

Содержание

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1 | Глава 1 | 2 |
| 1.1 | Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания) | 2 |
| 1.1.1 | Постановка задачи | 2 |
| 1.1.2 | Вывод | 3 |
| 1.2 | Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вывод, комментарии) | 4 |

1 Глава 1

1.1 Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания)

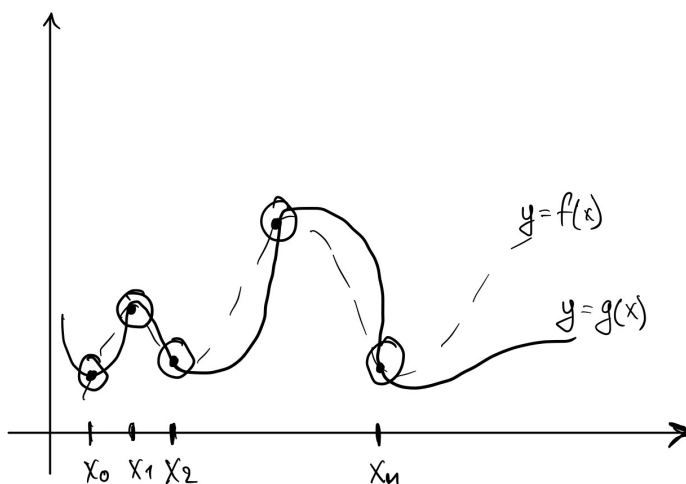
1.1.1 Постановка задачи

Пусть задана некоторая функция f дискретным набором своих значений:

| | | | |
|-------|-------|---------|-------|
| x_0 | x_1 | \dots | x_n |
| f_0 | f_1 | \dots | f_n |

Требуется построить (указать) некоторую определённую и непрерывную функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$g(x_k) = f_k, \quad \forall k = \overline{0, n} \quad (1)$$



Замечание:

Очевидно, что задача интерполяции в указанной выше формулировке имеет бесконечно много решений.

Определение 1:

Точки x_0, x_1, \dots, x_n будем называть узлами интерполяции (приближения).

Определение 2:

Функцию f будем называть интерполируемой (приближаемой) функцией.

Определение 3:

Функцию $g(x)$ будем называть интерполирующей (интерполяционной, приближающей) функцией или интерполянтой.

Определение 4:

Выполнение равенств 1 будем называть главным условием интерполяции (ГУИ).

1.1.2 Вывод

В данном параграфе покажем, что алгебраический многочлен степени n в случае попарной различности узлов интерполяции может быть взят в качестве искомой интерполянты в задаче интерполяции, такой многочлен будет задан единственным образом.

Другими словами, потребуем, чтобы алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

удовлетворял ГУИ, а именно, чтобы имели место следующие равенства:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f_0 \\ P_n(x_1) = f_1 \\ \dots \\ P_n(x_n) = f_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases} \quad (3)$$

По своей алгебраической природе равенства 3 представляют собой систему алгебраических линейных уравнений $(n+1) \times (n+1)$ относительно неизвестных a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 .

В этой связи, чтобы СЛАУ 3 имело единственное решение, необходимо, чтобы его главный определитель был отличен от 0.

$$\Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Причём должно выполняться условие попарного различия узлов интерполяции.

$$x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \quad (4)$$

Из вышеописанного следует, что, если выполняется условие 4, то $\Delta_{(3)} \neq 0$ и СЛАУ 3 будет иметь единственное решение.

Таким образом, решив СЛАУ 3 любым подходящим численным методом, мы узнаем a_0, \dots, a_n .

Подставив найденные коэффициенты в 2 мы получим явную формулу искомой интерполянты.

1.2 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вывод, комментарии)

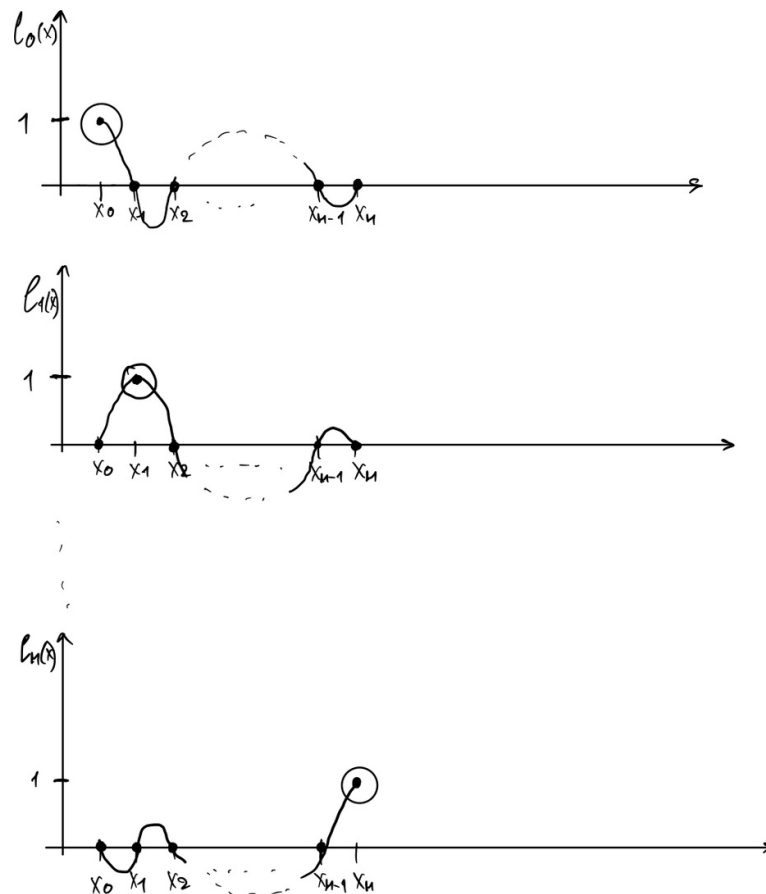
В этом параграфе рассмотрим ещё один альтернативный способ построения указанного интерполяционного многочлена, не сводящее решение задачи интерполяции к решению вспомогательной СЛАУ.

Рассмотрим следующие фундаментальные многочлены Лагранжа (базисы)

$$l_k(x) : l_k(x_j) = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases} \quad k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n} \quad (1)$$

Так же рассмотрим следующую линейную комбинацию введённых фундаментальных многочленов Лагранжа (ФМЛ):
разумно рассматривать

$$\sum_{k=0}^n f_k l_k(x) = L_n(x), \quad \text{где } f_k \text{ какие-то коэффициенты} \quad (2)$$



Убедимся в том, что линейная комбинация ФМЛ 2 действительно будет удовлетворять условию интерполяции. С этой целью осуществим в 2 подстановку

$$\begin{aligned}
 x = x_j : L_n(x_j) &= \sum_{k=0}^n f_k l_k(x_j) = f_0 \underbrace{l_0(x_j)}_{=0} + f_1 \underbrace{l_1(x_j)}_{=0} + \dots + f_j \underbrace{l_j(x_j)}_{=1} + \dots + f_n \underbrace{l_n(x_j)}_{=0} = \\
 &= f_j \quad \forall j = 0, n
 \end{aligned}$$

Таким образом, линейная комбинация ФМЛ 2 действительно удовлетворяет ГУИ.

Тем не менее представление 2 не позволяет пока узнавать значение искомой интерполянты в узловых точках ввиду того, что определение 1 имеет узловой характер.

Воспользуемся “основной теоремой алгебры”, позволяющей по известным нулям многочлена восстанавливать его общий вид. Применим данную теорему к ФМЛ, имеющего, согласно определению 1, нулями все узлы интерполяции за исключением одного с номером, равным номеру выбранного многочлена.

$$\ell_k(x) = C_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) \quad (3)$$

Замечание:

Любой многочлен $a_n x^n + \dots + a_0$ можно разложить в поле комплексных чисел в $(x - x_1) \dots (x - x_n)$. (основная теорема алгебры)

Определим коэффициенты C_k у каждого ФМЛ определённого по формуле 3, используя условия нормировки каждого такого члена в узле, а именно:

$$\begin{aligned} \ell_k(x_k) &= C_k (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) \Rightarrow \\ &\quad \text{|| } k = x_n \text{ ?} \\ \Rightarrow C_k &= \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \end{aligned} \quad (4)$$

Осуществив последовательно подстановку 4 в 3 и 3 в 2 получим аналогичную формулу искомого интерполяционного многочлена

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (5)$$

Определение:

Интерполяционный многочлен, задаваемый 5, будем называть интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.