Содержание

1 Глава 1

1.1 Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания)

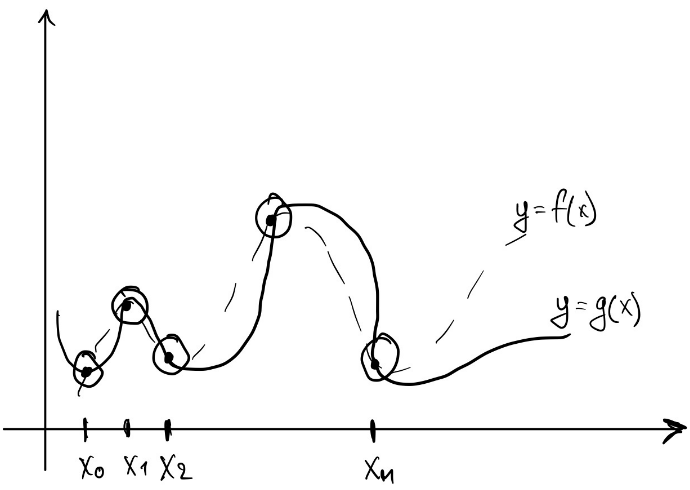
1.1.1 Постановка задачи

Пусть задана некоторая функция f дискретным набором своих значений:

x_0	x_1	....	x_n
f_0	f_1	....	f_n

Требуется построить (указать) некоторую определённую и непрерывную функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$g(x_k) = f_k, \quad \forall k = \overline{0, n} \tag{1}$$



Замечание:

Очевидно, что задача интерполяции в указанной выше формулировке имеет бесконечно много решений.

Определение 1:

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ будем называть узлами интерполяции (приближения).

Определение 2:

Функцию f будем называть интерполируемой (приближаемой) функцией.

Определение 3:

Функцию $g(x)$ будем называть интерполирующей (интерполяционной, приближающей) функцией или интерполянтой.

Определение 4:

Выполнение равенств 1 будем называть главным условием интерполяции (ГУИ).

1.1.2 Вывод

В данном параграфе покажем, что алгебраический многочлен степени n в случае попарной различности узлов интерполяции может быть взят в качестве искомой интерполянты в задаче интерполяции, такой многочлен будет задан единственным образом.

Другими словами, потребуем, чтобы алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

удовлетворял ГУИ, а именно, чтобы имели место следующие равенства:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f_0 \\ P_n(x_1) = f_1 \\ \dots\dots \\ P_n(x_n) = f_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases} \tag{3}$$

По своей алгебраической природе равенства 3 предсавляют собой систему алгебраических линейных уравнений $(n+1)x(n+1)$ относительно неизвестных $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$.

В этой связи, чтобы СЛАУ 3 имело единственное решение, необходимо, чтобы его главный определитель был отличен от 0.

$$\Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Причём должно выполняться условие попарного различия узлов интерполяции.

$$x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \tag{4}$$

Из вышеописанного следует, что, если выполняется условие 4, то $\Delta_{(3)} \neq 0$ и СЛАУ 3 будет иметь единственное решение.

Таким образом, решив СЛАУ 3 любым подходящим численным методом, мы узнаем $a_0, \ldots, a_n$.

Подставив найденные коэффициенты в 2 мы получим явную формулу искомой интерполянты.