Содержание

1 Глава 1

1.1 Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания)

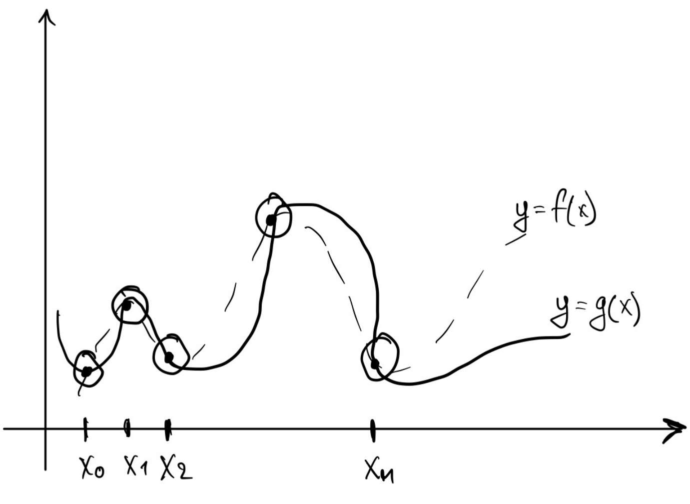
1.1.1 Постановка задачи

Пусть задана некоторая функция f дискретным набором своих значений:

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
f_0	f_1	$\ldots$	f_n

Требуется построить (указать) некоторую определённую и непрерывную функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$g(x_k) = f_k, \quad \forall k = \overline{0, n} \tag{1}$$



Замечание:

Очевидно, что задача интерполяции в указанной выше формулировке имеет бесконечно много решений.

Определение 1:

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ будем называть узлами интерполяции (приближения).

Определение 2:

Функцию f будем называть интерполируемой (приближаемой) функцией.

Определение 3:

Функцию $g(x)$ будем называть интерполирующей (интерполяционной, приближающей) функцией или интерполянтой.

Определение 4:

Выполнение равенств 1 будем называть главным условием интерполяции (ГУИ).

1.1.2 Вывод

В данном параграфе покажем, что алгебраический многочлен степени n в случае попарной различности узлов интерполяции может быть взят в качестве искомой интерполянты в задаче интерполяции, такой многочлен будет задан единственным образом.

Другими словами, потребуем, чтобы алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

удовлетворял ГУИ, а именно, чтобы имели место следующие равенства:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f_0 \\ P_n(x_1) = f_1 \\ \dots \\ P_n(x_n) = f_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases} \tag{3}$$

По своей алгебраической природе равенства 3 предсавляют собой систему алгебраических линейных уравнений $(n+1)x(n+1)$ относительно неизвестных $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$.

В этой связи, чтобы СЛАУ 3 имело единственное решение, необходимо, чтобы его главный определитель был отличен от 0.

$$\Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Причём должно выполняться условие попарного различия узлов интерполяции.

$$x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \tag{4}$$

Из вышеописанного следует, что, если выполняется условие 4, то $\Delta_{(3)} \neq 0$ и СЛАУ 3 будет иметь единственное решение.

Таким образом, решив СЛАУ 3 любым подходящим численным методом, мы узнаем $a_0, \dots, a_n$.

Подставив найденные коэффициенты в 2 мы получим явную формулу искомой интерполянты.

1.2 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вывод, комментарии)

В этом параграфе рассмотрим ещё один альтернативный способ построения указанного интерполяционного многочлена, не сводящее решение задачи интерполяции к решению вспомогательной СЛАУ.

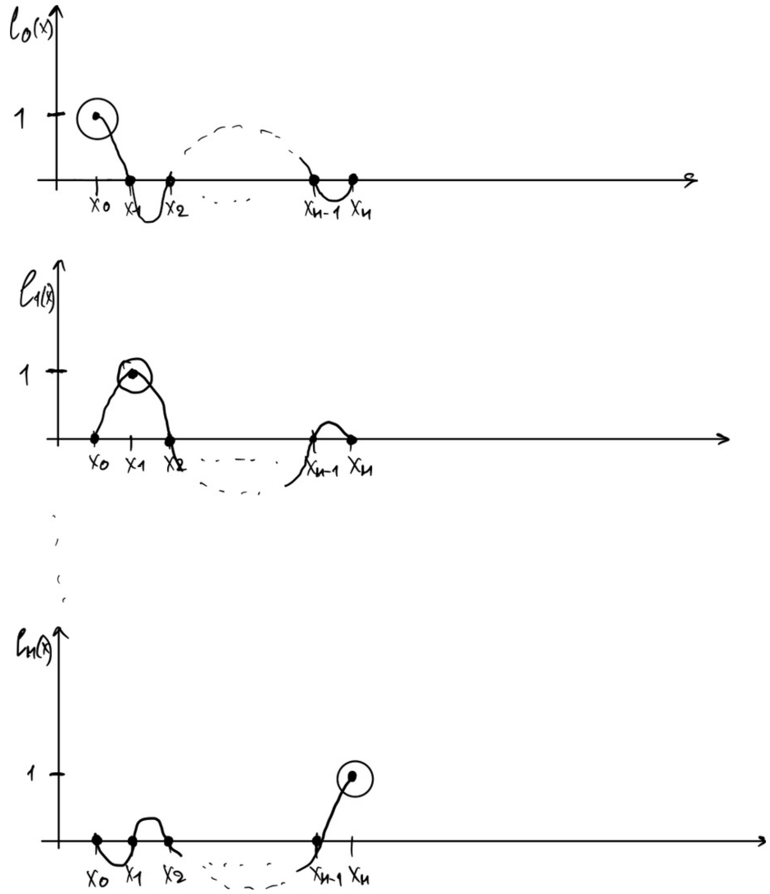
Рассмотрим следующие фундаментальные многочлены Лагранжа (базисы)

$$l_k(x) \ : \ l_k(x_j) = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases} \quad k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n} \tag{1}$$

Так же рассмотрим следующую линейную комбинацию введённых фундаменальных многочленов Лагранжа (ФМЛ):

разумно рассматривать

$$\sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x) = L_n(x), \quad \text{где } f_k \text{ какие-то коэффициенты} \tag{2}$$



Убедимся в том, что линейная комбинация ФМЛ 2 действиетльно будет удовлетворять условию интерполяции. С этой целью осуществим в 2 подстановку

$$x = x_j,\ j=\overline{0,n}:\quad L_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x_j) = f_0 \underbrace{l_0(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} + f_1 \underbrace{l_1(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} + \ldots + f_j \underbrace{l_j(x_j)}_{\overset{(1)}{=}1} + \ldots + f_n \underbrace{l_n(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} =$$

$$= f_j \quad \forall j = \overline{0,n}$$

Таким образом, линейная комбинация ФМЛ 2 действительно удовлетворяет ГУИ.

Тем не менее представление 2 не позволяет пока узнавать значение искомой интерполянты в неузловых точках ввиду того, что определение 1 имеет узловой характер.

Воспользуемся “основной теоремой алгебры”, позволяющей по известным нулям многочлена восстанавливать его общий вид. Применим данную теорему к ФМЛ, имеющего, согласно определению 1, нулями все узлы интерполяции за исключением одного с номером, равным номеру выбранного многочлена.

$$\underset{k=\overline{0,n}}{l_k}(x) = C_k (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

(3)

Замечание:

Любой многочлен $a_n x^n + \dots + a_0$ можно разложить в поле комплексных чисел в $(x_1 - x_1)\dots(x - x_n)$. (основная теорема алгебры)

Определим коэффициенты C_k у каждого ФМЛ определённого по формуле 3, используя условия нормировки каждого такого члена в узле, а именно:

$$\underset{k=\overline{0,n}}{\overset{1}{\underset{\parallel}{l_k}}}(x_k) = \underset{?}{C_k}(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{k=\overline{0,n}}{C_k} = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

(4)

Осуществив последоваельно подстановку 4 в 3 и 3 в 2 получим аналогичную формулу искомого интерполяционного многочлена

$$\underset{P_n(x)}{\underset{|||}{L_n(x)}} = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

(5)

Определение:

Интерполяционный многочлен, задаваемый 5, будем называть интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.

1.3 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона (вывод, комментарии)

В данном параграфе рассмотрим ещё один способ построения интерполяционного многочлена, отличающегося тем, что итоговая явная формула многочлена позволяет экономить в случае добавления или удаления узла интерполяции.

Отступление:

?

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} P_2(x_0) = A \\ P_2'(x_0) = B \\ P_2''(x_0) = C \end{cases}$$

известны

разрешима единственным образом

\+ позволяет вычислить a, b и c

Определение 1:

Разделёнными раззностями 0-го порядка для $f(x)$ будем называть сами её значения

$$f(x_0), \cdots f(x_n)$$

Определение 2:

Разделёнными разностями 1-го порядка будем называть величины

$$f:\ f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad f \text{ — это разность}$$

Определение 3:

Разделёнными разностями 2-го порядка для f будем называть величины

$$f:\ f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-2}$$

Определение 4:

Разделёнными разностями l-го порядка для f называются величины

$$f:\ f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+l}) = \frac{f(x_{k+1}; \dots; x_{k+l}) - f(x_k; \dots; x_{k+l-1})}{x_{k+l} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-l}$$

Пусть точка x такая, что интерполируемая f сама является многочленом n. В этом случае интерполируемая функция и её интерполируемый многочлен совпадают (в силу единственности последнего).

Рассморим разделённую разность в точке $(x; x_0)$:

$$f(x; x_0) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{?} = f(x_0) + f(\underbrace{\underline{\underline{x}}; x_0}_{?})(x - x_0) \tag{1}$$

неявное ур-ие

Рассмотрим разделённую разность в точке $(x; x_1)$:

$$f(x; x_0; x_1) = \frac{f(x_0; x_1) - f(x; x_1)}{x_1 - x} \Rightarrow f(x; x_0) = f(x_0; x_1) + f(x; x_0; x_1)(x - x_1) \tag{2}$$

Подставим 2 в 1:

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f(x_0; x_1)}^{\text{известны}} (x - x_0) + f\underbrace{(x; x_0; x_1)}_{?}(x - x_0)(x - x_1) \tag{3}$$

неявность уравнения сохранилась

Рассмотрим:

$$f(x; x_0; x_1; x_2) = \dots \Rightarrow f(x; x_0; x_1) = \ dots$$

Осуществляя аналогичные действия, за конечное число шагов мы исчерпаем все узлы интерполяции и получим следующее неявное уравнение:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \dots$$
$$+ f(x_0;x_1;\dots;x_n)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) + f(\underline{x};x_0;\dots;x_n)(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

всё равно неявное уравнение

(4)

Отступление:

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + \dots$$
$$P_n(x) \equiv Q_m(x) \iff \begin{cases} n = m \\ a_k = b_k, \quad \forall k \end{cases}$$

С учётом сделанного предположения, в левой части 4 стоит алгебраический многочлен, в правой части сумма многочленов $0, n+1$. Тогда равенство 4 $\forall x$ возможно (считаем x независимым аргументом) только, если $f(x;x_0;\dots;x_n) \equiv 0$. В противном случае равенство 4 $\forall x$ выполняться не будет.

Следовательно равенство 4 можно записать в виде:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \dots + f(x_0;x_1;\dots;x \tag{5}$$

Таким образом, предположив, что $f(x)$ является многочленом степени nбазисы, мы получим его явную формулу 5.

Теперь откажемся от предположения и будем считать, что $f(x)$ производящая интерполяционная функция. Тогда рассмотрим отдельно алгебраический многочлен, формулу которого мы читаем в правой части 5. А имеено многочлены вида:

$$N_n(x) = f(x) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \dots + f(x_0;x_1;\dots; \tag{6}$$

Непосредственной подстановкой убедимся, что 6 удовлетворяет ГУИ:

$$N_n(x_0) = f(x_0) + \ldots + 0 = f(x_0)$$

$$N_n(x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + 0 + \ldots + 0 = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$N_n(x_n) = \ldots = f(x_n)$$

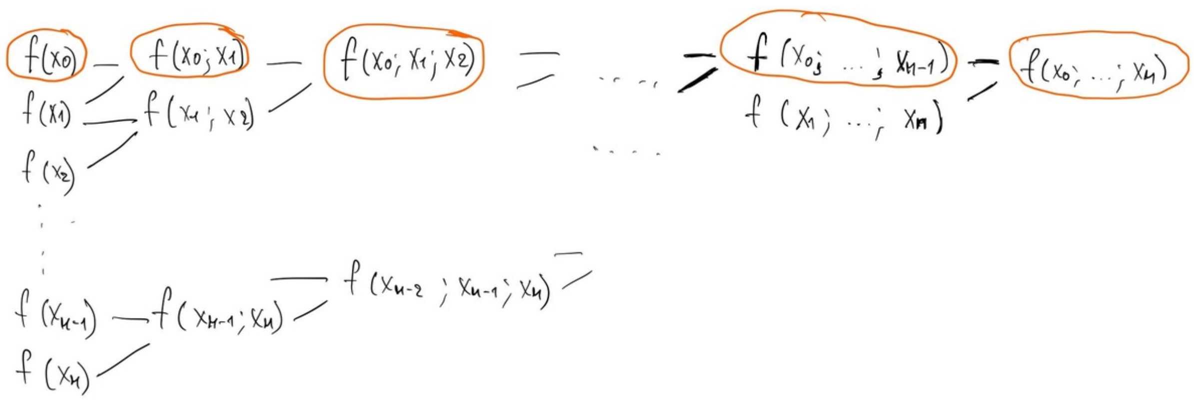
То есть многочлен вида 6 действительно удовлетворяет ГУИ.

Определение:

N будем называть интерполяционным многочленом в форме Ньютона.

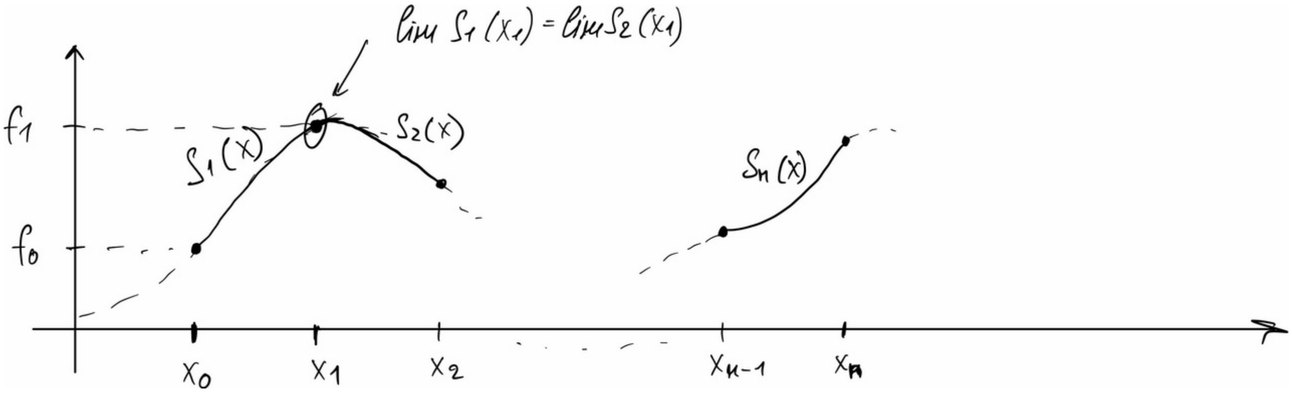
Замечание:

Чтобы воспользоатться 6 необходимо предварительно вычислить входящие в неё коэффициенты. С этой целью целесообразно вычислить таблицу имеющую следующий вид:



1.4 Интерполяция кубическими сплайнами (вывод: построение вспомогательной СЛАУ)

В данном параграфе рассмотрим ещё один способ основанный на построении кусочно-непрерывной склейки кубической степени, которые будем называть кубическими сплайнами. (Сплайн — отрезок или частица).



То есть на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}) \quad i = \overline{1, n}$ определим кубический сплайн вида:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \tag{1}$$

Таким образом, чтобы построить (указать) желаемую “кусочно-непрерывную” склейку кубических сплайнов вида 1 необходимо определить $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, то есть $4n$ неизвестных коэффициентов.

Потребуем, чтобы кусочно-непрерывная склейка кубических сплайнов вида 1 удовлетворяла ГУИ.

То есть

$$\begin{cases} S_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, & i = \overline{1,n} \quad ① \\ S_i(x_i) = f_i, & i = \overline{1,n} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_i = f_{i-1}, & i = \overline{1,n} \quad ② \\ a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = f_i, & i = \overline{1,n} \quad ③ \end{cases}$$

$$h = x_i - x_{i-1}; \; i = \overline{1,n} \quad (\text{узлы равноудалены}) \tag{2-3}$$

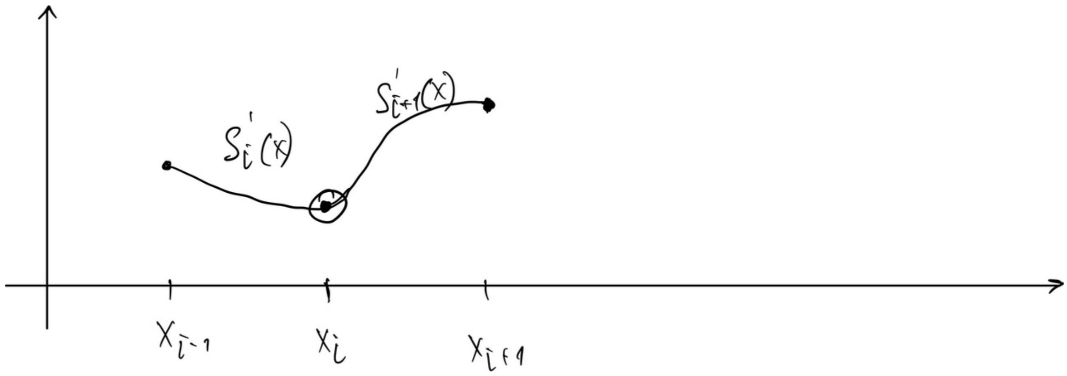
Равенства 2-3 по своей алгебраической припроде являются ЛАУ, представленными в количестве $n + n = 2n$ уравнений, что в два раза меньше, чем количество искомых неизвестных коэффициентов кубических сплайнов.

Недостающие уравнения попытаемся постоить **дополнительно потребовав** непрерывности склейки не только самих сплайнов, но и непрерывности склейки их первых и вторых производных.

Предварительно вычислим производные соседних сплайнов:

$[x_{i-1}, x_i)$	$[x_i, x_{i+1})$
$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$ $S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$ $S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$	$S_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1}(x - x_i) + c_{i+1}(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ $S_{i+1}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$ $S_{i+1}''(x) = 2c_{i+1} + 6d_i(x - x_i)$

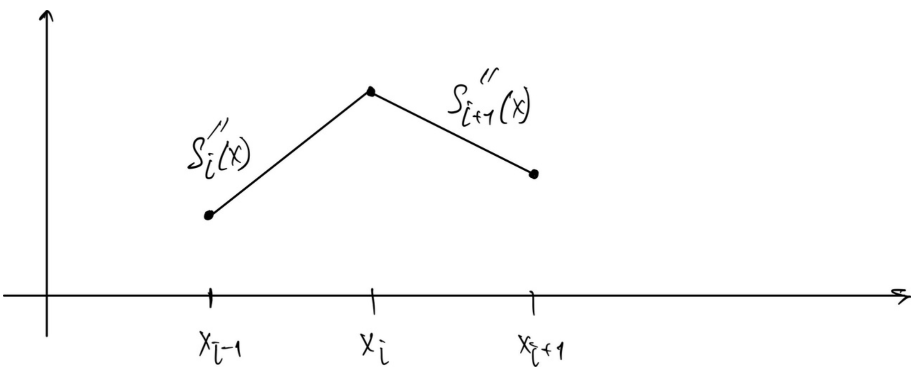
Потребуем непрерывности склейки первых производных:



То есть:

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \tag{4}$$

Теперь потребуем непрерывности вторых производных:



То есть:

$$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \tag{5}$$

То есть:

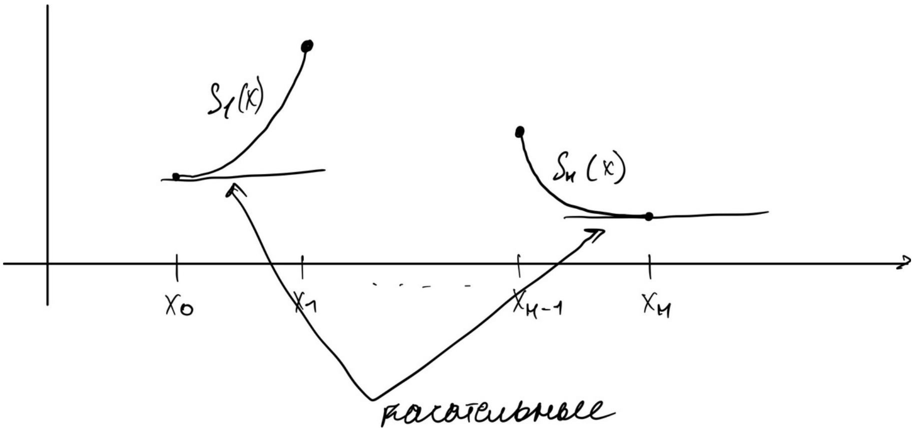
$$\begin{cases} \lim_{x \to x_i + 0} S_i'(x_i) = \lim_{x \to x_i - 0} S_{i+1}'(x_i) \\ \lim_{x \to x_i + 0} S_i''(x_i) = \lim_{x \to x_i - 0} S_{i+1}''(x_i) \end{cases} \tag{4-5}$$

Полученные равенства 4-5 с учётом выражений производных из таблицы:

$$\begin{cases} b_i + 2C_i h + 3d_i h^2 = b_{i+1} + 0 + 0, \quad i = \overline{1, n-1} \\ 2C_i + 6d_i h = 2C_{i+1} + 0, \quad i = \overline{1, n-1} \end{cases} \tag{6-7}$$

Таким образом, уравнения 6-7 вместе с уравнениями 2-3 дают $2n + (n-1) + (n-1) = 4n - 2$ уравнений.

Недостающие два уравнения получим из условия нулевой кривизны в точках x_0 и x_n соответственно.



$$\begin{cases} S_1''(x_0) = 0 \\ S_n''(x_0) = 0 \end{cases} \tag{8-9}$$

Используя третью строку из таблицы, перепишем 8-9:

$$\begin{cases} 2C_1 = 0 \\ 2C_n + 6d_n h = 0 \end{cases} \tag{10-11}$$

Таким образом, мы получим СЛАУ 2-3, 6-7, 10-11 размерности $4n * 4n$, решив которую мы найдём коэффициенты искомых сплайнов. Соответственно подставив их в 1 мы получим явное уравнение для искомой интерполянты.

2 Глава 2

2.1 Метод Гаусса решения СЛАУ (прямой и обратных ход ПВГЭ)

Рассмотрим СЛАУ следующего вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\equiv Ax = b, \text{ где } A_{n\times n} = (a_{ij}) \quad i,j=\overline{1,n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\qquad \boxed{A, b \to x = ?}
\tag{1}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
\underbrace{a_{n1}}_{x_1} & \underbrace{a_{n2}}_{x_2} & \ldots & \underbrace{a_{nn}}_{x_n} & b_n
\end{array}\right)
= (A|b) - \text{Расширенная } \overset{\text{Р.М.К.}}{\text{матрица}} \text{ коэффициентов СЛАУ } (1)
\tag{2}
$$

Метод Гаусса решения СЛАУ 1 условно разделяют на два последовательных этапа: прямой и обратных ход.

Подробно остановимся на каждом из них.

Прямой ход метода Гаусса:

Сутью прямого хода метода Гаусса является диагонализация системы уравнений вида 1, в результате диагонализации структура уравнений преобразуется эквивалентным образом к такому виду, что одно уравнение содержит n неизвестных; ещё одно $n-1$ неизвестную величину; слеующее — $n-2$; и так далее; пока не будет получено последнее уравнение с одной известной величиной.

Подробно осуществим диагонализацию на РМК системы 1:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\ldots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{\text{1 стр.} \times \frac{1}{a_{11}},\ a_{11}\neq 0 \ \text{(нормировка)} \\ \text{2 стр} - \text{1 стр} \times a_{21} \\ \text{3 стр} - \text{1 стр} \times a_{31} \\ \ldots \\ n \text{ стр} - \text{1 стр} \times a_{n1}}]{\text{эквивалентное преобразование}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\
0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \text{1 раз изменён} \\ \text{2 стр} \times \frac{1}{a_{22}^{(1)}},\ a_{22}^{(1)} \neq 0 \\ \sim \\ \text{3 стр} - \text{2 стр} \times a_{32}^{(1)} \\ \ldots \\ n \text{ стр} - \text{2 стр} \times a_{n2}^{(1)} \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & 1 & a_{23}^{(2)} \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\ldots & & & & \\
0 & 0 & a_{n3}^{(2)} \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{array}\right)_2
$$

$\sim \ldots$ Продолжая аналогичные действия за конечное число шагов преобразуем РМК к виду:

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \dots & a_{1\,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & & b_1^{(1)} \\
0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \dots & a_{2\,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} & \dots & a_{3\,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & & b_3^{(3)} \\
0 & 0 & \dots & \ddots & & & & & \\
\dots & & & & \ddots & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1\,n}^{(n-1)} & & b_{n-1}^{(n-1)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & b_n^{(n)}
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & x_{n-1} & x_n & \phantom{b_n^{(n)}}
\end{array}
\end{array}
\qquad (2)
$$

После того, как РМК преобразовано к виду 2 прямой ход считается завершнённым и появляется возможность обратного хода.

Обратный ход:

n-ой строки 2:

$$0 * x_1 + \dots + 1 * x_n = b_n^{(n)} \Rightarrow x_n = b^{(n)}$$

$(n-1)$-ая строка:

$$0 * x_1 + \dots + 1 * x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \Rightarrow x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n$$

и так далее.

Таким образом, в ходе обратного хода будут вычислены все неизвестные и получен вектор x.

ПВГЭ (процедура выбора главного элемента):

В рассмотриваемой выше базовой версии метода Гаусса (в прямом ходе) мы предполагали, что $a_{11} \neq 0, \dots a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$.

Однако в реальности это ничем не обеспечено. Поэтому, чтобы продолжать прямой ход при появлении нуля на главной диагонали выполняют следующие действия:

$$\begin{array}{l} \\ k\text{ стр} \\ m\text{ стр} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \dots \\ & & & a_{mk}^{(k-1)} & \\ & & & 0 & \end{pmatrix} \qquad a_{kk}^{(k-1)} = 0 \ \left(\text{элемент для машины } a_{kk} \approx 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\right)$$

меняем 2 строки

k столб → максимально удалённое от 0 по модулю. Далее продолжаем прям ход.

Если повезло и диаг. ход выполнен и об-ый ход всегда выполним.

Предполож., что в m-ой строке нашёлся ГНЭ => меняем k-ю и m-ую строки, после чего продолж. прям ход.

2.2 Приложение метода Гаусса к задачам линейной алгебры (определитель, обратная матрица)

2.2.1 Определитель

Нахождение определителя матрицы размерностью 2×2:

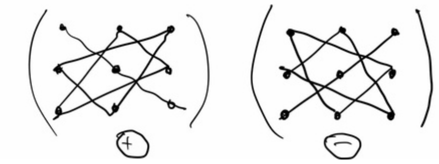
$$Ax = b \qquad 2 \times 2$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta_{2\times 2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2 слагаемых, по 2 множ., (± 1)

Нахождение определителя матрицы размерностью 3×3:

$$A_{3\times3} \qquad \Delta_{3\times3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{21}a_{32}a_{23}.$$



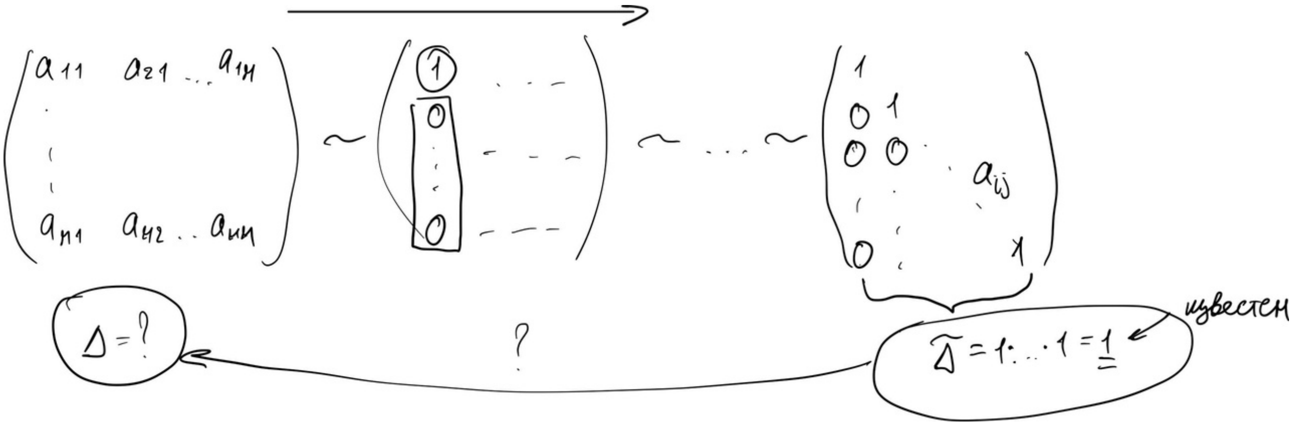
6 слагаемых, по 3 мн., (-1)

Нахождение определителя матрицы размерностью $n \times n$:

$$A_{n\times n} \quad \Delta_{n\times n} = \dots, \quad n! \text{ слагаемых по } n \text{ множителям, (-1)}$$

Поскольку нахождение определителя k-ой матицы $A_{n\times n}$ с увеличивающейся размерностью n по классической формуле определителя сопряжено с колоссальным ростом количества требующихся арифметических операций, то имеет смысл рассмотрения альтернативного способа указанного определителя.

Так нахождение указанного определителя может быть реализовано посредством отслеживания соответствующих определителей преобразуемых матриц во время процедуры диагонализации матрицы $A_{n\times n}$, заимствованной из ранее рассмотренного прямого хода метода Гаусса (только теперь применимый для $A_{n\times n}$).



Над исходной матрицей применяются следующие эквивалентные преобразования:

1. строка $\times \frac{1}{a_{kk}^{k-1}}$;

2. строка $\rightarrow$ нормированная строка $\times a^{(\cdot)_{\cdot\cdot}}$;

3. перестановка строк или столбцов.

В результате данных действий над преобразованием матрицы определитель последней матрицы поменяет своё значение по отношению к Δ предыдущей матрицы следующим образом:

1. $\Delta^{(k-1)} * a^{(k-1)_{kk}} = \Delta^(k) \quad \forall k$;

2. $\Delta^{(k-1)} - \Delta^{(k)} \quad \forall k$;

3. $\Delta^{(k-1)} = -\Delta^{(k)} \quad \forall k$.

Таким образом, в результате процедуры диагонализации определитель исходной и определитель итоговой матрицы будут связаны следующим отношением:

$$\Delta = (-1)^v a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}, \quad v \text{ — количество процедур выбора главного элемента} \tag{1}$$

Замечание:

Для того, чтобы воспользоваться явной формулой 1 нужно реализовать процедуру диагонализации $A_{n\times n}$ в полном объёме.

2.2.2 Обратная матрица

Классическая формула обратной матрицы $A_{n\times n}$:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta_A \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

алгебра-ое доп-ие a_{ij}

минор a_{ij}

M_{ij} = определитель матрицы, получаемый из $A_{n\times n}$ вычёркиванием из опред-ля i-й строки и j-го столбца

Таким образом, чтобы воспользоваться классической формулой нужно посчитать один определитель n-го порядка и n^2 определителей $(n-1)$-го порядка.

Таким образром, вычисление обратной матрицы по классической формуле также сопряжено с колоссальным ростом сложности.

По этой причине рассмотрим альтернативный способ.

Вспомним, что матрица A^{-1} обратная A определяется следующим образом:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E \tag{2}$$

Тогда

$$A * A^{-1} = E_{n\times n}, \quad \text{где } A \text{ и } E \text{ известны}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}}_{\text{извест.}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(-1)} & a_{12}^{(-1)} & \dots & a_{1n}^{(-1)} \\ \vdots & - & - & - \\ & & - & \\ a_{n1}^{(-1)} & a_{n2}^{(-1)} & \dots & a_{nn}^{(-1)} \end{pmatrix}_{n\times n}}_{?} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{3}$$

используя определение операции матричного умножения в матричном уравнение 3 можем переписать данное уравнение в виде системы следующих матричных уравнений

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{\text{известно}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1k}^{(-1)} \\ a_{2k}^{(-1)} \\ \vdots \\ a_{nk}^{(-1)}\end{pmatrix}}_{\substack{k\text{-ый столбец} \\ \text{из } A^{-1} \\ ?\ \text{неизв}}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}}_{\text{известно}} \text{в } k\text{-ой стр.}, \quad \boxed{k=\overline{1,n}} \tag{4}$$

Таким образом, векторное уравнение 4 представляет собой СЛАУ, решив которую из которых, например методом Гаусса, мы сможем найти по столбцам исходную обратную матрицу