

1 Несобственные интегралы Римана двух типов. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

1. Пусть функция f определена на промежутке $[a, +\infty)$ и $\forall b \in [a, +\infty) \quad f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом первого рода и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Аналогично определяется интеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

2. Пусть функция f определена на промежутке $[a, B)$, неограничена в окрестности точки B и $\forall b \in [a, B) \quad f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Предел

$$\lim_{b \rightarrow B-0} \int_a^b f(x) dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом второго рода и обозначают символом

$$\int_a^B f(x) dx$$

3. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла:

Несобственный интеграл $\int_a^w f(x) dx$ сходится \iff

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B \in [a, w) \quad \forall b_1, b_2 \in (B, w) \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \epsilon$$

Доказательство:

В силу определения несобственного интеграла его сходимость равносильна существованию предела функции $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow w$, $b \in [a, w)$, а

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x) dx = \int_a^{b_2} f(x) dx - \int_a^{b_1} f(x) dx = F(b_2) - F(b_1).$$

Осталось записать условие критерия Коши существования предела функции F при $b \rightarrow w$.

2 Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов.

1. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^w f(x)dx$ абсолютно сходится, если сходится интеграл $\int_a^w |f(x)|dx$.

2. Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, w)$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x)dx$ сходится \iff когда функция

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx, \quad b \in [a, w),$$

ограничена.

Доказательство:

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, w)$, то функция $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ неубывает на $[a, w)$ и поэтому она имеет предел при $b \rightarrow w$, $b \in [a, w)$, \iff когда она ограничена.

3. Признак мажорации:

Если $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, w)$ и интеграл $\int_a^w g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^w f(x)dx$ тоже сходится.

Доказательство:

Если интеграл $\int_a^w g(x)dx$ сходится, то функция

$$G(b) = \int_a^b g(x)dx, \quad b \in [a, w),$$

ограничена. Согласно свойству монотонности несобственного интеграла

$$0 \leq F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = G(b),$$

и, следовательно, функция F также ограничена. В силу предыдущей теоремы интеграл $\int_a^w f(x)dx$ сходится.

4. Пусть $\forall x \in [a, w) \quad f(x) \geq 0, \quad g(x) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow w} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \quad 0 < A < +\infty$.

Тогда интегралы $\int_a^w f(x)dx$ и $\int_a^w g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство:

Возьмём $\epsilon = A/2 > 0$. $\exists c \in [a, w)$ такая что $\forall x \in [c, w)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < A/2,$$

то есть

$$\frac{A}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Ag(x), \quad x \in [c, w).$$

Остаётся воспользоваться признаком мажорации и свойством:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, w)$$

3 *Признаки условной сходимости несобственных интегралов. Несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Утверждение: Если существует интеграл $\int_a^w g'(x)F(x)dx = A$ и существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow w} g(b)F(b) = B$, то существует несобственный интеграл

$$\int_a^w f(x)g(x)dx = B - g(a)F(a) - A.$$

1. Признак Дирихле:

Пусть функции f, g, g' непрерывны на $[a, w)$, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a, w)$, функция $g(x)$, монотонно убывая, стремится к 0 при $x \rightarrow w$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство:

Очевидно, что $\lim_{b \rightarrow w} g(b)F(b) = 0$. Поскольку $g'(x) \leq 0$, то

$$\lim_{b \rightarrow w} \int_a^b |g'(x)| dx = - \lim_{b \rightarrow w} \int_a^b g'(x) dx = - \lim_{b \rightarrow w} [g(b) - g(a)] = g(a),$$

то есть, интеграл $\int_a^w |g'(x)| dx$ сходится. Так как функция F ограничена,

то согласно признаку мажорации интеграл $\int_a^w |g'(x)F(x)| dx$ сходится, и,

следовательно, интеграл $\int_a^w g'(x)F(x)dx$ сходится. Осталось воспользоваться предыдущим утверждением.

2. Признак Абеля:

Пусть функции f, g, g' непрерывны на $[a, w)$, интеграл $\int_a^w f(x)dx$ сходится, функция g монотонна и ограничена на $[a, w)$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство: (Нужно найти и записать)

3. Несобственные интегралы с несколькими особенностями:

Если оба предела интегрирования являются особенностями того или другого из изученных типов, то полагают по определению

$$\int_{w_1}^{w_2} f(x)dx := \int_{w_1}^c f(x)dx + \int_c^{w_2} f(x)dx,$$

где c — произвольная точка промежутка (w_1, w_2) .

При этом предполагается, что каждый из интегралов в правой части равенства сходится.

В том случае, когда подынтегральная функция не ограничена в окрестности одной из внутренних точек w отрезка интегрирования $[a, b]$, полагают

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^w f(x)dx + \int_w^b f(x)dx,$$

требуя, чтобы оба стоящих справа интеграла сходились.

Наконец, если на промежутке интегрирования имеется несколько (конечное число) тех или иных особенностей, лежащих внутри промежутка или совпадающих с его концами, то неособыми точками промежуток разбивают на конечное число таких промежутков, в каждом из которых имеется только одна особенность, а интеграл вычисляют как сумму интегралов по отрезкам разбиения.

4 Числовой ряд, сумма ряда, сходящийся числовой ряд. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда.

1-3. Пусть (a_n) числовая последовательность. Определим новую последовательность (S_n) , где

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in N.$$

Числовым рядом $\sum a_n$ называют последовательность (S_n) . Если в \overline{R} существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $S \in \overline{R}$ называют суммой ряда и обозначают

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если число S конечное, то ряд называют сходящимся.

4. Говорят, что ряд $\sum a_n$ удовлетворяет условию Коши, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

5. Критерий Коши сходимости числового ряда:

Ряд $\sum a_n$ сходится \iff когда он удовлетворяет условию Коши.

Доказательство:

Используя критерий Коши сходимости последовательности, имеем:
ряд $\sum a_n$ сходится $\iff (S_n)$ сходится $\iff (S_n)$ фундаментальна, т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

Осталось заметить, что

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

6. Необходимое условие сходимости ряда:

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Доказательство:

Пусть ряд $\sum a_n$ сходится и его сумма равна числу $S \in \mathbb{R}$. тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

5 Теорема об арифметических действиях над сходящимися рядами. Абсолютная сходимость числовых рядов, связь со сходимостью.

1. Теорема об арифметических действиях над сходящимися рядами:

Пусть ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$ сходятся и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда ряды $\sum (a_n + b_n)$ и $\sum \lambda a_n$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = A + B.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda \sum_{k=1}^n a_k \right) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lambda A.$$

2. Ряд $\sum a_n$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

3. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда:

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство:

В силу свойств модуля

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|,$$

и остаётся воспользоваться критерием Коши сходимости числового ряда.

6 Основной признак Вейштрасса.

Интегральный признак сходимости.

1. Основной признак Вейштрасса:

Ряд с неотрицательными членами сходится \iff когда последовательность его частных сумм ограничена.

Доказательство: (Нужно найти и записать)

2. Интегральный признак сходимости:

Пусть функция f неотрицательная и невозрастающая на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство:

Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ и $F(b) = \int_1^b f(x)dx$. Согласно условию при $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

т.е.

$$S_{n+1} - f(1) \leq F(n+1) \leq S_n$$

Так как функция F и последовательность (S_n) неубывают, то из последнего двойного неравенства вытекает, что ограниченность функции F равносильна ограниченности последовательности (S_n) .

Следовательно интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится \iff когда сходится ряд $\sum f(n)$.

7 Признак мажорации. Признак сравнения.

1. Признак мажорации:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0, \quad a_n = O(b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Доказательство: Итак,

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N \quad 0 \leq a_n \leq C b_n.$$

Поэтому

$$0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq C \sum_{k=1}^n b_k.$$

Переходя далее к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq C \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty.$$

Следствие 1: Пусть $\forall n \in N \quad a_n \geq 0, b_n > 0$, последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Доказательство:

Из условия вытекает, что последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ограничена, т.е.

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N \quad 0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C,$$

и, следовательно, $a_n = O(b_n)$. Осталось воспользоваться признаком мажорации.

2. Признак сравнения в предельной форме:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n > 0, \quad b_n > 0$, и существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0.$$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково.

Доказательство:

В силу следствия 1 предыдущей теоремы из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$.

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k},$$

то в силу того же следствия из сходимости ряда $\sum a_n$ вытекает сходимость ряда $\sum b_n$.

8 Признак Коши

Признак Коши:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n \geq 0$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha.$$

Тогда

- 1) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится;
- 2) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится;
- 3) если $\alpha = 1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Доказательство:

- 1) Пусть $\alpha < 1$ и $\alpha < q < 1$. Согласно определению верхнего предела $\exists n_0$, начиная с которого

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{n \geq n_0} \sqrt[n]{a_n} < q,$$

т.е. $a_n < q^n$

Поскольку ряд $\sum q^n$, $0 < q < 1$, сходится, то заключение верно в силу признака мажорации.

- 2) Если $q > 1$, то для бесконечного числа значений $n \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

Следовательно, $a_n \neq o(1)$, и ряд расходится.

- 3) Для рядов $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$ указанное в теореме число $\alpha = 1$, в то время как один из них расходится, а другой сходится.

9 Признак Даламбера

1. Следствие признака мажорации:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Доказательство:

Имеем

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \dots \leq \frac{a_1}{b_1},$$

и, следовательно, $a_n = o(b_n)$. Осталось воспользоваться признаком мажорации.

2. Признак Даламбера:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$$

Тогда

- 1) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится.
- 2) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.
- 3) если $\alpha = 1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Доказательство:

- 1) Пусть $\alpha < 1$ и $\alpha < q < 1$. В силу порядковых свойств предела

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

Поскольку ряд $\sum q^n$ при $0 < q < 1$ сходится, то, на основании следствия признака мажорации, делаем вывод о сходимости ряда $\sum a_n$.

- 2) Пусть $\alpha > 1$. Тогда

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

т.е. $a_{n+1} > a_n$ при $n \geq n_0$. В этом случае $a_n \neq o(1)$, следовательно ряд $\sum a_n$ расходится.

- 3) Для рядов $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$ указанное в теореме число $\alpha = 1$, в то время как один из них расходится, а другой сходится.

10 Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда. Понятие условно сходящегося ряда.

1. Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда:

Ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится \iff когда сходятся ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.

Доказательство: (нужно найти и записать)

2. Числовой ряд называют условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

11 Преобразование Абеля. Теорема о равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля.

1. Преобразование Абеля:

Пусть $B_n = \sum_{k=1}^n b_k, n \geq 1$. Тогда справедлива формула

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad (*)$$

Доказательство:

Принимая во внимание очевидные равенства

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_n = B_n - B_{n-1},$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\ &= B_1 (a_1 - a_2) + B_2 (a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + B_n a_n, \end{aligned}$$

что эквивалентно равенству (*).

2. Теорема о равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля:

Пусть $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, и последовательность $(a_n B_n)$ сходится. Тогда ряды $\sum a_n b_n$ и $\sum B_n (a_{n+1} - a_n)$ ведут себя одинаково.

12 *Признак Абеля. Признак Дирихле и Лейбница.

1. Признак Абеля:

- 1) последовательность (a_n) монотонна и ограничена;
- 2) ряд $\sum b_n$ сходится;

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

Пусть $|a_k| \leq M, k \geq 1$. Запишем условие Коши для сходящегося ряда $\sum b_n$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in N \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \epsilon.$$

Обозначим

$$B_p^n = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k.$$

В этих обозначениях имеем

$$|B_p^n| < \epsilon, \quad n \geq n_0, \quad p \in N.$$

Применив к сумме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$$

преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p} B_p^n - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k^n.$$

При $n \geq n_0$ имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq |a_{n+p}| |B_p^n| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| |B_k^n| \leq$$

$$\leq M\epsilon + \epsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k|.$$

В силу монотонности и ограниченности последовательности (a_n)

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |(a_{k+1} - a_k)| = |a_{n+p} - a_{n+1}| \leq 2M$$

и

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < M\epsilon + \epsilon 2M = 3M\epsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

2. Признак Дирихле:

1) последовательность (a_n) монотонная и бесконечно малая;

2) последовательность $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ограничена.

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

Согласно условиям теоремы

$$a_n B_n = o(1)O(1) = o(1).$$

В силу теоремы о равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля, ряды $\sum a_n b_n$ и $\sum B_n(a_{n+1} - a_n)$ ведут себя одинаково. К исследованию сходимости второго из этих рядов применим критерий Коши.

Пусть $|b_k| \leq M, k \geq 1$. Возьмём произвольное $\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |a_n| < \epsilon$ (это возможно поскольку $a_n = o(1)$).

При $n \geq n_0$ будем иметь оценку

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) B_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |(a_{k+1} - a_k)| |B_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |(a_{k+1} - a_k)|.$$

Так как последовательность (a_n) монотонна, то разности $a_{k+1} - a_k$ одного знака и поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |(a_{k+1} - a_k)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) \right| = |a_{n+p+1} - a_{n+1}| \leq$$

$$|a_{n+p+1}| + |a_{n+1}| < 2\epsilon.$$

Соединяя все оценки, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) B_k \right| < 2M\epsilon$$

$\forall n \geq n_0$ и $\forall p \geq 1$, что по критерию Коши эквивалентно сходимости ряда $\sum (a_{n+1} - a_n) B_n$. Теорема доказана.

3. Признак Лейбница:

Пусть последовательность (a_n) монотонная и бесконечно малая. Тогда ряд $\sum (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Доказательство:

Нужно положить $b_n = (-1)^{n-1}$ и воспользоваться признаком Дирихле.

13 Сумма ряда как обобщение суммы конечного числа слагаемых, сочетательный закон.

Сочетательный закон:

Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, последовательность натуральных чисел (m_n) возрастает (строго), $m_1 = 1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \right)$$

сходится и его сумма равна сумме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство:

Последовательность частных сумм сгруппированного ряда является подпоследовательностью последовательности частных сумм ряда исходного, следовательно, она также сходится, и их пределы равны.

14 Коммутативный закон для знакоположительных и абсолютно сходящихся рядов.

1. Коммутативный закон для знакоположительного ряда:

Если $\forall k \in N \quad a_k \geq 0$, то для любой перестановки ряда выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Доказательство:

Пусть

$$m_p = \max(n_1, n_2, \dots, n_p), \quad p \in N.$$

Тогда $\forall p \in N$

$$\sum_{k=1}^p a_{n_k} \leq \sum_{k=1}^{m_p} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

Следовательно, верно равенство.

2. Коммутативный закон для абсолютно сходящегося ряда:

Если ряд абсолютно сходится, то любая его перестановка абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство:

Нужно применить предыдущую теорему к рядам $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.

15 *Теорема Римана.

Теорема Римана:

Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то $\forall A \in \overline{\mathbb{R}}$ найдётся перестановка, сумма которой $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A$.

Доказательство:

В силу условной сходимости ряда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty, \quad a_n \rightarrow 0.$$

Рассмотрим сначала случай, когда A — конечное число. Тогда, начиная с некоторого значения n , будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k^+ > A.$$

Обозначим через n_1 наименьшее значение n , при котором это неравенство выполняется, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ \leq A < \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+.$$

Это означает, что мы сделали набор из неотрицательных членов ряда, не нарушая их порядка, пока их сумма не превысила число A ровно на один, последний в этом наборе, член $a_{n_1}^+$.

Обозначим $y_1 = \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+$.

Далее будем брать отрицательные члены ряда в том порядке, как они стоят в этом ряду, до тех пор, пока вся сумма не станет меньше числа A , т.е.

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} a_k^+ \leq A \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-)$$

Обозначим $y_2 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^+$.

Продолжим набор $-a_k^+$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} a_k^+ \leq A \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+.$$

Обозначим $y_3 = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+$.

Продолжим набор $-a_k^-$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+ + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-a_k^-) < A \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+ + \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} (-a_k^-).$$

Обозначим $y_4 = \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-a_k^-)$.

Продолжая так далее, получим ряд $\sum y_n$, частные суммы S_n которого удовлетворяют неравенствам:

$$|S_1 - A| \leq a_{n_1}^+, \quad |S_2 - A| \leq a_{m_1}^-,$$

$$|S_3 - A| \leq a_{n_2}^+, \quad |S_4 - A| \leq a_{m_2}^-,$$

.....

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{n_k}^+, \quad |S_{2k} - A| \leq a_{m_k}^-,$$

.....

Поскольку $a_n \rightarrow 0$, то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = A$.

Очевидно, что ряд $\sum y_n$ получен из некоторой перестановки ряда $\sum a_n$ добавлением нулевых слагаемых и группировкой членов. Нулевые слагаемые появляются в связи с тем, что одно из чисел a_k^+ и a_k^- обязательно равно нулю. Поскольку сгруппированные члены имеют одинаковые знаки, то частные суммы перестановки заключены между частными суммами ряда сгруппированного. Следовательно, указанная перестановка имеет ту же сумму, то есть A .

16 Произведение числовых рядов, согласованное с произведением частных сумм.

Произведение числовых рядов, согласованное с произведением частных сумм:

Пусть даны числовые ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Числовой ряд $\sum c_n$, где

$$c_n = a_n * \sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n b_n,$$

будем называть произведением исходных рядов, согласованным с перемножением частных сумм.

Обратим внимание на следующий факт:

$$C_n = A_n * B_n,$$

где

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k, \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

17 Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

1. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов:

Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, то при любой нумерации элементов матрицы C ряд $\sum c_n$ абсолютно сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство:

Рассмотрим нумерацию:

$$c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_1 b_2, c_3 = a_2 b_2, c_4 = a_2 b_1,$$

$$c_5 = a_1 b_3, c_6 = a_2 b_3, c_7 = a_3 b_3, c_8 = a_3 b_2, c_9 = a_3 b_1, \dots$$

Тогда видно, что

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \leq \sum_{k=1}^{n^2} |c_k| = \sum_{k=1}^n |a_k| * \sum_{k=1}^n |b_k|.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| * \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty,$$

т.е. ряд $\sum c_n$ абсолютно сходится. Тогда любая его перестановка $\sum c_{\phi(n)}$ абсолютно сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Осталось в ряду $\sum c_n$ произвести группировку

$$c_1 + (c_2 + c_3 + c_4) + (c_5 + \dots + c_9) + \dots,$$

согласованную с перемножением частных сумм и воспользоваться ранее доказанными фактами. Таким образом, при любой нумерации элементов матрицы C получаем ряд, сумма которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

18 Равномерная норма функции и её свойства. Поточечная и равномерная сходимости функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости.

1-2. Равномерная норма и её свойства.

Пусть функция f определена на множестве X . Равномерную норму функции обозначим символом $\|f\|$ и определим равенством

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Простейшие свойства равномерной нормы:

1. $\forall x \in X \quad |f(x)| \leq \|f\|$.
2. $\|f\| < +\infty \iff f$ ограничена.
3. $\|f\| \geq 0$ и $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in X$.
4. $\forall \lambda \in R \quad \|\lambda f\| = |\lambda| * \|f\|$.
5. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
6. $\|f * g\| \leq \|f\| * \|g\|$.

Доказательство: (нужно найти и написать)

2. Равномерная сходимость функции:

Пусть все функции f_n и функция f определены на множестве X .

Будем говорить, что последовательность (f_n) равномерно сходится к функции f и обозначать символом $f_n \Rightarrow f$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Условие определения равномерной сходимости можно расписать подробнее:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

2. Поточечная сходимость функции:

Если последовательность (f_n) равномерно сходится к функции f , то последовательность (f_n) сходится поточечно к функции f .

3. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

Последовательность (f_n) равномерно сходится \iff когда

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall m \geq n_\epsilon \quad \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Доказательство:

Необходимость доказывается тривиально.

Достаточность

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall m \geq n_\epsilon \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon. \quad (8)$$

Это означает, что последовательность $(f_n(x)) \quad \forall x \in X$ фундаментальна, следовательно, она сходится (мы воспользовались критерием Коши сходимости числовой последовательности).

Пусть функция f является поточечным пределом последовательности (f_n) .

Перейдя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в условии (8), получим

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Это означает, что $f_n \Rightarrow f$.

19 Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы функционального ряда.

1. Теорема о непрерывности предела функциональной последовательности:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывны в точке $x_0 \in X$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда функция f непрерывна в точке x_0 .

Доказательство:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq 2\|f - f_n\| + |f_n(x) - f_n(x_0)|, \end{aligned}$$

где n — любое число.

Пусть $\epsilon > 0$ — произвольное число. В силу условия $f_n \Rightarrow f$ $\exists n_1$ $\|f - f_{n_1}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Поскольку функция f_{n_1} непрерывна в точке x_0 , то $\exists \delta > 0$ $\forall x \in X$ $(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3})$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_{n_1}\| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$\forall x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$. Согласно определению Коши непрерывности функции делаем заключение, что функции f непрерывна в точке x_0 .

2. Теорема об интегрируемости предела функции:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда функция f интегрируема и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство:

В силу теоремы о непрерывности предела функциональной последовательности функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, и, следовательно, интегрируема.

Тогда, пользуясь свойствами интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \|f_n - f\|(b - a) = o(1), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Следствие:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда $\forall x_0 \in [a, b]$ последовательность функций

$$F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

равномерно на этом отрезке сходится к функции

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Доказательство:

Обратим внимание на то, что $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f_n(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_n(t) - f(t)| dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \|f_n - f\| (b - a), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|F_n - F\| \leq \|f_n - f\| (b - a) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Теорема о дифференцируемости предела функциональной последовательности:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, последовательность (f'_n) равномерно сходится на отрезке к функции ϕ , а последовательность (f_n) сходится в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда последовательность (f_n) равномерно на этом отрезке сходится к некоторой функции f и $\forall x \in [a, b]$ $f'(x) = \phi(x)$.

Доказательство:

Согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем равенство

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

Обозначим

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0), \quad F_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^x \phi(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

В силу следствия теоремы об интегрируемости предела функциональной последовательности $F_n \Rightarrow \Phi$. Тогда последовательность (f_n) равномерно на этом отрезке сходится к функции

$$f(x) := A + \int_{x_0}^x \phi(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Дифференцируя интеграл по верхнему пределу интегрирования, получим равенство

$$f'(x) = \phi(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

20 Функциональные ряды. Поточечная, равномерная и нормальная сходимости функциональных рядов, их связь. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейштрасса равномерной сходимости.

1. Пусть (f_n) — функциональная последовательность, и все функции f_n определены на множестве X .

Функциональным рядом $\sum f_n$ будем называть последовательность (S_n) , где $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Поточечная сходимость функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ поточечно сходится, если последовательность (S_n) поточечно сходится.

3. Равномерная сходимость функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ равномерно сходится, если последовательность (S_n) равномерно сходится.

4. Нормальная сходимость функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ нормально сходится, если сходится ряд $\sum \|f_n\|$.

5. Теорема о равномерной сходимости нормально сходящегося ряда:

Если ряд $\sum f_n$ нормально сходится, то ряд $\sum f_n$ равномерно сходится.

Доказательство:

В силу свойств равномерной нормы имеем

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|.$$

Осталось применить критерий Коши сходимости числового ряда и критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

6. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ равномерно сходится \iff когда

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| < \epsilon.$$

7. Признак Вейштрасса равномерной сходимости ряда:

Пусть $\forall n \in N \quad \|f_n\| \leq a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Тогда ряд $\sum f_n$ равномерно сходится.

Доказательство:

Согласно признаку мажорации ряд $\sum \|f_n\|$ сходится, т.е. ряд $\sum f_n$ сходится нормально, а, следовательно, сходится равномерно.

21 *Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

1. Признак Абеля:

Пусть $\forall x \in X \quad f_n(x) \downarrow$, ряд $\sum g_n$ равномерно сходится и $\|f_n\| = O(1)$. Тогда ряд $\sum f_n g_n$ равномерно сходится.

Доказательство:

Пусть $M > 0$ такое, что $\forall n \in N \quad \|f_n\| \leq M$, и $\epsilon > 0$. Согласно критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда из условия равномерной сходимости функционального ряда $\sum g_n$ имеем

$$\begin{aligned} \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n > n_\epsilon \quad \forall k \in N \quad \forall x \in X \quad |G_{n,k}(x)| &= \\ &= |G_{n+k}(x) - G_n(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Поэтому $\forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad \forall x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) G_{n,k}(x) + f_{n+p}(x) G_{n,p}(x) \right| <$$

$$\begin{aligned}
&< \epsilon \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + \epsilon |f_{n+p}(x)| = \epsilon(f_{n+1} - f_{n+p}) + \epsilon |f_{n+p}(x)| \leq \\
&\leq \epsilon 2M + \epsilon M = 3M\epsilon.
\end{aligned}$$

Согласно критерию Коши ряд $\sum f_n g_n$ сходится равномерно.

2. Признак Дирихле:

Пусть $\forall x \in X \quad f_n(x) \downarrow$, $\|\sum_{k=1}^n g_k\| = O(1)$, $\|f_n\| = o(1)$. Тогда ряд $\sum f_n g_n$ равномерно сходится.

Докзательство:

Обозначив

$$G_n = \sum_{k=1}^n g_k, \quad G_{n,k} = \sum_{i=1}^k g_{n+i},$$

имеем:

$$\exists M \quad \forall n \in N \quad \|G_n\| \leq M$$

и

$$\forall n \in N \quad \forall k \in N \quad \|G_{n,k}\| = \|G_{n+k} - G_n\| \leq \|G_{n+k}\| + \|G_n\| \leq 2M.$$

Тогда *forall* $x \in X$

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) G_{n,k}(x) + f_{n+p}(x) G_{n,p}(x) \right| \leq \\
&\leq 2M \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + f_{n+p}(x) * 2M = 2M f_{n+1}(x) \leq 2M \|f_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Пусть $\epsilon > 0$. Тогда $\exists n_\epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \|f_n\| < \epsilon$. Продолжим оценку

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| \leq 2M \|f_{n+1}\| < 2M\epsilon.$$

Согласно критерию Коши ряд $\sum f_n g_n$ равномерно сходится

22 Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы функционального ряда.

1. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывны в точке $x_0 \in X$ и ряд $\sum f_n$ равномерно сходится. Тогда сумма ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывна в точке x_0 .

2. Теорема о дифференцируемости суммы ряда:

Пусть $X = [a, b]$, $\forall n \in N$ f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, ряд $\sum f'_n$ равномерно сходится, ряд $\sum f_n$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда ряд $\sum f_n$ сходится равномерно и $\forall x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

3. Теорема об интегрируемости суммы ряда:

Пусть $X = [a, b]$, $\forall n \in N$ f_n непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд $\sum f_n$ равномерно сходится. Тогда сумма ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ интегрируема и

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$