Содержание

1 Глава 1

1.1 Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания)

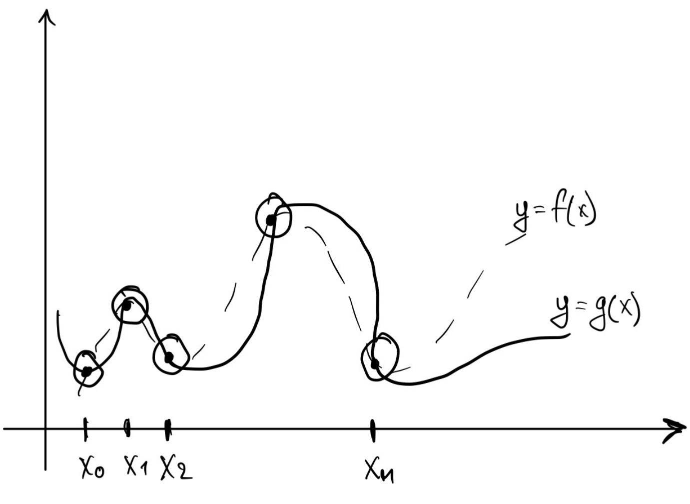
1.1.1 Постановка задачи

Пусть задана некоторая функция f дискретным набором своих значений:

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
f_0	f_1	$\ldots$	f_n

Требуется построить (указать) некоторую определённую и непрерывную функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$g(x_k) = f_k, \quad \forall k = \overline{0, n} \tag{1}$$



Замечание:

Очевидно, что задача интерполяции в указанной выше формулировке имеет бесконечно много решений.

Определение 1:

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ будем называть узлами интерполяции (приближения).

Определение 2:

Функцию f будем называть интерполируемой (приближаемой) функцией.

Определение 3:

Функцию $g(x)$ будем называть интерполирующей (интерполяционной, приближающей) функцией или интерполянтой.

Определение 4:

Выполнение равенств 1 будем называть главным условием интерполяции (ГУИ).

1.1.2 Вывод

В данном параграфе покажем, что алгебраический многочлен степени n в случае попарной различности узлов интерполяции может быть взят в качестве искомой интерполянты в задаче интерполяции, такой многочлен будет задан единственным образом.

Другими словами, потребуем, чтобы алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

удовлетворял ГУИ, а именно, чтобы имели место следующие равенства:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f_0 \\ P_n(x_1) = f_1 \\ \dots\dots \\ P_n(x_n) = f_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases} \tag{3}$$

По своей алгебраической природе равенства 3 предсавляют собой систему алгебраических линейных уравнений $(n+1)x(n+1)$ относительно неизвестных $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$.

В этой связи, чтобы СЛАУ 3 имело единственное решение, необходимо, чтобы его главный определитель был отличен от 0.

$$\Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Причём должно выполняться условие попарного различия узлов интерполяции.

$$x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \tag{4}$$

Из вышеописанного следует, что, если выполняется условие 4, то $\Delta_{(3)} \neq 0$ и СЛАУ 3 будет иметь единственное решение.

Таким образом, решив СЛАУ 3 любым подходящим численным методом, мы узнаем $a_0, \ldots, a_n$.

Подставив найденные коэффициенты в 2 мы получим явную формулу искомой интерполянты.

1.2 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вывод, комментарии)

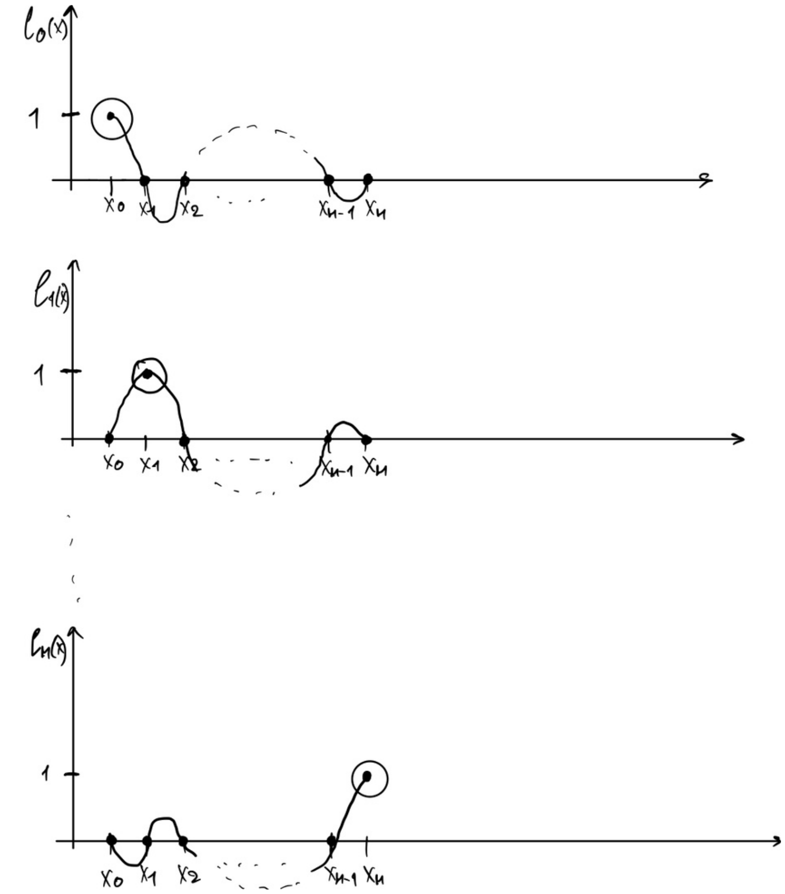
В этом параграфе рассмотрим ещё один альтернативный способ построения указанного интерполяционного многочлена, не сводящее решение задачи интерполяции к решению вспомогательной СЛАУ.

Рассмотрим следующие фундаментальные многочлены Лагранжа (базисы)

$$l_k(x) \ : \ l_k(x_j) = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases} \quad k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n} \tag{1}$$

Так же рассмотрим следующую линейную комбинацию введённых фундаменальных многочленов Лагранжа (ФМЛ):
разумно рассматривать

$$\sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x) = L_n(x), \quad \text{где } f_k \text{ какие-то коэффициенты} \tag{2}$$



Убедимся в том, что линейная комбинация ФМЛ 2 действиетльно будет удовлетворять условию интерполяции. С этой целью осуществим в 2 подстановку

$$x = x_j,\ j=\overline{0,n}:\quad L_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, l_k(x_j) = f_0 \underbrace{l_0(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} + f_1 \underbrace{l_1(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} + \ldots + f_j \underbrace{l_j(x_j)}_{\overset{(1)}{=}1} + \ldots + f_n \underbrace{l_n(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} =$$

$$= f_j \quad \forall j = \overline{0,n}$$

Таким образом, линейная комбинация ФМЛ 2 действительно удовлетворяет ГУИ.

Тем не менее представление 2 не позволяет пока узнавать значение искомой интерполянты в неузловых точках ввиду того, что определение 1 имеет узловой характер.

Воспользуемся “основной теоремой алгебры”, позволяющей по известным нулям многочлена восстанавливать его общий вид. Применим данную теорему к ФМЛ, имеющего, согласно определению 1, нулями все узлы интерполяции за исключением одного с номером, равным номеру выбранного многочлена.

$$\underset{k=\overline{0,n}}{l_k}(x) = C_k (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) \tag{3}$$

Замечание:

Любой многочлен $a_n x^n + \dots + a_0$ можно разложить в поле комплексных чисел в $(x_1 - x_1)\dots(x - x_n)$. (основная теорема алгебры)

Определим коэффициенты C_k у каждого ФМЛ определённого по формуле 3, используя условия нормировки каждого такого члена в узле, а именно:

$$\underset{\substack{\| \\ 1 \quad k=\overline{0,n}}}{l_k(x_k)} = \underset{?}{C_k}(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{k=\overline{0,n}}{C_k} = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \tag{4}$$

Осуществив последоваельно подстановку 4 в 3 и 3 в 2 получим аналогичную формулу искомого интерполяционного многочлена

$$\underset{\substack{\equiv \\ P_n(x)}}{L_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \tag{5}$$

Определение:

Интерполяционный многочлен, задаваемый 5, будем называть интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.

1.3 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона (вывод, комментарии)

В данном параграфе рассмотрим ещё один способ построения интерполяционного многочлена, отличающегося тем, что итоговая явная формула многочлена позволяет экономить в случае добавления или удаления узла интерполяции.

Отступление:

?

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} P_2(x_0) = A \\ P_2'(x_0) = B \\ P_2''(x_0) = C \end{cases} \quad \text{известны}$$

разрешима единственным образом

+ позволяет вычислить a, b и c

Определение 1:

Разделёнными раззностями 0-го порядка для $f(x)$ будем называть сами её значения

$$f(x_0), \cdots f(x_n)$$

Определение 2:

Разделёнными разностями 1-го порядка будем называть величины

$$f:\ f(x_k;x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad f \text{ — это разность}$$

Определение 3:

Разделёнными разностями 2-го порядка для f будем называть величины

$$f:\ f(x_k;x_{k+1};x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1};x_{k+2}) - f(x_k;x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-2}$$

Определение 4:

Разделёнными разностями l-го порядка для f называются величины

$$f:\ f(x_k;x_{k+1};\dots;x_{k+l}) = \frac{f(x_{k+1};\dots;x_{k+l}) - f(x_k;\dots;x_{k+l-1})}{x_{k+l}-x_k}, \quad k=\overline{0,n-l}$$

Пусть точка x такая, что интерполируемая f сама является многочленом n. В этом случае интерполируемая функция и её интерполируемый многочлен совпадают (в силу единственности последнего).

Рассморим разделённую разность в точке $(x;x_0)$:

$$f(x;x_0) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0} \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{?} = f(x_0) + \underbrace{f(\underline{\underline{x}};x_0)}_{?}(x-x_0) \tag{1}$$

неявное ур-ие

Рассмотрим разделённую разность в точке $(x;x_1)$:

$$f(x;x_0;x_1) = \frac{f(x_0;x_1)-f(x;x_1)}{x_1-x} \to f(x;x_0) = f(x_0;x_1) + f(x;x_0;x_1)(x-x_1) \tag{2}$$

Подставим 2 в 1:

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f(x_0;x_1)}^{\text{известны}}(x-x_0) + f\underbrace{(x;x_0;x_1)}_{?}(x-x_0)(x-x_1) \tag{3}$$

неявность уравнения сохранилась

Рассмотрим:

$$f(x;x_0;x_1;x_2) = \dots \to f(x;x_0;x_1) = \ dots$$

Осуществляя аналогичные действия, за конечное число шагов мы исчерпаем все узлы интерполяции и получим следующее неявное уравнение:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) + f(\underline{x};x_0;\ldots;x_n)(x-x_0)\ldots(x-x_n) \tag{4}$$

всё равно неявное уравнение

Отступление:

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + \ldots$$
$$P_n(x) \equiv Q_m(x) \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ a_k = b_k, \quad \forall k \end{cases}$$

С учётом сделанного предположения, в левой части 4 стоит алгебраический многочлен, в правой части сумма многочленов $0, n+1$. Тогда равенство 4 $\forall x$ возможно (считаем x независимым аргументом) только, если $f(x; x_0; \ldots; x_n) \equiv 0$. В противном случае равенство 4 $\forall x$ выполняться не будет.

Следовательно равенство 4 можно записать в виде:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f(x_0;x_1;\ldots;x \tag{5}$$

Таким образом, предположив, что $f(x)$ является многочленом степени nбазисы, мы получим его явную формулу 5.

Теперь откажемся от предположения и будем считать, что $f(x)$ производящая интерполяционная функция. Тогда рассмотрим отдельно алгебраический многочлен, формулу которого мы читаем в правой части 5. А имеено многочлены вида:

$$N_n(x) = f(x) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f(x_0;x_1;\ldots; \tag{6}$$

Непосредственной подстановкой убедимся, что 6 удовлетворяет ГУИ:

$$N_n(x_0) = f(x_0) + \ldots + 0 = f(x_0)$$

$$N_n(x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + 0 + \ldots + 0 = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$N_n(x_n) = \ldots = f(x_n)$$

То есть многочлен вида 6 действительно удовлетворяет ГУИ.

Определение:

N будем называть интерполяционным многочленом в форме Ньютона.

Замечание:

Чтобы воспользоатться 6 необходимо предварительно вычислить входящие в неё коэффициенты. С этой целью целесообразно вычислить таблицу имеющую следующий вид:

$$\begin{array}{llllll}
f(x_0) & f(x_0; x_1) & f(x_0; x_1; x_2) & \ldots & f(x_0; \ldots; x_{n-1}) & f(x_0; \ldots; x_n) \\
f(x_1) & f(x_1; x_2) & & \ldots & f(x_1; \ldots; x_n) & \\
f(x_2) & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
f(x_{n-1}) & f(x_{n-1}; x_n) & f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) & & & \\
f(x_n) & & & & &
\end{array}$$