

Содержание

1	Глава 1	2
1.1	Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания)	2
1.1.1	Постановка задачи	2
1.1.2	Вывод	3
1.2	Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вывод, комментарии)	4
1.3	Интерполяционный многочлен в форме Ньютона (вывод, комментарии)	7
1.4	Интерполяция кубическими сплайнами (вывод: построение вспомогательной СЛАУ)	10

1 Глава 1

1.1 Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания)

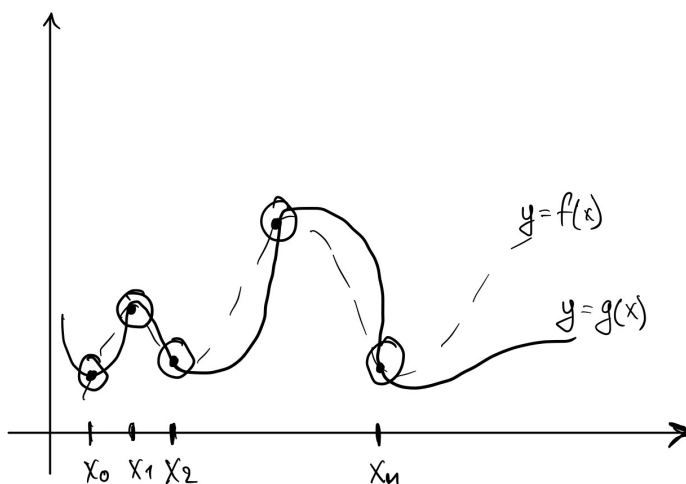
1.1.1 Постановка задачи

Пусть задана некоторая функция f дискретным набором своих значений:

x_0	x_1	\dots	x_n
f_0	f_1	\dots	f_n

Требуется построить (указать) некоторую определённую и непрерывную функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$g(x_k) = f_k, \quad \forall k = \overline{0, n} \quad (1)$$



Замечание:

Очевидно, что задача интерполяции в указанной выше формулировке имеет бесконечно много решений.

Определение 1:

Точки x_0, x_1, \dots, x_n будем называть узлами интерполяции (приближения).

Определение 2:

Функцию f будем называть интерполируемой (приближаемой) функцией.

Определение 3:

Функцию $g(x)$ будем называть интерполирующей (интерполяционной, приближающей) функцией или интерполянтой.

Определение 4:

Выполнение равенств 1 будем называть главным условием интерполяции (ГУИ).

1.1.2 Вывод

В данном параграфе покажем, что алгебраический многочлен степени n в случае попарной различности узлов интерполяции может быть взят в качестве искомой интерполянты в задаче интерполяции, такой многочлен будет задан единственным образом.

Другими словами, потребуем, чтобы алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

удовлетворял ГУИ, а именно, чтобы имели место следующие равенства:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f_0 \\ P_n(x_1) = f_1 \\ \dots \\ P_n(x_n) = f_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases} \quad (3)$$

По своей алгебраической природе равенства 3 представляют собой систему алгебраических линейных уравнений $(n+1) \times (n+1)$ относительно неизвестных a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 .

В этой связи, чтобы СЛАУ 3 имело единственное решение, необходимо, чтобы его главный определитель был отличен от 0.

$$\Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Причём должно выполняться условие попарного различия узлов интерполяции.

$$x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \quad (4)$$

Из вышеописанного следует, что, если выполняется условие 4, то $\Delta_{(3)} \neq 0$ и СЛАУ 3 будет иметь единственное решение.

Таким образом, решив СЛАУ 3 любым подходящим численным методом, мы узнаем a_0, \dots, a_n .

Подставив найденные коэффициенты в 2 мы получим явную формулу искомой интерполянты.

1.2 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вывод, комментарии)

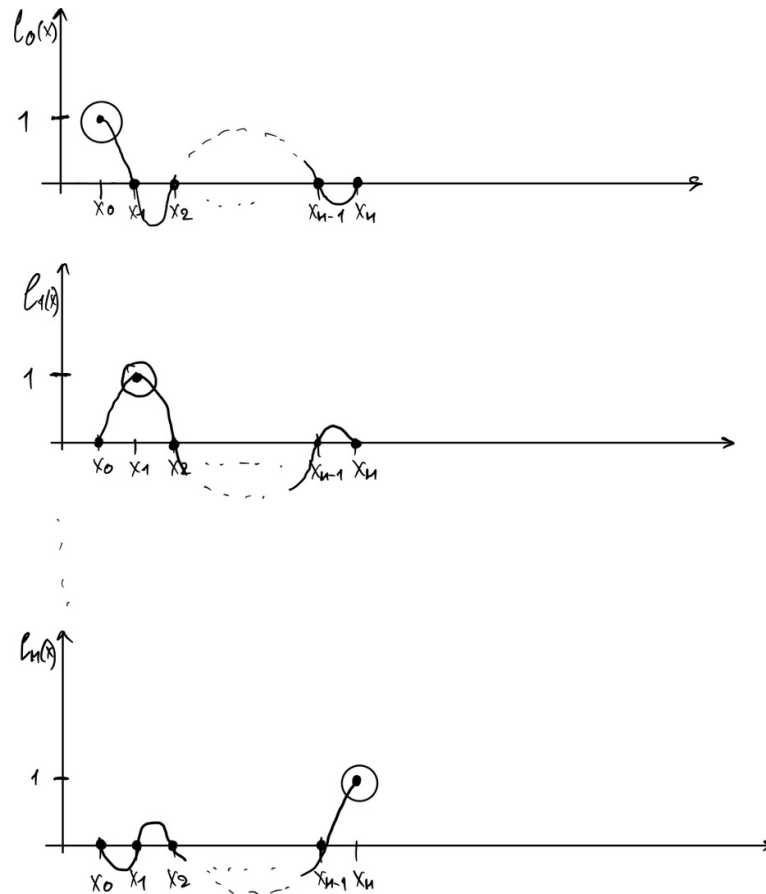
В этом параграфе рассмотрим ещё один альтернативный способ построения указанного интерполяционного многочлена, не сводящее решение задачи интерполяции к решению вспомогательной СЛАУ.

Рассмотрим следующие фундаментальные многочлены Лагранжа (базисы)

$$l_k(x) : l_k(x_j) = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases} \quad k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n} \quad (1)$$

Так же рассмотрим следующую линейную комбинацию введённых фундаментальных многочленов Лагранжа (ФМЛ):
разумно рассматривать

$$\sum_{k=0}^n f_k l_k(x) = L_n(x), \quad \text{где } f_k \text{ какие-то коэффициенты} \quad (2)$$



Убедимся в том, что линейная комбинация ФМЛ 2 действительно будет удовлетворять условию интерполяции. С этой целью осуществим в 2 подстановку

$$\begin{aligned}
 x = x_j : L_n(x_j) &= \sum_{k=0}^n f_k l_k(x_j) = f_0 \underbrace{l_0(x_j)}_{=0} + f_1 \underbrace{l_1(x_j)}_{=0} + \dots + f_j \underbrace{l_j(x_j)}_{=1} + \dots + f_n \underbrace{l_n(x_j)}_{=0} = \\
 &= f_j \quad \forall j = 0, n
 \end{aligned}$$

Таким образом, линейная комбинация ФМЛ 2 действительно удовлетворяет ГУИ.

Тем не менее представление 2 не позволяет пока узнавать значение искомой интерполянты в неузловых точках ввиду того, что определение 1 имеет узловой характер.

Воспользуемся “основной теоремой алгебры”, позволяющей по известным нулям многочлена восстанавливать его общий вид. Применим данную теорему к ФМЛ, имеющего, согласно определению 1, нулями все узлы интерполяции за исключением одного с номером, равным номеру выбранного многочлена.

$$\ell_k(x) = C_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) \quad (3)$$

Замечание:

Любой многочлен $a_n x^n + \dots + a_0$ можно разложить в поле комплексных чисел в $(x - x_1) \dots (x - x_n)$. (основная теорема алгебры)

Определим коэффициенты C_k у каждого ФМЛ определённого по формуле 3, используя условия нормировки каждого такого члена в узле, а именно:

$$\begin{aligned} \ell_k(x_k) &= C_k (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) \Rightarrow \\ &\quad \text{|| } k = x_n \text{ ?} \\ \Rightarrow C_k &= \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \end{aligned} \quad (4)$$

Осуществив последовательно подстановку 4 в 3 и 3 в 2 получим аналогичную формулу искомого интерполяционного многочлена

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (5)$$

Определение:

Интерполяционный многочлен, задаваемый 5, будем называть интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.

1.3 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона (вывод, комментарии)

В данном параграфе рассмотрим ещё один способ построения интерполяционного многочлена, отличающегося тем, что итоговая явная формула многочлена позволяет экономить в случае добавления или удаления узла интерполяции.

Отступление:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} P_2(x_0) = A \\ P_2'(x_0) = B \\ P_2''(x_0) = C \end{cases} \rightarrow \text{известны}$$

разрешения единственным образом
+ позволяет вычислить a, b и c

Определение 1:

Разделёнными разностями 0-го порядка для $f(x)$ будем называть сами её значения

$$f(x_0), \dots, f(x_n)$$

Определение 2:

Разделёнными разностями 1-го порядка будем называть величины

$$f : f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad f \text{ — это разность}$$

Определение 3:

Разделёнными разностями 2-го порядка для f будем называть величины

$$f : f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-2}$$

Определение 4:


Разделёнными разностями 1-го порядка для f называются величины

$$f : f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+l}) = \frac{f(x_{k+1}; \dots; x_{k+l}) - f(x_k; \dots; x_{k+l-1})}{x_{k+l} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-l}$$

Пусть точка x такая, что интерполируемая f сама является многочленом n . В этом случае интерполируемая функция и её интерполируемый многочлен совпадают (в силу единственности последнего).

Рассмотрим разделённую разность в точке $(x; x_0)$:

$$f(x; x_0) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f(x; x_0)(x - x_0)$$

?  ?
неявное ур-ие

(1)

Рассмотрим разделённую разность в точке $(x; x_1)$:

$$f(x; x_0; x_1) = \frac{f(x_0; x_1) - f(x; x_1)}{x_1 - x} \rightarrow f(x; x_0) = f(x_0; x_1) + f(x; x_0; x_1)(x - x_1)$$

(2)

Подставим 2 в 1:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x; x_0; x_1)(x - x_0)(x - x_1)$$

известны
↑
неявное уравнения сохранилось ?

(3)

Рассмотрим:

$$f(x; x_0; x_1; x_2) = \dots \rightarrow f(x; x_0; x_1) = \dots$$

Осуществляя аналогичные действия, за конечное число шагов мы исчерпаем все узлы интерполяции и получим следующее неявное уравнение:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0; x_1)(x - x_0) + f'(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ f'(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) + f'(\underline{x}; x_0; \dots; x_n)(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

все равно не явное уравнение

(4)

Отступление:

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + \dots$$

$$P_n(x) \equiv Q_m(x) \Leftrightarrow \begin{cases} n=m \\ a_k = b_k, \forall k \end{cases}$$

С учётом сделанного предположения, в левой части 4 стоит алгебраический многочлен, в правой части сумма многочленов $0, n+1$. Тогда равенство 4 $\forall x$ возможно (считаем x независимым аргументом) только, если $f(x; x_0; \dots; x_n) \equiv 0$. В противном случае равенство 4 $\forall x$ выполняться не будет.

Следовательно равенство 4 можно записать в виде:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

(5)

Таким образом, предположив, что $f(x)$ является многочленом степени n базисы, мы получим его явную формулу 5.

Теперь откажемся от предположения и будем считать, что $f(x)$ производящая интерполяционная функция. Тогда рассмотрим отдельно алгебраический многочлен, формулу которого мы читаем в правой части 5. А имеем многочлены вида:

$$N_n(x) = f(x) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

(6)

Непосредственной подстановкой убедимся, что 6 удовлетворяет ГУИ:

$$N_n(x_0) = f(x_0) + \dots + 0 = f(x_0)$$

$$N_n(x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x_1 - x_0) + 0 + \dots + 0 = f(x_1)$$

⋮

$$N_n(x_n) = \dots = f(x_n)$$

То есть многочлен вида 6 действительно удовлетворяет ГУИ.

Определение:

N будем называть интерполяционным многочленом в форме Ньютона.

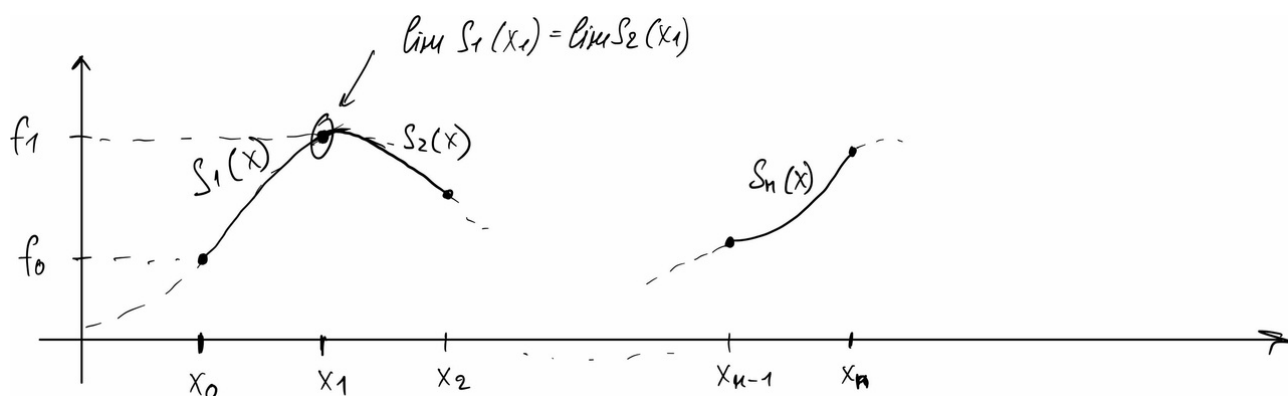
Замечание:

Чтобы воспользоваться 6 необходимо предварительно вычислить входящие в неё коэффициенты. С этой целью целесообразно вычислить таблицу имеющую следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(x_0) & \xrightarrow{f(x_0, x_1)} & f(x_0, x_1, x_2) & \xrightarrow{\quad} & \dots & \xrightarrow{\quad} & f(x_0, \dots, x_{n-1}) \xrightarrow{\quad} f(x_0, \dots, x_n) \\
 f(x_1) & \searrow & \nearrow & & & & \nearrow \\
 f(x_2) & & f(x_1, x_2) & & & & f(x_1, \dots, x_n) \\
 & & \searrow & & & & \nearrow \\
 & & & & & & f(x_{n-1}, \dots, x_n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & f(x_{n-1}, x_n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & f(x_n)
 \end{array}$$

1.4 Интерполяция кубическими сплайнами (вывод: построение вспомогательной СЛАУ)

В данном параграфе рассмотрим ещё один способ основанный на построении кусочно-непрерывной склейки кубической степени, которые будем называть кубическими сплайнами. (Сплайн — отрезок или частица).



То есть на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1})$ $i = \overline{1, n}$ определим кубический сплайн вида:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (1)$$

Таким образом, чтобы построить (указать) желаемую “кусочно-непрерывную” склейку кубических сплайнов вида 1 необходимо определить $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, то есть $4n$ неизвестных коэффициентов.

Потребуем, чтобы кусочно-непрерывная склейка кубических сплайнов вида 1 удовлетворяла ГУИ.

То есть

$$\begin{cases} S_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, & i = \overline{1, n} \\ S_i(x_i) = f_i, & i = \overline{1, n} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_i = f_{i-1}, & i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = f_i, & i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3)$$

$$h = x_i - x_{i-1}; \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{узлы равноудалены}) \quad (2-3)$$

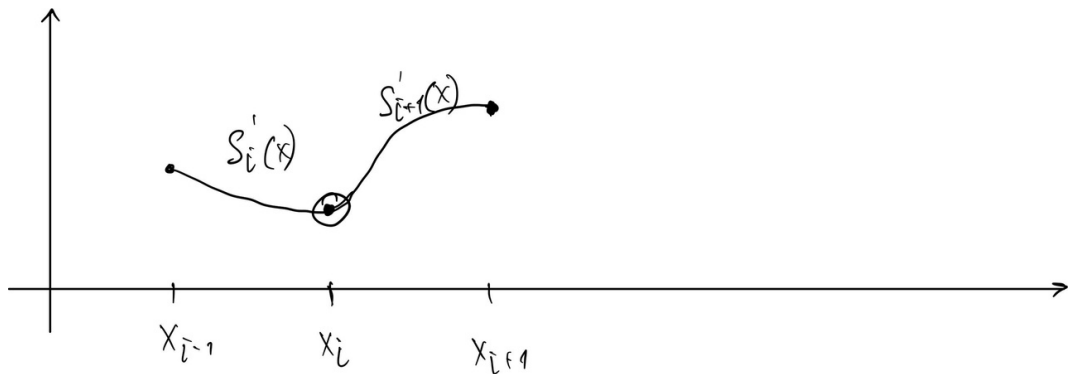
Равенства 2-3 по своей алгебраической природе являются ЛАУ, представленными в количестве $n + n = 2n$ уравнений, что в два раза меньше, чем количество искомых неизвестных коэффициентов кубических сплайнов.

Недостающие уравнения попытаемся постоить **дополнительно потребовав** непрерывности склейки не только самих сплайнов, но и непрерывности склейки их первых и вторых производных.

Предварительно вычислим производные соседних сплайнов:

$[x_{i-1}, x_i)$	$[x_i, x_{i+1})$
$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$ $S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$ $S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$	$S_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1}(x - x_i) + c_{i+1}(x - x_i)^2 + d_{i+1}(x - x_i)^3$ $S'_{i+1}(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2$ $S''_{i+1}(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i)$

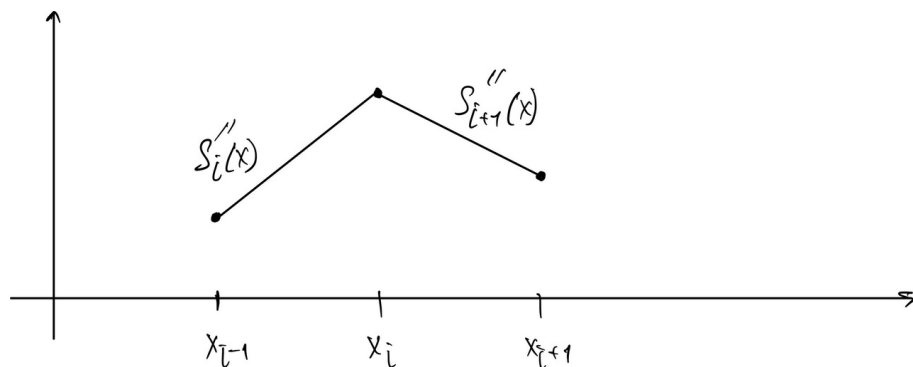
Потребуем непрерывности склейки первых производных:



То есть:

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \quad (4)$$

Теперь потребуем непрерывности вторых производных:



То есть:

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \quad (5)$$

То есть:

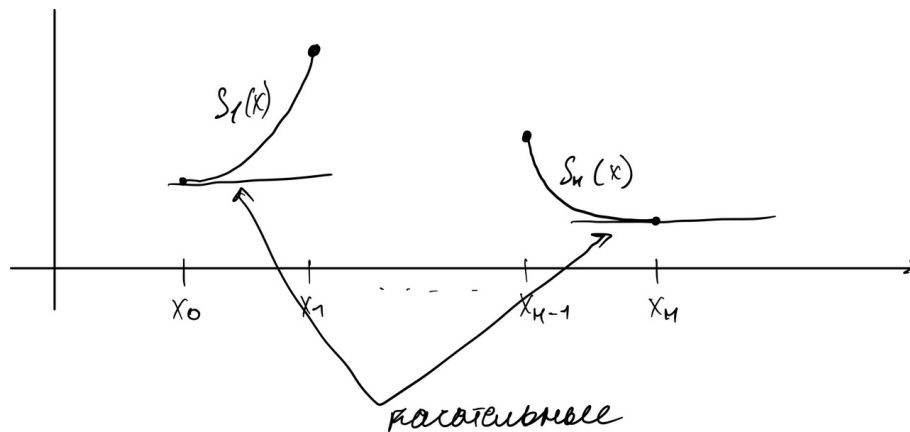
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_i+0} S'_i(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i-0} S'_{i+1}(x_i) \\ \lim_{x \rightarrow x_i+0} S''_i(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i-0} S''_{i+1}(x_i) \end{cases} \quad (4-5)$$

Полученные равенства 4-5 с учётом выражений производных из таблицы:

$$\begin{cases} b_i + 2C_i h + 3d_i h^2 = b_{i+1} + 0 + 0, & i = \overline{1, n-1} \\ 2C_i + 6d_i h = 2C_{i+1} + 0, & i = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (6-7)$$

Таким образом, уравнения ?? вместе с уравнениями 2-3 дают $2n + (n-1) + (n-1) = 4n - 2$ уравнений.

Недостающие два уравнения получим из условия нулевой кривизны в точках x_0 и x_n соответственно.



$$\begin{cases} S_1''(x_0) = 0 \\ S_n''(x_n) = 0 \end{cases} \quad (8-9)$$

Используя третью строку из таблицы, перепишем ??:

$$\begin{cases} 2C_1 = 0 \\ 2C_n + 6d_n h = 0 \end{cases} \quad (10-11)$$

Таким образом, мы получим СЛАУ 2-3, ??, ?? размерности $4n \times 4n$, решив которую мы найдём коэффициенты искомых сплайнов. Соответственно подставив их в 1 мы получим явное уравнение для искомой интерполянты.