Содержание

1 Предельные теоремы и законы больших чисел

2 Вариационные ряды и их характеристики

2.1 Генеральная и выборочная совокупности, объём выборки.

Рассмотрим постановку задачи математической статистики: по результатам наблюдения за некоторой случайной величиной ξ требуется сделать выводы о неизвстном законе распределения этой величины $\mathcal{L}(x, \Theta)$ либо о неизвестных парамерах $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ известного распределения.

Пусть ξ — случайная величина с некоторой (теоретической) функцией распределения $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \quad x \in R.$

Определение:

Совокупность n независимых одинаково распределённых случайных величин $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ называется выборкой (выборочной совокупностью), извлечённой из распределения случайной величины ξ.

Определение:

Под генеральной совокупностью понимается множество всех возможных значений случайной величины ξ.

Определение:

Объёмом совокупности называется количество всех её элементов, объё выборки или выборочной совокупности обозачается n, генеральной совокупности — N.

2.2 Варианционный ряд, варианта, частота. Виды вариационных рядов. Гистограмма, полигон.

Определение:

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности значений.

Вариационным рядом называется последовательность $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ элементов выборки расположенных в порядке неубывания, т.е. $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$.

x_i^* — варианта.

n_i — частота появления варинты x_i^* в выборке.

Определение:

Точечным вариационным рядом называется:

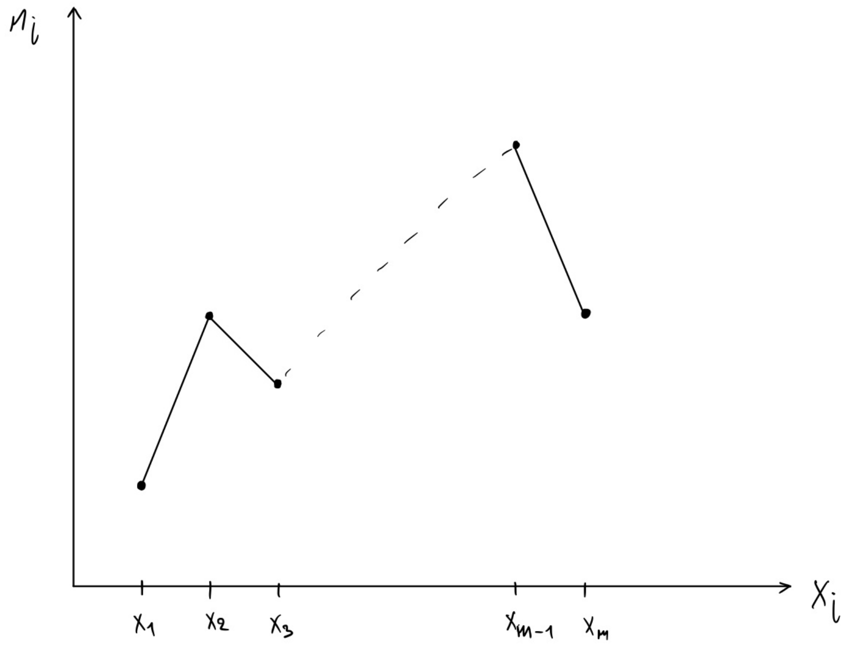
x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

x_i — варианта, n_i — частота соответствуующей варианты.

m — количество групп (различных вариант (вариант в таблице)).

$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, где n_i — объём выборки.

Для графического представления точечных вариационных рядов используется полигон частот — ломанная с вершинами в точках (x_i, n_i).



Определение:

Интервальным вариационным рядом называется:

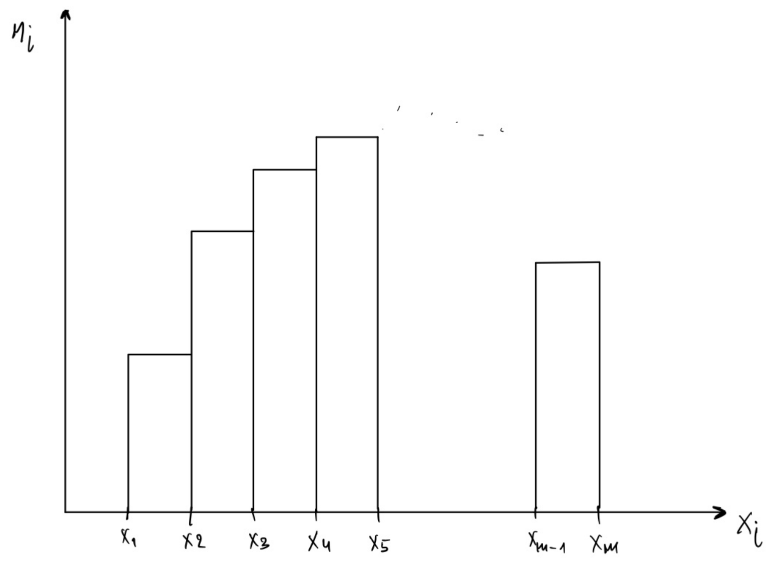
x_i	$[x_1, x_2]$	$(x_2, x_3]$	...	$(x_m, x_{m+1}]$
n_i	n_1	n_2	...	n_m

x_i — варианты, n_i — частота.

m — количество групп (интервалов).

$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, где n_i — объём выборки.

Для графического представления интервальных вариационных рядов используется гистограмма частот — фигура, составленная из прямоугольников, одной стороной которых служат интервалы $(x_i, x_{i+1}]$, а длина второй равна n_i.



2.3 Формулы числовых характеристик. Эмпирическая функция распределения (ЭФР). Свойства ЭФР.

Определение:

Выборочным средним называется величина:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X_i}.$$

Если данные представлены в виде точечного или интервального вариационного ряда, то для вычисления используют формулу:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i * n_i,$$

где m — количество групп в точечном или интервалов в интервальном вариационном ряду, n_i — частота, т.е. количество элементов выборки, принадлежащихх i-той группе или i-тому интервалу, x_i — варианта для точечного ряда и середина i-того интервала для интервального ряда.

Определение:

Выборочной дисперсией (смещённой) называется величина:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \overline{x})^2.$$

Она характеризует среднее из квадратов отклонений наблюдаемой величины от выборочного среднего. Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется выборочным средним квадратическим отклонением (смещённым) величин выборки от выборочного среднего.

Если данные представлены в виде точечного или интервального вариационного ряда, то для вычисления используют формулу:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 n_i.$$

или

$$S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i\right) - \overline{x}^2.$$

Здесь m — количество групп в точечном или интервалов в интервальном вариационных рядах, n_i — частота. т.е. количество элементов выборки, принадежащих i-той группе или i-тому интервалу, x_i — варианта для точечного ряда и середина i-того интервала для интервального ряда.

Определение:

Выборочной дисперсией (несмещённой) называется величина:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i \overline{x})^2.$$

Аналогично, величина $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma}^2}$ называется выборочным несмещённым средним квадратическим отклонением.

Очевидно, что смещённая и несмещённая выборочные дисперсии связаны формулой:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}S^2.$$

2.4 Эмперическая функция распределения ЭФР. Свойства ЭФР.

Эмперическая функция распределения ЭФР

Эмперической функцией распределения (ЭФР) называется функция

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(x - \mathbf{X}_i),$$

где $e(x) = 1$, при $x > 0 \quad e(x) = 0$, при $x \leq 0$.

Таким образом, если $\mathbf{X}_i$, то $e(x) = 1$, если $\mathbf{X}_i \geq x$, то $e(x) = 0$, а сумма $e(x - \mathbf{X}_i)$ будет равна количеству элементов выборки, которые приняли значение, строго меньше некоторого $x \in R$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — реализация выборки $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, т.е. наблюдавшиеся значения случайной величины ξ.

Обозначим $\mu(x)$ — число элементов выборки, строго меньших $x \in R$. Тогда эмпирическая функция распределения $\tilde{F}_n(x)$ может быть определена как

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{\mu(x)}{n}.$$

Свойства ЭФР:

1. $0 \leq \tilde{F}_n(x) \leq 1$, т.к. $0 \leq \mu(x) \leq n$;
2. неубывающая непрерывная слева функция;
3. $\tilde{F}_n(x)$ — ступенчатая функция для всех типов распределений;
4. $\tilde{F}_n(x)$ сходится по распределению к $F_\xi(x)$.

3 Оценки параметров распределения

3.1 Понятия статистики, оценки, выборочной характеристики.

Определение:

Пусть $g(t_1, \ldots, t_n)$ — непрерывная функция. Оценкой Θ назовём $\tilde{\Theta} = g(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_2)$
Если $g(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = T$ некоторая функция, то T — статистика.

Определение:

Выборочными характеристиками называются функции от наблюдений (точечные оценки), приближённо оценивающие соответствующие числовые характеристики случайной величины.

3.2 Несмещённые, состоятельные и эффективные оценки

Определение:

Оценка $\tilde{\Theta}_n$ называется несмещённой оценкой параметра Θ, если $M(\tilde{\Theta}_n) = \Theta$.

Определение:

Оценка $\tilde{\Theta}_n$ называется состоятельной оценкой параметра Θ, если $\tilde{\Theta}_n$ сходится по вероятности к Θ.

Определение:

Оценка $\tilde{\Theta}_n$ называется эффективной, или оптимальной, или наилучшей несмещённой оценкой с минимальной дисперсией (НОМД), если $M(\tilde{\Theta}_n) = \Theta$ и $D(\tilde{\Theta}_n) = \inf\limits_{\tilde{\Theta}_n^*} D\tilde{\Theta}_n^*$.

3.3 Теорема о несмещённой состоятельной оценке мат. ожидания

Пусть $\xi \sim L(x,\Theta)$, $L(x,\Theta)$ — закон распределения известен с точностью до параметра.

$$\overline{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$$

По результатам $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ наблюдений за ξ требуется построить оценку Θ.

Теорема:

Пусть $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \sim L_\xi(x,\Theta)$, где ξ — случайная величина с $M\xi = a < +\infty \quad D\xi = \sigma^2$. Тогда выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ является несмещённой и состоятельной оценкой $M\xi$.

Доказательство:

$$M\overline{x} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Mx_i =$$

$$= |x_i \text{ — н. о. р. случайной величины} \Rightarrow Mx_i = M\xi \quad \forall i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M\xi =$$

$$= \frac{1}{n} * n * a = a \Rightarrow \overline{x} \text{ — несмещённое}$$

.

Состоятельность $\forall\epsilon > 0 \quad P\{|\overline{x} - a| < \epsilon\} \to_{n\to\infty} 1$

По неравенству Чебышёва:

$$\forall\epsilon > 0 \quad P\{|\overline{x} - a| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{D\overline{x}}{\epsilon^2} = 1 - \frac{1}{\epsilon^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) =$$

$$= \Big|\text{н. о. р.} \quad Dx_i = \sigma^2\Big| =$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2}\epsilon^2 D\xi = 1 - \frac{n\sigma^2}{n^2\epsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to_{n\to\infty} 1 - 0$$

Т.к. $P(A) \leq 1 \quad \forall A$, то $\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{x} - a| < \epsilon\} = 1 \Rightarrow \overline{x}$ — состоятельная.

3.4