Содержание

1 Предельные теоремы и законы больших чисел

2 Вариационные ряды и их характеристики

2.1 Генеральная и выборочная совокупности, объём выборки.

Рассмотрим постановку задачи математической статистики: по результатам наблюдения за некоторой случайной величиной ξ требуется сделать выводы о неизвстном законе распределения этой величины $\mathcal{L}(x, \theta)$ либо о неизвестных парамерах $\theta_1, \ldots, \theta_n$ известного распределения.

Пусть ξ — случайная величина с некоторой (теоретической) функцией распределения $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \quad x \in R.$

Определение:

Совокупность n независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется выборкой (выборочной совокупностью), извлечённой из распределения случайной величины ξ.

Определение:

Под генеральной совокупностью понимается множество всех возможных значений случайной величины ξ.

Определение:

Объёмом совокупности называется количество всех её элементов, объём выборки или выборочной совокупности обозачается n, генеральной совокупности — N.

2.2 Варианционный ряд, варианта, частота. Виды вариационных рядов. Гистограмма, полигон.

Определение:

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности значений.

Вариационным рядом называется последовательность $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ элементов выборки расположенных в порядке неубывания, т.е. $x_1^* \leq x_2^* \leq \cdots \leq x_n^*$.

x_i^* — варианта.

n_i — частота появления варинты x_i^* в выборке.

Определение:

Точечным вариационным рядом называется:

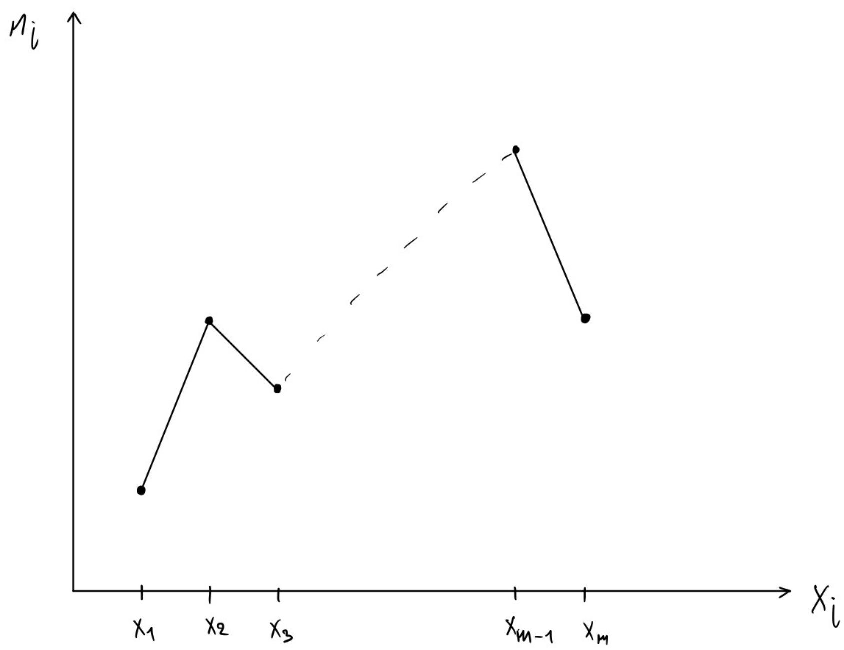
x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

x_i — варианта, n_i — частота соответствуующей варианты.

m — количество групп (различных вариант (вариант в таблице)).

$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, где n_i — объём выборки.

Для графического представления точечных вариационных рядов используется полигон частот — ломанная с вершинами в точках (x_i, n_i).



Определение:

Интервальным вариационным рядом называется:

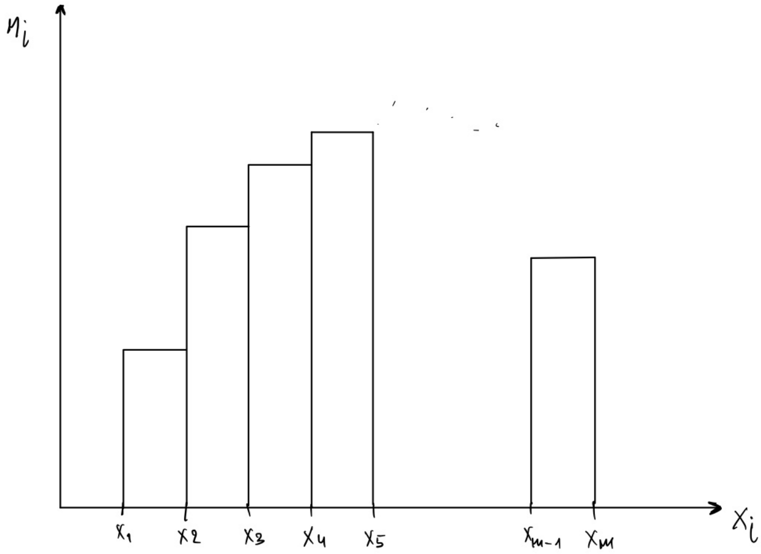
x_i	$[x_1, x_2]$	$(x_2, x_3]$	...	$(x_m, x_{m+1}]$
n_i	n_1	n_2	...	n_m

x_i — варианты, n_i — частота.

m — количество групп (интервалов).

$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, где n_i — объём выборки.

Для графического представления интервальных вариационных рядов используется гистограмма частот — фигура, составленная из прямоугольников, одной стороной которых служат интервалы $(x_i, x_{i+1}]$, а длина второй равна n_i.



2.3 Формулы числовых характеристик. Эмпирическая функция распределения (ЭФР). Свойства ЭФР.

Определение:

Выборочным средним называется величина:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_i}.$$

Если данные представлены в виде точечного или интервального вариационного ряда, то для вычисления используют формулу:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i * n_i,$$

где m — количество групп в точечном или интервалов в интервальном вариационном ряду, n_i — частота, т.е. количество элементов выборки, принадлежащихх i-той группе или i-тому интервалу, x_i — варианта для точечного ряда и середина i-того интервала для интервального ряда.

Определение:

Выборочной дисперсией (смещённой) называется величина:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2.$$

Она характеризует среднее из квадратов отклонений наблюдаемой величины от выборочного среднего. Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется выборочным средним квадратическим отклонением (смещённым) величин выборки от выборочного среднего.

Если данные представлены в виде точечного или интервального вариационного ряда, то для вычисления используют формулу:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 n_i.$$

или

$$S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i\right) - \overline{x}^2.$$

Здесь m — количество групп в точечном или интервалов в интервальном вариационных рядах, n_i — частота. т.е. количество элементов выборки, принадежащих i-той группе или i-тому интервалу, x_i — варианта для точечного ряда и середина i-того интервала для интервального ряда.

Определение:

Выборочной дисперсией (несмещённой) называется величина:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i \overline{x})^2.$$

Аналогично, величина $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma}^2}$ называется выборочным несмещённым средним квадратическим отклонением.

Очевидно, что смещённая и несмещённая выборочные дисперсии связаны формулой:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}S^2.$$

2.4 Эмпирическая функция распределения ЭФР. Свойства ЭФР.

Эмперическая функция распределения ЭФР

Эмперической функцией распределения (ЭФР) называется функция

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(x - X_i),$$

где $e(x) = 1$, при $x > 0 \quad e(x) = 0$, при $x \leq 0$.

Таким образом, если X_i, то $e(x) = 1$, если $X_i \geq x$, то $e(x) = 0$, а сумма $e(x - X_i)$ будет равна количеству элементов выборки, которые приняли значение, строго меньше некоторого $x \in R$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — реализация выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т.е. наблюдавшиеся значения случайной величины ξ.

Обозначим $\mu(x)$ — число элементов выборки, строго меньших $x \in R$. Тогда эмпирическая функция распределения $\tilde{F}_n(x)$ может быть определена как

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{\mu(x)}{n}.$$

Свойства ЭФР:

1. $0 \leq \tilde{F}_n(x) \leq 1$, т.к. $0 \leq \mu(x) \leq n$;
2. неубывающая непрерывная слева функция;
3. $\tilde{F}_n(x)$ — ступенчатая функция для всех типов распределений;
4. $\tilde{F}_n(x)$ сходится по распределению к $F_\xi(x)$.

3 Оценки параметров распределения

3.1 Понятия статистики, оценки, выборочной характеристики.

Определение:

Пусть $g(t_1, \ldots, t_n)$ — непрерывная функция. Оценкой θ назовём $\tilde{\theta} = g(X_1, \ldots, X_2)$. Если $g(X_1, \ldots, X_n) = T$ некоторая функция, то T — статистика.

Определение:

Выборочными характеристиками называются функции от наблюдений (точечные оценки), приближённо оценивающие соответствующие числовые характеристики случайной величины.

3.2 Несмещённые, состоятельные и эффективные оценки

Определение:

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется несмещённой оценкой параметра θ, если $M(\tilde{\theta}_n) = \theta$.

Определение:

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется состоятельной оценкой параметра θ, если $\tilde{\theta}_n$ сходится по вероятности к θ.

Определение:

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется эффективной, или оптимальной, или наилучшей несмещённой оценкой с минимальной дисперсией (НОМД), если $M(\tilde{\theta}_n) = \theta$ и $D(\tilde{\theta}_n) = \inf\limits_{\tilde{\theta}_n^*} D\tilde{\theta}_n^*$.

3.3 Теорема о несмещённой состоятельной оценке мат. ожидания

Пусть $\xi \sim L(x, \theta)$, $L(x, \theta)$ — закон распределения известен с точностью до параметра.

$$\overline{\theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$$

По результатам $X_1, \ldots, X_n$ наблюдений за ξ требуется построить оценку θ.

Теорема:

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim L_\xi(x, \theta)$, где ξ — случайная величина с $M\xi = a < +\infty \quad D\xi = \sigma^2$. Тогда выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ является несмещённой и состоятельной оценкой $M\xi$.

Доказательство:

$$M\overline{x} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Mx_i =$$

$$= |x_i \text{ — н. о. р. случайной величины} \Rightarrow Mx_i = M\xi \quad \forall i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M\xi =$$

$$= \frac{1}{n} * n * a = a \Rightarrow \overline{x} \text{ — несмещённое}$$

.

Состоятельность $\forall \epsilon > 0 \quad P\{|\overline{x} - a| < \epsilon\} \to_{n\to\infty} 1$

По неравенству Чебышёва:

$$\forall \epsilon > 0 \quad P\{|\overline{x} - a| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{D\overline{x}}{\epsilon^2} = 1 - \frac{1}{\epsilon^2} D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) =$$

$$= \Big|\text{н. о. р.} \quad Dx_i = \sigma^2\Big| =$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2}\epsilon^2 D\xi = 1 - \frac{n\sigma^2}{n^2\epsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to_{n\to\infty} 1 - 0$$

Т.к. $P(A) \leq 1 \quad \forall A$, то $\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{x} - a| < \epsilon\} = 1 \Rightarrow \overline{x}$ — состоятельная.

3.4 Дополнительная информация

Определение:

Выборочной дисперсией (смещённой) называется величина $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Для группированных данных: $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 * n_i$.

Определение:

Выборочной дисперсией (несмещённой) называется оценка $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Для группированных данных: $\tilde{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} * S^2$.

3.5 Теорема о несмещённой и состоятельной оценке дисперсии

Теорема:

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim L(x, \theta)$, где $M\xi = a < +\infty$, $D\xi = \sigma^2$. Тогда несмещённой и состоятельной оценкой $D\xi$ является величина $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Доказательство:

1. Докажем несмещённость ($M\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2$):

$$M\tilde{\sigma}^2 = M\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Mx_i^2 - 2M(x_i\bar{x}) + M\bar{x}^2\right)\right) =$$

Найдём значения слагаемых:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$$
$$\sigma^2 = M\xi^2 - a^2 \Rightarrow M\xi^2 = \sigma^2 + a^2$$

$$Mx_i^2 = M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = \sigma^2 + a^2$$

$$Mx_i\bar{x} = M\left(x_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \frac{1}{n}\left(M(x_i x_1) + M(x_i x_2) + \ldots + Mx_i^2 + \ldots + M(x_i x_n)\right) \overset{x_i\ \text{н.о.р.}}{=} \frac{1}{n}\left(Mx_i Mx_1 + Mx_i Mx_2 + \ldots + Mx_i^2 + \ldots + Mx_i Mx_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(a^2 + a^2 + \ldots + (\sigma^2 + a^2) + \ldots + a^2\right) = \frac{na^2 + \sigma^2}{n} = a^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$M\bar{x}^2 = M\bar{x}\cdot\bar{x} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i\bar{x} = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\left(a^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) = a^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot n\left(\sigma^2 + a^2 - 2\left(a^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) + \left(a^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) = \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 + a^2 - a^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) =$$

$$= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 = \sigma^2$$

Т.к. $M\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2$, то оценка несмещённая

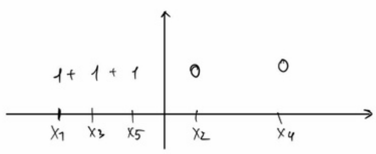
Состоятельность не доказывается.

3.6 Теорема о несмещённой и состоятельной оценке функции распределения

Определение:

Эмпирическая функция распределения: $\tilde{F}_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}$; $\mu_n(x)$ – кол-во элементов выборки строго меньших x.

Пусть $e(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} e(x - x_i)$



Таким образом, $\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(x - x_i)$.

Теорема:

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim L_\xi(x, \theta)$, где $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Тогда эмпирическая функция распределения $\tilde{F}_n(x)$ является несмещённой и состоятельной оценкой функции распределения $F_\xi(x)$.

Доказательство:

Покажем несмещённость $\left(M(\tilde{F}_n(x)) = F_\xi(x) = P\{\xi < x\}\right)$:

$$M\tilde{F}_n(x) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(x - X_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Me(x - X_i) \ominus$$

Построим ряд р-я сл. в. $e(x - X_i)$:

$e(x-X_i)$	0	1
P	$P\{x - X_i \le 0\}$	$P\{x - X_i > 0\}$

$$P\{x - X_i \le 0\} = P\{x \le X_i\} = P\{X_i \ge x\} = 1 - F_x(x)$$

$$P\{x - X_i > 0\} = P\{x > X_i\} = P\{X_i < x\} = F_{X_i}(x)$$

$$Me(x - X_i) = 0 \cdot (1 - F_{X_i}(x)) + 1 \cdot F_{X_i}(x) = F_{X_i}(x) \quad \forall i$$

$$Me^2(x - X_i) = 0^2(1 - F_{X_i}(x)) + 1^2 \cdot F_{X_i}(x) = F_{X_i}(x)$$

$$De(x - X_i) = F_{X_i}(x) - F^2_{X_i}(x) = \underbrace{F_{X_i}(x)}_{0 \le \cdot \le 1}\underbrace{(1 - F_{X_i}(x))}_{0 \le \cdot \le 1}$$

$$\ominus \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = \left[\begin{matrix} X_i - \\ \text{н.о.р} \end{matrix}\right] = \frac{1}{n} \cdot n F_\xi(x) = F_\xi(x)$$

Покажем состоятельность $\tilde{F}_n(x) \xrightarrow{P} F_\xi(x)$:

По неравенству Чебышева:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\tilde{F}_n(x) - F_\xi(x)| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D\tilde{F}_n(x)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(x - X_i)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \cdot n F_\xi(x)(1 - F_\xi(x)) = 1 - \frac{F_\xi(x)(1 - F_\xi(x))}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 0$$

Т.к. $P(A) \le 1$, то $\tilde{F}_n(x) \xrightarrow{P} F_\xi(x)$

3.7 Теорема об эффективной оценке математического ожидания

Определение:

Пусть $\tilde{\theta}_n$ — несмещённая оценка. $\tilde{\theta}_n$ — называется эффективной оценкой, если

$$D\tilde{\theta}_n = \inf_{\tilde{\theta}_n^*} D\tilde{\theta}_n^*$$

Теорема:

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim L_\xi(x, \theta)$, где ξ — случайная величина с $M\xi = a < +\infty$. Тогда выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ является эффективной оценкой $M\xi$ в классе линейных несмещённых оценок.

Доказательство:

Расс-м произвольную лин оценку $\widetilde{\Theta}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$:

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$; $\alpha_i > 0 \ \forall i$

Найдём дисперсию оценки $\widetilde{\Theta}_n$:

$$D\widetilde{\Theta}_n = D\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 DX_i = \begin{bmatrix} X_i - \\ \text{н.о.р.} \\ \text{сл. в.} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \sigma^2 = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \sigma^2 g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$D\widetilde{\Theta}_n$ достигает min на тех α_i, при которых $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \to \min$

Для док-ва воспользуемся методом Лагранжа поиском условного минимума

$$g(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

константа Лагранжа

$$L(\alpha_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - 1\right)$$

Найдём производные $L(\alpha_i, \lambda)$, λ - const Лагранжа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\alpha_i, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(\alpha_i, \lambda)}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_i = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \qquad -\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{2} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n\lambda}{2} = -1 \ ; \ \lambda = \frac{-2}{n} \Rightarrow \alpha_i = -\left(\frac{-2}{n}\right)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_i = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ имеет мин. значение, если $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$$

Следовательно, эффективной оценкой является $\widetilde{\Theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{x}$.

3.8 Теорема о единственности эффективной оценки

теорема:

Пусть $X_1, \dots, X_n \sim L_\xi(x, \theta)$, где θ — параметр распределения, и пусть $\tilde{\theta}(\overline{X_n})$ и $\widehat{\theta}_n(\overline{X_n})$ — две эффективные оценки θ. Тогда $\tilde{\theta}_n(\overline{X_n}) = \widehat{\theta}_n(\overline{X_n})$. То есть $P\{(x_1, \dots, x_n) : \tilde{\theta}_n(\overline{X_n}) \neq \widehat{\theta}_n(\overline{X_n})\} = 0$.

Доказательство:

Док-во: т.к. $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$ – эфф., то по опр. $M\tilde{\theta}_1 = M\tilde{\theta}_2 = \theta$. $D\tilde{\theta}_1$ и $D\tilde{\theta}_2$ есть $\inf D\tilde{\theta}_n$, т.к. inf единств., то $D\tilde{\theta}_1 = D\tilde{\theta}_2$. Рассм. $\hat{\theta} = \frac{\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2}{2}$:

$M\hat{\theta} = \frac{1}{2}(M\tilde{\theta}_1 + M\tilde{\theta}_2) = \frac{1}{2}(\theta + \theta) = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ – несмещ. оценка

$D\hat{\theta} = \frac{1}{4}(D\tilde{\theta}_1 + D\tilde{\theta}_2 + 2cov(\tilde{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) = \frac{1}{2}(D\tilde{\theta}_1 + cov(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ (*)

$|cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)| = |M(\hat{\theta}_1 - M\tilde{\theta}_1)(\tilde{\theta}_2 - M\hat{\theta}_2)| \le \sqrt{M(\tilde{\theta}_1 - M\tilde{\theta}_1)^2} \cdot \sqrt{M(\tilde{\theta}_2 - M\tilde{\theta}_2)^2} =$

$= \sqrt{D\tilde{\theta}_1} \cdot \sqrt{D\tilde{\theta}_2} = D\tilde{\theta}_1$, т.е. $|cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)| \le D\tilde{\theta}_1$

$D\hat{\theta} = |D\hat{\theta}| = \frac{1}{2}|D\tilde{\theta}_1 + cov(\tilde{\theta}_1, \hat{\theta}_2)| \le \frac{1}{2}(|D\tilde{\theta}_1| + |cov(\tilde{\theta}_1, \hat{\theta}_2)|) \le \frac{1}{2}(|D\tilde{\theta}_1| + |D\tilde{\theta}_1|) =$

$= D\tilde{\theta}_1 = \inf D\tilde{\theta}_n \Rightarrow D\hat{\theta} = D\tilde{\theta}_1$

Решим (*): $D\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{2}(D\tilde{\theta}_1 - cov(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)) \Rightarrow D\tilde{\theta}_1 = cov(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$

Коэфф. корреляции $r(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{cov(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)}{\sqrt{D\tilde{\theta}_1}\sqrt{D\tilde{\theta}_2}} = \frac{D\tilde{\theta}_1}{D\tilde{\theta}_1} = 1 \Rightarrow \tilde{\theta}_2 = a\tilde{\theta}_1 + b$

$M\tilde{\theta}_2 = aM\hat{\theta}_1 + b$ (несм.)

$$\left.\begin{array}{l} \theta = a\theta + b \\ 1 \cdot \theta + 0 = a\theta + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow a = 1,\ b = 0 \Rightarrow \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{эфф. оценка единств.} \Rightarrow ! \ \blacksquare \end{array}$$

3.8.1 Определение регулярной параметрической модели. Информация Фишера.

Определение:

Пусть ξ — наблюдаемая случайная величина.

Выборочным пространством $\mathbf{X}_n$ называется $\{\overline{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)\}$.

Параметрическим множеством называется Θ — множество значений параметра θ.

Определение:

Параметрической моделью называется

$$\{\mathbf{X}_n; F_\xi(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$$

Определение:

Параметрическая модель называется регулярной, если:

1. параметрическое множество Θ — открытое множество;

2. носитель распределён, то есть множество $A = \{x : f(x) > 0\}$ — не зависит от параметров;

3. $\forall \theta$ и $x \in A$ существует производная $\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} < +\infty$;

4. $\forall \theta \in \Theta \quad M\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right) = 0 \quad M\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 < +\infty$;

5. Дважды допустимо дифференцирование под знаком интеграла по параметру.

Определение:

Пусть ξ — случайная величина с функцией плотности $f(x,\theta)$. Тогда информацией Фишера для случайного вектора $\overline{X}_n$ называется $I_n(\theta) = M(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta))^2$

3.9 Неравенство Рао-Крамера. Построение эффективной по Рао-Крамеру оценки для пуассоновского распределения

Неравенство Рао-Крамера:

Пусть дана регулярная параметрическая модель. Тогда для любой несмещённой оценки $\tilde{\theta}$ параметра θ $D\tilde{\theta} \geq \frac{1}{nI_n(\theta)}$.

Определение:

Величину $e(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)*D\tilde{\theta}}$ называют показаелем эффективности по Рао-Крамеру.

Для любой несмещённой оценки $0 < e(\theta) \leq 1$. Если $e(\theta) = 1$, то $\tilde{\theta}_n$ называется эффективной по Рао-Крамеру, следовательно, просто эффективна.

Построение эффективной по Рао-Крамеру оценки для пуассоновского распределения:

$(X_1,\dots,X_n) \sim Pois(\lambda)$. Построить эфф. (оптимальную) оценку λ.

$P\{\xi=k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \Rightarrow \forall x_i \; P\{x_i=k\} = P\{\xi=k\}$

$Mx_1 = \lambda, \; Dx_1 = \lambda^*$ (из ТВ) $\quad Mx_1^2 = \lambda^2+\lambda$

Пусть $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — оценка λ.

$M\overline{X} = \lambda, \; D\overline{X} = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} DX_i^* = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\lambda = \frac{\lambda}{n}$.

Найдём $I(\lambda)$ — в одном наблюдении:

$I(\lambda) = M\left(\frac{\partial \ln(\frac{\lambda^\xi e^{-\lambda}}{\xi!})}{\partial\lambda}\right)^2 = M(\frac{\partial}{\partial\lambda}(\xi\ln\lambda-\lambda-\ln\xi!)^2) = M(\frac{\xi}{\lambda}-1)^2 = M(\frac{\xi^2}{\lambda^2}-\frac{2\xi}{\lambda}+1) = \frac{1}{\lambda^2}M\xi^2-\frac{2}{\lambda}M\xi+1 =$
$= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2+\lambda)-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda+1 = 1+\frac{1}{\lambda}-2+1 = \frac{1}{\lambda}$.

Вычислим $e(\overline{X}) = \frac{\lambda}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \overline{X}$ — оптимальная оценка параметра λ.

4 Методы построения оценок

4.1 Метод моментов. Пример (биномиальное распределение)

Определение:

Начальным теоретическим моментом k-го порядка называется $m_k = M\xi^k$, если $M|\xi|^k < +\infty$.

Определение:

Центральным теоретическим моментом k-го порядка называется $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$, если $M|\xi| < +\infty$.

Определение:

Выборочным начальным моментом k-го порядка называется $\tilde{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$.

Определение:

Выборочным центральным моментом k-го порядка называется $\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^k$.

Метод моментов:

Метод моментов состоит в том, что за оценку параметров принимается решение системы уравнений:

$$\begin{cases} m_k = \tilde{m}_k \\ \mu_k = \tilde{\mu}_k \end{cases} \tag{1}$$

Пример (биномиальное распределение):

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim Bin(m; p)$

m - кол-во независ. испытаний Бернулли

p - веро-ть успеха

Получить $\tilde{p}_{мм}$

Решение: $m_1 = \tilde{m}_1 \Rightarrow M\xi = \overline{X} \Rightarrow mp = \overline{X} \Rightarrow p = \frac{\overline{X}}{m}$.

Таким образом, $\tilde{p}_{мм} = \frac{\overline{X}}{m} = \frac{1}{n \cdot m}\sum_{i=1}^{n} X_i$

4.2 Функция правдоподобия. Метод максимального правдоподобия. Пример (биномиальное распределение)

Определение:

Пусть $X_1, \dots, X_n \sim L_\xi(x, \theta)$, причём $f_\xi(x, \theta)$ — известна, а θ неизвестен.

Функцией правдоподобия нахывают $L(\overline{X}_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = f(X_1, \theta) * \dots * f(X_n, \theta)$.

Метод максимального правдоподобия:

Рассмотрим $\ln L(\overline{X}_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(X_i, \theta)$.

Метод максимального правдоподобия состоит в том, что за оценку параметра θ принимается точка максимума функции правдоподобия.

Алгоритм:

1. Построить функцию $L(\overline{X}_n, \theta)$;
2. Взять её логарифм $\ln L(\overline{X}_n, \theta)$;
3. $\frac{\partial \ln L(\overline{X}_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta$;
4. Если значение второй производной строго меньше нля, то оценка параметра $\tilde{\theta}$ и есть θ_0.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\overline{X}_n, \theta)}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta_0} < 0, \text{то } \ \tilde{\theta} = \theta_0$$

Пример (биномиальное распределение):

Пример (Построить оценку $\tilde{p}_{МмР}$ параметра p $Bin(m;p)$):

1. $L(\overline{X}_n;\theta) = C_m^{x_1} p^{x_1} q^{m-x_1} \cdot C_m^{x_2} p^{x_2} q^{m-x_2} \cdot \ldots \cdot C_m^{x_n} p^{x_n} q^{m-x_n} =$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}\right) \cdot p^{n\overline{x}} q^{nm-n\overline{x}} \qquad \text{т.к.} \quad x_1+\ldots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = n\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = n\overline{x}$$

2. $\ln L(\overline{X}_n;p) = \sum_{i=1}^{m} \ln C_m^{x_i} + n\overline{x}\ln p + (nm - n\overline{x})\ln(1-p)$

3. $\frac{\partial}{\partial p}\ln L(\overline{X}_n;p) = \frac{n\overline{x}}{p} - \frac{nm-n\overline{x}}{1-p} = 0 \qquad \boxed{0<p<1}$

$$\overline{x} - p\overline{x} - (m-\overline{x})p = 0$$

$$p_0 = \frac{\overline{x}}{m}.$$

4. $\frac{\partial^2 L(\overline{X}_n;p)}{\partial p^2} = -\frac{n\overline{x}}{p^2} - \frac{nm-n\overline{x}}{1-p^2}\Bigg|_{p_0} = -n\left(\frac{\overline{x}}{\overline{x}^2/m^2} + \frac{(m-\overline{x})}{(m-\overline{x})^2/m^2}\right) = -m^2 n\left(\frac{1}{\overline{x}} + \frac{1}{m-\overline{x}}\right) =$

$$= -m^2 n\left(\frac{m-\overline{x}+\overline{x}}{\overline{x}(m-\overline{x})}\right) = -\frac{m^2 n^2}{\underbrace{\overline{x}(m-\overline{x})}_{>0}} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_{ММП} = p_0 = \frac{\overline{x}}{m}.$$

Оценки по методу ММП не явл-ся несмещ по пос-ию, но они состоятельные или асимптотически сос-ые.