1 Несобственные интегралы Римана двух типов. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

1. Пусть функция f определена на промежутке $[a, +\infty)$ и
$\forall b \in [a, +\infty) \quad f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом первого рода и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Аналогично определяется интеграл

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

2. Пусть функция f определена на промежутке $[a, B)$, неограничена в окрестности точки B и $\forall b \in [a, B) \quad f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Предел

$$\lim_{b \to B-0} \int_a^b f(x)dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом второго рода и обозначают символом

$$\int_a^{B} f(x)dx$$

3. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла:
Несобственный интеграл $\int_a^w f(x)dx$ сходится $\iff$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B \in [a, w) \quad \forall b_1, b_2 \in (B, w) \qquad \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

Доказательство:
В силу определения несобственного интеграла его сходимость равносильна существованию предела функции $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to w, \quad b \in [a, w)$, а

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx = \int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx = F(b_2) - F(b_1).$$

Осталось записать условие критерия Коши существования предела функции F при $b \to w$.

2 Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов.

1. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^w f(x)dx$ абсолютно сходится, если сходится интеграл $\int_a^w |f(x)|dx$.

2. Пусть $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, w)$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x)dx$ сходится $\iff$ когда функция

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx, \quad b \in [a, w),$$

ограничена.

Доказательство:

Если $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, w)$, то функция $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ неубывает на $[a, w)$ и поэтому она имеет предел при $b \to w, \quad b \in [a, w)$, $\iff$ когда она ограничена.

3. Признак мажорации:

Если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, w)$ и интеграл $\int_a^w g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^w f(x)dx$ тоже сходится.

Доказательство:

Если интеграл $\int_a^w g(x)dx$ сходится, то функция

$$G(b) = \int_a^b g(x)dx, \quad b \in [a, w),$$

ограничена. Согласно свойству монотонности несобственного интеграла

$$0 \leqslant F(b) = \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx = G(b),$$

и, следовательно, функция F также ограничена. В силу предыдущей теоремы интеграл $\int_a^w f(x)dx$ сходится.

4. Пусть $\forall x \in [a, w) \quad f(x) \geqslant 0, \quad g(x) > 0$ и $\lim\limits_{x \to w} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A, \quad 0 < A < +\infty.$

Тогда интегралы $\int_a^w f(x)dx$ и $\int_a^w g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство:

Возьмём $\epsilon = A/2 > 0. \quad \exists c \in [a, w)$ такая что $\forall x \in [c, w)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < A/2,$$

то есть

$$\frac{A}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Ag(x), \quad x \in [c, w).$$

Остаётся воспользоваться признаком мажорации и свойством:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, w)$$

3 Признаки условной сходимости несобственных интегралов. Несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Утверждение: Если существует интеграл $\displaystyle\int_a^w g^{'}(x)F(x)dx = A$ и существует конечный предел $\lim\limits_{b\to w} g(b)F(b) = B$, то существует несобственный интеграл

$$\int_a^w f(x)g(x)dx = B - g(a)F(a) - A.$$

1. Признак Дирихле:

Пусть функции $f, g, g^{'}$ непрерывны на $[a, w)$, $\quad F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a, w)$, функция $g(x)$, монотонно убывая, стремится к 0 при $x \to w$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство:

Очевидно, что $\lim\limits_{b\to w} g(b)F(b) = 0$. Поскольку $g^{'}(x) \leq 0$, то

$$\lim_{b\to w}\int_a^b \left|g^{'}(x)\right| dx = -\lim_{b\to w}\int_a^b g^{'}(x)dx = -\lim_{b\to w}[g(b) - g(a)] = g(a),$$

то есть, интеграл $\displaystyle\int_a^w |g^{'}(x)|dx$ сходится. Так как функция F ограничена, то согласно признаку мажорации интеграл $\displaystyle\int_a^w |g^{'}(x)F(x)|dx$ сходится, и, следовательно, интеграл $\displaystyle\int_a^w g^{'}(x)F(x)dx$ сходится. Осталось воспользоваться предыдущим утверждением.

2. Признак Абеля:

Пусть функции $f, g, g^{'}$ непрерывны на $[a, w)$, интеграл $\displaystyle\int_a^w f(x)dx$ сходится, функция g монотонна и ограничена на $[a, w)$. Тогда интеграл $\displaystyle\int_a^w f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство: (Нужно найти и записать)

3. Несобственные интегралы с несколькими особенностями:

Если оба предела интегрирования являются особенностями того или другого из изученных типов, то полагают по определению

$$\int_{w_1}^{w_2} f(x)dx := \int_{w_1}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{w_2} f(x)dx,$$

где c — произвольная точка промежутка (w_1, w_2).
При этом предполагается, что каждый из интегралов в правой части равенства сходится.
В том случае, когда подынтегральная функция не ограничена в окрестности одной из внутренних точек w отрезка интегрирования $[a, b]$, полагают

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \int_{a}^{w} f(x)dx + \int_{w}^{b} f(x)dx,$$

требуя, чтобы оба стоящих справа интеграла сходились.
Наконец, если на промежутке интегрирования имеется несколько (конечное число) тех или иных особенностей, лежащих внутри промежутка или совпадающих с его концами, то неособыми точками промежуток разбивают на конечное число таких промежутков, в каждом из которых имеется только одна особенность, а интеграл вычисляют как сумму интегралов по отрезкам разбиения.

4 Числовой ряд, сумма ряда, сходящийся числовой ряд. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда.

1-3. Пусть (a_n) числовая последовательность. Определим новую последовательнотъ (S_n), где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in N.$$

Числовым рядом $\sum a_n$ называют последовательность (S_n). Если в $\overline{R}$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $S \in \overline{R}$ называют суммой ряда и обозначают

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если число S конечное, то ряд называют сходящимся.
4. Говорят, что ряд $\sum a_n$ удовлетворяет условию Коши, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

5. Критерий Коши сходимости числового ряда:
Ряд $\sum a_n$ сходится $\iff$ когда он удовлетворяет условию Коши.
Доказательсво:
Используя критерий Коши сходимости последовательности, имеем:
ряд $\sum a_n$ сходится $\iff$ (S_n) сходится $\iff$ (S_n) фундаментальна, т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

Осталось заметить, что

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

6. Необходимое условие сходимости ряда:
Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$
Доказательство:
Пусть ряд $\sum a_n$ сходится и его сумма равна числу $S \in R$. тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

5 Теорема об арифметических действиях над сходящимися рядами. Абсолютная сходимость числовых рядов, связь со сходимостью.

1. Теорема об арифметических действиях над сходящимися рядами:
Пусть ряды $\sum a_n, \quad \sum b_n$ сходятся и
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B, \quad \lambda \in R$. Тогда ряды $\sum (a_n + b_n)$ и $\sum \lambda a_n$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k = A+B.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k = \lim_{n\to\infty}(\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k) = \lambda\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k = \lambda A.$$

2. Ряд $\sum a_n$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

3. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда:

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство:

В силу свойств модуля

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|,$$

и остаётся воспользоваться критерием Коши сходимости числового ряда.

6 Основной признак Вейштрасса. Интегральный признак сходимости.

1. Основной признак Вейштрасса:

Ряд с неотрицательными членами сходится $\iff$ когда последовательность его частных сумм ограничена.

Доказательство: (Нужно найти и записать)

2. Интегральный признак сходимости:

Пусть функция f неотрицательная и невозрастающая на промежутке $[1,+\infty)$. Тогда интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство:

Обозначим $S_n = \sum_{k+1}^{n} f(k)$ и $F(b) = \int_1^b f(x)dx$. Согласно условию при $k = 1, 2, ...$ имеем

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

т.е.

$$S_{n+1} - f(1) \le F(n+1) \le S_n$$

Так как функция F и последовательность (S_n) неубывают, то из последднего двойного неравенства вытекает, что ограниченность функции F равносильна ограниченности последовательности (S_n).

Следовательно интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\iff$ когда сходится ряд $\sum f(n)$.

7 Признак мажорации. Признак сравнения.

1. Признак мажорации:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n \ge 0, \quad b_n \ge 0, \quad a_n = O(b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Доказательство: Итак,

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N \quad 0 \le a_n \le C b_n.$$

Поэтому

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le C \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Переходя далее к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k \le C \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty.$$

Следствие 1: Пусть $\forall n \in N \quad a_n \ge 0, b_n > 0$, последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Доказательство:

Из условия вытекает, что последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ограничена, т.е.

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N \quad 0 \le \frac{a_n}{b_n} \le C,$$

и, следовательно, $a_n = O(b_n)$. Осталось воспользоваться признаком мажорации.

2. Признак сравнения в предельной форме:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n > 0, \quad b_n > 0$, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ne 0.$$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково.

Доказательство:

В силу следствия 1 предыдущей теоремы из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$.
Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k},$$

то в силу того же следствия из сходимости ряда $\sum a_n$ вытекает сходимость ряда $\sum b_n$.

8 Признак Коши

Признак Коши:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n \geq 0$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \alpha.$$

Тогда

1) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится;
2) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится;
3) если $\alpha = 1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Доказательство:

1) Пусть $\alpha < 1$ и $\alpha < q < 1$. Согласно определению верхнего предела $\exists n_0$, начиная с которого

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{n\geq n_0} \sqrt[n]{a_n} < q,$$

т.е. $a_n < q^n$

Поскольку ряд $\sum q^n, \quad 0 < q < 1$, сходится, то заключение верно в силу признака мажорации.
2) Если $q > 1$, то для бесконечного числа значений $n \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1$.
Слодовательно, $a_n \neq o(1)$, и ряд расходится.
3) Для рядов $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$ указание в теореме число $\alpha = 1$, в то время как один из них расходится, а другой сходится.