

Содержание

1	Несобственные интегралы Римана двух типов. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.	3
2	Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов.	4
3	*Признаки условной сходимости несобственных интегралов. Несобственные интегралы с несколькими особенностями.	5
4	Числовой ряд, сумма ряда, сходящийся числовой ряд. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда.	7
5	Теорема об арифметических действиях над сходящимися рядами. Абсолютная сходимость числовых рядов, связь со сходимостью.	8
6	Основной признак Вейштрасса. Интегральный признак сходимости.	8
7	Признак мажорации. Признак сравнения.	9
8	Признак Коши	10
9	Признак Даламбера	11
10	Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда. Понятие условно сходящегося ряда.	12
11	Преобразование Абеля. Теорема о равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля.	12
12	*Признак Абеля. Признак Дирихле и Лейбница.	13
13	Сумма ряда как обобщение суммы конечного числа слагаемых, сочетательный закон.	15
14	Коммутативный закон для знакоположительных и абсолютно сходящихся рядов.	16
15	*Теорема Римана.	17
16	Произведение числовых рядов, согласованное с произведением частных сумм.	19
17	Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.	19

18	Равномерная норма функции и её свойства. Поточечная и равномерная сходимости функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости.	20
19	Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость предела функциональной последовательности.	22
20	Функциональные ряды. Поточечная, равномерная и нормальная сходимости функциональных рядов, их связь. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейштрасса равномерной сходимости.	24
21	*Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.	26
22	Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы функционального ряда.	27
23	Степенные ряды. Радиус сходимости и интервал сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля.	28
24	Свойства суммы степенного ряда.	29
25	Ряд Тейлора и понятие аналитической в точке функции. Определение элементарных функций степенными рядами.	30
26	Пространство R^m . Последовательности в R^m и их свойства.	32
27	Вектор-функции векторного переменного. Предел и непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Равномерная непрерывность и теорема Кантора. Теорема о непрерывном образе компакта и её следствия.	32
28	Теорема о непрерывном образе линейно связного множества и её следствия:	34
29	Частные производные функции многих переменных. Дифференцируемость в точке функции многих переменных. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.	34
30	Теорема о существовании частных производных у дифференцируемой функции.	36
31	Геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных. Касательная плоскость и вектор нормали к графику дифференцируемой функции.	36
32	Достаточное условие дифференцируемости.	37

33 Дифференцирование сложной функции.	38
34 Производная по направлению и вектор градиент. Свойства вектора градиента.	39
35 Частные производные высшего порядка. Теорема о равенстве смешанных производных. Непрерывно дифференцируемые и k -непрерывно дифференцируемые функции.	40
36 Дифференциалы первого и высших порядков.	42

1 Несобственные интегралы Римана двух типов. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

1. Пусть функция f определена на промежутке $[a, +\infty)$ и $\forall b \in [a, +\infty) \quad f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом первого рода и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Аналогично определяется интеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

2. Пусть функция f определена на промежутке $[a, B)$, неограничена в окрестности точки B и $\forall b \in [a, B) \quad f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Предел

$$\lim_{b \rightarrow B-0} \int_a^b f(x) dx,$$

если он существует и конечен, называют несобственным интегралом второго рода и обозначают символом

$$\int_a^B f(x) dx$$

3. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла:
Несобственный интеграл $\int_a^w f(x) dx$ сходится \iff

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B \in [a, w) \quad \forall b_1, b_2 \in (B, w) \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \epsilon$$

Доказательство:

В силу определения несобственного интеграла его сходимость равносильна существованию предела функции $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow w$, $b \in [a, w)$, а

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x) dx = \int_a^{b_2} f(x) dx - \int_a^{b_1} f(x) dx = F(b_2) - F(b_1).$$

Осталось записать условие критерия Коши существования предела функции F при $b \rightarrow w$.

2 Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов.

1. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^w f(x) dx$ абсолютно сходится, если сходится интеграл $\int_a^w |f(x)| dx$.

2. Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, w)$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x) dx$ сходится \iff когда функция

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx, \quad b \in [a, w),$$

ограничена.

Доказательство:

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, w)$, то функция $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ неубывает на $[a, w)$ и поэтому она имеет предел при $b \rightarrow w$, $b \in [a, w)$, \iff когда она ограничена.

3. Признак мажорации:

Если $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, w)$ и интеграл $\int_a^w g(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^w f(x) dx$ тоже сходится.

Доказательство:

Если интеграл $\int_a^w g(x) dx$ сходится, то функция

$$G(b) = \int_a^b g(x) dx, \quad b \in [a, w),$$

ограничена. Согласно свойству монотонности несобственного интеграла

$$0 \leq F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = G(b),$$

и, следовательно, функция F также ограничена. В силу предыдущей теоремы интеграл $\int_a^w f(x)dx$ сходится.

4. Пусть $\forall x \in [a, w) \quad f(x) \geq 0, \quad g(x) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow w} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \quad 0 < A < +\infty$.

Тогда интегралы $\int_a^w f(x)dx$ и $\int_a^w g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство:

Возьмём $\epsilon = A/2 > 0$. $\exists c \in [a, w)$ такая что $\forall x \in [c, w)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < A/2,$$

то есть

$$\frac{A}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Ag(x), \quad x \in [c, w).$$

Остаётся воспользоваться признаком мажорации и свойством:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, w)$$

3 *Признаки условной сходимости несобственных интегралов. Несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Утверждение: Если существует интеграл $\int_a^w g'(x)F(x)dx = A$ и существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow w} g(b)F(b) = B$, то существует несобственный интеграл

$$\int_a^w f(x)g(x)dx = B - g(a)F(a) - A.$$

1. Признак Дирихле:

Пусть функции f, g, g' непрерывны на $[a, w)$, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a, w)$, функция $g(x)$, монотонно убывая, стремится к 0 при $x \rightarrow w$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство:

Очевидно, что $\lim_{b \rightarrow w} g(b)F(b) = 0$. Поскольку $g'(x) \leq 0$, то

$$\lim_{b \rightarrow w} \int_a^b |g'(x)| dx = - \lim_{b \rightarrow w} \int_a^b g'(x) dx = - \lim_{b \rightarrow w} [g(b) - g(a)] = g(a),$$

то есть, интеграл $\int_a^w |g'(x)| dx$ сходится. Так как функция F ограничена, то согласно признаку мажорации интеграл $\int_a^w |g'(x)F(x)| dx$ сходится, и, следовательно, интеграл $\int_a^w g'(x)F(x) dx$ сходится. Осталось воспользоваться предыдущим утверждением.

2. Признак Абеля:

Пусть функции f, g, g' непрерывны на $[a, w)$, интеграл $\int_a^w f(x) dx$ сходится, функция g монотонна и ограничена на $[a, w)$. Тогда интеграл $\int_a^w f(x)g(x) dx$ сходится.

Доказательство: (Нужно найти и записать)

3. Несобственные интегралы с несколькими особенностями:

Если оба предела интегрирования являются особенностями того или другого из изученных типов, то полагают по определению

$$\int_{w_1}^{w_2} f(x) dx := \int_{w_1}^c f(x) dx + \int_c^{w_2} f(x) dx,$$

где c — произвольная точка промежутка (w_1, w_2) .

При этом предполагается, что каждый из интегралов в правой части равенства сходится.

В том случае, когда подынтегральная функция не ограничена в окрестности одной из внутренних точек w отрезка интегрирования $[a, b]$, полагают

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^w f(x) dx + \int_w^b f(x) dx,$$

требуя, чтобы оба стоящих справа интеграла сходились.

Наконец, если на промежутке интегрирования имеется несколько (конечное число) тех или иных особенностей, лежащих внутри промежутка или совпадающих с его концами, то неособыми точками промежуток разбивают на конечное число таких промежутков, в каждом из которых имеется только одна особенность, а интеграл вычисляют как сумму интегралов по отрезкам разбиения.

4 Числовой ряд, сумма ряда, сходящийся числовой ряд. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда.

1-3. Пусть (a_n) **числовая последовательность. Определим новую последовательность** (S_n) , **где**

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in N.$$

Числовым рядом $\sum a_n$ называют последовательность (S_n) . Если в \overline{R} существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $S \in \overline{R}$ называют суммой ряда и обозначают

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если число S конечное, то ряд называют сходящимся.

4. Говорят, что ряд $\sum a_n$ **удовлетворяет условию Коши, если**

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

5. Критерий Коши сходимости числового ряда:

Ряд $\sum a_n$ сходится \iff когда он удовлетворяет условию Коши.

Доказательство:

Используя критерий Коши сходимости последовательности, имеем:
ряд $\sum a_n$ сходится $\iff (S_n)$ сходится $\iff (S_n)$ фундаментальна, т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

Осталось заметить, что

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

6. Необходимое условие сходимости ряда:

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Доказательство:

Пусть ряд $\sum a_n$ сходится и его сумма равна числу $S \in R$. тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

5 Теорема об арифметических действиях над сходящимися рядами. Абсолютная сходимость числовых рядов, связь со сходимостью.

1. Теорема об арифметических действиях над сходящимися рядами:

Пусть ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$ сходятся и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда ряды $\sum (a_n + b_n)$ и $\sum \lambda a_n$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = A + B.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda \sum_{k=1}^n a_k \right) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lambda A.$$

2. Ряд $\sum a_n$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

3. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда:

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство:

В силу свойств модуля

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|,$$

и остаётся воспользоваться критерием Коши сходимости числового ряда.

6 Основной признак Вейштрасса. Интегральный признак сходимости.

1. Основной признак Вейштрасса:

Ряд с неотрицательными членами сходится \iff когда последовательность его частных сумм ограничена.

Доказательство: (Нужно найти и записать)

2. Интегральный признак сходимости:

Пусть функция f неотрицательная и невозрастающая на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство:

Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ и $F(b) = \int_1^b f(x)dx$. Согласно условию при $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

т.е.

$$S_{n+1} - f(1) \leq F(n+1) \leq S_n$$

Так как функция F и последовательность (S_n) неубывают, то из последнего двойного неравенства вытекает, что ограниченность функции F равносильна ограниченности последовательности (S_n) .

Следовательно интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится \iff когда сходится ряд $\sum f(n)$.

7 Признак мажорации. Признак сравнения.

1. Признак мажорации:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0, \quad a_n = O(b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Доказательство: Итак,

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N \quad 0 \leq a_n \leq Cb_n.$$

Поэтому

$$0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq C \sum_{k=1}^n b_k.$$

Переходя далее к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq C \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty.$$

Следствие 1: Пусть $\forall n \in N \quad a_n \geq 0, b_n > 0$, последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Доказательство:

Из условия вытекает, что последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ограничена, т.е.

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N \quad 0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C,$$

и, следовательно, $a_n = O(b_n)$. Осталось воспользоваться признаком мажорации.

2. Признак сравнения в предельной форме:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n > 0, \quad b_n > 0$, и существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0.$$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково.

Доказательство:

В силу следствия 1 предыдущей теоремы из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$.

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k},$$

то в силу того же следствия из сходимости ряда $\sum a_n$ вытекает сходимость ряда $\sum b_n$.

8 Признак Коши

Признак Коши:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n \geq 0$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha.$$

Тогда

- 1) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится;
- 2) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится;
- 3) если $\alpha = 1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Доказательство:

1) Пусть $\alpha < 1$ и $\alpha < q < 1$. Согласно определению верхнего предела $\exists n_0$, начиная с которого

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{n \geq n_0} \sqrt[n]{a_n} < q,$$

т.е. $a_n < q^n$

Поскольку ряд $\sum q^n$, $0 < q < 1$, сходится, то заключение верно в силу признака мажорации.

2) Если $q > 1$, то для бесконечного числа значений n $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Следовательно, $a_n \neq o(1)$, и ряд расходится.

3) Для рядов $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$ указанное в теореме число $\alpha = 1$, в то время как один из них расходится, а другой сходится.

9 Признак Даламбера

1. Следствие признака мажорации:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Доказательство:

Имеем

$$0 < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \dots \leq \frac{a_1}{b_1},$$

и, следовательно, $a_n = o(b_n)$. Осталось воспользоваться признаком мажорации.

2. Признак Даламбера:

Пусть $\forall n \in N \quad a_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$$

Тогда

- 1) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится.
- 2) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.
- 3) если $\alpha = 1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Доказательство:

- 1) Пусть $\alpha < 1$ и $\alpha < q < 1$. В силу порядковых свойств предела

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

Поскольку ряд $\sum q^n$ при $0 < q < 1$ сходится, то, на основании следствия признака мажорации, делаем вывод о сходимости ряда $\sum a_n$.

- 2) Пусть $\alpha > 1$. Тогда

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

т.е. $a_{n+1} > a_n$ при $n \geq n_0$. В это случае $a_n \neq o(1)$, следовательно ряд $\sum a_n$ расходится.

- 3) Для рядов $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$ указанное в теореме число $\alpha = 1$, в то время как один из них расходится, а другой сходится.

10 Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда. Понятие условно сходящегося ряда.

1. Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда:

Ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится \iff когда сходятся ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.

Доказательство:

Необходимость:

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = b$ — сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = c$ — сходится.

Тогда, согласно определению абсолютно сходящегося ряда, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = b + c.$$

Поскольку, согласно сходимости рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$, числа b и c конечны, то ряд $\sum |a_n|$ сходится, следовательно, ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно.

Достаточность:

Пусть $\sum a_n$ абсолютно сходится, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = d$, где d — конечное число.

От противного, пусть $\sum a_n^+$ расходится, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{a_n^+} = +\infty$, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{a_n^+} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{a_n^-} = +\infty,$$

следовательно, противоречие.

2. Числовой ряд называют условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

11 Преобразование Абеля. Теорема о равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля.

1. Преобразование Абеля:

Пусть $B_n = \sum_{k=1}^n b_k, n \geq 1$. Тогда справедлива формула

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad (*)$$

Доказательство:

Принимая во внимание очевидные равенства

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_n = B_n - B_{n-1},$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\ &= B_1 (a_1 - a_2) + B_2 (a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + B_n a_n, \end{aligned}$$

что эквивалентно равенству (*).

2. Теорема о равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля:

Пусть $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, и последовательность $(a_n B_n)$ сходится. Тогда ряды $\sum a_n b_n$ и $\sum B_n (a_{n+1} - a_n)$ ведут себя одинаково.

12 *Признак Абеля. Признак Дирихле и Лейбница.

1. Признак Абеля:

1) последовательность (a_n) монотонна и ограничена;

2) ряд $\sum b_n$ сходится;

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

Пусть $|a_k| \leq M, k \geq 1$. Запишем условие Коши для сходящегося ряда $\sum b_n$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \epsilon.$$

Обозначим

$$B_p^n = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k.$$

В этих обозначениях имеем

$$|B_p^n| < \epsilon, \quad n \geq n_0, \quad p \in N.$$

Применив к сумме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$$

преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p} B_p^n - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k^n.$$

При $n \geq n_0$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &\leq |a_{n+p}| |B_p^n| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| |B_k^n| \leq \\ &\leq M\epsilon + \epsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k|. \end{aligned}$$

В силу монотонности и ограниченности последовательности (a_n)

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| = |a_{n+p} - a_{n+1}| \leq 2M$$

и

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < M\epsilon + \epsilon 2M = 3M\epsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

2. Признак Дирихле:

- 1) последовательность (a_n) монотонная и бесконечно малая;
- 2) последовательность $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ограничена.

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство:

Согласно условиям теоремы

$$a_n B_n = o(1)O(1) = o(1).$$

В силу теоремы о равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля, ряды $\sum a_n b_n$ и $\sum B_n(a_{n+1} - a_n)$ ведут себя одинаково. К исследованию сходимости второго из этих рядов применим критерий Коши.

Пусть $|b_k| \leq M, k \geq 1$. Возьмём произвольное $\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |a_n| < \epsilon$ (это возможно поскольку $a_n = o(1)$).

При $n \geq n_0$ будем иметь оценку

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) B_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |(a_{k+1} - a_k)| |B_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |(a_{k+1} - a_k)|.$$

Так как последовательность (a_n) монотонна, то разности $a_{k+1} - a_k$ одного знака и поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |(a_{k+1} - a_k)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) \right| = |a_{n+p+1} - a_{n+1}| \leq$$

$$|a_{n+p+1}| + |a_{n+1}| < 2\epsilon.$$

Соединяя все оценки, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) B_k \right| < 2M\epsilon$$

$\forall n \geq n_0$ и $\forall p \geq 1$, что по критерию Коши эквивалентно сходимости ряда $\sum (a_{n+1} - a_n) B_n$. Теорема доказана.

3. Признак Лейбница:

Пусть последовательность (a_n) монотонная и бесконечно малая. Тогда ряд $\sum (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Доказательство:

Нужно положить $b_n = (-1)^{n-1}$ и воспользоваться признаком Дирихле.

13 Сумма ряда как обобщение суммы конечного числа слагаемых, сочетательный закон.

Сочетательный закон:

Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, последовательность натуральных чисел (m_n) возрастает (строго), $m_1 = 1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \right)$$

сходится и его сумма равна сумме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство:

Последовательность частных сумм сгруппированного ряда является подпоследовательностью последовательности частных сумм ряда исходного, следовательно, она также сходится, и их пределы равны.

14 Коммутативный закон для знакоположительных и абсолютно сходящихся рядов.

1. Коммутативный закон для знакоположительного ряда:

Если $\forall k \in N \quad a_k \geq 0$, то для любой перестановки ряда выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Доказательство:

Пусть

$$m_p = \max(n_1, n_2, \dots, n_p), \quad p \in N.$$

Тогда $\forall p \in N$

$$\sum_{k=1}^p a_{n_k} \leq \sum_{k=1}^{m_p} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

Следовательно, верно равенство.

2. Коммутативный закон для абсолютно сходящегося ряда:

Если ряд абсолютно сходится, то любая его перестановка абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство:

Нужно применить предыдущую теорему к рядам $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.

15 *Теорема Римана.

Теорема Римана:

Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то $\forall A \in \overline{R}$ найдётся перестановка, сумма которой $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A$.

Доказательство:

В силу условной сходимости ряда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty, \quad a_n \rightarrow 0.$$

Рассмотрим сначала случай, когда A — конечное число. Тогда, начиная с некоторого значения n , будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k^+ > A.$$

Обозначим через n_1 наименьшее значение n , при котором это неравенство выполняется, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ \leq A < \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+.$$

Это означает, что мы сделали набор из неотрицательных членов ряда, не нарушая их порядка, пока их сумма не превысила число A ровно на один, последний в этом наборе, член $a_{n_1}^+$.

Обозначим $y_1 = \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+$.

Далее будем брать отрицательные члены ряда в том порядке, как они стоят в этом ряду, до тех пор, пока вся сумма не станет меньше числа A , т.е.

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} a_k^+ \leq A \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-)$$

Обозначим $y_2 = \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-)$.

Продолжим набор $-a_k^+$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} a_k^+ \leq A \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+.$$

Обозначим $y_3 = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+$.

Продолжим набор $-a_k^-$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+ + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-a_k^-) < A \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} (-a_k^-) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+ + \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} (-a_k^-).$$

Обозначим $y_4 = \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-a_k^-)$.

Продолжая так далее, получим ряд $\sum y_n$, частные суммы S_n которого удовлетворяют неравенствам:

$$|S_1 - A| \leq a_{n_1}^+, \quad |S_2 - A| \leq a_{m_1}^-,$$

$$|S_3 - A| \leq a_{n_2}^+, \quad |S_4 - A| \leq a_{m_2}^-,$$

.....

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{n_k}^+, \quad |S_{2k} - A| \leq a_{m_k}^-,$$

.....

Поскольку $a_n \rightarrow 0$, то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = A$.

Очевидно, что ряд $\sum y_n$ получен из некоторой перестановки ряда $\sum a_n$ добавлением нулевых слагаемых и группировкой членов. Нулевые слагаемые появляются в связи с тем, что одно из чисел a_k^+ и a_k^- обязательно равно нулю. Поскольку сгруппированные члены имеют одинаковые знаки, то частные суммы перестановки заключены между частными суммами ряда сгруппированного. Следовательно, указанная перестановка имеет ту же сумму, то есть A .

16 Произведение числовых рядов, согласованное с произведением частных сумм.

Произведение числовых рядов, согласованное с произведением частных сумм:

Пусть даны числовые ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Числовой ряд $\sum c_n$, где

$$c_n = a_n * \sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n b_n,$$

будем называть произведением исходных рядов, согласованным с перемножением частных сумм.

Обратим внимание на следующий факт:

$$C_n = A_n * B_n,$$

где

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k, \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

17 Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

1. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов:

Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, то при любой нумерации элементов матрицы C ряд $\sum c_n$ абсолютно сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство:

Рассмотрим нумерацию:

$$c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_1 b_2, c_3 = a_2 b_2, c_4 = a_2 b_1,$$

$$c_5 = a_1 b_3, c_6 = a_2 b_3, c_7 = a_3 b_3, c_8 = a_3 b_2, c_9 = a_3 b_1, \dots$$

Тогда видно, что

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \leq \sum_{k=1}^{n^2} |c_k| = \sum_{k=1}^n |a_k| * \sum_{k=1}^n |b_k|.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| * \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty,$$

т.е. ряд $\sum c_n$ абсолютно сходится. Тогда любая его перестановка $\sum c_{\phi(n)}$ абсолютно сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Осталось в ряду $\sum c_n$ произвести группировку

$$c_1 + (c_2 + c_3 + c_4) + (c_5 + \dots + c_9) + \dots,$$

согласованную с перемножением частных сумм и воспользоваться ранее доказанными фактами. Таким образом, при любой нумерации элементов матрицы C получаем ряд, сумма которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

18 Равномерная норма функции и её свойства. Поточечная и равномерная сходимости функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости.

1-2. Равномерная норма и её свойства.

Пусть функция f определена на множестве X . Равномерную норму функции обозначим символом $\|f\|$ и определим равенством

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Простейшие свойства равномерной нормы:

1. $\forall x \in X \quad |f(x)| \leq \|f\|$.
2. $\|f\| < +\infty \iff f$ ограничена.
3. $\|f\| \geq 0$ и $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in X$.
4. $\forall \lambda \in R \quad \|\lambda f\| = |\lambda| * \|f\|$.
5. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
6. $\|f * g\| \leq \|f\| * \|g\|$.

Доказательство:

1) Пусть $\exists x \in X : |f(x)| > \|f\| \Rightarrow |f(x)| > \sup_{x \in X} |f(x)|$, что противоречит определению супремума.

2) Пусть $\|f\| < +\infty$. Тогда

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \|f\| \leq M \Rightarrow |f(x)| < \|f\| \leq M.$$

3) Пусть $\sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in X \quad |f(x)| \leq 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

4) $\forall x \in X \quad |f(x)| \leq \|f\|$

1. $\lambda \neq 0$

$$\|f\| |\lambda| \geq \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \|\lambda f\|$$

2. $\lambda = 0$

$$0 \geq 0$$

5) $\forall x \in X \quad |f(x)| \leq \|f\| \quad |g(x)| \leq \|g\|$

$|f(x) + g(x)| =$ или $\|f(x)\| - \|g(x)\|$, или $\|f(x)\| + \|g(x)\|$

В силу свойств модуля

$$\|f(x)\| - \|g(x)\| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\|f(x)\| + \|g(x)\| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

6) Доказывается аналогично доказательству пункта 5.

2. Равномерная сходимость функции:

Пусть все функции f_n и функция f определены на множестве X .

Будем говорить, что последовательность (f_n) равномерно сходится к функции f и обозначать символом $f_n \rightrightarrows f$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Условие определения равномерной сходимости можно расписать подробнее:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

2. Поточечная сходимость функции:

Если последовательность (f_n) равномерно сходится к функции f , то последовательность (f_n) сходится поточечно к функции f .

3. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

Последовательность (f_n) равномерно сходится \iff когда

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall m \geq n_\epsilon \quad \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Доказательство:

Необходимость доказывается тривиально.

Достаточность

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall m \geq n_\epsilon \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon. \quad (8)$$

Это означает, что последовательность $(f_n(x)) \quad \forall x \in X$ фундаментальна, следовательно, она сходится (мы воспользовались критерием Коши сходимости числовой последовательности).

Пусть функция f является поточечным пределом последовательности (f_n) .

Перейдя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в условии (8), получим

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Это означает, что $f_n \Rightarrow f$.

19 Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость предела функциональной последовательности.

1. Теорема о непрерывности предела функциональной последовательности:

Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ непрерывны в точке $x_0 \in X$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда функция f непрерывна в точке x_0 .

Доказательство:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq 2\|f - f_n\| + |f_n(x) - f_n(x_0)|, \end{aligned}$$

где n — любое число.

Пусть $\epsilon > 0$ — произвольное число. В силу условия $f_n \Rightarrow f \quad \exists n_1 \quad \|f - f_{n_1}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Поскольку функция f_{n_1} непрерывна в точке x_0 , то $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3})$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_{n_1}\| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$\forall x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$. Согласно определению Коши непрерывности функции делаем заключение, что функция f непрерывна в точке x_0 .

2. Теорема об интегрируемости предела функции:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда функция f интегрируема и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство:

В силу теоремы о непрерывности предела функциональной последовательности функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, и, следовательно, интегрируема.

Тогда, пользуясь свойствами интеграла, имеем

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \|f_n - f\|(b - a) = o(1),$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Следствие:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда $\forall x_0 \in [a, b]$ последовательность функций

$$F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

равномерно на этом отрезке сходится к функции

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Доказательство:

Обратим внимание на то, что $\forall x \in [a, b]$

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^x f_n(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_n(t) - f(t)|dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \|f_n - f\|(b-a),$$

следовательно,

$$\|F_n - F\| \leq \|f_n - f\|(b-a) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Теорема о дифференцируемости предела функциональной последовательности:

Пусть $\forall n \in N$ f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, последовательность (f'_n) равномерно сходится на отрезке к функции ϕ , а последовательность (f_n) сходится в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда последовательность (f_n) равномерно на этом отрезке сходится к некоторой функции f и $\forall x \in [a, b]$ $f'(x) = \phi(x)$.

Доказательство:

Согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем равенство

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

Обозначим

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0), \quad F_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^x \phi(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

В силу следствия теоремы об интегрируемости предела функциональной последовательности $F_n \Rightarrow \Phi$. Тогда последовательность (f_n) равномерно на этом отрезке сходится к функции

$$f(x) := A + \int_{x_0}^x \phi(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Дифференцируя интеграл по верхнему пределу интегрирования, получим равенство

$$f'(x) = \phi(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

20 Функциональные ряды. Поточечная, равномерная и нормальная сходимости функциональных рядов, их связь. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейштрасса равномерной сходимости.

1. Пусть (f_n) — функциональная последовательность, и все функции f_n определены на множестве X .

Функциональным рядом $\sum f_n$ будем называть последовательность (S_n) , где $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$, $n \in N$.

2. Поточечная сходимость функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ поточечно сходится, если последовательность (S_n) поточечно сходится.

3. Равномерная сходимость функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ равномерно сходится, если последовательность (S_n) равномерно сходится.

4. Нормальная сходимость функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ нормально сходится, если сходится ряд $\sum \|f_n\|$.

5. Теорема о равномерной сходимости нормально сходящегося ряда:

Если ряд $\sum f_n$ нормально сходится, то ряд $\sum f_n$ равномерно сходится.

Доказательство:

В силу свойств равномерной нормы имеем

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|.$$

Осталось применить критерий Коши сходимости числового ряда и критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

6. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда:

Ряд $\sum f_n$ равномерно сходится \iff когда

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| < \epsilon.$$

7. Признак Вейштрасса равномерной сходимости ряда:

Пусть $\forall n \in N \quad \|f_n\| \leq a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Тогда ряд $\sum f_n$ равномерно сходится.

Доказательство:

Согласно признаку мажорации ряд $\sum \|f_n\|$ сходится, т.е. ряд $\sum f_n$ сходится нормально, а, следовательно, сходится равномерно.

21 *Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

1. Признак Абеля:

Пусть $\forall x \in X \quad f_n(x) \downarrow$, ряд $\sum g_n$ равномерно сходится и $\|f_n\| = O(1)$. Тогда ряд $\sum f_n g_n$ равномерно сходится.

Доказательство:

Пусть $M > 0$ такое, что $\forall n \in N \quad \|f_n\| \leq M$, и $\epsilon > 0$. Согласно критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда из условия равномерной сходимости функционального ряда $\sum g_n$ имеем

$$\begin{aligned} \exists n_\epsilon \in N \quad \forall n > n_\epsilon \quad \forall k \in N \quad \forall x \in X \quad |G_{n,k}(x)| &= \\ &= |G_{n+k}(x) - G_n(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Поэтому $\forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad \forall x \in X$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) G_{n,k}(x) + f_{n+p}(x) G_{n,p}(x) \right| < \\ < \epsilon \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + \epsilon |f_{n+p}(x)| &= \epsilon(f_{n+1} - f_{n+p}) + \epsilon |f_{n+p}(x)| \leq \\ &\leq \epsilon 2M + \epsilon M = 3M\epsilon. \end{aligned}$$

Согласно критерию Коши ряд $\sum f_n g_n$ сходится равномерно.

2. Признак Дирихле:

Пусть $\forall x \in X \quad f_n(x) \downarrow$, $\|\sum_{k=1}^n g_k\| = O(1)$, $\|f_n\| = o(1)$. Тогда ряд $\sum f_n g_n$ равномерно сходится.

Доказательство:

Обозначив

$$G_n = \sum_{k=1}^n g_k, \quad G_{n,k} = \sum_{i=1}^k g_{n+i},$$

имеем:

$$\exists M \quad \forall n \in N \quad \|G_n\| \leq M$$

и

$$\forall n \in N \quad \forall k \in N \quad \|G_{n,k}\| = \|G_{n+k} - G_n\| \leq \|G_{n+k}\| + \|G_n\| \leq 2M.$$

Тогда *forall* $x \in X$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) G_{n,k}(x) + f_{n+p}(x) G_{n,p}(x) \right| \leq \\ &\leq 2M \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + f_{n+p}(x) * 2M = 2M f_{n+1}(x) \leq 2M \|f_{n+1}\|. \end{aligned}$$

Пусть $\epsilon > 0$. Тогда $\exists n_\epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \|f_n\| < \epsilon$. Продолжим оценку

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad \forall p \in N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| \leq 2M \|f_{n+1}\| < 2M\epsilon.$$

Согласно критерию Коши ряд $\sum f_n g_n$ равномерно сходится

22 Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы функционального ряда.

1. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда:

Пусть $\forall n \in N \quad f_n$ непрерывны в точке $x_0 \in X$ и ряд $\sum f_n$ равномерно сходится. Тогда сумма ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывна в точке x_0 .

2. Теорема о дифференцируемости суммы ряда:

Пусть $X = [a, b]$, $\forall n \in N \quad f_n$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, ряд $\sum f'_n$ равномерно сходится, ряд $\sum f_n$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда ряд $\sum f_n$ сходится равномерно и $\forall x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

3. Теорема об интегрируемости суммы ряда:

Пусть $X = [a, b]$, $\forall n \in N \quad f_n$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд $\sum f_n$ равномерно сходится. Тогда сумма ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ интегрируема и

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

23 Степенные ряды. Радиус сходимости и интервал сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля.

1. Степенной ряд:

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

где $a_0, a_1, \dots \in R$, $x_0 \in R$, называют степенным рядом.

2-3:

Пусть $L = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Определим число

$R = \frac{1}{L}$, если $0 < L < +\infty$;

$R = +\infty$, если $L = 0$;

$R = 0$, если $L = +\infty$.

Число R называют радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

4. Теорема Коши-Адамара:

1. Если последовательность $(\sqrt[n]{|a_n|})$ неограничена, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится только в точке $x = 0$.
2. Если последовательность $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ограничена и $L > 0$, то ряд абсолютно сходится во всех точках x , удовлетворяющих условию $|x| < \frac{1}{L}$, и расходится во всех точках x , удовлетворяющих условию $|x| > \frac{1}{L}$.
3. Если последовательность $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ограничена и $L = 0$, то ряд абсолютно сходится во всех точках $x \in R$.

Доказательство:

1. Очевидно, что $\forall x \neq 0$ последовательность $(|x| \sqrt[n]{|a_n|}) = (\sqrt[n]{|a_n x^n|})$ неограничена и, следовательно, $a_n x^n \neq o(1)$. Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, а значит ряд расходится.

2. Пусть $|x| < \frac{1}{L}$. Тогда

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| * \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{L} * L = 1}$$

и согласно признаку Коши ряд абсолютно сходится.

Пусть $|x| > \frac{1}{L}$. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n x^n} < \frac{1}{L} * L = 1$$

и последовательность $a_n X^n \neq o(1)$. Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, ряд расходится.

3. $\forall x \in R$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n x^n} = |x| * L = 0$$

и согласно признаку Коши ряд абсолютно сходится.

5. Теорема Абеля:

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_1 \neq 0$, то ряд сходится в интервале $(-|x_1|, |x_1|)$.

Доказательство:

Точка x_1 лежит внутри интервала сходимости, либо является граничной точкой интервала сходимости, следовательно, $(-|x_1|, |x_1|) \subset (-R, +R)$.

24 Свойства суммы степенного ряда.

1. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда $\forall r \in (0, R)$ ряд равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$.

Доказательство:

Степенной ряд абсолютно сходится в точке $x = r$. Поскольку $\forall x \in [-r, r]$

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n,$$

то в силу признака Вейштрасса ряд равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$.

2. Теорема о непрерывности суммы степенного ряда:

Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда. Тогда его сумма $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна на интервале $(-R, R)$.

Доказательство:

В силу предыдущей теоремы и теоремы о непрерывности суммы функционального ряда функция S непрерывна на отрезке $[-r, r] \quad \forall r \in (0, R)$. Следовательно, S непрерывна на всём интервале $(-R, R)$.

3. Теорема об интегрируемости суммы степенного ряда:

Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда и $|x| < R$. Тогда степенной ряд можно почленно интегрировать на отрезке с концами 0 и x

$$\int_0^x S(t)dt = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}x^n}{n} + \dots,$$

причём радиус сходимости полученного ряда равен R .

Доказательство:

Возможность почленного интегрирования ряда следует из равномерной сходимости ряда на отрезке с концами 0 и x и теоремы об интегрируемости суммы функционального ряда, а утверждение о радиусе сходимости из равенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = R.$$

4. Теорема о дифференцируемости суммы степенного ряда:

Сумма степенного ряда дифференцируема на интервале сходимости $(-R, R)$, $R > 0$, и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1},$$

причём радиус сходимости полученного ряда равен R .

25 Ряд Тейлора и понятие аналитической в точке функции. Определение элементарных функций степенными рядами.

1. Аналитическая в точке функция:

Функцию f называют аналитической в точке x_0 , если в некоторой окрестности $(x_0 - r, x_0 + r)$ этой точки функцию можно разложить в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

2. Ряд Тейлора:

Пусть функция f бесконечно дифференцируема в точке $x = x_0$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называют рядом Тейлора.

3. Определение элементарных функций степенными рядами:

Рассмотрим степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Радиус сходимости каждого ряда $R = +\infty$, т.е. эти ряды абсолютно сходятся $\forall x \in R$.

Функцию

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R,$$

называют показательной функцией.

$\forall x \in R$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Теорема о разложении функции в степенной ряд:

$\forall x \in (-1, 1)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Доказательство:

В равенстве

$$\ln(1+x) = \int_1^{x+1} \frac{dt}{t},$$

где $x > -1$, сделаем замену $t = 1 + \tau$. Получим, что

$$\ln(1+x) = \int_1^x \frac{d\tau}{1+\tau} = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tau^n d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Почленное интегрирование законно ввиду сходимости ряда при $\tau \in (-1, 1)$. Таким образом, полученная формула справедлива $\forall x \in (-1, 1)$.

26 Пространство R^m . Последовательности в R^m и их свойства.

1. Пространство R^m :

Пусть число $m \in N$. Множество упорядоченных наборов (x_1, x_2, \dots, x_m) , где $x_i \in R$, $i = 1, \dots, m$, называют пространством R^m .

2. Понятие последовательности в пространстве R^m :

Отображение множества N в множество R^m называют последовательностью и обозначают (\bar{x}_n) или $(\bar{x}_n)_{n=1}^\infty$, где $\bar{x}_n = (x_{1n}, \dots, x_{mn})$.

последовательности (\bar{x}_n) , соответствует m числовых последовательностей $(x_{in})_{n=1}^\infty$, $i = 1, \dots, m$, которые будем называть координатными последовательностями.

3. Свойства последовательностей в пространстве R^m :

Последовательность (\bar{x}_n) является ограниченной или бесконечно малой, или фундаментальной \iff когда все её координатные последовательности $(x_{in})_{n=1}^\infty$, $i = 1, \dots, m$, являются ограниченными, бесконечно малыми, фундаментальными соответственно.

$$\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}_0 \iff \forall i = 1, \dots, m \quad x_{in} \rightarrow x_{i0}.$$

$$\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}_0, \quad \bar{y}_n \rightarrow \bar{y}_0, \quad \alpha_n \rightarrow \alpha_0 \Rightarrow$$

$$\bar{x}_n + \bar{y}_n \rightarrow \bar{x}_0 + \bar{y}_0, \quad \alpha_n \bar{x}_n \rightarrow \alpha_0 \bar{x}_0, \quad \bar{x}_n * \bar{y}_n \rightarrow \bar{x}_0 * \bar{y}_0, \quad |\bar{x}_n| \rightarrow |\bar{x}_0|.$$

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причём к той же самой точке.

Последовательность сходится \iff когда она фундаментальна.

У любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

27 Вектор-функции векторного переменного. Предел и непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Равномерная непрерывность и теорема Кантора. Теорема о непрерывном образе компакта и её следствия.

1. Понятие вектор функции векторного переменного:

Отображение вида $\bar{f} : X \rightarrow R^k$, где $X \subset R^m$, $m > 1$, $k > 1$, называют векторной функцией многих переменных или вектор-функцией векторного аргумента.

2. Предел функции в точке:

Определение предела функции в точке по Коши:

Пусть точка \bar{x}_0 — предельная точка области определения функции $\bar{f} : X \rightarrow R^k$, $\bar{A} \in R^k$.

Вектор \bar{A} называют пределом функции \bar{f} в точке \bar{x}_0 и обозначают символом $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{A}$, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} \in D(\bar{f}) \quad (0 < |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{A}| < \epsilon).$$

Определение предела функции в точке по Гейне:

Пусть точка \bar{x}_0 — предельная точка области определения функции $\bar{f} : X \rightarrow R^k$, $\bar{A} \in R^k$.

Вектор \bar{A} называют пределом функции \bar{f} в точке \bar{x}_0 , если для любой последовательности (\bar{x}_n) точек, принадлежащих $D(\bar{f})$ и удовлетворяющей условиям: $\bar{x}_n \neq \bar{x}_0$, $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}_0$, имеет место

$$\bar{f}(\bar{x}_n) \rightarrow \bar{A}.$$

3. Непрерывность функции в точке:

Определение непрерывности функции в точке по Коши:

Функция \bar{f} называется непрерывной в точке \bar{x}_0 если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall \bar{x} \in D(\bar{f}) \quad (|\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}_0)| < \epsilon).$$

Определение непрерывности функции в точке по Гейне:

Функция \bar{f} называется непрерывной в точке \bar{x}_0 , если для любой последовательности точек (\bar{x}_n) , принадлежащих $D(\bar{f})$ и удовлетворяющей условию $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}_0$, имеет место

$$\bar{f}(\bar{x}_n) \rightarrow \bar{f}(\bar{x}_0).$$

4. Непрерывность функции на множестве:

Функция непрерывна во всех точках множества, непрерывна на этом множестве.

5. Теорема Кантора:

Функция непрерывная на компакте равномерно непрерывна на нём.

6. Теорема о непрерывном образе компакта и её следствия:

Образ функции, непрерывной на компакте, тоже является компактом.

Первая теорема Вейштрасса:

Функция непрерывная на компакте ограничена на нём.

Вторая теорема Вейштрасса:

Функция непрерывная на компакте принимает на нём наибольшее и наименьшее значения.

28 Теорема о непрерывном образе линейно связного множества и её следствия:

1. Теорема о непрерывном образе линейно связного множества и её следствия:

Пусть функция f непрерывна на множестве X и множество X линейно связно. Тогда множество $Y = f(X)$ так же линейно связно.

Следствие:

Пусть функция $f : X \rightarrow R$ определена и непрерывна на линейно связном множестве $X \in R^m$ и принимает на нём значения A и B . Тогда эта функция принимает любое значение промежуточное между A и B .

29 Частные производные функции многих переменных. Дифференцируемость в точке функции многих переменных. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.

1. Понятие частной производной функции многих переменных:

Частной производной функции f по первой переменной в точке $\bar{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ называем предел

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0},$$

если он существует, и обозначают символом

$$\frac{df}{dx_1}(\bar{x}_0), \text{ или } f'_{x_1}(\bar{x}_0), \text{ или } D_1 f(\bar{x}_0)$$

Аналогично определяются частные производные по остальным переменным.

2. Дифференцируемость функции в точке:

Пусть точка \bar{x}_0 является внутренней точкой области определения функции f .

Функция f называется дифференцируемой в точке \bar{x}_0 , если приращение функции в этой точке может быть представлено в виде

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \phi_1(\bar{x})(x_1 - x_1^0) + \dots + \phi_m(\bar{x})(x_m - x_m^0), \quad (11)$$

где функции $\phi_k (k = 1, \dots, m)$ непрерывны в точке \bar{x} .

Обозначим $A_k = \phi_k(\bar{x}_0)$. Тогда $\phi_k(\bar{x}) = A_k + \alpha_k(\bar{x})$, где функции α_k бесконечно малы в точке \bar{x}_0 . Очевидно, что равенство (11) эквивалентно равенству

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \dots + A_m(x_m - x_m^0) + \alpha_1(\bar{x})(x_1 - x_1^0) + \dots + \alpha_m(\bar{x})(x_m - x_m^0). \quad (12)$$

Покажем, что условие (11) эквивалентно условию

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \dots + A_m(x_m - x_m^0) + o(|\bar{x} - \bar{x}_0|). \quad (13)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |\alpha_1(\bar{x})(x_1 - x_1^0) + \dots + \alpha_m(\bar{x})(x_m - x_m^0)| &\leq \left[|\alpha_1(\bar{x})| \frac{|x_1 - x_1^0|}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} + \dots + |\alpha_m(\bar{x})| \frac{|x_m - x_m^0|}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \right] |\bar{x} - \bar{x}_0| \leq \\ &\leq (|\alpha_1(\bar{x})| + \dots + |\alpha_m(\bar{x})|) |\bar{x} - \bar{x}_0| = o(|\bar{x} - \bar{x}_0|). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} o(|\bar{x} - \bar{x}_0|) &= \frac{o(|\bar{x} - \bar{x}_0|)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \frac{|\bar{x} - \bar{x}_0|^2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} = \\ &= \frac{o(|\bar{x} - \bar{x}_0|)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \frac{|x_1 - x_1^0|^2 + \dots + |x_m - x_m^0|^2}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} = \\ &= \left[\frac{o(|\bar{x} - \bar{x}_0|)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \frac{x_1 - x_1^0}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \right] (x_1 - x_1^0) + \dots + \left[\frac{o(|\bar{x} - \bar{x}_0|)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \frac{x_m - x_m^0}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \right] (x_m - x_m^0) \end{aligned}$$

Обозначая

$$\alpha_i(\bar{x}) = \frac{o(|\bar{x} - \bar{x}_0|)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \frac{x_i - x_i^0}{|\bar{x} - \bar{x}_0|}$$

и учитывая, что $\alpha_i = o(1)$ при $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0$, придём к представлению (12).

Равенства (11), (12), (13) называют условием дифференцируемости функции в точке \bar{x}_0 .

3. Теорема о дифференцируемости функции в точке:

Если функция f дифференцируема в точке \bar{x}_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Доказательство вытекает из равенства (11).

30 Теорема о существовании частных производных у дифференцируемой функции.

Теорема о существовании частных производных у дифференцируемой функции:

Если функция f дифференцируема в точке \bar{x}_0 , то в этой точке у неё существуют все частные производные и $\forall k = 1, \dots, m$

$$\frac{df}{dx_k}(\bar{x}_0) = A_k,$$

где числа A_k из равенства

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \dots + A_m(x_m - x_m^0) + \alpha_1(\bar{x})(x_1 - x_1^0) + \dots + \alpha_m(\bar{x})(x_m - x_m^0). \quad (12)$$

Доказательство:

Согласно равенству (12) имеем

$$f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \alpha_1(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)(x_1 - x_1^0).$$

Поделив обе части равенства на $x_1 - x_1^0$ и перейдя к пределу при $x_1 \rightarrow x_1^0$, получим

$$\frac{df}{dx_1}(\bar{x}_0) = A_1$$

Аналогично доказываются равенства для частных производных по остальным переменным.

31 Геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных. Касательная плоскость и вектор нормали к графику дифференцируемой функции.

Геометрический смысл условия дифференцируемости функции и понятия касательной плоскости и вектора нормали к графику дифференцируемой функции:

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то это означает, что

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, где

$$A = \frac{df}{dx}(x_0, y_0) \text{ и } B = \frac{df}{dy}(x_0, y_0).$$

Рассмотрим в R^3 плоскость

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Сравнивая эти равенства, видим, что график функции f в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) хорошо аппроксимируется плоскостью. Точнее, точка $(x, y, f(x, y))$ графика функции отклоняется от точки $(x, y, z(x, y))$ плоскости на бесконечно малую более высокого порядка, чем величина $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Эта плоскость с уравнением

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

называется касательной плоскостью к графику функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Записывая уравнение касательной плоскости в каноническом виде

$$\frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Закljučаем, что вектор

$$\left(\frac{df}{dx}(x_0, y_0), \frac{df}{dy}(x_0, y_0), -1 \right)$$

является нормальным вектором касательной к плоскости. Его называют нормальным или ортогональным к графику функции в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

32 Достаточное условие дифференцируемости.

Достаточное условие дифференцируемости функции в точке:

Если у функции f в некоторой окрестности точки \bar{x}_0 существуют все частные производные и они непрерывны в самой точке \bar{x}_0 , то функция f дифференцируема в точке \bar{x}_0 .

Доказательство:

Для сокращения записи проведём доказательство для функции двух переменных $f(x, y)$ и точки (x_0, y_0) .

Представим приращение функции следующим образом

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) =$$

$$= (f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2)) + (f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0))$$

Выражение $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2)$ можно рассматривать как приращение функции $f(x, y_0 + h_2)$ одной переменной на x на отрезке $[x_0, x_0 + h_1]$. Применяя к этому приращению формулу Лагранжа, найдём такое $\theta_1 \in (0, 1)$, что

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2) = f'_x(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + h_2)h_1.$$

Так как производная f'_x непрерывна в точке (x_0, y_0) , то

$$f'_x(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + h_2) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha_1(h_1, h_2),$$

где α_1 — бесконечно малая при $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ функция. аналогично рассуждая, получим

$$f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 h_2)h_2 = (f'_y(x_0, y_0) + \alpha_2(h_1, h_2))h_2,$$

где $\theta_2 \in (0, 1)$ и α_2 — бесконечно малая при $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ функция. Таким образом

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) =$$

$$f'_x(x_0, y_0)h_1 + f'_y(x_0, y_0)h_2 + \alpha_1(h_1, h_2)h_1 + \alpha_2(h_1, h_2)h_2.$$

Последнее равенство представляет собой условие дифференцируемости

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \dots + A_m(x_m - x_m^0) + \alpha_1(\bar{x})(x_1 - x_1^0) + \dots + \alpha_m(\bar{x})(x_m - x_m^0). \quad (12)$$

функции f в точке (x_0, y_0) .

33 Дифференцирование сложной функции.

1. Теорема о дифференцировании сложной функции:

Пусть функции f дифференцируема в точке \bar{x}_0 и $\forall i = 1, \dots, m$ g_i дифференцируемы в точке \bar{t}_0 и $\bar{x}_0 = g(\bar{t}_0)$. Тогда функция $f \circ g$ дифференцируема в точке \bar{t}_0 и $\forall j = 1, \dots, k$ и справедливо равенство

$$\frac{d(f \circ g)}{dt_j}(\bar{t}_0) = \frac{df}{dx_1}(\bar{x}_0) \frac{dg_1}{dt_j}(\bar{t}_0) + \dots + \frac{df}{dx_m}(\bar{x}_0) \frac{dg_m}{dt_j}(\bar{t}_0).$$

Доказательство:

Так как функция f дифференцируема в точке \bar{x}_0 , то

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\bar{x})(x_i - x_i^0),$$

где функции ϕ_i ($i = 1, \dots, m$) непрерывны в точке \bar{x}_0 и $\phi_i(\bar{x}_0) = \frac{df}{dx_i}(\bar{x}_0)$.

Поскольку $\bar{x} = \bar{g}(\bar{t})$ и $\bar{x}_0 = \bar{g}(\bar{t}_0)$, то

$$\begin{aligned} (f \circ \bar{g})(\bar{t}) - (f \circ \bar{g})(\bar{t}_0) &= f(\bar{g}(\bar{t})) - f(\bar{g}(\bar{t}_0)) = f(g_1(\bar{t}) + \dots + g_m(\bar{t})) - f(g_1(\bar{t}_0) + \dots + g_m(\bar{t}_0)) = \\ &= \sum_{i=1}^m f(\bar{g}(\bar{t}))(g_i(\bar{t}) - g_i(\bar{t}_0)) \end{aligned}$$

Так как $\forall i = 1, \dots, m$ g_i дифференцируемы в точке \bar{t}_0 , то $\exists \psi_{ij}(\bar{t})$ непрерывные в точке \bar{t}_0 такие, что

$$g_i(\bar{t}) - g_i(\bar{t}_0) = \sum_{j=1}^k \psi_{ij}(\bar{t})(t_j - t_j^0),$$

и $\psi_{ij}(\bar{t}_0) = \frac{dg_i}{dt_j}(\bar{t}_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} (f \circ \bar{g})(\bar{t}) - (f \circ \bar{g})(\bar{t}_0) &= \sum_{i=1}^m \phi_i(\bar{g}(\bar{t})) \left(\sum_{j=1}^k \psi_{ij}(\bar{t})(t_j - t_j^0) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m \phi_i(\bar{g}(\bar{t})) \psi_{ij}(\bar{t}) \right) (t_j - t_j^0). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что функции $\phi(\bar{g}(\bar{t}))\psi_{ij}(\bar{t})$ непрерывны в точке \bar{t}_0 , и последнее равенство означает условие дифференцируемости функции $f \circ \bar{g}$ в точке \bar{t}_0 . Кроме того $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{d(f \circ \bar{g})}{dt_j}(\bar{t}_0) = \sum_{i=1}^m \frac{df}{dx_i}(\bar{x}_0) \frac{dg_i}{dt_j}(\bar{t}_0).$$

34 Производная по направлению и вектор градиент. Свойства вектора градиента.

1. Понятие производной по направлению:

Пусть вектор $\bar{a} \in R^m$ — вектор единичной длины, и прямая l проходит через точку \bar{x}_0 параллельно вектору \bar{a} . Параметрическое представление прямой l имеет вид: $\bar{x} = \bar{x}_0 + t\bar{a}$, $t \in R$. Рассмотрим функцию

$F(t) = f(\bar{x}_0 + t\bar{a})$. Она представлена $\forall t$ таких, что точка $\bar{x}_0 + t\bar{a}$ принадлежит области определения функции f .

Если существует производная $F'(0)$, то её называют производной функции f в точке \bar{x}_0 по направлению вектора \bar{a} и обозначают символом $\frac{df}{d\bar{a}}(\bar{x}_0)$.

Можно расписать подробнее

$$\frac{df}{d\bar{a}}(\bar{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{a}) - f(\bar{x}_0)}{t}.$$

2. Теорема о существовании производной по направлению у дифференцируемой функции:

Если функция f дифференцируема в точке \bar{x}_0 , то для любого единичного вектора $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ существует производная функции f в точке \bar{x}_0 по направлению вектора \bar{a} и справедливо равенство

$$\frac{df}{d\bar{a}}(\bar{x}_0) = \frac{df}{dx_1}(\bar{x}_0)a_1 + \dots + \frac{df}{dx_m}(\bar{x}_0)a_m. \quad (15)$$

3. Понятие вектора градиента и его свойства:

Пусть функция f дифференцируема в точке \bar{x}_0 . Градиентом функции f в точке \bar{x}_0 называют вектор

$$\text{grad}f(\bar{x}_0) = \left(\frac{df}{dx_1}(\bar{x}_0), \dots, \frac{df}{dx_m}(\bar{x}_0) \right).$$

Замечание:

Рассмотрим случай $m = 2, 3$. Тогда, как известно,

$$\frac{df}{d\bar{a}}(\bar{x}_0) = \text{grad}f(\bar{x}_0) * \bar{a} = |\text{grad}f(\bar{x}_0)| * |\bar{a}| * \cos \phi = |\text{grad}f(\bar{x}_0)| * \cos \phi,$$

где ϕ — угол между векторами $\text{grad}f(\bar{x}_0)$ и \bar{a} .

На основании этого можно сделать выводы, что:

- 1) вектор градиент $\text{grad}f(\bar{x}_0)$ указывает направление, по которому функция f имеет максимальную производную в точке \bar{x}_0 ;
- 2) значение производной функции f по направлению, определённому градиентом этой функции в точке \bar{x}_0 , равно длине вектора градиента $|\text{grad}f(\bar{x}_0)|$.

35 Частные производные высшего порядка.

Теорема о равенстве смешанных

производных. Непрерывно

дифференцируемые и k-непрерывно

дифференцируемые функции.

1. Понятие производной высшего порядка:

Если определена частная производная

$$\frac{d^k f}{dx_{i_1} \dots dx_{i_k}}$$

порядка k в некоторой окрестности точки \bar{x}_0 , то по индукции определим частную производную порядка $k+1$ в точке \bar{x}_0 соотношением

$$\frac{d^{k+1} f}{dx_j dx_{i_1} \dots dx_{i_k}} = \frac{d}{dx_j} \left(\frac{d^k f}{dx_{i_1} \dots dx_{i_k}} \right) (\bar{x}_0)$$

2. Теорема о равенстве смешанных поизводных:

Пусть функция f имеет в области G смешанные производные $\frac{d^2 f}{dx_j dx_i}$ и $\frac{d^2 f}{dx_i dx_j}$. Тогда в любой точке \bar{x}_0 , в которой обе частные производные непрерывны, их значения совпадают.

Доказательство:

Для сокращения записи проведём доказательство для функции двух переменных. Пусть $\frac{d^2 f}{dx dy}$ и $\frac{d^2 f}{dy dx}$ непрерывны в точке (x_0, y_0) . Для достаточно малого h определим функцию

$$F(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$$

Введём теперь функцию

$$\phi(t) = f(x_0 + th, y_0 + h) - f(x_0 + th, y_0).$$

Тогда верно равенство

$$F(h) = \phi(1) - \phi(0).$$

Согласно теореме Лагранжа $\exists \theta_1 \in (0, 1)$ такая, что верно равенство

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta_1).$$

Пользуясь формулой дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned} \phi'(\theta_1) &= f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h)h - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)h = \\ &= (f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0))h \end{aligned}$$

И опять пользуясь теоремой Лагранжа, представим

$$f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0) = f_{xy}^{(2)}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h)h,$$

где $\theta_2 \in (0, 1)$. Таким образом мы имеем равенство

$$F(h) = f_{xy}^{(2)}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h) h^2.$$

В то же время, если ввести функцию

$$\psi(t) = f(x_0 + h, y_0 + th) - f(x_0, y_0 + th),$$

то

$$F(h) = \psi(t) - \psi(0).$$

Поступая аналогично, придём к равенству

$$F(h) = f_{yx}^{(2)}(x_0 + \theta_1' h, y_0 + \theta_2' h) h^2,$$

где $\theta_1' \in (0, 1)$, $\theta_2' \in (0, 1)$. Следовательно, верно равенство

$$f_{xy}^{(2)}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h) = f_{yx}^{(2)}(x_0 + \theta_1' h, y_0 + \theta_2' h).$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ в силу непрерывности обоих частных производных в точке (x_0, y_0) , получим равенство

$$f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) = f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0).$$

3. Непрерывно дифференцируемые функции:

Пусть функция f определена в некоторой области G . Назовём функцию непрерывно дифференцируемой ($n \in \mathbb{N}$), если все частные производные до порядка n включительно определены и непрерывны в области G .

36 Дифференциалы первого и высших порядков.

1. Дифференциал функции первого порядка:

Пусть функция f дифференцируема в точке \bar{x}_0 . Определим новую функцию $df(\bar{x}_0) : R^m \rightarrow R$, полагая для любого $\bar{h} \in R^m$

$$df(\bar{x}_0)(\bar{h}) = \sum_{k=1}^m \frac{df}{dx_k}(\bar{x}_0) h_k.$$

Указанная функция называется дифференциалом функции f в точке \bar{x}_0 .

2. Дифференциал функции второго порядка:

Пусть функция f 2-дифференцируема в точке \bar{x}_0 . Для каждого $\bar{h} \in R^m$ определим в окрестности $O(\bar{x}_0)$ точки \bar{x}_0 функцию $d_{\bar{h}}^2 : R^m \rightarrow R$, полагая для каждого $\bar{x} \in O(\bar{x}_0)$

$$d_{\bar{h}}f(\bar{x}) = df(\bar{x})(\bar{h}).$$

Дифференциалом 2-го порядка функции f в точке \bar{x}_0 называется функция $d^2f(\bar{x}_0) : R^m \rightarrow R$ такая, что $\forall \bar{h} \in R^m$

$$d^2f(\bar{x}_0)(\bar{h}) = d(d_{\bar{h}}f)(\bar{x}_0)(\bar{h})$$

Дифференциал произвольного порядка определяется по индукции.