1. Pregunta 1

Solución: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, b un vector, sea x^* la solución a

$$Ax = b$$

y sean $p_0, p_1, \ldots, p_L$ vectores tales que

$$p_i^T A p_j = 0, \quad \forall i \neq j$$

Asumamos que hay un vector p_k tal que para algun $j < k$

$$p_k = \sum_{i=0}^{j} a_i p_i$$

para $a_i > 0$ fijas. Entonces tenemos que para cualquier $h \leq j$ que

$$\begin{aligned} p_h^T a p_k &= p_h^T A \left(\sum_{i=0}^{j} a_i p_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{j} a_i p_h^T A p_i \\ &= p_h^T A p_h \end{aligned}$$

Lo que no puede ser igual a 0, lo que nos lleva a una contradicción.

2. Pregunta 2

Solución: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, sea x^* la solución y sean $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ vectores tales que

$$p_i^T A p_j = 0, \quad \forall i \neq j$$

Ya que por el inciso anterior $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ son linealmente independientes,

$$\mathbb{R}^n = span(\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\})$$

, entonces para cualquier x_0 existen algunas $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ tales que

$$x^* - x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i p_i$$

y podemos observar que

$$\sigma_k = \frac{p_k^T A(x^* - x_0)}{p_k^T A p_k} = \frac{p_k^T (b - Ax_0)}{p_k^T A p_k}$$

Ahora si tomamos de acuerdo al método que $x_{k+1} = x_k + a_k p_k$ entonces tenemos que

$$x_{k+1} = x_0 + a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_k p_k$$

por lo que tenemos que

$$A(x^* - x_0) = A(x^* - x_0 - a_0 p_0 - a_1 p_1 - \cdots - a_k p_k) = A(x^* - x_k) = b - Ax_k = r_k$$

Por lo que

$$\sigma_k = \frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k} = a_k$$

Por lo que el metodo converge en a lo mas n pasos.

3. Pregunta 3

Solución: Tenemos que $s_k = a_k p_k = x_{k+1} - x_k$ y que $y_k = B_{k+1} s_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$. Ahora tenemos la segunda condicion de Wolfe que dice que

$$\begin{aligned}
& \nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k \\
\implies & \nabla f(x_k + x_{k+1} - x_k)^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k \\
\implies & \nabla f_{k+1}^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k \\
\implies & \nabla f_{k+1}^T p_k - c_2 \nabla f_k^T p_k \geq 0 \\
\implies & \nabla (f_{k+1} - c_2 f_k)^T p_k \geq 0 \\
\implies & \nabla (f_{k+1} - c_2 f_k)^T s_k \geq 0 \\
\implies & \nabla (f_{k+1} - f_k)^T s_k \geq (c_2 - 1) a_k \nabla f_k^T p_k \\
\implies & \nabla y_k^T s_k \geq 0
\end{aligned}$$

4. Pregunta 4

Solución: Sean las matrices H_k y B_k tales que $B_K^{-1} = H_k$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
H_{k+1} &= (I - p_k s_k y_k^T) H_k (I - p_k s_k y_k^T) + p_k s_k s_k^T \\
B_{k+1} &= B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}
\end{aligned}$$

Y sabemos que $B_{k+1} s_k = y_k$.

Ahora, podemos observar que

$$\begin{aligned}
B_{k+1}H_{k+1} &= B_{k+1}(I - p_k s_k y_k^T)H_k(I - p_k y_k s_k^T) + p_k s_k s_k^T \\
&= (B_{k+1} - p_k y_k y_k^T)H_k(I - p_k y_k s_k^T) + p_k y_k s_k^T \\
&= \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k(I - p_k y_k s_k^T) + p_k y_k s_k^T \\
&= \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right)(I - p_k y_k s_k^T) + p_k y_k s_k^T \\
&= I - p_k y_k s_k^T - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}(I - p_k y_k s_k^T) + p_k y_k s_k^T \\
&= I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}(I - p_k y_k s_k^T)
\end{aligned}$$

Recordamos que

$$\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} p_k y_k s_k^T = \frac{1}{s_k^T y_k}\frac{B_k s_k (s_k^T y_k) s_k^T}{s_k^T B_k s_k} = \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}$$

entonces

$$\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}(I - p_k y_k s_k^T) = \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} = 0$$

Por lo tanto

$$B_{k+1}H_{k+1} = 0$$