über dem Kistenboden befindet.

Wichtig ist an dieser Stelle, dass der Ausgang dieser Diode direkt an den Summenpunkt  $SJ$  des linken Integrierers geschaltet wird, um eine quasi „schlagartige“ Änderung der Bewegungsrichtung zu erhalten. Wäre sie mit einem mit 10 oder selbst 100 (mit Hilfe des XIR-Moduls) gewichteten Eingang des Integrierers verbunden, ergäbe sich ein Verhalten, das einem unrealistisch elastischen Ball entspräche, der bei hinreichend geringer Geschwindigkeit den Boden der Kiste auch durchdringen könnte.

Die ausgeführte Rechenschaltung zu dieser Simulation zeigt Abbildung 3.8 (die beiden Teilrechenschaltungen zur Erzeugung der  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Ballposition sind mit schwarzen beziehungsweise orangefarbenen Patchkabeln ausgeführt), während in 3.9 das Resultat einer Simulation dargestellt ist. Hierzu wird der Rechner im repetierenden Betrieb mit einer OP-Zeit von 20 ms und kurzer IC-Zeit betrieben. Da das verwendete Oszilloskop keinen Eingang zur Dunkeltastung des Strahls besitzt, ist der Strahlrücklauf am Ende eines Rechenzyklus schwach sichtbar. Steht ein Oszilloskop mit einem solchen Z-Eingang zur Verfügung, kann dieser meist direkt mit dem TRIG- oder TRIG+ Ausgang der CU verbunden werden. Tabelle 3.2 listet die für diese Simulation benötigten Rechenelemente auf.

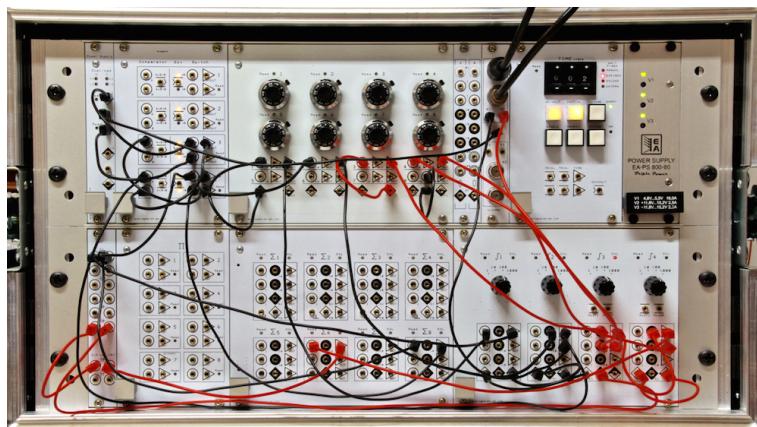


Abbildung 3.8: Vollständiges Programm zur Simulation eines springenden Balles auf einem Analog Paradigm Model-1 Analogrechner

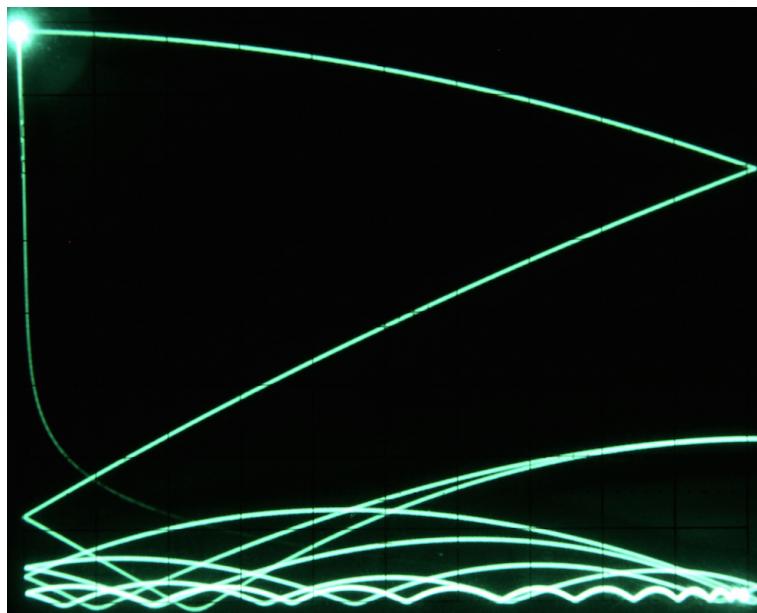


Abbildung 3.9: Verhalten des springenden Balles in der Kiste

Rechenelement	Anzahl
Summierer	2
Integrierer	4
Potentiometer	4
Komparatoren	2
Dioden	2
Z-Dioden	1

Tabelle 3.2: Benötigte Rechenelemente

### 3.3 Rössler-Attraktor

Analogrechner sind in idealem Maße für die Untersuchung des zeitlichen Verhaltens dynamischer Systeme geeignet, wozu unter anderem sogenannte *chaotische* Systeme zählen. Ein typisches solches chaotisches System ist der 1976 von OTTO RÖSSLER untersuchte sogenannte **RÖSSLER-Attraktor**, der durch die folgenden drei gekoppelten Differentialgleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

Hierbei sind  $a = 1/5$ ,  $b = 1/5$  und  $c = 5.7$ . Da alle innerhalb einer Analogrechenschaltung auftretenden Variablen hinsichtlich ihres Wertebereiches auf das Intervall  $[-1 : +1]$  beschränkt sind, müssen diese drei Differentialgleichungen zunächst skaliert werden, bevor die eigentliche Rechnung durchgeführt werden kann. Ziel der Skalierung ist nicht nur, diesen Wertebereich nicht zu überschreiten, sondern auch, ihn in jeder Variablen möglichst gut auszunutzen, um eine möglichst hohe Rechengenauigkeit zu erzielen.

Eine skalierte Form des obigen Differentialgleichungssystems hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -0.8y - 2.3z \\ \dot{y} &= 1.25x + a^*y \\ \dot{z} &= b^* + 15z(x - c^*)\end{aligned}$$

Hier gilt  $a^* = 0,2$ ,  $b^* = 0,005$  und  $c^* = 0,3796$ . Die zugehörige Rechenschaltung ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Tabelle 3.3 listet die benötigten Rechenelemente auf, während Abbildung 3.11 die Implementierung dieser Rechenschaltung auf einem Analog Paradigm Model-1 Analogrechner zeigt.

Abbildung 3.12 zeigt einen mit diesem Setup erzeugten Plot, wobei die Zeitkonstanten der Integrierer auf  $k_0 = 10^3$  gesetzt waren. Photographiert wurde mit Einstellung ISO 100 und entsprechend langer Belichtungszeit.

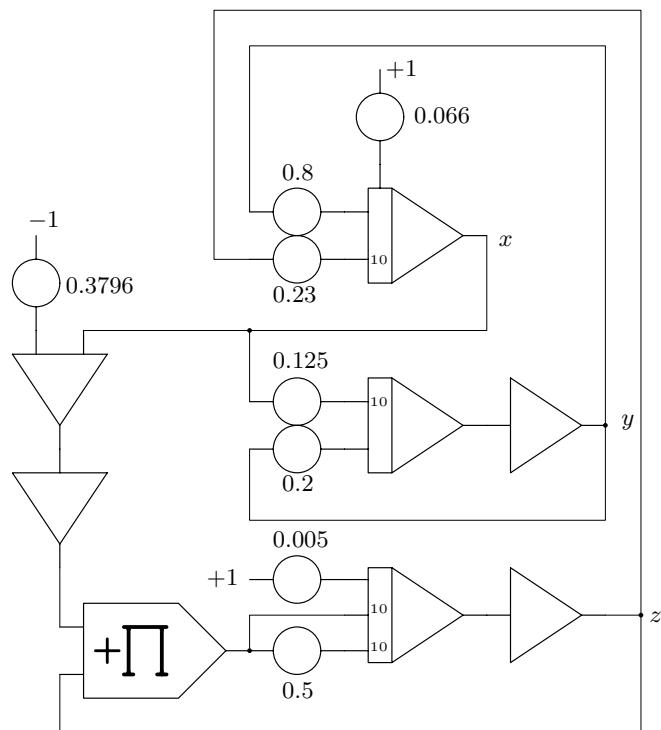


Abbildung 3.10: Rechenschaltung zum RÖSSLER-Attraktor

Rechenelement	Anzahl
Summierer	4
Integrierer	3
Multiplizierer	1
Potentiometer	8

Tabelle 3.3: Benötigte Rechenelemente

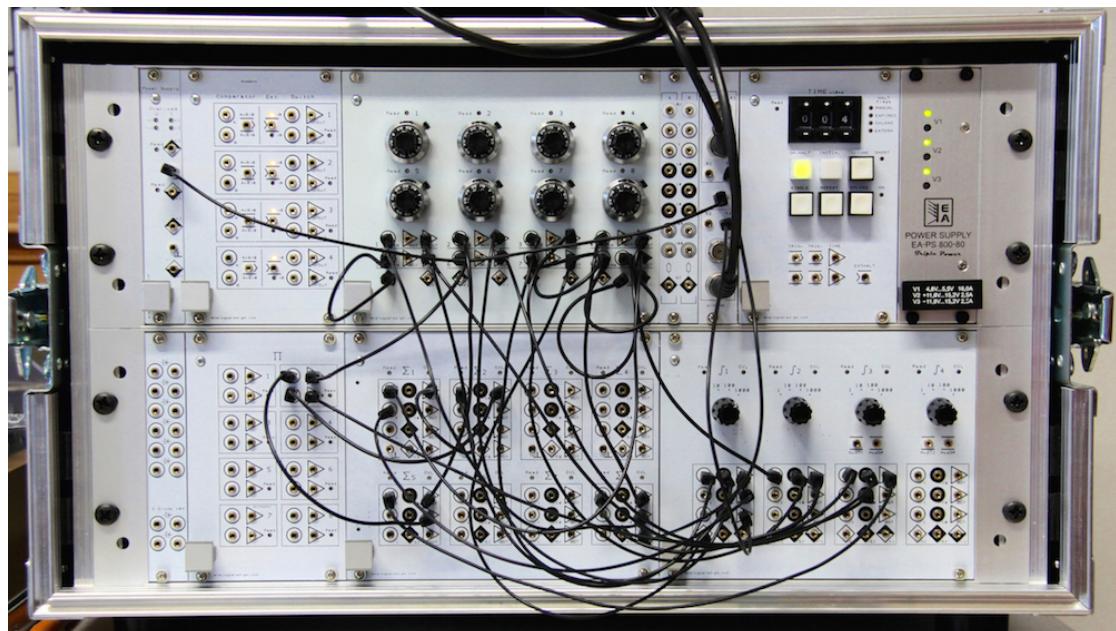


Abbildung 3.11: Typische Implementation eines RÖSSLER-Attraktors

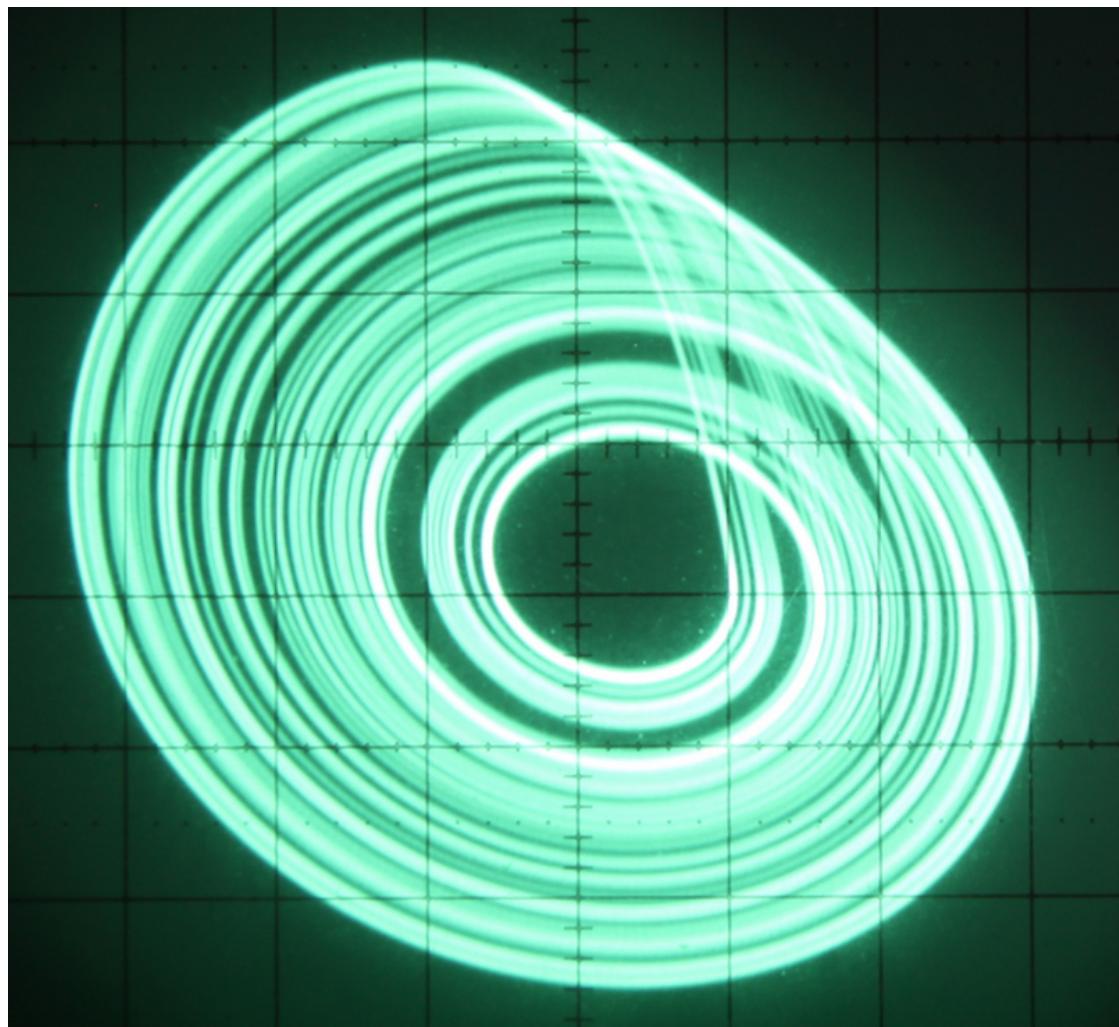


Abbildung 3.12:  $x, y$ -Plot eines RÖSSLER-Attraktors

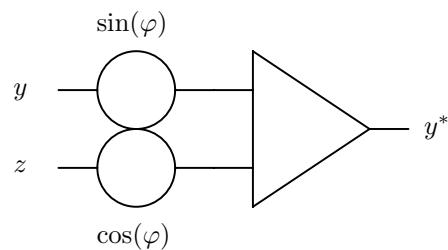


Abbildung 3.13: Projektionsschaltung

Eine solche direkte Darstellung mit Hilfe eines Oszilloskops erlaubt stets nur eine Ansicht hinsichtlich zwei der in der Rechnung auftretenden Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Mit Hilfe zweier zusätzlicher Potentiometer lässt sich eine Projektion des an sich dreidimensionalen Attraktors erreichen. Hierzu werden zwei der Problemvariablen, im folgenden Beispiel  $y$  und  $z$  mit entsprechender Gewichtung zu einer neuen Variablen

$$y^* = -(y \sin(\varphi) + z \cos(\varphi))$$

zusammengefasst, wobei durch Ändern des Winkels  $\varphi$  die Perspektive der Darstellung geändert werden kann. Die hierzu nötige Rechenschaltung zeigt Abbildung 3.13, ein typisches Resultat ist in Bild 3.14 zu sehen.

### 3.4 Lorenz-Attraktor

Der nach seinem Entdecker, EDWARD NORTON LORENZ benannte LORENZ-Attraktor gilt mit Recht als *der archetypische chaotische Attraktor überhaupt*.<sup>1</sup> Bei geeigneter Wahl der Darstellung erinnert die Gestalt des Attraktors an einen Schmetterling – ein Bild, das längst seinen Weg in die Popkultur gefunden hat. Beschrieben wird dieses chaotische System durch die drei gekoppelten Differentialglei-

---

<sup>1</sup>Weiterführende Informationen zu derartigen chaotischen Attraktoren im Allgemeinen sowie dem hier behandelten LORENZ-Attraktor finden sich beispielsweise in [KUEHN (2015), S. 468 ff.].

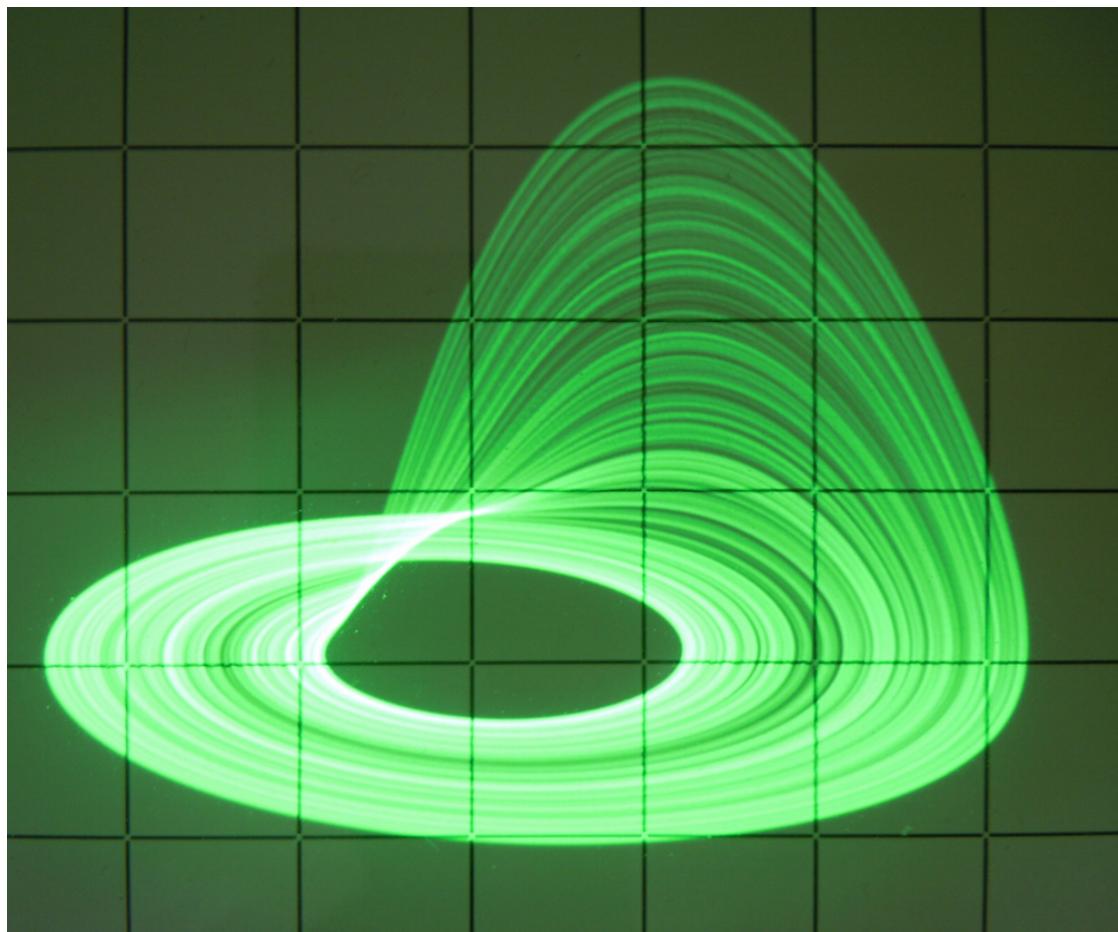


Abbildung 3.14: Projektion eines RÖSSLER-Attraktors

chungen<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \text{ und} \\ \dot{z} &= xy - \beta z,\end{aligned}$$

wobei  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/4$  und  $\rho = 28$  gilt. Diese Gleichungen müssen, nachdem – beispielsweise durch Ausprobieren oder eine numerische Testrechnung – Minima und Maxima der beteiligten Variablen bestimmt wurden, skaliert werden, um der Lösung mit Hilfe eines Analogrechners zugänglich zu sein:

$$\begin{aligned}x &= \int 1.8y - x \, dt + C \\ s &= 1 - 2.678z \\ y &= \int 1.5556xs - 0.1y \, dt \\ z &= \int 1.5xy - 0.2667z \, dt\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $C$  die Anfangsbedingung des Integrierers, an dessen Ausgang die Variable  $x$  anliegt. Seine Wahl ist unkritisch – ist eine Darstellung des Attraktors mit einem Plotter gewünscht, sollte  $C$  so gewählt werden, dass der Startpunkt des Plots innerhalb des Attraktors liegt.

Da Summierer und Integrierer eines Analogrechners jeweils eine Vorzeichenumkehr vornehmen, lassen sich diese Gleichungen weiter vereinfachen, wobei zwei Summierer eingespart werden können:

$$\begin{aligned}-x &= - \int 1.8y - x \, dt + C \\ -z &= - \int 1.5xy - 0.2667z \, dt \\ s &= -(1 - 2.68z) \\ r &= -xs \\ -y &= - \int 1.536r - 0.1y \, dt\end{aligned}$$

Die hieraus resultierende Rechenschaltung zeigt Bild 3.15, das Setup ist in Abbildung 3.16 dargestellt. Benötigt werden die in Tabelle 3.4 aufgelisteten Rechenelemente.

Wie bereits beim RÖSSLER-Attraktor kann auch hier mit Hilfe eines weiteren Summierers sowie zweier zusätzlicher Potentiometer eine einfache statische Projektion des an sich dreidimensionalen Attraktors erfolgen (siehe Abbildung 3.13). Abbildung 3.17 zeigt zwei Projektionen dieses Attraktors.

---

<sup>2</sup>Siehe [LORENZ (1963)].

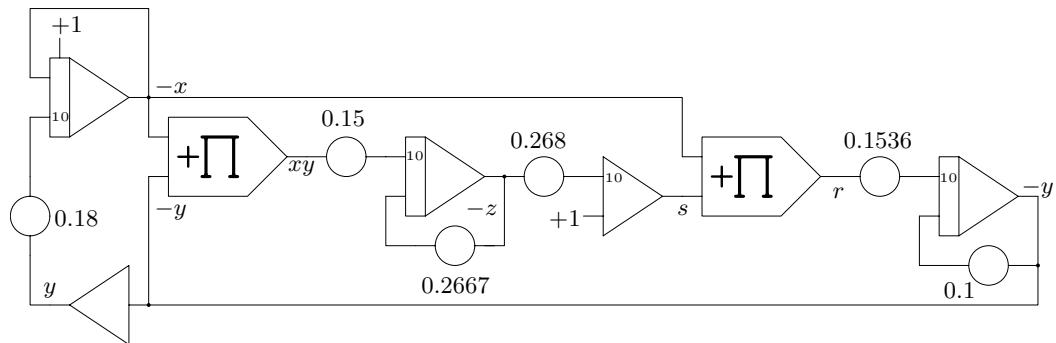


Abbildung 3.15: Rechenschaltung zum LORENZ-Attraktor

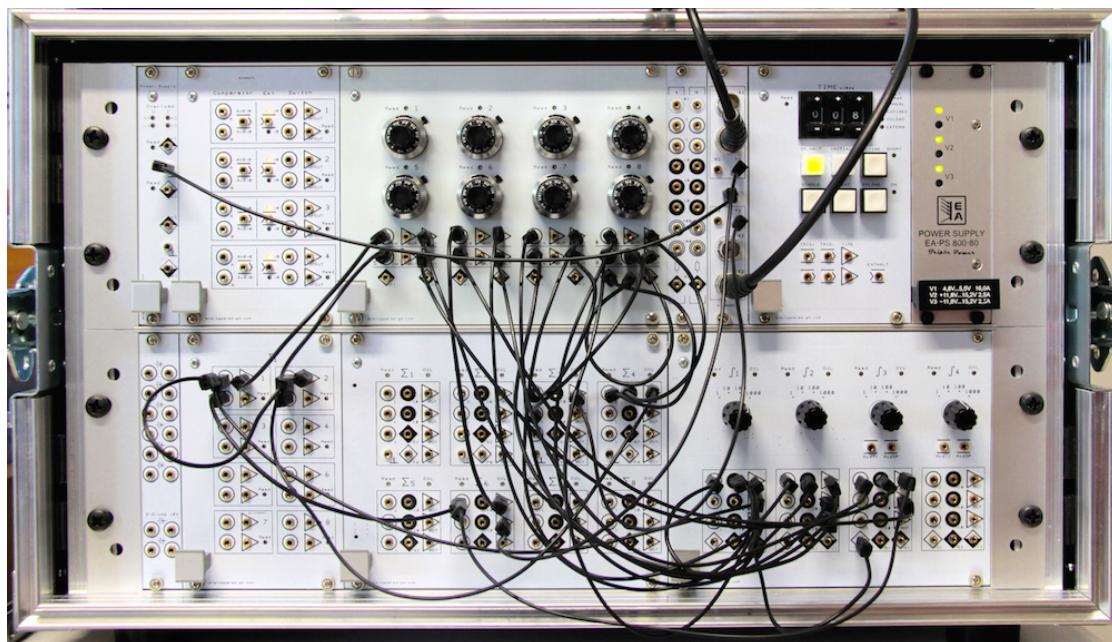


Abbildung 3.16: Ausgeföhrte Rechenschaltung zum LORENZ-Attraktor

Rechenelement	Anzahl
Summierer	2
Integrierer	3
Multiplizierer	2
Potentiometer	6

Tabelle 3.4: Benötigte Rechenelemente

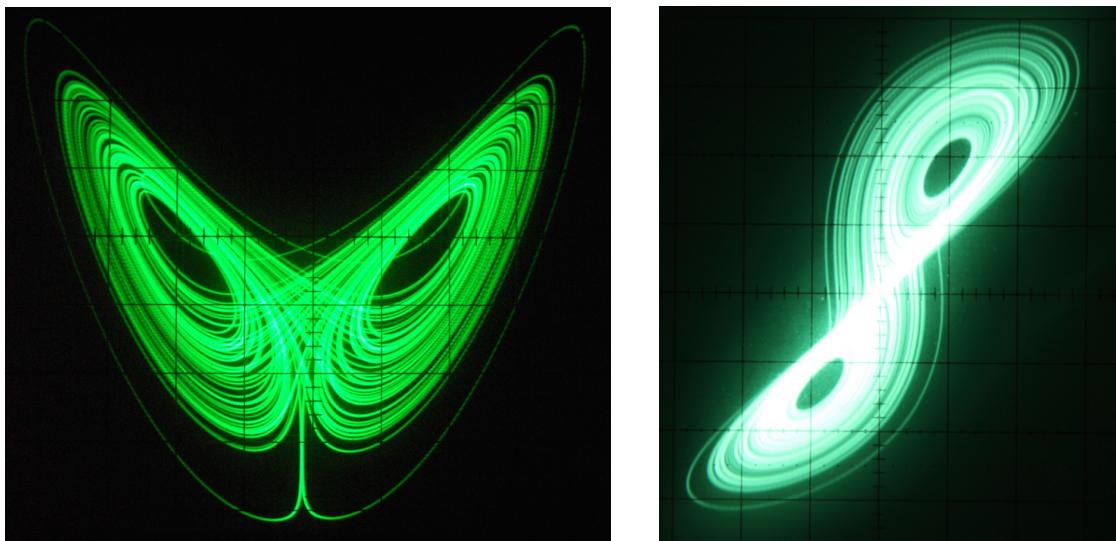


Abbildung 3.17: Zwei verschiedene Projektionen des LORENZ-Attraktors

### 3.5 Chua-Attraktor

Als abschließendes Beispiel zur Behandlung chaotischer Attraktoren mit Hilfe von Analogrechnern dient der nach seinem Entdecker LEON O. CHUA benannte **CHUA-Attraktor**. Dieser unterscheidet sich von den beiden vorangegangenen Beispielen in erster Linie durch die Komplexität der resultierenden Rechenschaltung, da hier zwei klassische nicht-lineare Elemente in Form von Absolutbetragsfunktionen benötigt werden. Diese werden mit Hilfe freier Verstärker und freier Dioden explizit implementiert. Beschrieben wird dieser Attraktor durch die drei folgenden Differentialgleichungen

$$\dot{x} = c_1(y - x - f(x)), \quad (3.3)$$

$$\dot{y} = c_2(x - y + z) \text{ und} \quad (3.4)$$

$$\dot{z} = -c_3y, \quad (3.5)$$

wobei  $f(x)$  in diesem Zusammenhang das Verhalten eines hypothetischen elektronischen Bauelementes, einer sogenannten **CHUA-Diode** repräsentiert. Hierbei gilt

$$f(x) = m_1x + \frac{m_0 - m_1}{2}(|x + 1| - |x - 1|). \quad (3.6)$$

Typische Werte für die Parameter sind hierbei

$$c_1 = 15.6,$$

$$c_2 = 1,$$

$$c_3 = 28,$$

$$m_0 = -1.143 \text{ und}$$

$$m_1 = -0.714.$$

Die Skalierung der Gleichungen (3.3), (3.4) und (3.5) ist nicht trivial. Hier wurde so vorgegangen, dass zunächst (3.3) in die Gleichungen

$$x_0 = 0.1 \text{ (Anfangsbedingung der Integration)} \quad (3.7)$$

$$x_1 = -10(x + f(x)) \quad (3.8)$$

$$x_2 = y + \frac{1}{2}x_1 \quad (3.9)$$

$$x = 3.12 \int x_2 dt + x_0 \quad (3.10)$$

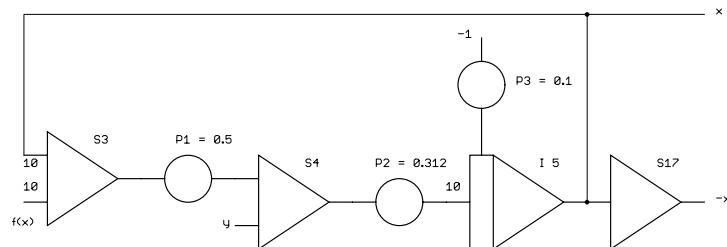


Abbildung 3.18: Rechenschaltung zu den Gleichungen (3.7), (3.8), (3.9) und (3.10)

aufgespalten wurde. Analog hierzu wurde (3.4) in

$$y_1 = z - \frac{1}{8}y \quad (3.11)$$

$$y_2 = 1.25x + 2y_1 \quad (3.12)$$

$$y = 4 \int y_2 dt, \quad (3.13)$$

zerlegt, während (3.5) durch

$$z = - \int 3.5y dt. \quad (3.14)$$

ersetzt wurde.

Die Implementierung der CHUA-Diode ist wegen der beiden benötigten Absolutbetragsfunktionen etwas aufwändig – hierzu wird zunächst (3.6) wie folgt dargestellt:

$$f_1 = |0.7143x + 0.2857| \quad (3.15)$$

$$f_2 = |0.7143x - 0.2857| \quad (3.16)$$

$$f_3 = f_1 - f_2 \quad (3.17)$$

$$f(x) = -0.714x - 0.3003f_3. \quad (3.18)$$

Die sich aus diesen Gleichungen ergebenden Teilrechenschaltungen sind in den Abbildungen 3.18, 3.19 und 3.20 dargestellt. Tabelle 3.5 listet die benötigten Rechenelemente auf (diese Rechnung überschreitet die Möglichkeiten eines aus nur zwei Chassis bestehenden Analogrechners bei Weitem).

Eine durch Langzeitbelichtung entstandene Aufnahme des resultierenden Attraktors zeigt Abbildung 3.21.

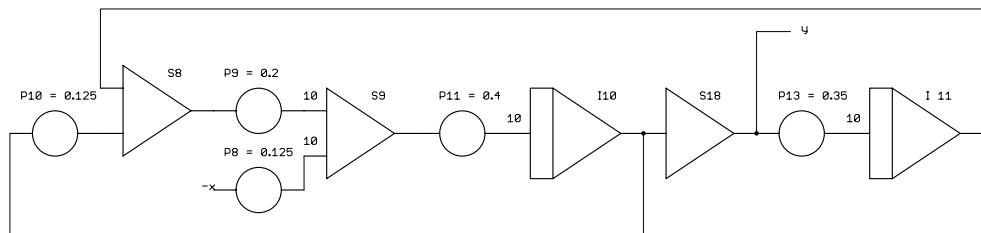


Abbildung 3.19: Rechenschaltung zu den Gleichungen (3.11), (3.12) und (3.13)

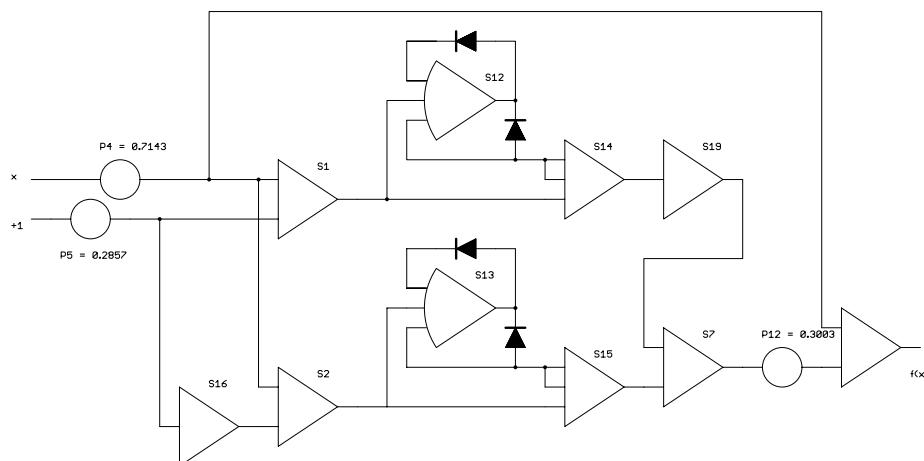


Abbildung 3.20: Rechenschaltung zu den Gleichungen (3.15), (3.16), (3.17) und (3.18)

Rechenelement	Anzahl
Summierer	16
Integrierer	2
Potentiometer	11
Dioden	4

Tabelle 3.5: Benötigte Rechenelemente

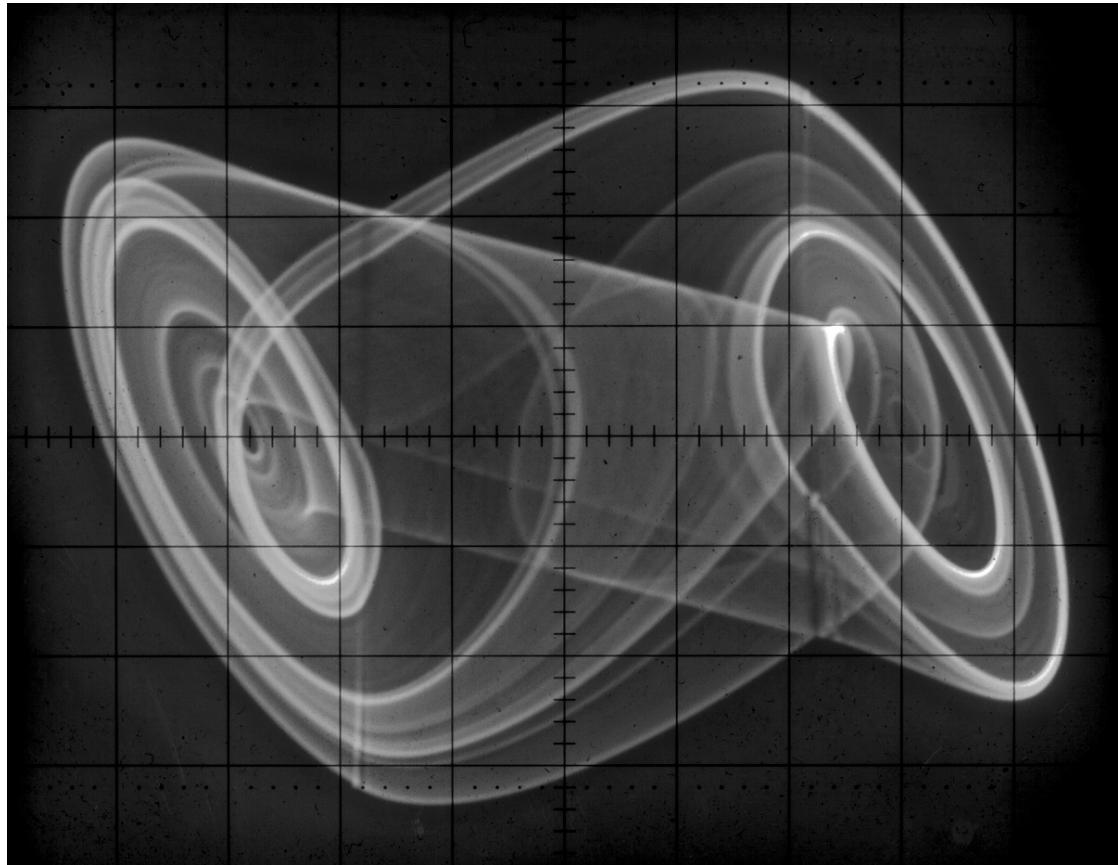


Abbildung 3.21: CHUA-Attraktor



## Literaturverzeichnis

[GILOI, LAUBER (1963)] WOLFGANG GILOI, RUDOLF LAUBER, *Analogrechnen*, Springer Verlag, 1963

[KUEHN (2015)] CHRISTIAN KUEHN, *Multiple Time Scale Dynamics*, Springer, 2015

[LORENZ (1963)] EDWARD NORTON LORENZ, “Deterministic Nonperiodic Flow”, in *Journal of the Atmospheric Sciences*, Volume 20, pp. 130–141, March 1963

[MUNZ (2014)] PHIL MUNZ, „When Zombies Attack! Alternate Ending“, in [SMITH? (2014)], S. 45–55

[SMITH? (2014)] ROBERT SMITH?, *Mathematical Modelling of Zombies*, University of Ottawa Press, 2014

[ULMANN (2013)] BERND ULMANN, *Analog Computing*, Oldenbourg Verlag, 2013