Содержание

1 Глава 1

1.1 Интерполяционный многочлен в общем виде (постановка задачи, вывод, замечания)

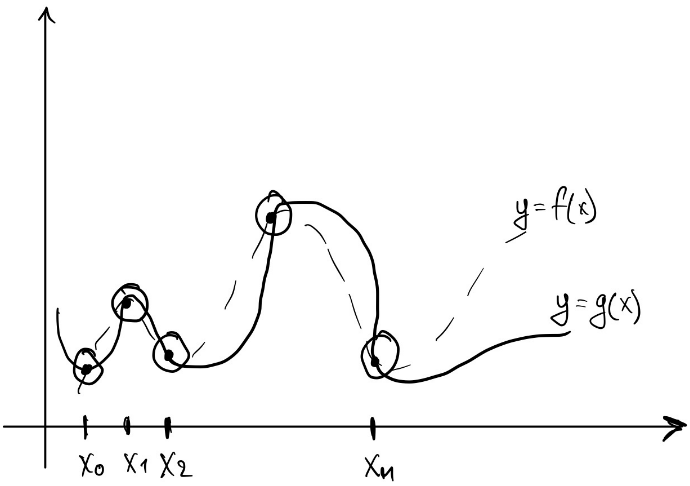
1.1.1 Постановка задачи

Пусть задана некоторая функция f дискретным набором своих значений:

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
f_0	f_1	$\ldots$	f_n

Требуется построить (указать) некоторую определённую и непрерывную функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$g(x_k) = f_k, \quad \forall k = \overline{0, n} \tag{1}$$



Замечание:

Очевидно, что задача интерполяции в указанной выше формулировке имеет бесконечно много решений.

Определение 1:

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ будем называть узлами интерполяции (приближения).

Определение 2:

Функцию f будем называть интерполируемой (приближаемой) функцией.

Определение 3:

Функцию $g(x)$ будем называть интерполирующей (интерполяционной, приближающей) функцией или интерполянтой.

Определение 4:

Выполнение равенств 1 будем называть главным условием интерполяции (ГУИ).

1.1.2 Вывод

В данном параграфе покажем, что алгебраический многочлен степени n в случае попарной различности узлов интерполяции может быть взят в качестве искомой интерполянты в задаче интерполяции, такой многочлен будет задан единственным образом.

Другими словами, потребуем, чтобы алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

удовлетворял ГУИ, а именно, чтобы имели место следующие равенства:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f_0 \\ P_n(x_1) = f_1 \\ \dots \\ P_n(x_n) = f_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases} \tag{3}$$

По своей алгебраической природе равенства 3 предсавляют собой систему алгебраических линейных уравнений $(n+1)x(n+1)$ относительно неизвестных $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$.

В этой связи, чтобы СЛАУ 3 имело единственное решение, необходимо, чтобы его главный определитель был отличен от 0.

$$\Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Причём должно выполняться условие попарного различия узлов интерполяции.

$$x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \tag{4}$$

Из вышеописанного следует, что, если выполняется условие 4, то $\Delta_{(3)} \neq 0$ и СЛАУ 3 будет иметь единственное решение.

Таким образом, решив СЛАУ 3 любым подходящим численным методом, мы узнаем $a_0, \ldots, a_n$.

Подставив найденные коэффициенты в 2 мы получим явную формулу искомой интерполянты.

1.2 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вывод, комментарии)

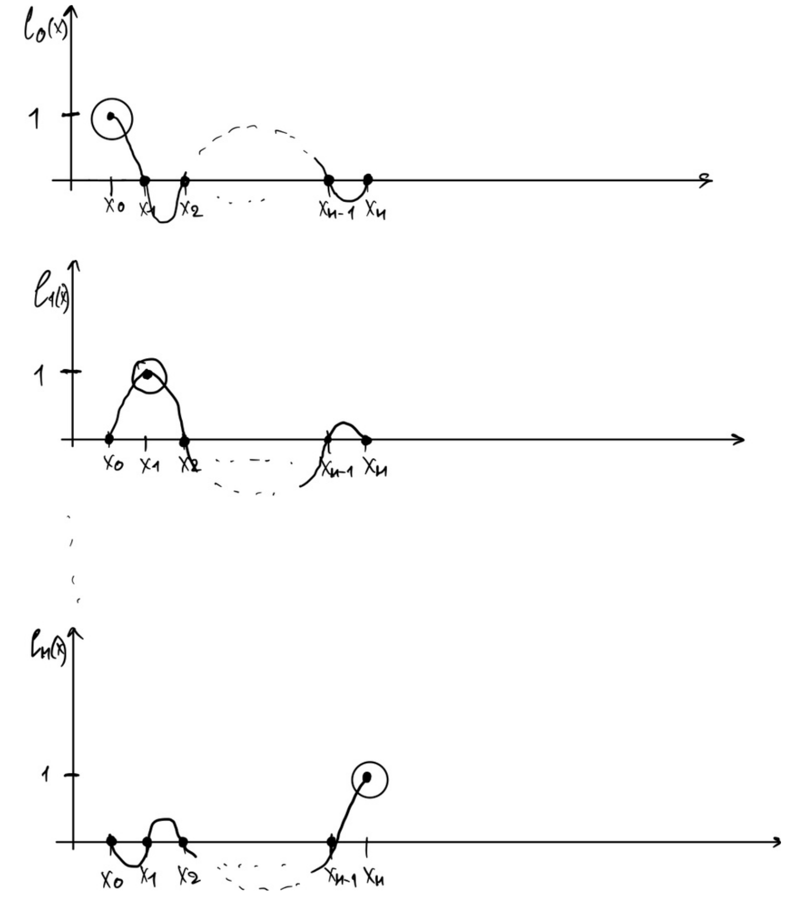
В этом параграфе рассмотрим ещё один альтернативный способ построения указанного интерполяционного многочлена, не сводящее решение задачи интерполяции к решению вспомогательной СЛАУ.

Рассмотрим следующие фундаментальные многочлены Лагранжа (базисы)

$$l_k(x) \ : \ l_k(x_j) = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases} \quad k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n} \tag{1}$$

Так же рассмотрим следующую линейную комбинацию введённых фундаменальных многочленов Лагранжа (ФМЛ):
разумно рассматривать

$$\sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x) = L_n(x), \quad \text{где } f_k \text{ какие-то коэффициенты} \tag{2}$$



Убедимся в том, что линейная комбинация ФМЛ 2 действиетльно будет удовлетворять условию интерполяции. С этой целью осуществим в 2 подстановку

$$x = x_j,\ j=\overline{0,n}: \quad L_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, l_k(x_j) = f_0 \underbrace{l_0(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} + f_1 \underbrace{l_1(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} + \ldots + f_j \underbrace{l_j(x_j)}_{\overset{(1)}{=}1} + \ldots + f_n \underbrace{l_n(x_j)}_{\overset{(1)}{=}0} = f_j \quad \forall j = \overline{0,n}$$

Таким образом, линейная комбинация ФМЛ 2 действительно удовлетворяет ГУИ.

Тем не менее представление 2 не позволяет пока узнавать значение искомой интерполянты в неузловых точках ввиду того, что определение 1 имеет узловой характер.

Воспользуемся “основной теоремой алгебры”, позволяющей по известным нулям многочлена восстанавливать его общий вид. Применим данную теорему к ФМЛ, имеющего, согласно определению 1, нулями все узлы интерполяции за исключением одного с номером, равным номеру выбранного многочлена.

$$\underset{k=\overline{0,n}}{l_k(x)} = C_k (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) \tag{3}$$

Замечание:

Любой многочлен $a_n x^n + \dots + a_0$ можно разложить в поле комплексных чисел в $(x_1 - x_1)\dots(x - x_n)$. (основная теорема алгебры)

Определим коэффициенты C_k у каждого ФМЛ определённого по формуле 3, используя условия нормировки каждого такого члена в узле, а именно:

$$\underset{\substack{\parallel\\ 1}}{l_k(x_k)}\underset{k=\overline{0,n}}{} = \underset{?}{C_k}(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{k=\overline{0,n}}{C_k} = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \tag{4}$$

Осуществив последоваельно подстановку 4 в 3 и 3 в 2 получим аналогичную формулу искомого интерполяционного многочлена

$$\underset{\substack{|||\\ P_n(x)}}{L_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \tag{5}$$

Определение:

Интерполяционный многочлен, задаваемый 5, будем называть интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.

1.3 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона (вывод, комментарии)

В данном параграфе рассмотрим ещё один способ построения интерполяционного многочлена, отличающегося тем, что итоговая явная формула многочлена позволяет экономить в случае добавления или удаления узла интерполяции.

Отступление:

?

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} P_2(x_0) = A \\ P_2'(x_0) = B \\ P_2''(x_0) = C \end{cases}$$

известны

разрешима единственным образом

\+ позволяет вычислить a, b и c

Определение 1:

Разделёнными раззностями 0-го порядка для $f(x)$ будем называть сами её значения

$$f(x_0), \cdots f(x_n)$$

Определение 2:

Разделёнными разностями 1-го порядка будем называть величины

$$f:\ f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad f \text{ — это разность}$$

Определение 3:

Разделёнными разностями 2-го порядка для f будем называть величины

$$f:\ f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = \overline{0, n-2}$$

Определение 4:

Разделёнными разностями l-го порядка для f называются величины

$$f:\ f(x_k;x_{k+1};\dots;x_{k+l}) = \frac{f(x_{k+1};\dots;x_{k+l}) - f(x_k;\dots;x_{k+l-1})}{x_{k+l}-x_k}, \quad k=\overline{0,n-l}$$

Пусть точка x такая, что интерполируемая f сама является многочленом n. В этом случае интерполируемая функция и её интерполируемый многочлен совпадают (в силу единственности последнего).

Рассморим разделённую разность в точке $(x;x_0)$:

$$f(x;x_0) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0} \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{?} = f(x_0) + \underbrace{f(\underline{\underline{x}};x_0)}_{?}(x-x_0) \tag{1}$$

неявное ур-ие

Рассмотрим разделённую разность в точке $(x;x_1)$:

$$f(x;x_0;x_1) = \frac{f(x_0;x_1)-f(x;x_1)}{x_1-x} \to f(x;x_0) = f(x_0;x_1) + f(x;x_0;x_1)(x-x_1) \tag{2}$$

Подставим 2 в 1:

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f(x_0;x_1)}^{\text{известны}}(x-x_0) + \underbrace{f(x;x_0;x_1)}_{?}(x-x_0)(x-x_1) \tag{3}$$

неявность уравнения сохранилась

Рассмотрим:

$$f(x;x_0;x_1;x_2) = \dots \to f(x;x_0;x_1) = \ dots$$

Осуществляя аналогичные действия, за конечное число шагов мы исчерпаем все узлы интерполяции и получим следующее неявное уравнение:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \dots$$
$$+ f(x_0;x_1;\dots;x_n)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) + f(\underline{x};x_0;\dots;x_n)(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

всё равно неявное уравнение

(4)

Отступление:

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + \dots$$
$$P_n(x) \equiv Q_m(x) \iff \begin{cases} n = m \\ a_k = b_k, \quad \forall k \end{cases}$$

С учётом сделанного предположения, в левой части 4 стоит алгебраический многочлен, в правой части сумма многочленов $0, n+1$. Тогда равенство 4 $\forall x$ возможно (считаем x независимым аргументом) только, если $f(x;x_0;\dots;x_n) \equiv 0$. В противном случае равенство 4 $\forall x$ выполняться не будет.

Следовательно равенство 4 можно записать в виде:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \dots + f(x_0;x_1;\dots;x \tag{5}$$

Таким образом, предположив, что $f(x)$ является многочленом степени nбазисы, мы получим его явную формулу 5.

Теперь откажемся от предположения и будем считать, что $f(x)$ производящая интерполяционная функция. Тогда рассмотрим отдельно алгебраический многочлен, формулу которого мы читаем в правой части 5. А имеено многочлены вида:

$$N_n(x) = f(x) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \dots + f(x_0;x_1;\dots; \tag{6}$$

Непосредственной подстановкой убедимся, что 6 удовлетворяет ГУИ:

$$N_n(x_0) = f(x_0) + \ldots + 0 = f(x_0)$$

$$N_n(x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + 0 + \ldots + 0 = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$N_n(x_n) = \ldots = f(x_n)$$

То есть многочлен вида 6 действительно удовлетворяет ГУИ.

Определение:

N будем называть интерполяционным многочленом в форме Ньютона.

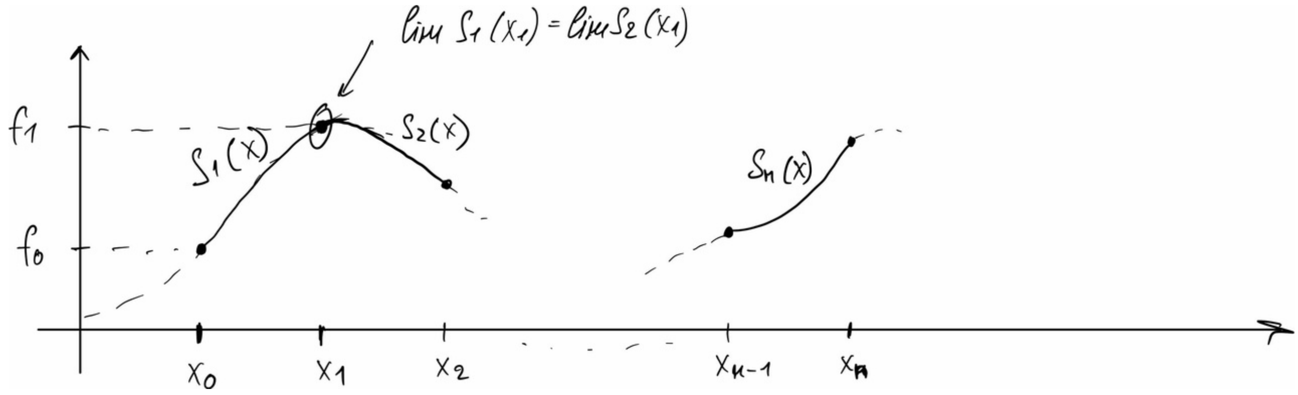
Замечание:

Чтобы воспользоатться 6 необходимо предварительно вычислить входящие в неё коэффициенты. С этой целью целесообразно вычислить таблицу имеющую следующий вид:

$$\begin{array}{llllll}
f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \ldots & f(x_0;\ldots;x_{n-1}) & f(x_0;\ldots;x_n) \\
f(x_1) & f(x_1;x_2) & & \ldots & f(x_1;\ldots;x_n) & \\
f(x_2) & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
 & & f(x_{n-2};x_{n-1};x_n) & & & \\
f(x_{n-1}) & f(x_{n-1};x_n) & & & & \\
f(x_n) & & & & &
\end{array}$$

1.4 Интерполяция кубическими сплайнами (вывод: построение вспомогательной СЛАУ)

В данном параграфе рассмотрим ещё один способ основанный на построении кусочно-непрерывной склейки кубической степени, которые будем называть кубическими сплайнами. (Сплайн — отрезок или частица).



То есть на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}) \quad i = \overline{1,n}$ определим кубический сплайн вида:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \tag{1}$$

Таким образом, чтобы построить (указать) желаемую “кусочно-непрерывную” склейку кубических сплайнов вида 1 необходимо определить $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, то есть $4n$ неизвестных коэффициентов.

Потребуем, чтобы кусочно-непрерывная склейка кубических сплайнов вида 1 удовлетворяла ГУИ.

То есть

$$\begin{cases} S_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, & i = \overline{1,n} \\ S_i(x_i) = f_i, & i = \overline{1,n} \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_i = f_{i-1}, & i = \overline{1,n} \quad (2) \\ a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = f_i, & i = \overline{1,n} \quad (3) \end{cases}$$

$$h = x_i - x_{i-1}; \; i = \overline{1,n} \quad \text{(узлы равноудалены)} \tag{2-3}$$

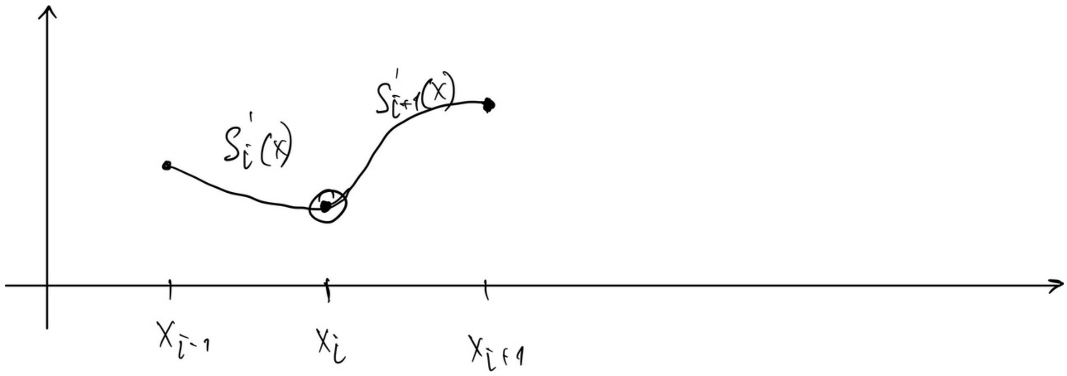
Равенства 2-3 по своей алгебраической припроде являются ЛАУ, представленными в количестве $n + n = 2n$ уравнений, что в два раза меньше, чем количество искомых неизвестных коэффициентов кубических сплайнов.

Недостающие уравнения попытаемся постоить **дополнительно потребовав** непрерывности склейки не только самих сплайнов, но и непрерывности склейки их первых и вторых производных.

Предварительно вычислим производные соседних сплайнов:

$[x_{i-1}, x_i)$	$[x_i, x_{i+1})$
$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_{i-1})^3$ $S_i'(x) = b_i + 2c_i(x-x_{i-1}) + 3d_i(x-x_{i-1})^2$ $S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x-x_{i-1})$	$S_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1}(x-x_i) + c_{i+1}(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$ $S_{i+1}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x-x_i) + 3d_i(x-x_i)^2$ $S_{i+1}''(x) = 2c_{i+1} + 6d_i(x-x_i)$

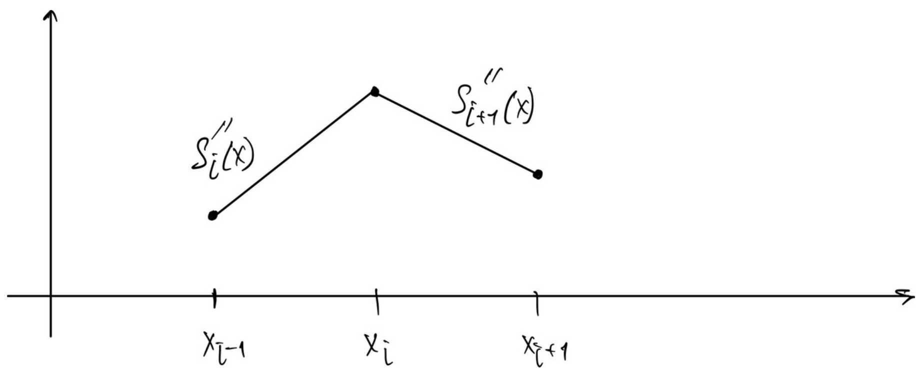
Потребуем непрерывности склейки первых производных:



То есть:

$$S_i^{'}(x_i) = S_{i+1}^{'}(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \tag{4}$$

Теперь потребуем непрерывности вторых производных:



То есть:

$$S_i^{''}(x_i) = S_{i+1}^{''}(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \tag{5}$$

То есть:

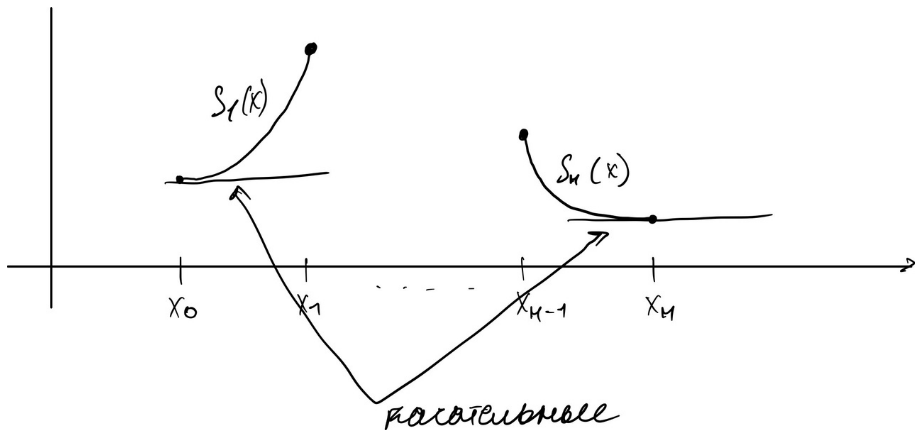
$$\begin{cases} \lim_{x \to x_i+0} S_i^{'}(x_i) = \lim_{x \to x_i-0} S_{i+1}^{'}(x_i) \\ \lim_{x \to x_i+0} S_i^{''}(x_i) = \lim_{x \to x_i-0} S_{i+1}^{''}(x_i) \end{cases} \tag{4-5}$$

Полученные равенства 4-5 с учётом выражений производных из таблицы:

$$\begin{cases} b_i + 2C_i h + 3d_i h^2 = b_{i+1} + 0 + 0, \quad i = \overline{1, n-1} \\ 2C_i + 6d_i h = 2C_{i+1} + 0, \quad i = \overline{1, n-1} \end{cases} \tag{6-7}$$

Таким образом, уравнения **??** вместе с уравнениями 2-3 дают $2n + (n-1) + (n-1) = 4n - 2$ уравнений.

Недостающие два уравнения получим из условия нулевой кривизны в точках x_0 и x_n соответственно.



$$\begin{cases} S_1''(x_0) = 0 \\ S_n''(x_0) = 0 \end{cases} \tag{8-9}$$

Используя третью строку из таблицы, перепишем **??**:

$$\begin{cases} 2C_1 = 0 \\ 2C_n + 6d_n h = 0 \end{cases} \tag{10-11}$$

Таким образом, мы получим СЛАУ 2-3, **??**, **??** размерности $4n*4n$, решив которую мы найдём коэффициенты искомых сплайнов. Соответственно подставив их в 1 мы получим явное уравнение для искомой интерполянты.

2 Глава 2

2.1 Метод Гаусса решения СЛАУ (прямой и обратных ход ПВГЭ)

Рассмотрим СЛАУ следующего вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\equiv Ax = b, \text{ где } \underset{n\times n}{A} = (a_{ij}) \; i,j = \overline{1,n}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\quad \boxed{A, b \to x = ?} \tag{1}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vline & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \vline & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vline & \vdots \\
\underbrace{a_{n1}}_{x_1} & \underbrace{a_{n2}}_{x_2} & \ldots & \underbrace{a_{nn}}_{x_n} & \vline & b_n
\end{pmatrix}
= (A|b) - \text{Расширенная } \overset{\text{Р.М.К.}}{\text{матрица коэффициентов}} \text{ СЛАУ } 1 \tag{2}
$$

Метод Гаусса решения СЛАУ 1 условно разделяют на два последовательных этапа: прямой и обратных ход.

Подробно остановимся на каждом из них.

Прямой ход метода Гаусса:

Сутью прямого хода метода Гаусса является диагонализация системы уравнений вида 1, в результате диагонализации структура уравнений преобразуется эквивалентным образом к такому виду, что одно уравнение содержит n неизвестных; ещё одно $n-1$ неизвестную величину; слеующее — $n-2$; и так далее; пока не будет получено последнее уравнение с одной известной величиной.

Подробно осуществим диагонализацию на РМК системы 1:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vline & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \vline & b_2 \\
\ldots & & & & \vline & \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & \vline & b_n
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\text{эквивалентное преобразование} \\
1 \text{ стр.} \times \frac{1}{a_{11}}, \; a_{11} \neq 0 \quad \text{нормировка} \\
2 \text{ стр} - 1 \text{ стр} \times a_{21} \\
3 \text{ стр} - 1 \text{ стр} \times a_{31} \\
\ldots \\
n \text{ стр} - 1 \text{ стр} \times a_{n1}
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & \vline & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & \vline & b_2^{(1)} \\
0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & \vline & b_3^{(1)} \\
\vdots & & & & & \vline & \\
0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & \vline & b_n^{(1)}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\text{1 раз изменен} \\
2 \text{ стр} \times \frac{1}{a_{22}^{(1)}}, \; a_{22}^{(1)} \neq 0 \\
\sim \\
3 \text{ стр} - 2 \text{ стр} \times a_{32}^{(1)} \\
\ldots \\
n \text{ стр} - 2 \text{ стр} \times a_{n2}^{(1)}
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & \vline & b_1^{(1)} \\
0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & \vline & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & \vline & b_3^{(2)} \\
\ldots & & & & & \vline & \\
0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & \vline & b_n^{(2)}
\end{pmatrix}_2
$$

$\sim \ldots$ Продолжая аналогичные действия за конечное число шагов преобразуем РМК к виду:

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \ldots & a_{1\,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & & b_1^{(1)} \\
0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \ldots & a_{2\,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} & \ldots & a_{3\,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & & b_3^{(3)} \\
0 & 0 & \ldots & \ddots & & & & & \\
\ldots & & & & \ddots & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1\,n}^{(n-1)} & & b_{n-1}^{(n-1)} \\
\underbrace{0}_{x_1} & \underbrace{0}_{x_2} & \underbrace{0}_{x_3} & \underbrace{0}_{x_4} & \ldots & \underbrace{0}_{x_{n-1}} & \underbrace{1}_{x_n} & & b_n^{(n)}
\end{array}\right) \tag{2}
$$

После того, как РМК преобразовано к виду 2 прямой ход считается завершнённым и появляется возможность обратного хода.

Обратный ход:

n-ой строки 2:

$$0 * x_1 + \cdots + 1 * x_n = b_n^{(n)} \to x_n = b^{(n)}$$

$(n-1)$-ая строка:

$$0 * x_1 + \cdots + 1 * x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \to x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n$$

и так далее.

Таким образом, в ходе обратного хода будут вычислены все неизвестные и получен вектор x.

ПВГЭ (процедура выбора главного элемента):

В рассмотриваемой выше базовой версии метода Гаусса (в прямом ходе) мы предполагали, что $a_{11} \neq 0, \ldots a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$.

Однако в реальности это ничем не обеспечено. Поэтому, чтобы продолжать прямой ход при появлении нуля на главной диагонали выполняют следующие действия:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ k\ \text{стр} \\ m\ \text{стр} \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & \dots \\ & & & a_{mk}^{(k-1)} & & \\ & & & 0 & & \end{pmatrix}
\qquad a_{kk}^{(k-1)} = 0 \ (\text{элемент для машины } a_{kk} \approx 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

k столб

меняем 2 строки

максимально удалённое от 0 по модулю. Далее продолжаем прям ход.

Если повезло и диаг. ход выполнен и об-ый ход всегда выполним.

Предполож., что в m-ой строке нашёлся ГМЭ $\Rightarrow$ меняем k-ю и m-ую строки, после чего продолж. прям ход.